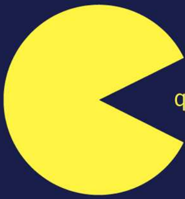
Эйн-Я Гура
Майкл Машлер



q = 61   w 1 = 40   w 2 = w 3 = w 4

Экскурс в теорию игр

Издательский дом ДЕЛО

РАНХиГС

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Ein-Ya Gura
and Michael Maschler

INSIGHTS INTO GAME THEORY

An Alternative Mathematical Experience

Эйн-Я Гура,
Майкл Машлер

ЭКСКУРС В ТЕОРИЮ ИГР

Нетипичные математические сюжеты

Перевод с английского С. В. Бусыгина
Под научной редакцией В. П. Бусыгина, М. И. Левина

| Издательский дом ДЕЛО |
Москва | 2017

УДК 51-8
ББК 22.18
Г 95

Гура, Эйн-Я, Машлер, Майкл

Г 95 Экскурс в теорию игр : нетипичные математические сюжеты / Эйн-Я Гура, Майкл Машлер; пер. с англ. С. В. Бусыгина; под науч. ред. В. П. Бусыгина, М. И. Левина. — М. : Издательский дом «Дело» РАНХиГС, 2017. — 320 с.

ISBN 978-5-7749-1198-1

Немногие разделы математики играли более важную роль в общественных науках, чем теория игр. В последние годы она стала основным инструментом анализа для всех общественных наук, изучающих стратегическое поведение конкурирующих индивидов, фирм, стран. Однако математическая сложность теории игр часто сильно пугает студентов, имеющих достаточно скромное математическое образование.

Настоящая книга решает эту проблему — знакомит учащихся с основными концепциями и идеями теории игр, не используя формальные математические обозначения. Авторы на основе четырех разных сюжетов (прием абитуриентов, социальная справедливость и голосование по правилу простого большинства, проблема банкротства в Талмуде) анализируют четыре раздела теории игр. И как результат — создают увлекательное введение в мир теории игр и ее возрастающей роли в общественных науках.

УДК 51-8
ББК 22.18

ISBN 978-5-7749-1198-1

Эта книга посвящается
памяти Майкла Машлера
(22.07.1927–20.07.2008)

Оглавление

Предисловие к русскому изданию

Задача этой книги — приоткрыть окно в мир теории игр, описать на простом языке новые математические понятия этой достаточно новой математической дисциплины и возможности их приложения в повседневной жизни. Такой подход может оказаться необычным для российского читателя, воспитанного в традиции использования строго формального математического языка в том, что касается математической учебной литературы. Тем не менее, я надеюсь, что такая книга по теории игр будет доступна для понимания и востребована российскими читателями с достаточно скромной математической подготовкой и даже учащимися старших классов школы.

Эйн-Я Гура

Предисловие

Данная книга — демонстрация возможностей «словесной математики». Авторы убедительно показывают, что математическая наука не ограничивается одними лишь символами и уравнениями. Прежде всего, ее можно охарактеризовать как «точные рассуждения достаточной глубины, сложности или изощренности». Книга будет понятна для всех, кто умеет размышлять.

Кроме того, эта книга — замечательное введение в теорию игр. Вместо того, чтобы объяснять, что же такое теория игр, авторы просто с ней работают. Если бы кто-то явился к нам с Марса и захотел узнать, что мы понимаем под музыкой, то можно было бы попытаться объяснить, что это такое, однако уместнее будет исполнить фугу Баха, арию Верди, сыграть немного джаза Луи Армстронга и спеть «Люси в небесах с алмазами». Это как раз то, что делают Эйн-Я Гура и Майкл Машлер. Приятного чтения!

Роберт Дж. Ауманн

Введение

Теория игр — относительно новый раздел математики, который берет свое начало с публикации в 1944 г. монографии Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение».

Теория игр нацелена на то, чтобы строить математические модели принятия решений, основанные на взаимодействии, и делать выводы на их основе. Моделируются ситуации, при которых группа лиц, имеющих, вообще говоря, разные интересы, должна принять общее решение.

Выбор тем отражает нашу цель: мы хотели предложить читателю материал, не требующий предварительной математической подготовки, однако содержащий фундаментальные идеи теории игр и обладающий некоторой математической изощренностью. Таким образом, мы заведомо исключили темы, относящиеся к некооперативной теории игр, поскольку они требуют некоторого знакомства с теорией вероятности, алгеброй матриц и точечно-множественной топологией.

В целом все выбранные темы отражают различные трактовки концепции «справедливого дележа». Их рассмотрению посвящены четыре главы.

В первой главе, «Математика паросочетаний», помимо всего прочего, рассматривается задача о распределении абитуриентов среди высших учебных заведений. Каждый абитуриент ранжирует университеты в соответствии с системой своих предпочтений. В свою очередь, высшие учебные заведения ранжируют абитуриентов согласно своей шкале предпочтений. Цель состоит в том, чтобы найти «соответствие» между абитуриентами и университетами. Читатель обнаружит, что эта задача имеет неожиданное решение.

Вторая глава, «Социальная справедливость», касается правил принятия общественных решений. Обычно в демократическом обществе выбор осуществляется при помощи голосования. Принимается то решение, которое поддерживает большинство избирателей. Однако вы сможете убедиться, что применение «правила большинства» не всегда дает однозначное решение. Попытка найти альтернативные правила голосования приводит к неожиданным трудностям.

Третья глава, «Вектор Шепли в кооперативных играх», помимо прочего, рассматривает следующую задачу: группа людей обращается к посреднику и сообщает ему величину ожидаемых выигрышей каждой подгруппы, а также всей группы, если подгруппы действуют независимо. Представляется, что этих данных достаточно для того, чтобы посредник смог решить, как нужно распределить выигрыш, если все участники действуют совместно.

В четвертой главе, «Анализ задачи о банкротстве из Талмуда», рассматривается следующая проблема: несколько кредиторов предъявляют претензии на имущество, однако суммарная величина претензий превышает стоимость имущества. Как поделить имущество между кредиторами? В данной главе будет предложено несколько способов решения задачи; два из них обсуждаются в Талмуде.

Как уже отмечалось ранее, эта книга не является учебником по теории игр. Скорее, она представляет собой подборку тем, лишь приоткрывающую окно в новый и увлекательный мир применения математики в социальных науках. Мы надеемся, что книга побудит читателя прослушать полный курс по теории игр.

Одна из целей данной книги — познакомить как учащихся, так и просто читателей с «другой математикой» — математикой, которая не перегружена сложными формулами, но, тем не менее, содержит глубокие идеи. Другая цель — показать, что математические методы могут эффективно использоваться для решения социальных проблем. Третья цель книги состоит в том, чтобы привить навыки математического мышления тем, кто ее изучит.

Мы полагаем, что разбор кейсов, представленных в данной книге, будет способствовать развитию математического мышления читателей.

В книге немного тем, которые, тем не менее, разобраны весьма подробно. Для тех, кто интересуется общественными науками, показано, как построить математическую модель реальных жизненных ситуаций.

Главы независимы друг от друга. Учитель и ученик смогут выбрать одну или несколько глав и изучать их в любом порядке.

Книга может быть использована в старшей школе как обучающее пособие для любого направления образовательной программы или как факультативный материал. Учитель может разобрать более продвинутые части каждой главы в классе с математическим уклоном или пропустить некоторые доказательства, если класс не готов их усвоить. Книга также будет полезна тем, кто желает самостоятельно или под руководством учителя изучать материал сверх школьной программы.

В университетах и колледжах книга окажется полезной для курсов, нацеленных на ознакомление с общими

вопросами теории игр и развитие навыков математического мышления.

Книга обязана своим появлением докторской диссертации одной из соавторов, Эйн-Я Гура. Мы выражаем свою благодарность Центру по преподаванию наук им. Амоса Де-Шалита при Еврейском университете в Иерусалиме за разрешение опубликовать перевод с иврита, Центру исследования рациональности за финансирование перевода, и переводчику, Майклу Борнсу, — не только за качественный перевод, но и за редакторский профессионализм. Мы благодарим Джеймса Морроу за время, уделенное прочтению оригинала, и за ценные замечания; Цура Шапира за рекомендацию для издательства Кембриджского университета, а также Криса Харрисона и коллектив издательства Кембриджского университета за содействие и помощь в приведении книги к ее окончательному виду. И, наконец, мы благодарим Роберта Ауманна за то, что он вдохновил нас опубликовать версии данной книги на иврите и английском.

Эйн-Я Гура, Майкл Машлер
Еврейский университет в Иерусалиме
Апрель 2008 г.

1
Математика паросочетаний

1.1. Вступление

Вышедшая в 1962 г. в корпорации *RAND*[1] работа Дэвида Гейла и Ллойда С. Шепли[2] под названием «Прием в колледж и стабильность браков» удивила ученых. В ней затрагивался ряд злободневных вопросов.

По словам Гейла[3], работа обязана своим появлением статье из еженедельника «Нью-Йоркер» от 10 сентября 1960 г., где автор описывает трудности, связанные с поступлением в Йельский университет.

Тогда, как и сейчас, студенты могли подавать заявления в несколько университетов, и приемная комиссия не имела представления о том, насколько серьезными были намерения претендентов. Те студенты, которые имели достаточно оснований для манипуляций, могли создать у приемной комиссии впечатление, что каждый из университетов является для них приоритетным, при этом

---

[1] «Research and Development», исследовательский центр в США. — *Прим. ред.*

[2] *Gale D., Shapley L. S.* College Admissions and the Stability of Marriage // American Mathematical Monthly. 1962. Vol. 69. P. 9–15.

[3] *Gale D.* The Two-Sided Matching Problem: Origin, Development and Current Issues // International Game Theory Review. 2001. Vol. 3. P. 237–252.

университеты могли зачислять слишком много студентов, предполагая, что многие из них не появятся. Процесс в итоге превратился в игру «угадайка». Самое главное, создавалось впечатление, что итоговые списки зачисленных были далеко не оптимальными.

Прочитав эту статью, Гейл и Шепли решили начать сотрудничать. Первым делом они определили понятие устойчивого паросочетания, а затем доказали, что такое паросочетание между студентами и университетами всегда существует. В настоящей главе будут рассмотрены эти и дальнейшие исследования по данной теме.

Для простоты Гейл и Шепли начали с нереалистичного случая, когда имеется ровно n университетов, n кандидатов, и каждый университет имеет одну вакансию. Более правдоподобным соответствием для описанного случая может служить паросочетание мужчин и женщин — отсюда и название их работы.

1.2. Задача о паросочетаниях

Рассмотрим сообщество, в котором число мужчин совпадает с числом женщин.

Цель. Предложить подходящую систему паросочетаний (бракосочетаний) для данного сообщества[4]. Чтобы получить такую систему, нам необходима релевантная информация о сообществе. Соответственно, следует попросить каждого из членов сообщества ранжировать участников противоположного пола в соответствии со своими предпочтениями относительно потенциальных партнеров. Предположим, что ни один участник (мужчина или женщина) не окажется безразличным при выборе между двумя и более участниками противополож-

[4] Значение слова «подходящий» выяснится вскоре.

ного пола[5]. Например, если список предпочтений Эла состоит из Энн, Бет, Шер и Дот именно в таком порядке, то на первое место он ставит Энн, на второе Бет, на третье Шер и на четвертое Дот[6]. Напомним, что мы предполагаем, что Эл не окажется безразличным при выборе между двумя и более женщинами из своего списка.

Пример
Мужчины — Эл, Боб, Кэл и Дэн.
Женщины — Энн, Бет, Шер и Дот.
Их списки предпочтений имеют следующий вид.

Предпочтения женщин

	Энн	Бет	Шер	Дот
Эл	1	1	3	2
Боб	2	2	1	3
Кэл	3	3	2	1
Дэн	4	4	4	4

Предпочтения мужчин

	Энн	Бет	Шер	Дот
Эл	3	4	1	2
Боб	2	3	4	1
Кэл	1	2	3	4
Дэн	4	3	2	1

Пояснение. Число в таблице отражает место (ранг) мужчины или женщины в соответствии с предпочтениями. Например, согласно ранжированию женщин мужчинами, Эл ставит на первое место Шер, на второе Дот, на третье Энн и на четвертое Бет. В соответствии с ранжированием мужчин женщинами, у Шер на первом месте стоит Боб, на втором Кэл, на третьем Эл и на четвертом Дэн. Таким образом, Эл ставит Шер на первое место, в то время как Шер ставит Эла только

[5] Это предположение введено, чтобы упростить задачу. В разделе 1.10 мы увидим, как обойтись без такого предположения.

[6] Если Эл предпочитает скорее Энн, чем Бет, и скорее Бет, чем Шер, то из этого следует, что он предпочитает скорее Энн, чем Шер. Соответственно, мы можем записать все его предпочтения в одной строке.

на третье место. Тогда сочетание Эла и Шер не будет успешным в случае, если кандидат из списка Шер на первом или втором месте согласится образовать с ней пару.

Зная предпочтения каждого члена сообщества, можете ли Вы предложить систему паросочетаний для этого сообщества?

Возможное предложение

Эл	Боб	Кэл	Дэн
|	|	|	|
Дот	Энн	Бет	Шер
2×2	2×2	2×3	2×4

Числа под каждой парой указывают на ранг, который каждый из членов этой пары присваивает своему партнеру. Число слева указывает на ранг женщины, присваиваемый ей мужчиной; число справа — на ранг мужчины, присваиваемый ему женщиной. (Проверьте это!)

Аргументы в пользу данного предложения

1) Ни один из участников какой-либо пары не ставит своего партнера на первое место.

2) Ни в какой паре участники не ранжируют друг друга как 2×1 или 1×2.

3) Участники двух пар ставят своих партнеров на вторые места.

4) Кэл мог бы образовать пару с Шер или Бет, хотя он предпочитает Бет.

5) Остаются Дэн и Шер, которые могут образовать пару только друг с другом.

Это действительно возможный вариант, однако он недостаточно хорош. Он очень не нравится Шер, поскольку она образует пару с наименее предпочтительным для нее партнером. Она может попытаться сделать предложение Бобу, но получит отказ, так как в своем листе предпочтений он ставит ее на последнее место. Шер не достигнет лучшего результата и с Кэлом, поскольку ее ранг у Кэла равен трем, а свою нынешнюю партнершу он ставит на второе место. С другой стороны, если Шер сделает предложение Элу, ему оно понравится, так как Шер занимает первое место среди всех имеющихся у Эла вариантов.

Итак, это предложение будет отвергнуто, потому что Шер и Эл предпочитают друг друга своим потенциальным партнерам и, следовательно, не согласятся на предложение посредника.

Другое возможное предложение. Попытаемся составить пары так, чтобы соединить каждого мужчину с предпочтительной для него партнершей.

Для Эла наилучший выбор — это Шер.

Для Боба — Дот.

Для Кэла — Энн.

Для Дэна — Дот.

Очевидно, что и здесь возникает проблема: как Боб, так и Дэн предпочитают Дот. Мы можем сочетать Дэна с Шер, которая у него на втором месте, однако она уже сочетается с Элом. Разрешит ли проблему третий наилучший выбор Дэна? На третьем месте у него Энн, которая образует пару с Кэлом. Тогда у Дэна остается его наихудший вариант, Бет.

Эл	Боб	Кэл	Дэн
|	|	|	|
Шер	Дот	Энн	Бет
1 × 3	1 × 3	1 × 3	4 × 4

Трое из четырех мужчин оказываются в паре с теми, кого ставят на первое место. Как вы думаете, будет ли принято такое предложение?

Еще одно предложение. Теперь попытаемся составить пары так, чтобы сочетать каждую из женщин с наиболее предпочтительным для нее партнером.

Для Энн наилучший выбор — Эл.

Для Бет — это Эл.

Для Шер — это Боб.

Для Дот — это Кэл.

Мы убеждаемся, что если Энн образует пару с первым по приоритету партнером, то есть, с Элом, то Бет не может сделать то же самое и должна сочетаться с кем-то другим. Мы можем сочетать ее с ее вторым по приоритету партнером, с Бобом, но он уже образует пару с Шер. А ее третий по приоритету партнер, то есть Кэл, сочетается с Дот. Таким образом, Бет остается с наименее предпочтительным для нее партнером, с Дэном.

Новая система паросочетаний имеет следующий вид.

Энн	Бет	Шер	Дот
|	|	|	|
Эл	Дэн	Боб	Кэл
3 × 1	4 × 4	4 × 1	4 × 1

Три из четырех женщин оказываются в паре с теми, кого в своем листе предпочтений ставят на первое место. Согласятся ли женщины на такие варианты паросочетаний?

Бет будет против данных паросочетаний. Например, она может предложить Бобу отказаться от такого варианта паросочетаний и образовать пару. В этом случае Бет будет сочетаться с кандидатом, который у нее на втором месте, что лучше четвертого, а Боб — с третьей по рангу, что для него предпочтительнее, чем с четвертой. Таким образом, предложенная система паросочетаний будет отвергнута Бет и Бобом.

Упражнение. Проанализируйте второе из указанных выше предложений и выясните, будет ли оно отвергнуто какой-либо парой мужчин и женщин.

Несмотря на то, что первое из указанных выше предложений было отвергнуто, мы можем извлечь из него пользу. Мы поняли, что система паросочетаний должна удовлетворять следующему требованию.

Система паросочетаний должна быть такой, что в ней не найдется ни одного мужчины и ни одной женщины, не образующих пару, но предпочитающих друг друга своим нынешним партнерам.

Пояснение. Система паросочетаний должна быть такой, что в ней госпожа X не может сочетаться с господином x и г-жа Y не может сочетаться с г-ном y, если г-жа X предпочитает г-на y г-ну x, и г-н y, в свою очередь, предпочитает г-жу X г-же Y.

$$\begin{array}{rccc} \text{Женщины:} & X & \cdots & Y \\ & \vdots & \nwarrow\!\!\searrow & \vdots \\ \text{Мужчины:} & x & \cdots & y \end{array}$$

На диаграмме представлена «невозможная» часть системы паросочетаний. Двойная стрелка означает, что X предпочитает y, а не x, а y в свою очередь предпочитает X, а не Y.

Если пары *X* – *x* и *Y* – *y* образованы в соответствии с рекомендацией посредника, то г-н *y* сообщит г-же *X*: «Ты предпочитаешь меня своему нынешнему партнеру, а я предпочитаю тебя своему. Давай оставим их и составим пару».

Комментарий. Образуют ли пару г-жа *X* и г-н *y*? Не обязательно! Г-н *y* мог бы заявить г-же *X*: «Да, я предпочитаю Вас, г-жа *X*, г-же *Y*, но я Вам предпочитаю г-жу *Z*».

Если г-ну *y* повезет и г-жа *Z* тоже предпочитает его нынешнему партнеру, то они смогут образовать пару. В противном случае наилучшим выбором г-жи *Y* будет г-н *x*, который предпочитает ее своей партнерше. *В любом случае рекомендация посредника не будет реализована*.

Определение. Система паросочетаний называется *устойчивой*, если в ней не найдется ни одного мужчины и ни одной женщины, не образующих пару, однако предпочитающих друг друга своим нынешним партнерам.

Пример. Для упрощения возьмем буквы латинского алфавита вместо имен.

Мужчины: *a, b, c, d.*

Женщины: *A, B, C, D.*

Структура предпочтений

	A	*B*	*C*	*D*
a	1	2	4	2
b	2	4	2	1
c	3	1	1	3
d	4	3	3	4

	A	*B*	*C*	*D*
a	4	2	1	3
b	2	1	3	4
c	3	1	4	2
d	2	4	1	3

Устойчивые пары для указанной системы предпочтений обведены кружком. В дальнейшем мы научимся находить подобные устойчивые системы.

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

$$2 \times 2 \quad 1 \times 1 \quad 1 \times 3 \quad 3 \times 2$$

Замечание. Положение кружков в двух схемах должно быть одинаковым.

Проверка. Г-н *c* и г-н *d* оказываются в паре с теми, кого ставят на первое место, следовательно, им дальше искать не нужно. Г-н *b* предпочитает г-жу *B* своей нынешней партнерше, г-же *A*, но г-жа *B* ему откажет, так как в ее листе предпочтений он на последнем месте. Г-н *a* предпочитает г-жу *B* и г-жу *C* своей партнерше, г-же *D*. Однако если он сделает предложение г-же *B*, то получит отказ, поскольку является ее вторым наилучшим выбором, а ее нынешний партнер — первым. Если он сделает предложение г-же *C*, то также получит отказ, поскольку в ее листе предпочтений он на последнем месте.

Комментарий. Если ни один мужчина не желает уклониться от рекомендации посредника, тогда не имеет значения, желает ли какая-либо из женщин что-то изменить, так как она не сможет найти мужчину, который согласится пойти ей навстречу. Таким образом, нет необходимости продолжать проверку.

1.3. Упражнения

1. Для заданной структуры предпочтений проверьте, являются ли устойчивыми предложенные системы паросочетаний. Аргументируйте свой ответ.

Женщины: *A, B, C.*

Мужчины: *a, b, c.*

Предпочтения женщин

	A	B	C
a	1	1	1
b	2	2	2
c	3	3	3

Предпочтения мужчин

	A	B	C
a	1	2	3
b	1	2	3
c	1	2	3

i.

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

ii.

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

2. Для заданной структуры предпочтений проверьте, устойчивы ли следующие системы паросочетаний.

Женщины: *A, B, C.*

Мужчины: *a, b, c.*

Предпочтения женщин

	A	B	C
a	2	2	1
b	1	3	3
c	3	1	2

Предпочтения мужчин

	A	B	C
a	1	2	3
b	1	2	3
c	1	2	3

i.

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

ii.

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

iii.

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

iv.

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

3. Рассмотрим следующую структуру предпочтений в сообществе из четырех мужчин и четырех женщин.

Женщины: *A, B, C, D*.

Мужчины: *a, b, c, d*.

Предпочтения женщин

	A	*B*	*C*	*D*
a	1	2	4	2
b	2	4	2	1
c	4	1	1	3
d	3	3	3	4

Предпочтения мужчин

	A	*B*	*C*	*D*
a	4	2	1	3
b	2	1	3	4
c	3	1	4	2
d	2	4	1	3

(1) Устойчива ли следующая система паросочетаний?

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

Если да, то объясните почему. Если нет, укажите, какие пары не будут следовать рекомендациям.

(2) Устойчива ли такая система паросочетаний?

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$$

Если да, то поясните почему. Если нет, укажите, какие пары не будут следовать рекомендациям.

(3) Используя предложенную структуру предпочтений, составьте свою систему паросочетаний для данного общества и проверьте ее устойчивость.

4. Рассмотрим следующую структуру предпочтений в сообществе из пяти мужчин и пяти женщин.

Женщины: *A, B, C, D, E*.

Мужчины: *a, b, c, d, e*.

Предпочтения женщин

	A	B	C	D	E
a	5	4	3	2	1
b	1	5	4	3	2
c	2	1	5	4	3
d	3	2	1	5	4
e	4	3	2	1	5

Предпочтения мужчин

	A	B	C	D	E
a	1	2	3	4	5
b	5	1	2	3	4
c	4	5	1	2	3
d	3	4	5	1	2
e	2	3	4	5	1

(1) Докажите, что следующие системы паросочетаний являются устойчивыми.

i.

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$$

ii.

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ e & a & b & c & d \end{pmatrix}$$

iii.

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ d & e & a & b & c \end{pmatrix}$$

iv.

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ c & d & e & a & b \end{pmatrix}$$

(2) Постройте другую систему паросочетаний с аналогичной структурой. Устойчива ли она?

(3) Проверьте, противоречат ли предпочтения женщин в данной структуре предпочтениям мужчин. Например, г-жа A является наилучшим выбором для г-на a, в то время как г-н a оказывается наихудшим выбором г-жи A.

1.4. Дополнительные примеры

В этом разделе мы рассмотрим несколько примеров структур предпочтений и проверим, существуют ли для них устойчивые системы паросочетаний.

Пример 1. Структура предпочтений имеет вид:

	A	*B*
a	1	1
b	2	2

	A	*B*
a	1	2
d	1	2

Существуют всего две системы паросочетаний для сообщества из двух мужчин и двух женщин. Посмотрим, устойчивы ли они.

i.

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ \mid & \nwarrow\!\!\!\searrow & \mid \\ b & & a \end{pmatrix}$$

ii.

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ \mid & & \mid \\ a & & b \end{pmatrix}$$

i. Эта система неустойчива. Двойная стрелка указывает, как она может быть разрушена.

ii. Эта система оказывается устойчивой, поскольку *A* и *a* образуют пару со своими наиболее предпочтительными партнерами и, следовательно, не станут уклоняться от рекомендации посредника.

Пример 2. Структура предпочтений имеет вид:

	A	*B*
a	2	1
b	1	2

	A	*B*
a	1	2
d	1	2

Возможные системы паросочетаний такие же, как и в Примере 1.

i.

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ \mid & & \mid \\ b & & a \end{pmatrix}$$

ii.

$$\begin{pmatrix} A & & B \\ \mid & \nwarrow\!\!\!\searrow & \mid \\ a & & b \end{pmatrix}$$

i. Эта система является устойчивой в силу того, что *A* и *b* образуют пару со своими наиболее предпочтительными партнерами и, следовательно, не станут уклоняться от рекомендации посредника.

ii. Эта система оказывается неустойчивой, так как *A* и *b* сочетаются со вторыми по приоритету партнерами, и если они образуют между собой пару, их положение улучшится.

Пример 3. Структура предпочтений имеет вид:

$$\begin{array}{c|c|c|} & A & B \\ \hline a & 2 & 1 \\ b & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc|} & A & B \\ \hline a & 1 & 2 \\ \hline b & 2 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Возможны следующие системы паросочетаний:

i.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ | & | \\ b & a \end{pmatrix}$$

ii.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ | & | \\ a & b \end{pmatrix}$$

i. Эта система является устойчивой в силу того, что *A* и *B* образуют пары со своими наиболее предпочтительными партнерами и, следовательно, откажутся от смены партнеров.

ii. Эта система тоже устойчива, поскольку и *a,* и *b* образуют пары со своими наиболее предпочтительными партнерами и, следовательно, откажутся уклониться от рекомендации посредника.

Данный пример показывает, что если представители одной из сторон (например, мужчины) образуют пары со своими наиболее предпочтительными партнерами, то есть одна из сторон довольна такими паросочетаниями, то представители другой стороны не способны разрушить эту систему независимо от того, насколько они недовольны своими партнерами.

В устойчивой системе паросочетаний не обязательно удовлетворены все участники. Система паросочетаний устойчива, если ни одной из возможных, но не образовавшихся в соответствии с ней пар не выгодно уклониться от рекомендации и соединиться в пару.

Другими словами, устойчивая система служит интересам посредника, чья рекомендация будет выполнена, однако не обязательно служит интересам всех членов сообщества.

Пример 4. Структура предпочтений имеет вид:

	A	B	C
a	3	2	1
b	1	3	2
c	2	1	3

	A	B	C
a	1	2	3
b	3	1	2
c	2	3	1

Две устойчивые системы паросочетаний в этом примере довольно очевидны:

i. Мужчины образуют пары со своими наиболее предпочтительными партнершами:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

ii. Женщины образуют пары со своими наиболее предпочтительными партнерами:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

Существует также и третий вариант устойчивой системы, при котором и мужчины, и женщины сочетаются со своим вторым по предпочтительности партнером:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

Действительно, все те, кто попытаются заполучить своего наилучшего партнера, получат отказ, так как они на третьем месте в листе предпочтений своих фаворитов (проверьте это!).

Для данной структуры предпочтений есть еще три системы паросочетаний (см. ниже). Докажите, что все они неустойчивы.

i. $\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ c & b & a \end{pmatrix}$ ii. $\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ b & a & c \end{pmatrix}$ iii. $\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ a & c & b \end{pmatrix}$

Объясните, почему нет других систем паросочетаний.

Пример 5. Задача выбора соседа. Предположим, что нам необходимо распределить четное число юношей в комнаты по двое. Как и ранее, множество пар будет называться устойчивым, если в нем нельзя найти двух юношей, не являющихся соседями по комнате, которые предпочитают друг друга своим нынешним соседям. Мы увидим, что устойчивое распределение не всегда существует. В следующем примере возможны три варианта распределения по парам. Но каждый из них не является устойчивым.

	a	b	c	d
a	—	1	2	3
b	2	—	1	3
c	1	2	—	3
d	1	2	3	—

Стрелки указывают на те пары, которые, скорее всего, разрушат распределение.

i.

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ | & \nwarrow\!\!\searrow & | \\ d & & c \end{array}$$

ii.

$$\begin{array}{ccc} a & \leftrightarrow & b \\ | & & | \\ c & & d \end{array}$$

iii.

$$\begin{array}{ccc} a & & c \\ | & \swarrow\!\!\nearrow & | \\ b & & d \end{array}$$

В этом примере d — наихудший выбор всех юношей, следовательно, его сосед станет подыскивать себе другого соседа. В каждом случае нынешний сосед d сможет найти партнера, который ценит его больше всех остальных и поэтому согласится уклониться от предлагаемого распределения.

Таким образом, последний пример показывает, что в задаче о выборе соседа устойчивое распределение существует не всегда. С другой стороны, все рассмотренные нами примеры задач бракосочетания имели устойчивые паросочетания. Всегда ли это верно — вопрос неочевидный и требует либо доказательства, либо приведения контрпримера.

Обратите внимание на разницу между этими случаями: в задаче о выборе соседа возможны пары из любых участников, в то время как в задаче о бракосочетании не все пары возможны, а именно — нельзя составить пару только из женщин или только из мужчин.

1.5. Упражнения

1. Существует ли устойчивое разделение на пары при следующей структуре предпочтений у юношей? Если да, приведите пример. Если нет, докажите почему, проверив все возможные варианты.

	a	*b*	*c*	*d*
a	—	1	2	3
b	3	—	1	2
c	1	2	—	3
d	2	3	1	—

2. Существует ли устойчивое разделение на пары при следующей структуре предпочтений у юношей? Если да, приведите пример. Если нет, докажите почему, проверив все возможные варианты.

	a	*b*	*c*	*d*
a	—	3	1	2
b	2	—	1	3
c	2	3	—	1
d	1	3	2	—

3. Существует ли устойчивое разделение на пары при следующей структуре предпочтений? Если да, приведите пример.

	a	*b*	*c*	*d*
a	—	2	3	1
b	1	—	3	2
c	3	2	—	1
d	1	2	3	—

4. Существует ли устойчивое разделение на пары при следующей структуре предпочтений? Если да, приведите пример.

	a	b	c	d
a	—	1	3	2
b	2	—	1	3
c	2	1	—	3
d	2	3	1	—

1.6. Процедура нахождения устойчивой системы паросочетаний (алгоритм Гейла — Шепли)

В связи с поиском устойчивой системы паросочетаний естественным образом возникают три вопроса.

1. Всегда ли существует устойчивая система паросочетаний для заданной структуры предпочтений? Напомним, что в задаче о выборе соседа устойчивое разделение на пары существует не всегда. Всегда ли оно существует в задаче о паросочетаниях?
2. Каким образом искать устойчивые системы паросочетаний?
3. Является ли устойчивая система паросочетаний единственной? (Ответ — нет; в рассмотренных ранее примерах встречалось более одной устойчивой системы.)

В этом разделе будет дан положительный ответ на первый вопрос на основе применения методики, которая приводит к устойчивой системе паросочетаний. Тем самым будет дан ответ и на второй вопрос.

Алгоритм Гейла — Шепли для нахождения устойчивых паросочетаний

Первый шаг. Каждый мужчина делает предложение женщине, стоящей на первом месте в его списке предпочтений. Каждая женщина, получившая более одного предложения, выбирает среди них наилучший вариант, а каждому из остальных претендентов сообщает, что никогда не выйдет за него. Каждый мужчина, не получивший отказа, помещается в «лист ожидания» той женщины, которой он сделал предложение.

Второй шаг. Каждый мужчина, который оказался отвергнутым, делает предложение женщине, стоящей на втором месте в его списке предпочтений. Если женщина получает более одного предложения, включая любые предложения, полученные на предыдущем шаге, она выбирает наилучший для нее вариант, помещая его в свой «лист ожидания». Остальным она сообщает об отказе.

Третий шаг. Каждый мужчина, получивший отказ, делает предложение следующей в списке его предпочтений женщине — второй, если он находился в «листе ожидания» на предыдущем этапе, и третьей, если уже был отвергнут дважды. И снова каждая женщина выбирает наилучшего кандидата среди тех, кто сделал ей предложение, включая кандидата из предыдущего листа ожидания, и заносит его в лист ожидания, отказывая остальным.

Процедура продолжается до тех пор, пока не останется получивших отказ мужчин. На этом шаге каждый мужчина из списка кандидатов становится партнером, и процедура завершается.

Далее будет доказано, что эта процедура приводит к устойчивой системе паросочетаний.

Пример 1. Структура предпочтений имеет вид:

	A	*B*	*C*	*D*
a	3	3	2	3
b	4	1	3	2
c	2	4	4	1
d	1	2	1	4

	A	*B*	*C*	*D*
a	1	2	3	4
b	1	4	3	2
c	2	1	3	4
d	4	2	3	1

Шаг 1

A	*B*	*C*	*D*
a	*c*		*d*
b *			

Господин *b*, отмеченный звездочкой (*), получает отказ. Остальные попадают в лист ожидания.

Шаг 2

A	*B*	*C*	*D*
a	*c*		*d* *
			b

Господин *d* получает отказ (несмотря на то, что находился в листе ожидания на предыдущей стадии). Остальные заносятся в лист ожидания.

Шаг 3

A	*B*	*C*	*D*
a	*c* *		*b*
	d		

Господин *c* получает отказ.

Шаг 4

A	*B*	*C*	*D*
a *	*d*		*b*
c			

Господин *a* получает отказ.

Шаг 5

A	B	C	D
c	d		b
	a *		

Господин *a* снова получает отказ.

Шаг 6

A	B	C	D
c	d	a	b

Процедура завершается, и предлагаемая система паросочетаний имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$$

Упражнение. Докажите, что эта система является устойчивой.

Пример 2. Структура предпочтений имеет вид:

	A	B	C	D
a	1	3	4	3
b	2	1	2	4
c	3	2	3	1
d	4	4	1	2

	A	B	C	D
a	1	2	3	4
b	1	2	4	3
c	1	2	4	3
d	4	1	2	3

Шаг 1

A	B	C	D
a	d		
b *			
c *			

b и *c* получают отказ.

Шаг 2

A	B	C	D
a	d *		
	b		
	c *		

c и d получают отказ.

Шаг 3

A	B	C	D
a	b	d	c

Алгоритм завершается, и предлагаемая система паросочетаний имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ a & b & d & c \end{pmatrix}$$

1.7. Упражнения

1. Используя алгоритм Гейла — Шепли, найдите устойчивую систему паросочетаний для следующей структуры предпочтений, если мужчины делают предложения женщинам.

Женщины: A, B, C, D.

Мужчины: a, b, c, d.

	A	B	C	D
a	1	2	4	2
b	2	4	2	1
c	3	1	1	3
d	4	3	3	4

	A	B	C	D
a	4	2	1	3
b	2	1	3	4
c	3	1	4	2
d	2	4	1	3

2. Используя алгоритм Гейла — Шепли, найдите устойчивую систему паросочетаний для следующей структуры предпочтений, если женщины делают предложения мужчинам.

Женщины: *A, B, C*.

Мужчины: *a, b, c*.

	A	*B*	*C*
a	3	2	3
b	2	3	1
c	1	1	2

	A	*B*	*C*
a	1	2	3
b	1	2	3
c	2	1	3

3. Найдите устойчивую систему паросочетаний для следующей структуры предпочтений, если (1) мужчины делают предложения женщинам, (2) женщины делают предложения мужчинам.

Женщины: *A, B, C, D, E*.

Мужчины: *a, b, c, d, e*.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
a	5	4	4	5	1
b	4	5	4	5	2
c	3	2	3	2	3
d	2	3	1	1	4
e	1	1	2	3	5

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
a	1	2	3	4	5
b	1	2	4	3	5
c	2	1	3	5	4
d	4	2	1	5	3
e	4	3	2	1	5

1.8. Устойчивая система паросочетаний всегда существует

В данном разделе мы докажем, что для любой структуры предпочтений существует хотя бы одна устойчивая система паросочетаний. Разобьем доказательство на два этапа. Для начала установим, что процедура, описанная в разделе 1.6, имеет конечное число стадий. Затем покажем, что на последней стадии выполнения алгоритма мы получаем устойчивую систему паросочетаний.

Теорема. *Алгоритм Гейла — Шепли имеет конечное число стадий.*

Комментарий. Прежде чем перейти к доказательству, объясним, для чего нужна эта теорема. На первый взгляд, может показаться, что процесс предложений и отказов может продолжаться бесконечно долго. Можно также предположить, что кто-то из мужчин окажется отвергнутым всеми женщинами, расположения которых он добивается, и, таким образом, выпадет из системы. В этом случае одна из женщин тоже окажется одинокой. Ниже мы докажем, что подобные ситуации на самом деле невозможны.

Доказательство

(1) В рассматриваемом нами сообществе число мужчин совпадает с числом женщин. Таким образом, если какая-то из женщин получает более одного предложения, то найдется другая женщина, которая не получает ни одного.

(2) Если женщина уже получала какое-то предложение, у нее в дальнейшем всегда будет хотя бы одно предложение, поскольку кто-то всегда будет в ее листе ожидания.

(3) Если предложение получила каждая женщина, то все они имеют ровно по одному предложению в силу того, что число мужчин совпадает с числом женщин. На этой стадии алгоритм заканчивается, и остается лишь доказать, что до нее всегда возможно дойти.

(4) Дойти до стадии, на которой все женщины получили предложение, возможно, поскольку на каждой

стадии мужчины делают предложение тем женщинам, которые оказываются следующими в их списке предпочтений; следовательно, они не могут возвращаться и снова делать предложения тем женщинам, кто их отверг. Поскольку число мужчин и женщин в сообществе конечно и нет повторных предложений, то должна быть достигнута стадия, на которой каждая женщина получает предложение. Таким образом, согласно пункту (3) доказательства, процедура завершается на данной стадии.

Теорема. *В результате применения алгоритма Гейла — Шепли мы получаем устойчивую систему паросочетаний.*

Доказательство

Рассмотрим систему паросочетаний, полученную с помощью алгоритма Гейла — Шепли. Далее ограничимся всего лишь двумя парами из этой системы.

$$\begin{array}{ccccc} \ldots & R & \ldots & S & \ldots \\ & | & \nwarrow & | & \\ \ldots & r & \ldots & s & \ldots \end{array}$$

Предположим, что г-н s предпочитает г-жу R своей настоящей партнерше, г-же S. Требуется доказать, что г-жа R не предпочитает г-на s своему партнеру, г-ну r, и, значит, откажется от его предложения в случае, если он такое предложение сделает. В самом деле, если г-н s предпочитает г-жу R (г-же S), следовательно, ранее он делал ей предложение. Но так как г-н s сейчас не сочетается с г-жой R, значит, на это предложение г-жа R уже ответила отказом. Почему был получен отказ? Потому что на том этапе г-же R поступило другое предложение, которое она нашла более приемлемым (не обязательно, чтобы это было предложение от г-на r). Возможно, что на одном из более поздних шагов г-ну *s* предпочли того, кто также сделал предложение г-же *R* и оказался для нее более предпочтительным. И так далее.

В конечном счете г-н *r* сделал предложение г-же *R*, а она предпочла его всем остальным мужчинам, которые делали ей предложение вплоть до этого шага, включая и г-на *s*. Итак, мы смогли показать, что по завершении алгоритма Гейла — Шепли не удастся найти ни одного мужчины и ни одной женщины, которые не сочетаются между собой, но предпочитают друг друга своим фактическим партнерам. Таким образом, алгоритм действительно приводит к устойчивой системе паросочетаний.

1.9. Максимальное количество стадий в алгоритме Гейла — Шепли

В предыдущем разделе мы доказали, что в результате применения алгоритма Гейла — Шепли мы всегда получаем устойчивую систему паросочетаний за конечное число шагов. Теперь выясним, каково максимальное число *шагов* в алгоритме, если число мужчин равно числу женщин.

Пример

	A	*B*
a	1	2
b	2	1

	A	*B*
a	1	2
b	1	2

Процедура сватовства г-на *a* и г-на *b*:

$$\begin{array}{cc} A & B \\ \hline a & \\ b\,* & \\ \hline & b \end{array}$$

Пояснение. Наиболее предпочтительным выбором как для г-на *a*, так и для г-на *b* является г-жа *A*, следовательно, они делают ей предложение на первом этапе. Г-жа *A* предпочитает г-на *a* г-ну *b*, значит, *b* получает отказ. На втором шаге *b* делает предложение г-же *B*, и алгоритм завершается, приводя к устойчивой системе паросочетаний:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ | & | \\ a & b \end{pmatrix}$$

Процесс сватовства в сообществе из двух мужчин и двух женщин может занимать всего один шаг — если оба мужчины не сделают предложение одной и той же женщине. В этом случае не будет отказов, и процедура сватовства завершается уже на первом шаге.

Итак, процесс сватовства в сообществе из двух мужчин и двух женщин продлится не более двух шагов, поскольку на первом шаге отвергнутым будет не более чем один мужчина, и он обязательно найдет партнершу на следующем шаге.

В следующих примерах будут рассмотрены сообщества из трех мужчин и трех женщин.

Пример 1

	A	*B*	*C*
a	2	3	1
b	3	1	3
c	1	2	2

	A	*B*	*C*
a	1	2	3
b	1	3	2
c	2	1	3

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \hline a & c & \\ b\,* & & \\ \hline & & b \end{array}$$

Устойчивая система паросочетаний

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

будет получена после двух шагов: на первом каждый мужчина сделает предложение наиболее предпочтительной для него женщине, а на втором — г-н b, который ранее получил отказ, сделает предложение женщине, стоящей на втором месте в его листе предпочтений. На данной стадии алгоритм завершается, поскольку на предыдущем этапе г-жа C не получила предложений, однако теперь предложение получила каждая женщина.

Пример 2

	A	B	C
a	2	3	1
b	3	1	3
c	1	2	2

	A	B	C
a	1	2	3
b	1	3	2
c	3	2	1

$$\begin{array}{ccc} A & B & C \\ \hline a & & c \\ b\,* & & \\ \hline a & & c \\ & & b\,* \\ \hline a & b & c \end{array}$$

Устойчивая система паросочетаний

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

будет получена на третьем этапе. В алгоритме только два отказа: г-ну b отказали дважды — на первом и втором этапе. Таким образом, алгоритм состоит из трех этапов: на первом каждый мужчина делает предложение самой предпочтительной для него женщине, и *b* получает отказ. На втором этапе *b* делает предложение второй в его листе предпочтений женщине и снова получает отказ. Наконец, на третьем этапе *b* делает предложение третьей, последней в его листе предпочтений женщине, г-же *B*, но отказа не получает, так как на предыдущих этапах она не получала предложений. И теперь у каждой женщины есть ровно одно предложение.

Пример 3

	A	*B*	*C*
a	2	3	3
b	3	1	1
c	1	2	2

	A	*B*	*C*
a	1	2	3
b	1	2	3
c	2	1	3

A	*B*	*C*
a	*c*	
b *		
a	*c* *	
	b	
a *	*b*	
c		
c	*b*	
	a *	
c	*b*	*a*

Устойчивая система паросочетаний

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

получена на пятом этапе.

Пояснение. Каждый из мужчин оказывается отвергнутым хотя бы раз: на первом этапе каждый мужчина делает предложение самой предпочтительной для него женщине, и г-н b получает отказ; на втором этапе г-н b делает предложение второй в его листе предпочтений женщине, и г-ну c отказывают; на третьем этапе г-н c делает предложение второй в его листе предпочтений женщине, и г-н a получает отказ; на четвертом этапе г-н a делает предложение второй в его листе предпочтений женщине и снова получает отказ. На следующем этапе г-н a делает предложение третьей в его листе предпочтений женщине, г-же C, которая его не отвергает, поскольку ранее не имела предложений.

В дальнейшем будет доказано, что максимально возможное количество этапов получения устойчивой системы паросочетаний для сообщества из трех мужчин и трех женщин — пять.

Прежде чем перейти к обсуждению общего случая, рассмотрим пример сообщества из четырех мужчин и четырех женщин.

Пример 4

	A	B	C	D
a	3	2	1	3
b	4	3	2	4
c	1	4	3	2
d	2	1	4	1

	A	B	C	D
a	1	2	3	4
b	1	2	3	4
c	3	1	2	4
d	2	3	1	4

	A	B	C	D
1)	a	c	d	
	b *			
2)	a	c *	d	
		b		
3)	a	b	d *	
			c	
4)	a *	b	c	
	d			
5)	d	b *	c	
		a		
6)	d	a	c *	
			b	
7)	d *	a	b	
	c			
8)	c	a *	b	
		d		
9)	c	d	b *	
			a	
10)	c	d	a	b

Пояснение. На первом этапе все мужчины делают предложения женщинам, которые стоят на первом месте в их рейтинге. Каждый мужчина оказывается отвергнутым дважды и после очередного отказа делает предложение следующей женщине в его списке предпочтений. Таким образом, эти два отказа добавляют восемь стадий сватовства. Г-н *b* получает отказ трижды, поэтому его предложение четвертой в его листе предпочтений женщине добавляет еще один шаг. Следовательно, весь алгоритм состоит из десяти этапов. В сообществе из четырех мужчин и четырех женщин число стадий сватовства в алгоритме Гейла — Шепли не превышает 10: первый шаг, плюс по два отказа каждому мужчине, и плюс максимум еще один отказ одному из мужчин.

Теорема. *Если число мужчин в обществе совпадает с числом женщин и равно* n*, то максимальное число шагов алгоритма равно* $n^2 - 2n + 2$.

Доказательство. Алгоритм завершается в тот момент, когда каждая женщина получит предложение, в результате чего у всех женщин будет в точности одно предложение. Следовательно, максимальное число шагов будет достигнуто в том случае, когда на каждом шаге отвергается ровно один мужчина, и одна женщина остается без предложения после того, как все мужчины сделали предложение всем женщинам, кроме нее; то есть они сделали предложение $(n - 2)$ женщинам после первого шага. Поскольку всего имеется n мужчин, это занимает $n(n - 2)$ шагов. Таким образом, максимальное число шагов не превышает

$$\underset{\text{первый шаг}}{1} + \underset{\text{отказы}}{n(n-2)} + \underset{\text{финальный шаг}}{1} = n^2 - 2n + 2$$

Ранее рассмотренные примеры показывают, что при $n = 3$ и $n = 4$ максимум действительно достигался (проверьте!), и подобные примеры могут быть построены для произвольного n.

