В. А. Гусев

А. И. Медяник

ГЕОМЕТРИЯ

7

Дидактические материалы

В. А. Гусев А. И. Медяник

ГЕОМЕТРИЯ

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

7 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных
организаций

17-е издание

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ»
2020

УДК 373.5.016:514
ББК 74.262.21
Г96

6+

Рецензент
учитель-методист школы № 67 Москвы Л. И. Звавич

Гусев В. А.

Г96 Геометрия. Дидактические материалы. 7 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций / В. А. Гусев, А. И. Медяник. — 17-е изд. — М. : Просвещение, 2020. — 80 с. : ил. — ISBN 978-5-09-076815-3.

Данное пособие содержит дополнительный задачный материал по курсу геометрии 7 класса. Оно ориентировано на учебник А. В. Погорелова «Геометрия. 7—9 классы».

Пособие содержит 25 самостоятельных работ, составленных как к основным пунктам учебного пособия по геометрии, так и ко всем его параграфам, одиннадцать дифференцированных заданий по основным разделам курса и систему дополнительных задач к каждому параграфу пособия.

УДК 373.5.016:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-076815-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основной целью пособия является помощь учителю в организации самостоятельной работы и контроля знаний учащихся на уроках и вне их. Задания составлены с учётом выделения главных и наиболее важных разделов курса.

Самостоятельные работы предназначены для обучения семиклассников самостоятельному решению задач по только что изученному материалу, способствуют его повторению и закреплению. Задачи, содержащиеся в работах, могут быть также использованы как индивидуальные задания при опросе и в качестве домашних заданий. Многие из предлагаемых заданий помогают отрабатывать практические умения и навыки учащихся, однако учителю каждый раз следует внимательно следить за обоснованностью и чёткостью выводов. Каждая самостоятельная работа рассчитана на 10—15 мин.

Представление о содержании самостоятельной работы даёт следующее распределение их по темам:

С-1. Точка и прямая. Отрезок.
С-2. Измерение отрезков. Полуплоскости.
С-3. Угол.
С-4. Треугольник.
С-5. Параллельные прямые.
С-6, С-7. Основные свойства простейших геометрических фигур (§ 1).
С-8. Смежные углы. Вертикальные углы.
С-9, С-10. Смежные и вертикальные углы (§ 2).
С-11. Первый и второй признаки равенства треугольников.
С-12. Равнобедренный треугольник.
С-13. Применение признаков равенства треугольников к решению задач.
С-14, С-15. Признаки равенства треугольников (§ 3).
С-16. Углы при параллельных прямых и секущей. (Ко вторым заданиям можно дать рисунки.)
С-17. Сумма углов треугольника. Внешний угол треугольника.
С-18, С-19. Сумма углов треугольника (§ 4).
С-20. Окружность. Касательная к окружности.
С-21. Построение циркулем и линейкой треугольника и угла, равного данному. Стороны треугольников обозначены a, b и c, а углы, лежащие против этих сторон, — α, β, γ соответственно.
С-22. Деление циркулем и линейкой отрезка пополам. Построение циркулем и линейкой перпендикулярной прямой.
С-23. Геометрическое место точек. Метод геометрических мест.
С-24, С-25. Геометрические построения (§ 5).

С целью учёта индивидуальных особенностей школьников самостоятельные работы даются в четырёх вариантах, причём первый из них самый простой, а четвёртый — наиболее сложный. Второй и третий варианты имеют промежуточную сложность и являются примерно равноценными, что позволяет использовать их одновременно. В случае необходимости можно использовать одновременно и работы разной сложности, включая и наиболее простую. Но это вовсе не предполагает постоянное деление класса на слабых, средних и сильных учащихся. Такое деление является весьма условным и рассматривается как временное. При проведении самостоятельной работы варианты должны быть распределены так, чтобы могли развиваться способности всех без исключения учащихся. Критерий такого распределения сводится к тому, чтобы для каждого ученика работа была посильна, т. е. реально выполнима, но требовала напряжения и усилий для её выполнения.

Предполагается, что учитель во время выполнения учащимися самостоятельной работы будет консультировать учеников, если это окажется необходимым. Самостоятельные работы носят обучающий характер. Поэтому учитель в зависимости от поставленной им цели и от подготовки учащихся может предложить для решения в классе лишь часть из заданий самостоятельной работы.

Если в условии задачи не говорится, при помощи каких инструментов следует выполнять построение, то ученик может воспользоваться любым из инструментов: линейкой, циркулем, угольником, транспортиром.

Время, необходимое для выполнения заданий самостоятельных работ, существенно зависит от требований к оформлению решения задач и набора инструментов, с помощью которых выполняются построения. Поэтому учащимся нужно чётко указывать эти требования. При выполнении заданий на построение от учащихся не всегда следует требовать описания построений. При решении задач на вычисление и доказательство учащиеся должны кратко записать решение.

Оценка работы проводится учителем с учётом самостоятельности её выполнения. Если самостоятельная работа носила обучающий характер, то неудовлетворительные оценки не выставляются.

Особое место в системе самостоятельных работ занимают самостоятельные работы к параграфам, которые призваны помочь контролю усвоения всего материала параграфа. Эти работы, составленные по две к каждому параграфу, могут рассматриваться как подготовительные к выполнению контрольных работ. Время, необходимое для их выполнения, — 15—20 минут. Учитель по своему усмотрению может использовать задания, предложенные в этих работах, при составлении контрольных работ.

Дифференцированные задания являются естественным продолжением и развитием самостоятельных работ. Но если разделение на варианты при составлении и проведении самостоятельных работ сталкивается с трудностями учёта индивидуальных особенностей учащихся, то дифференцированные задания учитывают их автоматически. В то же время такие задания предполагают более высокий уровень развития учащихся, так как направлены на развитие у них логического мышления. Следует добавить, что дифференцированные задания помогут успешнее овладеть строго дедуктивным школьным курсом геометрии в учебнике А. В. Погорелова.

Цель дифференцированных заданий состоит в том, чтобы не только способствовать развитию логического мышления обучающихся, но и контролировать уровень такого развития, что очень важно для всего учебного процесса. Структура заданий позволяет выявить учащихся, склонных к дедуктивному мышлению, способствует дальнейшему их развитию и помогает подтянуть до более высокого уровня остальных. Такие задания приучают к последовательности в мышлении, к его чёткости и точности.

К одной и той же теме в некоторых случаях даётся от двух до четырёх вариантов.

В пособии три типа дифференцированных заданий.

В заданиях *первого типа* требуется доказать четыре утверждения. Первое утверждение — самое простое, а четвёртое — наиболее сложное (оно предназначено для хорошо успевающих учащихся). Доказательство каждого последующего утверждения опирается на предыдущие. Иногда это специально подчёркивается в тексте задания. Задания этого типа можно отнести и к обучающим, так как они вырабатывают умения аргументировать, доказывать. В этих заданиях схема доказательства последующих утверждений определяется структурой самого задания.

Дифференцированные задания этого типа являются одной из форм к о л л е к т и в н о й деятельности учащихся. Отличительной особенностью выполнения этих заданий является одновременное участие в его выполнении всех учащихся. Организация такой общей работы сопряжена с большими трудностями (установление личностных связей, взаимопонимание, осуществление контроля и оценки), однако она позволяет консолидировать внимание и силы всего коллектива, показывая всем одновременно их достижения и ошибки.

При выполнении дифференцированных заданий первого типа соотношения индивидуальной и коллективной деятельности учащихся могут быть различными. Здесь велика роль учителя в обеспечении высокого уровня самостоятельности при выполнении заданий каждым учащимся отдельно и в то же время в постоянном вовлечении всего класса в поиск, в понимание полученных результатов и чёткости постановки новых задач.

Использовать дифференцированные задания этого типа учитель может как на уроке, так и во внеклассной работе. Эти задания можно предложить взамен соответствующих самостоятельных работ, потребовав от учащихся выполнения определённого количества заданий (например, двух или трёх). Оставшиеся задания могут быть предложены для самостоятельной работы дома. Важно, чтобы вне зависимости от возможностей отдельных учащихся весь коллектив класса представлял себе всё задание целиком, понимая полученные результаты. Для этого учитель должен найти время и оценить возможности каждого учащегося отдельно.

К дифференцированным заданиям первого типа относятся задания Д-1, Д-2, Д-3, Д-4, Д-5, Д-6, Д-7 (вариант 1), Д-8, Д-9, Д-10 (варианты 1 и 2), Д-11.

В дифференцированных заданиях *второго типа* предлагается найти по два существенно различных доказательства одного и того же утверждения (отдельные учащиеся могут найти больше таких доказательств). Задания второго типа являются творческими, так как в них учащимся надо найти идею доказательства.

При выполнении заданий этого типа может быть использована групповая работа. Она позволяет наиболее полно реализовать основные условия коллективности: осознание будущей цели, целесообразное распределение обязанностей, взаимосвязь и контроль.

Большое значение для успеха групповой деятельности имеет понимание учащимися её конечной цели и последовательности всего процесса. Учитель должен поставить задачу для всего класса, а затем дать основные направления поиска доказательств для соответствующих групп учащихся (например, по рядам). При этом направления поиска должны быть чётко определены, хотя целесообразно оставлять некоторые положения для творческого поиска самими учащимися. После выполнения заданий отдельными учащимися необходимо разобрать все полученные варианты доказательств. Часто проводить такую работу на уроках, к сожалению, не удаётся, поэтому эту работу можно проводить на внеклассных и факультативных занятиях. К дифференцированным заданиям этого типа относятся задания Д-7 (вариант 2) и Д-10 (вариант 4).

Дифференцированные задания *третьего типа* носят ярко выраженный коллективный характер их выполнения. Эти задания состоят из одной задачи, но из-за её трудоёмкости к решению привлекается весь класс. Коллективные действия здесь выступают на первый план, что создаёт благоприятные условия для сближения уровней развития отдельных учащихся. Учитель по своему усмотрению разбивает класс (или группу учащихся, занимающихся в кружке или факультативе) на необходимое количество групп, определяемое числом возможных направлений выполнения задания. При этом необходимо, чтобы весь коллектив понимал как саму задачу, так и предлагаемые направления исследования (решения). Успех выполнения задания зависит как от умелого руководства учителем отдельными группами учащихся, так и от чёткого подведения итогов проделанной учащимися работы. Задание такого типа только одно — Д-10 (вариант 3).

Раздел **дополнительных задач** развивает систему задач, имеющихся в учебнике А. В. Погорелова. Эти задачи распределены по параграфам. В конце пособия даны ответы, указания и решения. Дополнительные задания могут быть предложены для самостоятельной работы учащимся, успешно справляющимся с задачами учебника. Кроме этого, данная система задач может быть рекомендована для проведения кружковых занятий и при организации факультативов. Наиболее сложные задачи отмечены звёздочкой (*).

Пособие содержит 4 **контрольные работы** по курсу геометрии для 7 класса. Сформулируем основные требования, которыми мы руководствовались при их составлении.

1. В каждой контрольной работе должна быть чётко выделена та часть, которая проверяет обязательные результаты обучения. В связи с этим учитель должен совершенно ясно представлять тот материал, который считается этим обязательным уровнем (для каждой контрольной работы мы его назовём, но здесь не должно быть категоричности в определении уровня, так как учитель в зависимости от условий может этот уровень менять).

2. Задачи, отражающие обязательный уровень результатов обучения, должны быть составлены так, чтобы при их выполнении учащимися было ясно видно, каким приёмом (или приёмами) ученик не владеет. В предметных контрольных работах эти задачи отмечены кружочком.

3. Важно, чтобы учитель представлял, каков уровень требований к задачам, включаемым в контрольную работу, за выполнение которых может быть поставлена оценка «хорошо» или «отлично». Эти задачи должны носить нестандартный, творческий характер.

4. Все варианты контрольных работ рассчитаны на их одновременное использование.

Контрольная работа № 1 по теме «Основные свойства простейших геометрических фигур»

На уровне обязательных результатов обучения в этом параграфе может быть два вопроса:

а) свойство измерения длин отрезков (проверяется свойство аддитивности длин отрезков);

б) свойство измерения величин углов (проверяется свойство аддитивности измерения углов).

Определение равных треугольников уместнее проверять при изучении признаков равенства треугольников.

По усмотрению учителя обязательные задания этой работы могут быть усложнены по образцу задач № 15 (4), 26 (4) к § 1 учебника.

Контрольная работа № 2 по теме «Смежные и вертикальные углы»

На уровне обязательных результатов обучения в этом параграфе два вопроса:

а) определение смежных углов и применение теоремы 2.1;

б) определение вертикальных углов и применение теоремы 2.2.

Контрольная работа № 3 по теме «Признаки равенства треугольников»

Эта контрольная работа охватывает довольно значительный материал программы. На уровне обязательных результатов обучения можно вынести следующие вопросы:

а) понятие равенства треугольников (без которого бессмысленно говорить о признаках равенства);

б) прямое применение признаков равенства треугольников;

в) определение равнобедренного треугольника и применение теоремы 3.3 (о равенстве углов при основании в равнобедренном треугольнике).

Заметим, что в одной работе на уровне обязательных результатов обучения проверить все три вопроса трудно. В предложенной работе мы проверяем только пункты а) и б). Проверить владение пунктом в) представляется возможным при проведении соответствующей самостоятельной работы, а также при выполнении третьих заданий контрольной работы.

Контрольная работа № 4 по теме «Сумма углов треугольника»

На обязательном уровне обучения после изучения материала этого параграфа можно вынести следующее:

а) умение находить внутренние накрест лежащие и односторонние углы при пересечении параллельных прямых секущей и непосредственное применение признаков параллельности прямых (теоремы 4.2 и 4.3);

б) непосредственное применение теоремы 4.4, в том числе и для прямоугольного треугольника.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 1

С-1

Отметьте на листе бумаги две точки B и P.

а) Проведите через точки B и P прямую.

б) Отметьте на прямой BP две точки, принадлежащие отрезку BP.

С-2

1. На прямой даны три точки A, C и B. Известно, что $AB = 15$ см, $BC = 6$ см, $AC = 9$ см. Принадлежит ли точка B отрезку AC?

2. Дана прямая a. Отметьте две точки A и B, не принадлежащие прямой a, так, чтобы отрезок AB пересекал прямую a.

С-3

1. На рисунке 1 изображён угол. Определите на глаз градусную меру этого угла. Проверьте ваш ответ, измерив угол транспортиром.

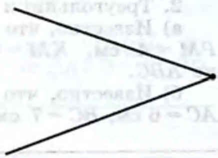


Рис. 1

2. Постройте угол в 45°. Возьмите на каждой его стороне по одной точке и соедините их отрезком. Проведите луч, проходящий между сторонами этого угла. Найдите образовавшиеся углы.

3. Между сторонами угла (ab), равного 40°, проходит луч c. Найдите углы (ac) и (bc), если угол (bc) меньше угла (ac) на 15°.

С-4

1. На рисунке 2 изображены три отрезка. Есть ли среди этих отрезков равные? Ответ объясните.

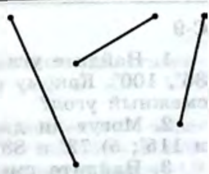


Рис. 2

2. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $\angle A = 60°$, $BC = 10$ см, $\angle C = 77°$. Определите углы A_1 и C_1 и сторону B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

С-5

На рисунке 3 даны прямая a и точка B, не лежащая на ней. Пользуясь линейкой и угольником, проведите прямую, параллельную прямой a и проходящую через точку B.

Рис. 3

С-6

1. Среди отрезков $AB = 1{,}5$ см, $BC = 2$ см, $CD = 2{,}5$ см, $DE = 2$ см, $EP = 1{,}5$ см, $BE = 2{,}5$ см найдите равные.

2. Треугольники ABC и DEF равны.

а) Известно, что углы треугольника ABC равны: $\angle A = 35°$, $\angle B = 50°$, $\angle C = 95°$. Найдите углы треугольника DEF.

б) Известно, что углы треугольника DEF равны: $\angle D = 85°$, $\angle E = 50°$, $\angle F = 45°$. Найдите углы треугольника ABC.

С-7

1. Среди углов $\angle A = 22°$, $\angle B = 40°$, $\angle C = 38°$, $\angle E = 40°$, $\angle D = 38°$, $\angle P = 22°$ найдите равные.

2. Треугольники ABC и KPM равны.

а) Известно, что стороны треугольника KPM $KP = 2$ см, $PM = 4$ см, $KM = 5$ см. Найдите стороны треугольника ABC.

б) Известно, что стороны треугольника ABC $BA = 4$ см, $AC = 6$ см, $BC = 7$ см. Найдите стороны треугольника KPM.

С-8

1. Постройте два смежных угла и найдите их меру в градусах.

2. Дан угол ABC, равный 40°. Постройте угол, вертикальный с ним. Чему равен этот угол?

С-9

1. Найдите углы, смежные с углами: 15°, 24°, 48°, 69°, 85°, 100°. Какому из данных углов соответствует меньший смежный угол?

2. Могут ли два смежных угла быть равными: а) 65° и 115°; б) 72° и 88°; в) 91° и 99°?

3. Найдите смежные углы, если их градусные меры относятся как 7 : 8.

С-10

1. Найдите углы, смежные с углами: 160°, 145°, 123°, 94°, 72°, 60°. Какому из данных углов соответствует больший смежный угол?

2. Могут ли два смежных угла быть равными: а) 75° и 85°; б) 94° и 96°; в) 83° и 97°?

С-11

1. Докажите равенство треугольников, изображённых на рисунке 4.

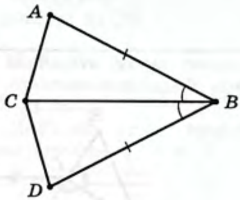


Рис. 4

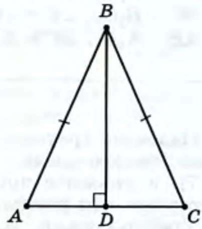


Рис. 5

2. В треугольнике ABC проведена высота BD (рис. 5). Известно, что $\angle ABD = \angle CBD$. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle CBD$.

