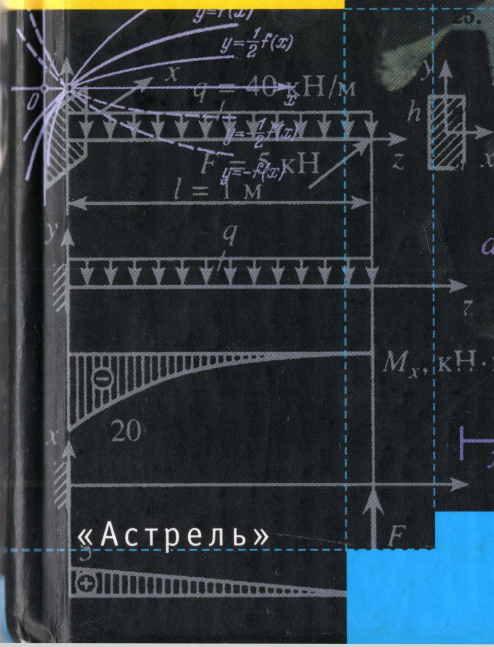
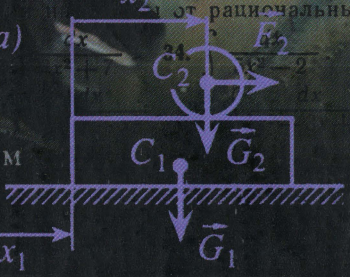
СПРАВОЧНИК ДЛЯ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

- Высшая математика
- Физика
- Теоретическая механика
- Сопротивление материалов





«Астрель»

СПРАВОЧНИК

для студентов технических вузов

Высшая математика

•

Физика

•

Теоретическая механика

•

Сопротивление материалов

Издание третье

АСТ • Астрель
Москва • 2005

УДК 51(031)+53(031)
ББК 22я2+30я2
С74

Авторы:

Полянин Андрей Дмитриевич, Полянин Владимир Дмитриевич, Попов Владимир Александрович, Путятин Борис Владимирович, Сафрай Владимир Михайлович, Черноуцан Алексей Игоревич

Рецензенты:

д. ф.-м. н. *А. А. Варламов*, д. ф.-м. н. *А. В. Манжиров*, д. т. н. *В. В. Парцевский*

Справочник для студентов технических вузов:
С74 высшая математика: физика: теоретическая механика: сопротивление материалов / А. Д. Полянин, В. Д. Полянин, В. А. Попов и др. — 3-е изд. — М. : АСТ: Астрель, 2005. — 735, [1] с.: ил.

ISBN 5-17-030740-3 (ООО «Издательство АСТ»)

ISBN 5-271-11602-6 (ООО «Издательство Астрель»)

Краткий многопрофильный справочник содержит основные понятия, законы, формулы, теоремы и методы высшей математики, физики, теоретической механики и сопротивления материалов. Предельно сжатое и ясное изложение позволяет читателю быстро найти (или восстановить в памяти) необходимую информацию. Во всех разделах разобраны примеры и методы решения задач, поясняющие теоретический материал.

Книга не имеет аналогов в справочной литературе и окажет неоценимую помощь широкому кругу студентов и инженеров и будет полезна для преподавателей вузов и научных работников. Ее удобно использовать для систематизации знаний и при подготовке к экзаменам и зачетам.

УДК 51(031)+53(031)
ББК 22я2+30я2

Подписано в печать 01.02.2005. Формат 70x90 $^1/_{32}$
Усл. печ. л. 26,9. Тираж 5 000 экз. Заказ № 2031

ISBN 5-17-030740-3 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 5-271-11602-6 (ООО «Издательство Астрель»)

© ООО «Издательство Астрель», 2002

Содержание

Предисловие 12

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА 14

1. Аналитическая геометрия на плоскости 16

1.1. Декартовы и полярные координаты. Расстояние между точками 16

1.2. Деление отрезка в данном отношении. Площадь многоугольника 18

1.3. Различные виды уравнения прямой 19

1.4. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой 21

1.5. Окружность, эллипс, гипербола и парабола . 22

1.6. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду 26

2. Аналитическая геометрия в пространстве 28

2.1. Системы координат в пространстве 28

2.2. Векторы 29

2.3. Действия над векторами. Скалярное произведение 30

2.4. Векторное и смешанное произведения 32

2.5. Плоскость в пространстве 34

2.6. Прямая в пространстве 36

2.7. Прямая и плоскость в пространстве 38

2.8. Поверхности второго порядка 39

3. Линейная алгебра 44

3.1. Определители 44

3.2. Матрицы 47

3.3. Системы линейных уравнений 51

3.4. Системы n-мерных векторов. Собственные значения и собственные векторы матрицы . . 55

4. Основные понятия математического анализа . . . 59
4.1. Числовые множества. Понятие функции . . . 59
4.2. Элементарные функции и их графики 61
4.3. Предел последовательности 68
4.4. Предел функции 71
4.5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции 73
4.6. Непрерывность 74
4.7. Асимптоты графика функции 76

5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной 78
5.1. Производная и дифференциал, их геометрический и физический смысл . . . 78
5.2. Таблица производных и правила дифференцирования 80
5.3. Теоремы о дифференцируемых функциях. Правило Лопиталя 82
5.4. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора 84
5.5. Экстремумы. Точки перегиба 85
5.6. Общая схема исследования функции и построение графика 87

6. Функции нескольких переменных 90
6.1. Точечные множества. Функции. Предел и непрерывность 90
6.2. Дифференцирование функций нескольких переменных 91
6.3. Производная по направлению. Геометрические приложения 95
6.4. Экстремумы функций нескольких переменных 97

7. Неопределенный интеграл 102
7.1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства 102
7.2. Таблица основных интегралов. Примеры интегрирования 103
7.3. Интегрирование по частям. Метод замены переменной 105
7.4. Интегрирование рациональных функций . . 107

7.5. Интегрирование иррациональных функций 109
7.6. Интегрирование показательных и тригонометрических функций 111

8. Определенный интеграл 114
8.1. Основные определения. Геометрический смысл определенного интеграла 114
8.2. Свойства определенного интеграла 115
8.3. Геометрические и физические приложения определенного интеграла 118
8.4. Несобственные интегралы 120

9. Двойные и тройные интегралы 124
9.1. Определение и свойства двойного интеграла 124
9.2. Вычисление двойного интеграла 126
9.3. Геометрические и физические приложения двойного интеграла 127
9.4. Определение и свойства тройного интеграла 129
9.5. Вычисление тройного интеграла. Некоторые приложения 131

10. Криволинейные и поверхностные интегралы . 133
10.1. Криволинейный интеграл первого рода . . . 133
10.2. Криволинейный интеграл второго рода . . . 134
10.3. Поверхностный интеграл первого рода . . . 137
10.4. Поверхностный интеграл второго рода 138
10.5. Дифференциальные операции и интегральные формулы теории поля 140

11. Ряды 143
11.1. Числовые ряды 143
11.2. Функциональные ряды 148
11.3. Степенные ряды 150
11.4. Ряд Фурье 154
11.5. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье. . . 157

12. Обыкновенные дифференциальные уравнения 161
12.1. Общие понятия. Уравнения первого порядка 161
12.2. Дифференциальные уравнения высших порядков 167
12.3. Линейные уравнения n-го порядка 170

12.4. Решение линейных однородных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами 172
12.5. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка 174
12.6. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений 178

13. Приближенные вычисления 183
13.1. Метод наименьших квадратов 183
13.2. Приближенное решение алгебраических уравнений 185
13.3. Вычисление определенного интеграла 187
13.4. Численное интегрирование дифференциальных уравнений 188

14. Теория вероятностей 190
14.1. Правила и формулы комбинаторики 190
14.2. Основные понятия теории вероятностей . . 192
14.3. Условная вероятность. Теоремы и формулы теории вероятностей 194
14.4. Математическое ожидание и дисперсия . . . 198
14.5. Закон больших чисел 202

ФИЗИКА 205

1. Физические основы механики 208
1.1. Кинематика точки 208
1.2. Кинематика твердого тела 212
1.3. Динамика 216
1.4. Закон сохранения импульса 221
1.5. Закон сохранения энергии 224
1.6. Закон сохранения момента импульса 232
1.7. Задача двух тел и движение в центральном поле 236
1.8. Поле тяготения 238
1.9. Неинерциальные системы отсчета 242
1.10. Динамика твердого тела 244
1.11. Специальная теория относительности 251

2. Молекулярная физика и термодинамика 261
2.1. Основные положения и определения 261
2.2. Первое начало термодинамики 264

2.3. Второе начало термодинамики 269
2.4. Энтропия. Свободная энергия 273
2.5. Кинетическая теория идеального газа 279
2.6. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса . 287
2.7. Равновесие фаз. Фазовые переходы 290
2.8. Поверхностное натяжение 294
2.9. Явления переноса в газах 296

3. Электродинамика 301
3.1. Электрический заряд. Закон Кулона. 301
3.2. Электрическое поле. Напряженность поля . . 303
3.3. Электростатическое поле. Принцип суперпозиции для напряженности и потенциала 304
3.4. Теорема Гаусса 309
3.5. Электростатика проводников 314
3.6. Электростатика диэлектриков 318
3.7. Конденсаторы 326
3.8. Энергия электростатического поля 328
3.9. Постоянный ток 333
3.10. Магнитное поле. Сила Лоренца и закон Ампера 340
3.11. Вычисление магнитной индукции 342
3.12. Циркуляция и поток вектора магнитной индукции. 345
3.13. Магнитное поле в веществе 349
3.14. Электромагнитная индукция 356
3.15. Уравнения Максвелла 363

4. Колебания и волны 370
4.1. Гармонические колебания. Сложение колебаний 370
4.2. Свободные незатухающие колебания 374
4.3. Затухающие и вынужденные колебания . . . 380
4.4. Упругие волны 387
4.5. Электромагнитные волны 399

5. Оптика 407
5.1. Геометрическая оптика. Фотометрия 407
5.2. Интерференция света 413
5.3. Дифракция 421
5.4. Поляризация света. Формулы Френеля 429

5.5. Дисперсия и поглощение света 436
5.6. Тепловое излучение. 441
5.7. Световые кванты 449
5.8. Принцип работы лазеров 454

6. Квантовая механика. Атомная физика 459
6.1. Строение атома. Модель Бора 459
6.2. Элементы квантовой механики 464
6.3. Структура и спектры сложных атомов 483

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. 494

1. Кинематика 496
1.1. Кинематика точки 496
1.2. Кинематика твердого тела 502
1.3. Плоскопараллельное движение твердого тела 505
1.4. Произвольное движение твердого тела 509
1.5. Сложное движение точки 510

2. Основные понятия и аксиомы механики. 515
2.1. Основные понятия механики 515
2.2. Аксиомы механики 518

3. Статика. 520
3.1. Основные законы и теоремы статики 520
3.2. Условия уравновешенности систем сил, приложенных к твердому телу 522
3.3. Решение задач статики 525
3.4. Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела 532
3.5. Распределенные силы 534
3.6. Законы трения (законы Кулона) 535

4. Динамика материальной точки 538
4.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки 538
4.2. Первая и вторая задачи динамики 539

5. Общие теоремы динамики механической системы 542
5.1. Основные понятия и определения 542
5.2. Теорема о движении центра масс. 544
5.3. Теорема об изменении количества движения 547

5.4. Теорема об изменении кинетического момента 550
5.5. Теорема об изменении кинетической энергии 553

6. Принцип Даламбера. Элементы аналитической механики 559
6.1. Принцип Даламбера 559
6.2. Классификация механических связей. Обобщенные координаты 563
6.3. Принцип возможных перемещений 567
6.4. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера—Лагранжа) 568
6.5. Уравнения Лагранжа второго рода 570

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ 575

1. Основные понятия 577
1.1. Введение. Внешние и внутренние силы 577
1.2. Напряжения и деформации в точке 580
1.3. Основные понятия и допущения 581

2. Напряженно-деформированное состояние в точке 583
2.1. Виды напряженного состояния 583
2.2. Одноосное растяжение и сжатие 584
2.3. Чистый сдвиг 585

3. Центральное растяжение и сжатие 588
3.1. Продольная сила 588
3.2. Напряжения и деформации при растяжении или сжатии 589
3.3. Расчеты на прочность при растяжении и сжатии 591

4. Кручение 593
4.1. Крутящий момент 593
4.2. Напряжения и деформации при кручении . . 594
4.3. Расчеты на прочность при кручении 596

5. Прямой изгиб 598
5.1. Изгибающий момент и поперечная сила 598
5.2. Напряжения и деформации при прямом чистом изгибе 602

5.3. Напряжения и деформации при прямом поперечном изгибах 605
5.4. Расчет на прочность при прямом изгибе 607

6. Сложное сопротивление 610
6.1. Косой изгиб 610
6.2. Внецентренное растяжение или сжатие . . . 613
6.3. Изгиб с кручением 616

7. Устойчивость сжатых стержней 619
7.1. Критическая сила 619
7.2. Формула Эйлера 619
7.3. Влияние способов закрепления концов стержня на величину критической силы . . . 621
7.4. Пределы применимости формулы Эйлера . . 623
7.5. Расчеты сжатых стержней на устойчивость . 624

ПРИЛОЖЕНИЯ 626

1. Элементарные функции и их свойства 626
1.1. Тригонометрические функции 626
1.2. Гиперболические функции 631
1.3. Обратные тригонометрические функции . . 634
1.4. Обратные гиперболические функции 636

2. Таблица неопределенных интегралов 637
2.1. Интегралы, содержащие рациональные функции 637
2.2. Интегралы, содержащие иррациональные функции 643
2.3. Интегралы, содержащие показательные функции 646
2.4. Интегралы, содержащие гиперболические функции 648
2.5. Интегралы, содержащие логарифмические функции 652
2.6. Интегралы, содержащие тригонометрические функции 654
2.7. Интегралы, содержащие обратные тригонометрические функции 662

3. Таблица определенных интегралов 663
3.1. Интегралы, содержащие степенные функции 663
3.2. Интегралы, содержащие экспоненциальные функции 667
3.3. Интегралы, содержащие гиперболические функции 669
3.4. Интегралы, содержащие логарифмические функции 670
3.5. Интегралы, содержащие тригонометрические функции 671

4. Решения обыкновенных дифференциальных уравнений 676
4.1. Уравнения первого порядка 676
4.2. Линейные уравнения второго порядка 681
4.3. Нелинейные уравнения второго порядка . . . 684

5. Ортогональные криволинейные системы координат 686
5.1. Произвольная ортогональная система координат 686
5.2. Цилиндрическая система координат ρ, φ, z . 687
5.3. Сферическая система координат r, θ, φ 688

6. Специальные функции и их свойства 690
6.1. Некоторые символы и коэффициенты 690
6.2. Гамма-функция 691
6.3. Неполные гамма-функции 694
6.4. Функции Бесселя 695
6.5. Модифицированные функции Бесселя 700
6.6. Вырожденные гипергеометрические функции 703
6.7. Ортогональные многочлены 708

7. Таблицы некоторых физических постоянных . . 712

Предметный указатель 716

Предисловие

Книга представляет собой краткий многопрофильный справочник для инженеров и студентов. Она состоит из четырех частей: **1) высшая математика, 2) физика, 3) теоретическая механика, 4) сопротивление материалов** — и содержит *основные понятия, законы, формулы, теоремы* и *методы,* изучаемые в соответствующих курсах в высших учебных заведениях (политехнических, авиационных, транспортных, энергетических, электротехнических, машиностроительных, химико-технологических, металлургических, строительных, горных, нефтегазовых, военных, экономических, пищевых, текстильных и др.).

Расположение материала в каждой части книги соответствует общепринятым программам, используемым в большинстве вузов.

Предельно сжатое и ясное изложение позволяет читателю быстро получить (или восстановить в памяти) необходимую информацию. Во всех разделах разобраны примеры, поясняющие существо рассматриваемых понятий и методов решения задач. Особое внимание уделено вопросам, вызывающим наибольшие трудности у студентов.

Книга не претендует на роль учебника, поэтому доказательства, как правило, не приводятся. Ее удобно использовать для получения фактической справки (формулы, закона) и ускоренного повторения пройденного материала при подготовке к экзаменам и зачетам.

Справочник будет также полезен широкому кругу научных работников и преподавателей вузов (не являющихся специалистами физико-математического профиля).

Для удобства всех категорий читателей в приложении книги приведены таблицы тригонометрических формул, определенных и неопределенных интегралов, решений обыкновенных дифференциальных уравнений и другие полезные справочные материалы.

Специальные шрифтовые выделения в тексте и подробное оглавление помогут читателю находить нужную информацию.

В конце каждой части книги приведен список рекомендуемых справочников и учебников, к которым полезно обращаться при необходимости иметь более подробные сведения по интересующим вопросам.

Авторы

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Основные обозначения

$\det A$ — определитель матрицы A;

$\vec{a}$ — вектор, $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, где a_1, a_2, a_3 — компоненты вектора;

$|a|$ — модуль скаляра: $|a| = a$ при $a \geqslant 0$ и $|a| = -a$ при $a < 0$;

$|\vec{a}|$ — модуль вектора, $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$;

(a, b) — интервал $a < x < b$;

$[a, b]$ — отрезок $a \leqslant x \leqslant b$;

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ — скалярное произведение векторов;

$\vec{a} \times \vec{b}$ — векторное произведение векторов;

$\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ — смешанное произведение векторов;

$\operatorname{grad} a$ — градиент скаляра a;

$\operatorname{div} \vec{a}$ — дивергенция вектора $\vec{a}$;

$\operatorname{rot} \vec{a}$ — ротор вектора $\vec{a}$;

C_m^k — биномиальные коэффициенты,

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!};$$

$\exp x$ — экспонента, $\exp x = e^x$;

$\operatorname{sh} x$ — гиперболический синус,

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x});$$

$\operatorname{ch} x$ — гиперболический косинус,

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x});$$

$\operatorname{th} x$ — гиперболический тангенс,

$\operatorname{th} x = \operatorname{sh} x / \operatorname{ch} x$;

$\operatorname{cth} x$ — гиперболический котангенс,

$\operatorname{cth} x = \operatorname{ch} x / \operatorname{sh} x$;

$n!$ — факториал, $n! = n(n-1) \ldots 2 \cdot 1$;

$y', y'_x, f'(x)$ — первая производная функции $y = f(x)$;

$y'', y''_{xx}, f''(x)$ — вторая производная функции $y = f(x)$;

$A \cup B$ — объединение множеств;

$A \cap B$ — пересечение множеств;

$A \subset B$ — A — подмножество B;

$\varnothing$ — пустое множество;

$\equiv$ — тождественно равно;

$\in$ — принадлежит;

$\perp$ — перпендикулярно;

$\parallel$ — параллельно;

$\Rightarrow$ — следует, следовательно;

$\Leftrightarrow$ — эквивалентно.

1. Аналитическая геометрия на плоскости

1.1. Декартовы и полярные координаты. Расстояние между точками

• **Декартова прямоугольная система координат** состоит из двух взаимно перпендикулярных прямых, каждая из которых рассматривается как числовая ось (см. разд. 4.1). Эти прямые называются осями координат. Точка O их пересечения служит началом отсчета для обеих осей и называется началом координат. Единицы масштаба осей координат совпадают. Как правило, одну из координатных осей располагают горизонтально и считают положительным направление вправо. Эту ось называют осью *абсцисс* и обозначают буквой x или Ox. На вертикальной оси, называемой осью *ординат* и обозначаемой y или Oy, положительным обычно считают направление вверх.

Каждой точке M плоскости взаимно однозначно соответствует пара (x_0, y_0) действительных чисел — *координат точки* M. Эти числа являются координатами проекций точки M на оси x и y соответственно. Первая координата x_0 называется *абсциссой*, а вторая координата y_0 — *ординатой* точки M. Координатные оси делят плоскость на четыре части, называемые *квадрантами* (или четвертями), которые нумеруются, как показано на рис. 1.

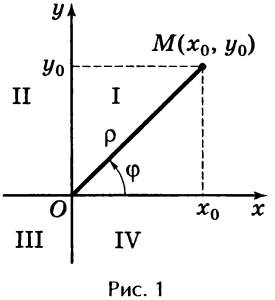


Рис. 1

- **Полярная система координат** состоит из точки O, называемой *полюсом*, и луча Ox, называемого *полярной осью*. Положение каждой точки M на плоскости задается двумя полярными координатами: *полярным радиусом* $\rho = |OM|$ и *полярным углом* $\varphi = \angle xOM$ (рис. 1). Значения угла φ определены с точностью до слагаемого $2\pi n$ (n — целое число).

Декартовы прямоугольные и полярные координаты точки M связаны соотношениями $x_0 = \rho\cos\varphi$, $y_0 = \rho\sin\varphi$.

Если заданы декартовы координаты x и y точки M, то полярный радиус $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, а полярный угол φ находят из соотношения $\operatorname{tg}\varphi = y/x$ с учетом того, в каком квадранте лежит точка M.

Пример 1. Найти полярные координаты точки $M(-3, -3)$.

Решение. Имеем $\rho = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{-3}{-3} = 1$; так как точка M находится в третьем квадранте, то $\varphi = \operatorname{arctg} 1 + \pi = \frac{5}{4}\pi$.

- **Расстояние между двумя точками** $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ (т. е. длина отрезка AB) обозначается через $|AB|$ или $\rho(A, B)$ и вычисляется по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

- **Уравнение линии.** Имея систему координат, множество всех точек на плоскости можно рассматривать как множество всевозможных пар чисел x, y. Соотношения, накладываемые на x, y, определяют подмножества плоскости.

Линия на плоскости обычно задается при помощи уравнения, связывающего координаты x, y. Уравнение $f(x, y) = 0$ называется *уравнением линии* $\mathscr{L}$, если для любой точки $M(x_0, y_0) \in \mathscr{L}$ выполняется равенство $f(x_0, y_0) = 0$, а для любой точки $M(x_0, y_0) \notin \mathscr{L}$ справедливо неравенство $f(x_0, y_0) \neq 0$.

Пример 2. Написать уравнение линии $\mathscr{L}$, все точки которой равноудалены от точек $A(0, 2)$ и $B(4, -2)$.

Решение. Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка, лежащая на $\mathscr{L}$. Имеем

$$\rho(A, M) = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}\,, \quad \rho(B, M) = \sqrt{(x-4)^2 + (y+2)^2}\,.$$

Из условия $\rho(A, M) = \rho(B, M)$ получим $x^2 + (y-2)^2 = (x-4)^2 + (y+2)^2$. Раскрыв скобки, находим искомое уравнение: $y = x - 2$, которое описывает прямую линию.

Уравнения наиболее часто встречающихся линий на плоскости приведены далее в разд. 1.3, 1.5, 1.6.

1.2. Деление отрезка в данном отношении. Площадь многоугольника

- **Деление отрезка в данном отношении.** Координаты точки $M(x, y)$, делящей отрезок AB в отношении $|AM| : |MB| = k$, определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1+k}\,, \quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1+k}\,.$$

Пример. Найти координаты середины отрезка AB.

Решение. Середине отрезка соответствует $k = 1$. Подставляя это значение в последние формулы, получим искомые координаты $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$.

- **Площади плоских фигур.**

1. Ориентированная площадь S_3 треугольника с вершинами в точках (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3):

$$S_3 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\,.$$

Если $S_3 = 0$, то три точки лежат на одной прямой (необходимое и достаточное условие).

2. Ориентированная площадь S_n многоугольника с вершинами в точках (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_3, y_3):

$$S_n = \frac{1}{2}[(x_1 - x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 + y_3) + \ldots$$
$$\ldots + (x_n - x_1)(y_n + y_1)].$$

При вычислении по этим формулам площадь получается положительной, если обход вершин в порядке нумерации происходит против часовой стрелки, и отрицательной — в противном случае.

1.3. Различные виды уравнения прямой

- **Общее уравнение прямой.** Каждая прямая на плоскости задается в декартовой системе координат линейным уравнением

$$Ax + By + C = 0, \qquad (1)$$

которое называется общим уравнением прямой на плоскости. Обратно, если $A^2 + B^2 \neq 0$, то уравнение (1) задает прямую.

Частные случаи уравнения (1):

1) $A = 0$, $y = -C/B$ — прямая параллельна оси x;

2) $B = 0$, $x = -C/A$ — прямая параллельна оси y;

3) $C = 0$, $Ax + By = 0$ — прямая проходит через начало координат.

Для построения прямой достаточно отметить две ее точки, координаты которых находятся из уравнения прямой.

Пример 1. Построить прямую $x - 2y - 1 = 0$.

Решение. Положив $y = 0$, найдем $x = 2$ и точку пересечения $P(2, 0)$ прямой с осью x. Аналогично, положив $x = 0$, получим точку пересечения $Q(0, -1)$ прямой с осью y. Через точки P и Q проводим искомую прямую (рис. 2).

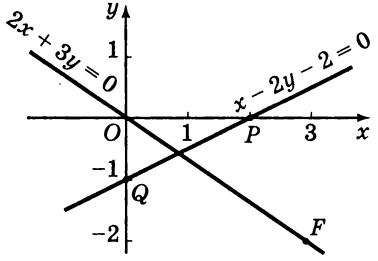


Рис. 2

Пример 2. Построить прямую $2x + 3y = 0$.

Решение. Полагая последовательно $x = 0$ и $x = 3$, найдем точки $O(0, 0)$ и $F(3, -2)$ и проведем через них прямую (рис. 2).

- **Уравнение прямой в отрезках** имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Здесь $(a, 0)$, $(0, b)$ — точки пересечения прямой с осями координат.

- **Уравнение прямой с угловым коэффициентом.** Если прямая не параллельна оси y, то ее общее уравнение можно разрешить относительно переменной y. В результате получим уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b. \qquad (2)$$

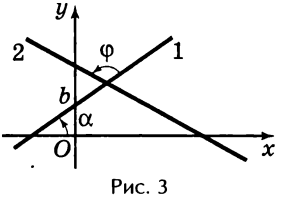


Рис. 3

Параметр k, называемый *угловым коэффициентом*, равен тангенсу угла α, который прямая образует с положительным направлением оси x. Параметр b — ордината точки пересечения прямой с осью y (рис. 3, прямая 1).

1.4. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой

• **Угол между прямыми.** Угол φ между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ (т. е. угол, отсчитанный против часовой стрелки от первой прямой до второй — см. рис. 3) при $k_1k_2 \neq -1$ определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Если $k_1k_2 = -1$, то $\varphi = 90°$.

Условие параллельности прямых: $k_1 = k_2$.

Условие перпендикулярности прямых: $k_1 = -1/k_2$.

Угол между двумя прямыми, заданными общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, вычисляется с помощью выражения

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \quad (\text{при } A_1A_2 + B_1B_2 \neq 0).$$

Условие параллельности прямых: $A_1/A_2 = B_1/B_2$.

Условие перпендикулярности прямых: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

• **Пучок прямых** — это совокупность прямых, проходящих через данную точку $M_0(x_0, y_0)$. Уравнение прямой с угловым коэффициентом k из данного пучка имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{3}$$

Уравнение любой прямой из данного пучка записывается так: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Точка пересечения двух прямых $L_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $L_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$ определяет пучок, который описывается уравнением $p(A_1x + B_1y + C_1) + q(A_2x + B_2y + C_2) = 0$, где p, q — любые числа (не равные нулю одновременно).

Чтобы найти координаты точки пересечения прямых L_1 и L_2, необходимо решить систему, состоящую из

двух уравнений этих прямых. Аналогично находятся точки пересечения любых двух линий, заданных уравнениями.

- **Уравнение прямой, проходящей через две данные точки** $M(x_1, y_1)$ и $N(x_2, y_2)$ $(x_1 \neq x_2,\ y_1 \neq y_2)$, имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Пример. Дан треугольник с вершинами $D(-2, 0)$, $E(2, 4)$, $F(4, 0)$. Написать уравнение стороны EF и высоты DH.

Решение. Уравнение стороны EF: $\frac{y-4}{0-4} = \frac{x-2}{4-2}$ или $y = -2x + 8$. Отсюда находим угловой коэффициент этой прямой $k_{EF} = -2$. Из условия перпендикулярности имеем $k_{DH} = -\frac{1}{k_{EF}} = \frac{1}{2}$. Воспользовавшись уравнением (3), получим уравнение высоты DH: $y - 0 = \frac{1}{2}(x + 2)$ или $y = \frac{1}{2}x + 1$.

- **Расстояние от точки до прямой.** Расстояние δ от точки с координатами x_0, y_0 до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется по формуле

$$\delta = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

1.5. Окружность, эллипс, гипербола и парабола

- **Уравнение окружности** с центром в точке (x_0, y_0) и радиусом R имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

В частности, уравнение окружности с центром в начале координат: $x^2 + y^2 = R^2$.

Уравнение окружности в параметрической форме:

$$x = x_0 + R\cos t, \quad y = y_0 + R\sin t.$$

- **Эллипсом** называется множество точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть постоянная величина, равная $2a$. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами эллипса*, а расстояние $\rho(F_1, F_2) = 2c$ — *фокусным расстоянием*.

Наиболее простой вид уравнение эллипса имеет в системе координат, в которой осью x служит прямая, проходящая через фокусы, начало координат O совпадает с серединой отрезка F_1F_2, а ось y проходит через точку O перпендикулярно оси x (рис. 4). Уравнение эллипса в этой системе имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

и называется *каноническим уравнением*.

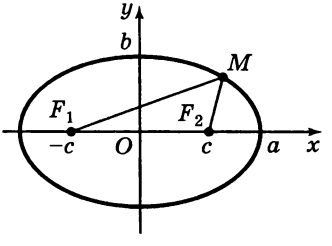


Рис. 4

Здесь a — *большая полуось*, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ — *малая полуось* эллипса. Отношение $c/a = e < 1$ называется *эксцентриситетом эллипса*.

Уравнение эллипса в параметрической форме:

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$

где параметр t принимает любые действительные значения от 0 до 2π.

Уравнение эллипса в полярных координатах:

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi},$$

где $p = b^2/a$ — *фокальный параметр* (половина хорды, проведенной через фокус параллельно малой оси).

Площадь эллипса вычисляется по формуле

$$S = \pi ab.$$

Для приближенного определения периметра эллипса можно использовать формулу $L \approx \pi[1{,}5(a+b) - \sqrt{ab}\,]$.

- **Гиперболой** называется множество точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть постоянная величина, равная $2a$. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами гиперболы*, расстояние $\rho(F_1, F_2) = 2c$ — *фокусным расстоянием.*

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Оно описывает гиперболу в системе координат, ось x которой проходит через фокусы F_1 и F_2, а начало находится в середине отрезка F_1F_2 (рис. 5).

Параметр a называется *действительной* (или *вещественной*) *полуосью*, параметр b — *мнимой полуосью.* Отношение $c/a = e > 1$ называется *эксцентриситетом гиперболы.*

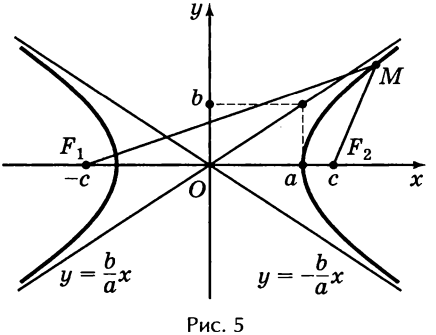


Рис. 5

Прямые $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами гиперболы*. При неограниченном продвижении в бесконечность расстояние от каждой из них до гиперболы стремится к нулю.

Если $a = b$, гипербола называется *равнобочной*. В системе координат, оси которой совпадают с асимптотами равнобочной гиперболы, она имеет уравнение вида $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$.

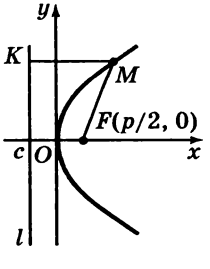
- **Параболой** называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки F и данной прямой l (рис. 6).

Точка F называется *фокусом*, а прямая l — *директрисой параболы*.

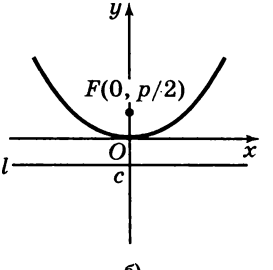
Через фокус проведем прямую, перпендикулярную директрисе, и обозначим точку пересечения этой прямой с директрисой буквой C. Длину отрезка FC обозначим p. Примем построенную прямую за ось x, а середину отрезка FC — за начало координат. В такой системе парабола имеет уравнение

$$y^2 = 2px,$$

называемое *каноническим* (рис. 6, *а*).



а)



б)

Рис. 6

Если прямую, перпендикулярную директрисе, принять за ось y, а начало координат также взять в середине отрезка FC, то в получившейся системе координат уравнение параболы имеет вид $y = ax^2$, где $a = \frac{1}{2p}$ (рис. 6, *б*).

1.6. Приведение общего уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

- **Преобразование координат.** Одна прямоугольная система координат xOy может преобразовываться в другую прямоугольную систему координат $x_1O_1y_1$ при помощи параллельного переноса и поворота. Координаты (x, y) точки M в системе xOy и координаты (x_1, y_1) той же точки M в системе $x_1O_1y_1$ связаны следующими соотношениями:

1) при параллельном сдвиге осей и переносе начала координат O в точку $O_1(a, b)$

$$x = x_1 + a, \quad y = y_1 + b;$$

2) при повороте осей на угол φ вокруг начала координат

$$x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, \quad y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi.$$

- **Общее уравнение кривой второго порядка**

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

при переходе к подходящей новой системе координат упрощается и приводится к одному из двух следующих видов:

$$A_1x_1^2 + C_1y_1^2 + F_1 = 0 \text{ или } C_2y_2^2 + D_2x_2 + F_2 = 0.$$

В зависимости от полученных значений A_1, C_1, F_1, C_2, D_2, F_2 первому из этих уравнений соответствует либо эллипс, либо гипербола, либо пара пересекающихся

прямых, либо точка, либо пустое множество, а второму — либо парабола, либо пара параллельных прямых, либо одна прямая, либо пустое множество.

Искомое преобразование производится в два этапа. На первом этапе с помощью поворота освобождаемся от члена, содержащего произведение координат. Угол поворота φ определяется формулой $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{B}{A-C}$, если $A \neq C$; при $A = C$ имеем $\varphi = 45°$. На втором этапе при помощи параллельного переноса приходим к одному из двух упомянутых уравнений.

2. Аналитическая геометрия в пространстве

2.1. Системы координат в пространстве

• **Декартова прямоугольная система координат** в пространстве состоит из трех взаимно перпендикулярных числовых осей (называемых осями координат) с общим началом отсчета O и общей единицей масштаба. Эти оси обозначаются через Ox, Oy, Oz (или просто буквами x, y, z) и называются осями абсцисс, ординат и аппликат. Координаты (x, y, z) точки M определяются как координаты проекций этой точки на оси x, y и z соответственно. Плоскость xy (или xOy), содержащая оси x и y, и аналогично определяемые плоскости xz (xOz) и yz (yOz) называются координатными плоскостями.

Расстояние между точками $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ вычисляется по формуле

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Координаты точки $M(x, y, z)$, делящей отрезок AB в отношении $|AM| : |MB| = k$, определяются соотношениями

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k}\,,\quad y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}\,,\quad z = \frac{z_1 + kz_2}{1 + k}\,.$$

• **Цилиндрические координаты.** Положение точки $M(x, y, z)$ в пространстве можно определить ее аппликатой z и полярными координатами $\rho = |OP|$ и $\varphi = \angle xOP$ проекции P этой точки на координатную плоскость xOy. Величины ρ, φ, z называются цилиндрическими координатами точки M. Декартовы прямоугольные и цилиндрические координаты точки связаны соотношениями $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ (аппликаты в обеих системах одинаковы).

- **Сферическая система координат** задает положение точки $M(x, y, z)$ следующими тремя величинами: расстоянием $\rho = OM$, углом $\theta = \angle zOM$ и углом φ между плоскостями zOx и zOM. Величины ρ, φ, θ называются сферическими координатами точки M. Прямоугольные и сферические координаты связаны соотношениями

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \quad z = \rho \cos\theta.$$

2.2. Векторы

Вектором называется направленный отрезок AB, у которого точка A рассматривается как начало, а точка B — как конец. Вектор обозначается либо указанием его начала и конца со стрелкой наверху $\overrightarrow{AB}$, либо одной буквой со стрелкой наверху $\vec{a}$. Длина отрезка AB называется *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ (модуль вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$). Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

Векторы называются *равными*, если они коллинеарны, имеют одинаковые модули и направления. Из этого определения следует, что каковы бы ни были вектор $\vec{a}$ и точка P, существует единственный вектор $\overrightarrow{PQ}$ с началом P, равный вектору $\vec{a}$. Поэтому в геометрии векторы рассматривают с точностью до их положения (т. е. не различая векторов, получающихся друг из друга параллельным переносом). В этом смысле векторы называют *свободными*.

Если поместить начало вектора $\vec{a}$ в начало координат, т. е. представить его направленным отрезком $\overrightarrow{OA}$, то координаты (x, y, z) точки A называются координатами вектора $\vec{a}$. При этом пишут $\vec{a} = \{x, y, z\}$. (Отметим, что $\overrightarrow{OA}$ называют *радиусом-вектором* точки A.)

Если вектор $\vec{a}$ имеет начало $B(x_1, y_1, z_1)$, а конец $C(x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$. Обозначим через $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ единичные векторы (*орты*) координатных осей x, y и z соответственно (т. е. $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$, где O — начало координат, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$). Тогда каждый вектор $\vec{a} = \{x, y, z\}$ единственным образом представляется в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Если $\vec{a} = \{x, y, z\}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2.3. Действия над векторами. Скалярное произведение

• **Произведение вектора на число. Сумма и разность векторов.** *Произведением вектора $\vec{a}$ на число k* называется вектор $k\vec{a}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий модуль $|k||\vec{a}|$ и направленный одинаково с $\vec{a}$, если $k > 0$, и противоположно $\vec{a}$ при $k < 0$. Если $\vec{a} = \{x, y, z\}$, то $k\vec{a} = \{kx, ky, kz\}$.

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b}$, который строится следующим образом. Сначала с помощью параллельного переноса вектора $\vec{b}$ совмещают его начало с концом вектора $\vec{a}$. Сумма векторов $\vec{a} + \vec{b}$ — «замыкающий» вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$ (*правило треугольника*, рис. 7).

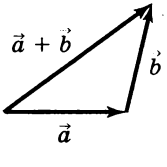


Рис. 7

Разность векторов $\vec{a} - \vec{b}$ определяется как сумма векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$. Если $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, то $\vec{a} \pm \vec{b} = \{x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2\}$.

Вектор, начало которого совпадает с его концом, называется *нулевым* и обозначается $\vec{0}$. Очевидно, что $\vec{0} = \{0, 0, 0\}$ и $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.

- **Скалярным произведением** векторов $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ называется число, равное произведению их модулей на косинус угла φ между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi.$$

В декартовых координатах: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

Свойства скалярного произведения:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.
3. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b}) = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$, k — число.
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ (эту величину обозначают также $\vec{a}^2$).

Скалярные произведения ортов:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$

- **Угол между векторами. Углы между вектором и осями координат.** Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется из соотношения

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}.$$

Условие перпендикулярности двух векторов. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Условие параллельности (коллинеарности) двух векторов. Векторы $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$ параллельны тогда и только тогда, когда $\vec{a} = k\vec{b}$ или $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$ $(x_2 \neq 0, y_2 \neq 0, z_2 \neq 0)$.

Проекция вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$, равная $|\vec{b}| \cos \varphi$, вычисляется по формуле $\text{Пр}_a \vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$.

Пример. Определить угол A треугольника ABC с вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(2, -1, 3)$, $C(0, 0, 5)$.

Решение. Имеем $\overrightarrow{AB} = \{1, -2, 2\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-1, -1, 4\}$. Тогда

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{1 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-1) + 2 \cdot 4}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\angle A = 45°.$$

Косинусы углов α, β, γ между вектором $\vec{a}$ и осями координат x, y, z соответственно называются *направляющими косинусами* вектора $\vec{a}$. Отметим, что

$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}, \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2.4. Векторное и смешанное произведения

- **Векторным произведением** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, определяемый условиями:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

2) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов, т. е. если начала векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ поместить в одну точку, то кратчайший поворот вектора $\vec{a}$ к $\vec{b}$ наблюдается с конца вектора $\vec{c}$ происходящим против часовой стрелки (рис. 8).

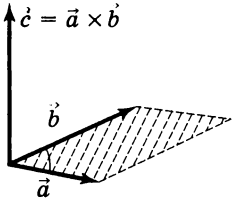


Рис. 8

Векторные произведения ортов:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}.$$

Если $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \{y_1 z_2 - z_1 y_2, -x_1 z_2 + z_1 x_2, x_1 y_2 - y_1 x_2\}.$$

Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.
3. $(k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b}) = k(\vec{a} \times \vec{b})$ (k —число).
4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.
5. Площадь S параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна модулю их векторного произведения: $S = |\vec{a} \times \vec{b}|$.

Пример. Найти площадь треугольника с вершинами $A(7, 3, 4)$, $B(1, 0, 6)$, $C(4, 5, -2)$.

Решение. Имеем $\overrightarrow{AB} = \{-6, -3, 2\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-3, 2, -6\}$. Вычислим

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(18-4) - \vec{j}(36+6) + \vec{k}(-12-9) = 14\vec{i} - 42\vec{j} - 21\vec{k} = \{14, -42, -21\}.$$

Поэтому

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{14^2 + (-42)^2 + (-21)^2} = \frac{1}{2} \cdot 49 = 24{,}5.$$

- **Смешанным произведением** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b} \times \vec{c}$, т. е. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Свойства смешанного произведения:

1. При перестановке двух сомножителей смешанное произведение меняет знак:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}.$$

2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны (т. е. параллельны одной плоскости) тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

3. Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарны, то на них можно построить параллелепипед; его объем $V = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. Объем пирамиды, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, составляет одну шестую часть объема указанного параллелепипеда: $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\,|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$.

Если $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$, то их смешанное произведение вычисляется как определитель третьего порядка:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2.5. Плоскость в пространстве

• **Общим уравнением плоскости** называется линейное уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Любая плоскость в пространстве определяется уравнением вида (1). Если $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат; если $C = 0$ (соответственно $A = 0$ или $B = 0$), то плоскость параллельна оси z (соответственно оси x или оси y). Уравнение $Ax + D = 0$ определяет плоскость, параллельную плоскости yOz.

Положение плоскости P в пространстве полностью определяется точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на этой плоскости, и перпендикулярным ей вектором $\vec{N} = \{A, B, C\}$ (который называется *нормальным вектором плоскости*). При этом уравнение плоскости имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (2)$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной двум неколлинеарным векторам $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, может быть записано в виде (2), где A, B, C — координаты вектора $\vec{N} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$.

Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой, имеет вид $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$, где A, B, C — координаты вектора $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$. Это уравнение можно записать с помощью определителя:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример. Составить уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(2, -1, 1)$ и перпендикулярной двум плоскостям P_1: $3x + 2y - z + 4 = 0$ и P_2: $x + y + z - 3 = 0$.

Решение. Нормальные векторы $\vec{N}_1 = \{3, 2, -1\}$ и $\vec{N}_2 = \{1, 1, 1\}$ к плоскостям P_1 и P_2 параллельны плоскости P. Вычислим

$$\vec{N} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 1\vec{k}.$$

Плоскость P описывается уравнением $3(x - 2) - 4(y + 1) + (z - 1) = 0$ или $3x - 4y + z - 11 = 0$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

- **Взаимное расположение двух плоскостей.** Угол φ между двумя плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ (плоскость } P_1\text{)},$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \text{ (плоскость } P_2\text{)}$$

равен углу между их нормальными векторами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ и определяется соотношением

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|N_1||N_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие параллельности плоскостей: $P_1 \parallel P_2$ тогда и только тогда, когда коллинеарны нормальные векторы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, т. е.

$$A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2 \text{ (если } A_2 \neq 0,\ B_2 \neq 0,\ C_2 \neq 0).$$

Условие перпендикулярности плоскостей: $P_1 \perp P_2$ тогда и только тогда, когда $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2$, т. е.

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Уравнение пучка плоскостей, проходящих через линию пересечения плоскостей P_1 и P_2, имеет вид

$$p(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + q(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

При любых значениях параметров p и q (не равных нулю одновременно) это уравнение определяет плоскость, проходящую через линию пересечения плоскостей P_1 и P_2).

2.6. Прямая в пространстве

Каждая прямая в пространстве может быть задана системой двух линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

(эти уравнения определяют две плоскости, пересечением которых и служит данная прямая).

Обратно: любая совместная система уравнений вида (3), левые части которых не пропорциональны, задает некоторую прямую.

Положение прямой L полностью определяется какой-нибудь ее точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\vec{l} = \{m, n, p\}$, параллельным прямой. При этом прямая задается следующими параметрическими уравнениями:

$$x = x_0 + tm, \quad y = y_0 + tn, \quad z = z_0 + tp,$$

где параметр t принимает любые действительные значения.

Если все координаты направляющего вектора не равны нулю, прямая может быть также задана следующими *каноническими уравнениями*:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Углы α, β, γ, образуемые прямой L соответственно с осями координат Ox, Oy, Oz, находятся по формулам

$$\cos\alpha = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}, \quad \cos\beta = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{p}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Прямая, проходящая через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, представляется уравнениями

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad (x_2 \neq x_1, y_2 \neq y_1, z_2 \neq z_1).$$

Если прямая L задана уравнениями (3), т. е. как линия пересечения плоскостей P_1 и P_2 с нормальными векторами $\vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$, то ее направляющий вектор $\vec{l}$ может быть найден как векторное произведение векторов $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$: $\vec{l} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$. Точка $M_0 \in L$ находится как одно из решений системы (3).

Пример. Написать канонические уравнения прямой, заданной уравнениями $x + 2y + 3z - 13 = 0$, $3x + y + 4z - 14 = 0$.

Решение. Имеем $\vec{N}_1 = \{1, 2, 3\}$, $\vec{N}_2 = \{3, 1, 4\}$, $\vec{l} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \{5, 5, -5\}$. Подставив в уравнения прямой значение $z = 0$, получим систему: $x + 2y - 13 = 0$, $3x + y - 14 = 0$, из которой найдем $x = 3, y = 5, M_0(3, 5, 0)$. Таким образом, канонические уравнения прямой примут вид

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-0}{-5} \quad \text{или} \quad x - 3 = y - 5 = -z.$$

Угол φ между прямыми L_1 и L_2 равен углу между их направляющими векторами $\vec{l}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$ и $\vec{l}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$ и вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2}{|\vec{l}_1||\vec{l}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

2.7. Прямая и плоскость в пространстве

Угол φ между прямой L с направляющим вектором $\vec{l} = \{m, n, p\}$ и плоскостью $P: Ax + By + Cz + D = 0$ определяется из соотношения

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Условие параллельности прямой и плоскости: $L \parallel P$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{l}$ и $\vec{N}$ перпендикулярны, т. е.

$$Am + Bn + Cp = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой и плоскости: $L \perp P$ тогда и только тогда, когда векторы $\vec{l}$ и $\vec{N} = \{A, B, C\}$ параллельны, т. е.

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} \quad (\text{если } m \neq 0,\ n \neq 0,\ p \neq 0).$$

Канонические уравнения прямой L, перпендикулярной плоскости $P: Ax+By+Cz+D=0$ и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, имеют вид

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C} \quad (A\neq 0, B\neq 0, C\neq 0).$$

Уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной прямой L с направляющим вектором $\vec{l}=\{m, n, p\}$, записывается так:

$$m(x-x_0)+n(y-y_0)+p(z-z_0)=0.$$

Для нахождения координат точки пересечения прямой и плоскости необходимо решить систему уравнений, состоящую из уравнений прямой и уравнения плоскости.

Пример. Найти проекцию точки $M_0(3, 1, -1)$ на плоскость P, которая задана уравнением $x+2y+3z-30=0$.

Решение. Искомая проекция $Q(x, y, z)$ есть точка пересечения плоскости P и прямой L, проходящей через точку M_0 и перпендикулярной P. Параметрические уравнения прямой L: $x=3+t, y=1+2t, z=-1+3t$ подставим в уравнение плоскости P. Получим $3+t+2+4t-3+9t-30=0$, откуда $t=2$, $x=5$, $y=5$, $z=5$, $Q(5, 5, 5)$.

2.8. Поверхности второго порядка

- **Поверхностями второго порядка** называются такие множества точек в пространстве, координаты которых удовлетворяют уравнению вида

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx+Gx+Hy+Kz+L=0. \quad (4)$$

Например, уравнение

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

определяет сферу радиуса R с центром в начале координат. Объем сферы: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

Таблица 1

Канонические уравнения поверхностей второго порядка

№	Каноническое уравнение	Название поверхности	Рисунок
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Эллипсоид	Рис. 9, *а*
2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Однополостный гиперболоид	Рис. 9, *б*
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	Двуполостный гиперболоид	Рис. 9, *в*
4	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	Конус второго порядка	Рис. 9, *г*
5	$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\ (p,q>0)$	Эллиптический параболоид	Рис. 9, *д*
6	$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\ (p,q>0)$	Гиперболический параболоид	Рис. 9, *е*
7	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	Эллиптический цилиндр	Рис. 9, *ж*
8	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Гиперболический цилиндр	Рис. 9, *з*
9	$y^2=2px$	Параболический цилиндр	Рис. 9, *и*
10	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Пара пересекающихся плоскостей	Рис. 9, *к*
11	$\frac{x^2}{a^2}=1$	Пара параллельных плоскостей	—
12	$x^2=0$	Пара совпадающих плоскостей	—

• **Канонические уравнения поверхностей второго порядка.** При помощи поворотов и параллельного переноса осей координат всякое уравнение вида (4) может быть преобразовано к простому *каноническому* виду. Основные канонические уравнения и названия соответствующих поверхностей даны в табл. 1, а их схематические изображения приведены на рис. 9, *а*—*к*. Ниже описаны наиболее важные свойства некоторых поверхностей второго порядка.

Эллипсоид (рис. 9, *а*). Сечением эллипсоида любой плоскостью является эллипс (в частном случае круг). Координаты точек эллипсоида удовлетворяют неравенствам $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$, $-c \leqslant z \leqslant c$.

Объем эллипсоида: $V = \frac{4}{3}\pi abc$.

В частном случае $a = b$ имеем эллипсоид вращения, получающийся при вращении эллипса

$$(x/a)^2 + (z/c)^2 = 1,$$

лежащего в плоскости xOz, вокруг оси z (при $a > c$ эллипсоид вращения называется *сплюснутым*, а при $a < c$ — *вытянутым*).

Гиперболоиды (рис. 9, *б*, *в*). Для обоих гиперболоидов сечения, параллельные оси z, — гиперболы (для однополостного гиперболоида может быть пара пересекающихся прямых); сечения, параллельные плоскости xOy, — эллипсы.

Двуполостный гиперболоид состоит из двух частей, точки которых расположены соответственно при $z \leqslant -c$ и $z \geqslant c$.

Конус (рис. 9, *г*) имеет вершину в начале координат. Поверхность конуса состоит из прямых линий (эти линии называются образующими), проходящих через его вершину и точки эллипса с полуосями a и b, плоскость которого перпендикулярна оси z и находится на расстоянии c от начала координат.

Конус является асимптотическим для обоих гиперболоидов $(x/a)^2 + (y/b)^2 - (z/c)^2 = \pm 1$, т. е. каждая из его

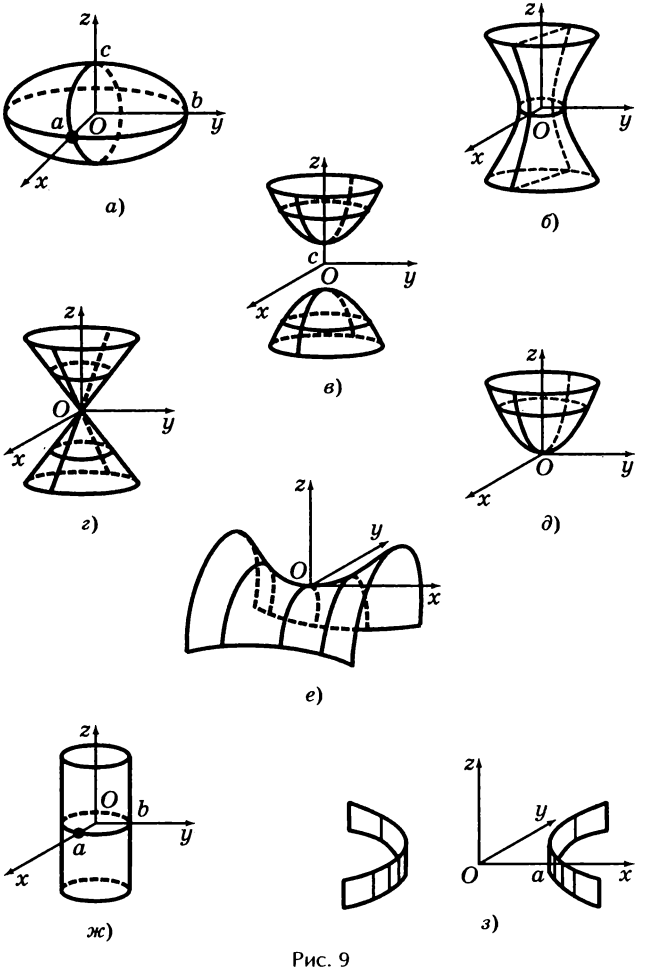
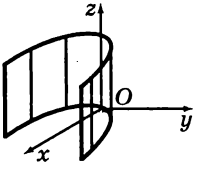
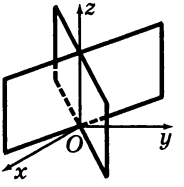


Рис. 9



и)



к)

Рис. 9 (*окончание*)

образующих при удалении в бесконечность неограниченно приближается к обоим гиперболоидам.

