Арлазаров Виктор Владимирович, Татаринцев Андрей Владимирович, Тиханина Ирина Геннадиевна, Чекалкин Николай Степанович

Лекции по математике для физико-математических школ: Часть I. Учебное пособие. М.: Издательство ЛКИ, 2007. — 208 с.

Настоящее пособие предназначено для тех, кто хочет подготовиться к всту- ...ным экзаменам по математике, и для слушателей физико-математических ... Книга содержит большое количество теоретического материала и разо- ...ных примеров. В конце каждой лекции приведены задачи для аудиторной ...стоятельной работы с ответами.

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук *А. В. Усков*;
кандидат физико-математических наук *О. В. Бабурова*

Издательство ЛКИ. 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печ. л. 13. Зак. № 893.
Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, д. 11А, стр. 11.

978-5-382-00082-4

Введение.

Этот курс лекций написан для слушателя физико-математической школы, готовящегося к вступительным экзаменам по математике или к ЕГЭ, его преподавателя и для абитуриента, самостоятельно готовящегося к вступительным испытаниям. Он содержит 7 лекций, включающих в себя темы: числа, множества, комбинаторику, многочлены, рациональные уравнения и неравенства, системы рациональных уравнений и неравенств, модули. Структура лекций позволяет работать с ними непосредственно ученику или преподавателю, который читает лекции и ведет практические занятия с группой учеников. Каждая лекция содержит теоретический материал с большим количеством подробно рассмотренных примеров и полный набор задач как для проведения практического занятия в аудитории, так и для задания на дом.

Отметим то, что важно для работы с этим курсом и понимания его цели.

Решение каждой задачи, разобранной в лекции, представляет собой метод решения большого класса задач. Этот метод повторяется и углубляется в последующих задачах и в последующих лекциях. Большое количество решенных задач в каждой лекции позволяет создать достаточную базу методов решения, охватывающих практически все, что встречается на вступительных испытаниях по этим темам.

В каждой лекции разбираются задачи разного уровня сложности. От простых, повторяющих школьную программу задач (таких немного), до сложных задач, решение которых обеспечивает хорошую и отличную оценку на вступительных экзаменах (основная часть задач).

Идеология этого курса лекций отвергает способ обучения, при котором решается большое количество однотипных задач. Авторы полагают, что работа по выбору метода решения, а затем и непосредственная реализация избранного пути при решении даже одной непростой задачи принесет куда большую пользу.

Многие из задач, предлагающихся в курсе можно назвать нестандартными. Но обычно то, что какое-то время назад было «изюминкой» в решении задачи вступительного экзамена, начинает перениматься другими авторами и затем встречается в решении множества других задач. Наконец этим методом решения овладевают массы учеников и «изюминка» входит в систему подготовки как стандартный метод решения какой-то группы задач. Можно считать, что и в этом курсе многие нестандартные методы нашли свое систематизированное изложение.

Книгу можно использовать в различных вариантах обучения: преподавателем, читающим лекции и (или) ведущим практические занятия в физико-математической школе, слушателем этих школ, абитуриентам, самостоятельно готовящимся к вступительным испытаниям по математике. В виду большого количества разобранных задач ее можно использовать как справочник в случае возникновения затруднений у абитуриента в данных темах.

В последнее время, наряду с обычными вступительными экзаменами, централизованным тестированием и ЕГЭ, все большую роль, как вступительные испытания, играют олимпиады различного уровня. Грань между задачами на отличную оценку вступительных испытаний и олимпиадными задачами не всегда различима. Этот курс поможет подготовиться и к олимпиадам, так как содержит много теоретического и практического материала, необходимого для такой подготовки.

Лекции разбиты на достаточно большое количество параграфов и пунктов, по названиям которых легко можно найти интересующий раздел или метод решения. В параграф « Задачи для разбора с преподавателем» выделены задачи для решения в аудитории на практическом занятии с преподавателем. При самостоятельной подготовке их нужно решать, основываясь на примерах, разобранных в лекциях. В параграф «Задачи для самостоятельного решения» включены задачи для домашнего задания и составления контрольных работ преподавателем. Он также является источником задач, если их не хватает для аудиторной работы и для повторения при самостоятельной подготовке. Для контроля преподавателем или самоконтроля ко всем задачам даны ответы.

Широко известно, что знаний по математике хорошего выпускника большинства школ не достаточно для успешного поступления в обычный ВУЗ. Но у среднего выпускника школы их не достаточно даже для начала обучения по программе подготовки к вступительным экзаменам. Для многих слушателей подготовительных курсов и подобных программ обучения актуальной задачей является овладение программой средней школы по математике, начиная с действий с дробями и правил раскрытия скобок. Уже долгое время система довузовской подготовки без серьезной государственной поддержки и благодаря качественному преподавательскому составу с большим трудом закрывает эту дыру в школьном образовании и даже подтягивает уровень среднего выпускника до приемлемого. Но учебный курс не может растягиваться до столь различных полюсов, как низший школьный уровень и уровень отличных оценок на вступительном экзамене. Сложившаяся ситуация требует выбора между курсом, рассчитанным на абитуриента, более или менее приемлемо владеющего школьной программой, и курсом для абитуриента, нуждающегося в дополнительном обучении в рамках школьной программы. Курс лекций, изложенный в данной книге, предполагает, что основными методами решения задач в рамках программы общеобразовательных школ читатель владеет достаточно хорошо..»

Книга написана преподавателями физико-математической школы МИРЭА, основателем, директором и вдохновителем которой был Александр Григорьевич Кисунько. Многие его идеи нашли воплощение в этой книге.

Часть задач курса являются авторскими. Другая часть взята из сборников задач Моденова П.С., Сивашинского И.Х., Шабунина М.И., Шарыгина И.Ф. и других, а также из вступительных экзаменов МГУ им. М.В.Ломоносова, МФТИ, МИРЭА, МИСиС, МЭИ и других ВУЗов.

Другие темы, не вошедшие в этот курс, будут изложены в следующих частях издания.

Мы желаем всем читателям и слушателям курса удачи и высоких оценок на вступительных испытаниях.

Лекция №1

Действительные числа

Сначала определим понятие действительного числа. Действительные числа и правила обращения с ними лежат в основе элементарной математики. Пользуясь этими правилами мы будем в дальнейшем решать задачи. Действительные числа мы определим используя, так называемый, аксиоматический подход. (Напомним, что аксиома — это утверждение, не требующее доказательства).

1.1. Аксиомы действительных чисел.

I. Аксиомы сложения .

Определение 1.1. Любой паре чисел a и b ставится в соответствие и, притом единственным образом, третье число, называемое их ***суммой*** и обозначаемое $a+b$, так что имеют место свойства:

I_1. $a+b=b+a$ (коммутативность);

I_2. $a+(b+c)=(a+b)+c$ (ассоциативность);

I_3. $\exists 0$: $\forall a$ выполняется $a+0=a$, число 0 называется нулем;

I_4. $\forall a \; \exists(-a)$: $a+(-a)=0$, число $(-a)$ называется противоположным числу a.

Операция разности двух чисел $a-b$ определяется как $a+(-b)$.

Пример 1.1. Доказать, что 0 — единственный.

Для доказательства воспользуемся методом "от противного". Суть метода заключается в том, что мы формулируем некое утверждение и доказываем его невозможность и тогда, верно утверждение, противоположное сформулированному.

Предположим, что существуют два числа $0 \neq 0^*$, обладающие свойством I_3. Тогда справедливы равенства $0+0^*=0$ и $0^*+0=0^*$. В силу коммутативности сложения левые части этих равенств равны, значит равны и правые, т.е. $0=0^*$, что противоречит сделанному предположению.

Аналогично показывается, что число $(-a)$ — единственно.

II. Аксиомы умножения.

Определение 1.2. Любой упорядоченной паре чисел a и b ставится в соответствие и, притом единственным образом, третье число, называемое их ***произведением*** и обозначаемое $a \cdot b$ (точка может опускаться) так, что имеют место свойства:

II_1. $a\,b=b\,a$ (коммутативность);

II_2. $a(bc)=(ab)c$ (ассоциативность);

II_3. $\exists 1 \neq 0$: $\forall a$ выполняется $a \cdot 1=a$, число 1 называется единицей;

II_4. Для любого $a \neq 0$ существует число $\frac{1}{a}$ такое, что $a \cdot \frac{1}{a}=1$, число $\frac{1}{a}$ называется обратным числу $a, a \neq 0$.

Операция деления двух чисел $\frac{a}{b}, b \neq 0$ определяется как $a \cdot \frac{1}{b}$.

III. Аксима связи операций сложения и умножения.

III_1. Для любых a, b, c выполняется $(a+b)c=ac+bc$ (дистрибутивность).

Пример 1.2. Доказать, что 1 — единственна.

Предположим, что существуют два числа $1 \neq 1^*$, обладающие свойством II_3. Но тогда справедливы равенства $1 \cdot 1^*=1^*$ и $1^* \cdot 1=1$. В силу коммутативности умножения левые части этих равенств равны, значит равны и правые, т.е. $1=1^*$, что противоречит сделанному предположению.

Аналогично показывается, что число $\frac{1}{a}$ — единственно.

Довольно легко показать, что $(-a)b=-ab$ и $(a-b)c=ac-bc$.

IV. Аксиомы упорядоченности .

IV_1. Число a удовлетворяет только одному из трех соотношений: $a<0, a=0, a>0$.

IV_2. Если $a>0, b>0$, то $a+b>0$.

IV_3. Если $a>0, b>0$, то $a \cdot b>0$.

Теперь определим операцию сравнения двух чисел.

Определение 1.3. Число a называют *большим* [меньшим (или равным)] числа b и пишут $a>b$ $\left[a<b;(a=b)\right]$, если $a-b>0$ $\left[a-b<0;(a-b=0)\right]$.

Операция сравнения обладает следующими свойствами.

1°. Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$ (свойство транзитивности).

2°. Если $a<b$, то для любого c справедливо $a+c<b+c$.

3°. Если $a<b$, то $-a>-b$.

4°. Если $a<b$ и $c\le d$, то $a+c<b+d$, т.е. можно производить почленное сложение неравенств одного знака.

5°. Если $a<b$ и $c\ge d$, то $a-c<b-d$, т.е. можно производить почленное вычитание неравенств разного знака.

6°. Если $a<b$ и $c<0$, то $ca>cb$. Если $a<b$ и $c>0$, то $ca<cb$.

7°. Если $0\le a<b$ и $0\le c<d$, то $a\cdot c<b\cdot d$.

Пример 1.3. Доказать, что 1>0.

Снова воспользуемся методом "от противного". Предположим, что $1<0$ (в соответствии с II_3 $1\neq 0$). Тогда в силу свойства 3° имеем $-1>0$. Умножим справедливое по предположению неравенство $1<0$ на положительное число -1. Тогда в силу 6° имеем $-1<0$. Но последнее противоречит тому, что два числа могут находиться только в одном из трех соотношений. Таким образом, сделанное предположение оказалось неверным.

V. Аксиома непрерывности действительных чисел.

Каковы бы ни были непустые множества X и Y, такие, что $\forall x\in X$, $\forall y\in Y$ выполняется неравенство $x\le y$, существует такое число α, что соотношение $x\le\alpha\le y$ имеет место для всех $x\in X$, $y\in Y$. Число α называется сечением множеств X и Y.

Подробнее о множествах мы поговорим в следующей лекции.

Определение 1.4. Множество действительных чисел R — множество, элементы которого удовлетворяют аксиомам I — V.

Определение 1.5. Числа 1,2,3,4,5,6,... называются натуральными числами.

Определение 1.6. Числа 0,±1,±2,±3,±4,±5,±6,... называются целыми числами.

Определение 1.7. Если действительное число a представимо в виде $a=\frac{m}{n}$, где $m,n\neq 0$ – целые числа, то число a называется рациональным. В противном случае число называется иррациональным.

Определение 1.8. Натуральное число a называется простым, если оно делится нацело только на единицу и само на себя.

Определение 1.9. Дробь $a=\frac{m}{n}$, где m,n — целые числа, называется несократимой, если числа m,n не имеют общих простых делителей, кроме единицы.

Определение 1.10. Число a, умноженное само на себя n раз, называется n–ой степенью числа a и обозначается a^n. Число b (если оно существует) такое, что $b^n=a$ называется *корнем* n–й степени из числа a и обозначается $b=\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$, т.е. по определению $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$. Если $a\ge 0$, $b=\sqrt[n]{a}$ и $b\ge 0$, то число b называется арифметическим корнем n–ой степени из положительного числа a. В дальнейшем всюду, если не оговорено противное, будем считать корень арифметическим.

Свойства нутуральных степеней.

Пусть $n,m\in N$, $a,b\ge 0$, тогда

1°. $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$;

2°. $\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$, $a\neq 0$;

3°. $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, $b\neq 0$;

4°. $\left(a^n\right)^m=a^{nm}$.

5°. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$;

6°. $\sqrt[nm]{a^m}=\sqrt[n]{a}$;

7°. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;

8°. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$;

9°. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b\neq 0$.

Определение 1.11. Пусть $a>0$ и r – рациональное число, т.е. $r=\frac{m}{n}$, $n\neq 0$, $m,n\in Z$. *Степень* a^r определяется равенством $a^r=\sqrt[n]{a^m}$.

Свойства рациональных степеней.

Пусть r, r_1, r_2 – рациональные числа, $a, b > 0$.

10°. $a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$; 11°. $a^{r_1} \cdot a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$;

12°. $\dfrac{a^{r_1}}{a^{r_2}} = a^{r_1 - r_2}$; 13°. $\left(a^{r_1}\right)^{r_2} = a^{r_1 \cdot r_2}$;

14°. $(a\,b)^r = a^r \cdot b^r$; 15°. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$.

Определение 1.12. ***Отрезком*** называется множество $\{x : a \le x \le b, a, b, x \in R, b \ge a\}$ и обозначается $[a, b]$.

Определение 1.13. ***Интервалом*** называется множество $\{x : a < x < b, a, b, x \in R\}$ и обозначается (a, b).

Теорема 1.1. (Принцип Архимеда). Для $\forall a \in R\ \exists n \in N : n > a$.

Следствие. Для $\forall a, \forall b \in R$, таких, что $0 < a < b\ \exists n \in N : na > b$.

1.2. Различные формы записи натуральных чисел. Некоторые правила "быстрого" умножения. Признаки делимости.

Теперь займемся некоторыми полезными упражнениями с натуральными числами.

Мы будем в дальнейшем рассматривать десятичную систему счисления. В этой системе введены десять символов $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, называемых цифрами. В этой системе число десять обозначается символом 10, а каждое натуральное число q представляется в виде

$$q = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0,$$

где a_i — одна из цифр, а n — число из расширенного натурального ряда, т.е. либо натуральное число, либо нуль.

Для записи натурального числа q обычно используется форма записи, основанная на позиционном принципе, где последняя цифра означает количество единиц в числе q, предпоследняя — количество десятков и т.д., т.е. число записывается в привычном для нас виде

$a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$. Для того, чтобы отличать подобную запись числа от произведения мы будем использовать для записи натурального числа, основанной на позиционном принципе, черту сверху,т.е.

$$\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0.$$

Заметим, что существуют различные формы счисления. В основе всякой такой системы лежит следующий принцип: число, называемое основанием системы счисления, определяет количество единиц, составляющих единицу нового разряда. Например, в десятичной системе таким числом является десять, в двоичной — два, в восмеричной — восемь и т.д.

Различные способы записи натуральных чисел позволяют находить признаки делимости и некоторые правила "быстрого" умножения натуральных чисел.

Пример 1.4. Найти правило быстрого умножения двузначных натуральных чисел, у которых число десятков одинаково, а число единиц в сумме равно 10.

Нам надо найти правило умножения чисел $p = 10a + b$ и $q = 10a + 10 - b$. Имеем

$$pq = 100(a+1)a + b(10 - b).$$

Таким образом, искомое правило умножения следующее: берется число десятков и умножается на следующее за ним число в натуральном ряду, результат записывается, после этого к нему справа приписывается произведение единиц исходных чисел (если результат произведения единиц равен (9 то приписывается 09). Например, умножим 74 на 76. Умножаем 7 на 8 и записываем результат 56. Умножаем 6 на 4 и результат приписываем справа к 56. Получаем 5624.

Теперь рассмотрим признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 9, 11.

Пример 1.5. Доказать, что необходимым и достаточным условием делимости натурального числа на 2 является делимость числа единиц исходного числа на 2.

При решении этой задачи познакомимся с терминами необходимое и достаточное условие.

Необходимость это то, что при выполнении вывода, выполняются условия утверждения. В нашем случае выводом является то, что число делится на 2, а условием то, что последняя цифра этого числа делится на 2, т.е. если натуральное число

$$q = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0 \qquad (1.1)$$

делится на 2, то a_0 делится на 2.

Запишем число q в виде

$$q = 10\left(a_n 10^{n-1} + a_{n-1} 10^{n-2} + \ldots + a_2 10 + a_1\right) + a_0$$

из которого сразу следует доказываемая необходимость.

Достаточность это то, что при выполнении условий утверждения следует вывод утверждения.

Заметим, что при одной только достаточности, невыполнение условий утверждения вовсе не означает ошибочности самого утверждения.

В нашем случае надо доказать, что из делимости a_0 на 2 следует делимость числа q на 2.

Это утверждение так же следует из представления числа q в виде (1.1).

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $A \Leftrightarrow B$ означает, что свойство B является необходимым и достаточным условием для выполнения A (этот же значок означает эквивалентность этих двух утверждений), $A \Rightarrow B$ означает, что свойство A является достаточным условием для выполнения B, а $A \Leftarrow B$ означает, что свойство A является необходимым условием для выполнения B.

Пример 1.6. Необходимым и достаточным условием делимости натурального числа на 3 является делимость суммы цифр исходного числа на 3.

Необходимость. Пусть натуральное число

$$q = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_2 10^2 + a_1 10^1 + a_0$$

делится на 3, тогда

$$q = a_n\left(10^n - 1\right) + a_{n-1}\left(10^{n-1} - 1\right) + \ldots +$$

$$+ \ldots + a_2\left(10^2 - 1\right) + a_1\left(10^1 - 1\right) + a_0 + a_1 + \ldots + a_n .$$

Каждая из скобок делится на 3, следовательно, и сумма цифр должна делиться на 3.

Достаточность. Пусть теперь сумма цифр делится на 3. Тогда из последней записи числа сразу следует, что и все число делится на 3.

Заметим, что доказательство признака делимости на 9 отличается от только что приведенного тем, что надо заменить 3 на 9.

Сформулируем некоторые признаки делимости для других чисел, которые доказывается аналогично приведенным выше.

Необходимым и достаточным признаком делимости на 4 является условие того, что двузначное число, составленное из последних двух цифр исходного числа делится на 4.

Необходимым и достаточным признаком делимости на 5 является условие того, что исходное число оканчивается на 5 или 0.

Необходимым и достаточным признаком делимости на 11 является условие того, что разность между суммами цифр, стоящих на четных и стоящих на нечетных местах, делится на 11.

1.3. Делимость по модулю.

Определение 1.14. Если два целых числа a и b при делении на натуральное число n дают один и тот же остаток r, где $0 \le r < n$, то числа a и b называются сравнимыми по модулю n, что записывается $a \equiv b \pmod{n}$.

Прежде чем переходить к исследованию основных свойств операции сравнения по модулю, отметим два довольно очевидных факта следующих непосредственно из определения.

1. Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $a = b + nt$, где t - целое число.
2. Если $a \equiv b \pmod{n}$, то $a - b$ делится на n.

Свойства сравнения по модулю

1°. Если $a \equiv c \pmod{n}$ и $b \equiv c \pmod{n}$, то $a \equiv b \pmod{n}$.

2°. Если $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$, …, $a_m \equiv b_m \pmod{n}$,

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_m \equiv b_1 + b_2 + \ldots + b_m \pmod{n}.$$

3°. Если $a_1 \equiv b_1 \pmod{n}$, $a_2 \equiv b_2 \pmod{n}$, …, $a_m \equiv b_m \pmod{n}$, то

$$a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_m \equiv b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_m \pmod{n}.$$

Из этого свойства в частности следует, что обе части сравнения можно возводить в одну и ту же натуральную степень и умножать на одно и то же целое число.

4°. Обе части сравнения и модуль можно умножить на одно и то же целое число, т.е. если $a \equiv b \pmod{n}$, то $ak \equiv bk \pmod{nk}$, где $k \in N$.

5°. Обе части сравнения и модуль можно разделить на их общий делитель.

Пример 1.7. Найти остаток от деления 5^{20} на 24.

Воспользуемся тем, что $5^2 \equiv 1 \pmod{24}$. Возведем обе части сравнения в десятую степень (свойство 3°) и получим, что $5^{20} \equiv 1^{10} \pmod{24}$, т.е. искомый остаток равен 1.

Пример 1.8. Доказать, что $3^{105} + 4^{105}$ делится на 181.

Справедливы следующие цепочки

$$3^5 = 243 = 181 + 62 \equiv 62 \pmod{181} \Rightarrow 3^{105} \equiv 62^{21} \pmod{181},$$

$$4^5 = 1024 = 181 \cdot 6 - 62 \equiv -62 \pmod{181} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4^{105} \equiv -62^{21} \pmod{181}.$$

Складывая последние сравнения обеих цепочек, получим искомый результат.

1.4. Треугольник Паскаля.

Возведение в степень суммы или разности двух чисел представляется довольно трудоемким занятием. Несколько позже мы рассмотрим детально этот вопрос. На данном этапе познакомимся с треугольником Паскаля.

Сначала напишем общий вид формулы возведения в натуральную степень суммы двух слагаемых, не приводя ее доказательства (более подробно эта формула будет рассмотрена в следующей лекции)

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + + C_n^{n-k} a^{n-k} b^k + C_n^n b^n.$$

Теперь зададим правила, по которым находятся коэффициенты C_n^j в данной формуле. Для этого нарисуем треугольник

1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

……………………

Правила заполнения этого треугольника следующие.

Сначала на боковых сторонах пишем в каждой строчке единицы. После этого заполняем вторую строчку числом 2. Далее в третьей строке ставим между двумя числами второй строки их сумму (1+2 и 2+1). Аналогично поступаем с четвертой строкой, беря сумму чисел третьей и т.д.

Получающиеся в n - ой строке числа и есть искомые коэффициенты C_n^i возведения суммы в n - ую степень.

Пример 1.9. Написать разложение $(a-b)^4$.

Используя четвертую строку треугольника Паскаля получим

$$(a-b)^4 = (a+(-b))^4 =$$

$$= a^4 + 4a^3(-b) + 6a^2(-b)^2 + 4a(-b)^3 + (-b)^4.$$

Окончательно имеем

$$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4.$$

Теперь рассмотрим несколько примеров, при решении которых нам понадобятся знания полученные выше.

Пример 1.10. Доказать, что число $\sqrt{2}$ иррационально.

Предположим, что число $\sqrt{2}$ рационально, т.е. представимо в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$ (определение 1.7). Запишем соответствующее равенство в виде $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ и возведем обе его части в квадрат

$$2n^2=m^2.$$

В левой части полученного равенства находится четное число, следовательно, m так же является четным числом, а так как 2 – простое число, то и m должно быть четным числом, т.е. представимым в виде $m=2k$, где k целое число. Имеем

$$n^2=2k^2.$$

В правой части расположено четное число, значит и n должно быть четным. Но если оба числа m и n являются четными, то дробь $\frac{m}{n}$ является сократимой, что противоречит сделанному нами предположению.

Таким образом, методом от противного мы доказали иррациональность числа $\sqrt{2}$.

Пример 1.11. Упростить $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$.

I способ. Попробуем представить подкоренное выражение в виде полного квадрата, т.е. $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2=4+2\sqrt{3}$, где a,b – рациональные числа. Далее, приравниваем выражения с корнем и выражения без корня и получаем систему $\begin{cases} a+b=4 \\ ab=3 \end{cases}$, решением которой будут две пары чисел $\{1;3\}$ и $\{3;1\}$. Таким образом, получаем, что $\sqrt{4+2\sqrt{3}}=1+\sqrt{3}$.

II способ. В данном примере довольно легко угадать квадрат суммы каких чисел дает подкоренного выражения. Действительно, $2\sqrt{3}$ скорее всего является удвоенным произведением чисел 1 и $\sqrt{3}$. Единственное, что осталось проверить: $1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2=4$.

Пример 1.12. Упростить $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$.

I способ. Попробуем найти такие рациональные числа a и b, что $\left(a+b\sqrt{2}\right)^3=7+5\sqrt{2}$, т.е

$$a^3+3a^2b\sqrt{2}+6ab^2+2b^3\sqrt{2}=7+5\sqrt{2}.$$

Приравниваем рациональные и иррациональные выражения и получаем систему

$$\begin{cases} a^3+6ab^2=7 \\ 3a^2b+2b^3=5 \end{cases}.$$

Позднее (лекция 5) мы научимся свободно решать подобные системы. Сейчас лишь обозначим общий принцип.

Умножаем обе части первого уравнения на 5, а второго на 7 и вычитаем из первого уравнения второе. Получаем уравнение следствие

$$5a^3-21a^2b+30ab^2-14b^3=0.$$

Так как $b=0\Rightarrow a=0$ не является решением нашей системы, то делим уравнение на $b^3\neq 0$. Обозначив $\frac{a}{b}=t$ получим

$$5t^3-21t^2+30t-14=0.$$

В школе должны проходить следующий важный факт. Если сумма коэффициентов уравнения равна нулю, то один из корней уравнения равен 1.

В нашем случае $t=1\Rightarrow a=b$. Мы не будем подробно останавливаться на поиске других корней уравнения. На данном этапе просто поверим, что уравнение не имеет больше действительных корней. Подставляя $a=b$ в систему получим $a=b=1$ или

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^3=7+5\sqrt{2}.$$

Аналогично получается, что $\left(1-\sqrt{2}\right)^3=7-5\sqrt{2}$ и окончательно получаем, что искомое число равно 2.

II способ. Обозначим $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=a$ и возведем обе части в куб.

Будем использовать следующую формулу куба суммы двух чисел

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b).$$

Получаем

$$a^3=7+5\sqrt{2}+7-5\sqrt{2}+$$

$$+3\sqrt[3]{\left(7+5\sqrt{2}\right)\left(7-5\sqrt{2}\right)}\left(\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\right).$$

Но выражение в последней скобке равно a, поэтому

$$a^3=14-3a.$$

Единственный корень этого уравнения можно угадать $a=2$.

III способ. Угадывание. Представим

$$7=6+1,\ 5\sqrt{2}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}.$$

Тогда

$$7+5\sqrt{2}=$$

$$=1^3+3\cdot1^2\cdot\sqrt{2}+3\cdot1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^3=\left(1+\sqrt{2}\right)^3;$$

$$7-5\sqrt{2}=$$

$$=1^3-3\cdot1^2\cdot\sqrt{2}+3\cdot1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^3=\left(1-\sqrt{2}\right)^3.$$

Таким образом, $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}=2$.

Ответ: 2.

Пример 1.13. Доказать, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Имеем

$$0=(a+b+c)^3=\left(a+(b+c)\right)^3=$$

$$=a^3+(b+c)^3+3a(b+c)(a+b+c)=a^3+(b+c)^3.$$

При последнем переходе мы использовали то, что $a+b+c=0$.

Теперь в формуле $(b+c)^3=b^3+c^3+3bc(b+c)$ заменяем сумму $b+c$ на $-a$ и получаем доказываемое соотношение.

Пример 1.14. Разложить на множители выражение $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$.

Это пример на обычное разложение на множители, однако, полученная формула понадобится нам в дальнейшем. Имеем

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=$$

$$=(a+b)^3+c^3+3(a+b)c(a+b+c)-$$

$$-a^3-b^3-c^3=3\left(a^2c+2abc+b^2c+a^2b+ab^2+ac^2+bc^2\right)=$$

$$=3\left(c(a+b)^2+ab(a+b)+c^2(a+b)\right)=$$

$$=3(a+b)\left(ac+bc+ab+c^2\right)=$$

$$=3(a+b)\left(c(a+c)+b(a+c)\right)=3(a+b)(a+c)(c+b).$$

Отметим еще две формулы, которые достаточно часто применяются при решении задач

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right), \qquad (1.2)$$

$$a^{2k+1}+b^{2k+1}=(a+b)\left(a^{2k}+a^{2k-1}b+\ldots+ab^{2k-1}+b^{2k}\right). \qquad (1.3)$$

Эти формулы мы докажем в следующей лекции после изучения метода математической индукции.

Рассмотрим несколько примеров на алгебраические преобразования.

Пример 1.15. Разложить на множители выражение a^4+1.

Выделим полный квадрат суммы, добавив и отняв $2a^2$

$$a^4+1+2a^2-2a^2=\left(a^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}a\right)^2=$$

$$=\left(a^2-\sqrt{2}a+1\right)\left(a^2+\sqrt{2}a+1\right).$$

Дальнейшее разложение на множители невозможно так как дискриминанты квадратных трехчленов отрицательны.

Пример 1.16. Упростить выражение $A=\dfrac{\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}}{\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}-\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}}$ и вычислить его при $a=\sqrt{21}$, $b=\sqrt{7}$.

Сначала избавимся от иррациональности в знаменателе, для чего умножим числитель и знаменатель рассматриваемой дроби на $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$. Получим выражение

$$A=\frac{\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}+\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\right)^2}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}=\frac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}+2}{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}.$$

Воспользуемся тем, что

$$\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{a^2-b^2}=2\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2},$$

$$\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{a^2-b^2}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$$

и

$$A=\frac{2\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}+2}{\dfrac{4ab}{a^2-b^2}}=\frac{\dfrac{4a^2}{a^2-b^2}}{\dfrac{4ab}{a^2-b^2}}=\frac{a}{b}.$$

Подставляя заданные значения a и b окончательно получаем, что $A=\sqrt{3}$.

Ответ: $A=\sqrt{3}$.

Пример 1.17. Упростить

$$A=\left(5a+\sqrt{10a-1}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(5a-\sqrt{10a-1}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Воспользуемся приемом, который довольно часто используется при избавлении от иррациональностей. Обозначим $\sqrt{10a-1}=t\geq 0$.

Тогда $t^2=10a-1\Leftrightarrow a=\dfrac{t^2+1}{10}$. Подставим полученное в исходное выражение

$$A=\left(\frac{t^2+1}{2}+t\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{t^2+1}{2}-t\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t^2+2t+1}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t^2-2t+1}}.$$

В знаменателе под корнем полные квадраты, поэтому, воспользовавшись тем, что $t+1>0$, получаем

$$A=\frac{\sqrt{2}}{t+1}+\frac{\sqrt{2}}{|t-1|}.$$

Рассматриваем два случая.

1. $t>1\Rightarrow\sqrt{10a-1}>1\Rightarrow a>\dfrac{1}{5}$. Имеем

$$A = 2\sqrt{2}\,\frac{t}{t^2-1} = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{10a-1}}{5a-1}.$$

2. $0 \le t < 1 \Rightarrow 0 \le \sqrt{10a-1} < 1 \Rightarrow \frac{1}{10} \le a < \frac{1}{5}$. Имеем

$$A = -\frac{2\sqrt{2}}{t^2-1} = -\frac{\sqrt{2}}{5a-1}.$$

Ответ: $A = \begin{cases} A = \dfrac{\sqrt{20a-2}}{5a-1}, \text{ при } a > \dfrac{1}{5} \\ A = \dfrac{\sqrt{2}}{1-5a}, \text{ при } \dfrac{1}{10} \le a < \dfrac{1}{5} \end{cases}$.

В заключение рассмотрим несколько примеров решения задач в целых числах.

Пример 1.18. Найти двузначное число, равное сумме квадрата числа единиц и числа десятков.

Запишем искомое число в виде $10x + y$, где x, y - цифры. Тогда по условию задачи имеем

$$10x + y = y^2 + x \Leftrightarrow 9x = y(y-1).$$

Отметим, что y не может равняться нулю, так как в этом случае и x равен нулю.

Левая часть получившегося уравнения делится на 9, значит и правая часть должна делиться на 9.

Прежде чем двигаться дальше докажем следующее утверждение.. Два натуральных числа n и $n-1$ взаимно просты, т.е. не имеют общих натуральных делителей, кроме единицы.

Предположим противное: существуют два натуральных числа n и $n+1$ имеющие общий натуральный делитель $q \ne 1$. Тогда $n = qr_1$ и $n+1 = qr_2$, где r_1, r_2 – натуральные числа. Имеем $qr_1 + 1 = qr_2 \Leftrightarrow q(r_2 - r_1) = 1$, что невозможно, так как произведение натурального числа на целое равно единице тогда и только тогда, когда оба сомножителя равны единице, а по предположению $q \ne 1$.

Из доказанного утверждения следует, что обе цифры y и $y-1$ не могут одновременно делиться на 3, поэтому одна из них должна делиться на 9. Такой цифрой может быть только $y = 9$.

Ответ: 89.

Пример 1.19. Найти четырехзначное натуральное число, являющееся точным квадратом, у которого цифра тысяч одинакова с цифрой сотен, а цифра десятков равна цифре единиц.

Запишем искомое число в виде

$$n^2 = \overline{xxyy} = 1000x + 100x + 10y + y = 11(100x + y).$$

В силу того, что последнее выражение является точным квадратом получаем, что $100x + y$ делится на 11.

Воспользовавшись тем, что $100x + y = 99x + x + y$, получим, что на 11 должна делиться сумма $x + y$. Но так как x, y - цифры, то $x + y = 11$. Теперь заменим y на $11 - x$ и получим

$$n^2 = 11^2(9x+1).$$

Из этого равенства следует, что $9x + 1$ должно быть точным квадратом, т.е. $9x + 1 = m^2$, причем m - цифра, так как $9x + 1$ является двузначным числом (x не может быть равен нулю).

Таким образом

$$9x = (m-1)(m+1).$$

Рассуждения аналогичные приведенным в примере 1.18 позволяют сказать, что $m = 8$.

Ответ: 7744

Пример 1.20. Решить в целых числах уравнение $xy = x + y$.

Заметим, что в уравнении две переменные. Обычный способ решения таких задач заключается в следующем. Выражается одна из переменных и далее используется условие того, что решения должны быть целыми. В нашем случае имеем

$$x(y-1) = y.$$

Отметим, что $y = 1$ не является решением нашего уравнения, поэтому

$$x=\frac{y}{y-1}=\frac{y-1+1}{y-1}=1+\frac{1}{y-1}.$$

В силу того, что $\frac{1}{y-1}$ должно быть целым, получим

$$\left[\begin{array}{l} y-1=1 \\ y-1=-1 \end{array}\right..$$

Ответ: $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}.$

Пример 1.21. Доказать, что уравнение $x^3+2y^3=4z^3$ не имеет решений в натуральных числах.

Для решения задач подобного типа используется, так называемое, правило крайнего. Предположим, что наше уравнение имеет решения в натуральных числах. Среди всех решений выберем такое, у которого значения x минимальное (это возможно в силу того, что множество натуральных чисел ограничено снизу, например, числом "0"). Обозначим это решение (x_0, y_0, z_0). То, что указанная тройка является решением уравнения означает выполнение равенства

$$x_0^3+2y_0^3=4z_0^3.$$

Из этого равенства следует, что x_0 является четным числом, т.е. $x_0=2n$. Заменим x_0 и получим

$$8n^3+2y_0^3=4z_0^3 \Leftrightarrow 4n^3+y_0^3=2z_0^3.$$

Из последнего равенства следует, что y_0 является четным числом, т.е. $y_0=2m$. Заменим y_0 и получим

$$4n^3+8m^3=4z_0^3 \Leftrightarrow 2n^3+4m^3=z_0^3.$$

Снова получаем, что z_0 является четным числом, т.е. $z_0=2k$. Заменим z_0 и получим

$$2n^3+4m^3=8k^3 \Leftrightarrow n^3+2m^3=4k^3.$$

Полученное равенство означает, что тройка чисел (n, m, k) является решением исходного уравнения. Но $n=\frac{x_0}{2}<x_0$, а мы договорились, что среди всех решений выбрали то, у которого x_0 минимально. Получили противоречие, что доказывает отсутствие натуральных решений уравнения.

Задачи для разбора с преподавателем

1.1. Найти двузначное число, равное сумме числа десятков и квадрата числа единиц.

1.2. Найти четырехзначное натуральное число, являющееся точным квадратом, у которого цифра тысяч одинакова с цифрой сотен, а цифра десятков равна цифре единиц.

1.3. Решить в целых числах уравнение $xy=x+y$.

1.4. Решить в целых числах уравнение $60x-77y=1$.

1.5. Доказать, что уравнение $x^3+2y^3=4z^3$ не имеет решений в натуральных числах.

1.6. Доказать, что уравнение $x^4+y^4=5(z^4+t^4)$ не имеет решений в натуральных числах.

1.7. Решить в целых числах уравнение $2xy+3y^2=24$.

1.8. Решить в целых числах уравнение $3^x=4y+5$.

1.9. Решить в целых неотрицательных числах уравнение

$$2k^2+7k=2mk+3m+36.$$

1.10. Решить в целых числах систему $\begin{cases} x^2-y^2-z^2=1 \\ y+z-x=3 \end{cases}$

1.11. Сравните какое из чисел больше 2^{300} или 3^{200}.

1.12. Сравните какое из чисел больше $\sqrt{1002}+\sqrt{1003}$ или $\sqrt{1001}+\sqrt{1004}$.

1.13. Доказать, что при любом натуральном n справедливо

$$\left(37^{n+2}+16^{n+1}+23^n\right) \vdots 7.$$

1.14. Доказать, что $\left(2^{60}+7^{30}\right) \vdots 13$.

Упростить:

1.15. $\sqrt{17-12\sqrt{2}}+\sqrt{17+12\sqrt{2}}$.

1.16. $\sqrt{\sqrt{9+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}+1\right)}$.

1.17. $\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x+\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\dfrac{x^3-3x-\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-4}}{2}}$.

1.18. $\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{\left(ax-x\sqrt{5}\right)^2-\left(a\sqrt{5}-5\right)^2}}{\sqrt{\left(5-x^2\right)\left(19-\sqrt{286}\right)}}\times$

$$\times\left(\sqrt{14+a^2+a^2\sqrt{3}}-\sqrt{19-a^2\sqrt{3}}\right).$$

1.19. $\left(\dfrac{x^2-1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{x^2}{x-2}+\dfrac{5x^2}{3-x}\right)\dfrac{1+\sqrt{\sqrt{x}\left(2\sqrt[4]{3}-\sqrt{x}\right)-\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+2+x^2}$.

1.20. $\left(\dfrac{\sqrt{x-2b\sqrt{x-4}}+2\left(1+\sqrt{(4-x)\left(b^2-4(b-1)\right)}\right)}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}+1\right)^{-2}$.

1.21. Доказать, что если $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{a+b+c}$, то верно одно из ра-венств: $a=-b; b=-c; c=-a$.

1.22. Доказать, что $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$ если

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a.$$

1.23. Доказать, что если $a+b+c=0$, то

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

1.24. Разложить на множители: $x^2+4xy+4y^2+2x+4y-3$.

1.25. Разложить на множители: $4x^2+4xy+y^2-4x-2y$.

1.26. Найти все целые k, при которых выражение $\sqrt{k^2+2k\sqrt{3}}-2\sqrt{3}$ является целым числом.

1.27. Найти все целочисленные пары (x, y), удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} y^3-3x^2-4y+18x-26>0 \\ y^3+x^2-4y-8x+14<0 \end{cases}.$$

1.28. Найти все целочисленные пары (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x+y-4}+\sqrt{5-2y-x}=2\sqrt{2-x+y}.$$

1.29. Найти все целочисленные пары (x, y), удовлетворяющие уравнению $-3xy-10x+13y+35=0$.

1.30. Упростить выражение и вычислить его при $a=\sqrt[16]{5}$

$$\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}-\frac{2}{a^2+1}-\frac{4}{a^4+1}-\frac{8}{a^8+1}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1.1д. Доказать, что любое четное число, не кратное четырем, нельзя представить в виде разности квадратов двух целых чисел.

1.2д. Найти все трехзначные числа $\overline{abc}$, равные полусумме чисел $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$.

1.3д. Найти все натуральные n, для которых выражение $22n+5$ является квадратом натурального числа.

1.4д. Найти четырехзначное число $\overline{abca}$, равное $(5c+1)^2$.

1.5д. Найти четырехзначное натуральное число, у которого цифра тысяч одинакова с цифрой десятков, а цифра сотен на единицу больше цифры единиц и являющегося квадратом натурального числа.

1.6д. Решить в натуральных числах уравнение $x+y+z=xyz\,(x\le y\le z)$.

1.7д. Доказать, что уравнение $x^2-3y=17$ не имеет решений в целых числах.

1.8д. Доказать, что уравнение $x^2+4x-8y=11$ не имеет решений в целых числах.

1.9д. Доказать, что уравнение $x^2+y^2=3\left(z^2+t^2\right)$ не имеет решений в натуральных числах.

1.10д. Доказать, что уравнение $x^4=3y^4+9z^4+27t^4$ не имеет решений в натуральных числах.

1.11д. Решить в натуральных числах уравнение $2x^2-xy-y^2+2x+7y=84$.

1.12д. Решить в натуральных числах уравнение $2x^2+5xy-12y^2=28$.

1.13д. Решить в целых числах уравнение $3x+2y=7$.

1.14д. Решить в целых числах уравнение $x^2+xy-y=2$.

1.15д. Решить в целых числах уравнение $19x^2+91y^2=1991$.

1.16д. Доказать, что уравнение $4x^2-y^2=9$ не имеет решений в целых числах.

1.17д. Решить в целых числах уравнение $3^x-2^y=1$.

1.18д. Решить в целых числах систему $\begin{cases} x^2+y=42 \\ x+y^2=42 \end{cases}$.

1.19д. Сравните какое из чисел больше $\sqrt{51}$ или $3+\sqrt{17}$.

1.20д. Сравните какое из чисел больше $\sqrt[3]{51}$ или $2+\sqrt[3]{5}$.

1.21д. Доказать, что при любых натуральных n,m,k справедливо $5^{5k+1}+4^{5m+2}+3^{5n} \vdots 11$.

1.22д. Доказать, что при любых целых a,b и целом неотрицательном n справедливо $(7a+3)^{2n+1}+(7b+25)^{2n+1} \vdots 7$.

1.23д. Доказать, что при любом натуральном n справедливо $72^{2n+2}-47^{2n}+28^{2n-1} \vdots 25$.

Упростить:

1.24д. $\sqrt{43+24\sqrt{3}}+\sqrt{43-24\sqrt{3}}$.

1.25д. $\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$.

1.26д. $\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}}+\sqrt[3]{38-17\sqrt{5}}$.