С-12

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 20 см. Его боковая сторона в 2 раза больше основания. Найдите стороны этого треугольника.

2. У равнобедренных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны основания AB и A_1B_1 и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$. Докажите, что эти треугольники равны.

С-13

1. Точки A и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BD. Известно, что $AB = CB$ и $AD = CD$. Докажите, что $\triangle BAD = \triangle BCD$.

2. Прямая, перпендикулярная биссектрисе угла O, пересекает стороны угла в точках A и B, а биссектрису в точке C. Докажите, что биссектриса угла делит отрезок AB пополам.

С-14

1. Назовите треугольники, равные треугольнику ABC (рис. 6), и укажите признак, по которому они равны.

2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равнобедренные, с основаниями AB и A_1B_1. По какому признаку равны эти треугольники, если:

а) $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$;

б) $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$;

в) $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$?

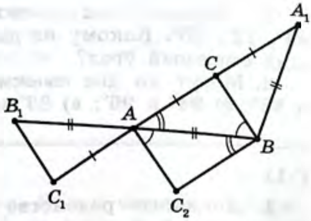


Рис. 6

С-15

1. Назовите треугольники, равные треугольнику ABC (рис. 7), и укажите признак, по которому они равны.

2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равнобедренные, с основаниями AC и A_1C_1. По какому признаку равны эти треугольники, если:

а) $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$;

б) $AB = A_1B_1$, $\angle B = \angle B_1$;

в) $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$?

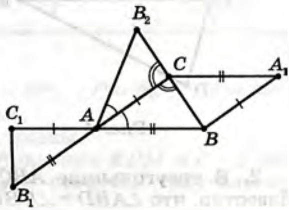


Рис. 7

С-16

1. Внутренние односторонние углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, относятся как 2 : 3. Чему равны эти углы?

2. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O так, что $AO = OC$. Известно, что $AB \parallel DC$. Докажите, что $OB = OD$.

С-17

1. В равнобедренном треугольнике угол при вершине, противолежащей основанию, равен 40°. Найдите угол при основании.

2. Биссектрисы AK и CD равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите угол DOA.

С-18

1. Найдите неизвестный угол треугольника, если его два угла равны: а) 18° и 65°; б) 30° и 70°; в) 53° и 94°; г) 61° и 102°.

2. Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол при его основании равен: а) 55°; б) 70°; в) 45°; г) 28°.

3. Найдите углы треугольника, если они пропорциональны числам 2, 3, 7.

С-19

1. Найдите неизвестный угол треугольника, если его два угла равны: а) 20° и 80°; б) 52° и 111°; в) 23° и 60°; г) 57° и 90°.

2. Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол, противолежащий основанию, равен: а) 90°; б) 104°; в) 48°; г) 50°.

3. Найдите углы треугольника, если они пропорциональны числам 3, 4 и 8.

С-20

1. Постройте произвольный отрезок AB. Отметьте на плоскости несколько точек, расстояния до которых от точки A равны AB. Какую фигуру образуют все такие точки?

2. Дана окружность с радиусом 3 см. Проведите окружность с радиусом 1 см, имеющую с данной внутреннее касание, и окружность с радиусом 2 см, имеющую с данной внешнее касание.

С-21

1. Постройте треугольник по трём сторонам a, b, c.

2. На рисунке 8 дан угол AOB. Постройте угол, равный этому углу.

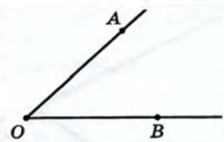


Рис. 8

С-22

1. Даны прямая a и принадлежащая ей точка M. Постройте перпендикуляр к прямой a, проходящий через точку M.

2. Постройте прямоугольный треугольник по катету a и прилежащему острому углу β.

С-23

1. Найдите геометрическое место центров всех окружностей, проходящих через две данные точки A и B.

2. Дан острый угол ABC. На стороне BA этого угла найдите точку, равноудалённую от точек M и K, принадлежащих стороне BC.

С-24

1. Постройте треугольник ABC по стороне $AB = 4$ см и углам: $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$.

2. Дан треугольник. Проведите в нём из одной вершины биссектрису и высоту.

3. Дан треугольник ABC. Опишите около него окружность.

С-25

1. Постройте треугольник ABC по сторонам $AC = 3$ см, $BC = 5$ см и углу C, равному $50°$.

2. Дан треугольник. Проведите в нём из одной вершины медиану и высоту.

3. Дан треугольник ABC. Впишите в него окружность.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 2

С-1

Даны две точки M и K.

а) Проведите через точки M и K прямую. Сколько таких прямых можно провести?

б) Отметьте на прямой MK две точки, не принадлежащие отрезку MK.

С-2

1. Точка M лежит на прямой, проходящей через точки K и C, между этими точками. Известно, что $KM = 8$ см, $MC = 3$ см. Найдите KC.

2. Даны прямая b и три точки A, B и C, не лежащие на этой прямой, такие, что отрезок AB пересекает прямую b, а отрезок BC её не пересекает. Пересекает ли прямую b отрезок AC?

С-3

1. На рисунке 9 изображён угол. Определите на глаз градусную меру этого угла. Проверьте ваш ответ, измерив угол при помощи транспортира.

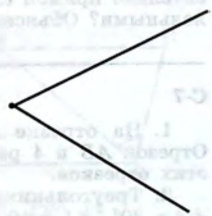


Рис. 9

2. Постройте угол в 122°. Возьмите на каждой его стороне по одной точке и соедините их отрезком. Проведите луч, проходящий между сторонами этого угла. Найдите образовавшиеся углы.

3. Между сторонами угла (mn), равного 100°, проходит луч k. Найдите углы (mk) и (nk), если их градусные меры относятся как $3 : 1$.

С-4

1. На рисунке 10 изображены отрезки и углы. Есть ли среди них равные? Ответ объясните.

2. $\triangle ABC = \triangle MKP$, $BC = 6$ м, $\angle C = 26°$, $\angle B = 92°$. Какие углы и какую сторону $\triangle MKP$ можно определить по этим данным?

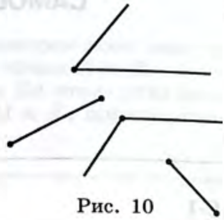


Рис. 10

С-5

На рисунке 11 даны две пересекающиеся прямые a и b и точка A, не принадлежащая ни одной из них. С помощью линейки и угольника проведите прямые, параллельные прямым a и b и проходящие через точку A.

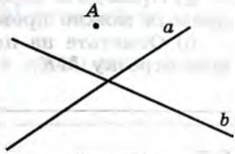


Рис. 11

С-6

1. На отрезке AB длиной 20 см отмечена точка D. Найдите длины отрезков AD и BD, если отрезок BD на 4 см длиннее отрезка AD.

2. Треугольники ABC и PQR равны. Известно, что $AB = 3$ дм, $BC = 4$ дм, $PR = 6$ дм. Найдите остальные стороны этих треугольников.

3. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой c. Могут ли прямые AB и c быть параллельными? Объясните ответ.

С-7

1. На отрезке AC длиной 20 см отмечена точка B. Отрезок AB в 4 раза больше отрезка BC. Найдите длины этих отрезков.

2. Треугольники ABC и KLM равны. Известно, что $\angle A = 20°$, $\angle L = 40°$, $\angle M = 120°$. Найдите остальные углы этих треугольников.

3. Прямые AB и CD параллельны. Могут ли точки C и D лежать в разных полуплоскостях относительно прямой AB? Объясните ответ.

С-8

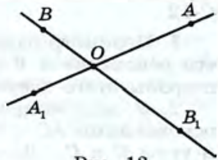


Рис. 12

1. Найдите угол, в 4 раза меньший, чем смежный с ним угол.

2. На рисунке 12 угол AOB равен 120°. Чему равны углы AOB_1 и A_1OB_1?

С-9

1. Найдите смежные углы, если один из них в 5 раз больше другого.

2. Сумма двух углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равна 150°. Найдите эти углы.

3. BK — биссектриса угла ABC. Найдите угол ABK, если угол ABC равен 130°.

С-10

1. Найдите смежные углы, если один из них на 40° меньше другого.

2. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, в 8 раз больше другого. Найдите эти углы.

3. Угол между биссектрисой угла и продолжением одной из его сторон равен 138°. Чему равен этот угол?

С-11

1. Докажите равенство треугольников, изображённых на рисунке 13.

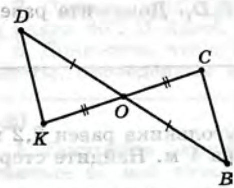


Рис. 13

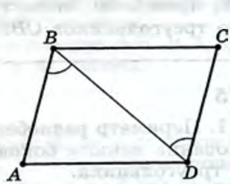


Рис. 14

2. Точки A и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой BD (рис. 14). Известно, что $\angle ABD = \angle CDB$ и $\angle ABC = \angle CDA$. Докажите, что $\triangle ADB = \triangle CBD$.

С-12

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 26 см; его основание в 6 раз меньше боковой стороны. Найдите стороны этого треугольника.

2. У равнобедренных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ с основаниями AC и A_1C_1 равны боковые стороны AB и A_1B_1 и углы C и C_1. Докажите, что эти треугольники равны.

С-13

1. Точки C и D лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Известно, что $\triangle ABC = \triangle BAD$ (рис. 15). Докажите, что $\triangle ACD = \triangle BDC$.

2. Через середину O отрезка AB проведена прямая CD, перпендикулярная прямой AB. Докажите, что полупрямая CO является биссектрисой угла ACB.

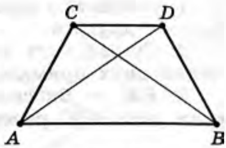


Рис. 15

С-14

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 4,5 м, а основание — 1,3 м. Найдите боковую сторону треугольника.

2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана MB. На продолжении медианы за точку M взята точка D. Докажите, что $\triangle AMD = \triangle CMD$.

3. У равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ из вершин B и B_1 проведены биссектрисы BD и B_1D_1. Докажите равенство треугольников CBD и $C_1B_1D_1$.

С-15

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 3,2 м, основание меньше боковой стороны на 1 м. Найдите стороны треугольника.

2. Треугольники ABC и ABD равны, причём отрезок CD пересекает отрезок AB в точке O. Докажите, что $CO \perp AB$.

3. Даны два равнобедренных треугольника ABC и ABD с общим основанием AB. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны в случае, когда точки C и D лежат по одну сторону от прямой AB.

С-16

1. Один из внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, больше другого на 32°. Чему равны эти углы?

2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $\angle ACO = \angle BDO$, $CO = DO$. Докажите, что $\angle CAO = \angle DBO$.

С-17

1. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) внешний угол BCK равен 150° (рис. 16). Найдите угол ABC.

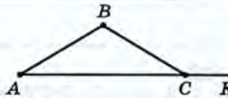


Рис. 16

2. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена биссектриса BD. Найдите углы треугольника ABD, если $\angle CBD = 20°$.

С-18

1. Разность двух внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей равна 50°. Найдите эти углы.

2. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 110°. Чему равны углы этого треугольника?

3. Докажите, что у равнобедренного треугольника высоты, проведённые из вершин при основании, равны.

С-19

1. Сумма двух внутренних накрест лежащих углов при двух параллельных прямых и секущей равна 120°. Чему равны эти углы?

2. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 80°. Найдите углы этого треугольника.

3. Докажите, что у равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ высоты, проведённые из вершин A и A_1, равны.

С-20

1. Постройте окружность радиусом 3 см с центром O, отметьте на ней точку D. Найдите на окружности точки, расстояния до которых от точки D равны: а) 3 см; б) 5 см. Обозначьте найденные точки и соедините их с точкой D. Сколько отрезков получится? Лежит ли центр окружности на одном из этих отрезков?

2. Две окружности с диаметрами 10 см и 15 см касаются внутренним образом. Чему равно расстояние между центрами этих окружностей?

С-21

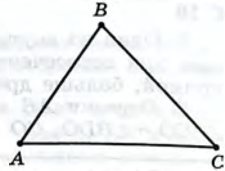


Рис. 17

1. На рисунке 17 дан треугольник *ABC*. Постройте угол, равный углу *A* треугольника *ABC*.

2. Постройте равнобедренный треугольник по основанию *a* и боковой стороне *b*.

С-22

1. Дан треугольник *ABC*. Постройте медиану этого треугольника, проведённую к стороне *AB*.

2. Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник по его катету *a*.

С-23

1. Даны две пересекающиеся прямые *a* и *b*. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от этих прямых.

2. Даны окружность с центром *O* и точка *A* на ней. Найдите на этой окружности точки, равноудалённые от точек *O* и *A*.

С-24

1. Дан треугольник *ABC*. Постройте треугольник, все стороны которого вдвое меньше сторон треугольника *ABC*.

2. Даны две параллельные прямые *a* и *b* и точка *A*, лежащая на прямой *a*. Постройте окружность, которая касается прямой *a* в точке *A* и прямой *b*.

3. Даны точки *A* и *B*. Постройте окружность радиуса *r* ($2r > AB$), проходящую через точки *A* и *B*.

С-25

1. Дан треугольник *ABC*. Постройте треугольник *ABM* с углами при вершинах *A* и *B*, вдвое меньшими, чем соответствующие углы треугольника *ABC*.

2. Даны прямая *a* и точка *A* на ней. Постройте окружность с радиусом 3 см, касающуюся прямой в точке *A*.

3. Даны три точки *A*, *B*, *C*. Постройте окружность, проходящую через точки *A* и *B*, центр которой находится на данном расстоянии *d* от точки *C*.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 3

С-1

Даны две точки A и B.

а) Проведите прямую, проходящую через точки A и B. Сколько таких прямых можно провести?

б) Отметьте на прямой AB две точки, отличные от A и B. Принадлежат ли они отрезку AB?

С-2

1. На прямой даны три точки O, P и M, причём точка O лежит между точками P и M. Известно, что $OM = 14$ см, $OP = 8$ см. Найдите PM.

2. Даны прямая c и три точки K, M и P, не лежащие на этой прямой, такие, что отрезок KP не пересекает прямую c, а отрезок MP её пересекает. Пересекает ли эту прямую отрезок KM?

С-3

1. На рисунке 18 изображён угол. Определите на глаз его градусную меру. Проверьте ваш ответ, измерив угол при помощи транспортира.

Рис. 18

2. Постройте угол в 135°. Возьмите на каждой его стороне по одной точке и соедините их отрезком. Проведите луч, проходящий между сторонами этого угла. Найдите образовавшиеся углы.

3. Между сторонами угла (cd), равного 120°, проходит луч a. Найдите углы (ca) и (da), если их градусные меры относятся как 4 : 2.

С-4

1. На рисунке 19 изображены отрезки и углы. Есть ли среди них равные? Объясните ответ.

2. $\triangle MBC = \triangle AKP$, $\angle B = 68°$, $BC = 8$ см, $\angle M = 84°$. Какие углы и какую сторону $\triangle AKP$ можно определить по этим данным?

Рис. 19

С-5

Даны угол ABC и точка K (рис. 20). С помощью линейки и угольника проведите прямые, параллельные сторонам угла ABC и проходящие через точку K.

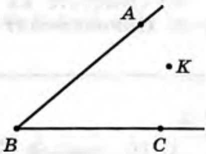


Рис. 20

С-6

1. Даны прямая и четыре точки A, B, C и D, не лежащие на этой прямой. Пересекает ли данную прямую отрезок AB, если отрезки BD и CD её пересекают, а отрезок AC не пересекает?

2. Точки A, B, C лежат на одной прямой. Принадлежит ли точка C отрезку AB, если $AB = 7{,}5$ см, $BC = 7{,}8$ см, $AC = 0{,}3$ см?

3. Между сторонами угла (ab), равного 75°, проходит луч c. Угол (bc) в 2 раза больше угла (ac). Найдите эти углы.

С-7

1. Даны прямая и четыре точки A, B, C и D, не лежащие на этой прямой. Пересекает ли прямую отрезок AC, если отрезки AB, CD и BD пересекают её?

2. Точка A принадлежит отрезку BC, равному 12 м. Найдите отрезки AB и AC, если отрезок AB длиннее отрезка AC на 3 м.

3. Может ли луч c проходить между сторонами угла (ab), если $\angle(ab) = 35°$, $\angle(ac) = 45°$, $\angle(bc) = 80°$?

С-8

1. Найдите угол, в 5 раз меньший, чем смежный с ним угол.

2. На рисунке 21 угол COD равен $30°$. Чему равны углы AOK и DOK?

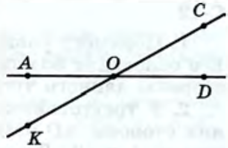


Рис. 21

С-9

1. Найдите углы, которые получаются при пересечении двух прямых, если сумма трёх из этих углов равна $200°$ (развёрнутые углы не рассматривать).

2. Известно, что $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $AC = 3$ см. Докажите способом от противного, что точки A, B и C не лежат на одной прямой.

3. BM — биссектриса угла ABC. Найдите угол ABC, если угол CBM равен $57°$.

С-10

1. Чему равен угол, если два смежных с ним угла составляют в сумме $180°$?

2. Известно, что $\angle(ab) = 100°$, $\angle(bc) = 110°$. Докажите способом от противного, что луч c не проходит между сторонами угла (ab).

3. Какой угол образует биссектриса угла в $30°$ с продолжением его стороны?

С-11

1. У треугольников ABC и DMC $AB = MD$, $AB \perp AC$ и $MD \perp CB$ (рис. 22). Докажите равенство треугольников ABC и DMC.

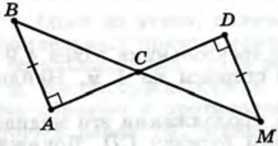


Рис. 22

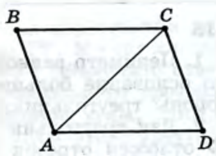


Рис. 23

2. Точки B и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC (рис. 23). Известно, что $\angle BCA = \angle DAC$ и $\angle DCB = \angle BAD$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

С-12

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 35 см. Его основание больше боковой стороны в 1,5 раза. Найдите стороны данного треугольника.