Эллиптический параболоид (рис. 9,*д*). Сечения, параллельные оси z, — параболы; сечения, параллельные плоскости xOy, — эллипсы. Точки эллиптического параболоида расположены в области $z \geqslant 0$.

В частном случае $p = q$ имеем *параболоид вращения*, порождаемый вращением параболы вокруг оси z.

Гиперболический параболоид (рис. 9, *е*). Сечения, параллельные плоскостям yOz и xOz, — параболы; сечения, параллельные плоскости xOy, — гиперболы (и пара пересекающихся прямых).

Цилиндры (рис. 9, *ж*, *з*, *и*). Поверхности цилиндров состоят из прямых линий, параллельных оси z. Сечениями (перпендикулярными оси z) эллиптического, гиперболического и параболического цилиндров соответственно являются эллипсы, гиперболы и параболы.

3. Линейная алгебра

3.1. Определители

• **Определители второго и третьего порядков.** *Определителем второго порядка* с элементами a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} называется число Δ, которое обозначается символом $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и вычисляется по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель третьего порядка — это число

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ называется определитель второго порядка, который получается, если в Δ вычеркнуть строку и столбец, содержащие данный элемент. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

• **Свойства определителей третьего порядка.**

1. *Разложение определителя по строке* (*столбцу*). Определитель равен сумме произведений элементов

любой его строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}, \quad \Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + a_{3j}A_{3j}.$$

В частности, разлагая определитель по первой строке ($i = 1$), получим

$$\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

2. Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, а столбцы — соответствующими строками.

3. Общий множитель элементов какой-нибудь строки (или столбца) может быть вынесен за знак определителя.

4. Если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.

5. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.

6. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Вычисление определителя удобно проводить, используя свойства 1, 3 и 6.

Пример 1. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}$.

Решение. Вынесем за знак определителя общий множитель 2 элементов второй строки, после чего прибавим к первой строке вторую, а к третьей — вторую, умноженную на -2. В результате имеем

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 13 & -17 & -13 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 13 & -17 & -13 \\ 10 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Прибавляя ко второму столбцу последнего определителя третий столбец, умноженный на −2, и записывая после этого разложение по первой строке, получим

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 13 & 9 & -13 \\ 10 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 13 & 9 \\ 10 & -3 \end{vmatrix} = 8(-39-90) = -1032.$$

- **Определитель порядка n** — это число, которое задается квадратной таблицей чисел, имеющей n строк и n столбцов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где a_{ij} — *элементы определителя* ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Теория определителей n-го порядка строится аналогично теории определителей третьего порядка. В частности, определитель равен сумме произведений элементов какого-нибудь столбца (строки) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \\ = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \quad (1)$$

Алгебраические дополнения определяются формулой $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} — минор элемента a_{ij} (определитель $(n-1)$-го порядка, получаемый из Δ путем вычеркивания строки и столбца, содержащих данный элемент). Из формул (1) следует, что вычисление определителя порядка n сводится к вычислению определителей порядка $n-1$.

Все изложенные выше свойства определителей третьего порядка справедливы и для определителей произвольного порядка.

Пример 2. Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$.

Решение. Прибавляя к первой строке удвоенную вторую, к третьей — вторую, умноженную на −3, к четвертой — вторую, умноженную на −2, и записывая затем разложение по первому столбцу, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Последний определитель вычислен выше (см. пример 1), поэтому искомый определитель четвертого порядка равен 1032.

3.2. Матрицы

• **Матрицей** размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются *элементами матрицы*. Если $m = n$, матрица A называется *квадратной*, а число n — ее *порядком*.

Для каждой квадратной матрицы A можно вычислить ее определитель, обозначаемый $\det A$ (или $|A|$).

• **Сумма матриц. Произведение матрицы на число.** *Суммой двух матриц* одинакового размера называется матрица, определяемая равенством

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы A на число α называется матрица

$$\alpha A = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}.$$

- **Произведение матриц.** Произведение матрицы A на матрицу B определено в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В результате умножения получается матрица $C = AB$, у которой столько же строк, сколько их в матрице A, и столько же столбцов, сколько их в матрице B. Элемент c_{ij} матрицы-произведения, стоящий в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2k} \\ \dots & & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mk} \end{pmatrix} = C,$$

где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$.

Важно отметить, что в общем случае $AB \neq BA$ (т. е. матрицы нельзя переставлять).

Определитель произведения двух квадратных матриц одинакового порядка равен произведению определителей этих матриц:

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

- **Миноры и ранг матрицы.** Выделим в матрице k произвольных строк и k произвольных столбцов. Определитель k-го порядка, составленный из элементов, расположенных на пересечении выделенных строк и столбцов, называется *минором* k-го порядка этой матрицы.

Рангом матрицы A называется наибольший порядок миноров этой матрицы, отличных от нуля. Ранг матрицы A обозначается $\operatorname{rang}(A)$. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг этой матрицы принимается равным нулю. Ранг матрицы равен рангу системы векторов-столбцов и рангу системы векторов-строк матрицы A (см. разд. 3.4).

Ранг матрицы не меняется при следующих элементарных преобразованиях: замене строк столбцами, а столбцов — соответствующими строками; перестановке строк (столбцов) матрицы; умножении какой-либо строки (столбца) на число, отличное от нуля; вычеркивании строки (столбца), все элементы которой равны нулю; прибавлении к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца).

Пример. Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычтем из 4-го столбца сумму первых трех столбцов, а затем вычеркнем полученный 4-й столбец, все эле-

менты которого равны нулю. В результате получим матрицу $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, имеющую тот же ранг, что и матрица A. Так как $|A_1| = -18 \neq 0$, то $\operatorname{rang}(A_1) = 3$. Следовательно, и $\operatorname{rang}(A) = 3$.

- **Единичная и обратная матрицы.** Квадратная матрица вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

называется *единичной*. Справедливы равенства $AE = A$ и $EC = C$ (если произведения матриц в левых частях определены).

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$, и *обратимой*, если можно подобрать такую матрицу B, что $AB = BA = E$. Матрица B называется *обратной матрицей* к матрице A. Квадратная матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырожденная. Обратимая матрица A имеет только одну обратную матрицу, которая обозначается A^{-1} и вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} определителя матрицы A (см. разд. 3.1).

3.3. Системы линейных уравнений

- **Система линейных уравнений** имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2)$$

где $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ — коэффициенты; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — свободные члены; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — неизвестные величины.

Решением этой системы называется совокупность n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, которые, будучи подставлены вместо неизвестных в уравнения, обращают эти уравнения в тождества. Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Если же система не имеет ни одного решения, то она называется *несовместной*.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет только одно решение, и *неопределенной*, если она имеет более одного решения.

Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

называются соответственно *матрицей* и *расширенной матрицей* системы (2).

Теорема Кронекера — Капелли. Для совместности системы (2) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу расширенной матрицы: $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A_1)$.

- **Правило Крамера.** Если ранг матрицы совместной системы равен числу ее неизвестных, то система является определенной. Если число неизвестных системы (2)

совпадает с числом уравнений ($m = n$) и матрица системы невырожденная ($\det A \neq 0$), то система имеет единственное решение, которое находится по *правилу Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; \ldots, \; x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

В этих формулах $\Delta = \det A$ — определитель системы, а Δ_k — определитель, полученный из определителя системы заменой k-го столбца столбцом свободных членов ($k = 1, 2, \ldots, n$).

- **Матричное решение системы.** Система линейных уравнений (2) может быть записана в матричной форме

$$AX = B, \tag{3}$$

где A — матрица системы; X — матрица-столбец неизвестных; B — матрица-столбец свободных членов. Если матрица A квадратная и невырожденная, то решение системы (3) может быть записано в матричной форме: $X = A^{-1}B$.

- **Равносильные системы уравнений.** Две системы линейных уравнений называются *равносильными*, если множества их решений совпадают. Нахождение решений системы линейных уравнений основано на переходе к равносильной системе, которая проще исходной. Укажем простейшие операции, которые приводят к равносильной системе:

1) перемена местами двух уравнений в системе;

2) умножение какого-либо уравнения системы на действительное число (отличное от нуля);

3) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Неизвестное x_i называется *разрешенным* или *базисным*, если какое-нибудь уравнение системы содержит его с коэффициентом 1, а во все остальные уравнения x_i не входит.

Если каждое уравнение системы содержит разрешенное неизвестное, то такая система называется *разрешенной*. Ее неизвестные, не являющиеся базисными, называются *свободными*.

Для нахождения всех решений совместной системы линейных уравнений достаточно найти равносильную ей разрешенную систему. Если все неизвестные окажутся базисными, то разрешенная система дает значения этих неизвестных, составляющие единственное решение исходной системы. В противном случае выражают базисные неизвестные через свободные.

- **Метод Жордана — Гаусса.** Запишем систему линейных уравнений (2) в виде таблицы

x_1	...	x_s	...	x_n	
a_{11}	...	a_{1s}	...	a_{1n}	b_1
...	...	...	...	...	...
a_{r1}	...	a_{rs}	...	a_{rn}	b_r
...	...	...	...	...	...
a_{m1}	...	a_{ms}	...	a_{mn}	b_m

Жордановым преобразованием системы с разрешающим элементом $a_{rs} \neq 0$ называется следующая последовательность действий:

1) умножение r-й строки таблицы на число $\frac{1}{a_{rs}}$;

2) прибавление к первой строке таблицы ее r-й строки (полученной после первого действия), умноженной на $-a_{1s}$;

3) прибавление ко второй строке r-й строки, умноженной на $-a_{2s}$, и т. д.

После этих преобразований неизвестное x_s станет разрешенным, все коэффициенты s-го столбца будут равны нулю, кроме $a_{rs} = 1$.

Проводя последовательно жордановы преобразования с разрешающими элементами, взятыми в различных строках, получим разрешенную систему, равносильную исходной.

Если в результате преобразований все коэффициенты при неизвестных в какой-нибудь строке окажутся

равными нулю, а свободный член этой строки не будет равным нулю, то данная система уравнений несовместна. Если же получится строка, состоящая из одних нулей, то она вычеркивается из таблицы.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7, \\ 2x_1 + 5x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Запишем эту систему в виде таблицы и проведем ее преобразование к разрешенному виду в шесть шагов:

$$\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & -3 & 5 & 1 \\ \boxed{1} & 2 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 5 & 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 0 & -7 & 11 & 15 \\ 1 & 2 & -3 & -7 \\ 0 & -4 & 11 & 18 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 0 & -7 & 11 & 15 \\ 1 & 2 & -3 & -7 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 0 & -7 & 11 & 15 \\ 1 & 2 & -3 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 0 & 0 & 11 & 22 \\ 1 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

В приведенных таблицах обведены разрешающие элементы. На первом шаге было произведено вычитание из первой и третьей строк удвоенной второй строки; на втором шаге — вычитание из третьей строки первой; на третьем шаге — деление третьей строки на 3; на четвертом шаге к первой строке была прибавлена третья, умноженная на 7, а ко второй — третья,

умноженная на -2; на пятом шаге первая строка была разделена на 11; на шестом шаге ко второй строке была прибавлена первая, умноженная на 3. В результате исходная система принимает следующий разрешенный вид:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 2, \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -3, \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1. \end{cases}$$

В итоге имеем решение $x_1 = -3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$$

Решение. С помощью жордановых преобразований эта система приводится к разрешенной:

$$\begin{cases} \quad -11x_2 - 5x_3 + x_4 = -10, \\ x_1 + \ 9x_2 + 4x_3 \qquad = \ 8. \end{cases}$$

Следовательно, совокупность всех решений исходной системы задается формулами

$$x_1 = 8 - 9x_2 - 4x_3, \quad x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3,$$

где x_2 и x_3 принимают любые действительные значения.

3.4. Системы n-мерных векторов. Собственные значения и собственные векторы матрицы

• **Основные определения и некоторые формулы.** Последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *n-мерным вектором* X. Обозначение: $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами вектора*. Число координат называется *размерностью* вектора. Пусть $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Следующие формулы задают

операции сложения n-мерных векторов и умножения n-мерного вектора на число:

$$X + Y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\},$$
$$kX = \{kx_1, kx_2, \ldots, kx_n\}.$$

Скалярным произведением векторов X и Y называется число

$$X \cdot Y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

Два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. *Модулем* вектора X называется число

$$|X| = \sqrt{X \cdot X} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Свойства модуля вектора:

1. $|X| \geqslant 0$ ($|X| = 0$ тогда и только тогда, когда $X = 0$).
2. $|kX| = |k|\,|X|$, k — число.
3. $|X + Y| \leqslant |X| + |Y|$ — неравенство треугольника.

Свойство скалярного произведения: $|X \cdot Y| \leqslant |X|\,|Y|$.

- **Системы n-мерных векторов.** Система векторов называется *ортонормированной*, если векторы этой системы попарно ортогональны и имеют модули, равные единице.

Вектор $k_1A_1 + k_2A_2 + \cdots + k_mA_m$ называется *линейной комбинацией* векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ с коэффициентами $k_1, k_2, \ldots, k_m$.

Вектор B *разлагается по системе векторов* $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_m$, если выполняется равенство $B = k_1A_1 + k_2A_2 + \cdots$ $\cdots + k_mA_m$. Числа $k_1, k_2, \ldots, k_m$ называются *коэффициентами разложения*.

Векторная форма записи системы линейных уравнений (2) имеет вид

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \ldots + A_nx_n = B,$$

где $A_1 = \{a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{m1}\}$ — m-мерный вектор, координаты которого равны коэффициентам при неизвестном x_1; $A_2 = \{a_{12}, a_{22}, \ldots, a_{m2}\}$ — вектор коэффициентов при x_2 и т. д.; $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ — вектор свободных членов.

Чтобы найти разложение вектора B по системе векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, достаточно иметь какое-нибудь решение системы уравнений (2).

Система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $k_1, k_2, \ldots, k_n$, не все равные нулю, что выполняется равенство

$$k_1A_1 + k_2A_2 + \cdots + k_nA_n = 0, \qquad (4)$$

где $0 = \{0, 0, \ldots, 0\}$ — нулевой вектор.

Если равенство (4) возможно лишь в случае, когда все коэффициенты $k_1, k_2, \ldots, k_n$ равны нулю, то система векторов называется *линейно независимой*.

Линейно независимая часть $B_1, B_2, \ldots, B_r$ системы векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется *базисом* этой системы, если каждый вектор системы $A_1, A_2, \ldots, A_n$ разлагается по векторам $B_1, B_2, \ldots, B_r$.

Каждую линейно независимую часть системы векторов можно дополнить до базиса этой системы. Все базисы данной системы состоят из одного и того же числа векторов.

Рангом системы векторов называется число векторов в любом ее базисе.

- **Собственные значения и собственные векторы матрицы.** Число λ называется *собственным значением* квадратной матрицы A порядка n, если можно найти такой n-мерный ненулевой вектор X, что выполняется равенство

$$AX = \lambda X.$$

Вектор X называется *собственным вектором матрицы* A, отвечающим собственному значению λ.

Собственные значения являются корнями уравнения

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=\alpha_n\lambda^n+\alpha_{n-1}\lambda^{n-1}+\dots+\alpha_1\lambda+\alpha_0=0,$$

называемого *характеристическим уравнением* матрицы A.

Координаты собственных векторов матрицы A, отвечающих собственному значению λ, удовлетворяют линейной системе уравнений $(A-\lambda E)X=0$.

4. Основные понятия математического анализа

4.1. Числовые множества. Понятие функции

• **Числовая ось. Интервалы.** *Числовой осью* называется прямая, на которой выбрано направление, указано начало отсчета O и единица масштаба. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел R и множеством всех точек числовой оси, при котором каждое действительное число x изображается точкой, отстоящей от O на расстояние $|x|$ вправо, если $x > 0$, и влево, если $x < 0$.

Среди числовых множеств, т. е. множеств действительных чисел (или множеств точек числовой оси), выделяют следующие.

1. Множества вида (a, b), $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, состоящие из всех таких чисел $x \in R$, для которых соответственно $a < x < b$, $x < b$, $x > a$, x — любое число. Такие множества называются (открытыми) *интервалами*.

2. Множества вида $[a, b]$, состоящие из тех $x \in R$, для которых $a \leqslant x \leqslant b$ — *замкнутые интервалы* или *отрезки*.

3. Множества вида $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$, состоящие из таких чисел x, что $a < x \leqslant b$, $a \leqslant x < b$, $x \leqslant b$, $x \geqslant a$ — *полуоткрытые интервалы*.

Окрестностью точки $x_0 \in R$ называется любой открытый интервал (a, b), содержащий точку x_0. Окрестностью «точек» $+\infty$, $-\infty$ и ∞ называются соответственно множества вида $(b, +\infty)$, $(-\infty, c)$ и $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$ (здесь $a \geqslant 0$).

• **Способы задания функции.** Пусть D — некоторое множество действительных чисел. Если каждому чис-

лу $x \in D$ поставлено в соответствие некоторое число $y = f(x)$, то говорят, что на множестве D определена *функция* f. Множество D называется *областью определения*, а множество E всех элементов вида $f(x)$ — *множеством значений* функции f. Для функционального соответствия приняты обозначения $y = f(x)$, $f : D \to E$, $f : x \to y$.

Функцию можно задавать многими способами (табличным, графическим и др.). Наиболее распространенным и удобным является *аналитический* способ, т. е. задание функции при помощи формулы (или нескольких формул), зависящей от аргумента x, например, $y = \sin x + 1$. *Неявное задание* функции состоит в задании уравнения $F(x, y) = 0$, из которого при произвольном фиксированном значении аргумента x вычисляется значение функции y. *Параметрическое задание* функции состоит в задании аргумента x и значения y в виде формул, зависящих от вспомогательной переменной t (параметра): $x = p(t)$, $y = q(t)$.

- **Монотонные функции.** Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*неубывающей*) на множестве $D \subset R$, если для любых $x_1, x_2 \in D$ при $x_1 > x_2$ имеем $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \geqslant f(x_2)$). Функция $f(x)$ называется *убывающей* (*невозрастающей*) на множестве D, если для любых $x_1, x_2 \in D$ при $x_1 > x_2$ справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \leqslant f(x_2)$). Убывающие и возрастающие функции называются *монотонными*.

- **Сложная и обратная функции.** Пусть заданы функция $u = u(x)$, $x \in D$ с множеством значений E и функция $y = f(u)$, $u \in E$. Тогда функция $y = f(u(x))$, $x \in D$ называется *сложной функцией* или *суперпозицией* функций f и u.

Пусть на множестве $x \in D$ определена функция $y = f(x)$, где $y \in E$. *Обратной функцией* по отношению к $y = f(x)$ называется такая функция $x = g(y)$, которая определена на множестве E и каждому $y \in E$ ставит в соответствие такое $x \in D$, что $f(x) = y$. Обратную функцию часто обозначают $g = f^{-1}$.

Для монотонных функций обратная функция всегда определена и справедливо тождество: $g(f(x)) \equiv x$. Для того чтобы получить обратную функцию $g(y)$, следует из равенства $y = f(x)$ выразить x через y.

4.2. Элементарные функции и их графики

Основные элементарные функции: степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Ниже перечислены основные свойства и приведены графики основных элементарных функций.

- **Степенная функция:** $y = x^{\alpha}$, α — любое.

Случай 1: $\alpha = 2n$, где n — натуральное число ($n = 1, 2, \ldots$). Область определения: x — любое. Область изменения: $y \geqslant 0$. Функция четная, непериодическая, неограниченная. Пересекает ось Oy и касается оси Ox в начале координат: $x = 0$, $y = 0$. На интервале $(-\infty; 0)$ убывает, на интервале $(0; +\infty)$ возрастает. Имеет минимум $y = 0$ при $x = 0$. График функции $y = x^2$ (парабола) представлен на рис. 10, *а*.

Случай 2: $\alpha = 2n + 1$, где n — натуральное число. Область определения: x —любое. Область изменения: y — любое. Функция нечетная, непериодическая, неограниченная. Пересекает оси Ox и Oy в начале координат: $x = 0$, $y = 0$. Возрастает на всей числовой прямой. Экстремумов не имеет. График функции $y = x^3$ (кубическая парабола) представлен на рис. 10, *а*.

Случай 3: $\alpha = -2n$, где n — натуральное число. Область определения: $x \neq 0$. Область изменения: $y > 0$. Функция четная, непериодическая, неограниченная. Пересечений с осями координат не имеет. На интервале $(-\infty; 0)$ возрастает, на интервале $(0; +\infty)$ убывает. Экстремумов не имеет. График функции $y = x^{-2}$ приведен на рис. 10, *б*.

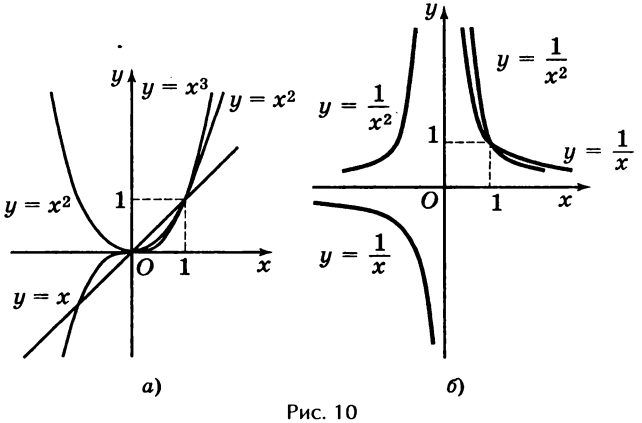


Рис. 10

Случай 4: $\alpha = -2n + 1$, где n — натуральное число. Область определения: $x \neq 0$. Область изменения: y — любое. Функция нечетная, непериодическая, неограниченная. Не имеет пересечений с осями координат. Убывает на всей числовой оси. Экстремумов не имеет. График функции $y = x^{-1}$ приведен на рис. 10, *б*.

Случай 5: α — нецелое число. Графики некоторых функций этого вида показаны на рис. 11, *а*, *б*.

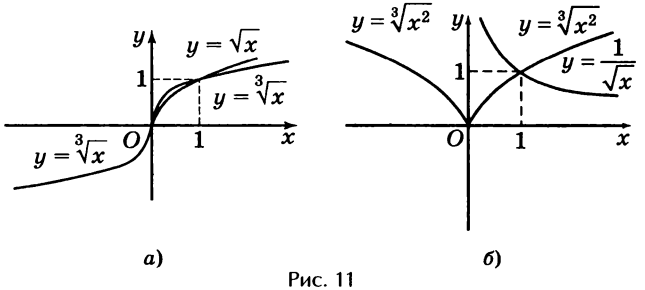
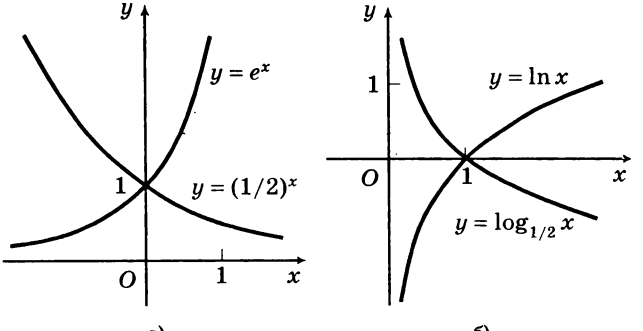


Рис. 11

- **Показательная функция:** $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Область определения: x — любое. Область изменения: $y > 0$. Функция не является ни четной, ни нечетной; непериодическая, неограниченная. Пересекает ось Oy при $y = 1$, ось Ox не пересекает. Возрастает на всей числовой прямой при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$; экстремумов не имеет (рис. 12, *а*).
- **Логарифмическая функция:** $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Область определения: $x > 0$. Область изменения: y — любое. Функция не является ни четной, ни нечетной; непериодическая, неограниченная. Пересекает ось Ox при $x = 1$, ось Oy не пересекает. Возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$; экстремумов не имеет (рис. 12, *б*).
- **Тригонометрические функции.**

Синус $y = \sin x$. Область определения: x — любое. Область изменения: $y \in [-1; 1]$. Функция нечетная, периодическая с периодом 2π, ограниченная. Пересекает ось Oy в точке $y = 0$, ось Ox — в точках $x = \pi n$, $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Возрастает на каждом из отрезков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$ и убывает на каждом из отрезков



а) *б*)

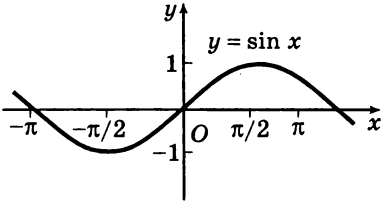
Рис. 12

$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3}{2}\pi + 2\pi n\right]$. В точках $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ имеет максимумы ($y = 1$), в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ —минимумы ($y = -1$). График функции $y = \sin x$ называется *синусоидой* и изображен на рис. 13, *а*.

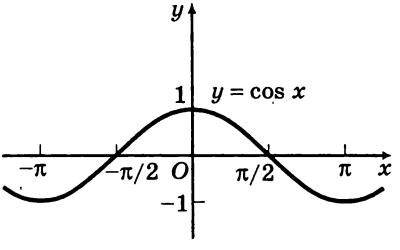
Косинус $y = \cos x$. Область определения: x — любое. Область изменения: $y \in [-1; 1]$. Функция четная, периодическая с периодом 2π, ограниченная. Пересекает ось Oy в точке $y = 1$, ось Ox — в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Функция возрастает на каждом из отрезков $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$ и убывает на каждом из отрезков $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; в точках $x = 2\pi n$ имеет максимумы ($y = 1$), в точках $x = \pi + 2\pi n$ — минимумы ($y = -1$). График функции $y = \cos x$ представляет собой синусоиду, сдвинутую относительно графика $y = \sin x$ влево вдоль оси Ox на величину $\frac{\pi}{2}$ (рис. 13, *б*).

Тангенс $y = \operatorname{tg} x$. Область определения: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Область изменения: y — любое. Функция нечетная, периодическая с периодом π, неограниченная. Пересекает ось Oy в точке $y = 0$, ось Ox — в точках $x = \pi n$. Функция возрастает на каждом из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, экстремумов не имеет. График функции $y = \operatorname{tg} x$ изображен на рис. 14.

Котангенс $y = \operatorname{ctg} x$. Область определения: $x \neq \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Область изменения: y — любое. Функция нечетная, периодическая с периодом π, неограниченная. Пересекает ось Ox в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, ось Oy не пересекает. Функция убывает на каждом из интервалов $(\pi n; \pi + \pi n)$, экстремумов не имеет.



а)



б)

Рис. 13

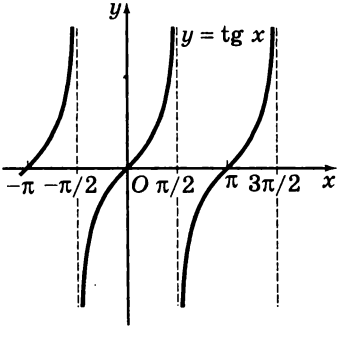


Рис. 14

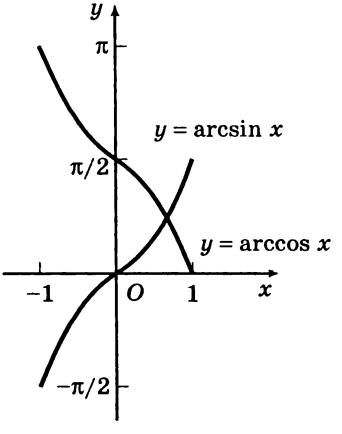
- **Обратные тригонометрические функции.**

Арксинус $y = \arcsin x$. Область определения: $x \in [-1; 1]$. Область изменения: $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функция нечетная, непериодическая, ограниченная, пересекает оси Ox и Oy в начале координат: $x = 0$, $y = 0$. Функция возрастает на всей области определения, экстремумов не имеет $\left(\text{хотя в точке } x = -1 \text{ принимает наименьшее значение } y = -\frac{\pi}{2}, \text{ а в точке } x = 1 \text{ — наибольшее значение } y = \frac{\pi}{2}\right)$. График функции $y = \arcsin x$ представлен на рис. 15, *а*. При всех x из области определения имеет место равенство $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

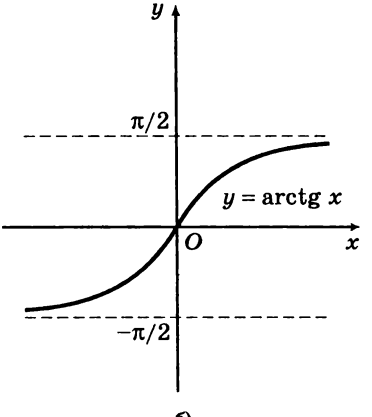
Арккосинус $y = \arccos x$. Область определения: $x \in [-1; 1]$. Область изменения: $y \in [0; \pi]$. Функция не является ни четной, ни нечетной, непериодическая, ограниченная, пересекает ось Oy в точке $y = \frac{\pi}{2}$, а ось Ox — в точке $x = 1$. Функция убывает на всей области определения, экстремумов не имеет (хотя в точке $x = -1$ принимает наибольшее значение $y = \pi$, а в точке $x = 1$ — наименьшее значение $y = 0$). График функции $y = \arccos x$ изображен на рис. 15, *а*.

Арктангенс $y = \operatorname{arctg} x$. Область определения: x — любое. Область изменения: $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Функция нечетная, непериодическая, ограниченная, пересекает оси в начале координат: $x = 0$, $y = 0$. Функция возрастает на всей числовой прямой, экстремумов не имеет. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ изображен на рис. 15, *б*.

Арккотангенс $y = \operatorname{arcctg} x$. Область определения: x — любое. Область изменения: $y \in (0; \pi)$. Функция не является ни четной, ни нечетной; она непериодиче-



а)



б)

Рис. 15

ская, ограниченная, пересекает ось Oy в точке $y = \frac{\pi}{2}$, ось Ox не пересекает. Функция убывает на всей числовой прямой, экстремумов не имеет. При всех x имеет место равенство $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$.

Функция называется *элементарной*, если она может быть получена с помощью конечного числа арифметических действий и суперпозиций над основными элементарными функциями.

4.3. Предел последовательности

- **Некоторые определения.** Если каждому натуральному числу n сопоставлено некоторое число x_n, то тем самым определена (числовая) *последовательность* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, которую кратко обозначают $\{x_n\}$; x_n называется *общим членом* последовательности.

Пример 1. Для последовательности $\{4n + 1\}$ имеем $x_1 = 5$, $x_2 = 9$, $x_3 = 13$, $x_4 = 17$ и т. д.

Последовательность называется *ограниченной* (ограниченной сверху, ограниченной снизу), если существует такое число M, что $|x_n| < M$ (соответственно $x_n < M$, $x_n > M$) для всех $n = 1, 2, \ldots$.

- **Предел последовательности.** Число b называется *пределом последовательности* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $N = N(\varepsilon)$, что $|x_n - b| < \varepsilon$ при всех $n > N$.

Если b является пределом последовательности $\{x_n\}$, то пишут $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$ или $x_n \to b$ при $n \to \infty$.

Предел постоянной последовательности $\{x_n = c\}$ существует и равен c, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} = c$. В этом случае неравенство $|x_n - c| < \varepsilon$ принимает вид $0 < \varepsilon$ и выполняется при всех n.

Пример 2. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

Решение. Составим разность $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}$. Неравенству $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ удовлетворяют натуральные числа $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon)$. Таким образом, для каждого положительного числа ε найдется число $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ такое, что при $n > N$ будет иметь место неравенство $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$.

Последовательность $\{x_n\}$ может и не иметь предела, например, последовательность $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$. Последовательность, предел которой существует, называется *сходящейся*.

- **Свойства сходящихся последовательностей.**

1. Если последовательность сходится, то она имеет только один предел.

2. Любая сходящаяся последовательность ограничена. Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

3. Если последовательность сходится к числу b, то любая ее подпоследовательность также сходится к числу b.

4. Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ сходятся, то последовательности $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ и $\{x_n/y_n\}$ также сходятся, причем

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n + y_n\} = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n \cdot y_n\} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

(в частности, $\lim\limits_{n\to\infty} (cx_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} x_n$),

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} \quad \text{(здесь } y_n \neq 0,\ \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0\text{)}.$$

5. Если последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ сходятся и при всех n выполняется неравенство $x_n \leqslant y_n$, то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} y_n$.

6. Если при всех n выполняются неравенства $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = b$, то и $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = b$.

- **Монотонные последовательности.** Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*неубывающей*), если для любого n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} \geqslant x_n$). Последовательность $\{x_n\}$ называется *убывающей* (*невозрастающей*), если для любого n выполняется неравенство $x_{n+1} < x_n$ ($x_{n+1} \leqslant x_n$). Все указанные последовательности называются *монотонными*.

Теорема. Неубывающая (невозрастающая) и ограниченная сверху (соответственно снизу) последовательность имеет конечный предел.

Пример 3. Последовательность $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$, как можно доказать, возрастает и ограничена сверху, следовательно, она сходится. Ее предел обозначается буквой e:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (e \approx 2{,}72).$$

Логарифмы чисел по основанию e называются *натуральными*, а $\log_e x$ обозначается $\ln x$.

Если члены последовательности x_n неограниченно возрастают по абсолютной величине с ростом n, последовательность называется *бесконечно большой* или *«стремящейся к бесконечности»*. Обозначение: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$. Если при этом члены последовательности, начиная с некоторого номера, положительны (отрицательны), то говорят, что x_n стремится к «плюс (минус)

бесконечности», и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$).

Например, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n n^2 = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$.

4.4. Предел функции

- **Определение предела функции.** Число b называется *пределом функции* $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $0 < |x - a| < \delta$.

Обозначения: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to a$.

Число b называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к $+\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $x > N$.

Обозначения: $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b$ или $f(x) \to b$ при $x \to +\infty$.

Аналогичным образом определяются пределы при $x \to -\infty$ и $x \to \infty$.

Односторонние пределы. Число b называется *пределом слева* (*справа*) функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - b| < \varepsilon$ при $a - \delta < x < a$ (соответственно при $a < x < a + \delta$).

Обозначения: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$ или $f(a - 0) = b$ (соответственно $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$ или $f(a + 0) = b$).

- **Свойства пределов.** Пусть a — число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$. Справедливы следующие утверждения:

1. Если функция имеет предел, то этот предел единственный.

2. Если c — константа, то $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

3. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, то

а) $\lim\limits_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) + \lim\limits_{x \to a} g(x)$;

б) $\lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$,

в частности, $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \lim\limits_{x \to a} f(x)$;

в) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ (если $g(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$).

4. Пусть $f(x) \leqslant g(x)$ в некоторой окрестности точки a ($x \neq a$). Тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to a} g(x)$, если эти пределы существуют.

5. Если $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ в некоторой окрестности точки a и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = b$, то $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$.

Указанные свойства верны и для односторонних пределов.

- **Пределы некоторых функций.**

1-й замечательный предел: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

2-й замечательный предел: $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Некоторые другие пределы, находящие частое применение:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n, \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e.$$

4.5. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

• **Определения.** Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если для любого числа $K > 0$ неравенство $|f(x)| > K$ выполняется для всех $x \neq a$ из некоторой окрестности точки a. В этом случае пишут $f(x) \to \infty$ при $x \to a$ или $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$. (В данных определениях a — число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.) Если $f(x)$ — бесконечно большая функция при $x \to a$ и $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) в некоторой окрестности точки a (при $x \neq a$), то пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$).

• **Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.**

1. Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых при $x \to a$ функций являются бесконечно малыми функциями.

2. Произведение бесконечно малой при $x \to a$ функции $f(x)$ на функцию $g(x)$, ограниченную в некоторой окрестности U точки a (т. е. такую, что $|g(x)| < M$ для некоторого числа $M > 0$ и для всех $x \in U$), является бесконечно малой функцией.

3. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ тогда и только тогда, когда $f(x) = b + g(x)$, где $g(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$.

4. Функция $f(x)$ является бесконечно большой тогда и только тогда, когда функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ бесконечно малая.

• **Сравнение бесконечно малых.** Бесконечно малые при $x \to a$ функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *эквивалентными*, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Обозначение: $f(x) \sim g(x)$.

Примеры эквивалентных бесконечно малых:

$$(1+\varepsilon)^n - 1 \sim n\varepsilon,\ a^\varepsilon - 1 \sim \varepsilon \ln a,\ \log_a(1+\varepsilon) \sim \varepsilon \log_a e,$$

$$\sin\varepsilon \sim \varepsilon,\ \operatorname{tg}\varepsilon \sim \varepsilon,\ 1-\cos\varepsilon \sim \frac{1}{2}\varepsilon^2,\ \arcsin\varepsilon \sim \varepsilon,\ \operatorname{arctg}\varepsilon \sim \varepsilon,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$.

Говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ — *бесконечно малые одинакового порядка* при $x \to a$, и пишут $f(x) = O(g(x))$, если $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, $0 < |K| < \infty$.

Замечание. Встречается также другое определение символа O. А именно, $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$, если в некоторой окрестности точки a выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant K|g(x)|$, $K = \text{const}$.

Функция $f(x)$ называется функцией *более высокого порядка малости* по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Обозначение: $f(x) = o(g(x))$.

4.6. Непрерывность

- **Непрерывные функции.** Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x = a$, если она определена в этой точке (и ее окрестности) и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

У непрерывных функций малому изменению аргумента $\Delta x = x - a$ соответствует малое изменение функции $\Delta y = f(x) - f(a)$, т. е. $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$. (Это свойство нередко используют в качестве определения непрерывной функции.)

Функция $f(x)$ называется *непрерывной справа* в точке $x = a$, если она определена в этой точке (и справа от нее) и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$. Функция $f(x)$ называется *непре-*

рывной слева в точке $x = a$, если она определена в этой точке (и слева от нее) и $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$.

- **Свойства непрерывных функций.**

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то функции $f(x) \pm g(x)$, $cf(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(a) \neq 0)$ также непрерывны в этой точке.

2. Если $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) > 0$ $(f(a) < 0)$, то существует такое число $\delta > 0$, что $f(x) > 0$ (соответственно $f(x) < 0$) при $x \in (a - \delta, a + \delta)$.

3. Функция $f(x)$, непрерывная в каждой точке отрезка $[\alpha, \beta]$, ограничена на этом отрезке и достигает на нем своего наибольшего значения M и наименьшего значения m.

4. Непрерывная на отрезке $[\alpha, \beta]$ функция $f(x)$ принимает на этом отрезке любое значение $c \in [m, M]$.

5. Если $f(x)$ непрерывна и возрастает (убывает) на отрезке $[\alpha, \beta]$, то на отрезке $[f(\alpha), f(\beta)]$ (соответственно на отрезке $[f(\beta), f(\alpha)]$) определена непрерывная и возрастающая (убывающая) обратная функция $x = g(y)$.

6. Если функция $u(x)$ непрерывна в точке a, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $b = u(a)$, то сложная функция $f(u(x))$ непрерывна в точке a.

Замечание. Любая элементарная функция непрерывна в каждой точке интервала, входящего в ее область определения.

- **Точки разрыва функции.** Точка a называется *точкой разрыва первого рода* функции $f(x)$, если существуют конечные односторонние пределы $f(a + 0)$ и $f(a - 0)$, но не выполняются соотношения $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$. Величина $|f(a + 0) - f(a - 0)|$ называется *скачком функции* в точке a. В частности, если $f(a + 0) = f(a - 0) \neq f(a)$, то точка a называется *точкой устранимого разрыва*.

Примеры функций с точкой разрыва первого рода.

1. Функция $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0 \\ 1 \text{ при } x \geqslant 0 \end{cases}$ имеет в точке разрыва $x = 0$ скачок, равный 1.

2. Функция $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \neq 0 \\ 1 \text{ при } x = 1 \end{cases}$ имеет устранимый разрыв в точке $x = 0$.

Точка a называется *точкой разрыва второго рода*, если хотя бы один из односторонних пределов $f(a + 0)$, $f(a - 0)$ не существует или равен бесконечности.

Примеры функций с точкой разрыва второго рода.

1. Функция $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ имеет разрыв второго рода в точке $x = 0$ (так как у этой функции не существует односторонних пределов при $x \to \pm 0$).

2. Функция $f(x) = 1/x$ имеет бесконечный разрыв в точке $x = 0$.

4.7. Асимптоты графика функции

Асимптота графика функции $y = f(x)$ — это прямая, расстояние до которой от точки (x, y) на графике функции $y = f(x)$ стремится к нулю, если хотя бы одна из координат (x, y) стремится к бесконечности.

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ при $x \to a$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если выполняется хотя бы одно из предельных соотношений: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - kx - b] = 0$ или $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - kx - b] = 0$.

Если существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx] = b, \qquad (1)$$

то прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика при $x \to +\infty$ (аналогично определяется асимптота при $x \to -\infty$).

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \dfrac{1}{x-1} + x$.

Решение. У графика функции есть вертикальная асимптота $x = 1$, так как в данном случае имеет место бесконечный предел $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} + x \right) = \infty$.

Кроме того, при $x \to \pm\infty$ существует наклонная асимптота $y = kx + b$, коэффициенты которой определяются по формулам (1):

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} + \left[\frac{1}{x(x-1)} + 1 \right] = 1, \quad b = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{1}{x-1} + x - x \right] = 0.$$

В итоге получим уравнение наклонной асимптоты: $y = x$.

5. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

5.1. Производная и дифференциал, их геометрический и физический смысл

• **Производной** $f'(x)$ функции $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ к приращению аргумента Δx при Δx, стремящемся к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Используются такие обозначения производной: $f'(x)$, y', y'_x, $\dot{y}$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Пример 1. Вычислить производную функции $f(x) = x^2$.

Решение. По определению имеем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Приращение Δx называют также дифференциалом независимой переменной и обозначают через dx.

Функция, имеющая производную в точке x, называется *дифференцируемой* в данной точке. Дифференцируемость $f(x)$ в точке x равносильна тому, что приращение функции $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$ в этой точке представимо в виде $\Delta y = f'(x)\, dx + o(dx)$ (второе слагаемое обозначает бесконечно малую более высокого порядка по сравнению с dx при $dx \to 0$).

Если функция дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке. Обратное утверждение неверно: из непрерывности функции не следует ее дифференцируемость.

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой (непрерывно дифференцируемой) на некотором множест-

ве D (интервале, отрезке и т. п.), если в каждой точке $x \in D$ существует (непрерывная) производная $f'(x)$.

Дифференциал dy функции $y = f(x)$ — это главная линейная часть $f'(x)\,dx$ приращения Δy функции в точке x, так что $\Delta y = dy + o(dx)$.

Приближенное равенство $\Delta y \approx dy$ или $f(x + \Delta x) \approx \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x$ (при малых Δx) используется в приближенных вычислениях.

Пример 2. Вычислить приближенно $\sqrt{25{,}5}$.

Решение. Пусть $f(x) = \sqrt{x}$, $x = 25$, $\Delta x = 0{,}5$. Тогда $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f(25) = 5$, $f'(25) = 0{,}1$. Следовательно, $\sqrt{25{,}5} \approx 5 + 0{,}1 \times \times 0{,}5 = 5{,}05$.

- **Физический смысл производной.** Пусть функция $y = f(x)$ описывает координату точки, движущуюся по прямой, в зависимости от времени x. Тогда производная $f'(x)$ есть скорость движения точки в момент времени x.
- **Геометрический смысл производной.** *Касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, называется предельное положение секущей MN при стремлении точки N к точке M по графику функции. Если α — угол между осью x и касательной, то $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ — угловой коэффициент касательной (рис. 16).

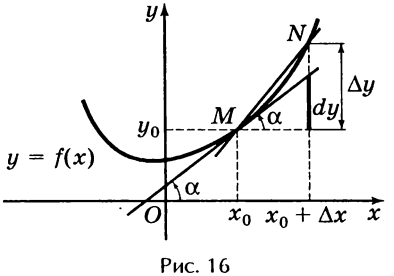


Рис. 16

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где $y_0 = f(x_0)$, $k = f'(x_0)$.

5.2. Таблица производных и правила дифференцирования

Производная любой элементарной функции может быть вычислена на основе знания производных основных элементарных функций и правил дифференцирования.

- **Таблица производных основных элементарных функций:**

$(c)' = 0$ $(c = \text{const})$, $\quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$,

$(e^x)' = e^x$, $\quad (a^x)' = a^x \ln a$,

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $\quad (\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,

$(\sin x)' = \cos x$, $\quad (\cos x)' = -\sin x$,

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $\quad (\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $\quad (\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$,

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $\quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

Часто встречаются также производные гиперболических функций:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,\ (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,\ (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},\ (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Пример 1. Вычислить производные степенных функций:

а) $(x)' = 1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$;

б) $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$;

в) $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$.

- **Правила дифференцирования.**

1. $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$.
2. $[cu(x)]' = cu'(x)$, где $c = \text{const}$.
3. $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$.
4. $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

5. Производная сложной функции вычисляется по формуле $[f(u(x))]' = f'_u(u) \times \times u'(x)$.

6. Если функция $f(x)$ дифференцируема и монотонна на интервале (a, b), $x_0 \in (a, b)$ и $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $x = g(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и справедливо равенство $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

7. Производная параметрически заданной функции $x = p(t)$, $y = q(t)$ вычисляется по формуле $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{q'(t)}{p'(t)}$.

8. Если функция задана неявно в виде уравнения $F(x, y) = 0$, то, дифференцируя по x тождество $F(x, f(x)) = 0$, для определения производной $f'(x)$ получим выражение $y'_x = -F'_x/F'_y$.

Пример 2. Вычислить производную функции $\frac{x^2}{2x+1}$.

Решение. Используя четвертое правило, последовательно получим

$$\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)' = \frac{(x^2)'(2x+1) - x^2(2x+1)'}{(2x+1)^2} =$$

$$= \frac{2x(2x+1) - 2x^2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x}{(2x+1)^2}.$$

Пример 3. Вычислить производные функций: а) $\sin 2x$ и б) $\ln \cos x$.

Решение. Используя правило дифференцирования сложных функций, имеем

а) $(\sin 2x)' = \cos 2x \cdot (2x)' = 2\cos 2x$;

б) $(\ln \cos x)' = \dfrac{1}{\cos x}(\cos x)' = -\operatorname{tg} x$.

Пример 4. Найти производную, если функция $y = f(x)$ задана неявно в виде равенства $e^y - e^{-x} + xy = 0$.

Решение. Дифференцируя равенство, найдем $e^y \cdot y' + e^{-x} + y + x \cdot y' = 0$. Поэтому $y' = -\dfrac{e^{-x} + y}{e^y + x}$.

5.3. Теоремы о дифференцируемых функциях. Правило Лопиталя

- **Основные теоремы о дифференцируемых функциях.**

Теорема Ролля. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$, то найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Это равенство называют формулой *конечных приращений*.

Теорема Коши. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на интервале (a, b) и $g'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a, b)$. Тогда найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

• **Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.** Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы и $g'(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки a $(x \neq a)$. Если $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые или бесконечно большие функции при $x \to a$, т. е. если $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет в точке a неопределенность вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

(при условии, что существует конечный или бесконечный предел отношения производных).

Замечание. Правило Лопиталя применимо и в том случае, когда a представляет собой один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 - e^x}$.

Решение. Используя правило Лопиталя, последовательно имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{1 - e^{-2x}} = \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{(1 - e^{-2x})'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2e^{-2x}} = \frac{\lim\limits_{x \to 0} \cos x}{\lim\limits_{x \to 0} 2e^{-2x}} =$$

$$= \frac{\cos 0}{2e^0} = \frac{1}{2}.$$

Неопределенности вида $(0 \cdot \infty)$ и $(\infty - \infty)$ приводятся к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ с помощью алгебраических преобразований, например $u(x) \cdot v(x) = \frac{u(x)}{1/v(x)}$.

Неопределенности вида (1^∞), (∞^0), (0^0) приводятся к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ с помощью предварительного логарифмирования: $\ln u^v = v \ln u = \frac{\ln u}{1/v}$.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2}$.

Решение. Здесь имеет место неопределенность вида 1^∞, поэтому сначала находим

$$\ln \lim_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2} = \lim \ln (\cos x)^{1/x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{(-\operatorname{tg} x)}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

5.4. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

- **Производной второго порядка** или второй производной функции $f(x)$ называется производная от производной $f'(x)$, которая обозначается y'' или $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ или $f''(x)$. Производная от производной второго порядка называется производной третьего порядка $y''' = (y'')'$. Производная n-го порядка от функции $y = f(x)$ определяется как производная от производной порядка $(n-1)$ и обозначается $y^{(n)}$ или $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ или $f^{(n)}(x)$.

Дифференциалом второго порядка называется дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2y = d(dy)$. Если x — независимая переменная, то справедлива формула $d^2y = y'' \cdot (dx)^2$. Аналогично определяются дифференциалы третьего и других порядков.

- **Формула Тейлора.** Если функция $y = f(x)$ имеет производные до $(n+1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности точки a, то для всех x из этой окрестности справедливо равенство

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + k(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} (0 < k < 1)$ — *остаточный член* формулы Тейлора (в форме Лагранжа).

При $a = 0$ формула Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

и называется *формулой Маклорена*.

Формулы Маклорена для e^x, $\sin x$, $\cos x$ и некоторых других функций могут быть получены из выражений этих функций, приведенных в разд. 11.3, если в указанных выражениях заменить многоточие в конце остаточным членом.

5.5. Экстремумы. Точки перегиба

- **Минимумы и максимумы. Экстремумы.** Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на (a, b), то $f(x)$ *возрастает* (соответственно *убывает*) на этом интервале[1].

Если существует такая окрестность точки x_0, что для всех точек $x \neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$), то x_0 называется точкой *минимума* (*максимума*) функции $f(x)$.

Точки минимума и максимума называются точками *экстремума*.

Точки, в которых производная $f'(x)$ не существует или обращается в нуль, называются *критическими точками* функции $f(x)$.

- **Условия существования экстремума.** *Необходимый признак экстремума*: каждая точка экстремума функции $f(x)$ является критической точкой этой функции.

---

[1] В отдельных точках интервала производная может обращаться в нуль.

Достаточные условия экстремума.

1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ критической точки x_0 и дифференцируема во всех точках этой окрестности, за исключением, быть может, самой точки x_0. Если $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 — точка максимума функции. Если $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 — точка минимума.

Если производная $f'(x)$ сохраняет свой знак при всех $x \neq x_0$, $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то точка x_0 не является точкой экстремума.

2. Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots$ $\ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда, если n — четное, то при $f^{(n)}(x_0) < 0$ точка x_0 является точкой максимума, а при $f^{(n)}(x_0) > 0$ — точкой минимума. Если n — нечетное, то x_0 не является точкой экстремума.

- **Наибольшее и наименьшее значения функции.** Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема во всех точках этого отрезка за исключением, быть может, конечного числа точек. Тогда наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ находятся среди значений $f(a)$, $f(b)$ и значений $f(x_i)$ в критических точках $x_i \in (a, b)$.

- **Направление выпуклости графика функции.** Говорят, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ направлен *выпуклостью вверх* (*выпуклостью вниз*) на интервале (a, b), если этот график в пределах указанного интервала лежит ниже (выше) любой своей касательной.

Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на интервале (a, b) и $f''(x) < 0$ $(f''(x) > 0)$, то график

этой функции направлен на рассматриваемом интервале выпуклостью вверх (вниз). (В отдельных точках интервала вторая производная может обращаться в нуль.)

Таким образом, чтобы найти интервалы, на которых график дважды дифференцируемой функции направлен выпуклостью вверх (вниз), нужно решить неравенство $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$).

- **Точкой перегиба** графика функции $y = f(x)$ называется точка $(x_0, f(x_0))$, в которой график функции переходит с одной стороны касательной на другую. В точке перегиба график функции меняет направление выпуклости.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. Если $f''(x_0) = 0$ и $f''(x)$ меняет свой знак при переходе через точку x_0, то точка $(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба.

5.6. Общая схема исследования функции и построение графика

Общая схема исследования функции и построение графика:

1. Находим область определения функции.
2. Выясняем, является ли функция четной или нечетной, является ли она периодической.
3. Находим асимптоты графика функции.
4. Исследуем функцию на монотонность и экстремумы.
5. Определяем направление выпуклости графика и точки перегиба.

6. Находим точки пересечения графика с осями координат.

7. Строим график функции.

Пример. Исследовать функцию $y = \frac{\ln x}{x}$ и построить ее график.

Решение. Используем общую схему исследования функции.

1. Область определения функции: $0 < x < +\infty$.

2. Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой, так как $\lim\limits_{x \to +0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$. Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 0, \quad b = \lim_{x \to +\infty} (y - kx) = 0.$$

Следовательно, прямая $y = 0$ является горизонтальной асимптотой графика.

3. Производная $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ равна нулю при $\ln x = 1$, следовательно, $x = e$ — критическая точка. При $x \in (0, e)$ имеем $y' > 0$, т. е. на этом интервале функция возрастает. При $x \in (e, +\infty)$ справедливо неравенство $y' < 0$, поэтому здесь функция убывает. При $x = e$ функция достигает максимального значения, равного $y_{\max} = 1/e$.

4. Вторая производная $y'' = \frac{2\ln x - 3}{x^3}$ равна нулю при $x = e^{3/2}$. На интервале $(0, e^{3/2})$ имеем $y'' < 0$, поэтому здесь график функции обращен выпуклостью вверх. При $x \in (e^{3/2}, +\infty)$ справедливо неравенство $y'' > 0$, и на этом интервале график обращен выпуклостью вниз. Значению $x = e^{3/2}$ соответствует точка перегиба с ординатой $y = \frac{3}{2} e^{-3/2}$.

5. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как допустимы лишь значения $x > 0$, и равенства $f(-x) = f(x)$ и $f(x) = -f(x)$ выполняться не могут. Очевидно, что функция непериодическая.

6. График не пересекает ось y, так как при $x = 0$ функция не определена. Далее, $y = 0$ лишь при $x = 1$, т. е. график пересекает ось x только в точке $(1, 0)$.

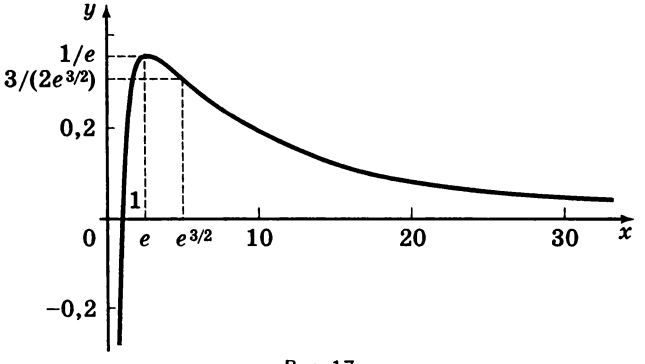


Рис. 17

7. Используя результаты исследования, строим график функции (рис. 17). Заметим, что функция стремится к горизонтальной асимптоте $y = 0$ при $x \to \infty$ очень медленно.

6. Функции нескольких переменных

6.1. Точечные множества. Функции. Предел и непрерывность

• **Множества на плоскости и в пространстве.** *Окрестностью* радиуса ε точки M_0 (на плоскости или в пространстве) называется множество точек M таких, что $\rho(M_0, M) < \varepsilon$, где $\rho(M_0, M)$ — расстояние между точками M_0 и M (соответствующие формулы для ρ приведены в разд. 1.1 и разд. 2.1). *Внутренней точкой* множества D называется такая точка, в некоторой окрестности которой лежат только точки из D. *Открытым* называется множество, все точки которого внутренние. *Граничной точкой* множества D называется точка, в любой окрестности которой находятся как точки множества D, так и точки, не принадлежащие D. *Замкнутым* называется множество, содержащее все свои граничные точки. *Ограниченным* называется множество, которое содержится в некоторой окрестности начала координат; если такой окрестности не существует, множество называется *неограниченным.*

• **Функции двух и трех переменных.** Говорят, что на множестве D задана (числовая) *функция,* если каждой точке $M \in D$ поставлено в соответствие единственное число. Если множество D принадлежит плоскости, то точка $M \in D$ определяется двумя координатами x, y, и функция $z = f(M) = f(x, y)$ называется *функцией двух переменных*; если D лежит в пространстве, то говорят о *функции трех переменных.* Множество D называется *областью определения* функции. Например, функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ определена в замкнутом круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Графиком функции двух переменных является поверхность в трехмерном пространстве. Например, гра-

фиком функции $z = ax + by + c$ является плоскость, а функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ — полусфера.

Линия уровня функции $z = f(x, y)$ — это линия на плоскости x, y, во всех точках которой функция принимает одно и то же значение $z = c$; уравнение линии уровня: $f(x, y) = c$. *Поверхность уровня* функции $u = f(x, y, z)$ — это поверхность, во всех точках которой функция принимает одно и то же значение $u = c$; уравнение поверхности уровня: $f(x, y, z) = c$.

Функция $f(M)$ называется *ограниченной* на множестве D, если существует такая константа C, что для всех $M \in D$ выполняется неравенство $|f(M)| \leqslant C$.

- **Предел и непрерывность.** Пусть переменная точка M стремится к точке M_0, т. е. расстояние $\rho = \rho(M_0, M) \to 0$. При этом значения функции $f(M)$ могут стремиться к некоторой константе b.

Число b называется *пределом функции* $f(M)$ в точке M_0, если для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех точек M из области определения функции, удовлетворяющих условию $0 < \rho(M_0, M) < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(M) - b| < \varepsilon$. Записывают это так: $\lim\limits_{\rho \to 0} f(M) = b$.

Функция $f(M)$ называется *непрерывной* в точке M_0, если $\lim\limits_{\rho \to 0} f(M) = f(M_0)$. Функция называется *непрерывной на множестве* D, если она непрерывна в каждой точке D. Если функция $f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она ограничена на этом множестве и достигает на нем своих наибольшего и наименьшего значений.

6.2. Дифференцирование функций нескольких переменных

Для краткости ограничимся случаем функции двух переменных, однако все утверждения легко обобщаются на случай функций любого числа переменных.

• **Приращения и частные производные.** Приращением функции $z = f(x, y)$ в точке (x, y) называется величина

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

где Δx, Δy — приращения независимых переменных. *Частными приращениями* по x и по y называются соответственно величины

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y),$$
$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Частными производными функции z по x и по y в точке (x, y) называются соответственно величины

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

(при условии, что эти пределы существуют). Для частных производных используются также другие обозначения: z'_x, $f'_x(x, y)$ и z'_y, $f'_y(x, y)$ (иногда штрихи опускают).

• **Дифференцируемые функции. Дифференциал.** Функция $z = f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке (x, y), если ее приращение в этой точке представимо в виде

$$\Delta z = A(x, y)\,\Delta x + B(x, y)\,\Delta y + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

где $o(\rho)$ — величина более высокого порядка малости по сравнению с ρ при $\rho \to 0$ (т. е. $o(\rho)/\rho \to 0$ при $\rho \to 0$). В этом случае в точке (x, y) существуют частные производные, причем $z'_x = A(x, y)$, $z'_y = B(x, y)$.

Обратно, если функция имеет в точке (x, y) непрерывные частные производные, то она дифференцируема в этой точке.

Дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется величина

$$dz = f'_x(x, y)\,\Delta x + f'_y(x, y)\,\Delta y,$$

которую (полагая дифференциалы dx и dy независимых переменных равными соответственно Δx и Δy) записывают также в виде $dz = f'_x(x, y)\,dx + f'_y(x, y)\,dy$.

Соотношение $\Delta z = dz + o(\rho)$ при малых Δx и Δy широко используется в приближенных вычислениях, в частности, при подсчете погрешности вычисления значений функции.

Пример 1. Пусть значения аргументов функции $z = x^2y^5$ известны с погрешностью: $x = 2 \pm 0{,}01$, $y = 1 \pm 0{,}01$. Подсчитаем приближенно значение функции.

Решение. Имеем в точке $x = 2$, $y = 1$: $\Delta z \approx dz = 2 \cdot 2 \cdot 1^5 \times \times 0{,}01 + 5 \cdot 2^2 \cdot 1^4 \cdot 0{,}01 = 0{,}24$ (при $\Delta x = \Delta y = 0{,}01$). Поэтому можно считать $z = 4 \pm 0{,}24$.

Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке (x_0, y_0), то

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \\ + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\rho).$$

Отсюда при малых ρ, т. е. при $x \approx x_0$, $y \approx y_0$, получается приближенная формула

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Замена функции таким линейным выражением вблизи данной точки называется *линеаризацией*.

- **Сложная функция.** Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, причем $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$. Пусть для $(u, v) \in D$ функции $x(u, v)$, $y(u, v)$ принимают значения, при которых функция $z = f(x, y)$ определена. Тем самым на множестве D задается функция $z(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$, которая называется сложной функцией; при этом функция $f(x, y)$ называется внешней, а $x(u, v)$, $y(u, v)$ — внутренними функциями.

Частные производные сложной функции находятся по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Пусть $z = z(t, x, y)$, причем $x = x(t)$, $y = y(t)$. Тогда z, в конечном счете, зависит только от t. Производная $\frac{dz}{dt}$ вычисляется по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Эта производная $\left(\text{в отличие от частной производной } \frac{\partial z}{\partial t}\right)$ называется *полной производной*.

● **Вторые частные производные и вторые дифференциалы.** *Вторыми частными производными* функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее первых частных производных. Их обозначают так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} \equiv (z'_x)'_x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} \equiv (z'_x)'_y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} \equiv (z'_y)'_x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} \equiv (z'_y)'_y.$$

Производные z''_{xy} и z''_{yx} называются *смешанными*. Если в рассматриваемой точке смешанные производные непрерывны, то они равны в этой точке.

Аналогично определяются частные производные более высоких порядков.

Вторым дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется выражение

$$d^2z = d(dz) = (dz)'_x \Delta x + (dz)'_y \Delta y =$$
$$= z''_{xx}(\Delta x)^2 + 2z''_{xy}\Delta x \Delta y + z''_{yy}(\Delta y)^2.$$

Аналогично определяются d^3z, d^4z и т. д.

● **Формула Тейлора.** Если в точке (x, y) функция $z = f(x, y)$ имеет частные производные до n-го порядка включительно, то ее приращение Δz в данной точке можно записать в виде

$$\Delta z = dz + \frac{d^2z}{2!} + \frac{d^3z}{3!} + \ldots + \frac{d^nz}{n!} + o(\rho^n),$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

- **Неявные функции и их дифференцирование.** Уравнение $F(x, y) = 0$, имеющее решение (x_0, y_0), определяет в окрестности x_0 переменную y как непрерывную функцию x при условии, что производная $F'_y(x, y) \neq 0$ и непрерывна в некоторой окрестности точки (x_0, y_0). Если, кроме того, в окрестности этой точки существует непрерывная производная F'_x, то неявная функция $y = y(x)$ имеет производную, определяемую по формуле $\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$.

Рассмотрим теперь уравнение $F(x, y, z) = 0$, связывающее переменные x, y, z. Если $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ и в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) существуют непрерывные частные производные F'_x, F'_y, F'_z, причем $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, то уравнение $F(x, y, z) = 0$ в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0,)$ имеет единственное решение $z = \varphi(x, y)$ такое, что $\varphi(x_0, y_0) = z_0$; при этом функция $z = \varphi(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные, которые определяются по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Пример 2. Для уравнения $x^2 + x \sin y + 2z + e^z = 0$ имеем $F'_z = 2 + e^z \neq 0$. Значит, данное уравнение задает всюду определенную функцию $z = \varphi(x, y)$, частные производные которой равны $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x + \sin y}{2 + e^z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x \cos y}{2 + e^z}$.

6.3. Производная по направлению. Геометрические приложения

- **Производная по направлению.** Говорят, что в некоторой области плоскости задано *скалярное поле*, если каждой точке $M(x, y)$ этой области сопоставлено определенное число $z = f(M) = f(x, y)$. Примерами скаляр-

ных полей могут служить поле температур, поле давлений и др. *Линией уровня* поля называют линию уровня задающей его функции (см. разд. 6.1). Такими линиями являются изотермы для поля температур, изобары для поля давлений и т. п.

Для изучения поведения поля $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ в направлении вектора $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$ следует через M_0 провести прямую с направляющим вектором $\vec{a}$ (ее уравнения $x = x_0 + a_1 t$, $y = y_0 + a_2 t$) и исследовать функцию $z(t) = f(x_0 + a_1 t, y_0 + a_2 t)$. Производная функции $z(t)$ в точке M_0 (т. е. при $t = 0$) характеризует скорость изменения поля в этой точке в направлении $\vec{a}$. Если величину $z'(0)$ разделить на $|\vec{a}|$, то получим *производную по направлению* $\vec{a}$ от данного скалярного поля в данной точке:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|}\,[a_1 f'_x(x_0, y_0) + a_2 f'_y(x_0, y_0)],$$

где $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Градиентом скалярного поля $z = f(x, y)$ называется вектор-функция

$$\operatorname{grad} f = f'_x(x, y)\vec{i} + f'_y(x, y)\vec{j}.$$

В каждой точке поля градиент ортогонален к линии уровня, проходящей через эту точку; он показывает направление наибольшего роста поля. При помощи градиента производная по направлению может быть записана в виде

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\operatorname{grad} f.$$

Замечание. Все изложенное допускает очевидное обобщение на случай пространственного скалярного поля.

- **Геометрические приложения теории функций нескольких переменных.** *Уравнение касательной плоскости* к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, имеет вид

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Вектор нормали к поверхности в этой точке:

$$\vec{n} = \{-f'_x(x_0, y_0), -f'_y(x_0, y_0), 1\}.$$

Если поверхность задается неявно уравнением $\Phi(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$\Phi'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \Phi'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \\ + \Phi'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

а вектор нормали к поверхности в этой точке

$$\vec{n} = \{\Phi'_x(x_0, y_0, z_0), \Phi'_y(x_0, y_0, z_0), \Phi'_z(x_0, y_0, z_0)\}.$$

Пусть поверхность задается параметрически уравнениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

или, в векторной записи, $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, где $\vec{r} = \{x, y, z\}$, и пусть $M_0(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ — точка поверхности, отвечающая значениям параметров $u = u_0$, $v = v_0$. Тогда вектор нормали к поверхности в точке M_0 можно найти по формуле

$$\vec{n}(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix},$$

где все частные производные вычисляются в точке M_0.

6.4. Экстремумы функций нескольких переменных

• **Необходимое и достаточные условия экстремума функций двух переменных.** Точка (x_0, y_0) называется *точкой минимума* (*максимума*) функции $z = f(x, y)$,

если в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) функция определена и удовлетворяет неравенству $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ (соответственно $f(x, y) < f(x_0, y_0)$). Точки максимума и минимума называются *точками экстремума* функции.

Необходимое условие экстремума. Если в точке экстремума функция имеет первые частные производные, то они обращаются в этой точке в нуль. Отсюда следует, что для нахождения точек экстремума такой функции $z = f(x, y)$ следует решить систему уравнений

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

Точки, координаты которых удовлетворяют этой системе, называются *критическими точками* функции. Среди них могут быть точки максимума, точки минимума, а также точки, не являющиеся точками экстремума.

Достаточные условия экстремума используются для выделения точек экстремума из множества критических точек и перечислены ниже.

Пусть функция $z = f(x, y)$ имеет в критической точке непрерывные вторые частные производные. Если в этой точке выполняется условие

$$\Delta = f''_{xx} f''_{yy} - (f''_{xy})^2 > 0,$$

то она является точкой минимума при $f''_{xx} > 0$ и точкой максимума при $f''_{xx} < 0$. Если в критической точке $\Delta < 0$, то она не является точкой экстремума. В случае $\Delta = 0$ требуется более тонкое исследование характера критической точки, которая в этом случае может быть точкой экстремума, а может и не быть таковой.

- **Экстремумы функций трех переменных.** В случае функции трех переменных определения точек экстремума дословно повторяют соответствующие определения для функции двух переменных. Ограничимся изложением порядка исследования функции $u = \Phi(x, y, z)$ на экстремум. Решая систему уравнений

$$\Phi'_x(x, y, z) = 0, \quad \Phi'_y(x, y, z) = 0, \quad \Phi'_z(x, y, z) = 0,$$

следует найти критические точки функции, а затем в каждой из критических точек вычислить величины

$$\Delta_1 = \Phi''_{xx}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} \\ \Phi''_{xy} & \Phi''_{yy} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \Phi''_{xx} & \Phi''_{xy} & \Phi''_{xz} \\ \Phi''_{xy} & \Phi''_{yy} & \Phi''_{yz} \\ \Phi''_{xz} & \Phi''_{yz} & \Phi''_{zz} \end{vmatrix}.$$

Если все три величины положительны, то рассматриваемая критическая точка является точкой минимума; если $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, то данная критическая точка является точкой максимума.

- **Условный экстремум функции двух переменных.** Точка (x_0, y_0) называется *точкой условного минимума* (*максимума*) функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$, если существует окрестность точки (x_0, y_0), в которой функция $z = f(x, y)$ определена и в которой $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ (соответственно $f(x, y) < f(x_0, y_0)$) для всех точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению $\varphi(x, y) = 0$.

Для нахождения точек условного экстремума используют *функцию Лагранжа*

$$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

где число λ называется *множителем Лагранжа*. Решая систему трех уравнений

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} = 0,$$

находят критические точки функции Лагранжа (а также значение вспомогательного множителя λ). В этих критических точках может быть условный экстремум. Приведенная система дает лишь необходимые условия экстремума, но не достаточные: ей могут удовлетворять координаты точек, не являющихся точками условного экстремума. Однако, исходя из существа задачи, часто удается установить характер критической точки.

Пример. Найти кратчайшее расстояние от точки (a, b) до линии

$$Ax + By + C = 0. \qquad (1)$$

Решение. Квадрат расстояния от данной точки до произвольной точки (x, y) дается формулой

$$r^2 = (a - a)^2 + (y - b)^2. \qquad (2)$$

В рассматриваемом случае координаты (x, y) должны удовлетворять уравнению (1) (точка должна быть на линии). Найдем минимум выражения (2) при условии (1).

Составим функцию Лагранжа. Учитывая, что $f(x, y) = r^2$, $\varphi(x, y) = Ax + By + C$, получим

$$\Phi(x, y, \lambda) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + \lambda(Ax + By + C).$$

Приравняем частные производные функции Φ по x, y, λ нулю:

$$2(x - a) + \lambda A = 0, \quad 2(y - b) + \lambda B = 0, \quad Ax + By + C = 0.$$

Решив эту линейную систему уравнений, имеем

$$x = a - \frac{1}{2}A\lambda, \quad y = b - \frac{1}{2}B\lambda, \quad \lambda = \frac{2(Aa + Bb + C)}{A^2 + B^2}. \qquad (3)$$

Мы получили единственное решение, и так как наименьшее значение должно существовать (из геометрических соображений), то ему и должны соответствовать найденные значения переменных. Подставив значения (3) в выражение (2), после извлечения квадратного корня найдем минимальное расстояние от точки до плоскости

$$r_{\min} = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

- **Условный экстремум функции многих переменных.** Рассмотрим функцию n переменных $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при условии, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ связаны m уравнениями $(m < n)$:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Чтобы найти значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых у функции f могут быть условные максимумы и минимумы, составляют функцию Лагранжа

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m\varphi_m$$

и приравнивают нулю ее частные производные по всем переменным $x_1, \ldots, x_n$ и параметрам $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Из полученных $n + m$ уравнений определяют $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (а также значения всех вспомогательных неизвестных $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — множителей Лагранжа). Как и для функций двух переменных вопрос о том, будет ли при найденных значениях аргументов заданная функция иметь условный экстремум или нет, требует дополнительного исследования.

7. Неопределенный интеграл

7.1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства

- **Первообразной** для функции $f(x)$ на данном интервале называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$ (для всех x из данного интервала):

$$F'(x) = f(x).$$

Пример 1. Пусть $f(x) = 2x$. Тогда функции $F(x) = x^2$ и $F_1(x) = x^2 - 3$ являются первообразными для функции $f(x)$, так как $(x^2)' = 2x$ и $(x^2 - 3)' = 2x$.

Каждая непрерывная в интервале (a, b) функция $f(x)$ имеет бесконечное множество первообразных на (a, b). Если $F(x)$ — одна из них, то всякая другая имеет вид $F(x) + C$, где C — постоянная величина.

- **Неопределенным интегралом** от функции $f(x)$ называется совокупность $F(x) + C$ всех ее первообразных:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Здесь $f(x)\,dx$ называется *подынтегральным выражением*, $f(x)$ — *подынтегральной функцией*. Вычисление неопределенного интеграла от данного подынтегрального выражения называется интегрированием. Дифференциал dx указывает на то, что интегрирование ведется по переменной x.

Пример 2. $\int 6x^2\,dx = 2x^3 + C$, так как $(2x^3)' = 6x^2$.

- **Свойства неопределенного интеграла.**

$$1.\ d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx, \quad \left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x).$$

2. $\int dF(x) = F(x) + C, \quad \int F'(x)\,dx = F(x) + C.$

3. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx \quad (a = \text{const}).$

4. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

7.2. Таблица основных интегралов. Примеры интегрирования

● **Таблица основных интегралов.** Ниже приведены простейшие интегралы, знание которых необходимо для интегрирования более сложных выражений:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \qquad \int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad (m \neq -1),$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \qquad \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C, \qquad \int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \qquad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + b}\right| + C.$$

Более подробная таблица неопределенных интегралов приведена в приложении 2.

● **Примеры непосредственного интегрирования.** В отличие от вычисления производной, не существует общих правил, позволяющих проинтегрировать любую заданную функцию. Многие интегралы вооб-

ще не выражаются через элементарные функции, например, $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Применение свойств 3 и 4 из разд. 7.1 часто позволяет свести интегрирование к табличным формулам.

Пример 1. $\int \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{3}\right) dx = \frac{1}{2}\int x^{-1/2}\,dx -$

$$- \int x^{-3}\,dx + \frac{1}{3}\int x^{1/3}\,dx = x^{1/2} + \frac{x^{-2}}{2} + \frac{x^{4/3}}{4} + C =$$

$$= \sqrt{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{x\sqrt[3]{x}}{4} + C.$$

Возможности применения табличных формул связаны также с тем, что под знаком дифференциала может стоять любая функция $z(x)$. В этом случае подынтегральная функция должна быть табличной функцией, зависящей от $z(x)$.

Пример 2. $\int e^{z(x)}\,dz(x) = e^{z(x)} + C.$

Пример 3. $\int \frac{d\sin x}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$

Преобразование интеграла к табличному часто достигается при помощи внесения некоторой функции под знак дифференциала.

Пример 4. $\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \int \frac{-d\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

Пример 5. $\int \sqrt{2x+1}\,dx = \int (2x+1)^{1/2}\,\frac{1}{2}\,d(2x+1) =$

$$= \frac{(2x+1)^{3/2}}{3} + C.$$

Интегралы вида $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ вычисляются при помощи выделения полного квадрата:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c.$$

После этого, заменив dx на равный ему дифференциал $d\left(x+\frac{b}{2a}\right)$, используют одну из четырех последних формул, приведенных выше в таблице основных интегралов.

Пример 6. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \arcsin(x-1)+C.$

7.3. Интегрирование по частям. Метод замены переменной

- **Интегрирование по частям** — это интегрирование по формуле

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (1)$$

Этот метод позволяет вычислять интегралы следующих видов:

A. $\int P(x)\,e^{ax}\,dx$, $\int P(x)\cos(ax)\,dx$, $\int P(x)\sin(ax)\,dx$;

B. $\int P(x)\ln x\,dx$, $\int P(x)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, $\int P(x)\arcsin x\,dx$,

где $P(x)$ — многочлен.

Для интегралов типа A в формуле (1) полагаем $P(x)=u$, а для интегралов типа B полагаем $P(x)\,dx=dv$.

Пример 1. Вычислить интеграл $\int (3x+1)\,e^{2x}\,dx$.

Решение. Полагая $u=3x+1$, $dv=e^{2x}\,dx$, находим $du = 3\,dx$, $v=\frac{1}{2}e^{2x}$. Поэтому $\int (3x+1)\,e^{2x}dx = \frac{1}{2}(3x+1)\,e^{2x} - \frac{3}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}(3x+1)\,e^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}+C = \left(\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\right)e^{2x}+C.$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \ln x\,dx$.

Решение. Полагая $u=\ln x$, $dv=dx$, находим $du=\frac{dx}{x}$, $v=x$. Поэтому $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$

С помощью интегрирования по частям можно вычислять интегралы вида

$$\int P(x)\, e^{ax} \sin(bx)\, dx, \quad \int P(x)\, e^{ax} \cos(bx)\, dx,$$

где $P(x)$ — многочлен, а также ряд других интегралов.

• **Метод замены переменной.** Замена переменной (иногда называемая также подстановкой) состоит в том, что вместо переменной x в подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ вводится функция $x = h(z)$. В результате получим

$$\int f(x)\, dx = \int f(h(z))\, h'(z)\, dz,$$

причем в случае удачно подобранной замены последний интеграл проще исходного.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int x\sqrt{1-x}\; dx$.

Решение. Сделаем замену $\sqrt{1-x} = z$. Тогда $x = 1 - z^2$, $dx = -2z\, dz$ и $\int x\sqrt{1-x}\; dx = -\int (1-z^2)z\, 2z\, dz = -\frac{2}{3}z^3 + \frac{2}{5}z^5 + C = -\frac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3} + \frac{2}{5}\sqrt{(1-x)^5} + C$.

Пример 4. Вычислить интеграл $\int \frac{e^{3x}dx}{e^x+2}$.

Решение. Сделаем замену $e^x = z$. Тогда $x = \ln z$, $dx = \frac{dz}{z}$.

Поэтому $\int \frac{e^{3x}dx}{e^x+2} = \int \frac{x^2 dz}{z+2} = \int \left(z - 2 + \frac{4}{z+2}\right) dz = \frac{1}{2}z^2 - 2z + 4\ln|z+2| + C = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + 4\ln(e^x+2) + C$.

В разд. 7.4 — 7.6 указаны типичные замены, позволяющие вычислять некоторые более сложные интегралы.

7.4. Интегрирование рациональных функций

• **Описание метода.** *Рациональной функцией* или *рациональной дробью* называется отношение многочленов

$$R(x) = \frac{b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0}. \qquad (2)$$

Если $m < n$, то дробь (2) называется *правильной;* если $m \geqslant n$ — *неправильной.*

Каждую правильную дробь можно разложить на сумму простейших дробей. Для этого знаменатель дроби следует разложить на простые множители вида

$$(x - \lambda_k)^{p_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, K,$$

$$(x^2 + \beta_s x + \gamma_s)^{q_s}, \quad s = 1, 2, \ldots, S,$$

где p_k, q_s, — натуральные числа, $\beta_s^2 - 4\gamma_s < 0$. Каждому такому множителю в разложении рациональной функции (2) на простейшие дроби отвечает столько слагаемых, какова степень соответствующего множителя:

$$\frac{A_{ki}}{(x - \lambda_k)^i}, \quad i = 1, 2, \ldots, p_k,$$

$$\frac{B_{sj} x + D_{sj}}{(x^2 + \beta_s x + \gamma_s)^j}, \quad j = 1, 2, \ldots, q_s.$$

Для определения неизвестных постоянных A_{ki}, B_{sj}, D_{sj} приравнивают исходную рациональную дробь сумме указанных простейших дробей и приводят обе части полученного выражения к общему знаменателю. Выделяя затем коэффициенты при одинаковых степенях x, приходят к системе линейных уравнений относительно A_{ki}, B_{sj}, D_{sj}.

Интегралы от наиболее часто встречающихся простейших дробей находятся по формулам (постоянная интегрирования C опускается):

$$\int \frac{A}{x-\lambda}\,dx = A\ln|x-\lambda|,\ \int \frac{A}{(x-\lambda)^p}\,dx = -\frac{A}{(p-1)(x-\lambda)^{p-1}},$$

$$\int \frac{Bx+D}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \frac{B}{2}\ln(x^2+\beta x+\gamma) + \frac{2D-B\beta}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+\beta}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}.$$

Для интегрирования неправильной дроби следует при помощи деления с остатком выделить правильную часть. В итоге неправильная дробь представляется в виде суммы многочлена и правильной дроби, которые интегрируются отдельно.

- **Примеры интегрирования рациональных функций.**

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \frac{3x^2-x-2}{x^3+8}\,dx$.

Решение. Представив знаменатель подынтегрального выражения в виде произведения $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$, разложим (правильную) подынтегральную дробь на сумму простейших:

$$\frac{3x^2-x-2}{(x+2)(x^2-2x+4)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+D}{x^2-2x+4}.$$

Приведя сумму дробей в правой части этого равенства к общему знаменателю и приравняв числитель полученной дроби к числителю исходной дроби, имеем

$$3x^2-x-2 = A(x^2-2x+4)+(Bx+D)(x+2).$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при x^2, x и свободные члены этого тождества, получим систему уравнений для A, B, D:

$$A+B=3,\ -2A+2B+D=-1,\ 4A+2D=-2.$$

Находим ее решение: $A=1$, $B=2$, $D=-3$. Поэтому

$$\int \frac{3x^2-x-2}{x^3+8}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx + \int \frac{2x-3}{x^2-2x+4}\,dx =$$

$$= \ln|x+2| + \int \frac{2x-2}{x^2-2x+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2-2x+4}\,dx =$$

$$= \ln|x+2| + \int \frac{d(x^2-2x+4)}{x^2-2x+4} - \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+3} =$$

$$= \ln|x+2| + \ln(x^2-2x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Пример 2. Вычислить интеграл

$$\int \frac{b_4x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0}{(x-a)^3(x^2+c^2)}\,dx.$$

Решение. Разложим дробь в подынтегральном выражении на сумму простейших дробей

$$\frac{b_4x^4+b_3x^3+b_2x^2+b_1x+b_0}{(x-a)^3(x^2+c^2)} =$$

$$= \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \frac{Bx+D}{x^2+c^2}.$$

Приведем обе части к общему знаменателю и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x. В результате получим систему линейных уравнений, откуда определим постоянные A_1, A_2, A_3, B, D. Вычисление исходного интеграла сводится к вычислению четырех интегралов от простейших дробей, для чего используются формулы, указанные перед первым примером.

Пример 3. Вычислить интеграл $\int \frac{x^2}{x-1}\,dx$.

Решение. $\int \frac{x^2}{x-1}\,dx = \int \left(x+1+\frac{1}{x-1}\right)dx =$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| + C.$$

Некоторые интегралы, приводящиеся к интегралам от рациональных функций, рассмотрены в разд. 7.5, 7.6.

7.5. Интегрирование иррациональных функций

- **Интегралы, приводящиеся к интегралам от рациональных функций.** Интегрирование некоторых иррациональных функций сводится к интегрированию ра-

циональных функций при помощи подходящей замены. Далее считается, что $R(x, y)$ — рациональная функция своих аргументов.

1. Интеграл вида $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx$ вычисляется с помощью подстановки $z = \sqrt[n]{ax+b}$. (Частный случай такого преобразования использован при решении третьего примера в разд. 7.3.)

2. Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+k}}\right)dx$ вычисляется с помощью подстановки $z = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+k}}$.

● **Применение тригонометрических подстановок.** Рассмотрим интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$.

Функция $\sqrt{ax^2+bx+c}$ при помощи выделения полного квадрата из подкоренного выражения приводится к одному из следующих видов $\left(p = -\frac{1}{2}\,b/a\right)$:

$$1)\ \sqrt{a}\,\sqrt{(x-p)^2+q^2}, \quad a>0;$$

$$2)\ \sqrt{a}\,\sqrt{(x-p)^2-q^2}, \quad a>0;$$

$$3)\ \sqrt{-a}\,\sqrt{q^2-(x-p)^2}, \quad a<0.$$

В каждом из этих трех случаев применяют различные подстановки:

$$1)\ x-p = q\,\mathrm{tg}\,t, \quad \sqrt{(x-p)^2+q^2} = \frac{q}{\cos t}, \quad dx = \frac{q\,dt}{\cos^2 t};$$

$$2)\ x-p = \frac{q}{\cos t}, \quad \sqrt{(x-p)^2-q^2} = q\,\mathrm{tg}\,t, \quad dx = \frac{q\,\sin t\,dt}{\cos^2 t};$$

$$3)\ x-p = q\sin t, \quad \sqrt{q^2-(x-p)^2} = q\cos t, \quad dx = q\cos t\,dt.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int \sqrt{6+4x-2x^2}\,dx$.

Решение. Здесь $a = -2$ и подынтегральное выражение можно представить в виде: $\sqrt{6+4x-2x^2} = \sqrt{2}\,\sqrt{3+2x-x^2}\,dx = \sqrt{2}\,\sqrt{4-(x-1)^2}$. Поэтому рассматриваемый интеграл соответствует случаю 3) при $p = 1$, $q = 2$. Делая подстановку $x - 1 = 2\sin t$, $dx = 2\cos t\,dt$, последовательно имеем

$$\int \sqrt{6+4x-2x^2}\,dx = 4\sqrt{2}\int \cos^2 t\,dt = 2\sqrt{2}\int (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\,t + \sqrt{2}\sin 2t + C =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\arcsin\frac{x-1}{2} + \sqrt{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x-1}{2}\right) + C =$$

$$= 2\sqrt{2}\,\arcsin\frac{x-1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x-1)\sqrt{4-(x-1)^2} + C.$$

- **Интеграл от дифференциального бинома вида** $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$ (где a и b — постоянные, а n, m, p — рациональные числа) выражается в элементарных функциях в трех случаях:

1) p — целое число (используется замена $x = t^r$, где r — наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n);

2) $\frac{m+1}{n}$ — целое число (используется замена $a + bx^n = t^s$, где s — знаменатель дроби p);

3) $\frac{m+1}{n} + p$ — целое число (используется замена $ax^{-n} + b = t^s$, где s — знаменатель дроби p).

7.6. Интегрирование показательных и тригонометрических функций

- **Интегрирование показательных и гиперболических функций.**

1. Интеграл вида $\int R(e^{nx}, e^{mx})\,dx$, где $R(x, y)$ — рациональная функция своих аргументов, n, m — целые

числа, вычисляется с помощью подстановки $z = e^x$. (Частный случай такого преобразования использован при решении четвертого примера в разд. 7.3.)

2. Интеграл вида $\int R(\operatorname{sh} ax, \operatorname{ch} ax)\, dx$ вычисляется путем перехода от гиперболических функций к показательным по формулам

$$\operatorname{sh} ax = \frac{1}{2}(e^{ax} - e^{-ax}), \quad \operatorname{ch} ax = \frac{1}{2}(e^{ax} + e^{-ax})$$

с последующей заменой $z = e^{ax}$.

- **Интегрирование тригонометрических функций.**

1. Интегралы вида

$$\int \sin ax \cos bx\, dx, \quad \int \cos ax \cos bx\, dx, \quad \int \sin ax \sin bx\, dx$$

вычисляются при помощи следующих формул:

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)].$$

2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ (m, n — целые числа) вычисляются следующим образом.

При нечетном m используется замена $\cos x = z$, $\sin x\, dx = -dz$.

При нечетном n — замена $\sin x = z$, $\cos x\, dx = dz$.

Если обе степени m и n — четные и неотрицательные, то применяются формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int \sin^5 x\, dx$.

Решение. Используя тригонометрические формулы, последовательно имеем:

$$\int \sin^5 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 \sin x\,dx = -\int (1-\cos^2 x)^2\,d\cos x =$$

$$= -\int (1-z^2)^2\,dz = \frac{2}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5 - z + C = \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x - \cos x + C.$$

Здесь была использована замена $z = \cos x$.

3. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R — рациональная функция своих аргументов, сводится к интегралам от рациональных дробей с помощью универсальной тригонометрической подстановки:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},\quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int \frac{dx}{2+\sin x}$.

Решение. Используя универсальную тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, имеем:

$$\int \frac{dx}{2+\sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{2t}{1+t^2}+2\right)} = \int \frac{dt}{t^2+t+1} =$$

$$= 2\int \frac{d(2t+1)}{(2t+1)^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + C.$$

Если подынтегральное выражение зависит от $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ или от $\operatorname{tg} x$, удобнее применять подстановку $t = \operatorname{tg} x$.

8. Определенный интеграл

8.1. Основные определения. Геометрический смысл определенного интеграла

• **Основные определения.** Множество точек $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ таких, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, задает *разбиение* отрезка $[a, b]$ на n отрезков. Разбиение будем обозначать $\mathscr{L}_n$, а наибольшую из длин $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ — через $\lambda = \lambda(\mathscr{L}_n)$ (эту величину называют *диаметром разбиения*). Пусть на $[a, b]$ задана ограниченная функция $y = f(x)$. Возьмем на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную «опорную» точку c_i и составим сумму $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$, которая называется *интегральной суммой*.

Если при $\lambda(\mathscr{L}_n) \to 0$ существует конечный предел $\mathscr{I}$ интегральных сумм s_n, который не зависит ни от вида разбиений $\mathscr{L}_n$, ни от выбора «опорных» точек, то такой предел обозначается $\int_a^b f(x)\,dx$ и называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ по отрезку $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} s_n.$$

Эта запись означает, что для любого (сколь угодно малого) $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех $\mathscr{L}_n$ с диаметром $\lambda < \delta$ и для произвольного множества «опорных» точек будет выполняться неравенство $|s_n - \mathscr{I}| < \varepsilon$.

Если $\int_a^b f(x)\,dx$ существует, то функция $y = f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a, b]$. Функция, непрерывная на $[a, b]$, интегрируема на этом отрезке.

Если $a > b$ и $f(x)$ интегрируема на отрезке $[b, a]$, то по определению $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$. Кроме того, полагают $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

- **Геометрический смысл определенного интеграла.** Если $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, то интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ равен площади области $D = \{a \leqslant x \leqslant b,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ («криволинейной трапеции», рис. 18).

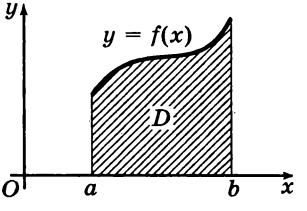


Рис. 18

8.2. Свойства определенного интеграла

1. *Линейность.* Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_a^b [Af(x) \pm Bg(x)]\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx \pm B\int_a^b g(x)\,dx$$

для любых чисел A и B.

2. *Аддитивность.* Если $c \in [a, b]$ и функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

3. *Теорема об оценке.* Если на $[a, b]$ имеют место неравенства $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Пример 1. Из неравенств $2 \leqslant (x^2+4)^{1/3} \leqslant 5$, справедливых на отрезке $[2, 11]$, вытекает оценка $18 \leqslant \int_2^{11} (x^2+4)^{1/3}\,dx \leqslant 45$.

4. *Теорема о среднем.* Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то найдется (хотя бы одна) точка $c \in (a, b)$ такая, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

(число $f(c)$ называется средним значением функции $f(x)$ на $[a, b]$).

5. *Теорема об интегрироеании неравенств.* Если на $[a, b]$ функции $\varphi(x)$, $f(x)$, $g(x)$ удовлетворяют неравенствам $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, то

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

(в частности, если $f(x) \geqslant 0$ на $[a, b]$, то и $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$).

6. *Теорема о модуле интеграла.* Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема, причем

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

7. *Интегрирование четных и нечетных функций* по отрезку вида $[-a, a]$:

если $f(x)$ — четная функция, то $\int\limits_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$;

если $f(x)$ — нечетная функция, то $\int\limits_{-a}^{+a} f(x)\,dx = 0$.

8. *Дифференцирование интеграла по переменному верхнему пределу.* Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то функция $\Phi(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$ дифференцируема на $[a, b]$, причем $\Phi'(x) = f(x)$. Сказанное удобно записать в виде равенства

$$\left(\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

9. *Формула Ньютона — Лейбница:*

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$ на $[a, b]$.

10. *Интегрирование по частям.* Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют на $[a, b]$ непрерывные производные, то

$$\int\limits_{a}^{b} u(x)\,dv(x) = [u(x)v(x)]\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} v(x)\,du(x).$$

11. *Замена переменной (подстановка) в определенном интеграле.* Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, а функция $x(t)$ имеет непрерывную производную на отрезке $[\alpha, \beta]$. Пусть, кроме того, множество значений функции $x(t)$ совпадает с $[a, b]$, причем $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$. Тогда

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t))\,x'(t)\,dt.$$

Пример 2. Вычислить интеграл $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-8)\sqrt{x+1}}$.

Решение. Сделаем подстановку $x + 1 = t^2$, $dx = 2t\,dt$. При $x = 0$ имеем $t = 1$, а при $x = 3$ имеем $t = 2$. В результате получим

$$\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-8)\sqrt{x+1}} = \int\limits_1^2 \frac{2t\,dt}{(t^2-9)t} =$$

$$= 2\int\limits_1^2 \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\Bigg|_1^2 = \frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}.$$

8.3. Геометрические и физические приложения определенного интеграла

- **Геометрические приложения определенного интеграла.**

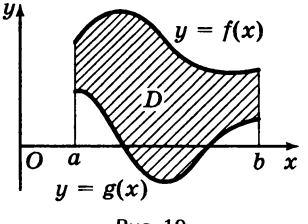


Рис. 19

1. *Площадь области D на плоскости x, y*, изображенной на рис. 19, равна

$$S = \int\limits_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

(при $g(x) \equiv 0$ эта формула дает площадь криволинейной трапеции).

2. *Площадь криволинейного сектора.* Пусть в полярных координатах ρ, φ задана кривая $\rho = f(\varphi)$, где $\varphi \in [\alpha, \beta]$. Тогда площадь криволинейного сектора $\{\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta;\ 0 \leqslant \rho \leqslant f(\varphi)\}$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2\,d\varphi.$$

3. *Площадь поверхности вращения.* При вращении кривой $y = f(x) \geqslant 0$, $x \in [a, b]$ вокруг оси x образуется поверхность, площадь которой

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

4. *Объем тела вращения.* Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси x криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью x и прямыми $x = a$, $x = b$. Его объем

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

5. *Длина кривой, заданной различными способами*:

а) если кривая является графиком непрерывно дифференцируемой функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, то ее длина

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx;$$

б) если плоская кривая задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ (где $t \in [\alpha, \beta]$, а $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции), то ее длина

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt;$$

в) если кривая задана в полярных координатах ρ, φ уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [a, b]$, то ее длина

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\, d\varphi.$$

- **Физические приложения определенного интеграла.**

1. *Работа переменной силы.* Пусть по оси x от точки $x = a$ до точки $x = b$ движется материальная точка, на

которую действует переменная сила $F(x)$, направленная вдоль оси x. Работа этой силы равна $A = \int_a^b F(x)\,dx$.

2. *Масса стержня переменной плотности.* Пусть стержень с постоянной площадью поперечного сечения S занимает на оси x отрезок $[0, l]$, а плотность материала стержня есть функция от x: $\gamma = \gamma(x)$. Масса такого стержня равна $m = S\int_0^l \gamma(x)\,dx$.

8.4. Несобственные интегралы

• **Интегралы с бесконечными пределами.** Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна при $a \leqslant x < +\infty$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, то его называют (сходящимся) *несобственным интегралом* от $f(x)$ на интервале $[a, +\infty]$ и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Если указанный предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл называют *расходящимся.*

Геометрический смысл несобственного интеграла заключается в том, что $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (при $f(x) \geqslant 0$) равен площади неограниченной области, заключенной между линиями $y = f(x)$, $x = a$ и осью абсцисс.

Аналогичным образом определяются несобственные интегралы для других бесконечных интервалов:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{b} f(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

(если каждый из несобственных интегралов, стоящих в правой части последнего равенства, сходится, то по определению сходится и интеграл, стоящий в левой части).

Пример 1. Непосредственным вычислением показывается, что несобственный интеграл $\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ расходится, если $\alpha \leqslant 1$, и сходится, если $\alpha > 1$; в последнем случае его значение равно $1/(\alpha - 1)$.

● **Достаточные условия сходимости несобственных интегралов.** Во многих задачах достаточно установить, сходится или расходится заданный несобственный интеграл, и оценить его значение в случае сходимости. Для этого бывают полезны следующие теоремы.

Теорема 1. Если $0 \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$ при $x \geqslant a$, то из сходимости интеграла $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ следует сходимость интеграла $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$, причем $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \leqslant \int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$. Если же интеграл $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то и интеграл $\int_{a}^{+\infty} \varphi(x)\,dx$ расходится.

Теорема 2. Если интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (в этом случае последний интеграл называется абсолютно сходящимся).

Пример 2. Несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,dx$ сходится абсолютно, так как справедливо неравенство $\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) \leqslant \frac{1}{x^2}$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ сходится (см. пример 1).

● **Интегралы от неограниченных функций.** Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна при $a \leqslant x < b$, но $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = \infty$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\lambda \to b-0} \int\limits_a^{\lambda} f(x)\,dx$, то он называется (сходящимся) *несобственным интегралом от неограниченной функции* $f(x)$ по отрезку $[a, b]$. Таким образом, по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to b-0} \int\limits_a^{\lambda} f(x)\,dx.$$

Если конечного предела не существует, то интеграл называется *расходящимся.*

Если $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$, то по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\gamma \to a+0} \int\limits_{\gamma}^{b} f(x)\,dx.$$

Наконец, если $f(x)$ не ограничена в окрестности некоторой точки $c \in (a, b)$ и каждый из интегралов $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ сходится, то по определению

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Геометрический смысл несобственного интеграла от неограниченной функции, а также теоремы типа теорем 1 и 2 (см. выше) для таких интегралов полностью аналогичны таковым для несобственных интегралов с бесконечными пределами. В качестве функций, с которыми обычно сравнивают функции, стоящие под знаком несобственного интеграла, в данном случае берут $1/(x-a)^{\mu}$; несобственный интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\mu}}$ сходится при $\mu < 1$ и расходится при $\mu \geqslant 1$. Это утверждение относится и к интегралам вида $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\mu}}$.

Пример 3. Несобственный интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2 + \sqrt{x-1}}$ сходится и не превосходит 2, так как $\frac{1}{(x-1)^2 + \sqrt{x-1}} < \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, а интеграл $\int\limits_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ сходится и равен 2.

9. Двойные и тройные интегралы

9.1. Определение и свойства двойного интеграла

• **Определение и свойства двойного интеграла.** Пусть на плоскости задано ограниченное множество, которое можно поместить в некоторый круг минимального диаметра. Диаметр этого круга называется *диаметром множества*. Рассмотрим область D на плоскости x, y. Разобьем D на n непересекающихся частей (ячеек). Максимальный из диаметров ячеек называется *диаметром разбиения* и обозначается $\lambda = \lambda(\mathcal{D}_n)$ ($\mathcal{D}_n$ — разбиение области D на ячейки). Пусть в области D задана функция $z = f(x, y)$. Выберем в каждой ячейке по произвольной «опорной» точке (x_i, y_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и составим *интегральную сумму* $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$, где ΔS_i — площадь i-й ячейки.

Если существует конечный предел сумм s_n при $\lambda \to 0$ и этот предел J не зависит ни от вида разбиений $\mathcal{D}_n$, ни от выбора «опорных» точек, то он обозначается $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ и называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\lambda \to 0} s_n.$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех разбиений $\mathcal{D}_n$ таких, что $\lambda(\mathcal{D}_n) < \varepsilon$, и любого выбора «опорных» точек будет выполняться нера-

венство $|s_n - \mathcal{I}| < \varepsilon$. (Если $f(x, y)$ непрерывна в замкнутой области D, то она интегрируема по этой области, т. е. двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy$ существует.)

- **Свойства двойного интеграла.**

1. *Линейность.* Если функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы по области D, то

$$\iint\limits_D [a\, f(x, y) \pm bg(x, y)]\, dx\, dy =$$

$$= a \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy \pm b \iint\limits_D g(x, y)\, dx\, dy,$$

где a и b — некоторые числа.

2. *Аддитивность.* Если $f(x, y)$ интегрируема по каждой из областей D_1 и D_2, не имеющих общих внутренних точек, и $D = D_1 \cup D_2$, то

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy.$$

3. *Теорема об оценке.* Если в области D выполняются неравенства $m \leqslant f(x, y) \leqslant M$, то

$$mS \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy \leqslant MS,$$

где S — площадь области D.

4. *Теорема о среднем.* Если $f(x, y)$ непрерывна в области D, то найдется хотя бы одна внутренняя точка $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$ такая, что

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = f(\bar{x}, \bar{y})S.$$

Число $f(\bar{x}, \bar{y})$ называется средним значением функции в области D.

5. *Интегрирование неравенств.* Если $\varphi(x, y) \leqslant f(x, y) \leqslant g(x, y)$ в области D, то

$$\iint\limits_D \varphi(x, y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_D g(x, y)\,dx\,dy.$$

В частности, если $f(x, y) \geqslant 0$ в D, то $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy \geqslant 0$.

6. *Теорема о модуле интеграла:*

$$\left|\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x, y)|\,dx\,dy.$$

• **Геометрический смысл двойного интеграла.** Пусть функция $f(x, y)$ неотрицательна при $(x, y) \in D$. Тогда двойной интеграл $\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy$ равен объему цилиндрического тела, основанием которого служит область D плоскости $z = 0$ и которое сверху ограничено поверхностью $z = f(x, y)$.

9.2. Вычисление двойного интеграла

• **Использование повторных интегралов.**

1. Если область D на плоскости x, y задается неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)$ (рис. 20, *а*), то

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy.$$

Интеграл в правой части этой формулы называется *повторным*.

2. Если $D = \{c \leqslant y \leqslant d,\ x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\}$ (рис. 20, *б*), то

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx.$$

В общем случае область D разбивают на области указанных типов с последующим использованием свойства аддитивности двойного интеграла.

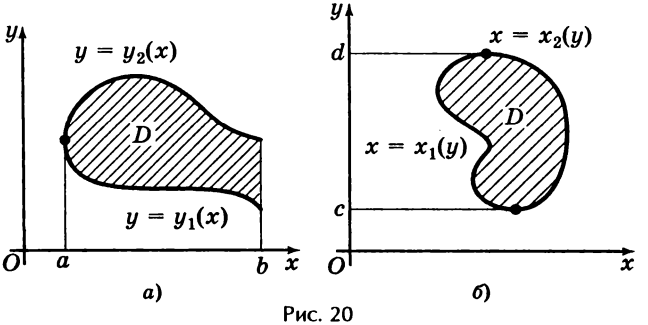


Рис. 20

- **Замена переменных в двойном интеграле.** Пусть непрерывно дифференцируемые функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ взаимно однозначно отображают область D_1 плоскости u, v на область D плоскости x, y, а функция $f(x, y)$ непрерывна в D. Тогда

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D_1} f(x(u, v), y(u, v))\,|J(u, v)|\,du\,dv,$$

где $J(u, v) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$ — *якобиан* отображения D_1 на D.

Для отображения $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ (которое часто используется и соответствует переходу от декартовых координат x, y к полярным координатам ρ, φ) якобиан $J(\rho, \varphi) = \rho$.

9.3. Геометрические и физические приложения двойного интеграла

- **Геометрические приложения двойного интеграла.**

1. *Площадь области D на плоскости x, y:*

$$S = \iint\limits_D dx\,dy.$$

2. *Площадь поверхности, заданной уравнением* $z = f(x, y)$ для $(x, y) \in D$ (рассматриваемая поверхность проектируется в область D на плоскости x, y), находится по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\ dx\, dy.$$

3. *Площадь поверхности, заданной векторным уравнением* $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$, где $(u, v) \in D_1$:

$$S = \iint\limits_D |\vec{n}(u, v)|\, du\, dv.$$

Здесь вектор нормали вычисляется по формуле $\vec{n}(u, v) = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$.

4. *Вычисление объемов.* Если область U трехмерного пространства задается условиями $\{(x, y) \in D, f(x, y) \leqslant z \leqslant g(x, y)\}$ (D — некоторая область на плоскости x, y), то ее объем равен

$$V = \iint\limits_D [g(x, y) - f(x, y)]\, dx\, dy.$$

Рассматриваемая трехмерная область U представляет собой цилиндрическое тело, которое снизу ограничено поверхностью $z = f(x, y)$, а сверху — поверхностью $z = g(x, y)$. Боковая поверхность этого тела состоит из отрезков прямых, параллельных оси z.

● **Физические приложения двойного интеграла.** Далее считаем, что плоская пластина занимает область D плоскости x, y, а $\gamma(x, y)$ — поверхностная плотность материала пластины (для однородной пластины $\gamma = \text{const}$).

1. *Масса плоской пластины*:

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y)\, dx\, dy.$$

2. *Координаты центра тяжести плоской пластины*:

$$x_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\gamma(x, y)\,dx\,dy, \quad y_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\gamma(x, y)\,dx\,dy,$$

где m — масса пластины.

3. *Моменты инерции плоской пластины* относительно координатных осей:

$$I_x = \iint\limits_D y^2\gamma(x, y)\,dx\,dy, \qquad I_y = \iint\limits_D x^2\gamma(x, y)\,dx\,dy.$$

Момент инерции пластины относительно начала координат вычисляется по формуле $I_0 = I_x + I_y$.

9.4. Определение и свойства тройного интеграла

• **Определение тройного интеграла.** Пусть функция $f(x, y, z)$ определена в некоторой области U пространства. Разобьем U на n частей (ячеек), не имеющих общих внутренних точек; обозначим через $\lambda = \lambda(\mathcal{U}_n)$ *диаметр* полученного разбиения $\mathcal{U}_n$, т. е. максимальный из диаметров ячеек (диаметром области в пространстве называется диаметр минимального шара, содержащего эту область). Выберем в каждой из ячеек по произвольной «опорной» точке (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и составим *интегральную сумму* $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta V_i$, где ΔV_i — объем i-й ячейки. Если существует конечный предел сумм s_n при $\lambda(\mathcal{U}_n) \to 0$ (не зависящий ни от вида разбиения $\mathcal{U}_n$, ни от выбора «опорных» точек), то он называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области U и обозначается

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\lambda \to 0} s_n.$$

- **Свойства тройного интеграла.** Свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

1. *Линейность.* Если функции $f(x, y, z)$ и $g(x, y, z)$ интегрируемы по области U, то

$$\iiint\limits_U [a\, f(x, y, z) \pm bg(x, y, z)]\, dx\, dy\, dz = \\ = a \iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \pm b \iiint\limits_U g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

где a и b — некоторые числа.

2. *Аддитивность.* Если $f(x, y, z)$ интегрируема по каждой из областей U_1 и U_2, не имеющих общих внутренних точек, и $U = U_1 + U_2$, то

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \\ = \iiint\limits_{U_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint\limits_{U_2} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

3. *Теорема об оценке.* Если в области U выполняются неравенства $m \leqslant f(x, y, z) \leqslant M$, то

$$mV \leqslant \iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \leqslant MV,$$

где V — объем области U.