1.27д. $\sqrt{9+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}+1\right)\left(5-2\sqrt{6}\right)$.

1.28д. $\sqrt{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}-1\right)$.

1.29д. $\sqrt{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)$.

1.30д. $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

1.31д. $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$.

1.32д. $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}+\sqrt{3-\sqrt{5+\sqrt{13-\sqrt{48}}}}$

1.33д. Упростить выражение $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{2x(x-1)^2}{x^4+x^2+1}+\dfrac{2x^2\left(x^2-1\right)^2}{x^8+x^4+1}$ и вычислить его при $x=\sqrt[4]{2}$.

Упростить

1.34д.
$$\frac{\sqrt{a^2-\left(8-a^2\right)x^2}+\sqrt{\left(ax-x\sqrt{7}\right)^2-\left(a\sqrt{7}-7\right)^2}}{\sqrt{\left(7-x^2\right)\left(17-\sqrt{191}\right)}}\times$$
$$\times\left(\sqrt{10+a^2+a^2\sqrt{2}}-\sqrt{10+a^2-7\sqrt{a^2-5}}\right).$$

1.35д. Доказать, что если $x+y+z=0$, то
$$\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right)=9.$$

1.36д. Доказать, что если $a+b+c=1$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=0$, то $a^2+b^2+c^2=1$.

1.37д. Доказать, что если $x+\dfrac{1}{y}=y+\dfrac{1}{z}=z+\dfrac{1}{x}$, то либо $x^2y^2z^2=1$, либо $x=y=z$.

1.38д. Доказать, что $a^3+b^3+c^3=3abc$ если $a+b+c=0$.

1.39д. Вычислить: $\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$, где $x=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)$.

Упростить:

1.40д. $\left(\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x-2}+\dfrac{x^2+12}{x^2-\sqrt{3}}\right)\dfrac{2+\sqrt{x\left(2\sqrt{3}-x\right)-3}}{x+5}$.

1.41д.
$$\frac{a^4-a^3-3a^2+23a-20}{a-1}+$$
$$+\sqrt[4]{\left(a-\sqrt[3]{4\sqrt{5}-9}+\sqrt[3]{4\sqrt{5}+9}\right)^2\left(\sqrt[3]{11}-2\sqrt[6]{2}\right)}.$$

1.42д. $(a+1)\left(a^2+1\right)\left(a^4+1\right)\left(a^8+1\right)\left(a^{16}+1\right)$.

1.43д. $\left(a^2+a+1\right)\left(a^6+a^3+1\right)\left(a^{18}+a^9+1\right)$.

1.44д. Доказать, что $\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=2\left(a^4+b^4+c^4\right)$ если $a+b+c=0$.

1.45д. Доказать, что если $a+b+c=1$, $a^2+b^2+c^2=1$ и $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, то $xy+xz+yz=0$.

1.46д. Доказать, что если $a+b+c=0$, то

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

1.47д. Упростить $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}$.

1.48д. Доказать, что если $a^3+pa+q=0$, $b^3+pb+q=0$ и $c^3+pc+q=0$, причем $a\neq b, b\neq c, a\neq c$, то $a+b+c=0$.

1.49д. Решить в целых неотрицательных числах уравнение

$$2k^2+3k=2mk+m+41.$$

1.50д. Доказать, что если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, то для любого натурального n справедливо:

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^{2n-1}=\frac{1}{a^{2n+1}+b^{2n+1}+c^{2n+1}}.$$

1.51д. Разложить на множители: $3x^2+4xy+y^2-4x-2y+1$

1.52д. Разложить на множители $3x^2+10xy-8y^2-8x+10y-3$.

1.53д. Найти все целые k, при которых является целым числом выражение

$$\sqrt{k^2+8\sqrt{3}}-4\sqrt{3}.$$

1.54д. Найти все целые k, при которых является целым числом выражение

$$\sqrt{k^2+3k\sqrt{3}+15}-3\sqrt{3}.$$

1.55д. Доказать, что $19^{19}+69^{69}$ делится на 44.

1.56д. Доказать, что число $20^{15}-1$ делится на $11\cdot31\cdot61$.

1.57д. Найти все целые k, при которых является целым числом. выражение $\sqrt{k^2+5k\sqrt{3}+21}+2\sqrt{3}$.

Вычислить:

1.58д. $\sqrt{\sqrt{2}+1}\left(\sqrt{5\sqrt{2}+1}-\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)$.

1.59д. $\sqrt{\sqrt{3}-1}\left(\sqrt{3\sqrt{3}-5}-\sqrt{6\sqrt{3}+10}\right)$.

1.60д. Решить уравнение $x^3-6x^2-xy+13x+3y+7=0$ в целых числах.

1.61д. Решить уравнение $x^3-x^2-xy-17x-3y+8=0$ в целых числах.

1.62д. Найти все целочисленные пары (x, y), удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} y^3-3x^2-9y+24x-47>0 \\ y^3+x^2-9y-10x+23<0 \end{cases}.$$

1.63д. Найти все целочисленные пары (x, y), удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x-y-3}+\sqrt{2y-x+3}=2\sqrt{3-x-y}.$$

1.64д. Найти все целочисленные пары (x, y), удовлетворяющие уравнению $3xy+16x+13y+61=0$.

1.65д. Найти все натуральные решения неравенства

$$\log_{\frac{2}{3}}\left(7z+61x+33-16\cdot5^x\right)-\log_{\frac{3}{2}}\left(z-23x-18+5\cdot5^x\right)+$$

$$+\log_{\frac{4}{9}}\left(2\cdot5^x-5x-3z+3\right)<15z-z^2-50.$$

1.66д. Упростить выражение и вычислить его при $a=\sqrt[32]{7}$:

$$\left(a^2+a+1\right)\left(a^2-a+1\right)\left(a^4-a^2+1\right)\left(a^8-a^4+1\right)\left(a^{16}-a^8+1\right).$$

Ответы

Задачи для разбора с преподавателем

1.1. 89; **1.2.** 7744; **1.3.** $(0;0)$, $(2;2)$; **1.4.** $x=77n+9$, $y=60n+7$, $n\in Z$; **1.7.** $(3;2)$, $(-3;-2)$, $(-3;4)$, $(3;-4)$, $(7;-6)$, $(-7;6)$, $(17;-12)$, $(-17;12)$;
1.8. $x=2k$, $y=\frac{9^k-5}{4}$, $k=0,1,2,3,4,\dots$; **1.9.** $k=9, m=9$; **1.10.** $(-3;2;-2)$, $(-3;-2;2)$, $(9;8;4)$, $(9;4;8)$; **1.11.** первое меньше; **1.12.** первое больше; **1.15.** 6;

1.16. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; 1.17. x, при $|x|\geq 2$; 1.18. $\sqrt{2}$, при $|x|<\sqrt{5}$; 1.19. $\frac{1}{2}$; 1.20. $\frac{1}{4}$, при $x\geq 8$, $\frac{x-4}{16}$, при $4<x<8$; 1.24. $(x+2y-1)(x+2y+3)$;
1.25. $(2x+y)(2x+y-2)$; 1.26. 4; 1.27. $(3;0)$, $(3;-2)$, $(3;2)$; 1.28. $(2;1)$;
1.29. $(-4;-3)$, $(6;-5)$, $(4;5)$; 1.30. 4.

Задачи для самостоятельного решения

1.2д. 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 481, 592, 518, 629;
1.3д. $n=22p^2+14p+2,\ p\in Z$; 1.4д. 1681; 1.5д. 8281; 1.6д. $(1;2;3)$; 1.11д. $(6;1)$, $(13;14)$; 1.12д. $(8;5)$; 1.13д. $x=2k+1,\ y=-3k+2,\ k\in Z$; 1.14д. $(0;-2)$, $(2;-2)$; 1.15д. $(10;1)$, $(-10;1)$, $(10;-1)$, $(-10;-1)$; 1.17д. $(1;1)$, $(2;3)$; 1.18д. $(6;6)$, $(-7;-7)$; 1.19д. первое больше; 1.20д. первое меньше; 1.24д. $6\sqrt{3}$; 1.25д. $3-\sqrt{2}$; 1.26д. 4; 1.27д. 1; 1.28д. -2; 1.29д. $2\sqrt{2}$; 1.30д. $\sqrt{2}$; 1.31д. $\sqrt{10}+\sqrt{2}$; 1.32д. $\sqrt{6}$; 1.33д. $\frac{3}{7}$; 1.34д. $\sqrt{2}$; 1.39д. $a-1$, при $a\geq 1$ или $\frac{1}{a}-1$, при $0<a<1$; 1.40д. 1;
1.41д. 2; 1.42д. 32 при $a=1$, $\frac{a^{32}-1}{a-1}$ при $a\neq 1$; 1.43д. 27 при $a=1$, $\frac{a^{27}-1}{a-1}$ при $a\neq 1$; 1.47д. $\sqrt{2}-1$; 1.49д. $k=10,\ m=9$; 1.51д. $(3x+y-1)(x+y-1)$;
1.52д. $(3x-2y+1)(x+4y-3)$; 1.53д. ± 7; 1.54д. ± 4; 1.57д. -4; 1.58д. 2;
1.59д. $\sqrt{2}-2\sqrt{6}$; 1.60д. $(4;27)$, $(2;-17)$, $(22;423)$, $(-16;307)$; 1.61д. $(-2;30)$, $(-4;4)$, $(20;316)$, $(-26;774)$; 1.62д. $(4;0)$, $(4;-3)$, $(4;3)$; 1.63д. $(1;1)$; 1.64д. $(-4;3)$, $(4;-5)$, $(-6;-7)$; 1.65д. $(5;2;9)$; 1.66д. $8+\sqrt{7}$.

Лекция №2

Множества. Метод математической индукции.

Бином Ньютона

2.1. Множества

2.1.1. Определения

Множества обозначаются большими буквами $A, B, \ldots, X, Y, Z$.

Элементы множества обозначаются малыми буквами $a, b, \ldots, x, y, z$.

Будем использовать следующие стандартные обозначения:

N - множество натуральных чисел;

Z - множество целых чисел;

Q - множество рациональных чисел;

I - множество иррациональных чисел;

R - множество действительных (вещественных) чисел;

C - множество комплексных чисел.

Если a является элементом множества A, то пишут $a\in A$ и читают "a принадлежит множеству A" или "множество A содержит элемент a".

Запись $a\notin A$ означает, что a не является элементом множества A.

<u>Определение 2.1</u>. Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то пишут $A\subset B$ ($\subset$ – знак включения) и говорят, что A – **подмножество** множества B или "B содержит A".

Если $A\subset B$ и $B\subset C$, то $A\subset C$.

<u>Определение 2.2</u>. Множества, состоящие из одних и тех же элементов называют равными и пишут $A=B$. В противном случае $A\neq B$.

<u>Утверждение</u>. $A=B$ тогда и только тогда, когда $A\subset B$ и $B\subset A$.

Определение 2.3. Множество, которое не содержит ни одного элемента, называют пустым множеством и обозначают $\varnothing$.

2.1.2. Операции с множествами

Пусть есть два произвольных множества A и B . Введем следующие операции с множествами.

Определение 2.4. Множество E , состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B , называется **объединением** множеств A и B и обозначается $E = A \cup B$, где $\cup$ – знак объединения.

Формально это определение можно записать в виде

$$\forall x \in E \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array} \right. .$$

Определение 2.5. Множество D , состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат как множеству A , так и множеству B , называется **пересечением** множеств A и B и обозначается $D = A \cap B$, где $\cap$ – знак пересечения, или

$$\forall x \in D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array} \right. .$$

Если $A \cap B = \varnothing$, то множества A и B не пересекаются, т.е. не имеют одинаковых элементов.

2.1.3. Свойства операций объединения и пересечения множеств

1°. $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ — коммутативность;

2°. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ — ассоциативность;

3°. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ — дистрибутивность;

4°. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Определение 2.6. Множество D , состоящее из всех элементов множества A , не принадлежащих множеству B , называется **разностью** множеств A и B и обозначается $D = A \setminus B$. Можно записать это определение в виде системы

$$\forall x \in D \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in A \\ x \notin B \end{array} \right. .$$

Обозначим некоторое основное множество буквой U .

Определение 2.7. Если $A \subset B$, то разность $B \setminus A$ называется **дополнением** множества A до множества B и обозначается $\overline{A}_B$. Дополнение множества A до основного множества U обозначается $\overline{A}_U$ или просто $\overline{A}$.

Из определения 2.7. следует, что

$$A \cup \overline{A} = U , \ A \cap \overline{A} = \varnothing , \overline{\left(\overline{A}\right)} = A .$$

Для любых подмножеств A и B основного множества U справедливы законы двойственности (законы де Моргана)

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B} \ ; \ \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B} \ .$$

Довольно часто для определения операций с множествами используют, так называемые, круги Эйлера. Каждому множеству ставится в соответствие круг. Тогда, например, объединение множеств A и B есть заштрихованная область на рис.2.1., пересечение – заштрихованная область на рис.2.2 и разность – заштрихованная область на рис. 2.3.

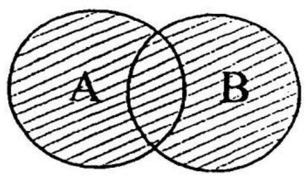

рис. 2.1. $A \cup B$

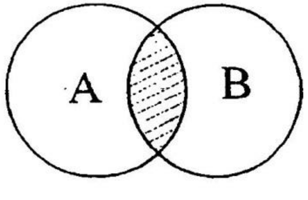

рис.2.2. $A \cap B$

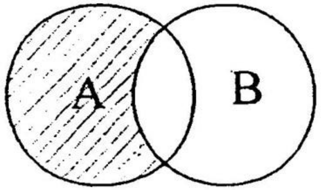

рис.2.3. $A \setminus B$

Пример 2.1. Доказать равенство $A \setminus (A \setminus B) = A \bigcap B$.

Рассмотрим элементы множества, которое определено, как $A \setminus (A \setminus B)$. Во–первых, элементы x этого множества принадлежат множеству A, т.е. $x \in A$. Во–вторых, из множества A отняли те элементы, которые не принадлежат множеству B. Таким образом, элементы рассматриваемого множества с одной стороны принадлежат A, и, одновременно, принадлежат множеству B, т.е. по определению это пересечение множеств A и B.

С помощью кругов Эйлера можно изобразить как на рис. 2.4, где заштрихованная область это $A \setminus B$, а закрашенная – $A \setminus (A \setminus B)$.

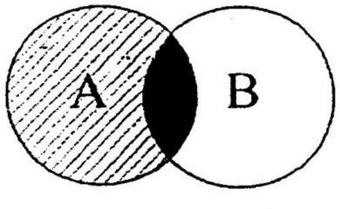

рис.2.4. $A \setminus (A \setminus B)$

<u>Определение 2.8</u>. Множество, элементами которого являются все упорядоченные пары $(a;b)$, $a \in A, b \in B$, называется прямым или декартовым произведением множеств A и B и обозначается $A \times B$.

Равенство $A \times B = B \times A$ справедливо только в случае $A = B$.

<u>Определение 2.9</u>. Между множествами A и B установлено **взаимно однозначное соответствие**, если каждому элементу множества A сопоставлен один и только один элемент множества B, так, что различным элементам множества A сопоставлены различные элементы множества B и каждый элемент множества B оказывается сопоставлен некоторому элементу множества A.

<u>Определение 2.10</u>. Множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, называются **эквивалентными**. Пишут $A \sim B$.

Свойства отношения эквивалентности.

1. $A \sim A$ - рефлексивность;
2. если $A \sim B$, то $B \sim A$ - симметричность;
3. если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$ - транзитивность.

<u>Определение 2.11</u>. Если $A \sim B$, то говорят, что множества A и B имеют одинаковую мощность. Мощность множества A обозначается $n(A)$.

<u>Определение 2.12</u>. Множество A называется **конечным**, если существует такое конечное число $n \in N$, что $A \sim \{1, 2, \ldots, n\}$.

<u>Определение 2.13</u>. Множество A называется **счетным**, если $A \sim N$.

<u>Определение 2.14</u>. Множество называется **несчетным** если оно имеет мощность большую, чем мощность N.

<u>Утверждение</u>. Число подмножеств конечного множества из n элементов конечно и равно числу 2^n. Доказательство этого утверждения будет приведено в конце лекции.

<u>Теорема Кантора 1</u>. Множество всех рациональных чисел счетно.

<u>Теорема Кантора 2</u>. Множество R всех действительных чисел несчетно.

Доказательство этих двух теорем требует некоторых знаний теории множеств, далеко выходящих за рамки школьной программы, поэтому мы их опустим. Заметим, что основоположником теории множеств является немецкий математик Георг Кантор.

Определение 2.15. Множество A называется множеством мощности **континуум**, если $A \sim R$.

Отметим важные формулы, которые имеют практическое применение при решении задач:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B),$$

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) -$$

$$- n(A \cap C) - n(A \cap B) - n(C \cap B) + n(A \cap B \cap C),$$

....

Пример 2.2. Доказать, что объединение счетного числа счетных множеств счетно.

Пусть имеется счетное число счетных множеств $A_1, A_2, \ldots$. Расположив элементы каждого из них слева направо в последовательность $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots\}$ и поместив эти последовательности друг под другом, получим таблицу

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

Теперь эту таблицу развернем, например, следующим образом

$$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31} \ldots .$$

Если у множеств $A_1, A_2, \ldots$ есть пересечения, т.е. одинаковые элементы, то их надо выбросить. Таким образом, построена последовательность, в которой каждому элементу можно поставить в соответствие натуральное число.

Из этой задачи, в частности, следует доказательство первой теоремы Кантора.

Действительно, рациональные числа представимы в виде несократимых дробей с целыми числителем и знаменателем. Множество дробей с данным фиксированным знаменателем счетно, поэтому множество рациональных чисел представимо в виде объединения счетного числа счетных множеств. По доказанному в этом примере: такое объединение счетно.

2.2. Комбинаторика

Определение 1.16. Множество называется **упорядоченным**, если для любых двух его элементов a и b установлено отношение порядка $a \le b$ ($b \le a$), обладающее свойствами:

1. рефлексивности — $a \le a$;
2. антисимметричности — если $a \le b$ и $b \le a$, то a и b совпадают;
3. транзитивности — если $a \le b$ и $b \le c$, то $a \le c$.

Пустое множество считается упорядоченным.

Элементы конечных упорядоченных множеств записываются в круглых скобках.

Основное правило комбинаторики.

Если переменная x принимает n значений и после этого переменная y принимает k значений, то упорядоченная пара $(x; y)$ принимает $n \cdot k$ значений.

Пример 2.3. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске две ладьи так, чтобы одна не могла взять другую?

Первую ладью мы можем разместить на шахматной доске 64 способами. Предположим, что мы поместили ладью на какую-нибудь клетку. Сколькими способами может быть размещена вторая ладья? Первая ладья бьет поля по вертикали и горизонтали от клетки, в которой находится. Значит эта ладья бьет 15 клеток, с учетом той, на которой находится. Значит, вторую ладью мы можем поместить на оставшиеся 49 клеток, т.е. 49 способами. По основному правилу комбинаторики надо перемножить 64 и 49.

Ответ: $64 \cdot 49$.

Определение 2.17. Пусть множество A содержит n элементов. Каждое его упорядоченное подмножество, состоящее из k элементов, называется **размещением** из n элементов по k элементов.

Число размещений из n элементов по k элементов обозначается $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, $k \le n$, $0! = 1$.

Определение 2.18. Размещения из n элементов по n элементов называются перестановками из n элементов.

Число всех перестановок из n элементов обозначают $P_n = A_n^n = n!$.

Определение 2.19. Пусть в множестве A n элементов. Каждое его подмножество, содержащее k элементов, называется **сочетанием** из n элементов по k элементов. Число всех таких сочетаний обозначается $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

Справедливы равенства

1°. $C_n^k\ k! = A_n^k$;

2°. $C_n^k = C_n^{n-k}$;

3°. $C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k$.

Докажем, например, второе равенство

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!};\ C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}.$$

Мы дали формальное определение, а теперь попробуем разобраться, что все это означает?

Пусть нам надо рассадить n человек на k стульев. Сколькими способами мы можем это сделать.

На первый стул мы можем посадить любого из n человек. После того как на первый стул посажен один человек, на второй стул мы можем посадить любого из оставшихся $(n-1)$ человек. На третий стул, соответственно, любого из оставшихся $(n-2)$ человек и т.д. На k - й стул мы можем посадить любого из оставшихся $(n-k+1)$ человек. По основному правилу комбинаторики мы должны перемножить все эти числа. Т.е. число способов, которыми можно рассадить n человек на k стульев равно $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$. Но это и есть A_n^k . Если $k=n$, то получается P_n .

Рассмотрим теперь другую задачу. Сколькими способами можно из n человек создать группы по k человек. Это все равно, что рассадить n человек на k стульев, но без учета порядка занятия стульев, т.е. получается $\dfrac{A_n^k}{k!} = C_n^k$.

Пример 2.4. Номера трамвайных маршрутов обозначаются двумя цветными фонарями. Какое количество различных маршрутов можно обозначить, если использовать фонари 8 цветов?

Это типичная задача на рассадку 8 человек на 2 стульях. Единственным дополнением является то, что в условии задачи не сказано, что маршруты расцвечиваются обязательно разными цветами. Поэтому надо добавить еще 8 способов, при которых маршруты расцвечиваются двумя одноцветными фонарями.

Ответ: $A_8^2 + 8$.

Для того, чтобы достаточно четко определять, в каких случаях надо применять операцию сложения, а в каких умножения, надо мысленно проделывать следующее. Если действия соединяются союзом "и", т.е. и то и другое, то надо умножать. Если между действиями можно поставить союз "или", т.е. или одно или другое, то надо складывать.

Пример 2.5. Тридцать человек разбиваются на 3 группы по 10 человек в каждой. Сколько может быть различных составов групп?

Сначала определяем сколькими способами можно создать первую группу - C_{30}^{10}. Для создания второй группы остается уже 20 человек, поэтому количество вариантов, которыми можно создать вторую группу после создания первой, равно C_{20}^{10}. Соотсетствующее количество вариантов для третье группы равно $C_{10}^{10} = 1$. Поскольку по условию задачи должны быть созданы все три группы, т.е. действия объединены союзом "и", то надо все три полученных числа перемножить.

Ответ: $C_{30}^{10}\cdot C_{20}^{10}\cdot C_{10}^{10}$.

Пример 2.6. Лифт останавливается на 10 этажах. Сколькими способами могут распределиться по этим этажам 8 пассажиров, находящихся в кабине лифта?

Каждый из пассажиров может выйти на каждом из 10 этажей, т.е. для одного пассажира существует 10 возможностей выйти. Между событиями выхода каждого отдельного пассажира ставится союз "и", поэтому мы 10 умножаем само на себя 8 раз.

Ответ: 10^8

Пример 2.7. Садовник должен в течении 3 дней посадить 10 деревьев. Сколькими способами он может распределить по дням работу, если будет сажать не менее одного дерева в день?

Для решения этой задачи надо проявить немного воображения. Нарисуем (рис. 2.5) на прямой 10 кружочков, означающих деревья. Теперь садовник должен поставить две палочки между этими кружочками, чтобы распределить эти деревья на 3 дня посадки. Промежутков между деревьями 9, поэтому задача звучит следующим образом. Сколькими способами из 9 промежутков можно выбрать 2. По определению это C_9^2 .

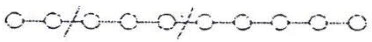

рис.2.5.

Ответ: C_9^2 .

Пример 2.8. Двенадцати ученикам выданы 2 варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить учеников в 2 одинаковых ряда так, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

Пронумеруем стулья от 1 до 12, причем стул, стоящий за номером один имеет седьмой номер.

Для того, чтобы первый вариант не был у двух учеников, сидящих рядом, надо рассадить их всех или на нечетные или на четные стулья. Рассадим их сначала на нечетные стулья. Заметим, что 6 учеников, имеют первый вариант и 6 - второй. Поэтому сначала мы решаем задачу рассадки 6 учеников с первым вариантом контрольной по 6 стульям. Это можно сделать $6!$ способами. Для учеников со вторыми вариантами рассадка по стульям с четными номерами осуществляется так же $6!$ способами. Эти два действия объединяются союзом "и", поэтому рассадка учеников с первым вариантом по нечетным стульям, а со вторым вариантом по четным стульям осуществляется $(6!)^2$ способами.

Мы рассаживали учеников с первым вариантом на стулья с нечетными номерами. Такое же количество возможностей рассадки учеников с первым вариантом на стулья с четными номерами, а со вторым вариантом - на стулья с нечетными номерами. Эти события имеют союз "или", поэтому общее число вариантов равно $(6!)^2+(6!)^2$.

Ответ: $2(6!)^2$.

Заметим, что мы намеренно не производим вычислений до конечного числа. Желающие могут осуществить эту процедуру самостоятельно. Некоторым возможно под силу написать программу на компьютере, которая будет осуществлять подобные вычисления. Если кому-нибудь удастся это сделать, то эта программа сильно поможет при учебе в институте, даже если Вы будете учиться в экономическом ВУЗе.

2.3. Метод математической индукции

Для доказательства некоторого утверждения, которое должно выполняться для всех значений $n \in N$, начиная с некоторого n_0 довольно часто используется метод математической индукции. Суть этого метода в следующем.

1. Проверяется справедливость утверждения для $n = n_0$ (база индукции).

2. Предполагается справедливость утверждения для произвольного $n = k$ (предположение индукции).

3. Доказывается справедливость утверждения для $n = k+1$, с учетом предполагаемой справедливости его для $n = k$ (шаг индукции). На основании этого делается вывод о верности утверждения для всех n , начиная с n_0 .

Действительно из доказанного будет следовать, что утверждение верно для первого n_0 следовательно верно для $n_0 +1$ и т.д.

Пример 2.9. Доказать, что для любых натуральных n , число $7^{2n} - 4^{2n}$ делится на 33.

При $n=1$ утверждение верно. Предположим, что оно верно для $n=k$, т.е. $7^{2k}-4^{2k}$ делится на 33. Докажем, что число $7^{2k+2}-4^{2k+2}$ делится на 33. Напишем цепочку очевидных равенств

$$7^{2k+2}-4^{2k+2}=49\cdot 7^{2k}-16\cdot 4^{2k}=$$

$$=(33+16)\,7^{2k}-16\cdot 4^{2k}=$$

$$=16\cdot\left(7^{2k}-4^{2k}\right)+33\cdot 7^{2k}$$

Первое слагаемое в последнем выражении делится на 33 по сделанному предположению, а второе – в силу того, что один из множителей равен 33.

Пример 2.10. Доказать, что $\underbrace{3+33+\ldots+\underbrace{33..3}_{n}}_{n}=\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{27}$.

При $n=1$ равенство верно. Предположим, что оно верно для $n=k$, т.е.

$$\underbrace{3+33+\ldots+\underbrace{33..3}_{k}}_{k}=\frac{10^{k+1}-9k-10}{27}.$$

Докажем, что

$$\underbrace{3+33+\ldots+\underbrace{33..3}_{k+1}}_{k+1}=\frac{10^{k+2}-9(k+1)-10}{27}.$$

Рассмотрим отдельно левую часть. Сумму первых k слагаемых заменим используя верную по предположению формулу и получим

$$\underbrace{3+33+\ldots+\underbrace{33..3}_{k+1}}_{k+1}=\frac{10^{k+1}-9k-10}{27}+\underbrace{33..3}_{k+1},$$

Обозначим $A=\underbrace{33..3}_{k+1}$ и запишем его в виде

$$A=3\cdot\left(10^{k}+10^{k-1}+10^{k-2}+\ldots+10^{1}+1\right).$$

В скобках сумма $k+1$ члена геометрической прогрессии со знаменателем 10, поэтому

$$A=3\,\frac{10^{k+1}-1}{9}=\frac{10^{k+1}-1}{3}.$$

Подставляя значение A, получим

$$\underbrace{3+33+\ldots+\underbrace{33..3}_{k+1}}_{k+1}=$$

$$=\frac{10^{k+1}-9k-10}{27}+\frac{10^{k+1}-1}{3}=\frac{10^{k+2}-9(k+1)-10}{27}.$$

Докажем теперь две важнейшие формулы, анонсированные в предыдущей лекции.

Пример 2.11. Доказать

$$a^{n}-b^{n}=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^{2}+\ldots+a\,b^{n-2}+b^{n-1}\right).$$

Воспользуемся методом математической индукции.

При $n=1$ равенство верно: $a-b=a-b$.

Предположим, что оно верно при $n=k$, т.е. верно

$$a^{k}-b^{k}=$$

$$=(a-b)\left(a^{k-1}+a^{k-2}b+a^{k-3}b^{2}+\ldots+a\,b^{k-2}+b^{k-1}\right).$$

Докажем, что при сделанном предположении верно

$$a^{k+1}-b^{k+1}=$$

$$=(a-b)\left(a^{k}+a^{k-1}b+a^{k-2}b^{2}+\ldots+a\,b^{k-1}+b^{k}\right).$$

Запишем правую часть в виде

$$(a-b)\left(\left(a^{k}+a^{k-1}b+a^{k-2}b^{2}+\ldots+a\,b^{k-1}\right)+b^{k}\right)=$$

$$=(a-b)\left(a\left(a^{k-1}+a^{k-2}b+a^{k-3}b^2+\ldots+b^{k-1}\right)+b^k\right)=$$

$$=a\left(a^k-b^k\right)+(a-b)b^k=a^{k+1}-b^{k+1}.$$

Пример 2.12. Доказать $a^{2k+1}+b^{2k+1}=$

$$=(a+b)\left(a^{2k}-a^{2k-1}b+a^{2k-2}b^2+\ldots-ab^{2k-1}+b^{2k}\right).$$

Эта формула доказывается с помощью формулы, полученной в предыдущем примере. Запишем левую часть в виде

$$a^{2k+1}+b^{2k+1}=a^{2k+1}-(-b)^{2k+1},$$

и применим формулу из примера 2.11.

2.4. Бином Ньютона

Справедлива формула, называемая биномом Ньютона

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^ia^{n-i}b^i+\ldots+C_n^nb^n.$$

Доказывать будем по индукции.
При $n=1$ равенство верно.
Предположим, что оно верно для $n=k$, т.е

$$(a+b)^k=C_k^0a^k+C_k^1a^{k-1}b+\ldots\ldots+C_k^kb^k$$

и докажем отсюда справедливость равенства

$$(a+b)^{k+1}=C_{k+1}^0a^{k+1}+C_{k+1}^1a^kb+\ldots+C_{k+1}^{k+1}b^{k+1}.$$

Для доказательства в левой части напишем

$$(a+b)^{k+1}=(a+b)^k(a+b),$$

подставим верную по предположению формулу и, воспользовавшись тем, что $C_{k+1}^{m+1}=C_k^{m+1}+C_k^m$, получим искомый результат.

Пример 2.13. Найти коэффициент при x^{-6} в биномиальном разложении $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{x}\right)^{10}$.

Сначала определим число k в формуле бинома Ньютона, которое даст нам необходимый показатель степени при x. Запишем

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^{10-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k=x^{-6}\Rightarrow\frac{10-k}{3}-k=-6\Rightarrow k=7.$$

Таким образом, искомый член биномиального разложения имеет вид

$$C_{10}^7\cdot\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\cdot\left(-\frac{2}{x}\right)^7=-\frac{10!\cdot2^7}{7!\cdot3!}\cdot x^{-6}=$$

$$=-\frac{8\cdot9\cdot10\cdot2^7}{1\cdot2\cdot3}x^{-6}=-15\cdot2^{10}x^{-6}.$$

Ответ: $-15\cdot2^{10}$.

Пример 2.14. Найти наибольший член разложения суммы $\left(1+\sqrt{2}\right)^{30}$.

По биному Ньютона

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^{30}=C_{30}^0+C_{30}^1\sqrt{2}+\ldots+C_{30}^{15}2^7\sqrt{2}+\ldots+C_{30}^{30}2^{15}.$$

Первые слагаемые монотонно возрастают. Действительно, отношение одного биномиального коэффициента к последующему определяется равенством

$$\frac{C_{30}^k}{C_{30}^{k+1}}=\frac{30!}{(30-k)!\cdot k!}\frac{(30-k-1)!\cdot(k+1)!}{30!}=\frac{k+1}{30-k},$$

т.е отношение каждого следующего слагаемого к предыдущему равно

$$\frac{C_{30}^{k+1}\left(\sqrt{2}\right)^{k+1}}{C_{30}^{k}\left(\sqrt{2}\right)^{k}}.$$

Таким образом, надо найти такое минимальное целое значение k^*, при котором $\frac{C_{30}^{k+1}}{C_{30}^{k}}\cdot\sqrt{2}<1$, и показать, что для каждого следующего значения k это неравенство будет выполняться. Тогда слагаемое $C_{30}^{k^*}\left(\sqrt{2}\right)^{k^*}$ и будет искомым. Сделаем эквивалентные преобразования

$$\frac{C_{30}^{k+1}}{C_{30}^{k}}\cdot\sqrt{2}<1 \Leftrightarrow \frac{30-k}{k+1}\cdot\sqrt{2}<1 \Leftrightarrow k>\frac{30\sqrt{2}-1}{1+\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k>60-31\sqrt{2}+1.$$

Таким образом, $k^*=18$. Очевидно, что для всех $19\le k<30$ последнее неравенство выполняется. В результате наибольший член разложения равен $C_{30}^{18}\cdot 2^9$.

Теперь рассмотрим несколько примеров на свойства биномиальных коэффициентов.

Пример 2.15. Найти сумму биномиальных коэффициентов.

Подставим в формулу бинома Ньютона вместо a и b единицы

$$(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^i+\ldots+C_n^n=2^n.$$

Ответ: 2^n.

Пример 2.16. Доказать, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

Подставим в формулу бинома Ньютона вместо a единицу и вместо b – -1

$$(1-1)^n=C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}+(-1)^nC_n^n=0.$$

Ответ: 0.

Соотношения, полученные в примерах 2.15 и 2.16 удается использовать при решении различных задач, связанных с нахождением и доказательством комбинаторных формул.

Пример 2.17. Найти $S_n=C_n^1+2C_n^2+\ldots+nC_n^n$.

Воспользуемся тем, что $C_n^k=C_n^{n-k}$ и запишем искомую сумму в виде

$$S_n=C_n^{n-1}+2C_n^{n-2}+\ldots+(n-1)C_n^1+nC_n^0.$$

Теперь сложим два выражения для S_n

$$2S_n=nC_n^0+C_n^1+(n-1)C_n^1+(n-2)C_n^2+2C_n^2+\ldots+nC_n^n=$$

$$=n\left(C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n\right)=n2^n.$$

Ответ: $S_n=n2^{n-1}$.

Пример 2.18. Найти $S_n=C_n^1-2C_n^2+\ldots+(-1)^{n-1}nC_n^n$.

Используем то, что $C_{n+1}^{k+1}=C_n^{k+1}+C_n^k$ и запишем нашу сумму в виде

$$S_n=\left(C_{n-1}^0+C_{n-1}^1\right)-2\left(C_{n-1}^1+C_{n-1}^2\right)+\ldots+(-1)^{n-1}n\left(C_{n-1}^{n-1}+0\right).$$

Теперь при $n=1$ имеем $S_n=1$, а при $n>1$ раскрываем скобки и получаем, что

$$S_n=C_{n-1}^0-C_{n-1}^1+C_{n-1}^2-\ldots+(-1)^{n-2}C_{n-1}^{n-2}+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}=0.$$

Ответ: если $n=1$, то $S_n=1$; если $n>1$, то $S_n=0$.

Пример 2.19. Найти $S_n=\left(C_n^0\right)^2-\left(C_n^1\right)^2+\ldots+(-1)^n\left(C_n^n\right)^2$.

Воспользуемся очевидным тождеством

$$(1-x)^n\cdot(1+x)^n\equiv\left(1-x^2\right)^n.$$

В следующей лекции мы докажем, что тождественное равенство многочленов возможно только при равенстве коэффициентов при x в одинаковой степени в обеих частях равенства. Сейчас примем это на веру, найдем коэффициенты при x^n в обеих частях тождества и приравняем их между собой.

Пусть $n=2k+1$, тогда коэффициент при x^{2k+1} в правой части тождества равен нулю, так как в биномиальном разложении присутствуют только четные степени x.

Рассмотрим подробно левую часть

$$(1-x)^n=\left(C_n^0-C_n^1x+\ldots+C_n^{n-1}x^{n-1}-C_n^nx^n\right)$$

$$(1+x)^n=\left(C_n^0+C_n^1x+\ldots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n\right)$$

Перемножаем правые части этих равенств и рассматриваем в произведении только коэффициент при x^n, который должен быть равен нулю

$$0=\left(C_n^0\cdot C_n^n\right)-\left(C_n^1\cdot C_n^{n-1}\right)+\ldots+\left(C_n^{n-1}\cdot C_n^1\right)-\left(C_n^n\cdot C_n^0\right)=S_n.$$

Пусть теперь $n=2k$, тогда коэффициент при x^{2k} в правой части тождества равен $(-1)^k\ C_{2k}^k$, а в левой части по прежнему – S_n.

Ответ: $S_n=0$, при $n=2k+1$; $S_n=(-1)^k\ C_{2k}^k$, при $n=2k$.

Задачи для разбора с преподавателем

2.1. В одном башкирском селе каждый житель говорит или по-башкирски, или по-русски, или на обоих языках, при этом 912 жителей говорят по-башкирски, 653 - по-русски, причем 435 человек говорят на обоих языках. Сколько жителей в этом селе?

2.2. Группа туристов выехала в заграничное путешествие. Из них владеют английским языком 28 человек, французским - 13, немецким - 10, английским и французским - 8, английским и немецким - 6, французским и немецким - 5, всеми тремя языками - 2, а 41 человек не владеет ни одним из трех языков. Сколько туристов в группе?

2.3. Найти множество X, если $X\cap(X\cup A)=\varnothing$.

2.4. Найти множества X и Y, если $\begin{cases} X\cup Y=A \\ X\cap A=Y \end{cases}$.

2.5. Найти множества X и Y, если $\begin{cases} X\cup(Y\cap A)=A \\ X\cap(Y\cup A)=A \end{cases}$.

2.6. Доказать равенство $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

2.7. Доказать включение $A\cup(B\setminus C)\supset(A\cup B)\setminus C$.

2.8. Известно, что $X=A\cup(B\setminus C)$, $Y=(A\cup B)\setminus(A\cup C)$. Определить в каком соотношении $(X\subset Y, X\supset Y, X=Y)$ находятся множества X, Y.

2.9. Верно ли равенство $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap B$ для произвольных множеств A,B,C?

2.10. Когда возможно равенство $A\cup B=A$.

2.11. Множество A состоит из натуральных чисел, причем: 1) $1\in A$; 2) если $n\in A$, то $2n+1\in A$; 3) если $3n+1\in A$, то $n\in A$. Верно ли, что $8\in A$?

Доказать формулы:

2.12. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

2.13. $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\ldots+n(n+1)(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

2.14. $\dfrac{1}{1\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot9}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)\cdot(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$.

2.15. Доказать, что 7^n-1 делится на 6.

2.16. Доказать, что $5^{n+3}+11^{3n+1}$ делится на 17.

2.17. Доказать, что $9^{n+1}-8n-9$ делится на 16.

2.18. Доказать, что $4^n>7n-5$.

2.19. Найти все $n\in N$, такие, что $C_n^{n-2}+2n=9$.

2.20. Найти все $n\in N$, такие, что $C_n^5<C_n^3$.

Доказать формулы:

2.21. $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\ldots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$.

2.22. $C_n^1-2C_n^2+\ldots+(-1)^{n-1}nC_n^n=0$.

2.23. Сколькими способами на шахматной доске можно расставить 8 ладей одного цвета, чтобы они не били друг друга и стояли только на белых клетках?

2.24. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых нечетны?

2.25. На книжной полке помещаются 30 томов. Сколькими способами их можно расставить, чтобы при этом 1-й и 2-й тома не стояли рядом?

2.26. Два почтальона разносят письма по 10 адресам. Сколькими способами они могут сделать эту работу?

2.27. Собрание из 80 человек выбирает председателя, секретаря и трех членов ревизионной комиссии. Сколькими способами это можно сделать?

2.28. Группа из n человек, в том числе A и B, располагаются в ряд. Сколько возможно способов такого расположения, при котором между A и B будут располагаться $r(0 \le r \le n-2)$ человек?

2.29. В биномиальном разложении $S(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{2}{x}\right)^{12}$ найти слагаемое, не зависящее от x.

2.30. В биномиальном разложении $S(x)=\left(x+2\sqrt{x}\right)^{6}$ найти коэффициент при x^4.

2.31. В биномиальном разложении $S(x,y)=\left(x^3y+xy^4\right)^{10}$ найти слагаемое, с одинаковыми показателями степеней при x и y.

Задачи для самостоятельного решения

2.1д. Пол комнаты площадью 18 $м^2$ покрыт тремя коврами. Площадь одного ковра - 6 $м^2$, другого - 5 $м^2$ и третьего - 4 $м^2$. Каждые два ковра перекрываются на площади 1 $м^2$, причем все три ковра перекрываются на площади 0,5 $м^2$. Какова площадь пола не покрытого коврами?

2.2д. Среди абитуриентов, выдержавших вступительные экзамены в технический вуз, оценку "5" получили по математике - 48 человек, по физике - 37, по русскому языку - 42, по математике и физике - 24, по физике и русскому - 26, по математике и русскому - 31, по всем трем предметам - 4. Сколько абитуриентов получили одну оценку "5"? Сколько получили две оценки "5"?

2.3д. Найти множество X, если $X \cup (X \cap A) = \varnothing$.

2.4д. Найти множества X и Y, если $\begin{cases} X \cap Y = A \\ X \cup A = Y \end{cases}$.

2.5д. Найти множества X и Y, если $\begin{cases} (X \cup A) \cap (Y \cup B) = \varnothing \\ X \cup Y = A \cup B \end{cases}$.

2.6д. Доказать равенство $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.

2.7д. Доказать равенство $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$.

2.8д. Доказать равенство $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

2.9д. Доказать включение $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$.

2.10д. Известно, что $X = (A \cap B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$. Определить в каком соотношении $(X \subset Y, X \supset Y, X = Y)$ находятся множества X, Y.

2.11д. Известно, что $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Определить в каком соотношении $(X \subset Y, X \supset Y, X = Y)$ находятся множества X, Y.

2.12д. Верно ли равенство $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ для произвольных множеств A, B, C?

2.13д. Когда возможно равенство $A \cap B = A$.

2.14д. Когда возможно равенство $A \cup B = A \cap B$.