2. У треугольника ADB угол B равен $90°$. На продолжении стороны AD отложен отрезок $DC = AD$ (точка D лежит между A и C). Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

С-13

1. Точки A и B лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CD. Известно, что $\triangle CDA = \triangle CDB$. Докажите, что $\triangle ABC$ и $\triangle BAD$ равнобедренные.

2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $AO = DO$ и $\angle CAD = \angle BDA$ (рис. 24). Докажите равенство треугольников AOC и DOB.

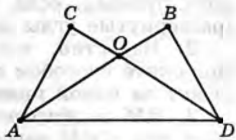


Рис. 24

С-14

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 3,4 м, а боковая сторона — 1,3 м. Найдите основание этого треугольника.

2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса BM. На продолжении биссектрисы за точку M взята точка D. Докажите равенство треугольников AMD и CMD.

3. У равных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ из вершин C и C_1 проведены медианы CD и C_1D_1. Докажите равенство треугольников CBD и $C_1B_1D_1$.

С-15

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 4,9 м. Его основание больше боковой стороны на 1 м. Найдите стороны треугольника.

2. Дан треугольник ABC. На продолжении его медианы CD отложен отрезок DE, равный отрезку CD. Докажите равенство треугольников BAE и ABC.

3. Даны два равнобедренных треугольника ABC и ABD с общим основанием AB. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны, если точки C и D лежат по разные стороны от прямой AB.

С-16

1. Один из внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, в 4 раза больше другого. Чему равны эти углы?

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены соответственно точки P и Q так, что $\angle APQ = \angle ABC$. Докажите, что $\angle AQP = \angle ACB$.

С-17

1. В равнобедренном треугольнике BPM $(BP = BM)$ внешний угол BPT равен 126° (рис. 25). Найдите угол PMB.

2. В треугольнике ABC, в котором $\angle A = 60°$, $\angle B = 80°$, проведена биссектриса AD. Найдите углы треугольника ACD.

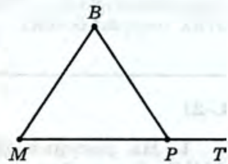


Рис. 25

С-18

1. Один из углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 45°. Найдите остальные семь углов.

2. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, если известно, что биссектриса этого треугольника, проведённая из вершины острого угла, образует с противолежащей стороной углы 60° и 120°.

3. Дан треугольник ABC. Докажите, что его вершины равноудалены от прямой, проходящей через середины сторон AB и AC.

С-19

1. Один из углов, получающихся при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 75°. Может ли один из остальных семи углов равняться 85°? Объясните ответ.

2. Биссектриса острого угла прямоугольного треугольника образует с противолежащей стороной углы, один из которых равен 75°. Найдите острые углы этого треугольника.

3. Вершины треугольника ABC равноудалены от прямой, которая пересекает стороны AB и BC в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что точки A_1 и C_1 являются серединами сторон AB и BC.

С-20

1. Постройте окружность радиусом 2 см с центром O, отметьте на ней точку M. Найдите на окружности точки, расстояния до которых от точки M равны: а) 2 см; б) 3 см. Обозначьте найденные точки и соедините их отрезками с точкой M. Сколько отрезков получено? Лежит ли центр окружности на одном из этих отрезков?

2. Две окружности с диаметрами 4 см и 8 см касаются внешним образом. Чему равно расстояние между центрами этих окружностей?

С-21

1. На рисунке 26 дан треугольник MKB. Постройте угол, равный углу B треугольника MKB.

2. Постройте треугольник ABC по сторонам $AC = b$, $BC = a$ и углу C, равному γ.

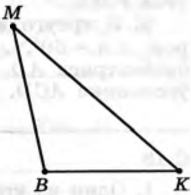


Рис. 26

С-22

1. Дан треугольник MKP. Постройте медиану этого треугольника, проведённую к стороне MP.

2. Постройте прямоугольный треугольник по его катетам a и b.

С-23

1. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных параллельных прямых.

2. Найдите на данной окружности точки, равноудалённые от точек A и B, лежащих на этой окружности.

С-24

1. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе второго угла, прилежащего к этой стороне.

2. Даны параллельные прямые a и b и точка B на прямой b. Постройте окружность, касающуюся прямых a и b, причём прямой b в точке B.

3. Даны две точки A и B и прямая a, проходящая через точку A. Постройте окружность, которая касается прямой a в точке A и проходит через точку B.

С-25

1. Постройте треугольник по стороне и прилежащим к ней углам.

2. Даны прямая b и точка B на ней. Постройте окружность данного диаметра, касающуюся прямой b в точке B.

3. Даны две точки A и B и прямая c, параллельная прямой AB. Постройте окружность, проходящую через точки A и B и касающуюся прямой c.

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Вариант 4

С-1

Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой.

а) Проведите прямые, проходящие через каждые две из этих точек. Сколько таких прямых можно провести?

б) Сколько различных отрезков задают три данные точки?

в) Существует ли точка, принадлежащая каждой из проведённых прямых? Объясните ответ.

С-2

1. На прямой даны три точки B, C и M, точка M лежит между точками B и C. Известно, что $BC = 14$ см, $CM = 8$ см. Найдите BM.

2. Даны прямая a и точки A, B, C, D, не принадлежащие этой прямой.

а) Пересекает ли прямую a отрезок BC, если отрезки AC, AD и BD её не пересекают?

б) Могут ли отрезки AB, AC и BC каждый пересекать прямую a?

С-3

1. На рисунке 27 изображён угол. Определите на глаз градусную меру этого угла. Проверьте ваш ответ, измерив угол транспортиром.

2. Постройте угол в $160°$. Проведите луч, проходящий между сторонами этого угла. Найдите образовавшиеся углы.

3. Луч c проходит между сторонами угла (ab), равного $90°$, и делит этот угол пополам, а луч d проходит между сторонами угла (ac). Найдите угол (dc), если градусные меры углов (ad) и (dc) относятся как $1 : 2$.

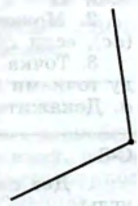


Рис. 27

С-4

1. На рисунке 28 изображены отрезки и углы. Есть ли среди них равные? Объясните ответ.

2. Даны три равных треугольника ABC, MKD и POE. $\angle A = 92°$, $\angle K = 64°$, $\angle E = 24°$. Найдите остальные углы данных треугольников.

Рис. 28

С-5

Даны треугольник ABC и точка K (рис. 29). С помощью линейки и угольника постройте прямые, параллельные сторонам треугольника ABC и проходящие через точку K.

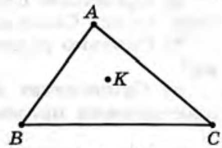


Рис. 29

С-6

1. Три точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 7{,}2$ см, $BC = 10{,}5$ см, $AC = 3{,}3$ см. Какая из трёх точек A, B и C лежит между двумя другими? Объясните ответ.

2. Может ли луч a проходить между сторонами угла (bc), если $\angle(ab) = 65°$, $\angle(bc) = 60°$?

3. Докажите, что середины всех сторон треугольника не лежат на одной прямой.

С-7

1. Могут ли точки A, B, C лежать на одной прямой, если $AB = 4$ дм, $BC = 5$ дм, $AC = 7$ дм? Объясните ответ.

2. Может ли луч b проходить между сторонами угла (ac), если $\angle(ab) = 70°$, $\angle(bc) = 120°$?

3. Точка A, принадлежащая прямой BC, не лежит между точками B и C. Через точку A проведена другая прямая a. Докажите, что прямая a не пересекает отрезок BC.

С-8

1. Два смежных угла относятся как 4 : 5. Найдите эти углы.

2. Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равен сумме смежных с ним углов. Чему равны углы?

С-9

1. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен 37°. Чему равны остальные углы?

2. Дан угол, равный 78°. Найдите угол, образованный биссектрисой этого угла и его стороной.

3. Точка C лежит на прямой между точками A и B, а точка D — вне этой прямой. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны, если $\angle ACD = \angle BCD$.

С-10

1. Из вершины развёрнутого угла (aa_1) проведены в одну полуплоскость лучи b и c. Известно, что $\angle(ab) = 40°$, $\angle(ac) = 70°$. Найдите углы (a_1b), (a_1c) и (bc).

2. Найдите угол, если его биссектриса образует с его стороной угол, равный 67°.

3. Углы ABD и CBD прямые. Докажите, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

С-11

1. На рисунке 30 $AC = DK$, $BC = DE$, $\angle BCK = \angle ADE$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle KED$.

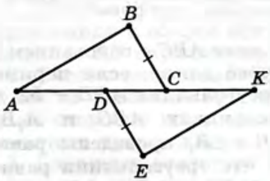


Рис. 30

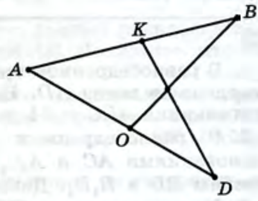


Рис. 31

2. У треугольников ABO и ADK (рис. 31) $\angle AKD = \angle AOB$ и $AK = AO$. Докажите, что эти треугольники равны.

С-12

1. Отрезок, соединяющий середину основания равнобедренного треугольника с противолежащей вершиной, равен 5 см. Периметр одного из отсечённых им треугольников равен 30 см. Найдите периметр данного треугольника.

2. Перпендикулярно биссектрисе угла O проведена прямая, пересекающая его стороны в точках A и B. Докажите, что треугольник AOB равнобедренный.

С-13

1. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Известно, что $AB = AD$ и $BC = CD$. Докажите, что $BD \perp AC$.

2. Для определения расстояния от точки B до недоступной точки A провешивают произвольную прямую BC, измеряют углы ABC и ACB и откладывают их по другую сторону от BC (рис. 32). Докажите, что расстояние BD равно искомому расстоянию AB.

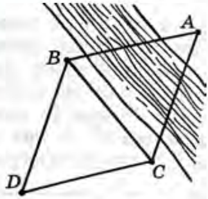


Рис. 32

С-14

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведена медиана CD. Найдите её длину, если периметр треугольника ABC равен 36 см, а треугольника ACD — 28 см.

2. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный, если у него медиана BD является биссектрисой.

3. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ основания высот BD и B_1D_1 принадлежат сторонам AC и A_1C_1 соответственно. Известно, что $BD = B_1D_1$, $\angle ABD = \angle A_1B_1D_1$, $\angle CBD = C_1B_1D_1$. Докажите равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

С-15

1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC проведена медиана AD. Найдите её длину, если периметр треугольника ABC — 64 дм, а треугольника ABD — 52 дм.

2. В равнобедренных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ с основаниями AC и A_1C_1 и $\angle B = \angle B_1$ проведены равные медианы BD и B_1D_1. Докажите, что треугольники равны.

3. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ проведены биссектрисы BD и B_1D_1. Известно, что $BD = B_1D_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle ADB = \angle A_1D_1B_1$. Докажите равенство этих треугольников.

С-16

1. Найдите каждый из восьми углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, если один из внутренних односторонних углов в 3 раза меньше другого.

2. Отрезки BD и CA пересекаются в точке O. Известно, что $BC \parallel AD$ и $BC = DA$ (рис. 33). Докажите, что $\triangle ABO = \triangle DOC$.

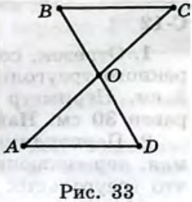


Рис. 33

С-17

1. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен 40°.

2. В треугольнике ABC, в котором $\angle A = 40°$, $\angle C = 80°$, проведена высота AD. Найдите углы треугольника ADB.

С-18

1. У треугольников ABC и CDA вершины B и D лежат по разные стороны от прямой AC. Известно также, что $AB = CD$ и $BC = AD$. Докажите, что прямые AB и CD параллельны.

2. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая из вершины при основании, образует с противолежащей стороной углы, равные 30° и 150°. Найдите углы данного равнобедренного треугольника.

3. Докажите равенство треугольников по двум углам и высоте, проведённой из вершины третьего угла.

С-19

1. Треугольники ABC и ABD — равные равнобедренные треугольники с общим основанием AB. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

2. Биссектриса равнобедренного треугольника, проведённая из вершины при основании, образует с противолежащей стороной углы, один из которых равен 60°. Найдите углы этого треугольника.

3. Докажите равенство треугольников по стороне и проведённым к ней медиане и высоте.

С-20

1. Постройте две окружности с центром в данной точке O, радиусы которых равны r_1 и r_2. Заштрихуйте фигуру, состоящую из всех точек X, для которых выполняется условие: $r_1 \leqslant OX \leqslant r_2$.

2. Даны две окружности с общим центром и радиусами 4 см и 8 см. Проведена третья окружность, касающаяся первых двух окружностей (возможны два случая). Чему равен радиус этой окружности?

С-21

1. Постройте угол, равный углу A треугольника ABC, если $\angle B = 30°$, $\angle C = 50°$.

2. Постройте треугольник ABC по стороне $BC = a$ и углам $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$.

С-22

1. Постройте серединные перпендикуляры к сторонам данного треугольника.

2. Постройте треугольник по стороне a, углу B, равному β, и медиане m, проведённой к стороне a.

С-23

1. Даны две параллельные прямые на расстоянии d друг от друга. Найдите геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до этих прямых равна $2d$.

2. Найдите на данной окружности точки, равноудалённые от двух данных пересекающихся прямых a и b, точка пересечения которых лежит внутри окружности.

С-24

1. Окружности радиусами 8 м и 12 м касаются. Найдите расстояние между их центрами в случае внешнего и внутреннего касания.

2. Постройте треугольник по стороне, медиане и высоте, проведённым из одной и той же вершины, если известно, что сторона равна 4 см, медиана — 3 см, высота — 2 см.

3. Постройте точку, равноудалённую от данных параллельных прямых a и b и находящуюся на заданном расстоянии d от данной точки C.

С-25

1. Могут ли касаться окружности, если их радиусы равны 15 дм и 20 дм, а расстояние между центрами 30 дм? Объясните ответ.

2. Постройте треугольник по углу и проведённым из его вершины биссектрисе и высоте, если известно, что угол равен 60°, биссектриса треугольника — 3 см, высота — 2 см.

3. Постройте точку, равноудалённую от данных параллельных прямых a и b и данных параллельных прямых c и d.

ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЕ ЗАДАНИЯ

Д-1. Взаимное расположение точек на прямой

1. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Чему равна длина отрезка AB, если точка C лежит между точками A и B?

2. Найдите отрезок AB, если $AC = 3{,}4$ см, $BC = 1{,}9$ см и точка C лежит между A и B.

3. Точка C принадлежит отрезку AB длиной 16 м. Найдите длины отрезков AC и BC, если отрезок BC длиннее отрезка AC на 5 м.

4. На отрезке AB отмечена точка C, а на отрезке AC — точка D. Какой отрезок больше: AD или AB? Объясните почему.

Д-2. Разбиение плоскости на две полуплоскости

Вариант 1

1. Проведите горизонтально прямую a. Отметьте в верхней полуплоскости точки A и B, а в нижней — точки C и D. Соедините эти точки между собой отрезками. Назовите отрезки, пересекающие прямую a, и отрезки, не пересекающие её.

2. Объясните теперь, почему отрезки AB и CD не пересекают прямую a, а остальные — пересекают.

3. Прямая a пересекает отрезки PQ и QR. Пересекает ли она отрезок PR? Дайте ответ по своему рисунку и объясните его.

4. Выполните предыдущее упражнение, не пользуясь рисунком.

Вариант 2

1. Прямая a параллельна прямой AB. Докажите, что точки A и B лежат в одной полуплоскости относительно прямой a.

2. Прямая a, параллельная прямой AB, пересекает отрезок AD. Докажите, что прямая a пересекает отрезок BD, воспользовавшись предыдущим утверждением.

3. Прямая a, параллельная AB и пересекающая отрезок AD, не проходит через точку C. Докажите, что прямая a пересекает отрезок BC или отрезок CD, воспользовавшись предыдущим утверждением.

4. Даны прямая a и четыре точки A, B, C и D, не лежащие на ней. Эти точки соединены отрезками AD, AB, BC и CD. Докажите, что если прямая a пересекает отрезок AD, то она пересекает по крайней мере один из отрезков AB, BC или CD.

Д-3. Луч проходит между сторонами угла

Вариант 1

1. Лучи a, b и c имеют общую начальную точку. Чему равна градусная мера угла (ab), если луч c проходит между его сторонами?

2. Найдите $\angle(ab)$, если $\angle(ac) = 35°$, $\angle(bc) = 80°$ и луч c проходит между сторонами угла (ab).

3. Между сторонами угла (ab), равного 140°, проходит луч c. Найдите углы (ac) и (bc), если угол (ac) в 3 раза меньше угла (bc).

4. Луч c проходит между сторонами угла (ab). Может ли между сторонами угла (ab) проходить луч c_1, дополнительный к лучу c?

Вариант 2

1. Дан угол AOB и точка C на его стороне OB. Докажите, что прямая OA не пересекает отрезок BC.

2. Дан угол AOB и точка C на его стороне OB. Докажите с помощью утверждения 1, что если луч, исходящий из точки O, пересекает отрезок AB, то он пересекает также и отрезок AC.

3. Дан угол AOB. Докажите с помощью утверждения 2, что если луч, исходящий из точки O, пересекает отрезок AB, то он пересекает любой другой отрезок CD с концами на сторонах этого угла.

4. Даны угол AOB и луч c, исходящий из его вершины. Докажите, что если луч c не пересекает отрезка AB, то он не проходит между сторонами угла AOB.

Д-4. Смежные углы

1. Может ли один из смежных углов быть острым, а другой — прямым?

2. Найдите углы, смежные с углами в 65° и 66°.

3. Если даны два угла, то какому из них (большему или меньшему) соответствует меньший смежный угол? Почему?

4. Докажите, что если углы ABC и CBD с одной общей стороной прямые, то они смежные.

Д-5. Доказательство от противного

1. Три точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 3{,}7$ м, $BC = 4{,}3$ м, $AC = 8$ м. Докажите, что точка C не лежит между A и B.