1.10. Обобщение

I. Число мужчин не совпадает с числом женщин.

В любой системе паросочетаний для сообщества, в котором число мужчин не равно числу женщин, какие-то мужчины или какие-то женщины останутся без пары. Алгоритм Гейла — Шепли и его результаты можно обобщить и на этот случай.

Пример
Женщины: *A, B, C, D, E*.
Мужчины: *a, b, c*.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
a	1	2	1	2	1
b	3	3	2	1	2
c	2	1	3	3	3

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
a	5	1	2	3	4
b	4	1	2	5	3
c	5	4	1	3	2

(1) Предложения со стороны мужчин

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ \hline & a & c & & \\ & b\,^* & & & \\ \hline & a & c\,^* & & \\ & & b & & \\ \hline - & a & b & - & c \end{array}$$

Алгоритм приводит к следующей системе паросочетаний

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ - & a & b & - & c \end{pmatrix}$$

A и *D* остаются без пары.

(2) Предложения со стороны женщин

a	b	c
A *	D	B
C		
E *		
C	D *	B
	E	A *
C	E	B
D *	A *	
C	E	B *
		D
C *	E	D
B		
B	E *	D
	C	
B	C	D *
		E
B	C	E

A исключается на четвертом шаге, *D* — на последнем.

Снова *A* и *D* остаются без пары, и мы получаем следующую систему паросочетаний:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ - & a & b & - & c \end{pmatrix}$$

Упражнение. Проверьте, устойчива ли данная система паросочетаний. При ответе необходимо учитывать тех женщин, которые остались без пары.

Упражнение. Докажите, что в результате применения алгоритма Гейла — Шепли мы всегда получаем устойчивую систему паросочетаний (даже если число мужчин не равно числу женщин).

II. Существование списка предпочтений, в который включены не все члены противоположного пола.

В следующем примере есть мужчины, которые скорее предпочтут остаться одинокими, чем сочетаться с некоторыми женщинами. Аналогичным образом, есть женщины, которые скорее предпочтут остаться одинокими, чем сочетаться с некоторыми мужчинами. В таких случаях предпочтение остаться без партнера, нежели сочетаться с определенным партнером будет обозначаться нулем (0). Теперь покажем, что алгоритм Гейла — Шепли можно применить и для этого случая.

Пример. Структура предпочтений имеет вид:
Женщины: *A, B, C*.
Мужчины: *a, b, c, d*.

	A	*B*	*C*
a	1	1	0
b	2	2	0
c	0	3	0
d	3	4	1

	A	*B*	*C*
a	3	1	2
b	0	1	2
c	1	2	3
d	1	0	2

Предложение со стороны мужчин

A	*B*	*C*
c *	*a*	
d	*b* *	
d	*a*	
	c *	*b* *
d	*a*	*c* *

b, c и C останутся без партнеров. Получаем систему паросочетаний:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ d & a & - \end{pmatrix}$$

Докажите, что даже те, кто оказался без партнеров, не смогут разрушить систему.

III. Возможное безразличие.

До этого момента мы рассматривали ситуации, при которых у каждого члена сообщества была строгая система предпочтений относительно представителей противоположного пола. Иначе говоря, ни одному из участников не может оказаться все равно, кого выбрать из двух и более кандидатов. Как уже говорилось в разделе 1.2, предположение об отсутствии безразличия при выборе партнеров было введено для упрощения процедуры. Теперь мы докажем, что от данного требования можно отказаться.

Посмотрим, что произойдет, если возможна ситуация безразличия. Член сообщества, безразличный к выбору между двумя и более партнерами противоположного пола и все же вынужденный ранжировать их, может заявить: «Г-жа B для меня наилучший выбор; что касается второго места, то я безразличен между A и D; относительно третьего места, для меня одинаково предпочтительны C и E, а четвертое место — это F».

Оказывается, что существуют устойчивые системы паросочетаний даже при наличии безразличия.

Определение. Система паросочетаний называется устойчивой, если в ней не найдется ни одного мужчины и ни одной женщины, не образующих пару, однако предпочитающих друг друга своим фактическим партнерам.

Комментарий. Как следует из определения, мы предполагаем, что мужчина не уйдет от своей партнерши к другой женщине, если он безразличен к выбору между ними, и женщина не уйдет от своего партнера к другому мужчине, если она безразлична к выбору между ними.

Вплоть до настоящего момента мы исходили из предположения, что структура предпочтений каждого члена сообщества является строгой, т. е. не содержит безразличий. Данное ограничение с легкостью обходится при помощи произвольного задания строгого предпочтения на альтернативах, эквивалентных для данного члена сообщества.

Рассмотрим следующий пример:

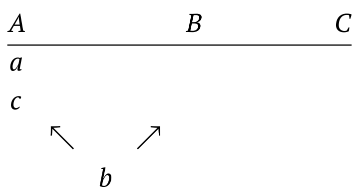
Женщины: *A, B, C*.

Мужчины: *a, b, c*.

	A	*B*	*C*
a	3	1	3
b	2	2	1
c	1	3	2

	A	*B*	*C*
a	1	2	2
b	1	1	2
c	1	2	3

В этом примере г-жа *A* — наилучший выбор г-на *a*, но он безразличен при выборе между *B* и *C*, которые в его структуре предпочтений имеют более низкий ранг, чем *A*. *A* и *B* — наилучшие варианты для г-на *b*, но он безразличен при выборе между ними; второе место в его рейтинге занимает г-жа *C*. Предпочтения женщин не содержат безразличий. Воспользуемся алгоритмом Гейла — Шепли.



В соответствии со структурой предпочтений *a* и *c* делают предложение *A*, которая для них стоит на первом месте, но *b* не колеблется, потому что одинаково высоко ранжирует *A* и *B*. Для продвижения вперед изменим данную структуру предпочтений, так, чтобы в ней не содержалось эквивалентных альтернатив, а именно — оставим строгое ранжирование альтернатив без изменений и введем ранжирование эквивалентных альтернатив, когда такие альтернативы имеются. Например:

	A	*B*	*C*
a	3	1	3
b	2	2	1
c	1	3	2

	A	*B*	*C*
a	1	3	2
b	2	1	3
c	1	2	3

Вопрос. Почему в строке, представляющей предпочтения г-на *b*, мы записали 3 (приписали г-же *C* ранг 3)?

Для этой структуры предпочтений мы можем воспользоваться алгоритмом Гейла — Шепли и получить устойчивую систему паросочетаний.

Сватовство со стороны мужчин:

A	*B*	*C*
a *	*b*	
c		
c	*b*	*a*

Получаем устойчивую систему паросочетаний:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

Является ли эта система устойчивой также для исходной структуры предпочтений? Угрожает ли устойчивости этой системы приведенная ниже зависимость?

$$\begin{pmatrix} A & & B & & C \\ | & & | & \nwarrow\!\!\searrow & | \\ c & & b & & a \end{pmatrix}$$

В самом деле, г-жа *B* предпочитает г-на *a* своему партнеру, но г-н *a* не предпочитает г-жу *B* г-же *C*; он безразличен к этому выбору. Анализ всевозможных взаимосвязей показывает, что уклонения от рекомендаций посредника невозможны. Таким образом, система оказывается устойчивой и в исходной структуре предпочтений.

Рассмотрим теперь другую структуру предпочтений, в которой никто не безразличен к выбору. Снова оставим строгое ранжирование альтернатив без изменений и введем ранжирование эквивалентных альтернатив, когда таковые имеются. Например:

	A	*B*	*C*
a	3	1	3
b	2	2	1
c	1	3	2

	A	*B*	*C*
a	1	2	3
b	2	1	3
c	1	2	3

Предположим, что все мужчины делают предложения согласно алгоритму Гейла — Шепли.

$$\begin{array}{r|ccc} & A & B & C \\ \cline{2-4} & a^{*} & b & \\ 1) & c & & \\ \cline{2-4} & c & b^{*} & \\ 2) & & a & \\ \cline{2-4} & c & a & \\ 3) & b^{*} & & \\ \cline{2-4} & c & a & b \end{array}$$

В таком случае мы получаем устойчивую систему паросочетаний:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

Данная система также будет устойчивой и в исходной структуре предпочтений (проверьте!)

Вывод. Чтобы найти устойчивую систему паросочетаний для имеющейся структуры предпочтений с безразличиями, необходимо сконструировать альтернативную структуру предпочтений, в которой нет безразличий, и найти устойчивую систему паросочетаний с помощью алгоритма Гейла — Шепли. Эта система паросочетаний также будет устойчивой и для исходной структуры предпочтений. Заметим, что алгоритм Гейла — Шепли, который приводит к единственной устойчивой системе паросочетаний при отсутствии безразличий, может привести к нескольким устойчивым системам при их наличии.

Утверждение. *Любая устойчивая система паросочетаний в «исправленной» структуре предпочтений, не содержащей безразличий, также устойчива в исходной структуре предпочтений с наличием безразличия*.

Доказательство. Предположим обратное: устойчивая система паросочетаний в исправленной структуре предпочтений оказывается неустойчивой в исходной структуре предпочтений с безразличиями. Тогда, согласно исходной структуре, найдутся г-жа X и г-н y, не образующие пару, но предпочитающие друг друга своим фактическим партнерам. Поскольку отношения предпочтения (в отличие от отношений безразличия) не меняются при переходе к исправленной структуре предпочтений с отсутствием безразличий, то и в ней X и y будут предпочитать друг друга своим фактическим партнерам. Таким образом, система паросочетаний окажется неустойчивой в исправленной структуре предпочтений, что противоречит нашему предположению.

Полученное противоречие служит подтверждением того, что сделанное нами в начале доказательства предположение неверно; следовательно, устойчивая система паросочетаний в пересмотренной структуре предпочтений будет также устойчива и в исходной структуре предпочтений с безразличиями.

1.11. Упражнения

1. Для данной структуры предпочтений найдите устойчивую систему паросочетаний, используя алгоритм Гейла — Шепли, исходя из того, что предложения делают мужчины.

Женщины: *A, B, C.*
Мужчины: *a, b, c, d.*

	A	*B*	*C*
a	1	1	3
b	3	2	1
c	2	3	2
d	4	4	4

	A	*B*	*C*
a	3	2	1
b	1	2	3
c	2	1	3
d	1	2	3

2. Для данной структуры предпочтений найдите устойчивую систему паросочетаний, используя алгоритм Гейла — Шепли, исходя из того, что (1) предложения делают мужчины, (2) предложения делают женщины.

Женщины: *A, B, C, D, E*.
Мужчины: *a, b, c*.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
a	3	1	1	1	2
b	2	2	0	2	1
c	1	3	2	0	0

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
a	1	3	2	5	4
b	1	2	0	3	4
c	3	2	1	0	0

3. Для данной структуры предпочтений найдите устойчивую систему паросочетаний, используя алгоритм Гейла — Шепли, исходя из того, что предложения делают женщины.

Женщины: *A, B, C*.
Мужчины: *a, b, c, d*.

	A	*B*	*C*
a	1	1	0
b	2	0	1
c	3	2	3
d	4	0	2

	A	*B*	*C*
a	0	0	1
b	3	1	2
c	2	1	0
d	2	3	1

4. Предположим, что сообщество состоит из трех мужчин и трех женщин. В соответствии со следующей структурой предпочтений, один мужчина и одна женщина в обществе безразличны к выбору между партнерами противоположного пола.

Женщины: *A, B, C*.
Мужчины: *a, b, c*.

	A	*B*	*C*
a	1	2	1
b	3	3	1
c	2	1	1

	A	*B*	*C*
a	2	1	3
b	1	1	1
c	1	2	3

Определите, какие из перечисленных ниже систем паросочетаний являются устойчивыми. Если система неустойчива, укажите, из-за каких пар. Если система устойчива, объясните почему.

i.

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

ii.

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

iii.

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

iv.

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ b & a & c \end{pmatrix}$$

v.

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

vi.

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

Существуют ли другие системы паросочетаний для данного сообщества? Обоснуйте свой ответ.

5. Сообщество состоит из трех мужчин и трех женщин. Структура предпочтений такова, что один мужчина безразличен к выбору между всеми женщинами в данном сообществе.

Женщины: *A, B, C*.
Мужчины: *a, b, c*.

	A	*B*	*C*
a	1	1	3
b	2	3	1
c	3	2	2

	A	*B*	*C*
a	2	3	1
b	1	1	1
c	1	2	3

(1) Найдите устойчивую систему паросочетаний с помощью алгоритма Гейла — Шепли.

(2) Постройте еще одну устойчивую систему паросочетаний.

6. В следующей структуре предпочтений г-жа B безразлична при выборе между всеми мужчинами. Найдите устойчивую систему паросочетаний, если предложения делают мужчины, для следующих случаев:

(1) B предпочитает a, d, b, c в таком порядке.

(2) B предпочитает d, c, b, a в таком порядке.

Одинаковы ли системы паросочетаний в обоих случаях?

Женщины: A, B, C.
Мужчины: a, b, c, d.

	A	B	C
a	1	1	2
b	2	1	1
c	0	1	3
d	0	1	0

	A	B	C
a	3	1	2
b	1	2	0
c	2	1	0
d	0	1	0

7. В следующей структуре предпочтений г-н a безразличен при выборе между г-жой A и г-жой B. Найдите устойчивую систему паросочетаний, исходя из предположения, что:

(1) a предпочитает A, B, C, D в таком порядке.

(2) a предпочитает B, A, C, D в таком порядке.

Выясните, приводит ли применение алгоритма Гейла — Шепли к одной и той же системе паросочетаний в случае, если мужчины делают предложения женщинам, и наоборот.

Женщины: *A, B, C, D*.
Мужчины: *a, b, c, d, e*.

	A	*B*	*C*	*D*
a	0	3	1	1
b	3	4	2	0
c	1	0	3	3
d	0	1	4	2
e	2	2	5	0

	A	*B*	*C*	*D*
a	1	1	2	3
b	1	0	2	3
c	2	3	1	4
d	1	2	0	3
e	0	1	2	0

8. Найдите все устойчивые системы паросочетаний, которые получаются при использовании алгоритма Гейла — Шепли, если предложения делают мужчины.

Женщины: *A, B, C*.
Мужчины: *a, b, c*.

	A	*B*	*C*
a	2	2	3
b	1	1	1
c	1	2	2

	A	*B*	*C*
a	1	1	2
b	2	3	1
c	2	1	2

9. Для данной структуры предпочтений постройте устойчивую систему паросочетаний.

Женщины: *A, B, C, D*.
Мужчины: *a, b, c, d*.

	A	*B*	*C*	*D*
a	0	2	1	4
b	1	3	0	1
c	1	1	2	2
d	2	2	3	3

	A	*B*	*C*	*D*
a	1	1	2	0
b	3	1	2	2
c	1	2	3	4
d	0	1	2	0

1.12. Алгоритм Гейла — Шепли и задача о приеме абитуриентов

Рассмотренная нами задача о паросочетаниях практически малоприменима, хотя и интересна сама по себе. Сватовство в реальной жизни мало чем напоминает алгоритм Гейла — Шепли. К примеру, в реальной жизни подбор партнера осуществляется не вполне обдуманно, скорее случайным образом, а не в соответствии с некоторой формальной процедурой.

В данном разделе мы покажем, что при некотором обобщении алгоритм Гейла — Шепли может оказаться полезным и в повседневной жизни. Задача о приеме на медицинский факультет, к которой мы сейчас обратимся, служит одним из многих примеров использования математики при решении практических задач.

Задача о приеме на медицинский факультет

Во многих странах большое количество абитуриентов пытаются поступить на относительно небольшое число медицинских факультетов. В результате борьбы за ограниченное число мест возникает ряд проблем. Поскольку кандидатов больше, чем выделенных мест, многие абитуриенты подают заявления сразу на несколько медицинских факультетов. Предположим, что на некотором медицинском факультете количество заявок от кандидатов превышает количество мест. В этом случае приемная комиссия оценивает всех кандидатов и решает, кого принять, а кого не принимать. Факультет согласится принять одних абитуриентов, если есть свободные места, и откажет в приеме другим, менее подготовленным абитуриентам, даже при наличии мест.

Априори решение кажется очевидным: следует принимать самых подготовленных абитуриентов, пока их не наберется нужное количество. Тем не менее данное решение неосуществимо на практике: может случиться так, что не все абитуриенты, получившие одобрение заявки от рассматриваемого факультета, действительно предпочтут его другим медицинским факультетам, также одобрившим заявку. Если кто-то пойдет учиться на другой факультет, то план приема не будет выполнен.

Мы могли бы предложить другое решение: медицинский факультет одобряет большее число заявок, чем количество выделенных мест. Однако и такое решение несовершенно: если число студентов, которые предпочтут другой факультет, окажется недостаточным, то число зачисленных превысит число доступных мест.

Ни один из рассмотренных исходов нельзя улучшить, поскольку приемная комиссия не обладает всей необходимой информацией о каждом соискателе:

(1) Неизвестно, подал ли он заявку куда-то еще.
(2) Неизвестно, как он ранжирует медицинские факультеты, в которые подал заявку.
(3) Неизвестно, какие из других медицинских факультетов примут его заявку.

Вследствие такой неопределенности медицинские факультеты должны быть готовы к тому, что итоговый набор не будет соответствовать плану и только часть принятых студентов на поверку окажутся действительно хорошими.

Обычная процедура зачисления связана со многими проблемами и для абитуриентов:

(1) абитуриенты настораживаются, и не без причины, когда их просят сообщить о своих предпочтениях. К примеру, абитуриент, которого попросили

ранжировать все медицинские факультеты, куда он подал заявку, может подумать, что его шансы на поступление резко упадут, если он сообщит, что данный факультет для него на третьем месте.

(2) допустим, что медицинские факультеты составляют так называемый «лист ожидания». Абитуриент может быть извещен о том, что пока не принят, но, возможно, будет принят позднее, если будут вакантные места. Это приводит к другим проблемам. Предположим, что абитуриент уже принят на один медицинский факультет и находится в «листе ожидания» другого, более предпочтительного для него факультета.

1. Стоит ли ему действовать осторожно и пойти учиться на первый факультет или рискнуть, надеясь, что его примут на второй факультет позднее?
2. Будет ли этичным согласиться на предложение первого факультета, не уведомляя второй, но затем отказаться от этого решения в том случае, если абитуриента все-таки примут на другой факультет?

Корень всех описанных выше проблем — недостаток информации у приемных комиссий медицинских факультетов, с одной стороны, и (не вполне безосновательная) настороженность абитуриентов — с другой. Здесь уместно задать вопрос, какое отношение эта неопределенность имеет к задаче о паросочетаниях? Как мы увидим в дальнейшем, обобщение алгоритма Гейла — Шепли на этот случай позволяет преодолеть все вышеперечисленные трудности, приводя к устойчивому решению.

Решить эту задачу и распределить абитуриентов по медицинским факультетам можно с помощью независимого «центра распределения», если сбор информации и распределение[7] проводятся следующим образом.

(i) Каждый претендент обращается в центр распределения и предоставляет список медицинских факультетов, на которые он хотел бы быть принятым, не включая в него только те, на которые он поступить не хочет, даже если там окажутся свободные места.

(ii) Каждый претендент упорядочивает медицинские факультеты в соответствии со своими предпочтениями. (Для удобства будем предполагать, что для него не существует равноценных вариантов; то есть при решении мы имеем дело со строгим отношением предпочтения.) Далее он предоставляет эту информацию в центр распределения.

(iii) Центр распределения рассылает на каждый медицинский факультет список всех претендентов, выбравших данный факультет.

(iv) Каждый медицинский факультет анонсирует квоту на зачисление.

(v) Каждый медицинский факультет предоставляет в центр распределения список всех претендентов, упорядоченный в соответствии с его собственными предпочтениями, и сообщает, кто из претендентов не будет зачислен, даже если найдутся свободные места.

Теперь центр распределения располагает всей необходимой информацией для пересмотра списка предпочтений каждого претендента путем вычеркивания всех факультетов, которые его никогда не примут. На данном этапе уже можно перейти к процедуре распределения

[7] Распределение (назначение) — это установление соответствий между абитуриентами и местами. В данном разделе рассматривается частный случай общей задачи о назначениях.

претендентов по медицинским факультетам с помощью алгоритма Гейла — Шепли следующим образом.

(*a*) Все претенденты направляются на медицинский факультет, находящийся на первом месте в их уточненном листе предпочтений. Если для какого-то факультета число претендентов меньше или равно квоте, они помещаются в его лист ожидания. Если число кандидатов больше квоты, то отбор претендентов происходит согласно предпочтениям факультета; все оставшиеся кандидаты получают отказ.

(*b*) Кандидатуры получивших отказ претендентов передаются в следующий по их предпочтениям медицинский факультет. Они добавляются к его листу ожидания предыдущего этапа. Если число претендентов в этом листе меньше или соответствует квоте, то все они помещаются в новый лист ожидания. В противном случае происходит отбор на основании предпочтений факультета до заполнения квоты, а все оставшиеся кандидаты получают отказ.

Процедура продолжается до последнего отказа. Процесс завершается, когда каждый абитуриент либо оказывается в листе ожидания, либо отвергается всеми факультетами, на которые хотел бы поступить. На этой стадии все медицинские факультеты зачисляют всех претендентов из своих списков ожидания. Оставшиеся абитуриенты не будут зачислены ни на один медицинский факультет. Полученное таким образом распределение устойчиво.

1.13. Упражнения

1. Для заданной структуры предпочтений постройте устойчивое распределение абитуриентов на медицинские факультеты с помощью алгоритма Гейла — Шепли.

Медицинские факультеты:

A — квота 3 человека.
B — квота 4 человека.
C — квота 6 человек.

Абитуриенты — *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o*.
Структура предпочтений:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*
A	1	5	2	4	3	10	6	9	11	7	8	14	12	13	15
B	1	4	2	3	6	14	5	13	12	11	7	8	9	15	10
C	5	2	1	14	6	12	13	7	8	9	10	11	15	3	4

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*
A	1	3	1	1	2	2	3	2	2	3	1	1	2	2	1
B	2	1	3	2	1	3	2	1	3	1	2	3	1	3	2
C	3	2	2	3	3	1	1	3	1	2	3	2	3	1	3

2. Рассмотрим 5 медицинских факультетов:

A — квота 9 человек.
B — квота 6 человек.
C — квота 7 человек.
D — квота 5 человек.
E — квота 4 человека.

и 20 абитуриентов: *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t*.
Структура предпочтений:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*	*l*	*m*	*n*	*o*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*
A	8	9	1	0	0	0	2	3	0	6	4	5	0	0	10	0	0	0	0	7
B	1	2	3	4	5	6	7	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C	1	2	0	0	0	0	0	3	6	0	4	5	8	9	0	0	0	0	0	7
D	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	5	0
E	2	3	0	4	1	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t
A	1	0	2	1	2	1	5	1	0	2	1	1	0	0	0	0	0	4	1	1
B	2	0	3	0	1	0	1	2	0	0	2	2	4	0	0	0	1	0	2	0
C	3	0	4	0	3	0	2	3	0	0	3	3	1	1	1	0	0	1	3	2
D	0	1	5	0	0	2	3	4	0	0	4	0	2	2	0	1	0	2	4	0
E	0	2	1	0	0	3	4	0	1	1	5	0	3	0	0	0	0	3	5	0

При помощи алгоритма Гейла — Шепли найдите устойчивое распределение при условии, что факультеты «делают предложения» абитуриентам.

3. Имеется 5 медицинских факультетов:

A — квота 3 человека.
B — квота 2 человека.
C — квота 1 человек.
D — квота 3 человека.
E — квота 1 человек.

и 10 абитуриентов: *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j*.

Структура предпочтений следующая:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
A	10	5	1	4	2	7	3	6	8	9
B	10	5	1	4	2	7	3	6	8	9
C	10	5	1	4	2	7	3	6	8	9
D	10	5	1	4	2	7	3	6	8	9
E	10	5	1	4	2	7	3	6	8	9

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
C	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
D	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
E	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Найдите устойчивое распределение с помощью алгоритма Гейла — Шепли, если:

(1) абитуриенты подают заявления на факультеты;
(2) факультеты делают предложения абитуриентам.

Что можно сказать об этих двух распределениях?

4. Докажите, что применение алгоритма Гейла — Шепли к задаче о распределении из предыдущего раздела приводит к устойчивому распределению.

5. Опишите, как можно использовать алгоритм Гейла — Шепли для решения задачи о распределении в случае, если факультеты делают предложения абитуриентам.

1.14. Оптимальность

Как было показано ранее, некоторые структуры предпочтений могут давать в результате несколько устойчивых систем паросочетаний. Тогда возникает ряд вопросов.

(1) Существует ли устойчивая система паросочетаний, которая устраивает всех? При отсутствии безразличий ответ будет отрицательным, поскольку, если имеются две системы паросочетаний, во второй системе как минимум один мужчина окажется в паре с другой женщиной. Следовательно, он обязательно предпочтет одну систему другой.
(2) Существует ли устойчивая система паросочетаний, которую предпочтут мужчины? Как ни странно, ответ оказывается положительным. Аналогично и для женщин: существует устойчивая система паросочетаний, которую предпочтут женщины. Проиллюстрируем каждое утверждение.

Пример. Рассмотрим следующую структуру предпочтений.

Женщины: *A, B, C, D*.
Мужчины: *a, b, c, d*.

	A	*B*	*C*	*D*
a	3	4	1	1
b	2	2	3	4
c	4	1	2	3
d	1	3	4	2

	A	*B*	*C*	*D*
a	2	1	4	3
b	3	2	1	4
c	2	4	3	1
d	4	2	1	3

Если предложения делают мужчины, то применение алгоритма Гейла — Шепли приводит к следующей системе паросочетаний (проверьте!).

Система 1

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ a & d & b & c \end{pmatrix}$$

Если предложения делают женщины, то применение алгоритма Гейла — Шепли приведет к другой системе паросочетаний (проверьте!):

Система 2

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ d & b & c & a \end{pmatrix}$$

Следующая система паросочетаний, которую нельзя получить алгоритмом Гейла — Шепли, тоже является устойчивой (проверьте!).

Система 3

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

Других устойчивых систем паросочетаний для данной структуры предпочтений не существует (проверьте!).

По схеме ниже видно, какое место в системе предпочтений досталось каждому мужчине и каждой женщине во всех случаях.

				Сватовство со стороны мужчин				**Сватовство со стороны женщин**				**Другая система**			
A	*B*	*C*	*D*	3	3	3	3	1	2	2	1	3	2	2	2
a	*b*	*c*	*d*	2	1	1	2	3	2	3	4	2	2	3	3
				Система 1				**Система 2**				**Система 3**			

Посмотрим, какую из систем предпочтет каждая женщина, и какую — каждый мужчина:

> *A* выберет систему 2, поскольку в ней у *A* наиболее предпочтительный вариант.
> *B* предпочтет систему 2 или 3, так как в них у *B* второй вариант из ее рейтинга, а наилучшего нет нигде.
> *C* предпочтет систему 2 или 3 по той же самой причине, что и *B*.
> *D* выберет систему 2, поскольку в ней у *D* самый предпочтительный вариант.

Замечание. Системы 2 и 3 одинаково хороши для *B* и *C*. Однако система 2 является наилучшей для всех женщин.

Похожая картина и у мужчин: в системе 1, полученной с помощью алгоритма Гейла — Шепли для случая сватовства со стороны мужчин (т. е. если предложение поступает от мужчин), у каждого наилучший из вариантов в трех системах.

Заметим снова, что для г-на *а* система 3 тоже хороша. Акцент на слове «тоже»; то есть система 3 также хороша, но не лучше, чем система 1. Только система 1 является наилучшей для всех мужчин.

Подводя итоги: система паросочетаний, полученная в случае, когда предложения делают мужчины, *оптимальна для каждого мужчины*, а система паросочетаний, полученная в случае, когда предложения делают женщины, *оптимальна для каждой женщины*, если под оптимальностью понимается следующее:

Определение. Устойчивая система паросочетаний называется *оптимальной для данного мужчины*, если он удовлетворен выбранным партнером как минимум в той же степени, что и во всех других устойчивых системах паросочетаний. Аналогично, система паросочетаний называется *оптимальной для данной женщины*, если она удовлетворена выбранным партнером как минимум в той же степени, что и во всех других системах паросочетаний.

Замечание. Здесь сравниваются только устойчивые системы паросочетаний. Рассматриваемая система должна быть устойчивой и может сравниваться только с другими устойчивыми системами паросочетаний. Удовлетворенность отдельно взятого индивида в неустойчивой системе паросочетаний значения не имеет, поскольку неустойчивая система долго не просуществует и будет разрушена в силу внутренних процессов.

Теорема оптимальности. *Для любой структуры предпочтений система паросочетаний, полученная с помощью алгоритма Гейла — Шепли, в случае предложения со стороны мужчин оптимальна для мужчин.*

Система паросочетаний, полученная с помощью алгоритма Гейла — Шепли, в случае предложения со стороны женщин оптимальна для женщин.

Предварительные замечания к доказательству теоремы. Для доказательства нам потребуются следующие понятия.

Определение. Союз с г-жой *K возможен* для г-на *k,* если существует устойчивая система паросочетаний, в которой они образуют пару.

Определение. Союз с г-жой *K невозможен* для г-на *k*, если *не* существует устойчивой системы паросочетаний, в которой они образуют пару.

Замечание. Чтобы доказать возможность союза с г-жой *K* для г-на *k*, достаточно подобрать некоторую устойчивую систему паросочетаний, в которой они образуют пару. Для доказательства невозможности союза с г-жой *K* для г-на *k* необходимо доказать, что не существует устойчивой системы паросочетаний, в которой они образуют пару.

Доказательство теоремы

Докажем теорему для случая, когда количество мужчин совпадает с количеством женщин, отсутствуют равноценные варианты и ни один член общества не предпочитает одиночество. Рассмотрим случай, когда предложение делают мужчины. Доказательство для случая, когда предложение делают женщины, может быть получено, если поменять роли местами.

Теорема будет доказана, если удастся установить, что любой отвергнутый мужчина оказался отвергнутым той женщиной, союз с которой для него невозможен; то есть любой мужчина оказывается отвергнутым только той женщиной, которая не может образовать с ним пару ни в одной устойчивой системе паросочетаний.

Если это так, то в результате серии предложений в соответствии со своими предпочтениями каждый мужчина в конечном счете образует пару с женщиной, наиболее предпочтительной для него из тех кандидаток, союз с которыми для него возможен; то есть с женщиной, которую он предпочитает тем, с кем образует пару во всех устойчивых системах паросочетаний.

Утверждение. *Если г-жа X отвергает г-на x на каком-либо шаге алгоритма, то союз с ней для него невозможен.*

Доказательство утверждения

Рассмотрим первый этап алгоритма Гейла — Шепли. Каждый мужчина делает предложение наиболее предпочтительной для него женщине. Любая женщина, получившая более одного предложения, выбирает наилучший для себя вариант и сообщает мужчине о том, что он находится в ее листе ожидания, однако не дает никаких обещаний. Все остальные получают отказ. Женщины, не получившие ни одного предложения на этом этапе, ожидают таких предложений на следующем.

Предположим, что на первом этапе г-жа *X* получила предложение от г-на *x*, г-на *y* и, возможно, еще и от других мужчин. Пусть она предпочитает г-на *x* г-ну *y*, следовательно, отвергает предложение *y*. Предположим далее, что существует альтернативная система паросочетаний, в которой г-н *y* и г-жа *X* образуют пару. Это и представлено на схеме ниже.

$$\begin{array}{c} X \\ \hline x \\ y^{*} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} X & & Y \\ \hline & \nwarrow\!\!\searrow & \\ y & & x \end{array}$$

Рассмотрим эту альтернативную систему паросочетаний. Мы знаем, что г-жа *X* предпочитает г-на *x* г-ну *y*: на первом этапе процедуры сватовства *X* отвергла *y*, получив предложения от него и г-на x. Со своей стороны, x предпочитает г-жу X г-же Y; в самом деле, X является его наилучшим выбором, так как он сделал ей предложение уже на первом этапе процедуры сватовства. Таким образом, альтернативная система паросочетаний не может быть устойчивой.

Мы только что показали, что мужчина, получивший отказ на первом этапе процедуры сватовства, оказывается отвергнутым женщиной, союз с которой для него невозможен. Теперь необходимо показать, что мужчина, получивший отказ на любом этапе процедуры сватовства, также является отвергнутым женщиной, союз с которой для него невозможен.

Предположим, что верно обратное. То есть найдется этап процедуры сватовства (как мы уже показали, таким этапом первый этап быть не может), на котором мужчина отвергнут женщиной, союз с которой для него возможен. Следовательно, существует этап, когда это произошло *впервые*. То есть вплоть до этого этапа все получившие отказ мужчины были отвергнуты женщинами, союз с которыми был для этих мужчин невозможен, а теперь впервые нашлась г-жа Z, которая отвергла г-на z потому, что предпочитает ему г-на w. Но союз с Z для z возможен; то есть существует альтернативная устойчивая система паросочетаний, в которой они образуют пару, что изображено ниже.

$$\begin{array}{c} Z \\ \hline z^{*} \\ w \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} Z & W \\ \hline \searrow & \uparrow \\ z & w \end{array}$$

Предложение мужчин; z отвергнут **Альтернативная устойчивая система**

Мы знаем, что г-жа Z предпочитает г-на w г-ну z, поскольку отвергла его в процессе сватовства, имея предложение от них обоих. Так как альтернативная система паросочетаний предполагается устойчивой, г-н *w* должен г-же *W* предпочитать г-жу *Z* (объясните, почему!).

Если для *w* г-жа *W* более предпочтительна, чем г-жа *Z*, то в процессе сватовства он делал предложение *W* раньше, чем *Z*; значит, если теперь он сделал предложение *Z*, то в процессе сватовства ранее был отвергнут г-жой *W*. В таком случае *w* уже был отвергнут на одной из предыдущих стадий женщиной, с которой его союз возможен. Таким образом, подобный отказ случился бы не впервые, что противоречит нашему предположению.

Мы пришли к противоречию, откуда следует, что наше изначальное предположение неверно. Оно состояло в том, что существует ситуация, при которой женщина отвергает мужчину, несмотря на то, что союз с ней для него возможен. Следовательно, такая ситуация возникнуть не может. Тем самым доказано, что любой мужчина может быть отвергнут только той женщиной, союз с которой для него невозможен.

Как уже было сказано выше, это утверждение завершает доказательство теоремы об оптимальности, в соответствии с которой система паросочетаний, полученная с помощью алгоритма Гейла — Шепли для случая, когда предложения делают мужчины, оптимальна для мужчин. Доказательство второй части этой теоремы аналогично.

Итак, мы видим, что, когда в процессе сватовства инициативу берут мужчины, а женщины пассивны, исход выгоден для мужчин: они получают наиболее предпочтительные для себя варианты среди всех устойчивых систем. Мы имеем аналогичный результат и в случае, если число мужчин не совпадает с числом женщин, а также в задачах о распределении более общей формы, как, например, описанных в разделе 1.12 (с. 63). В любых подобных случаях сторона, которая делает предложение, заполучает наиболее предпочтительный вариант среди всех устойчивых систем паросочетаний.

Особняком стоит случай, при котором возможны равноценные варианты. Обратимся к примеру из раздела 1.10 (с. 54). В исходной структуре предпочтений имеются равноценные варианты.

Женщины: *A, B, C*.
Мужчины: *a, b, c*.

	A	*B*	*C*
a	3	1	3
b	2	2	1
c	1	3	2

	A	*B*	*C*
a	1	2	2
b	1	1	2
c	1	2	3

Для получения устойчивой системы паросочетаний мы произвольно заменили исходную структуру предпочтений на ту, в которой такие равноценные варианты отсутствуют. Были рассмотрены случаи:

(i)

	A	*B*	*C*
a	3	1	3
b	2	2	1
c	1	3	2

	A	*B*	*C*
a	1	3	2
b	2	1	3
c	1	2	3

(ii)

	A	*B*	*C*
a	3	1	3
b	2	2	1
c	1	3	2

	A	*B*	*C*
a	1	2	3
b	2	1	3
c	1	2	3

Алгоритм Гейла — Шепли в случае, когда предложения делают мужчины, дает две устойчивые системы паросочетаний:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

для первой структуры предпочтений и

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

— для второй.

Каждая из этих систем оптимальна для измененной структуры предпочтений (без равноценных вариантов) но мы не можем гарантировать их оптимальность для исходной структуры. Так, обе системы одинаково хороши для г-на a, поскольку он безразличен при выборе между B и C, но первая система лучше для г-на b, поскольку г-же B он предпочитает г-жу C. Имейте в виду, что любая система паросочетаний оптимальна для измененной структуры предпочтений, но не обязательно оптимальна для исходной структуры предпочтений, допускающей равноценные варианты.

1.15. Упражнения

1. В начале раздела 1.14 (стр. 71) мы рассматривали ситуацию, при которой существуют две оптимальные системы паросочетаний для одного мужчины. Возможно ли существование двух оптимальных систем паросочетаний для всех мужчин?

2. Рассмотрим пример, приведенный в начале раздела 1.14.

(1) Верно ли, что для г-на *d* возможен союз со всеми женщинами? Если нет, то с какими невозможен?
(2) Союз с какими женщинами возможен для г-на *a*?
(3) Союз с какими женщинами возможен для более чем одного мужчины? С какими мужчинами возможен союз для этих женщин?

3. Имеется следующая структура предпочтений.

Женщины: *A, B, C*.
Мужчины: *a, b, c*.

	A	*B*	*C*
a	1	1	2
b	2	3	3
c	3	2	1

	A	*B*	*C*
a	2	3	1
b	3	2	1
c	1	2	3

(1) Союз с *A* возможен для *a*?
(2) Союз с *A* возможен для *b*?
(3) Союз с *B* возможен для *b*?

4. Рассмотрим следующую систему предпочтений.

Женщины: *A, B, C, D, E*.
Мужчины: *a, b, c, d, e*.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
a	1	4	4	1	3
b	4	5	2	2	4
c	2	2	3	3	1
d	3	3	1	4	5
e	5	1	5	5	2

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
a	3	4	1	2	5
b	5	1	4	2	3
c	3	4	5	1	2
d	3	2	4	5	1
e	2	3	1	4	5

(1) Найдите систему паросочетаний, оптимальную для мужчин.
(2) Найдите систему паросочетаний, оптимальную для женщин.
(3) Одинаковы ли полученные системы?

5. Рассмотрим следующую структуру предпочтений.

Женщины: *A, B, C.*
Мужчины: *a, b, c, d.*

	A	*B*	*C*
a	1	1	4
b	3	3	1
c	2	4	2
d	4	2	3

	A	*B*	*C*
a	2	3	1
b	2	1	3
c	3	1	2
d	1	3	2

(1) Найдите систему паросочетаний, оптимальную для женщин.
(2) Найдите систему паросочетаний, оптимальную для мужчин.
(3) Одинаковы ли полученные системы?

6. Рассмотрим следующую структуру предпочтений.

Женщины: *A, B, C.*
Мужчины: *a, b, c.*

	A	*B*	*C*
a	3	2	1
b	2	1	2
c	1	3	3

	A	*B*	*C*
a	1	1	2
b	1	2	2
c	1	2	3

Найдите все устойчивые системы паросочетаний при помощи алгоритма Гейла — Шепли для случая, если предложение делают мужчины. Оптимальны ли они для исходной структуры предпочтений?

7. Имеется следующая структура предпочтений.

Женщины: *A, B, C, D*.
Мужчины: *a, b, c, d*.

	A	*B*	*C*	*D*
a	4	4	3	1
b	3	3	4	2
c	2	1	1	3
d	1	2	2	4

	A	*B*	*C*	*D*
a	1	1	2	2
b	1	2	3	4
c	2	1	4	3
d	2	3	1	4

(1) Найдите все устойчивые системы паросочетаний при помощи алгоритма Гейла — Шепли для случая, если предложения делают мужчины, и наоборот, если предложения делают женщины.

(2) Какие выводы можно сделать на основе этих систем? Этот вопрос будет рассмотрен в следующем разделе.

1.16. Условие существования единственной устойчивой системы паросочетаний

В предыдущем разделе мы рассматривали структуры предпочтений, для которых существует несколько устойчивых систем паросочетаний. Одна крайность — система паросочетаний, которую мы получаем в результате сватовства со стороны мужчин и которая благоприятна для мужчин. Аналогичным образом, если инициатива исходит от женщин, то мы получаем благоприятную для женщин систему паросочетаний, отражающую другую крайность. Мы убедились в том, что в общем случае может существовать несколько устойчивых систем паросочетаний для заданной структуры предпочтений. Теперь рассмотрим случаи, при которых устойчивая система оказывается единственной.

Пример. Рассмотрим структуру предпочтений из раздела 1.6, Пример 1 (стр. 37–38).

	A	*B*	*C*	*D*
a	3	3	2	3
b	4	1	3	2
c	2	4	4	1
d	1	2	1	4

	A	*B*	*C*	*D*
a	1	2	3	4
b	1	4	3	2
c	2	1	3	4
d	4	2	3	1

Мы выяснили, что если предложения делают мужчины, то будет получена следующая система паросочетаний:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$$

Теперь применим алгоритм Гейла — Шепли для случая, если предложение делают женщины.

Первый шаг

a	*b*	*c*	*d*
	B	*D*	*A* *
			C

Второй шаг

a	*b*	*c*	*d*
	B	*D* *	*C*
		A	

Третий шаг

a	*b*	*c*	*d*
	B *	*A*	*C*
	D		

Четвертый шаг

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \hline & D & A & C^{*} \\ & & & B \\ \hline \end{array}$$

Пятый шаг

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ \hline C & D & A & B \end{array}$$

На этом этапе алгоритм завершается, и в результате получается следующая система паросочетаний:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$$

Точно такая же система была получена и в случае, если предложение делают мужчины.

Существуют ли другие устойчивые системы паросочетаний?

На первый взгляд может показаться, что для того, чтобы ответить на этот вопрос, нужно проверить двадцать три дополнительные системы. На самом деле в этом нет необходимости: для данной структуры предпочтений существует только одна устойчивая система паросочетаний. Это следует из теоремы.

Теорема. *Предположим, что равноценные варианты отсутствуют. Если в случаях сватовства со стороны мужчин и со стороны женщин мы получаем одну и ту же систему паросочетаний, то для заданной структуры предпочтений полученная устойчивая система паросочетаний является единственной.*

Доказательство. Пусть система 1 — это система паросочетаний, полученная в случае сватовства со стороны мужчин (та же система получается и в случае сватовства со стороны женщин), а система 2 — другая система паросочетаний, отличная от системы 1. Докажем, что система 2 не может быть устойчивой. Поскольку система 2 отлична от системы 1, то она должна содержать паросочетание (a, B), которого нет в системе 1. В системе 1 a образует пару с A и b — пару с B.

$$\begin{array}{cc} A & B \\ & \\ a & b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} A & & B & \\ & \nwarrow\!\!\searrow & & \\ x & & a & \ldots b \end{array}$$

Система 1 **Система 2**

Обозначим через x партнера A в системе 2, где x и a — разные мужчины.

Несомненно, A при этом предпочтительнее для a, чем B, поскольку A — его оптимальный выбор, и этот выбор отличен от B, так как равноценные варианты, по изначальному предположению, отсутствуют.

Аналогично, г-жа A предпочитает г-ну x г-на a, так как он является ее оптимальным выбором, и этот выбор отличен от x. Следовательно, система 2 неустойчива.

1.17. Упражнения

1. Является ли

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ d & c & e & a & b \end{pmatrix}$$

единственной устойчивой системой паросочетаний для нижеследующей структуры предпочтений?

Женщины: *A, B, C, D, E*.
Мужчины: *a, b, c, d, e*.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
a	5	4	5	4	5
b	4	5	4	5	3
c	1	1	3	3	1
d	2	3	1	1	2
e	3	2	2	2	4

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
a	1	5	2	4	3
b	4	1	2	5	3
c	5	1	2	3	4
d	1	2	3	5	4
e	2	4	1	3	5

2. Существует ли общая для мужчин и женщин оптимальная система паросочетаний для следующей структуры предпочтений?

Женщины: *A, B, C, D*.
Мужчины: *a, b, c, d*.

	A	*B*	*C*	*D*
a	0	1	1	5
b	1	5	3	1
c	0	2	2	4
d	3	4	0	2
e	2	3	4	3

	A	*B*	*C*	*D*
a	1	3	0	2
b	3	1	2	4
c	4	1	2	3
d	3	2	1	0
e	2	3	1	4

3. Является ли единственной устойчивая система паросочетаний для следующей структуры предпочтений?

Женщины: *A, B, C*.
Мужчины: *a, b, c, d*.

	A	*B*	*C*
a	3	3	1
b	1	1	2
c	2	4	0
d	4	2	3

	A	*B*	*C*
a	1	2	3
b	2	3	1
c	2	1	0
d	1	3	2

4. Образует ли

$$\begin{pmatrix} A & B & C & - \\ | & | & | & | \\ d & c & a & b \end{pmatrix}$$

единственную систему паросочетаний при следующей структуре предпочтений? Если нет, укажите другую устойчивую систему.

Женщины: *A, B, C.*
Мужчины: *a, b, c, d.*

	A	*B*	*C*
a	1	4	3
b	2	3	4
c	0	2	2
d	3	1	1

	A	*B*	*C*
a	2	3	1
b	0	2	1
c	1	2	3
d	1	3	2

1.18. Обсуждение

Гейл и Шепли впервые задались вопросом, можно ли их алгоритм подбора пар применить к решению задачи о приеме в колледж. В заключении своей статьи они писали: «Принимая особые предположения, нужные для того, чтобы исследовать нашу проблему математически, мы поневоле уходили все дальше от первоначального вопроса о приеме в колледж, и в конечном итоге при обсуждении задачи о заключении браков мы целиком отошли от реальности и погрузились в мир математического воображения. <…> Однако, по нашему мнению, некоторые из представленных здесь идей с успехом можно применить на определенных этапах задачи о приеме».