2.15д. Все вареные красные раки мертвы, а все вареные мертвые раки красны. Следует ли отсюда, что все красные мертвые раки варены?

Доказать:

2.16д. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + (n-1)n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

2.17д. $1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 3^2 + \ldots + n^2(n-1) = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$.

2.18д. $\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

2.19д. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \ldots + \frac{2n-1}{2^n} = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$.

2.20д. Доказать, что $n^3 + 5n$ делится на 6.

2.21д. Доказать, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

2.22д. Доказать, что $6^{2n} + 3^{2+n} + 3^n$ делится на 11.

2.23д. Доказать, что $6^{2n} - 2^{1+n} + 19^n$ делится на 17.

2.24д. Доказать, что $10^n + 18n - 28$ делится на 27.

2.25д. Доказать, что $2^n > 5n + 1$, $n \ge 5$.

2.26д. Доказать, что $3^n - 2^n \ge n$.

2.27д. Найти все $n \in N$, такие, что $C_n^{n-2} = C_n^3$.

2.28д. Найти все $n \in N$, такие, что $C_{15}^{n-2} > C_{15}^n$.

Доказать:

2.29д. $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{2^2}C_n^2 + \ldots + \frac{1}{2^n}C_n^n = \frac{3^n}{2^n}$.

2.30д. $C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

2.31д. $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n\,2^{n-1}$.

2.32д. На первой из двух параллельных прямых лежат 15 точек , на второй – 21. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

2.33д. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

2.34д. Сколько четырехзначных чисел, составленных из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5 содержат цифру 3 (цифры в числах не повторяются)?

2.35д. Десять групп занимаются в 10 расположенных подряд аудиториях. Сколько существует вариантов рассписания, при котором группы 1 и 2 занимались бы в соседних аудиториях?

2.36д. Поезд делает 16 остановок, на которых выходят пассажиры. Сколькими способами могут распределиться между этими остановками 100 пассажиров, вошедших в поезд на конечной станции?

2.37д. Из группы в 15 человек должны быть выделены бригадир и 4 члена бригады. Сколькими способами это можно сделать?

2.38д. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 составляют всевозможные пятизначные числа, не содержащие одинаковых цифр. Определить количество чисел, в которых есть цифры 2, 4, 5 одновременно.

2.39д. Сколькими способами 7 яблок и 3 апельсина можно положить в два пакета так, чтобы в каждом пакете был хотя бы один апельсин и чтобы количество фруктов в пакетах было одинаковым?

2.40д. Буквы азбуки Морзе состоят из двух сисмволов (точка и тире). Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не больше 5 символов?

2.41д. Из вазы, в которой стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики, выбирают один красный и два розовых цветка. Сколькими способами это можно сделать?

2.42д. Восемь авторов должны написать книгу из 16 глав. Сколькими способами можно распределить материал между авторами, если два человека пишут по три главы, четыре - по две и два - по одной главе книги?

2.43д. Сколькими способами группа из n человек может разместиться за круглым столом? В скольких вариантах A и B окажутся сидящими рядом?

2.44д. Сколькими способами n мужчин и n женщин можно рассадить за круглым столом так, чтобы никакие две женщины не сидели рядом?

2.45д. В биномиальном разложении $S(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{10}$ найти слагаемое, не зависящее от x.

2.46д. В биномиальном разложении $S(x)=\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{11}$ найти коэффициент при x^{-1}.

2.47д. В биномиальном разложении $S(x,y)=\left(x\sqrt{xy}+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{6}$ найти слагаемое с одинаковыми показателями степеней при x и y.

Ответы

Задачи для разбора с преподавателем

2.1. 1130; **2.2.** 75; **2.3.** $X=\varnothing$; **2.4.** $X=Y=A$; **2.5.** $X=A$, Y – любое; **2.8.** если $A=\varnothing$, то $Y=X$, если $A\neq\varnothing$, то $Y\subset X$; **2.9.** да; **2.10.** $B\subseteq A$; **2.11.** да; **2.19.** 3; **2.20.** $n=5,6,7$; **2.23.** 576; **2.24.** 5^6; **2.25.** $28\cdot 29!$; **2.26.** 2^{10}; **2.27.** $C_{80}^1\cdot C_{79}^1\cdot C_{78}^3$; **2.28.** $2(n-r-1)(n-2)!$; **2.29.** $2^4\cdot C_{12}^8$; **2.30.** $2^4\cdot C_6^4$; **2.31.** $C_{10}^6\cdot x^{22}y^{22}$.

Задачи для самостоятельного решения

2.1д. 5,5 $м^2$; **2.2д.** 50,78; **2.3д.** $X=\varnothing$; **2.4д.** $X=Y=A$; **2.5д.** $X=A$, $Y=B$; **2.10д.** $X\subset Y$; **2.11д.** $X\subset Y$; **2.12д.** да; **2.13д.** $A\subseteq B$; **2.14д.** $A=B$; **2.15д.** да; **2.27д.** 5; **2.28д.** $n=9,10,11,12,13,14,15$; **2.32д.** $21\cdot C_{15}^2+15\cdot C_{21}^2$; **2.33д.** 48; **2.34д.** 240; **2.35д.** $2\cdot 9!$; **2.36д.** 2^{400}; **2.37д.** $C_{15}^1\cdot C_{14}^4$; **2.38д.** $C_5^3\cdot 3!\cdot 42$; **2.39д.** $C_3^1\cdot C_7^3$; **2.40д.** 62; **2.41д.** 60; **2.42д.** $C_{16}^3\cdot C_{13}^3\cdot C_{10}^2\cdot C_8^2\cdot C_6^2\cdot C_4^2\cdot C_2^1$; **2.43д.** а) $(n-1)!$, б) $2(n-2)!$; **2.44д.** $n!\cdot(n-1)!$; **2.45д.** C_{10}^4; **2.46д.** C_{11}^7; **2.47д.** $2^4\cdot C_6^2\cdot xy$.

Лекция №3

Алгебраические многочлены. Теорема Безу. Теорема Виета

3.1. Теорема Безу.

Определение 3.1. Алгебраическим многочленом степени n называется выражение вида

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,\ a_0\neq 0,$$

а $P_n(a)=a_0a^n+a_1a^{n-1}+\ldots+a_{n-1}a+a_n$, $n\in N$ является значением многочлена в точке a.

Пример 3.1. Сумма коэффициентов многочлена $P_n(x)$ равна A, а сумма коэффициентов многочлена $Q_m(x)$ равна B. Найти сумму коэффициентов многочлена $P_n(x)\cdot Q_m(x)$.

Сумма коэффициентов любого многочлена $P_r(x)$ равна $P_r(1)$, поэтому сумма коэффициентов многочлена $R(x)=P_n(x)\cdot Q_m(x)$ равна $R(1)=P_n(1)\cdot Q_m(1)=AB$.

Теорема 3.1. (Безу). Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на $(x-a)$ равен $P_n(a)$.

Следствие 1. Любой многочлен $P_n(x)$ при заданном $q_l(x)$ можно представить, причем единственным образом, в виде $P_n(x)=q_l(x)Q_{n-l}(x)+r_k(x)$, где $l\leq n$ и $k<l$.

Следствие 2. Для того, чтобы многочлен $P_n(x)$ делился на $(x-a)$ без остатка, необходимо и достаточно выполнения равенства $P_n(a)=0$.

Пример 3.2. Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на $(x-a)$ равен A, а остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на $(x-b)$, $b\neq a$ равен $B\neq A$. Найти остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на $(x-a)(x-b)$.

По следствию 1 из теоремы Безу имеем

$$P_n(x)=(x-a)(x-b)Q(x)+r(x),$$

причем степень многочлена $r(x)$ не превосходит единицы. Таким образом, можно записать, что $r(x)=kx+c$. Теперь воспользуемся теоремой Безу

$$\begin{cases} A=P(a)=r(a)=ka+c \\ B=P(b)=r(b)=kb+c \end{cases}.$$

Решаем систему относительно k и c и получаем

$$r(x)=\frac{A-B}{a-b}x+\frac{Ba-Ab}{a-b}.$$

Заметим, что запоминать эти формулы нет никакой необходимости, так как их проще, как показывает следующий пример, выводить в каждом конкретном случае.

Пример 3.3. Найти остаток от деления на x^2-1 многочлена $P_{57}(x)=x^{57}+2x^{31}-19x^5$.

По следствию 1 из теоремы Безу остаток имеет вид линейной функции $r(x)=kx+b$

Имеем

$$P_{57}(1)=1+2-19=-16=k+b$$

$$P_{57}(-1)=-1-2+19=16=-k+b,$$

следовательно остаток $r(x)=-16x$.

Ответ: $-16x$.

Довольно часто для получения остатка от деления необходимо проводить алгебраические преобразования.

Пример 3.4. Пусть $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$. Найти остаток от деления $f(x^5)$ на $f(x)$.

Заметим, что

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=(x-1)f(x).$$

Теперь, используя формулу a^n-b^n, в функции $f(x^5)$ выделим части, делящиеся на $f(x)$

$$f\left(x^5\right)=x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1=$$
$$=\left(x^{20}-1\right)+\left(x^{15}-1\right)+\left(x^{10}-1\right)+\left(x^5-1\right)+5=$$
$$=\left(x^5-1\right)\left(x^{15}+x^{10}+x^5+1\right)+\left(x^5-1\right)\left(x^{10}+x^5+1\right)+$$
$$+\left(x^5-1\right)\left(x^5+1\right)+\left(x^5-1\right)+5\ .$$

В силу того, что $x^5-1 \vdots f\left(x\right)$, получаем остаток равный 5.

Определение 3.2. Если при некотором значении x^* выполняется равенство $P_n\left(x^*\right)=0$, то x^* называется корнем уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, a_0\neq 0,$$

а значение x^* называется решением этого уравнения.

Теорема 3.2. Если все коэффициенты уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\,,a_0\neq 0$$

целые и $x^*=\dfrac{p}{q}$ (несократимая рациональная дробь, $p,q\in Z$) – корень уравнения, то a_0 делится нацело на q, а a_n делится нацело на p.

Доказательство. Подставим в уравнение значение x^* и умножим обе части получившегося тождества на $q^n\neq 0$. Получим

$$a_0p^n+a_1p^{n-1}q+\cdots+a_{n-1}pq^{n-1}+a_nq^n=0\,,a_0\neq 0\,.$$

Каждое слагаемое кроме первого делится нацело на q, поэтому для равенства необходимо, чтобы a_0 делилось нацело на q. Аналогично, все слагаемые в левой части равенства, кроме последнего, делятся нацело на p, поэтому для равенства необходимо, чтобы и a_n делилось нацело на p.

Следствие. Если $a_0=1$, то все рациональные корни уравнения, если они существуют, целые.

Теорема 3.3. Два многочлена

$$P_n\left(x\right)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

$$Q_n\left(x\right)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n$$

равны при любых значениях переменной x (тождественно равны) тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при x в одинаковых степенях, т.е. $a_i=b_i$ для любых $i=\overline{0,n}$.

Доказательство. Достаточность очевидна. Действительно, если $a_i=b_i$, $i=\overline{0,n}$, то при любых x выполняется равенство $P_n\left(x\right)=Q_n\left(x\right)$.

Необходимость. Рассмотрим разность

$$P_n\left(x\right)-Q_n\left(x\right)=$$
$$=\left(a_0-b_0\right)x^n+\left(a_1-b_1\right)x^{n-1}+\ldots+$$
$$+\left(a_{n-1}-b_{n-1}\right)x+\left(a_n-b_n\right)=0\,.$$

Равенство нулю должно выполняться при любых значениях x, в том числе и при $x=0$. Подставляем $x=0$ и получаем $a_n=b_n$ и

$$\left(a_0-b_0\right)x^n+\left(a_1-b_1\right)x^{n-1}+\ldots+\left(a_{n-1}-b_{n-1}\right)x=0\,.$$

Это равенство выполняется при всех значениях x, поэтому на $x\neq 0$ можно сократить и получим

$$\left(a_0-b_0\right)x^{n-1}+\left(a_1-b_1\right)x^{n-2}+\ldots+\left(a_{n-1}-b_{n-1}\right)=0\,.$$

Подставляем $x=0$ и получаем $a_{n-1}=b_{n-1}$ и т.д.

3.2. Теорема Виета.

Пусть есть квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0\,,a\neq 0$, и $x_1\,,x_2$ – его корни. Тогда в силу следствия 2 из теоремы Безу справедливо тождество

$$ax^2+bx+c\equiv a(x-x_1)(x-x_2)\equiv ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2 \;.$$

Воспользуемся теоремой 3.3. и получим следующее утверждение.

Теорема 3.4. Корни x_1, x_2 квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a} \end{cases}$$

Проделаем аналогичную процедуру для кубического уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0, a\neq 0$ с корнями x_1, x_2, x_3. Имеем

$$ax^3+bx^2+cx+d\equiv a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\equiv$$

$$\equiv ax^3-a(x_1+x_2+x_3)x^2+a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-ax_1x_2x_3$$

Воспользуемся теоремой 3.3 и получим следующее утверждение, называемое теоремой Виета для кубического уравнения.

Теорема 3.5. Если x_1, x_2, x_3 - корни кубического уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0, a\neq 0$. Тогда справедливо

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a} \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a} \;. \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Проводя аналогичные рассуждения можно доказать следующую теорему.

Теорема 3.6. (Теорема Виета). Если $x_1, x_2 \ldots x_n$ корни уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, a_0\neq 0, \qquad (3.1)$$

то имеют место следующие формулы

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+ x_n=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ x_1x_2+x_1x_3+ x_{n-1}x_n=\dfrac{a_2}{a_0} \\ x_1x_2x_3+\ldots+x_{n-1}x_{n-2}x_n=-\dfrac{a_3}{a_0} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2x_3\cdots x_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0} \end{cases} \qquad (3.2)$$

Верна и обратная теорема Виета.

Теорема 3.7. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют системе (3.2), то они являются корнями уравнения (3.1).

Отметим теперь одно преобразование, которое весьма полезно при решении рациональных уравнений.

Рассмотрим многочлен

$$P_n(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n \;,$$

называемый приведенным. Сделаем замену $x=y-\dfrac{a_1}{n}$. В результате получим многочлен

$$Q_n(y)=y^n+b_2y^{n-2}+\ldots+b_{n-1}y+b_n \;,$$

называемый неполным.

Пример 3.5. Вывести формулу корней приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$.

Сделаем замену $x=y-\dfrac{p}{2}$. Получим

$$\left(y-\frac{p}{2}\right)^2+p\left(y-\frac{p}{2}\right)+q=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2=\frac{p^2-4q}{4}\Leftrightarrow x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}.$$

3.3. Формула Кардано.

Вернемся теперь к более детальному исследованию кубического уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$. Сведем это уравнение к неполному, сделав замену $x=y-\frac{a}{3}$

$$y^3-3y^2\frac{a}{3}+3y\frac{a^2}{9}-\frac{a^3}{27}+ay^2-\frac{2a^2}{3}y+\frac{a^3}{9}+by-\frac{ba}{3}+c=0.$$

В результате получим кубическое уравнение $y^3+py+q=0$, где $p=b-\frac{a^2}{3}$ и $q=c+\frac{2a^3}{27}-\frac{ba}{3}$. Это уравнение и будет предметом нашего исследования.

Для этого уравнения определим дискриминант

$$D=-4p^3-27q^2.$$

Если дискриминант положительный, то уравнение имеет три различных действительных корня. Если $D=0$, то уравнение имеет три действительных корня, хотя бы два из которых совпадают. Если $D<0$, то уравнение имеет ровно один действительный корень. Сразу заметим, что условие $D<0$ мы будем подробнее обсуждать после изучения понятия комплексного числа.

Рассмотрим более подробно понятие дискриминанта. Вообще, дискриминант любого уравнения вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0, a_0\neq 0$$

определяется по формуле

$$D=a_0^{2n-2}\prod_{i>j}(x_i-x_j)^2,$$

где x_i – корни уравнения, а $\prod_{i>j}(x_i-x_j)^2$ означает произведение всех разностей корней, у которых номер первого корня в этой разности больше номера второго корня.

Например, формула дискриминанта квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ имеет вид

$$D=b^2-4ac=a^2\left[\left(\frac{b}{a}\right)^2-\frac{4c}{a}\right]=$$

$$=a^2\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=a^2(x_2-x_1)^2$$

Исследование знака дискриминанта довольно часто позволяет определить количество действительных корней уравнения, что в свою очередь может подсказать путь решения уравнения.

Корни кубического уравнения $y^3+py+q=0$ можно находить по формуле Кардано

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}$$

Эта формула довольно громоздка и ее вывод мы получим при рассмотрении специальных приемов решения кубических уравнений.

Заметим, что, если дискриминант кубического уравнения неположителен, то действительный корень можно находить по формуле Кардано, если же $D>0$, то для использования формулы Кардано потребуются знания комплексных чисел и умение оперировать с ними (хотя все корни уравнения действительные).

Важно отметить, что приведенные выше рассуждения позволяют проводить исследование кубического уравнения, но формула Кардано практически не применима при решении реальных задач. Более конструктивный подход к решению кубических уравнений мы продемонстрируем в следующей лекции.

Перед рассмотрением примеров сформулируем теорему, которая в некоторых случаях помогает при решении задач.

Теорема 3.8. (Декарт). Число положительных корней многочлена (с учетом их кратности) не превосходит числа перемен знака в последовательности коэффициентов. Если же все корни многочлена являются действительными, то эти числа совпадают.

Пример 3.6. Найти параметры a и b, если известно, что ax^4+bx^3+1 делится на $(x-1)^2$

По следствию 2 из теоремы Безу если подставить в многочлен $x=1$, то должен получиться нуль, т.е.

$$a+b+1=0 \Leftrightarrow b=-a-1.$$

Преобразуем исходный многочлен с учетом полученного условия

$$ax^4+bx^3+1=ax^4-ax^3-x^3+1=$$

$$=ax^3(x-1)-(x-1)(x^2+x+1)=(x-1)(ax^3-x^2-x-1).$$

По условию задачи исходный многочлен делится на $(x-1)^2$, поэтому, при подстановке $x=1$ в ax^3-x^2-x-1 снова должен получиться нуль, т.е

$$a-1-1-1=0 \Leftrightarrow a=3.$$

Ответ: $a=3$, $b=-4$.

Пример 3.7. Вычислить сумму $x_0^{32}+\frac{1}{x_0^{32}}$, если известно, что x_0 — корень уравнения $x^2+x+1=0$.

Заметим, что представленное в условии квадратное уравнение не имеет действительных корней, т.е. x_0 – комплексный корень. Однако в задаче и не требуется находить корни этого уравнения.

Воспользуемся тем, что

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2,$$

т.е. если бы нам удалось каким-нибудь способом определить $x+\frac{1}{x}$, то мы бы могли ответить на вопрос задачи.

Если x_0 – корень уравнения $x^2+x+1=0$, то $x_0^2+x_0+1=0$ и так как $x_0\neq 0$, то

$$x_0+\frac{1}{x_0}=-1 \Rightarrow x_0^2+\frac{1}{x_0^2}=-1 \Rightarrow x_0^{32}+\frac{1}{x_0^{32}}=-1.$$

Ответ: - 1.

Пример 3.8. Число $1+\sqrt{2}$ является корнем уравнения $x^5+ax^3+bx^2+5x+2=0$. Найти a и b, если известно, что они рациональные числа.

В силу того, что $1+\sqrt{2}$ является корнем уравнения, то

$$\left(1+\sqrt{2}\right)^5+a\left(1+\sqrt{2}\right)^3+b\left(1+\sqrt{2}\right)^2+5\left(1+\sqrt{2}\right)+2=0.$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены

$$(48+7a+3b)+\sqrt{2}(34+5a+2b)=0.$$

Выражения в обеих скобках являются рациональными числами. Произведение ненулевого рационального числа на иррациональное есть число иррациональное. Таким образом, для выполнения последнего равенства необходимо

$$\begin{cases} 48+7a+3b=0 \\ 34+5a+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-6, b=-2.$$

Ответ: $a=-6$, $b=-2$.

Рассмотрим более сложный пример, в котором надо использовать свойства рациональных и иррациональных чисел.

Пример 3.9. Найти все рациональные значения a и b, при которых действительные корни x_1 и x_2 уравнения $x^2+ax+b=0$ иррациональны и связаны соотношением $4x_1^2-6x_2^2=4x_2-x_1$.

Нам надо получить соотношение, похожее на соотношение из предыдущей задачи. Роль $\sqrt{2}$ будет исполнять один из корней уравнения. Так как x_1 и x_2 корни уравнения $x^2+ax+b=0$, то

$x_1^2=-ax_1-b$ и $x_2^2=-ax_2-b$. Подставим эти выражения в соотношение из условия задачи

$$4\left(-ax_1-b\right)-6\left(-ax_2-b\right)=4x_2-x_1.$$

Теперь хотелось бы избавится от одного из корней. Для этого воспользуемся тем, что по теореме Виета $x_1+x_2=-a\Leftrightarrow x_1=-x_2-a$

$$4\left(-a\left(-x_2-a\right)-b\right)+6ax_2+6b=4x_2-\left(-x_2-a\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_2\left(10a-5\right)+\left(4a^2+2b-a\right)=0.$$

Снова у нас выражения в скобках рациональны, а x_2 — иррационально, поэтому

$$\begin{cases}10a-5=0\\4a^2+2b-a=0\end{cases}\Leftrightarrow a=\frac{1}{2},b=-\frac{1}{4}.$$

Убеждаемся, что при найденных значениях исходное уравнение имеет действительные корни.

Ответ: $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$.

Пример 3.10. Пусть x_1,x_2,x_3 — корни уравнения $x^3+px+q=0$. Доказать, что $x_1^3+x_2^3+x_3^3=3x_1x_2x_3$.

По теореме Виета $x_1+x_2+x_3=0$ и доказываемое соотношение следует из примера 1.13.

Пример 3.11. Найти многочлен наименьшей степени с целыми коэффициентами, для которого число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ является корнем.

Такие задачи в последнее время довольно часто стали появляться в школьной программе.

Так как $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ является корнем некоторого уравнения, то можно записать, что $x_0=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ или $x_0-\sqrt{2}=\sqrt{3}$. Теперь будем избавляться от иррациональностей возводя в квадрат

$$x_0^2-2\sqrt{2}x_0+2=3\Leftrightarrow 2\sqrt{2}x_0=x_0^2-1\Leftrightarrow 8x_0^2=x_0^4-2x_0^2+1.$$

Теперь заменив x_0 на x получим искомое уравнение.

Ответ: $x^4-10x^2+1=0$.

В заключении этой лекции рассмотрим некоторые приемы исследования квадратного трехчлена.

3.4. Исследование квадратного трехчлена

Сначала решим следующую задачу. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ при $x\in\left[\alpha;\beta\right]$.

Функция задает параболу и нахождение наибольшего и наименьшего значений зависит от расположения вершины параболы по отношению к отрезку $\left[\alpha;\beta\right]$.

1. $x_в=-\frac{b}{2a}\in\left[\alpha;\beta\right]$, тогда

1.1. если $a>0$, то $f_{min}=f\left(x_в\right)$, $f_{max}=\max\left\{f\left(\alpha\right),f\left(\beta\right)\right\}$.

1.2. если $a<0$, то $f_{max}=f\left(x_в\right)$, а $f_{min}=\min\left\{f\left(\alpha\right),f\left(\beta\right)\right\}$.

2. $x_в=-\frac{b}{2a}>\beta$, тогда

2.1. если $a>0$, то $f_{min}=f\left(\beta\right)$, а $f_{max}=f\left(\alpha\right)$.

2.2. если $a<0$, то $f_{max}=f\left(\beta\right)$, а $f_{min}=f\left(\alpha\right)$.

3. $x_в=-\frac{b}{2a}<\alpha$, тогда

3.1. если $a>0$, то $f_{max}=f\left(\beta\right)$, а $f_{min}=f\left(\alpha\right)$.

3.2. если $a<0$, то $f_{min}=f\left(\beta\right)$, а $f_{max}=f\left(\alpha\right)$.

Пример 3.12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f\left(x\right)=x^2-6x+3$ при $x\in\left[2;6\right]$.

Определяем, что $x_в=-\frac{b}{2a}=3\in\left[2;6\right]$.

Так как коэффициент при x^2 положительный, то согласно п.1.1. имеем

$$f_{min}=f\left(3\right)=-6,\ а$$

$$f_{max} = \max\{f(2), f(6)\} = \max\{-5,3\} = 3.$$

Ответ: $f_{min} = -6$, $f_{max} = 3$.

Пример 3.13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = -\frac{1}{2}\sin^2 x + 2\sin x + 3.$$

Сделаем замену $\sin x = t, |t| \le 1$. Теперь наша задача формулируется следующим образом.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + 3$$

при $t \in [-1;1]$.

Так как $t_в = 4 > 1$ и коэффициент при t^2 отрицателен, то воспользовавшись формулами из п.2.2 получим

$$f_{max} = f(1) = \frac{9}{2}, \text{ а } f_{min} = f(-1) = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $f_{max} = \frac{9}{2}$, $f_{min} = \frac{1}{2}$.

Теперь изучим способы решения простейших задач на квадратные уравнения с параметрами.

Рассмотрим уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

(с дискриминантом $D = b^2 - 4ac$, если $a \ne 0$) и определим, какое количество действительных решений имеет это уравнение при различных условиях на коэффициенты.

1°. $a = 0, b = 0, c = 0$. В этом случае уравнение имеет бесконечно много решений.

2°. $a = 0, b = 0, c \ne 0$. В этом случае уравнение не имеет решений.

3°. $a = 0, b \ne 0$. В этом случае уравнение имеет единственное решение.

4°. $a \ne 0, D = 0$. В этом случае уравнение имеет единственное решение.

5°. $a \ne 0, D > 0$. В этом случае уравнение имеет два решения.

6°. $a \ne 0, D < 0$. В этом случае уравнение не имеет решений.

Пример 3.14. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 + (2a-4)x + (3-2a) = 0$$

имеет единственное решение, два решения, не имеет решений.

Поскольку в данном примере коэффициент при x^2 не равен нулю, то в соответствии с вышесказанным (4°) единственное решение будет только в случае $D = 0$ т.е. при

$$\frac{D}{4} = (a-2)^2 - (3-2a) = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0.$$

Таким образом, получаем, что единственное решение будет при $a = 1$.

Так как $D \ge 0$ при любых a, то уравнение будет иметь два решения при $a \ne 1$.

Ответ: единственное решение при $a = 1$; два решения при a $(-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

Пример 3.15. Найти все значения параметра a, при которых оба корня уравнения

$$2x^2 + (8-2a)x + a = 0$$

положительны, отрицательны, разных знаков, одного знака.

Для решения этой задачи воспользуемся теоремой Виета для квадратного уравнения.

Если произведение корней квадратного уравнения есть величина положительная, то корни одного знака. Если при этом сумма корней так же является величиной положительной, то оба корня положительны. Таким образом, для ответа на первый вопрос задачи надо решить систему неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a-4>0 \\ x_1 \cdot x_2 = a/2>0 \\ D \ge 0 \end{cases}$$

Заметим, что последнее неравенство системы является обязательным, так как это условие существования действительных корней исходного уравнения. Имеем

$$\begin{cases} a>4 \\ a^2-10a+16\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \ge 8.$$

Аналогично, для того, чтобы найти все значения параметра, при которых оба корня отрицательны надо решить систему неравенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a-4<0 \\ x_1 \cdot x_2 = a/2>0 \\ D \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<a<4 \\ a^2-10a+16\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<a\le 2.$$

Для определения условий того, что корни разного знака, достаточно условия существования корней и условия того, что их произведение отрицательно, т.е.

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = a/2<0 \\ D \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ a^2-10a+16\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a<0.$$

Ответ: оба корня положительны при $a\in[8;+\infty)$; оба корня отрицательны при $a\in(0;2]$; корни разного знака при $a\in(-\infty;0)$; оба корня одного знака при $a\in(0;2]\cup[8;+\infty)$.

Задачи для разбора с преподавателем

3.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2\cos^2 x+\sin x$.

3.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^2+3x$ на отрезке $[-2;1]$.

3.3. Докажите, что при изменении a вершина параболы $y=x^2+(2a+1)x+a^2-1$ описывает прямую.

3.4. Пусть x_1, x_2 - корни уравнения $x^2+px+q=0$. Найти $x_1^2+x_2^2$.

3.5. Пусть x_1, x_2 - корни уравнения $x^2+px+q=0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$.

3.6. При каких значениях параметра a действительные корни уравнения $(a+2)x^2-ax-a=0$ симметричны относительно точки $x=1$.

3.7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=-3x^2-ax+2$ на отрезке $[-1;1]$.

3.8. Найти наименьшее значение выражения $x_1^2+x_2^2$, если x_1, x_2 – действительные корни уравнения $x^2-2ax+a+6=0$.

3.9. Доказать, что многочлен $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ делится на $(x-1)^2$.

3.10. Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, если известен один из его корней $x_1=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

3.11. Определить a так, чтобы уравнения $x^2-ax+1=0$ и $x^2-x+a=0$ имели общий корень.

3.12. Доказать, что разность корней уравнения $5x^2-2(5k+3)x+5k^2+6k+1=0$ не зависит от k.

3.13. Доказать, что уравнение $x^3+ax^2-b=0, b>0$ имеет только один положительный корень.

3.14. Доказать, что если между коэффициентами уравнения $x^3+px^2+qx+r=0$ имеет место зависимость $p^2<3q$, то это уравнение имеет единственный действительный корень.

3.15. Даны два уравнения: $x^2-5x+m=0$ и $x^2-7x+2m=0$. Определить m, при котором один из корней второго уравнения вдвое больше одного из корней первого уравнения.

3.16. Определить общий вид многочленов четвертой степени, удовлетворяющих условию $f(x)=f(1-x)$.

3.17. Найти такие значения a и b, при которых многочлен $6x^4-7x^3+ax^2+3x+2$ делится на x^2-x+b.

3.18. При каких значениях a и $n>1$ многочлен $x^n-ax^{n-1}+ax-1$ делится на $(x-1)^2$?

3.19. Найти такие a и b, при которых многочлен $x^4-(a-b)x^3+(a-b)x+b^2$ делится на $x^2-(a-b)x+b^2$

3.20. При каком значении a оба корня уравнения $2x^2+(8-2a)x+a=0$ положительны; оба корня - отрицательны; разных знаков?

3.21. Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на $(x+1)$ равен 2, а остаток от деления $P_n(x)$ на $(x-4)$ равен 7. Найти остаток от деления $P_n(x)$ на (x^2-3x-4).

3.22. Доказать, что для любого многочлена $P_n(x)$ разность $P_n(x)-P_n(-x)$ делится на x.

3.23. Доказать, что уравнение $x^2-(p^2+3)x+1=0$ при целом p не имеет рациональных корней.

3.24. Пусть x_1, x_2, x_3 корни уравнения $x^3+px^2+qx+r=0$. Найти $x_1^2+x_2^2+x_3^2$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1д. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\sin^2 x-3\cos x$.

3.2д. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=-x^2-x+2$ на отрезке $[0;2]$.

3.3д. Найти x, если $\min\limits_a(a^2-2ax+3x)=\max\limits_b(-b^2+4bx-3x^2+1)$.

3.4д. Найти все значения a, при которых вершины парабол $y=x^2-2(a+1)x+1$ и $y=ax^2-x+a$ лежат по разные стороны от прямой $y=\frac{3}{4}$.

3.5д. Найти все значения a, при которых вершины парабол $y=x^2-2ax$ и $y=x^2-(a+3)x+1$ лежат по разные стороны от прямой $y=2x$.

3.6д. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2+px+q=0$. Найти $x_1^3+x_2^3$.

3.7д. Пусть x_1, x_2 – положительные корни уравнения $x^2+px+q=0$. Найти $\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}$.

3.8д. Пусть x_1, x_2 - корни уравнения $x^2+px+q=0$. Найти $x_1^4+x_2^4$.

3.9д. Пусть x_1, x_2 - корни уравнения $x^2+px+q=0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются: а) x_1^2, x_2^2; б) $\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}$; в) $\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_2}{x_1}$.

3.10д. При каких значениях параметра a сумма действительных корней уравнения $ax^2+x-8a+4=0$ меньше 1, а произведение больше a?

3.11д. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^2-2ax+1$ на отрезке $[-1;1]$.

3.12д. Найти наименьшее значение выражения $x_1^2+x_2^2$, если x_1, x_2 – действительные корни уравнения $x^2-ax+2a-3=0$.

3.13д. Доказать, что если симметрический многочлен $f(x,y)$ делится на $x-y$, то он делится на $(x-y)^2$.

3.14д. При каких натуральных значениях n многочлен $1+x^2+x^4+\ldots+x^{2n}$ разделится на многочлен $1+x+x^2+\ldots+x^n$?

3.15д. Определить a так, чтобы уравнения $(1-2a)x^2-6ax-1=0$ и $ax^2-x+1=0$ имели общий корень.

3.16д. Известно, что числа x_1 и α являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$, а x_2 и α являются корнями уравнения $x^2+p_1x+q_1=0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются x_1 и x_2.

3.17д. Доказать, что уравнение $x^5+x-10=0$ не имеет рациональных корней.

3.18д. Доказать, что уравнение $x^3-px+1=0$ при целом $p>2$ не имеет рациональных корней.

3.19д. При каких значениях параметра a уравнения $x^2-(2a+1)x+a+1=0$ и $2x^2-(4a-1)x+1=0$ имеют общий корень?

3.20д. Найти все a, при которых уравнение $x^5-5x+a=0$ имеет два равных действительных корня.

3.21д. Найти такие значения a и b, при которых многочлен $x^4+ax^3+bx^2-8x+1$ обращается в точный квадрат.

3.22д. При каком значении a многочлен $x^2-y^2-z^2-ayz$ делится на $x+y+z$?

3.23д. Найти остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на x^4+x^2+1, если известно, что при делении $P_n(x)$ на x^2+x+1 получается остаток, равный $1-x$, а при делении $P_n(x)$ на x^2-x+1 получается остаток, равный $3x+5$.

3.24д. Найти коэффициенты многочлена ax^4+bx^3+c, если известно, что произведение остатков, получающихся от его деления на x^2+1 и x^3+1, равно $2(x-1)(x-5)$.

3.25д. Найти такие a, b и c, при которых многочлен $x^5-2x^4-6x^3+ax^2+bx+c$ делится на $(x^2-1)(x-3)$.

3.26д. Найти такие a, b, c и d, при которых многочлен $x^4-x^3+ax^2+bx+c$ при делении на x^2+d давал остаток, равный x, при делении на x^2-d давал остаток, равный $-x$.

3.27д. Доказать, что при любом натуральном $n>2$ делится на $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)$ многочлен $(x^n-1)(x^{n-1}-1)(x^{n-2}-1)$.

3.28д. При каком значении a оба корня уравнения $ax^2 - 6x + a = 0$ положительны; оба корня - отрицательны; разных знаков.

3.29д. Известно, что при некотором значении числа a один из корней квадратного уравнения $x^2 - 6x + a = 0$ равен квадрату другого корня. Найти это значение a и соответствующие ему корни уравнения.

3.30д. Известно, что при некотором значении числа a отношение корней квадратного уравнения $x^2 + 10x + a = 0$ равно 4. Найти это значение a и соответствующие ему корни уравнения.

3.31д. График параболы $y = ax^2 + bx + c$ проходит через точки $(1;0)$, $(-5;0)$ и $(0;10)$. Найти значение y при $x = 2$.

3.32д. Известно, что уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$. Найти третий корень этого уравнения.

3.33д. Квадратное уравнение, корни которого равны $(-3x_1)$ и $(-3x_2)$, где x_1, x_2 – корни квадратного уравнения $x^2 + 3x + 1 = 0$, имеет вид $x^2 - bx + c = 0$. Найти значение $3b - c$.

3.34д. Найти произведение корней уравнения $x^3 - x^2 - 16x + 16 = 0$.

3.35д. Доказать, что сумма квадратов корней уравнения $x^2 + (2a-1)x + 2a^2 - 2a - 5 = 0$ не зависит от a.

3.36д. Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 + (3a^2 + 1)x - a^6 = 0$. Доказать, что выражение $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ не зависит от a.

3.37д. Доказать, что выражение $P(x+2) - 2P(x+1) + P(x)$, где $P(x) = ax^2 + bx + c$, не зависит от x.

3.38д. Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на $(x-1)$ равен 5, а остаток от деления $P_n(x)$ на $(x-2)$ равен -3. Найти остаток от деления $P_n(x)$ на $(x^2 - 3x + 2)$.

3.39д. Найти все a, b, при которых многочлен $x^n - ax^{n-1} + bx - 1$, $n > 2$ делится на $(x-1)^2$

3.40д. Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на $(x+2)$ равен A. Доказать, что многочлен $Q_n(x) = P_n(x) + \frac{A}{3}(x-1)$ делится на $(x+2)$.

3.41д. Пусть x_1, x_2, x_3 корни уравнения $x^3 + px^2 + qx + r = 0$. Найти $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$.

Ответы

Задачи для разбора с преподавателем

3.1. $y_{max} = \frac{13}{8}$, $y_{min} = -1$; **3.2.** $y_{max} = 4$, $y_{min} = -\frac{9}{4}$; **3.3.** $y_* = x_* - \frac{3}{4}$; **3.4.** $p^2 - 2q$; **3.5.** $t^2 + \frac{p}{q}t + \frac{1}{q} = 0$; **3.6.** -4; **3.7.** если $a \le -6$, то $y_{max} = -a - 1$, $y_{min} = a - 1$, если $-6 < a < 0$, то $y_{max} = \frac{a^2}{12} + 2$, $y_{min} = a - 1$, если $a = 0$, то $y_{max} = 2$, $y_{min} = -1$, если $0 < a < 6$, то $y_{max} = \frac{a^2}{12} + 2$, $y_{min} = -a - 1$, если $a \ge 6$, то $y_{max} = a - 1$, $y_{min} = -a - 1$; **3.8.** 8 при $a = -2$; **3.10.** $x^2 + 8x + 1 = 0$; **3.11.** $x = -1$ при $a = -2$; **3.15.** $m = 0, m = 6$; **3.16.** $x^4 - 2x^3 + bx^2 + (1-b)x + d$; **3.17.** $(-7;-1), (-12;-2)$; **3.18.** если $n = 2$, то $a \in \varnothing$, если $n = 3$, то $a = 3$, если $n > 3$, то $a = \frac{n}{n-2}$; **3.19.** $a = b = 0$; **3.20.** 1) $a \ge 8$, 2) $0 < a \le 2$, 3) $a < 0$; **3.21.** $x + 3$; **3.24.** $p^2 - 2q$.

Задачи для самостоятельного решения

3.1д. $y_{max} = 3$, $y_{min} = -3$; **3.2д.** $y_{max} = 2$, $y_{min} = -4$; **3.3д.** $x = 1, x = \frac{1}{2}$;

3.4д. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; 0\right) \cup (1; +\infty)$;

3.5д. $\left(-5 - 2\sqrt{2}; -5 + 2\sqrt{2}\right) \cup (-2; 0)$; **3.6д.** $3pq - p^3$; **3.7д.** $\sqrt{\frac{2\sqrt{q} - p}{q}}$;

3.8д. $p^4 - 4p^2q + 2q^2$; **3.9д.** а) $x^2 + (2q - p^2)x + q^2 = 0$, б) $x^2 - \sqrt{2\sqrt{q} - p}\,x + \sqrt{q} = 0$, в) $x^2 - \frac{p^2 - 2q}{q}x + 1 = 0$;

3.10д. $\left(-\infty; -4 - 2\sqrt{5}\right) \cup \left(0; \frac{2 - 2\sqrt{2}}{8}\right] \cup \left[\frac{2 + 2\sqrt{2}}{8}; -4 + 2\sqrt{5}\right)$; **3.11д.** если $a < -2$, то $y_{max} = 3 - 2a$, $y_{min} = 3 + 2a$, если $-2 \le a < 0$, то $y_{max} = 3 - 2a$, $y_{min} = 1 - \frac{a^2}{2}$, если $0 \le a < 2$, то $y_{max} = 3 + 2a$, $y_{min} = 1 - \frac{a^2}{2}$, если $a \ge 2$, то $y_{max} = 3 + 2a$, $y_{min} = 3 - 2a$; **3.12д.** 2; **3.14д.** $n = 2k, k \in N$; **3.15д.** $a = 0$, $a = \frac{2}{9}$, $a = -\frac{3}{4}$; **3.16д.** $x^2 + \frac{p_1^2 - p + 2(q_1 - q)}{p_1 - p}x + \frac{(p_1 - p)^2 q_1 q}{(q_1 - q)^2} = 0$; **3.19д.** $a = 1$, $a = -\frac{7}{8}$;

3.20д. $a = \pm 4$; **3.21д.** $a = -8$, $b = 18$; **3.22д.** 2; **3.23д.** $-2x^3 + 2x^2 + x + 5$; **3.24д.** $(2; 1; 3), (-2; -1; -3)$; **3.25д.** $(8; 5; -6)$; **3.26д.** $(0; 0; -1; 1)$; **3.28д.** положительны при $a \in (0;3]$, отрицательны при $a \in [-3;0)$, разных знаков при $a \in \varnothing$; **3.29д.** $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ при $a = 8$, $x_1 = -3$, $x_2 = 9$ при $a = -27$; **3.30д.** $x_1 = -2$, $x_2 = -8$ при $a = 16$; **3.31д.** -14; **3.32д.** -1; **3.33д.** 18; **3.34д.** -16; **3.38д.** $-8x + 13$;

3.39д. $a = b = \frac{n}{n-2}$; **3.41д.** $-p^3 + 3pq - 3r$.

Лекция №4

Рациональные уравнения.

Эта лекция посвящена методам решения рациональных уравнений.

4.1. Дробно-рациональные уравнения.

Первый способ, позволяющий несколько упростить процесс вычислений, – метод группировки.

Пример 4.1. $\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+8}=0.$

Приведение всех дробей к общему знаменателю будет сопровождаться довольно громоздкими вычислениями, поэтому сложим сначала по отдельности первую с последней и вторую с третьей дроби. Получим

$$\frac{2x}{x^2-64}+\frac{2x}{x^2-36}=0 \Leftrightarrow \frac{x\left(x^2-50\right)}{\left(x^2-64\right)\left(x^2-36\right)}=0.$$

Ответ: $x=0, x=\pm\sqrt{50}$.

Довольно часто группировка делается после выделения в дробях целой или рациональной части.