2. Докажите, что если $\angle(ac) = 85°$, $\angle(bc) = 105°$, то луч c не проходит между сторонами угла (ab).

3. Сумма двух углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равна 160°. Докажите, что эти углы вертикальные.

4. Даны три точки A, B и C, расстояния между которыми равны: $AB = 2{,}6$ дм, $AC = 8{,}3$ дм, $BC = 6{,}7$ дм. Докажите, что эти точки не лежат на одной прямой.

Д-6. Равнобедренный треугольник

1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Докажите, что углы ACO и BDC равны.

2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, являющейся их серединой. Известно также, что $\angle ACD = \angle BCD$. Докажите, что треугольник BCD равнобедренный.

3. Докажите, что прямые AB и CD из предыдущего упражнения перпендикулярны.

4. Докажите, что если медиана треугольника является его биссектрисой, то он равнобедренный.

Д-7. Применение признаков равенства треугольников

Вариант 1

Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $OC = OD$ и $\angle ACD = \angle BDC$. Докажите, что:

1. $AC = BD$ и $AO = BO$.

2. $AD = BC$.

3. $\angle ACB = \angle BDA$ и $\angle CAD = \angle DBC$.

4. Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O, так что $AO = CO$. Докажите равенство углов ABC и CAD.

Вариант 2

Треугольники ABC и BAD равны. Их стороны AD и BC пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOC и BOD тоже равны. Найдите два различных доказательства.

Д-8. Внутренние односторонние углы при параллельных прямых и секущей

1. Один из внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей равен 75°. Найдите другой угол.

2. Углы α и β — внутренние односторонние при параллельных прямых и секущей, угол γ — смежный с углом β. Найдите угол γ, если $\alpha = 36°$.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. Через точку A_1 на стороне AC треугольника проведена прямая, параллельная его основанию, которая пересекает сторону BC в точке B_1. Докажите, что треугольник A_1B_1C тоже равнобедренный.

4. Докажите, что прямые, параллельные перпендикулярным прямым, перпендикулярны.

Д-9. Внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей

1. Один из внутренних накрест лежащих углов при параллельных прямых и секущей равен 75°. Чему равен второй из этих углов?

2. Углы α и β — внутренние накрест лежащие при параллельных прямых и секущей, угол γ — вертикальный углу β. Найдите угол γ, если $\alpha = 108°$.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. На луче, дополнительном к лучу CA, отмечена точка A_1. Через точку A_1 проведена прямая, параллельная AB, которая пересекает луч, дополнительный к лучу CB, в точке B_1. Докажите, что треугольник A_1B_1C тоже равнобедренный.

4. Докажите, что середина отрезка с концами на двух параллельных прямых является серединой любого проходящего через неё отрезка с концами на тех же прямых.

Д-10. Сумма углов треугольника

Вариант 1

1. В равностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Найдите углы треугольника BCD.

2. Могут ли все углы треугольника быть бо́льшими 60°? Ответ объясните.

3. Может ли сумма любых углов треугольника быть меньше 120°? Ответ объясните.

4. Дан равнобедренный треугольник ABC. Точки A_1, B_1, C_1 — середины его сторон. Найдите углы треугольника $A_1B_1C_1$.

Вариант 2

Дан треугольник ABC. Через вершину A проведена прямая a, параллельная стороне BC, а через вершины B и C — прямые b и c, параллельные соответственно сторонам AC и AB.

1. Докажите, что прямые a и b пересекаются (не параллельны).

2. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки пересечения пар прямых a и c, b и c, a и b соответственно. Выразите углы треугольника $A_1B_1C_1$ через углы данного треугольника ABC, воспользовавшись своим рисунком.

3. Докажите способом от противного, что углы CAB и C_1BA, а также углы CBA и C_1AB являются внутренними накрест лежащими при секущей AB и параллельных AC и B_1C_1, A_1C_1 и BC соответственно.

4. Докажите предыдущее утверждение другим способом, используя дополнительное построение.

Вариант 3

Равнобедренный треугольник ABC с основанием AB разбит отрезком AD на два других равнобедренных треугольника ACD и ABD. Найдите углы треугольника ABC.

Вариант 4

Докажите, что середины сторон равностороннего треугольника являются также вершинами равностороннего треугольника. Найдите два различных доказательства.

Д-11. Геометрическое место точек

Дана прямая a.

1. Точки B и C лежат по одну сторону от прямой a и находятся от неё на одинаковом расстоянии. Через точку B проходит прямая b, параллельная a. Докажите, что точка C принадлежит прямой b.

2. Докажите, что геометрическое место точек, удалённых от прямой a на расстояние h, состоит из двух прямых b и c, параллельных a и отстоящих от неё на h.

3. Как построить треугольник по стороне a, опущенной на эту сторону высоте h и радиусу R описанной окружности?

4. Докажите, что прямая a является геометрическим местом точек, равноудалённых от параллельных прямых b и c из утверждения 2.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К-1 **Вариант 1**

1°. Точка C принадлежит отрезку AB, $AC = 10$ см, $CB = 5$ см. Найдите длину отрезка AB.

2°. Луч c проходит между лучами a и b, $\angle(ac) = 30°$, $\angle(cb) = 10°$. Найдите $\angle(ab)$.

3. На отрезке AB длиной 20 см отмечена точка M.

а) Найдите длины отрезков AM и MB, если отрезок AM на 5 см длиннее MB.

б) Найдите расстояние между серединами отрезков AM и MB.

К-1 **Вариант 2**

1°. Точка A принадлежит отрезку KC, $KC = 20$ см, $KA = 10$ см. Найдите длину отрезка AC.

2°. Луч a проходит между лучами c и b, $\angle(ab) = 12°$, $\angle(cb) = 22°$. Найдите $\angle(ca)$.

3. а) На отрезке PK длиной 16 см отмечена точка B. Отрезок PB на 6 см короче отрезка BK. Найдите длины отрезков PB и BK.

б) На отрезке CD длиной 21 см отмечена точка F. Расстояние между точками F и D в 2 раза меньше расстояния между точками C и F. Найдите длины отрезков FD и CF.

К-1 **Вариант 3**

1°. Точка M принадлежит отрезку BK, $BM = 15$ см, $BK = 26$ см. Найдите длину отрезка MK.

2°. Луч p проходит между лучами a и b, $\angle(ab) = 90°$, $\angle(ap) = 32°$. Найдите $\angle(pb)$.

3. Три точки A, B, C лежат на одной прямой, $AB = 7$ см, $BC = 11$ см.

а) Каким может быть расстояние AC? Для каждого из возможных случаев сделайте чертёж.

б) Лежат ли точки A, B и C на одной прямой, если $AC = 4$ см, $AB = 2$ см, $BC = 3$ см?

К-1 **Вариант 4**

1°. Точка O принадлежит отрезку AB, $OA = 12$ см, $OB = 6$ см. Найдите длину отрезка AB.

2°. Луч k проходит между лучами p и a, $\angle(pk) = 70°$, $\angle(ka) = 15°$. Найдите $\angle(pa)$.

3. Могут ли точки P, M и K лежать на одной прямой, если $MP = 2{,}8$ см, $MK = 2{,}3$ см, $PK = 4$ см? Ответ объясните.

4. Могут ли точки C, B и M лежать на одной прямой, если длина большего отрезка BM меньше суммы длин отрезков CM и CB?

К-2 **Вариант 1**

На рисунке 34 изображены две прямые AB и KP, пересекающиеся в точке O.

1°. а) Какие из углов, образовавшихся при пересечении этих прямых, являются смежными? Ответ обоснуйте.

б) Выпишите пары равных углов, изображённых на рисунке. Объясните, почему эти углы равны.

2. $\angle KOB = 5 \cdot \angle AOK$. Найдите углы AOK, KOB и BOP.

3. Сумма градусных мер углов AOK и BOP больше 180°. Какими (острыми, прямыми или тупыми) могут быть эти углы?

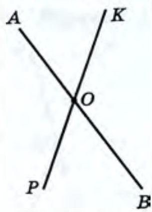


Рис. 34

К-2 **Вариант 2**

На рисунке 35 изображены две прямые MA и KC, пересекающиеся в точке B.

1°. а) Какие из образовавшихся углов являются вертикальными? Каким свойством они обладают?

б) Выпишите, сумма каких углов равна 180°. Ответ обоснуйте.

2. $\angle MBC - \angle MBK = 40°$. Найдите углы KBA, ABC и MBK.

3. Сумма градусных мер углов KBA и MBC равна 180°. Какими (острыми, прямыми или тупыми) могут быть эти углы?

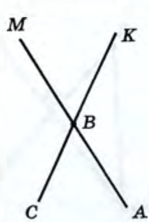


Рис. 35

К-2 **Вариант 3**

На рисунке 36 изображены две прямые AC и MO, пересекающиеся в точке K.

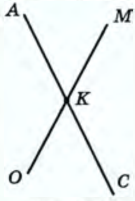


Рис. 36

1°. а) Выпишите образовавшиеся при пересечении этих прямых смежные углы. Каким свойством они обладают? б) Есть ли среди получившихся углов равные? Если есть, то объясните почему.

2. $\angle MKC - \angle CKO = 70°$. Найдите углы AKO, AKM и CKO.

3. Сумма градусных мер углов AKM и OKC меньше 180°. Какими (острыми, прямыми или тупыми) могут быть эти углы?

К-2 **Вариант 4**

На рисунке 37 изображены две прямые EK и AP, пересекающиеся в точке M.

Рис. 37

1°. а) Выпишите образовавшиеся при этом вертикальные углы. Какими свойствами они обладают?

б) Есть ли среди образовавшихся углов такие, сумма которых равна 180°? Если есть, то объясните почему.

2. $\angle PMK = 3\angle AMK$. Найдите углы AMK, PMK и EMP.

3. Найдите угол между биссектрисами углов EMP и PMK.

К-3 **Вариант 1**

1°. Треугольники ABC и PMK равны. Известно, что $AB = 5$ см, $BC = 10$ см, $\angle C = 36°$. Найдите соответствующие стороны и угол треугольника PMK.

2°. Отрезки AM и KP пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Докажите, что $PM = KA$ (рис. 38).

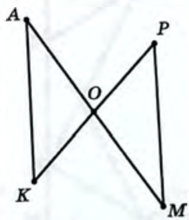


Рис. 38

3. Точки M и K являются соответственно серединами боковых сторон AC и BC равнобедренного треугольника ABC (AB — основание). Докажите, что $AK = BM$.

К-3 **Вариант 2**

1°. Треугольники BCD и AKE равны. Известно, что $AK = 20$ см, $\angle K = 54°$, $\angle E = 60°$. Найдите соответствующие углы и сторону треугольника BCD.

2°. Отрезки AB и CD равны и перпендикулярны отрезку BD. Докажите, что $AD = CB$ (рис. 39).

3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяты точки E и D, такие, что $AE = CD$. Докажите, что $BE = BD$.

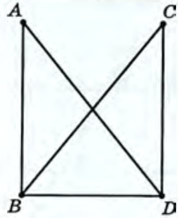


Рис. 39

К-3 **Вариант 3**

1°. Треугольники MKA и DOB равны. Известно, что $KA = 74$ см, $MA = 12$ см, $\angle K = 76°$. Найдите соответствующие стороны и угол треугольника DOB.

2°. Отрезки MK и PB равны и образуют равные углы с отрезком KB. Докажите, что $BM = KP$ (рис. 40).

3. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяты точки K и M, такие, что $\angle BKA = \angle BMC$. Докажите, что $BK = BM$.

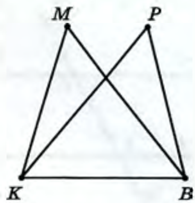


Рис. 40

К-3 **Вариант 4**

1°. Треугольники ABC и MPO равны. Известно, что $BC = 35$ см, $\angle A = 65°$, $\angle C = 102°$. Найдите соответствующие углы и сторону треугольника MPO.

2°. Отрезки AB и CD равны, $\angle ABK = \angle CDM$. Докажите, что $AD = CB$ (рис. 41).

3. На боковых сторонах AC и BC равнобедренного треугольника ABC (AB — основание) взяты соответственно точки P и O, такие, что $AP = BO$. Докажите, что $AO = BP$.

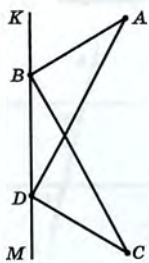


Рис. 41

К-4

Вариант 1

1°. Параллельные прямые a и b пересечены прямой c, $\angle 1 = 22°$. Найдите $\angle 2$ (рис. 42).

2°. В треугольнике ABC $\angle A + \angle B = 100°$. Чему равен угол C?

3. В треугольнике ABC углы 1, 2, 3 — внутренние, а углы 4, 5, 6 — внешние.

а) $\angle 1 : \angle 2 : \angle 3 = 1 : 2 : 3$. Найдите эти углы.

б) $\angle 5 + \angle 6 = 120°$. Найдите $\angle 1$.

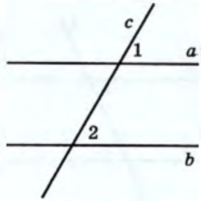


Рис. 42

К-4

Вариант 2

1°. Параллельные прямые c и p пересечены прямой a, $\angle 1 = 100°$. Найдите $\angle 2$ (рис. 43).

2°. В прямоугольном треугольнике ABC (BC — гипотенуза) угол B равен 30°. Чему равен угол C?

3. В треугольнике ABC углы 1, 2, 3 — внутренние, а углы 4, 5, 6 — внешние.

а) Могут ли углы 1 и 2 быть тупыми?

б) $\angle 1 = 30°$, $\angle 5 = 140°$. Найдите $\angle 2$ и $\angle 3$.

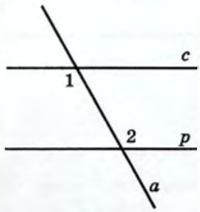


Рис. 43

К-4

Вариант 3

1°. Параллельные прямые b и c пересечены прямой a, $\angle 1 = 54°$. Найдите $\angle 2$ (рис. 44).

2°. В равнобедренном треугольнике ABC (AB — основание) угол при вершине C равен 60°. Найдите углы при основании AC этого треугольника.

3. В треугольнике ABC углы 1, 2, 3 — внутренние, а углы 4, 5, 6 — внешние.

а) Могут ли $\angle 2$ и $\angle 3$ быть прямыми?

б) $\angle 6 = 3 \cdot \angle 1$, $\angle 3 = 2 \cdot \angle 1$. Найдите $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$.

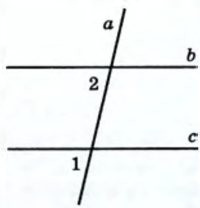


Рис. 44

К-4 **Вариант 4**

1°. Параллельные прямые a и c пересечены прямой b, $\angle 1 = 43°$. Найдите $\angle 2$ (рис. 45).

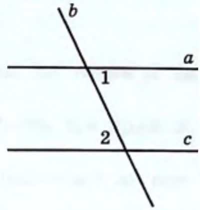


Рис. 45

2°. В равнобедренном треугольнике ABC (AB — основание) угол A при основании AC равен 35°. Найдите углы при вершинах B и C треугольника ABC.

3. В треугольнике ABC углы 1, 2, 3 — внутренние, а углы 4, 5, 6 — внешние.

а) Могут ли $\angle 1$ и $\angle 3$ быть прямым и тупым?

б) $\angle 6 = 120°$. $\angle 1 - \angle 2 = 30°$. Найдите углы 1, 2, 3.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Задачи к § 1

1. Даны две прямые AB и AC. Лежит ли точка B на прямой AC? Объясните ответ.

2. Сколько точек пересечения могут иметь три прямые, каждые две из которых пересекаются?

3. Прямая a пересекает прямую AB. Пересекает ли прямая a отрезок AB?

4. Сколько точек пересечения могут иметь два отрезка, не лежащие на одной прямой? Объясните ответ.

5. Даны три точки A, B и C, не принадлежащие прямой a. Сколько отрезков из числа соединяющих три данные точки может пересекать прямая a?

6. Могут ли для трёх точек A, B и C прямой выполняться одновременно равенства $AB + BC = AC$ и $AC + CB = AB$?

7. Точка A лежит на прямой BC. Лежит ли точка B между точками A и C, если $AB + AC = BC$? Ответ объясните.

8. Расстояние от Земли до Солнца равно 150 млн км, а до Луны — 400 тыс. км. Чему равно расстояние от Луны до Солнца во время солнечного затмения? лунного затмения?

9. Точки A, B и C лежат на прямой. Какая из этих точек лежит между двумя другими, если $AB = AC$? Объясните ответ.

10. Сколько углов, равных 60°, можно отложить от данной полупрямой?

11. Из вершины развёрнутого угла проведён луч, образующий с одной из его сторон угол в 40°. Какой угол образует этот луч с другой стороной данного развёрнутого угла? Ответ объясните.

12. От полупрямой AB отложены два различных угла BAC и BAD с одной и той же градусной мерой. Пересекает ли прямую AB отрезок CD?

13. Имеется кусок проволоки длиной 8 м. Можно ли сделать из него треугольник, равный треугольнику со сторонами, равными 2 м, 3 м и 4 м?

14*. Существуют ли два равных треугольника ABC и ABD, вершины C и D которых лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB? Объясните ответ.

15. $\triangle ABC = \triangle PQR$. Имеются ли равные стороны у треугольника ABC и какие именно, если $AB = QR$?

16. Даны пересекающиеся прямые AB и CD. Через точку B проведена прямая b, параллельная AC, а через точку C — прямая c, параллельная AB. Докажите, что прямые b и c пересекаются (не параллельны).

17. Дан треугольник ABC. С помощью угольника и линейки постройте другой треугольник, стороны которого лежат на прямых, параллельных прямым AB, BC и AC соответственно.

18. На рисунке 46 показано, что четыре точки могут определять одну, четыре или шесть прямых. Докажите, что других случаев нет.