Гейл и Шепли тогда не знали, что Ассоциация американских медицинских колледжей на тот момент уже в течение десяти лет использовала алгоритм Гейла — Шепли для распределения врачей-интернов в госпитали

Соединенных Штатов. В 1951 году Ассоциацией была принята оптимальная для больниц процедура распределения, появившаяся на свет в результате почти полувековых изысканий. Та же самая процедура была заново открыта позднее Гейлом и Шепли. Подробное описание этой процедуры можно найти в книге А. Рота и М. Сотомайера «Нахождение двухстороннего соответствия»[8]. Книга содержит множество дополнений к вышедшей работе Гейла и Шепли.

1.19. Упражнения на повторение

1. Рассмотрим следующую структуру предпочтений:

	A	*B*	*C*
a	1	2	4
b	2	1	1
c	3	3	2
d	4	4	3

	A	*B*	*C*
a	1	2	3
b	1	2	3
c	2	3	1
d	3	1	2

Будет ли

$$\begin{pmatrix} A & B & C & - \\ | & | & | & | \\ a & c & d & b \end{pmatrix}$$

устойчивой системой паросочетаний? Объясните.

2. Рассмотрим следующую структуру предпочтений:

	A	*B*	*C*	*D*
a	2	4	2	3
b	1	1	3	2
c	3	2	4	4
d	4	3	1	1

	A	*B*	*C*	*D*
a	2	1	3	4
b	3	1	2	4
c	3	2	4	1
d	1	2	4	3

[8] *Roth A. E., Sotomayor M.* Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

(1) С помощью алгоритма Гейла — Шепли найдите устойчивую систему паросочетаний, если предложения поступают от мужчин.
(2) Единственна ли устойчивая система паросочетаний для данной структуры предпочтений?

3. Рассмотрим следующую структуру предпочтений:

	A	B	C	D	E
a	1	1	2	3	3
b	2	3	1	1	2
c	3	2	3	2	1

	A	B	C	D	E
a	2	1	3	4	5
b	3	1	2	5	4
c	3	1	4	2	5

(1) С помощью алгоритма Гейла — Шепли найдите устойчивую систему паросочетаний, если предложения исходят от женщин.
(2) Какие из женщин останутся без пары? Останутся ли они без пары в любой другой устойчивой системе паросочетаний? Обоснуйте ваш ответ.

4. Рассмотрим следующую структуру предпочтений:

	A	B	C	D
a	3	0	3	4
b	4	1	1	3
c	1	0	2	1
d	2	2	4	2

	A	B	C	D
a	1	2	0	0
b	1	3	2	4
c	0	1	2	3
d	3	1	2	4

Найдите устойчивую систему паросочетаний.

5. Рассмотрим следующую структуру предпочтений:

	A	*B*	*C*
a	3	2	1
b	1	1	2
c	2	1	3

	A	*B*	*C*
a	1	1	2
b	2	1	3
c	3	2	1

(1) С помощью алгоритма Гейла — Шепли найдите устойчивую систему паросочетаний, если предложения исходят от мужчин, и, наоборот, если предложения исходят от женщин.
(2) Получатся ли в этих двух случаях различные устойчивые системы паросочетаний? Если да, то какие именно?

6. Рассмотрим следующую структуру предпочтений:

	A	*B*	*C*
a	3	1	1
b	2	2	2
c	0	2	3
d	1	3	4

	A	*B*	*C*
a	1	2	0
b	1	1	2
c	2	1	3
d	0	2	1

Используя алгоритм Гейла — Шепли, найдите все возможные устойчивые системы паросочетаний.

7. Рассмотрим следующую структуру предпочтений:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
a	1	3	5	1	1
b	2	2	4	3	3
c	3	4	3	2	5
d	4	0	2	4	2
e	5	1	1	0	4

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
a	0	2	1	3	0
b	3	2	1	4	5
c	2	1	0	3	4
d	3	1	2	5	4
e	2	3	1	4	5

(1) Найдите систему паросочетаний, оптимальную для мужчин.
(2) Докажите, что для данной структуры предпочтений эта система паросочетаний оптимальна и для женщин.
(3) Существуют ли другие устойчивые системы паросочетаний для данной структуры предпочтений? Поясните ваш ответ.

2
Социальная справедливость

2.1. Постановка задачи

Правило простого большинства — общепринятый метод принятия решений в демократическом обществе. Этот метод — попытка сформулировать на основе различных взглядов и мнений единое решение.

Рассмотрим общество из трех избирателей, которые должны выбрать одну из трех альтернатив (скажем, разоружение, холодная война или открытая война). Общество, которое поступает рационально, ранжирует эти три альтернативы, исходя из предпочтений каждого избирателя, и выберет наиболее привлекательную альтернативу. Если, к примеру, общество упорядочит эти альтернативы так, что на первом месте окажется разоружение, на втором месте холодная война, и на последнем месте открытая война, то выбором станет разоружение.

Правило простого большинства является стандартным способом принятия решения на основе предпочтений избирателей.

Рассмотрим следующий пример, известный как «парадокс голосования».

Предположим, что часть средств муниципального бюджета осталась неизрасходованной, и городскому совету необходимо принять решение относительно вложения этих средств. Есть всего три варианта инвестиций: образование, безопасность, здравоохранение (общая сумма слишком мала, чтобы распределить ее между всеми этими вариантами).

В работе городского совета участвуют члены трех партий:

Левая партия — 3 представителя;
Центристская партия — 4 представителя;
Правая партия — 5 представителей;

Предпочтения этих партий таковы:

Центристская (4)	**Левая (3)**	**Правая (5)**
здравоохранение	образование	безопасность
безопасность	здравоохранение	образование
образование	безопасность	здравоохранение

Предпочтения указаны в столбцах в порядке убывания сверху вниз. Например, Правая партия предпочитает вложить деньги в безопасность. На втором месте в ее системе предпочтений стоят инвестиции в образование, на третьем — в здравоохранение.

Голосовать по всем этим альтернативам в один тур бессмысленно. В таком случае результатом голосования станет решение инвестировать в безопасность (5 голосов против 3 за инвестиции в образование или против 4 за инвестиции в здравоохранение). При этом налицо явный перевес голосов в пользу здравоохранения при его сопоставлении с безопасностью (7 против 5), поскольку и Левая, и Центристская партия предпочитают инвестиции в здравоохранение инвестициям в безопасность. Отсюда следует предложение голосовать за различные альтернативы попарно.

Итак, «безопасность» против «образования» — большинство предпочитает «безопасность» (9 против 3).

«Безопасность» против «здравоохранения» — большинство предпочитает «здравоохранение» (7 против 5).

Таким образом, большинство предпочитает здравоохранение безопасности и безопасность образованию. Городской совет, вероятнее всего, предпочтет здравоохранение безопасности и безопасность образованию.

Следовательно, можно заключить, что общественные предпочтения имеют вид:

здравоохранение
безопасность
образование

Пусть, однако, кто-нибудь из членов городского совета предложит проголосовать за пару «здравоохранение — образование». Оказывается, что большинство предпочитает образование здравоохранению (8 против 4). В этом случае решение путем большинства голосов заводит нас в тупик:

здравоохранение	безопасность	образование
безопасность	образование	здравоохранение

Результаты голосования говорят о том, что здравоохранение предпочтительнее безопасности, безопасность предпочтительнее образования, а образование предпочтительнее здравоохранения. Используя для описания структуры предпочтения знак $\succ$, вышесказанное можно записать в следующем виде:

здравоохранение $\succ$ безопасность $\succ$
$\succ$ образование $\succ$ здравоохранение.

Такая система представляет собой циклическое отношение предпочтения, поскольку для любой выбранной альтернативы существует другая альтернатива, которая ей предпочитается. Следовательно, наиболее предпочтительного варианта не существует, и при помощи метода простого большинства невозможно выработать единое решение по расходованию бюджета.

Этот парадокс известен с давних пор. Впервые он был обнаружен французским математиком и философом маркизом де Кондорсе в 1785 г. Очевидно, в данном случае при помощи правила простого большинства, формирующего общественное предпочтение на основе предпочтений избирателей, нельзя получить рациональное решение.

Рассмотрим другой способ принятия общественных решений. Пусть решение о вложении оставшейся части бюджета зависит от относительного влияния партий.

безопасность $\frac{5}{12}$

здравоохранение $\frac{4}{12}$

образование $\frac{3}{12}$

Объясните, почему данное предложение будет отвергнуто большинством.

Другой способ — выбрать ту альтернативу, на которую укажет самая влиятельная партия.

здравоохранение
безопасность
образование

Согласуется ли это с вашими представлениями о справедливом решении?

Возникает вопрос, существует ли модель принятия решений в обществе, которая могла бы агрегировать имеющиеся индивидуальные предпочтения способом, не противоречащим нашим интуитивным представлениям о справедливом методе принятия решений.

Американский экономист Кеннет Эрроу[1] попытался ответить на данный вопрос. В этой главе мы обсудим результаты его исследований.

2.2. Математическое описание задачи

В человеческом обществе у индивидов, скорее всего, разные предпочтения относительно того, какую альтернативу выбрать из множества возможных. Будем обозначать эти возможные альтернативы строчными буквами: *x, y, z …,* а индивидов — числами: 1, 2, 3…

Отношения предпочтения индивидов в обществе можно представить в виде столбцов, как показано в следующем примере:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & y & x \sim y & t \\ y & x & z & x \sim z \\ z & t & t & y \\ t & z & & \end{array}$$

В данном случае для первого индивида наилучшая альтернатива — это *x*, вторая наилучшая — *y*, и т. д. Для второго индивида, напротив, наилучшая альтернатива — это *y*, затем идет *x*, и т. д. Третий безразличен при выборе между *x* и *y*, но желает видеть одну из этих альтернатив на первом месте. Четвертый индивид всем другим альтернативам предпочитает *t*, безразличен при выборе между *x* и *z*, но желает видеть одну из этих альтернатив на втором месте, и т. д.

[1] *Arrow K. J.* Social Choice and Individual Values. New York: J. Wiley, 1951 (в рус. пер.: *Эрроу К. Дж.* Коллективный выбор и индивидуальные ценности. М.: ГУ–ВШЭ, 2004).

Такой способ ранжирования предпочтений наводит на некоторые предположения, большая часть которых оказываются оправданными.

Аксиома A

Никто не предпочитает альтернативу x самой себе.

Аксиома B. Транзитивность предпочтений

Если кто-то предпочитает альтернативу x альтернативе y и y — альтернативе z, то он также предпочитает альтернативу x альтернативе z.

Из аксиомы *A* следует, что x не может находиться в различных местах одного и того же столбца. Из аксиомы *B* следует, что упорядочение альтернатив в порядке убывания их важности описывает отношение предпочтения не только между двумя следующими друг за другом альтернативами, но также и между любыми альтернативами в столбце.

Аксиома *A* довольно очевидна. Мы были бы озадачены, если бы кто-то сообщил нам о том, что предпочитает шоколадный торт этому же самому шоколадному торту. Аксиома *B*, однако, менее очевидна. К примеру, почему никто не может заявить, что предпочитает шоколадный торт пирожному, пирожное мороженому, и мороженое шоколадному торту?

Как показывает опыт, если задавать кому-либо большое количество вопросов о его предпочтениях, то ответы зачастую могут выявить отсутствие транзитивности. На самом деле остается непонятным, действительно ли его ответы соответствуют реальным предпочтениям, или это вовсе не так, просто он не слишком тщательно все продумал.

Подведем итоги. Если респондент описывает свои предпочтения так, что условие транзитивности нарушается, не вполне ясно, что он понимает под словом «предпочитать». Мы в дальнейшем будем предполагать, что отношения предпочтения всех индивидов удовлетворяют аксиоме транзитивности.

Аксиома C. Асимметричность

Если кто-то предпочитает скорее *x*, чем *y*, то *y* он не предпочитает *x*.

Если кто-то сообщил о том, что *x* он предпочитает *y*, очевидно, что *y* он не предпочитает *x*.

Этот способ внесения двух и более альтернатив в одну и ту же строку столбца предпочтений подразумевает наличие дополнительных неявных предположений, связанных с понятием безразличия (равноценности альтернатив). Сформулируем четыре из них:

Аксиома D. Рефлексивность отношения безразличия

Никто не может быть небезразличным при выборе между *x* и *x*.

Аксиома E. Транзитивность отношения безразличия

Если кто-то безразличен при выборе между *x* и *y*, а также безразличен при выборе между *y* и *z*, то он также безразличен при выборе между *x* и *z*.

Аксиома F

Если кто-то предпочитает скорее *x*, чем *y*, и безразличен при выборе между *y* и *z*, то он также предпочитает скорее *x*, чем *z*.

Аксиома G

Если кто-то предпочитает скорее *y*, чем *x*, и безразличен при выборе между *y* и *z*, то он также предпочитает скорее *z*, чем *y*.

Следующая аксиома является самой важной.

Аксиома H. Аксиома полноты

Для любых двух альтернатив, x и y, возможно в точности одно из трех отношений предпочтения: x предпочитается y, y предпочитается x, альтернативы x и y равноценны (безразличие при выборе между x и y).

Если данная аксиома не выполняется, то найдутся такие альтернативы, относительно которых мы не знаем, какое место они займут при ранжировании.

2.3. Упражнения

1. В конце учебного года у классного комитета осталась некоторая сумма в фонде мелких расходов. Комитет должен решить: вернуть ли деньги ученикам, приобрести билеты в театр для всего класса или организовать вечеринку по случаю окончания учебного года. Оставшейся суммы хватит на что-нибудь одно. Комитет состоит из трех индивидов: 1, 2, 3.

Отношение предпочтения членов комитета касательно этих альтернатив таково. Индивид 1 предпочитает вернуть деньги ученикам приобретению билетов в театр, а приобретение билетов в театр предпочитает вечеринке по случаю окончания учебного года. Индивид 2 вечеринку предпочитает возвращению денег ученикам, а приобретение билетов — вечеринке. Индивид 3 предпочитает организацию вечеринки покупке театральных билетов, а покупку билетов предпочитает возврату денег.

(1) Обозначим альтернативы через x, y и z. Опишите отношения предпочтения членов комитета на указанных альтернативах.
(2) Каким будет общественное решение, если оно принимается большинством голосов на основании попарного голосования?

2. Аллану задали вопрос о его предпочтениях относительно фастфуда. Он ответил так: «Я предпочитаю пиццу сэндвичу; предпочитаю гамбургер сэндвичу; предпочитаю буррито пицце; предпочитаю тако гамбургеру; предпочитаю фалафель буррито; предпочитаю гамбургер фалафелю».

(1) Обозначим через *p, s, h, b, t* и *f* (сокращения от пиццы, сэндвича, гамбургера, буррито, тако и фалафеля соответственно) различные блюда, упомянутые Алланом. Попробуйте записать предпочтения Аллана в столбец.
(2) Достаточно ли полученной от Аллана информации, чтобы ранжировать его предпочтения в виде столбца, предполагая выполнение всех аксиом из раздела 2.2?
(3) Содержится ли в условии задачи избыточная информация? Если да, то какая именно?

3. Майкл рассказал, каким образом проводит свое свободное время. Он предпочитает кино театру, театр — танцам, танцы — шоу, чтение — концертам, просмотр ТВ — чтению, просмотр ТВ — театру, а концерты — походам в кино.

(1) Возможно ли представить предпочтения Майкла в виде столбца так, чтобы отражались его вкусы относительно досуга?
(2) Содержится ли в условии задачи избыточная информация? Если да, то какая именно?

4. Сара поделилась своими музыкальными предпочтениями. Она предпочитает Баха Моцарту, а Брамса — Шуману, одинаково любит Шумана и Шопена, одинаково любит Моцарта и Брамса.

Каковы предпочтения Сары относительно Баха и Шопена?

5. Яков сказал сыну, что собирается приготовить яйца на завтрак, и спросил, хочет ли тот омлет, яйца вкрутую, яйца всмятку, яичницу-глазунью или яичницу-болтунью. Сын ответил: «Я предпочитаю омлет яичнице-глазунье; предпочитаю яичницу-болтунью яичнице-глазунье, а яичницу-глазунью — яйцам вкрутую; яйца вкрутую я предпочитаю омлету, а яичницу-болтунью — яйцам всмятку».

(1) Достаточно ли данной информации Якову для того, чтобы понять, чего же больше всего хочет его сын?
(2) Если этой информации недостаточно, что еще следует спросить?
(3) Противоречит ли данная информация каким-либо аксиомам отношений предпочтения? Если да, то укажите на противоречие.

6. Гейл сообщила друзьям, что обожает кино. Друзья спросили ее: «Если бы у тебя была бы возможность взять с собой на необитаемый остров только один фильм, это был бы боевик, фильм ужасов, комедия, вестерн или научная фантастика?»

Гейл ответила: «Я предпочитаю боевик фильму ужасов; предпочитаю научную фантастику фильму ужасов, фильм ужасов — комедии, а научную фантастику — вестерну; я предпочитаю комедию вестерну; предпочитаю фильм ужасов — вестерну, а вестерн — боевику».

(1) По данной информации попытайтесь понять, какой фильм возьмет с собой Гейл на необитаемый остров.
(2) Если информации недостаточно, что еще необходимо узнать у Гейл?
(3) Противоречит ли предоставленная Гейл информация аксиомам о предпочтениях? Если да, то укажите, в чем именно.

7. Хозяин гостиницы готов предложить гостю следующие напитки: кофе, чай, горячий шоколад, капучино и молоко. Предпочтения гостя таковы: ему все равно, пить кофе или капучино; он одинаково любит чай и молоко; он предпочитает горячий шоколад чаю, а капучино — горячему шоколаду.

(1) Что предложит гостю хозяин гостиницы?
(2) Каковы предпочтения гостя относительно кофе и молока?
(3) Каковы предпочтения гостя относительно капучино и чая?

2.4. Функция общественного выбора

Мы сосредоточили внимание на принятии решений в сообществе в случае, если обсуждаются различные альтернативы. Таким сообществом может быть парламент, городской совет, совет директоров и т. д. В зависимости от типа рассматриваемого «сообщества» его составными элементами могут быть политические партии, корпорации, индивиды и т. д.

Каждый элемент общества характеризуется полным отношением предпочтения относительно имеющихся альтернатив, которое удовлетворяет аксиомам A–F. Совокупность таких отношений предпочтения, составленная так, как это описано в разделе 2.2, называется *профилем предпочтений*. Например:

1	2	3
x	$x \sim t$	y
y	z	x
z	y	t
t		z

Наша задача — найти *правило принятия решений*, которое поставит в соответствие каждому профилю предпочтений некоторое отношение предпочтения, представляющее общественное решение. Говоря математическим языком, мы ищем такую *функцию* f, которая ставит в соответствие одному профилю предпочтений одно отношение предпочтения. Такую функцию называют *функцией общественного выбора*.

Замечание. Наша задача, таким образом, заключается не только в нахождении наиболее предпочтительной альтернативы среди всех возможных, но и в определении отношения предпочтения общества на множестве всех таких альтернатив.

Есть известные преимущества в знании отношения предпочтения в целом, а не одной лишь наиболее предпочтительной альтернативы. Предположим, что был выбран порядок $\begin{matrix} x \\ y, \\ z \end{matrix}$ а затем выяснилось, что невозможно выбрать опцию x; в этом случае можно выбрать y без повторного голосования.

Далее рассматриваются несколько способов принятия общественных решений. Сначала мы интуитивно оценим их, основываясь на критерии «справедливости». Далее сформулируем критерии для определения понятия «справедливость».

I. Правило простого большинства: f — решение, принятое большинством голосов при попарном голосовании.

Пример 1

$$f\begin{pmatrix} x & x & t \\ y & t & z \\ z & z & y \\ t & y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ t \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

Пояснение. При сопоставлении различных пар обнаруживается, что для общества x предпочтительнее y, поскольку два индивида ставят x выше y и только у одного человека предпочтения отличаются. При группировке предпочтений по парам получим:

$$\begin{matrix} x & x & x & z & t & t \\ y & z & t & y & z & y \end{matrix}$$

Видно, что опция x является наиболее предпочтительной среди всех альтернатив, следовательно, x — наилучший выбор для общества. t предпочитается всем альтернативам, кроме x, и поэтому является второй наилучшей альтернативой. Остаются только z и y; среди них z предпочтительнее — таким образом, z имеет третий ранг (третья по предпочтительности альтернатива). Итак, мы приходим к указанному выше общественному решению.

Пример 2

$$f\begin{pmatrix} x & x \sim y & y \\ y & t & x \\ z & z & t \\ t & & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \sim y \\ t \\ z \end{pmatrix}$$

В данном примере общество безразлично при выборе между x и y, поскольку один индивид x предпочитает y, другой y предпочитает x, а третий безразличен при выборе между ними. При выборе между t и z два индивида t предпочтут z, поэтому общество в целом t предпочтет z. Для всех индивидов x предпочтительнее t, таким образом, мы приходим к вышеуказанному общественному решению.

Пример 3

$$f\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix}$$

В данном примере, уже рассмотренном нами в разделе 2.1 (с. 94), функция f не дает ответа касательно общественного решения. В соответствии с функцией f,

$$\begin{matrix} x & y & z \\ y & z & x \end{matrix}$$

Здесь не представляется возможным упорядочить альтернативы и представить структуру предпочтений в виде столбца. Другими словами, в этом примере правило простого большинства не позволяет получить транзитивное отношение предпочтения.

Упражнение. Для представленных ниже профилей предпочтений сформулируйте общественное решение, применив правило простого большинства при попарном голосовании.

(1)

$$f\begin{pmatrix} x & t & y \\ y & x & x \\ z & z & t \\ t & y & z \end{pmatrix} =$$

(2)

$$f\begin{pmatrix} x \sim y & z & t \\ t & x & z \sim x \\ z & t & y \\ & y & \end{pmatrix} =$$

II. Постоянная функция

$$f\left(\begin{array}{c}\text{произвольный}\\ \text{профиль}\end{array}\right)=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}$$

Данная функция приписывает порядок $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}$ любому профилю предпочтений, не учитывая индивидуальные предпочтения членов общества. Что можно сказать о таком способе принятия решений в условиях демократии?

III. Решение принимает диктатор

При этом способе общественное решение принимается на основе желания одного из индивидов (того, чьи предпочтения отражены в первом столбце). Будем называть его *диктатором*.

$$f\begin{pmatrix}x & t & t\\ y & z & x\\ z & y & z\\ t & x & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{c}\uparrow\\ \text{диктатор}\end{array}$$

Соответствует ли этот способ вашим представлениям о справедливости в условиях демократии?

Упражнение. Для следующего профиля предпочтений укажите, каким будет общественное решение, если основой для принятия решений является желание одного индивида (его система предпочтений отражена во втором столбце)?

$$f\begin{pmatrix} x & t & x & x \\ y & z & t & y \\ z & y & y & t \\ t & x & z & z \end{pmatrix} =$$

IV. Плохо определенное «правило»

При выборе между парами альтернатив x, y и z решающим будет мнение первого индивида. Если в паре присутствует альтернатива t, то решающим будет мнение второго индивида. К примеру:

Пример 1

$$f\begin{pmatrix} x & t & x \\ y & x & t \\ z & z & y \\ t & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Пример 2

$$f\begin{pmatrix} x & y & x \\ y & x & t \\ z & t & y \\ t & z & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ z \end{pmatrix}$$

Кажется, что при помощи такого правила всегда можно вывести общественное решение. Однако это не так. Что, по вашему мнению, произойдет, если профиль предпочтений будет иметь следующий вид?

Пример 3

$$f\begin{pmatrix} y & x & x \\ x & t & y \\ t & y & z \\ z & z & t \end{pmatrix} = ?!$$

Что в таком правиле представляется непривлекательным?

Упражнение. Для данных профилей предпочтений укажите, каким будет общественное решение при применении следующего правила: следовать мнению первого индивида при выборе между парами альтернатив *x, y* и *z*; и мнению второго индивида, если в паре присутствует альтернатива *t*.

(1)

$$f\begin{pmatrix} x & y & z \\ t & x & x \\ z & t & t \\ y & z & y \end{pmatrix} =$$

(2)

$$f\begin{pmatrix} t & t & y \\ z & x & z \\ x & y & t \\ y & z & x \end{pmatrix} =$$

V. Справедливое правило

Рассмотрим правило, которое кажется справедливым в случае, если мы имеем дело с обществом, состоящим из двух индивидов. Если, скажем, для обоих *x* предпочтительнее *y*, то и для всего общества также *x* предпочтительнее *y*. Однако если одному из них *x* предпочтительнее y, а другому y предпочтительнее x, то общественное решение окажется безразличным при выборе между x и y. (Мы предлагаем читателю самостоятельно решить, что произойдет в случае, если один из индивидов предпочитает скорее x, чем y, а другой безразличен при выборе между ними, и каким будет решение, если оба индивида безразличны при выборе между x и y.)

Посмотрим, каким будет общественное решение в следующем примере:

$$f\begin{pmatrix} x & z \\ y & x \\ z & y \end{pmatrix} = ?$$

Вне всякого сомнения, общество предпочтет альтернативу x альтернативе y, поскольку это единогласное мнение.

При этом обществу безразличен выбор между альтернативами x и z, а также между y и z, поскольку мнения индивидов здесь разделяются.

Сформулируем вышесказанное в качестве общественного решения:

x

$y \sim z \sim x$

Но такая ситуация невозможна, так как (в силу транзитивности отношения предпочтения/безразличия) x предпочитается x, чего быть не может.

Таким образом, справедливое правило не определяет общественное решение для каждого профиля предпочтений.

Упражнение 1. Для данных профилей предпочтений укажите, каким будет общественное решение, если общество состоит из двух индивидов, а правило принятия решения таково: если обоим индивидам x предпочтительнее y, то обществу также x предпочтительнее y; если их мнения разделяются (то есть одному x предпочтительнее, чем y, а другому y предпочтительнее, чем x), то общество безразлично при выборе между x и y.

(1)

$$f\begin{pmatrix} x & z \\ z & x \\ y & y \end{pmatrix} =$$

(2)

$$f\begin{pmatrix} z & x \\ y & y \\ x & z \end{pmatrix} =$$

(3)

$$f\begin{pmatrix} y & y \\ x & z \\ z & x \end{pmatrix} =$$

(4)

$$f\begin{pmatrix} z & y \\ x & z \\ y & x \end{pmatrix} =$$

Упражнение 2. Для следующих профилей предпочтений укажите, каким будет общественное решение, если общество состоит из двух индивидов и используется следующее правило: если обоим индивидам x предпочтительнее y, то обществу также x предпочтительнее y; если они безразличны при выборе между x и y, то общество также безразлично при выборе между x

и y; если их мнения разделяются (то есть то есть одному x предпочтительнее, чем y, а другому y предпочтительнее, чем x), то общество безразлично при выборе между x и y; если одному из индивидов x предпочтительнее y, а другой безразличен при выборе между x и y, то общество предпочтет x относительно y.

(1)

$$f\begin{pmatrix} x \sim y & x \\ z & z \sim y \end{pmatrix} =$$

(2)

$$f\begin{pmatrix} z & x \\ x \sim y & y \\ & z \end{pmatrix} =$$

VI. Зависимость от несвязанных (посторонних) альтернатив

Что не так со следующим правилом для общества из трех индивидов и трех альтернатив?

Правило. Решение принимается на основании правила простого большинства; если результат — циклическое отношение предпочтения (с. 95), то общество должно выбрать альтернативу в порядке алфавита.

Рассмотрим два примера.

Пример 1

$$f\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Пояснение. Правило простого большинства приводит к циклическому отношению предпочтения $\begin{matrix} x \\ y \\ z \\ x \end{matrix}$ и, таким образом, общественное решение принято в соответствии с алфавитным порядком.

Пример 2

$$f\begin{pmatrix} y & y & y \\ x & z & z \\ z & x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Интересная особенность этого правила: в том, что касается только альтернатив x и z, в рассмотренных примерах нет различия между отношениями предпочтения (первому индивиду x предпочтительнее z, остальным z предпочтительнее x). Тем не менее общественные решения относительно x и z существенно отличаются. Во втором примере предпочтение меняется в пользу y. В самом деле, в этом случае y оказывается наиболее предпочтительным вариантом. Однако изменение позиции y в предпочтениях индивидов влияет на общественное решение при выборе между x и z.

Нужна ли независимость от посторонних альтернатив?

Упражнение

(1) Для следующих профилей предпочтений укажите, каким будет общественное решение при использовании правила простого большинства; если в результате будет получено циклическое отношение предпочтения, то общество примет

решение согласно обратному алфавитному порядку.

(i)

$$f\begin{pmatrix} y & z & x \\ z & x & y \\ x & y & z \end{pmatrix} =$$

(ii)

$$f\begin{pmatrix} z & z & z \\ y & x & x \\ x & y & y \end{pmatrix} =$$

(2) В чем отличие между профилями предпочтений в (i) и (ii)?

(3) Каким образом это отличие влияет на общественное решение?

(4) Почему не рекомендуется использовать это правило принятия решения?

VII. Положительная связь между индивидуальными и общественными предпочтениями

Что не так со следующим правилом для общества, в котором осуществляется выбор между парой x и y?

Правило. Если большинство предпочитает x относительно y и состоит из четного числа индивидов, то обществу x окажется предпочтительнее y. Если большинство предпочитает x относительно y и состоит из нечетного числа индивидов, то обществу y окажется предпочтительнее x.

Пример 1

$$f\begin{pmatrix} x & x & x & x & y \\ y & y & y & y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Однако

Пример 2

$$f\begin{pmatrix} x & x & x & x & x \\ y & y & y & y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

В первом примере четверо из пяти индивидов предпочитают x относительно y, следовательно, в соответствии с правилом общество предпочитает x относительно y.

Во втором примере пять из пяти индивидов предпочитают x относительно y, поэтому согласно правилу, общество предпочитает y относительно x.

Соответствует ли это правило вашему представлению о справедливости в условиях демократии?

Упражнение

(1) Для представленных ниже профилей предпочтений укажите, каким будет общественное решение при применении следующего правила.
Если большинство предпочитает x относительно y и состоит из четного числа индивидов, то обществу x окажется предпочтительнее y.
Если большинство предпочитает x относительно y и состоит из нечетного числа индивидов, то обществу y окажется предпочтительнее x.

(i)

$$f\begin{pmatrix} x & z & y & z & x \\ y & x & x & y & z \\ z & y & z & x & y \end{pmatrix} =$$

(ii)

$$f\begin{pmatrix} x & z & x & z & x \\ y & x & y & x & z \\ z & y & z & y & y \end{pmatrix} =$$

(2) В чем отличие профилей предпочтений в (i) и (ii)?
(3) Различаются ли предпочтения общества в этих двух примерах?
(4) Почему не рекомендуется использовать это правило решения?

2.5. Аксиомы для функции общественного выбора

В этом разделе мы попытаемся найти функцию общественного выбора, лишенную всех недостатков из раздела 2.4.

Вначале сформулируем требования для функции *f*; затем перейдем к поиску функции *f*, удовлетворяющей этим требованиям. Назовем их аксиомами; они представляют формальные условия для определения критериев справедливого правила принятия решений.

Аксиома 1. Область определения и область значений функции. *Область определения функции f состоит из всевозможных профилей предпочтений членов общества, а область значений обозначает отношения предпочтения на множестве рассматриваемых альтернатив; в дальнейшем образ f (профиля предпочтений) будем называть «общественным предпочтением».*

$$f\begin{pmatrix}\text{профиль}\\ \text{предпочтения}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{общественное}\\ \text{предпочтение}\end{pmatrix}$$

Данная аксиома исключает возможность использования следующих правил раздела 2.4: Правило I («правило простого большинства», с. 106, пример 3), Правило IV («плохо определенное правило», с. 109, пример 3) и правило V («справедливое правило», с. 109).

Во всех перечисленных примерах присутствуют профили предпочтений, для которых нельзя было вывести какое-либо общественное предпочтение.

Аксиома 2. Положительная связь между индивидуальными предпочтениями и общественным предпочтением. *Пусть P и Q — два профиля предпочтений, в которых все предпочтения или отношения безразличия одинаковы для всех пар альтернатив, за исключением x и y, а в отношениях предпочтения или безразличия для x и y оказывается предпочтение x в профиле Q. Тогда в общественном решении для профиля Q положение альтернативы x не хуже (ее ранг не ниже), чем в общественном решении для профиля P.*

Пояснение. Выражение «в отношениях предпочтения или безразличия для x и y предпочитается x в профиле Q» означает, что если индивид предпочитает x относительно y в профиле P, то он будет предпочитать x относительно y также и в профиле Q. Если он безразличен при выборе между x и y в профиле P, то он либо по-прежнему безразличен при выборе между ними, либо предпочитает x относительно y в профиле Q. Если он предпочитает y относительно x в профиле P, то он либо предпочитает y относительно x, либо безразличен при выборе между x и y, либо предпочитает x относительно y в профиле Q. Аналогичным образом, выражение «в общественном решении при профиле Q положение альтернативы x не хуже (ее ранг не ниже), чем в общественном решении при профиле P» означает следующее: если функция общественного выбора на профиле P, $f(P)$, определяет, что x предпочитается y, то функция общественного выбора на профиле Q, $f(Q)$, также определяет, что x предпочитается y. Если $f(P)$

определяет, что общество безразлично при выборе между x и y, то $f(Q)$определяет, что либо общество безразлично при выборе между x и y, либо x предпочитается y.

Предположим, что члены парламента высказали свои предпочтения относительно множества альтернатив, обсуждаемых в течение дня, и было решено, что альтернатива x предпочитается альтернативе y. На следующий день членов парламента попросили еще раз заявить о своих предпочтениях относительно тех же самых альтернатив. В новом профиле предпочтений обнаружилось единственное изменение, касающееся пары альтернатив x и y: некоторые из членов стали в своих предпочтениях приписывать x более высокий ранг, чем прежде. Было бы странным, если бы после таких изменений парламент решил, что альтернатива y предпочитается альтернативе x. Аксиома 2 существует для того, чтобы исключить подобные ситуации.

В соответствии с этой аксиомой, если для некоторого профиля предпочтений P в общественном решении альтернатива x предпочитается альтернативе y, то x тем более будет предпочитаться y в другом профиле предпочтений Q, который отличается от P только предпочтениями относительно двух альтернатив, x и y; при этом в профиле предпочтений Q никто из индивидов не ранжирует x ниже (по отношению к y), чем в исходном профиле предпочтений, P.

Правило VII из раздела 2.4 (с. 114) не удовлетворяет данной аксиоме.

Аксиома 3. Единогласие. *Если всем индивидам в обществе x предпочтительнее y, то общественное решение также будет предпочитать x относительно y.*

Пояснение. Было бы странным, если бы каждый из индивидов предпочитал x относительно y, а f установила бы, что y предпочтительнее x или альтернативы x и y равноценны. Аксиома 3 исключает эту возможность.

Правило II из раздела 2.4 (с. 107) не удовлетворяет этой аксиоме.

Аксиома 4. Независимость от посторонних альтернатив. *При ранжировании каждой пары альтернатив x и y функция общественного выбора f зависит только от того, как члены общества ранжируют именно эти альтернативы x и y. То, как они ранжируют межу собой альтернативы z и t или даже альтернативы x и t, не имеет значения при общественном решении относительно ранжирования альтернатив x и y.*

Пояснение. Предположим, что комитету нужно выбрать председателя. На эту должность имеются два кандидата: *A* и *B*. В ходе дискуссии каждый член комитета высказывается в пользу кандидата *A*. Однако один из членов комитета вдруг вспомнил, что *C* также кандидат. Было бы странным, если бы после этого председателем выбрали кандидата *B*. Наличие или отсутствие кандидата *C* не имеет никакого отношения к принятию решения относительно ранжирования кандидатов *A* и *B*.

Аксиома 4 требует, чтобы функция общественного выбора была такова, что несвязанные альтернативы не оказывали влияние на обсуждаемые предпочтения.

Правило VI из раздела 2.4 (с. 112) не удовлетворяет данной аксиоме.

Аксиома 5. Отсутствие диктатора. *В обществе, состоящем минимум из трех индивидов, нет диктатора; то есть не существует индивида, мнение которого* *влияло бы на принятие всех решений, даже если все остальные не против этого мнения.*

Пояснение. В аксиоме речь идет об индивиде, мнение которого влияло бы на принятие *всех решений*. Она исключает такую возможность, однако не исключает возможность того, что мнение индивида влияет на решение некоторых вопросов. В таком случае этот индивид не является диктатором.

Правило III из раздела 2.4 (с. 107) не удовлетворяет этой аксиоме.

2.6. Упражнения

1. Функция общественного выбора на указанном ниже профиле — это:

$$f\begin{pmatrix} x & z & x \\ y & x & y \\ z & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

Какая из аксиом здесь нарушена?

2 (1) Найдите функцию общественного выбора для следующего профиля предпочтений согласно правилу простого большинства (при попарном ранжировании альтернатив).

$$f\begin{pmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{pmatrix} =$$

(2) Какая из аксиом здесь не нарушена?

3 (1) Найдите функцию общественного выбора для следующих профилей предпочтений согласно

правилу: если нечетное число индивидов предпочитают x относительно y, то общество будет предпочитать x относительно y; если четное число индивидов предпочитают x относительно y, то общество будет предпочитать y относительно x. Что касается других альтернатив, выбор между ними осуществляется на основании попарного голосования по правилу простого большинства, и в случае равного количества голосов альтернативы объявляются равноценными.

$$f\begin{pmatrix} x & t & z & y \\ y & x & x & x \\ z & y & y & t \\ t & z & t & z \end{pmatrix} =$$

$$f\begin{pmatrix} x & t & z & x \\ y & x & x & y \\ z & y & y & t \\ t & z & t & z \end{pmatrix} =$$

(2) Какая из аксиом здесь нарушена?

4 (1) Найдите функцию общественного выбора для следующих профилей предпочтений согласно следующему правилу: общество пытается принять решение на основе правила простого большинства (при попарном ранжировании альтернатив); в случае получения циклического отношения предпочтения при применении этого правила общество осуществляет выбор согласно обратному алфавитному порядку.

$$f\begin{pmatrix} z & y & x \\ y & x & z \\ x & z & y \end{pmatrix} =$$

$$f\begin{pmatrix} y & y & y \\ z & x & x \\ x & z & z \end{pmatrix} =$$

(2) Каковы различия между указанными выше профилями предпочтений?

(3) Какая аксиома здесь нарушена?

5. Функция общественного выбора на указанном ниже профиле — это:

$$f\begin{pmatrix} x & t & z & y \\ y & y & x & t \\ z & z & t & x \\ t & x & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ t \\ y \end{pmatrix}$$

Какая из аксиом здесь нарушается?

2.7. Что следует из аксиом 1–4?

В предыдущих разделах мы сформулировали несколько требований для функции общественного выбора f. Все они достаточно просты и правдоподобны. Мы назвали эти требования *аксиомами*. В этом разделе мы увидим, что следует из аксиом 1–4 в отношении функции f.

Аксиомы

1. Функция f определяет отношение предпочтения, именуемое *общественным предпочтением*, для любого профиля предпочтений.

2. Функция f показывает положительную связь между предпочтениями индивидов в обществе и общественным предпочтением: пусть для некоторого профиля предпочтений P функция f определяет отношение предпочтения на альтернативах x и y как $\begin{array}{c}x\\y\end{array}$; пусть при этом профиль предпочтений изменяется так, что все большее число индивидов предпочитают x относительно y или $\begin{array}{c}y\\x\end{array}$ трансформируется в $y \sim x$; тогда f также определяет на этих альтернативах отношение предпочтения как $\begin{array}{c}x\\y\end{array}$ и для нового профиля предпочтений.

3. Функция f подчиняется единогласному решению: если все индивиды в обществе предпочитают x относительно y, то f также установит, что альтернатива x предпочитается альтернативе y.

4. Функция f определяет предпочтения касательно альтернатив x и y независимо от любых других альтернатив; то есть значение f зависит от предпочтений индивидов в обществе только в отношении альтернатив x и y.

Примеры

1. Предположим, что f удовлетворяет вышеперечисленным аксиомам. Как общественное предпочтение будет определено f для следующего профиля предпочтений в обществе из трех индивидов?

1	2	3
x	z	x
y	x	z
z	y	y
t	t	t

Решение. На альтернативах x и y функция f определяет отношение предпочтения как $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$, поскольку каждый индивид предпочитает альтернативу x альтернативе y (аксиома единогласия). По этой же причине f определяет, что $\begin{matrix} z & y & x \\ t & t & t \end{matrix}$; следовательно, по аксиоме единогласия f определяет следующие отношения предпочтения:

$$\begin{matrix} x & z & y & x \\ y & t & t & t \end{matrix}$$

Аксиома независимости от посторонних альтернатив также сыграла свою роль, так как описанные выше предпочтения на парах альтернатив были установлены независимо от предпочтений индивидов относительно ранжирования других пар альтернатив.

К примеру, $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ не зависит от отношений предпочтения индивидов в обществе касательно z и t; $\begin{matrix} z \\ t \end{matrix}$ не зависит от отношений предпочтения индивидов в обществе касательно x и y, и так далее.

Мы по-прежнему не можем ничего сказать о том, как f определяет предпочтения касательно альтернатив x и z или альтернатив y и z, поскольку мнения индивидов в обществе относительно ранжирования этих пар альтернатив разделяются.

Если бы мы знали больше свойств функции f, нам, возможно, удалось бы сказать что-то еще. Например, если предположить, что f определяет отношение предпочтения $\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}$, то из свойства транзитивности мы могли бы заключить, что f также определит отношение предпочтения $\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}$. В таком случае мы бы знали, что

$$\begin{matrix} x & y & z & y & x \\ y & z & t & t & t \end{matrix}$$

и могли быть уверены в том, что

$$f\begin{pmatrix} x & z & x \\ y & x & z \\ z & y & y \\ t & t & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Таким образом, мы смогли бы установить, какое общественное предпочтение определит f в данном примере.

2. Предположим, что f удовлетворяет вышеперечисленным аксиомам.

I. Какое общественное предпочтение определит f, если профиль предпочтений для общества из трех индивидов имеет вид:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ x & z & x \\ z & x & y \\ y & y & z \end{matrix}$$

Решение. Из аксиомы единогласия следует, что f определит такое общественное предпочтение, в котором альтернатива x предпочитается альтернативе y, поскольку каждый индивид в обществе предпочитает x относительно y. Кроме того, здесь неявно использована аксиома независимости от посторонних альтернатив, так как это отношение предпочтения определено независимо от того, что члены общества думают о z. По данному профилю предпочтений не удастся понять, каким будет общественное предпочтение в отношении пар x и z или y и z, по причине того, что мнения в обществе здесь расходятся: часть индивидов предпочитает одну альтернативу в каждой паре, другая часть — другую альтернативу.

II. Рассмотрим тот же профиль предпочтений. Пусть известно, что, согласно функции f, y предпочитается z. Что можно сказать в этом случае о функции f?

Решение. Мы знаем, что $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ и $\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}$. Согласно аксиоме транзитивности предпочтений, из функции f также следует, что альтернатива x предпочитается альтернативе z. И тогда

$$f\begin{pmatrix} x & z & x \\ z & x & y \\ y & y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Данный пример интересен тем, что он иллюстрирует *предсказание результата*. Хотя нам и не было известно заранее, как ведет себя f в отношении альтернатив x и z, нам удалось предсказать общественное решение.

Замечание. Если бы в нашем распоряжении была дополнительная информация, в которой сообщается, что f устанавливает альтернативное ранжирование z и y (z предпочитается y), то мы не смогли бы предсказать общественное решение. В этом случае $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\ \begin{matrix} z \\ y \end{matrix}$, откуда невозможно заключить, каким образом f упорядочит пару альтернатив x и z.

3. Предположим, что f удовлетворяет всем четырем аксиомам. Опишите, каким окажется общественное решение для следующего профиля предпочтений, если известно также, что согласно f предпочтение отдается альтернативе y относительно альтернативы z.

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ x & z & x \\ y & x & z \\ z & y & y \\ t & t & t \end{array}$$

Решение. Зачастую удается выяснить, что определяет функция f, как в ситуации, при которой все индивиды в обществе предпочитают одну альтернативу другой (единогласное решение). Итак, соберем всю доступную нам информацию:

$$\begin{array}{ccccc} x & x & y & z & y \\ y & t & t & t & z \end{array}$$

Отношения предпочтения в первых четырех столбцах были получены, исходя из аксиомы единогласия. Последний столбец — дополнительная информация. Из свойства транзитивности отношения предпочтения из имеющихся данных следует, что $\begin{array}{c} x \\ z \end{array}$. Теперь у нас есть вся необходимая информация, чтобы заключить, что:

$$f\begin{pmatrix} x & z & x \\ y & x & z \\ z & y & y \\ t & t & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

2.8. Упражнения

1. (1) Найдите общественное решение для следующего профиля предпочтений:

1	2
x	z
t	x
y	t
z	y

(2) Каким будет общественное решение, если известно, что, согласно f, из двух альтернатив (x и y) предпочтение отдается x?

(3) Что еще мы должны знать, чтобы определить, каким будет общественное решение?

2. (1) Можно ли предсказать общественное решение для следующего профиля предпочтений?

1	2	3
x	z	y
y	x	x
z	y	z

(2) Каким будет общественное решение, если известно, что, согласно f, из двух альтернатив (x и y) предпочтение отдается x?

(3) Можно ли предсказать общественное решение для следующего профиля, если кроме дополнительной информации из (2) также известно, что f определяет отношение предпочтения $\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}$?

1	2	3
x	x	y
y	z	x
z	y	z

3. (1) Можно ли предсказать общественное решение для следующего профиля предпочтений?

1	2	3
x	x	x
z	z	z
y	y	t
t	t	y

Если да, то назовите это решение; если нет, то укажите, какой информации не хватает.

(2) Опишите общественное решение в случае, если известно, что, согласно f, из двух альтернатив (t и y) предпочтение отдается t?

(3) Опишите общественное решение в случае, если известно, что, согласно f, из двух альтернатив (t и y) предпочтение отдается y?

2.9. Теорема Эрроу

Эта глава начиналась с обсуждения недостатков правила простого большинства как основополагающего метода принятия общественных решений. В свете данных недостатков мы рассмотрели вопрос о возможности построения другого, «справедливого» способа принятия решений. Была построена система аксиом, то есть система интуитивных критериев справедливой процедуры принятия решений. Однако остается открытым вопрос о существовании такого правила принятия общественного решения, при котором выполнялись бы все аксиомы для любого профиля предпочтений.