Пример 4.2. $\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}=\frac{x-6}{x-2}+\frac{x+6}{x+2}.$

Преобразуем дроби

$$\frac{x-3}{x-1}+\frac{x+3}{x+1}=\frac{x-6}{x-2}+\frac{x+6}{x+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x-1-2}{x-1}+\frac{x+1+2}{x+1}=\frac{x-2-4}{x-2}+\frac{x+2+4}{x+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{2}{x-1}+1+\frac{2}{x+1}=1-\frac{4}{x-2}+1+\frac{4}{x+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}=\frac{2}{x+2}-\frac{2}{x-2}.$$

В данном случае мы выделили в дробях целые части. Теперь приводим к общему знаменателю отдельно левую и правую части уравнения

$$\frac{-2}{x^2-1}=\frac{-8}{x^2-4}\Leftrightarrow\frac{x^2}{\left(x^2-1\right)\left(x^2-4\right)}=0.$$

Ответ: $x=0$.

Теперь рассмотрим пример на выделение рациональной части дробей.

Пример 4.3.

$$\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}.$$

Преобразуем уравнение

$$\frac{(x+1)^2+1}{x+1}+\frac{(x+4)^2+4}{x+4}=\frac{(x+2)^2+2}{x+2}+\frac{(x+3)^2+3}{x+3}\Leftrightarrow$$

$$x+1+\frac{1}{x+1}+x+4+\frac{4}{x+4}=x+2+\frac{2}{x+2}+x+3+\frac{3}{x+3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{x+1}-\frac{3}{x+3}+\frac{4}{x+4}-\frac{2}{x+2}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+3-3x-3}{x^2+4x+3}+\frac{4x+8-2x-8}{x^2+6x+8}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x(2x+5)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}=0.$$

Заметим, что целую или рациональную части дробей можно выделять обычным делением уголком.

Ответ: $x=0$, $x=-\frac{5}{2}$.

Часто преобразования бывают не столь очевидными.

Пример 4.4. $\frac{4}{x+4}+\frac{9}{x+9}+\frac{12}{x+12}=3$.

Перепишем пример в виде

$$\left(\frac{4}{x+4}-1\right)+\left(\frac{9}{x+9}-1\right)+\left(\frac{12}{x+12}-1\right)=0,$$

и в каждой скобке приведем дроби к общему знаменателю. Получим

$$x\left(\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+9}+\frac{1}{x+12}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ 3x^2+50x+192=0 \end{array}\right. \\ x\neq-4, x\neq-9, x\neq-12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-6 \\ x=-32/3 \end{array}\right.$$

В следующем примере мы воспользуемся весьма неожиданным для школьников приемом, суть которого в следующем. Пусть есть рациональная дробь вида

$$\frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)},\ a\neq b$$

и мы попробуем найти такие числа C и D, что выполняется тождество

$$\frac{Ax+B}{(x-a)(x-b)}=\frac{C}{x-a}+\frac{D}{x-b}, \tag{4.1}$$

т.е. осуществим операцию, в некотором смысле, обратную приведению к общему знаменателю. Эта операция называется разложением рациональных дробей на простейшие и изучается подробно в курсе

математического анализа, поэтому мы рассмотрим самый простой случай, и не будем вдаваться подробно в теорию этого вопроса.

Приведем в (4.1) правую часть к общему знаменателю и приравняем числитель левой части и получившийся числитель в правой части

$$Ax+B=C(x-b)+D(x-a)$$

Теперь в полученное равенство подставляем $x=a$ и получаем

$$C=\frac{Aa+B}{a-b}. \tag{4.2}$$

Подставляем $x=b$ и получаем

$$D=\frac{Ab+B}{b-a}. \tag{4.3}$$

В курсе математического анализа доказывается, что представление (4.1) единственно.

Запоминать полученные формулы нет никакой необходимости, так как они выводятся достаточно просто.

Посмотрим на конкретном примере, как применение описанного выше метода упрощает решение уравнения.

Пример 4.5.

$$\frac{3x+39}{x^2-4x-21}+\frac{x-18}{x^2-x-12}+\frac{x-10}{x^2-11x+28}+\frac{2x+38}{x^2-2x-24}+$$

$$+\frac{x-2}{x^2+6x+8}-\frac{4x+16}{x^2-4x-12}-\frac{40x-163}{x^2-5x-14}=0.$$

Разложим каждый знаменатель на множители

$$\frac{3x+39}{(x-7)(x+3)}+\frac{x-18}{(x-4)(x+3)}+\frac{x-10}{(x-7)(x-4)}+\frac{2x+38}{(x-6)(x+4)}+$$

$$+\frac{x-2}{(x+2)(x+4)}-\frac{4x+16}{(x-6)(x+2)}-\frac{40x-163}{(x-7)(x+2)}=0.$$

Теперь воспользуемся формулами (4.2), (4.3) и получим

$$\frac{6}{x-7}-\frac{3}{x+3}-\frac{2}{x-4}+\frac{3}{x+3}-\frac{1}{x-7}+$$

$$+\frac{2}{x-4}+\frac{5}{x-6}-\frac{3}{x+4}-\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+4}-$$

$$-\frac{5}{x-6}+\frac{1}{x+2}-\frac{13}{x-7}-\frac{27}{x+2}=0.$$

После приведения подобных, имеем

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x-7}+\dfrac{7}{x+2}=0\\ x\neq-4,x\neq-3,x\neq-2,x\neq4,x\neq6,x\neq7\end{cases}.$$

Ответ: $x=5$.

Справедливости ради заметим, что приведение к общему знаменателю позволяет решить данное уравнение. Однако, не ошибиться при таком способе решения довольно трудно, так как вычисления очень громоздки.

4.2. Подбор корней.

Первое, что нужно сделать при решении рационального уравнения с целыми коэффициентами степени выше второй – попытаться подобрать рациональный корень. В принципе, в любом уравнении полезно проверять значения $0,\pm1$ независимо от вида уравнения. В силу теоремы 3.2 подбирать рациональный корень надо из таких рациональных дробей, у которых числитель является делителем свободного члена, а знаменатель – делителем коэффициента при x в старшей степени.

Пример 4.6. $P(x)=x^3-2x^2-5x+6=0$.

В данном случае, коэффициент при x в старшей степени равен единице, поэтому будем искать корни среди чисел, являющихся делителями числа 6, т.е. $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$.

Имеем

$$P(-1)=-1-2+5+6=8;$$

$$P(1)=1-2-5+6=0.$$

Нам повезло и один корень мы нашли. Теперь по следствию 2 из теоремы Безу наше уравнение можно записать в виде

$$P(x)=(x-1)Q(x)=0,$$

где $Q(x)$ - квадратный трехчлен. Для нахождения $Q(x)$ разделим $P(x)$ на $x-1$ уголком

$$\begin{array}{l|l} -\,x^3-2x^2-5x+6 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2} & x^2-x-6 \\ \quad -\,-x^2-5x & \\ \quad \underline{-x^2+x} & \\ \qquad -\,-6x+6 & \\ \qquad \underline{-6x+6} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Решаем квадратное уравнение $x^2-x-6=0$ и находим еще два корня.

Ответ: $x=1,x=-2,x=3$.

В следующем примере целых корней найти не удается и приходится искать дробное решение.

Пример 4.7. $P(x)=9x^3-13x-6=0$.

В данном примере перебор возможных кандидатов на решение довольно велик: $\pm1;\pm2;\pm3;\pm6;\pm\frac{1}{9};\pm\frac{1}{3};\ \pm\frac{2}{9};\pm\frac{2}{3}$.

Имеем

$$P(1)=9-13-6=-10;\ P(-1)=-9+13-6=-2;$$

$$P(2)=72-26-6=40;\ P(-2)=-72+26-6=-52;$$

$$P(3)=243-39-6=198;\ P(-3)=-243+39-6=-210;$$

$$P\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{13}{3}-6=-10;\ P\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}+\frac{13}{3}-6=-2;$$

$$P\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{3}-\frac{26}{3}-6=-12;\ P\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{8}{3}+\frac{26}{3}-6=0.$$

В результате довольно долгой процедуры удалось найти корень. Теперь делим исходный многочлен на $3x+2$ и решаем квадратное уравнение $3x^2-2x-3=0$.

Ответ: $x=\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{3}, x=-\dfrac{2}{3}$.

Представим себе ситуацию, когда в результате долгой и нудной процедуры подбора корней, окажется, что уравнение рациональных корней не имеет. Будет весьма горько и обидно. Поэтому, к подобному способу решения рациональных уравнений лучше прибегать не очень часто.

Следующий метод является более эффективным средством.

4.3. Метод неопределенных коэффициентов.

Суть рассматриваемого метода в следующем. Мы предполагаем, что многочлен раскладывается на произведение многочленов с неопределенными целыми коэффициентами более низкой, чем исходный, степени. Далее пользуемся теоремой 3.3 и получаем систему относительно предполагаемых целых коэффициентов. Если эта система окажется разрешимой, нам удастся сильно упростить решение уравнения.

Пример 4.8. $25x^4+10x^2-25x+6=0$.

Предположим, что многочлен в левой части раскладывается на произведение двух квадратных с целыми коэффициентами (заметим, что на произведение двух квадратных многочлен четвертой степени раскладывается всегда, но при этом коэффициенты могут быть и не целыми), т.е.

$$25x^4+10x^2-25x+6=\left(ax^2+bx+c\right)\left(px^2+qx+r\right)$$

Раскрываем скобки и приравниваем коэффициенты в левой и правой частях при одинаковых степенях x. Получаем систему

$$\begin{cases} ap=25 \\ aq+bp=0 \\ ar+pc+bq=-25 \\ cr=6 \end{cases}$$

В силу нашего предположения, мы ищем только целые решения этой системы, поэтому из последнего уравнения получаются допустимыми только следующие пары $\{2;3\}$, $\{-2;-3\}$, $\{1;6\}$, $\{-1;-6\}$. Перебираем возможные значения для c и r и получаем решение системы $\{a=p=b=5, q=-5, c=6, r=1\}$. В результате получаем, что исходное уравнение преобразуется к виду

$$\left(5x^2+5x+6\right)\left(5x^2-5x+1\right)=0.$$

Теперь все свелось к решению пары квадратных уравнений.

Ответ: $x=\dfrac{5\pm\sqrt{5}}{10}$.

Оба приведенных выше способа могут оказаться довольно трудными или невозможными при реализации, поэтому рассмотрим другие приемы решения рациональных уравнений.

4.4. Разложение на множители.

Фактически решение любого рационального уравнения – это разложение многочлена на множители. На следующих примерах мы посмотрим, как это можно делать, используя выделение полных степеней некоторых выражений.

Пример 4.9. $x^4+4x-1=0$.

Подбор корней ничего не дает, так как рациональных корней у этого уравнения нет. Решение методом неопределенных коэффициентов показывает, что разложение левой части на произведение двух квадратных трехчленов с целыми коэффициентами не получается. Попробуем выделить полный квадрат и использовать формулу разности квадратов

$$x^4+2x^2+1-2\left(x^2-2x+1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2+1\right)^2-\left(\sqrt{2}\left(x-1\right)\right)^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1-\sqrt{2}\right)=0.$$

Ответ: $x=\dfrac{-\sqrt{2}\pm\sqrt{4\sqrt{2}-2}}{2}$.

В следующих примерах снова выделяется выражение суммы в натуральной степени.

Пример 4.10. $5x^3-6x^2-6x-2=0$.

И здесь подбор корней и метод неопределенных коэффициентов ничего не дают, поэтому пробуем выделить полный куб

$$7x^3-2\left(x+1\right)^3=0.$$

Ответ: $x=\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{2}}$.

Пример 4.11. $x^6+6x^5+15x^4-7x^3-39x^2-30x-7=0$.

Можно попытаться решить это уравнение методом неопределенных коэффициентов, однако, наличие первых трех слагаемых из разложения $\left(x+1\right)^6$ подсказывает, что надо попробовать выделить полную шестую степень суммы

$$(x^6+6x^5+15x^4+20x^3+15x^2+6x+1)-$$

$$-27x^3-54x^2-36x-8=0.$$

Получилось удачно

$$\left(x+1\right)^6-\left(3x+2\right)^3=0\Leftrightarrow\left(x+1\right)^2-\left(3x+2\right)=0.$$

Ответ: $x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

4.5. Замена переменного.

Довольно часто рациональные уравнения даются в таком виде, при котором напрашивается замена переменного, но иногда, для того, чтобы сделать правильную замену, надо провести некоторые рассуждения.

Пример 4.12. $\left(x-1\right)\left(x-7\right)\left(x-4\right)\left(x+2\right)=40$.

Перемножение скобок занятие скучное и утомительное, поэтому попробуем сгруппировать скобки. Надо попытаться понять, что мы хотим получить в результате наших действий. Если задуматься над этим вопросом, то легко понять, что хотелось бы получить в левой части произведение двух квадратных трехчленов,

$$\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)=40$$

у которых совпадают коэффициенты a и c. Вспоминаем теорему Виета для квадратного уравнения, согласно которой сумма корней равна коэффициенту при x с обратным знаком, и группируем скобки так, чтобы сумма свободных членов была одинаковой, т.е. первую с третьей и вторую с четвертой скобки. Получим

$$\left(x^2-5x+4\right)\left(x^2-5x-14\right)=40.$$

Теперь x^2-5x общая часть и можно делать замену. Договоримся, что для удобства в качестве свободного члена в выражении для замены будем брать среднее арифметическое свободных членов в заменяемых выражениях. В нашем случае $x^2-5x-5=t$, и получаем квадратное уравнение

$$(t+9)(t-9)=40 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-11 \\ t=11 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-5x+6=0 \\ x^2-5x-16=0 \end{array}\right. .$$

Ответ: $x=\dfrac{5\pm\sqrt{89}}{2}, x=2, x=3$.

Рассмотрим пример, в котором прежде чем сделать замену надо немного потрудиться.

Пример 4.13. $\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2-9x+20\right)=-30.$

Квадратный трехчлен в первой скобке имеет иррациональные корни, а квадратные трехчлены во второй и третьей скобках целые, поэтому перепишем уравнение в виде

$$\left(x^2-3x+1\right)(x+1)(x+2)(x-4)(x-5)=-30.$$

Первая скобка дает подсказку о том, как надо группировать оставшиеся четыре скобки. Нужно, чтобы сумма свободных членов в двух сгруппированных скобках была равна -3, т.е. объединяем вторую с четвертой и третью с пятой скобками и перемножаем их. Получим

$$\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2-3x-4\right)\left(x^2-3x-10\right)=-30.$$

Теперь делаем замену $x^2-3x-10=t$, и получаем уравнение

$$t(t+6)(t+11)=-30.$$

В принципе можно решать это кубическое уравнение, но заметим, что сделанная замена привела к довольно большим коэффициентам, поэтому подкорректируем эту замену, т.е. выберем в качестве t среднюю скобку: $x^2-3x-4=t$, и получим уравнение

$$t(t-6)(t+5)=-30 \Leftrightarrow t^3-t^2-30t+30=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-1)\left(t^2-30\right)=0 \Leftrightarrow t_1=1, t_2=\sqrt{30}, t_3=-\sqrt{30}.$$

Дальнейшее – дело техники.

Ответ: $x=\dfrac{3\pm\sqrt{29}}{2}, x=\dfrac{3\pm\sqrt{25+4\sqrt{30}}}{2}, x=\dfrac{3\pm\sqrt{25-4\sqrt{30}}}{2}$.

Следующий пример иллюстрирует не только выбор замены переменного, но и способ подбора корней кубического уравнения.

Пример 4.14. $(6x+5)(3x+2)(x+1)=28$.

У нас всего три скобки с линейными выражениями, поэтому группировка не приведет нас ни к чему хорошему. В таких примерах надо в качестве новой переменной брать выражение в одной из скобок. В принципе выбор произволен, однако, лучше выбирать то выражение, у которого коэффициент при x самый большой по модулю. В нашем случае делаем замену $6x+5=t \Leftrightarrow x=\dfrac{t-5}{6}$ и подставляем выражение для x в исходное уравнение

$$t\left(3\cdot\frac{t-5}{6}+2\right)\left(\frac{t-5}{6}+1\right)=28 \Leftrightarrow (t-1)t(t+1)=28\cdot 12.$$

Можно раскрыть скобки и решать кубическое уравнение, однако мы попробуем найти корень используя специфический вид получившегося уравнения. Предположим, что уравнение имеет целый корень. Тогда в левой части – произведение трех последовательных целых чисел. Если нам удастся представить правую часть в виде произведения трех последовательных целых чисел, то мы сразу найдем корень. Имеем

$$28\cdot 12=2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7=6\cdot 7\cdot 8.$$

Таким образом удалось найти корень $t=7$. Теперь делим многочлен $t^3-t-28\cdot 12$ на $t-7$, получаем квадратное уравнение $t^2+7t+48=0$, которое не имеет действительных корней. Далее из уравнения $6x+5=7$ находим x.

Ответ: $x=\dfrac{1}{3}$.

Пример 4.15. $(x-3)(x+4)(x+6)(x-2)=10x^2$

У нас снова четыре скобки и похоже, что их надо сгру[illegible] Попробуем понять по какому принципу мы будем [illegible] положим, что мы попарно объединили скобки и [illegible] результате получим

$$\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right)=10x^2.$$

Убеждаемся, что $x=0$ не является корнем уравнения и делим левую и правую части уравнения на $x^2 \neq 0$

$$\frac{x^2+ax+b}{x}\cdot\frac{x^2+cx+d}{x}=10 \Leftrightarrow \left(x+a+\frac{b}{x}\right)\left(x+c+\frac{d}{x}\right)=10.$$

Понятно, что если окажется, что $b=d$, то можно будет делать замену. Вспоминаем, что по теореме Виета для квадратного уравнения числа b и d есть произведение корней, группируем скобки так, чтобы произведение свободных членов было одинаковым, т.е. первую со второй и третью с четвертой скобки. Делим на $x^2 \neq 0$ и получаем

$$\frac{x^2+x-12}{x}\cdot\frac{x^2+4x-12}{x}=10 \Leftrightarrow \left(x+1-\frac{12}{x}\right)\left(x+4-\frac{12}{x}\right)=10.$$

Замена $x+\frac{5}{2}-\frac{12}{x}=t$ приводит к уравнению

$$\left(t-\frac{3}{2}\right)\left(t+\frac{3}{2}\right)=10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{7}{2} \\ t=-\frac{7}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+\frac{5}{2}-\frac{12}{x}=\frac{7}{2} \\ x+\frac{5}{2}-\frac{12}{x}=-\frac{7}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $x=4, x=-3, x=3\pm\sqrt{21}$.

Рассмотрим пример, в котором только очень внимательное изучение уравнения подсказывает правильный путь решения.

Пример 4.16. $(x-2)(2x+3)(2x+5)(2x-3)=5(2x-1)^2$

Пример очень похож на предыдущий, однако принцип группировки не очень понятен. Главное отличие от примера 4.15 – в правой части уравнения. Если бы в правой части находилось выражение kx^2, то мы бы знали как нам поступить. Раз так, то делаем замену $2x-1=t \Rightarrow x=\frac{t+1}{2}$ и получаем уравнение

$$(t-3)(t+4)(t+6)(t-2)=10t^2$$

которое в точности совпадает с предыдущим примером.

Отметим, что мы просто, заменив x на $2x-1$, получили довольно "неприятное" уравнение.

Пример 4.17. $x^4-2x^3+x-12=0$.

Это классический пример на подготовку к замене переменного. Преобразуем левую часть уравнения

$$x^4-2x^3+x^2-x^2+x-12=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x\right)^2-\left(x^2-x\right)-12=0.$$

Далее делаем замену $x^2-x=t$, решаем квадратное уравнение относительно t и получаем совокупность из двух квадратных уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2-x-4=0 \\ x^2-x+3=0 \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$.

Часто для решения уравнений приходится комбинировать различные приемы.

Пример 4.18. $\frac{2x^3+3x^2-5x+33}{2x+1}+\frac{x^3+3x^2-2x-22}{x+1}=1$.

Сначала выделим в каждой дроби рациональные части. Получим

$$2x^2+3x-8+18\left(\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x+1}\right)=0.$$

Теперь приводим дроби в скобках к общему знаменателю

$$2x^2+3x-8+\frac{18}{2x^2+3x+1}=0.$$

Делаем замену $2x^2+3x+1=t$ и уравнение принимает вид

$$t-9+\frac{18}{t}=0 \quad \frac{t^2-9t+18}{t}=0 \Leftrightarrow t_1=6,\, t_2=3 .$$

Обратная замена позволяет довольно просто найти корни исходного уравнения.

Ответ: $x=1,\, x=-\frac{5}{2},\, x=-2,\, x=\frac{1}{2}$.

Следующий тип уравнений имеет весьма важное значение. Дело в том, что к уравнениям такого типа сводится большое количество уравнений из тригонометрии, показательных и логарифмических уравнений.

4.6. Однородные уравнения.

Однородные уравнения записываются в виде

$$c_0a^n+c_1a^{n-1}b+c_2a^{n-1}b^2+\ldots+c_{n-1}ab^{n-1}+c_nb^n=0,$$

где a и b некоторые функции, зависящие от x.

Решается подобное уравнение следующим образом. Одним из возможных решений является система $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$.

После рассмотрения этой системы полагаем $b\neq 0$, делим обе части уравнения на $b^n\neq 0$ и обозначаем $\frac{a}{b}=t$. В результате получаем рациональное уравнение

$$c_0t^n+c_1t^{n-1}+t^{n-2}+\ldots+c_{n-1}t+c_n=0.$$

Далее находятся корни этого рационального уравнения.

Пример 4.19. $\left(x^2+4x+8\right)^2+3x^3+14x^2+24x=0$.

Если раскрыть скобки, то получится уравнение четвертой степени, которое можно решить. Однако получение однородного уравнения позволяет решить его быстрее.

Перепишем исходное уравнение в виде

$$\left(x^2+4x+8\right)^2+3x\left(x^2+4x+8\right)+2x^2=0.$$

Вводим обозначение $x^2+4x+8=a$ и получаем однородное уравнение относительно переменных a и x

$$a^2+3xa+2x^2=0.$$

Заметим, что однородное уравнение второй степени вовсе не обязательно делить на $x^2\neq 0$, можно решить его как квадратное уравнение относительно a

$$D=9x^2-8x^2 \Rightarrow a_1=-x,\, a_2=-2x .$$

Делаем обратную замену и получаем

$$\left[\begin{array}{l} x^2+4x+8=-x \\ x^2+4x+8=-2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \varnothing \\ \left[\begin{array}{l} x_1=-4 \\ x_2=-2 \end{array}\right. \end{array}\right. .$$

Ответ: $x=-4,\, x=-2$.

Следующий тип уравнений имеет специальный способ решения, однако, их можно решать и как однородные. Читателю самому предстоит определить для себя наиболее удобный способ решения.

4.7. Симметрические и возвратные уравнения.

Мы не будем выписывать сразу общий вид симметрических и возвратных уравнений а попытаемся показать способы их решения на примерах.

Пример 4.20. $x^4+2x^3-x^2+2x+1=0$.

I способ (симметрическое уравнение).

Легко проверить, что $x=0$ не является корнем нашего уравнения, поэтому, положив $x\neq 0$, разделим обе части уравнения на x^2

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0.$$

Вводим новую переменную $t=x+\frac{1}{x}$. Тогда $t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$ и $t^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$. Делаем замену и получаем квадратное уравнение относительно новой переменной

$$t^2-2+2t-1=0 \Leftrightarrow t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-3 \\ t_1=1 \end{array}\right..$$

Попутно отметим свойство выражения $x+\frac{1}{x}$, к доказательству которого мы вернемся при изучении неравенств, однако, любознательный читатель может доказать это свойство самостоятельно

$$x+\frac{1}{x}\geq 2\text{, если } x>0 \text{ и } x+\frac{1}{x}\leq -2\text{, если } x<0,$$

причем равенство достигается только в случае $x=1$ и $x=-1$ соответственно.

Корни исходного уравнения находятся из того, что

$$x+\frac{1}{x}=-3 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Следующий способ позволяет свести симметрическое уравнение к однородному.

II способ (сведение к однородному).

Вводим новую переменную $x^2+1=a>0$. Тогда $x^4+1=a^2-2x^2$. Подставляем эти выражения в исходное уравнение и получаем

$$a^2-2x^2+2xa-x^2=0 \Leftrightarrow a^2+2xa-3x^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=-3x \\ a_2=x \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+1=-3x \\ x^2+1=x \end{array}\right..$$

Дальнейшее очевидно.

Ответ: $x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

Рассмотрим пример симметричного уравнения более высокой степени.

Пример 4.21. $x^6-9x^5+26x^4-33x^3+26x^2-9x+1=0$.

I способ (симметрическое уравнение).

Как и в предыдущем примере убеждаемся, что $x=0$ не является корнем нашего уравнения и делим обе части на $x^3\neq 0$

$$x^3+\frac{1}{x^3}-9\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+26\left(x+\frac{1}{x}\right)-33=0.$$

Вводим новую переменную $t=x+\frac{1}{x}$. Тогда $t^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$ и $t^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$. Воспользуемся формулой куба суммы $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, попутно заметив, что в нашем случае $a+b=t$, тогда $t^3=x^3+\frac{1}{x^3}+3t$ или $t^3-3t=x^3+\frac{1}{x^3}$. Делаем замену и получаем кубическое уравнение относительно новой переменной

$$t^3-3t-9\left(t^2-2\right)+26t-33=0 \Leftrightarrow t^3-9t^2+23t-15=0.$$

Угадываем корень $t_1=1$, делим левую часть уравнения на $t-1$, получаем квадратное уравнение $t^2-8t+15=0$ и находим еще два корня $t_2=3$, $t_3=5$. В силу свойств выражения $x+\frac{1}{x}$ первый корень является посторонним, поэтому корни исходного уравнения находятся из решения двух квадратных уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x^2-3x+1=0 \\ x^2-5x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2} \\ x_{3,4}=\frac{5\pm\sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

II способ (сведение к однородному).

Вводим новую переменную $x^2+1=a>0$. Тогда $x^4+1=a^2-2x^2$ и $x^6+1=\left(x^2+1\right)\left(x^4-x^2+1\right)=a\left(a^2-3x^2\right)$.

Подставляем полученные выражения в исходное уравнение и получаем

$$a\left(a^2-3x^2\right)-9x\left(a^2-2x^2\right)+26ax^2-33x^3=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^3-9xa^2+23ax^2-15x^3=0.$$

Угадываем корень $a_1=x$, делим на $a-x$ и получаем однородное квадратное уравнение $a^2-8ax+15x^2=0$ у которого решения $a_2=3x$, $a_3=5x$. Далее делаем обратную замену и получаем квадратные уравнения, одно из которых не имеет решений.

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4}=\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}$.

После рассмотрения примеров мы можем определить общий вид симметрических уравнений четной степени

$$a_0x^{2k}+a_1x^{2k-1}+\ldots+a_{2k-1}x+a_{2k}=0,$$

где $a_0=a_{2k}$, $a_1=a_{2k-1}$, $a_2=a_{2k-2}$, $a_3=a_{2k-3}\ldots$.

Зачастую, симметрическим уравнением называют уравнение нечетной степени, получаемое из предыдущего уравнения домножением на $(x+1)$. Отсюда вытекает и метод решения таких уравнений. Находим очевидный корень $x=-1$ и делим уравнение на $(x+1)$. В результате получаем симметрическое уравнение четной степени.

Рассмотрим пример возвратного уравнения.

Пример 4.22. $x^4-2x^3-18x^2-6x+9=0$.

I способ (возвратное уравнение).

Легко проверить, что $x=0$ не является корнем нашего уравнения, поэтому, положив $x\neq 0$, разделим обе части уравнения на x^2

$$x^2+\frac{9}{x^2}-2\left(x+\frac{3}{x}\right)-18=0.$$

Вводим новую переменную $t=x+\dfrac{3}{x}$. Тогда $t^2=x^2+6+\dfrac{9}{x^2}$ и $t^2-6=x^2+\dfrac{9}{x^2}$. Делаем замену и получаем квадратное уравнение относительно новой переменной

$$t^2-6-2t-18=0\Leftrightarrow t^2-2t-24=0\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}t_1&=-4\\t_1&=6\end{aligned}\right..$$

Снова заметим свойство выражения $x+\dfrac{a^2}{x}$, к доказательству которого мы вернемся при изучении неравенств

$$x+\frac{a^2}{x}\geq 2|a|,\text{если } x>0 \text{ и } x+\frac{a^2}{x}\leq -2|a|,\text{если } x<0$$

причем равенство достигается только в случае $x=|a|$ и $x=-|a|$ соответственно.

В результате получаем два квадратных уравнения

$$\left[\begin{aligned}x^2+4x+3=0\\x^2-6x+3=0\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}x_1&=-1\\x_2&=-3\\x_{3,4}&=3\pm\sqrt{6}\end{aligned}\right.$$

II способ (сведение к однородному уравнению)

Вводим новую переменную $x^2+3=a>0$. Тогда $x^4+9=a^2-6x^2$. Подставляем эти выражения в исходное уравнение и получаем

$$a^2-6x^2-2xa-18x^2=0\Leftrightarrow a^2-2xa-24x^2=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}a_1&=6x\\a_2&=-4x\end{aligned}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{aligned}x^2+3&=6x\\x^2+3&=-4x\end{aligned}\right.$$

Теперь решаем квадратные уравнения.

Ответ: $x=-1$, $x=-3$, $x=3\pm\sqrt{6}$.

После рассмотрения примера запишем общий вид возвратного уравнения

$$a_0x^{2k}+a_1x^{2k-1}+\ldots+a_{2k-1}x+a_{2k}=0,$$

где $a_{2k}=\lambda^k a_0$, $a_{2k-1}=\lambda^{k-1}a_1$, $a_{2k-2}=\lambda^{k-2}a_2,\ldots,a_{k+1}=\lambda\, a_{k-1}$

Очевидно, что симметрические уравнения являются частным случаем возвратных уравнений при $\lambda=1$.

Заметим важное обстоятельство, касающееся возвратных (симметрических) уравнений. Если возвратное уравынение имеет корень x_0, то и число $\dfrac{\lambda}{x_0}$ является корнем этого уравнения. В некоторых случаях знание подобных фактов позволяет решить непростые на первый взгляд уравнения.

Пример 4.23. $\dfrac{\left(x^2+x+1\right)^3}{x^2(x+1)^2}=\dfrac{\left(3+\sqrt{3}+1\right)^2}{3\left(\sqrt{3}+1\right)^2}$.

Легко угадать первый корень уравнения $x=\sqrt{3}$. Разделим числитель и знаменатель левой части исходного уравнения на $x^3\neq0$. Имеем

$$\frac{\left(x+\frac{1}{x}+1\right)^3}{\left(x+\frac{1}{x}+2\right)}=\frac{\left(3+\sqrt{3}+1\right)^2}{3\left(\sqrt{3}+1\right)^2}.$$

Таким образом, исходное уравнение оказалось симметрическим и, в силу выжесказанного, имеет корень $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Нам удалось найти уже два корня, но исходное уравнение является уравнением шестой степени, поэтому надо попытаться найти еще какие-нибудь закономерности.

Перепишем исходное уравнение

$$\frac{\left(x(x+1)+1\right)^3}{\left(x(x+1)\right)^2}=\frac{\left(3+\sqrt{3}+1\right)^2}{3\left(\sqrt{3}+1\right)^2}$$

и заменим $x+1=t$, или $x=t-1$. Получим

$$\frac{\left(t^2-t+1\right)^3}{t^2(-t+1)^2}=\frac{\left(3+\sqrt{3}+1\right)^2}{3\left(\sqrt{3}+1\right)^2},$$

т.е. получили исходное уравнение относительно переменной $(-t)$. Но это означает, что если x_0 – корень исходного уравнения, то и $t_0=-x_0-1$ также является корнем исходного уравнения. Теперь можем выписать все шесть корней.

Ответ: $x_1=\sqrt{3}$, $x_2=\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$x_3=-1-x_1=-1-\sqrt{3}$, $x_4=\dfrac{1}{x_3}=\dfrac{1}{-1-\sqrt{3}}$,

$x_5=-1-x_4=-1-\dfrac{1}{-1-\sqrt{3}}$, $x_6=\dfrac{1}{x_5}=\dfrac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Пример 4.24. $x^2+\dfrac{9}{(x-2)^2}=6\left(x+\dfrac{1}{x-2}\right)+10$.

Уравнение очень похожее на возвратное, но мешает выражение в знаменателе. Делаем замену $x-2=t\neq0$ и уравнение после приведения подобных приобретает вид

$$t^2+\frac{9}{t^2}-2\left(t+\frac{3}{t}\right)-18=0,$$

совпадающий с видом уравнения из примера 4.22. Снова с помощью простой замены x на $x-2$ нам удалось решить совсем непростое уравнение.

Ответ: $x=1, x=-1, x=5\pm\sqrt{6}$.

Отметим, что в лекциях мы рассматриваем в основном модельные примеры. В реальности для выбора той или иной модели надо провести некоторые предварительные преобразования.

4.8. Центральная замена.

Пример 4.25. $(x+3)^4+(x+1)^4=20$.

Если сразу возвести в четвертую степень, то получится довольно неприятное уравнение, поэтому сначала сделаем замену, которую называют центральной или усредняющей

$$y=\frac{x+1+x+3}{2}=x+2 \Leftrightarrow x=y-2.$$

В результате исходное уравнение преобразуется к виду

$$(y+1)^4+(y-1)^4=20$$

Теперь можно раскрывать скобки

$$y^4-4y^3+6y^2-4y+1+y^4+4y^3+6y^2+4y+1=20 \Leftrightarrow$$

$$y^4+6y^2-9=0 \Leftrightarrow y^2=-3+3\sqrt{2} \Rightarrow x_{1,2}=-2\pm\sqrt{-3+3\sqrt{2}}.$$

Ответ: $x=-2\pm\sqrt{-3+3\sqrt{2}}$.

4.9. Выделение полных квадратов.

Пример 4.26. $x^2+\dfrac{81x^2}{(x+9)^2}=40$.

Так как в левой части уравнения имеем сумму двух полных квадратов, поэтому выглядит перспективным выделение полного квадрата суммы или разности. На данном этапе не очень понятно, что нам полезнее: сумма или разность, поэтому пока отложим принятие этого решения.

$$x^2\pm2\frac{9x^2}{x+9}+\frac{81x^2}{(x+9)^2}=40\pm2\frac{9x^2}{x+9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x\pm\frac{9x}{x+9}\right)^2=40\pm\frac{18x^2}{x+9}.$$

Теперь приведем к общему знаменателю выражение в скобках

$$\left(\frac{x^2+9x\pm9x}{x+9}\right)^2=40\pm\frac{18x^2}{x+9}.$$

Понятно, что надо выбирать знак "-" и делать замену $\dfrac{x^2}{x+9}=t$.

Остальное просто

$$t^2=40-18t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=-20 \\ t_1=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+20x+180=0 \\ x^2-2x-18=0 \end{array}\right..$$

Исходное уравнение можно свести к возвратному сделав замену $t=x+9 \Leftrightarrow x=t-9$. Действительно, имеем

$$t^2-18t+81+81\frac{t^2-18t+81}{t^2}=40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(t^2+\frac{81^2}{t^2}\right)-18\left(t+\frac{81}{t}\right)+162=40.$$

Теперь после замены $u=t+\dfrac{81}{t}$ получаем квадратное уравнение

$$u^2-18u-40=0.$$

Заметим, что при приведении к общему знаменателю исходного уравнения получается совсем неприятное уравнение четвертой степени.

Можно сделать и более общий вывод. Любое уравнение вида

$$x^n+(-1)^n\frac{a^n x^n}{(x+a)^n}=b$$

сводится заменой $t=x+a$ к возвратному уравнению.

Ответ: $x=1\pm\sqrt{19}$.

4.10. Параметризация задач.

Мы уже сталкивались со способами решения, при которых вводилась новая переменная и получалось уравнение относительно двух переменных. Рассмотрим еще несколько важных приемов.

Пример 4.27. $x^4-2\sqrt{2}x^2-x+2-\sqrt{2}=0$.

Обозначим $\sqrt{2}=a\Rightarrow a^2=2$ и заменим соответствующие числа, но в $2\sqrt{2}$ мы заменим на a только $\sqrt{2}$. В результате получим

$$a^2-a\left(2x^2+1\right)+\left(x^4-x\right)=0.$$

Это уравнение мы будем решать как квадратное относительно переменной a. Теперь, кстати, понятно почему в $2\sqrt{2}$ мы заменили только корень (иначе не получилось бы квадратного уравнения относительно a). Имеем

$$D=\left(2x^2+1\right)^2-4\left(x^4-x\right)=4x^2+4x+1=(2x+1)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a_1=x^2+x+1\\ a_2=x^2-x\end{array}\right..$$

Теперь вспоминаем, что $a=\sqrt{2}$ и получаем два квадратных уравнения

$$\left[\begin{array}{l}x^2+x+1-\sqrt{2}=0\\ x^2-x-\sqrt{2}=0\end{array}\right.$$

Ответ: $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$, $x=\dfrac{1\pm\sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2}$.

Пример 4.28. $\left(x^2+2x-5\right)^2+2\left(x^2+2x-5\right)-5=x$.

Пусть

Введем новую переменную $y=x^2+2x-5$ и получим систему

$$\left\{\begin{array}{l}x=y^2+2y-5\\ y=x^2+2x-5\end{array}\right..$$

Вычтем из второго уравнения первое

$$y-x=x^2-y^2+2(x-y)\Leftrightarrow(x-y)(x+y+3)=0.$$

Имеем

$$\left[\begin{array}{l}x-y=0\\ x+y+3=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-x^2-2x+5=0\\ x+x^2+2x-5+3=0\end{array}\right..$$

Ответ: $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$, $x_{3,4}=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

Пример 4.29. $x^3-x=a\sqrt{a+1}$, $a\ge -1$

Обозначим $\sqrt{a+1}=b\ge 0\Rightarrow b^2=a+1\Leftrightarrow a=b^2-1$. Тогда

$$x^3-x=b^3-b\Leftrightarrow(x-b)\left(x^2+xb+b^2-1\right)=0.$$

Ответ: если $-1\le a\le\dfrac{1}{3}$, то $x_1=\sqrt{a+1}$, $x_{2,3}=\dfrac{-\sqrt{a+1}\pm\sqrt{1-3a}}{2}$.

если $a>\dfrac{1}{3}$, то $x=\sqrt{a+1}$.

Следующий пример показывает как, в принципе, можно решать кубические уравнения, и как получить формулу Кардано.

Пример 4.30. $x^3-3x=64+\dfrac{1}{64}$.

Сделаем подстановку $x=t+\dfrac{1}{t}$, $t\ne 0$. Тогда $x^3-3x=t^3+\dfrac{1}{t^3}$, и наше уравнение принимает вид

$$t^3+\frac{1}{t^3}=4^3+\frac{1}{4^3}\Leftrightarrow\left(t^3-4^3\right)\left(1-t^3\cdot 4^3\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 4 \\ t_2 = \dfrac{1}{4} \Rightarrow x = \dfrac{17}{4}. \end{array}\right.$$

Делением на $x - \dfrac{17}{4}$ можно убедиться, что других корней исходное уравнение не имеет.

Ответ: $x = \dfrac{17}{4}$.

Заметим, что в рассмотренном примере удачно подобраны числа. Попробуем решить подобный пример в общем виде. В предыдущей лекции расказывалось как сделать уравнение неполным, поэтому мы будем сразу рассматривать неполное кубическое уравнение

$$x^3 + px + q = 0.$$

По аналогии с рассмотренным примером, делаем подстановку $x = t - \dfrac{p}{3t}, t \neq 0$. Тогда $x^3 + px = t^3 - \dfrac{p^3}{27t^3}$ и уравнение принимает вид

$$t^3 - \frac{p^3}{27t^3} + q = 0.$$

Теперь решив это уравнение как квадратное относительно t^3 можно получить формулу Кардано.

Отметим несколько важных обстоятельств.

Во-первых, два различных решения последнего бикубического уравнения дают одно значение x^* , причем, в силу того, что дискриминант квадратного уравнения $D = 27\left(27q^2 + 4p^3\right)$ противоположен по знаку дискриминанту кубического уравнения, определенному в лекции 3, то найденное решение x^* является единственным действительным корнем исходного кубического уравнения.

Во-вторых, если квадратное уравнение относительно t^3 не имеет действительных корней, то исходное кубическое уравнение имеет три действительных корня, для нахождения которых потребуется

либо другой способ решения, либо некоторые знания комплексных чисел, которые мы рассмотрим несколько позднее.

На этом наш обзор методов решений рациональных уравнений закончен и в следующей лекции мы переходим к рассмотрению систем рациональных уравнений.

Задачи для разбора с преподавателем

Решить уравнения:

4.1. $2 - 3x^2 + \dfrac{1}{x-2} = 5x + \dfrac{x+2}{x^2-4}$.

4.2. $\dfrac{4}{x+4} + \dfrac{9}{x+9} + \dfrac{12}{x+12} = 3$.

4.3. $\left(\dfrac{2x}{x+1}\right)^2 - \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^2 = \dfrac{3x}{x^2-1}$.

4.4. $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{x-3} + \dfrac{6}{x+6} = 0$.

4.5. $\dfrac{2}{x+8} + \dfrac{5}{x+9} = \dfrac{3}{x+15} + \dfrac{4}{x+6}$.

4.6. $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{x-3}{x+3} + \dfrac{x+4}{x-4} = 4$.

4.7. $\dfrac{x^2+4x+4}{x+4} - \dfrac{2x+6}{x+2} = \dfrac{x^2+x+1}{x+1} - \dfrac{2x+9}{x+3}$.

4.8. $\dfrac{x^3-3x+12}{x} + \dfrac{x^2-3x-16}{x+1} = 1$.

4.9. $\dfrac{3x^3-11x^2+13x-1}{3x-5} + \dfrac{3x^3-5x^2+7x-1}{3x+1} + x^2 = 0$.

4.10. $x^3 - 2x^2 - 9 = 0$.

4.11. $9x^3 - 13x - 6 = 0$.

4.12. $2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$.

4.13. $x^3 + 3x^2 + 3x + 3 = 0$.

4.14. $x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 7x + 12 = 0$.

4.15. $x^4 + x^2 + 4x - 3 = 0$.

4.16. $x^4 - 2x^3 + x - 12 = 0$.

4.17. $\left(x^2 + 2x\right)^2 - (x+1)^2 = 55$.

4.18. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680$.

4.19. $(6x+5)(3x+2)(x+1)=28$.

4.20. $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$.

4.21. $(x^2+3)(x^2+x+2)=6(x-1)^2$.

4.22. $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-7x+4}+\dfrac{x^2-x+4}{x^2+x+4}+\dfrac{13}{3}=0$.

4.23. $\dfrac{5x+7}{x^2+3x+2}+\dfrac{9x+47}{x^2+12x+35}-\dfrac{4x+17}{x^2+7x+10}=2$.