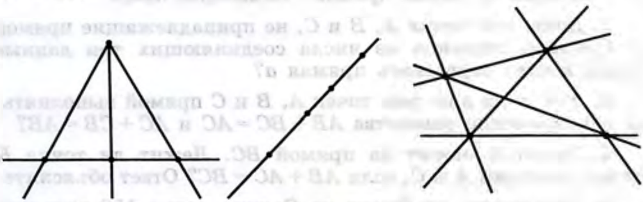


Рис. 46

19. Сколько точек пересечения могут иметь четыре попарно пересекающиеся прямые? Для каждого возможного случая сделайте рисунок.

20*. Докажите, что пять точек могут определять одну, пять, шесть, восемь или десять прямых.

Задачи к § 2

21. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов, когда они показывают 18 ч, 13 ч, 15 ч?

22. Найдите угол между стрелками часов, если они показывают 18 ч 15 мин, 9 ч, 9 ч 15 мин.

23. В результате повышения давления на одну атмосферу стрелка манометра отклоняется вправо, описывая угол, равный 6°. Какой угол опишет стрелка манометра при увеличении давления на 8 атмосфер?

24. Даны два неравных угла. Докажите, что большему углу соответствует меньший смежный угол, а меньшему — больший смежный угол.

25. Докажите, что если смежные углы равны, то они прямые.

26. Почему при двойном складывании листа бумаги получается прямой угол?

27. Дан угол (ab). Провели полупрямую a_1, дополнительную к полупрямой a. Затем провели полупрямую b_1, дополнительную к полупрямой b. Чему равен угол (ab_1)? Какими являются углы (a_1b) и (ab_1)? Объясните ответ.

28*. Даны дополнительные полупрямые a_1 и a_2. От этих полупрямых в разные полуплоскости отложены углы (a_1b) и (a_2c). Докажите, что если углы (a_1b) и (a_2c) равны, то они вертикальные.

29. Сумма вертикальных углов в 2 раза больше смежного с ними обоими угла. Найдите эти углы.

30*. Докажите, что если два различных прямых угла имеют общую сторону, то они смежные.

31*. От полупрямой a в одну полуплоскость отложены углы (ab) и (ac). Докажите, что если угол (ab) прямой, то угол (bc) острый.

32. От луча AB в разные полуплоскости отложены углы BAC и BAD. Пересекает ли прямую AB отрезок CD? Почему?

33*. Углы (ab) и (ac) отложены от полупрямой a в одну полуплоскость, причём угол (ab) больше угла (ac). Докажите, что $\angle(bc) = \angle(ab) - \angle(ac)$.

34*. Углы BAC и BAD отложены от полупрямой AB в разные полуплоскости. Докажите, что угол CAD равен сумме этих углов или дополняет её до 360°. А именно, если сумма градусных мер данных углов не превосходит 180°, то $\angle CAD = \angle BAC + \angle BAD$, а если она больше 180°, то $\angle CAD = 360° - (\angle BAC + \angle BAD)$.

35*. Точки A, B и C не лежат на одной прямой, и точка P не принадлежит прямым AB, AC и BC. Докажите, что по крайней мере одна из прямых PA, PB и PC пересекает соответственно отрезок BC, AC или AB.

36. Докажите, что угол между стороной угла и его биссектрисой не может быть тупым.

37*. Биссектрисы двух равных углов с общей вершиной лежат на одной прямой. Докажите, что эти углы вертикальные.

38. Докажите, что полупрямая, дополнительная к биссектрисе угла (ab), образует с его сторонами равные углы.

39. Равные тупые углы (ab) и (ac) отложены от полупрямой a в разные полуплоскости. Докажите, что луч a не является биссектрисой угла (bc).

40. Углы, которые образует биссектриса угла с его сторонами, не являются острыми. Чему равен данный угол?

Задачи к § 3

41. Дана полупрямая a с началом в точке A.

а) Отложите от полупрямой a в заданную полуплоскость угол в $x°$. Сколько углов с данной градусной мерой можно отложить от полупрямой a в заданную полуплоскость?

б) Отложите на полупрямой a отрезок $AB = y$ см. Сколько отрезков с данной длиной можно отложить на полупрямой a от её начальной точки?

в) Отложите на другой стороне угла A отрезок $AC = z$ см. Сколько отрезков с данной длиной можно отложить на любой полупрямой a от её начальной точки?

г) Соедините точки B и C отрезком. Измерьте сторону BC и углы B и C у треугольника ABC. Сравните их с соответствующими углами и стороной всех треугольников, построенных другими учащимися. Равны ли эти треугольники?

42. Даны треугольник ABC и полупрямая. Существует ли треугольник PQR, равный треугольнику ABC, который расположен так, что одна его вершина совпадает с началом данной полупрямой, другая принадлежит полупрямой, а третья лежит в заданной полуплоскости относительно полупрямой и её продолжения?

43. Три посёлка B, C и D расположены так, что C находится в 7 км к юго-западу от посёлка B, а посёлок D — в 4 км на восток от B. Три других посёлка A, K и M расположены так, что посёлок M находится в 4 км к югу от посёлка K, а посёлок A — в 7 км к юго-востоку от посёлка M. Сделайте чертёж и докажите, что расстояния между посёлками C и D и посёлками K и A равны.

44*. Из пункта A к острову B требуется провести телефонную связь. Как, не переплывая реку, найти необходимое количество (длину) телефонного кабеля?

45. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB точка M — середина стороны AB. Найдите углы треугольника BCM, если $\angle A = 40°$, $\angle C = 100°$.

46. Из пунктов A и M, расстояние между которыми известно, требуется прорубить просеки в направлениях AB и MN (рис. 47). Найдите длину каждой просеки до их пересечения.

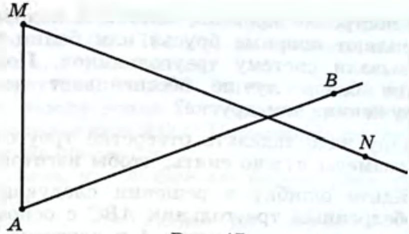


Рис. 47

47. От оконного стекла треугольной формы откололся один из его углов. Можно ли по сохранившейся части заказать стекольщику вырезать оконное стекло той же формы? Какие следует снять размеры?

48. Дан равносторонний треугольник ABC. На его сторонах AB, BC и CA отложены соответственно равные отрезки AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний.

49. Дан равносторонний треугольник ABC. На полупрямых AB, BC и CA отложены соответственно равные отрезки AA_1, BB_1 и CC_1, которые больше стороны данного треугольника. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний.

50*. Найдите ошибку в доказательстве следующего утверждения: «Любой треугольник равнобедренный».

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник. Отметим на стороне BC такую точку D, что $BD = DC$ и $AD \perp BC$. Тогда $\triangle ADB = \triangle ADC$. Это значит, что $AB = AC$, т. е. треугольник ABC равнобедренный.

51. В треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена. Докажите, что один из углов этого треугольника равен сумме двух других.

52. Треугольник, периметр которого равен 15 см, делится медианой на два треугольника с периметрами 11 см и 14 см. Найдите длину этой медианы.

53*. Докажите, что если биссектриса треугольника делит его периметр пополам, то треугольник равнобедренный.

54*. Докажите, что если высота треугольника делит его периметр пополам, то треугольник равнобедренный.

55. Докажите, что если медиана треугольника делит его периметр пополам, то треугольник равнобедренный.

56. При постройке кровель, мостов и подобных сооружений скрепляют опорные брусья или балки так, чтобы они образовывали систему треугольников. Почему такое расположение балок лучше обеспечивает неизменность формы сооружения, чем другие?

57. Столяру надо заделать отверстие треугольной формы. Какие размеры нужно снять, чтобы изготовить латку?

58*. Найдите ошибку в решении следующей задачи: «Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. На луче, исходящем из вершины A и пересекающем основание BC, отмечена такая точка D, для которой $\angle ABD = \angle ACD$. Равноудалена ли точка D от точек B и C?»

Решение (рис. 48). Так как треугольник ABC равнобедренный с основанием BC, то $\angle ABC = \angle ACB$. А по условию $\angle ABD = \angle ACD$. Значит, $\angle DBC = \angle DCB$ (каждый из этих углов равен разности соответственно равных углов). Получается, что у треугольника DBC углы при вершинах B и C равны. По теореме 3.4 этот треугольник равнобедренный. Поэтому $BD = CD$, т. е. точка A находится на одинаковом расстоянии от точек B и C.

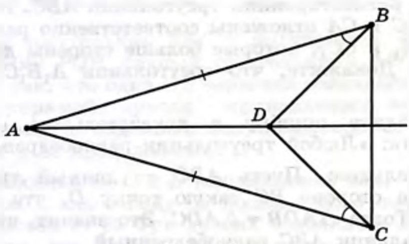


Рис. 48

Задачи к § 4

59. Докажите, что середина отрезка с концами на двух параллельных прямых является серединой проходящего через неё другого отрезка с концами на тех же прямых.

60. Докажите, что прямые, параллельные перпендикулярным прямым, сами перпендикулярны.

61. Постройте какой-нибудь треугольник ABC. Измерьте его углы A, B и C и найдите их сумму. Сравните её с суммой углов треугольников, построенных другими учениками. Чему равна сумма углов произвольного треугольника?

62. 1) Докажите, что если сумма внутренних односторонних углов меньше 180°, то их стороны, не лежащие на одной прямой, пересекаются.

2) Дан треугольник *ABC*. От полупрямой *AB* в полуплоскость, где лежит точка *C*, отложен угол *BAM*, меньший угла *A* треугольника *ABC*. Пересекает ли луч *AM* отрезок *BC*? Ответ обоснуйте.

3) Докажите, что любые две биссектрисы треугольника пересекаются.

4) Докажите, что любые две медианы треугольника пересекаются.

63. 1) Докажите, что не существует треугольника, сумма любых двух углов которого меньше 120°.

2) Докажите, что у треугольника, каждый из углов которого меньше суммы двух других, все углы острые.

64. Докажите, что если у равнобедренного треугольника угол при вершине, противолежащей основанию, равен 60°, то такой треугольник равносторонний.

65. У равнобедренного треугольника угол при основании равен 60°. Докажите, что треугольник равносторонний.

66. Докажите, что два внешних угла треугольника, построенные при одной вершине, равны.

67. На рисунке 49 $\angle BED = 80°$, $\angle EDC = 25°$. Чему должен равняться угол *ABC*, чтобы прямая *AB* была параллельна прямой *CD*?

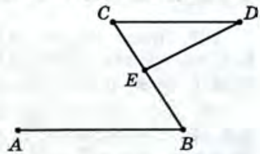


Рис. 49

68. Докажите, что данный треугольник нельзя разбить на два равных треугольника прямой, которая проходит через его вершину и не перпендикулярна противолежащей стороне.

69. Прямая, проходящая через вершину треугольника, разбивает его на два равных треугольника. Докажите, что данный треугольник равнобедренный.

70*. У треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$. Докажите, что треугольники *ABC* и $A_1B_1C_1$ равны.

71*. У треугольников *ABC* и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и $AB - BC = A_1B_1 - B_1C_1$. Докажите, что треугольники *ABC* и $A_1B_1C_1$ равны.

72*. Докажите, что треугольники с равными периметрами и двумя соответственно равными углами равны.

73*. Внимательно проанализируйте приводимое ниже

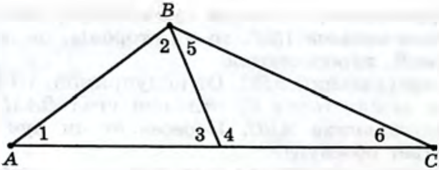


Рис. 50

доказательство теоремы о сумме углов треугольника и найдите в нём логическую ошибку.

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник. Разобьём его на два треугольника, как показано на рисунке 50. Обозначим через x сумму углов треугольника. Тогда

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = x; \quad \angle 4 + \angle 6 + \angle 5 = x.$$

Складывая почленно эти равенства, получаем

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2x.$$

Но $\angle 3 + \angle 4 = 180°$, а $\angle 1 + \angle 2 + \angle 5 + \angle 6$ есть сумма углов треугольника ABC, т. е. x. Итак, $x + 180° = 2x$, откуда $x = 180°$.

74*. Даны отрезок AB и прямая MN, пересекающая его. Как построить треугольник ABC, такой, чтобы биссектриса угла C лежала на прямой MN?

75. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. На сторонах AC и BC взяты соответственно точки P и Q, такие, что $AP = CQ$. Докажите, что середина отрезка PQ лежит на прямой, проходящей через середины боковых сторон треугольника.

76. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. Через точку O, лежащую на его основании, проведена прямая, пересекающая прямые AC и BC соответственно в точках P и Q. Докажите, что отрезки OP и OQ равны.

77. Два населённых пункта расположены по разные стороны от железной дороги на одинаковом расстоянии от неё. Где надо построить железнодорожную станцию, чтобы она была равноудалена от обоих населённых пунктов?

78. Через селение A провести прямую дорогу таким образом, чтобы пункты B и C оказались на одинаковом расстоянии от дороги.

79. Равные отрезки AB и CD, заключённые между параллельными прямыми AC и BD, пересекаются в точке O. Докажите, что $AO = CO$ и $BO = DO$.

80. Докажите, что треугольник с двумя равными высотами равнобедренный.

Задачи к § 5

81. Ученик начертил окружность радиусом 30 мм, но забыл отметить её центр. Как найти центр окружности?

82. В пунктах A, B и C находятся радиостанции местной связи. Известно, что $AB = 12$ км, $BC = 15$ км, $AC = 21$ км. Радиус уверенного приёма станции, находящейся в пункте A, равен 9 км, станции в пункте B — 12 км, а станции в пункте C — 18 км. Взяв масштаб (1 см — 3 км), изобразите на чертеже зоны уверенного приёма: 1) каждой станции; 2) двух станций — A и B; 3) станций B и C; 4) всех трёх станций; 5) хотя бы одной станции.

83. Докажите, что если две окружности касаются друг друга, то точка касания принадлежит прямой, проходящей через центры этих окружностей.

84*. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC равны соответственно 4 см, 5 см и 6 см. Постройте три окружности, центры которых находятся в вершинах треугольника ABC, такие, что каждая из окружностей касается внешним образом двух других.

85. Даны три окружности с центрами O_1, O_2 и O_3 и радиусами соответственно 1 см, 2 см и 3 см, касающиеся попарно внешним образом. Найдите периметр треугольника $O_1O_2O_3$.

86. Даны три окружности с центрами O_1, O_2, O_3 и радиусами соответственно 4 см, 4 см и 10 см, каждая из которых касается двух других, причём окружности радиусом 4 см касаются окружности радиусом 10 см внутренним образом. Найдите периметр треугольника $O_1O_2O_3$.

87. На рисунке 51 все проведённые касательные проходят через одну и ту же точку O. Докажите, что $OA = OD$.

88. На железной дороге требуется построить станцию с таким расчётом, чтобы она находилась на одинаковых расстояниях от двух населённых пунктов. В каком случае такую станцию построить невозможно?

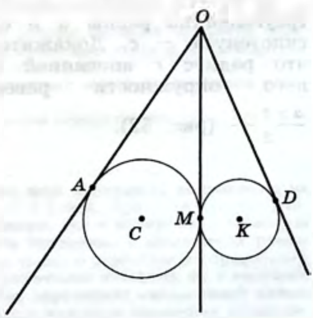


Рис. 51

89. Какой фигурой является геометрическое место центров окружностей, отсекающих от данной прямой данный отрезок AB?

90. Ученик начертил окружность, но забыл отметить её центр. Как найти центр окружности, если её радиус тоже неизвестен?

91. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку AB является геометрическим местом точек пересечения (касания) окружностей равных радиусов с центрами в точках A и B.

92. Даны две пересекающиеся прямые. Постройте окружности, которые касаются этих прямых, причём одной из них в данной точке.

93. Даны два смежных угла AOB и BOC. Постройте две окружности, каждая из которых касается прямой AC и прямой OB в данной точке.

94. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от двух пересекающихся прямых.

95. Постройте точки, равноудалённые от двух пересекающихся прямых a и b и находящиеся на одинаковом расстоянии от двух данных точек A и B.

96. Два наблюдательных пункта M и N расположены на двух прямых — пересекающихся дорогах AB и AC. Как найти место, равноудалённое от дорог и наблюдательных пунктов?

97*. 1) Докажите, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина его гипотенузы.

2) Катеты прямоугольного треугольника равны a и b, гипотенуза — c. Докажите, что радиус r вписанной в него окружности равен $\frac{a+b-c}{2}$ (рис. 52).

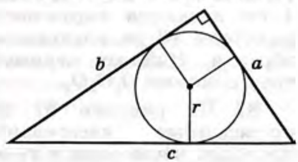


Рис. 52

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ

С-1

При выполнении всех заданий данной работы, кроме последнего задания варианта 4, от учащихся не требуется никаких обоснований. Учащиеся отвечают на поставленные вопросы по рисунку, который они сделают сами.

Вар. 2. а) Одну прямую.

Вар. 3. а) Одну прямую.

Вар. 4. а) Три прямые; б) три отрезка; в) не существует.

В самом деле, прямые AB и AC пересекаются в точке A. Прямые AB и BC пересекаются в точке B, а прямые BC и AC — в точке C. Других общих точек у этих прямых нет, так как две прямые могут пересекаться только в одной точке.

С-2

При выполнении первых заданий достаточно ссылки на основное свойство измерения отрезков (III). Вторые задания касаются взаимного расположения точек на плоскости и требуют обоснования более полного (варианты 2—4). Задачи подобного типа решаются, как это делается в учебнике (задача 17). При этом свойства, которыми по определению обладает разбиение плоскости на две полуплоскости, применяются в зависимости от того, что известно, т. е. как для выяснения вопроса, пересекает ли данную прямую отрезок, концы которого ей не принадлежат, так и для обоснования расположения концов отрезка относительно этой прямой, что, безусловно, возможно, так как эти свойства характеризуют разбиение плоскости на две полуплоскости.

Вар. 1. 1. Не принадлежит.

Вар. 2. 1. $KC = 11$ см. 2. Пересекает.