Экономист, лауреат Нобелевской премии Кеннет Эрроу на этот вопрос дал неожиданный ответ: функции общественного выбора, удовлетворяющей всем аксиомам, не существует! Это означает, что любая функция общественного выбора, которую мы можем предложить, не удовлетворяет хотя бы одной из аксиом. Иначе говоря, в системе аксиом присутствует внутреннее противоречие.

В данном разделе мы докажем теорему Эрроу о том, что не существует функции общественного выбора, удовлетворяющей всем аксиомам одновременно. В процессе доказательства мы обнаружим, что любое правило принятия решений, которое удовлетворяет аксиомам 1–4, обязательно является правилом диктатора, что противоречит Аксиоме 5 из раздела 2.5 (с. 119).

Для доказательства мы предположим, что правило принятия решений удовлетворяет аксиомам 1–4.

Определение. Множество индивидов *V* называется *решающим для пары* $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}$, если *для любого профиля предпочтений*, в котором все индивиды из *V* предпочитают альтернативу *x* альтернативе *y*, а все остальные предпочитают альтернативу *y* альтернативе *x*, функция общественного выбора устанавливает, что $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}$.

Другими словами, множество *V* является решающим для $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}$ тогда и только тогда, когда все члены *V* имеют структуру предпочтений $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}$, а остальные индивиды имеют обратную структуру предпочтений.

Замечание. Если в обществе есть диктатор, то он один образует решающее множество для любой пары альтернатив (а не только для одной пары).

Комментарий. Согласно определению, множество V является решающим для $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$, если для всех членов V структура предпочтений имеет вид $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$, а для остальных индивидов — $\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}$. Но если для кого-то, не принадлежащего к множеству V, структура предпочтений также имеет вид $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$ или $x \sim y$, то для данного профиля по аксиоме 2 функция общественного выбора по-прежнему устанавливает общественное предпочтение как $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$. Так или иначе, профиль предпочтений ранжирует альтернативу x выше; следовательно, согласно Аксиоме 2, функция общественного выбора решит в пользу $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$.

Существует ли решающее множество?

Ответ утвердительный. Множество *всех индивидов*, вне всякого сомнения, является решающим не только для какой-то пары $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$, но и для всех возможных пар, согласно аксиоме единогласия (Аксиома 3).

Рассмотрим множество всех индивидов, которое, как уже было отмечено, является решающим для любой пары альтернатив. Вполне возможно, что после вычитания из множества некоторых индивидов оставшееся множество по-прежнему останется решающим — если не для всех пар, то хотя бы для одной. Будем постепенно вычитать индивидов из множества до тех пор, пока оставшееся множество индивидов все еще будет решающим для некоторой пары. Процесс будем продолжать до тех пор, пока не будет получено такое решающее множество, из которого уже нельзя вычесть ни одного индивида без того, чтобы новое множество перестало быть решающим.

Самое маленькое множество, являющееся решающим для любой пары альтернатив, называется *минимальным* решающим множеством[2].

Определение. Множество V называется *минимальным решающим множеством*, если V является решающим для некоторой пары $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}$, а любое вычитание индивидов из V приводит к тому, что полученное множество не будет решающим ни для какой пары альтернатив.

Таким образом, мы доказали, что существует минимальное решающее множество; то есть существует множество, являющееся решающим для некоторой пары $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}$, а любое его строгое подмножество не является решающим ни для какой пары альтернатив.

Пусть V — минимальное решающее множество. Обозначим пару, для которой оно является решающим, через $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}$. Пусть j — некоторый индивид из множества V, а множество W состоит из всех оставшихся индивидов множества V. Обозначим множество всех индивидов, не входящих в V, через U. Рассмотрим следующий профиль предпочтений:

[2] Это множество не может быть пустым, поскольку если бы пустое множество было решающим для пары $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}$, то функция общественного выбора установила бы отношение предпочтения $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{y}$, что противоречит аксиоме единогласия.

$$\begin{array}{ccc} \multicolumn{2}{c}{\overbrace{\{j\} \quad W}^{V}} & U \\ \hline x & z & y \\ y & x & z \\ z & y & x \end{array}$$

Для данного профиля предпочтений функция общественного выбора f установит порядок $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$, поскольку для всех индивидов из $V = \{j\} \cup W$ отношение предпочтения имеет вид $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$, а множество V является решающим для пары $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$.

Функция общественного выбора не сможет установить отношение предпочтения $\begin{matrix} z \\ y \end{matrix}$ в силу того, что только у индивидов из W отношение предпочтения $\begin{matrix} z \\ y \end{matrix}$, но W не является решающим, так как V образует минимальное решающее множество. Мы воспользовались аксиомой независимости от посторонних альтернатив (Аксиома 4), которая позволяет исключить возможность того, что позиция x может влиять на отношение предпочтения в паре y и z.

Таким образом, функция общественного выбора установит, что $\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}$ или $y \sim z$.

Поскольку мы уже выяснили, что $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$, то по аксиоме транзитивности отношения предпочтения f установит порядок $\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}$. Но только j предпочитает $\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}$, остальные имеют противоположные предпочтения. Тогда из Аксиомы 4 следует, что $\{j\}$ образует решающее множество для пары $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{z}$. Но V — минимальное решающее множество, значит, $W = \emptyset$ и $V = \{j\}$.

Кроме того, альтернатива z выбрана произвольно, следовательно, $\{j\}$ является решающим множеством для любой пары альтернатив $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{z}$.

Таким образом, мы установили, что если f удовлетворяет аксиомам 1–4, то существует минимальное решающее множество, состоящее из одного индивида, которое является решающим для пары $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{z}$ для некоторого x и любого z. В таком случае $W = \emptyset$.

Теперь остается доказать, что решающее множество, состоящее из одного индивида, означает наличие диктатора. Другими словами, если V представляет собой решающее множество и состоит из одного индивида, то он способен диктовать предпочтения для любой пары альтернатив, а не только для $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{z}$.

Рассмотрим следующий профиль предпочтений:

$\{j\}$	U
w	z
x	w
z	x

Согласно f, $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{z}$, так как множество $\{j\}$ является решающим для пар вида $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{z}$. Также, согласно f, $\genfrac{}{}{0pt}{}{w}{x}$, поскольку это соответствует предпочтениям всех индивидов.

В силу транзитивности отношений предпочтения получим, что $\begin{matrix} w \\ z \end{matrix}$; то есть $\{j\}$ окажется решающим множеством для всех пар вида $\begin{matrix} w \\ z \end{matrix}$, где $w \neq x$ и $z \neq x$.

Наконец, рассмотрим следующий профиль предпочтений:

$\{j\}$	U
w	z
z	x
x	w

Согласно f, $\begin{matrix} w \\ z \end{matrix}$, так как множество $\{j\}$ является решающим для пары вида $\begin{matrix} w \\ z \end{matrix}$, где $w \neq x$ и $z \neq x$. Также из функции f следует, что $\begin{matrix} z \\ x \end{matrix}$, поскольку это соответствует предпочтениям всех индивидов.

По свойству транзитивности отношения предпочтения получаем, что $\begin{matrix} w \\ x \end{matrix}$. Но только j предпочитает $\begin{matrix} w \\ x \end{matrix}$, следовательно, $\{j\}$ образует решающее множество для пар вида $\begin{matrix} w \\ x \end{matrix}$.

Таким образом, мы доказали, что:

$\{j\}$ является решающим множеством для пар вида $\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}$ при любых z;

$\{j\}$ является решающим множеством для пар вида $\begin{matrix} w \\ x \end{matrix}$ при любых z и w, отличных от x;

$\{j\}$ является решающим множеством для пар вида $\begin{matrix} w \\ x \end{matrix}$ при любых w.

Эти варианты исчерпывают все возможные пары альтернатив. В самом деле, $\{j\}$ является решающим множеством для пар вида $\begin{matrix}x\\z\end{matrix}$ при любых $z, z \neq x$, поскольку альтернатива z может быть заменена любой другой альтернативой. Так как $\{j\}$ является решающим множеством для пар вида $\begin{matrix}w\\z\end{matrix}$ при любых z и w, не совпадающих с x, то z и w могут быть заменены произвольными альтернативами, отличными от x. Если $w = x$, то нам известно, что множество $\{j\}$ является решающим для пар вида $\begin{matrix}x\\z\end{matrix}$. Кроме того, множество $\{j\}$ является решающим множеством для пар вида $\begin{matrix}w\\x\end{matrix}$ при любых w, поскольку альтернатива w может быть заменена любой другой альтернативой. Следовательно, мы рассмотрели все возможные случаи.

Обобщая все вышесказанное: $\{j\}$ образует решающее множество для любой пары альтернатив, то есть индивид j является диктатором!

Таким образом, мы отталкивались от того, что функция общественного выбора удовлетворяет аксиомам 1–4, и доказали, что она в обязательном порядке приводит к наличию диктатора, что противоречит Аксиоме 5.

Следовательно, не существует функции общественного выбора, которая бы удовлетворяла одновременно всем аксиомам 1–5.

2.10. Что делать?

Основная цель данной главы — поиск правила общественного решения, которое соответствовало бы нашим понятиям о справедливости в демократическом обществе. Мы не смогли достигнуть поставленной цели; более того, доказали, что такого правила не существует!

Что же тогда делать? Какому правилу следовать при принятии решений? Как решать общественные вопросы? Из сказанного в данной главе следует, что нет удовлетворительного ответа на поставленные вопросы. Мы должны признать тот факт, что любое выбранное правило не будет удовлетворять как минимум одной из аксиом Эрроу.

Теорема, которая стала носить его имя, доказана в его книге, вызвавшей среди обществоведов многочисленные споры по поводу последствий того факта, что найти приемлемое правило принятия решений невозможно. Теоретики общественных наук внезапно осознали, что на вопрос «что хорошо для общества?» ответ не всегда существует. Выводы Эрроу привели к радикальным изменениям в представлениях многих ученых относительно общества, в котором мы существуем.

Книга Эрроу также дала толчок к новым математическим исследованиям. К примеру, некоторые математики задались вопросом о возможности устранения противоречия в аксиомах при помощи ограничения области определения для профилей предпочтений. Были найдены суженные области определения, для которых существует общественная функция выбора, удовлетворяющая всем пяти аксиомам. Кроме того, появились предложения включить в правило принятия решений элемент лотереи: если, скажем, обнаруживается, что правило простого большинства приводит к циклическому отношению предпочтения, тогда решение относительно предпочтения принимается при помощи жребия. Мы не будем подробно рассматривать все то, что было сделано в этой области. Отметим лишь, что исследования Эрроу стимулировали появление массы литературы как теоретического, так и прикладного характера.

2.11. Упражнения на повторение

1. Даны следующие профили предпочтений. Найдите функцию общественного выбора, если решение принимается большинством голосов при попарном голосовании.

(1)

$$f\begin{pmatrix} x & t & y \\ y & x & t \\ z & z & x \\ t & y & z \end{pmatrix} =$$

(2)

$$f\begin{pmatrix} x \sim t & t & x \sim z \\ z & x & t \\ y & y & y \\ & z & \end{pmatrix} =$$

2. Для указанных ниже профилей предпочтений найдите функцию общественного выбора в обществе из двух индивидов при использовании следующего правила: если оба индивида предпочитают альтернативу x альтернативе y, то общество также должно предпочитать x относительно y; если их мнения не совпадают, то общество должно быть безразлично при выборе между x и y; если оба индивиды безразличны при выборе между x и y, то общество также безразлично при выборе между x и y; если один из них предпочитает альтернативу x альтернативе y, а другой безразличен при

выборе между x и y, то общество предпочитает альтернативу x альтернативе y.

(1)

$$f\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \\ z & x \end{pmatrix} =$$

(2)

$$f\begin{pmatrix} x & z \\ z & x \\ y & y \end{pmatrix} =$$

(3)

$$f\begin{pmatrix} x \sim y & y \\ z & x \sim z \end{pmatrix} =$$

(4)

$$f\begin{pmatrix} y & x \\ z & y \sim z \\ x & \end{pmatrix} =$$

3 (1) Найдите функцию общественного выбора для следующих профилей предпочтений в соответствии с правилом: если четное число индивидов предпочитает x относительно y, то общество также предпочитает x относительно y; если нечетное число индивидов предпочитает x относительно y, то общество предпочитает y относительно x. Что касается других альтернатив, выбор между ними осуществляется на основании попарного голосования по правилу простого большинства, и в случае

равного количества голосов альтернативы объявляются равноценными.

(i)

$$f\begin{pmatrix} x & z & y & t \\ y & t & x & x \\ t & x & t & y \\ z & y & z & z \end{pmatrix} =$$

(ii)

$$f\begin{pmatrix} x & z & t & y \\ y & x & y & x \\ z & y & x & t \\ t & t & z & z \end{pmatrix} =$$

(iii)

$$f\begin{pmatrix} x & z & t & y \\ y & x & x & x \\ z & y & y & t \\ t & t & z & z \end{pmatrix} =$$

(2) В каждом случае проверьте, выполнены ли все аксиомы. Укажите, какие из них нарушены.

4. Опишите функцию общественного выбора для следующего профиля предпочтений, если известно, что, согласно функции f, альтернатива t предпочтительнее альтернативы x, а остальные ранжируются по правилу простого большинства.

1	2	3
x	t	y
y	x	t
z	z	x
t	y	z

5 (1) Опишите функцию общественного выбора для следующего профиля предпочтений, если решение принимается на основании большинства голосов при попарном голосовании.

1	2	3
x	y	y
y	x	x
z	z	z

(2) Какой информации не хватает для того, чтобы предсказать общественное решение?

6 (1) Можно ли построить функцию общественного выбора для следующего профиля предпочтений, если решение принимается большинством голосов при попарном голосовании?

1	2	3
x	t	z
y	x	t
z	y	x
t	z	y

(2) Дополнительно известно, что общество предпочитает y относительно z. Достаточно ли этой информации для предсказания общественного решения?

(3) Рассмотрим следующий профиль предпочтений и дополнительную информацию из (2). Можно ли найти общественное решение?

1	2	3
x	z	z
y	x	t
z	y	x
t	t	y

3
Вектор Шепли в кооперативных играх

3.1. Введение

Теория игр интересна как своей математической составляющей, так и возможностью применения в общественных науках. Она возникла из социальных явлений в противоположность явлениям физическим. Индивид совершает действия, иногда направленные против других, иногда совместные с ними; интересы приводят людей к конфликту или к сотрудничеству. Атомы, молекулы и звезды, напротив, принимают ту или иную форму, сталкиваются и взрываются, но никогда не борются между собой и не сотрудничают. Таким образом, была создана математическая теория, система понятий которой заимствована из общественных наук.

Слово «игра» понимается по-разному обычным человеком и специалистом по теории игр, однако разные толкования имеют общую основу: в игре есть игроки, которые должны взаимодействовать или принимать решения. В результате их действий и, возможно, из-за стечения обстоятельств (игры случая) достигается определенный исход — наказание или вознаграждение для каждого из игроков. Понятие «игрок» истолковывается нестандартно: оно не обязательно относится к индивиду. В качестве игрока может выступать команда, корпорация или государство. Удобно говорить о группе лиц с совпадающими интересами, имеющих возможность принимать совместные решения, как об одном игроке. Можно сказать, что *игра* — это некоторая ситуация с несколькими действующими лицами, принимающими решения. Каждое такое действующее лицо является *игроком*.

На взаимодействие людей влияют многие факторы, такие как способности игроков, их желания, жизненные ценности, окружающая среда, в которой они функционируют, и т. д. Теория игр выбирает только некоторые из факторов и создает *математические модели*, в большинстве случаев довольно абстрактные. Впоследствии модели анализируются, и предпринимается попытка разработать *модели* поведения и разрешения конфликтов. Поскольку могут рассматриваться разные проблемы, возможны разные типы моделей. Каждый из таких типов называется *концепцией решения*.

В этой главе мы рассмотрим один из классов игр, который называется *кооперативными играми с трансферабельной полезностью*. Это игры, в которых допускается перераспределение денег между участниками, а правила игры позволяют заключать обязывающие соглашения, то есть соглашения, которые будут выполняться. Нами будет рассмотрена концепция решения, именуемая значением Шепли, которое можно трактовать в качестве рекомендуемого экспертом или посредником способа распределения денег. Вектор Шепли имеет и другие интерпретации, которые будут рассмотрены в дальнейшем.

3.2. Кооперативные игры

Кооперативные игры — это игры, в которых участники заключают взаимно обязывающие соглашения. К примеру, экономические переговоры зачастую приводят к заключению контракта, условия которого обязательны для обеих сторон, и каждая из сторон, скорее всего, будет соблюдать эти условия, так как нарушения повлекут за собой санкции.

Напротив, некооперативные игры — это такие игры, в которых соглашения между участниками не являются обязывающими. Например, политические соглашения, подобные соглашениям между государствами, в большинстве своем оказываются необязывающими, и стороны таких соглашений соблюдают их условия, лишь пока им это выгодно.

Большая часть теории кооперативных игр касается коалиционных игр[1], особенности которых будут рассмотрены в текущем разделе.

Математическая модель кооперативной игры состоит из пары (N, v), где $N = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ — множество игроков, а v — характеристическая функция, которую мы обсудим позже.

Любое подмножество N называется коалицией. Для обозначения коалиций используются прописные буквы, например S. Выражение «коалиция S сформирована» очень часто встречается при описании игр. В теории оно означает, что все члены коалиции дают свое согласие на ее образование. На практике это не всегда так. Приведем примеры.

1. Я отправился в магазин и попросил буханку хлеба (и продавец согласился продать мне ее). Можно сказать, что с момента заключения этого (обязывающего) соглашения была образована коалиция между мной и продавцом.
2. Группа политических партий, получивших большинство голосов на выборах, решила сформировать правящую коалицию до следующих выборов.

[1] Точнее, коалиционных игр с побочными платежами, поскольку обычно в этих играх между игроками распределяются деньги.

Образование коалиции в этом случае заключается в соглашении разделить между собой бремя власти.

3. Группа инвесторов решила основать фабрику. Соглашение инвесторов об основании фабрики означает образование коалиции между ними.

Конечно же, коалиции не образуются в вакууме. Для их образования требуется продолжительный контакт между сторонами, интенсивные переговоры и подходящая для такого рода соглашений процедура принятия решений (т. е. решений о разделении прибыли). Анализ того, как будут вести себя участники коалиции с момента ее формирования, является анализом *концепций решения*. Мы рассмотрим их позже.

В данном разделе мы предполагаем, что всякий раз, когда формируется коалиция S, генерируется сумма денег $v(S)$. Таким образом, v является функцией, которую называют характеристической; она ставит в соответствие каждой коалиции некоторое вещественное число. Число $v(S)$ называется *выигрышем коалиции S*.

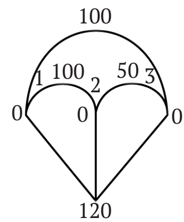
Пример

Рекламный агент обращается к трем индивидам — 1, 2 и 3, и просит подписаться под рекламным объявлением о том, что они пользуются зубной пастой «Блеск». Агент отмечает, что он заинтересован в получении как минимум двух подписей. Если подпишутся 1 и 2, то агент заплатит им в общей сложности \$100. Если подпишутся 1 и 3, то агент заплатит им в общей сложности \$100. С другой стороны, если 2 и 3 подпишутся, то он заплатит им в общей сложности только \$50. Если все трое согласятся подписаться, то агент заплатит им в общей сложности \$120. В этом примере образование коалиции означает подпись всех ее членов под рекламой.

Математическая модель имеет следующий вид[2]:

$N = \{1, 2, 3\}$

$v(1, 2) = 100$
$v(1, 3) = 100$
$v(2, 3) = 50$
$v(1, 2, 3) = 120$
$v(1) = v(2) = v(3) = 0$
$v(\varnothing) = 0$



Комментарии

1. Множество, состоящее из одного игрока, также является коалицией (коалиция из одного участника), поскольку коалиция является подмножеством N, и множества, состоящие из одного игрока, также являются подмножествами множества N.
2. Вопреки обыденным представлениям, в теории игр пустое множество удобно рассматривать как коалицию и предполагать, что $v(\varnothing) = 0$.

При обсуждении коалиционных игр мы будем обращать особое внимание на то, как игроки договариваются о дележе выигрыша, который смогут получить, если объединятся в коалицию и будут координировать свои действия.

Рассмотрим возможные варианты переговоров между игроками в описанной выше игре.

Игрок 2 предлагает игроку 1 поделить выигрыш поровну[3]: (50, **50**, 0).

---

[2] В целях упрощения записи мы будем опускать фигурные скобки и записывать, например, $v(1, 2) = 100$ вместо того, чтобы использовать более точное обозначение $v(\{1, 2\}) = 100$.

[3] Число, выделенное жирным шрифтом, указывает на игрока, который сделал предложение.

Игрок 3, который может остаться ни с чем, предлагает игроку 1: (60, 0, **40**).

Игрок 2, чтобы не оказаться «исключенным», снижает свой запрос, предлагая игроку 1: (70, **30**, 0).

Игрок 3 готов довольствоваться: (80, 0, **20**).

Игрок 2 обратится к игроку 3 и предложит: (0, **25**, 25).

Игрок 3 вынужден конкурировать и предложит: (70, 0, **30**).

Игрок 2 предложит сформировать коалицию из всех трех участников с дележом: (70, **20**, 30).

Если все игроки достигнут соглашения на этом этапе, то игра на этом заканчивается; при этом говорится, что исход игры — (70, **20**, 30), а также сформирована коалиция {1, 2, 3}.

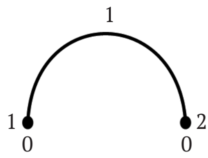
Существует множество теорий, которые пытаются предсказать вероятные исходы игры, однако они выходят за рамки данной книги. Вместо этого мы ответим на вопрос, каким, скорее всего, будет решение судьи или арбитра, если все три игрока обратятся к нему с просьбой предложить «справедливый» дележ.

3.3. Важные примеры коалиционных игр

Пример 1. Игра торга двух лиц

$N = \{1, 2\}$ $\qquad v(N) = 1$

$v(1) = v(2) = 0$



В этой игре участники не способны ничего достичь по отдельности; каждый из них по отдельности получает 0. Они смогут получить 1, если согласятся сформировать коалицию.

Пример 2. Простая игра торга

В этой игре имеется n участников, которые смогут получить, скажем, 1, если все согласятся участвовать; в противном случае они не получат ничего. Пример 1 является частным случаем этой игры, где $n = 2$.

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Характеристическая функция игры имеет вид:

$$v(S) = \begin{cases} 1 & S = N \\ 0 & S \neq N, S \subset N \end{cases}$$

В качестве S может быть взята любая коалиция с участниками из N, а v определена для всех подмножеств N, то есть для всевозможных коалиций из N.

Пример 3. Игра обмена между продавцом и покупателем

У игрока 1 имеется лишний дом, который он желает продать по приемлемой цене. Игрок 2 заинтересован в покупке дома. На каких условиях состоится сделка?

Сделка возможна только в том случае, если продавец оценивает дом ниже, чем покупатель, поскольку *сделка подразумевает получение выгоды обеими сторонами*; в противном случае она не состоится[4].

Предположим, что продавец оценивает свой дом в $100 000 и не станет продавать его дешевле (наоборот, надеется выручить за него еще больше). Пусть покупатель оценивает дом в $150 000 и не согласится отдать за него большую сумму (наоборот, надеется заплатить меньше). Оценка покупателя оказывается выше, так как ему нужно где-то жить.

Сделка может осуществиться при цене, например, в $120 000; в этом случае прибыль продавца составит

[4] Если оба участника назначат одинаковую цену, то не имеет значения, кто получит дом, а кто останется при деньгах.

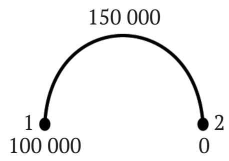
\$20 000, а покупатель согласится на покупку за \$120 000 дома, который, по его мнению, стоит \$150 000, и таким образом получит прибыль в размере \$30 000.

Если записать эту ситуацию формально в виде игры, то мы получим следующее:

Продавец является владельцем дома: $v(1) = 100\ 000$

Покупатель не владеет домом: $v(2) = 0$

$v(1, 2) = 120\ 000 + (150\ 000 - 120\ 000) = 150\ 000$



Пояснение. Формирование коалиции в данном случае означает совершение сделки. После продажи дома у продавца будет \$120 000, а у покупателя — дом, который он оценивает в \$150 000, хотя заплатил за него меньшую сумму; то есть у него будет \$150 000 за вычетом уплаченной за дом суммы. Это и есть выигрыш коалиции.

Комментарий. Мы получим ту же характеристическую функцию игры в том случае, если дом будет продан по другой цене, $n \neq 120\ 000$, такой, что $100\ 000 < p < 150\ 000$. Объясните, почему.

Пример 4. Рыночная игра с двумя продавцами и одним покупателем

В этом случае имеются три игрока: два продавца и покупатель. Каждый из продавцов обладает одним товаром, скажем, *DVD*-диском, приобретенным за \$100, который он хочет продать. Покупатель оценивает *DVD*-диск в \$200 и заинтересован в том, чтобы заплатить как можно меньше. В любом случае он не желает тратить на диск больше, чем \$200.

Построим характеристическую функцию данной игры.

$N = \{1, 2, 3\}$; игрок 1 и игрок 2 являются продавцами, а игрок 3 — покупатель.

Продавец 1 обладает *DVD*-диском, который оценивает в \$100: $v(1) = 100$.

Продавец 2 обладает *DVD*-диском, который оценивает в \$100: $v(2) = 100$.

Покупатель 3 не имеет *DVD*-диска: $v(3) = 0$.

Комментарий. Данное представление не учитывает деньги или другие средства, которые также могут быть у игроков. Мы могли бы дополнительно включить их оценку, однако это не повлияет на предложенное далее решение.

Как определить выигрыш коалиции $\{1, 3\}$? Если 1 и 3 решатся образовать коалицию, то разумно предположить, что игрок 1 продаст *DVD*-диск игроку 3 за p долларов, где $100 < p < 200$. (Напомним, что сделка состоится только в том случае, если обе стороны смогут извлечь из нее выгоду, следовательно, p должно быть больше 100 для продавца и меньше 200 для покупателя.) На этом этапе в распоряжении игрока 1 имеется p долларов, а игрок 3 получает *DVD*-диск, оцениваемый им в \$200, за который он уплатил меньшую сумму; то есть он имеет \$200 за вычетом суммы, уплаченной за диск. Таким образом, выигрыш коалиции $\{1, 3\}$ равен:

$$v(1, 3) = p + (200 - \mathrm{p}) = 200.$$

Выигрыш коалиции $\{2, 3\}$ рассчитывается точно так же; то есть $v(2, 3) = 200$, если предположить, что игрок 2 и игрок 3 заключили сделку.

Выигрыш коалиции $\{1, 2\}$ тоже составит $v(1, 2) = 200$. Это объединение двух продавцов, каждый из которых обладает *DVD*-диском стоимостью \$100, следовательно, выигрыш коалиции равен \$200.

Как определить выигрыш коалиции {1, 2, 3}? Образование коалиции {1, 2, 3} происходит в результате процесса, в котором задействованы все игроки. Этот процесс может происходить следующим образом. Продавец 1 говорит продавцу 2: «Выходи из игры и не составляй мне конкуренцию. Взамен я заплачу тебе p долларов по совершении сделки». Затем игрок 1 продаст *DVD*-диск игроку 3 за q долларов (конечно же, $q > p$). После окончания сделки игроки имеют следующие выигрыши:

Продавец 1: сумму $(q - p)$ долларов.

Продавец 2: сумму p долларов и *DVD*-диск, который оценивается им в \$100, в общей сложности $(100 + p)$.

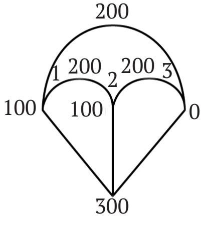
Покупатель 3: сумму $(200 - q)$ долларов: *DVD*-диск, который оценивается им в \$200 за вычетом уплаченной суммы q.

Таким образом,

$$v(1, 2, 3) = (q - p) + (100 + p) + (200 - q) = 300.$$

В итоге характеристическая функция имеет вид:

$v(1) = 100$
$v(2) = 100$
$v(3) = 0$
$v(1, 2) = 200$
$v(1, 3) = 200$
$v(2, 3) = 200$
$v(1, 2, 3) = 300$
$v(\emptyset) = 0$



Характеристическая функция описывает выигрыши всех коалиций, которые могли быть сформированы при вышеупомянутых условиях.

3.4. Упражнения

1. Рыночная игра с двумя покупателями и одним продавцом. Продавец 1 обладает ноутбуком, оцениваемым им в \$2000, который он собирается продать. Игрок 2 и игрок 3 являются потенциальными покупателями, не имеющими ноутбуков. Оценка стоимости ноутбука равна \$2800 для одного из покупателей (игрок 2) и \$3000 для другого (игрок 3). Каждый из покупателей заинтересован заплатить как можно меньшую сумму и ни при каких условиях не купит ноутбук за сумму большую, чем его оценка. Опишите игру в форме характеристической функции.

2. В игре о продаже перчаток задействованы три участника: у игрока 1 и игрока 2 есть левая перчатка, а у игрока 3 есть правая перчатка. Выигрыш коалиции характеризуется суммой денег, которую она может выручить за имеющиеся в ее распоряжении перчатки. За любую пару перчаток (левую и правую вместе) можно выручить \$50 на рынке. Одна перчатка не может быть продана на рынке. Опишите игру в форме характеристической функции.

3. Игра v описывает рынок из четырех участников, среди которых два продавца и два покупателя. Каждый продавец располагает товаром для продажи, который оценивается им в \$100. Каждый покупатель желает приобрести одну единицу товара и оценивает ее в \$150. Потенциальные покупатели сами не имеют товара, предлагаемого продавцами. Запишите игру в форме характеристической функции.

4. В игре о продаже перчаток задействованы пять участников: у игроков 1, 2 и 3 есть левая перчатка, а у игроков 4 и 5 есть правая перчатка. Выигрыш коалиции характеризуется суммой денег, которую она может

выручить за имеющиеся в ее распоряжении перчатки. За любую пару перчаток (левую и правую вместе) можно выручить \$100 на рынке. Опишите игру в форме характеристической функции.

3.5. Аддитивные игры

Игра (N, v) называется *аддитивной*, если для любых пар непересекающихся коалиций S и T (т. е. таких, что $S \cap T = \emptyset$) верно равенство:

$$v(S \cup T) = v(S) + v(T).$$

Игра аддитивна, если члены любой из пар непересекающихся коалиций этой игры получают в совокупности столько же, сколько имели бы в случае, если бы действовали независимо. Аддитивные игры являются самыми простыми. В них нет стимула для образования коалиций, поскольку ни одна из них не в состоянии предоставить своим членам чего-то такого, чего участники не могли бы получить самостоятельно.

Пример

$v(1) = 5$	$v(2) = 10$	$v(3) = 15$
$v(1, 2) = 15$	$v(1, 3) = 20$	$v(2, 3) = 25$
$v(1, 2, 3) = 30$		

$v(\emptyset) = 0$

Проверьте, выполнено ли свойство аддитивности.

3.6. Супераддитивные игры

Игра (N, v) будет называться *супераддитивной*, если для любых пар непересекающихся коалиций S и T (т. е. таких, что $S \cap T = \emptyset$) выполняется соотношение:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

Иначе говоря, супераддитивная игра — это такая игра, в которой любая пара непересекающихся коалиций, действуя вместе, может получить как минимум столько же, сколько могли бы получить эти две коалиции, действуя по отдельности. Другими словами, формировать большие коалиции выгодно.

Данное предположение представляется достаточно естественным, поскольку большие коалиции всегда могут действовать так, как будто они состоят из нескольких коалиций.

Вопрос в том, насколько справедливо предположение о супераддитивности. Ответ зависит от того, какую жизненную ситуацию мы хотим описать. Для большинства социальных и экономических явлений предположение о супераддитивности вполне справедливо. Однако это не всегда так. Например, есть ситуации, в которых по определенным причинам (личным, политическим, расовым и т. д.) существуют две группы, при том что не только их сотрудничество не взаимовыгодно, но и действия одной из групп наносят ущерб интересам другой. В подобных случаях единая коалиция контрпродуктивна и предположение о супераддитивности неприемлемо. Другим примером может служить ситуация, при которой антимонопольное законодательство запрещает слияние мелких фирм в более крупные. В этом случае нарушение закона приводит к наложению крупного штрафа на объединяющиеся фирмы.

В супераддитивной игре неравенство

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

выполнено для любой пары непересекающихся коалиций S и T. Из этого неравенства следует, что для S и T есть смысл в формировании коалиции $S \cup T$. В супераддитивных играх целесообразно формирование максимальных коалиций. Поэтому будет естественным предположить, что сформируется коалиция N и полный выигрыш ее членов будет $v(N)$. Этот полный выигрыш необходимо как-то поделить между всеми участниками коалиции N — следовательно, в подобных случаях мы будем предполагать, что окончательный исход характеризуется *вектором выигрыша* $\mathrm{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, удовлетворяющим

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = v(N).$$

$$x_1 \geq v(1), x_2 \geq v(2), \ldots, x_n > v(n).$$

Здесь x_i — выигрыш игрока i. Первая строка, называемая *групповой рациональностью* или *эффективностью*, отражает то, что сформирована большая коалиция и ее выигрыш делится между всеми игроками. Вторая строка, называемая *индивидуальной рациональностью*, показывает, что каждый игрок i войдет в состав большой коалиции только в том случае, если получит как минимум столько, сколько мог бы получить самостоятельно. Подводя итог, отметим, что по крайней мере для супераддитивных игр решение игры принадлежит множеству векторов выигрышей вне зависимости от того, как оно было найдено.

Пример

$v(1) = 6$	$v(2) = 18$	$v(3) = 12$
$v(1, 2) = 24$	$v(1, 3) = 20$	$v(2, 3) = 35$
$v(1, 2, 3) = 50$		

$v(\emptyset) = 0$

Проверьте, имеет ли место супераддитивность.

3.7. Мажоритарные игры

Одно из правил голосования в выборных органах определяет, какие подмножества этого выборного органа достаточно весомы, чтобы принять решение, а какие — нет. Подмножества, способные лоббировать решение, именуются *выигрывающими коалициями*. Напротив, *проигрывающие коалиции* оказываются недостаточно многочисленными для принятия решения. Зачастую выигрывающие коалиции — это те, что включают в себя большинство членов.

Выборный орган можно описать в виде коалиционной игры. Докажем это, приписав каждой выигрывающей коалиции выигрыш в размере 1, а каждой проигрывающей коалиции — выигрыш в размере 0. В подобных играх выигрыш в размере 1 — это не денежный платеж, а более абстрактная ценность, а именно — способность лоббировать решения. Число 1 показывает, что выигрывающая коалиция способна достичь всего, чего она желает. Число 0 показывает, что проигрывающая коалиция не в состоянии гарантировать что-либо.

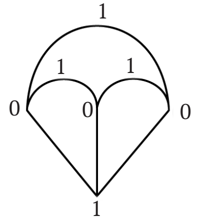
Пример 1. Мажоритарная игра трех лиц

Классный комитет состоит из трех членов. Решение может быть принято с согласия двоих из них. Конечно же, согласия всех членов также достаточно для принятия решения, но по отдельности каждый член комитета является меньшинством.

Характеристическая функция в этом случае имеет вид:

$N = \{1, 2, 3\}$ $\quad v(1) = v(2) = v(3) = 0 \quad v(\emptyset) = 0$

$v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1$



Анализировать эту игру можно двумя способами. Один из них — это понять, какие коалиции могут быть сформированы и как они с наибольшей вероятностью поделят выигрыши. Если образована коалиция {1, 2}, то исходом, скорее всего, будет вектор ($^1/_2$, $^1/_2$, 0). Если образована коалиция {1, 3}, то исходом, скорее всего, будет вектор ($^1/_2$, 0, $^1/_2$). Если образована коалиция {2, 3}, то исходом, скорее всего, будет вектор (0, $^1/_2$, $^1/_2$).

Другой способ анализа игры — это предположить, каким будет решение арбитра, если классный комитет предоставит ему на рассмотрение эту игру и попросит вынести справедливое решение. Арбитр, скорее всего, предложит образовать большую коалицию и поделить выигрыш поровну. Таким образом, исходом будет ($^1/_3$, $^1/_3$, $^1/_3$).

Пример 2. Взвешенная мажоритарная игра

В выборном органе, подобном парламенту, игроки — это партии, и у каждой партии несколько представителей. Предположим, что в парламенте некоторой страны представлены три партии, получившие по итогам выборов следующие результаты:

Партия 1 — 5 представителей.
Партия 2 — 3 представителя.
Партия 3 — 7 представителей.

Число представителей партии i называется «влиянием» (весом) партии i. Пусть w обозначает вес партии, так что вес партии i равен w_i. В нашем случае $w_1 = 5$, $w_2 = 3$, $w_3 = 7$.

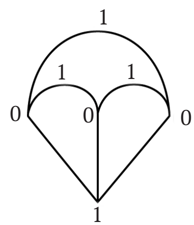
Наличие подобных весов особенно важно в парламентах, где в коалициях обеспечивается соблюдение дисциплины, то есть все члены партии в обязательном порядке голосуют одинаково, если рассматриваются важные вопросы. В таком случае будет вполне оправданно называть партию игроком, а число ее представителей — весом.

В общем случае взвешенная мажоритарная игра, записанная в виде $[q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$, является игрой (N, v), где $w_1 \geq 0, w_2 \geq 0, \ldots, w_n \geq 0$ и

$v(S) = 1$, если сумма весов S больше или равна q,
$v(S) = 0$ в противном случае.

Число q называется *квотой* игры. Оно отражает минимальную сумму весов в распоряжении коалиции, необходимую для вынесения решения.

В нашем примере $v(1) = v(2) = v(3) = 0$, $v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = 1$ и $v(1, 2, 3) = 1$.



Так, мы можем выбрать $q = 8$, и тогда игра примет вид $[8; 5, 3, 7]$. Мы также можем выбрать $q = 7\frac{1}{2}$, и тогда получим игру $\left[7\frac{1}{2};\ 5,\ 3,\ 7\right]$. С другой стороны, если для вынесения решения требуется $^2/_3$ от общей суммы голосов, то $q = 10$, игра тогда будет записана как $[10; 5, 3, 7]$.

Априори не все возможные взвешенные мажоритарные игры отражают реальную процедуру выборов. Рассмотрим, к примеру, игру $[8; 3, 4, 5, 6]$. Среди выигрывающих коалиций можно обнаружить и $S = \{1, 3\}$, и $T = \{2, 4\}$, и многие другие. Можно ли утверждать, что и S и T контролируют все решения парламента? Аналогичным образом, непонятно, как выглядит игра [7; 2, 2, 2, 2, 2, 2], поскольку коалиции {1, 2, 3} и {4, 5, 6} оказываются проигрывающими. Мы подошли к понятию *строгой взвешенной мажоритарной игры*, где квота должна составлять больше половины всех весов. Строгие взвешенные мажоритарные игры удовлетворяют следующим свойствам.

1. Пустая коалиция является проигрывающей коалицией.
2. Коалиция из всех участников игры — выигрывающая коалиция.
3. Если S является выигрывающей коалицией, то коалиция из всех участников, не входящих в S, будет проигрывающей коалицией.
4. Если S является проигрывающей коалицией, то коалиция из всех участников, не входящих в S, будет выигрывающей коалицией.

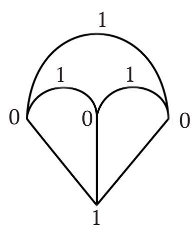
Упражнение. Какова характеристическая функция игры [9; 1, 7, 9]?

Ответ. Игроки 1 и 2 не смогут принять решение самостоятельно: $v(1) = v(2) = 0$.

Игрок 3 способен принять решение самостоятельно: $v(3) = 1$.

Игроки 1 и 2 вместе не имеют достаточно голосов (поясните): $v(1, 2) = 0$, $v(\emptyset) = 0$, $v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1$.

Графическое представление:



В этой игре игрок 3 является *диктатором*, так как его согласие необходимо и достаточно для принятия любого решения.

3.8. Упражнения

1. Запишите характеристическую функцию каждой из следующих взвешенных мажоритарных игр:

(1) [3; 2, 1, 1]	(5) [9; 5, 5, 3, 4]
(2) [3; 2, 1, 1, 1]	(6) [61; 61, 19, 20, 20]
(3) [8; 6, 2, 7]	(7) [61; 50, 40, 30]
(4) [8; 5, 6, 4]	(8) [61; 35, 35, 35, 15]

2. В следующих играх требуется не простое, а решающее большинство. В каждой игре для принятия решения необходимо набрать $^2/_3$ голосов. Запишите характеристическую функцию для каждой из перечисленных игр:

(1) $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $w_1 = w_2 = 2$, $w_3 = w_4 = w_5 = 1$;
(2) $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $w_1 = w_2 = 5$, $w_3 = 3$, $w_4 = 4$;
(3) $N = \{1, 2, 3\}$, $w_1 = 50$, $w_2 = 40$, $w_3 = 30$;
(4) $N = \{1, 2, 3, 4\}$, $w_1 = w_2 = w_3 = 35$, $w_4 = 15$.

3. Запишите характеристическую функцию следующей игры: $N = \{1, 2, 3, 4\}$; коалиция является выигрывающей тогда и только тогда, когда она состоит хотя бы из трех игроков, один из которых — игрок 1.

4. Участник называется *игроком с правом вето*, если он входит в состав любой выигрывающей коалиции; то есть коалиция не может быть выигрывающей, если он в нее не входит.

Существуют ли игроки с правом вето в следующих взвешенных мажоритарных играх?

Ответ поясните.

(1) [8; 1, 1, 1, 6]
(2) [7; 5, 5, 3]
(3) [61; 60, 20, 20, 20]
(4) [61; 59, 30, 21, 10]
(5) [10; 3, 3, 3, 9]

3.9. Симметричные игроки

Пример 1

Рассмотрим следующую игру:

$N = \{1, 2, 3, 4\}$ $v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = 0$ $v(\varnothing) = 0$
$v(1, 2) = 8$ $v(2, 3) = 9$
$v(1, 3) = 9$ $v(2, 4) = 15$
$v(1, 4) = 15$ $v(3, 4) = 5$
$v(1, 2, 3) = 20$ $v(1, 3, 4) = 50$
$v(1, 2, 4) = 30$ $v(2, 3, 4) = 50$
$v(1, 2, 3, 4) = 60$

Нетрудно заметить, что у нескольких коалиций выигрыши одинаковы:

$v(1) = v(2) = 0$
$v(1, 3) = v(2, 3) = 9$
$v(1, 4) = v(2, 4) = 15$
$v(1, 3, 4) = v(2, 3, 4) = 50$

Каждая пара коалиций с равными выигрышами характеризуется тем, что одна из них включает игрока 1 и некоторых дополнительных игроков, а другая — игрока 2 с теми же дополнительными игроками. Таким образом, любая коалиция содержит либо игрока 1, либо игрока 2, и если заменить одного из них на другого и наоборот, то выигрыш коалиции не изменится.

Вопрос. Нужно ли проверить другие коалиции, не перечисленные выше?

Ответ. Остальные коалиции либо содержат обоих игроков сразу, и в этом случае перестановка игроков не изменит состава коалиции, либо не содержат ни одного из них, и переставлять окажется некого (проверьте!).

В конечном итоге можно сказать, что в любой коалиции, содержащей игрока 1 или игрока 2, выигрыш остается неизменным при замене одного из них на другого. В этом случае говорят, что игроки 1 и 2 *симметричны*.

Пример 2

$N = \{1, 2, 3, 4\}$	$v(1) = v(2) = 1$	$v(3) = v(4) = 0$
	$v(1, 2) = 7$	$v(2, 3) = 7$
	$v(1, 3) = 10$	$v(2, 4) = 6$
	$v(1, 4) = 5$	$v(3, 4) = 5$
	$v(1, 2, 3) = 20$	$v(1, 3, 4) = 25$
	$v(1, 2, 4) = 30$	$v(2, 3, 4) = 40$
	$v(1, 2, 3, 4) = 70$	$v(\emptyset) = 0$

Вопрос. Смогут ли игроки 1 и 3 заменять друг друга в любой коалиции, содержащей одного из них?

Ответ: Нет. Хотя игрок 1 и в состоянии заменить игрока 3 в коалиции {2, 3}, а игрок 3 может заменить игрока 1 в коалиции {1, 2}, найдутся другие коалиции, в которых подобные замещения приведут к изменению выигрыша. Например, $v(1, 2, 4) \neq v(2, 3, 4)$, $v(1) \neq v(3)$.

Определение

Два игрока из множества N всех игроков называются *симметричными* в игре (N, v), если они могут заменить друг друга в любой коалиции, содержащей одного из них; то есть если один из них заменит другого, выигрыш коалиции при этом не изменится.

Формально игроки i и j симметричны, если для любой S, не содержащей ни i, ни j, выполнено равенство:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\}).$$

В частности, это верно для $S = \emptyset$, что означает $v(i) = v(j)$.

3.10. Упражнения

1. Ниже представлен список игр. Проверьте каждую из них на наличие симметричных игроков. Если таковые найдутся, укажите их.