4.24. $x^4+2x^3+5x^2+2x+1=0$.

4.25. $12x^2+10\left(2x+\dfrac{1}{3x}\right)+\dfrac{1}{3x^2}=-11$.

4.26. $5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x^3}+x^3$.

4.27. $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

4.28. $(x^2-x+1)^4-6x^2(x^2-x+1)^2+5x^4=0$.

4.29. $4(x^2-x+1)^2+7(x+1)^2=11(x^3+1)$.

4.30. $(x+3)^4+(x+1)^4=20$.

4.31. $(x-2)^6+(x-4)^6=64$.

4.32. $(x^2+x-5)^4+(x^2+x-3)^4=82$.

4.33. $\left(\dfrac{x}{x-2}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2=2$.

4.34. $x^2+\dfrac{81x^2}{(x+9)^2}=40$.

4.35. $(x^2+2x-5)^2+2(x^2+2x-5)-5=x$.

4.36. $(x^3+2x-2)^3+2(x^3+2x-2)-2=x$.

4.37. $\left(\dfrac{x^2-1}{2}\right)^2+2x-1=0$.

4.38. $x^2+\dfrac{36}{(x-2)^2}=6\left(x-\dfrac{2}{x-2}\right)+19$.

4.39. $x^3-(\sqrt{2}+1)x^2+2=0$.

4.40. $(x^2+x+1)(x^2+2x+3)=1$.

4.41. $x^3-3x=64+\dfrac{1}{64}$.

4.42. $x^4-4x^3-19x^2-24x-3=0$.

4.43. $x^3-(1+2a)x^2+(a^2-2a)x-a^2+4a=0$.

4.44. $x^2-4xy+5y^2-2y+1=0$.

4.45. $1+\dfrac{1}{x^4y^4}=\dfrac{8}{(x^2+y^2)^2}$.

4.46. $x^3-x=a\sqrt{a+1}$.

4.47. $x^3-\dfrac{8x^3}{(x+2)^3}=7$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

4.1д. $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{11}{x-11}=\dfrac{9}{x-9}+\dfrac{10}{x-10}$.

4.2д. $\dfrac{1}{x-8}+\dfrac{1}{x-6}+\dfrac{1}{x+6}+\dfrac{1}{x+8}=0$.

4.3д. $\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{21}{x-3}=\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{21}{x+3}$.

4.4д. $\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x+2}=\dfrac{x-7}{x-1}+4$.

4.5д. $\dfrac{30}{x+1}-\dfrac{30}{x-1}-\dfrac{8}{x+4}+\dfrac{8}{x-4}=56$.

4.6д. $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}=\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$.

4.7д. $\dfrac{x^3-3x^2-x-7}{x-1}+\dfrac{2x^3-9x^2+x+32}{2x-3}=1$.

4.8д. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{7}{9}\dfrac{x+1}{x-1}$.

4.9д. $x^3+4x^2+4x+1=0$.

4.10д. $x^5+5x^4-6x^3-44x^2+8x+96=0$

4.11д. $8x^3-36x-27=0$

4.12д. $x^4-4x^3-1=0$.

4.13д. $2x^4+7x^3-12x^2-38x+21=0$.

4.14д. $5x^3+6x^2+6x+2=0$.

4.15д. $x^4-22x^2-5x+2=0$.

4.16д. $x^4-2x^2-8x-3=0$.

4.17д. $x^4-2x^3+3x^2-2x-1=0$.

4.18д. $x^4-x^2+2x-1=0$.

4.19д. $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$.

4.20д. $\left(x^2-6x\right)^2-2\left(x-3\right)^2=81$.

4.21д. $\left(8x^2-3x+1\right)^2=32x^2-12x+1$.

4.22д. $(2x-3)(2x-1)(x+1)(x+2)=36$.

4.23д. $(x-3)(x+4)(x+6)(x-2)=10x^2$.

4.24д. $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.

4.25д. $\dfrac{x^2-6x-9}{x}=\dfrac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$.

4.26д. $\dfrac{3x-15}{x^2-x-2}+\dfrac{2x+11}{x^2+x-6}-\dfrac{3x+10}{x^2+5x+6}=1$.

4.27д. $\dfrac{3x+39}{x^2-4x-21}+\dfrac{x-18}{x^2-x-12}+\dfrac{x-10}{x^2-11x+28}+$

$+\dfrac{2x+38}{x^2-2x-24}+\dfrac{x-2}{x^2+6x+8}-\dfrac{4x+16}{x^2-4x-12}-\dfrac{40x-163}{x^2-5x-14}=0$.

4.28д. $x^4+2x^3-7x^2-8x+15=0$.

4.29д. $\left(x^2-5x+7\right)^2-(x-2)(x-3)-1=0$.

4.30д. $15\dfrac{x^2+5x+10}{x^2+7x+12}=x^2+3x+2$.

4.31д. $\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2-8x+12\right)\left(x^2-9x+20\right)=720$.

4.32д. $\left(x^2-3x+1\right)\left(x^2+3x+2\right)\left(x^2-9x+20\right)=-30$.

4.33д. $x^4-x^3-4x^2+x+1=0$.

4.34д. $\dfrac{112}{5}\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}\right)=\dfrac{36}{x^2}+x^2$.

4.35д. $6=\dfrac{1}{x^3}+x^3+\dfrac{1}{x^2}+x^2+\dfrac{1}{x}+x$.

4.36д. $\dfrac{x(x-1)^2}{\left(x^2-x+1\right)^2}=\dfrac{2}{9}$.

4.37д. $x^5+6x^4+11x^3+11x^2+6x+1=0$.

4.38д. $\dfrac{\left(x^2+x+1\right)^2}{(x+1)^2\left(x^2+1\right)}=\dfrac{49}{45}$.

4.39д. $x^6-9x^5+26x^4-33x^3+26x^2-9x+1=0$.

4.40д. $\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^2+\left(\dfrac{x-a}{x-b}\right)^2-\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\dfrac{x^2-a^2}{x^2-b^2}=0$.

4.41д. $\left(x^2-x\right)^4-5x^2\left(x^2-x\right)^2+6x^4=0$.

4.42д. $\left(x^2+4x+8\right)^2+3x^3+14x^2+24x=0$.

4.43д. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2-3\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-2\dfrac{x-2}{x-1}=0$.

4.44д. $(x-2)^2(x+1)^2-\left(x^2-1\right)(x-2)-2(x-1)^2=0$.

4.45д. $(x-6)^4+(x-4)^4=82$.

4.46д. $x^5+(6-x)^5=1056$.

4.47д. $\left(x^2-4x+6\right)^4+\left(x^2-6x+6\right)^4=82x^4$

4.48д. $(8x-25)^{17}+(2x+5)^{34}=0$.

4.49д. $\left(\dfrac{3x-5}{x-1}\right)^4+\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^4=194$.

4.50д. $x^4-2\sqrt{3}x^2+x+3-\sqrt{3}=0$.

4.51д. $x^2+\dfrac{25x^2}{(2x+5)^2}=\dfrac{74}{49}$.

4.52д. $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^3+\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^3=\dfrac{x-1}{x+1}$.

4.53д. $(x^2-5)(3x-2)^2+4x^2=0$.

4.54д. $(x^2+1)^4+(x+1)^8=32x^4$

4.55д. $9(x+2)(x+3)(x+5)(x+9)=10(x+1)^2$.

4.56д. $(x-4)(x+1)(x+12)(4x+3)+564x^4=0$.

4.57д. $7\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2+\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^2=8\cdot\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$.

4.58д. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2=\dfrac{32}{3}\cdot\dfrac{x^2+1}{x^2-1}+4$.

4.59д. $10x^2(x-2)^2=9x^2+9(2-x)^2$.

4.60д. $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2=\dfrac{10}{9}$.

4.61д. $x^3-\left(\sqrt{3}+1\right)x^2+3=0$.

4.62д. $\dfrac{x+6}{x-6}\left(\dfrac{x-4}{x+4}\right)^2+\dfrac{x-6}{x+6}\left(\dfrac{x+9}{x-9}\right)^2=2\dfrac{x^2+36}{x^2-36}$.

4.63д. $(x^2-4x+6)^2-4(x^2-4x+6)+6=x$.

4.64д. $(x^2+2x+2)(x^2-x+1)=1$.

4.65д. $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x$.

4.66д. $\left(\dfrac{x^3+2}{3}\right)^3=3x-2$.

4.67д. $x^2+\dfrac{25}{(x-4)^2}=10\left(x-\dfrac{1}{x-4}\right)-6$.

4.68д. $x^3-\dfrac{27x^3}{(x+3)^3}=208$.

4.69д. $4x^2+4x+17=\dfrac{12}{x^2-x+1}$.

4.70д. $\dfrac{(x^2-x+1)^3}{(5-\sqrt{5}+1)^3}=\dfrac{x^2(x-1)^2}{5(\sqrt{5}-1)^2}$.

4.71д. $x^3+3x=a^3-\dfrac{1}{a^3}$.

4.72д. $x^3-4x=b\sqrt{b+4}$.

4.73д. $x^3+(1-4a)x^2+(4a^2-5a)x+4a^2-a=0$.

4.74д. $x^6+6x^5+15x^4-7x^3-39x^2-30x-7=0$.

4.75д. $(x^2+3x)^2+9x^2=7(x+3)^2$.

4.76д. $(2x^2+x)^2+x^2=12(2x+1)^2$.

4.77д. $x^2y^2+\dfrac{x^4+16y^4}{x^2y^2}=4(1+xy)$.

4.78д. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+5=0$.

4.79д. $x^4+y^4+6x^2y+y^2+16=0$.

4.80д. $x^2+5y^2+2z^2-4xy+2yz-6z+9=0$.

4.81д. $x^2-2xy+2y^2+\dfrac{4}{y^2}=4$.

4.82д. $(x^2-x)^2+(x^2+x)^2=90(x^2-1)^2$.

4.83д. $2x^3+(1-a)x^2-(4a+6)x+a^2+3a=0$.

4.84д. $(3x+2)^5+(3x+4)^5=1056(x+1)$.

4.85д. $(a-5)x^3+(10a-2a^2-1)x^2+(4a-10)x-2=0$.

Ответы

Задачи для разбора с преподавателем

4.1. $\dfrac{1}{3}$; **4.2.** $0,-\dfrac{32}{3},-6$; **4.3.** $1\pm\sqrt{2}$; **4.4.** $0,\dfrac{10\pm2\sqrt{7}}{3}$; **4.5.** $-\dfrac{33}{4},6$; **4.6.** $\dfrac{-5\pm\sqrt{345}}{10}$;
4.7. $0,\dfrac{-5\pm\sqrt{3}}{2}$; **4.8.** $1,-2,2,-3$; **4.9.** $1,\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}$; **4.10.** 3; **4.11.** $-\dfrac{2}{3},\dfrac{1\pm\sqrt{10}}{3}$; **4.12.** 1;
4.13. $-1-\sqrt[3]{2}$; **4.14.** $\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2},\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$; **4.15.** $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; **4.16.** $\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$;
4.17. $2,-4$; **4.18.** $12,-1$; **4.19.** $\dfrac{1}{3}$; **4.20.** $-4,-6,\dfrac{-15\pm\sqrt{129}}{2}$; **4.21.** $0,-3$;
4.22. $1,4$; **4.23.** $1,-4$; **4.24.** $\varnothing$; **4.25.** $-1,-\dfrac{1}{6}$; **4.26.** $\sqrt{2}\pm1,-\sqrt{2}\pm1$; **4.27.** $3,\dfrac{2}{3}$;
4.28. $1,\dfrac{\sqrt{5}+1\pm\sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$; **4.29.** $0,2,3,-\dfrac{1}{4}$; **4.30.** $-2\pm\sqrt{3\sqrt{2}-3}$; **4.31.** $2,4$;

4.32. $1, -3, \pm 2$; **4.33.** $\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$; **4.34.** $1\pm\sqrt{19}$; **4.35.** $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$, $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$; **4.36.** 1;
4.37. $-1\pm\sqrt{2}$; **4.38.** $1, 8, \frac{1\pm\sqrt{33}}{2}$; **4.39.** $\sqrt{2}, \frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$; **4.40.** $\varnothing$; **4.41.** $\frac{17}{4}$;
4.42. $\frac{7\pm\sqrt{53}}{2}$; **4.43.** $x=1, x=a\pm 2\sqrt{a}$ при $a\ge 0$, $x=1$ при $a<0$; **4.44.** $(2;1)$;
4.45. $(1;1)$, $(-1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;-1)$; **4.46.** $x=\sqrt{a+1}, x=\frac{-\sqrt{a+1}\pm\sqrt{1-3a}}{2}$, при $-1\le a\le\frac{1}{3}$, $x=\sqrt{a+1}$, при $a>\frac{1}{3}$; **4.47.** $-1, 2$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1д. $0, \frac{67}{7}, 13$; **4.2д.** $0, \pm 5\sqrt{2}$; **4.3д.** $\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3}$; **4.4д.** $5, -\frac{5}{4}$; **4.5д.** $0, \pm\sqrt{\frac{239}{14}}$;
4.6д. $0, -\frac{5}{2}$; **4.7д.** $2, \frac{1}{2}, -1, \frac{7}{2}$; **4.8д.** 2 ; **4.9д.** $-1, \frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$; **4.10д.** $-3, -4, \pm 2$;
4.11д. $-\frac{3}{2}, \frac{3\pm\sqrt{45}}{4}$; **4.12д.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$; **4.13д.** $\frac{1}{2}, -3, \frac{-1\pm\sqrt{29}}{2}$;
4.14д. $\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{18}-2$; **4.15д.** $\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$, $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$; **4.16д.** $1\pm\sqrt{2}$;
4.17д. $\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$; **4.18д.** $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; **4.19д.** $1, 3$; **4.20д.** $3\pm 2\sqrt{5}$;
4.21д. $\frac{3}{8}, 0, \frac{3\pm\sqrt{73}}{16}$; **4.22д.** $2, -\frac{5}{2}$; **4.23д.** $4, -3, -3\pm\sqrt{21}$; **4.24д.** $\frac{1}{2}, \frac{7}{2}$;
4.25д. $-1, 9, \frac{5\pm\sqrt{61}}{2}$; **4.26д.** $\varnothing$; **4.27д.** 5 ; **4.28д.** $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$;
4.29д. $2, 3$; **4.30д.** $2, -7$; **4.31д.** $0, 7$;
4.32д. $\frac{3\pm\sqrt{4\sqrt{30}+25}}{2}$, $\frac{3\pm\sqrt{25-4\sqrt{30}}}{2}$, $\frac{3\pm\sqrt{29}}{2}$; **4.33д.** $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, $1\pm\sqrt{2}$;
4.34д. $\frac{3\pm\sqrt{159}}{5}$, $5\pm\sqrt{31}$; **4.35д.** 1 ; **4.36д.** $\frac{1}{2}, 2, 2\pm\sqrt{3}$; **4.37д.** $-1, -2\pm\sqrt{3}$;
4.38д. $\frac{1}{2}, 2, \frac{-9\pm\sqrt{65}}{4}$; **4.39д.** $\frac{5\pm\sqrt{21}}{2}$, $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$; **4.40д.** если $a=b\ne 0$, то $x\in(-\infty;-|b|)\cup(-|b|;|b|)\cup(|b|;+\infty)$, если $|a+3b|\ge 2\sqrt{2}|b|, a\ne 0, b\ne 0$, то $x=\frac{\pm(a+b)\pm\sqrt{a^2+6ab+b^2}}{2}$, если $|a+3b|<2\sqrt{2}|b|$, то решений нет;
4.41д. $0, 1\pm\sqrt{2}, 1\pm\sqrt{3}$; **4.42д.** $-4, -2$; **4.43д.** $\frac{1}{2}, 5$; **4.44д.** $0, 3, \pm\sqrt{3}$; **4.45д.** $7, 3$;

4.46д. $4, 2$; **4.47д.** $1, 6$; **4.48д.** $0, -7$; **4.49д.** $\pm\sqrt{3}$; **4.50д.** $\frac{-1\pm\sqrt{4\sqrt{3}+1}}{2}$, $\frac{1\pm\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$; **4.51д.** $-\frac{5}{7}, 1$; **4.52д.** 0 ; **4.53д.** $1, 2, \frac{-5\pm\sqrt{65}}{6}$;
4.54д. $-1-\sqrt{2\sqrt{6}-3}\pm\sqrt{2\sqrt{6}+2\sqrt{2\sqrt{6}-3}-6}$; **4.55д.** $-4, -\frac{11}{3}, \frac{-17\pm 2\sqrt{31}}{3}$;
4.56д. $1, -\frac{12}{25}$; **4.57д.** 2 ; **4.58д.** $\pm\sqrt{2}$; **4.59д.** $-1, 3$; **4.60д.** $\pm\frac{1}{2}$;
4.61д. $\sqrt{3}, \frac{1\pm\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{4}$; **4.62д.** $\frac{6\pm 6\sqrt{26}}{4}$; **4.63д.** $2, 3$; **4.64д.** $\varnothing$; **4.65д.** $-1, 3, \pm\sqrt{3}$;
4.66д. $1, -2$; **4.67д.** $3, 9, 3\pm\sqrt{6}$; **4.68д.** $\sqrt{6}-2\pm\sqrt{2\sqrt{6}-2}$; **4.69д.** $\varnothing$;
4.70д. $\sqrt{5}, 1-\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$, $-\frac{\sqrt{5}+1}{4}, \frac{5+\sqrt{5}}{4}$; **4.71д.** $a-\frac{1}{a}$; **4.72д.** если $-4\le b\le\frac{4}{3}$, то $x=\sqrt{b+4}$, $x=\frac{-\sqrt{b+4}\pm\sqrt{4-3b}}{2}$, если $b>\frac{4}{3}$, то $x=\sqrt{b+4}$;
4.73д. если $a\ge 0$, то $x=-1$, $x=2a\pm\sqrt{a}$, если $a<0$, то $x=-1$; **4.74д.** $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$;
4.75д. $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$; **4.76д.** $\frac{3\pm\sqrt{15}}{2}$, $-2\pm\sqrt{2}$; **4.77д.** $(2;1)$, $(-2;-1)$; **4.78д.** $(1;2;0)$;
4.79д. $(\sqrt{6};-2)$, $(-\sqrt{6};-2)$; **4.80д.** $(-6;-3;3)$; **4.81д.** $(\sqrt{2};\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$;
4.82д. $\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}, \pm\frac{3\sqrt{11}}{11}$; **4.83д.** если $a\ge -1$, то $x=\frac{a+3}{2}$, $x=-1\pm\sqrt{1+a}$, если $a<-1$, то $x=\frac{a+3}{2}$; **4.84д.** $0, -2, -1$; **4.85д.** если $a\in(-\infty;-\sqrt{2}]\cup[\sqrt{2};5)\cup(5;+\infty)$, то $x=\frac{1}{a-5}$, $x=a\pm\sqrt{a^2-2}$, если $a=5$, то $x=5\pm\sqrt{23}$, если $a\in(-\sqrt{2};\sqrt{2})$, то $x=\frac{1}{a-5}$.

Лекция №5

Системы рациональных уравнений.

Мы будем считать, что читатель умеет решать простейшие системы рациональных уравнений, в которых из одного уравнения выражается одна из переменных, полученное выражение подставляется во второе уравнение и, в результате, получается квадратное уравнение.

5.1. Преобразование одного из уравнений системы.

Пример 5.1. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2} \\ x^2+y^2=20 \end{cases}.$

Преобразуем первое уравнение системы

$$\frac{(x+y)^2+(x-y)^2}{x^2-y^2}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{5}{2}.$$

Теперь, воспользовавшись вторым уравнением системы, получим

$$\begin{cases} x^2-y^2=16 \\ x^2+y^2=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=18 \\ y^2=2 \end{cases}.$$

Заметим, что исходную систему можно решить другим способом.

Обозначим $\dfrac{x+y}{x-y}=t$. Тогда первое уравнение системы приобретает вид

$$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1=2 \\ t_2=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+y}{x-y}=2 \\ \dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3y \\ x=-3y \end{array}\right..$$

Далее подставляем полученное во второе уравнение исходной системы и получаем ответ.

Ответ: $\left(3\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\left(-3\sqrt{2};\sqrt{2}\right),\left(3\sqrt{2};-\sqrt{2}\right),\left(-3\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$.

5.2. Получение дополнительного уравнения.

Суть метода в том, что в результате алгебраических преобразований уравнений системы получается дополнительное уравнение, которое используется для решения системы.

Пример 5.2. $\begin{cases} \dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y}=3x \\ \dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{z}=4y \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=5z \end{cases}.$

Приняв во внимание условие $xyz\neq 0$, приведем каждое уравнение системы к общему знаменателю

$$\begin{cases} y^2+z^2=3xyz \\ z^2+x^2=4xyz \\ y^2+x^2=5xyz \end{cases}.$$

Складываем уравнения и получаем вспомогательное соотношение

$$x^2+y^2+z^2=6xyz.$$

Теперь последовательно выражаем из вспомогательного уравнения x^2, y^2, z^2

$$\begin{cases} x^2=3xyz \\ y^2=2xyz \\ z^2=xyz \end{cases}.$$

Перемножаем получившиеся уравнения и находим, что $xyz = \frac{1}{6}$.

При выписывании ответа учитываем, что произведение xyz положительно.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{6}}\right),$
$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$

5.3. Замена переменых.

Пример 5.3. $\begin{cases} \frac{1}{x-y} + x^2 - 1 = 0 \\ \frac{x^2}{x-y} + 2 = 0 \end{cases}.$

Делаем замену $\frac{1}{x-y} = a \neq 0, x^2 = b \geq 0$. Тогда

$$\begin{cases} a+b=1 \\ ab=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases} \end{array} \right.$$

С учетом ограничений на переменные получаем

$$\begin{cases} \frac{1}{x-y} = -1 \\ x^2 = 2 \end{cases}.$$

Ответ: $\left(\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)$.

Рассмотрим пример, в котором необходимо сделать элементарное преобразование, а затем заменить переменные и получить обычную линейную систему.

Пример 5.4. $\begin{cases} \frac{5xy}{x+y} = 12 \\ \frac{5yz}{z+y} = 18 \\ \frac{13xz}{x+z} = 36 \end{cases}.$

"Перевернем" каждое уравнение системы

$$\begin{cases} \frac{x+y}{5xy} = \frac{1}{12} \\ \frac{z+y}{5yz} = \frac{1}{18} \\ \frac{x+z}{13xz} = \frac{1}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{5}{12} \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{18} \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = \frac{13}{36} \end{cases}.$$

Теперь обозначив $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b$, $\frac{1}{z} = c$, получим

$$\begin{cases} a+b=\frac{5}{12} \\ b+c=\frac{5}{18} \\ a+c=\frac{13}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\frac{5}{12} \\ a-c=\frac{5}{36} \\ a+c=\frac{13}{36} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{4} \\ b=\frac{1}{6} \\ c=\frac{1}{9} \end{cases}.$$

Ответ: $(4;6;9)$.

5.4. Симметричные системы. Обобщенная теорема Виета.

5.4.1. Симметричные системы с двумя неизвестными.

Симметричными системами с двумя неизвестными называются системы, в которых замена $x \to y$, $y \to x$ не меняет уравнений системы. Более формально дадим определение симметрического многочлена двух переменных.

<u>Определение 5.1</u>. Многочлен $P(x,y)$ называется симметрическим, если выполняется условие $P(x,y)=P(y,x)$.

Если система содержит только симметрические многочлены, то для ее решения делается замена

$$x+y=u\,,xy=v\,.$$

Для получения, например, выражения x^2+y^2 через новые переменные возводим в квадрат обе части равенства $x+y=u$

$$u^2=x^2+y^2+2xy\Rightarrow\ x^2+y^2=u^2-2v\,.$$

Если надо получить сумму кубов x^3+y^3, то обе части равенства $x+y=u$ возводим в третью степень

$$u^3=x^3+y^3+3xy\left(x+y\right)\Rightarrow x^3+y^3=u^3-3uv\,.$$

Отметим, что в симметричной системе для любого решения $(a;b)$ пара $(b;a)$ также является решением.

Пример 5.5. $\begin{cases}x^3+y^3=9\\ x^2y+xy^2=6\end{cases}.$

Преобразуем уравнения системы

$$\begin{cases}(x+y)\ \left(x^2-xy+y^2\right)=9\\ xy\left(x+y\right)=6\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x+y)\left((x+y)^2-3xy\right)=9\\ xy\left(x+y\right)=6\end{cases}.$$

Теперь делаем замену $x+y=u\,,xy=v$

$$\begin{cases}u\left(u^2-3v\right)=9\\ uv=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^3-18=9\\ uv=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=3\\ v=2\end{cases}.$$

Делаем обратную замену и получаем систему $\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases}.$

Мы уже говорили в прошлой лекции об обратной теореме Виета. В силу этой теоремы, решениями этой системы будет пара корней квадратного уравнения

$$t^2-3t+2=0\,.$$

Ответ: $(2;1)$, $(1;2)$.

Далеко не все симметричные системы надо решать стандартным образом. Следующие примеры показывают, что решение с помощью стандартной замены может привести к усложнению задачи.

Пример 5.6. $\begin{cases}x^3+y^3=4\\ xy=1\end{cases}.$

Система симметричная, делаем замену $x+y=u\,,xy=v$, и получаем

$$\begin{cases}u^3-3u-4=0\\ v=1\end{cases}.$$

К счастью, мы умеем решать кубические уравнения подобного типа (пример 4.27).

Попробуем решить исходную систему другим способом. Приняв во внимание, что $y\neq 0$, из второго уравнения получим $x=\dfrac{1}{y}$ и подставим получившееся выражение в первое уравнение

$$\begin{cases}y^3+\dfrac{1}{y^3}=4\\ x=\dfrac{1}{y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^6-4y^3+1=0\\ x=\dfrac{1}{y}\end{cases}.$$

Решаем первое уравнение как квадратное относительно y^3.

Ответ: $\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}\,;\dfrac{1}{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}\right),\left(\sqrt[3]{2-\sqrt{3}};\dfrac{1}{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}}\right).$

Довольно часто при решении как симметричных систем, так и задач, сводимых к таким системам, удается воспользоваться следующей теоремой, которая называется обобщенной теоремой Виета.

Теорема 5.1. Система вида

$$\begin{cases} a+b=c+d \\ a^n+b^n=c^n+d^n \end{cases}$$

при $n=2k$ равносильна совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases} \\ \begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases} \end{array}\right.$$

При $n=2k+1$ к указанной совокупности добавляется $a+b=c+d=0$.

Докажем эту теорему, а затем посмотрим на примерах, как с помощью этой теоремы можно решать довольно непростые задачи практически устно.

Доказывать будем сначала для случая $n=2k$.

Для удобства введем следующие обозначения:

$$t=\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2},\ u=\frac{a-b}{2},\ v=\frac{c-d}{2}.$$

Тогда $a=t+u$, $b=t-u$, $c=t+v$, $d=t-v$.

Если $u=v=0$, то теорема очевидна, поэтому полагаем, например, $u\neq 0$.

Второе уравнение исходной системы приобретает вид

$$(t+u)^{2k}+(t-u)^{2k}=(t+v)^{2k}+(t-v)^{2k}.$$

Заметим, что формально мы сделали центральную замену.

Мы уже знаем (пример 4.25), что после возведении в степень, слагаемые с нечетными степенями u и v уничтожаются, поэтому используя формулу бинома Ньютона получаем

$$t^{2k}+\ldots+C_{2k}^{2j}\cdot t^{2k-2j}\cdot u^{2j}+\ldots+u^{2k}=$$

$$=t^{2k}+\ldots+C_{2k}^{2j}\cdot t^{2k-2j}\cdot v^{2j}+\ldots+v^{2k}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sum_{j=1}^{k}C_{2k}^{2j}\cdot t^{2k-2j}\cdot\left(u^{2j}-v^{2j}\right)=0, \qquad (5.1)$$

но в силу того, что

$$u^{2j}-v^{2j}=\left(u^2\right)^j-\left(v^2\right)^j=$$

$$=\left(u^2-v^2\right)\left(\left(u^{j-1}\right)^2+\left(u^{j-2}\right)^2v^2+\,+u^2\left(v^{j-2}\right)^2+\left(v^{j-1}\right)^2\right)$$

имеем

$$\left(u^2-v^2\right)\sum_{j=1}^{k}C_{2k}^{2j}\cdot t^{2k-2j}\cdot A_j=0,$$

где $A_j=\left(u^{j-1}\right)^2+\left(u^{j-2}\right)^2v^2+\,+u^2\left(v^{j-2}\right)^2+\left(v^{j-1}\right)^2$.

Теперь приняв во внимание, что $C_{2k}^{2j}>0$, $A_j>0$, $t^{2k-2j}\geq 0$, получим

$$u^2-v^2=0, \qquad (5.2)$$

или возвращаясь к исходным переменным

$$\left[\begin{array}{l} u=v \\ u=-v \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=c+d \\ a-b=c-d \end{cases} \\ \begin{cases} a+b=c+d \\ b-a=c-d \end{cases} \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases} \\ \begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases} \end{array}\right..$$

При $n=2k+1$ делаем такую же центральную замену, тогда соотношения аналогичные (5.1) и (5.2) принимают вид

$$\sum_{j=1}^{k}C_{2k+1}^{2j}\cdot t^{2k-2j+1}\cdot\left(u^{2j}-v^{2j}\right)=0, \qquad (5.1')$$

$$t\left(u^2-v^2\right)=0. \qquad (5.2')$$

Из последнего и следует доказательство теоремы при $n=2k+1$.

Пример 5.7. $\begin{cases} x^5+y^5=31 \\ x+y=1 \end{cases}$.

Сначала решим систему как симметричную, а затем посмотрим насколько быстрее ее можно решить с помощью обобщенной теоремы Виета.

Преобразуем первое уравнение системы, воспользовавшись формулой из примера 2.12

$$x^5+y^5=(x+y)\left(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4\right)=$$

$$=(x+y)\left(\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2-xy\left(x^2+y^2\right)\right)=$$

$$=(x+y)\left(\left((x+y)^2-2xy\right)^2-x^2y^2-xy\left((x+y)^2-2xy\right)\right).$$

Делаем замену $x+y=u,xy=v$, и получаем

$$\begin{cases} (1-2v)^2-v^2-v(1-2v)=31 \\ u=1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u=1 \\ v=3 \end{cases} \\ \begin{cases} u=1 \\ v=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Нам потребовались некоторые усилия для решения. Теперь решим задачу, воспользовавшись теоремой 5.1. Перепишем исходную систему в виде:

$$\begin{cases} x^5+y^5=2^5+(-1)^5 \\ x+y=2+(-1) \end{cases}$$

и сразу получим решение $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$.

Ответ: $(-1;2),(2;-1)$.

Заметим, что подобные системы довольно часто встречаются при решении иррациональных уравнений. Например

$$\sqrt[5]{30+x}+\sqrt[5]{1-x}=1.$$

Введем новые переменные $\sqrt[5]{30+x}=a, \sqrt[5]{1-x}=b$, тогда $b^5=1-x$, $a^5=30+x$ и можно составить систему

$$\begin{cases} a^5+b^5=31 \\ a+b=1 \end{cases},$$

которую мы только что решили. В результате, решения нашего иррационального уравнения определяются из

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[5]{1-x}=2 \\ \sqrt[5]{1-x}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-31 \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Посмотрим теперь как можно с помощью теоремы 5.1 решать рациональные уравнения.

Пример 5.8. $x^5+(6-x)^5=1056$.

Обозначим $x=a,6-x=b$. Тогда можно записать систему

$$\begin{cases} a^5+b^5=2^5+4^5 \\ a+b=2+4 \end{cases},$$

из которой сразу по теореме 5.1. следуют решения.

Ответ: $x=2,x=4$.

Заметим, что найденные решения довольно просто угадать. Куда как сложнее доказать, что других решений нет, если не использовать обобщенную теорему Виета.

5.4.2. Антисимметричные системы с двумя неизвестными.

В некоторых случаях система является "почти" симметричной и тогда для ее решения делается замена $x-y=u,xy=v$.

Пример 5.9. $\begin{cases} 8\cdot\left(x^2-5xy+y^2\right)=\left(x-y\right)^3 \\ 2\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)=5\cdot\left(x-y\right) \end{cases}$

Эта система сводится к симметричной заменой $-y=t$. Однако, можно и не делать эту промежуточную замену.

Вводим новые переменные $x-y=u$, $xy=v$. Тогда

$$x^2+y^2=\left(x-y\right)^2+2xy=u^2+2v.$$

Подставляем полученное в исходную систему

$$\begin{cases} 8\left(u^2-3v\right)=u^3 \\ 2\left(u^2+v\right)=5u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\left(u^2-32u+60\right)=0 \\ v=\dfrac{5u-2u^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u_1=0;\, v_1=0 \\ u_2=2;\, v_1=1 \\ u_1=30;\, v_1=-825 \end{array}\right.$$

Теперь получаем три системы

$$\begin{cases} x-y=0 \\ xy=0 \end{cases};\ \begin{cases} x-y=2 \\ xy=1 \end{cases};\ \begin{cases} x-y=30 \\ xy=-825 \end{cases},$$

решения которых и будут решениями исходной системы.

Ответ: $(0;0),\left(1+\sqrt{2};-1+\sqrt{2}\right),\left(1-\sqrt{2};-1-\sqrt{2}\right)$.

5.4.3. Симметричные системы с тремя и более неизвестными.

Мы рассматривали симметричные системы с двумя неизвестными. Оказывется можно распространить идею решения подобных систем и на системы с большим количеством неизвестных.

Система из n уравнений с n неизвестными называется симметричной, если замена любых двух переменных друг на друга не меняет уравнений системы.

Тогда вводятся новые переменные:

$$u_1=x_1+\ldots+x_n,$$

$$u_2=x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n,$$

$$u_3=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_2^2x_3+\ldots+x_1x_2x_3+\ldots+x_{n-1}^2x_n+x_n^2x_{n-1},$$

....

$$u_n=x_1\cdot x_2\cdots x_n$$

и получается система относительно этих новых переменных. Если удается решить полученную систему, то для нахождения решений исходной системы надо решить рациональное уравнение степени n, принимая во внимание теорему Виета.

Пример 5.10. $\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3 \end{cases}.$

Делаем замену $u=x+y+z$, $v=xy+yz+xz$, $t=xyz$. Тогда

$$\left(x+y+z\right)^2=x^2+y^2+z^2+2\left(xy+yz+xz\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2=u^2-2v$$

$$\left(x+y+z\right)^3=x^3+y^3+z^3+3x^2y+3y^2x+3x^2z+3z^2x+$$

$$+3y^2z+3z^2y+6xyz=$$

$$=x^3+y^3+z^3+3xy\left(x+y\right)+3xz\left(x+z\right)+3zy\left(z+y\right)+6xyz=$$

$$=x^3+y^3+z^3+3xy\left(u-z\right)+3xz\left(u-y\right)+3zy\left(u-x\right)+6xyz=$$

$$=x^3+y^3+z^3+3u\left(xy+xz+yz\right)-3xyz\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u^3=x^3+y^3+z^3+3uv-3t\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3+y^3+z^3=u^3-3uv+3t.$$

Теперь исходная система в новых переменных приобретает вид

$$\begin{cases} u=a \\ u^2-2v=a^2 \\ u^3-3uv+3t=a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=a \\ v=0 \\ t=0 \end{cases}.$$

Значения переменных x, y, z, входящих в исходную систему, являются корнями уравнения

$$p^3-ap^2=0.$$

Ответ: $(a;0;0), (0;a;0), (0;0;a)$.

5.5. Однородные системы.

5.5.1. Однородные системы с двумя неизвестными.

Будем называть алгебраическое выражение относительно переменных x, y однородным степени p, если слагаемые этого выражения, в которые входят переменные, имеют одинаковую суммарную степень переменных. Формально, для алгебраического выражения относительно двух переменных это условие записывается в виде

$$P(\lambda x, \lambda y)=\lambda^p P(x,y).$$

Система, содержащая однородные алгебраические выражения одинаковой степени, называется однородной.

Пусть задана система

$$\begin{cases} P_1(x,y)=b_1 \\ P_2(x,y)=b_2 \end{cases},$$

где $P_1(x,y), P_2(x,y)$ – однородные алгебраические выражения одинаковой степени, b_1, b_2 – числа.

Сразу заметим, что если одно из b_1, b_2 равно нулю, то соответствуещее уравнение является однородным и дальнейшее решение зависит от умения и возможности решать однородные уравнения. Поэтому, будем считать, что b_1, b_2 не равны нулю.

Рассмотрим два способа решения подобных систем.

I способ. Умножаем обе части первого уравнения на b_2, а второго на b_1. Теперь из первого уравнения вычитаем второе и получаем систему, равносильную исходной

$$\begin{cases} b_2P_1(x,y)-b_1P_2(x,y)=0 \\ P_2(x,y)=b_2 \end{cases}.$$

Первое уравнение полученной системы – однородное и успех в решении системы зависит от успеха в решении этого уравнения.

II способ. Решаем систему при $x=0$. После этого полагаем, что $x \neq 0$ и делаем замену $y=tx$. Тогда система принимает вид

$$\begin{cases} x^pP_1(1,t)=b_1 \\ x^pP_2(1,t)=b_2 \end{cases}.$$

Так как мы договорились о неравенстве нулю правых частей исходной системы, делим соответственно левые и правые части уравнений системы друг на друга и получаем уравнение относительно новой переменной t.

Пример 5.11. $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=1 \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=4 \end{cases}.$

В этой системе имеем в левых частях однородные алгебраические выражения второй степени. Значит система является однородной.

I способ. Умножаем обе части первого уравнения на 4, и вычитаем из преобразованного первого уравнения второе. Мы далее будем заниматься полученной разностью, поэтому не будем писать второе уравнение системы, имея в виду его наличие. Получим

$$\frac{4x^3}{y}+3xy-\frac{y^3}{x}=0 \Rightarrow 4x^4+3x^2y^2-y^4=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y^2=4x^2 \\ y^2=-x^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2x \\ y=-2x \end{array}\right..$$

Заметим, что при переходах мы использовали условие $x \neq 0$, $y \neq 0$.

Теперь, подставляем полученные результаты во второе уравнение системы и получаем

$$\left[\begin{array}{l} 8x^2+2x^2=4 \\ -8x^2-2x^2=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{\frac{2}{5}} \\ x=-\sqrt{\frac{2}{5}} \end{array}\right. .$$

Далее находим значения второй переменной.

II способ. Так как $x \neq 0$, то сразу делаем замену $y=tx$ и делим первое уравнение на второе

$$\begin{cases} \frac{x^2}{t}+x^2t=1 \\ x^2t^3+x^2t=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^4-3t^2-4=0 \\ x^2t^3+x^2t=4 \end{cases} .$$

Далее находим из первого уравнения t и т.д.

Отметим еще один очень эффективный способ решения подобных систем.

III способ. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y}=1-xy \\ \frac{y^3}{x}=4-xy \end{cases}$$

и перемножим, соответственно, левые и правые части уравнений друг на друга. Получим квадратное уранение относительно xy

$$x^2y^2=(1-xy)(4-xy),$$

решение которого быстро приведет к ответу.

Ответ: $\left(\sqrt{\frac{2}{5}};2\sqrt{\frac{2}{5}}\right),\left(-\sqrt{\frac{2}{5}};-2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$.

Довольно часто системы, которые не являются по внешним признакам однородными, сводятся к однородным уравнениям, причем довольно оригинальными способами. В следующем примере для того, чтобы понять как получить однородное уравнение, надо проявить некоторую изобретательность.

Пример 5.12. $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ \frac{1+y^2}{1+x^2}=5 \end{cases}$.

Приведем второе уравнение к общему знаменателю и запишем систему в виде

$$\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ 4=y^2-5x^2 \end{cases}$$

Теперь, в первое уравнение подставляем выражение y^2-5x^2 вместо четверки! Причем в числе $16=4\cdot 4$ мы заменим только один множитель. В результате имеем систему

$$\begin{cases} x^3+\left(y^2-5x^2\right)y=y^3+4\left(y^2-5x^2\right)x \\ 4=y^2-5x^2 \end{cases}$$

Первое уравнение системы получилось однородным, решениями которого будут: $x=0$, $x=\frac{4}{7}y$, $x=-\frac{1}{3}y$. Подставляем полученное во второе уравнение и находим решения системы.

Справедливости ради заметим, что существует и другое решение. Перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} x^3-16x=y\left(y^2-4\right) \\ y^2-4=5x^2 \end{cases} .$$

Теперь подставляем значение $\left(y^2-4\right)$ из второго уравнения в первое, выражаем y через x и подставляем полученное выражение во второе уравнение системы.

Ответ: $(0;2),(0;-2),(1;-3),(-1;3)$.

5.5.2. Однородные системы с тремя и более неизвестными.

Естественно, однородные системы не ограничиваются системами с двумя неизвестными. В следующем примере рассмотрим решение однородной системы с тремя неизвестными.

Пример 5.13. $\begin{cases} x^2-(y-z)^2=1 \\ y^2-(x-z)^2=4 \\ z^2-(y-x)^2=9 \end{cases}$.

Поскольку система однородная и при $x=0$ она не имеет решений, то делаем замену $y=ux$, $z=vx$ и получаем

$$\begin{cases} x^2-x^2(u-v)^2=1 \\ x^2u^2-x^2(v-1)^2=4 \\ x^2v^2-x^2(1-u)^2=9 \end{cases}$$

Так как левая и правая части первого уравнения не равны нулю, то разделим второе уравнение на первое и третье уравнение на первое. Это позволит нам избавиться от переменной x

$$\begin{cases} 4\left(1-(u-v)^2\right)=u^2-(v-1)^2 \\ 9\left(1-(u-v)^2\right)=v^2-(u-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(v+1-u)(u+1-v)=(u-1+v)(u+1-v) \\ 9(v+1-u)(u+1-v)=(v-1+u)(v+1-u) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u-v+1)(3v-5u+5)=0 \\ (v-u+1)(8u-10v+10)=0 \end{cases}.$$

Теперь надо решить совокупность из четырех систем

$$\begin{cases} u-v+1=0 \\ v-u+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing$$

$$\begin{cases} u-v+1=0 \\ 8u-10v+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ v=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3v-5u+5=0 \\ v-u+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3v-5u+5=0 \\ 8u-10v+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=40/13 \\ v=45/13 \end{cases}.$$

Ответ: $\left(\frac{13}{12};\frac{10}{3};\frac{15}{4}\right),\left(-\frac{13}{12};-\frac{10}{3};-\frac{15}{4}\right)$.

5.6. Разложение на множители.

Пример 5.14. $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0 \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0 \end{cases}$.