Вар. 3. 1. $PM = 22$ см.

Вар. 4. 1. $BM = 6$ см. 2. а) Не пересекает; б) не могут. В самом деле, если отрезки AB и AC пересекают прямую a, то точки B и C лежат в одной полуплоскости (а именно в той, в которой точка A не лежит). Тогда отрезок BC не может пересекать прямую a.

С-3

Наиболее существенным моментом работы является отработка определения понятия «луч проходит между сторонами угла» и опирающегося на него основного свойства измерения углов.

Вар. 1—4. 3. Указание. Воспользоваться основным свойством измерения углов (V).

Вар. 4. 2. Указание. Воспользоваться определением луча, проходящего между сторонами угла.

С-4

Первые задания данной работы (во всех вариантах) направлены на отработку определения равных отрезков и углов. При этом следует учитывать, что как геометрические построения, так и измерения с помощью линейки и транспортира не могут быть проведены с абсолютной точностью. Поэтому, для того чтобы сделать вывод о равенстве изображённых отрезков или углов в данной работе, достаточно измерить их с одинаковой точностью. Вторые задания (во всех вариантах) имеют своей целью отработку важного для всего дальнейшего изучения геометрии определения равных треугольников. Работу можно провести сразу же после изучения этого определения на уроке.

Вар. 1. **2.** $\angle A_1 = 60°$, $\angle C_1 = 77°$, $B_1C_1 = 10$ см.
Вар. 2. **2.** $\angle K = 92°$, $\angle P = 26°$, $KP = 6$ см.
Вар. 3. **2.** $\angle A = 84°$, $\angle K = 68°$, $KP = 8$ см.
Вар. 4. **2.** Углы треугольника ABC: $\angle A = 92°$, $\angle B = 64°$, $\angle C = 24°$. У двух других треугольников углы равны соответственно этим углам.

С-5

Проводить прямую, параллельную данной, с помощью линейки и угольника учащиеся умеют. Данная работа проводится с целью напомнить это построение, которое понадобится им в дальнейшем при выполнении чертежей к доказательствам теорем и решениям задач.

С-6

Данная самостоятельная работа, как и следующая (С-7), охватывает практически всё содержание § 1. Поэтому она дублирует в некоторой степени все предшествующие работы, что представляет более широкие возможности для организации самостоятельной работы учащихся. В частности, если некоторые из предыдущих работ не были проведены по какой-либо причине, то этот недостаток можно будет устранить, распорядившись соответствующим образом материалом данной и следующей работ. Тем самым появляется возможность координировать использование обычных самостоятельных работ и итоговых к параграфам. При этом следует иметь в виду, что варианты работ С-6 и С-7, имеющие один и тот же порядковый номер, примерно равноценны и, более того, относятся к одной группе вопросов (этим, например, можно воспользоваться для подготовки учащихся к выполнению контрольной работы). Причём задания первого варианта устного характера. По усмотрению учителя некоторые задания, в которых требуются обоснования, могут выполняться с сокращёнными (свёрнутыми) объяснениями или вовсе без них. Такие рекомендации уместны, например, если задание носит вычислительный характер или если аналогичные задания (элементы задания) уже выполнялись учащимися раньше. Во всяком случае надо стремиться к тому, чтобы с полным объяснением (доказательством) учащиеся выполняли не более одного задания за самостоятельную работу.

Вар 1. **1.** $AB = EP$, $BC = DE$, $CD = BE$. **2.** а) $\angle D = 35°$, $\angle E = 50°$, $\angle F = 95°$; б) $\angle A = 85°$, $\angle B = 50°$, $\angle C = 45°$.
Вар. 2. **1.** $AD = 8$ см, $BD = 12$ см. **2.** $AC = 6$ дм, $PQ = 3$ дм, $QR = 4$ дм. **3.** Не могут.
Вар. 3. **1.** Не пересекает. **2.** Не принадлежит. **3.** $\angle(ac) = 25°$, $\angle(bc) = 50°$.
Вар. 4. **1.** Точка A. **2.** Не может. **3.** Указание. Применить теорему 1.1.

С-7

Вар. 1. **1.** $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle D$. **2.** а) $AB = 2$ см, $BC = 4$ см, $AC = 5$ см; б) $KP = 4$ см, $KM = 6$ см, $PM = 7$ см.
Вар. 2. **1.** $AB = 16$ см, $BC = 4$ см. **2.** $\angle B = 40°$, $\angle C = 120°$, $\angle K = 20°$. **3.** Не могут.
Вар. 3. **1.** Пересекает. **2.** $AB = 7{,}5$ м, $BC = 4{,}5$ м. **3.** Не может.
Вар. 4. **1.** Не могут. **2.** Не может. **3.** Указание. Воспользоваться тем, что две прямые могут пересекаться только в одной точке (см. решение задачи 3 к § 1 учебника).

С-8

Первое задание данной работы на смежные углы, а второе комбинированное.
Вар. 1. **2.** 40°.
Вар. 2. **1.** 36°. **2.** $\angle AOB_1 = 60°$, $\angle A_1OB_1 = 120°$.
Вар. 3. **1.** 30°. **2.** $\angle AOK = 30°$, $\angle DOK = 150°$.
Вар. 4. **1.** 80° и 100°. **2.** 60° и 120°.

С-9

Относительно данной и следующей работ справедливы все замечания и рекомендации, высказанные по поводу проведения работ С-6 и С-7. Кроме того, следует иметь в виду, что работу С-8 можно провести только после изучения темы «Вертикальные углы». В то же время первый вариант двух рассматриваемых работ касается лишь смежных углов, что позволяет задействовать его раньше работы С-8.

Вар. 1. 1. 165°, 156°, 132°, 111°, 95°, 80°. Большему углу. 2. а) Могут; б) не могут; в) не могут. 3. 84° и 96°.

Вар. 2. 1. 150° и 30°. 2. 75° и 75°. 3. 65°.

Вар. 3. 1. 20°, 20°, 160° и 160°. 3. 114°.

Вар. 4. 1. 37°, 143°, 143°. 2. 39°. 3. Указание. Воспользоваться свойством смежных углов.

С-10

Вар. 1. 1. 20°, 35°, 57°, 86°, 108°, 120°. Меньшему углу. 2. а) Не могут; б) не могут; в) могут.

Вар. 2. 1. 70° и 110°. 2. 160° и 20°. 3. 84°.

Вар. 3. 1. 90°. 3. 165°.

Вар. 4. 1. 140°, 110°, 30°. 2. 134°. 3. Указание. Применить теорему 2.3.

С-11

Обоснование равенства треугольников по данному рисунку имеет своей целью научить учащихся видеть рисунок, в частности находить вертикальные углы и общие элементы треугольников. При этом, конечно, многократно повторяются и сами признаки равенства треугольников.

С-12

Задания этой работы предназначены для отработки определения равнобедренного треугольника. В связи с этим вторые задания (во всех вариантах), требующие применения для их решения первых двух признаков равенства треугольников, могут вызвать у учащихся определённые затруднения. Поэтому в случае необходимости следует обратить внимание учащихся на комбинированный характер этих заданий.

Вар. 1. 1. 4 см, 8 см, 8 см. 2. Указание. Применить II признак равенства треугольников.

Вар. 2. 1. 2 см, 12 см, 12 см. 2. Указание. Применить I признак равенства треугольников.

Вар. 3. 1. 15 см, 10 см, 10 см. 2. Указание. Применить I признак равенства треугольников.

Вар. 4. 1. 50 см. 2. Указание. Применить II признак равенства треугольников.

С-13

Данная работа может проводиться после изучения учащимися всех трёх признаков равенства треугольников.

Вар. 1. 2. Указание. Применить II признак равенства треугольников.

Вар. 2. 2. Указание. Доказать сначала, что треугольник *ABC* равнобедренный с основанием *AB*.

Вар. 3. 2. Указание. Применить теорему 3.3 и II признак равенства треугольников.

Вар. 4. 1. Указание. Доказать сначала, что треугольники *AOB* и *AOD* равны, а затем воспользоваться свойством «если смежные углы равны, то они прямые».

С-14

Задания первого варианта этой работы могут быть предложены для устного решения. В остальных вариантах первое задание выполняется без обоснований (задачи подобного типа уже решались). Второй и третий варианты данной работы примерно одинаковой сложности. В случае необходимости при выполнении одного из заданий варианта подробных объяснений можно не требовать. Достаточно, например, чтобы учащиеся назвали только признак, по которому равны треугольники.

Вар. 1. **1.** $\triangle ABC = \triangle AC_2B$ (по стороне и прилежащим к ней двум углам); $\triangle ABC = \triangle AB_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними); $\triangle CAB = \triangle CA_1B$ (по трём сторонам).

Вар. 2. **1.** 1,6 м. **2.** $\triangle AMD = \triangle CMD$ по двум сторонам и углу между ними.

Вар. 3. **1.** 0,8 м. **3.** $\triangle CBD = \triangle C_1B_1D_1$ по двум сторонам и углу между ними.

Вар. 4. **1.** $CD = 10$ см.

С-15

По поводу данной работы справедливы все рекомендации, касающиеся предыдущей работы. Надо только заметить, что задания этой работы, особенно в вариантах 2—4, более трудоёмки, чем в С-14. Поэтому одно из двух последних заданий при её проведении можно снять.

Вар. 1. **1.** $\triangle ABC = \triangle AB_2C$ (по стороне и прилежащим к ней углам); $\triangle ABC = \triangle AB_1C_1$ (по двум сторонам и углу между ними, $\angle CAB = \angle C_1AB_1$ как вертикальные); $\triangle ABC = \triangle A_1CB$ (по трём сторонам).

Вар. 2. **1.** 0,4 м; 1,4 м; 1,4 м. **2.** $\angle DBO = \angle CBO$ в равнобедренном треугольнике DBC, а значит, BO является и медианой, и высотой $\triangle DBC$, т. е. $BO \perp CO$. **3.** Указание. Воспользуйтесь теоремами 3.5 и 2.3.

Вар. 3. **1.** 1,3 м; 1,3 м; 2,3 м.

Вар. 4. **1.** 20 дм.

С-16

Отличительной особенностью этой работы следует считать необходимость обоснования того (при решении вторых заданий), являются ли данные углы внутренними односторонними или накрест лежащими (для отработки этих определений). Делается это с помощью аксиомы разбиения плоскости на две полуплоскости (IV). Но если в § 1 ссылки на аксиому IV были развёрнутыми, полными, то здесь они становятся свёрнутыми, укороченными и только содержательными. Например, «эти углы являются внутренними накрест лежащими для прямых AC и BD и секущей AB, так как точки C и D лежат по разные стороны от секущей (отрезок CD пересекает прямую AB в точке O)» или «эти углы являются внутренними односторонними для..., так как точки C и D лежат по одну сторону от секущей (отрезок CD не пересекает прямую AB)». Причём слова, стоящие в скобках, могут произноситься только устно, а в тетради не записываться, что позволяет и сэкономить время, и сделать процесс повторного чтения решения учащимися активным. Отсутствие некоторых аргументов, которые легко восстанавливаются, заставит их читать текст более вдумчиво и внимательно. В последующем, начиная с VIII класса, от записи обсуждаемой аргументации в тетради следует отказаться вовсе, ограничившись одной констатацией факта: «такие-то углы внутренние односторонние, а такие-то накрест лежащие».

Вар. 1. **1.** 72°, 108°.

Вар. 2. **1.** 74°, 106°.

Вар. 3. **1.** 36°, 144°.

Вар. 4. **1.** 135°, 45°. Имеется ещё три угла по 135° и три угла по 45°.

С-17

Данную самостоятельную работу можно проводить после изучения пункта 34 учебника.

Вар. 1. **1.** 70°. **2.** $\angle DOA = 60°$.

Вар. 2. **1.** $\angle ABC = 120°$. **2.** $\angle DAB = 50°$, $\angle ABD = 20°$, $\angle ADB = 110°$.

Вар. 3. **1.** $\angle PMB = 54°$. **2.** $\angle DAC = 30°$, $\angle DCA = 40°$, $\angle ADC = 110°$.

Вар. 4. **1.** 40°, 70°, 70°; 40°, 40°, 100°. **2.** $\angle ADB = 90°$, $\angle ABD = 60°$, $\angle BAD = 30°$.

С-18

Напоминаем, что работы С-18 и С-19 охватывают практически всё содержание § 4, поэтому требовать от учащихся обоснований во всех решениях не следует.

Вар. 1. **1.** а) 97°; б) 80°; в) 33°; г) 17°. **2.** а) 55°, 55°, 70°; б) 70°, 70°, 40°; в) 45°, 45°, 90°; г) 28°, 28°, 124°. **3.** 30°, 45°, 105°.

Вар. 2. **1.** 115° и 65°. **2.** 70°, 70°, 40° или 70°, 55°, 55°.

Вар. 3. **1.** Три угла по 45° и четыре по 135°. **2.** 60° и 30°.

Вар. 4. **2.** 20°, 20°, 140°. **3.** Указание. Основания данных высот лежат у треугольников либо на стороне, прилежащей к этим данным углам, либо на её продолжении.

С-19

Вар. 1. **1.** а) 80°; б) 17°; в) 97°; г) 33°. **2.** а) 90°, 45°, 45°; б) 104°, 38°, 38°; в) 48°, 66°, 66°; г) 50°, 65°, 65°. **3.** 36°, 48°, 96°.

Вар. 2. **1.** По 60°. **2.** 100°, 40°, 40°.

Вар. 3. **1.** Не может. **2.** 30° и 60°.

Вар. 4. **2.** 80°, 80°, 20° или 40°, 40°, 100°.

С-20

Эта работа даётся на закрепление определения окружности и свойств взаимного расположения двух окружностей. Задания в работах достаточно просты и не требуют обоснований.

Вар. 1. **1.** Построение точек выполняется с использованием циркуля. **2.** Построив данную окружность, проведём её радиус и продолжим его во внешнюю часть окружности. На радиусе и на его продолжении отыскиваем центры искомых окружностей.

Вар. 2. **1.** Получено 4 отрезка. Центр окружности не лежит на этих отрезках. **2.** 2,5 см.

Вар. 3. **1.** См. вар. 2, задание 1. **2.** 6 см.

Вар. 4. **2.** Точка касания двух окружностей лежит на прямой, соединяющей их центры. Так как данные окружности имеют общий центр, то точки касания третьей окружности с ними принадлежат прямой, проходящей через их центры. Значит, четыре точки — два центра и две точки касания — лежат на одной прямой. При этом точки касания могут лежать либо по одну сторону от общего центра, либо по разные.

С-21, С-22

В качестве заданий этих работ предлагаются простейшие геометрические построения, поэтому для их выполнения учащимся достаточно указать последовательность построений и произвести их на чертеже.

С-23

Решение первых заданий (во всех вариантах) этой работы предполагает соответствующие доказательства. Для выполнения вторых заданий используются свойства серединного перпендикуляра (теорема 5.3).

Вар. 1. **1.** Серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Вар. 2. **1.** Искомое геометрическое место точек состоит из биссектрис четырёх углов, образованных при пересечении данных прямых.

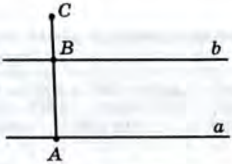


Рис. 53

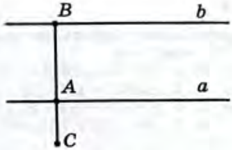


Рис. 54

Вар. 3. **1.** Прямая, параллельная данным, проходящая на одинаковом расстоянии от них.

Вар. 4. **1.** Пусть C — точка искомого геометрического места точек. Проведём через точку C прямую, перпендикулярную данным параллельным прямым a и b. Она пересечёт их в некоторых точках A и B. Имеем $AB = d$, $AC + BC = 2d$. Точка C не может лежать между A и C, так как $AC + BC = 2d \neq d$. Если точка B лежит между A и С (рис. 53), то $AB + BC = AC$, т. е. $AC = BC + d$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} AC + BC = 2d, \\ AC + BC = d, \end{cases}$$

находим: $AC = 3\frac{d}{2}$, $BC = \frac{d}{2}$. Если точка A лежит между B и C (рис. 54), то аналогично находим: $AC = \frac{d}{2}$, $BC = 3\frac{d}{2}$. Поэтому искомое геометрическое место точек состоит из двух прямых, параллельных a и b, отстоящих от них на расстояниях $\frac{d}{2}$ и $3\frac{d}{2}$ (рис. 55).

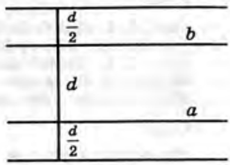


Рис. 55

С-24, С-25

Эти самостоятельные работы даны ко всему пятому параграфу, поэтому в них имеются все виды задач, встречавшиеся в работах и пунктах § 5. Наряду с этим здесь в значительной степени используется и материал всего курса геометрии VII класса. Поэтому эти две работы можно использовать и при подготовке к контрольной работе по § 5, и при организации повторения всего курса геометрии VII класса.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫМ ЗАДАНИЯМ

Д-1

Указание. При выполнении первых трёх упражнений используется основное свойство измерения отрезков: первое упражнение непосредственно связано с ним, а два остальных рассчитаны на его применение. Это же свойство используется и для объяснения ответа на вопрос четвёртого упражнения: $AD < AC$, так как точка D по условию принадлежит отрезку AC; $AC < AB$, так как C — точка отрезка AB, значит, $AD < AB$. Задание можно предлагать после изучения пункта «Измерения отрезков».

Д-2

Вар. 1. Указание. При решении заданий 2—4 используются соображения, с помощью которых решались упражнения 17—18 к § 1 учебника. По усмотрению учителя при выполнении задания 2 можно ограничиться двумя отрезками: пересекающим прямую a и не пересекающим её. Предлагать задания для выполнения следует после изучения пункта «Полуплоскости».

Вар. 2. 4. Указание. Следует дважды использовать теорему 1.1.