(1) $N = \{1, 2\}$ $\quad v(1) = v(2) = 0$

(2) $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ $\quad v(S) = \begin{cases} 1 & S = N \\ 0 & S \neq N,\ S \subset N \end{cases}$

(3) $N = \{1, 2, 3\}$ $\quad v(1) = v(2) = 100 \quad v(3) = 0$
$v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = 200$
$v(1, 2, 3) = 300 \quad v(\emptyset) = 0$

(4) $N = \{1, 2, 3\}$ $\quad v(1) = v(2) = v(3) = 0 \quad v(\emptyset) = 0$
$v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1$

(5) [3; 2, 1, 1, 1]

(6) $N = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad v(1) = v(2) = 2 \quad v(3) = v(4) = 0$
$v(1, 2) = 5 \quad v(2, 3) = 6$
$v(1, 3) = 7 \quad v(2, 4) = 5$
$v(1, 4) = 8 \quad v(3, 4) = 7$
$v(1, 2, 3) = 20 \quad v(1, 3, 4) = 15$
$v(1, 2, 4) = 10 \quad v(2, 3, 4) = 20$
$v(1, 2, 3, 4) = 30 \quad v(\emptyset) = 0$

2. Найдите симметричных игроков в следующих взвешенных мажоритарных играх:

(1) [8; 6, 2, 7]
(2) [9; 5, 5, 3, 4]
(3) [61; 61, 19, 20, 20]
(4) [61; 50, 40, 30]
(5) [61; 35, 35, 35, 15]

3.11. Болваны

Рассмотрим мажоритарную игру [12; 1, 3, 7, 12] и представим ее в виде характеристической функции:

$v(1) = v(2) = v(3) = 0$	$v(4) = 1$
$v(1, 2) = 0$	$v(2, 3) = 0$
$v(1, 3) = 0$	$v(2, 4) = 1$
$v(1, 4) = 1$	$v(3, 4) = 1$
$v(1, 2, 3) = 0$	$v(1, 3, 4) = 1$
$v(1, 2, 4) = 1$	$v(2, 3, 4) = 1$
$v(1, 2, 3, 4) = 1$	$v(\emptyset) = 0$

Обратим внимание на коалиции, в составе которых присутствует игрок 1:

$v(1) = 0$	$v(1, 2, 3) = 0$
$v(1, 2) = 0$	$v(1, 2, 4) = 1$
$v(1, 3) = 0$	$v(1, 3, 4) = 1$
$v(1, 4) = 1$	$v(1, 2, 3, 4) = 1$

Как можно заметить, участие игрока 1 в какой-либо коалиции не изменяет ее выигрыша. Изымем его из всех коалиций и проанализируем полученные выигрыши:

$v(\emptyset) = 0$	$v(2, 3) = 0$
$v(2) = 0$	$v(2, 4) = 1$
$v(3) = 0$	$v(3, 4) = 1$
$v(4) = 1$	$v(2, 3, 4) = 1$

Если сравнить этот результат с предыдущим, то нетрудно заметить, что изъятие игрока 1 из всех возможных коалиций или, наоборот, участие игрока 1 в какой-либо из коалиций не изменяет выигрыша коалиции.

Формально любая коалиция, не включающая игрока 1, удовлетворяет равенству $v(S \cup \{1\}) = v(S)$. Если присутствие или отсутствие игрока не изменяет выигрыша коалиции, то его называют *болваном*.

Определение

Игрок из множества N называется *болваном*, если своим участием он не вносит никакого вклада в выигрыш ни одной из коалиций. Формально i является болваном, если для любой S, не содержащей i, справедливо равенство:

$$v(S \cup \{i\}) = v(S).$$

В частности, если $S = \varnothing$, то $v(i) = 0$.

3.12. Упражнения

1. (1) Определите болванов в следующей игре:

$N = \{1, 2, 3, 4\}$ $v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = 0$ $v(\varnothing) = 0$

$v(1, 2) = 1$ $v(1, 2, 3) = 10$

$v(1, 3) = 0$ $v(1, 2, 4) = 0$

$v(1, 4) = 0$ $v(1, 3, 4) = 0$

$v(2, 3) = 10$ $v(2, 3, 4) = 10$

$v(2, 4) = 0$ $v(1, 2, 3, 4) = 10$

$v(3, 4) = 0$

(2) Изменится ли ответ, если $v(1, 2, 3, 4) = 20$, а для всех оставшихся S выигрыш $v(S)$ остается без изменения? Ответ поясните.

2. (1) Определите болванов и симметричных игроков в следующей игре:

$N = \{1, 2, 3, 4\}$ $v(1) = v(2) = 0$ $v(3) = v(4) = 1$ $v(\varnothing) = 0$

$v(1, 2) = 0$ $v(2, 3) = 1$

$v(1, 3) = 1$ $v(2, 4) = 1$

$v(1, 4) = 1$ $v(3, 4) = 2$

$v(1, 2, 3) = 1$ $v(1, 3, 4) = 2$

$v(1, 2, 4) = 1$ $v(2, 3, 4) = 2$

$v(1, 2, 3, 4) = 2$

(2) Изменится ли ответ в случае, если $v(2) = 1$, а остальные условия остаются без изменения? Ответ поясните.

3. Определите болванов в следующих мажоритарных играх:

(1) [61; 35, 35, 35, 15]
(2) [7; 5, 4, 3, 1]
(3) [10; 5, 5, 5, 2, 2]

3.13. Сумма игр

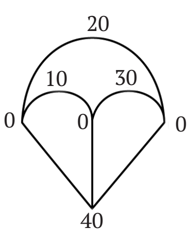
Математическая модель кооперативной игры — это пара $(N; v)$, где N — множество игроков, а v — характеристическая функция, которая ставит в соответствие каждой коалиции вещественное число. Для выбранного множества игроков можно составить бесконечное множество игр, если использовать различные характеристические функции. Рассмотрим, к примеру, следующие игры на множестве $N = \{1, 2, 3\}$.

Игра $(N; u)$:

$u(1) = u(2) = u(3) = 0 \quad u(\varnothing) = 0$

$u(1, 2) = 10 \quad u(1, 3) = 20 \quad u(2, 3) = 30$

$u(1, 2, 3) = 40$

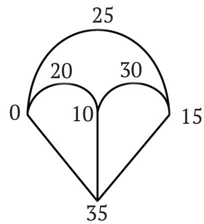


Игра $(N; w)$:

$w(1) = 5$ $w(2) = 10$ $w(3) = 15$ $w(\emptyset) = 0$

$w(1, 2) = 20$ $w(1, 3) = 25$ $w(2, 3) = 30$

$w(1, 2, 3) = 35$

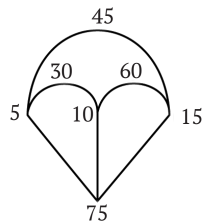


Игра $(N; v)$:

$v(1) = 5$ $v(2) = 10$ $v(3) = 15$ $v(\emptyset) = 0$

$v(1, 2) = 30$ $v(1, 3) = 45$ $v(2, 3) = 60$

$v(1, 2, 3) = 75$



Нетрудно заметить, что игра $(N; v)$ представляет собой сумму игр $(N; u)$ и $(N; w)$, поскольку выигрыш каждой коалиции в игре v равен сумме ее выигрышей в играх u и w.

К примеру, выигрыш коалиции $\{1, 2\}$ в игре $(N; u)$ равен 10, а в игре $(N; w)$ — 20, в то время как выигрыш этой коалиции в третьей игре равен 30.

Этот пример подводит нас к следующему определению.

Определение

Игра (N; v) называется суммой двух игр (N; u) и (N; w), если для любой коалиции S из множества игроков N ($S \subseteq N$) выполняется следующее равенство:

$$v(S) = u(S) + w(S).$$

Обратное утверждение также верно; то есть заданную игру (N; v) можно разбить на две игры, сумма которых — исходная игра.

Пример

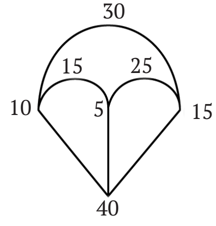
$N = \{1, 2, 3\}$

Характеристическая функция имеет вид:

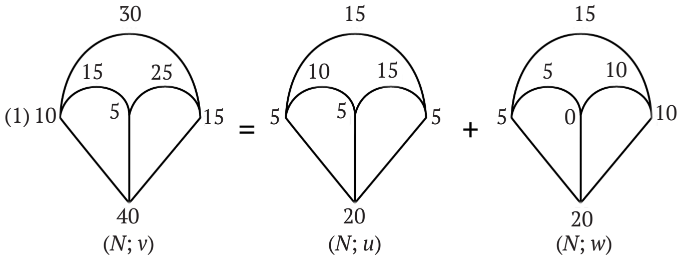
$v(1) = 10$ $v(2) = 5$ $v(3) = 15$ $v(\emptyset) = 0$

$v(1, 2) = 15$ $v(1, 3) = 30$ $v(2, 3) = 25$

$v(1, 2, 3) = 40$

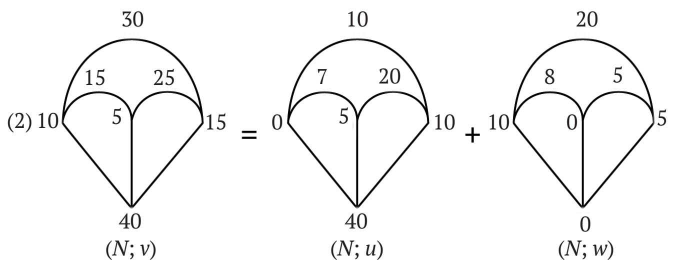


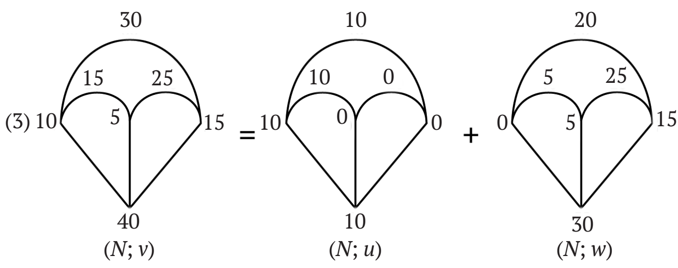
Рассмотрим несколько способов разбиения игры на две различные игры, сумма которых равна исходной игре. Например, на приведенном ниже рисунке игра (N; v) представлена в виде суммы игр (N; w) и (N; u):



$w(1) = 5$ $u(1) = 5$, значит, $w(1) + u(1) = 10 = v(1)$
$w(2, 3) = 15$ $u(2, 3) = 10$, значит, $w(2, 3) + u(2, 3) = 25 = v(2, 3)$
и так далее.

Упражнение. Проверьте, что для каждого указанного ниже разбиения и любой коалиции S выполняется равенство $v(S) = w(S) + u(S)$.



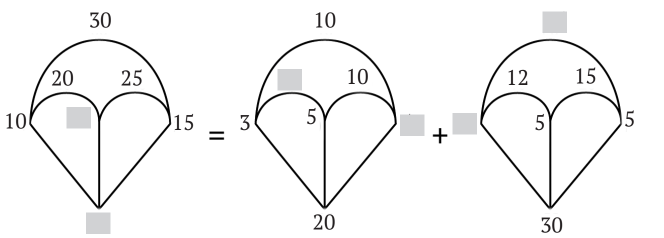


Упражнение. Укажите другой способ представления исходной игры в виде суммы двух игр.

Понятие суммы игр позволяет создавать новые игры из двух имеющихся игр с одними и теми же участниками и, наоборот, разбивать исходную игру на две различные игры.

3.14. Упражнения

1. Ниже указано разбиение игры на две другие игры. Вычислите пропущенные значения.



2. Рассмотрим две игры $(N; v)$ и $(N; w)$. Запишите характеристическую функцию суммы этих игр.

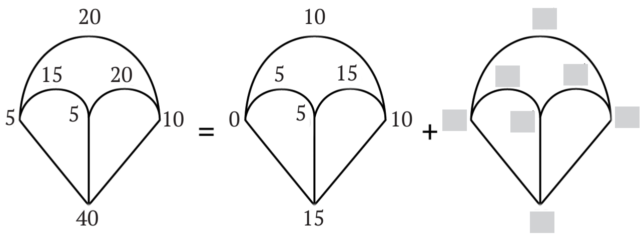
$N = \{1, 2, 3\}$	$w(1) = 5$	$w(2) = 0$
$v(1) = v(2) = v(3) = 0$	$w(3) = 5$	$w(1, 2) = 5$
$v(1, 2) = 15$	$w(1, 3) = 15$	$w(2, 3) = 10$
$v(1, 3) = v(2, 3) = 20$	$w(\varnothing) = 0$	
$v(1, 2, 3) = 40$ $v(\varnothing) = 0$		

3. Рассмотрим игру $(N; v)$:

$N = \{1, 2, 3\}$	$v(1) = v(2) = 5$	$v(3) = 10$	$v(\varnothing) = 0$
$v(1, 2) = 15$	$v(1, 3) = 20$	$v(2, 3) = 20$	
$v(1, 2, 3) = 40$			

Ниже указано разбиение этой игры на сумму двух игр так, что в первой из них игрок 1 является болваном.

(1) Вычислите пропущенные значения во второй игре.



(2) Существует ли болван также и во второй игре?

4. Рассмотрим игру $(N; v)$:

$N = \{1, 2, 3\}$	$v(1) = 10$	$v(2) = 5$
$v(3) = 20$	$v(1, 2) = 20$	$v(1, 3) = 30$
$v(2, 3) = 40$	$v(1, 2, 3) = 60$	$v(\emptyset) = 0$

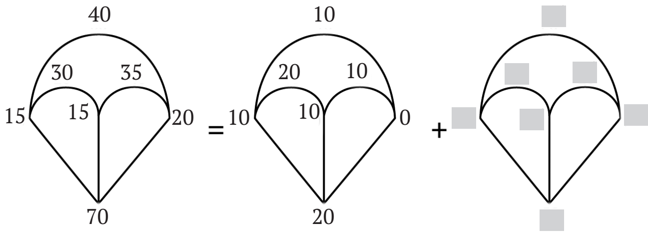
(1) Разбейте игру на сумму двух игр так, чтобы в одной из них игроки 2 и 3 были болванами.
(2) Существуют ли болваны также и во второй игре?

5. Рассмотрим игру $(N; v)$:

$N = \{1, 2, 3\}$	$v(1) = 15$	$v(2) = 15$
$v(3) = 20$	$v(1, 2) = 30$	$v(1, 3) = 40$
$v(2, 3) = 35$	$v(1, 2, 3) = 70$	$v(\emptyset) = 0$

Ниже представлено разбиение этой игры на две игры так, что в первой из них игрок 3 является болваном, а игроки 1 и 2 симметричны.

(1) Вычислите пропущенные значения во второй игре.



(2) Существуют ли болваны и/или симметричные игроки во второй игре?

6. Рассмотрим игру $(N; v)$:

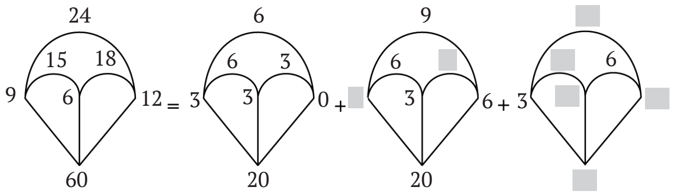
$N = \{1, 2, 3\}$	$v(1) = 6$	$v(2) = 6$
$v(3) = 12$	$v(1, 2) = 12$	$v(1, 3) = 18$
$v(2, 3) = 24$	$v(1, 2, 3) = 30$	$v(\emptyset) = 0$

(1) Разбейте эту игру на две таким образом, чтобы в одной из них игроки 1 и 3 были симметричными, а игрок 2 оказался болваном.
(2) Существуют ли болваны и/или симметричные игроки в другой игре?

7. Рассмотрим игру $(N; v)$:

$N = \{1, 2, 3\}$	$v(1) = 9$	$v(2) = 6$
$v(3) = 12$	$v(1, 2) = 15$	$v(1, 3) = 24$
$v(2, 3) = 18$	$v(1, 2, 3) = 60$	$v(\emptyset) = 0$

Ниже представлено ее разбиение на три игры, сумма которых равна исходной игре. Вычислите пропущенные значения.



8. Рассмотрим игру (N; v):

$N = \{1, 2, 3\}$ $v(1) = 5$ $v(2) = 10$
$v(3) = 15$ $v(1, 2) = 15$ $v(1, 3) = 25$
$v(2, 3) = 30$ $v(1, 2, 3) = 50$ $v(\varnothing) = 0$

Разбейте эту игру на три игры, сумма которых равна исходной игре.

3.15. Вектор Шепли

Может возникнуть несколько вопросов касательно рассматриваемой игры (N; v). Предположим, что сформировались те или иные коалиции. Как игрокам следует разделить между собой выигрыши коалиций? Каково будет предложение беспристрастного арбитра, если игроки обратятся к нему за советом? Любая теория, которая пытается дать ответ на любой из поставленных вопросов, носит название *концепции решения*. В этой главе мы будем иметь дело с одной из концепций решения, называемой «вектором Шепли»[5]. Фактически одной из ее целей является формулировка правил, позволяющих беспристрастному арбитру предлагать способ распределения $v(N)$ среди игроков.

[5] *Shapley L. S.* A Value for n-person Games // Contributions to the Theory of Games II / H. Kuhn, A. W. Tucker (eds). Princeton: Princeton University Press, 1953. P. 307–317.

Мы рассмотрим простую систему из четырех правил (аксиом) и убедимся, что она дает возможность арбитру решать, как справедливо поделить $v(N)$ между игроками в любой игре. Мы докажем, что эти при помощи этих аксиом определяется единственный способ дележа $v(N)$ в каждой игре.

Данные аксиомы впервые были сформулированы в 1953 г. американским экономистом и математиком Ллойдом Шепли, который смог доказать, что с их помощью арбитр действительно может осуществить дележ в любой ситуации. Распределение выигрышей в соответствии с этим решением называется *вектором Шепли*.

Пример 1

$N = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad v(N) = 80$

$v(S) = 0, S \neq N$

В этой игре все участники симметричны (проверьте!). Арбитр учтет этот факт и предложит поделить $v(N)$ поровну между всеми участниками. Следовательно, будет получен исход (20, 20, 20, 20).

Предлагаемое распределение следует из аксиомы:

Аксиома 1. *Общая сумма $v(N)$ распределяется между всеми игроками.*

Данная аксиома называется *аксиомой эффективности*, поскольку во многих играх $v(N)$ — максимальная сумма денег, которую игроки могут получить, разбивая N разными способами на несколько коалиций. Аксиома соответствует здравому смыслу, поскольку игроки желают распределить между собой все, что способны выиграть, когда они действуют совместно, а именно — $v(N)$.

Аксиома 2. *Симметричные игроки получают одинаковые выигрыши.*

Данная аксиома носит название *аксиомы симметричности* по очевидным причинам. Она обоснована тем, что мы пытаемся найти справедливое распределение, которое было бы приемлемым для всех игроков, и избегаем, таким образом, излишних переговоров. Подобное распределение выигрышей, не проводящее различий между симметричными игроками, приемлемо для всех.

Пример 2

$N = \{1, 2, 3\}$ $v(1) = v(2) = v(3) = 0$ $v(\emptyset) = 0$
$v(1, 2) = 30$ $v(1, 3) = 0$ $v(2, 3) = 0$
$v(1, 2, 3) = 30$

В этой игре игроки 1 и 2 являются симметричными, а игрок 3 — болван (проверьте!). Вполне разумно предположить, что при распределении выигрыша игрок 3 не получит ничего. В самом деле: так как он не вносит никакого вклада, вполне обоснованно, что он и не должен ничего получить. Таким образом, распределение выигрышей в игре имеет вид (15, 15, 0).

Сформулируем третью аксиому.

Аксиома 3. *Выигрыш болвана равен нулю.*

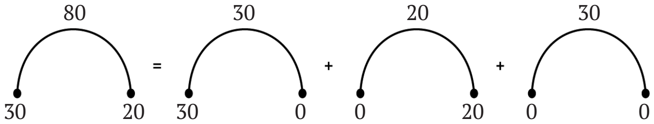
Аксиома также называется *аксиомой болвана*. Она вполне обоснованна: весьма логично, что если игрок ничего не привносит, то ничего и не получает.

Пример 3

$N = \{1, 23\}$ $v(1) = 30$ $v(2) = 20$
$v(1, 2) = 80$ $v(\emptyset) = 0$

Разобьем игру на сумму из трех игр.

$u(1) = 30$ $\quad$ $u(2) = 0$ $\quad$ $u(1, 2) = 30$
$w(1) = 0$ $\quad$ $w(2) = 20$ $\quad$ $w(1, 2) = 20$
$\tau(1) = 0$ $\quad$ $\tau(2) = 0$ $\quad$ $\tau(1, 2) = 30$



В игре $(N; u)$ игрок 2 является болваном, в игре $(N; w)$ игрок 1 является болваном, а в игре $(N; \tau)$ игроки 1 и 2 симметричны (проверьте!).

Согласно рассмотренным выше аксиомам, распределение выигрышей в каждой игре имеет вид:

$(N; u)$ — $(30, 0)$
$(N; w)$ — $(0, 20)$
$(N; \tau)$ — $(15, 15)$

Сложив полученные выигрыши, получим (45, 35). Именно такой дележ, по нашему мнению, должен предложить арбитр.

Мы обосновали решение арбитра, опираясь на следующую аксиому.

Аксиома 4. *При разбиении исходной игры на сумму различных игр распределение выигрышей между участниками исходной игры должно быть равно сумме распределений, полученных в индивидуальных играх.*

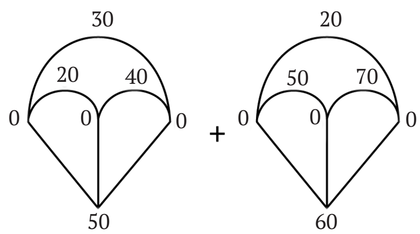
Мы обосновываем эту аксиому следующим образом. Представим себе ситуацию, в которой одно и то же множество игроков участвует в нескольких играх;

в этом случае игроки в итоге получат сумму выигрышей, полученных в каждой из таких отдельных игр.

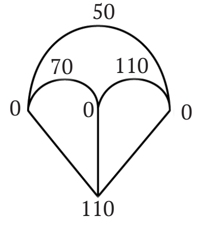
С другой стороны, если мы будем рассматривать совокупность отдельных игр как одну игру, то мы получим игру, характеристическая функция которой равна сумме характеристических функций этих отдельных игр, так как каждая коалиция в каждой отдельной игре может получить свой выигрыш и в конце концов получает сумму этих выигрышей.

Пример

Рассмотрим две игры:



Рассмотрим коалицию {1, 2}. Если будет сформирована такая коалиция, то в первой игре она сможет получить 20, а во второй игре — 50. Наконец, она выиграет 70 в том случае, если будет сформирована в обеих играх. Подобным образом можно сложить выигрыши оставшихся коалиций, получив следующую игру:



Сформулируем аксиомы Шепли в кратком виде:

Аксиома эффективности: $v(N)$ целиком распределяется между всеми игроками.

Аксиома симметричности: если в игре имеются симметричные игроки, то их выигрыши одинаковы.

Аксиома болвана: если в игре есть болван, то его выигрыш равен нулю.

Аксиома аддитивности: если $(N; v) = (N; w) + (N; u)$, то выигрыш суммы двух игр равен сумме выигрышей двух игр.

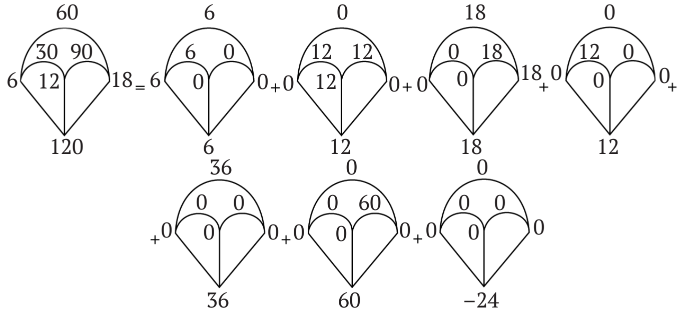
Шепли, сформулировав эти аксиомы, доказал, что с их помощью можно найти *единственное значение* для любой игры. Доказательство теоремы Шепли выходит за рамки данной книги, однако мы рассмотрим, каким образом можно находить значение игры, на примерах ниже.

Пример

$N = \{1, 2, 3\}$	$v(1) = 6$	$v(2) = 12$
$v(3) = 18$	$v(1, 2) = 30$	$v(1, 3) = 60$
$v(2, 3) = 90$	$v(1, 2, 3) = 30$	$v(\varnothing) = 0$

В игре нет ни симметричных игроков, ни болванов. Однако можно разбить игру на сумму простых игр так, что каждая из них будет состоять только из болванов и/или симметричных игроков. Тогда при помощи аксиом мы сможем вычислить вектор Шепли для этих игр, а затем по аксиоме аддитивности найти вектор Шепли исходной игры.

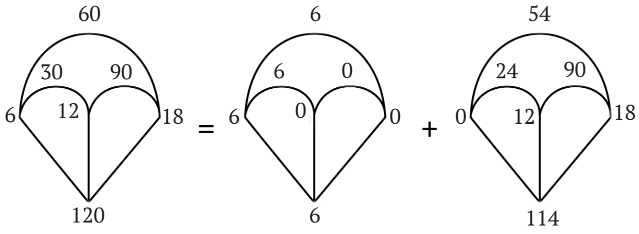
Рассмотрим один из способов разбиения исходной игры на простые игры, содержащие только болванов и/или симметричных игроков.



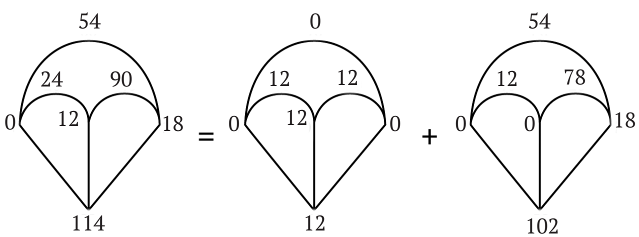
Проверьте, что сумма всех этих игр в действительности равна исходной игре.

Каким образом получено разбиение?

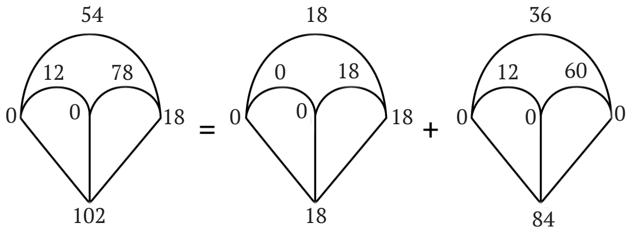
В первую очередь мы разбиваем игру на две игры.



Далее мы разбиваем правую игру еще на две.



Затем снова разбиваем правую игру на две игры.



И так далее.

Упражнение. Разбейте правую игру на две игры и продолжайте процесс разбиения до тех пор, пока не будут получены семь игр из примера выше.

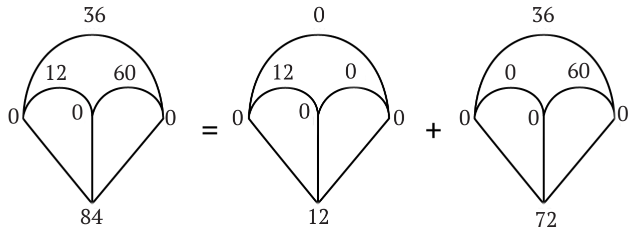
Пояснение. Представленное выше разбиение не случайно. На каждом этапе происходит разбиение игры на две таким образом, что одна из них имеет особое свойство: она содержит коалицию S такую, что $v(T) = v(S)$, если T содержит S и $v(T) = 0$ для любой другой коалиции. Подобные игры называют *играми с носителем*, а коалицию S — ее *носителем*.

Определение. *Игра с носителем* $(N; v)$ — это игра, в которой найдется коалиция S — *носитель* игры такая, что

$v(T) = v(S)$, если $S \subseteq T$
$v(T) = 0$ в остальных случаях.

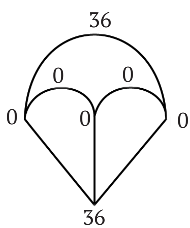
В первых трех играх носителями выступают $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$.

Переходим к четвертой игре. Ее носителем является коалиция $\{1, 2\}$. Она получена при разбиении следующей игры:



Выигрыш коалиции {1, 2} равен 12 ($v(1, 2) = 12$). Следовательно, выигрыш коалиции-носителя четвертой игры также равен 12. Остальные вычисления производятся аналогично. Проверьте!

Почему мы разбили игру именно так, а не иначе? Вектор Шепли для каждой из полученных игр легко вычислить с помощью аксиом, поскольку участники коалиции-носителя всегда симметричны, а остальные участники являются болванами. Возьмем, к примеру, такую игру:



Игроки 1 и 3 оказываются симметричными, а игрок 2 является болваном. Таким образом, вектор Шепли данной игры составляет (18, 0, 18).

Если проанализировать схему разбиения, то можно вычислить следующие значения:

(6, 0, 0)
(0, 12, 0)
(0, 0, 18)

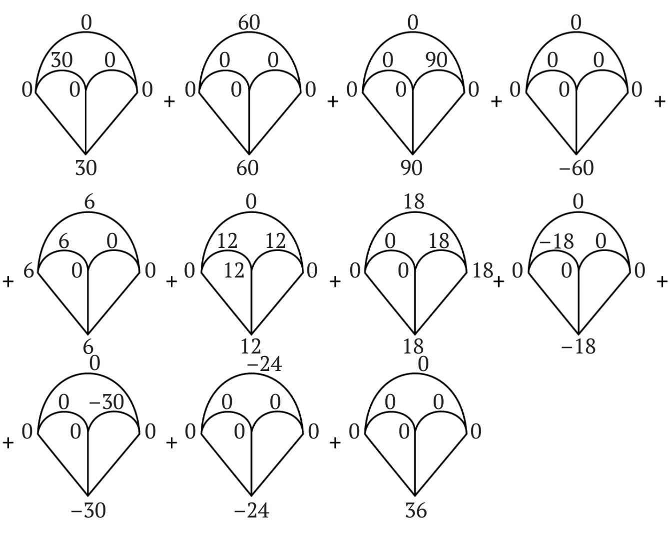
(6, 6, 0)
(18,0, 18)
(0, 30, 30)
(−8, −8, −8)
———————
(22, 40, 58)

В конечном итоге из аксиомы аддитивности следует, что полученный вектор является вектором Шепли для исходной игры.

Упражнение. Рассмотрим альтернативный способ разбиения этой же игры. Здесь каждый компонент разбиения тоже будет содержать только болванов и симметричных игроков.

(1) Проверьте, что сумма игр равна исходной игре.

(2) Найдите векторы Шепли для всех игр и докажите, что для исходной игры будет получен идентичный найденному ранее вектор Шепли.



Мы получили тот же результат, что и ранее. В соответствии с теоремой Шепли, вышеупомянутая система аксиом порождает единственное значение.

3.16. Упражнения

1. Найдите вектор Шепли для игры торга двух лиц:

$N = \{1, 2\}$ $\quad v(1) = v(2) = 0$

$v(1, 2) = 1$ $\quad v(\emptyset) = 0$

2. Найдите вектор Шепли для мажоритарной игры с тремя игроками:

$N = \{1, 2, 3\}$ $\quad v(1) = v(2) = v(3) = 0$ $\quad v(\emptyset) = 0$

$v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1$

3. Найдите вектор Шепли для следующих взвешенных мажоритарных игр:

(1) [61; 61, 19, 20, 20]

(2) [8; 5, 6, 4]

(3) [61; 35, 35, 35, 15]

4. Найдите вектор Шепли для следующей игры:

$N = \{1, 2, 3\}$ $\quad v(1) = v(2) = 100$ $\quad v(3) = 0$ $\quad v(\emptyset) = 0$

$v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = 200$ $\quad v(1, 2, 3) = 300$

5. Найдите вектор Шепли для следующей игры:

$N = \{1, 2, 3\}$ $\quad v(1) = 6$ $\quad v(2) = 12$

$v(3) = 18$ $\quad v(1, 2) = 18$ $\quad v(1, 3) = 18$

$v(2, 3) = 24$ $\quad v(1, 2, 3) = 48$ $\quad v(\emptyset) = 0$

3.17. Ликвидация партнерства

В этом разделе будет проанализирована следующая ситуация из повседневной жизни[6]: мы рассмотрим совместное предприятие, владельцы которого желают его продать и разделить между собой полученную сумму. Каким образом им следует распределить выручку от продажи? Часто выручку делят пропорционально вложенным партнерами средствам. Разные фирмы используют разные вариации данного метода. Другой способ основывается на правиле раздела имущества, которое часто применяется при ликвидации семейного «предприятия» — при расторжении брака. Жена забирает все, что принадлежало ей до брака, муж забирает все то, что принадлежало до брака ему, а остальное имущество делится поровну. Вопрос состоит в том, как можно обобщить данную процедуру для числа участников более двух.

Для обобщения случая «семейного предприятия» обозначим через $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ множество партнеров предприятия, совместно владеющих его активами. До тех пор пока предприятие функционирует, эти активы служат его нуждам, а прибыль распределяется между партнерами неким способом, который нас не интересует (мы не исключаем возможности того, что доходы распределяются в соответствии с доводами, приведенными в продолжении). Теперь допустим, что партнеры решают прекратить деятельность предприятия. Нас будет интересовать распределение активов между ними. Ситуация такова, что некоторые игроки вложили

[6] *Maschler M.* The Worth of Cooperative Enterprise to Each Member // Games, Economic Dynamics and Time Series Analysis / M. Diestler, E. Furst, G. Schwaodiauer (eds). New York: Springer, 1982. P. 67–73.

в предприятие часть своего имущества, на возврат которого они имеют право в случае, если предприятие прекратит свою деятельность. Кроме того, некоторые группы партнеров тоже вложили свои активы и имеют право на их возврат. И, конечно, какое-то имущество могло быть приобретено всеми партнерами совместно и должно быть распределено между ними. Разумеется, за то время, пока предприятие функционировало, могли возникнуть претензии относительно его имущества, и партнеры обязаны их удовлетворить. Как учесть все эти моменты, когда предприятие прекращает свою деятельность и выставляется на продажу?

Рассмотрим теперь частный случай. Пусть совместное предприятие трех партнеров, 1, 2, и 3, состоит из гаража, заправочной станции, магазина аксессуаров для автомобилей, ресторана и магазина автомобильных запчастей. У этого предприятия следующая история: владелец гаража (1) и владелец заправочной станции (2) организовали партнерство. Некоторое время они работали вместе, и поскольку их бизнес процветал, они купили магазин аксессуаров для автомобилей, в котором наемный работник обслуживает покупателей. Впоследствии к партнерству присоединился их сосед, владелец ресторана (3), и они открыли магазин автомобильных запчастей. К сожалению, возникшие среди партнеров разногласия сделали невозможным сохранение партнерства, и было решено распродать все имущество и расформировать партнерство.

Заметим, что 1 должен остаться владельцем гаража, 2 — владельцем заправочной станции; аналогичным образом 1 и 2 — владельцами магазина автомобильных аксессуаров, и так далее.

$\{1\} \to$ {гараж}
$\{2\} \to$ {заправочная станция}
$\{3\} \to$ {ресторан}
$\{1, 2\} \to$ {магазин автосексессуаров}
$\{1,\ 3\} \to \varnothing$
$\{2,\ 3\} \to \varnothing$
$\{1, 2, 3\} \to$ {магазин автозапчастей}

Итак, каждый из партнеров владеет имуществом, а партнеры 1 и 2 владеют совместным имуществом. Партнеры 1 и 3, равно как и партнеры 2 и 3, не имеют совместного имущества, а партнеры 1, 2 и 3 имеют совместное имущество; таким образом, они владеют совместным предприятием, состоящим из нескольких активов.

Опишем эту ситуацию в виде игры $(N; v)$, где $v(S)$ для каждой коалиции S характеризует цену, которая могла быть выручена *за активы, принадлежащие всем подмножествам S, включая саму S*.

Выигрыш измеряется в денежных единицах. Мы решили определить $v(S)$ как множество всех активов, которые принадлежат всем подмножествам S, а не как множество активов, принадлежащих только S. Не исключено, что при продаже активов всех подмножеств S в комплекте за них будет получена более высокая цена, чем при продаже этих активов по отдельности. Из этого следует, что если коалиция S претендует на $v(S)$, то необходимо принять решение относительно распределения этой величины между участниками S. И это решение должно учитывать претензии на $v(S)$ для всех $R \subseteq S$.

Характеристическая функция в этом случае могла бы иметь вид:

$v(1) = 30$	$v(2) = 12$	$v(3) = 6$
$v(1, 2) = 36$	$v(1, 3) = 36$	$v(2, 3) = 30$
$v(1, 2, 3) = 90$	$v(\varnothing) = 0$	

Пояснение. Гараж можно продать на рынке за \$30 000. Аналогично, заправочную станцию и ресторан можно продать по отдельности за \$12 000 и \$6000 соответственно. Выигрыш коалиции {1, 2} равен стоимости комплекта из гаража, заправочной станции и магазина аксессуаров для автомобилей. Заметим, что $v(1, 2) < v(1) + v(2)$, несмотря на то, что данный комплект содержит отдельные активы игроков 1 и 2. Причина в большом ипотечном кредите на приобретение магазина автоаксессуаров, за который несут ответственность оба игрока 1 и 2.

Заправочную станцию и ресторан можно продать за более высокую цену, если продавать их в комплекте, а не по отдельности. Поэтому

$$v(2, 3) > v(2) + v(3).$$

Можно аналогичным образом проанализировать выигрыши других коалиций.

Рассмотрим числовой пример, прежде чем перейти к описанию механизма распределения стоимости совместного предприятия между партнерами методом, подобным тому, что используется при разделе имущества во время расторжении брака. Как уже отмечалось, партнеры желают ликвидировать предприятие и поделить между собой его стоимость, 90. Попытаемся решить эту задачу следующим образом.

Предположим, что игрок 3 потребует свою долю, а именно — стоимость ресторана; ресторан продается, и он получает 6. После этого необходимо вычесть 6 из всех коалиций, включающих игрока 3, поскольку любая такая коалиция имеет в собственности ресторан. Таким образом, мы имеем новую игру:

$u(1) = 30$ $\quad u(2) = 12$ $\quad u(3) = 0$
$u(1, 2) = 36$ $\quad u(1, 3) = 30$ $\quad u(2, 3) = 24$
$u(1, 2, 3) = 84$

Предположим, что коалиция {1, 2} потребует свою долю, а именно стоимость всех активов, принадлежащих {1, 2} и ее подмножествам. Коалиция получит 36, и сумма поровну распределяется между игроками 1 и 2. Вычтем 36 из всех коалиций, содержащих {1, 2}, и получим новую игру:

$w(1) = 30$ $\quad w(2) = 12$ $\quad w(3) = 0$
$w(1, 2) = 0$ $\quad w(1, 3) = 30$ $\quad w(2, 3) = 24$
$w(1, 2, 3) = 48$

Мы также вычли 36 из $v(1, 2, 3)$, поскольку все активы коалиции {1, 2} и ее подмножеств включаются в имущество {1, 2, 3}.

Предположим теперь, что игрок 1 требует свою долю, 30, т. е. стоимость гаража. Но гараж уже был продан на предыдущем этапе, когда {1, 2} потребовала свою долю, поскольку $\{1\} \subset \{1, 2\}$. Решим эту проблему так: передадим игроку 1 стоимость гаража, 30, и повесим долг в размере 30 на каждую коалицию, содержащую игрока 1. Мы получаем следующую игру:

$p(1) = 0$ $\quad p(2) = 12$ $\quad p(3) = 0$
$p(1, 2) = 30$ $\quad p(1, 3) = 0$ $\quad p(2, 3) = 24$
$p(1, 2, 3) = 18$

И так далее.

В таблице представлен возможный способ ликвидации предприятия, который в конечном счете приводит к вектору выигрышей (39, 27, 24).

		Выигрыш коалиции							Дележ		
Заявитель	Игра	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}	1	2	3
{3}	*v*	30	12	6	36	36	30	90	0	0	0
{1, 2}	*u*	30	12	0	36	30	24	84	0	0	6
{1}	*w*	30	12	0	0	30	24	48	18	18	0
{2}	*p*	0	12	0	–30	0	24	18	30	0	0
{2, 3}		0	0	0	–42	0	12	6	0	12	0
{1, 2,3 }		0	0	0	–42	0	0	–6	0	6	6
{1, 2}		0	0	0	–42	0	0	0	–2	–2	–2
{1, 2, 3}		0	0	0	0	0	0	42	–21	–21	0
		0	0	0	0	0	0	0	14	14	14
									39	27	24

Данная процедура обобщает процедуру раздела имущества при расторжении брака, поскольку каждый из партнеров забирает то, что привнес в партнерство, а остаток распределяется поровну между всеми партнерами. Однако эта процедура вызывает ряд вопросов: любая ли последовательность событий (требований) приводит к одному и тому же распределению выигрышей? Всегда ли она конечна? Всегда ли будет получено распределение $v(N)$? Мы вскоре ответим на эти вопросы, но для начала рассмотрим другую последовательность событий — наиболее короткую из всех возможных. Она получается в том случае, если в первую очередь требования исходят от всех одиночных коалиций, затем от всех парных коалиций, и, наконец, от большой коалиции.

Данная последовательность событий была предложена Джоном Харшаньи[7] и представлена в следующей таблице.

		Выигрыш коалиции							Дележ		
Заявитель	**Игра**	**{1}**	**{2}**	**{3}**	**{1, 2}**	**{1, 3}**	**{2, 3}**	**{1, 2, 3}**	**1**	**2**	**3**
{1}	v	30	12	6	36	36	30	90	0	0	0
{2}	u	0	12	6	6	6	30	60	30	0	0
{3}	w	0	0	6	−6	6	18	48	0	12	0
{1, 2}	p	0	0	0	−6	0	12	42	0	0	6
{2, 3}		0	0	0	0	0	12	48	−3	−3	0
{1, 2, 3}		0	0	0	0	0	0	36	0	6	6
		0	0	0	0	0	0	0	12	12	12
									39	27	24

Тот факт, что финальное распределение выигрышей в точности совпадает с полученным ранее, указывает на то, что алгоритм довольно любопытен. Позднее мы докажем, что финальное распределение выигрышей соответствует вектору Шепли исходной игры.

Правило ликвидации партнерства. Необходимо разбить исходную игру на последовательность малых игр, векторы выигрышей которых должны быть получены следующим образом: если коалиция имеет ненулевой выигрыш, то все ее участники поровну делят его между собой.

[7] *Harsanyi J. C.* A Bargaining Model for the n-Person Cooperative Game // Contributions to the Theory of Games IV. Annals of Mathematics Studies 40 / A. W. Tucker, R. D. Luce (eds). Princeton: Princeton University Press, 1959. P. 325–355.

Следующая игра в последовательности строится так: нужно вычесть выигрыши коалиции-предъявителя из выигрышей всех коалиций, ее содержащих, при этом если коалиция не содержит коалицию-предъявителя, то ее выигрыш не изменяется, и т. д.

Алгоритм завершается в том случае, если выигрыш любой коалиции становится равным нулю, тогда финальное распределение выигрышей равно сумме денег, накопленных на всех этапах.

Мы докажем справедливость алгоритма с помощью двух теорем.

Теорема. *Алгоритм ликвидации партнерства завершается после конечного числа шагов.*

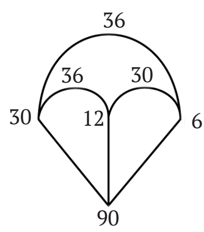
Доказательство. Если коалиция потребует свой выигрыш, то в следующей игре ее выигрыш равен нулю. Впоследствии коалиция-предъявитель может иметь ненулевой выигрыш только в том случае, если одна из ее ненулевых подкоалиций (т. е. коалиций, выигрыш которых отличен от нуля) потребует свой выигрыш. Предположим, что алгоритм является бесконечным; тогда существует как минимум одна коалиция, которая требует свой выигрыш бесконечное число раз. Соответственно, существует минимальная коалиция S, которая также требует свой выигрыш неограниченное число раз. Однако это может произойти только в том случае, если одна из ее ненулевых подкоалиций будет требовать свой выигрыш неограниченное число раз, что противоречит минимальности S. Из противоречия следует, что предположение о бесконечности алгоритма является неверным; то есть алгоритм ликвидации партнерства завершается после конечного числа шагов.

Теорема. *Вне зависимости от выбранной последовательности выполнения алгоритма по ликвидации партнерства финальное распределение выигрышей соответствует значению Шепли для игры* (N, v).

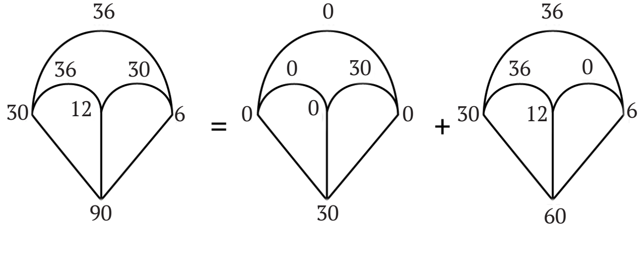
Доказательство этой теоремы слишком громоздко. Мы не станем приводить его полностью, а лишь проиллюстрируем на примере.

Рассмотрим пример из начала раздела (с. 187).

$v(1) = 30$ $\quad v(2) = 12$ $\quad v(3) = 6$
$v(1, 2) = 36$ $\quad v(1, 3) = 36$ $\quad v(2, 3) = 30$
$v(1, 2, 3) = 90$ $\quad v(\varnothing) = 0$



Предположим, что коалиция {2, 3} требует свой выигрыш. Разобьем исходную игру на сумму двух других:



В левой игре участники 2 и 3 являются симметричными, а участник 1 — болваном. Следовательно, 2 и 3 получат по 15, а игрок 1 получит 0. Тогда выигрыш (0, 15, 15) соответствует вектору Шепли для левой игры, но если применить алгоритм ликвидации партнерства, дележ будет таким же.

Отразим это в виде таблицы:

		Выигрыш коалиции							Дележ		
Заявитель	**Игра**	{1}	{2}	{3}	{1, 2}	{1, 3}	{2, 3}	{1, 2, 3}	1	2	3
{2, 3}	v	30	12	6	36	36	30	90	0	0	0
	v_1	0	0	0	0	0	30	30	0	15	15
	U	30	12	6	36	36	0	60			

Игра u является разностью игр v и v_1.

$$u = v - v_1 \Leftrightarrow v = v_1 + u$$

Как уже ранее говорилось, в игре v_1 игроки 2 и 3 симметричны, а игрок 1 — болван. Таким образом, вектор Шепли для игры равен (0, 15, 15), что в точности совпадает с дележом. Когда коалиция {2, 3} требует свой выигрыш, ее участники получают стоимость своей собственности и делят ее поровну. Следовательно, каждая строка в таблице формируется на основе предыдущей. Поэтому описанный выше алгоритм, по сути, является разбиением исходной игры на несколько игр с носителем, в которых все члены коалиции-носителя или симметричны, или являются болванами. Таким образом, финальное распределение выигрышей совпадает с суммой векторов Шепли для этих игр.

Итак, мы узнали, что если совместное предприятие ликвидируется в соответствии с предложенным алгоритмом, то распределение прибыли от продажи предприятия совпадает с вектором Шепли. Если нам нужно справедливо поделить имущество между партнерами совместного предприятия, которое в скором времени будет ликвидировано, то распределение на основе вектора Шепли — хороший способ это сделать.