При решении подобных примеров надо сначала попытаться решить одно из уравнений как квадратное относительно какой-либо переменной. Решим первое уравнение системы как квадратное относительно x

$$x^2-2x(y-1)+\left(2y^2-8y+10\right)=0$$

$$\frac{D}{4}=(y-1)^2-2y^2+8y-10=-y^2+6y-9=-(y-3)^2.$$

Для разрешимости квадратного уравнения в действительных числах необходима неотрицательность дискриминанта, что в нашем случае возможно только при $y=3$. Подставляем найденное значение в первое уравнение и находим $x=2$. Теперь убеждаемся в том, что пара $x=2$, $y=3$ является решением второго уравнения. В нашем случае указанная пара удовлетворяет второму уравнению. Если бы оказалось, что найденное решение первого уравнения не оказалось решением второго уравнения, то система не имела бы решений.

Ответ: $(2;3)$.

Рассмотрим другой пример на эту же тему.

Пример 5.15. $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2-6x+3y=0 \\ 3x^2+7xy+2y^2-7x+y-6=0 \end{cases}$.

Запишем первое уравнение системы в виде

$$2x^2+(3y-6)x-(2y^2-3y)=0$$

и решим первое уравнение системы как квадратное относительно x

$$D=9y^2-36y+36+16y^2-24y=25y^2-60y+36=(5y-6)^2$$

Таким образом, $x_{1,2}=\dfrac{-3y+6\pm(5y-6)}{4}$.

Теперь решаем совокупность из двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x=y \\ 3x^2+7xy+2y^2-7x+y-6=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3-2y \\ 3x^2+7xy+2y^2-7x+y-6=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

При подстановке $x=3-2y$ во второе уравнение системы получается тождество.

Ответ: $\left(-\dfrac{2}{5};-\dfrac{4}{5}\right),\left(\dfrac{3}{5};\dfrac{6}{5}\right),(3-2c;c)$, где $c\in R$.

В некоторых ситуациях для получения уравнения, которое можно решить как квадратное относительно одной из переменных, надо использовать линейную комбинацию исходных уравнений.

Пример 5.16. $\begin{cases} 16x^2+26xy+34y^2-30x-90y=-44 \\ 11x^2+46xy+14y^2-60x-30y=-19 \end{cases}$.

Здесь попытка решить уравнения как квадратные не принесет большого успеха, поэтому вычтем из первого уравнения второе

$$x^2-4xy+4y^2+6x-12y+5=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x(2y-3)+(4y^2-12y+5)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{D}{4}=(2y-3)^2-4y^2+12y-5=4.$$

Таким образом, $x_1=2y-1, x_2=2y-5$.

Подставляем найденные выражения для x, например в первое уравнение исходной системы и далее все просто.

Ответ: $(1;1)$, $\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{3}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{3}{5};\dfrac{11}{5}\right)$, $\left(-\dfrac{7}{5};\dfrac{9}{5}\right)$.

Рассмотрим классический пример, в котором используется линейная комбинация уравнений системы.

Пример 5.17. $\begin{cases} x^3=5x+y \\ y^3=x+5y \end{cases}$.

Сложим первое и второе уравнения системы и вычтем из первого второе. Получим

$$\begin{cases} x^3+y^3=6x+6y \\ x^3-y^3=4x-4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2-6)=0 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2-4)=0 \end{cases}.$$

Эта система равносильна совокупности трех систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=0 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2-4)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-xy+y^2-6=0 \\ x-y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-xy+y^2-6=0 \\ x^2+xy+y^2-4=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Первые две системы решаются обычной подстановкой.

Последняя система является симметричной, однако, ее проще решить сделав замену $x^2+y^2=u\ge 0, xy=v$. Тогда $u=5, v=-1$ и получается простая система

$$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=-1 \end{cases},$$

которая решается подстановкой.

Заметим, что подобные замены довольно часто делаются в симметричных системах.

Ответ: $(0;0),(2;-2),(-2;2),(\sqrt{6};\sqrt{6}),(-\sqrt{6};-\sqrt{6})$,
$\left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2};\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2};\frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right)$,
$\left(\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2};\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}\right),\left(\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2};\frac{-\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}\right)$.

Следующий пример показывает как можно изящно использовать формулы сокращенного умножения.

Пример 5.18. $\begin{cases}(x^2-xy+y^2)(x-y)=1+y^3\\(x^2+xy+y^2)(x+y)=1-y^3\end{cases}$.

Перемножим левые и правые части уравнений и получим вспомогательное уравнение

$$(x^3+y^3)(x^3-y^3)=1-y^6 \Leftrightarrow x^6-y^6=1-y^6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right..$$

Теперь найденные значения подставляем в оба уравнения и получаем совокупность двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(1+y+y^2)(-1-y)=1+y^3\\(1-y+y^2)(-1+y)=1-y^3\\x=-1\end{cases}\\\begin{cases}(1-y+y^2)(1-y)=1+y^3\\(1+y+y^2)(1+y)=1-y^3\\x=1\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(1;0)$.

5.7. Циклические системы.

Системы вида

$$\begin{cases}x_1=f(x_2)\\x_2=f(x_3)\\\dots\dots\dots\dots\\x_{n-1}=f(x_n)\\x_n=f(x_1)\end{cases}$$

называются циклическими системами. В функциональном виде их можно записать так

$$x_i=f(f(\dots(x_i)\dots)).$$

Довольно часто в подобных системах функция $f(x)$ обладает свойством монотонности и тогда можно сделать разные выводы из этого факта. Например, если функция $f(x)$ возрастает, то решения системы возможны только при равенстве между собой всех переменных. Мы вернемся к этому вопросу позже.

Пример 5.19. $\begin{cases}x=\dfrac{2z^2}{1+z^2}\\y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}\\z=\dfrac{2y^2}{1+y^2}\end{cases}$.

Система является циклической. Отметим очевидное решение $(0;0;0)$ и то, что правые части неотрицательны, поэтому далее считаем, что $x>0,y>0,z>0$.

В силу вышесказанного справедлива следующая цепочка

$$x=\frac{2z^2}{1+z^2}=z\frac{2}{z+\frac{1}{z}}\le z.$$

Здесь мы воспользовались уже известным нам неравенством $t+\frac{1}{t}\ge 2$ при $t>0$, из которого следует, что $0<\frac{2}{t+\frac{1}{t}}\le 1$.

Аналогичные неравенства можно получить для второго и третьего уравнений системы. В результате получаем $x\le z\le y\le x$, что возможно только если $x=y=z$. Далее получаем уравнение

$$x=\frac{2x^2}{1+x^2},$$

из которого, с учетом равенства переменных системы, найдем решение $(1;1;1)$.

Ответ: $(0;0;0)$, $(1;1;1)$.

Заметим, что воспользовавшись производными, можно показать, что функция $f(t)=\frac{2t^2}{1+t^2}$ является при $t>0$ возрастающей и сделать вывод о равенстве между собой неизвестных системы. Однако, считается, что далеко не все школьники хорошо знакомы с производными и, тем более, со связью между производными и монотонностью функций, поэтому предложенное выше решение не основано на знании элементов математического анализа.

Как использовать производные покажем на следующем примере.

Пример 5.20. $\begin{cases} x=6t^5-5t^3+2t \\ y=6x^5-5x^3+2x \\ z=6y^5-5y^3+2y \\ t=6z^5-5z^3+2z \end{cases}$.

У нас снова циклическая система. Наша цель показать, что решение системы возможно только при $x=y=z=t$. Рассмотрим функцию

$$f(u)=6u^5-5u^3+2u.$$

Покажем с помощью производных, что эта функция монотонно возрастает. Действительно, $f'(u)=30u^4-15u^2+2$. Дискриминант

многочлена относительно u^2 отрицателен, поэтому $f'(u)>0$ для всех u и из этого следует, что функция $f(u)$ возрастает. Довольно несложно показать, что в этом случае функции

$$f(f(u)),\ f(f(f(u)))\text{ и } f(f(f(f(u))))$$

является возрастающими.

Предположим теперь, что существует решение системы, при котором какие-либо две неизвестные отличны друг от друга, и пусть, например, $x>y=f(x)$. Запишем нашу систему в функциональном виде $x=f(f(f(f(x))))$. Заменим аргумент $f(x)$ на больший,т.е. на x. В силу возрастания функции получим неравенство

$$x=f(f(f(f(x))))<f(f(f(x))).$$

Проделаем эту процедуру еще два раза

$$x=f(f(f(f(x))))<f(f(f(x)))<f(f(x))<f(x).$$

Получили противоречие. Аналогично, предположение $x<y$, ведет к противоречию. Таким образом, система может иметь решение только при равенстве переменных друг другу. Имеем уравнение

$$x=6x^5-5x^3+2x$$

из которого находятся все решения исходной системы.

Ответ: $(0;0;0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}};-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

5.8. Разные приемы решения систем.

В этом разделе мы рассмотрим некоторые специальные приемы решения систем рациональных уравнений.

Пример 5.21. $\begin{cases}(x+y)(xy+1)=18xy\\ (x^2+y^2)(x^2y^2+1)=208x^2y^2\end{cases}.$

Имеем симметричную систему, однако стандартный метод решения приведет к очень тяжелому уравнению. Зафиксируем очевидное решение $(0;0)$ и далее будем считать, что $x\neq 0, y\neq 0$.

Возведем первое уравнение в квадрат. Эта операция может привести к появлению посторонних решений, поэтому возьмем на себя обязательство проверить получившиеся решения и отбросить лишние, если таковые окажутся. После возведения в квадрат разделим обе части уравнений системы на $x^2y^2\neq 0$. Получим

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2+2xy}{xy}\cdot\dfrac{x^2y^2+2xy+1}{xy}=324\\ \dfrac{x^2+y^2}{xy}\cdot\dfrac{x^2y^2+1}{xy}=208\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+2\right)\left(xy+\dfrac{1}{xy}+2\right)=324\\ \left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right)\left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)=208\end{cases}.$$

Теперь делаем замену $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=u\,, xy+\dfrac{1}{xy}=v$

$$\begin{cases}(u+2)(v+2)=324\\ uv=208\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=52\\ v=4\end{cases}\\ \begin{cases}u=4\\ v=52\end{cases}\end{array}\right..$$

Дальнейшее является делом техники, однако, в данном конкретном случае потратим некоторое время на рассмотрение одного из случаев

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=52\\ xy+\dfrac{1}{xy}=4\end{cases}.$$

Решив второе уравнение относительно xy получим

$$\left[\begin{array}{l}xy=2+\sqrt{3}\\ xy=2-\sqrt{3}\end{array}\right..$$

Обозначим для удобства получившееся значение xy буквой b. Тогда $y=\dfrac{b}{x}$ и первое уравнение приобретает вид

$$x^4-52bx^2+b^2=0\Leftrightarrow\left(x^2\right)_{1,2}=b\left(26\pm\sqrt{25\cdot 27}\right).$$

Теперь, вспомним наши упражнения по выделению полных квадратов в числовых выражениях и получим

$$2\pm\sqrt{3}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=\frac{\left(\sqrt{3}\pm 1\right)^2}{2},$$

$$26\pm\sqrt{25\cdot 27}=\frac{52\pm 2\sqrt{25\cdot 27}}{2}=\frac{\left(3\sqrt{3}\pm 5\right)^2}{2}.$$

Таким образом, при $b=2+\sqrt{3}$ имеем следующие пары решений

$$\begin{cases}x=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3\sqrt{3}+5\right)}{2}\\ y=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(3\sqrt{3}+5\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3\sqrt{3}-5\right)}{2}\end{cases},$$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3\sqrt{3}+5\right)}{2} \\ y=-\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(3\sqrt{3}+5\right)}=-\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3\sqrt{3}-5\right)}{2} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3\sqrt{3}-5\right)}{2} \\ y=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(3\sqrt{3}-5\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3\sqrt{3}+5\right)}{2} \end{cases},$$

$$\begin{cases} x=-\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3\sqrt{3}-5\right)}{2} \\ y=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(3\sqrt{3}-5\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3\sqrt{3}+5\right)}{2} \end{cases}.$$

Или, перемножая скобки

$$\left[\begin{array}{l} x=7+4\sqrt{3},\ y=2-\sqrt{3} \\ x=-7-4\sqrt{3},\ y=-2+\sqrt{3} \\ x=2-\sqrt{3},\ y=7+4\sqrt{3} \\ x=-2+\sqrt{3},\ y=-7-4\sqrt{3} \end{array}\right.$$

Вспоминаем, что при возведении в квадрат мы могли получить лишние корни и проверяем получившиеся результаты. Замечаем, что в каждой паре переменные имеют одинаковые знаки, т.е. $xy>0$. Значит, если x и y положительны, то положительны и $x+y$ и $xy+1$ и эти решения удовлетворяют исходной системе, если же x и y отрицательны, то $x+y$ отрицательно, а $xy+1$ положительно. Так как в левой части первого уравнения исходной системы будет отрицательное число, а в правой – положительное, то такие решения являются посторонними.

Аналогичные рассуждения проводятся для случая $b=2-\sqrt{3}$ и для $u=4$, $v=52$.

Ответ: $(0;0)$, $\left(7+4\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$, $\left(7-4\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$, $\left(2-\sqrt{3};7+4\sqrt{3}\right)$, $\left(2-\sqrt{3};7-4\sqrt{3}\right)$, $\left(2+\sqrt{3};7+4\sqrt{3}\right)$, $\left(2+\sqrt{3};7-4\sqrt{3}\right)$, $\left(7+4\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$, $\left(7-4\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$.

Пример 5.22. $\begin{cases} x+y=8 \\ xy-z^2=16 \end{cases}.$

Система из двух уравнений содержит три неизвестные. Это говорит о том, что надо будет применить нестандартный метод решения.

Выражаем из первого уравнения $y=8-x$ и подставляем во второе уравнение

$$8x-x^2-z^2=16 \Leftrightarrow x^2-8x+16+z^2=0 \Leftrightarrow (x-4)^2+z^2=0.$$

Это уравнение имеет только одно решение $x=4$, $z=0$.

Ответ: $x=4$, $y=4$, $z=0$.

Пример 5.23. $\begin{cases} \dfrac{x\left(y^2+1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y\left(x^2-1\right)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5} \end{cases}.$

При первом взгляде на эту систему хочется поделить одно уравнение на другое, чтобы избавиться от знаменателя. Однако эта попытка ни к чему хорошему не приведет (можете убедиться в этом самостоятельно). Подсказкой к тому, что надо сделать, являются правые части уравнений. Действительно $\dfrac{3^2}{5^2}+\dfrac{4^2}{5^2}=1$, поэтому возведем оба уравнения в квадрат и сложим получившиеся уравнения. Поскольку возведение в квадрат может дать посторонние корни, то вновь берем на себя обязательство проверить получившиеся решения. Получаем уравнение следствие

$$\frac{x^2\left(y^2+1\right)^2+y^2\left(x^2-1\right)^2}{\left(y^2+x^2\right)^2}=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2y^2\left(y^2+x^2\right)+y^2+x^2}{\left(y^2+x^2\right)^2}=1 \Leftrightarrow$$

$$x^2y^2+1=x^2+y^2 \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ y^2=1 \end{array}\right..$$

Здесь учтено, что $x^2+y^2 \neq 0$.

Заметим, что $x^2=1$ не удовлетворяет второму уравнению системы, поэтому остаются только случаи $y=1$ или $y=-1$.

Если, то $y=1$, то

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{x^2-1}{x^2+1}=\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

При $y=-1$ имеем

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{-x^2+1}{x^2+1}=\dfrac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}.$$

Проверка показывает, что найденные решения удовлетворяют системе.

Ответ: $\{3;1\}, \left\{\dfrac{1}{3};-1\right\}$.

Задачи для разбора с преподавателем

Решить системы уравнений:

5.1. $\begin{cases} (x+y)^2-5(x+y)+4=0 \\ (x-y)^2-(x-y)-2=0 \end{cases}$.

5.2. $\begin{cases} \dfrac{x-1}{2x}+\dfrac{y+1}{3y}=\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{y}=\dfrac{7}{2} \end{cases}$.

5.3. $\begin{cases} xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=13 \\ xy-\dfrac{1}{xy}-\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=12 \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} x^4-x^2y^2+y^4=13 \\ x^2+2xy-y^2=1 \end{cases}$.

5.5. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy}+\dfrac{xy}{x+y}=a+\dfrac{1}{a} \\ \dfrac{x-y}{xy}+\dfrac{xy}{x-y}=b+\dfrac{1}{b} \end{cases}$.

5.6. $\begin{cases} xy+1=x+y \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$.

5.7. $\begin{cases} x^2(x+3y)=0 \\ x^4+xy^3+3y^4=81 \end{cases}$.

5.8. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2} \\ x^2+y^2=20 \end{cases}$.

5.9. $\begin{cases} x^4-x^2+y^4-y^2=612 \\ x^2+xy+y^2=39 \end{cases}$.

5.10. $\begin{cases} \dfrac{6}{x^2y^4+3x}-\dfrac{1}{xy^2-2x}=\dfrac{11}{10} \\ \dfrac{1}{2xy^2-4x}+\dfrac{3}{x^2y^4+3x}=\dfrac{1}{20} \end{cases}$.

5.11. $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}$.

5.12. $\begin{cases} x^4+y^4=7 \\ x+y=1 \end{cases}$.

5.13. $\begin{cases} \left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)=10 \\ (x+y)(xy-1)=3 \end{cases}$.

5.14. $\begin{cases} x^5+y^5=31 \\ x+y=1 \end{cases}$.

5.15. $\begin{cases} 8\cdot\left(x^2+xy+y^2\right)=(x-y)^3 \\ 2\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)=3(x-y) \end{cases}$.

5.16. $\begin{cases} x^2+2y^2=17 \\ 6x^2-xy-12y^2=0 \end{cases}$.

5.17. $\begin{cases} \left(x^2+y^2\right)\dfrac{x}{y}=6 \\ \left(x^2-y^2\right)\dfrac{y}{x}=1 \end{cases}$.

5.18. $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{xy}=\dfrac{5}{2} \\ x^2-y^2=3 \end{cases}$.

5.19. $\begin{cases} x^2-5y^2=-1 \\ 3xy+7y^2=1 \end{cases}$.

5.20. $\begin{cases} 2x^2+2xy+y^2=26 \\ x^2+xy+2y^2=37 \end{cases}$.

5.21. $\begin{cases} 3x^2-4xy+2y^2=17 \\ y^2-x^2=16 \end{cases}$.

5.22. $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ \dfrac{1+y^2}{1+x^2}=5 \end{cases}$.

5.23. $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}-2xy=16 \\ \dfrac{y^3}{2x}+3xy=25 \end{cases}$.

5.24. $\begin{cases} x^2-2xy+2y^2+2x-8y+10=0 \\ 2x^2-7xy+3y^2+13x-4y-7=0 \end{cases}$.

5.25. $\begin{cases} 2x^2+3xy-2y^2-6x+3y=0 \\ 3x^2+7xy+2y^2-7x+y-6=0 \end{cases}$.

5.26. $\begin{cases} 2x^2+y^2+x-2y=1 \\ 5x^2+2{,}5y^2+3x-4y=4 \end{cases}$.

5.27. $\begin{cases} x^2+2=3xy \\ 4y^2+7xy=18 \end{cases}$.

5.28. $\begin{cases} y^2-1=4x^2+4x \\ 4x^2+y^2-3xy=1 \end{cases}$.

5.29. $\begin{cases} y^2-4xy+4y-1=0 \\ 3x^2-2xy-1=0 \end{cases}$.

5.30. $\begin{cases} x^2+2x+y=4 \\ y^2+2y+x=4 \end{cases}$.

5.31. $\begin{cases} x^3=31x^2-4y^2 \\ y^3=31y^2-4x^2 \end{cases}$.

5.32. $\begin{cases} (x+y)(xy+1)=18xy \\ \left(x^2+y^2\right)\left(x^2y^2+1\right)=208x^2y^2 \end{cases}$.

5.33. $\begin{cases} \left(x^2-xy+y^2\right)(x-y)=1+y^3 \\ \left(x^2+xy+y^2\right)(x+y)=1-y^3 \end{cases}$.

5.34. $\begin{cases} x^3=5x+y \\ y^3=x+5y \end{cases}$.

5.35. $\begin{cases} x^2-4x-2y-1=0 \\ y^2-2x+6y+14=0 \end{cases}$.

5.36. $\begin{cases} 2xy-z^2=4 \\ x+y+z=2 \end{cases}$.

5.37. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-2y}+\dfrac{4}{3x+y}=\dfrac{6}{xy} \\ \dfrac{2}{x-2y}-\dfrac{1}{3x+y}=\dfrac{3}{xy} \end{cases}$.

5.38. $\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x^3+y^3+z^3=a^3 \end{cases}$.

5.39. $\begin{cases} 3x=\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{y} \\ 4y=\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{x} \\ 5z=\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y} \end{cases}$.

5.40. $\begin{cases} \dfrac{5xy}{x+y}=12 \\ \dfrac{5yz}{z+y}=18 \\ \dfrac{13xz}{x+z}=36 \end{cases}$.

5.41. $\begin{cases} x(1+y)=z^2(1+x) \\ z(1+x)=y^2(1+z) \\ y(1+z)=x^2(1+y) \end{cases}$.

5.42. $\begin{cases} x=\dfrac{2z^2}{1+z^2} \\ y=\dfrac{2x^2}{1+x^2} \\ z=\dfrac{2y^2}{1+y^2} \end{cases}$.

5.43. $\begin{cases} x^2+xy-2y^2+8x+10y+12=0 \\ x^2+3xy+2y^2-x+y-6=0 \end{cases}$.

5.44. $\begin{cases} 3xz+1=4x+3z \\ 4xy-3xz=4y-3z+9 \\ xy-zy=x-2z+3 \end{cases}$.

5.45. $\begin{cases} x^3+y^3-z^3-xyz=-11 \\ x^3-y^3+z^3-xyz=21 \\ y^3+z^3-x^3-xyz=3 \end{cases}$.

5.46. $\begin{cases} 3x-y-5z-2yz=0 \\ x-5y-z-2z^2=0 \\ x+9y-3z+2xz=0 \end{cases}$.

5.47. $\begin{cases} xy+\dfrac{y^4}{x}=\dfrac{x^2}{y}+y^2 \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{y^2}{x^2}+\dfrac{4}{x^2}=0 \end{cases}$.

5.48. $\begin{cases} 1+xy=\dfrac{x^2y^2}{2x-y}+\dfrac{2x-y}{xy} \\ \dfrac{2x-y}{xy}\sqrt{2x-y}=4-3xy \end{cases}$.

5.49. $\begin{cases} 2x^2y-x^4=3 \\ 2y^3-x^2y^2=4 \end{cases}$.

5.50. $\begin{cases} y^7+y^6-6x^2=0 \\ y^5+\dfrac{x^3}{y^3}=x^2+xy^2 \end{cases}$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить системы уравнений:

5.1д. $\begin{cases} (x+y)^2-4(x+y)=45 \\ (x-y)^2-2(x-y)=3 \end{cases}$.

5.2д. $\begin{cases} y^4+xy^2=2x^2 \\ x+y=6 \end{cases}$.

5.3д. $\begin{cases} 27x^3-y^3=28 \\ 3x-y=4 \end{cases}$.

5.4д. $\begin{cases} \dfrac{1}{x+3y}+y=5 \\ \dfrac{y}{x+3y}=6 \end{cases}$.

5.5д. $\begin{cases} x^2y^2+3xy=2\left(\dfrac{x}{y}+1\right) \\ 2\left(x^2y^2+xy\right)=\dfrac{3x}{y}+1 \end{cases}$.

5.6д. $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}+x^2-1=0 \\ \dfrac{x^2}{x-y}+2=0 \end{cases}$.

5.7д. $\begin{cases} \dfrac{1}{x^2y+2y}-\dfrac{3}{x^4y^2-3y}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{1}{x^4y^2-3y}+\dfrac{7}{2x^2y+4y}=\dfrac{1}{12} \end{cases}$.

5.8д. $\begin{cases} y^2\left(x^2-3\right)+xy=-1 \\ y^2\left(3x^2-6\right)+xy=-2 \end{cases}$.

5.9д. $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=2 \\ 2(x+y)=3xy \end{cases}$.

5.10д. $\begin{cases} x^3+x^3y^3+y^3=12 \\ x+xy+y=0 \end{cases}$.

5.11д. $\begin{cases} x^3y+x^3y^2+2x^2y^2+x^2y^3+xy^3=30 \\ x^2y+xy+x+y+xy^2=11 \end{cases}$.

5.12д. $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2+xy}{(x+y)^2}\cdot\dfrac{1+x^2y^2+xy}{(1+xy)^2}=\dfrac{49}{81} \\ \dfrac{x^2+y^2-xy}{(x-y)^2}\cdot\dfrac{1+x^2y^2-xy}{(1-xy)^2}=9 \end{cases}$.

5.13д. $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{6} \end{cases}$.

5.14д. $\begin{cases} x^3+x^2y+xy^2+y^3=40 \\ x^2+xy+y^2=13 \end{cases}$.

5.15д. $\begin{cases} x^2+y^2+x+y=42 \\ xy=15 \end{cases}$.

5.16д. $\begin{cases} x^4+y^4=34 \\ x+y=2 \end{cases}$.

5.17д. $\begin{cases} x^4+y^4=18 \\ x+y=2+\sqrt[4]{2} \end{cases}$.

5.18д. $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=1 \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=4 \end{cases}$.

5.19д. $\begin{cases} x^2+2y^2=17 \\ x^2-2xy=-3 \end{cases}$.

5.20д. $\begin{cases} x^3+y^3=5a^3 \\ x^2y+xy^2=a^3 \end{cases}$.

5.21д. $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}-\dfrac{y^3}{x}=\dfrac{15}{2} \\ \dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

5.22д. $\begin{cases} \dfrac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\dfrac{31}{7} \\ x^2+xy+y^2=3 \end{cases}$.

5.23д. $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2 \end{cases}$.

5.24д. $\begin{cases} \left(x^2+x+1\right)\left(y^2+y+1\right)=3 \\ (1-x)(1-y)=6 \end{cases}$.

5.25д. $\begin{cases} \dfrac{x+y}{1+xy}=\dfrac{5}{4} \\ \dfrac{x^4+y^4}{1+x^4y^4}=\dfrac{257}{32} \end{cases}.$

5.26д. $\begin{cases} \dfrac{x^4}{y^2}+xy=72 \\ \dfrac{y^4}{x^2}-2xy=-15 \end{cases}.$

5.27д. $\begin{cases} x^2-xy-2y^2-x+2y=0 \\ 2x^2-xy-y^2+2x+y=0 \end{cases}.$

5.28д. $\begin{cases} x^3+2xy=2y \\ y^3+2xy=2x \end{cases}.$

5.29д. $\begin{cases} x^2-2xy-3y^2+x+y=0 \\ x^2+xy-2y^2-x-2y=0 \end{cases}.$

5.30д. $\begin{cases} (x+y)(x^2-y^2)=9 \\ (x-y)(x^2+y^2)=5 \end{cases}.$

5.31д. $\begin{cases} 16x^2+26xy+34y^2-30x-90y=-44 \\ 11x^2+46xy+14y^2-60x-30y=-19 \end{cases}.$

5.32д. $\begin{cases} 10x^2-2xy+5y^2-38x-6y+41=0 \\ 3x^2+5xy-2y^2-17x-6y+20=0 \end{cases}.$

5.33д. $\begin{cases} 3x^2+2y^2+12x-4y=-8 \\ 2x^2-y^2+8x+2y=-10 \end{cases}.$

5.34д. $\begin{cases} x^3-y^3=7 \\ x^2y+xy^2=6 \end{cases}.$

5.35д. $\begin{cases} x^2+y^2+13(x-y)=0 \\ 3x^2+4y^2-8xy=0 \end{cases}.$

5.36д. $\begin{cases} y^2-x^2=4x+4 \\ x^2+y^2+3xy=1 \end{cases}.$

5.37д. $\begin{cases} x^2-3xy+6x-1=0 \\ y^2-xy-2=0 \end{cases}.$

5.38д. $\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y) \\ x^3+y^3=7(x+y) \end{cases}.$

5.39д. $\begin{cases} 2x^2+y^2-4x+2y=1 \\ 3x^2-2y^2-6x-4y=5 \end{cases}.$

5.40д. $\begin{cases} xy+3y^2-2x-14y=-11 \\ 2xy+y^2-4x-3y=-2 \end{cases}.$

5.41д. $\begin{cases} x^2-2y^2-xy+2y=x \\ 2x^2-y^2+2x+y=xy \end{cases}.$

5.42д. $\begin{cases} x^2-y^2+3y=0 \\ x^2+2y^2+3xy+2x+4y=0 \end{cases}.$

5.43д. $\begin{cases} x+y=8 \\ xy-z^2=16 \end{cases}.$

5.44д. $\begin{cases} x^4-y^4=20(x+y) \\ x^3-y^3=26 \end{cases}.$

5.45д. $\begin{cases} \dfrac{x(y^2+1)}{x^2+y^2}=\dfrac{3}{5} \\ \dfrac{y(x^2-1)}{x^2+y^2}=\dfrac{4}{5} \end{cases}.$

5.46д. $\begin{cases} \dfrac{1}{xy-x^2-1}-\dfrac{1}{y^2-2x}=0 \\ \dfrac{1}{xy-x^2-1}+\dfrac{2}{y^2-2x}=\dfrac{3}{x-y-1} \end{cases}.$

5.47д. $\begin{cases} \dfrac{y(1-xy)}{1+y^2}=-\dfrac{2}{5} \\ \dfrac{x(1-xy)}{1+x^2}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}.$

5.48д. $\begin{cases} x+y-z=7 \\ x^2+y^2-z^2=37. \\ x^3+y^3-z^3=1 \end{cases}$

5.49д. $\begin{cases} x^2+y^2+xy=1 \\ x^2+z^2+xz=4 \\ y^2+z^2+yz=7 \end{cases}$.

5.50д. $\begin{cases} x^2+y^2+z=2 \\ y^2+z^2+x=2 \\ x^2+z^2+y=2 \end{cases}$.

5.51д. $\begin{cases} (y+x)(x+z)=x \\ (z+y)(x+y)=2y \\ (x+z)(y+z)=3z \end{cases}$.

5.52д. $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{7}{2} \\ x+y+z=\frac{7}{2} \\ xyz=1 \end{cases}$.

5.53д. $\begin{cases} y+z=\frac{2}{xyz} \\ x+z=\frac{3}{xyz} \\ y+x=\frac{4}{xyz} \end{cases}$.

5.54д. $\begin{cases} x+y+z=9 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \\ xy+xz+yz=27 \end{cases}$.

5.55д. $\begin{cases} x^2+(y-z)^2=4 \\ y^2+(x-z)^2=1 \\ z^2+(x-y)^2=5 \end{cases}$.

5.56д. $\begin{cases} x+y+z=\frac{5}{3}xyz \\ y+z-x=\frac{7}{3}xyz \\ z+x-y=\frac{11}{3}xyz \end{cases}$.

5.57д. $\begin{cases} x+y+z=t \\ \frac{x}{z+y}=t \\ \frac{y}{x+y+1}=t \\ \frac{z}{x+y-1}=t \end{cases}$.

5.58д. Найти $x^3+z^3+y^3$ если $\begin{cases} x+y+z=a \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{c} \\ x^2+z^2+y^2=b^2 \end{cases}$.

Решить системы уравнений:

5.59д. $\begin{cases} x(x+y+z)=7 \\ y(x+y+z)=14 \\ z(x+y+z)=28 \end{cases}$.

5.60д. $\begin{cases} xy+x+y=7 \\ yz+y+z=-3 \\ zx+z+x=-5 \end{cases}$.

5.61д. $\begin{cases} 3x^2+2y^2-3x+5y=3 \\ 4{,}5x^2+3y^2-3x+8y=7 \end{cases}$.

5.62д. $\begin{cases} x^2+zy=42 \\ y^2+xz=42 \\ z^2+xy=50 \end{cases}$.

5.63д. $\begin{cases} 8x^2-2xy-y^2-30x-9y-8=0 \\ 8x^2+6xy+y^2-2y-8=0 \end{cases}$.

5.64д. $\begin{cases} 6xz+3x=2z-2 \\ xy+yz=2z-2x+2 \\ zy-6xz+y=3x+3 \end{cases}$.

5.65д. $\begin{cases} (3y-x)^2=2+z^2 \\ (3y+z)^2=3+x^2 \\ (z-x)^2=4+9y^2 \end{cases}$.

5.66д. $\begin{cases} 2x^3-y^3-2z^3+xyz=-5 \\ y^3+2z^3-x^3-2xyz=2 \\ x^3-y^3-z^3+xyz=-4 \end{cases}$.

5.67д. $\begin{cases} x^2-4x+4y+27=0 \\ y^2+2x+8y+10=0 \end{cases}$.

5.68д. $\begin{cases} 5x-6y+4z+xy=0 \\ 3x-5y+z-y^2=0 \\ x-4y-2z-yz=0 \end{cases}$.

5.69д. $\begin{cases} y+\dfrac{x^3}{y^3}=\dfrac{y^3}{x}+\dfrac{x^2}{y} \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{y^3}{x^3}+\dfrac{10}{x^2}=0 \end{cases}$.

5.70д. $\begin{cases} (x-2y)^2=4+z^2 \\ (z-2y)^2=3+x^2 \\ (z+x)^2=2+4y^2 \end{cases}$.

5.71д. $\begin{cases} x^9-x^8-2y^2=0 \\ x^7+\dfrac{y^3}{x^4}=y^2+yx^3 \end{cases}$.

Ответы

Задачи для разбора с преподавателем

5.1. $(0;1)$, $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$, $(3;1)$; **5.2.** $\left(\frac{6c}{7c+4};c\right)$, при $c\neq 0, c\neq -\frac{4}{7}$; **5.3.** $(2;5)$, $\left(\frac{1}{2};5\right)$, $\left(-\frac{1}{2};-5\right)$, $(-2;-5)$; **5.4.** $(1;2)$, $(-1;-2)$, $\left(\sqrt{\frac{\sqrt{433}+17}{10}};-\sqrt{\frac{\sqrt{433}-17}{10}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{433}+17}{10}};\sqrt{\frac{\sqrt{433}-17}{10}}\right)$; **5.5.** $\left(\frac{2}{a-b};\frac{2}{a+b}\right)$, $\left(\frac{2b}{ab-1};\frac{2b}{ab+1}\right)$, $\left(\frac{2a}{1-ab};\frac{2a}{1+ab}\right)$, $\left(\frac{2ab}{b-a};\frac{2ab}{a+b}\right)$, при $a=\pm b$ и $ab=\pm 1$ нет решений; **5.6.** $(1;2)$, $(1;-2)$, $(2;1)$, $(-2;1)$; **5.7.** $(0;\sqrt[4]{27})$, $(0;-\sqrt[4]{27})$, $(3;-1)$, $(-3;1)$; **5.8.** $(3\sqrt{2};\sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $(-3\sqrt{2};\sqrt{2})$, $(3\sqrt{2};-\sqrt{2})$; **5.9.** $(5;2)$, $(-5;-2)$, $(2;5)$, $(-2;-5)$;

5.10. $(2;1)$, $(2;-1)$, $\left(-\frac{3}{4};-\sqrt{\frac{14}{3}}\right)$, $\left(-\frac{3}{4};\sqrt{\frac{14}{3}}\right)$; **5.11.** $(2;1)$, $(1;2)$;

5.12. $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2};\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; **5.13.** $(2;1)$, $(1;2)$, $(-2;1)$, $(1;-2)$, $(-3;0)$, $(0;-3)$; **5.14.** $(2;-1)$, $(-1;2)$; **5.15.** $(0;0)$, $(1;-1)$; **5.16.** $(3;2)$, $(-3;-2)$, $\left(2\sqrt{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; **5.17.** $(\sqrt[4]{8};\sqrt[4]{2})$, $(-\sqrt[4]{8};-\sqrt[4]{2})$, $\left(\sqrt[4]{\frac{27}{4}};\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)$, $\left(-\sqrt[4]{\frac{27}{4}};-\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right)$; **5.18.** $(2;1)$, $(-2;-1)$; **5.19.** $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $(-2;1)$, $(2;-1)$;

5.20. $(1;4)$, $(-1;-4)$, $(5;-4)$, $(-5;4)$; **5.21.** $\left(\frac{5}{3};\frac{13}{3}\right)$, $\left(-\frac{5}{3};-\frac{13}{3}\right)$, $(3;5)$, $(-3;-5)$;

5.22. $(0;2)$, $(0;-2)$, $(1;-3)$, $(-1;3)$; **5.23.** $(4;2)$, $(-4;-2)$; **5.24.** $(2;3)$;

5.25. $\left(-\frac{2}{5};-\frac{4}{5}\right)$, $(3-2y_0;y_0)$, где $y_0\in R$; **5.26.** $\left(\frac{7}{9};\frac{10}{9}\right)$, $(-1;2)$; **5.27.** $\left(\frac{2}{5};\frac{9}{5}\right)$, $\left(-\frac{2}{5};-\frac{9}{5}\right)$, $(2;1)$, $(-2;-1)$; **5.28.** $(0;1)$, $\left(-\frac{1}{2};0\right)$, $(0;-1)$; **5.29.** $(1;1)$, $\left(\frac{-2\sqrt{6}-3}{15};\frac{4\sqrt{6}-9}{5}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{6}-3}{15};\frac{-4\sqrt{6}-9}{5}\right)$; **5.30.** $(1;1)$, $(-4;-4)$, $\left(\frac{-\sqrt{21}-1}{2};\frac{\sqrt{21}-1}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{21}-1}{2};\frac{-\sqrt{21}-1}{2}\right)$; **5.31.** $(0;0)$, $(27;27)$, $(30;15)$, $(15;30)$, $\left(\frac{21+7\sqrt{33}}{2};\frac{21-7\sqrt{33}}{2}\right)$, $\left(\frac{21-7\sqrt{33}}{2};\frac{21+7\sqrt{33}}{2}\right)$; **5.32.** $(0;0)$, $(7+4\sqrt{3};2+\sqrt{3})$, $(7-4\sqrt{3};2+\sqrt{3})$, $(2-\sqrt{3};7+4\sqrt{3})$, $(2-\sqrt{3};7-4\sqrt{3})$, $(2+\sqrt{3};7+4\sqrt{3})$, $(2+\sqrt{3};7-4\sqrt{3})$, $(7+4\sqrt{3};2-\sqrt{3})$, $(7-4\sqrt{3};2-\sqrt{3})$; **5.33.** $(1;0)$; **5.34.** $(0;0)$, $(\sqrt{6};\sqrt{6})$, $(-\sqrt{6};-\sqrt{6})$, $(2;-2)$, $(-2;2)$, $\left(\frac{\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{2};\frac{\sqrt{3}\mp\sqrt{7}}{2}\right)$, $\left(\frac{-\sqrt{3}\pm\sqrt{7}}{2};\frac{-\sqrt{3}\mp\sqrt{7}}{2}\right)$; **5.35.** $(3;-2)$; **5.36.** $(2;2;-2)$; **5.37.** $\left(-14;\frac{14}{5}\right)$;

5.38. $(a;0;0)$, $(0;a;0)$, $(0;0;a)$; **5.39.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$; **5.40.** $(4;6;9)$; **5.41.** $(0;0;0)$, $(1;1;1)$, $(-1;-1;-1)$; **5.42.** $(0;0;0)$, $(1;1;1)$; **5.43.** $(-2;0)$, $(-4;2)$, $(-3;3)$; **5.44.** $\left(\frac{5}{2};3;2\right)$, $\left(-\frac{1}{2};-1;\frac{2}{3}\right)$; **5.45.** $(1;-2;2)$, $\left(\frac{5}{\sqrt[3]{13}};\frac{2}{\sqrt[3]{13}};\frac{6}{\sqrt[3]{13}}\right)$; **5.46.** $(0;0;0)$, $\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2};-1\right)$, $\left(-\frac{5}{6};-\frac{1}{6};-\frac{1}{2}\right)$; **5.47.** $(4;-2)$; **5.48.** $(1;1)$, $\left(-\frac{1}{2};-2\right)$; **5.49.** $(\sqrt{3};2)$, $(-\sqrt{3};2)$;

5.50. $(125;5)$, $(4\sqrt{2};2)$, $(-4\sqrt{2};2)$.