Д-3

Вар. 1. Указание. Первые три упражнения этого задания вполне аналогичны соответствующим упражнениям Д-1. При их решении применяется основное свойство измерения углов. Четвёртое упражнение относится к самому определению луча, проходящего между сторонами угла. Ответ на поставленный в нём вопрос положителен, если угол (ab) — развёрнутый. Кстати, для угла, который меньше развёрнутого, только один из двух дополнительных лучей c_1 или c может проходить между сторонами угла (ab). Задание можно предлагать как во время изучения § 2 учебника, так и непосредственно после изучения пункта «Угол».

Вар. 2. Указание. Проведите доказательство утверждения 1 способом от противного. В доказательстве утверждения 2 используется теорема 1.1. Для доказательства третьего надо провести отрезок с концами на сторонах угла, соединяющий точку A с одной из точек C или D. Последнее утверждение при доказательстве способом от противного сводится к третьему, так как по определению луч, проходящий между сторонами угла, пересекает какой-нибудь отрезок CD с концами на сторонах этого угла. В формулировке использовано упражнение 49 к § 1 учебника. Задание можно предлагать после изучения пункта «Доказательство от противного».

Д-4

Указание. Задание преследует цель закрепления свойств смежных углов. В упражнении 4 углы ABC и CBD имеют общую сторону, а значит, остаётся доказать, что полупрямые AB и BD — дополнительные. Для этого надо рассмотреть полупрямую, дополнительную к AB (или BD), и доказать, что она совпадает с полупрямой BD (или AB) с помощью аксиомы VII.

Д-5

Указание. Упражнения, включённые в это задание, или им подобные учащиеся уже решали при изучении предшествующего материала. Но тогда их решения не связывались явно с рассуждением от противного. Поэтому целесообразно прорешать эти задачи снова, акцентируя внимание учащихся на том, что все объяснения проводятся единым способом.

Д-6

Указание. Задание построено на материале пункта «Равнобедренный треугольник» и упражнения 1 к § 3, которое решено в самом учебнике. Упражнение 1 является подготовительным для упражнения 2, а оно, в свою очередь, — для упражнения 3. Для доказательства утверждения упражнения 4 надо продолжить медиану на её длину. Тогда получится ситуация, рассмотренная в предыдущих упражнениях.

Д-7

Вар. 1. Указание. Чтобы доказать равенство каких-нибудь двух отрезков или углов, надо указать равные треугольники, у которых данные отрезки и углы являются соответствующими элементами. С помощью утверждения упражнения 1 доказывается утверждение упражнения 2, а с помощью последних — утверждение упражнения 3. Упражнение 4 включает элементы двух предыдущих. При этом сначала надо установить равенство отрезков OB и OD, используя условие. В решениях используются все три признака равенства треугольников, поэтому задание можно предлагать после их изучения.

Вар. 2. Указание. Предложенная задача может быть решена с помощью различных признаков равенства треугольников. Всего насчитывается до семи вариантов решений. Учащимся предлагается найти только два из них. Подводя итоги, желательно проанализировать все существенно различные доказательства, найденные учащимися. При этом надо обратить особое внимание на «чистоту» доказательства: в каждом доказательстве не должно быть таких утверждений, которые не используются по существу для решения задачи. Такая постановка вопроса приучает учащихся к наиболее экономному по объёму письменному оформлению решения и способствует развитию логического мышления.

Д-8

Указание. Все упражнения данного задания решаются с помощью теоремы 4.3 в части, касающейся внутренних односторонних углов (упражнения 1—3), и её следствия (упражнение 4).

Д-9

Указание. Первые три упражнения данного задания вполне аналогичны соответствующим упражнениям предыдущего. Для решения всех упражнений используется та же теорема 4.3, но в части, касающейся внутренних накрест лежащих углов.

Д-10

Вар. 1. Указание. Упражнения 1 и 4 задания посвящены равностороннему треугольнику (кстати, для решения последнего из них надо сначала доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний). В объяснениях к ответам на вопросы упражнений 2 и 3 применяется доказательство от противного. Задание предлагается после изучения соответствующего пункта учебника.

Вар. 2. Указание. При доказательстве утверждения упражнения 3 предположить, что точки C и C_1 лежат по одну сторону от прямой AB, тогда углы CAB и C_1BA, а также углы CBA и C_1AB будут внутренними односторонними, т. е. $\angle CAB + \angle C_1BA = 180°$ и $\angle CBA + \angle C_1AB = 180°$. Но сумма углов CAB и CBA (как углов треугольника ABC) и углов C_1BA и C_1AB (как углов треугольника C_1AB) меньше 180°. Приходим к противоречию. Это утверждение также можно доказать, выполнив дополнительные построения: через каждую вершину треугольника ABC и середину противоположной стороны провести лучи и построить на них точки A_1, B_1, C_1 точно так же, как строилась точка D в доказательстве теоремы 4.4 о сумме углов треугольника.

Вар. 3. Указание. Чтобы решить задачу, сначала надо установить, какие стороны равнобедренных треугольников ACD и ABD могут быть их основаниями. Может ли сторона AB быть основанием треугольника ABD? Нет, не может, так как $\angle DAB < \angle CAB = \angle B$. Значит, его основаниями могут быть только стороны AD и BD. Может ли сторона AD быть основанием равнобедренного треугольника ADC? Нет, не может, потому что $CD < BC = AC$. Значит, основаниями этого треугольника могут быть только стороны AC и CD.

Итак, возможны четыре случая:

1. $AB = BD$ и $AC = AD$ (основания AD и CD).
2. $AB = BD$ и $AD = CD$ (основания AD и AC).
3. $AB = AD$ и $AD = CD$ (основания BD и AC).
4. $AB = AD$ и $AD = AC$ (основания BD и CD).

Разобрав со всем классом начало решения, следует предложить учащимся рассмотреть эти случаи подробно. Первый случай — первый вариант, второй — второй вариант и т. д. Причём учащиеся должны либо найти углы треугольника ABC, либо доказать, что рассматриваемый ими случай невозможен. Ответ. Случаи 1 и 4 невозможны, так как смежные углы ADB и ADC не могут быть оба острыми, т. е. углами при основании равнобедренного треугольника; в случае 2 $\angle A = \angle B = \frac{540^\circ}{7}$, $\angle C = \frac{180^\circ}{7}$; в случае 3 $\angle A = \angle B = 72^\circ$, $\angle C = 36^\circ$. Задача представляет собой развитие темы задачи № 28 к § 4 учебника.

Вар. 4. Указание. Задача повторяет упражнение 18 к § 3 учебника. Но если раньше (при изучении материала § 3) учащиеся могли решить её только с помощью признаков равенства треугольников, то в конце года они могут применить все знания, которые они получили в VII классе. Поэтому возможны решения этой задачи с использованием теоремы 4.4. Отметим два из них. Основная идея первого — доказать, что каждая сторона исследуемого треугольника (с вершинами в середине сторон данного) равна половине стороны исходного, используя свойство равнобедренного треугольника с углом 60°, противолежащим основанию. Основная идея второго — доказать сначала, что все углы исследуемого треугольника равны 60°. Следует подчеркнуть, что, хотя первое из отмеченных доказательств сложнее решения с помощью первого признака, оно даёт больше информации о свойствах рассматриваемого треугольника.

Д-11

Указание. Задание представляет собой развитие темы упражнения 50 к § 4. Использовано также упражнение 41 к § 5 (утверждение 2).

Обоснование первых двух утверждений опирается на свойство параллельных прямых как равностоящих. Выполнение третьего задания предполагает только изложение схемы построения. В случае необходимости дать следующие вводные данные: $a = 2$ см, $h = 4$ см, $r = 2$ см. Для доказательства утверждения упражнения 4 надо установить, что любая точка плоскости, равноудалённая от прямых b и c, принадлежит прямой a. При этом проще всего воспользоваться следующим свойством трёх точек на прямой: если $BX = XC$, то X — середина отрезка BC.

ОТВЕТЫ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

К-1

Вариант 1. 1°. $AB = 15$ см. 2°. $\angle(ab) = 40^\circ$. 3. а) $AM = 12{,}5$ см, $MB = 7{,}5$ см; б) расстояние между серединами отрезков AM и MB равно 10 см.

Вариант 2. 1°. $AC = 10$ см. 2°. $\angle(ca) = 10^\circ$. 3. а) $PB = 5$ см, $BK = 11$ см; б) $FD = 7$ см, $CF = 14$ см.

Вариант 3. 1°. $MK = 11$ см. 2°. $\angle(pb) = 58^\circ$. 3. AC может равняться 18 см или 4 см. 4. Не лежат.

Вариант 4. 1°. $AB = 18$ см. 2°. $\angle(pa) = 85^\circ$. 3. Не могут. 4. Не могут.

К-2

Вариант 1. 1°. а) $\angle KOB$ и $\angle BOP$, $\angle BOP$ и $\angle POA$, $\angle POA$ и $\angle AOK$, $\angle AOK$ и $\angle KOB$ (Указание. Обосновать, что эти пары углов смежные, можно для одной пары); б) $\angle AOK = \angle BOP$, $\angle AOP = \angle BOK$. 2. $\angle AOK = 30^\circ$, $\angle KOB = 150^\circ$, $\angle BOP = 30^\circ$. 3. Эти углы тупые.

Вариант 2. 1°. а) $\angle MBK$ и $\angle ABC$, $\angle KBA$ и $\angle CBM$, $\angle MBK = \angle ABC$, $\angle KBA = \angle CBM$; б) $\angle MBK + \angle KBA = 180^\circ$, $\angle KBA + \angle ABC = 180^\circ$, $\angle ABC + \angle CBM = 180^\circ$, $\angle CBM + \angle MBK = 180^\circ$. 2. $\angle KBA = 110^\circ$, $\angle ABC = 70^\circ$, $\angle MBK = 70^\circ$. 3. Эти углы прямые.

Вариант 3. 1°. а) $\angle AKM$ и $\angle MKC$, $\angle MKC$ и $\angle CKO$, $\angle CKO$ и $\angle OKA$, $\angle OKA$ и $\angle AKM$. Сумма каждой пары углов равна 180°; б) $\angle AKM = \angle CKO$, $\angle AKO = \angle CKM$, так как эти углы вертикальные. 2. $\angle AKO = 125^\circ$, $\angle AKM = 55^\circ$, $\angle CKO = 55^\circ$. 3. Эти углы острые.

Вариант 4. 1°. а) $\angle EMP$ и $\angle KMA$, $\angle PMK$ и $\angle AME$, $\angle EMP = \angle KMA$, $\angle PMK = \angle AME$; б) $\angle EMP + \angle PMK = 180°$, $\angle PMK + \angle KMA = 180°$, $\angle KMA + \angle AME = 180°$, $\angle AME + \angle EMP = 180°$. Сумма этих углов равна 180°, так как эти углы смежные. 2. $\angle AMK = 45°$, $\angle PMK = 135°$, $\angle EMP = 45°$. 3. Искомый угол равен 90°.

К-3

Вариант 1. 1°. $PM = 5$ см, $KM = 10$ см, $\angle K = 36°$.
Вариант 2. 1°. $BC = 20$ см, $\angle C = 54°$, $\angle D = 60°$.
Вариант 3. 1°. $DB = 12$ см, $OB = 74$ см, $\angle O = 76°$.
Вариант 4. 1°. $OP = 35$ см, $\angle M = 65°$, $\angle O = 102°$.

К-4

Вариант 1. 1°. $\angle 2 = 22°$. 2°. $\angle C = 80°$. 3. а) $\angle 1 = 30°$, $\angle 2 = 60°$, $\angle 3 = 90°$; б) $\angle 1 = 60°$.

Вариант 2. 1°. $\angle 2 = 100°$. 2°. $\angle C = 60°$. 3. а) Не могут; б) $\angle 2 = 40°$, $\angle 3 = 110°$.

Вариант 3. 1°. $\angle 2 = 54°$. 2°. Углы при основании равны по 60° каждый. 3. а) Не могут; б) $\angle 1 = 34°$, $\angle 3 = 78°$, $\angle 2 = 68°$.

Вариант 4. 1°. $\angle 2 = 43°$. 2°. $\angle B = 35°$, $\angle C = 110°$. 3. а) Не могут; б) $\angle 1 = 75°$, $\angle 2 = 45°$, $\angle 3 = 60°$.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ К ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

1. Не лежит, так как у прямых AB и AC уже есть одна общая точка (A).

2. Три или одну.

4. Одну или ни одной, так как прямые, содержащие данные отрезки, могут иметь не более одной точки пересечения.

5. Три точки по отношению к данной прямой могут занимать два различных положения: 1) все три точки лежат в одной из полуплоскостей, определяемых прямой a; в этом случае ни один из отрезков не пересекает прямую; 2) две точки принадлежат одной из упомянутых полуплоскостей, а третья — другой; в этом случае прямая a пересекает два отрезка, соединяющих третью точку с двумя первыми, и не пересекает отрезок с концами в этих двух точках.

6. Не могут, потому что из трёх точек на прямой только одна лежит между двумя другими (аксиома II).

7. Не лежит.

8. 149 млн 600 тыс. км; 150 млн 400 тыс. км.

9. Точка A.

10. Два. По одному в каждой из двух полуплоскостей, на которые данная полупрямая и её продолжение разбивают плоскость.

11. 140°. По аксиоме измерения углов.

12. Пересекает. Воспользуйтесь аксиомами VII и IV.

13. Нельзя.

14. Существуют. В самом деле, существует точка C, не принадлежащая прямой AB (I_1). Точки A, B и C являются вершинами треугольника, так как не лежат на одной прямой. Прямая AB разбивает плоскость на две полуплоскости (IV). В одной из них лежит точка C, а в другой существует такая точка D, что $\triangle ABD = \triangle ABC$ (по VIII).

15. Имеются: $AB = BC$.

16. Решение. Если бы прямые b и c были параллельными, то через точку C проходили бы две прямые, параллельные прямой b: прямая c и прямая AC ($AC \parallel b$ по условию). А это невозможно (по основному свойству параллельных прямых). (Учащиеся могут дать и другое решение, в котором будет фигурировать вместо точки C точка B.)

а) б) в)

Рис. 56

17. Указание. При решении этой задачи предполагается способ построения прямой, параллельной данной, с помощью линейки и угольника, который описывается в учебнике на с. 16.

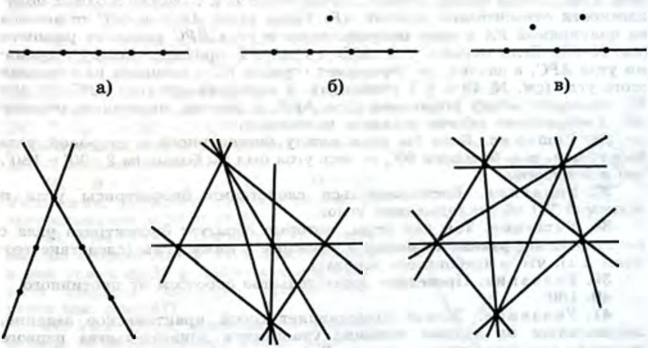
18. Указание. Для решения данной задачи надо рассмотреть все возможные случаи: из данных четырёх точек либо все они лежат на этой прямой, либо только три, либо никакие три не лежат на одной прямой.

19. Одну, четыре или шесть. **Указание.** Либо все четыре прямые проходят через одну точку (рис. 56, *а*), либо три, а четвёртая их все пересекает (рис. 56, *б*), либо никакие три из них не пересекаются в одной точке (рис. 56, *в*).

20. Главное при решении этой задачи — исследовать все случаи. Их возможная классификация такова: 1) все пять точек лежат на одной прямой (рис. 57, *а*); 2) четыре точки лежат на одной прямой, а пятая — вне этой прямой (рис. 57, *б*); 3) существуют три точки (но не более), лежащие на одной прямой. Здесь два подслучая — существует одна такая тройка (рис. 57, *в*) или две (рис. 57, *г*); 4) не существует ни одной тройки точек, лежащих на одной прямой (рис. 57, *д*, *е*).

21. 180°, 30°, 90°.

22. 97°, 5°; 90°; 172°, 5°.



а) б) в)

г) д) е)

Рис. 57

23. 48°.

24. Указание. Воспользоваться свойствами смежных углов.

25. Решение. Так как смежные углы равны, а их сумма равна 180° (по теореме 2.1), то каждый из них равен 180° : 2 = 90°, т. е. они прямые.

26. См. решение упражнения 25.

27. Углы (a_1b) и (ab_1) вертикальные.

28. Решение. Обозначим через b_1 полупрямую, дополнительную к b. Углы (a_1b) и (a_2b_1) вертикальные, а значит, равны. Поэтому углы (a_2c) и (a_2b_1) тоже равны. А так как они отложены от полупрямой a_2 в одну полуплоскость, то луч c совпадает с лучом b_1. То есть данные углы (a_1b) и (a_2c) вертикальные.

29. По 90° каждый.

30. Решение. Пусть $\angle ABC$ и $\angle ABD$ — данные прямые углы с общей стороной AB. Прямые BC и BD перпендикулярны прямой AB и проходят через точку B этой прямой. По теореме 2.3 они совпадают. Значит, точки B, C и D лежат на одной прямой. Кроме того, точки C и D не могут лежать в одной полуплоскости относительно прямой AB (от данной полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить только один угол, равный 90°). Поэтому лучи BC и BD — дополнительные полупрямые. Это означает, что данные прямые углы смежные.

31. Решение. Пусть угол (ac) равен α. Если $\alpha < 90°$, то угол $(bc) = 90° - \alpha$, что меньше 90°. Если $\alpha > 90°$, то $\angle(bc) = \alpha - 90°$, что также меньше 90°, так как $\alpha < 180°$ (по условию угол (ac) отложен в полуплоскость, а значит, не является развёрнутым). В обоих случаях угол (bc) острый.

32. Указание. Воспользоваться аксиомой IV о разбиении плоскости.

33. Указание. Взять на лучах a, a_1 (дополнительный к a) и b точки A, A_1 и B соответственно. Далее воспользоваться утверждением задачи 22 к § 2 учебного пособия применительно к лучу c и смежным углам (ab) и (a_1b).