3.18. Упражнения

1. Совместное предприятие трех партнеров, 1, 2 и 3, включает транспортное агентство, отдел проката автомобилей, туристическую компанию, сувенирный магазин и службу доставки. Владелец отдела проката автомобилей (1) и владелец транспортного агентства (2) организовали партнерство. Позднее они приобрели сувенирный магазин, отдав руководство своим женам. Владелец туристической компании (3) стал сотрудничать с 2, и они открыли службу доставки. Теперь 3 является полноправным членом партнерства, и предприятие включает весь их бизнес.

Комментарий. Необходимо помнить о том, что $v(S)$ равна стоимости имущества всей коалиции S и всех ее подкоалиций. Опишем игру с помощью характеристической функции:

$$\begin{array}{lll} v(1) = 20 & v(2) = 30 & v(3) = 10 \\ v(1,2) = 40 & v(1,3) = 0 & v(2,3) = 30 \\ v(1,2,3) = 60 & v(\varnothing) = 0 & \end{array}$$

На определенном этапе существования совместное предприятие стало убыточным, и партнеры решили его ликвидировать.

Рассчитайте выручку каждого из партнеров, если распределение осуществляется на основе алгоритма ликвидации партнерства.

2. Совместное предприятие состоит из парфюмерного магазина, магазина одежды, ювелирного магазина и магазина кожаных изделий. Владелец парфюмерного магазина (1) вступил в партнерские отношения с владельцем магазина одежды (2); когда дела пошли вверх, они купили ювелирный магазин. Позднее к ним присоединился владелец магазина кожаных изделий (3). Впоследствии среди партнеров возникли разногласия, и было принято решение о ликвидации партнерства.

Вычислите, сколько получит каждый из партнеров, если деньги распределяются в соответствии с алгоритмом ликвидации партнерства, а характеристическая функция имеет вид:

$v(1) = 18$	$v(2) = 36$	$v(3) = 42$
$v(1, 2) = 60$	$v(1, 3) = 0$	$v(2, 3) = 30$
$v(1, 2, 3) = 72$	$v(\varnothing) = 0$	

3. Найдите вектор Шепли для следующей игры с помощью алгоритма ликвидации партнерства.

$N = \{1, 2, 3\}$	$v(1) = 6$	$v(2) = 6$
$v(3) = 12$	$v(1, 2) = 18$	$v(1, 3) = 24$
$v(2, 3) = 30$	$v(1, 2, 3) = 60$	$v(\varnothing) = 0$

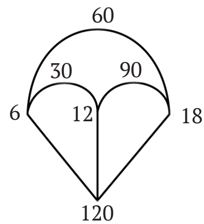
4. Найдите вектор Шепли для следующей игры с помощью алгоритма ликвидации партнерства.

$N = \{1, 2, 3, 4\}$	$v(1) = 24$	$v(2) = 48$
$v(3) = 14$	$v(4) = 72$	$v(1, 2) = 96$
$v(1, 3) = 0$	$v(1, 4) = 120$	$v(2, 3) = 144$
$v(2, 4) = 0$	$v(3, 4) = 0$	$v(1, 2, 3) = 0$
$v(1, 3, 4) = 168$	$v(1, 2, 4) = 0$	$v(2, 3, 4) = 0$
$v(1, 2, 3, 4) = 240$		$v(\varnothing) = 0$

3.19. Вектор Шепли как средний предельный вклад

Рассмотрим следующую игру:

$N = \{1, 2, 3\}$	$v(1) = 6$	$v(2) = 12$
$v(3) = 18$	$v(1, 2) = 30$	$v(1, 3) = 60$
$v(2, 3) = 90$	$v(1, 2, 3) = 120$	$v(\emptyset) = 0$



В разделе 3.15 мы выяснили, что вектор Шепли для этой игры имеет вид (22, 40, 58).

В данном разделе мы изучим еще один способ нахождения значения Шепли[8].

Представим себе, что трое игроков заходят в комнату в произвольном порядке. Каждый вошедший в комнату игрок получает свой предельный вклад в коалицию участников.

Пример. Предположим, что игроки заходят в комнату в порядке (2, 3, 1); то есть первым в пустую комнату входит игрок 2. Перед тем, как он вошел, в комнате «находилась» пустая коалиция, выигрыш которой был равен 0; после этого в комнате находится коалиция {2}

[8] *Shapley L. S.* A Value for n-person Games // Contributions to the Theory of Games II / H. Kuhn, A. W. Tucker (eds). Princeton: Princeton University Press, 1953. P. 307–317.

с выигрышем в 12, следовательно, 2 вносит предельный вклад в размере 12 единиц (12–0), что и составляет его выигрыш.

Игрок 3 заходит в комнату вторым. Поскольку игрок 2 уже внутри комнаты, то вместе с игроком 3 они образуют коалицию {2, 3} с выигрышем в 90. Выигрыш коалиции, которая находилась в комнате до появления игрока 3, составлял 12, а выигрыш новой коалиции с участием игрока 3 равен 90. Таким образом, предельный вклад игрока 3 и его выигрыш равен 90 – 12 = 78.

Игрок 1 заходит в комнату последним и присоединяется к коалиции {2, 3}, которая уже находится в комнате. Теперь образуется коалиция {1, 2, 3}, выигрыш которой составляет 120; выигрыш коалиции {2, 3}, которая присутствовала в комнате до этого, равен 90. Следовательно, предельный вклад в коалицию игрока 1 составляет 120 – 90 = 30.

	Предельный вклад игрока		
Порядок входа в комнату	1	2	3
2 3 1	30	12	78

Полученный результат относится только к определенному порядку, а именно — (2, 3, 1).

Мы рассмотрим алгоритм, согласно которому игроки появляются в случайном порядке, при этом все возможные порядки равновероятны. Вектор Шепли — *ожидание* каждого игрока в данном алгоритме, то есть его средний выигрыш.

Пересмотрим описанную выше игру. В игре участвуют трое игроков, следовательно, всего имеется 6 (=3!) возможных порядков.

	Предельный вклад игрока		
Порядок вхождения в комнату	**1**	**2**	**3**
1 2 3	6	24	90
1 3 2	6	60	54
2 3 1	30	12	78
2 1 3	18	12	90
3 1 2	42	60	18
3 2 1	30	72	18
	132	240	348

Вектор Шепли данной игры составляет:

$$\left(\frac{132}{6},\ \frac{240}{6},\ \frac{348}{6}\right) = (22,\ 40,\ 58).$$

Теорема. *Вектор Шепли равен среднему предельному вкладу игроков, рассчитанному на основании всех возможных порядков.*

Доказательство теоремы выходит за рамки данной книги, однако она крайне важна, поскольку отражает другой аспект вектора Шепли.

Пример. Рыночная игра двух лиц

$N = \{1, 2\}$ $v(1) = 2$ $v(2) = 3$ $v(1, 2) = 10$

	Предельный вклад	
Возможный порядок	1	2
1 2	2	8
2 1	7	3
	9	11

Вектор Шепли данной игры равен:

$$\left(\frac{9}{2},\ \frac{11}{2}\right).$$

Пример. Рыночная игра двух покупателей и двух продавцов

$N = \{1, 2, 3, 4\}$ $v(1) = v(2) = 100$
$v(3) = v(4) = 0$ $v(1, 2) = 200$
$v(1, 3) = v(1, 4) = v(2, 3) = v(2, 4) = 150$
$v(3, 4) = 0$ $v(1, 2, 3) = v(1, 2, 4) = 250$
$v(1, 3, 4) = v(2, 3, 4) = 150$ $v(1, 2, 3, 4) = 300$

В игре участвуют 4 игрока, поэтому имеется 24(4!) возможных порядка. Перечислим их с указанием предельного вклада первого игрока.

Порядок	Предельный вклад	Порядок	Предельный вклад
1234	100 (= 100 – 0)	3124	150 (= 150 – 0)
1243	100 (= 100 – 0)	3142	150 (= 150 – 0)
1324	100 (= 100 – 0)	3214	100 (= 250 – 150)
1342	100 (= 100 – 0)	3241	150 (= 300 – 150)
1423	100 (= 100 – 0)	3421	150 (= 300 – 150)
1432	100 (= 100 – 0)	3412	150 (= 150 – 0)
2134	100 (= 200 – 100)	4123	150 (= 150 – 0)
2143	100 (= 200 – 0)	4132	150 (= 150 – 0)
2314	100 (= 250 – 150)	4213	100 (= 250 – 150)
2341	150 (= 300 – 150)	4231	150 (= 300 – 150)
2413	100 (= 250 – 150)	4321	150 (= 300 – 150)
2431	150 (= 300 – 150)	4312	150 (= 150 – 0)

Совокупный предельный вклад игрока 1, рассчитанный на основании всех возможных порядков, равен 3000. Тогда его средний предельный вклад составит

$$\frac{3000}{24} = 125.$$

Игроки 1 и 2 являются симметричными (проверьте!), следовательно, согласно аксиоме симметричности, средний предельный вклад игрока 2 также составит 125.

Суммарный выигрыш игроков 1 и 2 равен 250.

$v(1, 2, 3, 4) = 300$, следовательно, согласно аксиоме эффективности, оставшийся выигрыш необходимо поделить между игроками 3 и 4. Поскольку игроки 3 и 4 также симметричны, то их выигрыши должны быть равны 25.

В итоге имеем вектор Шепли для данной игры (125, 125, 25, 25).

3.20. Упражнения

1. В следующих играх найдите вектор Шепли как средний предельный вклад участников.

(1) Рыночная игра с двумя продавцами и одним покупателем:

$N = \{1, 2, 3\}$	$v(1) = 100$	$v(2) = 100$
$v(3) = 0$	$v(1, 2) = 200$	$v(1, 3) = 200$
$v(2, 3) = 200$	$v(1, 2, 3) = 300$	$v(\varnothing) = 0$

(2)

$N = \{1, 2, 3\}$	$v(1) = 0$	$v(2) = v(3) = 6$
$v(1, 2) = 12$	$v(1, 3) = 6$	$v(2, 3) = 18$
$v(1, 2, 3) = 24$	$v(\varnothing) = 0$	

(3) Взвешенная мажоритарная игра с тремя участниками:

$$[3; 2, 1, 1]$$

(4)

$N = \{1, 2, 3\}$ $\quad v(1) = 6$ $\quad v(2) = 12$

$v(3) = 18$ $\quad v(1, 2) = 12$ $\quad v(1, 3) = 12$

$v(2, 3) = 24$ $\quad v(1, 2, 3) = 48$ $\quad v(\emptyset) = 0$

2. Найдите вектор Шепли для следующей игры:

$N = \{1, 2\}$ $\quad v(1) = a$ $\quad v(2) = b$

$v(1, 2) = c$ $\quad v(\emptyset) = 0$

3. Найдите вектор Шепли для следующих игр с помощью:

(1) алгоритма ликвидации партнерства;

(2) метода среднего предельного вклада.

(i) $N = \{1, 2, 3\}$ $\quad v(1) = 10$ $\quad v(2) = 5$

$v(3) = 0$ $\quad v(1, 2) = 18$

$v(1, 3) = 10$ $\quad v(2, 3) = 6$

$v(1, 2, 3) = 20$ $\quad v(\emptyset) = 0$

(ii) $N = \{1, 2, 3\}$ $\quad v(1) = v(2) = 5$

$v(3) = 0$ $\quad v(1, 2) = 10$

$v(1, 3) = v(2, 3) = 5$

$v(1, 2, 3) = 10$ $\quad v(\emptyset) = 0$

(iii) $N = \{1, 2, 3\}$ $\quad v(1) = 6$ $\quad v(2) = v(3) = 12$

$v(1, 2) = v(1, 3) = 18$

$v(2, 3) = 24$ $\quad v(1, 2, 3) = 30$

$v(\emptyset) = 0$

(iv) $N = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad v(1) = v(2) = v(3) = 5$

$v(4) = 0$ $\quad v(1, 4) = v(2, 4) = v(3, 4) = 5$

$v(1, 2) = 10$ $\quad v(1, 3) = v(2, 3) = 15$

$v(1, 2, 3) = 20$ $\quad v(1, 2, 4) = 10$

$v(1, 3, 4) = v(2, 3, 4) = 15$

$v(1, 2, 3, 4) = 20$ $\quad v(\varnothing) = 0$

(v) $N = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad v(1) = v(2) = 6$

$v(3) = v(4) = 12$ $\quad v(1, 4) = v(2, 4) = 18$

$v(1, 2) = 12$ $\quad v(3, 4) = 24$

$v(1, 3) = v(2, 3) = 18$

$v(1, 2, 3) = v(1, 2, 4) = 30$

$v(1, 3, 4) = v(2, 3, 4) = 24$

$v(1, 2, 3, 4) = 36$ $\quad v(\varnothing) = 0$

3.21. Вектор Шепли как индекс влияния во взвешенной мажоритарной игре

В разделе 3.7 обсуждались взвешенные мажоритарные игры в общем виде:

$$[q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$$

$w_1, w_2, \ldots, w_n$ — веса игроков, неотрицательные числа, а q — квота. Мы предполагаем, что она больше полусуммы весов и меньше или равна сумме весов.

Коалиция называется *выигрывающей*, если сумма весов ее членов больше или равна q. В противном случае коалиция является *проигрывающей*.

Характеристическая функция подобной игры имеет вид:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{если } S \text{ выигрывающая} \\ 0, & \text{если } S \text{ проигрывающая} \end{cases}$$

Упражнение. При анализе выборов в городской совет возникает интересный вопрос: какова политическая «сила» каждой партии? Любая методика, которая пытается измерить эту силу, называется *индексом влияния*. Может показаться, что хороший индекс влияния игрока i — это число голосов w_i, полученных им на выборах. Но такое определение не оказывается исчерпывающим. Для начала, оно не зависит от квоты q. По сути, несовершенство такого определения следует из того факта, что *к одной и той же игре* $(N; v)$ могут приводить различные взвешенные мажоритарные игры (вида $[q; w_1, w_2, \ldots, w_n]$). Вскоре мы увидим, что вектор Шепли для представления игры $(N; v)$ является адекватным определением индекса влияния. Этот индекс известен под названием *индекса влияния Шепли — Шубика*[9].

Для начала проиллюстрируем на примере тот факт, что электоральная сила игрока (т. е. его вес) не является хорошим показателем его влияния в игре.

Пример

Рассмотрим игру:

$$[8; 7, 1, 7]$$

В этом случае влияние второго игрока в точности равно влиянию оставшихся игроков, хотя он имеет всего одного представителя, а остальные имеют по 7. Для вынесения решения необходима коалиция из двух участников. В самом деле, характеристическая функция данной игры имеет вид:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{если } S \text{ пусто или состоит из одного игрока} \\ 1, & \text{если } S \text{ состоит из двух или трех игроков} \end{cases}$$

[9] *Shapley L. S., Shubik M.* A Method for Evaluation of the Distribution of Power in a Committee System // The American Political Science Review. 1954. Vol. 48. P. 787–792.

Нетрудно заметить, что ни один из игроков не превосходит остальных по влиянию, и все они являются симметричными (проверьте!).

В силу аксиом эффективности и симметричности вектор Шепли равен $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Вектор Шепли показывает, что влияние игроков одинаково, хотя их электоральная сила различна.

Вопрос состоит в том, является ли вектор Шепли хорошим индексом влияния игрока во взвешенной мажоритарной игре.

В этом разделе мы увидим, что в некотором смысле — да, является. Но мы должны уточнить, что именно понимается под значением Шепли во взвешенной мажоритарной игре. Как мы знаем, для любого игрока компонента вектора Шепли — это средний предельный вклад этого игрока, рассчитанная на основании всех возможных порядков.

Рассмотрим игру [10; 5, 8, 2, 3] и найдем предельные вклады всех участников, расположенных в порядке 1, 2, 3, 4. Предельный вклад первого игрока равен нулю, поскольку {1} является проигрывающей коалицией. Предельный вклад игрока 2 равен 1, так как {1, 2} образует выигрывающую коалицию. Предельный вклад игрока 3 равен нулю в силу того, что его присоединение к коалиции {1, 2} не увеличивает ее выигрыш. Предельный вклад игрока 4 также равен 0, поскольку его вхождение в коалицию {1, 2, 3} не увеличивает ее выигрыш (поясните!)

Таким образом, при данном порядке предельный вклад игрока 2 равен 1, а предельные вклады всех остальных игроков равны 0.

Игрок 2 называется *ключевым игроком для текущего порядка*.

Рассмотрим другой порядок, например, 3, 4, 1, 2:
Предельный вклад игрока 3 равен 0.
Предельный вклад игрока 4 равен 0.
Предельный вклад игрока 1 равен 1.
Предельный вклад игрока 2 равен 0.

Как видим, в текущем порядке единственным игроком с единичным вкладом является игрок 1. Вклады других игроков равны нулю. Игрок 1 является *ключевым игроком для текущего порядка*.

В любой взвешенной мажоритарной игре имеется ровно один ключевой игрок для каждого порядка. Им будет тот участник, который своим вхождением в коалицию превратит ее из проигрывающей в выигрывающую. До его присоединения никто из предыдущих игроков не внес вклада в выигрыш коалиции; и после его присоединения никто из следующих за ним игроков также не вносит вклад в выигрыш коалиции.

Повторим: игрок называется ключевым в текущем порядке, если его предельный вклад равен единице.

Теорема. *Любая взвешенная мажоритарная игра имеет ровно одного ключевого участника для каждого порядка.*

Доказательство. Для начала убедимся в существовании игрока, который своим присоединением к проигрывающей коалиции обращает ее в выигрывающую. Согласно определению характеристической функции взвешенной мажоритарной игры, пустая коалиция является проигрывающей. К ней присоединяются игроки в некотором порядке. Если в течение этой процедуры ни один из игроков не обратит ее в выигрывающую, то множество всех игроков составит проигрывающую коалицию, что противоречит свойству характеристической функции, которое гласит, что множество, включающее всех участников, образует выигрывающую коалицию.

Из противоречия следует существование некоторого игрока, который своим вхождением в коалицию, состоящую из вошедших в нее ранее участников, превратит ее из проигрывающей в выигрывающую. Предельный вклад этого игрока равен 1. Предельный вклад всех игроков, вошедших в коалицию до него, а также всех игроков, вошедших в коалицию после него, равен 0. Следовательно, он является единственным ключевым игроком при данном порядке.

Как известно, вектор Шепли соответствует среднему предельному вкладу игроков, рассчитанному на основании всех порядков. Тогда можно сформулировать полученный результат в виде следующей теоремы.

Теорема. *Компонента вектора Шепли для игрока во взвешенной мажоритарной игре n участников равна:*

$$\text{частоте, с которой игрок оказывается ключевым во всех порядках} = \frac{\text{сколько раз игрок был ключевым}}{\text{количество порядков } (n!)}$$

Найдем индекс влияния Шепли — Шубика для игрока 1 в игре [10; 5, 8, 2, 3]:

- Если он окажется первым, то его предельный вклад будет равен 0 (поясните!). Всего таких порядков 6.
- Если он окажется вторым, то его предельный вклад будет равен 1 тогда и только тогда, когда перед ним находится игрок 2. Всего существуют 2 таких порядка (2, 1, 3, 4; 2, 1, 4, 3).
- Если он окажется третьим, то его предельный вклад будет равен 1 тогда и только тогда, когда игрок 2 окажется после него (поясните!). Таких порядков тоже два.

- Если он окажется четвертым, то его предельный вклад равен 0. Всего имеется 6 таких порядков.

Таким образом, индекс Шепли — Шубика для игрока 1 составляет

$$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

Упражнение. Найдите индексы Шепли — Шубика для всех остальных игроков.

Оставим на некоторое время индекс Шепли — Шубика и обратимся к следующей реальной ситуации, которую моделирует игра [10; 5, 8, 2, 3]. В городском совете заседают четыре партии, имеющие 5, 8, 2 и 3 представителя соответственно. Каким образом можно оценить влияние, к примеру, первой из них? Один из способов состоит в проверке того, насколько часто требуется голос данной партии для принятия закона.

Предположим, что городскому совету был предложен некий закон, и голоса в его поддержку распределились следующим образом:

Партия 2	Партия 3	Партия 1	Партия 4
активно за	за	не решила	против

В этом случае голос партии 1 не требуется, поскольку поддержки партий 2 и 3 достаточно для решения в пользу закона.

Заметим, что при данном распределении голосов партия 1 не является ключевым игроком.

Предположим, что голоса в пользу другого закона распределились иначе:

Партия 2	Партия 1	Партия 3	Партия 4
за	не решила	против	активно против

В этом случае требуется убедить партию 1 поддержать закон, поскольку ее голос необходим для того, чтобы сформировалось большинство в пользу закона. Партия 2 непременно попытается убедить партию 1 поддержать закон.

Заметим, что при таком распределении голосов партия 1 будет ключевым игроком.

Однако в силу того, что неизвестно, какой из законов будет вынесен на рассмотрение, мы выдвинем следующее предположение, которое является справедливым во многих случаях.

Предположение[10]

На рассмотрение выносится несколько различных законопроектов, так что у любого возможного порядка, представляющего определенное распределение голосов, одинаковая вероятность появления.

Мы можем рассматривать возможные порядки как колоду карт, которую мы каждый раз тщательно тасуем, так что у каждого возможного порядка карт в этой колоде одинаковый шанс появиться.

Из этого предположения следует, что частота, с которой требуется голос партии для формирования большинства голосов в пользу какого-либо закона, в точности равна частоте, с которой партия оказывается ключевым игроком среди всех возможных порядков.

Измерение силы партии с помощью данной частоты представляется возможным, а значит, индекс влияния Шепли — Шубика является подходящим показателем влияния партии во взвешенной мажоритарной игре.

---

[10] Это предположение неприемлемо, когда, например, предложенный законопроект имеет политический характер и игроки — партии с четкими политическими платформами.

3.22. Упражнения

Найдите индекс Шепли — Шубика для следующих игр:

1. [10; 7, 5, 4, 3]
2. [12; 4, 4, 9, 5]
3. [17; 7, 8, 9, 9]
4. [7; 4, 2, 2, 2, 2]
5. [5; 3, 3, 1, 1, 1]
6. [9; 4, 4, 2, 2, 2, 2]
7. [6; 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]

3.23. Индекс Шепли — Шубика в анализе влияния партий в парламенте

Предположим, что парламент сформирован из пяти партий. Одна из них имеет 40 представителей, а остальные — по 20 представителей. Игра имеет вид [61, 40, 20, 20, 20, 20].

Вычислим индекс Шепли-Шубика для игрока 1.

- Если он является первым, то не может быть ключевым игроком, следовательно, его предельный вклад равен 0.
- Если он окажется вторым, то снова не может быть ключевым, поэтому его предельный вклад попрежнему равен 0.
- Если он окажется третьим, то в этом случае обязательно будет ключевым, и его предельный вклад будет равен 1. Всего возможно 4! подобных порядков. Действительно, если игрок 1 является третьим, то остается четыре игрока. Один из них может находиться на одной из четырех позиций. Для каждой его позиции существует три возможные позиции еще одного из оставшихся игроков. Далее остается две позиции для третьего и одна

позиция — для четвертого игрока. В общей сложности имеем $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4!$ возможные вариации при условии, что игрок 1 является третьим.

- Если он является четвертым, то снова окажется ключевым игроком, и его предельный вклад составит 1. Количество таких порядков равно 4!
- Если он является пятым, то не может быть ключевым игроком, и тогда его предельный вклад окажется равным 0.

Таким образом, индекс Шепли — Шубика для игрока 1 составит

$$\frac{4!+4!}{5!} = \frac{48}{120} = \frac{2}{5}.$$

Игроки 2, 3, 4 и 5 являются симметричными, поэтому их индексы Шепли — Шубика совпадают. Согласно аксиоме эффективности, $v(N) = 1$ необходимо поделить между всеми игроками. Следовательно, индекс Шепли — Шубика для данной игры имеет вид:

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}\right).$$

Рассмотрим ряд других случаев, при которых имеется одна партия с 40 представителями и несколько малых партий, число которых со временем растет.

1. [61; 40, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10].

Индекс Шепли — Шубика для данной игры имеет вид:

$$\left(\frac{4}{9}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72}, \frac{5}{72}\right).$$

2. [61; 40, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8].

Индекс Шепли — Шубика для данной игры имеет вид:

$$\left(\frac{5}{11}, \frac{3}{55}, \frac{3}{55}, \frac{3}{55}, \frac{3}{55}, \frac{3}{55}, \frac{3}{55}, \frac{3}{55}, \frac{3}{55}, \frac{3}{55}, \frac{3}{55}\right)$$

3. $q = 61$ $w_1 = 40$ $w_2 = w_3 = \ldots = w_{17} = 5$

Индекс Шепли — Шубика для данной игры имеет вид:

$$\left(\frac{8}{17}, \frac{9}{272}, \ldots, \frac{9}{272}\right).$$

4. $q = 61$ $w_1 = 40$ $w_2 = w_3 = \ldots = w_{21} = 4$

Индекс Шепли — Шубика для данной игры имеет вид:

$$\left(\frac{10}{21}, \frac{11}{420}, \ldots, \frac{11}{420}\right).$$

5. $q = 61$ $w_1 = 40$ $w_2 = w_3 = \ldots = w_{41} = 2$

Индекс Шепли — Шубика для данной игры имеет вид:

$$\left(\frac{20}{41}, \frac{21}{1640}, \ldots, \frac{21}{1640}\right).$$

6. $q = 61$ $w_1 = 40$ $w_2 = w_3 = \ldots = w_{81} = 1$

Индекс Шепли — Шубика для данной игры имеет вид:

$$\left(\frac{40}{81}, \frac{41}{6480}, \ldots, \frac{41}{6480}\right).$$

В каждом случае имеется одна большая партия, включающая $^1/_3$ общего числа представителей.

Очевидно, что чем больше малых партий, тем сильнее влияние большой партии, которое стремится к $^1/_2$.

$$\frac{1}{3} < 0,4 < 0,44 < 0,45 < 0,47 < 0,476 < 0,487 < 0,49$$

В то же время малые партии имеют слабое влияние по сравнению со своей избирательной силой. К примеру, в первой игре малая партия имеет 8,3% общего числа представителей, а ее влияние в соответствии с индексом Шепли — Шубика равно 6,9%.

В четвертой игре процент от всех представителей в каждой из малых партий равен 3,3%, а их влияние составляет 2,6%.

Это довольно распространенный феномен: если имеется одна большая партия и огромное число малых партий, то обычно большая партия имеет куда большее влияние, чем можно предположить, исходя лишь из числа ее представителей. Чем больше разобщенность малых партий, тем сильнее влияние многочисленной партии.

Если число представителей большой партии достигнет 45, а количество малых партий увеличится, то нетрудно вычислить, что влияние большой партии приблизится к 60%.

Найдем индекс Шепли — Шубика для еще одной ситуации и получим более неожиданный результат.

Представим, что у большой партии появился конкурент, то есть в парламенте окажутся две большие партии, имеющие по 40 представителей, а из оставшихся представителей сформировано 5 партий, в каждой по 8 представителей.

Индекс Шепли-Шубика в игре [61; 40, 40, 8, 8, 8, 8, 8] имеет вид:

$$\left(\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{35}, \frac{3}{35}, \frac{3}{35}, \frac{3}{35}, \frac{3}{35}\right)$$

Выясняется, что если число представителей большой партии равно $\frac{40}{120} \sim 33\%$ от всех голосов, то ее влияние составляет $\frac{2}{7} \sim 29\%$. Аналогичным образом, если каждая из малых партий имеет $\frac{8}{120} \sim 7\%$ голосов, то она имеет $\frac{3}{35} \sim 9\%$ влияния. Но в таком случае влияние представителя большой партии равно $\frac{1}{40} \cdot 0,29\% \sim 0,7\%$, а влияние представителя малой партии составляет $\frac{1}{8} \cdot 9\% \sim 1,125\%$ — почти в два раза больше!

В этом случае рост влияния малых партий является следствием их разобщенности. Другими словами, при объединении всех малых партий мы имели бы трех симметричных игроков, а значит, после объединения у малых партий было бы 33% влияния в сравнении с 43% влияния при разобщенности. Более того, чем больше разобщенность малых партий, тем сильнее их влияние: если они очень маленькие, то влияние каждой большой партии снизится до 25%, в то время как влияние малых партий в совокупности составит около 50%. Выходит, что в данном случае сила — в разобщенности; в единстве слабость.

3.24. Упражнения

Найдите индекс Шепли — Шубика для следующих игр:

1. $q = 61$	$w_1 = 45$	$w_2 = w_3 = \ldots = w_{26} = 5$
2. $q = 61$	$w_1 = 45$	$w_2 = w_3 = \ldots = w_{26} = 3$
3. $q = 61$	$w_1 = 45$	$w_2 = w_3 = \ldots = w_{76} = 1$
4. $q = 61$	$w_1 = w_2 = 40$	$w_3 = w_4 = \ldots = w_{12} = 4$
5. $q = 61$	$w_1 = w_2 = 40$	$w_3 = w_4 = \ldots = w_{22} = 2$
6. $q = 61$	$w_1 = w_2 = 40$	$w_3 = w_4 = \ldots = w_{42} = 1$

3.25. Совет Безопасности ООН

Совет Безопасности ООН состоит из 15 государств: пяти крупных держав (США, Россия, Франция, Англия и Китай), являющихся постоянными членами и имеющими право вето, и десяти сменяемых государств, которые выбираются Генеральной Ассамблеей на двухлетний срок. У каждого члена Совета — один голос. Решение по всем вопросам требует как минимум девяти голосов; решения по важным вопросам дополнительно требуют одобрения пяти постоянных членов. Ни одно из важных решений не может быть принято без согласия пяти постоянных членов. То есть постоянный член обладает правом вето: если он голосует «против», то решение не принимается. В большинстве случаев воздержание при голосовании не рассматривается как реализация права вето.

При помощи индекса Шепли — Шубика можно проследить, как реализуется право вето, то есть оценить влияние постоянного члена Совета Безопасности и сравнить его с влиянием временного члена.

Рассмотрим Совет Безопасности как взвешенную мажоритарную игру, в которой все постоянные члены симметричны; симметричны также десять малых государств. Из этого следует, что нам необходимо знать лишь две величины (поясните!). Найдем совокупное влияние малых государств, то есть число порядков, среди которых малое государство окажется ключевым игроком, деленное на число всех возможных порядков.

Малое государство будет ключевым игроком в некотором порядке тогда и только тогда, когда семь малых стран будут стоять последними (объясните, опираясь на следующий рисунок).

$\downarrow$

$\uparrow$

Крупные и малые державы	Ключевой игрок — малая держава	Малые державы

Чтобы найти все такие порядки, нужно выбрать семь малых стран из десяти и вычислить количество возможных комбинаций.

Число комбинаций семи стран из десяти находится по формуле

$$\binom{10}{7} = \frac{10!}{(10-7)! \cdot 7!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!},$$

где $k! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times k$.

В каждом из полученных порядков можно как угодно переставлять последние семь стран, а также первые 8 стран. Тогда число порядков $\frac{10!}{3! \cdot 7!}$ нужно умножить на $7! \cdot 8!$ В итоге имеем следующее число порядков, в которых 7 малых стран идут последними:

$$\frac{10! \cdot 7! \cdot 8!}{3! \cdot 7!} = \frac{10! \cdot 8!}{3!}.$$

Таким образом, совокупное влияние малых стран составляет

$$\frac{10! \cdot 8!}{3! \cdot 15!} \approx 0,0186 = 1,86\%$$

(поскольку число всевозможных порядков равно 15!). В этом случае индекс влияния одной малой страны равен

$$\frac{0,0186}{10} = 0,00186 = 0,186\%$$

и совокупное влияние постоянных членов равно

$$100\% - 1{,}86\% = 98{,}14\%.$$

Следовательно, индекс влияния одного постоянного члена составляет

$$\frac{98,14}{5} \approx 19,63\%.$$

3.26. Упражнения

1. Каким оказалось бы влияние всех малых государств, если бы в Совете Безопасности действовало правило простого большинства, то есть для принятия решения требовалось бы восемь голосов и одобрение пяти постоянных членов?

2. До 1965 г. Совет Безопасности включал в себя одиннадцать стран: пять постоянных членов — пять Больших Держав — и шесть непостоянных членов — малых государств. При таком составе для вынесения решения требовалось 7 голосов «за». Каким было совокупное влияние малых стран в данной ситуации? Каким было влияние каждого постоянного члена?

3. Определите совокупное влияние малых государств в Совете Безопасности из одиннадцати членов, если для вынесения решения требуется простое большинство, то есть, достаточно шести голосов, включая одобрение со стороны пяти постоянных членов.

3.27. Игры с распределением затрат

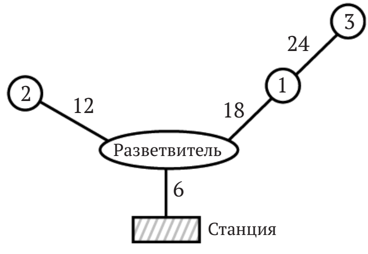
Предметом рассмотрения в данной главе была математическая модель кооперативной игры (N; v), где N — множество игроков, а v — характеристическая функция, которая ставит в соответствие каждой коалиции S некоторое вещественное число $v(S)$, представляющее выигрыш коалиции S в том случае, если она будет сформирована.

Аналогичным образом можно построить математическую модель кооперативной игры $(N; c)$, где N — это множество игроков, а c представляет собой характеристическую функцию, которая ставит в соответствие каждой коалиции S некоторое вещественное число $c(S)$, представляющее совокупные затраты, которые понесут участники коалиции, если решат сформировать ее.

Пример

Станция кабельного телевидения планирует создать потребительскую сеть. Сетевые подключения можно описать графом, называемым «дерево подключений»[11]. Затраты на создание каждой дуги сети указаны над этой дугой. Игроки указаны в вершинах дерева. Вершина без игрока называется разветвитель.

Рассмотрим игру $(N; c)$, где $N = \{1, 2, 3\}$. Общие затраты коалиции S в случае, если к сети присоединятся только ее участники, составляют $c(S)$.



[11] Связный граф — фигура, состоящая из вершин и дуг, такая, что некоторая последовательность дуг описывает путь (цепь) из любой вершины в любую другую. Связный граф называют деревом, если он не содержит циклов, т. е. если дуги описывают единственный путь из любой вершины в любую другую такой, что ни одна дуга на встречается при этом более одного раза.

По дереву видно, что игра имеет следующую характеристическую функцию:

$N = \{1, 2, 3\}$	$c(1) = 24$	$c(2) = 18$
$c(3) = 48$	$c(1, 2) = 36$	$c(1, 3) = 48$
$c(2, 3) = 60$	$c(1, 2, 3) = 60$	$c(\varnothing) = 0$

Если все игроки присоединятся к сети, то есть если будет образована коалиция $N = \{1, 2, 3\}$, то возникает вопрос о распределении затрат между ее участниками. Одним из ответов может быть вектор Шепли для данной игры.

Найдем вектор Шепли как средний предельный вклад игроков.

	1	2	3
123	24	12	24
132	24	12	24
213	18	18	24
231	0	18	42
312	0	12	48
321	0	12	48
	66	84	210

Вектор Шепли составляет (11, 14, 35).

Интересно, что эти же значения можно получить при помощи другого правила:

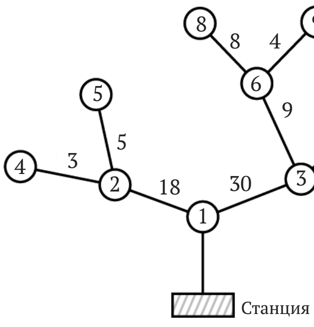
Разделим затраты на каждую линию поровну между игроками, которые ее используют. В самом деле, применив данное правило, мы получим:

	1	2	3
Все используют первый сегмент	2	2	2
Только игрок 2 использует сегмент с затратами 12	0	12	0
Только игроки 1 и 3 используют сегмент с затратами 18	9	0	9
Только игрок 3 использует сегмент с затратами 24	0	0	24
	11	14	35

Данное правило применимо к любой игре с деревом. Оно упрощает нахождение вектора Шепли в играх с деревом при большом числе игроков. Доказательство справедливости правила выходит за пределы данной книги.

Пример

Станция кабельного телевидения подключила девять потребителей к своей сети. Сетевые подключения описываются следующим деревом, причем, как и в предыдущем примере, затраты на создание каждой дуги сети указываются над этой дугой, а игроки указаны в вершинах дерева. В игре $N = \{1, 2, \ldots, 9\}$ и, как и в предыдущем примере, $c(S)$ — общие затраты коалиции S при условии, что к сети подключатся только ее члены.



Для того чтобы всего лишь определить характеристическую функцию, нужно указать $2^9 = 512$ выигрышей, так что число возможных порядков, требуемых для нахождения значения Шепли, оказывается практически неисчислимо. Гораздо проще использовать вышеуказанное правило.

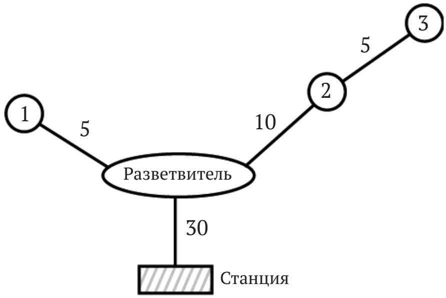
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Все игроки используют первый сегмент	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Только 2, 4 и 5 используют сегмент с затратами 18		6		6	6				
Только 4 использует сегмент с затратами 3				3					
Только 5 использует сегмент с затратами 5					5				
Только 3, 6, 7, 8 и 9 используют сегмент с затратами 30			6			6	6	6	6
Только 7 использует сегмент с затратами 6							6		
Только 6, 8 и 9 используют сегмент с затратами 9						3		3	3
Только 8 использует сегмент с затратами 8								8	
Только 9 использует сегмент с затратами 4									4
	3	9	9	12	14	12	15	20	16

Вектор Шепли для данной игры составляет (3, 9, 9, 12, 14, 12, 15, 20, 16).

Вопрос для обсуждения. Просмотрите все аксиомы о векторе Шепли и выясните, справедливы ли они для игр с распределением затрат.

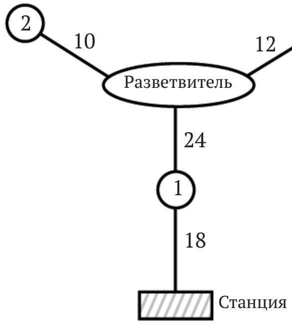
3.28. Упражнения

1. Станция кабельного телевидения желает подключить к сети трех новых потребителей. Сетевые подключения описываются при помощи следующего дерева.



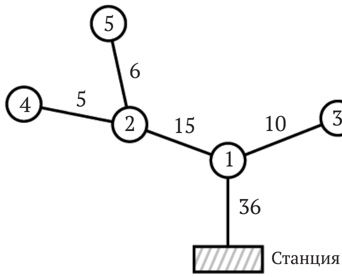
Найдите распределение затрат среди трех игроков при помощи значения Шепли.

2. Станция кабельного телевидения желает подключить к сети трех новых потребителей. Сетевые подключения описываются при помощи следующего дерева.



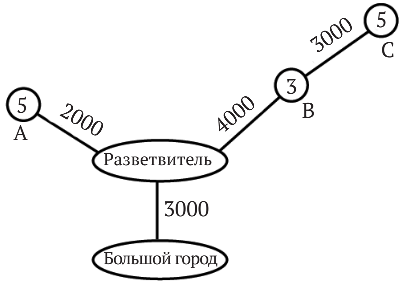
Найдите распределение затрат среди трех игроков, если все трое решат подключиться.

3. Станция кабельного телевидения желает подключить к сети шесть новых потребителей. Сетевые подключения описываются при помощи следующего дерева.



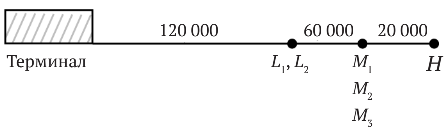
Найдите распределение затрат среди шести игроков, если все шесть решат подключиться.

4. Жители поселений вблизи большого города отвечают за ремонт и содержание дорог, соединяющих их с городом. Данные описываются при помощи следующего дерева. Каждое поселение представлено вершиной дерева, в которой указана численность его населения. Месячные издержки обслуживания каждого участка дороги указаны над ветвями дерева.



Найдите распределение затрат между всеми жителями при помощи вектора Шепли.

5. Частным случаем игр с деревьями являются *игры об авиаперевозках*. Взлетно-посадочная полоса разделена на три секции. Первая предназначена для легких самолетов, и затраты на ее сооружение составляют \$120 000. Для среднетоннажных самолетов нужна более длинная полоса, и сооружение дополнительного сегмента обойдется в \$60 000. Для тяжелых самолетов требуется еще более протяженная полоса, и затраты на сооружение еще одного сегмента составят \$20 000. Это представлено на следующем рисунке:



Предположим, что в аэропорту имеется два легких самолета L_1 и L_2, три среднетоннажных самолета M_1, M_2 и M_3 и один тяжелый самолет H. В роли «игрока» выступает каждая посадка. Характеристическая функция $c(S)$ отражает затраты на взлетно-посадочную полосу, необходимую для обслуживания всех игроков из S.

(1) Вычислите: $c(L_1) =$ $c(L_1, L_2) =$ $c(L_1, H) =$ $c(M_1, M_2, H) =$

(2) Найдите распределение затрат между всеми авиарейсами в соответствии со значением Шепли.

3.29. Упражнения на повторение

1. Рассмотрим игру [61; 40, 40, 30, 10]:

(1) Запишите ее характеристическую функцию.

(2) Есть ли в ней симметричные игроки? Если да, то кто?

(3) Есть ли болван? Если да, то кто?

(4) Вычислите индекс влияния Шепли — Шубика.

2. Рассмотрим игру $(N; v)$:

$N = \{1, 2, 3\}$	$v(1) = 6$	$v(2) = 6$
$v(3) = 12$	$v(1, 2) = 18$	$v(1, 3) = 24$
$v(2, 3) = 12$	$v(1, 2, 3) = 42$	$v(\varnothing) = 0$

(1) Разложите игру на сумму двух игр так, чтобы в одной из них игроки 1 и 2 были симметричными, а игрок 3 — болваном.

(2) Что можно сказать о болване и/или симметричных игроках во второй игре?

3. Найдите индекс Шепли — Шубика для следующей игры: [4; 3, 1, 1, 1].

4. Вычислите вектор Шепли для следующей игры:

$N = \{1, 2, 3\}$	$v(1) = v(2) = 50$
$v(3) = 0$	$v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = 100$
$v(1, 2, 3) = 150$	$v(\varnothing) = 0$

5. Найдите вектор Шепли при помощи процедуры ликвидации партнерства.

$N = \{1, 2, 3\}$	$v(1) = v(2) = 12$	
$v(3) = 18$	$v(1, 2) = 18$	$v(1, 3) = 24$
$v(2, 3) = 30$	$v(1, 2, 3) = 60$	$v(\varnothing) = 0$

6. Вычислите индекс Шепли — Шубика как средний предельный вклад участников для следующей игры: [4; 3, 2, 1, 1].

7. Вычислите вектор Шепли для следующей игры:

$N = \{1, 2, 3\}$	$v(1) = 6$	$v(2) = 12$
$v(3) = 18$	$v(1, 2) = 18$	$v(1, 3) = 24$
$v(2, 3) = 30$	$v(1, 2, 3) = 42$	$v(\varnothing) = 0$

8. Найдите индекс влияния Шепли — Шубика для следующей игры: [8; 3, 3, 2, 2, 2, 2].

4
Анализ задачи о банкротстве из Талмуда

4.1. Введение

Случаи банкротства, при которых предъявляются претензии на некое имущество и сумма таких претензий превышает стоимость имущества, встречаются повсеместно. В таких ситуациях вызывает интерес вопрос о справедливом дележе имущества среди всех претендентов.

К сожалению, на данный вопрос нет однозначного ответа. То, что представляется справедливым в одном случае, оказывается не столь справедливым в другом. В этой главе мы рассмотрим несколько вариантов решений, проливающих свет на реальное положение вещей и применимых в определенных условиях.

Начнем с одного из необычных методов справедливого дележа, предложенного в Талмуде[1]. Ситуация такова: мужчина, женатый на трех женщинах, в брачных контрактах с ними обещал выплатить одной из них 100, второй 200 и третьей 300 денежных единиц в случае его

[1] Памятник писменности, формирующий основу иудейского религиозного, уголовного и гражданского права. Он состоит из ядра — Мишны, и Гемары, представляющей собой комментарий и объяснение Мишны. Формирование канона Мишны произошло примерно 1800 лет назад, а Гемары — примерно на 200 лет позже.

смерти. После смерти мужчины оказалось, что все его имущество стоит менее 600 денежных единиц. Мишна приписывает рабби Натану (трактат Ктубот, 93а) варианты дележа для случаев, когда стоимость имущества составляет 100, 200, и 300 денежных единиц. Рекомендации Мишны представлены ниже.

Имущество / Претензии	100	200	300
100	$33\frac{1}{3}$	50	50
200	$33\frac{1}{3}$	75	100
300	$33\frac{1}{3}$	75	150

Рекомендация рабби Натана выглядит довольно странно. Почему предлагаются равные доли, если имущество окажется небольшим? Почему предлагается пропорциональный дележ, если имущество стоит 300 единиц? Самым необычным представляется дележ для случая, если стоимость имущества равна 200 единицам. Наконец, главный вопрос: как должно выглядеть правило дележа для различных стоимостей и для произвольного числа жен?

Эту загадку не могли разрешить в течение многих лет, и многие знатоки еврейского религиозного права предлагали различные правила дележа. Некоторые полагали, что данный способ дележа продиктован специфическими обстоятельствами, описание которых опускается. Другие считали, что в толкование закралась какая-то ошибка. Сами формулировки Талмуда наводят на мысль, что эти рекомендации не были приняты и использовалось другое правило. Один известный еврейский мудрец, рабби Хай Гаон, предположил, что существует некая связь между данным правилом и правилом дележа одежды между двумя претендентами (см. раздел 4.2). Однако он не объяснил природу этой связи и фактически отказался от своего мнения.