4. *Теорема о среднем.* Если $f(x, y, z)$ непрерывна в области U, то найдется хотя бы одна внутренняя точка $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in U$ такая, что

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})\, V.$$

Число $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ называется средним значением функции в области U.

5. *Интегрирование неравенств.* Если $\varphi(x, y, z) \leqslant f(x, y, z) \leqslant g(x, y, z)$ в области U, то

$$\iiint\limits_U \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \leqslant \\ \leqslant \iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \leqslant \iiint\limits_U g(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

6. *Теорема о модуле интеграла*:

$$\left| \iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \right| \leqslant \iiint\limits_U |f(x, y, z)|\, dx\, dy\, dz.$$

9.5. Вычисление тройного интеграла. Некоторые приложения

- **Использование повторных интегралов.**

1. Рассмотрим тело U, ограниченное сверху поверхностью $z = g(x, y)$, а снизу — поверхностью $z = h(x, y)$, проекцией которого является область D на плоскости x, y. Другими словами, область U задается условиями $\{(x, y) \in D, h(x, y) \leqslant z \leqslant g(x, y)\}$. Тогда

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_D dx\, dy \int\limits_{h(x, y)}^{g(x, y)} f(x, y, z)\, dz.$$

2. Если область D плоскости x, y описывается неравенствами $\{a \leqslant x \leqslant b, y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$, то

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{h(x, y)}^{g(x, y)} f(x, y, z)\, dz.$$

- **Замена переменных в тройном интеграле.** Пусть непрерывно дифференцируемые функции $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ осуществляют взаимно однозначное отображение области Ω пространства u, v, w на область U пространства x, y, z, а функция $f(x, y, z)$ непрерывна в области U. Тогда

$$\iiint\limits_U f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint\limits_\Omega f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) |J(u, v, w)|\, du\, dv\, dw,$$

где $J(u, v, w) = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$ — *якобиан* отображения Ω на U.

Для цилиндрических координат ρ, φ, z, связанных с декартовыми координатами формулами $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$, якобиан $J = \rho$.

Для сферических координат ρ, φ, θ имеем $x = \rho\cos\varphi \times \sin\theta$, $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$, $z = \rho\cos\theta$, а якобиан $J = \rho^2\sin\theta$.

● **Некоторые геометрические и физические приложения тройного интеграла.**

1. *Объем области* U:

$$V = \iiint\limits_U dx\,dy\,dz.$$

2. *Масса тела переменной плотности* $\gamma = \gamma(x, y, z)$, занимающего область U:

$$m = \iiint\limits_U \gamma\,dx\,dy\,dz.$$

3. *Координаты центра тяжести тела:*

$$x_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_U x\gamma\,dx\,dy\,dz,$$

$$y_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_U y\gamma\,dx\,dy\,dz, \quad z_c = \frac{1}{m}\iiint\limits_U z\gamma\,dx\,dy\,dz.$$

4. *Моменты инерции тела* относительно координатных осей:

$$I_x = \iiint\limits_U \rho_{yz}^2\gamma\,dx\,dy\,dz,$$

$$I_y = \iiint\limits_U \rho_{xz}^2\gamma\,dx\,dy\,dz, \quad I_z = \iiint\limits_U \rho_{xy}^2\gamma\,dx\,dy\,dz,$$

где $\rho_{yz}^2 = y^2 + z^2$, $\rho_{xz}^2 = x^2 + z^2$, $\rho_{xy}^2 = x^2 + y^2$.

В случае однородного тела в формулах следует положить $\gamma = \text{const}$.

10. Криволинейные и поверхностные интегралы

10.1. Криволинейный интеграл первого рода

• **Определение криволинейного интеграла первого рода.** Пусть на кусочно гладкой кривой $\breve{AB}$ определена функция $f(x, y, z)$. Выбор на дуге $\breve{AB}$ точек $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$ задает разбиение $\mathscr{L}_n$. Максимальная из длин хорд $M_0M_1, M_1M_2, \ldots, M_{n-1}M_n$ называется *диаметром разбиения* и обозначается $\lambda = \lambda(\mathscr{L}_n)$. На каждой из дуг $\breve{M_{i-1}M_i}$ выберем произвольную «опорную» точку (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и составим *интегральную сумму* $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta l_i$, где Δl_i — длина дуги $\breve{M_{i-1}M_i}$.

Если существует конечный предел сумм s_n при $\lambda(\mathscr{L}_n) \to 0$ (не зависящий ни от вида разбиений $\mathscr{L}_n$, ни от выбора «опорных» точек), то он называется *криволинейным интегралом первого рода* по дуге $\breve{AB}$ и обозначается

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\,dl = \lim_{\lambda \to 0} s_n.$$

Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна, то криволинейный интеграл существует. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления движения вдоль $\breve{AB}$; его свойства аналогичны свойствам определенного интеграла.

● **Вычисление криволинейного интеграла первого рода.**

1. Если плоская кривая задана в виде $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, то

$$\int\limits_{AB} f(x, y)\, dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\, \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

2. Если дуга $\breve{AB}$ задана параметрически уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, то

$$\int\limits_{AB} f(x, y, z)\, dl = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t), y(t), z(t))\, \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\, dt.$$

Аналогичная формула имеет место для функции $f(x, y)$, определенной на плоской кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$.

● **Приложения криволинейного интеграла первого рода.**

1. *Масса материальной кривой* $\breve{AB}$ с заданным законом изменения линейной плотности $\gamma = \gamma(x, y, z)$:

$$m = \int\limits_{AB} \gamma\, dl.$$

2. *Координаты центра тяжести* материальной кривой $\breve{AB}$:

$$x_c = \frac{1}{m} \int\limits_{AB} x\gamma\, dl, \quad y_c = \frac{1}{m} \int\limits_{AB} y\gamma\, dl, \quad z_c = \frac{1}{m} \int\limits_{AB} z\gamma\, dl.$$

Постоянной плотности соответствует $\gamma = \text{const}$.

10.2. Криволинейный интеграл второго рода

● **Определение криволинейного интеграла второго рода.** Пусть в некоторой области пространства задано векторное поле $\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} +$

$+ R(x, y, z)\vec{k}$ и кусочно гладкая кривая $\breve{AB}$. Задавая на кривой точки $A = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n = B$, получим ее разбиение $\mathcal{L}_n$. Выберем на каждой из дуг $M_{i-1}M_i$ по произвольной «опорной» точке (x_i, y_i, z_i) (где $i = 1, 2, \ldots, n$) и составим сумму скалярных произведений $s_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(x_i, y_i, z_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}$, называемую *интегральной суммой.*

Если существует конечный предел сумм s_n при $\lambda(\mathcal{L}_n) \to 0$ (не зависящий ни от вида разбиений $\mathcal{L}_n$, ни от выбора «опорных» точек), то он называется *криволинейным интегралом второго рода* от поля $\vec{a}(x, y, z)$ вдоль кривой $\breve{AB}$ и обозначается

$$\int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} \quad \text{или} \quad \int_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Криволинейный интеграл второго рода зависит от направления движения вдоль кривой, а именно:

$$\int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = -\int_{BA} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Интеграл по замкнутому контуру C называется *циркуляцией* поля $\vec{a}$ вдоль C и обозначается

$$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

Физический смысл криволинейного интеграла второго рода: $\int_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r}$ определяет работу силового поля $\vec{a}(x, y, z)$ при перемещении единичной массы вдоль дуги $\breve{AB}$.

• **Вычисление криволинейного интеграла второго рода.**

1. Для плоской кривой, заданной в виде $y = y(x)$, $x \in [a, b]$, и плоского поля

$$\int\limits_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\, y'(x)]\, dx.$$

2. Пусть дуга $\overset{\smile}{AB}$ задана векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Тогда

$$\int\limits_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{AB} P\, dx + Q\, dy + R\, dz =$$

$$= \int\limits_\alpha^\beta [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t)]\, dt.$$

Аналогичная формула имеет место для плоской кривой $\overset{\smile}{AB}$ и плоского поля $\vec{a}$.

• **Потенциал и ротор векторного поля.** Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ называется *потенциальным,* если существует функция $\Phi(x, y, z)$ такая, что

$$\vec{a} = \operatorname{grad} \Phi, \quad \text{т. е.} \quad \vec{a} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{k}.$$

Функция $\Phi(x, y, z)$ называется *потенциалом* векторного поля $\vec{a}$. Криволинейный интеграл второго рода от потенциального векторного поля вдоль дуги $\overset{\smile}{AB}$ равен приращению потенциала вдоль этой дуги:

$$\int\limits_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \Phi|_B - \Phi|_A.$$

Ротором векторного поля $\vec{a}(x, y, z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ называется вектор

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

• **Необходимые и достаточные условия потенциальности векторного поля.** Пусть U — односвязная область в пространстве (т. е. такая область, в которой любой замкнутый контур можно стянуть в точку, не выходя за пределы U) и $\vec{a}(x, y, z)$ — векторное поле в области U. Тогда следующие четыре утверждения равносильны:

1) поле $\vec{a}$ потенциально;

2) $\operatorname{rot} \vec{a} \equiv \vec{0}$;

3) циркуляция поля по любому замкнутому контуру $\mathscr{C} \in U$ равна нулю, т. е. $\oint\limits_{\mathscr{C}} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 0$;

4) $\int\limits_{AB} \vec{a} \cdot d\vec{r}$ не зависит от формы кривой $\breve{AB} \in U$ (а зависит только от ее начальной и конечной точек).

10.3. Поверхностный интеграл первого рода

• **Определение.** Пусть в точках гладкой поверхности D задана функция $f(x, y, z)$. Произведем разбиение $\mathscr{D}_n$ этой поверхности на n ячеек, не имеющих общих внутренних точек. *Диаметром* разбиения $\lambda(\mathscr{D}_n)$ называется максимальный из диаметров ячеек (см. разд. 9.4). Выберем в каждой из ячеек произвольную «опорную» точку (x_i, y_i, z_i) $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и составим *интегральную сумму*

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i, \text{ где } \Delta S_i \text{ — площадь } i\text{-й ячейки.}$$

Если существует конечный предел сумм s_n при $\lambda(\mathscr{D}_n) \to 0$ (не зависящий ни от вида разбиений $\mathscr{D}_n$, ни от выбора «опорных» точек), то он называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(x, y, z)$ и обозначается $\iint\limits_D f(x, y, z)\, dS$.

● **Вычисление поверхностного интеграла первого рода.**

1. Если поверхность D задана уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_1$, то

$$\iint\limits_D f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{D_1} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy.$$

2. Если поверхность D задана векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$, $(u, v) \in D_2$, то

$$\iint\limits_D f(x, y, z)\, dS = \iint\limits_{D_2} f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))\,|\vec{n}(u, v)|\, du\, dv,$$

где $\vec{n}(u, v) = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$ — вектор нормали к поверхности.

● **Приложения поверхностного интеграла первого рода.**

1. Масса материальной поверхности D с поверхностной плотностью $\gamma = \gamma(x, y, z)$:

$$m = \iint\limits_D \gamma(x, y, z)\, dS.$$

2. Координаты центра тяжести материальной поверхности D:

$$x_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\gamma\, dS, \quad y_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\gamma\, dS, \quad z_c = \frac{1}{m}\iint\limits_D z\gamma\, dS.$$

Постоянной поверхностной плотности соответствует $\gamma = \text{const}$.

10.4. Поверхностный интеграл второго рода

● **Определение.** Пусть D — *ориентированная поверхность*, заданная уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ (u и v — параметры). Ориентированность означает, что в каждой точке $M \in D$ к поверхности восставлена нормаль $\vec{n}(M) = \vec{n}(u, v)$, непрерывно зави-

сящая от M. Возможны два случая: а) поверхность ориентирована нормалью $\vec{n}(u, v) = \vec{r}'_u \cdot \vec{r}'_v$; б) поверхность ориентирована нормалью, противоположной указанной. (Поверхность, заданную уравнением $z = z(x, y)$, можно записать в векторном виде следующим образом: $\vec{r} = \vec{r}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j} + z(x, y)\vec{k}$.)

Пусть векторное поле $\vec{a}(x, y, z) = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ задано на гладкой ориентированной поверхности D. Произведем разбиение $\mathcal{D}_n$ поверхности D на n частей (ячеек), не имеющих общих внутренних точек. Выберем в каждой из ячеек произвольную «опорную» точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и составим *интегральную сумму* $s_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(x_i, y_i, z_i) \cdot \vec{n}_i^{\circ} \Delta S_i$, где ΔS_i — площадь i-й ячейки, а $\vec{n}_i^{\circ}$ — единичный вектор нормали к поверхности в точке M_i, направленный в соответствии с выбранной ориентацией поверхности.

Если существует конечный предел сумм s_n при $\lambda(\mathcal{D}_n) \to 0$ (не зависящий ни от вида разбиений $\mathcal{D}_n$, ни от выбора «опорных» точек), то он называется *поверхностным интегралом второго рода* (или *потоком векторного поля $\vec{a}$ через ориентированную поверхность D*) и обозначается

$$\iint\limits_D \vec{a}(x, y, z) \cdot d\vec{S} \quad \text{или} \quad \iint\limits_D P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy.$$

Отметим, что при изменении ориентации поверхности поверхностный интеграл второго рода меняет знак.

- **Вычисление поверхностного интеграла второго рода.**

1. Если поверхность D задана векторным уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in D_1$, то

$$\iint\limits_D \vec{a}(x, y, z) \cdot d\vec{S} = \\ = \pm \iint\limits_{D_1} \vec{a}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v)\,du\,dv.$$

Знак плюс берется в случае, когда поверхность ориентирована нормалью $\vec{n}(u, v) = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v$, знак минус — в противоположном случае.

2. Если поверхность D задана уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_2$, то нормаль $\vec{n}(x, y) = \vec{r}'_x \times \vec{r}'_y = -z'_x\vec{i} - z'_y\vec{j} + k$ ориентирует поверхность D «вверх», в направлении оси z. Тогда

$$\iint\limits_D \vec{a} \cdot d\vec{S} = \pm \iint\limits_{D_2} (-z'_x P - z'_y Q + R)\, dx\, dy,$$

$P = P(x, y, z(x, y)), Q = Q(x, y, z(x, y)), R = R(x, y, z(x, y))$. Знак плюс берется в случае ориентации поверхности «вверх», знак минус — в противоположном случае.

10.5. Дифференциальные операции и интегральные формулы теории поля

• **Формула Остроградского — Гаусса.** Пусть векторное поле $\vec{a}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$ непрерывно дифференцируемо в пространственной области U, а D — граница этой области, ориентированная внешней нормалью. Тогда справедлива формула Остроградского — Гаусса

$$\iint\limits_D \vec{a} \cdot d\vec{S} = \iiint\limits_U \operatorname{div} \vec{a}\, dx\, dy\, dz,$$

где *дивергенция* вектора $\vec{a}$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Таким образом, поток векторного поля через замкнутую поверхность наружу равен тройному интегралу от дивергенции поля по объему, ограниченному этой по-

верхностью. В координатной форме формула Остроградского — Гаусса имеет вид

$$\iint\limits_D P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy = \iiint\limits_U \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz.$$

- **Формула Стокса.** Пусть поле $\vec{a}(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемо в некоторой области пространства, содержащей ориентированную поверхность D. Ориентация поверхности однозначно определяет направление обхода границы $\mathscr{C}$ этой поверхности: если смотреть с конца выбранного вектора нормали к D, то обход границы $\mathscr{C}$ должен казаться происходящим против хода часовой стрелки. При этом циркуляция поля вдоль $\mathscr{C}$ равна потоку вектора $\operatorname{rot}\vec{a}$ через D:

$$\oint\limits_{\mathscr{C}} \vec{a}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_D \operatorname{rot}\vec{a}\cdot d\vec{S}.$$

В координатной форме формула Стокса имеет вид

$$\oint\limits_{\mathscr{C}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

- **Формула Грина.** Для плоского поля $\vec{a}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ из формулы Стокса получается формула Грина:

$$\oint\limits_{\mathscr{C}} P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

где контур $\mathscr{C}$ области D на плоскости x, y проходится против часовой стрелки.

- **Оператор Гамильтона и дифференциальные операции первого порядка.** Оператором Гамильтона или *набла-вектором* называется символический вектор

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

С его помощью можно кратко записать следующие дифференциальные операции:

1) градиент скалярной функции $u(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad} u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \nabla u;$$

2) дивергенцию векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$:

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla \cdot \vec{a}$$

(скалярное произведение набла-вектора на вектор $\vec{a}$);

3) ротор векторного поля $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$:

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{a}$$

(векторное произведение набла-вектора на вектор $\vec{a}$).

Каждое скалярное поле $u(x, y, z)$ порождает векторное поле $\operatorname{grad} u$. Векторное поле $\vec{a}(x, y, z)$ порождает два поля: скалярное $\operatorname{div} \vec{a}$ и векторное $\operatorname{rot} \vec{a}$.

- **Векторные дифференциальные операции второго порядка.** Имеют место следующие дифференциальные соотношения:

1) $\operatorname{div} \operatorname{grad} u = \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, где Δ — *оператор Лапласа* ($\Delta u = \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u$);

2) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u = \vec{0}$ (или $(\nabla \times \nabla)\, u = \vec{0}$);

3) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$ (или $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{a}) = 0$);

4) $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{a} - \Delta \vec{a}$.

11. Ряды

11.1. Числовые ряды

• **Основные определения.** Пусть $\{u_n\}$ —последовательность чисел. Выражение

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называется *числовым рядом*, u_n — *общим членом ряда*, а сумма $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ — *n-й частичной суммой ряда*. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = S$, то ряд называется *сходящимся*, а S — *суммой ряда*. При этом пишут $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$. Если $\lim\limits_{n \to \infty} s_n$ не существует (или равен бесконечности), то ряд называется *расходящимся*. Ряд $u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots$ называется *n-м остатком ряда*.

Пример 1. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots$, члены которого образуют *геометрическую прогрессию* со знаменателем q, сходится, если $|q| < 1$ $\left(\text{при этом его сумма } S = \dfrac{a}{1-q}\right)$, и расходится, если $|q| \geqslant 1$.

• **Необходимый признак сходимости ряда.** Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ (если $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится).

Пример 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n}$ расходится, так как его общий член $u_n = \cos \frac{1}{n}$ не стремится к нулю при $n \to \infty$.

Необходимый признак сходимости не является достаточным.

Пример 3. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Хотя его общий член стремится к нулю: $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, так как его частичные суммы не ограничены: $s_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \to \infty$ при $n \to \infty$.

- **Свойства сходящихся рядов.**

1. Если ряд сходится, то сходится и любой его остаток. Отбрасывание или добавление конечного числа членов к данному ряду не влияет на его сходимость.

2. Если все члены ряда умножить на некоторое число, то сходимость ряда не нарушится (а сумма ряда умножится на это число).

3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся и имеют суммы S_1 и S_2 соответственно, то сходятся и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$, а их суммы равны $S_1 \pm S_2$.

4. Члены сходящегося ряда можно группировать в порядке следования; получающийся ряд сходится и имеет ту же сумму. Иными словами, в сходящемся ряде можно произвольным образом расставлять скобки; обратное действие — раскрытие скобок — допустимо

не всегда: так, ряд $(1-1)+(1-1)+\ldots$ сходится (и имеет сумму, равную нулю), но если раскрыть скобки, то получится расходящийся ряд $1-1+1-1+\ldots$ (его общий член не стремится к нулю).

- **Критерий Коши сходимости ряда.** Чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашелся такой номер $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ и любого натурального k выполнялось неравенство $|u_{n+1} + \ldots + u_{n+k}| < \varepsilon$.

- **Признаки сходимости рядов с положительными членами.**

1. *Первый признак сравнения.* Если $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ (начиная с некоторого номера n), то из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ —расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

2. *Второй признак сравнения.* Если существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} (u_n/v_n)$, отличный от нуля, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся или расходятся одновременно.

3. *Признак Даламбера.* Если существует предел $\lim_{n\to\infty} (u_{n+1}/u_n) = D$, то при $D < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а при $D > 1$ —расходится. При $D = 1$ признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости данного ряда.

4. *Признак Коши.* Если существует $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = K$, то при $K < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, а при $K > 1$ — расхо-

дится. При $K = 1$ признак Коши не дает ответа на вопрос о сходимости данного ряда.

5. *Интегральный признак Маклорена — Коши.* Пусть $f(x)$ — неотрицательная невозрастающая функция, непрерывная на интервале $1 \leqslant x < +\infty$ и такая, что $f(1) = u_1$, $f(2) = u_2$, ... , $f(n) = u_n$, ... Тогда для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ необходимо и достаточно, чтобы сходился несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$.

Пример 4. Ряд[1] $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ расходится, так как расходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$. Аналогично устанавливается, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leqslant 1$.

- **Ряды с произвольными членами. Признак сходимости Лейбница.** Пусть знаки членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ чередуются, абсолютные величины членов не возрастают с ростом n и $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$. Тогда данный «знакочередующийся» ряд сходится (признак Лейбница). Если при подсчете суммы S такого ряда ограничиться частичной суммой s_n, а остальные члены ряда отбросить, то погрешность, возникающая при замене S на s_n, не превосходит по абсолютной величине модуля первого из отброшенных членов (и имеет одинаковый с ним знак).

[1] Этот ряд называется гармоническим.

Пример 5. Ряд $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \ldots$ сходится по признаку Лейбница. Если положить $S \approx s_4 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4}$, то допущенная при этом погрешность положительна и не превосходит $u_5 = \frac{1}{5^5} = 0{,}00032$.

- **Абсолютная и условная сходимость.** Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с произвольным чередованием знаков его членов называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$. (Абсолютно сходящийся ряд сходится.)

Пример 6. Ряд $1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \ldots$ сходится абсолютно, так как ряд, составленный из модулей членов данного ряда, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, сходится (см. ряд примера 4 при $\alpha = 2$).

Сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется *условно сходящимся*, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится.

Пример 7. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ сходится условно, так как он сходится (по признаку Лейбница), а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится (это гармонический ряд, см. пример 4).

При произвольной перестановке членов абсолютно сходящегося ряда (в частности, сходящегося ряда с положительными членами) абсолютная сходимость не нарушается и сумма ряда не меняется. Условно сходящиеся ряды этим свойством не обладают: если ряд схо-

дится условно, то можно так переставить его члены, что сумма нового ряда станет равной любому наперед заданному числу (можно так переставить члены, что получающийся ряд окажется расходящимся).

11.2. Функциональные ряды

• **Основные определения.** *Функциональным рядом* называется ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, членами которого являются функции, определенные на некотором множестве X. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *сходящимся в точке* $x_0 \in X$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$. Совокупность $x \in X$, для которых функциональный ряд сходится, называется *областью сходимости*. Сумма ряда является функцией x, определенной в области сходимости.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *абсолютно сходящимся на множестве* X, если на этом множестве сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$.

Пример 1. Функциональный ряд $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$ сходится при $-1 < x < 1$ (см. пример 1 из разд. 11.1). На этом интервале определена его сумма $S = \dfrac{1}{1-x}$.

Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ называется *остатком* функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. В случае сходимости ряда

на множестве X из равенства $S(x) = s_n(x) + r_n(x)$ ($s_n(x)$ — частичная сумма ряда, $r_n(x)$ — сумма его остатка) следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} r_n(x) = 0$ для $x \in X$.

- **Равномерно сходящиеся ряды.** Функциональный ряд называется *равномерно сходящимся* на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий от ε, но не от x), что при всех $n > N$ выполняется неравенство $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon$ для всех $x \in X$.

Признак равномерной сходимости Вейерштрасса. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на множестве X равномерно, если существует сходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами такой, что $|u_n(x)| \leqslant a_n$ для всех n (начиная с некоторого номера) и для всех $x \in X$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *мажорантой* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

Пример 2. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\sin nx}{n^2}$ сходится равномерно при $-\infty < x < +\infty$, так как $\left| (-1)^n \dfrac{\sin nx}{n^2} \right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, а числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится (см. пример 4 из разд. 11.1).

- **Свойства равномерно сходящихся рядов.** Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится

на отрезке $x \in [a, b]$ и имеет сумму $S(x)$. Тогда справедливы теоремы:

1. Если в точке $x_0 \in [a, b]$ непрерывны члены ряда $u_n(x)$, то в этой точке непрерывна функция $S(x)$.

2. Если $u_n(x)$ непрерывны на $[a, b]$, то ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx.$$

3. Если члены ряда имеют непрерывные производные, а функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ сходится равномерно на $[a, b]$, то сумма $S(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную, причем

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

(т. е. ряд можно почленно дифференцировать).

11.3. Степенные ряды

• **Интервал сходимости степенного ряда.** *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

(постоянные a_0, a_1, ... называются *коэффициентами* степенного ряда), а также ряд более общего вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots,$$

где x_0 — постоянное число. Ниже рассматриваются только степенные ряды первого вида, поскольку второй ряд преобразуется в первый заменой $\bar{x} = x - x_0$.

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при некотором $x = x_1$, то он абсолютно сходится при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_1|$. Если ряд расходится при $x = x_2$, то он расходится при всех x, для которых $|x| > |x_2|$.

Существуют степенные ряды, которые сходятся при всех значениях x $\left(\text{например, ряд } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)$. Есть ряды, сходящиеся только при $x = 0$ $\left(\text{например, } \sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n\right)$.

Если степенной ряд при некоторых $x \neq 0$ сходится, а при остальных расходится, то из теоремы Абеля вытекает существование числа $R > 0$ такого, что при $|x| < R$ степенной ряд сходится (причем абсолютно), а при $|x| > R$ — расходится. Это число R называется *радиусом сходимости* степенного ряда, а интервал $(-R, R)$ — *интервалом сходимости.* На концах интервала сходимости вопрос о сходимости ряда исследуется отдельно в каждом конкретном случае. Если степенной ряд сходится только при $x = 0$, то интервал сходимости вырождается в точку (при этом $R = 0$); если ряд сходится при всех x, то $R = \infty$.

Для нахождения радиуса сходимости можно применять признаки Даламбера и Коши.

Пример. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n}{n} x^{2n}$ имеем $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{9n}{n+1} x^2\right| = 9x^2$, и по признаку Даламбера ряд сходится абсолютно при $9x^2 < 1$, т. е. в интервале $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$, и расхо-

дится вне этого интервала $\left(\text{радиус сходимости } R = \frac{1}{3}\right)$. На концах интервала при $x = \pm\frac{1}{3}$ получаем расходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Свойства степенных рядов. На всяком отрезке, целиком лежащем внутри интервала сходимости, степенной ряд сходится равномерно. Поэтому степенные ряды в интервале сходимости обладают всеми перечисленными в разд. 11.2 свойствами равномерно сходящихся функциональных рядов. Особо отметим, что степенной ряд внутри его интервала сходимости можно дифференцировать почленно любое число раз; сумма степенного ряда — функция, имеющая внутри интервала сходимости производные любого порядка.

- **Степенные ряды Тейлора и Маклорена.** Пусть функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в окрестности точки x_0. *Рядом Тейлора* для этой функции называется степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)\,(x - x_0)^n =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)\,(x - x_0)^2 + \ldots,$$

где использованы обозначения $0! = 1$, $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

Частным случаем ряда Тейлора (при $x_0 = 0$) является *ряд Маклорена:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\,x^n = f(0) + f'(0)\,x + \frac{1}{2} f''(0)\,x^2 + \ldots.$$

Формально записанный ряд Тейлора (Маклорена) для функции $f(x)$ может:

1) расходиться при $x \neq x_0$;

2) сходиться в некоторой окрестности точки x_0 к функции, не совпадающей с $f(x)$;

3) сходиться в некоторой окрестности точки x_0 к функции $f(x)$. В последнем случае говорят, что $f(x)$ *разлагается в ряд Тейлора* в упомянутой окрестности, и пишут

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n.$$

Необходимое и достаточное условие разложимости функции $f(x)$ в ряд Тейлора состоит в том, чтобы остаточный член формулы Тейлора стремился к нулю при $n \to \infty$ в рассматриваемой окрестности.

Для разложимости функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности x_0 достаточно, чтобы в этой окрестности все производные по абсолютной величине были ограничены одной и той же постоянной, т. е. $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$ для всех n, где M — некоторое число.

Единственность разложения функции в степенной ряд. Если функция $f(x)$ представляется в виде суммы степенного ряда, то его коэффициенты определяются единственным образом (поскольку этот ряд является рядом Тейлора для $f(x)$, так что его коэффициенты равны $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$). Поэтому в задачах о представлении функции степенным рядом ответ не зависит от выбранного метода решения.

- **Разложения некоторых функций в ряды Маклорена.** При решении различных задач часто используются следующие разложения элементарных функций в ряды Маклорена:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots;$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots;$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots;$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots.$$

Первые пять рядов сходятся при всех значениях $-\infty < x < +\infty$ ($R = \infty$), а остальные имеют радиус сходимости $R = 1$. Ряд, стоящий в правой части последней формулы, называется *биномиальным*. Приведем один частный случай этого ряда:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots.$$

При применении вышеприведенных формул для получения разложения заданной функции в ряд легко выясняется область сходимости ряда, отпадает необходимость привлечения признаков разложимости и автоматически получается выражение для общего члена ряда. Например, для получения разложения функции $(1 + x^3)^{-1}$ в ряд по степеням x нужно лишь заменить в последнем разложении аргумент x на x^3.

11.4. Ряд Фурье

- **Основные определения.** Функция $f(x)$ удовлетворяет *условиям Дирихле* на интервале (a, b):

1) если этот интервал можно разбить на конечное число интервалов, в каждом из которых $f(x)$ непрерывна и монотонна;

2) если x_0 — точка разрыва, то существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$ и $f(x_0-0)$.

Периодическая функция с периодом 2π, удовлетворяющая на интервале $(-\pi, \pi)$ условиям Дирихле, может быть представлена рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

коэффициенты которого находятся по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

В точках x_0 непрерывности функции $f(x)$ ряд Фурье сходится к $f(x_0)$, а в точках разрыва — к $\frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$.

Разложение в ряд Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом $2l$ имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \, dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \, dx.$$

Непериодическую функцию $f(x)$, определенную на интервале $(-l, l)$, также можно представить в виде суммы ряда Фурье, однако вне указанного интервала сумма этого ряда $S(x)$ будет отлична от $f(x)$[1].

[1] Сумма $S(x)$ представляет собой всюду определенную периодическую функцию с периодом $2l$, хотя $f(x)$ может быть непериодической или даже не определенной вне интервала $(-l, l)$.

● **Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций.**

Если $f(x)$ — четная функция, то коэффициенты ряда Фурье находятся по формулам

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos + \frac{n\pi x}{l}\, dx, \; b_n = 0,$$

и разложение $f(x)$ в ряд Фурье имеет вид (*разложение в ряд по косинусам*):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}.$$

Если $f(x)$ — нечетная функция, то коэффициенты ряда Фурье находятся по формулам

$$a_n = 0, \; b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l}\, dx,$$

и разложение $f(x)$ в ряд Фурье имеет вид (*разложение в ряд по синусам*):

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Если функция $f(x)$ задана на интервале $(0, l)$ (и удовлетворяет условиям Дирихле), то ее можно разложить как в ряд по косинусам, так и в ряд по синусам (по формулам, приведенным выше). Оба ряда в интервале $(0, l)$ дадут значения $f(x)$ в точках непрерывности функции и величину $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]$ в точках разрыва; вне интервала $(0, l)$ указанные разложения описывают разные функции.

● **Ряд Фурье в комплексной форме.** Разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье в комплексной форме имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n x},$$

где $\omega_n = \frac{n\pi}{l}$, $c_n = \frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\, e^{-i\omega_n x}\, dx$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Выражения $e^{i\omega_n x}$ называются гармониками, коэффициенты c_n — комплексными амплитудами, числа ω_n — волновыми числами функции $f(x)$, совокупность всех волновых чисел $\{\omega_n\}$ — дискретным спектром функции.

11.5. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

• **Интеграл Фурье.** Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой оси, удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном интервале и абсолютно интегрируема по всей оси $\left(\text{т. е. сходится несобственный интеграл } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx\right)$. Тогда справедливо следующее представление функции $f(x)$ интегралом Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos[\omega(t-x)]\, dt\right\} d\omega.$$

Эту формулу можно записать в виде

$$f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty}[a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x]\, d\omega,$$

где использованы обозначения

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cos\omega t\, dt, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\sin\omega t\, dt.$$

Как и при разложении функции в ряд Фурье, в точках непрерывности x_0 функции $f(x)$ интеграл Фурье дает значе-

ние $f(x_0)$, а в точках разрыва — значение $\frac{1}{2}[f(x_0+0)+$ $+f(x_0-0)]$.

Интеграл Фурье можно записать в комплексной форме:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{i\omega(x-t)}\,dt\right]d\omega$$

или

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\omega,\quad C(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt.$$

- **Разложение в интеграл Фурье четных и нечетных функций.**

Если $f(x)$ — четная функция, то

$$f(x)=\int_0^{+\infty} a(\omega)\cos\omega x\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\right)\cos\omega x\,d\omega.$$

Если $f(x)$ — нечетная функция, то

$$f(x)=\int_0^{+\infty} b(\omega)\sin\omega x\,d\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\right)\sin\omega x\,d\omega.$$

Если $f(x)$ задана в интервале $(0, +\infty)$, то ее можно представить в любой из двух приведенных выше форм — в зависимости от того, четным или нечетным образом она продолжена на отрицательную полуось.

- **Преобразование Фурье.** Представление функции $f(x)$ интегралом Фурье в комплексной форме можно записать в виде

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt\right]e^{i\omega x}\,d\omega.$$

Полагая

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt,$$

получим

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\omega)\, e^{i\omega x}\, d\omega.$$

Функция $\varphi(\omega)$ называется *преобразованием Фурье* функции $f(t)$ (последняя формула задает *обратное преобразование Фурье*).

- **Косинус-преобразование Фурье.** Если $f(x)$ — четная функция, то ее представление интегралом Фурье может быть переписано в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos \omega t\, dt\right] \cos \omega x\, d\omega.$$

Полагая

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) \cos \omega t\, dt,$$

получим

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} F(\omega) \cos \omega x\, d\omega.$$

Функция $F(\omega)$ называется *косинус-преобразованием Фурье* функции $f(t)$. Приведенная пара формул устанавливает закон взаимности: если $F(\omega)$ — косинус-преобразование Фурье четной функции $f(x)$, то $f(x)$ есть косинус-преобразование Фурье функции $F(\omega)$.

- **Синус-преобразование Фурье.** Если $f(x)$ — нечетная функция, то ее представление интегралом Фурье может быть переписано в виде

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} \left[\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} f(t) \sin \omega t\, dt\right] \sin \omega x\, d\omega.$$

Полагая

$$\Phi(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t \, dt,$$

получим

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \Phi(\omega) \sin \omega x \, d\omega.$$

Функция $\Phi(\omega)$ называется *синус-преобразованием Фурье* функции $f(t)$. Приведенная пара формул устанавливает закон взаимности: если $\Phi(\omega)$ — синус-преобразование Фурье нечетной функции $f(x)$, то $f(x)$ есть синус-преобразование Фурье функции $\Phi(\omega)$.

12. Обыкновенные дифференциальные уравнения

12.1. Общие понятия. Уравнения первого порядка

• **Некоторые определения.** *Обыкновенным дифференциальным уравнением* (кратко *ДУ*) называется уравнение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Порядком ДУ называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение. *Решением ДУ* называется функция $y(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество. Соотношение $\Phi(x, y) = 0$, определяющее решение $y(x)$ неявным образом, называется *интегралом ДУ*.

Пример 1. Функция $y = 2x$ является одним из решений *ДУ* первого порядка $xy' - y = 0$. Решениями этого *ДУ* являются также функции $y = -x$, $y = \frac{1}{2}x$ и др., а соотношения $x + y = 0$, $2y = x$ и т. п. являются интегралами данного *ДУ*.

Понятие интеграла *ДУ* несколько шире понятия решения, так как во многих случаях в ходе решения (или, как говорят, интегрирования) *ДУ* удается получить лишь соотношение между x и y, которое не всегда можно разрешить относительно y, чтобы записать решение в явном виде.

• **Уравнения первого порядка.** В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка записывается так: $F(x, y, y') = 0$. *ДУ*, разрешенное относительно производной, имеет вид $y' = f(x, y)$. Иногда последнее уравнение записывают с помощью дифференциалов: $dy = f(x, y)\,dx$.

Теорема существования и единственности: если функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области, содержащей точку (x_0, y_0), и имеет там ограниченную частную производную по y, то существует единственное решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее условию $y = y_0$ при $x = x_0$.

Последнее условие, которое записывают в виде $y(x_0) = y_0$ или $y|_{x=x_0} = y_0$, называется *начальным условием*. Геометрический смысл сформулированной теоремы состоит в том, что существует единственная функция, которая удовлетворяет *ДУ* и график которой проходит через точку (x_0, y_0). Задача нахождения решения, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется *задачей Коши*.

- **Общим решением** *ДУ* называется совокупность всех его решений. Как правило, общее решение удается записать в виде функции $y = \varphi(x, C)$, зависящей от одной *произвольной постоянной* C; при конкретных значениях C эта функция определяет конкретные решения уравнения (*частные решения*). Иногда общее решение задается неявным образом в виде соотношения $\Phi(x, y, C) = 0$, называемого *общим интегралом ДУ*; при конкретном значении постоянной $C = C_0$ отсюда получается соотношение $\Phi(x, y, C_0) = 0$, называемое *частным интегралом*.

При соответствующем выборе постоянной C из общего решения может быть получено любое однозначно определяемое начальными данными частное решение. Например, общим решением *ДУ* $xy' - y = 0$ является функция $y = Cx$; при $C = 2$ получаем отсюда частное решение $y = 2x$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.

Геометрически общее решение (общий интеграл) представляет собой семейство кривых на плоскости xy, зависящих от одного параметра C; эти кривые называются *интегральными кривыми* данного *ДУ*. Частному решению (частному интегралу) соответствует одна кри-

вая семейства, проходящая через заданную точку плоскости.

Уравнение $y' = f(x, y)$ для каждой точки (x, y) определяет значение y', т. е. угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку (задает поле направлений на плоскости x, y). Задача решения *ДУ* первого порядка с геометрической точки зрения состоит в нахождении кривых, направление касательных к которым совпадает с направлением поля в соответствующих точках.

- **Дифференциальные уравнения, допускающие точное аналитическое решение (решение в замкнутой форме).**

1. *Уравнение с разделенными переменными:* $f(y)\,dy = g(x)\,dx$. Эквивалентная запись уравнения:

$$f(y)\,y' = g(x).$$

Функции $f(y)$, $g(x)$ и другие функции, встречающиеся в дальнейшем, предполагаются непрерывными в рассматриваемых областях изменения своих аргументов.

Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C.$$

Здесь и далее C — произвольная постоянная.

Для выделения частного решения (интеграла), удовлетворяющего условию $y(x_0) = y_0$, можно использовать соотношение

$$\int_{y_0}^{y} f(y)\,dy = \int_{x_0}^{x} g(x)\,dx.$$

Пример 2. Решить уравнение $(y + 1)\,dy = -x\,dx$.

Решение. Общий интеграл этого *ДУ* имеет вид: $\int (y + 1)\,dy = -\int x\,dx + C$ или $(y + 1)^2 + x^2 = 2C$. В правой части последнего равенства для краткости часто вводят новую произвольную постоянную $\widetilde{C} = 2C$.

2. *Уравнение с разделяющимися переменными:*

$$f_1(y)g_1(x)y' = f_2(y)g_2(x).$$

Делим обе части на $f_2(y)g_1(x)$. В результате получим уравнение с разделенными переменными. После интегрирования имеем

$$\int \frac{f_1(y)}{f_2(y)}\,dy = \int \frac{g_2(x)}{g_1(x)}\,dx + C.$$

Пример 3. Решить уравнение $x(y^2 - 1)\,dx = (x^2 + 1)y\,dy$.

Решение. После деления обеих частей на $(x^2 + 1)(y^2 - 1)$ получим уравнение с разделенными переменными: $\frac{x\,dx}{x^2 + 1} = \frac{y\,dy}{y^2 - 1}$. Решая его, находим общий интеграл: $x^2 + 1 = C(y^2 - 1)$.

Уравнение вида

$$y' = f(ax + by)$$

с помощью замены $z = ax + by$, где $z = z(x)$ — новая неизвестная функция (при этом $z' = a + by'$), приводится к *ДУ* с разделяющимися переменными: $z' = bf(z) + a$.

3. *Однородное уравнение*:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Правая часть этого уравнения зависит от отношения аргументов y и x. Вводя новую неизвестную функцию $z = y/x$, получим *ДУ* с разделяющимися переменными: $xz' = f(z) - z$. Решив его и заменив z на y/x, находим общий интеграл исходного однородного *ДУ*.

Пример 4. Решить уравнение $xy' - y = x\cos^2(y/x)$.

Решение. Записав уравнение в виде $y' = y/x + \cos^2(y/x)$, имеем однородное *ДУ*. Замена $z = y/x$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными для новой неизвестной функции $z(x)$: $xz' = \cos^2 z$. Решая его, находим общий интеграл: $\operatorname{tg} z = \ln|x| + C$. Возвращаясь к старым переменным, получим общий интеграл исходного *ДУ*: $\operatorname{tg} y/x = \ln|x| + C$.

К однородному *ДУ* приводится уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right).$$

Для этого нужно перейти к новым переменным $\bar{x} = x - x_0$, $\bar{y} = y - y_0$, где значения постоянных x_0 и y_0 находят, решая линейную алгебраическую систему

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0, \\ \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma = 0. \end{cases}$$

В результате для функции $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$ получим уравнение $\bar{y}' = f\left(\frac{a\bar{x} + b\bar{y}}{\alpha\bar{x} + \beta\bar{y}}\right)$. Последнее после деления числителя и знаменателя аргумента функции f на $\bar{x}$ принимает вид однородного *ДУ*, правая часть которого зависит только от отношения переменных: $\bar{y}' = f\left(\frac{a + b\bar{y}/\bar{x}}{\alpha + \beta\bar{y}/\bar{x}}\right)$.

4. *Линейное дифференциальное уравнение*:

$$y' + f(x)y = g(x).$$

Решение ищем в виде произведения $y = uv$, где функция $v = v(x)$ удовлетворяет «укороченному» уравнению с разделяющимися переменными: $v' + f(x)v = 0$ $\left(\text{в качестве такой функции можно взять любое частное решение этого уравнения, например, } v = e^{-F}, \text{ где } F = \int f(x)\,dx\right)$. Для функции $u = u(x)$ получим уравнение с разделяющимися переменными $v(x)u' = g(x)$. Интегрируя уравнение для u, находим общее решение:

$$y = e^{-F}\left(\int ge^{F}\,dx + C\right), \quad \text{где } F = \int f(x)\,dx.$$

Пример 5. Решить уравнение $y' - \operatorname{ctg} x\, y = 2x \sin x$.

Решение. Положив $y = uv$, получим $vu' + u(v' - \operatorname{ctg} x\, v) = 2x \sin x$. В качестве функции $v(x)$ возьмем какое-нибудь ча-

стное решение уравнения с разделяющимися переменными $v' - \operatorname{ctg} x\, v = 0$, например $v = \sin x$. После этого функцию $u(x)$ найдем из уравнения $vu' = 2x \sin x$ или $u' = 2x$. Интегрируя, имеем $u = \int 2x\, dx + C = x^2 + C$. В итоге получим общее решение исходного *ДУ*: $y = uv = (x^2 + C) \sin x$.

5. *Уравнение Бернулли*:

$$y' + f(x)y = g(x)y^{\alpha} \quad (\alpha \neq 0,\ \alpha \neq 1).$$

Частные случаи $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$ соответствуют линейному уравнению (см. выше п. 4). Замена $z = y^{1-\alpha}$ приводит к линейному уравнению: $z' + (1 - \alpha)\, f(x)z = (1 - \alpha)\, g(x)$. Общий интеграл уравнения Бернулли имеет вид

$$y^{1-\alpha} = Ce^{-F} + (1 - \alpha)e^{-F} \int e^{F} g(x)\, dx,$$

где $F(x) = (1 - \alpha) \int f(x)\, dx$.

6. *Уравнение в полных дифференциалах:*

$$f(x, y)\, dy + g(x, y)\, dx = 0, \quad \text{где } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции двух переменных $U(x, y)$.

Общий интеграл: $U(x, y) = C$, где функция U определяется из системы

$$\frac{\partial U}{\partial y} = f, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = g.$$

Интегрируя первое уравнение, имеем $U = \int f(x, y)\, dy + \Psi(x)$ (при интегрировании переменная x рассматривается как параметр). Подстановка этого выражения во второе уравнение позволяет найти функцию Ψ (а затем функцию U). В итоге общий интеграл уравнения в полных дифференциалах можно представить в виде

$$\int_{y_0}^{y} f(x_0, t)\, dt + \int_{x_0}^{x} g(\xi, y)\, d\xi = C,$$

где x_0 и y_0 — произвольные числа.

• **Интегрирование дифференциальных уравнений при помощи рядов.** Частное решение $y = y(x)$ уравнения первого порядка, удовлетворяющее заданному начальному условию $y(x_0) = y_0$, можно искать в виде ряда Тейлора по степеням разности $x - x_0$:

$$y(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \ldots$$

(если начальное условие задается при $x_0 = 0$, получится ряд по степеням x).

Для нахождения коэффициентов этого ряда заданное *ДУ* дифференцируют по x нужное число раз, принимая во внимание начальное условие. На практике x берут достаточно близким к x_0, чтобы остаточным членом можно было пренебречь (по сравнению с удержанными членами).

Пример 6. Найти первые три члена разложения в ряд частного решения уравнения $y' = e^y + \cos x$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0$.

Решение. Так как начальное условие задано при $x_0 = 0$, будем получать ряд по степеням x. Из уравнения имеем $y'(0) = e^0 + \cos 0 = 2$. Дифференцируя обе части исходного *ДУ*, найдем $y'' = e^y y' - \sin x$, откуда с учетом заданного начального условия и найденного значения $y'(0) = 2$ получим $y''(0) = e^0 \cdot 2 - \sin 0 = 2$. Продолжая аналогично, найдем $y''' = e^y y'' + e^y (y')^2 - \cos x$, откуда $y'''(0) = e^0 \cdot 2 + e^0 \cdot 2^2 - \cos 0 = 5$.

Подставляя полученные значения производных в ряд Маклорена для $y(x)$, приходим к искомому представлению частного решения в виде степенного ряда: $y = 2x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + \ldots$.

12.2. Дифференциальные уравнения высших порядков

• **Теорема существования и единственности** для *ДУ* n-го порядка, разрешенного относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}),$$

формулируется следующим образом. Если функция f непрерывна, а ее частные производные по аргументам y, y', y'', ..., $y^{(n-1)}$ ограничены в некоторой области, содержащей значения x_0, $y = y_0$, $y' = y'_0$, ... , $y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$, то существует единственное решение $y(x)$ данного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Задача нахождения такого решения называется *задачей Коши* для *ДУ* n-го порядка.

Для уравнения второго порядка $y'' = f(x, y, y')$ с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ (y_0 и y'_0 — заданные числа) геометрический смысл этой теоремы состоит в следующем: через точку (x_0, y_0) плоскости x, y проходит единственная интегральная кривая уравнения с заданным угловым коэффициентом касательной y'_0.

- **Общее решение дифференциального уравнения n-го порядка** имеет вид

$$y = \varphi(x, C_1\, C_2, \ldots, C_n),$$

где C_1 C_2, ..., C_n— произвольные постоянные (число произвольных постоянных равно порядку уравнения). Конкретные значения постоянных определяют некоторое *частное решение* уравнения.

Иногда общее решение задается неявным образом в виде соотношения

$$\Phi(x, y, C_1\, C_2, \ldots, C_n) = 0,$$

называемого *общим интегралом ДУ* n-го порядка. При соответствующем выборе значений постоянных из общего решения можно получить любое (однозначно определяемое начальными условиями) частное решение данного уравнения.

- **Простейшие дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.**

1. *Уравнение вида*

$$y^{(n)} = f(x)$$

решается последовательным n-кратным интегрированием правой части. При каждом интегрировании возникает одна произвольная постоянная, а в окончательном результате — n произвольных постоянных.

Общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$y = C_1 + C_2 x + \ldots + C_n x^{n-1} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\, dt,$$

где x_0 может быть выбрано произвольно.

Пример 1. Решить уравнение $y'' = 6x + \cos x$.

Решение. Последовательным интегрированием находим: $y' = 3x^2 + \sin x + C_1$, $y = x^3 - \cos x + C_1 x + C_2$ — общее решение исходного *ДУ*.

2. *Уравнение, не содержащее явно y:*

$$F(x, y', y'') = 0.$$

Замена $y' = z(x)$ с учетом формулы $y'' = z'(x)$ приводит к *ДУ* первого порядка: $F(x, z, z') = 0$. Найдя отсюда $z(x)$ и интегрируя затем равенство $y' = z(x)$, получают искомую функцию $y(x)$.

Аналогичная замена используется для решения уравнений более высокого порядка, не содержащих явно y.

Пример 2. Решить уравнение $xy'' - y' = 0$.

Решение. Замена $y' = z(x)$ ($y'' = z'$) приводит к уравнению первого порядка: $xz' - z = 0$. Его общее решение дается формулой $z(x) = \bar{C}_1 x$. Тогда $y(x) = \int \bar{C}_1 x\, dx + C_2 = \frac{1}{2} \bar{C}_1 x^2 + C_2$, т. е. $y = C_1 x^2 + C_2$ — общее решение исходного *ДУ* второго порядка.

3. *Уравнение, не содержащее явно x:*

$$F(x, y', y'') = 0.$$

Подстановка $y' = p(y)$ (y играет роль независимой переменной) с учетом равенств $y'' = p'_x = p'_y p'_x = p'_y p$ приводит к уравнению первого порядка: $F(y, p, pp'_y) = 0$. Решив это уравнение, найдем $p = \varphi(y, C_1)$. Возвращаясь к искомой функции y, получим для нее ДУ с разделяющимися переменными: $y' = \varphi(y, C_1)$.

Аналогичная замена используется для решения уравнений более высокого порядка, не содержащих явно x.

Пример 3. Решить уравнение $y'' + 2y(y')^3 = 0$.

Решение. Замена $y' = p(y)$ ($y'' = pp'_y$) приводит к уравнению первого порядка: $pp'_y + 2yp^3 = 0$. Отсюда (учитывая отдельно решение $p = 0$ или $y = \text{const}$) имеем уравнение с разделенными переменными $p^{-2}\,dp = -2y\,dy$, общее решение которого дается формулой $p = (y^2 + C_1)^{-1}$. Тогда $y' = (y^2 + C_1)^{-1}$. В итоге получим общий интеграл исходного уравнения: $\frac{1}{3}y^3 + C_1 y = x + C_2$.

12.3. Линейные уравнения n-го порядка

- **Линейное ДУ n-го порядка** имеет вид

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \qquad (1)$$

где $a_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) и $f(x)$ — заданные функции.

Если $a_n \neq 0$ и все коэффициенты $a_i(x)$ и правая часть $f(x)$ — непрерывные функции, то при любых начальных условиях решение уравнения (1) существует и единственно.

Если $f(x) \equiv 0$, линейное уравнение (1) называется *однородным*, в противном случае — *неоднородным*.

Для уравнения (1) часто используется краткое обозначение:

$$\mathbf{L}[y] = f(x).$$

• **Частные решения.** Каждое линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка имеет ровно n линейно независимых частных решений $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, т. е. таких решений, что ни одно из них не может быть выражено в виде линейной комбинации остальных (фундаментальная система решений). Заметим, что в случае однородного уравнения второго порядка линейная независимость частных решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ равносильна условию $y_1/y_2 \not\equiv \text{const}$.

Пример 1. Линейное однородное уравнение $x^2y'' + xy' - y = 0$ имеет два частных решения $y_1(x) = x$ и $y_2(x) = 1/x$, которые линейно независимы, поскольку их отношение не является постоянной.

• **Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения.** Общее решение линейного однородного ДУ n-го порядка $\mathbf{L}[y] = 0$ представляет собой линейную комбинацию его n линейно независимых частных решений:

$$y_0(x) = C_1\, y_1(x) + C_2\, y_2(x) + \ldots + C_n\, y_n(x),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные.

Пример 2. Найти общее решение ДУ $x^2y'' + xy' - y = 0$.

Решение. Общее решение этого линейного однородного уравнения является линейной комбинацией его частных решений, приведенных в примере 1. Поэтому $y_0 = C_1x + C_2/x$.

• **Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения.** Общее решение линейного неоднородного ДУ n-го порядка $\mathbf{L}[y] = f(x)$ равно сумме общего решения $y_0 = y_0(x)$ соответствующего однородного уравнения $\mathbf{L}[y] = 0$ и какого-нибудь частного решения $\bar{y} = \bar{y}(x)$ данного неоднородного уравнения:

$$y = y_0 + \bar{y}.$$

Пример 3. Найти общее решение ДУ $x^2y'' + xy' - y = 3x^2$.

Решение. Общее решение соответствующего линейного однородного уравнения приведено в примере 2. В качестве частного решения неоднородного ДУ можно взять функцию $\bar{y}(x) = x^2$. Поэтому общее решение данного линейного неоднородного уравнения имеет вид $y = y_0 + \bar{y} = C_1x + C_2/x + x^2$.

12.4. Решение линейных однородных уравнений n-го порядка с постоянными коэффициентами

- **Линейное однородное ДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами** имеет вид

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = 0, \qquad (2)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — постоянные числа, $a_n \neq 0$.