34. Указание. Отрезок CD пересекает прямую AB, т. е. луч AB или дополнительный к нему. Рассмотрите эти случаи отдельно.

35. Решение. Прямая AP разбивает плоскость на две полуплоскости. Точка B лежит в одной из них. Если точка C лежит в другой полуплоскости, то отрезок BC пересекает прямую AP. Что и требовалось доказать. Рассмотрим теперь случай, когда точки B и C лежат в одной полуплоскости относительно прямой AP. Тогда углы APB и APC отложены на полупрямой PA в одну полуплоскость и угол BPC равен их разности (см. № 33). Если меньше угол APB, то луч PB проходит между сторонами угла APC, а значит, он пересекает отрезок BC с концами на сторонах этого угла (см. № 49 к § 1 учебника). А если меньше угол APC, то луч PC проходит между сторонами угла APB, а значит, пересекает отрезок AB. Утверждение задачи доказано полностью.

36. Решение. Если бы угол между биссектрисой и стороной угла был тупым, т. е. большим 90°, то весь угол был бы большим $2 \cdot 90° = 180°$, что невозможно.

37. Указание. Воспользоваться свойствами биссектрисы угла и аксиомой VII об откладывании углов.

38. Решение. Так как углы, которые образует биссектриса угла с его сторонами, равны, то равны и смежные с ними углы (следствие теоремы 2.1), что и требовалось доказать.

39. Указание. Проведите доказательство способом от противного.

40. 180°.

41. Указание. Задача представляет собой практическое задание, направленное на лучшее усвоение учащимися доказательства первого признака равенства треугольников. В процессе выполнения этого задания повторяются аксиомы откладывания отрезков и углов, определение равенства треугольников. При этом градусная мера угла A и длины отрезков AB и AC выбираются по согласованию с классом произвольно,

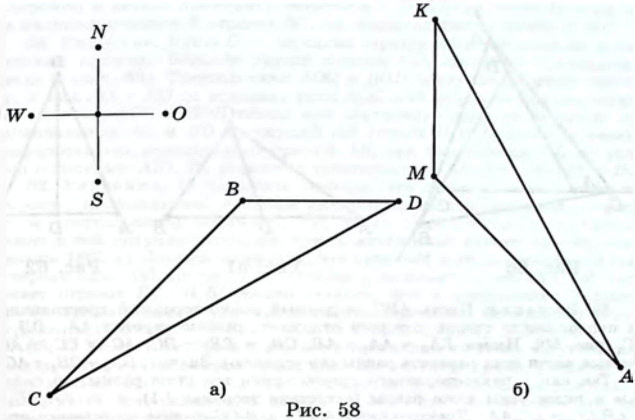


Рис. 58

но они должны быть одними и теми же для всех учащихся. Проводить аналогичную работу перед изучением второго признака не рекомендуется, так как и данная работа, и доказательство первого признака являются для этого хорошей базой. К тому же повторение одного и того же методического приёма будет нерациональной тратой времени.

42. Существует (по аксиоме VIII).

43. Части горизонта наносятся обычным образом так: север (N) — наверху, юг (S) — внизу, восток (O) — справа, запад (W) — слева. По условию посёлки B, C и D расположены так, как показано на рисунке 58, *а*. А посёлки M, K и A расположены так, как показано на рисунке 58, *б*. При этом $BD = KM = 4$ км, $BC = MA = 7$ км и $\angle CBD = \angle KMA$. Значит, треугольники CBD и KMA равны по первому признаку. А тогда $CD = KA$, что и требовалось доказать.

44. Проведём прямую AC (рис. 59). Отложим $A_1C = AC$. Через точку A_1 проведём прямую A_1B_1 так, чтобы $\angle CA_1B_1 = \angle CAB$. При этом точку B_1 выбираем так, чтобы она лежала на прямой BC. Тогда $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C$ (по стороне и двум прилежащим к ней углам). Искомая длина кабеля равна A_1B_1.

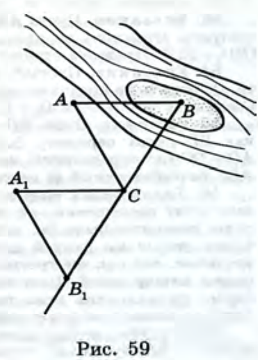


Рис. 59

45. $\angle B = 40°$, $\angle C = 50°$, $\angle M = 90°$. Указание. Докажите сначала равенство треугольников ACM и BCM.

46. Указание. Построить треугольник по стороне AM и двум прилежащим к ней углам BAM и AMN, а затем измерить стороны, лежащие против этих углов (см. рис. 47).

47. Указание. Анализируя условие задачи, её формулировку можно записать так: построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.

48. Указание. Воспользоваться утверждением № 12 к § 3 учебника.

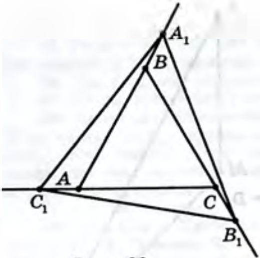


Рис. 60

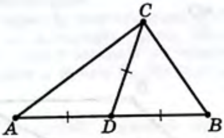


Рис. 61

Рис. 62

49. Решение. Пусть ABC — данный равносторонний треугольник, на продолжении сторон которого отложены равные отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 (рис. 60). Имеем $BA_1 = AA_1 - AB$, $CB_1 = BB_1 - BC$, $AC_1 = CC_1 - AC$. Правые части этих равенств равны (по условию). Значит, $BA_1 = CB_1 = AC_1$.

Так как у равностороннего треугольника все углы равны, то смежные с ними углы тоже равны (следствие теоремы 2.1), т. е. $\angle A_1BB_1 = \angle B_1CC_1 = \angle C_1AA_1$. Треугольники A_1BB_1 и B_1CC_1 равны по первому признаку. У них $BB_1 = CC_1$ по условию, а $A_1B = B_1C$ и $\angle A_1BB_1 = \angle B_1CC_1$ по доказанному. Из равенства треугольников следует, что $A_1B_1 = B_1C_1$. Точно так же доказывается и равенство сторон B_1C_1 и C_1A_1, для чего надо рассмотреть треугольники B_1CC_1 и C_1AA_1.

50. Точка D, обладающая указанными двумя свойствами, существует не для любого треугольника, а только для равнобедренного с основанием BC (см. № 25 к § 3 учебного пособия). Поэтому наше допущение о том, что такая точка существует для произвольного треугольника, является ошибочным.

51. Решение. Пусть медиана CD в треугольнике ABC равна половине стороны AB (рис. 61). Тогда треугольники ADC и BDC равнобедренные с основаниями AC и BC соответственно. По теореме 3.3 $\angle A = \angle ACD$, $\angle B = \angle BCD$, поэтому $\angle A + \angle B = \angle ACD + \angle BCD = \angle ACB$ (по свойству измерения углов), что и требовалось доказать.

52. 5 см. Указание. Сумма периметров двух меньших треугольников равна периметру большего, увеличенного на удвоенную длину медианы.

53. Указание. Пусть ABC — данный треугольник и CD — его биссектриса. Отложить на продолжении стороны CA (CB) отрезок $AD_1 = AD$ ($BD_2 = BD$). Провести отрезки DD_1 и DD_2.

54. Указание. Пусть ABC — данный треугольник и CD — его высота. Отложить на продолжениях стороны AB отрезки $AD_1 = AC$ и $BD_2 = BC$. Соединить точки D_1 и D_2 с C.

55. Решение. Пусть BD — медиана треугольника ABC (рис. 62). Так как BD делит периметр $\triangle ABC$ пополам, то $AB + AD = BC + CD$. Но $AD = DC$ (по определению медианы). Значит, $AB = BC$, т. е. треугольник ABC равнобедренный (с основанием AC).

56. Балки таких сооружений сами по себе почти не поддаются ни заметному растяжению, ни сокращению длины (сжатию). Под действием силы возможно было бы лишь изменение их взаимного наклона. Но с тремя сторонами данной длины может существовать только один треугольник, так как все треугольники с соответственно равными сторонами равны между собой. Поэтому при данной длине балок, скреплённых в форме треугольника даже только шарнирами, углы, составленные ими, должны оставаться неизменными.

58. В случае, когда точка D лежит на стороне BC, наше рассуждение теряет силу, поскольку тогда нет треугольника DBC (он вырождается в отрезок) и нельзя применить теорему 3.4. При этом точка D, если она не является серединой отрезка BC, не равноудалена от точек B и C.

59. Решение. Пусть O — середина отрезка AB с концами на параллельных прямых. Возьмём другой отрезок CD, которому принадлежит точка O (рис. 63). Треугольники AOC и BOD равны по второму признаку. У них $AO = BO$ по условию, углы AOC и BOD равны как вертикальные, а углы AOC и BOD равны как внутренние накрест лежащие при параллельных AC и BD и секущей AB (точки C и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB, так как отрезок CD по условию пересекает AB). Из равенства треугольников следует, что $CO = DO$.

62. Указание. 1) Докажите сначала, что прямые, содержащие эти стороны, пересекаются. А затем (воспользовавшись теоремой о сумме углов треугольника) докажите, что точка пересечения этих прямых лежит в той полуплоскости, где сумма внутренних односторонних углов меньше 180°. 2) Докажите сначала, что лучи AM и BC пересекаются (как в первом задании). Затем от противного доказывается, что луч AM пересекает отрезок BC. 3) Докажите сначала, как в предыдущем задании, что биссектриса одного угла треугольника пересекает биссектрису другого угла треугольника. 4) См. указание к предыдущему заданию.

63. 1) Указание. Надо взять все комбинации из углов треугольника по два. Таких комбинаций будет три. По условию сумма углов любой пары меньше 120°. Сложив три неравенства, слева получим удвоенную сумму углов треугольника, а справа — 360°, что невозможно, так как сумма углов треугольника равна 180°.

2) Решение. Предположим, что у треугольника есть тупой или прямой угол. Так как его градусная мера не меньше 90°, а сумма всех углов треугольника равна 180°, то сумма двух других углов треугольника не больше 90°, что противоречит условию задачи.

64. Указание. Воспользоваться теоремами 3.3, 3.4 и 4.4.

65. Указание. Воспользоваться теоремами 3.3, 4.4 и результатом задачи 16 к § 3 (можно провести доказательство и независимо от задачи 16).

67. 55°. Указание. Углы ABC и DCB являются внутренними накрест лежащими при прямых AB и CD и секущей BC.

68. Указание. Сравнить тупой угол одного из треугольников с углами другого, для чего воспользоваться теоремой 2.1 и следствием теоремы 4.5.

69. Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

70. Указание. Отложить на луче, дополнительном к лучу BA (B_1A_1), отрезок $BD = BC$ ($B_1D_1 = B_1C_1$).

71. Указание. Отложить на луче BA (B_1A_1) отрезок $BD = BC$ ($B_1D_1 = B_1C_1$). Рассмотреть различные случаи расположения точек D и D_1.

72. Указание. Воспользоваться № 39 к § 4 учебника и соображениями, применявшимися при решении задачи 70.

73. Ошибка в том, что данное «доказательство» опирается на утверждение о том, что у всех треугольников сумма углов одна и та же. А это утверждение не обосновано нами с помощью аксиом и доказанных ранее теорем.

74. Решение. Пусть даны отрезок AB, пересекающая его прямая MN и построен треугольник ABC, в котором биссектриса угла C лежит на прямой MN (рис. 64). Тогда, опустив из точки A перпендикуляр AD на прямую MN и продолжив его до пересечения с прямой BC в точке B_1, получим, что $AD = DB_1$, где D — точка пересечения прямых AB_1 и MN на основании свойства биссектрисы равнобедренного треугольника (см. № 28 к § 3 учебника). Отсюда вытекает построение: из точки A опускаем перпендикуляр AD на прямую MN и продолжаем его на расстояние $DB_1 = AD$. Точку B_1 соединяем с точкой B и продолжаем до пересечения с прямой MN в точке C. Легко доказать, что треугольник ABC искомый. Из анализа видно, что в общем случае получится единственное

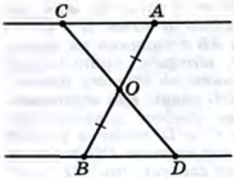


Рис. 63

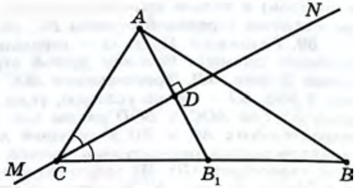


Рис. 64

решение; если же прямая MN перпендикулярна AB и проходит через его середину, то имеем бесконечное число решений; если прямая $MN \perp AB$ и не проходит через середину отрезка AB или проходит через его середину, но не перпендикулярна ему, то решения нет.

75. Указание. Опустить из точек P и Q перпендикуляры на указанную прямую и воспользоваться признаками равенства прямоугольных треугольников.

76. Указание. Опустить из точек P и Q перпендикуляры на прямую, содержащую основание треугольника, и воспользоваться признаками равенства прямоугольных треугольников.

77. Посередине между основаниями перпендикуляров, опущенных из точек, изображающих населённые пункты, на прямую, изображающую железную дорогу.

78. Если пункты A, B, C лежат на одной прямой, то дорогу следует провести через них. Если пункты A, B, C не лежат на одной прямой, то дорогу проводят либо через середину отрезка BC, либо параллельно направлению BC в зависимости от того, какой из вариантов выгоднее.

79. Указание. Опустить из точек A и C перпендикуляры на прямую BD и воспользоваться свойствами параллельных прямых.

80. Указание. Воспользоваться признаком равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету и теоремой 3.4.

81. Следует взять две точки окружности и построить окружности с центрами в этих точках и радиусами 30 мм. Точка пересечения окружностей, находящаяся внутри данной окружности, будет искомым центром.

82. Указание. Сначала с помощью циркуля строят точки A, B и C, а затем окружности с центрами A, B, C радиусами 3 см, 4 см и 6 см соответственно. Круги, ограниченные этими окружностями, — зоны приёма каждой из станций (для наглядности их удобно показать различными цветами). Для решения остаётся понять, что в случае 4) искомая зона — общая часть трёх построенных кругов, а в случае 5) — их объединение.

83. Указание. Воспользоваться теоремой 2.3.

84. Допустим, что задача решена. Тогда из условия касания окружностей получим $\begin{cases} r_1 + r_2 = 4, \\ r_1 + r_3 = 5, \\ r_2 + r_3 = 6. \end{cases}$

Складывая уравнения системы, получим $r_1 + r_2 + r_3 = 7{,}5$. После чего находим: $r_1 = 1{,}5$ см, $r_2 = 2{,}5$ см, $r_3 = 3{,}5$ см.

85. 12 см. Указание. Воспользоваться тем, что радиусы двух касающихся окружностей, проведённые в точку касания, лежат на одной прямой.

86. См. указание к задаче 85.

87. Указание. Воспользоваться утверждением № 16 к § 5 учебника.

89. Серединный перпендикуляр к отрезку AB.

90. Указание. Воспользоваться свойством серединного перпендикуляра (теорема 5.3), взяв на окружности три точки.

91. Указание. Точки пересечения окружностей равных радиусов с центрами в точках A и B равноудалены от этих точек, а значит, лежат на серединном перпендикуляре (по теореме 5.3).

92. Указание. Центр искомой окружности лежит на биссектрисе одного из углов, которые получаются при пересечении данных прямых.

93. См. указание к № 92.

94. Две прямые, содержащие биссектрисы двух пар вертикальных углов, которые образуются при пересечении данных прямых.

95. Указание. Точки, равноудалённые от прямых a и b, лежат на биссектрисах четырёх углов, образованных при их пересечении. Точки, находящиеся на одинаковом расстоянии от точек A и B, лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

96. См. указания к задаче 95.

97. Указание. 1) Прямой угол данного треугольника можно разбить на два угла, соответственно равных его острым углам. 2) Воспользоваться утверждением задачи 18 к § 5 учебника.

Содержание

Учебное издание

Гусев Валерий Александрович
Медяник Анатолий Игнатьевич

ГЕОМЕТРИЯ. ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

7 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

Редакция математики и информатики

Заведующий редакцией *Е. В. Эргле.* Ответственный за выпуск *И. В. Рекман.* Редактор *И. В. Рекман.* Младший редактор *Е. А. Андреенкова.* Художники *Е. В. Аненкова, А. Г. Бушин.* Художественный редактор *Т. В. Глушкова.* Компьютерная графика *Н. Д. Николишина.* Компьютерная вёрстка и техническое редактирование *О. В. Храбровой.* Корректор *М. Г. Волкова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 10.04.20. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура SchoolBook. Печать цифровая. Уч.-изд. л. 4,17. Тираж 500 экз. Заказ № 59836СМ.

Акционерное общество «Издательство «Просвещение». Российская Федерация, 127473, г. Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3, этаж 4, помещение I.

Предложения по оформлению и содержанию учебников — электронная почта «Горячей линии» — fpu@prosv.ru.

Отпечатано в России.

Отпечатано по заказу АО «ПолиграфТрейд»
в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
АО «Издательство «Высшая школа».
Российская Федерация, 214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.
Тел.: +7(4812) 31-11-96. Факс: +7(4812) 31-31-70.
E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru

2019702819

Дополнительные материалы размещены в электронном каталоге издательства «Просвещение» на интернет-ресурсе **www.prosv.ru**

Завершённая предметная линия учебников по геометрии для 7—9 классов общеобразовательных организаций:

- **Геометрия. 7—9 классы (автор А. В. Погорелов)**

Учебно-методический комплект по геометрии для 7 класса общеобразовательных организаций:

- Сборник примерных рабочих программ
- Учебник (автор А. В. Погорелов)
- Рабочая тетрадь (автор Ю. П. Дудницын)
- **Дидактические материалы (авторы В. А. Гусев, А. И. Медяник)**
- Тренировочные задания (авторы Ю. П. Дудницын, В. Л. Кронгауз)
- Тематические тесты (автор Т. М. Мищенко)
- Поурочные разработки (авторы В. И. Жохов, Г. Д. Карташёва, Л. Б. Крайнева)

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО
www.prosv.ru

ISBN 978-5-09-076815-3