Несмотря на бесчисленные попытки ученых, до недавнего времени так и не было найдено убедительного объяснения. Правило дележа было изучено двумя специалистами по теории игр, Р. Ауманном и М. Машлером. Они решили «перевести» три задачи о банкротстве на язык теории игр и выяснить, могут ли какие-либо известные концепции решений привести к сформулированным в Мишне результатам. К их удивлению, нашлась концепция решений, именуемая *N-ядром*[2], дающая в точности такие же результаты, что приведены в таблице выше. Казалось, что наконец-то найдено объяснение для предложения рабби Натана. Была лишь одна «небольшая» загвоздка: понятие *N-ядра* было предложено Д. Шмайдлером[3] в 1969 г. Невозможно предположить, что рабби Натан знал, что такое *N*-ядро[4]. Должно было быть иное объяснение происхождения чисел из таблицы. Зацепка была найдена в работе специалиста по теории игр А. И. Соболева, который разработал систему аксиом, характеризующих *N*-ядро[5]. Одна из аксиом, называемых аксиомой совместимости, стала ключом к разгадке.

В этой главе мы рассмотрим концепцию совместимости и докажем, что с ее помощью можно объяснить таблицу рабби Натана. Кроме того, эта концепция ясно показывает, что подобные задачи с другим числом

[2] Или нуклеолус.

[3] *Schmeidler D.* The Nucleolus of a Characteristic Function Game // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1969. Vol. 17. P. 1163–1170.

[4] Описание *N*-ядра — за рамками этой книги.

[5] *Соболев А. И.* Характеризация принципов оптимальности в кооперативных играх посредством функциональных уравнений // Математические методы в социальных науках. 1975. № 6. С. 94–151.

кредиторов и различными требованиями легко решаются[6].

Для понимания этого объяснения нам потребуется рассмотреть более простое правило из Мишны, касающееся спора об одежде.

4.2. Спор об одежде

В Талмуде есть следующая Мишна (трактат Бава Меция, 2а): «Двое тянут на себя одежду: один уверяет, что вся эта одежда — его, другой говорит, что его. Тогда первый получит половину, и второй получит половину. Двое тянут на себя одежду: один уверяет, что вся эта одежда — его, другой говорит, что его — половина. Тогда первый получит $^3/_4$, а второй получит $^1/_4$».

Перейдем к анализу претензий и решению, предлагаемому в Мишне. В первом случае обе стороны хотят заполучить одежду целиком, и решение заключается в том, чтобы поделить одежду пополам.

Второй случай представляет для нас намного больший интерес. Один из участников требует одежду целиком, а второй всего лишь половину. В этом случае решение оказывается таково, что требующий одежду целиком получает $^3/_4$ от нее, а требующий половину — соответственно, $^1/_4$.

По какому принципу происходит дележ? Рабби Шломо Ицхаки (Раши) интерпретирует это так. Тот, кто требует половину, «уступает оставшуюся половину другому, следовательно, спор идет лишь относительно другой половины. Вследствие этого каждый из участников спора имеет половину от спорной части». Тогда выходит, что распределение имеет вид $^3/_4$ и $^1/_4$.

[6] *Aumann R. J., Maschler M.* Game-theoretic analysis of a bankruptcy problem from the Talmud // Journal of Economic Theory. 1985. Vol. 36. P. 195–213.

В этом разделе мы обобщим задачу на более сложные случаи.

Пример 1

Одежда стоит 100 денежных единиц.

Первый утверждает, что его доля стоит 50 единиц.

Второй утверждает, что его доля стоит 80 единиц.

Как им следует ее поделить?

Решение. Тот, кто требует 50 денежных единиц, фактически утверждает, что не претендует на оставшиеся 50 единиц, и другой участник имеет полное на них право. Тот, кто требует 80 единиц, фактически заявляет, что не претендует на 20 единиц, и первый участник имеет полное на них право. Таким образом, спор не распространяется на 70 из 100 единиц. Следовательно, оставшиеся 30 денежных единиц нужно распределить поровну между участниками. Описание дележа выглядит так:

Стоимость одежды	100	
Претензии	80	50
Неоспариваемый дележ	50	20
Равный дележ остатка	15	15
	–	–
	65	35

Претендент на 50 единиц получает 35, а претендент на 80 единиц получает 65.

Пример 2

У человека два кредитора: один из них требует 300, а второй — 90. Имущество должника стоит 120 единиц.

Это задача о банкротстве. Решим ее согласно принципу «спора об одежде»[7].

Стоимость имущества	120	
Претензии	90	300
Неоспариваемый дележ	0	30
Равный дележ остатка	45	45
	–	–
	45	75

Решение. Претендент на 300 единиц получает 75, а претендент на 90 единиц получает 45.

В Примере 2 возникает новый элемент. Размер одного из долгов превышает величину, доступную для распределения. Необходимо отметить, что кредиторы предъявляют свои требования непосредственно к заемщику, а не друг к другу. Заявитель 90 единиц не претендует на остальные 30 единиц. С его точки зрения, эти 30 единиц можно выплатить другому кредитору. С другой стороны, претендент на 300 единиц фактически предъявляет требование на все имущество. К сожалению, он не может требовать ничего сверх этого, поскольку другого имущества просто нет. С его точки зрения не может остаться денег, на которые он не претендует, следовательно, другому заявителю ничего не остается. Этим объясняется возникновение 0 в столбце заявителя 90 единиц.

[7] Мы предполагаем, что любое требование, превышающее стоимость имущества, должно быть сокращено до его стоимости, после чего для дележа ничего не остается.

Математическое обобщение

Имущество оценивается в E.

Кредиторы требуют d_1 и d_2.

$d_1 + d_2 > E$; в противном случае нет препятствий для выплаты всех долгов.

Дележ имущества осуществляется так:

Имущество	E	
Претензии	d_1	d_2
Неоспариваемый дележ	$(E - d_2)_+$	$(E - d_1)_+$
Равный дележ остатка	$\frac{E - (E - d_1)_+ - (E - d_2)_+}{2}$	$\frac{E - (E - d_1)_+ - (E - d_2)_+}{2}$
	$\frac{E - (E - d_1)_+ + (E - d_2)_+}{2}$	$\frac{E - (E - d_1)_+ - (E - d_2)_+}{2}$

Пояснение. Знак плюса (+) в выражении $(E - d_1)_+$ или $(E - d_2)_+$ означает, что значение выражения равно нулю, если $E - d_1 < 0$ или $E - d_2 < 0$.

4.3. Упражнения

1. Одежда стоит 150 денежных единиц. Один человек требует 75 единиц, а другой требует 100 единиц. Как необходимо поделить одежду в соответствии с принципом спора об одежде?

2. Одежда стоит 200 единиц. Один человек требует 120 единиц, а другой требует 180 единиц. Как необходимо поделить одежду в соответствии с принципом спора об одежде?

3. Имущество банкрота оценивается в 200 денежных единиц. У него имеется два кредитора, один из которых требует 300 единиц, а другой — 200 единиц. Каким образом они поделят между собой его имущество, используя принцип спора об одежде?

4. Имущество банкрота оценивается в 300 денежных единиц. У него имеется два кредитора, один из которых требует 250 единиц, а другой — 130 единиц. Каким образом они поделят между собой его имущество, используя принцип спора об одежде?

5. Человек умер, а его имущество оценивается в 500 единиц. У покойника было два кредитора: один из них требует 400 единиц, а второй — 300 единиц. Дележ имущества происходил следующим образом:

Имущество	500	
Претензии	300	400
Дележ имущества	150	350

Соответствует ли данный дележ принципу спора об одежде? Если нет, то осуществите дележ согласно принципу спора об одежде.

6. Человек умер, оставив имущество в размере 200 единиц. У него было два кредитора: один из них требует 100 единиц, а второй — 150 единиц. Какими будут выплаты в соответствии с принципом спора об одежде?

7. Перед вами следующий дележ имущества; проверьте его на соответствие принципу спора об одежде.

Имущество	400	
Претензии	200	350
Дележ имущества	125	275

4.4. Физическая интерпретация спора об одежде

В этом разделе, следуя принципам Каминского[8], мы сконструируем систему сосудов, которая имитирует возвраты кредиторам в соответствии с принципом спора об одежде. К примеру, рассмотрим имущество и две претензии на него: 100 и 200. Далее представим, что данные претензии представлены двумя сосудами разного размера, в которые заливается жидкость, символизирующая это имущество. Как видно из *рис. 1–4*, каждый сосуд состоит из двух частей, соединенных узкой шейкой. Объем каждой части сосуда равен половине требования соответствующего кредитора. Два сосуда соединены узкой трубкой. Предполагается, что объемы шейки и трубки достаточно малы, и мы их не учитываем. Они служат исключительно для передачи жидкости. Проследим, чтобы площади основания сосудов, а также их высоты были одинаковыми. Поскольку требования d_1 и d_2 удовлетворяют соотношению $d_1 < d_2$, то одинаковая высота возможна только в том случае, когда первый сосуд имеет более длинную шейку.

Представим имущество E в виде жидкости объемом E. Нальем ее в один из сосудов и заметим, что она останется в сосудах, поскольку $E < d_1 + d_2$.

[8] *Kaminski M.M.* Hydraulic Rationing // Mathematical Social Sciences. 2000. Vol. 40. P. 131–155.

Жидкость (имущество), вылитая в один из сосудов, найдет дорогу в другой сосуд через узкую трубку, и в конечном счете в обоих сосудах окажется одинаковый уровень жидкости. Это простое физическое явление описывается следующим образом: «в сообщающихся сосудах уровни однородной жидкости равны». Мы предполагаем, что количество жидкости в каждом сосуде в точности соответствует сумме возврата соответствующему кредитору по принципу спора об одежде. Будем называть это Правилом сообщающихся сосудов.

Рассмотрим конкретные примеры.

1. Имущество оценивается в 80, а долги составляют 100 и 200.

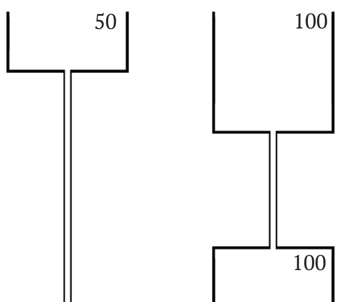


Рис. 1

Жидкость, которую наливают в один из сосудов, перетекает в другой сосуд через узкую трубку. В конечном итоге уровень жидкости в обоих сосудах окажется одинаковым (*рис. 1*).

Если мы разделим имущество в 80 единиц между кредиторами с претензиями в 100 и 200 по принципу спора об одежде, то получим:

Имущество	80	
Претензии	100	200
Неоспариваемый дележ	0	0
Равный дележ остатка	40	40
Дележ имущества	40	40

В точности столько окажется в каждом из сосудов.

2. Имущество оценивается в 140, а долги составляют 100 и 200.

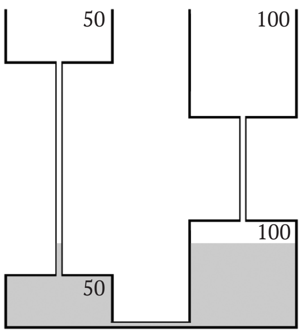


Рис. 2

Заливаем жидкость (имущество): в этом случае нижняя часть меньшего сосуда окажется заполненной, однако жидкость не сможет достичь верхней части (*рис. 2*). В этом случае размер имущества превышает меньшую из претензий, но по-прежнему меньше, чем большая из них. Когда мы заливаем в сосуды жидкость объемом 140, один из сосудов окажется заполненным наполовину, а другой вместит в себя 90 единиц. Ниже приведен расчет дележа между кредиторами, откуда видно, что *он в точности соответствует рисунку*.

Имущество	140	
Претензии	100	200
Неоспариваемый дележ	0	40
Равный дележ остатка	50	50
Дележ имущества	50	90

3. Имущество оценивается в 180, а долги составляют 100 и 200.

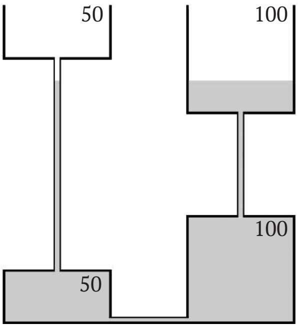


Рис. 3

Заливаем жидкость и видим, что и в этом случае нижняя часть меньшего сосуда окажется заполненной, однако жидкость не достигает верхней части. В данном случае размер имущества больше, чем наименьшая претензия, но по-прежнему меньше, чем большая их них. Жидкость занимает половину меньшего сосуда и 130 единиц большего сосуда (в общей сложности 180 единиц).

Как следует из нижеприведенных вычислений, дележ по принципу спора об одежде *соответствует изображенному на рис. 3*.

Имущество	180	
Претензии	100	200
Неоспариваемый дележ	0	80
Равный дележ остатка	50	50
Дележ имущества	50	130

4. Имущество оценивается в 240, а долги составляют 100 и 200.

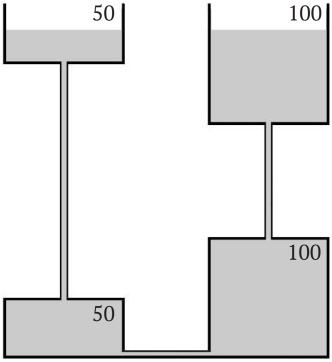


Рис. 4

В этом случае жидкость достигнет верхних частей обоих сосудов. Суммарный долг составляет 300, а стоимость имущества 240. Не хватает 60 единиц жидкости, что видно по незаполненным полостям объемом 30 единиц в каждом сосуде. Отсюда следует, что жидкость достигнет верхних частей обоих сосудов.

Как следует из нижеприведенных вычислений, дележ по принципу спора об одежде *в точности соответствует рис. 4*.

Имущество	240	
Претензии	100	200
Неоспариваемый дележ	40	140
Равный дележ остатка	30	30
Дележ имущества	70	170

Рассмотренные примеры хорошо иллюстрируют тот факт, что *построение системы сосудов для случая двух кредиторов в точности соответствует дележу имущества E по принципу спора об одежде с требованиями d_1 и d_2 такими, что $d_1 + d_2 > E$.*

Это правило работает в обоих направлениях.

1. Если залить жидкость в сосуды и позволить ей установить уровень самостоятельно, то объем жидкости в каждом из сосудов совпадет с объемом жидкости, установленным в соответствии с принципом спора об одежде.
2. Если разъединить сосуды и налить в каждый из них столько жидкости, сколько нужно в соответствии с принципом спора об одежде, и снова соединить их, то жидкость не будет перетекать из одного сосуда в другой, поскольку уровень жидкости в них одинаковый.

4.5. Упражнения

1. Основным способом дележа имущества E между n кредиторов с требованиями $d_1, d_2, \ldots, d_n$ является разделение E пропорционально долгам; а именно, кредитор i должен получить

$$\frac{d_i}{d_1 + d_2 + \ldots + d_n} \cdot E$$

Опишите систему сосудов и их связи, иллюстрирующие данный дележ.

2. Три акционера являются собственниками компании. У первого из них привилегированные акции номинальной стоимостью d_1, а у двух оставшихся — обыкновенные акции номинальной стоимостью d_2 и d_3. В случае банкротства стоимость компании делится между акционерами по следующему правилу. Прежде всего, первый акционер получает номинальную стоимость своих акций, если $E > d_1$. В противном случае он получает E. Затем остаток (если он имеется) распределяется между акционерами 2 и 3 пропорционально стоимости их акций d_2 и d_3. Опишите сосуды, иллюстрирующие дележ произвольной величины E, удовлетворяющей

$$E \leq d_1 + d_2 + d_3.$$

3. Известно, что имущество оценивается в E. Претензии кредиторов составляют d_1 и d_2, $d_1 + d_2 \geq E$. Докажите, что конструкция из сосудов всегда приводит к такому же результату, как и принцип спора об одежде. Подсказка: мы рассмотрели четыре примера. Приведите доказательство для всех четырех случаев.

4.6. Задача о банкротстве из Талмуда

В Мишне говорится о мужчине и его трех женах, которым он в брачном контракте завещал 100, 200 и 300 динаров соответственно. По закону они должны быть выплачены женщинам в случае смерти мужа. К сожалению, после его смерти выяснилось, что его имущество стоит меньше 600 динаров. Как следует поделить имущество между вдовами? Мишна рабби Натана рассматривает три случая:

(i) Имущество стоит 100 динаров.
(ii) Имущество стоит 200 динаров.
(iii) Имущество стоит 300 динаров.

Его дележ представлен в следующей таблице:

Претензии \ Имущество	100	200	300
100	33 1/3	50	50
200	33 1/3	75	100
300	33 1/3	75	150

Согласно таблице, имеет место равномерный дележ между вдовами при имуществе в 100, пропорциональный дележ при имуществе в 300. Но принцип дележа при имуществе в 200 совершенно непонятен: 50 единиц достается первой вдове и по 75 единиц — двум оставшимся вдовам.

Рассмотрим, к примеру, дележ наследства между вдовами во втором случае, если стоимость имущества равна 200.

Претензии \ Имущество	200
100	50
200	75
300	75

Выберем любых двух вдов: к примеру, первую и третью. В сумме от рабби Натана они получат 125. Что произойдет, если они решат поделить эту сумму в соответствии с принципом спора об одежде?

Имущество	125	
Претензии	100	300
Неоспариваемый дележ	0	25
Равный дележ остатка	50	50
	–	–
	50	75

В соответствии с принципом спора об одежде предъявляющий права на 100 динаров должен получить 50, а предъявляющий права на 300 динаров должен получить 75. *Это в точности те суммы, которые называет рабби Натан!*

Теперь взглянем на дележ имущества между вдовами с брачными контрактами в 200 и 300. В сумме от рабби Натана они получат 150. Согласно принципу спора об одежде:

Имущество	150	
Претензии	200	300
Неоспариваемая часть	0	0
Равный дележ остатка	75	75
	–	–
	75	75

Согласно принципу спора об одежде каждая из них должна получить по 75. *Это в точности совпадает с дележом рабби Натана!*

Аналогичным образом, если применить принцип спора об одежде к двум вдовам с завещаниями в 100 и 200, то они получат в точности те же суммы, что установил для них рабби Натан (проверьте!).

Мы доказали, что метод дележа имущества (50, 75, 75) совпадает с принципом спора об одежде. Любые две вдовы, разделив распределенную им сумму по принципу спора об одежде, обнаружат, что они сами получили в точности то, что предлагает им рабби Натан.

Другие случаи из таблицы (с. 242) также подчиняются этому принципу (в последующих упражнениях вам будет предложено проверить это).

В разделе 4.8 будет доказано, что это — единственные числа, не противоречащие принципу спора об одежде. Предположим, что кто-то предложит дележ имущества стоимостью в 200 единиц следующим образом: (40, 60, 100). Рассмотрим суммы, полученные первой и второй вдовами. Вместе они получили бы 100. Предположим, что обе вдовы — ярые сторонницы принципа спора об одежде. Итак, у них 100 единиц. Одна из них требует 100, а вторая — 200 единиц. Как им следует поделить деньги, выделенные рабби Натаном? В соответствии с принципом спора об одежде они должны были бы получить следующие суммы.

Имущество	100	
Претензии	100	200
Неоспариваемый дележ	0	0
Равный дележ остатка	50	50
	–	–
	50	50

То есть в соответствии с принципом спора об одежде они получат по 50 единиц. Таким образом, первая вдова не согласится на выдвинутое выше предложение и потребует больше. Иначе говоря, предложение *не совместимо с принципом спора об одежде*.

Посмотрим теперь на дележ имущества между второй и третьей вдовами. Согласно выдвинутому предложению, вместе они получили бы 160. По принципу спора об одежде они должны были бы получить следующие суммы

Имущество	160	
Претензии	200	300
Неоспариваемый дележ	0	0
Равный дележ остатка	80	80
	–	–
	80	80

Итак, исходя из принципа спора об одежде, они должны получить по 80. Следовательно, в этом случае вторая вдова не согласится на предложенную сумму и будет возражать. Таким образом, вдовы не примут предложение, и его нельзя будет реализовать. Всякий раз, когда рассматривается предложение о дележе, отличное от (50, 75, 75), найдется как минимум одна пара вдов, для которых данное предложение окажется несовместимым с принципом спора об одежде. Единственным дележом, совместимым с этим принципом для всех пар вдов, является (50, 75, 75).

4.7. Упражнения

Замечание к упражнениям 3, 4, 5 и 9. Для проверки решения на совместимость с принципом спора об одежде необходимо рассмотреть все пары. Чтобы сделать вывод о несовместимости решения с принципом спора об одежде, достаточно найти одну пару, для которой оно не удовлетворяет свойству совместимости.

1. Стоимость имущества — 100 единиц, а претензии составляют 100, 200 и 300 единиц. Проверьте, совместимо ли решение рабби Натана с принципом спора об одежде для каждой пары.

2. Стоимость имущества — 300 единиц, а претензии составляют 100, 200 и 300 единиц. Проверьте, совместимо ли решение рабби Натана с принципом спора об одежде для каждой пары.

3. Стоимость имущества — 300 единиц, а претензии составляют 100, 200 и 300 единиц. Рассматривается предложение о дележе этого имущества между вдовами в виде (80, 90, 130). Выясните, отличается ли сумма, которую получила бы каждая пара при данном предложении, от суммы при дележе, совместимом с принципом спора об одежде (см. замечание выше).

4. Стоимость имущества — 300 единиц, а претензии вдов составляют 100, 200 и 300 единиц. Рассматривается предложение о дележе этого имущества между вдовами в виде (80, 100, 120). Проверьте, есть ли пары вдов, для которых этот дележ совпадает с дележом по принципу спора об одежде (см. замечание выше).

5. Стоимость имущества — 200 единиц, а претензии составляют 100, 200 и 300 единиц. Рассматривается предложение о дележе этого имущества между вдовами в виде (50, 70, 80). В этом случае только одна из пар будет возражать. Укажите, какая именно (см. замечание выше).

6. Имущество банкрота оценивается в 400 денежных единиц. У него три кредитора, предъявляющих претензии на 150, 200 и 350 единиц соответственно. Рассматривается предложение о дележе этого имущества в виде (75, 100, 225). Выясните, совместимо ли оно с принципом спора об одежде для любой пары кредиторов.

7. Имущество банкрота оценивается в 120 денежных единиц. У него три кредитора, предъявляющих претензии на 50, 90 и 130 единиц соответственно. Совместимо ли предложение о дележе имущества в виде (25, 45, 50) с принципом спора об одежде для любой пары кредиторов?

8. Имущество банкрота оценивается в 500 денежных единиц. У него три кредитора, предъявляющих претензии на 150, 250 и 300 единиц соответственно. Предложение о дележе: (100, 150, 250). В этом случае у одной из пар кредиторов доля в дележе будет соответствовать принципу спора об одежде. Укажите, у какой именно.

9. Имущество банкрота оценивается в 200 денежных единиц. У него четыре кредитора, предъявляющих претензии на 50, 100, 150 и 200 единиц соответственно. Выясните, совместимо ли предложение о дележе имущества в виде (25, 50, $62^1/_2$, $62^1/_2$) с принципом спора об одежде для любой пары кредиторов (см. замечание выше).

10. Имущество банкрота оценивается в 500 денежных единиц. У него четыре кредитора, предъявляющих претензии на 100, 150, 250 и 350 единиц соответственно. Выясните, совместимо ли предложение о дележе имущества в виде (75, 125, 150, 150) с принципом спора об одежде для любой пары кредиторов.

4.8. Существование и единственность решения

В предыдущем разделе мы рассмотрели конкретный пример из Талмуда и узнали, что его решение соответствует принципу спора об одежде. Однако возникают три вопроса.

1. Всегда ли существует решение, которое соответствует принципу спора об одежде? К примеру, может случиться так, что имущество банкрота необходимо разделить между 15 кредиторами, чьи претензии таковы, что вне зависимости от решения всегда найдется пара кредиторов, для которых то, что им предложено, не соответствует принципу спора об одежде.
2. Является ли решение единственным? Возможно ли, что, например, в случае банкротства с восемью кредиторами существуют два способа дележа имущества, каждый из которых соответствует принципу спора об одежде.
3. Каким должно быть решение? Рассмотрим задачу о банкротстве из пяти участников с известной стоимостью имущества и известными долгами. Как найти долю каждого из кредиторов так, чтобы результат соответствовал принципу спора об одежде?

В данном разделе будет доказано, что ответы на первые два вопроса положительны. Последний вопрос будет рассмотрен в разделе 4.9.

Теорема. *Для любого числа заявителей в ситуации банкротства существует дележ имущества банкрота, соответствующий принципу спора об одежде*.

Доказательство. Пусть E — стоимость имущества, а $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — неотрицательные претензии кредиторов 1, 2, ..., n к этому имуществу. Ситуация банкротства предполагает выполнение соотношения

$$E \leq d_1 + d_2 + \ldots + d_n.$$

Рассмотрим n сосудов, описанных в разделе 4.4, и соединим их так, как изображено на *рис. 5* (для простоты взят случай $n = 3$).

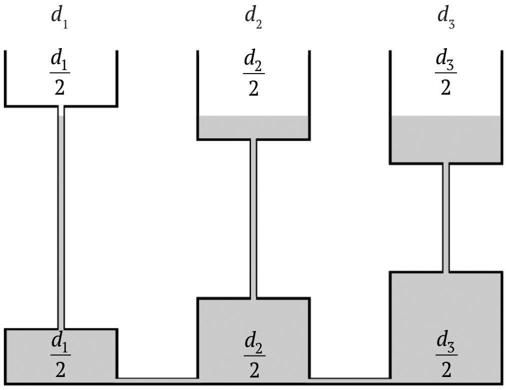


Рис. 5

Убедимся в том, что высота и площадь основания сосудов одинаковы. Нальем в сосуды жидкость объемом E. Она не перельется через край, поскольку $E \leq d_1 + d_2 + \ldots + d_n$. Предоставим жидкости отрегулироваться в соответствии с законом «в сообщающихся сосудах уровни однородной жидкости равны». Уберем соединительные трубки и получим отдельные сосуды (*рис. 6*).

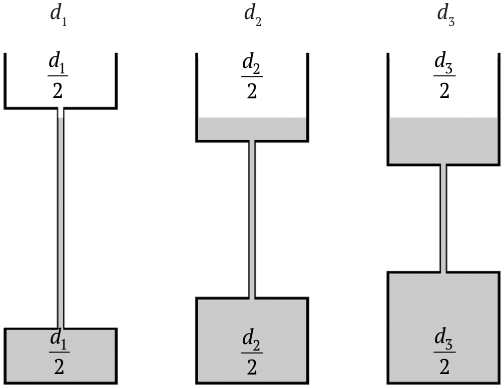


Рис. 6

Утверждается, что объем жидкости в каждом из сосудов представляет долю соответствующего кредитора. Напомним, что высота жидкости везде одинакова.

Произвольно выберем два сосуда i и j и соединим их (*рис. 7*).

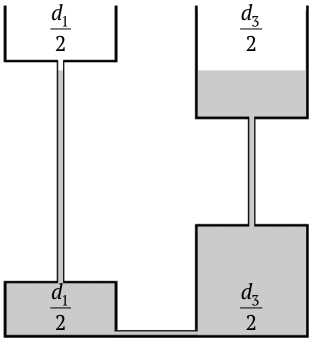


Рис. 7

Заметим, что жидкость не будет перетекать из одного сосуда в другой, так как ее высота в каждом из них одинакова. Таким образом, жидкость в сосудах i и j подчиняется закону сообщающихся сосудов. Отсюда вытекает утверждение о соответствии принципу спора об одежде.

Теорема. *Существует единственный способ дележа имущества E между кредиторами с претензиями* d_1, d_2, ..., d_n. *совместимый с принципом спора об одежде, и это дележ, описанный в предыдущей теореме.*

Доказательство. Пусть e_1, e_2, ..., e_n — дележ E, совместимый с принципом спора об одежде. Снова рассмотрим систему сосудов, не соединенных друг с другом (*рис. 8*).

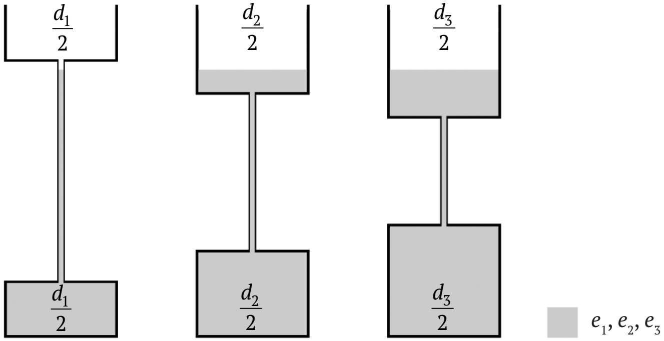


Рис. 8

В каждый из сосудов 1, 2, ..., n нальем жидкость в объеме $e_1, e_2, \ldots, e_n$ соответственно. Выберем произвольно два сосуда i и j и соединим их (*рис. 9*).

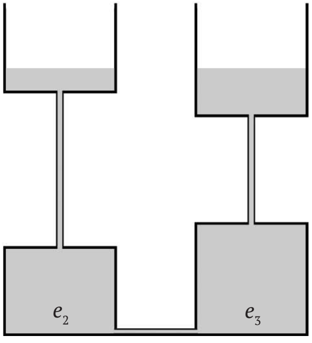


Рис. 9

Уровень жидкости окажется одинаковым, поскольку решение $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ является совместимым с принципом спора об одежде. Это справедливо для любой пары сосудов, так как высота жидкости везде одинакова (объясните, почему). Теперь соединим все сосуды и увидим, что жидкость не будет перетекать из одного сосуда в другой (*рис. 10* для случая $n = 3$).

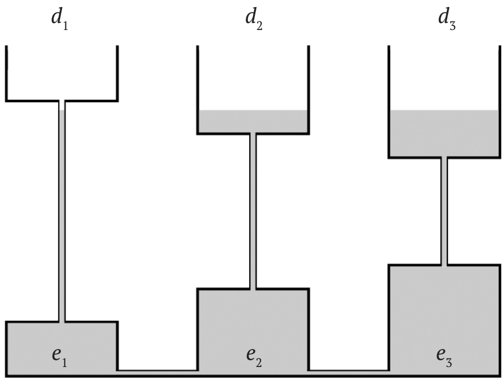


Рис. 10

Из этого следует, что решение, совместимое с принципом спора об одежде, должно быть таким, как в предыдущей теореме.

4.9. Дележ по принципу спора об одежде

На этом этапе может возникнуть вопрос о рекомендациях по дележу имущества, если оценка этого имущества не равна 100, 200 или 300 единиц. В данном разделе будет получено правило дележа имущества, оцениваемого в меньшую сумму, чем сумма всех претензий к этому имуществу. Мы рассмотрим случай трех вдов с брачными контрактами на 100, 200 и 300 единиц в ситуации, когда оценка имущества отличается от их суммы. Данное правило может быть легко обобщено на случай произвольных претензий и любого числа кредиторов.

Далее описаны три случая, для которых правило применимо и верхняя граница оценки имущества составляет 300.

Имущество / Претензии		150		250		300
		1	2	3	4	5
100	α	50	50	50	50	50
200	α	50	50 + β	100	100	100
300	α	50	50 + β	100	100 + γ	150

Пояснение. Если стоимость имущества невелика, то она делится между вдовами поровну (столбец 1). Каждая денежная единица делится между всеми вдовами поровну. Имеется в виду, что имущество делится поровну до тех пор, пока первая вдова не получит половину суммы ее брачного контракта (столбец 2). На этом этапе оценка имущества достигнет значения 150.

С этого момента каждая дополнительная единица денег делится поровну между второй и третьей вдовами (столбец 3). Имеется в виду, что деньги делятся поровну между второй и третьей вдовами до тех пор, пока вторая вдова не получит половину от завещанной ей суммы. На этом этапе оценка имущества достигает значения 250. Начиная с этого момента, каждая добавочная единица денег достается только третьей вдове (столбец 5). Имеется в виду, что каждая дополнительная единица денег достается только третьей вдове, пока она не получит половину от величины завещанной ей суммы. На этот момент оценка имущества достигнет значения 300.

Следующая таблица описывает применение правила в случае, если оценка имущества превышает 300 единиц, но не превышает 600 единиц.

Имущество / Претензии	300		350		450		600
	1	2	3	4	5	6	7
100	50	50	50	50	50	100 – α	100
200	100	100	100	150 – β	150	200 – α	200
300	150	200 – γ	200	250 – β	250	300 – α	300

Пояснение. В этом случае мы анализируем потери. Если имущество оценивается в 600 единиц или более, то его дележ не составит труда; каждая вдова получит ту сумму, которая указана в брачном контакте (столбец 7). Если имущество оценивается менее чем в 600 единиц, то вдовы несут одинаковые потери (столбец 6). И такие одинаковые потери они несут до тех пор, пока потери первой вдовы не достигнут половины от суммы ее брачного контракта. На этом этапе оценка имущества составляет 450 единиц. Начиная с этого момента каждая добавочная единица потерь поровну распределяется между второй и третьей вдовами (столбец 4) до тех пор, пока потери второй вдовы не достигнут половины от суммы ее брачного контракта. На этом этапе оценка имущества составляет 350 единиц. С этого момента потери несет только третья вдова до тех пор, пока и ее потери не составят половину от величины ее брачного контракта, а оценка имущества не достигнет 300 единиц.

Рассмотрим столбец 2 этой таблицы при $\gamma = 15$.

Претензии \ Имущество	335
100	50
200	100
300	185

Наконец, убедимся, что данный дележ в действительности соответствует принципу спора об одежде.

150		235		285	
100	200	100	300	200	300
0	50	0	135	0	85
50	50	50	50	100	100
—	—	—	—	—	—
50	100	50	185	100	185

Данное правило очевидным образом обобщается на случаи других претензий, а также случаи большего числа заявителей.

Пример 1

Имеются четыре кредитора с претензиями на 120, 140, 200 и 250 единиц соответственно. Подлежащее разделу имущество стоит всего лишь 300 единиц. Как следует осуществить раздел в соответствии с описанным выше правилом?

Решение. Сумма всех претензий в данном случае равна 710 единицам. Предполагается, что имеющееся имущество сможет покрыть 300 единиц долга, то есть менее половины от общей суммы. Таким образом, будет полезным обратиться к таблице (с. 253).

Будем заполнять таблицу, аналогичную описанной выше, до тех пор, пока не достигнем 300 единиц.

Претензии \ Имущество	240	270	330
120	60	60	60
140	60	70	70
200	60	70	100
250	60	70	100

Свыше 300 единиц каждая добавочная единица делится между двумя последними заявителями. Таким образом, мы вычтем из суммы претензий излишек, полностью поделенный между кредиторами.

Тогда получаем следующий дележ: (60, 70, 85, 85).

Упражнение. Проверьте, совместимы ли с принципом спора об одежде суммы, получаемые первым и третьим заявителями.

Пример 2

Имеются четыре кредитора с претензиями на 120, 140, 200 и 250 денежных единиц, соответственно. Подлежащее дележу имущество стоит 420 единиц. Как следует осуществить дележ в соответствии с принципом спора об одежде?

Решение. В данном случае стоимость имущества превышает половину от общих долгов (710: 2 = 355). Следовательно, нам необходимо анализировать потери, обратившись к таблице, которая заполняется справа налево.

Претензии \ Имущество	380	440	470	710
120	60	60	60	120
140	70	70	80	140
200	100	130	140	200
250	150	180	190	250

Суммарное количество денег в последнем столбце оказывается меньше, чем стоимость имеющегося имущества; то есть у третьего и четвертого заявителей мы вычли больше, чем необходимо. Нам требуется разделить 420 единиц; поэтому нужно добавить 40 единиц, поделив их поровну между двумя последними заявителями. Таким образом, предлагаемый дележ имеет вид: (60, 70, 120, 170).

Выясним, например, получат ли второй и четвертый заявители суммы, соответствующие принципу спора об одежде.

240	
140	250
0	100
70	70
–	–
70	170

Данная проверка подтверждает совместимость дележа с принципом спора об одежде.

Вывод. В этом разделе была предложена процедура дележа имущества между кредиторами. Эта процедура подразумевает частичное заполнение таблицы — в терминах выгод, если стоимость имущества покрывает меньше половины от общего долга, и в терминах потерь, если стоимость имущества покрывает больше половины от общего долга. Таблица заполняется до тех пор, пока не будет получен соответствующий дележ. Читатель может убедиться, что рассмотренная нами процедура имитирует поведение жидкости, налитой в сосуды. Отсюда вытекает справедливость теоремы.

Теорема. *Рассмотренная нами процедура дележа имущества приводит к дележу, соответствующему принципу спора об одежде для любой пары кредиторов. При любом другом способе дележа найдется как минимум одна пара кредиторов, для которой будет нарушен принцип спора об одежде.*

Из теоремы следует, что любой исход процедуры совместим с *принципом спора об одежде*.

4.10. Упражнения

1. Человек умер, и его имущество оценивается в 500 денежных единиц. У трех вдов покойного есть брачные контракты, дающие им право на выплату в случае смерти мужа 100, 200 и 300 единиц соответственно. Разделите его имущество между вдовами так, чтобы дележ соответствовал принципу спора об одежде.

2. Разделите имущество стоимостью 300 единиц между тремя вдовами, претендующими на 50, 100 и 200 единиц, так, чтобы результат соответствовал принципу спора об одежде.

3. Разделите имущество стоимостью 230 единиц между четырьмя вдовами, претендующими на 50, 100, 150 и 200 единиц, так, чтобы результат был соответствовал принципу спора об одежде.

4. Разделите имущество стоимостью 350 единиц между четырьмя вдовами, претендующими на 80, 120, 160 и 200 единиц — так, чтобы результат был совместим с принципом спора об одежде.

5. Разделите имущество стоимостью 800 единиц между шестью вдовами, претендующими на 50, 100, 150, 200, 250 и 300 единиц, так, чтобы результат соответствовал принципу спора об одежде.

6. Разделите имущество стоимостью 400 единиц между пятью вдовами, претендующими на 70, 100, 160, 220 и 300 единиц, так, чтобы результат соответствовал принципу спора об одежде.

7. Проверьте, что дележ (25, 75, 125, 175) имущества стоимостью 400 единиц между четырьмя вдовами, претендующими на 50, 100, 150 и 200 единиц, соответствует принципу спора об одежде.

8. Проверьте, что дележ (50, 100, 150, 200, 200) имущества стоимостью 700 единиц между пятью вдовами, претендующими на 75, 125, 200, 250 и 300 единиц, соответствует принципу спора об одежде.

9. Таблица содержит дележи имущества разной стоимости между четырьмя кредиторами. В верхней строке указана стоимость имущества, а в левом столбце — требования. Проверьте все дележи на совместимость с принципом спора об одежде. Укажите, какие из них не соответствуют принципу спора об одежде.

Имущество / **Претензии**	**100**	**150**	**200**	**300**	**400**
50	25	37,5	25	25	25
100	25	37,5	50	50	75
200	25	37,5	62,5	100	150
300	25	37,5	62,5	125	150

4.11. Совместимость

Вернемся к примеру 2 из раздела 4.9. В нем речь идет о четырех кредиторах, претензии и дележ выглядят следующим образом:

	420
120	60
140	70
200	120
250	170

Если часть имущества, полученную тремя из четырех кредиторов (скажем, первым, третьим и четвертым, претендующими вместе на 350 единиц) поделить в соответствии с принципом спора об одежде, будет ли произведенный при этом дележ таким же, что и в случае с четырьмя кредиторами?

Ответ является утвердительным, что может быть доказано двумя способами.

Первое доказательство. Часть имущества, которая должна быть выплачена трем кредиторам, одинакова как в исходной задаче, так и в задаче с тремя участниками, а именно 350 единиц. Дележ этой суммы совместим с принципом спора об одежде для любой пары игроков, в том числе и для любой пары в задаче с тремя участниками. Следовательно, решение задачи с четырьмя участниками, при его ограничении на задачу с тремя участниками, совместимо с принципом спора об одежде.

Второе доказательство. Построим соответствующую таблицу, остановившись на стадии двух смежных столбцов: первый — для случая, если стоимость имущества составляет более 350 единиц, второй — менее 350 единиц.

	310	390	570
120	60	60	120
200	100	140	200
250	150	190	250

На данном отрезке вычеты производятся только у двух последних заявителей. Из 350 единиц необходимо вычесть 40 единиц и поделить эту сумму поровну между кредиторами. Получаем дележ (60, 120, 170), что в точности совпадает с дележом в задаче с четырьмя участниками.

Рассмотренный пример — частный случай следующего утверждения.

Теорема. *Пусть дележ имущества между кредиторами совместим с принципом спора об одежде. Тогда для каждого подмножества кредиторов дележ части имущества, рассчитанный на основе тех же претензий и совместимый с принципом спора об одежде, совпадает для этих кредиторов с исходным дележом всего имущества.*

Обобщая сказанное в теореме — любой дележ в соответствии с принципом спора об одежде является совместимым с этим принципом для любого числа его участников (а не только для любой пары участников).

4.12. Упражнения

1 (1) Разделите имущество стоимостью 550 единиц между четырьмя кредиторами, претендующими на 50, 150, 200 и 300 единиц, в соответствии с принципом спора об одежде.

(2) Проверьте, что дележ части имущества, полученного кредиторами, претендующими на 50, 200 и 300 единиц, соответствует принципу спора об одежде.

2 (1) Разделите имущество стоимостью 400 единиц между шестью кредиторами, претендующими на 50, 80, 100, 140, 200 и 250 единиц так, чтобы результат соответствовал принципу спора об одежде.

(2) Проверьте, что дележ части имущества, полученного кредиторами, претендующими на 80, 140, 200 и 250 единиц, соответствует принципу спора об одежде.

3 (1) Разделите имущество стоимостью 900 единиц между шестью кредиторами, претендующими на 100, 150, 200, 260, 300 и 320 единиц так, чтобы результат соответствовал принципу спора об одежде.

(2) Проверьте, что дележ части имущества, полученного кредиторами, претендующими на 100, 200 и 300 единиц, соответствует принципу спора об одежде.

4.13. Закон деления Рифа

Риф (рабби Ицхак бен Яаков Альфаси) предложил другое правило дележа, впоследствии адаптированное Рамбамом (рабби Моше бен Маймоном). В соответствии с данным правилом каждая единица денег делится поровну между всеми кредиторами до тех пор, пока кредитор с наименьшей претензией не получит полную сумму. В дальнейшем каждая дополнительная единица делится поровну между оставшимися кредиторами до того момента, пока кредитор с наименьшей претензией на данном этапе не получит полную сумму, и т. д.

Пример

Имущество / Претензии		300		500		600
		1	2	3	4	5
100	α	100	100	100	100	100
200	α	100	100 + β	200	200	200
300	α	100	100 + β	200	200 + γ	300

Пояснение. Дележ имущества поровну происходит до тех пор, пока претензии первого кредитора не будут полностью удовлетворены (столбец 1). После этого оставшиеся кредиторы поровну делят добавочные суммы вплоть до момента, когда не будут полностью удовлетворены претензии второго кредитора (столбец 3). На этом этапе последний из кредиторов получает оставшуюся часть имущества, не превышающую по стоимости его претензии (столбец 5).

Теперь допустим, что стоимость имущества составляет 350 единиц. Для расчета дележа необходимо обратиться к таблице выше, а точнее, к столбцу с шапкой 500 (объясните, почему). Из него следует, что дележ должен иметь вид (100, 125, 125).

Удовлетворяет ли дележ Рифа условию совместимости? Другими словами, верно ли, что дележ внутри любого подмножества кредиторов, получившего некую сумму при исходном дележе, совпадет с тем, что кредиторы имели бы при исходном дележе? Проверим, какие суммы будут получены первым и третьим кредитором, если стоимость имущества равна 350. Они получили 225 единиц. Поделим эту сумму в соответствии с правилом Рифа.

Имущество / Претензии	200	225
100	100	100
300	100	125

Пояснение. В первую очередь каждый кредитор должен получить по 100 единиц. Тогда первый из них получает полную сумму, а остаток должен достаться второму кредитору.

Как видно, в этом случае условие совместимости для случая с первым и третьим кредиторами выполняется.

Упражнение. Проверьте, выполняется ли условие совместимости для случая с первым и вторым кредиторами, а также для случая со вторым и третьим кредиторами.

Можно доказать, что правило дележа Рифа действительно удовлетворяет условию совместимости; то есть распределение по правилу Рифа внутри любого подмножества участников, которому досталась некая сумма по исходному дележу Рифа, совпадет с тем, что участники имеют при исходном дележе по правилу Рифа.

4.14. Упражнения

1. Используя правило Рифа, разделите имущество стоимостью 275 единиц между четырьмя кредиторами, претендующими на 50, 100, 150 и 200 единиц.

2. Используя правило Рифа, разделите имущество стоимостью 400 единиц между четырьмя кредиторами, претендующими на 50, 100, 150 и 200 единиц.

3 (1) Используя правило Рифа, разделите имущество стоимостью 790 единиц между пятью кредиторами, претендующими на 100, 150, 200, 250 и 300 единиц.

(2) Проверьте, что дележ по правилу Рифа удовлетворяет условию совместимости, взяв для примера группу кредиторов, претендующих на 150, 250 и 300 единиц.

4 (1) Используя правило Рифа, разделите имущество стоимостью 400 единиц между пятью кредиторами, претендующими на 40, 60, 80, 120 и 150 единиц.

(2) Проверьте, что дележ по правилу Рифа удовлетворяет условию совместимости, взяв для примера группу кредиторов, претендующих на 40, 60, 80 и 150 единиц.

4.15. Пропорциональный дележ

В финансовой сфере принято делить имущество пропорционально инвестициям.

Пример. Четыре партнера основали компанию, которая впоследствии прекратила свое существование ввиду финансовых трудностей. Поделим ее рыночную стоимость в размере $555 между партнерами пропорционально вкладам, составляющим 40, 60, 120 и 150.

Совокупный вклад в компанию, таким образом, равен 40 + 60 + 120 + 150 = 370.

Первому достанется: $\frac{555 \cdot 40}{370} = 60$

Второму достанется: $\frac{555 \cdot 60}{370} = 90$

Третьему достанется: $\frac{555 \cdot 120}{370} = 180$

Четвертому достанется: $\frac{555 \cdot 150}{370} = 225$

Вопрос. Удовлетворяет ли пропорциональный дележ условию совместимости?

Ответ. Проверим цифры для первых трех акционеров, которым всего достается 60 + 90 + 180 = 330, и поделим сумму пропорционально между ними. Совокупный вклад в компанию в этом случае составит 40 + 60 + + 120 = 220, следовательно:

Первому достанется: $\frac{330 \cdot 40}{220} = 60$

Второму достанется: $\frac{330 \cdot 60}{220} = 90$

Третьему достанется: $\frac{330 \cdot 120}{220} = 180$

Таким образом, полученная акционерами сумма совпадает с той, что они имеют в исходном дележе.