Для решения составляют *характеристическое уравнение*

$$a_nk^n + a_{n-1}k^{n-1} + \ldots + a_1k + a_0 = 0$$

и находят его корни $k_1, k_2, \ldots, k_n$. При этом возможны следующие случаи.

- **Все корни характеристического уравнения действительны и различны.** В этом случае однородное ДУ (2) имеет n линейно независимых частных решений e^{k_1x}, $e^{k_2x}, \ldots, e^{k_nx}$, так что его общее решение имеет вид

$$y_0 = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x} + \ldots + C_ne^{k_nx}.$$

Пример 1. Решить уравнение $y''' + 3y'' - 4y' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 + 3k^2 - 4k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$, $k_2 = 1$, $k_3 = -4$. Поэтому общее решение исходного ДУ дается формулой $y_0 = C_1 + C_2e^x + C_3e^{-4x}$.

- **Некоторый действительный корень характеристического уравнения k имеет кратность r.** Этому корню отвечают r линейно независимых частных решений вида e^{kx}, xe^{kx}, ..., $x^{r-1}e^{kx}$, линейная комбинация которых (вместе с остальными $n-r$ частными решениями) даст общее решение однородного уравнения:

$$y_0 = (C_1 + C_2 x + \ldots + C_r x^{r-1})e^{kx} + \ldots + C_n e^{k_n x}.$$

Пример 2. Решить уравнение $y''' + y'' - y' - y = 0$.

Решение. Здесь характеристическое уравнение $k^3 + k^2 - k - 1 = 0$ или $(k+1)(k^2-1) = 0$ имеет корни $k_1 = k_2 = -1$ (двукратный корень), $k_3 = 1$. Поэтому общее решение исходного ДУ дается формулой $y_0 = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + C_3 e^x$.

- **Характеристическое уравнение имеет пару комплексно сопряженных корней $\alpha \pm \beta i$.** При построении общего решения этой паре отвечают два частных решения однородного уравнения $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$. Они не пропорциональны и, следовательно, линейно независимы.

Пример 3. Решить уравнение $y''' - 6y'' + 13y' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^3 - 6k^2 + 13k = 0$ может быть записано в виде $k(k^2 - 6k + 13) = 0$ и имеет корни $k_1 = 0$, $k_{2,3} = 3 \pm 2i$. Общее решение исходного ДУ дается формулой $y_0 = C_1 + C_2 e^{3x}\cos 2x + C_3 e^{3x}\sin 2x$.

- **Некоторая пара комплексно сопряженных корней $\alpha \pm \beta i$ имеет кратность r.** Такой паре отвечают $2r$ линейно независимых частных решений однородного уравнения:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\ xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Их линейная комбинация (вместе с остальными $n-2r$ частными решениями линейного однородного ДУ n-го порядка) дает общее решение исходного уравнения.

12.5. Линейные неоднородные уравнения n-го порядка

- **Теорема о суперпозиции частных решений.** Пусть функция $\bar{y}_1(x)$ является частным решением линейного неоднородного дифференциального уравнения $\mathbf{L}[y] = f_1(x)$, а функция $\bar{y}_2(x)$ — частным решением уравнения $\mathbf{L}[y] = f_2(x)$. Тогда частным решением $\bar{y}$ уравнения вида $\mathbf{L}[y] = f_1(x) + f_2(x)$ является сумма $\bar{y} = y_1(x) + y_2(x)$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $y'' + y = x + 2e^x$.

Решение. Здесь характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет комплексные корни $\pm i$. Поэтому общее решение однородного уравнения $y'' + y = 0$ имеет вид $y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Легко проверить, что неоднородное уравнение $y'' + y = x$ имеет частное решение $\bar{y}_1 = x$, а уравнение $y'' + y = 2e^x$ — частное решение $\bar{y}_2 = e^x$. Отсюда следует, что частное решение $\bar{y}$ исходного неоднородного уравнения равно сумме $\bar{y} = x + e^x$, так что искомое общее решение дается формулой $y = y_0 + \bar{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x + e^x$.

- **Метод вариации постоянных.** Для нахождения частного решения линейного неоднородного ДУ существует общий метод, называемый методом вариации постоянных. Рассмотрим его на примере линейного неоднородного ДУ второго порядка:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x).$$

Пусть известно общее решение соответствующего однородного уравнения:

$$y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — линейно независимые решения однородного ДУ, C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Частное решение $\bar{y}$ неоднородного ДУ ищут в виде $\bar{y} = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, т. е. произвольные постоянные заменяются неизвестными функциями x. Эти

функции находят из системы линейных алгебраических уравнений для определения производных C'_1 и C'_2:

$$\begin{cases} C'_1(x)y_1(x) + C'_2(x)y_2(x) = 0, \\ C'_1(x)y'_1(x) + C'_2(x)y'_2(x) = f(x). \end{cases} \qquad (3)$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = e^x/x$.

Решение. Здесь общим решением однородного уравнения является функция $y_0 = C_1e^x + C_2xe^x$. Поэтому частное решение неоднородного уравнения ищем в виде $\bar{y} = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$. Для неизвестных функций $C_1(x)$ и $C_2(x)$ составляем систему (3):

$$\begin{cases} C'_1(x)e^x + C'_2(x)xe^x = 0, \\ C'_1(x)e^x + C'_2(x)(1 + x)e^x = e^x/x. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем $C'_1(x) = -1$, $C'_2(x) = 1/x$. Отсюда, интегрируя, получим $C_1(x) = -x$, $C_2(x) = \ln|x|$. Таким образом, искомое частное решение неоднородного *ДУ* дается формулой $\bar{y} = -xe^x + \ln|x|\, xe^x$, а его общее решение имеет вид

$$y = y_0 + \bar{y} = C_1e^x + C_2xe^x - xe^x + \ln|x|\, xe^x.$$

- **Поиск частных решений неоднородных уравнений специального вида.** Для линейных неоднородных уравнений $L[y] = f(x)$ с постоянными коэффициентами поиск частного решения существенно облегчается, если правая часть $f(x)$ имеет так называемый *специальный вид*. При этом подбор частного решения производится методом неопределенных коэффициентов, который основан на знании формы этого решения, зависящей от особенностей не только правой, но и левой части уравнения. Различные формы частного решения в зависимости от вида правой части неоднородного *ДУ* и от корней характеристического уравнения приведены в табл. 2.

Отметим, что $\bar{P}_\nu$ и $\bar{Q}_\nu$ — полные многочлены степени ν (т. е. в их записи присутствуют все степени x от нулевой до ν-й). В третьем и четвертом случаях в записи частного решения всегда присутствуют два многочлена

$\overline{P}_\nu$ и $\overline{Q}_\nu$ одинаковой степени ν, равной наибольшей из степеней m и n (в частности, если $P_m(x) \equiv 0$ или $Q_n(x) \equiv \equiv 0$, решение все равно следует искать в полном виде, указанном в таблице). Коэффициенты многочленов $\overline{P}_\nu$ и $\overline{Q}_\nu$ находят *методом неопределенных коэффициентов.*

Таблица 2

Вид частных решений неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1y' + a_0y = f(x)$ для правой части специального вида

Вид правой части $f(x)$	Корни характеристического уравнения $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$	Вид частного решения $y = \bar{y}(x)$
$P_m(x)$	Число 0 не является корнем характеристического уравнения (т. е. $a_0 \neq 0$)	$\overline{P}_m(x)$
	Число 0 является корнем характеристического уравнения (кратности r)	$x^r\overline{P}_m(x)$
$P_m(x)e^{\alpha x}$ (α — действительное число)	Число α не является корнем характеристического уравнения	$\overline{P}_m(x)e^{\alpha x}$
	Число α является корнем характеристического уравнения (кратности r)	$x^r\overline{P}_m(x)e^{\alpha x}$
$P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$	Число $i\beta$ не является корнем характеристического уравнения	$\overline{P}_\nu(x)\cos\beta x + \overline{Q}_\nu(x)\sin\beta x$
	Число $i\beta$ является корнем характеристического уравнения (кратности r)	$x^r[\overline{P}_\nu(x)\cos\beta x + \overline{Q}_\nu(x)\sin\beta x]$

Продолжение табл. 2

Вид правой части $f(x)$	Корни характеристического уравнения $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$	Вид частного решения $y = \bar{y}(x)$
$[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x] \times e^{\alpha x}$	Число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения	$[\bar{P}_\nu(x)\cos\beta x + \bar{Q}_\nu(x)\sin\beta x]\, e^{\alpha x}$
	Число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения (кратности r)	$x^r[\bar{P}_\nu(x)\cos\beta x + \bar{Q}_\nu(x)\sin\beta x]\, e^{\alpha x}$
Обозначения: P_m и Q_n — многочлены степеней m и n с заданными коэффициентами; $\bar{P}_m$ и $\bar{P}_\nu$, $\bar{Q}_\nu$ — многочлены степеней m и ν, коэффициенты которых определяются в результате подстановки данного вида частного решения в исходное уравнение; $\nu = \max(m, n)$; $i^2 = -1$.		

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''' - 4y' + 5y = (x - 5)\cos x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 5 = 0$ имеет корни $2 \pm i$, поэтому общее решение однородного уравнения дается формулой $y_0 = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. Как следует из табл. 2, частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $\bar{y} = (Ax + B)\cos x + (Mx + N)\sin x$. Подставляя это выражение в исходное *ДУ* и приравнивая коэффициенты при $\cos x$, $x\cos x$, $\sin x$, $x\sin x$, получим линейную систему алгебраических уравнений, откуда найдем следующие значения неопределенных коэффициентов: $A = \frac{1}{8}$, $B = -\frac{9}{16}$, $M = -\frac{1}{8}$, $N = \frac{1}{2}$. В итоге имеем общее решение исходного уравнения

$$y = y_0 + \bar{y} = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x) + \left(\frac{1}{8}x - \frac{9}{16}\right)\cos x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}x\right)\sin x.$$

12.6. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

• **Некоторые определения.** Многие системы дифференциальных уравнений могут быть записаны в так называемой *нормальной форме*:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \qquad (4)$$

Решением системы дифференциальных уравнений называется совокупность n функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$, которые при подстановке в каждое из уравнений превращают его в тождество. Одно ДУ n-го порядка всегда можно заменить нормальной системой (4), вводя вспомогательные неизвестные функции. Часто верно и обратное: нахождение решения системы (4) можно свести к решению одного ДУ n-го порядка.

Пример 1. Решить систему ДУ:

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + \frac{3}{2}x^2, \\ y_2' = -4y_1 - 2y_2 + 4x + 1. \end{cases}$$

Решение. Выразив из первого уравнения $y_2 = -y_1' + y_1 + \frac{3}{2}x^2$ и подставив его во второе уравнение, получим линейное ДУ второго порядка для $y_1(x)$: $y''_1 + y'_1 - 6y_1 = 3x^2 - x - 1$. Общее решение этого уравнения имеет вид $y_1(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} - \frac{1}{2}x^2$. Вторая неизвестная функция находится из полученного выше выражения для y_2: $y_2(x) = -C_1e^{2x} + 4C_2e^{-3x} + x^2 + x$.

- **Общее решение нормальной системы** (4) имеет вид

$$y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные. Задавая значения искомых функций при некотором значении x, можно поставить для системы ДУ задачу о нахождении *частного решения*, удовлетворяющего заданным начальным условиям (*задачу Коши*). Как и в случае одного ДУ, для системы (4) имеет место теорема, гарантирующая существование и единственность частного решения при непрерывности правых частей вместе с их частными производными.

В приложениях наиболее часто встречаются нормальные *системы линейных* ДУ. Для краткости ограничимся системой двух линейных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 + f_1(x), \\ y_2' = cy_1 + dy_2 + f_2(x). \end{cases} \qquad (5)$$

Такие системы обычно решают, не сводя их к одному ДУ. Если $f_1(x) = f_2(x) = 0$, то система называется *однородной*. Общее решение неоднородной системы (5) складывается из общего решения соответствующей однородной системы и какого-нибудь частного решения неоднородной системы (как и в случае одного линейного ДУ).

Для построения общего решения однородной системы сначала находят ее частное решение, имеющее вид

$$y_1(x) = \alpha_1 e^{kx}, \quad y_2(x) = \alpha_2 e^{kx},$$

где k — собственное значение матрицы системы, т. е. корень характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a-k & b \\ c & d-k \end{vmatrix} = (a-k)(d-k) - bc = 0, \qquad (6)$$

а координаты собственного вектора $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ находят из системы линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (a-k)\alpha_1 + b\alpha_2 = 0, \\ c\alpha_1 + (d-k)\alpha_2 = 0. \end{cases} \qquad (7)$$

После этого строят общее решение однородной системы. Возможны следующие случаи.

• **1. Характеристическое уравнение (6) имеет два действительных различных корня k_1 и k_2.** Этим корням отвечают два собственных вектора с координатами $\{\alpha_{11}, \alpha_{21}\}$ и $\{\alpha_{12}, \alpha_{22}\}$ (координаты определяются с точностью до числовых множителей). Общее решение исходной однородной системы ДУ определяется линейной комбинацией частных решений

$$y_1 = C_1\alpha_{11}e^{k_1x} + C_2\alpha_{12}e^{k_2x}, \quad y_2 = C_1\alpha_{21}e^{k_1x} + C_2\alpha_{22}e^{k_2x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Пример 2. Решить систему ДУ: $\begin{cases} y_1' = y_1 + 4y_2 - 4, \\ y_2' = y_1 + y_2 - 1. \end{cases}$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & 4 \\ 1 & 1-k \end{vmatrix} = k^2 - 2k - 3 = 0$$

имеет корни $k_1 = 3$, $k_2 = -1$. Система уравнений (7) для нахождения координат собственных векторов записывается в виде

$$\begin{cases} (1-k)\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0, \\ 1\cdot\alpha_1 + (1-k)\alpha_2 = 0. \end{cases} \quad \text{При } k = 3\text{:} \begin{cases} -2\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0, \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\alpha_1 = 2\alpha_2$. Взяв, например, $\alpha_2 = 1$, получим $\alpha_1 = 2$. Таким образом, первым частным решением однородной системы ДУ является (с точностью до постоянного множителя) $y_1 = 2e^{3x}$, $y_2 = e^{3x}$.

При $k = -1$ аналогичным образом находим второе частное решение: $y_1 = -2e^{-x}$, $y_2 = e^{-x}$. Линейная комбинация двух най-

денных частных решений дает общее решение однородной системы:

$$y_1 = 2C_1e^{3x} - 2C_2e^{-x}, \qquad y_2 = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}.$$

В этом примере легко усматривается частное решение полной (неоднородной) системы: $\bar{y}_1 = 0$, $\bar{y}_2 = 1$. Поэтому общее решение исходной неоднородной системы *ДУ* имеет вид

$$y_1 = 2C_1e^{3x} - 2C_2e^{-x}, \quad y_2 = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + 1.$$

• **2. Характеристическое уравнение (6) имеет пару комплексно сопряженных корней $\beta \pm i\gamma$.** В этом случае следует найти комплексное частное решение однородной системы ДУ (аналогично тому, как это делалось выше при нахождении частного решения, отвечающего действительному корню). Отделяя затем действительную и мнимую части комплексного решения, получим два действительных линейно независимых частных решения, линейная комбинация которых даст общее решение однородной системы ДУ.

Пример 3. Решить систему ДУ: $\begin{cases} y_1' = -y_2', \\ y_2' = 2y_1 + 2y_2. \end{cases}$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -k & -1 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = k^2 - 2k + 2 = 0$$

имеет корни $k_{1,2} = 1 \pm i$. Система (7) для нахождения координат (комплексного) собственного вектора (α_1, α_2) имеет вид

$$\begin{cases} -k\alpha_1 - \alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + (2-k)\alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы при $k = 1 + i$ находим одно из ненулевых решений: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1 - i$. Соответствующее комплексное решение системы дается формулами $y_1 = 1 \cdot e^{(1+i)x}$, $y_2 = (-1 - i) \times \times e^{(1+i)x}$. Отделяя здесь действительные и мнимые части и составляя их линейную комбинацию, получим общее решение системы:

$$y_1(x) = C_1\, e^x \cos x + C_2\, e^x \sin x,$$

$$y_2(x) = C_1\, e^x (\sin x - \cos x) - C_2\, e^x (\sin x + \cos x).$$

• **3. Характеристическое уравнение (6) имеет один действительный двукратный корень $k_1 = k_2 = k$.** Полный анализ этого случая проводится методами линейной алгебры. На практике решение системы удобно искать методом неопределенных коэффициентов в виде

$$y_1 = (\alpha + \beta x)e^{kx}, \quad y_2 = (\gamma + \delta x)e^{kx}. \tag{8}$$

Пример 4. Решить систему ДУ: $\begin{cases} y_1' = y_1 - 7y_2, \\ y_2' = y_2. \end{cases}$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-k & -7 \\ 0 & 1-k \end{vmatrix} = (1-k)^2 = 0$$

имеет двукратный корень $k_1 = k_2 = 1$. Решение системы ищем в виде (8) при $k = 1$. Подставляя эти выражения в исходную систему и сокращая на e^x, получим $\beta = -7(\gamma + \delta x)$, $\delta = 0$. Отсюда видно, что α и γ можно считать произвольными числами (которые обозначим соответственно через C_1 и C_2) и что $\delta = 0$, $\beta = -7C_2$. Таким образом, общее решение исходной однородной системы ДУ запишется в виде

$$y_1 = (C_1 - 7C_2x)e^x, \quad y_2 = C_2e^x.$$

13. Приближенные вычисления

13.1. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов служит для приближенного определения функции, заданной таблично по результатам измерений. Общий вид искомой функциональной зависимости задают априорно с помощью набора параметров (неопределенных коэффициентов) исходя из различных соображений. Наиболее часто используют линейную, степенную и экспоненциальную зависимости. Неопределенные коэффициенты определяются путем минимизации суммы квадратов разностей между результатами измерений и искомой зависимостью при тех же значениях аргумента.

Далее будем считать, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — табличные значения аргумента, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — соответствующие значения функции.

- **Линейная функция.** Пусть в качестве искомой зависимости выбрана линейная функция $y = ax + b$. Для вычисления неопределенных коэффициентов a и b необходимо минимизировать сумму

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2.$$

Используя необходимые условия минимума функции $S = S(a, b)$ (т. е. приравнивая нулю частные производные S по параметрам a и b), получим систему двух линейных уравнений для a и b:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ здесь считаются заданными.

- **Квадратичная функция.** Если в качестве искомой зависимости взять квадратичную функцию $y = ax^2 + bx + c$, то для определения коэффициентов a, b и c приходим к системе трех линейных уравнений

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

- **Общий случай.** Рассмотрим общий случай функциональной зависимости

$$y = f(x, a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — параметры, которые подлежат определению методом наименьших квадратов. Составим сумму

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, a_1, a_2, \ldots, a_m)]^2.$$

Необходимые условия минимума этого выражения приводят к следующей системе m алгебраических (или трансцендентных) уравнений для нахождения неопределенных параметров:

$$\frac{\partial S}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

которая в общем случае будет нелинейной.

13.2. Приближенное решение алгебраических уравнений

• **Предварительные замечания.** Для подавляющего большинства алгебраических (трансцендентных) уравнений вида

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция, не существует точных аналитических формул, позволяющих найти его корни.

Приближенное решение данного уравнения на первом этапе состоит в отделении корней, т. е. определении промежутков (по возможности более узких), внутри которых находится только один корень. Такой промежуток $[a, b]$ обычно находят графически, числа a и b удовлетворяют условию $f(a)f(b) < 0$.

На втором этапе вычисляют последовательные приближения $x_n \in [a, b]$ $(n = 1, 2, \ldots)$ искомого корня c: $c = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, для чего чаще всего применяют следующие методы.

• **Метод касательных (метод Ньютона).** Пусть на промежутке $[a, b]$ существуют и непрерывны производные $f'(x)$, $f''(x)$ и выполняются неравенства $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq \neq 0$ при всех $x \in [a, b]$.

Если $f(a)f''(a) > 0$, то в качестве первого приближения берем $x_1 = a$; если $f(b)f''(b) > 0$, то $x_1 = b$.

Последующие приближения вычисляются по формулам

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \; n = 2, 3, \ldots .$$

Практически погрешность приближения x_n оценивается по формуле

$$|c - x_n| < 0{,}5\,|x_{n-1} - x_{n-2}|,$$

где c — точное значение корня.

- **Метод хорд.** Обозначим $a = x_1^-$, $b = x_1^+$. Приближение x_1^* вычисляется по формуле

$$x_1^* = x_1^+ - \frac{f(x_1^+)}{f(x_1^+) - f(x_1^-)}(x_1^+ - x_1^-).$$

Вместо отрезка $[x_1^-, x_1^+]$ рассматривается отрезок $[x_1^-, x_1^*]$, если $f(x_1^-)f(x_1^*) < 0$, или отрезок $[x_1^*, x_1^+]$, если $f(x_1^+)f(x_1^*) < 0$. В любом случае обозначим левый конец нового отрезка через x_2^-, а правый конец — через x_2^+, и вычислим следующее приближение по формуле

$$x_2^* = x_2^+ - \frac{f(x_2^+)}{f(x_2^+) - f(x_2^-)}(x_2^+ - x_2^-).$$

Рассуждая далее аналогично тому, как это делалось раньше, будем рассматривать отрезок $[x_3^-, x_3^+]$ и вычислим следующее приближение x_3^* и т. д.

Будем считать, что после n итераций вычислены приближения x_n^-, x_n^+, x_n^*. Тогда рассмотрим отрезок $[x_n^-, x_n^*]$, если $f(x_n^-)f(x_n^*) < 0$, или отрезок $[x_n^*, x_n^+]$, если $f(x_n^+)f(x_n^*) < 0$. Обозначим левый конец нового отрезка через x_{n+1}^-, а правый конец — через x_{n+1}^+. Вычислим $(n+1)$-е приближение по формуле

$$x_{n+1}^* = x_{n+1}^+ - \frac{f(x_{n+1}^+)}{f(x_{n+1}^+) - f(x_{n+1}^-)}(x_{n+1}^+ - x_{n+1}^-).$$

Погрешность этого приближения можно оценить с помощью неравенства

$$|c - x_{n+1}^*| < 0{,}5\,|x_{n+1}^+ - x_{n+1}^-|,$$

где c — точное значение корня.

13.3. Вычисление определенного интеграла

Для приближенного вычисления интеграла $\int_a^b f(x)\ dx$ разделим отрезок $[a, b]$ на n равных частей длиной $h = \frac{b-a}{n}$. Обозначим $x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b$ — точки деления, $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

- **Формулы прямоугольников:**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}),$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(y_1 + y_2 + \ldots + y_n).$$

Погрешность этих формул R_n пропорциональна h и оценивается с помощью неравенства

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{2}\ h(b-a)M_1,\quad M_1 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|.$$

- **Формула трапеций:**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right).$$

Погрешность этой формулы пропорциональна h^2 и оценивается с помощью неравенства

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{12}\,h^2(b-a)M_2,\quad M_2 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f''(x)|.$$

- **Формула Симпсона:**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{3}h[y_0 + y_n + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + \\ + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})],$$

где n — четное число. Погрешность формулы Симпсона пропорциональна h^4 и оценивается с помощью неравенства

$$|R_n| \leqslant \frac{1}{180}h^4(b-a)M_4, \quad M_4 = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(4)}(x)|.$$

Формула Симпсона приводит к точным результатам для случая, когда подынтегральная функция является многочленом второй или третьей степени.

13.4. Численное интегрирование дифференциальных уравнений

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y = y_0$ при $x = x_0$. Требуется найти приближенно его решение $y = y(x)$ на отрезке $[x_0, x_*]$.

Разделим отрезок $[x_0, x_*]$ на n равных частей длиной $h = \frac{x_* - x_0}{n}$. Будем искать приближенные значения y_1, $y_2, \ldots, y_n$ функции $y(x)$ в точках деления $x_1, x_2, \ldots, x_n = x_*$.

- **Метод ломаных Эйлера.** При заданном значении $y_0 = y(x_0)$ остальные значения $y_i \approx y(x_i)$ последовательно вычисляются по формуле

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i),$$

где $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

- **Метод Рунге — Кутты** обеспечивает более высокую точность по сравнению с методом Эйлера. Искомые значения y_i последовательно вычисляются по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} h(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4),$$

где использованы краткие обозначения

$$f_1 = f(x_i, y_i), \quad f_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} hf_1\right),$$

$$f_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2} h, y_i + \frac{1}{2} hf_2\right), \quad f_4 = f(x_i + h, y_i + hf_3).$$

14. Теория вероятностей

14.1. Правила и формулы комбинаторики

При решении задач теории вероятностей используются правила и формулы комбинаторики.

- **Правило суммы.** Пусть дана некоторая совокупность объектов (произвольной природы). Если некоторый объект α может быть выбран из этой совокупности m способами, а другой объект β может быть выбран k способами, то выбор *либо объекта* α, *либо объекта* β можно осуществить $m + k$ способами.

- **Правило произведения.** Если объект α может быть выбран m способами и после каждого такого выбора объект β можно выбрать k способами, то выбор *упорядоченной пары объектов* (α, β) можно осуществить mk способами.

Пример 1. Сколько имеется двузначных чисел, составленных из разных цифр?

Решение. Первой цифрой числа может быть одна из цифр $1, 2, \ldots, 9$, а второй — одна из оставшихся после выбора первой цифры, а также 0 (одна из девяти цифр). Искомое количество, согласно правилу произведения, равно $9 \cdot 9 = 81$.

- **Размещениями** из n (различных) элементов по r элементов называются комбинации, состоящие из r элементов, взятых из n элементов ($r < n$), которые отличаются друг от друга либо составом взятых элементов, либо их порядком. Число размещений равно

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1).$$

Пример 2. Сколько трехзначных чисел можно составить из шести цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. Из данных шести цифр отобрать три (в определенном порядке) можно A_6^3 способами. Из этого количества нужно вычесть те тройки чисел, которые начинаются с нуля (т. е. количество двузначных чисел); оно равно числу размещений из цифр 1, 2, 3, 4, 5 по две, т. е. A_5^2. Искомое число трехзначных чисел равно $A_6^3 - A_5^2 = 6 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 = 100$.

- **Перестановками** n элементов называются комбинации, состоящие из этих n элементов, отличающиеся друг от друга только порядком расположения элементов. Число перестановок равно

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n.$$

Эту формулу можно получить из выражения для A_n^r при $r = n$.

Пример 3. Сколькими способами можно рассадить за столом 4 человека?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок четырех элементов, т. е. $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

- **Сочетаниями** из n (различных) элементов по r называются комбинации, состоящие из r элементов, взятых из данных n элементов ($r < n$), которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом. Число сочетаний равно

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Число сочетаний удовлетворяет соотношению $C_n^r = C_n^{n-r}$.

Пример 4. Сколькими способами можно отобрать три шара из ящика, содержащего шесть пронумерованных шаров?

Решение. Искомое число способов равно числу сочетаний из шести элементов по три, т. е. $C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$.

14.2. Основные понятия теории вероятностей

• **Основные определения.** *Элементарное событие* — любой из взаимоисключающих исходов рассматриваемого опыта (испытания). *Пространство элементарных событий* Ω — множество всех элементарных событий. *Событие* — любое подмножество A множества Ω. Событие A наступает тогда, когда исходом опыта является одно из элементарных событий, составляющих A.

Пример 1. Пусть опыт состоит в однократном бросании игральной кости. Здесь имеется шесть исключающих друг друга исходов, так что пространство элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, где элементарное событие ω_k — исход опыта, состоящий в выпадении k очков. Если событие A состоит в появлении нечетного числа очков, то A наступает тогда, когда исходом опыта является одно из элементарных событий ω_1, ω_3, ω_5.

События принято условно изображать в виде некоторых фигур на плоскости (диаграмм Эйлера — Венна), а элементарные события — в виде точек, принадлежащих этим фигурам.

Суммой (объединением) событий A и B называется событие $A + B$, которое состоит из элементарных событий, входящих хотя бы в одно из событий A и B. *Произведением (совмещением) событий* A и B называется событие AB, которое состоит из элементарных событий, входящих в оба события A и B. Эти понятия очевидным образом обобщаются на случай любого числа событий.

Событием, противоположным событию A, называется событие $\overline{A}$, которое наступает тогда и только тогда, когда событие A не наступает. Множество Ω называется *достоверным* событием (в результате опыта оно обязательно наступает). Пустое множество $\varnothing$ называется *невозможным* событием (в результате опыта оно заведомо не наступит).

События A и B называются *несовместными*, если $AB = \varnothing$. Справедливы соотношения $A\bar{A} = \varnothing$ и $A + \bar{A} = \Omega$. Говорят, что события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют *полную группу событий*, если

$$A_i A_j = \varnothing \quad (i \neq j), \quad A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega.$$

Если каждое появление события A сопровождается появлением события B, то говорят, что A является частным случаем B (или что B является следствием A, или что A влечет за собой B). В этом случае применяется запись $A \subset B$, а каждое элементарное событие $\omega \in A$ входит и в событие B. События A и B называются *равносильными* ($A = B$), если каждое из них является частным случаем другого.

- **Различные определения вероятности.**

Статистическое определение вероятности. Пусть опыт проведен N раз и при этом событие A наступило k раз. *Частотой* события A в данной серии опытов называется отношение k/N. Вероятностью $P(A)$ события A называется число, около которого колеблется частота события A в длинных сериях испытаний.

Классическое определение вероятности. Пусть пространство элементарных событий Ω состоит из n равновозможных элементарных событий. Тогда вероятность события A равна $P(A) = m/n$, где m — число элементарных событий, входящих в A (число *благоприятных* исходов). Так, в примере 1 вероятность выпадения грани с нечетным числом очков равна $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример 2. В ящике 15 шаров, из которых 5 белых и 10 черных. Наугад вынимают 6 шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров 2 белых.

Решение. Общее число элементарных исходов данного опыта равно числу сочетаний из 15 по 6, т. е. $C_{15}^{6} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5005$. Число благоприятных исхо-

дов равно произведению $C_5^2 \cdot C_{10}^4 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2100$. Искомая вероятность, согласно классическому определению, равна $\frac{2100}{5005} \approx 0{,}42$.

Геометрическая вероятность. При геометрическом подходе к определению вероятности в качестве пространства элементарных событий Ω рассматривается произвольное множество на прямой, на плоскости или в пространстве. Испытание интерпретируется как случайный выбор точки в области Ω, а событие A — как попадание точки в некоторую подобласть A области Ω. Предполагается, что вероятность выбрать точку в области A пропорциональна мере области (т. е. длине, площади или объему) и не зависит от расположения и формы области. Вероятность события A определяется формулой

$$P(A) = \frac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega}.$$

Отметим, что всегда справедливы соотношения $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$, $P(\varnothing) = 0$, $P(\Omega) = 1$.

14.3. Условная вероятность. Теоремы и формулы теории вероятностей

• **Условная вероятность** $P(B/A)$ события B при условии, что событие A произошло, по определению равна

$$P(B/A) = P(AB)/P(A) \quad (P(A) \neq 0).$$

Отсюда следует *правило умножения вероятностей*:

$$P(AB) = P(A)P(B/A).$$

Пример 1. Пусть в условиях примера 2, рассмотренного в разд. 14.2, из ящика последовательно вынимают два шара (первый шар в ящик не возвращается). Найти вероятность того, что первый вынутый шар окажется белым, а второй — черным.

Решение. Обозначим через A событие «первый вынутый шар оказался белым», через B — «второй вынутый шар оказался черным». Искомая вероятность $P(AB) = P(A)P(B/A) = \frac{5}{15} \cdot \frac{10}{14} = \frac{5}{21}$.

События A и B называются *независимыми*, если $P(AB) = P(A)P(B)$. Для независимых событий A и B выполняются равенства $P(A/B) = P(A)$, $P(B/A) = P(B)$.

Для вычисления вероятности произведения n событий ($n > 2$) применяется формула

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) \dots$$
$$\dots P(A_n/A_1A_2 \dots A_{n-1}).$$

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ называются *независимыми в совокупности*, если вероятность любого из них не изменяется при наступлении какого угодно числа событий из остальных; для таких событий справедлива формула

$$P(A_1A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2) \dots P(A_n).$$

- **Теорема сложения вероятностей:**

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Для несовместных событий A и B эта формула упрощается:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Отсюда следует формула для нахождения вероятности противоположного события: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Для n попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ теорема сложения имеет вид

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Часто удобно вычислять вероятность суммы событий, сводя дело к вычислению вероятности произведения противоположных событий:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n).$$

Пример 2. Из двух орудий производят (независимо) по одному выстрелу по цели. Вероятность попадания в цель для первого орудия составляет 0,8, для второго — 0,9. Требуется найти:

а) вероятность только одного попадания в цель;

б) вероятность хотя бы одного попадания.

Решение. а) Пусть событие A — попадание в цель из первого орудия, B — из второго. Тогда вероятность только одного попадания в цель равна $P(A\bar{B} + \bar{A}B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = 0{,}8\,(1 - 0{,}9) + (1 - 0{,}8)\,0{,}9 = 0{,}26$.

б) Вероятность хотя бы одного попадания в цель равна $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}98$.

Заметим, что последний результат обычно предпочитают получать так: $P(A + B) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - 0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}98$.

Пусть событие A может произойти только вместе с одним из n попарно несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$. В этом случае вероятность события A определяется по *формуле полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i).$$

События H_i по отношению к событию A называются *гипотезами*.

Если в результате опыта событие A произошло, то вероятности гипотез H_i можно «переоценить», т. е. найти условные вероятности гипотез $P(H_i/A)$ (при условии, что событие A произошло). Эти «новые» вероятности вычисляются по *формуле Бейеса*:

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A/H_i)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пример 3. В ящике содержатся одинаковые изделия, изготовленные двумя автоматами: 40% изделий изготовлено первым автоматом, остальные — вторым. Брак в продукции первого автомата составляет 3%, второго — 2%. Требуется найти:

а) вероятность того, что случайно выбранное изделие окажется бракованным;

б) вероятность того, что случайно выбранное изделие изготовлено первым автоматом, если оно оказалось бракованным.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что случайно выбранное изделие — бракованное, а через H_1 и H_2 — события, состоящие в том, что это изделие изготовлено соответственно первым и вторым автоматами. Тогда

а) по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) =$$
$$= 0{,}4 \cdot 0{,}03 + (1 - 0{,}4) \cdot 0{,}02 = 0{,}024;$$

б) по формуле Бейеса

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}03}{0{,}024} = \frac{1}{2}.$$

Вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A («успех») наступит ровно k раз, определяется по *формуле Бернулли*:

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где p — вероятность успеха в одном испытании; C_n^k — число сочетаний из n элементов по k.

Вероятности $P_n(k)$ в последней формуле называются *биномиальными*. Для них выполняется равенство

$$\sum_{k=0}^{n} P_n(k) = 1.$$

Пример 4. Найти вероятность того, что при 10 бросаниях монеты «орел» выпадет 5 раз.

Решение. Имеем $n = 10$, $k = 5$, $p = \frac{1}{2}$. Тогда по формуле Бернулли искомая вероятность равна $P_{10}(5) = C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10-5} =$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{63}{256}.$$

Если n велико, а p мало, то справедлива приближенная *формула Пуассона* (для подсчета вероятностей, относящихся к редким событиям):

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

в которой $\lambda = np$ — среднее число успехов в n испытаниях.

Для приближенного вычисления $P_n(k)$ при больших n можно применять *локальную формулу Муавра — Лапласа*:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} \exp\left[-\frac{(k-np)^2}{2np(1-p)}\right].$$

Вероятность того, что в n независимых испытаниях число успехов k находится между k_1 и k_2, приближенно вычисляется по *интегральной формуле Муавра — Лапласа*:

$$P_n\{k_1 \leqslant k \leqslant k_2\} \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Здесь $\Phi(x) = +\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt$ — функция Лапласа, для которой имеются таблицы.

14.4. Математическое ожидание и дисперсия

• **Случайные величины и их числовые характеристики.** Пусть $\Omega = \{\omega\}$ — пространство элементарных событий. Случайной величиной X называется числовая функция $X(\omega)$, определенная на множестве Ω, такая, что для любого x определена вероятность $P\{X < x\} = P\{\omega: X(\omega) < x\}$. Эта вероятность $P\{X < x\} = F(x)$ назы-

вается *функцией распределения* случайной величины X; она имеет следующие свойства:

1) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$;

2) $F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1$;

3) $F(x_1) \leqslant F(x_2)$ при $x_1 < x_2$;

4) $P\{a \leqslant X < b\} = F(b) - F(a)$.

Если X — *дискретная* случайная величина, принимающая значения $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$, т. е. имеющая ряд (закон) распределения, задаваемый таблицей

X	x_1	x_2	...	x_n	...
P	p_1	p_2	...	p_n	...

$$\left(\sum_i p_i = 1\right),$$

то функция распределения имеет вид

$$F(x) = P\{X < x\} = \sum_{x_n < x} p_n.$$

Непрерывная случайная величина задается либо функцией распределения $F(x)$, либо *плотностью вероятности* $f(x)$, которые связаны формулами

$$f(x) = F'(x), \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Плотность вероятности имеет следующие свойства:

1) $f(x) \geqslant 0$,

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$,

3) $\displaystyle P\{a \leqslant X \leqslant b\} = \int_a^b f(x)\,dx$.

- **Математическим ожиданием** случайной величины X называется число MX, которое вычисляется по формулам

$$MX = \sum_i x_i p_i \qquad \text{(дискретный случай)},$$

$$MX = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx \qquad \text{(непрерывный случай)},$$

где ряд[1] и несобственный интеграл предполагаются сходящимися.

Свойства математического ожидания:

1) $MC = C \quad (C = \text{const})$, 2) $M(CX) = C \cdot MX$,

3) $M(X \pm Y) = MX \pm MY$, 4) $M(XY) = MX \cdot MY$.

В последней формуле считается, что X и Y — независимые случайные величины, т. е. такие, для которых при любых x и y справедливо равенство $P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\}P\{Y < y\}$.

- **Дисперсией** случайной величины X называется число

$$DX = M(X - MX)^2,$$

которое вычисляется по формулам

$$DX = \sum_i (x_i - MX)^2 p_i \qquad \text{(дискретный случай)},$$

$$DX = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - MX)^2 f(x)\, dx \qquad \text{(непрерывный случай)}.$$

Для вычисления дисперсии можно также использовать выражение

$$DX = M(X^2) - (MX)^2.$$

---

[1] Ряд может содержать как бесконечное, так и конечное число членов.

Дисперсия имеет следующие свойства:

1) $DC = 0 \quad (C = \text{const})$,

2) $D(CX) = C^2 \cdot DX$,

3) $D(X \pm Y) = DX + DY$.

Последняя формула справедлива для независимых случайных величин X и Y.

Среднее квадратичное отклонение случайной величины X определяется формулой $\sigma = \sqrt{DX}$.

- **Нормальный закон распределения случайной величины.** Говорят, что случайная величина X распределена по нормальному закону (или *закону Гаусса*), если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right],$$

где $m = MX$, $\sigma = \sqrt{DX}$.

Вероятность того, что нормально распределенная величина X принимает значение в интервале (a, b), определяется по формуле

$$P\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа (см. стр. 198).

Пример. При изготовлении некоторого изделия его масса X подвержена случайным колебаниям. Считаем, что стандартная масса изделия равна 30 *г*, его среднее квадратичное отклонение равно 0,7 *г*, а случайная величина X распределена по нормальному закону. Найти вероятность того, что масса наугад выбранного изделия находится в пределах от 28 до 31 *г*.

Решение. Полагая в последней формуле $m = 30$, $\sigma = 0{,}7$, $a = 28$, $b = 31$, получим

$$P\{28 < X < 31\} = \Phi\left(\frac{31-30}{0{,}7}\right) - \Phi\left(\frac{28-30}{0{,}7}\right) =$$

$$= \Phi(1{,}43) - \Phi(-2{,}86) =$$

$$= \Phi(1{,}43) + \Phi(2{,}86) \approx 0{,}424 + 0{,}498 = 0{,}922.$$

14.5. Закон больших чисел

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше числа $\varepsilon > 0$, удовлетворяет неравенству

$$P\{|X - MX| < \varepsilon\} \geqslant 1 - DX/\varepsilon^2.$$

Теорема Чебышева (закон больших чисел). Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — последовательность попарно независимых случайных величин с одним и тем же математическим ожиданием $MX = m$ и дисперсиями, ограниченными одной и той же константой. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lim_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - m\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

Таким образом, хотя отдельные случайные величины могут принимать значения, далекие от постоянной m, среднее арифметическое достаточно большого числа случайных величин с большой вероятностью принимает значение, близкое к математическому ожиданию.

Теорема Бернулли (является следствием теоремы Чебышева). Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p наступления события A постоянна, то сколь угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты k/n события A от его вероятности p будет по абсолютной величине сколь угодно малым, если число испытаний достаточно велико: $\lim\limits_{n \to \infty} P\left\{\left|\frac{k}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$

Теорема Бернулли объясняет, почему относительная частота при большом числе испытаний обладает свойством устойчивости и оправдывает статистическое определение вероятности (см. разд. 14.2).

Список литературы к разделу «Высшая математика»

Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, 1986. — 544 с.

Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. — М.: Наука, 1988. — 222 с.

Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука, 1988. — 440 с.

Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальное уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1989. — 464 с.

Венцель Е. С., Овчаров Л. А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. — М.: Наука, 1988. — 480 с.

Воробьев Н. Н. Теория рядов. — М.: Наука, 1988. — 408 с.

Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. — М.: Наука, 1995. — 870 с.

Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Наука, 1975.

Двайт Г. Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. — М.: Наука, 1977. — 224 с.

Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии. — М.: Наука, 1975. — 272 с.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Точные решения. — М.: Наука, 1995. — 560 с.

Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1981. — 232 с.

Камке Е. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 704 с.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1984. — 832 с.

Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа, тт. 1, 2, 3. — М.: Высшая школа, 1988.

Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. — М.: Наука, 1989. — 735 с.

Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, тт. 1, 2. — М.: Наука, 1985.

Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. — М.: Наука, 1981.

Сборник задач по математике для втузов, ч. 1, 2, 3 / Под ред. Ефимова А. В., Демидовича Б. П. — М.: Наука, 1990.

Солодовников А. С. Теория вероятностей. — М.: Просвещение, 1983. — 207 с.

Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985. — 231 с.

Чистяков В. П. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1987. — 240 с.

Эльсгольц Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Наука, 1965. — 424 с.

ФИЗИКА

Основные обозначения

A — работа; амплитуда колебаний;
$\vec{a}$ — ускорение;
a_n, a_τ — нормальное и тангенциальное ускорения;
$\vec{B}$ — магнитная индукция;
B — модуль магнитной индукции; яркость;
b — постоянная Вина;
C — теплоемкость; электроемкость;
c — скорость света в вакууме; удельная теплоемкость;
$\vec{D}$ — электрическое смещение;
E — энергия; освещенность;
$\vec{E}$ — напряженность электрического поля;
$\mathscr{E}$ — электродвижущая сила источника (ЭДС);
e — элементарный заряд;
$\vec{F}$ — сила;
$\vec{g}$ — ускорение свободного падения; напряженность гравитационного поля;
g — гиромагнитное отношение;
G — плотность состояний;
$\vec{H}$ — напряженность магнитного поля;
$\hat{H}$ — гамильтониан;
h, $\hbar$ — постоянная Планка;
I — сила электрического тока; интенсивность волны; интенсивность световых колебаний; интенсивность лучистого потока;
I_z — момент инерции относительно оси z;
$\vec{i}$ — линейная плотность поверхностного тока;
J — энергетическая сила источника света; сила света источника; квантовое число полного момента атома;

$\vec{J}$ — намагниченность магнетика;
$\vec{j}$ — плотность электрического тока;
K — модуль всестороннего сжатия;
k — жесткость; волновое число; постоянная Больцмана; коэффициент в законе Кулона;
$\vec{k}$ — волновой вектор;
L — индуктивность; орбитальное квантовое число атома;
$\vec{L}$ — момент импульса относительно точки;
L_z — момент импульса относительно оси z;
l — орбитальное квантовое число электрона;
$\vec{M}$ — момент силы относительно точки;
M_z — момент силы относительно оси z;
m — масса материальной точки; масса тела; магнитное квантовое число;
N — число частиц;
N_A — число Авогадро;
n — концентрация; показатель преломления; главное квантовое число;
$\vec{n}$ — вектор нормали;
P — мощность;
$\vec{P}$ — поляризованность диэлектрика;
p — давление;
$\vec{p}$ — импульс; электрический дипольный момент;
$\vec{p}_m$ — магнитный момент витка с током;
Q — количество теплоты;
Q, q — электрический заряд;
R — универсальная газовая постоянная; энергетическая светимость; постоянная Ридберга;
R, r — сопротивление;
$\vec{r}$ — радиус-вектор;
r_ω, r_ν, r_λ — излучательная способность;
S — энтропия; спиновое квантовое число атома;
$\vec{S}$ — вектор Пойнтинга;
T — абсолютная температура; период колебаний;
u — плотность лучистой энергии;
U — внутренняя энергия; напряжение;
$\vec{U}$ — вектор Умова;
V — объем;
$\vec{v}$, $\vec{V}$ — скорость, $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$;

W — энергия электромагнитного поля;
w — объемная плотность энергии электромагнитного поля;
α — коэффициент теплового расширения;
β — коэффициент затухания;
γ — гравитационная постоянная; показатель адиабаты;
ε — угловое ускорение; энергия молекулы; диэлектрическая проницаемость;
ε_0 — электрическая постоянная;
η — коэффициент полезного действия; вязкость;
$\varkappa$ — диэлектрическая восприимчивость;
λ — длина волны; длина свободного пробега; линейная плотность заряда;
μ — приведенная масса; молярная масса; химический потенциал; магнитная проницаемость;
μ_0 — магнитная постоянная;
ν — количество вещества; частота колебаний;
ξ — смещение точек волны;
ρ — плотность массы; удельное сопротивление; плотность заряда;
σ — поверхностная плотность заряда; коэффициент поверхностного натяжения; постоянная Стефана —Больцмана;
Φ — поток вектора напряженности; поток лучистой энергии;
ϕ — удельный термодинамический потенциал;
φ — потенциал поля; фаза колебаний;
χ — магнитная восприимчивость;
Ψ — свободная энергия; потокосцепление;
ψ — волновая функция;
Ω — телесный угол;
ω — угловая скорость; циклическая частота колебаний;
$\dot{x}$, $\ddot{x}$ — первая и вторая производные:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2};$$

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ — скалярное произведение векторов;
$\vec{a} \times \vec{b}$ — векторное произведение векторов;
$\Rightarrow$ — следует, следовательно;
$\langle\ \rangle$ — среднее значение.

1. Физические основы механики

Механическим движением называется изменение положения тела по отношению к другим телам. Как видно из определения, механическое движение относительно. Для описания движения необходимо определить *систему отсчета*, которая включает в себя тело отсчета, жестко связанную с ним систему координат и набор синхронизированных между собой часов. Механика изучает движение модельных объектов — точек и твердых тел. Положение этих объектов определяется конечным числом независимых параметров (т. е. они обладают конечным числом *степеней свободы*). Кинематика занимается описанием движения без выяснения его причин.

1.1. Кинематика точки

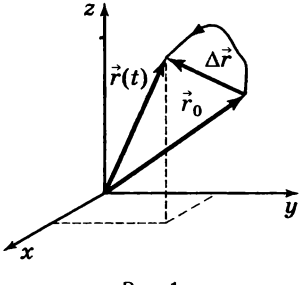


Рис. 1

• **Основные определения. Скорость и ускорение.** *Материальной точкой* называется тело, размерами которого при описании его движения можно пренебречь. Положение точки в момент времени t задается *радиусом-вектором* $\vec{r}$, проведенным к этой точке из начала координат (рис. 1). В процессе движения ко-

нец радиуса-вектора описывает пространственную кривую — *траекторию*. В прямоугольной декартовой системе координат положение радиуса-вектора задается тремя его проекциями на оси — координатами x, y, z. Движение точки полностью определяется заданием *закона движения* — одной векторной функции $\vec{r}(t)$ или трех скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Для компактной записи радиуса-вектора (или любого вектора) через его проекции используют единичные орты: $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Путь — длина участка траектории, пройденного точкой за рассматриваемый интервал времени. Путь — величина скалярная, неотрицательная и не убывающая со временем. *Перемещением* точки называется вектор $\Delta\vec{r}$, соединяющий начальное положение точки с конечным и равный разности радиусов-векторов в конечный и начальный моменты времени.

Скорость точки равна производной от радиуса-вектора по времени: $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Скорость направлена по касательной к траектории. Средняя (по времени) скорость за конечное время Δt определяется как отношение перемещения к интервалу времени: $\vec{v}_{\text{ср}} = \Delta\vec{r}/\Delta t$. (Средняя скорость пути равна отношению пройденного пути к интервалу времени.) Движение называют *равномерным*, если $\vec{v} = \text{const}$. Равномерное движение происходит по прямой. *Равномерным движением по заданной криволинейной траектории* называют движение с постоянным модулем скорости. (Пример — равномерное движение по окружности.)

Ускорение точки равно производной от скорости по времени: $\vec{a} = d\vec{v}/dt$. Ускорение лежит в той же плоскости, что и участок траектории, и направлено «внутрь» траектории (в частном случае, когда траектория является прямой линией, ускорение направлено вдоль этой прямой). Проекцию ускорения на направление скорости называют *тангенциальным ускорением* и обозначают a_τ, она определяет быстроту изменения модуля скорости

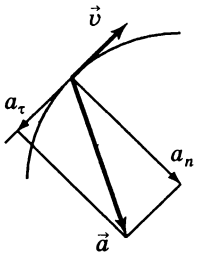


Рис. 2

и равна производной от модуля скорости: $a_\tau = dv/dt$. Другую компоненту ускорения, перпендикулярную скорости, называют *нормальным ускорением* (рис. 2) и обозначают a_n; она характеризует быстроту изменения направления скорости и равна $a_n = v^2/R$, где R — радиус кривизны траектории (т. е. радиус окружности, наиболее близко примыкающей к траектории в данной точке). Среднее ускорение за время Δt определяется как $\vec{a}_{ср} = \Delta\vec{v}/\Delta t$. Движение называют *равноускоренным*, если $\vec{a} = \text{const}$. *Равноускоренным движением вдоль заданной траектории* называют движение с $a_\tau = \text{const}$.

- **Прямая и обратная задачи кинематики.** Задачу определения характеристик движения по известному закону движения называют *прямой задачей кинематики.*

Пример 1. Пусть закон движения имеет вид: $x = R\cos\omega t$, $y = R\sin\omega t$. Найти уравнение траектории, скорость и ускорение.

Решение. Исключая время (с помощью тождества $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$), находим уравнение траектории: $x^2 + y^2 = R^2$ (окружность радиуса R).

Дифференцируя исходные выражения по времени, получим

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega R\sin\omega t,\ v_y = \frac{dy}{dt} = \omega R\cos\omega t$$

(компоненты скорости),

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 R\cos\omega t,$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 R\sin\omega t$$

(компоненты ускорения).

Модуль скорости $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \omega R$ и модуль ускорения $a = \omega^2 R$ не зависят от времени и связаны соотношением $a = v^2/R$. Ускорение направлено перпендикулярно скорости к центру окружности: $\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}$.

Задачу определения закона движения по известному ускорению $\vec{a}(t)$ называют *обратной задачей кинематики.* Для однозначного решения этой задачи нужно знать *начальные условия* — положение и скорость точки в начальный момент времени.

Пример 2. Равноускоренное движение. Пусть известны ускорение точки $\vec{a} = \text{const}$ и ее начальные скорость $\vec{v}_0$ и положение $\vec{r}_0$. Найти траекторию и закон движения точки.

Решение. Последовательно интегрируя, находим сначала скорость точки $\vec{v} = \int\limits_0^t \vec{a}\, dt = \vec{v}_0 + \vec{a}t$, а затем ее положение $\vec{r} =$

$$= \int\limits_0^t \vec{v}\, dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2.$$

Точка движется в плоскости векторов $\vec{v}_0$, $\vec{a}$ по параболе, что видно в системе координат, где ось y направлена по $\vec{a}$, а ось x — перпендикулярно $\vec{a}$.

Во многих случаях задача кинематики не сводится ни к прямой, ни к обратной. В этом случае для определения закона движения приходится решать дифференциальное уравнение. Иногда это уравнение можно решить разделением переменных.

Пример 3. Лодка тормозится силой, пропорциональной квадрату скорости. Найти зависимость скорости движения лодки от времени, если начальная скорость равна v_0.

Решение. Второй закон Ньютона приводит к уравнению $dv/dt = -\alpha v^2$. Разделяя переменные, получим: $dv/v^2 = -\alpha dt$. Интегрируя левую часть уравнения от v_0 до v, а правую — от 0 до t, находим $(v^{-1} - v_0^{-1}) = \alpha t$, т. е. $v = v_0/(1 + v_0\alpha t)$. Интегрируя далее, можно определить закон движения лодки.

• **Движение по окружности.** Движение по окружности можно описывать с помощью угловых переменных: угла поворота φ, угловой скорости $\omega = d\varphi/dt$ и углового ускорения $\varepsilon = d\omega/dt$. Если угол измерять в радианах, то длина дуги равна $s = \varphi R$. Отсюда следует, что

$$v = \omega R, \quad a_\tau = \frac{dv}{dt} = \varepsilon R, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R.$$

Величина a_n называется *центростремительным* ускорением.