Задачи для самостоятельного решения

5.1д. $(4;5)$, $(6;3)$, $(-3;-2)$, $(-1;-4)$; **5.2д.** $(4;2)$, $(9;-3)$; **5.3д.** $(1;-1)$, $\left(\frac{1}{3};-3\right)$;

5.4д. $\left(-\frac{17}{2};3\right)$, $\left(-\frac{17}{3};2\right)$; **5.5д.** $(1;1)$, $(-1;-1)$, $\left(2\sqrt{13};\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$, $\left(-2\sqrt{13};-\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$;

5.6д. $(\sqrt{2};\sqrt{2}+1)$, $(-\sqrt{2};-\sqrt{2}+1)$; **5.7д.** $(1;2)$, $(-1;2)$; **5.8д.** $(1;1)$, $(-1;-1)$,

$\left(0;\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(0;-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; **5.9д.** $(1;2)$, $(2;1)$, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{3};\frac{-1-\sqrt{5}}{3}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{3};\frac{\sqrt{5}-1}{3}\right)$;

5.10д. $\left(\sqrt{3}+1;1-\sqrt{3}\right)$, $\left(1-\sqrt{3};\sqrt{3}+1\right)$; **5.11д.** $(1;2)$, $(2;1)$, $\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2};\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2};\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)$; **5.12д.** $(2;1)$, $(-2;-1)$, $\left(1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};1\right)$, $\left(-\frac{1}{2};-1\right)$, $(1;2)$, $(-1;-2)$; **5.13д.** $(2;3)$, $(3;2)$, $(-6;1)$, $(1;-6)$; **5.14д.** $(1;3)$, $(3;1)$, $\left(\frac{\sqrt{14}-2+\sqrt{12\sqrt{14}-2}}{2};\frac{\sqrt{14}-2-\sqrt{12\sqrt{14}-2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{14}-2-\sqrt{12\sqrt{14}-2}}{2};\frac{\sqrt{14}-2+\sqrt{12\sqrt{14}-2}}{2}\right)$; **5.15д.** $(3;5)$, $(5;3)$, $\left(\frac{-9+\sqrt{21}}{2};\frac{-9-\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(\frac{-9-\sqrt{21}}{2};\frac{-9+\sqrt{21}}{2}\right)$; **5.16д.** $\left(1+\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)$, $\left(1-\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$; **5.17д.** $\left(2;\sqrt[4]{2}\right)$, $\left(\sqrt[4]{2};2\right)$; **5.18д.** $\left(\sqrt{\frac{2}{5}};2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{2}{5}};-2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$;

5.19д. $(3;2)$, $(-3;-2)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$;

5.20д. $\left(\frac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{2};\frac{a\left(2+\sqrt{2}\right)}{2}\right)$, $\left(\frac{a\left(2+\sqrt{2}\right)}{2};\frac{a\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}\right)$; **5.21д.** $(2;1)$, $(-2;-1)$, $(-1;2)$, $(1;-2)$; **5.22д.** $(1;-2)$, $(-1;2)$, $(-2;1)$, $(2;-1)$; **5.23д.** $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}};\frac{2}{\sqrt[3]{9}}\right)$; **5.24д.** $\left(\sqrt{10}-3;-3-\sqrt{10}\right)$, $\left(-3-\sqrt{10};\sqrt{10}-3\right)$; **5.25д.** $\left(2;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};2\right)$;

5.26д. $(4;2)$, $(-4;-2)$; **5.27д.** $(0;0)$, $(-1;2)$, $(-2;-1)$, $(0;1)$;

5.28д. $\left(-1+\sqrt{3};-1+\sqrt{3}\right)$, $(0;0)$, $\left(-1-\sqrt{3};-1-\sqrt{3}\right)$; **5.29д.** $(0;0)$, $(2;1)$, $\left(-\frac{2}{5};\frac{1}{5}\right)$, $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$; **5.30д.** $(2;1)$, $(-1;-2)$; **5.31д.** $(1;1)$, $\left(\frac{1}{5};\frac{3}{5}\right)$, $\left(-\frac{3}{5};\frac{11}{5}\right)$, $\left(-\frac{7}{5};\frac{9}{5}\right)$;

5.32д. $(2;1)$; **5.33д.** $\left(-2;1+\sqrt{3}\right)$, $\left(-2;1-\sqrt{3}\right)$; **5.34д.** $(2;1)$; **5.35д.** $(0;0)$, $(2;3)$, $\left(\frac{26}{5};-\frac{13}{5}\right)$; **5.36д.** $\left(-1+\sqrt{10};1+\sqrt{10}\right)$, $\left(-1-\sqrt{10};1-\sqrt{10}\right)$, $(1;-3)$, $(-3;1)$;

5.37д. $\left(\frac{-5+3\sqrt{3}}{2};-\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{-5-3\sqrt{3}}{2};\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$, $(1;2)$; **5.38д.** $(0;0)$, $\left(\sqrt{7};\sqrt{7}\right)$, $\left(-\sqrt{7};-\sqrt{7}\right)$, $(3;2)$, $(2;3)$, $(-3;-2)$, $(-2;-3)$, $\left(\sqrt{19};\sqrt{19}\right)$, $\left(-\sqrt{19};-\sqrt{19}\right)$;

5.39д. $\left(1+\sqrt{2};-1\right)$, $\left(1-\sqrt{2};-1\right)$; **5.40д.** $(0;1)$, $\left(-\frac{3}{2};4\right)$; **5.41д.** $(0;0)$, $(-1;2)$, $(-2;-1)$, $(0;1)$; **5.42д.** $(0;0)$, $(2;-1)$, $\left(-\frac{10}{7};-\frac{4}{7}\right)$; **5.43д.** $(4;4;0)$; **5.44д.** $(3;1)$, $(-1;-3)$, $\left(\sqrt[3]{13};-\sqrt[3]{13}\right)$; **5.45д.** $(3;1)$, $\left(\frac{1}{3};-1\right)$; **5.46д.** $(1;1)$; **5.47д.** $(1;2)$;

5.48д. $(10;9;12)$, $(9;10;12)$; **5.49д.** $(0;1;2)$, $(0;-1;-2)$, $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$; **5.50д.** $(1;0;1)$, $(0;1;1)$, $(1;1;0)$, $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4};\frac{-1+\sqrt{17}}{4};\frac{-1+\sqrt{17}}{4}\right)$, $\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4};\frac{-1-\sqrt{17}}{4};\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right)$;

5.51д. $(0;0;0)$, $(0;0;3)$, $(0;2;0)$, $(1;0;0)$, $\left(\frac{35}{24};-\frac{7}{24};-\frac{5}{24}\right)$; **5.52д.** $\left(1;2;\frac{1}{2}\right)$, $\left(1;\frac{1}{2};2\right)$, $\left(2;1;\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};1;2\right)$, $\left(2;\frac{1}{2};1\right)$, $\left(\frac{1}{2};2;1\right)$; **5.53д.** $\left(\frac{5}{\sqrt[4]{30}};\frac{3}{\sqrt[4]{30}};\frac{1}{\sqrt[4]{30}}\right)$, $\left(-\frac{5}{\sqrt[4]{30}};-\frac{3}{\sqrt[4]{30}};-\frac{1}{\sqrt[4]{30}}\right)$; **5.54д.** $(3;3;3)$; **5.55д.** $\left(\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\sqrt{2};\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2};-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$; **5.56д.** $(0;0;0)$, $\left(-\frac{1}{3};-1;3\right)$, $\left(\frac{1}{3};-3;1\right)$;

5.57д. $\left(\frac{1}{20};\frac{7}{20};-\frac{3}{20}\right)$; **5.58д.** $\frac{-a^3+3ab^2+3a^2c-3cb^2}{2}$; **5.59д.** $(1;2;4)$, $(-1;-2;-4)$;

5.60д. $(3;1;-2)$, $(-5;-3;0)$; **5.61д.** $(2;-1)$, $\left(\frac{12}{7};-\frac{1}{7}\right)$; **5.62д.** $(7;7;-1)$, $(-7;-7;1)$, $\left(3\sqrt{2};3\sqrt{2};4\sqrt{2}\right)$, $\left(-3\sqrt{2};-3\sqrt{2};-4\sqrt{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{23}+\sqrt{15}}{\sqrt{2}};\frac{\sqrt{23}-\sqrt{15}}{\sqrt{2}};\sqrt{46}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{23}+\sqrt{15}}{\sqrt{2}};-\frac{\sqrt{23}-\sqrt{15}}{\sqrt{2}};-\sqrt{46}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{23}-\sqrt{15}}{\sqrt{2}};\frac{\sqrt{23}+\sqrt{15}}{\sqrt{2}};\sqrt{46}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{23}-\sqrt{15}}{\sqrt{2}};-\frac{\sqrt{23}+\sqrt{15}}{\sqrt{2}};-\sqrt{46}\right)$; **5.63д.** $(2;-4)$, $\left(\frac{3}{2};-5\right)$, $\left(\frac{3}{8};-\frac{5}{2}\right)$;

5.64д. $\left(2;-3;-\frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{5}{6};4;-\frac{3}{2}\right)$; **5.65д.** $\left(-1;\frac{5}{18};\frac{7}{6}\right)$, $\left(1;-\frac{5}{18};-\frac{7}{6}\right)$;

5.66д. $\left(-\sqrt[3]{9};-\sqrt[3]{3};-2\right)$, $\left(-\sqrt[3]{\frac{3}{2}};\sqrt[3]{\frac{9}{2}};-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$; **5.67д.** $(1;-6)$; **5.68д.** $(0;0;0)$, $\left(\frac{5}{2};-5;-\frac{15}{2}\right)$; **5.69д.** $(4;-2)$; **5.70д.** $\left(1;-\frac{7}{12};\frac{5}{6}\right)$, $\left(-1;\frac{7}{12};-\frac{5}{6}\right)$; **5.71д.** $(3;81)$, $\left(2;8\sqrt{2}\right)$, $\left(2;-8\sqrt{2}\right)$.

Лекция №6

Рациональные неравенства

Прежде чем переходить к изучению методов решения рациональных неравенств, рассмотрим и докажем несколько важных соотношений. Эти соотношения полезно знать, так как они часто используются при решении задач. Методы их доказательства имеют так же важное прикладное значение.

Обсудим вопрос о том какие действия и при каких условиях можно совершать с неравенствами.

В первой лекции мы выяснили, что неравенства одного знака можно складывать, при условии, что оба неравенства существуют на одинаковой области значений переменной. Обе части неравенства можно умножать на число, не равное нулю, причем, если число положительное, то знак неравенства сохраняется, если же число отрицательное, то знак неравенства меняется на противоположный.

К левой и правой частям неравенства можно применять монотонные функции, причем если функция возрастает, то знак неравенства сохраняется, т.е. если $a>b\left(a<b\right)$ и $f\left(t\right)$ – возрастающая функция, то $f\left(a\right)>f\left(b\right)\left(f\left(a\right)<f\left(b\right)\right)$, а если функция убывает, то знак неравенства меняется на противоположный. Заметим, что монотонность функции должна выполняться на всей области значений выражений, присутствующих в неравенстве. Например, возводить в квадрат можно только при условии, что обе части неравенства имеют один знак, причем, если обе части неотрицательны, то после возведения в квадрат, знак неравенства сохраняется, а если обе части неположительны, то знак неравенства меняется на противоположный.

Пример 6.1. Доказать неравенство $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$.

Пусть $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}=a>0, \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}=b>0$. Тогда

$$6=a^3+b^3=\left(a+b\right)\left(a^2-ab+b^2\right)>ab\left(a+b\right).$$

Последний переход возможен в силу положительности a и b и того, что $a^2-ab+b^2>ab$, при $a\neq b$.

Имеем

$$a+b=\sqrt[3]{\left(a+b\right)^3}=\sqrt[3]{a^3+b^3+3ab\left(a+b\right)}=$$

$$=\sqrt[3]{6+3ab\left(a+b\right)}<\sqrt[3]{6+18}=2\sqrt[3]{3}.$$

Извлечение кубического корня возможно в силу того, что функция $y=\sqrt[3]{x}$ является монотонно возрастающей и непрерывной на всей числовой оси.

Таким же способом можно доказать и более общее неравенство

$$\sqrt[3]{t+1}+\sqrt[3]{t-1}<2\sqrt[3]{t}, \text{ при } t\geq 1.$$

6.1. Доказательство важных неравенств.

Теперь рассмотрим пример, в котором исследуется связь между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных переменных. Несколько позже мы рассмотрим такое же неравенство для случая произвольного числа переменных.

Пример 6.2. Доказать, что, если $a, b>0$, то $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$.

Очевидна следующая цепочка

$$\frac{a+b}{2}\vee\sqrt{ab}\Leftrightarrow\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}\vee 0\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\geq 0.$$

Заметим, что равенство возможно только при $a=b$.

Рассмотренное неравенство будет в дальнейшем применяться неоднократно. Сейчас мы посмотрим как его использовать для оценки значения выражения $t+\frac{a^2}{t}$.

При $t>0$ воспользуемся доказанным неравенством и получим

$$\frac{t+\frac{a^2}{t}}{2} \ge \sqrt{a^2} \Leftrightarrow t+\frac{a^2}{t} \ge 2|a|.$$

При $t<0$ действуем практически таким же образом

$$\frac{-t-\frac{a^2}{t}}{2} \ge \sqrt{a^2} \Leftrightarrow -t-\frac{a^2}{t} \ge 2|a| \Leftrightarrow t+\frac{a^2}{t} \le -2|a|.$$

Пример 6.3. Доказать, что для любых a, b, c верно

$$a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ac.$$

Доказывать это неравенство можно различными способами, мы выберем один из них

$$a^2+b^2+c^2 \vee ab+bc+ac \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac \vee 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ac \vee 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2 \vee 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \ge 0.$$

Заметим, что равенство достигается только если $a=b=c$.

Отметим важный факт связанный с доказанным неравенством. Если для двух переменных неравенство $a^2+b^2 \ge ab$ справедливо для любых a, b, для трех переменных неравенство только что доказано для любых a, b, c, то для четырех переменных аналогичное неравенство справедливо только для некоторого специального набора переменных.

Пример 6.4. Доказать, что для любых a, b верно

$$a^2+b^2+1 \ge ab+a+b.$$

Это неравенство является частным случаем неравенства из примера 6.3, однако способ его доказательства заслуживает выделения в отдельный случай.

Действительно, если положить в примере 6.3 $c=1$, то получится доказываемое неравенство. Для доказательства мы рассмотрим другой способ, применимый и к предыдущему примеру, смысл которого в следующем. Сначала собираются все слагаемые, в которые входит a, и выделяется полный квадрат. После этого выделяется полный квадрат для следующей переменной и т.д. В нашем случае имеем

$$a^2+b^2+1-ab-a-b \vee 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2-2a\frac{b+1}{2}+\frac{(b+1)^2}{4}-\frac{(b+1)^2}{4}+b^2-b+1 \vee 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(b^2-2b+1\right) \vee 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(a-\frac{b+1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-1)^2 \ge 0.$$

Заметим, что равенство достигается только при $a=b=1$.

Пример 6.5. Доказать, что для любых x верно

$$x^{12}-x^9+x^4-x+1>0.$$

Рассмотрим неравенство на различных интервалах.

При $x \le 0$ имеем

$$x^{12} \ge 0, -x^9 \ge 0, x^4 \ge 0, -x \ge 0, 1>0$$

и складывая эти неравенства получим доказываемое.

При $0<x \le 1$ имеем

$$x^{12}>0,\ x^4-x^9 \ge 0, 1-x \ge 0$$

и складывая эти неравенства получим доказываемое.

При $x>1$ имеем

$$1>0,\ x^{12}-x^9>0,x^4-x>0$$

и складывая эти неравенства получим доказываемое.

Такой способ доказательства применим и для неравенств с другими показателями степеней.

Пример 6.6. Доказать, что, если $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=1$, $b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1$, то выполняется неравенство

$$-1\le a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\le 1 .$$

Приведем два способа доказательства.

I способ. Рассмотрим очевидное неравенство, справедливое при всех значениях x

$$\left(a_1x-b_1\right)^2+\left(a_2x-b_2\right)^2+\ldots+\left(a_nx-b_n\right)^2\ge 0 .$$

Теперь раскроем скобки, приведем подобные относительно x члены и учтем условие задачи

$$x^2-2\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)x+1\ge 0 .$$

Получили квадратный трехчлен, который при любых значениях переменной x должен быть неотрицательным. Значит дискриминант этого трехчлена должен быть неположительным. Имеем:

$$\frac{D}{4}=\left(a_1\ b_1+a_2\ b_2+\ldots+a_n\ b_n\right)^2-1\le 0 ,$$

откуда и следует доказываемое утверждение.

II способ. Рассмотрим два очевидных неравенства

$$\left(a_1-b_1\right)^2+\left(a_2-b_2\right)^2+\ldots+\left(a_n-b_n\right)^2\ge 0$$

$$\left(a_1+b_1\right)^2+\left(a_2+b_2\right)^2+\ldots+\left(a_n+b_n\right)^2\ge 0$$

Обозначим $y=a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$ и, раскрыв скобки получим, что должно выполняться

$$\begin{cases}2-2y\ge 0\\ 2+2y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le y\le 1 .$$

Пример 6.7. Доказать, что $S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1,\ \forall\ n\ge 2$

Отметим справедливость следующего неравенства для любого $n\ge 2$

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n\left(n-1\right)}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} .$$

В результате имеем:

$$\frac{1}{2^2}<1-\frac{1}{2};$$

$$\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2}-\frac{1}{3};$$

....

$$\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n} .$$

Просуммировав левые и правые части полученных неравенств получаем

$$S_n<1-\frac{1}{n}<1 .$$

Пример 6.8. Доказать, что если $a_1+a_2+\ldots+a_n=1$, то

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\ge\frac{1}{n} .$$

Обозначим для удобства $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=b>0$ и выпишем очевидное неравенство

$$\left(\frac{a_1}{b}-1\right)^2+\left(\frac{a_2}{b}-1\right)^2+\ +\left(\frac{a_n}{b}-1\right)^2\ge 0$$

или, раскрывая скобки

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{b^2}-2\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b}+n\ge 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{b^2}-\frac{2}{b}+n\ge 0\Rightarrow b\ge \frac{1}{n}.$$

6.2. *Доказательство неравенств с помощью метода математической индукции.*

Для доказательства неравенств этого раздела мы будем использовать метод математической индукции.

Пример 6.9. Доказать, что $2^n>2n+1, n\ge 3$.

Будем действовать по этапам индукции.

1. Проверяем справедливость утверждения при $n=3$, т.е. $2^3>6+1$.

2. Предполагаем справедливость доказываемого неравенства для произвольного $n=k\ge 3$, т.е. верно неравенство $2^k>2k+1$.

3. На основе сделанного предположения пытаемся доказать,что $2^{k+1}>2(k+1)+1$.

Для доказательства воспользуемся очевидным неравенством $2k>1, k\in N$. Имеем

$$2^{k+1}=2\cdot 2^k>2(2k+1)=2k+3+2k-1>2k+3.$$

Здесь первое неравенство следует из предположения, сделанного в 2.

Пример 6.10. (Неравенство Бернулли). Доказать, что $(1+x)^n\ge 1+nx, x\ge -1, n\in N$.

1. Проверяем справедливость доказываемого неравенства при $n=1$, т.е. $(1+x)^1=1+x$.

2. Предполагаем справедливость неравенства для произвольного $k\ge 1$, т.е. $(1+x)^k\ge 1+kx, x\ge -1$.

3. На основе сделанного предположения пытаемся доказать справедливость неравенства $(1+x)^{k+1}\ge 1+(k+1)x, x\ge -1$.

При $x=-1$ доказательство очевидно, поэтому будем проводить его при $x\ne -1$ и, следовательно $1+x>0$. Умножим левую и правую части предположительно верного неравенства из пункта 2 на $1+x>0$

$$(1+x)^{k+1}\ge (1+kx)(1+x)=1+kx+x+kx^2=$$

$$=1+(k+1)x+kx^2\ge 1+(k+1)x.$$

Отметим, что равенство достигается при $n=1$ или при $x=0$.

Пример 6.11. Доказать, что если $a_1\cdot a_2\cdots a_n=1, a_i>0, i=\overline{1,n}$, то $a_1+a_2+\cdots+a_n\ge n$.

Этот пример имеет как самостоятельное значение, так и его результаты довольно часто используются при доказательстве других неравенств.

1. Убеждаемся в справедливости утверждения при $n=1$.

2. Предполагаем справедливость утверждения для произвольного $k\ge 1$ т.е. если $a_1\cdot a_2\cdots a_k=1, a_i>0, i=\overline{1,k}$, то $a_1+a_2+\cdots+a_k\ge k$.

3. Пытаемся доказать, что если $a_1\cdots a_{k+1}=1, a_i>0, i=\overline{1,k+1}$, то $a_1+\cdots+a_{k+1}\ge k+1$.

Рассмотрим два случая. Во-первых, если все $a_i=1$, то все понятно. Во- вторых, если хотя бы одно из $a_i\ne 1$, то существуют хотя бы два элемента a_l и a_m, таких, что $a_l>1$ и $a_m<1$. Пусть для определенности это будут первый и последний элемент a_1 и a_{k+1}. Обозначим их произведение через b_1.

Тогда $b_1\cdot a_2\cdots a_k=1$, следовательно, по предположению $b_1+a_2+\cdots+a_k\ge k$. Имеем

$$a_1+\cdots+a_{k+1}=(b_1+a_2\cdots+a_k)+a_1+a_{k+1}-b_1\ge$$

$$\ge k+a_1+a_{k+1}-a_1\cdot a_{k+1}=$$

$$=k+1+a_1+a_{k+1}-a_1\cdot a_{k+1}-1=k+1+(a_{k+1}-1)(1-a_1)>k+1.$$

Последний переход возможен в силу того, что по предположению один из a_1 и a_{k+1} больше, а другой меньше единицы, поэтому

$$(a_{k+1}-1)(1-a_1)>0.$$

Равенство в доказываемом неравенстве возможно только при $a_i=1, \forall i$.

Теперь докажем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для случая произвольного количества положительных чисел.

Пример 6.12. (Неравество Коши). Доказать, что , для любых $a_i>0, i=\overline{1,n}$ верно

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}\ .$$

Обозначим $y=\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}$. Тогда

$$\frac{a_1}{y}\cdot\frac{a_2}{y}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{y}=1$$

и, следовательно, воспользовавшись результатом примера 6.11, получим

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{y}\ge n$$

откуда и следует доказываемое неравенство.

Равенство достигается только при $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

Пример 6.13. (Неравенство Коши-Буняковского). Доказать, что

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2.$$

Для доказательства используем уже применявшийся прием. Составим очевидное неравенство

$$(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\ldots+(a_nx-b_n)^2\ge 0,$$

которое выполняется при любых значениях x . Перепишем это неравенство в виде квадратного трехчлена относительно x

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)x^2-2\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)x+$$
$$+\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)\ge 0.$$

Поскольку это неравенство справедливо для любого значения x , то дискриминант квадратного трехчлена должен быть неположительным, т.е

$$\frac{D}{4}=\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)^2-$$
$$-\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)\le 0.$$

Из последнего и следует доказываемое неравенство.

Заметим, что равенство достигается только если

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}.$$

Для неотрицательных a_i и b_i доказанное неравенство можно записать в виде

$$\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)}\ge$$
$$\ge\left(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\right)$$

Рассмотрим пример применения доказанного неравенства.

Пример 6.14. Решить уравнение

$$2\sqrt{7+x}+3\sqrt{37-2x}+6\sqrt{93+3x}=7\sqrt{137+2x}\ .$$

Обозначим

$$a_1=\sqrt{7+x}\,;a_2=\sqrt{37-2x}\,;a_3=\sqrt{93+3x}\,;$$

$$b_1=2;\ b_2=3;b_3=6.$$

Тогда $a_1^2+a_2^2+a_3^2=137+2x$ и $b_1^2+b_2^2+b_3^2=7^2$.

Теперь воспользуемся неравенством Коши-Буняковского для неотрицательных a_i, b_j и получим, что равенство достигается только при

$$\frac{\sqrt{7+x}}{2}=\frac{\sqrt{37-2x}}{3}=\frac{\sqrt{93+3x}}{6}\Rightarrow x=5.$$

Ответ: $x=5$.

Пример 6.15. Доказать, что $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, n\in N$.

Сделаем несколько равносильных переходов

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\vee\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\Leftrightarrow\frac{n+2}{n+1}\left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n\vee 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\vee 1.$$

К выражению в скобках применим неравенство Бернулли

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\geq 1-\frac{n}{(n+1)^2}$$

и получим

$$\frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\geq\frac{n+2}{n+1}\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)=$$

$$=\frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1}>1.$$

6.3. Решение рациональных неравенств.

Прежде, чем приступить к решению рациональных неравенств отметим следующее. Если у квадратного трехчлена ax^2+bx+c дискриминант отрицательный и $a>0$, то этот квадратный трехчлен положителен при всех значениях x. Если же $D<0, a<0$, то квадратный трехчлен отрицателен при всех x.

Сначала рассмотрим решение строгих неравенств (неравенство считается строгим, если знак в неравенстве либо ">", либо "<", если же знак "≤" или "≥", то неравенство считается нестрогим).

Пример 6.16. $\dfrac{(x^2-9)(x-5)(2x-3-3x^2)}{x^2+7x+12}<0$.

Сначала неравенство надо привести к виду некоторой рациональной дроби, в которой все сомножители будут либо линейными, либо неразложимыми на линейные сомножители, а в правой части будет нуль, т.е. решение неравенства сводится к определению знака некоторого выражения.

В нашем случае дробь сводится к

$$\frac{(x-3)(x+3)(x-5)(3x^2-2x+3)}{(x+3)(x+4)}>0.$$

Квадратный трехчлен в последней скобке числителя имеет отрицательный дискриминант и в силу положительности коэффициента при x^2 является величиной положительной при всех значениях x. Этот множитель не влияет на знак всего выражения, поэтому неравенство можно переписать в равносильном виде

$$\frac{(x-3)(x+3)(x-5)}{(x+3)(x+4)}>0.$$

Далее на числовую ось (рис. 6.1) последовательно наносятся все те значения переменной x, в которых обращается в нуль один из сомножителей, находящихся в числителе или в знаменателе.

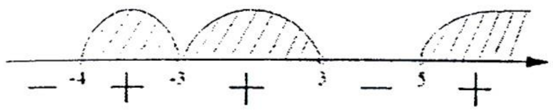

рис.6.1.

Полагаем переменную x, равной самому большому числу, например $+\infty$, и определяем знак каждого сомножителя и, следовательно, знак всего выражения при этом значении x. Это будет знаком выражения на интервале от максимального нанесенного значения переменной x до $+\infty$. В нашем случае это знак "+". Теперь двигаясь справа налево по числовой оси доходим до точки $x=5$. Нужно определить знак нашего выражения на следующем интервале $(3;5)$, т.е. необходимо определить поменяется ли знак нашего выражения при переходе через эту точку $x=5$. Действуем по следующему правилу: если суммарный показатель степени скобки, отвечающей за это значение переменной (в нашем случае степень скобки $(x-5)$ равна 1) является нечетным числом, то знак меняется, если же суммарный показатель степени является четным числом, то знак не меняется. Руководствуясь этим правилом расставляем знаки для нашего неравенства как показано на рис 6.1.

Заметим, что суммарный показатель степени скобки $(x+3)$ равен нулю, поэтому при переходе через точку $x=-3$ знак не поменялся. Объединение интервалов, помеченных знаком "+" и является решением нашего неравенства.

Ответ: $(-4;-3)\cup(-3;3)\cup(5;+\infty)$.

Пример 6.17. $\dfrac{x^3(2-x)^3(x+1)(-2-x)^3(3-x)^2}{(8-2x)^2(-x-1)^4}\le 0$.

Рекомендуется прежде чем решать неравенство методом интервалов привести его к "нормальному" виду, т.е. добиться того, чтобы все коэффициенты при старших степенях переменной в каждой скобке были положительны. Напомним, что при умножении обеих частей неравенства на -1 надо поменять знак неравенства. Итак имеем

$$\frac{x^3(x-2)^3(x+1)(x+2)^3(x-3)^2}{(x-4)^2(x+1)^4}\le 0.$$

Теперь решаем уравнение

$$\frac{x^3(x-2)^3(x+1)(x+2)^3(x-3)^2}{(x-4)^2(x+1)^4}=0$$

и находим корни $x=-2$, $x=0$, $x=2$, $x=3$, которые будут решениями нашего неравенства. Заметим, что $x=-1$ решением уравнения не является.

По методу, предложенному в предыдущем примере, решаем строгое неравенство

$$\frac{x^3(x-2)^3(x+1)(x+2)^3(x-3)^2}{(x-4)^2(x+1)^4}<0.$$

Объединяем решение уравнения и строгого неравенства, т.е. закрашиваем (рис. 6. 2) на оси точки, являющиеся корнями уравнения и в результате получаем решение.

рис.6.2.

Ответ: $[-2;-1)\cup[0;2]\cup\{3\}$.

Итак, подводя некоторые итоги, отметим, что решение неравенств вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}\le 0$ или $\dfrac{P(x)}{Q(x)}\ge 0$ есть объединение решений уравнения $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$ и неравенства $\dfrac{P(x)}{Q(x)}<0$ или $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0$ соответственно.

Пример 6.18. $x^4-2x^3-7x^2+8x+12\le 0$.

Мы уже решали похожие уравнения (пример 4.17)

$$x^4-2x^3+x^2-8x^2+8x+12\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-x\right)^2-8\left(x^2-x\right)+12\le 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2-8t+12\le 0\Leftrightarrow(t-2)(t-6)\le 0,$$

где $t=x^2-x$.

Теперь мы не будем решать неравенства относительно новой переменной. Нашей целью является разложение на множители левой части исходного неравенства, поэтому возвращаемся к старой переменной

$$\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x-6\right)\le 0\Leftrightarrow(x-2)(x+1)(x+2)(x-3)\le 0.$$

Теперь решаем это неравенство методом интервалов.

Ответ: $x\in[-2;-1]\cup[2;3]$.

6.4. Решение систем рациональных неравенств.

При решении систем рациональных неравенств будем руководствоваться принципом:"Каждому неравенству – по оси". Каждое неравенство системы решаем отдельно, а затем пересекаем множества, получившиеся при решении каждого неравенства

Пример 6.19. $\begin{cases}\dfrac{(2x-11)(3x+7)}{(9-4x)^2}\le 0\\ \dfrac{71-24x}{14-5x-x^2}<5\end{cases}$

Сначала преобразуем второе неравенство

$$\frac{71-24x-70+25x+5x^2}{14-5x-x^2}<0\Leftrightarrow\frac{5x^2+x+1}{x^2+5x-14}>0$$

Числитель имеет отрицательный дискриминант и положительный коэффициент при x^2, поэтому числитель положителен и неравенство равносильно

$$\frac{1}{(x-2)(x+7)}>0.$$

На рис.6.3. показаны две прямые, на каждую из которых нанесены решения неравенств системы. Пересечение решений нанесено на вторую прямую.

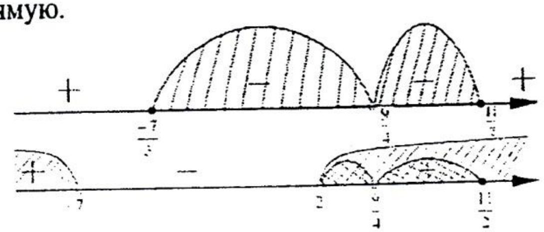

рис.6.3.

Ответ: $x\in\left(2;\dfrac{9}{4}\right)\cup\left(\dfrac{9}{4};\dfrac{11}{2}\right]$.

Задачи для разбора с преподавателем

6.1. Доказать, что если $a,b>0$, то $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$.

6.2. Доказать, что верно $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ac$, для любых a,b,c.

6.3. Доказать, что $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$ верно для любых a,b.

6.4. Доказать, что $x^3+2x^2-x+1>0$ для любых $x\ge 0$.

6.5. Доказать, что $x^8+x^6-4x^4+x^2+1\ge 0$ для любых x.

6.6. Доказать, что $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$ для любых x.

6.7. Доказать, что, если $ab>0$, то

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2.$$

6.8. Доказать, что $2x^3>x+1$ для любых $x>1$.

6.9. Доказать, что, если $a>0,b>0,c>0$ то

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{9}{2}.$$

6.10. Доказать, что, если $a>0, b>0$ и $a+b=1$, то

$$\left(\frac{1}{a}+a\right)^2+\left(\frac{1}{b}+b\right)^2\geq\frac{25}{2}.$$

Решить неравенства:

6.11. $(x+7)(x^2-4)(x-1)^2\leq 0$.

6.12. $\dfrac{(x^2-9)(x-5)(2x-3-3x^2)}{x^2+7x+12}\leq 0$.

6.13. $\dfrac{x^3(2-x)^3(x+1)(-2-x)^3(3-x)^2}{(8-2x)^2(-x-1)^4}\leq 0$.

6.14. $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x^3+x^2+2x+2}\geq 0$.

6.15. $\dfrac{3}{x^2+1}+\dfrac{8}{x^2+2}\leq 3$.

6.16. $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2>\dfrac{2x}{x^2+1}$.

6.17. $x^2+\dfrac{x+1}{x^2+x+1}>0$.

6.18. $\dfrac{x^2+3x+2}{x+3}>\dfrac{x^2-3x+2}{x-3}$.

6.19. $\dfrac{x+1}{x^2+x+1}\leq x^2+1$.

6.20. $\dfrac{(x^3+3x-4)(x-2)^2}{x^3-2x-4}\geq 0$.

6.21. $(x^2-x-1)(x^2-x-7)<-5$.

6.22. $\dfrac{x^8+x^6-4x^4+x^2+1}{x^8-x^5+x^2-x+1}>0$.

6.23. $(x+1)^4>2(1+x^4)$.

6.24. $\dfrac{1}{2x+1}-\dfrac{2}{2+3x}+\dfrac{3}{3+4x}-\dfrac{4}{4+5x}<0$.

6.25. $2x^2+2x+1-\dfrac{15}{x^2+x+1}<0$.

6.26. $x^2+6x+8\leq 0\leq 1+\dfrac{1}{x}$.

6.27. $\dfrac{x(x-1)^2}{(x^2-x+1)^2}>\dfrac{2}{9}$.

Решить системы неравенств:

6.28. $\begin{cases}\dfrac{(2x-11)(3x+7)}{(9-4x)^2}\leq 0\\ \dfrac{71-24x}{14-5x-x^2}<5\end{cases}$.

6.29. $\begin{cases}x^2\leq 2x+3\\ 3x^2-4x+4>4x\end{cases}$.

6.30. $\begin{cases}-3x>-12+x\\ \left[\begin{array}{l}x<-2\\ x\geq 1\end{array}\right.\\ 2x+1>-x-10\end{cases}$.

6.31. $\begin{cases}x^2<14x-45\\ x^2<11x-30\\ \dfrac{2x-3}{x^2-x+2}>0\end{cases}$.

6.32. Для каждого значения a решить неравенство $224x^2+2ax-a^2<0$.

6.33. Для каждого значения a решить неравенство $(a-3)x^2+3x\geq 0$.

Задачи для самостоятельного решения

6.1д. Доказать, что для любых a, b верно $a^2-ab+b^2\geq ab$.

6.2д. Доказать, что $(a^2-b^2)^2\geq 4ab(a-b)^2$ для любых a, b.

6.3д. Доказать, что $(a^2-b^2)^2\geq(a-b)^4$ для любых $ab\geq 0$.

6.4д. Доказать, что для любых x верно $-1\leq\dfrac{x^2-1}{1+x^2}\leq 1$.

6.5д. Доказать, что для любых x верно $2x^4+1\geq 2x^3+x^2$.

6.6д. Доказать, что, если $ab<0$, то

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\leq -2.$$

[illegible] $\left| \ \frac{1}{a}\right| \geq 2$.

6.8д. Доказать, что для любых x верно $\frac{2x^2}{1+x^4} \leq 1$.

6.9д. Доказать, что для любых $x<1$ верно $2x^3 < x+1$.

6.10д. Доказать, что, если $a>0, b>0, c>0$ и $a+b+c=1$, то

$$(1-a)(1-b)(1-c) \geq 8abc.$$

6.11д. Доказать, что, если $a>0, b>0, c>0$, то

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3.$$

6.12д. Доказать, что, если $a>0, b>0, c>0$, то

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

6.13д. Доказать, что, если $a>0, b>0, c>0$, то

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

6.14д. Доказать, что, если $a>0, b>0$, то

$$(ab+6)(2a+3b)\left(\frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}\right) \geq 288.$$

6.15д. Доказать, что, если $a>0$, то $a^4+\frac{1}{a^2}+\frac{2}{a} \geq 4$.

6.16д. Доказать, что, если $a>0$, то

$$a^{40}+\frac{1}{a^{16}}+\frac{2}{a^4}+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a} \geq 16.$$

6.17д. Доказать, что, если $a>0, b>0, c>0$, то

$$\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{c+b}{a} \geq 6.$$

6.18д. Доказать, что, если $a>0, b>0, c>0, d>0$, то

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{c}{b}+\frac{d}{a} \geq 4.$$

6.19д. Доказать, что $a^2+b^2+\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1} \geq 2$.

6.20д. Доказать, что $\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{b^2+d^2} \geq \sqrt{(a+b)^2+(c+d)^2}$.

6.21д. Доказать, что $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2+\left(\frac{c}{a}\right)^2 \geq \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$.

6.22д. Доказать, что $\left(\frac{a}{b}\right)^4+\left(\frac{b}{c}\right)^4+\left(\frac{c}{a}\right)^4 \geq \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$.

6.23д. Доказать, что $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \geq \frac{ab+ac+bc}{3}$.

6.24д. Доказать, что $a^4+b^4+c^4+d^4 \geq 4abcd$.

6.25д. Доказать, что, если $a>0, b>0, c>0$ и $abc=1$, то

$$a^4+b^4+c^4 \geq a+b+c.$$

Решить неравенства:

6.26д. $\frac{(x^3+3x-4)(x-2)^2}{x^3-2x-4} \geq 0$.

6.27д. $x^2+\frac{4x^2}{(x+2)^2} < 5$.

6.28д. $\frac{(x^4-5x^2)(x^4-x^3+8x-8)}{x^2-x-2} \geq 0$.

6.29д. $(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1) < 0$.

6.30д. $\frac{3}{x^2+1}+\frac{5}{x^2+3} \geq 2$.

6.31д. $(x^2+4x)(3x+2) \leq \frac{25(3x+2)}{x^2+4x}$.

6.32д. $\frac{x^3-3x^2+2x+1}{x-1} > \frac{x^3-2x^2+2}{x}$.

6.33д. $\left(\frac{2}{x}\right)^x > 3125(1-x^2)$.

6.34д. $x^2-5x+6+\frac{x^2-5}{x^2+1} < 0$.

6.35д. $3x^2(x-4)^2 < 32-5(x-2)^2$.

6.36д. $32x^4-48x^3+14x^2-9x+5 < 0$.

6.37д. $\dfrac{x^2-x+1}{x-1}+\dfrac{x^2-3x+1}{x-3}>2x-\dfrac{1}{4x-2}$.

6.38д. $\dfrac{(x+1)^4}{x\left(x^2+1\right)}>\dfrac{128}{15}$.

6.39д. $\dfrac{\left(x^4-7x^2\right)\left(x^4-2x^3+8x-16\right)}{x^2-2x-8}\geq 0$.

6.40д. $\dfrac{(4x+1)(x-5)^2(3x-4)}{(x-3)(x-4)(5x-1)^2}\leq 0$.

6.41д. $\dfrac{4x-17}{x-4}+\dfrac{10x-13}{2x-3}>\dfrac{8x-30}{2x-7}+\dfrac{5x-4}{x-1}$.

6.42д. $\dfrac{\left(x^2-4\right)(x+5)\left(x-1-3x^2\right)}{x^2+7x+12}\geq 0$.

6.43д. $\dfrac{\left(x^2+7x+12\right)\left(x^2+x-6\right)\left(x^2-x-2\right)}{x^3-x^2+x-1}\leq 0$.

6.44д. $\dfrac{x^3-3x^2+2x+1}{x-1}>\dfrac{x^3-2x^2+2}{x}$.

6.45д. $x^3+\dfrac{1}{x}\geq\dfrac{4}{3}\sqrt[4]{3}$.

6.46д. $\dfrac{2x-1}{x+1}+\dfrac{3x-1}{x+2}>4+\dfrac{x-7}{x-1}$.

6.47д. $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}+\dfrac{x^2+8x+20}{x+4}>\dfrac{x^2+4x+6}{x+2}+\dfrac{x^2+6x+12}{x+3}$.

Решить системы неравенств:

6.48д. $\begin{cases}\dfrac{(2x+9)(7x-2)}{(5x+9)^2}\leq 0\\[2mm] \dfrac{(5x+37)}{12+x-x^2}>2\end{cases}$.

6.49д. $\begin{cases}\dfrac{x-2}{x+4}\geq -2\\ x^2+2x-3>0\end{cases}$.

6.50д. $\begin{cases}x^2>3x-2\\ 2x^2-5x\geq -x^2-6x-6\end{cases}$.

6.51д. $\begin{cases}x^2>x+6\\ x^2-2x<5x-2x^2-2\end{cases}$.

6.52д. $\begin{cases}\dfrac{(9-2x)(3x+5)}{(7-5x)^2}\geq 0\\[2mm] \dfrac{43-34x}{18-9x+x^2}<4\end{cases}$.

Решить неравенства:

6.53д. $1<\dfrac{3x^2-7x+8}{x^2+1}\leq 2$.

6.54д. $\dfrac{2-x}{x^3+x^2}\geq\dfrac{1-2x}{x^3-3x^2}$.

6.55д. $\dfrac{2x}{4x^2+3x+8}+\dfrac{3x}{4x^2-6x+8}>\dfrac{1}{6}$.

6.56д. $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{4}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}<\dfrac{1}{30}$.

6.57д. $\left(x^2+x+1\right)^2-4\left(x^2+x+1\right)+3<0$.

6.58д. $2x^2+4x+5-\dfrac{15}{x^2+2x+3}<0$.

Решить системы неравенств:

6.59д. $\begin{cases}-2<3x-5<19\\ \left[\begin{array}{l}3x-1<5\\ 2x-5\geq 7\end{array}\right.\end{cases}$.

6.60д. $\begin{cases}x^2-x-20<0\\ x^2-2x-8>0\\ 2x^2+x-45<0\end{cases}$.

6.61д. Для каждого значения a решить неравенство $108x^2+33ax-a^2\leq 0$.

6.62д. Для каждого значения a решить неравенство $(5-a)x^2+5x<0$.

Ответы

Задачи для разбора с преподавателем

6.11. $(-\infty;-7]\cup[-2;2]$; **6.12.** $(-4;-3)\cup(-3;3]\cup[5;+\infty)$;
6.13. $[-2;-1)\cup[0;2]\cup\{3\}\cup(4;+\infty)$; **6.14.** $(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$;
6.15. $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$; **6.16.** $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; **6.17.** $(-\infty;+\infty)$;
6.18. $(-3;3)$; **6.19.** $(-\infty;+\infty)$; **6.20.** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$; **6.21.** $(-2;-1)\cup(2;3)$;
6.22. $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$; **6.23.** $\left(\sqrt{3}+1-\sqrt{3+2\sqrt{3}};\sqrt{3}+1+\sqrt{3+2\sqrt{3}}\right)$;
6.24. $\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{4}\right)\cup\left(-\frac{2}{3};-\frac{1}{2}\right)\cup(0;+\infty)$; **6.25.** $(-2;1)$; **6.26.** $[-4;-2]$;
6.27. $\left(2-\sqrt{3};\frac{1}{2}\right)\cup\left(2;2+\sqrt{3}\right)$; **6.28.** $\left(2;\frac{9}{4}\right)\cup\left(\frac{9}{4};\frac{11}{2}\right]$; **6.29.** $\left[-1;\frac{2}{3}\right)\cup(2;3]$;
6.30. $\left[-\frac{11}{3};-2\right)\cup[1;3)$; **6.31.** $(5;6)$; **6.32.** если $a<0$, то $x\in\left(\frac{a}{16};-\frac{a}{14}\right)$, если $a=0$, то $x\in\varnothing$, если $a>0$, то $x\in\left(-\frac{a}{14};\frac{a}{16}\right)$; **6.33.** если $a<3$, то $x\in\left[0;\frac{3}{3-a}\right]$, если $a=3$, то $x\in[0;+\infty)$, если $a>3$, то $x\in\left(-\infty;\frac{3}{3-a}\right]\cup[0;+\infty)$.