Нетрудно доказать, что пропорциональный дележ — решение, удовлетворяющее условию совместимости. Любое подмножество участников, анализируя доставшиеся им суммы, обнаружит, что они пропорциональны претензиям.

4.16. Правило дележа О'Нейла

О'Нейлом было предложено еще одно любопытное правило[9]. К примеру, пусть стоимость имущества равна 250 единиц, а претензии составляют 100, 200 и 300 единиц. Кредиторы спешат в банк или в другое место, где осуществляются выплаты. Первый из прибывших сможет получить полную сумму своей претензии, так как остальные претензии еще не предъявлены. Прибывший вторым сможет получить полную сумму претензии или часть от нее в зависимости от того, сколько осталось денег после первого кредитора, и т. д. Претензия каждого вновь прибывшего кредитора будет удовлетворена либо полностью, либо частично, пока не будет роздано все имущество. Полученная кредитором сумма, конечно же, зависит от его порядкового номера. Правило О'Нейла предполагает не проведение гонки между кредиторами, а вычисление сумм, которые кредитор сможет получить в зависимости от своего порядкового номера. Итоговая сумма, полученная кредитором, будет средним значением сумм, которые он мог бы получить при всех возможных порядках следования кредиторов.

Допустим, имущество оценивается в 250:

- первый требует 100,
- второй требует 200,
- третий требует 300.

[9] *O'Neill B.* A Problem of Rights Arbitration from the Talmud // Mathematical Social Sciences. 1982. Vol. 2. P. 345–371.

Кредиторы / Порядок прибытия	1	2	3	
123	100	150	0	
132	100	0	150	
213	50	200	0	
231	0	200	50	
312	0	0	250	
321	0	0	250	
	(250, 550, 700) : 6 = ($41^2/_3$, $91^2/_3$, $116^2/_3$)			

Итоговый дележ представляет собой среднее от этих величин, а именно, ($41^2/_3$, $91^2/_3$, $116^2/_3$).

Удовлетворяет ли правило О'Нейла условию совместимости?

Возьмем, к примеру, первого и третьего кредиторов. В сумме им достанется $158^1/_3$, а их требования составляют 100 и 300 единиц. Деление на основе правила О'Нейла будет следующим.

Имущество оценивается в $158^1/_3$.
Первый требует 100.
Второй требует 300.

Кредиторы / Порядок прибытия	1	2	
12	100	$58^1/_3$	
21	0	$158^1/_3$	
	(100, $216^2/_3$) : 2 = (50, $108^1/_3$)		

Согласно правилу, кредиторы должны получить $(50, 108^1/_3)$, что не совпадает с исходным дележом. Как видно, данное правило деления не удовлетворяет условию совместимости.

Все рассмотренные нами задачи о банкротстве могут быть представлены в виде игры $(N; v)$, где N — множество кредиторов, а характеристическая функция, v, определяется как:

$$v(S) = \{\text{Имущество минус сумма претензий кредиторов вне } S\}_+.$$

Пояснение. Сумма, причитающаяся всем участникам из S, равна той величине, что осталась после того, как претензии всех кредиторов не из S были полностью удовлетворены. Таким образом, кредиторы из S могут гарантировать себе эту сумму. Если разница между двумя величинами оказывается отрицательной, то мы полагаем $v(S) = 0$, таков математический смысл знака + в вышеуказанной формуле.

Представим рассмотренный нами пример в виде игры $(N; v)$: стоимость имущества составляет 250 единиц, кредиторы 1, 2 и 3 требуют 100, 200 и 300 единиц соответственно.

$N = \{1, 2, 3\}$

$v(1) = [250 - (200 + 300)]_+ = 0$

$v(2) = [250 - (100 + 300)]_+ = 0$

$v(3) = [250 - (100 + 200)]_+ = 0$

$v(1, 2) = [250 - 300]_+ = 0$

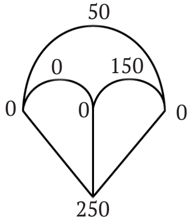
$v(1, 3) = [250 - 200]_+ = 50$

$v(2, 3) = [250 - 100]_+ = 150$

$v(1, 2, 3) = [250 - 0]_+ = 250$

$v(\varnothing) = [250 - (100 + 200 + 300)]_+ = 0$

Игра может быть изображена в виде схемы:



Найдем вектор Шепли для данной игры.

Порядок / Кредиторы	1	2	3	
123	0	0	250	
132	0	200	50	
213	0	0	250	
231	100	0	150	
312	50	200	0	
321	100	150	0	
	$(250, 550, 700) : 6 = (41^2/_3, 91^2/_3, 116^2/_3)$			

Как видно, вектор Шепли для данной игры в точности совпадает с решением О'Нейла.

4.17. Упражнения

1. Используя правило О'Нейла, разделите имущество стоимостью 400 единиц между тремя кредиторами, претендующими на 100, 200 и 300 единиц.

2. Используя правило О'Нейла, разделите имущество стоимостью 500 единиц между четырьмя кредиторами, претендующими на 100, 150, 200 и 250 единиц.

3. Рассмотрим задачу о банкротстве с оценкой имущества в 500 единиц и претензиями на 100, 300 и 400 единиц. Представьте задачу в виде кооперативной игры и найдите ее вектор Шепли. Докажите, что процедура О'Нейла приводит к тому же дележу.

4. Рассмотрим задачу о банкротстве с оценкой имущества в 700 единиц и претензиями на 200, 250, 300 и 400 единиц. Представьте задачу в виде кооперативной игры и найдите ее вектор Шепли. Докажите, что процедура О'Нейла приводит к тому же дележу.

5 (1) Используя правило О'Нейла, разделите имущество стоимостью 200 единиц между четырьмя кредиторами, претендующими на 50, 100, 150 и 200 единиц.
(2) На примере пары кредиторов докажите, что правило О'Нейла не удовлетворяет условию совместимости.

6 (1) Используя правило О'Нейла, разделите имущество стоимостью 300 единиц между четырьмя кредиторами, претендующими на 80, 120, 200 и 280 единиц.
(2) Представьте задачу в виде кооперативной игры.
(3) На примере тройки кредиторов докажите, что правило не удовлетворяет условию совместимости.

4.18. Обсуждение

В данной главе мы рассмотрели четыре различных правила дележа имущества между кредиторами для случаев, когда сумма всех претензий превышает стоимость этого имущества. Отметим, что некоторые из этих правил широко используются в повседневной жизни. К примеру, пропорциональный дележ применяется при разделе имущества компании-банкрота. Решение О'Нейла для ситуаций «набегов на банки», которое совпадает с вектором Шепли для соответствующей характеристической функции, может рассматриваться в качестве инструмента прогнозирования того, что произойдет в случае, если участники действительно побегут в банк, причем предсказать порядок их прибытия в этот банк заранее не представляется возможным. Описанное в Талмуде правило рабби Натана может пригодиться, если игроки хотят разделить спорную часть долгов поровну.

Можно ли сказать, что какое-то из правил лучше остальных? Безусловно нет, поскольку считается, что каждое из них подходит лишь к определенным ситуациям.

Если мы не можем утверждать, что какое-либо решение универсально, то какое из них стоит рекомендовать при возникновении нестандартных ситуаций? Несмотря на то, что каждое решение способно пролить свет на различные стороны проблемы, обычно приходится выбирать какое-нибудь одно. Таким образом, какими критериями стоит руководствоваться в повседневной жизни, выбирая способ дележа? Мы можем дать лишь общие рекомендации:

(a) Обратите внимание на аксиомы и свойства, характерные для каждого из решений, и поймите, какие из них больше соответствуют случаю. К примеру, требование совместимости зачастую оказывается логичным. Именно его наличие служит поводом сделать выбор в пользу пропорционального деления, решения рабби Натана, описанного в Талмуде, и других.

(b) Обратите внимание, как игроки ведут себя на самом деле. Возможно, для них характерен «набег на банки», и в этом случае хорошо подойдет решение О'Нейла или вектор Шепли, которые помогут спрогнозировать конечный дележ.
(c) В сложных ситуациях предложите игрокам более простую задачу, для которой они смогут найти осмысленное решение, к примеру, вариант с двумя участниками. Попытайтесь на основе их выбора выяснить, на какой из аспектов упрощенной версии они обращают внимание. После этого экстраполируйте решение на более сложные реальные ситуации.

По большому счету, любая глава этой книги — это попытка найти решение в определенной конфликтной ситуации, и в каждой из них мы обращали внимание на трудности, с которыми можно столкнуться при поиске оптимального решения. В первой главе о паросочетаниях анализировалось «слабое» условие устойчивости, которое все равно приводило к нескольким вариантам паросочетаний. Одни были привлекательными для мужчин, а другие — для женщин. Во второй главе мы пытались найти решение на основе голосования и убедились, что справедливое правило существует не всегда. Рассмотренное в третьей главе решение оказалось, пожалуй, самым эффективным. Оно соответствует предположению о беспристрастности арбитра и базируется на логичной системе аксиом. Однако из других систем аксиом, речь о которых не шла в нашей книге, вытекают другие решения. Наконец, в четвертой главе рассматривались споры, возникающие при банкротстве, и нам удалось доказать, что даже для такого простого случая нельзя найти универсальное решение.

В заключение отметим, что различные правила хорошо адаптированы к многочисленным реальным ситуациям, но нет универсального решения, которое годилось бы на все случаи жизни. Каждое из них дает лишь некоторое представление о реальной ситуации.

4.19. Упражнения на повторение

1. Умер человек, его имущество оценивается в 500 денежных единиц. У покойного было два кредитора, которые претендуют на 350 и 300 единиц соответственно. Разделите имущество между ними по принципу спора об одежде, по правилу дележа Рифа, по правилу пропорционального дележа и по правилу дележа О'Нейла.

2. Имущество банкрота оценивается в 1000 денежных единиц. У него четыре кредитора, претендующих на 200, 300, 400 и 500 единиц соответственно. Разделите имущество между ними по принципу спора об одежде, по правилу дележа Рифа, по правилу пропорционального дележа и по правилу дележа О'Нейла.

3 (1) Разделите имущество стоимостью 800 единиц между шестью кредиторами, претендующими на 50, 100, 150, 200, 250 и 300 единиц, используя принцип спора об одежде, правило дележа Рифа, правило пропорционального дележа и правило дележа О'Нейла.
(2) Проверьте, что суммарная денежная величина внутри группы кредиторов с требованиями на 50, 150, 250 и 300 единиц будет поделена в соответствии с дележами, упомянутыми в 3(1).

4 (1) Разделите имущество стоимостью 700 единиц между четырьмя кредиторами, претендую-

щими на 100, 200, 250 и 350 единиц, используя принцип спора об одежде, правило дележа Рифа, правило пропорционального дележа и правило дележа О'Нейла

(2) Для каждого из правил в 4(1) проверьте, что дележ для группы кредиторов, претендующих на 100, 250 и 350 единиц, удовлетворяет условию совместимости.

5. Рассмотрим задачу о банкротстве с оценкой имущества в 800 единиц и претензиями на 200, 300 и 400 единиц. Представьте задачу в виде кооперативной игры и найдите ее вектор Шепли. Докажите, что дележ по правилу О'Нейла приводит к тому же результату.

Приложение. Ответы к упражнениям

Ответы к Главе 1

1.3

1. i. Устойчива.
1. ii. Неустойчива.

2. i. Неустойчива.
2. ii. Неустойчива.
2. iii. Неустойчива.
2. iv. Устойчива.

3 (1) Устойчива.
3 (2) Неустойчива (*Bc*).

4 (1) i. Устойчива. Все мужчины оказываются в паре с наиболее предпочтительными для них женщинами.

4 (1) ii. Устойчива. Каждый мужчина в паре с той, кого ставит на второе место в своем списке предпочтений, и оказывается на пятом месте в рейтинге своей наиболее предпочтительной партнерши.

4 (1) iii. Устойчива. Все мужчины и женщины оказываются в паре с теми, кто находится на третьем месте в их рейтинге, и любое изменение ухудшает ситуацию.

4 (1) iv. Устойчива. Каждая женщина оказывается в паре с партнером, который стоит на втором месте в ее списке предпочтений, и на пятом месте у того, кого ставит на первое место.

4 (2) Структура предпочтений циклическая, такая, что и в рейтинге мужчин, и в рейтинге женщин есть расхождение в одну позицию, но эти расхождения противоположно направлены. Например, женщины, стоящие на первом месте в списке предпочтений мужчин, ставят их, соответственно, на пятое место, а второй наилучший выбор всех мужчин — это женщины, которые ставят этих мужчин на четвертое место, и т. д.

1.5

1. Да

$$\begin{pmatrix} a & b \\ | & | \\ c & d \end{pmatrix}$$

2. Нет

3. Да

$$\begin{pmatrix} a & b \\ | & | \\ d & c \end{pmatrix}$$

4. Да

$$\begin{pmatrix} a & b \\ | & | \\ d & c \end{pmatrix}$$

1.7

1

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

2

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

3 (1)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}$$

3 (2)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ b & c & d & e & a \end{pmatrix}$$

1.11

1

$$\begin{pmatrix} A & B & C & - \\ | & | & | & | \\ b & c & a & d \end{pmatrix}$$

2 (1)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ b & c & a & - & - \end{pmatrix}$$

2 (2)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ c & b & a & - & - \end{pmatrix}$$

3

$$\begin{pmatrix} A & B & C & - \\ | & | & | & | \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$$

4. i. Неустойчива (*Aa*).
4. ii. Устойчива.
4. iii. Неустойчива (*Ac*).
4. iv. Неустойчива (*Bc*).
4. v. Неустойчива (*Bc*).
4. vi. Устойчива.

Других систем не существует. В обществе 3 × 3 имеется 3! = 6 систем паросочетаний.

5 (1)

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

5 (2)

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

6 (1)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & - & - \\ | & | & | & | & | \\ b & a & - & d & c \end{pmatrix}$$

6 (2)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & - & - \\ | & | & | & | & | & | \\ c & d & a & - & b & e \end{pmatrix}$$

7 (1) Сватовство со стороны мужчин:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & - & - \\ | & | & | & | & | & | \\ c & d & a & - & b & e \end{pmatrix}$$

При сватовстве со стороны женщин будет получена такая же система.

7 (2) Получается та же система, что и при сватовстве стороны мужчин в 7 (1).

При сватовстве со стороны женщин будет получена такая же система.

8

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ a & c & b \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

9

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ c & d & a & b \end{pmatrix}$$

1.13

1

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ a,\ c & b,\ e & i,\ n,\ l \\ d & k,\ g & j,\ o,\ h \end{pmatrix}$$

m, f не зачислены.

2

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ a,\ c,\ h,\ j & e,\ g & m,\ n & p,\ r & b \\ k,\ l,\ t & & & s & \end{pmatrix}$$

d, *f*, *i*, *o*, *q* не зачислены.

3 (1)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ c,\ e,\ g & b,\ d & h & i,\ j & a \end{pmatrix}$$

3 (2). Распределение совпадает с 3 (1).

1.15

2 (1) Союз не со всеми женщинами возможен для господина *d*. Союз с госпожой *C* невозможен для г-на *d*.

2 (2) Для г-на *a* возможен союз с г-жой *A* и г-жой *D*.

2 (3) Для г-жи *A* возможен союз с *a* и *d*.

Для г-жи *C* возможен союз с *b* и *c*.

Для г-жи *D* возможен союз с *a*, *c* и *d*.

3 (1) Союз с *A* невозможен для *a*.

3 (2) Союз с *A* возможен для *b*.

3 (3) Союз с *B* возможен для *b*.

4 (1)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ e & b & a & c & d \end{pmatrix}$$

4 (2)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ d & e & b & a & c \end{pmatrix}$$

4 (3) Нет

5 (1)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & - \\ | & | & | & | \\ a & d & b & c \end{pmatrix}$$

5 (2) Та же система паросочетаний, что и в 5 (1).

6

(1)

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

Система (1) не оптимальна для мужчин в исходной системе предпочтений, поскольку система (2) выгоднее для г-на *a*, так как *C* он предпочитает *B*.

7 (1)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

1.17

1. Да

2. Нет
Система, оптимальная для мужчин

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & - \\ | & | & | & | & | \\ e & c & b & a & d \end{pmatrix}$$

Система, оптимальная для женщин

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & - \\ | & | & | & | & | \\ b & a & c & e & d \end{pmatrix}$$

3. Да

4. Нет

$$\begin{pmatrix} A & B & C & - \\ | & | & | & | \\ a & c & d & b \end{pmatrix}$$

1.19

1. Нет

2 (1)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$$

2 (2) Да

3 (1)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ - & a & b & c & - \end{pmatrix}$$

3 (2) Женщины A и E остались без пары. Они останутся без пары в любом случае.

4

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ | & | & | & | \\ a & d & b & c \end{pmatrix}$$

5 (1) Система, полученная при сватовстве со стороны мужчин:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Система, полученная при сватовстве со стороны женщин:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

5 (2) При сватовстве со стороны мужчин та же самая система возникнет в любом случае, но при сватовстве со стороны женщин также может быть получена система:

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ | & | & | \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

6

$$\begin{pmatrix} A & B & C & - \\ | & | & | & | \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} A & B & C & - \\ | & | & | & | \\ b & a & c & d \end{pmatrix}$$

7 (1)

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ | & | & | & | & | \\ c & b & e & a & d \end{pmatrix}$$

7 (3) Нет

Ответы к Главе 2

2.3

1 (1)

x: вернуть деньги студентам

y: купить билеты в театр

z: устроить вечеринку по случаю окончания учебного года

1	2	3
x	y	z
y	z	y
z	x	x

1 (2)

$$\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

2 (1)

p: пицца

s: сэндвич

h: гамбургер

b: буррито

t: тако

f: фалафель

$$\begin{pmatrix} t \\ h \\ f \\ b \\ p \\ s \end{pmatrix}$$

2 (2) Да

2 (3) $\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}$ является избыточной информацией, так как это следует из аксиомы транзитивности предпочтений.

3 (1)
x: кино
y: театр
z: танцы
p: шоу
q: чтение
r: концерт
w: ТВ

$$\begin{pmatrix} w \\ q \\ r \\ x \\ y \\ z \\ p \end{pmatrix}$$

3 (2) $\begin{pmatrix} w \\ y \end{pmatrix}$ является избыточной информацией, так как это следует из аксиомы транзитивности предпочтений.

4. Сара предпочитает Баха Шопену.

5 (1) Наиболее предпочтительный вариант: яичница-болтунья.

5 (2) Недостаточно информации для того, чтобы указать позицию в списке предпочтений для варианта «яйца всмятку». Необходимо уточнить предпочтения в парах «яйцо всмятку — яйцо вкрутую», и «яйцо всмятку — яичница-глазунья».

5 (3) Противоречит предположению *A*, так как из аксиомы транзитивности следует, что яичница-глазунья предпочитается яичнице-глазунье.

6 (1) Наиболее предпочтительный вариант: научная фантастика.

6 (2) Что предпочтительнее:

(i) комедия или вестерн?

(ii) комедия или научная фантастика?

6 (3) Возникает противоречие: боевик предпочитается фильму ужасов, но из аксиомы транзитивности следует обратное. Аналогично, фильм ужасов предпочитается вестерну, а из аксиомы транзитивности следует обратное.

7 (1) Кофе или капучино.

7 (2) Кофе.

7 (3) Капучино.

2.4

I (1)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ z \end{pmatrix}$$

I (2) Нет решения.

III

$$\begin{pmatrix} t \\ z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

IV (1) Нет решения.

IV (2)

$$\begin{pmatrix} t \\ z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

V. Упр. 1 (1)

$$\begin{pmatrix} x & \sim & z \\ & y & \end{pmatrix}$$

V. Упр. 1 (2)

$$\begin{pmatrix} x & \sim & y & \sim & z \end{pmatrix}$$

V. Упр. 1 (3)

$$\begin{pmatrix} & y & \\ x & \sim & z \end{pmatrix}$$

V. Упр. 1 (4) Нет решения.

V. Упр. 2 (1)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

V. Упр. 2 (2) Нет решения

VI (1)

(i)

$$\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

VI (2) В (ii) предпочтение отдается z.

VI (3) Общество предпочитает z всем альтернативам, однако произошло изменение в его предпочтениях относительно x и y, несмотря на то, что не было изменений в его предпочтениях относительно этих альтернатив в системе предпочтений.

VI (4) Мы не рекомендуем это правило, поскольку сдвиг предпочтений в сторону z повлияет на то, к чему не имеет отношения.

VII (1)

(i)

$$\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

VII (2) В структуре (ii) все индивиды x предпочитают y.

VII (3) Нет различий в общественных предпочтениях.

VII (4) Мы не рекомендуем использовать это правило, так как несмотря на то, что каждый индивид x предпочитает y, общество y предпочитает x.

2.6

1. Аксиома единогласия

2 (1) Нет решения

2 (2) Аксиома 1, гарантирующая существование общественного предпочтения для любого профиля предпочтений.

3 (1)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \sim t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \sim t \end{pmatrix}$$

3 (2) Аксиома единогласия

4 (1)

$$\begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

4 (2) Во втором профиле — сдвиг предпочтений в сторону y.

4 (3) Аксиома независимости от посторонних альтернатив.

5. Аксиома отсутствия диктатора

2.8

1 (1) Решение невозможно.

1 (2) По-прежнему нет решения.

1 (3) Недостаточно информации о паре y, z и/или о паре t, z.

2 (1) Невозможно предсказать общественное решение.

2 (2) По-прежнему не хватает информации.

2 (3)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

3 (1) Нет решения.

3 (2)

$$\begin{pmatrix} x \\ z \\ t \\ y \end{pmatrix}$$

3 (3)

$$\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \\ t \end{pmatrix}$$

2.11

1 (1) Нет решения.

1 (2)

$$\begin{pmatrix} x \sim t \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

2 (1) Нет решения.

2 (2)

$$\begin{pmatrix} x \sim z \\ y \end{pmatrix}$$

2 (3)

$$\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

2 (4) Нет решения.

3 (1) i. Нет решения. Нарушена Аксиома 1.

3 (1) ii.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \sim t \end{pmatrix}$$

3 (1) iii.

$$\begin{pmatrix} y \\ x \\ z \sim t \end{pmatrix}$$

3 (2) Нарушена Аксиома 2.

4 $\begin{pmatrix} x \\ y \\ t \\ z \end{pmatrix}$

5 (1) Нет решения
5 (2) Не хватает информации о паре x, y.

6 (1) Нет
6 (2) Нет
6 (3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

Ответы к Главе 3

3.4

1. $v(1) = 2000 \quad v(2) = v(3) = 0 \quad v(\emptyset) = 0$
   $v(2,\ 3) = 0 \quad v(1,\ 2) = 2800 \quad v(1,\ 3) = 3000$
   $v(1,\ 2,\ 3) = 3000$

2. $v(1) = v(2) = v(3) = 0$
   $v(1,\ 2) = 0 \quad v(1,\ 3) = v(2,\ 3) = 50$
   $v(1,\ 2,\ 3) = 50$

3. $v(1) = v(2) = 100$
   $v(3) = v(4) = 0$
   $v(1,\ 2) = v(3,\ 4) = 0$
   $v(1,\ 3) = v(1,\ 4) = v(2,\ 3) = v(2,\ 4) = 150$
   $v(1,\ 2,\ 3) = v(1,\ 2,\ 3) = 250$
   $v(2,\ 3,\ 4) = v(1,\ 3,\ 4) = 150$
   $v(1,\ 2,\ 3,\ 4) = 300$

4. $v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(5) = 0$
$v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(4, 5) = 0$
$v(1, 4) = v(1, 5) = v(2, 4) = v(2, 5) = v(3, 4) =$
$= v(3, 5) = 100$
$v(1, 2, 3) = 0$
$v(1, 2, 4) = v(1, 2, 5) = v(1, 3, 4) = v(1, 3, 5) =$
$= v(2, 3, 4) = v(2, 3, 5) = v(3, 4, 5) = v(1, 4, 5) =$
$= v(1, 2, 5) = 100$
$v(1, 2, 3, 4) = v(1, 2, 3, 5) = 100$
$v(1, 2, 4, 5) = v(1, 3, 4, 5) = v(2, 3, 4, 5) = 200$
$v(1, 2, 3, 4, 5) = 200$

3.8

1 (1) $v(1) = v(2) = v(3) = 0$
$v(2, 3) = 0$
$v(1, 2) = v(1, 3) = v(1, 2, 3) = 1$

1 (2) $v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = 0$
$v(2, 3) = v(2, 4) = v(3, 4) = 0$
$v(1, 2) = v(1, 3) = v(1, 4) = v(1, 2, 3) =$
$= v(1, 2, 4) = v(1, 3, 4) = v(2, 3, 4) =$
$= v(1, 2, 3, 4) = 1$

1 (3) $v(1) = v(2) = v(3) = 0$
$v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1$

1 (4) $v(1) = v(2) = v(3) = 0$
$v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1$

1 (5) $v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = 0$
$v(1, 3) = v(2, 3) = v(3, 4) = 0$
$v(1, 2) = v(1, 4) = v(2, 4) = 1$
$v(1, 2, 3) = v(1, 2, 4) = v(2, 3, 4) = v(1, 3, 4) =$
$= v(1, 2, 3, 4) = 1$

1 (6) $v(1) = 1$

$v(2) = v(3) = v(4) = 0$

$v(2, 3, 4) = 0$

$v(2, 3) = v(2, 4) = v(3, 4) = 0$

$v(1, 2) = v(1, 3) = v(1, 4) = 1$

$v(1, 2, 3) = v(1, 2, 4) = v(1, 3, 4) =$

$= v(1, 2, 3, 4) = 1$

1 (7) $v(1) = v(2) = v(3) = 0$

$v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = v(1, 2, 3) = 1$

1 (8) $v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = 0$

$v(1, 4) = v(2, 4) = v(3, 4) = 0$

$v(1, 2) = v(1, 3) = v(2, 3) = 1$

$v(1, 2, 3) = v(1, 2, 4) = v(2, 3, 4) =$

$= v(1, 3, 4) = v(1, 2, 3, 4) = 1$

2 (1) [5; 2, 2, 1, 1, 1]

$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = v(5) = 0$

$v(1, 2) = v(1, 3) = v(1, 4) = v(1, 5) = v(2, 3) =$

$= v(2, 4) = v(2, 5) = v(3, 4) = v(3, 5) =$

$= v(4, 5) = 0$

$v(1, 2, 3) = v(1, 2, 4) = v(1, 2, 5) = 1$

$v(2, 3, 4) = v(2, 3, 5) = v(2, 4, 5) =$

$= v(3, 4, 5) = 0$

$v(1, 3, 4) = v(1, 3, 5) = v(1, 4, 5) = 0$

$v(1, 2, 3, 4) = v(1, 2, 3, 5) = v(1, 3, 4, 5) =$

$= v(1, 2, 4, 5) = v(2, 3, 4, 5) =$

$= v(1, 2, 3, 4, 5) = 1$

2 (2) [12; 5, 5, 3, 4]

$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = 0$

$v(1, 2) = v(1, 3) = v(1, 4) = v(2, 3) =$

$= v(2, 4) = v(3, 4) = 0$

$v(1, 2, 3) = v(1, 2, 4) = v(1, 3, 4) =$
$= v(2, 3, 4) = 1$
$v(1, 2, 3, 4) = 1$

2 (3) [80; 50, 40, 30]
$v(1) = v(2) = v(3) = 0$
$v(2, 3) = 0$
$v(1, 2) = v(1, 3) = v(1, 2, 3) = 1$

2 (4) [80; 35, 35, 35, 15]
$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = 0$
$v(1, 2) = v(1, 3) = v(1, 4) = v(2, 3) =$
$= v(2, 4) = v(3, 4) = 0$
$v(1, 2, 3) = v(1, 2, 4) = v(1, 3, 4) =$
$= v(2, 3, 4) = 1$
$v(1, 2, 3, 4) = 1$

3. $v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = 0$
$v(1, 2) = v(1, 3) = v(1, 4) = v(2, 3) =$
$= v(2, 4) = v(3, 4) = 0$
$v(1, 2, 3) = v(1, 2, 4) = v(1, 3, 4) =$
$= v(2, 3, 4) = 1$
$v(1, 2, 3, 4) = 1$

4 (1) Да
4 (2) Нет
4 (3) Да
4 (4) Нет
4 (5) Да

3.10

1 (1) Игроки 1 и 2 симметричны.
1 (2) Все игроки симметричны.
1 (3) Игроки 1 и 2 симметричны.

1 (4) Все игроки симметричны.
1 (5) Игроки 3 и 4 симметричны.
1 (6) Нет симметричных игроков.

2 (1) Все игроки симметричны.
2 (2) Игроки 1 и 2 симметричны.
2 (3) Игроки 2, 3 и 4 симметричны.
2 (4) Все игроки симметричны.
2 (5) Игроки 1, 2 и 3 симметричны.

3.12

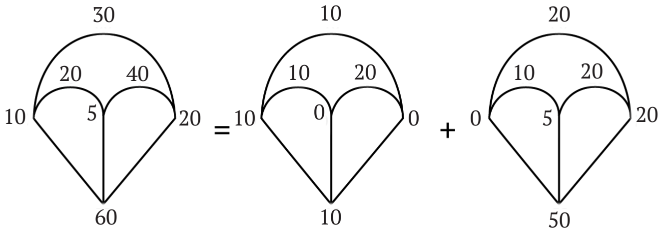
1 (1) Игрок 1 является болваном.
1 (2) В этом случае игрок 1 перестанет быть болваном.

2 (1) Игроки 1 и 2 болваны; игроки 3 и 4 симметричны.
2 (2) В этом случае игроки 1 и 2 перестанут быть болванами

3 (1) Игрок 4 является болваном.
3 (2) Игрок 4 является болваном.
3 (3) Игроки 4 и 5 являются болванами.

3.14

1



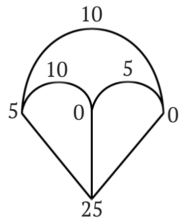
2. $(v + w)(1) = 5$ $\quad (v + w)(2) = 0$

$(v + w)(3) = 5$ $\quad (v + w)(1,\ 2) = 20$

$(v + w)(1,\ 3) = 35$ $\quad (v + w)(2,\ 3) = 30$

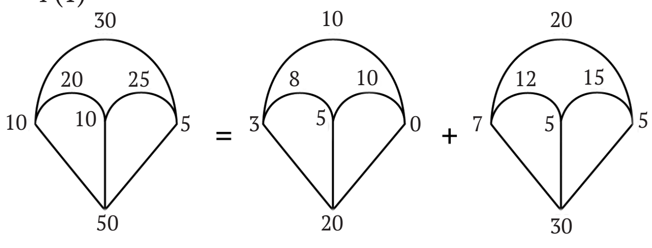
$v(1,\ 2,\ 3) = 70$

3 (1)



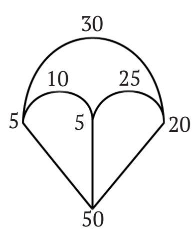
3 (2) Нет

4 (1)



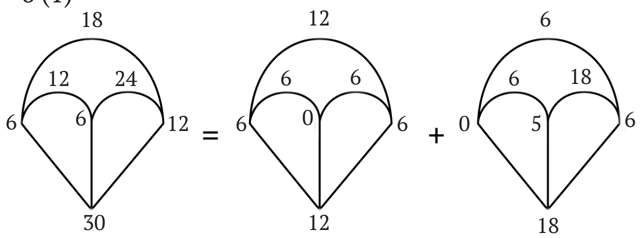
4 (2) Нет

5 (1)



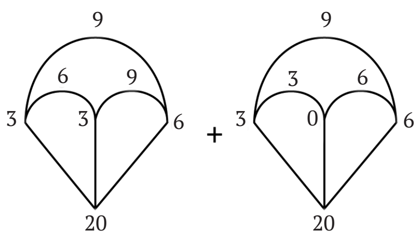
5 (2) Нет

6 (1)



6 (2) Да; игроки 2 и 3 симметричны, а игрок 1 — болван.

7



3.16

1. $\left(\dfrac{1}{2}, \ \dfrac{1}{2}\right)$

2. $\left(\dfrac{1}{3}, \ \dfrac{1}{3}, \ \dfrac{1}{3}\right)$

3 (1) (1, 0, 0, 0)

3 (2) $\left(\dfrac{1}{3}, \ \dfrac{1}{3}, \ \dfrac{1}{3}\right)$

3 (3) $\left(\dfrac{1}{3}, \ \dfrac{1}{3}, \ \dfrac{1}{3}, \ 0\right)$

4. $\left(116\frac{2}{3},\ 116\frac{2}{3},\ 66\frac{2}{3}\right)$

5. (11, 14, 23)

3.18

1. $\left(16\frac{2}{3},\ 36\frac{2}{3},\ 6\frac{2}{3}\right)$

2. (27, 36, 9)

3. (74, 30, 62, 74)

4. (26, 14, 20)

3.20

1 (1) $\left(116\frac{2}{3},\ 116\frac{2}{3},\ 66\frac{2}{3}\right)$

1 (2) (3, 12, 9)

1 (3) $\left(\frac{2}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right)$

1 (4) (11, 14, 23)

2. $\left(\frac{c}{2},\ \frac{c}{2}\right)$

3 (i) $\left(11\frac{5}{6},\ 7\frac{1}{3},\ \frac{5}{6}\right)$

3 (ii) (5, 5, 0)
3 (iii) (6, 12, 12)

3 (iv) $\left(6\frac{2}{3},\ 6\frac{2}{3},\ 6\frac{2}{3},\ 0\right)$

3 (v) (8, 8, 10, 10)

3.22

1. $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right)$

2. $\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{6}\right)$

3. $\left(\frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$

4. $\left(\frac{2}{5},\ \frac{3}{20},\ \frac{3}{20},\ \frac{3}{20},\ \frac{3}{20}\right)$

5. $\left(\frac{3}{10},\ \frac{3}{10},\ \frac{2}{15},\ \frac{2}{15},\ \frac{2}{15}\right)$

6. $\left(\frac{13}{60},\ \frac{13}{60},\ \frac{17}{120},\ \frac{17}{120},\ \frac{17}{120},\ \frac{17}{120}\right)$

7. $\left(\frac{3}{8},\ \frac{5}{56},\ \frac{5}{56},\ \frac{5}{56},\ \frac{5}{56},\ \frac{5}{56},\ \frac{5}{56},\ \frac{5}{56}\right)$

3.24

1. $\left(\frac{9}{16},\ \frac{7}{240},\ \ldots,\ \frac{7}{240}\right)$

2. $\left(\frac{15}{26},\ \frac{11}{650},\ \ldots,\ \frac{11}{650}\right)$

3. $\left(\frac{45}{76},\ \frac{31}{5700},\ \ldots,\ \frac{31}{5700}\right)$

4. $\left(\frac{3}{11}, \frac{3}{11}, \frac{1}{22}, ..., \frac{1}{22}\right)$

5. $\left(\frac{11}{42}, \frac{11}{42}, \frac{1}{42}, ..., \frac{1}{42}\right)$

6. $\left(\frac{21}{82}, \frac{21}{82}, \frac{1}{82}, ..., \frac{1}{82}\right)$

3.26

1. $\frac{10!\cdot 7!}{2!\cdot 15!} = \frac{1}{143} \sim 0,7\%$

2. $\frac{6!\cdot 6!}{1!\cdot 11!} = \frac{1}{77} \sim 1,29\%$

3. $\frac{6!\cdot 5!}{11!} = \frac{1}{462} \sim 0,2\%$

3.28

1. (15, 15, 20)

2. (6, 28, 30)

3. (6, 11, 11, 16, 17, 18)

4. (1400, 1400, 1400, 1400, 1400, 1500, 1500, 1500, 2100, 2100, 2100, 2100, 2100)

5 (1) $c(L_1) = 120\,000$ $\quad$ $c(L_1, L_2) = 120\,000$
$c(L_1, H) = 200\,000$ $\quad$ $c(M_1, M_2, H) = 200\,000$

5 (2) (200, 200, 350, 350, 350, 550)

3.29

1 (1) $v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = 0$

$v(1,\ 2) = 1$ $\quad v(1,\ 3) = 1$ $\quad v(1,\ 4) = 0$

$v(2,\ 3) = 1$ $\quad v(2,\ 4) = 0$ $\quad v(3,\ 4) = 0$

$v(1,\ 2,\ 3) = 1$ $\quad v(1,\ 2,\ 4) = 1$ $\quad v(2,\ 3,\ 4) = 1$

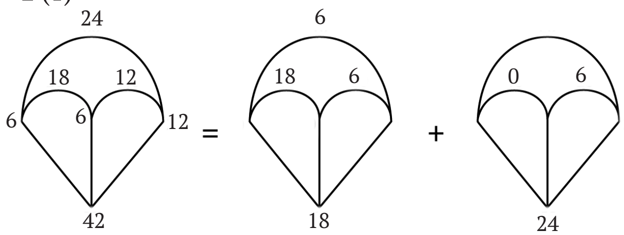
$v(1,\ 3,\ 4) = 1$ $\quad v(1,\ 2,\ 3,\ 4) = 1$

1 (2) Да. $X_1 = X_2 = X_3$

1 (3) Да. Игрок 4.

1 (4) $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right)$

2 (1)



2 (2) Нет

3. $\left(\frac{3}{4},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{12}\right)$

4. $\left(58\frac{1}{3},\ 58\frac{1}{3},\ 33\frac{1}{3}\right)$

5. (16, 19, 25)

6. $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\right)$

7 (2) (8, 14, 20)

8. $\left(\frac{7}{30},\ \frac{7}{30},\ \frac{4}{30},\ \frac{4}{30},\ \frac{4}{30},\ \frac{4}{30}\right)$

Ответы к Главе 4

4.3

1. $\left(87\frac{1}{2},\ 62\frac{1}{2}\right)$

2. (130, 70)

3. (100, 100)

4. (210, 90)

5. Нет; (200, 300)

6. (125, 75)

7. Да

4.7

1. Да

2. Да

3. Да

4. Да. Это вдовы, претендующие на 200 и 300 единиц соответственно.

5. Это пара, претендующая на 200 и 300 единиц.

6. Да

7. Да

8. Кредиторы, претендующие на 150 и 300 единиц.

9. Да

10. Нет

4.10

1. $\left(66\frac{2}{3},\ 166\frac{2}{3},\ 266\frac{2}{3}\right)$

2. $\left(33\frac{1}{3},\ 83\frac{1}{3},\ 183\frac{1}{3}\right)$

3. (25, 50, 75, 80)

4. $\left(40,\ 63\frac{1}{3},\ 103\frac{1}{3},\ 143\frac{1}{3}\right)$

5. (25, 55, 105, 155, 205, 255)

6. (35, 50, 80, 110, 125)

8. Нет

9. Дележи во втором и пятом столбцах не совместимы с принципом спора об одежде.

4.12

1 (1) $\left(25,\ 108\frac{1}{3},\ 158\frac{1}{3},\ 258\frac{1}{3}\right)$

1 (2) Да

2 (1) (25, 40, 50, 70, 100, 115)
2 (2) Да

3 (1) $\left(50,\ 75,\ 123\frac{3}{4},\ 183\frac{3}{4},\ 223\frac{3}{4},\ 243\frac{3}{4}\right)$

3 (2) Да

4.14

1. (50, 75, 75, 75)

2. (50, 100, 125, 125)

3 (1) (100, 150, 180, 180, 180)

4 (1) (40, 60, 80, 110, 110)

4.17

1. $\left(66\frac{2}{3},\ 116\frac{2}{3},\ 216\frac{2}{3}\right)$

2. $\left(70\frac{5}{6},\ 104\frac{1}{6},\ 137\frac{1}{2},\ 187\frac{1}{2}\right)$

3. $v(1) = v(2)$ $\quad v(3) = 0$
$v(1,\ 2) = 100$ $\quad v(1,\ 3) = 200$
$v(2,\ 3) = 400$ $\quad v(1,\ 2,\ 3) = 500$
$\left(66\frac{2}{3},\ 166\frac{2}{3},\ 266\frac{2}{3}\right)$

4. $\left(116\frac{2}{3},\ 150,\ 183\frac{1}{3},\ 250\right)$
$v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = 0$
$v(1,\ 2) = 0$ $\quad v(1,\ 3) = 50$
$v(1,\ 4) = 150$ $\quad v(2,\ 3) = 100$
$v(2,\ 4) = 200$ $\quad v(3,\ 4) = 250$
$v(1,\ 2,\ 3) = 300$ $\quad v(1,\ 2,\ 4) = 400$
$v(2,\ 3,\ 4) = 500$ $\quad v(1,\ 3,\ 4) = 450$
$v(1,\ 2,\ 3,\ 4) = 700$

5 (1) $\left(20\frac{5}{6},\ 37\frac{1}{2},\ 62\frac{1}{2},\ 79\frac{1}{6}\right)$

6 (1) $\left(35,\ 51\frac{2}{3},\ 91\frac{2}{3},\ 121\frac{2}{3}\right)$

6 (2) $v(1) = v(2) = v(3) = v(4) = 0$

$v(1,\ 2) = v(1,\ 3) = v(1,\ 4) = v(2,\ 3) = 0$

$v(2,\ 4) = 20 \qquad v(3,\ 4) = 100$

$v(1,\ 2,\ 3) = 20 \qquad v(1,\ 2,\ 4) = 100$

$v(1,\ 3,\ 4) = 180 \qquad v(2,\ 3,\ 4) = 220$

$v(1,\ 2,\ 3,\ 4) = 300$

4.19

1. $(225, 275), (250, 250), \left(230\frac{10}{13},\ 269\frac{3}{13}\right), (225, 275)$

2. $(100, 200, 300, 400), \left(200,\ 266\frac{2}{3},\ 266\frac{2}{3},\ 266\frac{2}{3}\right),$

$\left(142\frac{6}{7},\ 214\frac{2}{7},\ 285\frac{5}{7},\ 357\frac{1}{7}\right),$

$\left(141\frac{2}{3},\ 208\frac{1}{3},\ 270\frac{5}{6},\ 379\frac{1}{6}\right)$

3. $\left(25,\ 50,\ 106\frac{1}{4},\ 156\frac{1}{4},\ 206\frac{1}{4},\ 256\frac{1}{4}\right),$

$\left(50,\ 100,\ 150, 166\frac{2}{3}, 166\frac{2}{3}, 166\frac{2}{3}\right),$

$\left(38\frac{2}{21}, 76\frac{4}{21}, 114\frac{6}{21}, 152\frac{8}{21}, 190\frac{10}{21}, 228\frac{12}{21}\right)$

4 (1) $(100, 200, 200, 200), (100, 200, 200, 200),$

$\left(77\frac{7}{9}, 155\frac{5}{9}, 194\frac{4}{9}, 272\frac{2}{9}\right)$

5. $v(1) = 100$ $\quad v(2) = 200$

$v(3) = 300$ $\quad v(1, 2) = 400$

$v(1, 3) = 500$ $\quad v(2, 3) = 600$

$v(1, 2, 3) = 800$

$$\left(166\frac{2}{3},\ 266\frac{2}{3},\ 366\frac{2}{3}\right)$$

Литература

Соболев А. И. Характеризация принципов оптимальности в кооперативных играх посредством функциональных уравнений // Математические методы в социальных науках. 1975. № 6. С. 94–151.

Эрроу К. Дж. Коллективный выбор и индивидуальные ценности. М.: ГУ–ВШЭ, 2004.

Arrow K. J. Social Choice and Individual Values. New York: J. Wiley, 1951.

Aumann R. J., Maschler M. Game-Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud // Journal of Economic Theory. 1985. Vol. 36. P. 195–213.

Gale D. The Two-Sided Matching Problem: Origin, Development and Current Issues // International Game Theory Review. 2001. Vol. 3. P. 237–252.

Gale D., Shapley L. S. College Admissions and the Stability of Marriage // American Mathematical Monthly. 1962. Vol. 69. P. 9–15.

Harsanyi J. C. A Bargaining Model for the Cooperative n-person Cooperative Game // Contributions to the Theory of Games IV. Annals of Mathematics Studies 40 / A. W. Tucker, R. D. Luce (eds). Princeton: Princeton University Press, 1959. P. 325–355.

Kaminski M. M. Hydraulic Rationing // Mathematical Social Sciences. 2000. Vol. 40. P. 131–155.

Maschler M. The Worth of a Cooperative Enterprise to Each Member // Games, Economic Dynamics and Time Series Analysis /

M. Diestler, E. Furst, G. Schwodiauer (eds). New York: Springer, 1982. P. 67–73.

Milnor J., Shapley L. S. Values of Large Games II: Oceanic Games // The Rand Corporation, Memorandum RM-2649. 1961.

O'Neill B. A Problem of Rights Arbitration from the Talmud // Mathematical Social Sciences. 1982. Vol. 2. P. 345–371.

Roth A. E., Sotomayor M. Two-Sided Matching: A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

Schmeidler D. The Nucleolus of a Characteristic Function Game // SIAM Journal of Applied Mathematics. 1969. Vol. 17. P. 1163–1170.

Shapley L. S. A Value for n-person Games // Contributions to the Theory of Games II / H. Kuhn, A. W. Tucker (eds). Princeton: Princeton University Press, 1953. P. 307–317.

Shapley L. S., Shubik M. A Method for Evaluation of the Distribution of Power in a Committee System // The American Political Science Review. 1954. Vol. 48. P. 787–792.

Алфавитный указатель

А

Б

В

Г

Д

З

И

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Х

Э

Научное издание

Эйн-Я Гура, Майкл Машлер

Экскурс в теорию игр:
нетипичные математические сюжеты

Главный редактор *В. В. Анашвили*
Заведующая редакцией *Ю. В. Бандурина*
Выпускающий редактор *Е. В. Попова*
Литературный редактор *А. А. Бялко*
Редактор *К. Г. Заманская*
Художник *В. П. Вертинский*
Оригинал-макет *О. З. Элоев*
Верстка *А. И. Попов*

Подписано в печать 01.11.2016. Формат 84×108/32
Гарнитура PT Serif Pro. Усл. печ. л. 16,8
Тираж 1000 экз. Изд. № 900. Заказ №

Издательский дом «Дело» РАНХиГС
119571, Москва, пр-т Вернадского, 82
Коммерческий центр — тел. (495) 433-25-10, (495) 433-25-02
delo@ranepa.ru, www.ranepa.ru

ISBN 978-5-7749-1198-1
9 785774 911981