Формулы для нормального и тангенциального ускорений можно вывести, если записать скорость в виде $\vec{v} = v\vec{\tau}$, где $\vec{\tau}$ — единичный вектор, направленный вдоль скорости. Получим $\vec{a} = (dv/dt)\vec{\tau} + v(d\vec{\tau}/dt)$ и учтем, что $d\vec{\tau}/dt = \vec{n}(d\varphi/dt) = \vec{n}(v/R)$, где $\vec{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный к скорости и направленный вдоль радиуса. Этот вывод справедлив и для произвольной траектории, если принять соотношение $d\vec{\tau} = \vec{n}(ds/R)$ за определение как направления нормали $\vec{n}$, так и радиуса кривизны R.

• **Относительность движения. Сложение скоростей.** Если движение точки рассматривается из двух систем отсчета K и K', оси которых остаются все время параллельными друг другу, то между скоростями точки $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ относительно этих систем отсчета в каждый момент времени выполняется соотношение

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_K, \tag{1}$$

где $\vec{v}_K$ — скорость системы K' относительно системы K. Такое же соотношение выполняется и для ускорений: $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_K$.

1.2. Кинематика твердого тела

• **Основные определения.** В механике *твердым телом* называют идеализированное тело, расстояние между любыми двумя точками которого не меняется

(т. е. отсутствуют деформации). Выделяют два простых движения твердого тела—поступательное и вращательное. При *поступательном движении* отрезок, соединяющий любые две точки тела, перемещается параллельно самому себе. Значит, все точки тела движутся одинаково, т. е. достаточно описать движение одной точки. При *вращательном движении* все точки твердого тела (или его мысленного продолжения), принадлежащие некоторой прямой — *оси вращения*, остаются неподвижными. Остальные точки тела движутся по окружностям, перпендикулярным оси вращения. Угловые скорости всех точек в каждый момент времени одинаковы, поэтому вводят *вектор угловой скорости* $\vec{\omega}$, направление которого вдоль оси вращения определяется по правилу буравчика. Распределение линейных скоростей точек тела можно представить с помощью векторного произведения[1)]

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \qquad (2)$$

где радиусы-векторы проводятся из любой точки на оси. В случае неподвижной оси вращения вектор углового ускорения $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$ также направлен вдоль оси.

- **Плоское движение твердого тела** определяют как движение, при котором скорости всех точек тела параллельны некоторой плоскости. Если с любой точкой тела (или его мысленного продолжения) связать поступательно движущуюся систему координат, то относительное движение будет чистым вращением вокруг неподвижной оси, перпендикулярной плоскости движения.

Пример 1. Качение колеса без проскальзывания со скоростью v удобно представить как сумму поступательного движения со скоростью v и вращательного движения с угловой ско-

---

[1)] Это уравнение является частным случаем важной математической формулы $d\vec{A}/dt = \vec{\omega} \times \vec{A}$, выражающей производную по времени от любого вектора $\vec{A}$, который вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

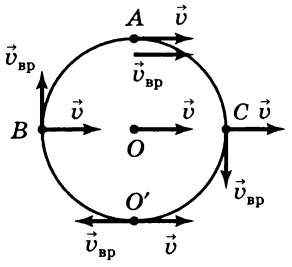


Рис. 3

ростью ω (рис. 3). Скорость любой точки относительно земли можно найти по закону сложения скоростей (1). В частности, скорость нижней точки колеса O' должна быть равна нулю, откуда следует связь между v и ω: $v = \omega R$. Ускорения всех точек направлены к центру колеса.

- **Мгновенная ось вращения.** Если какая-то точка тела (или его мысленного продолжения) в данный момент неподвижна, то существует проходящая через нее прямая неподвижных точек, которую называют мгновенной осью вращения. Распределение скоростей в этот момент описывается формулой (2). Мгновенная ось и $\vec{\omega}$ могут менять свое положение как в пространстве, так и относительно тела. В частности, в примере 1 можно получить скорости всех точек колеса как результат чистого вращения относительно мгновенной оси, проходящей через точку касания O'. Угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ может быть непараллельно мгновенной оси.

- **Сложение угловых скоростей. Движение относительно вращающейся системы отсчета.** Движение твердого тела с неподвижной точкой представляет собой в каждый момент времени чистое вращение вокруг мгновенной оси. Если это движение можно представить как вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ относительно системы отсчета, вращающейся с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$, то результирующая угловая скорость равна $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$. Для доказательства надо обобщить закон сложения скоростей (1) на непоступательное движение системы отсчета:

$$\vec{v} = \vec{v}_{отн} + \vec{v}_{пер}, \qquad (3)$$

где $\vec{v}_{\text{пер}}$ — *переносная скорость* данной точки системы отсчета. В случае вращающейся системы отсчета

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{\omega} \times \vec{r}. \qquad (4)$$

Когда относительное движение представляет собой чистое вращение, имеем $\vec{v} = \vec{\omega}_1 \times \vec{r} + \vec{\omega}_2 \times \vec{r} = (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \times \vec{r}$, т. е. результирующее движение представляет собой вращение с угловой скоростью $(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)$.

Пример 2. Рассмотрим круговой конус с углом полураствора α, который положили на бок и покатили без проскальзывания так, что его ось вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$ (рис. 4). Найти угловую скорость и угловое ускорение конуса.

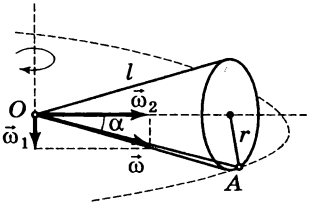


Рис. 4

Решение. Во вращающейся системе отсчета, в которой ось конуса неподвижна, происходит вращение вокруг этой оси с угловой скоростью $\vec{\omega}_2$. Связь между ω_1 и ω_2 найдем из условия неподвижности точки A: $\omega_1 l = \omega_2 r$, или $\omega_1 = \omega_2 \sin\alpha$. Из этого соотношения следует, что вектор $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$ направлен горизонтально, по линии соприкосновения конуса с плоскостью, которая, конечно же, является мгновенной осью вращения. Вклад в угловое ускорение дает только вращение вектора $\vec{\omega}_2$ с угловой скоростью $\vec{\omega}_1$: $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt = \vec{\omega}_1 \times \vec{\omega}_2$, $\varepsilon = \omega_1\omega_2 \cos\alpha$.

Формула (4) является частным случаем формулы для производной по времени от любого вектора $\vec{A}$:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{\text{отн}} + \vec{\omega} \times \vec{A}, \qquad (5)$$

где первый член — скорость изменения $\vec{A}$ относительно вращающейся системы координат (см. также сноску к формуле (2)).

При изучении неинерциальных систем отсчета (см. разд. 1.9) нам понадобится связь между ускорениями точки в неподвижной и вращающейся системах отсчета. Ее можно получить, применив (5) к каждому из двух членов в (4):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{\text{отн}}}{dt} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\vec{v}_{\text{отн}}}{dt}\right)_{\text{отн}} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн}} +$$

$$+ \vec{\omega} \times (\vec{v}_{\text{отн}} + \vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_{\text{отн}} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}).$$

Последний член представляет собой переносное ускорение данной точки системы отсчета (центростремительное ускорение). Видно, что кроме относительного и переносного ускорений, возникает дополнительное слагаемое, которое называют *кориолисовым ускорением.*

1.3. Динамика

- **Первый закон Ньютона** утверждает, что существуют такие системы отсчета, в которых любое тело, не взаимодействующее с другими телами, движется равномерно и прямолинейно. Системы отсчета, существование которых постулирует этот закон, называются *инерциальными.*

Из закона сложения скоростей видно, что любая система отсчета, движущаяся с постоянной скоростью относительно инерциальной, также является инерциальной. Практически точно инерциальной можно считать гелиоцентрическую систему, связанную с Солнцем и удаленными звездами. Земля является инерциальной системой только приближенно, вследствие суточного вращения ускорение точек ее поверхности достигает 0,034 м/с^2.

- **Масса. Импульс.** Из первого закона Ньютона следует, что в инерциальных системах отсчета ускорение тела возникает только в результате его взаимодействия с другими телами. Это ускорение зависит от *инертности тела*, т. е. его способности сопротивляться изменению скорости, а также от интенсивности и направления действия на него других тел.

Масса тела m — это скалярная положительная величина, характеризующая инертность тела. Эксперименты показывают, что при взаимодействии двух тел их ускорения $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ в инерциальной системе отсчета направлены в противоположные стороны, а отношение модулей ускорений a_1/a_2 не зависит от характера и интенсивности взаимодействия. Это позволяет определить отношение масс двух произвольных тел как величину, обратную отношению ускорений, возникающих при их взаимодействии друг с другом: $m_1/m_2 = a_2/a_1$. Чтобы определить абсолютную величину массы m, необходимо определить эталон массы. В системе СИ за эталон массы принимают 1 *килограмм* (1 кг). Масса обладает свойством аддитивности: сумма масс частей, на которые можно разделить тело, равна массе всего тела. Как показывает теория относительности, это свойство является приближенным и нарушается при сильном взаимодействии между частями тела. Например, масса ядра оказывается меньше суммы масс образующих его нуклонов.

Импульсом частицы называют векторную величину, равную произведению массы частицы на ее скорость:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \qquad (6)$$

Определение (6) действует только при $v \ll c$, где c — скорость света; более общее определение, верное при любых $v < c$, вводится в теории относительности.

- **Сила.** Силой, действующей на тело массой m при его взаимодействии с другим телом, назовем величину $\vec{F} = m\vec{a}$, где $\vec{a}$ — ускорение, сообщенное этой силой телу m в инерциальной системе отсчета. Более общее определение имеет вид: $\vec{F} = d\vec{p}/dt$. В ньютоновской динамике оба определения эквивалентны, но в динамике теории относительности определение импульса изменяется, и оказывается верным только второе определение. В системе СИ сила измеряется в *ньютонах* (Н = кг · м/с^2).

Изменение импульса точки за время t под действием силы $\vec{F}$ равно интегралу от силы: $\Delta\vec{p} = \vec{p}(t) - \vec{p}(0) = \int_0^t \vec{F}\,dt$.

Эту величину называют *импульсом силы*. Средняя (по времени) сила равна $\vec{F}_{\text{ср}} = \Delta\vec{p}/\Delta t$.

- **Второй закон Ньютона.** Если на материальную точку одновременно действуют N тел с силами $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_N$, то ускорение тела $\vec{a}$ определяется *векторной суммой этих сил:*

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j \text{ или } \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j.$$

Силу $\vec{F}$ называют *равнодействующей* (или *результирующей*) сил $\vec{F}_1, \ldots, \vec{F}_N$. Второй закон Ньютона называют *уравнением движения* тела, так как он позволяет (в принципе) рассчитать движение тела или системы тел, но только в том случае, если известна зависимость сил взаимодействия между телами от их взаимного расположения и скоростей. Ниже мы кратко напомним свойства сил, которые возникают при решении механических задач.

- **Третий закон Ньютона** утверждает, что силы $\vec{F}_{AB}$ и $\vec{F}_{BA}$, с которыми действуют друг на друга два взаимодействующих тела A и B, направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны и равны между собой по модулю:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}.$$

- **Дальнодействие и причинность. Поле.** В ньютоновской механике третий закон Ньютона выполняется для любых взаимодействующих тел независимо от природы взаимодействия и от того, находятся ли тела в непосредственном контакте или взаимодействуют на расстоянии с помощью гравитационных или электромагнитных сил. Однако выполнение этого закона для дальнодействующих сил означает мгновенную передачу информации об изменении положения тел. Само понятие

дальнодействия противоречит постулатам теории относительности, запрещающим передачу информации со скоростью, превышающей скорость света. Современная физика отказалась от дальнодействия, введя нового участника взаимодействия — материальное *силовое поле* (электрическое, гравитационное и др.), заполняющее все пространство. На тело в данной точке пространства действуют не удаленные тела, а поле в окрестности этой же точки; в свою очередь это поле создается удаленными телами (*источниками поля*). Изменение поля передается от точки к точке и распространяется с конечной скоростью (скоростью света). В ньютоновской механике (при малых скоростях $v \ll c$) можно пользоваться как дальнодействующими силами, так и полем; удобно изучать движение точки (или системы точек) во *внешнем стационарном поле*, создаваемом неподвижными источниками (пример: поле тяжести Земли). Силовое поле называется *центральным*, если сила, действующая со стороны поля на помещенную в него материальную точку, зависит только от расстояния r от точки до силового центра и направлена в сторону центра:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_r(r)\,\frac{\vec{r}}{r},$$

где $F_r(r)$ — проекция силы на радиальное направление. Поле называется *однородным* в области пространства, если сила одинакова во всех точках этой области: $\vec{F} = \mathrm{const}$.

- **Силы природы.** Все разнообразие действующих в природе сил можно свести к нескольким фундаментальным взаимодействиям (гравитационному, слабому, электромагнитному и сильному). Однако для практических целей такой подход непригоден, и кроме фундаментальных дальнодействующих сил (в механике это сила тяготения), надо знать свойства различных сил, возникающих при контакте макроскопических тел. Перечислим кратко силы, возникающие при решении механических задач (их свойства изучают в курсе элементарной физики в школе).

1. *Сила тяжести* $m\vec{g}$ (сила тяготения у поверхности Земли).

2. *Сила упругости* при продольной деформации пропорциональна деформации: $F_{упр} = -kx$, где k — жесткость (закон Гука). В пределе бесконечной жесткости возникают сила (нормальной) реакции N или сила натяжения нити T, которые определяются до самих уравнений движения. (Силы такого типа называют *реакциями связей*.)

3. *Сила сухого трения.* Сила трения скольжения: $F_{тр} = \mu_1 N$, где μ_1 — коэффициент трения скольжения. Сила трения покоя $F_{тр} \leqslant \mu_2 N$, где μ_2 — коэффициент трения покоя (при решении задач считают, что $\mu_1 = \mu_2$). Сила трения покоя также относится к типу реакции связей.

4. *Сила сопротивления движению в жидкости или газе* зависит от скорости и поперечных размеров тела. При малых скоростях и малых размерах сила пропорциональна скорости (сила вязкого трения), при бóльших скоростях сила пропорциональна площади поперечного сечения и квадрату скорости (сила лобового сопротивления).

- **Принцип относительности Галилея.** Принцип относительности Галилея утверждает, что все законы механики имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета. Пусть система K' движется относительно системы K с постоянной скоростью $\vec{V}$. Выберем системы координат с параллельными осями, причем оси x и x' направим вдоль $\vec{V}$; время будем отсчитывать от момента полного совмещения осей. Тогда координаты и время события в системе K' будут выражаться через координаты и время в K с помощью *преобразований Галилея*:

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t. \qquad (7)$$

При преобразованиях Галилея остаются неизменными разность скоростей двух точек и расстояние между ними; значит, не меняются силы взаимодействия между материальными точками. Кроме того, преобразования

Галилея не меняют ускорения точки. Значит, не меняются обе части равенства, выражающего второй закон Ньютона, т. е. уравнение движения имеет одинаковый вид в разных системах отсчета (*инвариантно* относительно преобразований Галилея).

Преобразования Галилея основаны на утверждениях о независимости хода времени и длины отрезков от системы отсчета, которые считались неотъемлемыми свойствами пространства и времени. Теория относительности пересматривает представления о пространстве и времени и показывает, что преобразования Галилея верны только при $V \ll c$; их заменяют преобразования Лоренца, верные при любых скоростях $V < c$.

1.4. Закон сохранения импульса

• **Система материальных точек. Центр масс.** Пусть система состоит из N материальных точек. Силы, действующие на j-ю точку, подразделяются на внутренние $\vec{F}^{\mathrm{i}}_{jk}$, действующие со стороны остальных точек системы, и внешние, равнодействующую которых обозначим[1] $\vec{F}^{\mathrm{e}}_{j}$. В соответствии с третьим законом Ньютона сумма внутренних сил равна нулю, т. е. сумма всех сил, действующих на точки системы, равна сумме внешних сил. Если тела системы не взаимодействуют с внешними телами, то систему называют *замкнутой* (или изолированной).

Центром масс (или центром инерции) системы материальных точек $m_1, \ldots, m_N$ называют точку, положение которой определяется радиусом-вектором

$$\vec{r}_{\text{ц}} = \frac{m_1\vec{r}_1 + \ldots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + \ldots + m_N}. \qquad (8)$$

[1] Верхние индексы «i» и «e» у сил происходят от латинских слов *externus* — внешний и *internus* — внутренний.

Связанную с центром масс поступательно движущуюся систему отсчета будем называть *системой центра масс*.

Если масса распределена непрерывно (в пространстве, по плоскости, вдоль линии), то составляющие систему материальные точки получаются при мысленном разделении объема тела на маленькие области. Распределение массы по объему задают с помощью *плотности*: $dm = \rho(\vec{r})\,dV$. Например, определение (1) для непрерывно распределенной массы принимает вид

$$\vec{r}_{\text{ц}} = \frac{\int \vec{r}\rho(\vec{r})dV}{\int \rho(\vec{r})dV}.$$

Тело с постоянной плотностью называют *однородным*.

- **Импульс.** Импульс системы определяется как сумма импульсов составляющих его частиц:

$$\vec{p} = \sum \vec{p}_j.$$

Продифференцировав уравнение (8) по времени, найдем, что импульс системы выражается через скорость центра масс:

$$\vec{p} = m\vec{v}_{\text{ц}}, \tag{9}$$

где m — масса системы. Значит, в системе центра масс импульс системы точек равен нулю.

Просуммируем уравнение второго закона Ньютона $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ по всем точкам системы и учтем, что все внутренние силы уничтожаются:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_j^{\text{e}} \tag{10}$$

(скорость изменения импульса системы равна результирующей внешней силе).

- **Закон сохранения импульса.** Из уравнения (10) следует, что *импульс замкнутой системы сохраняется*. Закон сохранения импульса является следствием одно-

родности пространства (равноправия всех его точек) и поэтому носит универсальный характер. Область действия этого закона выходит за пределы ньютоновской механики, в рамках которой мы его вывели. Даже при учете конечной скорости распространения сигнала (явление запаздывания), которое приводит к нарушению третьего закона Ньютона, закон сохранения импульса выполняется точно, если учесть импульс передатчика сигнала — силового поля.

Импульс незамкнутой системы сохраняется в следующих случаях:

1. Если сумма внешних сил равна нулю.

2. Если результирующая внешняя сила перпендикулярна некоторому направлению, то сохраняется не вектор импульса системы, а проекция импульса системы на это направление.

3. Если взаимодействие продолжается очень короткое время Δt, а внешние силы $\vec{F}^{e}$ ограничены[1], то изменением импульса системы $\vec{F}^{e}\Delta t$ можно пренебречь (считать, что $\Delta t \to 0$).

- **Движение центра масс.** Продифференцировав по времени уравнение (9), с учетом (10) получим уравнение движения центра масс:

$$m\vec{a}_{ц} = \sum \vec{F}_j^{e} \qquad (11)$$

(центр масс движется так, как двигалась бы воображаемая материальная точка с массой, равной массе системы, если к ней приложить результирующую внешнюю силу).

Пример 1. Рассмотрим тонкий стержень длиной l и массой m, вращающийся в горизонтальной плоскости вокруг одного из своих концов с угловой скоростью ω. Найти силу натяжения в середине стержня.

---

[1] При этом импульсы частиц системы могут заметно измениться под действием очень больших внутренних сил (взрыв, удар).

Решение. Центр масс внешней половины стержня движется по окружности радиусом $\frac{3}{4}l$ под действием только одной внешней силы — искомой силы натяжения. Из уравнения (11) получим: $F_н = \left(\frac{1}{2}m\right)\omega^2\left(\frac{3}{4}l\right) = \frac{3}{8}m\omega^2 l$.

Отметим, что центр масс *замкнутой системы* движется равномерно, следовательно, система центра масс является инерциальной.

- **Реактивное движение.** Изменение скорости корабля в глубоком космосе возможно только за счет выбрасывания наружу части массы — ракетного топлива. Уравнение движения космолета при наличии внешней силы $\vec{F}$ и реактивной струи легко получить, записав закон изменения импульса (3) в инерциальной системе отсчета, связанной в данный момент с кораблем:

$$m\Delta\vec{v} + \Delta M\vec{u} = \vec{F}\Delta t,$$

где $\vec{u}$ — скорость струи относительно корабля, а ΔM — масса выброшенного за время Δt топлива. Разделив на Δt, получим *уравнение Мещерского*:

$$m\vec{a} = \vec{F} - \mu\vec{u},$$

где $\mu = \Delta M/\Delta t = -\Delta m/\Delta t$ — *расход топлива* в струе. Второй член в правой части называют *реактивной силой*.

Запишем уравнение Мещерского для движения по прямой в отсутствие внешней силы: $m(dv/dt) = -(dm/dt)u$. Считая u постоянной, найдем зависимость скорости корабля от его массы: $v/u = -\ln(m/m_0)$ (*уравнение Циолковского*).

1.5. Закон сохранения энергии

Работа — скалярная величина, являющаяся мерой изменения энергии. *Работа внешних сил равна изменению энергии*

$$A = E_2 - E_1. \qquad (12)$$

Определение работы (через интеграл от скалярного произведения):

$$A = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_1^2 F_\tau |d\vec{r}| = \int_1^2 F|d\vec{r}| \cos\alpha,$$

где F_τ — проекция силы на направление движения точки ее приложения, а α — угол между силой и этим направлением. Работа и энергия измеряются в *джоулях* (Дж = Н · м).

Пример 1. Работа постоянной силы $\vec{F}$

$$A = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \left(\vec{F} \cdot \int_1^2 d\vec{r}\right) = \vec{F}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

равна скалярному произведению силы на полное перемещение и не зависит от траектории точки приложения.

Пример 2. Работа центральной силы (силы со стороны центрального поля, см. разд. 1.3) равна

$$A = \int_1^2 (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = \int_{r_1}^{r_2} F_r(r)\, dr$$

(проекция $d\vec{r}$ на радиальное направление равна изменению расстояния r до центра). Она зависит только от начального r_1 и конечного r_2 расстояний до силового центра и не зависит от траектории.

- **Мощность.** Средняя мощность — отношение работы к интервалу времени. Мгновенная механическая мощность равна

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{(\vec{F} \cdot d\vec{r})}{dt} = (\vec{F} \cdot \vec{v}) = F_\tau v.$$

Мощность измеряется в *ваттах* (Вт = Дж/с).

- **Кинетической энергией** называется энергия, связанная с движением точки и зависящая от ее скорости.

Скорость тела изменяется под действием результирующей силы $\vec{F}$, работа которой равна

$$A = \int_1^2 F_\tau |d\vec{r}| = m \int_1^2 a_\tau v\, dt = m \int_1^2 \frac{dv}{dt} v\, dt =$$

$$= m \int_{v_1}^{v_2} v\, dv = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 . \qquad (13)$$

Видно, что в соответствии с общим принципом (12) кинетическую энергию надо определить как $E_к = mv^2/2$. Полученное тождество, утверждающее, что изменение кинетической энергии равно работе результирующей силы, называют *теоремой о кинетической энергии.*

Кинетическая энергия системы точек определяется как сумма кинетических энергий всех точек системы. Изменение кинетической энергии системы равно работе всех сил, действующих на ее точки. Кинетическая энергия системы равна

$$E_к = \frac{m v_ц^2}{2} + E_{отн}, \qquad (14)$$

где m — масса системы, $v_ц$ — скорость ее центра масс, $E_{отн}$ — кинетическая энергия в системе центра масс (*теорема Кёнига*).

- **Консервативные силы. Потенциальное поле.** Сила взаимодействия между точками называется *консервативной*, если работа этой силы зависит только от начального и конечного положения точек, но не зависит от траектории их перемещения. Внешнее стационарное поле называется *потенциальным*, если работа поля при перемещении точки зависит только от ее начального и конечного положения, но не зависит от ее траектории. (Эквивалентное утверждение — работа поля при перемещении точки по замкнутой траектории равна нулю.) Потенциальное поле — это поле консерватив-

ных сил взаимодействия, создаваемое неподвижными внешними источниками. Из примера 1 следует, что однородное поле потенциально (пример — поле тяжести). Из примера 2 следует, что любое центральное поле потенциально. Потенциальным будет также поле, являющееся суперпозицией нескольких центральных полей (создаваемое несколькими источниками). Значит, *электростатическое поле* и *стационарное поле тяготения* являются потенциальными. Из примера 2 также следует, что *сила упругости*, создаваемая легкой пружиной, является консервативной. Система точек, между которыми действуют только консервативные силы, называется *консервативной системой*.

- **Потенциальная энергия.** Потенциальная энергия характеризует взаимодействие между точками и зависит от их взаимного расположения. *Потенциальная энергия точки во внешнем потенциальном поле* определяется следующим образом. Сначала определим разность потенциальных энергий для двух положений точки как работу поля по ее переносу из одного положения в другое:

$$E_{\text{п}}(\vec{r}_1) - E_{\text{п}}(\vec{r}_2) = A_{12} \qquad (15)$$

(эта работа не зависит от траектории). Значит, *изменение потенциальной энергии* $E_2 - E_1$ равно работе сил поля, *взятой с обратным знаком*. Если перемещение частицы в поле осуществляется очень медленно с помощью *внешней* силы, то работа внешней силы будет равна по величине и противоположна по знаку работе поля, т. е. $A_{12}^{\text{e}} = E_2 - E_1$ в соответствии с общим принципом (12). Равенство (15) определяет потенциальную энергию с точностью до константы. Чтобы сделать определение однозначным, надо задать значение потенциальной энергии в какой-то точке пространства (обычно задают точку, в которой потенциальная энергия равна нулю).

Пример 3. Работа силы тяжести $m\vec{g}$ при перемещении точки массой m с высоты h_1 на высоту h_2 равна $mgh_1 - mgh_2$. Значит, потенциальная энергия точки в поле тяжести равна $E_п = mgh$, где высота отсчитывается от оговоренного нулевого уровня. Потенциальная энергия системы точек в поле тяжести равна

$$E_п = \frac{\sum m_j g h_j}{\sum m_j} = mg\frac{\sum m_j h_j}{m} = mgh_ц,$$

где m — масса системы, $h_ц$ — высота ее центра масс.

Пример 4. Работа силы упругости равна $\int\limits_{x_1}^{x_2}(-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$, где x_1, x_2 — начальная и конечная деформации пружины. Значит, потенциальная энергия упругой пружины равна $E_п = \frac{1}{2}kx^2$, где за нуль принята энергия недеформированной пружины.

Пример 5. Работа сил трения, сопротивления отрицательна как на каждом участке пути, так и вдоль замкнутой траектории. Значит, эти силы не являются консервативными.

Потенциальную энергию консервативного взаимодействия двух частиц можно определить как потенциальную энергию одной частицы в поле другой частицы. Ответ не зависит от того, какую из частиц выбрать в качестве источника поля.

- **Связь силы с потенциальной энергией.** Записав равенство (15) для двух близких точек, лежащих на некоторой оси l, получим $E_п(l) - E_п(l + dl) = F_l\,dl$. Значит, проекция силы на произвольное направление выражается через производную от потенциальной энергии:

$$F_l = -\frac{\partial E_п}{\partial l} \qquad (16)$$

(частная производная означает, что $E_п$ рассматривается как функция одной переменной l). Вектор силы получается равным *градиенту* потенциальной энергии:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_п}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_п}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_п}{\partial x}\vec{k}\right) = -\text{grad}\, E_п. \qquad (17)$$

Для центрального поля формула (16) принимает вид

$$F_r = -\frac{dE_п(r)}{dr}. \qquad (18)$$

- **Механическая энергия системы** определяется как сумма ее кинетической энергии, потенциальной энергии взаимодействия между ее частицами и потенциальной энергии во внешнем поле:

$$E_{мех} = \sum_j \frac{m_j v_j^2}{2} + \sum_{i>j} E_{ij} + \sum_j E_j^e. \qquad (19)$$

Первые две суммы образуют *собственную механическую энергию* системы.

- **Изменение механической энергии.** Изменение кинетической энергии равно работе всех сил, приложенных к точкам системы (уравнение (13)). Изменение потенциальной энергии равно работе всех консервативных сил (внутренних и внешних, включая работу потенциальных полей), взятой с обратным знаком. Значит, изменение механической энергии равно работе всех неконсервативных сил, как внешних, так и внутренних:

$$\Delta E_{мех} = A_{неконс}. \qquad (20)$$

- **Закон сохранения механической энергии:** механическая энергия замкнутой консервативной системы остается постоянной.

Это утверждение является частным проявлением общего фундаментального принципа сохранения энергии: *полная энергия замкнутой системы сохраняется.* Полная энергия, кроме механической, включает

в себя также различные виды *внутренней энергии*: тепловую, химическую, ядерную. Общий принцип сохранения энергии выходит далеко за пределы ньютоновской механики, в рамках которой мы получили закон сохранения механической энергии. Этот принцип тесно связан с фундаментальным условием *однородности времени* (равноправием всех моментов времени), он является основанием всего здания современной физики.

Условие консервативности эквивалентно требованию независимого сохранения двух слагаемых полной энергии: механической и внутренней. Если, например, внутри системы действуют силы трения, работа которых отрицательна, то механическая энергия уменьшается (уравнение (20)), переходя во внутреннюю (в этом случае говорят, что в системе выделяется тепло). Механическая энергия может также изменяться в том случае, если в системе присутствует какой-нибудь механизм, способный производить работу за счет внутренней энергии (топлива): двигатель внутреннего сгорания, человек.

Пример 6. Упругий удар. При центральном ударе упругих шаров сохраняется и импульс системы, и ее механическая энергия:

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 u_{1x} + m_2 u_{2x},$$

$$\frac{m^2 v_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2x}^2}{2} = \frac{m_1 u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2 u_{2x}^2}{2}.$$

Вместо второго уравнения удобно использовать условие, что относительная скорость шаров не меняется по величине, но изменяет свой знак: $v_{1x} - v_{2x} = u_{2x} - u_{1x}$. Это уравнение можно вывести из первых двух, но оно становится очевидным при переходе в инерциальную систему центра масс (относительная скорость при таком переходе не меняется). В этой системе отсчета полный импульс системы равен нулю, и после удара скорости шаров просто меняются на противоположные (оба закона сохранения при этом выполняются). Решая два линейных уравнения, находим конечные скорости шаров:

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1x} + 2m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}, \quad u_{2x} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2x} + 2m_1 v_{1x}}{m_1 + m_2}.$$

При упругом ударе о движущуюся стенку ($m_2 \gg m_1$) получим

$$u_{2x} \approx v_{2x}, \qquad u_{1x} \approx -v_{1x} + 2v_{2x}.$$

Пример 7. Неупругий удар. После абсолютно неупругого удара шары движутся поступательно с одинаковой скоростью, т. е. как одно составное тело (вращения не возникнет, если в системе центра масс удар центральный). Скорости сравниваются в результате действия неконсервативных сил, т. е. при неупругом ударе обязательно выделяется тепло. Чтобы убедиться в этом, найдем с помощью закона сохранения импульса конечную скорость шаров: $m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}$, после чего вычислим уменьшение механической энергии:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2}.$$

Еще проще получить этот ответ в системе координат, связанной с центром масс, где шары после удара покоятся.

• **Потенциальные кривые. Устойчивость.** Если известна потенциальная энергия одномерного движения в потенциальном поле $E_п(r)$ (рис. 5), то, опираясь на соотношение (16) между силой и энергией, можно выяснить:

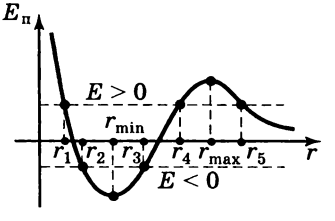


Рис. 5

1. Направление силы ($F > 0$ при $0 < r < r_{min}$ и при $r > r_{max}$).

2. Точки равновесия ($F = 0$ при $r = r_{min}$ и $r = r_{max}$).

3. Устойчивость равновесия. В окрестности точки r_{min} сила направлена в сторону этой точки, т. е. равновесие устойчиво. В точке r_{max} равновесие неустойчиво. Устойчивое равновесие соответствует минимуму потенциальной энергии.

4. По значению механической энергии E можно установить характер движения. Движение может происходить только в области, где $E > E_п$ (кинетическая энергия неотрицательна). При $E < E_п(\infty)$ (для рис. 5

$E_п(\infty) = 0$) движение *финитное*, т. е. происходит в ограниченной области r. На рис. 5 движение происходит между *точками поворота* r_2, r_3. При $E > 0$ движение либо *инфинитно*, т. е. точка после отражения от точки поворота r_5 уходит на бесконечность с кинетической энергией E, либо заперто потенциальным барьером и движется между точками поворота r_1, r_4. В классической механике потенциальный барьер непреодолим; в квантовой механике существует вероятность проникновения сквозь потенциальный барьер (туннельный эффект).

1.6. Закон сохранения момента импульса

• **Момент силы. Равнодействующая.** Момент силы $\vec{F}$ относительно точки O определяется равенством

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \qquad (21)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки приложения силы. Момент силы не меняется при перемещении силы вдоль линии ее действия. Модуль момента равен $M = Fr \sin \alpha = Fd$, где α — угол между силой и радиусом-вектором, d — расстояние между точкой O и линией действия силы, которое называют *плечом силы* (рис. 6). Важнейшее свойство момента силы заключается в том, что для любой системы точек *сумма моментов внутренних сил равна нулю*. Справедливость этого утверждения основана на том, что по третьему закону Ньютона (см. разд. 1.3) силы взаимодействия между точками не только равны по величи-

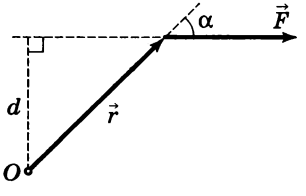


Рис. 6

не и противоположны по направлению, но и направлены вдоль соединяющей эти точки прямой. Отметим еще одно свойство момента сил: если сумма сил равна нулю, то они создают одинаковый суммарный момент относительно любой точки пространства.

Равнодействующей системы сил называют силу, равную их векторной сумме и приложенную таким образом, что ее момент относительно любой точки пространства равен суммарному моменту этой системы сил.

Пример 1. Вычислим суммарный момент сил тяжести, действующих на точки системы:

$$\vec{M} = \sum \vec{r}_j \times m_j\vec{g} = \left(\sum m_j\vec{r}_j\right) \times \vec{g} = \vec{r}_ц \times (m\vec{g}),$$

где m — масса системы, $\vec{r}_ц$ —радиус-вектор центра масс. Видно, что равнодействующая сил тяжести проходит через центр масс, т. е. *центр масс является также центром тяжести.*

Моментом силы относительно оси z называют проекцию M_z на эту ось момента сил относительно любой точки на этой оси. Если разложить как $\vec{r}$, так и $\vec{F}$ в (21) на две составляющих, параллельную оси и перпендикулярную к ней, $\vec{r} = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp$, $\vec{F} = \vec{F}_\parallel + \vec{F}_\perp$, то составляющие, параллельные оси, не дадут вклада в проекцию момента на ось. Следовательно, $M_z = (\vec{r}_\perp \times \vec{F}_\perp)_z$. В плоскости, перпендикулярной оси, получим такую же картинку, как на рис. 6, только вместо $\vec{r}$ и $\vec{F}$ надо обозначить $\vec{r}_\perp$ и $\vec{F}_\perp$. Соответственно модуль момента относительно оси также равен произведению силы на плечо, а выбор положительного направления вдоль оси можно заменить выбором более наглядного положительного направления вращения вокруг оси.

- **Моментом импульса** материальной точки относительно точки O называют величину

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \qquad (22)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор материальной точки, проведенный из точки O, $\vec{p}$ — ее импульс. При движении с по-

стоянной скоростью момент импульса не меняется. Модуль момента импульса равен произведению импульса на плечо. Моментом импульса относительно оси z называется проекция L_z на эту ось момента импульса $\vec{L}$ относительно любой точки на этой оси. Момент импульса относительно оси определяется проекцией движения точки на плоскость, перпендикулярную к оси: $L_z = (\vec{r}_\perp \times \vec{p}_\perp)_z$. Все эти свойства абсолютно аналогичны соответствующим свойствам момента силы.

Производная по времени от момента импульса материальной точки относительно точки O

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M} \qquad (23)$$

равна моменту результирующей силы относительно точки O ($\vec{v} \times \vec{p} = 0$ в силу параллельности векторов $\vec{v}$ и $\vec{p}$).

Пример 2. Движение в центральном поле. Так как на частицу в центральном поле действует сила, направленная в сторону центра поля, то момент этой силы относительно центра тождественно равен нулю. Значит, вектор $\vec{L}$ момента импульса относительно центра сохраняется. Из определения (22) следует, что движение происходит в одной плоскости, перпендикулярной $\vec{L}$, и что сохраняется величина $L = mvr \sin\alpha$. Эта величина пропорциональна скорости «заметания» площади радиусом-вектором $\vec{r}$: $ds/dt = \frac{1}{2} r\,(vdt) \sin\alpha/dt = L/2m$, так что утверждение о сохранении момента импульса при движении в центральном поле оказывается эквивалентным знаменитому *второму закону Кеплера*.

Моментом импульса системы относительно точки O называется сумма моментов импульса материальных точек, составляющих эту систему. Момент импульса системы равен

$$\vec{L} = \vec{r}_{\text{ц}} \times \vec{p} + \vec{L}_{\text{отн}}. \qquad (24)$$

Одно из следствий этого равенства: если импульс системы равен нулю, то $\vec{L}$ не зависит от выбора точки O. Суммируя уравнение (23) по всем точкам системы и учитывая, что суммарный момент внутренних сил равен нулю, получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^{e}, \qquad (25)$$

т. е. *производная по времени от момента импульса системы равна суммарному моменту внешних сил.*

- **Закон сохранения момента импульса.** Из уравнения (25) следует, что *момент импульса замкнутой системы сохраняется.* Закон сохранения момента импульса является фундаментальным законом, отражающим изотропность пространства, т. е. равноправие всех его направлений. Как и в случае законов сохранения импульса и энергии, действие закона сохранения момента импульса выходит за пределы ньютоновской механики, в рамках которой он был выведен.

Момент импульса *незамкнутой* системы сохраняется в следующих случаях:

1. Если суммарный момент внешних сил $\vec{M}^{e}$ равен нулю (пример: движение частицы в центральном поле).

2. Если равен нулю момент импульса внешних сил относительно некоторой оси, то сохраняется момент импульса относительно этой оси.

Пример 3. Если грузик на конце невесомой нити движется по горизонтальной окружности, то момент импульса относительно любой точки на оси вращения (кроме центра окружности) не сохраняется, а момент импульса относительно оси вращения сохраняется, так как моменты сил тяжести и натяжения нити относительно этой оси равны нулю.

3. Если внешние силы ограничены, то изменением момента импульса $\Delta\vec{L} = \vec{M}^{e}\Delta t$ за время удара Δt можно пренебречь.

1.7. Задача двух тел и движение в центральном поле

• **Приведенная масса.** Рассмотрим замкнутую систему двух взаимодействующих между собой частиц. Решить задачу об их движении (задачу двух тел) — значит определить положение точек во все моменты времени исходя из заданных начальных условий. Положение точек выражается через положение центра масс $\vec{r}_{\text{ц}}(t)$ (см. (8)) и их относительное расположение $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{\text{ц}} + \frac{m_2\vec{r}_{12}}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_{\text{ц}} - \frac{m_1\vec{r}_{12}}{m_1 + m_2}.$$

Движение центра масс является равномерным, а его начальные положение и скорость определяются из начальных условий (см. уравнения (8), (9)). Получаем, что решение задачи двух тел сводится к определению $\vec{r}_{12}$.

Из условия однородности и изотропности пространства и однородности времени следует, что частицы должны взаимодействовать центральными силами, т. е. $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \vec{F}$, где $\vec{F}$ параллельна $\vec{r}_{12}$, а ее модуль F зависит только от $|\vec{r}_{12}|$. Запишем уравнения движения каждой точки:

$$\vec{F} = m_1\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}, \quad -\vec{F} = m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}.$$

Разделим первое уравнение на m_1, второе на m_2, а затем вычтем второе уравнение из первого. В результате получим:

$$\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F} = \frac{d^2\vec{r}_{12}}{dt^2} \quad \text{или} \quad \vec{F} = \mu\frac{d^2\vec{r}_{12}}{dt^2},$$

где приведенная масса μ определяется равенством

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \tag{26}$$

Видно, что поведение вектора $\vec{r}_{12}$ определяется решением задачи о движении частицы массой μ в центральном поле.

• **Эффективная потенциальная энергия.** Применение законов сохранения энергии и момента импульса позволяет установить, как зависит от времени расстояние до центра r, точнее, свести эту задачу к одномерному движению. Для этого надо разложить скорость частицы на две компоненты (рис. 7): *радиальную* $v_r = dr/dt$ и перпендикулярную к ней *азимутальную* v_φ. Момент импульса выражается через азимутальную скорость: $L = mrv_\varphi$. Значит, механическую энергию точки можно представить в виде:

$$E = \frac{m(v_r^2 + v_\varphi^2)}{2} + E_п(r) = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dr}\right)^2 + \left[\frac{L^2}{2mr^2} + E_п(r)\right].$$

Видно, что зависимость $r(t)$ такая же, как при одномерном движении с эффективной потенциальной энергией, определяемой равенством

$$E_п^{ef} = E_п + \frac{L^2}{2mr^2}. \qquad (27)$$

Вид эффективной потенциальной кривой определяется значением L, которое можно вычислить из начальных условий.

На рис. 8 качественно изображена зависимость эффективной потенциальной энергии $E_п^{ef}$ от расстояния

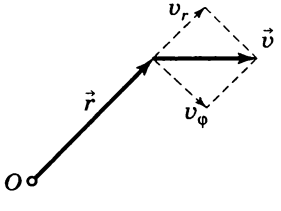


Рис. 7

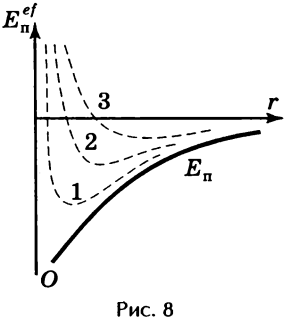


Рис. 8

r для разных значений L ($L_0 = 0$, $L_1 < L_2 < L_3$) в случае $E_п = -b/r$. Видно, что при любом L условие финитности движения остается одним и тем же: $E < 0$.

1.8. Поле тяготения

• **Закон всемирного тяготения.** Две точечные массы m_1, m_2, находящиеся на расстоянии r друг от друга, притягиваются с силой тяготения (гравитационной силой), равной

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (28)$$

где $\gamma \approx 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н · м²/кг² — гравитационная постоянная. Сила тяготения — центральная сила, т. е. она действует вдоль линии, соединяющей частицы.

Силу, действующую на материальную точку массой m в центральном поле тяготения (гравитационном поле), создаваемым неподвижной точечной массой M, можно записать в виде (см. разд. 1.3):

$$\vec{F} = -\gamma \frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \quad \text{или} \quad F_r(r) = -\gamma \frac{mM}{r^2}. \qquad (29)$$

Тем самым роль «заряда» для поля тяготения играет инертная масса m. Иногда это свойство формулируют *как равенство гравитационной и инертной масс.* Потенциальную энергию точки в центральном поле тяготения можно найти, используя соотношение между силой и потенциальной энергией (формула (18)): $-\gamma mM/r^2 = -dE_п/dr$, т. е. $E_п = -\gamma mM/r + \text{const}$. Константу обычно полагают равной нулю, т. е. принимают за нуль потенциальную энергию на бесконечности:

$$E_п = -\gamma \frac{mM}{r}. \qquad (30)$$

• **Принцип суперпозиции.** Если поле тяготения создается несколькими точечными массами $M_1, \ldots, M_N$, то сила, действующая на материальную точку массой m, и ее потенциальная энергия вычисляются по формулам:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_j = -\sum \gamma \frac{mM_j}{(\vec{r} - \vec{r}_j)^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|},$$

$$E_{\text{п}} = \sum E_{\text{п}j} = -\sum \gamma \frac{mM_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}, \qquad (31)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки массой m, $\vec{r}_j$ — радиус-вектор точки массой M_j. Если источник поля представляет собой непрерывно распределенную массу, то суммирование в (31) надо заменить интегрированием.

• **Напряженность и потенциал поля тяготения.** Из уравнений (31) видно, что как сила, действующая на материальную точку массой m в поле тяготения, так и ее потенциальная энергия пропорциональны m. Значит, удельные значения силы и энергии (отношения $\vec{F}/m$ и $E_{\text{п}}/m$) не зависят от величины m, т. е. представляют собой характеристики поля. Их называют, соответственно, напряженностью и потенциалом поля тяготения:

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \varphi = \frac{E_{\text{п}}}{m}.$$

Напряженность поля имеет простой физический смысл: она представляет собой *ускорение свободного падения* любой точечной массы, помещенной в данную точку поля. Напряженность и потенциал поля тяготения, создаваемого точечной массой M, имеют вид:

$$\vec{g} = -\gamma \frac{M}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad \varphi = -\gamma \frac{M}{r}. \qquad (32)$$

Напряженность и потенциал поля, создаваемого несколькими массами, вычисляются с помощью принципа суперпозиции. Запись уравнения аналогична (31),

для разнообразия запишем ответ для случая распределенной массы:

$$\vec{g}(\vec{r}) = -\int \gamma \frac{\rho(\vec{r}\,')}{(\vec{r}-\vec{r}\,')^2|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{}\,dV',$$

$$\varphi(\vec{r}) = -\int \gamma \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV'. \qquad (33)$$

Пример 1. Показать, что напряженность поля тяготения внутри тонкого сферического слоя равна нулю.

Решение. Для доказательства рассмотрим вклад в напряженность поля в точке A небольших участков B и C сферы, отсекаемых от нее тонким конусом с вершиной в точке A (рис. 9). Отношение площадей этих участков, а значит, и отношение их масс, равно отношению квадратов расстояний от этих участков до точки A. Следовательно, напряженности, создаваемые этими участками в точке A, равны по величине.

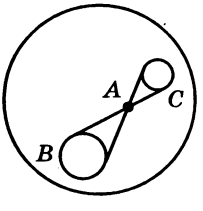


Рис. 9

Напряженность поля, создаваемого тонкой сферой массой M вне ее, оказывается равной напряженности, создаваемой точечной массой M, помещенной в центр сферы. Доказательство этого результата требует громоздкого интегрирования (первым его проделал Ньютон). В главе 3 это утверждение будет доказано с помощью теоремы Гаусса. Такой же ответ годится для любой сферически распределенной массы, в частности, для любой сферической планеты.

Пример 2. Пусть масса M распределена по отрезку длиной l. Вычислить напряженность и потенциал на продолжении отрезка, на расстоянии x от его центра.

Решение. Масса dm, заключенная на отрезке длиной dy, равна $M\,dy/l$. Интегрируя, получим

$$g(x) = -\gamma \int_{x-l/2}^{x+l/2} \frac{M\,dy}{ly^2} = -\gamma\,\frac{M}{x^2-(l/2)^2},$$

$$\varphi(x) = -\gamma \int_{x-l/2}^{x+l/2} \frac{M\,dy}{ly} = -\gamma\,\frac{M}{l}\,\ln\frac{x+l/2}{x-l/2}.$$

Видно, что симметричное, но несферическое тело нельзя заменить точечной массой, помещенной в ее центр. Этот пример является также иллюстрацией того, что напряженность и потенциал связаны соотношением $g_x = -d\varphi/dx$, аналогичным соотношению (16).

- **Движение в центральном поле тяготения. Законы Кеплера.** Движение в центральном поле тяготения подчиняется общим законам движения в центральном поле. Однако оно обладает некоторыми особенностями, отраженными в первом и третьем законах Кеплера, сформулированных им для планет Солнечной системы.

Первый закон Кеплера утверждает, что финитное движение ($E < 0$) материальной точки в центральном поле тяготения происходит по замкнутой траектории — эллипсу, в одном из фокусов которого находится центр силы притяжения (Солнце).

Второй закон Кеплера фиксирует постоянство секторной скорости, т. е. скорости «заметания» площади радиусом-вектором движущейся точки. Он относится к любому центральному полю и является прямым следствием закона сохранения момента импульса (см. пример 2 из разд. 1.6).

Третий закон Кеплера утверждает, что квадраты периодов движения относятся как кубы больших полуосей эллиптических орбит: $T_1^2 / T_2^2 = a_1^3 / a_2^3$.

Дополним первый закон Кеплера утверждением, что инфинитное движение в центральном поле тяготения происходит либо по параболе ($E = 0$), либо по гиперболе ($E > 0$). В качестве дополнения к третьему закону Кеплера приведем связь между удельной энергией движения и большой полуосью: $|E|/m = \gamma M/(2a)$. Видно, что период движения однозначно определяется удельной энергией движущегося тела.

- **Космические скорости.** *Первой космической скоростью* называют скорость движения по круговой орбите вблизи поверхности планеты. Она определяется из

уравнения движения спутника $mg = mv_{\mathrm{I}}^2/R$ и равна $v_{\mathrm{I}} = \sqrt{gR} = \sqrt{\gamma M/R}$. (Для Земли $v_1 \approx 7{,}9$ км/с.) *Вторая космическая скорость* — минимальная скорость, которую надо сообщить телу на поверхности планеты, чтобы оно преодолело силу тяготения и ушло на бесконечность. Как видно из разд. 1.7, условием инфинитности движения является неравенство $E \geqslant 0$, т. е. вторая космическая скорость находится из уравнения $mv_{\mathrm{II}}^2/2 - \gamma mM/R = 0$ и равна $v_{\mathrm{II}} = \sqrt{2\gamma M/R} = \sqrt{2gR}$. (Для Земли $v_{\mathrm{II}} \approx 11{,}2$ км/с.)

1.9. Неинерциальные системы отсчета

● **Определение сил инерции.** Во многих случаях удобно решать задачу динамики непосредственно в неинерциальной системе отсчета (НСО), а не пересчитывать ответ, полученный сначала в инерциальной системе отсчета. Для этого вводят *силы инерции*, определенные следующим образом. Во втором законе Ньютона выделяют из ускорения точки $\vec{a}$ в виде отдельного слагаемого ее ускорение относительно НСО $\vec{a}_{\text{отн}}$, а все остальное переносят в другую часть равенства и называют силой инерции:

$$\sum \vec{F}_j = m\vec{a} \Rightarrow \sum \vec{F}_j = m(\vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}^*) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_j + (-m\vec{a}^*) = m\vec{a}_{\text{отн}} \Rightarrow \sum \vec{F}_j + \sum \vec{F}_{\text{ин}} = m\vec{a}_{\text{отн}}.$$

Приходим к следующему определению сил инерции:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}^*, \tag{34}$$

где $\vec{a}^*$ определяется кинематическим соотношением

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}^* \tag{35}$$

и зависит от параметров НСО и положения и скорости частицы в НСО. Разберем конкретные случаи.

- **Поступательно движущиеся НСО.** В этом случае $\vec{a}^*$ равняется ускорению системы отсчета (см. формулу (1)), т. е. для силы инерции получим выражение

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m\vec{a}_K.$$

Видно, что сила инерции полностью эквивалентна силе тяжести. При решении задач их удобно объединять вместе, т. е. введение силы инерции оказывается эквивалентным замене напряженности поля тяготения (т. е. ускорения свободного падения, см. разд. 1.8): $\vec{g} \Rightarrow \Rightarrow \vec{g}^* = \vec{g} + \vec{a}^* = \vec{g} - \vec{a}_K$.

Пример 1. Сосуд с жидкостью движется с постоянным горизонтальным ускорением $\vec{a}$. Найти угол β между поверхностью жидкости и горизонталью.

Решение. Перейдем в систему отсчета, связанную с сосудом, где неподвижная поверхность жидкости должна быть «горизонтальна», т. е. перпендикулярна вектору $\vec{g}^* = \vec{g} + \vec{a}^* = = \vec{g} - \vec{a}$. Отсюда следует, что $\operatorname{tg}\beta = a/g$.

Принцип эквивалентности сил инерции и сил тяготения был положен Эйнштейном в основу *общей теории относительности*, которая является релятивистской теорией гравитации и объясняет возникновение гравитационных сил искривлением пространственно-временного континуума в присутствии внешних масс.

- **Равномерно вращающаяся система отсчета.** В этом случае кинематическое соотношение для ускорения (35) имеет вид: $\vec{a} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{\omega} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}] + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_{\text{отн}}$ (см. разд. 1.2). Второй член связан с поворотом вектора переносной скорости $\vec{\omega} \times \vec{r}$ вместе с системой отсчета, направлен в сторону оси вращения и равен $\omega^2 R$ (R — расстояние до оси), т. е. представляет собой центростремительное ускорение данной точки системы отсчета. Третий член (ускорение Кориолиса) связан, во-первых, с поворотом относительной скорости частицы вместе с системой отсчета и, во-вторых, с изменением переносной скорости за счет перемещения частицы из одной точки вращающейся НСО в другую. Соответственно сила инерции

(34) представляет собой сумму двух членов, первый из которых называют *центробежной силой*, а второй — *силой Кориолиса*:

$$\vec{F}_{\text{ин}} = \vec{F}_{\text{цб}} + \vec{F}_{\text{кор}} = m\omega^2\vec{R} + 2m\vec{v}_{\text{отн}} \times \vec{\omega}. \qquad (36)$$

Центробежная сила инерции направлена от оси вращения ($\vec{R}$ направлен от оси вращения перпендикулярно к ней). Так как она не зависит от скорости частицы, то ее действие неотличимо от (неоднородного) поля тяготения. Например, на поверхности Земли измеряемая сила тяжести представляет собой сумму силы тяготения и центробежной силы инерции. Сила Кориолиса направлена перпендикулярно скорости. В северном полушарии для движения вдоль поверхности горизонтальная составляющая силы Кориолиса направлена вправо, что проявляется в образовании циклонов, размывании правого берега рек и др.