Задачи для самостоятельного решения

6.26д. $(-\infty;1]\cup(2;+\infty)$; **6.27д.** $(-1;2)$;
6.28д. $\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup[-2;-1)\cup\{0\}\cup[1;2)\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$; **6.29д.** $(-1;1)$;
6.30д. $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$; **6.31д.** $(-\infty;-5]\cup\left(-4;-\frac{2}{3}\right]\cup(0;1]$;
6.32д. $(-\infty;0)\cup(1;2)$; **6.33д.** $\left(-\infty;-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\cup\left(\frac{2\sqrt{5}}{5};+\infty\right)$;
6.34д. $\left(3-\sqrt{5};1\right)\cup\left(1;3+\sqrt{5}\right)$; **6.35д.** $\left(2-\frac{4\sqrt{3}}{3};1\right)\cup\left(3;2+\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)$; **6.36д.** $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$;
6.37д. $\left(1;\frac{5}{3}\right)\cup\left(2;\frac{7}{3}\right)\cup(3;+\infty)$; **6.38д.** $\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup(3;+\infty)$;
6.39д. $\left(-\infty;-\sqrt{7}\right]\cup\{0\}\cup\left[2;\sqrt{7}\right]\cup(4;+\infty)$;
6.40д. $\left[-\frac{1}{4};\frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{1}{5};\frac{4}{3}\right]\cup(3;4)\cup\{5\}$; **6.41д.** $(-\infty;1)\cup\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)\cup\left(\frac{7}{2};4\right)$;
6.42д. $(-\infty;-5]\cup(-4;-3)\cup[-2;2]$; **6.43д.** $(-\infty;-4]\cup\{-3\}\cup[-1;0)\cup\{2\}$;
6.44д. $(0;1)\cup(2;+\infty)$; **6.45д.** $(0;+\infty)$; **6.46д.** $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right)\cup(-2;-1)\cup(1;5)$;

6.47д. $(-4;-3)\cup\left(-\frac{5}{2};-2\right)\cup(-1;0)$; **6.48д.** $\left(-3;-\frac{9}{5}\right)\cup\left(-\frac{9}{5};\frac{2}{7}\right]$;
6.49д. $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$; **6.50д.** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$; **6.51д.** $\varnothing$;
6.52д. $\left[-\frac{5}{3};\frac{7}{5}\right)\cup\left(\frac{7}{5};3\right)$; **6.53д.** $[1;6]$; **6.54д.** $(-\infty;-7]\cup(-1;0)\cup(0;1]\cup(3;+\infty)$;
6.55д. $\left(\frac{1}{4};8\right)$; **6.56д.** $(-\infty;-2)\cup(-1;1)\cup(2;3)\cup(4;6)\cup(7;+\infty)$;
6.57д. $(-2;-1)\cup(0;1)$; **6.58д.** $(-2;0)$; **6.59д.** $(1;2)\cup[6;8)$;
6.60д. $(-4;-2)\cup\left(4;\frac{9}{2}\right)$; **6.61д.** если $a<0$, то $x\in\left[\frac{a}{36};-\frac{a}{3}\right]$, если $a=0$, то $x=0$, если $a>0$, то $x\in\left[-\frac{a}{3};\frac{a}{36}\right]$; **6.62д.** если $a<5$, то $x\in\left(\frac{5}{a-5};0\right)$, если $a=5$, то $x\in(-\infty;0)$, если $a>5$, то $x\in(-\infty;0)\cup\left(\frac{5}{a-5};+\infty\right)$.

Лекция №7

Уравнения и неравенства, содержащие абсолютную величину

Уравнения и неравенства, содержащие абсолютную величину (модуль), традиционно являются одной из тех тем, которые вызывают определенные затруднения у школьников. В предлагаемой лекции мы попробуем детально разобраться с этим вопросом.

Прежде чем переходить к рассмотрению методов решения уравнений и неравенств с модулем дадим определение абсолютной величины и отметим некоторые ее важные свойства.

Определение 7.1. Определим $|a|$ следующим образом

$$|a|=\begin{cases} a, \text{при } a\ge 0 \\ -a, \text{при } a\le 0 \end{cases}.$$

1°. Для любых a и b справедливо $|a+b|\le|a|+|b|$, причем равенство достигается только при условии $ab\ge 0$.

2°. Для любых a и b справедливо $|a+b|\ge|a|-|b|$.

3°. Для любых a и b справедливо $|a+b|\ge\left||a|-|b|\right|$, причем равенство достигается только при условии $ab\le 0$.

4°. Для любых a справедливо $|a|\ge a$, причем равенство достигается только при условии $a\ge 0$.

7.1. Уравнения с модулем.

Определение 7.2. Определим $|f(x)|$ как следующую функцию

$$|f(x)|=\begin{cases} f(x), \text{при } f(x)\ge 0 \\ -f(x), \text{при } f(x)\le 0 \end{cases}.$$

Из определения следует неравенство, которое нередко используется при решении примеров

$$|f(x)|\ge f(x),$$

причем равенство достигается только при $f(x)\ge 0$.

Сначала рассмотрим решение простейшего уравнения с модулем $|f(x)|=g(x)$, к которому мы будем стремиться сводить более сложные уравнения.

7.1.1. Непосредственное раскрытие модуля.

Уравнение $|f(x)|=g(x)$ равносильно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ f(x)=g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)<0 \\ -f(x)=g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Пример 7.1. $|x^3-x|=x+4$.

Наше уравнение разбивается на две системы

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^3-x=x+4 \\ x^3-x\ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x^3+x=x+4 \\ x^3-x<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-\sqrt[3]{4} \end{array}\right..$$

Ответ: $x=2, x=-\sqrt[3]{4}$.

Заметим, что мы не решали неравенств, отвечающих за условие раскрытия модуля, а подставляли в эти неравенства, получившиеся корни уравнений.

Пример оказался довольно простым, так как получившиеся решения удовлетворяли неравенствам. Чаще встречаются уравнения, в которых часть решений приходится отбрасывать.

Пример 7.2. $\left|2x^2+4x-5\right|=3x-2$.

Решаем две системы

$$\begin{cases} 2x^2+4x-5\ge 0 \\ 2x^2+4x-5=3x-2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x^2+4x-5<0 \\ -2x^2-4x+5=3x-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x^2+4x-5\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x^2+4x-5<0 \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-7+\sqrt{105}}{4} \\ x=\dfrac{-7-\sqrt{105}}{4} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Ответ: $x=1, x=\dfrac{-7+\sqrt{105}}{4}$.

Здесь нам пришлось столкнуться с некоторыми трудностями при проверке иррациональных корней уравнения второй системы. В принципе, можно решить неравенство $2x^2+4x-5<0$ и исследовать взаимное расположение корней, однако, прямая подстановка корней уравнения в неравенство и проверка выглядят предпочтительнее.

Другой способ решения позволит нам существенно упростить эту процедуру.

7.1.2. Решение без непосредственного раскрытия модуля.

Уравнение $\left|f(x)\right|=g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} g(x)\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right. \end{cases}.$$

Докажем это. В силу того, что левая часть уравнения неотрицательна, для существования решения неотрицательной должна быть и правая часть. Неотрицательность обеих частей уравнения позволяет возвести обе части в квадрат, т.е. при условии $g(x)\ge 0$ имеем

$$f^2(x)-g^2(x)=0 \Leftrightarrow \big(f(x)-g(x)\big)\big(f(x)+g(x)\big)=0,$$

откуда и следует наше утверждение.

Пример 7.3. $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|=1$.

Раскрытие модуля в данном случае возможно, но является довольно трудоемким занятием, а наличие в правой части положительного числа позволяет сразу написать совокупность

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}=1 \\ \dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}=-1 \end{array}\right.,$$

из которой находятся решения.

Эту же совокупность можно получить и просто возводя в квадрат обе части исходного уравнения.

Действительно, пусть надо решить уравнение

$$\left|f(x)\right|=\left|g(x)\right|.$$

В силу неотрицательности обеих частей уравнения возводим обе части в квадрат и получаем

$$f^2=g^2 \Leftrightarrow (f-g)(f+g)=0.$$

Из последнего следует, что уравнение $\left|f(x)\right|=\left|g(x)\right|$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right..$$

Ответ: $x=0$.

Пример 7.4. $\left|\left|x^2-3x\right|-5\right|=x+1$.

Переходим к равносильным соотношениям

$$\begin{cases} x+1\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} \left|x^2-3x\right|=x+6 \\ \left|x^2-3x\right|=4-x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+6\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3x=x+6 \\ x^2-3x=-6-x \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x\le 4 \\ \left[\begin{array}{l} x^2-3x=4-x \\ x^2-3x=x-4 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}.$$

Корни квадратных уравнений отбрасываются после прямой подстановки в неравенства.

Ответ: $x=2$, $x=1+\sqrt{5}$, $x=2+\sqrt{10}$.

Пример 7.5. $\left|x^3-x+1\right|=x+1$.

В данном примере находить участки знакопостоянства подмодульной функции занятие бесперспективное, а правая часть уравнения представляет собой обычную линейную функцию, поэтому составляем равносильную систему

$$\begin{cases} x+1\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x^3-x+1=x+1 \\ x^3-x+1=-x-1 \end{array}\right. \end{cases},$$

которая довольно просто решается.

Ответ: $x=0$, $x=\sqrt{2}$.

В принципе, вместо уравнения $\left|f(x)\right|=g(x)$ можно решать совокупность

$$\left[\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ f(x)=-g(x) \end{array}\right.,$$

являющуюся следствием исходного уравнения, а затем проверять неотрицательность правой части для получившихся решений. Однако, этот метод таит в себе одну опасность. Если при решении одного из уравнений совокупности получится тождество, то это означает, что решением будет некоторый интервал и для его восстановления придется рассматривать условия раскрытия модуля.

Пример 7.6. $\left|x-1\right|+\left|x-3\right|=2x-4$.

Попробуем решить этот пример не указывая условия неотрицательности правой части

$$\left[\begin{array}{l} x-1=2x-4-\left|x-3\right| \\ x-1=-2x+4+\left|x-3\right| \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|x-3\right|=x-3 \\ \left|x-3\right|=3x+3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x-3=x-3 \\ x-3=3-x \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x-3=3x+3 \\ x-3=-3x-3 \end{array}\right. \end{array}\right..$$

Мы видим, что первое уравнение является тождеством, поэтому, восстанавливая условия возникновения этого уравнения, получим, что $x\in[3;+\infty)$ является частью решения исходного уравнения.

Из последних двух уравнений получим решения $x=-3$, $x=0$, которые при проверке не подходят.

Заметим, что рассматриваемое уравнение решается с использованием свойств модуля. Перепишем наше уравнение в виде

$$|a|+|b|=a+b \Leftrightarrow \left(|a|-a\right)+\left(|b|-b\right)=0.$$

Обе скобки в левой части последнего уравнения неотрицательны, поэтому равенство нулю возможно только при

$$\begin{cases} |a|=a \\ |b|=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 0 \\ b\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 3.$$

Ответ: $x\in[3;+\infty)$.

Из сказанного выше следует, что выбор способа решения уравнения с модулем зависит от конкретного примера, и довольно часто более длинный путь помогает избежать ошибок.

Пример 7.7. $x^2+4x-11=2|x+2|$.

Можно решить этот пример одним из приведенных выше способов, однако, попробуем проявить некоторую наблюдательность. Заметим, что x^2+4x это первые два слагаемых выражения $(x+2)^2$, поэтому сделаем замену $|x+2|=t\geq 0$. Тогда $(x+2)^2=t^2$ и наше уравнение приобретает вид

$$t^2-2t-15=0 \Rightarrow t=5 \Rightarrow x_1=3, x_2=-7.$$

Ответ: $x_1=3, x_2=-7$.

7.2. Неравенства с модулем.

7.2.1. Неравенства вида $|f(x)|\leq g(x)$.

I *способ.* Непосредственное раскрытие модуля приведет к решению следующей совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\geq 0\\ f(x)\leq g(x)\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)<0\\ f(x)\geq -g(x)\end{cases}\end{array}\right. \qquad (7.1)$$

Это стандартный способ решения. Однако, если не удается установить участки знакопостоянства подмодульной функции, т.е. найти корни уравнения $f(x)=0$, этот способ может завести в тупик.

II *способ.* Из вида неравенства следует, что решения будут существовать только если $g(x)\geq 0$, поэтому, в силу неотрицательности обеих частей неравенства, можно эти обе части возвести в квадрат и получить систему, равносильную исходному неравенству

$$\begin{cases} g(x)\geq 0\\ f^2(x)\leq g^2(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\geq 0\\ \big(f(x)-g(x)\big)\big(f(x)+g(x)\big)\leq 0\end{cases}. \qquad (7.2)$$

III *способ.* Рассматриваемое неравенство $|f(x)|\leq g(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)\leq g(x)\\ f(x)\geq -g(x)\end{cases}. \qquad (7.3)$$

Покажем, что системы (7.2) и (7.3) равносильны.

Сначала покажем, что при $g(x)<0$ система (7.3) не имеет решений. Действительно, в этом случае из первого неравенства этой системы следует, что $f(x)<0$ и второе неравенство не имеет решения. Таким образом, условие $g(x)\geq 0$ одинаково для обеих систем. Далее, при найденном условии решения системы (7.3) удовлетворяют второму неравенству системы (7.2) и таким образом являются ее решениями. Покажем, что верно и обратное.

Второе неравенство системы (7.2) равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x)\leq g(x)\\ f(x)\geq -g(x)\end{cases}\\ \begin{cases} f(x)\geq g(x)\\ f(x)\leq -g(x)\end{cases}\end{array}\right..$$

Нетрудно заметить, что вторая система совокупности при условии $g(x)\geq 0$ имеет решение только $f(x)=g(x)=0$, так как из первого неравенства следует, что $f(x)\geq 0$, а во втором неравенстве неотрицательная функция должна быть неположительной. Полученное решение будет и решением первой системы совокупности, поэтому вторую систему можно отбросить, и получится система (7.3).

7.2.2. Неравенства вида $|f(x)|\geq g(x)$.

I *способ.* Непосредственное раскрытие модуля приведет к решению следующей совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)\ge 0\\ f(x)\ge g(x)\end{cases}\\ \begin{cases}f(x)<0\\ f(x)\le -g(x)\end{cases}\end{array}\right. \qquad (7.4)$$

Этот способ решения в случае, когда не удастся установить участки знакопостоянства подмодульной функции, приводит к невозможности решения получающихся систем.

II *способ.* Из вида неравенства следует, что если $g(x)<0$, то для этих значений x неравенство будет справедливо. Если же $g(x)\ge 0$, то в силу неотрицательности обеих частей неравенства, можно эти обе части возвести в квадрат и получить совокупность систем, равносильную исходному неравенству

$$\left[\begin{array}{l}g(x)<0\\ \begin{cases}g(x)\ge 0\\ (f(x)-g(x))(f(x)+g(x))\ge 0\end{cases}\end{array}\right. . \qquad (7.5)$$

III *способ.* Рассматриваемое неравенство $|f(x)|\ge g(x)$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l}f(x)\ge g(x)\\ f(x)\le -g(x)\end{array}\right. . \qquad (7.6)$$

Равносильность совокупностей (7.5) и (7.6) показывается аналогично доказательству равносильности систем (7.2) и (7.3).

Пример 7.8. $|2x+5|<7-x$.

Для решения неравенства воспользуемся соотношением (7.3)

$$\begin{cases}2x+5<7-x\\ 2x+5>-7+x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x<2\\ x>-12\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-12;\frac{2}{3}\right).$$

Ответ: $x\in\left(-12;\frac{2}{3}\right)$.

Отметим, что решение другими способами не намного сложнее.

Пример 7.9. $|7x+5|>2x+11$.

Для решения неравенства воспользуемся соотношением (7.6)

$$\left[\begin{array}{l}7x+5>2x+11\\ 7x+5<-2x-11\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{16}{9}\right)\cup\left(\frac{6}{5};+\infty\right).$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\frac{16}{9}\right)\cup\left(\frac{6}{5};+\infty\right)$.

И здесь отметим, что получить решение другими способами не сложнее.

Пример 7.10. $|3x^2+4x-2|\ge 2$.

В данном случае проще всего, учитывая неотрицательность левой и правой частей неравенства, возвести эти части в квадрат

$$(3x^2+4x-2)^2\ge 2^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3x^2+4x-2+2)(3x^2+4x-2-2)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+2)\ge 0.$$

Далее решаем методом интервалов.

Ответ: $x\in(-\infty;-2]\cup\left[-\frac{4}{3};0\right]\cup\left[\frac{2}{3};-+\infty\right)$.

Пример 7.11. $|x-1|+|x+1|\le 2$.

Решим эту задачу тремя способами.

I способ (непосредственное раскрытие модуля). Имеем следующую совокупность

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ x-1+x+1\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x<1\\ 1-x+x+1\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1\\ 1-x-x-1\le 2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 1\\ x\le 1\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x<1\\ 2\le 2\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1\\ x\ge -1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in[-1;1].$$

II способ. Используем соотношения (7.3)

$$\begin{cases} x+1\le 2-|x-1| \\ x+1\ge -2+|x-1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-1|\le 1-x \\ |x-1|\le x+3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \begin{cases} x-1\le 1-x \\ x-1\ge x-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1\le x+3 \\ x-1\ge -x-3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-1;1].$$

III способ. Обозначим $|x-1|=a\ge 0$, а $|x+1|=b\ge 0$. Тогда исходное неравенство приобретает вид

$$|a|+|b|\le b-a \Leftrightarrow \left(|a|+a\right)+\left(|b|-b\right)\le 0.$$

Выражения в обеих скобках неотрицательны, поэтому неравенство возможно только при

$$\begin{cases} |a|+a=0 \\ |b|-b=0 \end{cases}$$

В силу свойства 4° имеем

$$\begin{cases} a\le 0 \\ b\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x\ge -1 \end{cases}$$

Ответ: $x\in[-1;1]$.

Приведенный пример показывает, что, зачастую, различие между способами решения довольно призрачно. Существенным это различие становится в ситуации "плохих" подмодульных выражений.

Пример 7.12. $\left||2x^2-x|-3\right|\le 2x^2+x+5$.

Здесь двойной модуль, и слишком много условий для его раскрытия, поэтому воспользуемся соотношениями (7.3) и (7.6)

$$\begin{cases} \left||2x^2-x|-3\right|\le 2x^2+x+5 \\ \left||2x^2-x|-3\right|\ge -2x^2-x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x^2-x\le 2x^2+x+8 \\ 2x^2-x\ge -2x^2-x-8 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} 2x^2-x\ge -2x^2-x-2 \\ 2x^2-x\le 2x^2+x+2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x\ge -4 \\ 4x^2\ge -8 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} 4x^2\ge -2 \\ x\ge -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -4 \\ x\in R \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-4;+\infty).$$

Ответ: $x\in[-4;+\infty)$.

Если в этом примере еще можно было идти по пути раскрытия модуля (что заняло бы больше места), то в следующем примере такой путь кажется тупиковым.

Пример 7.13. $\left||x^3-x-1|-5\right|\ge x^3+x+8$.

Решение уравнения $x^3-x-1=0$ дело малоперспективное, поэтому снова воспользуемся соотношениями (7.3) и (7.6)

$$\left[\begin{array}{l} |x^3-x-1|\ge x^3+x+13 \\ |x^3-x-1|\le -x^3-x-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x^3-x-1\ge x^3+x+13 \\ x^3-x-1\le -x^3-x-13 \end{array}\right. \\ \begin{cases} x^3-x-1\le -x^3-x-3 \\ x^3-x-1\ge x^3+x+3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x\le -7 \\ x^3\le -6 \end{array}\right. \\ \begin{cases} x^3\le -1 \\ x\le -2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x\le -\sqrt[3]{6}.$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\sqrt[3]{6}\right]$.

Теперь рассмотрим примеры, в которых для решения требуется проявить известную изобретательность и аккуратность.

Пример 7.14. $\dfrac{5x-7}{\left|x^3-7x-1\right|-\left|x^3+7x+1\right|} \ge 0$.

Мы решим этот пример двумя способами.

I способ. Этот способ потребует от нас только аккуратности. Исходное неравенство равносильно совокупности трех систем.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x-7=0 \\ \left|x^3-7x-1\right|-\left|x^3+7x+1\right|\ne 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x-7>0 \\ \left|x^3-7x-1\right|-\left|x^3+7x+1\right|\ne 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 5x-7<0 \\ \left|x^3-7x-1\right|-\left|x^3+7x+1\right|<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7}{5} \\ \begin{cases} x>\dfrac{7}{5} \\ x^3\left(-14x-2\right)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x<\dfrac{7}{5} \\ x^3\left(-14x-2\right)<0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Дальше все довольно просто.

II способ. Внимательный взгляд на пример вызывает естественное желание избавиться от разности модулей в знаменателе. Рассмотрим универсальный способ, который будет довольно часто использоваться в дальнейшем.

Пусть необходимо определить знак выражения $\left|f(x)\right|-\left|g(x)\right|$. Выполним ряд равносильных переходов

$$\left|f(x)\right|-\left|g(x)\right| \vee 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|f(x)\right| \vee \left|g(x)\right| \Leftrightarrow \left|f(x)\right|^2 \vee \left|g(x)\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|f(x)\right|^2-\left|g(x)\right|^2 \vee 0 \Leftrightarrow \left(f(x)-g(x)\right)\cdot\left(f(x)+g(x)\right) \vee 0.$$

Таким образом, разность модулей $\left|f(x)\right|-\left|g(x)\right|$ "эквивалентна по знаку" разности квадратов подмодульных выражений $f^2(x)-g^2(x)=\left(f(x)-g(x)\right)\cdot\left(f(x)+g(x)\right)$. Это довольно важное обстоятельство позволит нам избавляться от модуля в разнообразных "смешанных" неравенствах.

В нашем примере получаем равносильное неравенство

$$\frac{5x-7}{\left(x^3-7x-1\right)^2-\left(x^3+7x+1\right)^2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{5x-7}{x^3\left(-14x-2\right)} \ge 0.$$

Ответ: $x \in \left(-\infty;-\dfrac{1}{7}\right) \cup \left(0;\dfrac{7}{5}\right]$.

Пример 7.15. $\dfrac{\left|2x+7\right|-3x-4}{x+5-\left|5x-7\right|} \le 0$.

Это пример, в котором мы рассмотрим способ решения "смешанных" неравенств. Обозначим

$$f(x)=\left|2x+7\right|-3x-4$$

$$g(x)=-\left|5x-7\right|+x+5$$

и определим участки знакопостоянства каждой из функций. Для этого решим два уравнения $0=\left|2x+7\right|-3x-4$ и $0=-\left|5x-7\right|+x+5$

$$\left[\begin{array}{l} 2x+7=3x+4 \\ 2x+7=-3x+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\dfrac{11}{5} \end{array}\right..$$

$$\left[\begin{array}{l} 5x-7=x+5 \\ 5x-7=-x-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right..$$

Проверка показывает, что $x=-\dfrac{11}{5}$ не является корнем первого уравнения. Попутно отметим, что левая часть исходного неравенства ни при каких допустимых значениях переменной в нуль не обращается, так как при $x=3$ в нуль обращаются и числитель и знаменатель дроби.

Теперь наносим на две оси (рис. 7.1) точки, в которых обращаются в нуль функции $f(x)$ и $g(x)$, соответственно. Далее выбираем некоторые значения переменной на каждом из получившихся промежутков и определяем соответствующие знаки функций

$$f(4)=-1<0;\ g(4)=-4<0;$$

$$f(2)=1>0;\ g(2)=4>0;\ g(0)=-2<0.$$

Проводим вертикальные линии через каждую из точек, нанесенных на одну из прямых, и смотрим за знаками произведений на каждом из получившихся интервалов. Объединение тех интервалов, на которых знаки функций различны и будет решением неравенства.

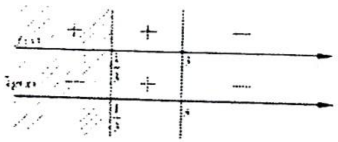

рис.7.1.

Ответ: $x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.

Теперь рассмотрим пример, в котором используются свойства модуля суммы и разности.

Пример 7.16. $\dfrac{1}{|x+2|-3} \le \dfrac{1}{|x|-1}$.

На вид ничем не примечательный пример. Однако, при решении мы увидим, что здесь все далеко не так просто. Приведем дроби к общему знаменателю

$$\frac{|x|+2-|x+2|}{(|x|-1)(|x+2|-3)} \le 0.$$

Теперь заменим скобки в знаменателе на "эквивалентные по знаку"

$$\frac{|x|+2-|x+2|}{(x-1)(x+1)(x+2-3)(x+2+3)} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|x|+2-|x+2|}{(x-1)^2(x+1)(x+5)} \le 0.$$

Решаем уравнение $|x|+2-|x+2|=0$.

В силу свойства 1°, приведенного в начале этой лекции, решением этого уравнения будет $x \ge 0$.

Таким образом, при $x \ge 0$ числитель исходного неравенства равен нулю, а при $x<0$ – положителен.

Теперь при $x \ge 0$ надо выкинуть точки, в которых обращается в нуль знаменатель, а при $x<0$ решить неравенство $(x-1)^2(x+1)(x+5)<0$.

Ответ: $x \in (-5;-1) \cup [0;1) \cup (1;+\infty)$.

Пример 7.17.

$$\left|x^3+7x^2-11x-6\right|+\left|x^3-12x^2-5x+3\right|=18x^2-2x-13.$$

Представим правую часть уравнения в виде

$$18x^2-2x-13=\left(x^3+7x^2-11x-6\right)-$$

$$-\left(x^3-12x^2-5x+3\right)-x^2+4x-4$$

и введем обозначения

$$a=x^3+7x^2-11x-6;\ b=x^3-12x^2-5x+3;$$

$$c=x^2-4x+4=(x-2)^2 \ge 0.$$

Теперь наше уравнение можно записать в виде

$$(|a|-a)+(|-b|-(-b))+c=0.$$

Воспользовавшись свойством 1°, рассмотренным в начале этой лекции, получим, что сумма трех неотрицательных величин должна равняться нулю, что возможно только если одновременно первая скобка равна нулю ($a \ge 0$), вторая скобка равна нулю ($b \le 0$) и третья равна нулю, что верно при $x=2$. Проверям, что при $x=2$ выполненяются полученные условия на a и b.

Ответ: $x=2$.

Задачи для разбора с преподавателем

Решить уравнения:

7.1. $2x+|x|+1=0$.

7.2. $|x-4|=|x+3|$.

7.3. $\left|2-\dfrac{x+7}{x+2}\right|=\dfrac{21-5x}{6}$.

7.4. $|3-6x|=4-2x$.

7.5. $|3x-8|-|3x-2|=6$.

7.6. $|x^3-x|=x+4$.

7.7. $|x-1|+|x-3|=2x-4$.

7.8. $|3x+\sqrt{2}|=1-\sqrt{2}$.

7.9. $|x^2-3x+2|+|x^2-5x+6|=2$.

7.10. $|x^2-5x+4|+x=(2x+1)|3x+2|$.

7.11. $x|3x+5|=3x^2+4x+3$.

7.12. $||x^2-3x|-5|=x+1$.

7.13. $||x+3|-|x-1||=2-x^2$.

7.14. $\sqrt{|5x-7|-27}=x-7$.

7.15. $\left||x^3-\sqrt{x+1}|-3\right|=x^3+\sqrt{x+1}-7$.

7.16. $|x^6-8x^4+15x^2+5|+|x^3-x^2-2|=7-x^3$.

7.17. $4x^2-2|2x-1|=34+4x$.

7.18. $||x-3|+5x|=||x-3|-2|$.

7.19. $||x^3+4x^2+5x+1|-4|=x^3+2x^2+x+3$

Решить системы уравнений:

7.20. $\begin{cases} 3x-y=1 \\ |x-2y|=2 \end{cases}$

7.21. $\begin{cases} y=x^2-4x+7 \\ y|x-2|=4 \end{cases}$.

Решить неравенства:

7.22. $|2x+5|<7-x$.

7.23. $|7x+5|\geq 2x+11$.

7.24. $|x-1|+|x+1|\leq 2$.

7.25. $\dfrac{\left|\dfrac{x}{2}-1\right|}{x}\geq\dfrac{1}{4}$.

7.26. $x^2-2|x+1|<|x+2|$.

7.27. $|3x^2+4x-2|\geq 2$.

7.28. $\left|\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\right|<1$.

7.29. $\dfrac{\sqrt{4x^2-8x+4}-x}{x^2-3x+2}\geq 3$.

7.30. $\dfrac{|x^2-x-12|-3x+4}{x^2+x}\leq 2$.

7.31. $|x-1|+|x-2|\leq|2x-3|$.

7.32. $\dfrac{|2x+7|-3x-4}{x+5-|5x-7|}\leq 0$.

7.33. $||2x^2-x|-3|\leq 2x^2+x+5$.

7.34. $\dfrac{5x-7}{|x^3-7x-1|-|x^3+7x+1|}\geq 0$.

7.35. $x^2-8x-\dfrac{3}{|x-4|}+18\leq 0$.

Решить систему неравенств

7.36. $\begin{cases} x^2-1>0 \\ |x-1|\leq 4 \end{cases}$

Решить неравенства:

7.37. $(2x-1)(|x+1|-|x-3|)<0$.

7.38. $|x-3|\leq 2x+(3+x)|1-2x|$.

7.39. $\dfrac{6x-|x^2-x-6|}{|1-x|}\leq 5x+3$.

7.40. $\dfrac{|x-4|-|x-1|}{|x-3|-|x-2|}<\dfrac{|x-3|+|x-2|}{|x-4|}$.

7.41. $\dfrac{\left(x^2+x+1\right)^2-2\left|x^3+x^2+x\right|-3x^2}{10x^2-17x-6}\geq 0.$

7.42. $|2x+1|+1+\dfrac{1}{|2x+1|+3}\leq\dfrac{4}{3-|2x+1|}.$

7.43. $\left|x^3-7x+6\right|+\left|x^3-3x+2\right|\leq 4(1-x).$

7.44. $\dfrac{\left|x^4-4x-8\right|+4x-8}{\left|2x^3+x-9\right|+x^2-13}\leq 0.$

7.45. $\dfrac{\left|2x^3+3x^2+3x+1\right|+\left|x^3-3x^2+3x-2\right|-\left|3x^3+6x-1\right|}{\left|x^2-3x+2\right|-|x-1|-|x-2|+1}\leq 0.$

7.46. $\dfrac{\left|x^3+62\right|+\left|x^2-13x-48\right|}{2-x}>\left|x^2+3x-7\right|.$

7.47. $\left|x^3-1\right|+\left|3x^2-7x+4\right|\leq\left|x^3+3x^2-7x+3\right|.$

7.48. $|2x+1|+|3x-2|+|4x-3|+|x-7|\leq\big||6x-7|-|2x+10|\big|.$

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

7.1д. $x+\left|\dfrac{x}{3}\right|+2=0.$

7.2д. $|4x-6|=2x+1.$

7.3д. $\left|2+\dfrac{7}{x-3}\right|=\dfrac{17+7x}{5}.$

7.4д. $|x-3|=|x+1|.$

7.5д. $3|x+2|+x|3x-1|+x+2=0.$

7.6д. $|6-x|+2=(2-x)|x+4|.$

7.7д. $|x|-2|x+1|+3|x+2|=0.$

7.8д. $\left|x^2-9\right|+|x-2|=5.$

7.9д. $\left|x^3-x+1\right|=x+1.$

7.10д. $\big|x|x-1|-2x\big|=x^2-2.$

7.11д. $\Big|x-\big|x-|x-1|\big|\Big|=\dfrac{1}{2}.$

7.12д. $\big||x+1|-|x-6|\big|=|x|.$

7.13д. $\left|\left|x^3+x^2-1\right|-4\right|=x^3-x^2+3.$

7.14д. $\dfrac{\left|x^2-4x\right|+3}{|x-5|+x^2}=1.$

7.15д. $9x^2+2|3x+2|=20-12x.$

7.16д. $\left|\left|x^3-2x^2+x-1\right|-4\right|=x^3-4x^2+5x+1.$

7.17д. $\left|\dfrac{|x-2|}{2}-\dfrac{|x+3|}{3}\right|=\left|\dfrac{|x-2|}{3}-\dfrac{|x+3|}{6}\right|.$

Решить неравенства:

7.18д. $|2-x|\leq 5-3x.$

7.19д. $|3-x|>2-3x.$

7.20д. $\dfrac{2|x|}{x+1}\geq 1$

7.21д. $|x+1|\leq 2|x|-1.$

7.22д. $\left|x^2-1\right|>2+\left(x^2-3\right)^2.$

7.23д. $x|2x-1|\geq|x-3|-x.$

7.24д. $\left|2x^2-5x-4\right|\leq 3.$

7.25д. $\left|x^2+4x+3\right|<\left|x^2+x-2\right|.$

7.26д. $\left|x^2-2x-8\right|<\left|5x-x^2\right|.$

7.27д. $x^2+10x-\dfrac{5}{|x+5|}+1>0.$

7.28д. $|2x+5|+|3x+7|>|4x+1|.$

7.29д. $\dfrac{3x^2+5x-7|x+2|}{2x^2+x+1}\leq 1.$

7.30д. $\dfrac{\left|x^2-3x-1\right|}{x^2+x+1}\geq 3.$

7.31д. $\dfrac{\left|x^2-5x+4\right|+x}{|3x+2|}\leq 2x+1.$

7.32д. $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|\geq 2.$

Решить уравнения

7.33д. $\big|2x+1-|3x+1|\big|=2+x.$

7.34д. $\left|x^4-3x^2+8x-7\right|+\left|x^4+x^2-x+2\right|=3x^2-11x+8.$

7.35д. $\left|x-\sqrt{x}-3\right|+\left|\sqrt{x}+7-x\right|=6.$

7.36д. $\left|x^3+7x^2-11x-6\right|+\left|x^3-12x^2-5x+3\right|=18x^2-2x-13.$

7.37д. $\left|x-\sqrt{x}-2\right|+\left|\sqrt{x}+6-x\right|=8$.

7.38д. $\left|x^2-5x-10\right|=\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}-1$.

Решить неравенства:

7.39д. $\left|x^2-\left|x^2+x\right|\right|>11$.

7.40д. $\left|\left|x^3-x-1\right|-5\right|\geq x^3+x+8$.

7.41д. $(x-2)\left(\left|x+5\right|-\left|x-1\right|\right)<0$.

7.42д. $x\left|2x-1\right|\geq\left|x-3\right|-x$.

7.43д. $\dfrac{2\sqrt{9x^2+18x+9}-x}{x^2+10x+24}\leq 1$.

7.44д. $\left|x^2-4x\right|+3\geq x^2+\left|x-5\right|$.

7.45д. $\dfrac{\left|x-5\right|-\left|x+4\right|}{\left|x-2\right|-\left|x+1\right|}<\dfrac{\left|x-2\right|+\left|x+1\right|}{\left|x+4\right|}$.

7.46д. $\dfrac{\left(x^2+3x+4\right)^2-2\left|x^3+3x^2+4x\right|-35x^2}{2x^2-5x-3}\geq 0$.

7.47д. $\left|3x+1\right|+2+\dfrac{3}{\left|3x+1\right|-2}\leq\dfrac{1}{\left|3x+1\right|+2}$.

7.48д. $\dfrac{\left|x^3+x+15\right|+x-12}{\left|x^3+2x^2+7\right|+x^2-11}\geq 0$.

7.49д. $\dfrac{6x+1}{\left|x^4-3x+5\right|-\left|x^4+3x-3\right|}\leq 0$.

7.50д. $\dfrac{5x^2-3x-14}{\left|x-2\right|-\left|2x+3\right|}<0$.

7.51д. $\left|2x+1\right|+\left|3x-2\right|+\left|4x-3\right|+\left|x-7\right|\leq\left|\left|6x-2\right|+\left|2x+5\right|\right|$.

7.52д. $\dfrac{\left|x^3-2x^2-5x+6\right|+\left|2x^3+5x^2-6x-9\right|-\left|3x^3+3x^2-11x-3\right|}{\left|2x^2+x\right|-4\left|x\right|-\left|2x+1\right|+4}\leq 0$.

7.53д. $\dfrac{\left|x^3+2\right|+\left|x^2-13x+12\right|}{2-x}>\left|x^2+3x-7\right|$.

Ответы

Задачи для разбора с преподавателем

7.1. -1; 7.2. $\frac{1}{2}$; 7.3. $4,-3,\frac{17-\sqrt{769}}{10}$; 7.4. $-\frac{1}{4},\frac{8}{7}$; 7.5. $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$; 7.6. $2,-\sqrt[3]{4}$;

7.7. $[3;+\infty)$; 7.8. $\varnothing$; 7.9. $1,3$; 7.10. $\frac{-11+\sqrt{161}}{10}$; 7.11. 3; 7.12. $2,1+\sqrt{5},2+\sqrt{10}$;

7.13. $0,1-\sqrt{5}$; 7.14. $\frac{19+\sqrt{29}}{2}$; 7.15. 3; 7.16. $0,-2$; 7.17. $4,-3$; 7.18. $-\frac{2}{5},-\frac{4}{3}$;

7.19. $0,-1,1$; 7.20. $(0;-1)$, $\left(\frac{4}{5};\frac{7}{5}\right)$; 7.21. $(3;4)$, $(1;4)$; 7.22. $\left(-12;\frac{2}{3}\right)$;

7.23. $\left(-\infty;-\frac{16}{9}\right]\cup\left[\frac{6}{5};+\infty\right)$; 7.24. $[-1;1]$; 7.25. $\left(0;\frac{4}{3}\right]\cup[4;+\infty)$; 7.26. $(-1;4)$;

7.27. $(-\infty;-2]\cup\left[-\frac{4}{3};0\right]\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$; 7.28. $(0;+\infty)$; 7.29. $\left(1;\frac{4}{3}\right]$;

7.30. $(-\infty;-4]\cup(-1;0)\cup\left[\frac{-2+2\sqrt{13}}{3};+\infty\right)$; 7.31. $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$;

7.32. $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$; 7.33. $[-4;+\infty)$; 7.34. $\left(-\infty;-\frac{1}{7}\right)\cup\left(0;\frac{7}{5}\right]$; 7.35. $[3;4)\cup(4;5]$;

7.36. $[-3;-1)\cup(1;5]$; 7.37. $\left(\frac{1}{2};1\right)$; 7.38. $[-1;0]\cup\left[-2+\sqrt{7};+\infty\right)$;

7.39. $\left[-\frac{3}{2};1\right)\cup(1;+\infty)$; 7.40. $(3;4)\cup(4;7)$; 7.41. $\left(-\infty;-\frac{3}{10}\right)\cup\{1\}\cup(2;+\infty)$;

7.42. $\left(-2;\frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right]\cup\left\{-\frac{1}{2}\right\}\cup\left[\frac{-3+\sqrt{17}}{4};1\right)$; 7.43. $[-3;-2]\cup\{1\}$;

7.44. $[-2;-1)\cup[0;2)$; 7.45. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup(0;1)\cup(2;3)\cup(3;+\infty)$;

7.46. $\left(-\infty;-\sqrt[3]{62}\right)\cup(-3;2)$; 7.47. $\{1\}\cup\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$; 7.48. $\left[\frac{3}{4};\frac{7}{6}\right]$.

Задачи для самостоятельного решения

7.1д. -3; 7.2д. $\frac{5}{6},\frac{7}{2}$; 7.3д. $4,-2,\frac{-3+\sqrt{331}}{7}$; 7.4д. 1,; 7.5д. -1; 7.6д. $0,-1,\frac{-3-\sqrt{73}}{2}$; 7.7д. -2; 7.8д. $2,-3,\frac{-1+\sqrt{65}}{2}$; 7.9д. $0,\sqrt{2}$; 7.10д. ± 2; 7.11д. $\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{6}$;

7.12д. $\frac{5}{3},5,\pm 7$; 7.13д. $0,1,2$; 7.14д. $-\frac{2}{3},\frac{1}{2},2$; 7.15д. $\frac{2}{3},-2$; 7.16д. $1,2,3,1-\sqrt[3]{3}$;

7.17д. $-\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{19}{2}$; 7.18д. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$; 7.19д. $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$; 7.20д. $\left(-1;-\frac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty)$;

7.21д. $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]\cup[2;+\infty)$; 7.22д. $\left(-2;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};2\right)$; 7.23д. $[1;+\infty)$;

7.24д. $\left[-1; \frac{5-\sqrt{33}}{4}\right] \cup \left[\frac{5+\sqrt{33}}{4}; \frac{7}{2}\right]$; **7.25д.** $\left(-\infty; \frac{-5-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(-\frac{5}{3}; \frac{-5+\sqrt{17}}{4}\right)$;
7.26д. $\left(-\infty; \frac{7-\sqrt{113}}{4}\right) \cup \left(\frac{8}{3}; \frac{7+\sqrt{113}}{4}\right)$; **7.27д.** $(-\infty; -10) \cup (0; +\infty)$;
7.28д. $(-\infty; -11) \cup \left(-\frac{13}{9}; +\infty\right)$; **7.29д.** $\left[\frac{-11-\sqrt{69}}{2}; \frac{3+\sqrt{69}}{2}\right]$; **7.30д.** $[-2; -1]$;
7.31д. $\left[\frac{-11+\sqrt{161}}{2}; +\infty\right)$; **7.32д.** $\left[\frac{3}{4}; 1\right) \cup (1; +\infty)$; **7.33д.** $-\frac{2}{3}$; **7.34д.** -1;
7.35д. $4, \frac{17+\sqrt{33}}{2}$; **7.36д.** 2; **7.37д.** $0, 1, \frac{17+\sqrt{33}}{2}$; **7.38д.** $\varnothing$;
7.39д. $(-\infty; -11) \cup (11; +\infty)$; **7.40д.** $\left(-\infty; -\sqrt[3]{6}\right]$; **7.41д.** $(-2; 2)$; **7.42д.** $[1; +\infty)$;
7.43д. $(-\infty; -15] \cup (-6; -4) \cup [-2; +\infty)$; **7.44д.** $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right]$;
7.45д. $(-13; -4) \cup (-4; -1)$;
7.46д. $\left(-\infty; -5-\sqrt{21}\right] \cup \left(-\frac{1}{2}; -5+\sqrt{21}\right] \cup \{2\} \cup (3; +\infty)$;
7.47д. $\left(-1; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left\{-\frac{1}{3}\right\} \cup \left[\frac{\sqrt{3}-2}{3}; \frac{1}{3}\right)$; **7.48д.** $\{-2\} \cup (-1; 1]$;
7.49д. $\left(-\infty; -\frac{1}{6}\right] \cup \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$; **7.50д.** $(-\infty; -5) \cup \left(-\frac{7}{5}; -\frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$;
7.51д. $\left[\frac{3}{4}; 7\right]$; **7.52д.** $(-\infty; -3] \cup \left(-\frac{5}{2}; -1\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup [3; +\infty)$;
7.53д. $\left(-\infty; -\sqrt[3]{2}\right) \cup (1; 12)$.

СОДЕРЖАНИЕ