Пример 2. Требуется найти отклоняющее действие силы Кориолиса на тело, свободно падающее с высоты h на экваторе Земли.

Решение. Так как отклонение маленькое, то в первом приближении можно подставлять в силу Кориолиса (36) скорость «невозмущенного» падения $\vec{v} = \vec{g}t$. Так как вектор $\vec{\omega}$ перпендикулярен $\vec{v}$, то сила Кориолиса направлена в сторону востока, равна $2mv\omega$ и сообщает горизонтальное ускорение $a_{\text{вост}} = 2\omega gt$. Интегрируя, находим горизонтальную скорость $v_{\text{вост}} = gwt^2$ и горизонтальное перемещение $s_{\text{вост}} = \frac{1}{3}gwt^3$. Подставив сюда время падения $t = \sqrt{2h/g}$, найдем конечное отклонение. Например, для $h = 300$ м отклонение составляет ≈ 10 см.

1.10. Динамика твердого тела

• **Вращение вокруг неподвижной оси.** Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси вращения z (см. разд. 1.6) равен

$$|L_z| = \sum R_j m_j v_j = \omega \sum m_j R_j^2 = I_z\omega, \qquad (37)$$

где R_j — расстояние от точки m_j до оси вращения, и мы использовали соотношение $v_j = \omega R_j$. Направление проекции совпадает с направлением $\vec{\omega}$, т. е. определяется по правилу буравчика. Величина

$$I_z = \sum m_j R_j^2 = \int R^2\, dm \qquad (38)$$

называется *моментом инерции* твердого тела относительно оси z. Продифференцировав (37) по времени и учтя, что $dL_z/dt = M_z$, где M_z — момент внешних сил относительно оси вращения (уравнение (25)), получим

$$M_z = I_z\, \varepsilon, \qquad (39)$$

где $\varepsilon = d\omega/dt$ — угловое ускорение. Это уравнение называют *основным уравнением динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.* Вычислим еще кинетическую энергию вращающегося твердого тела:

$$E_к = \sum \frac{m_j v_j^2}{2} = \frac{1}{2}\,\omega^2 \sum m_j R_j^2 = \frac{1}{2}\, I_z \omega^2 \qquad (40)$$

и работу внешней силы при повороте тела:

$$A = \int d\vec{r}\cdot\vec{F} = \int (\vec{\omega}\, dt \times \vec{r})\cdot\vec{F} = \int (\vec{\omega}\, dt)\cdot(\vec{r}\times\vec{F}) = \int (\vec{M}\cdot d\vec{\varphi}),$$

где $d\vec{\varphi} = \vec{\omega}\, dt$.

Пример 1. К концу нити, намотанной на блок с моментом инерции I и радиусом R, привязали тело массой m и отпустили. Найти угловое ускорение тела.

Решение. Запишем второй закон Ньютона для тела: $mg - T = ma$ и уравнение (39) для блока: $TR = I\varepsilon$. Учтем также кинематическое соотношение $a = \varepsilon R$. Решая эти уравнения, получим $a = g/(1 + I/mR^2)$.

• **Свойства момента инерции.** Момент инерции (38) — скалярная аддитивная величина, характеризующая распределение массы тела по отношению к оси. Из уравнений (39), (40) видно, что момент инерции является мерой инертности твердого тела по отношению к вращательному движению, т. е. играет ту же роль, что масса для поступательного движения.

Пример 2. Вычислить момент инерции однородного диска массой m и радиусом R относительно оси симметрии.

Решение. Разбив диск на тонкие круговые полоски и интегрируя, получим

$$I = \int r^2\,dm = \int_0^R r^2 \left(\frac{m}{\pi R^2}\right) 2\pi r\,dr = \frac{mR^2}{2}.$$

Такой же ответ верен и для сплошного однородного цилиндра.

Теорема Штейнера связывает момент инерции I относительно произвольной оси с моментом инерции I_0 относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс твердого тела:

$$I = I_0 + ma^2, \tag{41}$$

где m — масса тела, a — расстояние между осями. Например, момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его край, равен $\frac{3}{2}mR^2$. Минимальный момент инерции среди всех параллельных осей получается для оси, проходящей через центр масс.

Теорема о взаимно перпендикулярных осях: момент инерции плоского тела относительно произвольной оси z, перпендикулярной его плоскости, равен сумме моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей x и y, лежащих в плоскости тела и пересекающихся с осью z:

$$I_z = I_x + I_y.$$

Например, момент инерции тонкого диска относительно оси симметрии, лежащей в его плоскости, равен

$$I_x = I_y = \frac{1}{2} I_z = \frac{1}{4} mR^2.$$

Приведем моменты инерции некоторых тел различной формы.

1. Тонкий обруч (относительно оси симметрии): $I = mR^2$. Такой же момент инерции имеет тонкостенный цилиндр (без торцов).

2. Тонкий стержень длиной l (относительно перпендикулярной к стержню оси, проходящей через его середину): $I = \frac{1}{12} ml^2$. Такой же момент инерции имеет плоский прямоугольник относительно оси, проходящей через середины противоположных сторон длиной l. Относительно края стержня момент инерции равен $I = \frac{1}{3} ml^2$.

3. Плоский прямоугольник относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через его центр: $I = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$. Такой же момент инерции имеет прямоугольный параллелепипед относительно оси, проходящей через середины противоположных граней.

4. Тонкая сфера относительно оси симметрии: $I = \frac{2}{3} mR^2$.

5. Однородный шар относительно оси симметрии: $I = \frac{2}{5} mR^2$.

6. Цилиндрический слой с внутренним радиусом R_1 и внешним R_2: $I = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$.

● **Плоское движение твердого тела.** Плоское движение есть суперпозиция поступательного движения центра масс и вращательного движения в системе центра масс (см. разд. 1.2). Движение центра масс описывается вторым законом Ньютона и определяется результирующей внешней силой (уравнение (11)). Вращательное движение в системе центра масс подчиняется уравнению (39), в котором надо учитывать только реальные внешние силы, так как момент сил инерции относительно центра масс равен нулю (аналогично моменту сил тяжести, пример 1 из разд. 1.6). Кинетическая энергия плоского движения равна $E_к = \frac{1}{2} m\upsilon_ц^2 + \frac{1}{2} I_0\omega^2$ (см.

уравнение (14)). Момент импульса относительно неподвижной оси, перпендикулярной плоскости движения, вычисляется по формуле (см. уравнение (24)): $L_z = \pm m v_ц d \pm I_0 \omega$, где d — плечо скорости центра масс относительно оси, а знаки определяются выбором положительного направления вращения.

Пример 3. Требуется найти ускорение круглого тела, которое скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости (рис. 10).

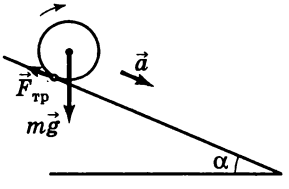


Рис. 10

Решение. Уравнения движения имеют вид: $mg \sin \beta - F_{тр} = ma$, $F_{тр}R = I\varepsilon$. Условие отсутствия проскальзывания ($v = \omega R$) приводит к уравнению $a = \varepsilon R$ (см. пример 1 из разд. 1.2). Решая эти уравнения, находим ускорение тела:

$$a = g \sin \alpha/(1 + I/mR^2).$$

Так как сила трения покоя работы не совершает, то механическая энергия сохраняется.

Пример 4. При упругом ударе шарика массой m о край неподвижного стержня длиной l и массой M, расположенного перпендикулярно его скорости, конечные скорости шарика u, центра стержня V и угловую скорость его вращения ω определяют из трех уравнений:

1) закона сохранения импульса: $mv = mu + MV$,

2) закона сохранения энергии: $mv^2/2 = mu^2/2 + MV^2/2 + (Ml^2/12)\omega^2/2$,

3) закона сохранения момента импульса (например, относительно точки удара): $0 = MV(l/2) - (Ml^2/12)\omega$.

• **Движение с неподвижной точкой.** Угловая скорость вращения, направленная вдоль оси вращения, меняет свое направление как в пространстве, так и по отношению к самому твердому телу. Уравнение движения

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e,$$

которое называют *основным уравнением движения твердого тела с неподвижной точкой*, позволяет узнать, как изменяется момент импульса $\vec{L}$. Так как вектор $\vec{L}$ в общем случае не параллелен вектору $\vec{\omega}$, то для замыкания уравнений движения надо научиться связывать эти величины друг с другом.

Пример 5. При вращении наклонной гантельки вокруг вертикальной оси (рис. 11) момент импульса $\vec{L}=\vec{r}_1\times\vec{p}_1+\vec{r}_2\times\vec{p}_2$ направлен перпендикулярно гантельке, он направлен под углом к оси вращения и сам вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$.

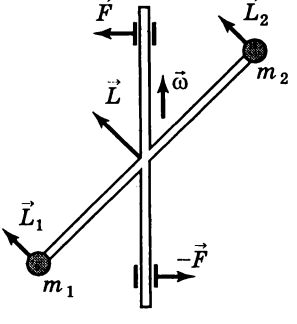


Рис. 11

Проблему связи между $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ решает *теорема о главных осях инерции*, утверждающая, что для любой точки тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, при вращении относительно которых вектор $\vec{L}$ параллелен оси вращения: $\vec{L}_i = I_i\vec{\omega}_i$ (i = 1, 2, 3). Моменты инерции относительно этих осей называют *главными моментами инерции*. Если вращение происходит вокруг произвольной оси вращения, то, разложив угловую скорость по главным осям $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3$, мы сможем вычислить момент импульса:

$$\vec{L} = I_1\vec{\omega}_1 + I_2\vec{\omega}_2 + I_3\vec{\omega}_3. \qquad (42)$$

(Аналогично, разложив вектор $\vec{L}$, мы найдем вектор $\vec{\omega}$.) Если главные оси проведены через центр масс (центр инерции) тела, то их называют *свободными осями*. При вращении вокруг любой из свободных осей сохраняются как импульс, так и момент импульса тела, т. е. для поддержания вращения к телу не надо прикладывать ни внешнюю силу, ни внешний момент сил. (В примере 5

результирующая сила равна нулю, но в точках крепления оси возникает пара сил, момент которых обеспечивает изменение $\vec{L}$ со временем.) При свободном вращении устойчивым оказывается только вращение относительно двух свободных осей — с минимальным и максимальным главными моментами инерции.

Пример 6. Свободный симметричный волчок. Нутация земной оси. Выясним, как меняется положение оси вращения относительно твердого тела (в системе отсчета, связанной с этим телом). Ограничимся случаем *свободного симметричного волчка*, т. е. свободно вращающегося твердого тела, у которого $I_1 = I_2 = I_\perp$, $I_3 = I_\parallel \neq I_\perp$. (Таким волчком является, в частности, Земля.) Для симметричного волчка вектор $\vec{L} = I_\parallel\vec{\omega}_\parallel + I_\perp\vec{\omega}_\perp$ лежит в одной плоскости с осью симметрии 3 и с вектором $\vec{\omega} = \vec{\omega}_\parallel + \vec{\omega}_\perp$. В инерциальной системе отсчета вектор $\vec{L}$ сохраняется, из чего следует, что в системе отсчета, связанной с самим вращающимся телом, вектор $\vec{L}$ совершает в данный момент вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}$, т. е. подчиняется уравнению:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}.$$

Это уравнение называется *уравнением Эйлера* (обычно записывают систему трех уравнений, получающихся при проектировании этого уравнения на оси 1, 2, 3 с учетом соотношения (42)). Сложность этого уравнения заключается в том, что сам вектор $\vec{\omega}$ не постоянен, но связан с вектором $\vec{L}$ линейным соотношением (42). Для симметричного волчка $\vec{\omega} \times \vec{L}$ перпендикулярно плоскости $\vec{\omega}$, $\vec{L}$. Значит, $d\vec{L}_\parallel/dt = I_\parallel d\vec{\omega}/dt = 0$ ($\omega_\parallel = \text{const}$). Для $\vec{\omega}_\perp$ получаем уравнение:

$$I_\perp \frac{d\vec{\omega}_\perp}{dt} = (\vec{\omega}_\parallel + \vec{\omega}_\perp) \times (I_\parallel\vec{\omega}_\parallel + I_\perp\vec{\omega}_\perp) = (I_\perp - I_\parallel)\,\vec{\omega}_\parallel \times \vec{\omega}_\perp$$

или

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{\omega},$$

где $\vec{\Omega} = \dfrac{(I_\perp - I_\parallel)}{I_\perp}\,\vec{\omega}_\parallel$. Это уравнение показывает, что в системе отсчета, связанной с волчком, ось вращения совершает круговое движение вокруг оси симметрии 3 с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. В случае земного шара относительное отличие между моментами инерции мало, и наблюдается медленное (с периодом в десятки суток) движение оси вращения Земли (*нутация земной оси*).

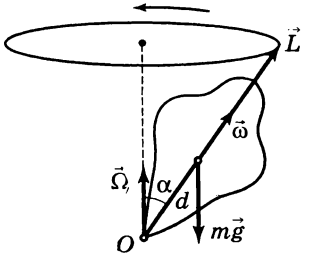


Рис. 12

• **Гироскопы.** Гироскопом называют твердое тело, быстро вращающееся относительно своей оси симметрии. Задачу о движении оси гироскопа можно решать в *гироскопическом приближении*: $\vec{L} = I\vec{\omega}$, оба вектора направлены вдоль оси симметрии. Уравновешенный гироскоп (закрепленный в центре масс) обладает свойством *безынерционности*: его ось перестает двигаться, как только исчезает внешнее воздействие ($\vec{M}$ обращается в нуль). Это позволяет использовать гироскоп для сохранения ориентации в пространстве. На *тяжелый гироскоп* (рис. 12), у которого центр масс смещен на расстояние d от точки закрепления, действует момент силы тяжести, направленный перпендикулярно $\vec{L}$. Так как $d\vec{L}/dt \perp \vec{L}$, то $\vec{L}$ и ось гироскопа совершают регулярное вращение вокруг вертикальной оси (*прецессия гироскопа*). Конец вектора $\vec{L}$ вращается по горизонтальной окружности радиусом $L \sin\alpha$ с угловой скоростью

$$\Omega = \left|\frac{d\vec{L}/dt}{L\sin\alpha}\right| = \frac{mgd\sin\alpha}{I\omega\sin\alpha} = \frac{mgd}{I\omega}.$$

Угловая скорость прецессии не зависит от угла наклона оси α.

1.11. Специальная теория относительности

Специальная теория относительности Эйнштейна (СТО) расширяет границы классической ньютоновской физики, действующей в области *нерелятивистских скоростей*, малых по сравнению со скоростью све-

та c, на любые, в том числе *релятивистские*, т. е. сравнимые с c, скорости. Все результаты релятивистской теории при $v/c \to 0$ переходят в результаты классической нерелятивистской физики (*принцип соответствия*).

- **Постулаты СТО.** Специальная теория относительности опирается на два постулата:

Первый постулат (*принцип относительности Эйнштейна*): все физические законы — как механические, так и электромагнитные — имеют одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета (ИСО). Иными словами, никакими опытами нельзя выделить какую-то одну систему отсчета и назвать именно ее покоящейся. Этот постулат является расширением принципа относительности Галилея (см. разд. 1.3) на электромагнитные процессы.

Второй постулат Эйнштейна: скорость света в вакууме одинакова для всех ИСО и равна $c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с. Этот постулат содержит сразу два утверждения:

а) скорость света не зависит от скорости источника;

б) скорость света не зависит от того, в какой ИСО находится наблюдатель с приборами, т. е. не зависит от скорости приемника.

Постоянство скорости света и независимость ее от движения источника следуют из уравнений электромагнитного поля Максвелла. Казалось очевидным, что такое утверждение может быть верным только в одной системе отсчета. С точки зрения классических представлений о пространстве — времени, любой другой наблюдатель, двигаясь со скоростью v, должен для встречного луча получить скорость $c + v$, а для испущенного вперед луча — скорость $c - v$. Такой результат означал бы, что уравнения Максвелла выполняются только в одной ИСО, заполненной неподвижным «эфиром», относительно которого и распространяются световые волны. Однако попытка обнаружить изменение скорости света, связанное с движением Земли относительно эфира, дала отрицательный результат (опыт Майкельсона — Морли). Эйнштейн предположил, что уравнения Максвелла, как и все законы физики, имеют один и тот же вид во всех ИСО, т. е. что скорость света в любой ИСО равна c (второй постулат). Это предположение привело к пересмотру основных представлений о пространстве — времени.

• **Преобразования Лоренца.** Преобразования Лоренца связывают между собой координаты и время события, измеренные в двух ИСО, одна из которых (K') движется относительно другой (K) с постоянной скоростью $\vec{V}$. При таком же выборе осей координат и отсчета времени, как в преобразованиях Галилея (формула (7)), преобразования Лоренца имеют вид:

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - (V/c^2)x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (43)$$

Часто удобно пользоваться преобразованиями для разности координат и времен двух событий:

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - V\Delta t), \quad \Delta y' = \Delta y, \quad \Delta z' = \Delta z,$$
$$\Delta t' = \gamma[\Delta t - (V/c^2)\Delta x], \qquad (44)$$

где для краткости введено обозначение

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \gamma \geqslant 1. \qquad (45)$$

Преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея при $V \ll c$. Они выводятся из второго постулата СТО и из требования линейности преобразований, выражающего условие однородности пространства. *Обратные преобразования* из K' в K можно получить из (43), (44) заменой V на $-V$:

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + V\Delta t'), \quad \Delta y = \Delta y',$$
$$\Delta z = \Delta z', \quad \Delta t = \gamma[\Delta t' + (V/c^2)\Delta x'], \qquad (46)$$

• **Сокращение длины.** Длина движущегося отрезка определяется как расстояние между точками, где концы отрезка находились одновременно (т. е. $\Delta t = 0$). Рассмотрим твердое тело, которое движется поступательно со скоростью v, и свяжем с ним систему отсчета K'. Из уравнения (44) (в котором надо положить $V = v$, $\Delta t = 0$) получим, что продольные размеры движущегося тела сокращаются:

$$l = l_0/\gamma = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}, \qquad (47)$$

где l_0 — *собственный* продольный размер, т. е. измеренный в системе отсчета K', в которой тело неподвижно. Поперечные размеры движущегося тела не изменяются.

Пример 1. Если квадрат движется со скоростью $v = 0{,}8c$ вдоль одной из своих сторон, то он превращается в прямоугольник с углом между диагоналями, равным $\operatorname{arcctg} \sqrt{1 - v^2/c^2} = \operatorname{arcctg} 0{,}6 \approx 59°$.

● **Относительность хода времени.** Из преобразований Лоренца видно, что время протекает по-разному в разных ИСО. В частности, события, происходящие в системе K одновременно ($\Delta t = 0$), но в разных точках пространства, в K' могут быть не одновременными: $\Delta t' = -\gamma V \Delta x/c^2$ может быть как положительным, так и отрицательным (*относительность одновременности*). Часы, движущиеся вместе с системой отсчета (т. е. неподвижные относительно K', или $\Delta x' = 0$), показывают *собственное время* этой ИСО. С точки зрения наблюдателя в системе K, эти часы отстают от его собственных (*замедление хода времени*). Рассматривая два отсчета движущихся часов как два события, из (46) получим:

$$\Delta t = \gamma \Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \qquad (48)$$

где $\Delta\tau = \Delta t'$ — собственное время движущихся часов (точнее, связанной с ними ИСО). Равноправие всех ИСО проявляется в том, что с точки зрения наблюдателя K' часы, неподвижные относительно K, будут отставать от его собственных. (Заметим, что для контроля за движущимися часами неподвижный наблюдатель в разные моменты времени использует *разные* часы.) *Парадокс близнецов* заключается в том, что СТО предсказывает различие в возрасте двух близнецов, один из которых оставался на Земле, а другой путешествовал в глубоком космосе (космонавт будет моложе); казалось бы, это нарушает равноправие их систем отсчета. На самом деле, только земной близнец все время находился в одной

ИСО, космонавт же поменял ИСО для возвращения на Землю (его же собственная система отсчета неинерциальна).

Пример 2. Среднее собственное время жизни нестабильного мюона $\gamma = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с, т. е. $c\tau \sim 660$ м. Благодаря эффекту замедления времени, с точки зрения земного наблюдателя космический мюон, летящий со скоростью v, близкой к скорости света ($\gamma \gg 1$), живет в среднем $\gamma\tau$, пролетает от места рождения в верхних слоях атмосферы расстояние порядка $c\gamma\tau$, что позволяет регистрировать его на поверхности Земли.

- **Сложение скоростей в СТО.** Если частица движется со скоростью $\vec{v}'$ относительно ИСО K', то ее скорость относительно K можно найти, выразив dx, dy, dz, dt из (46) и подставив в $v_x = dx/dt$, $v_y = dy/dt$, $v_z = dz/dt$:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2},$$

$$v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + v'_x V/c^2}. \qquad (49)$$

При $v_x, V \ll c$ происходит переход к нерелятивистскому закону сложения скоростей (формула (1)). Важное свойство формулы (49) состоит в том, что если V и v' меньше c, то и v будет меньше c. Например, если мы разгоним частицу до $V = 0{,}9c$, а затем, перейдя в ее систему отсчета, снова разгоним ее до $v' = 0{,}9c$, то результирующая скорость окажется не $1{,}8c$, а $(1{,}8c)/1{,}81 < c$. Видно, что превзойти скорость света не удается. Скорость света является максимально возможной скоростью передачи взаимодействий в природе.

- **Интервал. Причинность.** Преобразования Лоренца не сохраняют ни величину интервала времени, ни длину пространственного отрезка. Однако можно показать, что при преобразованиях Лоренца сохраняется величина

$$s_{12}^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta\vec{r})^2, \quad (50)$$

где s_{12} называется *интервалом* между событиями 1 и 2 ($\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$). Если $s_{12}^2 > 0$, то интервал между событиями называют *времениподобным*, так как в этом случае существует ИСО, в которой $\Delta\vec{r} = 0$, т. е. события происходят в одном месте, но в разное время. Такие события могут быть причинно связанными. Если, наоборот, $s_{12}^2 < 0$, то интервал между событиями называют *пространственноподобным*, так как в этом случае существует ИСО, в которой $\Delta t = 0$, т. е. события происходят одновременно в разных точках пространства. Между такими событиями не может существовать причинной связи. Условие $c|\Delta t| < |\Delta\vec{r}|$ означает, что луч света, испущенный в момент более раннего события (например, t_1) из точки $\vec{r}_1$, не успевает достигнуть точки $\vec{r}_2$ к моменту времени t_2. События, отделенные от события 1 времениподобным интервалом, представляют по отношению к нему или *абсолютное прошлое* ($t_2 - t_1 < 0$), или *абсолютное будущее* ($t_2 - t_1 > 0$); порядок следования этих событий одинаковый во всех ИСО. Порядок следования событий, отделенных пространственноподобным интервалом, может быть разным в разных ИСО.

- **Лоренцевы 4-векторы.** Четверка величин (A_x, A_y, A_z, A_τ) = ($\vec{A}$, A_τ), которые при переходе из системы K в систему K' преобразуются так же, как (x, y, z, ct), т. е. (см. (43)):

$$A'_x = \frac{A_x - (V/c)A_\tau}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z,$$

$$A'_\tau = \frac{A_\tau - (V/c)A_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \qquad (51)$$

называется *лоренцевым четырехмерным вектором* (или, коротко, лоренцевым 4-вектором). Величины A_x, A_y, A_z называются пространственными компонен-

тами 4-вектора, A_τ — его временной компонентой. Сумма двух 4-векторов и произведение 4-вектора на число — тоже 4-векторы. При изменении ИСО сохраняется величина, аналогичная интервалу: $A^2 = A_\tau^2 - (\vec{A})^2$, а также скалярное произведение $(A_\tau B_\tau - \vec{A} \cdot \vec{B})$. Физическое равенство, записанное в виде равенства двух 4-векторов, остается верным во всех ИСО.

- **Импульс и энергия в СТО.** Компоненты скорости преобразуются не так, как компоненты 4-вектора (сравните уравнения (49) и (51)), потому что в выражении $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ преобразуются как числитель, так и знаменатель. Поэтому величина $\sum m_j \vec{v}_j$, соответствующая классическому определению импульса, не может сохраняться во всех ИСО. Релятивистский 4-вектор импульса определяют как

$$\vec{p} = m\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\frac{d\vec{r}}{dt},$$

$$p_\tau = m\frac{d(ct)}{d\tau} = \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ — бесконечно малое изменение собственного времени частицы (см. (48)), т. е. измеренное в ИСО, скорость которой равна скорости частицы в данный момент ($d\tau$ не зависит от того, из какой ИСО мы наблюдаем за частицей.) Пространственные компоненты 4-вектора образуют *релятивистский импульс*

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{52}$$

а временная компонента p_τ оказывается равной E/c, где E — *релятивистская энергия частицы*:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{53}$$

поэтому 4-вектор $(\vec{p}, E/c)$ называют *4-вектором энергии — импульса*. Отметим, что релятивистские энергия и импульс связаны простым соотношением:

$$\vec{p} = \frac{E\vec{v}}{c^2}. \qquad (54)$$

В соответствии с (51), энергия и импульс при переходе в другую ИСО преобразуются по закону

$$p'_x = \frac{p_x - VE/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad p'_y = p_y, \quad p'_z = p_z, \quad E' = \frac{E - Vp_x}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \qquad (55)$$

Релятивистская энергия частицы не равна нулю при $v = 0$, т. е. она состоит из *энергии покоя* mc^2 и кинетической энергии:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2 + E_к, \qquad (56)$$

причем релятивистская кинетическая энергия при $v/c \ll 1$ переходит в классическую кинетическую энергию $E_к = mv^2/2$. Так как величина $(E/c)^2 - p^2$ сохраняется, ее можно вычислить в системе отсчета, где частица в данный момент покоится:

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 \quad \text{или} \quad E^2 - p^2c^2 = m^2c^4. \qquad (57)$$

Для частиц с массой, равной нулю (фотоны), связь между энергией и импульсом принимает вид:

$$E = pc \qquad (58)$$

(см. также (54)). Подставляя в (57) $E = mc^2 + E_к$, получим удобное соотношение между импульсом и кинетической энергией:

$$p^2c^2 = E_к(E_к + 2mc^2).$$

- **Неупругий удар. Взаимосвязь энергии и массы.** Запишем закон сохранения релятивистской энергии для неупругого удара двух тел массой m каждое, летевших навстречу друг другу с одинаковой скоростью v:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = Mc^2.$$

Видно, что масса составной частицы больше суммы масс начальных частиц. Увеличение внутренней энергии при неупругом ударе на ΔE привело к увеличению массы на $\Delta E/c^2$. Этот пример иллюстрирует общее соотношение Эйнштейна между релятивистской энергией покоящегося тела и его массой:

$$E = mc^2. \qquad (59)$$

Релятивистская энергия включает в себя все виды внутренней энергии.

Пример 3. Пусть энергия покоящегося тела равна E. Найти импульс этого тела в системе отсчета, движущейся со скоростью $-\upsilon$.

Решение. В соответствии с формулами релятивистского преобразования (55) импульс равен

$$\vec{p}' = (E'/c^2)\vec{\upsilon} = \frac{(E/c^2)\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}.$$

Видно, что получилась формула для релятивистского импульса с массой $m = E/c^2$.

Пример 4. Ускорители на встречных пучках. Предположим, что для достижения порога какой-нибудь реакции частицы во встречных пучках надо разогнать в ускорителе до кинетической энергии αmc^2. До какой кинетической энергии потребовалось бы разогнать одну частицу, если бы другая частица находилась на неподвижной мишени?

Решение. В нерелятивистском случае энергия в СО центра масс равна половине энергии налетающей частицы. Именно эта энергия может пойти на реакцию, а другая половина недоступна — она остается в виде кинетической энергии системы. В релятивистском (а особенно ультрарелятивистском) пределе ситуация кардинально меняется. Вычислим энергию одной из частиц в СО, где другая частица покоится. Запишем условие инвариантности $E^2 - p^2c^2$ для энергии и импульса системы. В СО центра масс $E = 2\alpha mc^2 + 2mc^2$, $p = 0$; в СО, где одна из частиц покоится, $E = E_1 + mc^2$, $p = p_1$, где E_1, p_1 — энергия и импульс движущейся частицы. После преобразований, с учетом тождества $E_1^2 - p_1^2c^2 = m^2c^4$, для кинетической энергии налетающей частицы получим: $E_1 - mc^2 = 2mc^2\alpha(\alpha + 1)$. Например, при $\alpha = 100$ получим, что одну частицу надо разогнать до 20 200 mc^2. На реакцию идет примерно 1/100 энергии частицы.

• **Основной закон релятивистской динамики.** Приложенная к частице сила равна, как и в классической механике, производной от импульса:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \tag{60}$$

но релятивистский импульс (52) отличается от классического. Под действием приложенной силы импульс может неограниченно возрастать, но из определения (52) видно, что скорость будет меньше c. Работа силы (60)

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt = \int \vec{v} \cdot d\vec{p} =$$

$$= \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, \frac{\vec{p} \cdot d\vec{p}}{m} = \int \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, \frac{E\,dE}{mc^2} = \int dE$$

равна изменению релятивистской энергии. Здесь были использованы формулы $m\vec{v} = \vec{p}\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $\vec{p} \cdot d\vec{p} = E\, dE/c^2$ (см. (57)) и $E = mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

2. Молекулярная физика и термодинамика

2.1. Основные положения и определения

• **Два подхода к изучению вещества.** *Термодинамический подход* заключается в том, чтобы установить связи и соотношения между экспериментально определяемыми (феноменологическими) параметрами (их называют *термодинамическими параметрами*), опираясь на несколько постулатов (*начал термодинамики*).

Статистический подход опирается на молекулярно-кинетические представления о строении вещества (*основные положения молекулярно-кинетической теории*):

1. Все тела состоят из огромного числа мельчайших частичек — атомов и молекул.

2. Молекулы вещества находятся в непрерывном хаотическом движении.

3. Молекулы взаимодействуют между собой: на больших расстояниях притягиваются, на малых отталкиваются.

Термодинамические параметры вычисляются в рамках конкретной модели внутреннего строения вещества (т. е. модели движения и взаимодействия атомов и молекул), посредством усреднения по огромному числу состояний системы. Статистическая физика использует методы теории вероятностей и математической статистики. Классическая теория опирается на классические законы движения молекул, квантовая статистика — на законы квантовой механики.

• **Количество вещества. Моль.** Количество вещества в системе, т. е. число содержащихся в ней структурных единиц — атомов или молекул, измеряется в *молях*. Моль любого вещества содержит определенное число

молекул, называемое *числом Авогадро*, равное числу атомов в 12 г углерода: $N_A \approx 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$. Для числа молей получим:

$$\nu = \frac{N}{N_A} = \frac{m}{\mu}, \qquad (1)$$

где N — число молекул в системе, $m = m_0 N$ — масса системы (m_0 — масса одной молекулы), $\mu = m_0 N_A$ — молярная масса вещества.

● **Равновесные и неравновесные состояния. Уравнение состояния.** Термодинамическая система, находящаяся при неизменных внешних условиях, приходит в *равновесное состояние*, в котором отсутствуют потоки любого типа (например, потоки массы и энергии). Термодинамические параметры равновесного состояния (давление p, температура T, объем V или плотность ρ, молярная масса μ и др.) связаны *уравнением состояния*. Уравнение состояния идеального газа (уравнение Клапейрона — Менделеева)

$$pV = \nu RT, \qquad (2)$$

где $R \approx 8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная, было получено эмпирически и хорошо выполняется для разреженных газов (см. разд. 2.5). Уравнение Ван-дер-Ваальса

$$(V - \nu b)\left(p + \frac{\alpha \nu^2}{V^2}\right) = \nu RT \qquad (3)$$

является одним из приближенных уравнений состояния реальных плотных газов (см. разд. 2.8). Процесс изменения состояния называют *равновесным* (*квазиравновесным*), если он происходит столь медленно, что каждое промежуточное состояние можно считать равновесным. Равновесные процессы являются *обратимыми*.

Равновесная термодинамика рассматривает равновесные состояния и процессы. Она позволяет сделать ряд выводов о характере и направлении протекания неравновесных процессов, происходящих между

начальным и конечным равновесными состояниями, но не дает количественного описания этих процессов. Неравновесные системы — предмет *физической кинетики* и *неравновесной термодинамики*. Отметим, что время прихода в равновесие (*время релаксации*) уменьшается вместе с размерами системы, поэтому можно говорить о *локальном равновесии* в маленькой части неравновесной системы (например, вводить температуру, меняющуюся от точки к точке).

- **Простые термодинамические системы.** Однородная и изотропная термодинамическая система, химический состав которой не меняется, называется (*термодинамически*) *простой*. К простым системам относятся, в частности, однокомпонентные (чистые) газы и жидкости. Простая система обладает двумя степенями свободы, т. е. только два ее термодинамических параметра можно считать независимыми. Равновесные состояния простой системы можно изображать точками на плоскости (например, в координатах (p, V)), равновесные процессы — линиями на этой плоскости. Работа, совершаемая простой системой против внешних сил, равна

$$\delta A = p\,dV, \quad A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV, \tag{4}$$

где $p(V)$ называется *уравнением процесса*. Так как работа не является функцией состояния, то бесконечно малая работа обозначена δA, чтобы отличить ее от бесконечно малого изменения функции (дифференциала).

Наличие связи между любыми тремя параметрами простой системы, налагаемой уравнением состояния, приводит также к связи между их производными. Выразив изменение T через изменения p и V: $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp$ и применив это выражение к изотермическому процессу ($dT = 0$), получим

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -1.$$

Это соотношение связывает между собой три коэффициента:

$\alpha = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ (*температурный коэффициент объемного расширения*);

$\beta = \frac{1}{p_0}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ (*температурный коэффициент давления*);

$K = -V\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$ (*изотермический модуль всестороннего сжатия*).

2.2. Первое начало термодинамики

• **Внутренняя энергия. Теплообмен. Температура.** В отличие от механической энергии, которая может изменяться только за счет работы, внутренняя энергия может изменяться как за счет работы, так и при контакте с телами, имеющими другую температуру, т. е. в процессе теплообмена. Энергия, переданная при теплообмене (подведении тепла), называется *количеством теплоты* или *теплотой* и обозначается Q. Теплота считается положительной, если система получает энергию, и отрицательной, если отдает.

При теплообмене энергия переходит от тела с большей температурой к телу с меньшей температурой. Любая температурная шкала должна удовлетворять этому свойству. Эмпирические температурные шкалы основаны на косвенных измерениях, т. е. на измерениях параметров, монотонно зависящих от температуры. Газовая шкала температур опирается на уравнение состояния идеального газа (2). Термодинамическая, или абсолютная шкала температур определяется на основе второго начала термодинамики.

С точки зрения классической молекулярно-кинетической теории, внутренняя энергия термодинамической системы равна сумме кинетической энергии движения ее молекул и потенциальной энергии их взаимодействия. Внутренняя энергия $U = U(V, T, \ldots)$ — функ-

ция состояния термодинамической системы[1]), является важнейшей характеристикой термодинамической системы.

Термодинамика должна определять любую величину феноменологически, вне зависимости от представлений о внутреннем устройстве вещества. Принципиальную возможность такого определения дает представление о гибкой *адиабатической оболочке*, которая позволяет изменять форму системы и совершать над ней работу, но исключает ее теплообмен с внешними телами. Работа внешних сил A^e при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 оказывается не зависящей от процесса перехода, а зависит только от начального и конечного состояний системы, что позволяет определить разность внутренних энергий следующим образом: $U_2 - U_1 = A^e$ $(1 \to 2)$.

- **Первое начало термодинамики.** Общий закон сохранения энергии с учетом процесса теплообмена и внутренней энергии имеет вид:

$$\Delta E_{\text{мех}} + \Delta U = A^e + Q,$$

т. е. изменение полной (механической + внутренней) энергии системы равно работе внешних сил и теплоте, полученной при теплообмене с внешними телами. Иногда закон сохранения энергии формулируют как невозможность создания *вечного двигателя первого рода* (который производил бы работу из ничего). *Первым началом термодинамики* называют обычно применение этого закона к термодинамической системе, механическая энергия которой не меняется. Кроме того, в термодинамике удобнее использовать работу системы против внешних сил: $A = -A^e$. Получаем

$$Q = \Delta U + A \qquad (5)$$

(подведенная к термодинамической системе теплота идет на изменение ее внутренней энергии и на совершение системой работы против внешних сил).

---

[1]) Зависимость $U = U(V, T, \ldots)$ называют *калорическим уравнением состояния*, в отличие от *термического уравнения состояния* $p = p(V, T)$.

• **Первое начало для простой системы. Теплоемкость.** Используя уравнение (4), запишем первое начало термодинамики для простой системы, получившей бесконечно малое количество теплоты:

$$\delta Q = dU + p\,dV. \qquad (6)$$

Отношение δQ к изменению температуры dT называют *теплоемкостью системы* C в данном равновесном процессе (измеряется в Дж/К):

$$C\,dT = dU + p\,dV. \qquad (7)$$

Считая U в (7) функцией двух переменных (V, T), запишем

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = C_V\,dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV, \qquad (8)$$

где $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ — *теплоемкость при постоянном объеме* (см. уравнение (7)). Отсюда получим:

$$C\,dT = C_V\,dT + \left[p + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)\right]_T dV. \qquad (9)$$

Видно, что теплоемкость для процесса $V(T)$ зависит от значения производной dV/dT. Так как параметры (V, T) можно менять независимо, то эта производная, а значит, и теплоемкость в данной точке может иметь любое значение.

• **Энтальпия. Процесс Джоуля — Томсона.** Если равновесный процесс изменения состояния происходит при постоянном давлении, то подведенная теплота

$$Q = \Delta U + p\,\Delta V = \Delta(U + pV) = \Delta I \quad (p = \text{const}) \qquad (10)$$

равна разности *энтальпий* $I = U + pV$ в конечном и начальном состояниях. Энтальпия используется также для описания *процесса Джоуля — Томсона* — стационарного просачивания вещества сквозь пористую перегородку (дросселирования). Этот процесс применяется для получения сверхнизких температур. В процессе Джоуля — Томсона сохраняется энтальпия вещества, прошедшего сквозь перегородку: $U_1 + p_1V_1 = U_2 + p_2V_2$.

- **Внутренняя энергия идеального газа.** Внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры. Экспериментальные подтверждения этому факту:

1. При расширении газа в пустоту внутри жесткой адиабатической оболочки равны нулю как работа газа A, так и полученная теплота Q, а следовательно, и ΔU; было обнаружено, что в этом неравновесном процессе температура идеального газа не меняется (опыты Гей-Люссака и Джоуля).

2. Температура идеального газа не меняется в процессе Джоуля — Томсона.

Второе начало термодинамики позволяет доказать уравнение $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$, исходя из термического уравнения состояния (2).

- **Процессы в идеальном газе.** Из уравнений (7), (8) получим изменение внутренней энергии и первое начало термодинамики для идеального газа:

$$dU = C_V\, dT, \quad \delta Q = C_V\, dT + p\, dV. \qquad (11)$$

Эксперименты показывают, что в широких пределах изменения температуры C_V от T не зависит, и можно записать $U = C_V T + \text{const}$. Рассмотрим конкретные процессы.

1. *Изотермический процесс* ($dT = 0$). В этом случае $dU = 0$, т. е.

$$\delta Q = pdV, \quad Q = A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)dV = \nu RT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \qquad (12)$$

Теплоемкость данного процесса можно считать равной бесконечности.

2. *Изобарный процесс* ($dp = 0$). Вводя теплоемкость при постоянном давлении, с учетом уравнения состояния (2) получим

$$C_p\, dT = C_V\, dT + p\, dV = C_V\, dT + \nu R\, dT.$$

Сокращая на dT, получим соотношения между теплоемкостями (*уравнение Майера*):

$$C_p = C_V + \nu R, \quad c_p = c_V + \frac{R}{\mu}, \quad C_{\mu p} = C_{\mu V} + R, \qquad (13)$$

где $c = C/m$ — *удельная теплоемкость*, а $C_\mu = C/\mu$ — *молярная теплоемкость* газа (измеряются в Дж/(кг · К) и Дж/(моль · К) соответственно).

3. *Адиабатический процесс*. Если равновесный процесс происходит без подвода тепла ($\delta Q = 0$), то

$$C_V\, dT = -p\, dV \Rightarrow \nu C_{\mu V}\, dT = -\frac{\nu RT}{V}\, dV \Rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{R}{C_{\mu V}}\frac{dV}{V}.$$

Интегрируя, получим уравнение адиабатического процесса (*уравнение Пуассона*):

$$TV^{\gamma-1} = \text{const} \quad \text{или} \quad pV^{\gamma} = \text{const}, \qquad (14)$$

где безразмерный параметр $\gamma = C_p/C_V = 1 + (R/C_{\mu V})$ называется *показателем адиабаты*. Через γ, с учетом уравнения Майера (13), можно выразить теплоемкости газа:

$$C_{\mu V} = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad C_{\mu p} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}.$$

4. *Политропный процесс*. Политропным называется процесс, теплоемкость которого постоянна ($C = \text{const}$):

$$C\, dT = C_V\, dT + p\, dV \Rightarrow (C_V - C)\, dT = -p\, dV.$$

Проведя такие же вычисления, как для адиабатического процесса, получим *уравнение политропного процесса*:

$$pV^n = \text{const},$$

где $n = 1 + \dfrac{R}{C_{\mu V} - C_\mu} = \dfrac{C_p - C}{C_V - C}$ — показатель политропы.

5. *Цикл Карно*. Циклом Карно называется замкнутый цикл, состоящий из двух изотерм (при температурах T_1 и T_2, $T_1 > T_2$) и двух адиабат. *Коэффициентом*

полезного действия замкнутого цикла называют величину

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \qquad (15)$$

где A — работа за цикл; Q_1 — теплота, полученная от нагревателя; Q_2 — теплота, отданная холодильнику. В замкнутом цикле $\Delta U = 0$, поэтому $Q_1 - Q_2 = A$.

Для цикла Карно (рис. 13) из уравнения (12) имеем:

$$Q_1 = \nu RT_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right), \quad Q_2 = \nu RT_2 \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right).$$

Из уравнения Пуассона (14) находим:

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_4^{\gamma-1},$$

$$T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1}.$$

Отсюда следует, что $V_2/V_1 = V_3/V_4$. Поэтому для КПД цикла Карно получим:

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}. \qquad (16)$$

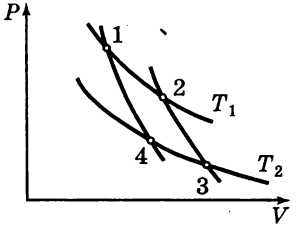


Рис. 13

Видно, что в данном случае КПД зависит только от отношения температур холодильника и нагревателя.

2.3. Второе начало термодинамики

• **Формулировка второго начала.** Приведем две наиболее известные формулировки:

1. Невозможен процесс, единственным результатом которого было бы совершение работы за счет теплоты, взятой у теплового резервуара при постоянной температуре (формулировка Томсона). Эта же формулировка, но выраженная другими словами, утверждает невозможность создания *вечного двигателя второго рода*

(т. е. производящего работу за счет внутренней энергии теплового резервуара).

2. Невозможен процесс, единственным результатом которого была бы передача энергии от более холодного тела к более горячему (формулировка Клаузиуса).

Формулировки Томсона и Клаузиуса эквивалентны.

- **Теорема Карно.** *Циклом Карно* называют цикл, в котором рабочее тело получает теплоту только от резервуара при постоянной температуре T_1 (нагревателя), а отдает — только резервуару при постоянной температуре T_2 (холодильнику). *Теорема Карно* утверждает, что КПД произвольного цикла Карно не может превышать КПД обратимого цикла Карно, работающего при тех же T_1 и T_2. Из этого немедленно следует, что КПД обратимого цикла Карно зависит только от T_1 и T_2 и не зависит от природы рабочего тела.

Покажем в общих чертах, как можно доказать теорему Карно. Предположим, что КПД обратимой машины меньше, чем необратимой. Подберем объем рабочего тела обратимой машины так, чтобы она совершала за цикл такую же работу, как необратимая. С учетом (15) неравенство для КПД приобретает вид $A/Q_1^{об} < A/Q_1^{необ}$, откуда имеем $Q_1^{об} > Q_1^{необ}$. Пустим обратимую машину в обратную сторону так, чтобы работа необратимой машины потреблялась обратимой. За цикл объединенной машины ее работа будет равна нулю, а нагреватель получит энергию $Q_1^{об} - Q_1^{необ} > 0$, целиком взятую у холодильника. Мы пришли к противоречию с формулировкой Клаузиуса.

Так как нам известен КПД одной из машин Карно — газовой (16), то теорему Карно можно записать так:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leqslant \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \text{или} \quad \frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leqslant 0, \qquad (17)$$

причем равенство соответствует обратимому циклу Карно.

Термодинамическая шкала температур. Теорема Карно позволяет определить шкалу температур, не зависящую от свойств конкретных тел. Отношение температур двух тел оп-

ределяют, присоединив к ним обратимую машину Карно; так как отношение Q_1/Q_2 зависит только от их температур, то его можно принять равным отношению термодинамических температур: $\theta_1/\theta_2 = Q_1/Q_2$. Как видно из (17), отношение термодинамических температур равно отношению газовых температур (в той области, где газовая шкала определена).

- **Второе начало: вычисление внутренней энергии.** Второе начало термодинамики позволяет вывести важное соотношение для внутренней энергии простой системы, которое не может быть получено в рамках первого начала:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p. \qquad (18)$$

Покажем, как можно получить (18) из теоремы Карно. Рассмотрим (бесконечно) малый обратимый цикл Карно и изобразим его в координатах (p, V). Работа системы за цикл, равная площади маленького параллелограмма (рис. 14), не изменится при замене кусочков адиабат вертикальными отрезками, длина которых равна $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta T$. Умножив на высоту ΔV, получим $\delta A = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta T \Delta V$. Теплота, полученная на верхней изотерме, равна $\delta Q_1 = \Delta U + p\, dV = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \Delta V + p\, \Delta V$, где для приращения ΔU при постоянной температуре использовано (8). Из теоремы Карно и уравнения (17) имеем

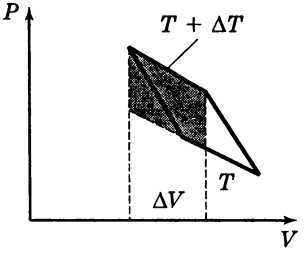


Рис. 14

$$\frac{\delta A}{\delta Q_1} = \frac{\Delta T}{T} \Rightarrow \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \Delta T \Delta V}{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p\right]\Delta V} = \frac{\Delta T}{T},$$

откуда получим (18).

Приведем несколько применений формулы (18).

1. *Внутренняя энергия идеального газа.* Подставим в (18) уравнение состояния $p = \frac{1}{V}\nu RT$. В результате получим $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$, т. е. внутренняя энергия идеального газа не зависит от объема.

2. *Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса.* Выразив давление из уравнения состояния (3) и подставив в (18), приходим к формуле $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{\alpha\nu^2}{V^2}$. Значит,

$$dU = C_V\,dT + \frac{\alpha\nu^2}{V^2}\,dV.$$

Кроме того, имеем

$$\left(\frac{\partial U C_V}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial V}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V\right] = \frac{\partial}{\partial T}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T\right] = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\alpha\upsilon^2}{V^2}\right)_V = 0,$$

т. е. C_V не зависит от объема. В области температур, где C_V слабо зависит от T, можно записать

$$U = C_V T - \frac{\alpha\nu^2}{V}. \qquad (19)$$

3. *Общая формула для $C_p - C_V$.* Подставляя (18) в уравнение (9) и фиксируя давление ($p = \text{const}$), получим:

$$C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -T\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2 \geqslant 0$$

(здесь использовано соотношение между производными, рассмотренное в конце разд. 2.1). Неотрицательность полученного выражения следует из условия механической устойчивости: $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \leqslant 0$.

• **Неравенство Клаузиуса.** Неравенство (17) является частным случаем *неравенства Клаузиуса*, относящегося к любому замкнутому циклу. Если в замкнутом цикле система получает теплоты $Q_1, \ldots, Q_N$ от внешних резервуаров, имеющих температуры $T_1^{\text{e}}, \ldots, T_N^{\text{e}}$, то удовлетворяется неравенство

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{T_i^{\text{e}}} \leqslant 0 \quad \text{или} \quad \oint \frac{\delta Q}{T^{\text{e}}} \leqslant 0. \tag{20}$$

Для обратимого процесса неравенство превращается в равенство, а температура резервуара, с которым система в данной точке цикла обменивается теплом, равна температуре системы: $T^{\text{e}} = T$. В этом случае получим

$$\oint_{\text{обр}} \frac{\delta Q}{T} = 0. \tag{21}$$

Равенство (21) служит основой для определения еще одной функции состояния — энтропии (см. разд. 2.4).

2.4. Энтропия. Свободная энергия

• **Определение энтропии.** Уравнение Клаузиуса для обратимого цикла (21) можно переформулировать как условие независимости интеграла

$$\int_A^B \frac{\delta Q}{T}$$

от пути равновесного перехода из состояния A в состояние B. Это позволяет определить функцию состояния — *энтропию*, точнее, разность энтропий в двух состояниях:

$$S_B - S_A = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}, \quad dS = \left(\frac{\delta Q}{T}\right)_{\text{обр}}. \tag{22}$$

При равновесном процессе без подвода тепла энтропия не меняется (адиабатический процесс можно называть изоэнтропным). Первое начало термодинамики (6) для равновесного процесса в простой системе приобретает вид:

$$T\,dS = dU + p\,dV. \qquad (23)$$

- **Примеры вычисления энтропии.**

1. *Процесс с постоянной теплоемкостью.* Изменение энтропии при изменении температуры от T_1 до T_2 равно

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{C\,dT}{T} = C \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right). \qquad (24)$$

2. *Энтропия идеального газа.* Подставляя в (23) выражение для внутренней энергии идеального газа (11), с учетом уравнения состояния $pV = \nu RT$ получим

$$dS = \nu C_{\mu V} \frac{dT}{T} + \nu R \frac{dV}{V},$$

$$S_2 - S_1 = \nu\left[C_{\mu V} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)\right]. \qquad (25)$$

Иногда условно записывают $S = \nu(C_{\mu V} \ln T + R \ln V)$, имея в виду, что в приложениях всегда возникает разность энтропий.

3. *Энтропия газа Ван-дер-Ваальса.* Подставляя в (23) зависимость (19), с учетом уравнения состояния (3) имеем

$$dS = \nu C_{\mu V} \frac{dT}{T} + \frac{\alpha \nu^2}{T} \frac{dV}{V^2} + \frac{p}{T}\,dV = \nu C_{\mu V} \frac{dT}{T} + \frac{\nu R\,dV}{V - \nu b},$$

$$S = \nu[C_{\mu V} \ln T + R \ln (V - \nu b)].$$

- **Направление неравновесных процессов в теплоизолированной системе.** Рассмотрим неравновесный процесс, переводящий систему из равновесного со-

стояния 1 в равновесное состояние 2. Теперь вернемся из 2 в 1 при помощи любого равновесного процесса, запишем для получившегося циклического процесса неравенство Клаузиуса (20) и учтем определение энтропии (22):

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T^e} \leqslant S_2 - S_1. \qquad (26)$$

Если неравновесный процесс происходит в адиабатической оболочке, то левая часть равенства обращается в нуль, что дает

$$S_2 \leqslant S_1, \qquad (27)$$

т. е. в любом процессе без подвода тепла энтропия не убывает. Равновесное состояние теплоизолированной системы соответствует максимуму энтропии.

- **Примеры неравновесных процессов.**

1. *Теплообмен.* Рассмотрим простейший пример теплообмена — между двумя телами с одинаковой теплоемкостью C и начальными температурами T_1 и T_2. Из уравнения теплового баланса следует, что в результате теплообмена оба тела достигнут одинаковой температуры $T_к = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$. При этом согласно (24) изменение энтропии системы будет положительным:

$$\Delta S = C \ln\left(\frac{T_к}{T_1}\right) + C \ln\left(\frac{T_к}{T_2}\right) = C \ln\left(\frac{T_к^2}{T_1 T_2}\right) > 0$$

(аргумент логарифма больше единицы, так как среднее арифметическое больше среднего геометрического).

2. *Расширение идеального газа в пустоту.* Внутренняя энергия и, следовательно, температура идеального газа при расширении его в пустоту остаются постоянными. Изменение энтропии находим из формулы (25):

$$S_2 - S_1 = \nu R \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \qquad (28)$$

Возрастание энтропии при адиабатическом расширении в пустоту (увеличении V при постоянной U) можно доказать для любой простой системы. Если рассматривать S в (23) как функцию переменных (U, V), то получим $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_U = \frac{p}{T} > 0$.

3. *Смешение газов.* Рассмотрим теплоизолированный сосуд, разделенный перегородкой на две равные части, в каждой из которых содержится по одному молю идеального газа при одинаковых температурах и давлениях. При убирании перегородки газы смешиваются; из формулы (28) следует, что энтропия системы увеличивается на $2R \ln 2$ (*энтропия смешения*). В случае различных газов начальное состояние отличается от конечного; газы можно снова разделить, совершая работу над специальными поршнями, пропускающими молекулы только одного сорта. Однако для одинаковых газов начальное и конечное состояния системы тождественны, и энтропия не должна меняться. Отсутствие непрерывного перехода от почти одинаковых к полностью тождественным молекулам называют *парадоксом Гиббса.*

- **Статистический смысл энтропии.** *Формула Больцмана*

$$S = k \ln \Omega \tag{29}$$

(k — постоянная Больцмана) связывает энтропию макроскопического состояния со *статистическим весом* этого состояния, т. е. числом различных микроскопических состояний, которые его реализуют. Чем больше Ω, тем больше вероятность состояния; при неравновесных процессах система переходит от менее вероятных к более вероятным состояниям. Логарифм обеспечивает аддитивность энтропии: статистический вес системы, состоящей из двух независимых подсистем, равен произведению их статистических весов. (Подробнее статистический смысл энтропии обсуждается в разделе 7.1.)

Чтобы проиллюстрировать формулу (29), вычислим пространственную часть энтропии газа. Разобьем объем на маленькие ячейки объемом v. Каждая молекула может быть помещена в любую из V/v ячеек, т. е. число независимых состояний равно $\Omega = (V/v)^N$, где N — число молекул газа. Для энтропии получим $S = k \ln \Omega = kN \ln (V/v) = \nu R \ln (V/v)$. Квантовая статистика утверждает, что одинаковые частицы принципиально неразличимы, т. е. Ω надо разделить на число перестановок между ними $N!$. В результате для пространственной части энтропии получим выражение $S = kN \ln (V/Nv)$. Нетрудно убедиться, что таким образом удается разрешить парадокс Гиббса.

- **Третье начало термодинамики.** Третье начало термодинамики (*теорема Нернста*) утверждает, что при приближении температуры к абсолютному нулю энтропия любой системы стремится к определенному конечному значению, не зависящему от значения остальных термодинамических параметров. Энтропию системы при $T = 0$ принимают равной нулю. Статистическое объяснение: при $T = 0$ система находится в наинизшем энергетическом состоянии, кратность которого (равная статистическому весу системы Ω при $T = 0$) невелика. Значит, в соответствии с формулой Больцмана (29) энтропия пренебрежимо мала. Следствия третьего начала: при $T \to 0$ теплоемкости C_V и C_p системы, а также ее температурные коэффициенты объемного расширения α и давления β стремятся к нулю.

- **Система в термостате. Свободная энергия.** Рассмотрим изменение состояния системы, находящейся в тепловом контакте с термостатом, имеющим постоянную температуру T. Такую же температуру будет иметь сама система в начальном и конечном равновесных состояниях. Неравенство (26) после «цепочки» преобразований $Q/T \leqslant S_2 - S_1 \Rightarrow (U_2 - U_1) + A \leqslant TS_2 - TS_1 \Rightarrow$ $\Rightarrow U_1 - TS_1 - (U_2 - TS_2) \geqslant A$ принимает вид:

$$\Psi_1 - \Psi_2 \geqslant A, \tag{30}$$

где $\Psi = U - TS$ — новая функция состояния, называемая *свободной энергией*. Если объем системы не меняется, то в рассматриваемом неравновесном процессе

$$\Psi_2 \leqslant \Psi_1,$$

т. е. свободная энергия не возрастает. Другими словами, равновесное состояние системы постоянного объема, находящейся в тепловом контакте с термостатом, соответствует минимуму свободной энергии. Для равновесного процесса неравенство в этих уравнениях превращается в равенство. Из формулы (23) следует, что

$$d\Psi = -S\,dT - p\,dV. \qquad (31)$$

Поэтому естественными переменными для свободной энергии являются объем и температура: $\Psi = \Psi(V, T)$.

Если у системы в термостате есть механический контакт (легкий поршень, гибкая оболочка) с внешней средой, имеющей фиксированное давление p (такое же давление будет у самой системы в равновесном состоянии), то работа против внешних сил равна $A = p(V_2 - V_1)$. Из (30) получим

$$\Psi_1 + pV_1 \geqslant \Psi_2 + pV_2 \quad \text{или} \quad \Phi_1 \geqslant \Phi_2, \qquad (32)$$

где $\Phi = \Psi + pV = U - TS + pV$ — *термодинамический потенциал Гиббса* (при обратимом процессе $\Phi = \text{const}$). Равновесному состоянию для системы в термостате и гибкой оболочке соответствует минимум $\Phi(p, T)$. Так как $d\Phi = -S\,dT + V\,dp$, то естественными переменными для термодинамического потенциала являются давление и температура: $\Phi = \Phi(p, T)$. При постоянных давлении и температуре термодинамический потенциал пропорционален количеству вещества: $\Phi(p, T, m) = m\phi$ (ϕ — *удельный термодинамический потенциал*) или $\Phi(p, T, N) = N\mu$ (μ — термодинамический потенциал в расчете на одну частицу, или *химический потенциал*).

Канонические уравнения состояния. Естественные переменные. Хотя функции U, I, S, Ψ, Φ могут рассматриваться в любых независимых переменных, для каждой из них существуют *естественные переменные*. Для энтропии это пере-

менные (U, V), для энтальпии — (U, p), для свободной энергии — (V, T), для потенциала Гиббса — (p, T). Функция в естественных переменных называется *каноническим уравнением состояния*. Зная любое каноническое уравнение, можно получить как термическое, так и калорическое уравнения состояния. Например, $-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial V}\right)_T$ дает выражение для $p(V, T)$, а выразив $S(V, T) = -\left(\frac{\partial\Psi}{\partial T}\right)_V$, найдем $U(V, T) = \Psi + TS$.

2.5. Кинетическая теория идеального газа

• **Основное уравнение кинетической теории идеального газа.** С точки зрения молекулярно-кинетической теории, газ считается идеальным, если можно пренебречь потенциальной энергией взаимодействия его молекул (по сравнению с кинетической энергией) и размерами молекул (по сравнению со средним расстоянием между ними). Давление газа на стенку возникает в результате многочисленных упругих соударений молекул между собой и со стенками сосуда. (Удары можно считать в среднем упругими, так как газ находится со стенкой в тепловом равновесии.) *Основное уравнение кинетической теории идеального газа* выражает давление через средний квадрат скорости молекул:

$$p = \frac{1}{3} n \langle \vec{p}\vec{v} \rangle = \frac{1}{3} n m_0 \langle v^2 \rangle = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle , \qquad (33)$$

где $n = N/V$ — концентрация молекул, m_0 — масса одной молекулы, $\vec{p} = m_0\vec{v}$ — ее импульс, $\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \left\langle \frac{1}{2} m_0 v^2 \right\rangle$ — средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

Если связь энергии и импульса отличается от классической, то последнее равенство в (33) при-

обретает иной вид. Для газа фотонов имеем $p = \varepsilon/c$ (см. разд. 1.11). В результате получим

$$p = \frac{1}{3} n \langle \varepsilon \rangle . \qquad (34)$$

• **Число ударов о стенку.** Число молекул ΔN, попадающих за время Δt на плоский участок поверхности площадью ΔS, равно

$$\frac{\Delta N}{\Delta S \Delta t} = \frac{n \langle v \rangle}{4} . \qquad (35)$$

Формулы для вычислений. Формулы для переноса через площадку числа частиц, импульса, энергии и т. д. получают разбиением молекул на удобные группы и вычислением их вклада в вычисляемую величину. Наиболее общий подход — разбиение на группы, имеющие почти одинаковую скорость $\vec{v}$. Выделим группу молекул, имеющих величину скорости от v до $v + dv$, а направление в телесном угле $d\Omega$. Число молекул данной группы в единице объема равно $dn(v, v + dv; d\Omega) = dn(v, v + dv)d\Omega/4\pi$. Чтобы найти, сколько молекул данной группы попадает на плоский участок площадью ΔS за время Δt, надо построить на этом участке косой цилиндр (рис. 15), направляющая которого имеет длину $v\Delta t$ и составляет угол θ с осью x. Все молекулы выделенной группы, находящиеся в этом цилиндре (и только они!), попадут на площадку ΔS за время Δt. Производя последовательные интегрирования, можно вывести (35) и многие другие формулы, например для проносимой через площадку энергии:

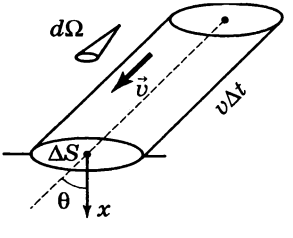


Рис. 15

$$\frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t} = \frac{m_0 n \langle v^3 \rangle}{8} . \qquad (36)$$

• **Определение температуры в кинетической теории газов.** В кинетической теории газов доказывается, что если две подсистемы (из одинаковых или разных молекул) могут обмениваться энергией, то в состоянии равновесия оказываются равными средние кинетические энергии поступательного движения их молекул. Исхо-

дя из этого, кинетическая теория газов определяет температуру как величину, пропорциональную средней кинетической энергии поступательного движения молекулы:

$$\langle \varepsilon_{\text{пост}} \rangle = \frac{3}{2} kT, \tag{37}$$

где k — *постоянная Больцмана*, которая выражается через универсальную газовую постоянную и число Авогадро (см. разд. 2.1): $k = R/N_A \approx 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Коэффициент пропорциональности выбран так, чтобы уравнение состояния идеального газа

$$p = nkT = \frac{N}{V} kT \tag{38}$$

(оно получается из основного уравнения (33) и определения температуры (37)) совпадало с уравнением (2), в котором используется газовая шкала температур.

Средняя квадратичная скорость поступательного движения молекул с учетом (33) и (37) вычисляется по формулам

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3p}{\rho}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}, \tag{39}$$

где $\rho = m_0 n$ — плотность газа.

- **Внутренняя энергия идеального газа.** Важной характеристикой идеального газа является *число степеней свободы* его молекулы i. У одноатомной молекулы есть только три степени свободы, соответствующие поступательному движению: $i = i_{\text{п}} = 3$. У жесткой двухатомной молекулы, кроме поступательных, есть еще две вращательные степени свободы (полярные углы, задающие ее направление в пространстве): $i = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} = 3 + 2 = 5$. У жесткой многоатомной (нелинейной) молекулы — три вращательные степени свободы, поэтому $i = 6$. В классической статистической физике доказывается *теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы*: на любую степень свободы, которой

в выражении для энергии молекулы соответствует член αx^2 или $\beta \dot{x}^2$, приходится средняя энергия $\frac{1}{2}kT$ в расчете на одну молекулу. Формула (37) находится в полном соответствии с утверждением этой теоремы. Средняя энергия одной молекулы и внутренняя энергия всего газа принимают вид:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} i_{\text{ф}} kT, \quad U = N \langle \varepsilon \rangle = \frac{1}{2} i_{\text{ф}} \nu RT. \qquad (40)$$

Физическое число степеней свободы $i_{\text{ф}}$ в случае жестких молекул совпадает с математическим. Однако, когда оказываются возбужденными колебательные степени свободы (при $T \sim 10^3$ К), то на каждую колебательную степень свободы будет приходиться (с учетом потенциальной энергии колебаний) средняя энергия kT. В результате получим $i_{\text{ф}} = i_{\text{п}} + i_{\text{вр}} + 2i_{\text{кол}}$, где $i_{\text{кол}}$ обозначает математическое число колебательных степеней свободы. Для N-атомной молекулы $i_{\text{кол}} = 3N - i_{\text{п}} - i_{\text{вр}}$ (например, для мягкой двухатомной молекулы $i_{\text{ф}} = 3 + 2 + 2(6 - 5) = 7$).

Из (40) получим выражения для теплоемкостей идеального газа и его показателя адиабаты (см. разд. 2.2):

$$C_{\mu V} = \frac{i_{\text{ф}}}{2} RT, \quad C_{\mu p} = \frac{i_{\text{ф}} + 2}{2} RT, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i_{\text{ф}} + 2}{i_{\text{ф}}}. \qquad (41)$$

При комнатных температурах измеряемая теплоемкость соответствует модели жестких молекул — колебательные степени свободы оказываются невозбужденными или, как говорят, «замороженными». Однако при повышении температуры до $\sim 10^3$ К теплоемкость начинает возрастать, т. е. колебательные степени свободы «размораживаются». Наоборот, при понижении температуры до нескольких десятков кельвинов происходит «вымораживание» вращательных степеней свободы, сопровождающееся соответствующим уменьшением теплоемкостей. Объяснение явлению *вымораживания степеней свободы* дает квантовая механика: если средняя энергия теплового движения kT мала по сравнению с расстоянием до ближайшего дискретного уровня, то данный вид движения не возбуждается.

- **Смесь идеальных газов.** *Закон Дальтона*: давление смеси двух идеальных газов равно сумме их парциальных давлений:

$$p = p_1 + p_2 = (n_1 + n_2)kT = (\nu_1 + \nu_2)RT.$$

Внутренняя энергия смеси равна сумме внутренних энергий

$$U = \frac{1}{2} i_1 \nu_1 RT + \frac{1}{2} i_2 \nu_2 RT.$$

Эта формула позволяет ввести:

1) эффективное число степеней свободы: $i(\nu_1 + \nu_2) = i_1\nu_1 + i_2\nu_2$;

2) эффективные молярные теплоемкости: $(\nu_1 + \nu_2)C_\mu = \nu_1 C_{\mu 1} + \nu_2 C_{\mu 2}$;

3) эффективную молярную массу: $(\nu_1 + \nu_2)\mu = \nu_1\mu_1 + \nu_2\mu_2$.

- **Распределение Максвелла.** Распределение молекул по скоростям описывается следующими функциями:

$$\varphi(v_x)\, dv_x = \frac{dn(v_x, v_x + dv_x)}{n}, \quad f(v)\, dv = \frac{dn(v, v + dv)}{n},$$

$$\Phi(\vec{v})\, dv_x\, dv_y\, dv_z = \frac{dn(v_x, v_x + dv_x;\ v_y, v_y + dv_y;\ v_z, v_z + dv_z}{n}. \qquad (42)$$

Определение любой функции распределения основано на утверждении, что доля молекул, попадающих (в среднем) в очень маленький интервал данной переменной (скорости, проекции скорости, энергии), пропорциональна ширине этого интервала (dv обозначает физически, а не математически, бесконечно малый интервал — он должен содержать большое число молекул.) Среднюю долю молекул, обладающих некоторым признаком (например, попадающих в заданный интервал скоростей), можно трактовать как *вероятность* того, что произвольная молекула обладает данным признаком. Поэтому функцию распределения иногда называют *плотностью вероятности*.

Перечислим свойства функции распределения (на примере $f(v)$):

1. Доля частиц (вероятность) в конечном интервале (v_1, v_2):

$$\frac{\Delta n(v_1, v_2)}{n} = \int_{v_1}^{v_2} f(v)\, dv.$$

2. Нормированность:

$$\int_0^\infty f(v)\, dv = 1. \qquad (43)$$

3. Вычисление среднего от любой функции скорости $\chi(v)$:

$$\langle \chi(v) \rangle = \int_0^\infty \chi(v) f(v)\, dv. \qquad (44)$$

Между тремя функциями распределения, определенными в (42), существуют следующие связи:

$$f(v) = \Phi(v) 4\pi v^2, \quad \Phi(v_x, v_y, v_z) = \varphi(v_x)\, \varphi(v_y)\, \varphi(v_z).$$

Функция φ является четной, т. е. можно написать: $\varphi = \varphi(v_x^2)$. Функция $\Phi(\vec{v})$ зависит только от $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Связь между Φ и φ удовлетворяется только функцией $\varphi(v_x) = A \exp(-\zeta v_x^2)$. Коэффициенты A и ζ определяются из двух условий: а) нормировки функции φ; б) требования, чтобы $\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle = kT/m_0$, см. (39). Ответ выглядит так:

$$\varphi(v_x) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}\right),$$

$$f(v) = \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m_0 v_x^2}{2kT}\right) 4\pi v^2. \qquad (45)$$

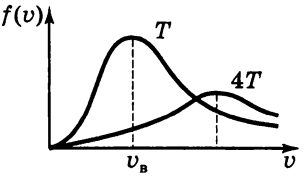


Рис. 16

Обычно именно последнюю формулу называют распределением Максвелла (рис. 16). Функция $f(v)$ достигает максимума при скорости $v_в = (2kT/m_0)^{1/2}$, которую называют *наиболее вероятной скоростью*. Значение функции $f(v)$ в этой точке равно $f(v_в) = 4e^{-1}(2\pi kT/m_0)^{-1/2}$. Например, при увеличении T в 4 раза максимальная скорость станет в 2 раза больше, а соответствующее значение функции $f(v_в)$ — в 2 раза меньше; напомним, что площадь под кривой $f(v)$ равна единице.

Средняя (или среднеарифметическая) скорость молекул вычисляется в соответствии с правилом (44):

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty v\, f(v)\, dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}.$$

Приведем также распределение молекул по энергиям поступательного движения:

$$\psi(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{dn(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)}{n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right) \sqrt{\frac{\varepsilon}{kT}}\, d\left(\frac{\varepsilon}{kT}\right).$$

Интегралы для вычислений. Для вычисления средних с распределением Максвелла нужно уметь вычислять интегралы типа $I_n = \int_0^\infty x^n \exp(-\beta x^2)\, dx$. Приведем два первых результата: $I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\beta^{-1/2}$, $I_1 = \frac{1}{2}\beta^{-1}$. Дальнейшие интегралы получим дифференцированием по β. Например, $I_2 = -\frac{dI_0}{d\beta} = \frac{1}{4}\sqrt{\pi}\beta^{-3/2}$.

• **Распределение Больцмана.** Если газ находится во внешнем силовом поле, то концентрация молекул зависит от координат. Из условия механического равновесия газа можно получить:

$$n(\vec{r}) = n(\vec{r}_0)\exp\left[-\frac{\varepsilon_п(\vec{r}) - \varepsilon_п(\vec{r}_0)}{kT}\right], \qquad (46)$$

где $\varepsilon_п(\vec{r})$ — потенциальная энергия молекулы во внешнем поле (*распределение Больцмана*). Частным случаем распределения Больцмана являются *барометрические формулы*:

$$n(h) = n_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right),$$

$$p(h) = n(h)kT = p_0 \exp\left(-\frac{m_0 g h}{kT}\right).$$

Поясним на примере барометрической формулы, как выводится распределение Больцмана. Условие равновесия в поле тяжести вертикального цилиндра с площадью основания s и высотой dh имеет вид: $s\,dp = -\rho(s\,dh)g$. Отсюда с учетом уравнений $p = nkT$ и $\rho = m_0 n$ получим $\frac{dn}{dh} = -\frac{m_0 g}{kT}n$. Интегрируя, приходим к барометрической формуле.

• **Распределение Максвелла — Больцмана.** Оба распределения — Максвелла (45) и Больцмана (46) — содержат выражение exp $(-\varepsilon/kT)$. Распределение Максвелла—Больцмана выражает вероятность того, что произвольная молекула из сосуда, содержащего N молекул, находится в области пространства $(x, x + dx; y, y + dy; z, z + dz)$ и имеет скорость в интервале $(v_x, v_x + dv_x; v_y, v_y + dv_y; v_z, v_z + dv_z)$:

$$\frac{dN}{N} = \frac{dn(\vec{r})d^3\vec{r}}{N} = \frac{n(\vec{r})\Phi(\vec{v})}{N}\,d^3\vec{r}d^3\vec{v} =$$

$$= A\exp\left(-\frac{\varepsilon}{kT}\right)d^3\vec{r}d^3\vec{v}. \qquad (47)$$

Здесь $d^3\vec{r} = dx\,dy\,dz$, $d^3\vec{v} = dv_x\,dv_y\,dv_z$, $\varepsilon = \frac{1}{2}m_0v^2 + \varepsilon_п(\vec{r})$ — механическая энергия молекулы, A — коэффициент, который можно найти из условия нормировки. Общее распределение Максвелла — Больцмана применимо к любым видам энергии молекулы: энергии вращения, энергии колебаний, потенциальной энергии, зависящей от ориентации молекул, и т. д.

2.6. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса

● **Изотермы реального газа.** Если температура газа меньше критической (см. ниже), то при равновесном изотермическом уменьшении его объема наблюдаются следующие процессы (рис. 17):

1. До точки A давление возрастает. Если температура далека от критической, то вплоть до точки A хорошо выполняется уравнение состояния идеальногогаза.

2. На участке AB давление в системе не меняется. В сосуде появляется жидкость, отделенная от газа четкой границей (поверхностью раздела). Газ, находящийся в равновесии с жидкостью, называют *насыщенным паром*. Отношение масс жидкости и пара в произвольной точке равно отношению горизонтальных отрезков, на которые эта точка делит AB: $m_ж/m_п = AC/CB$. Участки изотерм AL_1 и L_2B соответствуют *метастабильным состояниям*, т. е. состояниям, в которых

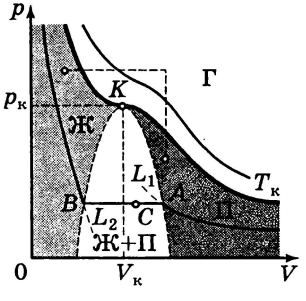


Рис. 17

система может существовать некоторое время, но потом быстро переходит в устойчивое состояние на линии *AB*. (Имея в виду процессы при постоянном давлении или объеме, их называют *переохлажденным паром* или *перегретой жидкостью*.) Существование метастабильных состояний объясняется тем, что образование маленьких зародышей новой фазы (жидкости в паре или пара в жидкости) невыгодно из-за поверхностной энергии (см. разд. 2.8).

3. После точки *B* давление резко возрастает. В сосуде находится только жидкость.

Чем выше температура, тем короче горизонтальный участок изотермы. Наконец, при *критической температуре* $T_к$ от горизонтального участка остается только точка перегиба *K* (рис. 17). Давление в этой *критической точке* называют *критическим давлением* $p_к$, а объем одного моля газа в этом состоянии — *критическим объемом* $V_к$. При $T > T_к$ изотерма представляет собой плавную монотонную функцию. Область выше критической изотермы называют (истинным) газом (его нельзя изотермически перевести в состояние «жидкость + пар»), а область под критической изотермой делится на три: жидкость, *ненасыщенный пар* и жидкость + насыщенный пар. Из области «П» в область «Ж» можно перейти плавно, обойдя область «П + Ж», т. е. газ и жидкость отличаются только количественными показателями.

• **Уравнение Ван-дер-Ваальса** для одного моля идеального газа имеет вид:

$$(V_\mu - b)\left(p + \frac{\alpha}{V_\mu^2}\right) = RT. \qquad (48)$$

(Уравнение (3) из разд. 1.1 для υ молей получается подстановкой $V_\mu = V/\nu$). Постоянная b учитывает уменьшение свободного объема для движения молекул за счет их собственного объема; она считается равной учетверенному объему всех молекул: $b = 4N_A \cdot \frac{1}{6}\pi d^3$. Член a/V_μ^2

учитывает уменьшение давления за счет взаимного притяжения молекул; это особенно ясно видно из выражения для внутренней энергии газа Ван-дер-Ваальса: $U = C_{\mu V}T - a/V_{\mu}$.

Среднее взаимодействие между молекулами описывают модельным выражением для потенциальной энергии, содержащим два члена: первый соответствует сильному отталкиванию на малых расстояниях ($\sim 10^{-10}$ м), второй — ван-дер-ваальсовским силам притяжения на больших расстояниях (рис. 18):

$$E_{\text{п}} = \frac{\alpha}{r^{12}} - \frac{\beta}{r^{6}}.$$

Минимум $E_{\text{п}}$ соответствует среднему расстоянию между молекулами в отсутствие теплового движения. При $kT \ll E_{\min}$ движение молекул сводится к колебаниям возле дна ямы (твердое тело), случай $kT \sim E_{\min}$ соответствует жидкому состоянию, а случай $kT \gg E_{\min}$ — газообразному. Ввиду крутого наклона «отталкивательной» ветви положение точки поворота при сближении молекул газа слабо зависит от их средней энергии (см. также разд. 1.5).

● **Изотермы газа Ван-дер-Ваальса. Вычисление критических параметров.** На рис. 19 изображены изотермы газа, описываемого уравнением (48). На участке K_1K_2 не выполняется условие механической устойчи-

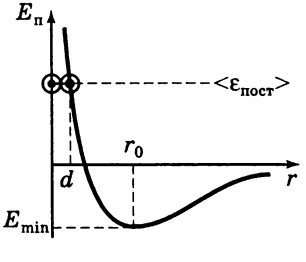


Рис. 18

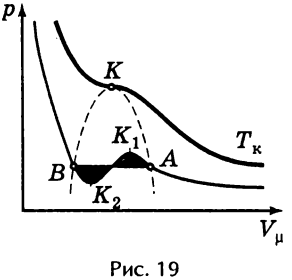


Рис. 19

вости $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \leqslant 0$, переход между правой и левой ветвями происходит по горизонтальному участку AB. *Правило Максвелла*: положение отрезка AB определяется условием равенства заштрихованных площадей. (В противном случае изотермический цикл AK_1K_2BA производил бы работу, что противоречит второму началу термодинамики.) Участки AK_1 и K_2B соответствуют метастабильным состояниям.

В критической точке выполняются сразу два условия: $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0$ и $\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = 0$. Выразив p из (48) и подставив в эти уравнения, найдем:

$$V_к = 3b, \quad p_к = \frac{1}{27}\frac{a}{b^2}, \quad T_к = \frac{8}{27}\frac{a}{bR}.$$

Критические параметры удовлетворяют соотношению: $p_к V_к = \frac{3}{8} RT_к$. Если ввести относительные переменные $\upsilon = V/V_к$, $\pi = p/p_к$ и $\theta = T/T_к$, то (48) принимает вид:

$$\left(\upsilon - \frac{1}{3}\right)(\pi + 3\upsilon^{-2}) = \frac{8}{3}\theta,$$

единый для всех газов. Значит, уравнение Ван-дер-Ваальса удовлетворяет установленному экспериментально *принципу соответственных состояний*, который утверждает, что если две относительные переменные двух газов совпадают, то совпадает и третья. Этот закон хорошо выполняется для большинства газов.

2.7. Равновесие фаз. Фазовые переходы

- **Условия равновесия фаз.** *Фазой* называется часть системы, однородная по физическим и химическим свойствам. Одно и то же по химическому составу вещество может находиться в разных фазах. Примерами

двухфазной системы являются: жидкость + насыщенный пар, твердое тело + жидкость и твердое тело + пар.

Условия равновесия фаз: 1) равенство давлений — механическое равновесие; 2) равенство температур — тепловое равновесие; 3) равенство химических потенциалов (или удельных потенциалов Гиббса) — равновесие по отношению к переходу вещества из одной фазы в другую. Последнее условие соответствует минимуму термодинамического потенциала Гиббса $\Phi = \mu_1 N_1 + \mu_2(N - N_1)$ (см. разд. 2.4) по отношению к числу частиц в одной из фаз N_1. Условие $\mu_1(p, T) = \mu_2(p, T)$ дает (для простой системы) уравнение для *кривой сосуществования фаз* $p(T)$; двухфазная простая система имеет только одну степень свободы. Так, давление насыщенного пара (положение горизонтального участка изотермы, см. разд. 2.6) является однозначной функцией температуры; то же самое относится к зависимости температуры плавления от внешнего давления (*кривая плавления*) и к зависимости от температуры давления пара над твердой поверхностью (*кривая возгонки*).

На рис. 20 приведены все три кривые (существования, плавления и возгонки) для воды. Точка пересечения этих кривых называется *тройной точкой* (для воды $t_3 = 0{,}01$ °C). Для существования *трехфазной системы* должны выполняться сразу два условия: $\mu_п(p, T) = \mu_ж(p, T)$ и $\mu_ж(p, T) = \mu_{тв}(p, T)$, которые однозначно определяют ее давление и температуру.

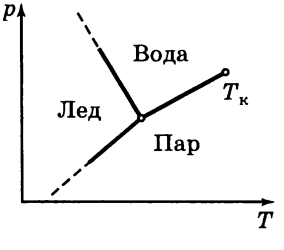


Рис. 20

• **Фазовый переход первого рода. Теплота и энтропия перехода.** Чтобы в двухфазной системе перевести часть вещества массой m из одной фазы в другую, не меняя при этом давления и температуры, надо сооб-

щить системе теплоту $Q = mq$, которую называют (скрытой) *теплотой фазового перехода* (q — *удельная теплота перехода*). При переходе вещества в новую фазу ее энтропия изменяется на $\Delta S = Q/T = mq/T$, а внутренняя энергия на $\Delta U = mq - mp\Delta v$ ($v = V/m$ — *удельный объем*). Величину $\Delta s = q/T$ называют удельной энтропией перехода, а $\Delta u = q - p\Delta v$ — изменением удельной внутренней энергии при переходе. Переход вещества между фазами двухфазной системы, связанный с поглощением (выделением) теплоты перехода и сопровождающийся скачкообразным изменением внутренней энергии, энтропии, плотности (объема) и др., называется *фазовым переходом первого рода*.

(Название связано с тем, что скачок испытывают величины, являющиеся первыми производными термодинамического потенциала Гиббса: $S = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p$ и $V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T$.)

- **Уравнение Клапейрона — Клаузиуса.** Если изменить температуру двухфазной системы, то ее давление изменится таким образом, что химические потенциалы (или удельные потенциалы Гиббса) фаз останутся равными: $d\phi_1 = d\phi_2$, или $-s_1\, dT + v_1\, dp = -s_2\, dT + v_2 dp$ (см. разд. 2.4). Получаем, что наклон кривой фазового равновесия равен

$$\frac{dp}{dT} = \frac{\Delta s}{\Delta v} = \frac{q}{T\Delta v} \qquad (49)$$

(*уравнение Клапейрона — Клаузиуса*). Например, для перехода лед — вода при атмосферном давлении температура плавления равна 273 К, удельная теплота $q = 3{,}34 \cdot 10^5$ Дж/кг, а $v_в - v_л = -0{,}91 \cdot 10^{-4}$ м^3/кг, и мы получим $\frac{dp}{dT} = -1{,}1 \cdot 10^7$ Па/К. Знак минус объясняется аномальным свойством воды: при плавлении (таянии) ее плотность увеличивается.

Пример 1. Если непрерывно подводить к жидкости теплоту, то в тот момент, когда ее температура достигает значения, при котором давление насыщенного пара равно внешнему давлению, наступает интенсивное парообразование во всем объеме жидкости, которое называют *кипением*. Уравнение (49) определяет зависимость *температуры кипения* от внешнего давления. Пренебрегая удельным объемом жидкости и выражая удельный объем пара из уравнения состояния идеального газа: $v = \frac{RT}{\mu p}$, получим приближенное уравнение $\frac{dp}{dT} = \frac{\mu q p}{RT^2}$. Например, для воды ($\mu$ = 18 г/моль) при атмосферном давлении $p = 10^5$ Па температура кипения равна T = 373 К, удельная теплота $q = 2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг, и мы получим $\frac{dp}{dT} = 3{,}5 \cdot 10^3$ Па/К.

- **Фазовый переход второго рода.** При фазовом переходе второго рода (точка Кюри перехода в ферромагнитное состояние, точка перехода жидкого гелия в сверхтекучее состояние и др.) плотность, внутренняя энергия, энтропия (первые производные термодинамического потенциала Гиббса) изменяются непрерывно, а различного вида производные этих термодинамических функций (восприимчивости) — теплоемкость, сжимаемость, диэлектрическая или магнитная проницаемость и т. д. — изменяются скачком или проявляют критическое поведение (стремятся к бесконечности при приближении к точке перехода). (Название «фазовый переход второго рода» связано с тем, что скачок испытывают вторые производные термодинамического потенциала Гиббса.) Фазовый переход второго рода происходит сразу во всем объеме. В результате перехода происходит качественное изменение внутреннего строения — появляется (или исчезает) дополнительная симметрия.

2.8. Поверхностное натяжение

• **Коэффициент поверхностного натяжения.** Молекулы в поверхностном слое жидкости обладают большей потенциальной энергией по сравнению с молекулами в объеме (меньше «соседей», энергия взаимодействия с которыми отрицательна, — см. рис. 18). При постоянной температуре дополнительная энергия пропорциональна площади поверхности Σ:

$$\Psi_{\text{пов}} = \sigma(T)\Sigma, \qquad (50)$$

где удельную свободную энергию поверхности σ называют *коэффициентом поверхностного натяжения.* При равновесном изотермическом изменении площади прямоугольного участка поверхности работа внешней силы равна изменению свободной энергии (30). Поэтому $A = \Delta\Psi_{\text{пов}} = \sigma\Delta\Sigma = \sigma L x$, где L — длина прямолинейного отрезка границы, x — его перемещение. Отсюда следует, что на отрезок границы действует *сила поверхностного натяжения*, перпендикулярная к этому отрезку и направленная вдоль поверхности жидкости:

$$F_{\text{пов}} = \sigma L. \qquad (51)$$

Равновесие соответствует минимуму свободной энергии, следовательно, жидкость или жидкая пленка стремятся уменьшить свою поверхность: в невесомости жидкая капля принимает форму шара.

• **Термодинамика поверхностного слоя.** Так как $\Psi_{\text{пов}}$ является функцией (T, Σ), то $d\Psi = \sigma\, d\Sigma + \sum \frac{d\sigma}{dT}\, dT$. Отсюда с учетом (31) получим выражения для энтропии поверхностного слоя, его внутренней энергии и теплоты, поглощаемой поверхностным слоем при изотермическом увеличении площади:

$$S = -\frac{d\sigma}{dT}\,\Sigma, \quad U = \Psi + TS = \left(\sigma - T\,\frac{d\sigma}{dT}\right)\Sigma,$$

$$\delta Q = T\,dS = -T\,\frac{d\sigma}{dT}\,d\Sigma.$$

При увеличении температуры T коэффициент поверхностного натяжения σ уменьшается и при критической температуре обращается в нуль.

- **Добавочное давление под искривленной поверхностью.** Из условия механического равновесия поверхностного слоя следует, что давление внутри выпуклой поверхности должно быть больше, чем снаружи. Добавочное давление Δp в случае сферической поверхности найдем, увеличив (мысленно) радиус шара на dR и приравняв работу внешних сил над поверхностным слоем к изменению его свободной энергии: $\Delta p\ dV = \sigma\ d\Sigma \Rightarrow$ $\Rightarrow \Delta p\ d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = \sigma\ d(4\pi R^2)$. В результате получим

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}. \qquad (52)$$

Обобщением этой формулы является *формула Лапласа:*

$$\Delta p = \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где R_1, R_2 — главные радиусы кривизны (радиусы кривизны в сечении поверхности взаимно перпендикулярными плоскостями, проходящими через нормаль к поверхности в данной точке).

- **Краевой угол. Смачивание.** Поверхность жидкости образует с твердой поверхностью угол, который называют *краевым*. Величина краевого угла зависит от соотношения между коэффициентами поверхностного натяжения на границах жидкость — воздух ($\sigma_{ж-в}$), жидкость — твердое тело ($\sigma_{ж-т}$) и твердое тело — воздух ($\sigma_{т-в}$). Из условия механического равновесия элемента жидкости на линии пересечения трех сред (рис. 21) имеем $\sigma_{т-в} L = \sigma_{ж-т} L + \sigma_{ж-в} L \cos\theta$. Отсюда получим

$$\cos\theta = \frac{\sigma_{т-в} - \sigma_{ж-т}}{\sigma_{ж-в}}.$$

Рис. 21

Если $\cos\theta > 0$, то говорят, что жидкость *смачивает* поверхность. Если правая часть последнего равенства больше или равна $+1$, то на поверхности твердого тела образуется молекулярная пленка жидкости (*полное смачивание* жидкостью твердого тела); в сосуде жидкость образует со стенкой нулевой угол. Если правая часть равенства меньше или равна -1, то имеет место полное несмачивание.

- **Капиллярные явления.** Если жидкость смачивает поверхность тонкого капилляра, то она поднимется по нему на высоту h, определяемую условием механического равновесия.

В случае капилляра круглого сечения радиуса r радиус кривизны мениска равен $R = r/\cos\theta$, и давление под мениском (см. (52)) должно быть меньше атмосферного на величину $2\sigma/R = 2\sigma\cos\theta/r$. Приравнивая к ρgh, находим высоту подъема жидкости: $h = \dfrac{2\sigma\cos\theta}{\rho g r}$.

2.9. Явления переноса в газах

- **Средняя длина свободного пробега.** Среднее число столкновений в единицу времени выделенной молекулы с другими молекулами газа:

$$z = n\sigma\langle v\rangle\sqrt{2}\,, \qquad (53)$$

где n — концентрация молекул, $\langle v\rangle$ — средняя скорость движения молекул, а σ — *эффективное сечение* для упругих соударений молекул. В модели твердых шариков $\sigma = \pi d^2$, где d — диаметр шарика. Множитель $\sqrt{2}$ учитывает движение встречных молекул; в качественной теории явлений переноса его обычно опускают.

Для определения числа столкновений траекторию молекулы, имеющую вид ломаной линии, окружают цилиндрической поверхностью радиуса d. Движущаяся молекула столкнется с любой неподвижной молекулой, центр которой окажется внутри этого цилиндра. За единицу времени молекула проходит расстояние $<v>$, объем цилиндра равен $\pi d^2<v>$, число попавших в него молекул равно $z = \pi d^2<v>n$.

Полное число соударений между молекулами в единице объема в единицу времени равно:

$$\nu = \frac{zn}{2} = \frac{n^2\sigma\langle v\rangle\sqrt{2}}{2}. \qquad (54)$$

Средняя длина свободного пробега молекулы равна

$$\lambda = \frac{\langle v\rangle}{z} = \frac{1}{\pi\sigma\sqrt{2}}. \qquad (55)$$

Эффективное сечение некоторого процесса взаимодействия между сталкивающимися частицами (по отношению к выделенному результату этого взаимодействия) определяют следующим образом. Рассмотрим неподвижную молекулу (мишень) и налетающий на нее пучок молекул интенсивности $I = nv$ (*интенсивность пучка* — число частиц, проходящих за 1 с через единичную площадку, перпендикулярную скорости молекул). Эффективным сечением процесса называют отношение числа столкновений в единицу времени, приведших к выделенному результату, к интенсивности пучка:

$$\sigma = \Delta N/I. \qquad (56)$$

Ослабление пучка молекул, распространяющихся в газе, на пути dx равно

$$dI = -I\sigma n\, dx = -(I/\lambda)\, dx,$$

где σ — сечение упругого рассеяния молекул, $n\, dx$ — число рассеивающих центров на пути dx (на единицу площади), $\lambda = 1/(n\sigma)$. Интегрируя, получим зависимость интенсивности пучка от пройденного им расстояния:

$$I = I_0 \exp(-n\sigma x) = I_0 \exp(-x/\lambda), \qquad (57)$$

т. е. вероятность того, что молекула испытает соударение на интервале $(x, x + dx)$, равна $|dI|/I_0 = \exp(-x/\lambda)\, d(x/\lambda)$. Среднее расстояние, пройденное молекулой до столкновения, равно

$$\langle x\rangle = \int_0^\infty x \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right) = \lambda.$$

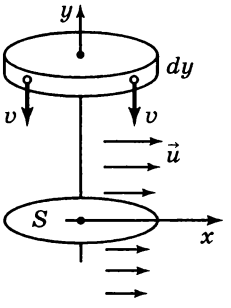


Рис. 22

● **Качественная модель явлений переноса в газах.** Явления вязкости, теплопроводности и диффузии объясняются переносом импульса, энергии, концентрации за счет хаотического теплового движения. Вязкостью называют возникновение силы трения между параллельно движущимися слоями, если скорости слоев различны. Если скорость направленного движения $\vec{u}$ параллельна оси x и меняется только в направлении оси y (рис. 22), то между слоями жидкости возникает сила, пропорциональная площади и градиенту скорости u:

$$|F_x| = \eta S \frac{du}{dy}, \qquad (58)$$

где η — коэффициент вязкости (или просто вязкость). Возникновение силы объясняется переносом вдоль оси y импульса p_x молекулами, пересекающими площадку за счет теплового движения.

Если в направлении y меняется не скорость направленного движения молекул, а температура газа, то поток теплоты в направлении оси y равен

$$q = -\chi \frac{dT}{dy}, \qquad (59)$$

где χ — коэффициент теплопроводности (или просто теплопроводность).

Если вдоль оси y меняется концентрация меченых молекул газа n_1 (полная концентрация n должна быть постоянной), то поток меченых молекул в направлении оси y (самодиффузия) определяется *законом Фика*:

$$j = -D \frac{dn_1}{dy}, \qquad (60)$$

где D — коэффициент диффузии.

Обозначим за $g(y)$ величину, поток которой вдоль оси y нас интересует. В случае вязкости это — импульс направленного движения молекул: $g(y) = m_0 u(y)$, в случае теплопроводности — средняя энергия теплового движения: $g(y) = \langle\varepsilon\rangle = c_V m_0 T$ (c_V — удельная теплоемкость), в случае диффузии: $g(y) = n_1(y)/n$. Будем считать, что каждая молекула газа переносит через площадку то значение параметра g, которое имеют (в среднем) молекулы газа в том месте, где произошло ее последнее соударение. Тогда для потока величины g в направлении оси y можно получить выражение

$$G = -\frac{1}{3}\, n\langle v\rangle\, \lambda\, \frac{dg}{dy}. \qquad (61)$$

Для грубой оценки можно считать, что поток частиц через единичную площадку равен $n\langle v\rangle$, и что частицы, пересекающие площадку в точке y, испытали последнее соударение в среднем на расстоянии λ. Получаем $G \sim n\langle v\rangle\,[g(y-\lambda) - g(y+\lambda)]$, т. е. $G \sim n\langle v\rangle\,\lambda(dg/dy)$.

Покажем, как можно учесть, что последние соударения частиц перед пересечением площадки происходят на разных от нее расстояниях. Будем считать, что после соударения молекула летит в одном из шести направлений, задаваемых осями координат. С расстояния y прилетят молекулы, испытавшие соударение в цилиндре объемом $S\,dy$, полетевшие в направлении $-y$ и не испытавшие более соударений на пути y. С учетом (54), (55), (57) получим

$$g(y)\,dN = \left[g(0) + y\frac{dg}{dy}\right]\frac{\langle v\rangle n}{6\lambda}\exp\left(-\frac{y}{\lambda}\right)(S\,dy).$$

Интегрируя по y, получим вклад молекул, летящих со стороны положительных y. Вычитая вклад противоположно летящих молекул, приходим к формуле (61).

- **Формулы для коэффициентов переноса.**

1. Подставляя $g = m_0 v_x$ в формулу (61), получим поток импульса, который равен силе трения (58) для единичной площади. Для вязкости имеем:

$$\eta = \frac{1}{3}\, n m_0 \langle v\rangle\, \lambda = \frac{1}{3}\,\rho\langle v\rangle\lambda. \qquad (62)$$

2. Подставляя $g = c_V m_0 T$ в формулу (61) и сравнивая с (59), находим коэффициент теплопроводности:

$$\chi = \frac{1}{3} n m_0 \langle v \rangle c_V \lambda = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle c_V \lambda. \qquad (63)$$

3. Подставляя $g = n_1/n$ в формулу (61) и сравнивая с (60), получим выражение для коэффициента диффузии:

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \lambda. \qquad (64)$$

Из формул (62) — (64) следуют два важных факта:

1. Длина свободного пробега обратно пропорциональна ρ, что видно из уравнения (55); поэтому вязкость и теплопроводность газов не зависят от давления (закон Максвелла). Этот вывод остается верным до тех пор, пока длина свободного пробега мала по сравнению с размерами сосуда.

2. Отношение вязкости и теплопроводности не зависит от температуры. Если длина пробега становится сравнимой с размерами сосуда (*разреженный газ*), то вязкость и теплопроводность начинают зависеть от плотности. Например, при вычислении потока теплоты между стенками, расположенными на расстоянии $d \ll \lambda$ (*ультраразреженный газ*), можно считать, что после удара о стенку, имеющую температуру T_1, каждая молекула приобретает (в среднем) энергию $c_V m_0 T_1$, летит без соударений к противоположной стенке и отдает ей энергию $c_V m_0 (T_2 - T_1)$. Из формулы (35) следует, что число попадающих на стенку молекул равно $\frac{1}{4} n \langle v \rangle S \Delta t$. Отсюда имеем: $q = \frac{1}{4} \rho \langle v \rangle c_V \Delta T$.

3. Электродинамика

3.1. Электрический заряд. Закон Кулона

• **Электрический заряд** — физическая величина, определяющая интенсивность электромагнитного взаимодействия.

Свойства заряда:

1. Носителями электрического заряда являются заряженные элементарные частицы — протон и электрон (а также их античастицы — антипротон и позитрон — и некоторые нестабильные частицы: π-мезоны, μ-мезоны и т. д.). Заряженные частицы взаимодействуют между собой с силами, убывающими с расстоянием так же медленно, как гравитационные, но во много раз превышающими их по величине.

2. Все заряженные элементарные частицы обладают одним и тем же по величине зарядом, который называют *элементарным зарядом* и обозначают буквой e. Опыт показывает, что заряд элементарных частиц не зависит от их скорости.

3. Заряд элементарных частиц может быть положительным или отрицательным. Одноименные частицы отталкиваются, разноименные — притягиваются. За положительный заряд принят заряд протона $+e$. Заряд электрона — отрицательный ($-e$).

Если в состав макроскопического тела входит различное количество электронов N_e и протонов N_p, то оно оказывается заряженным. Заряд тела всегда представляется числом, кратным величине элементарного заряда: $q = e(N_p - N_e)$.

Закон сохранения электрического заряда: полный заряд замкнутой системы, т. е. алгебраическая сумма зарядов всех тел, постоянен. Это утверждение очевидно, если в системе не происходит превращений элемен-

тарных частиц. Но закон сохранения заряда имеет более фундаментальный характер — он выполняется в любых процессах рождения и уничтожения элементарных частиц.

• **Закон Кулона** описывает взаимодействие покоящихся *точечных зарядов*, т. е. элементарных частиц или заряженных тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними. Сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме (кулоновская сила) прямо пропорциональна произведению зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от системы единиц. Сила взаимодействия направлена вдоль прямой, соединяющей заряды; одноименные заряды отталкиваются, разноименные — притягиваются.

В СИ единица заряда *кулон* (Кл) определяется через единицу силы тока *ампер*, а коэффициент в формуле (1) равен $k = 9{,}0 \cdot 10^9$ Н · м²/Кл², или $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — *электрическая постоянная*.

Сила, действующая на заряд q со стороны нескольких зарядов $Q_1, Q_2, \ldots$, равняется суперпозиции сил:

$$\vec{F} = \sum_i k\frac{qQ_i}{(\vec{r}-\vec{r}_i)^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i|}. \qquad (2)$$

Распределение заряда по пространству задается *пространственной плотностью заряда* $\rho(\vec{r})$, по поверхности — *поверхностной плотностью заряда* $\sigma(\vec{r})$, по линии — *линейной плотностью заряда* $\lambda(\vec{r})$:

$$dq = \rho\, dV, \quad dq = \sigma\, dS, \quad dq = \lambda\, dl. \qquad (3)$$

Система зарядов называется *электронейтральной*, если ее полный заряд равен нулю. Простейший пример электронейтральной системы — *электрический диполь*, состоящий из двух точечных зарядов q и $-q$. *Дипольным моментом* электрического диполя называется вектор

$$\vec{p} = q\vec{l}, \qquad (4)$$

где $\vec{l} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$ — вектор, проведенный от заряда $-q$ к заряду q.

Обобщением на произвольную электронейтральную систему является определение

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-),$$

где $q = \sum_{q_i > 0} q_i$ — сумма всех положительных зарядов, $\vec{r}_+ = \sum_{q_i > 0} q_i \times \vec{r}_i / q$ — центр положительных зарядов, $\vec{r}_- = \sum_{q_i < 0} q_i \vec{r}_i / q$ — центр отрицательных зарядов.

3.2. Электрическое поле. Напряженность поля

- **Электромагнитное поле.** Взаимодействие заряженных частиц друг с другом осуществляется посредством *электромагнитного поля.* Это означает, что: а) заряженные частицы создают в окружающем пространстве электромагнитное поле; б) на заряженную частицу действует электромагнитное поле, существующее в данной точке пространства в данный момент времени. Поле, создаваемое точечным источником, пропорционально его заряду; воздействие поля на заряженную частицу пропорционально заряду этой частицы.
- **Электрическое поле.** Электромагнитное поле представляет собой совокупность двух взаимосвязанных полей — *электрического* и *магнитного.* Действие электрического поля на заряженную частицу не зависит от ее скорости, а действие магнитного поля пропорционально скорости частицы. Источниками электрического поля служат любые заряженные частицы, магнитное поле создается движущимися зарядами. Соотношение между электрическим и магнитным полями меняется при переходе в другую инерциальную систему отсчета. Свойства полей полностью описываются

системой четырех уравнений Максвелла (см. разд. 3.15). Уравнения Максвелла релятивистски инвариантны.

• **Пробный заряд. Напряженность электрического поля.** Для определения характеристик электромагнитного поля используют понятие точечного *пробного заряда*, внесение которого в исследуемое поле его не искажает (т. е. не приводит к смещению источников поля). Для этого величина пробного заряда должна быть достаточно малой. Сила, действующая на неподвижный пробный заряд q, пропорциональна его величине и определяется только электрическим полем:

$$\vec{F}_q = q\vec{E}. \qquad (5)$$

Эта формула определяет *напряженность электрического поля.* Она же дает ответ на вопрос, какая сила действует на любой заряд q, движущийся или неподвижный, со стороны электрического поля. В СИ напряженность измеряется в Н/Кл или в В/м.

3.3. Электростатическое поле. Принцип суперпозиции для напряженности и потенциала

• **Электростатическое поле.** Стационарное электрическое поле, создаваемое системой неподвижных зарядов, называется *электростатическим полем.* Напряженность электростатического поля может быть определена с помощью закона Кулона (2).

1. *Поле точечного заряда.* Если внести пробный заряд q в поле точечного заряда Q, то из (2) и (5) получим:

$$\vec{E} = k\frac{Q\vec{r}}{r^2 r} = E_r\frac{\vec{r}}{r}, \qquad (6)$$

где E_r — проекция $\vec{E}$ на радиальное направление.

2. *Поле системы зарядов.* Используя *принцип суперпозиции полей*, имеем:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots = \sum_i k \frac{Q_i}{(\vec{r} - \vec{r}_i)^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}. \qquad (7)$$

В случае непрерывного распределения заряда суммирование надо заменить интегрированием, см. (3). (Сравните с формулами для поля тяготения в разд. 1.8.)

Пример 1. Заряд равномерно распределен по дуге окружности радиусом R с линейной плотностью λ (рис. 23). Угловой размер дуги равен $2\alpha_0$. Вычислить напряженность в центре окружности.

Решение. Напряженность направлена по оси x, проходящей через середину дуги и центр окружности. Напряженность поля, создаваемого в точке O элементом дуги с угловым размером $d\alpha$, равна $dE = k\ dq/R^2$, где $dq = \lambda R\ d\alpha$. Проектируя на x и интегрируя, находим:

$$E_x = \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} k \frac{\lambda R d\alpha}{R^2} \cos\alpha = k \frac{2\lambda \sin\alpha_0}{R}.$$

Пример 2. Поле отрезка. Заряд равномерно распределен по отрезку прямой с линейной плотностью λ. Вычислить напряженность поля в точке A, положение которой по отношению к отрезку задано расстоянием y до прямой и двумя углами α_1 и α_2 (рис. 24).

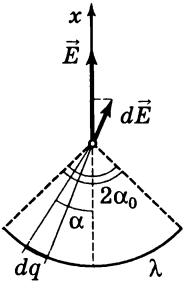


Рис. 23

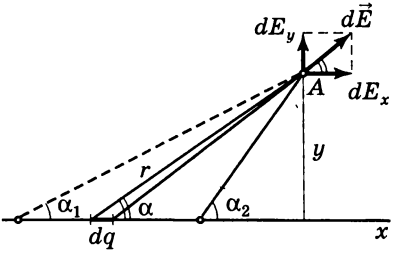


Рис. 24

Решение. Вклад в напряженность от элемента dx равен $dE = k\lambda dx/r^2$, его проекции на оси x и y равны $dE\cos\alpha$ и $dE\sin\alpha$. Интегрировать удобно по углу α после подстановки $r = y/\sin\alpha$ и замены переменной: $x = -y\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $dx = yd\alpha/\sin^2\alpha$. Для проекций E_x и E_y получим:

$$E_x = k\frac{\lambda}{y}(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1),\quad E_y = k\frac{\lambda}{y}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2).$$

Если $\alpha_1 = \pi - \alpha_2 = \alpha$ (точка A лежит на перпендикуляре, проведенном через середину отрезка), то $E_x = 0$, $E_y = 2k\lambda\cos\alpha/y$. Если в этом равенстве $\alpha \to 0$ (прямая), то $E_y = 2k\lambda/y$. Если $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi/2$ (полупрямая), то $E_x = E_y = k\lambda/y$.

• **Потенциал электростатического поля.** Как и любое стационарное центральное поле, электростатическое поле является *потенциальным* (см. разд. 1.5). Это означает, что работа поля при перемещении пробного заряда из одной точки пространства в другую не зависит от траектории. Сказанное позволяет определить *потенциал электростатического поля* $\varphi(\vec{r})$:

$$A_q(1 \to 2) = W_q(\vec{r}_1) - W_q(\vec{r}_2) = q[\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)], \qquad (8)$$

где $A_q(1 \to 2)$ — работа поля при переносе пробного заряда q из точки $\vec{r}_1$ в точку $\vec{r}_2$, $W_q(\vec{r}) = q\varphi(\vec{r})$ — *потенциальная энергия точечного заряда q во внешнем электростатическом поле* (в этой главе энергия будет обозначаться буквой W). Величина $\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)$ называется *разностью потенциалов* между точками $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$. Для однозначного определения $W_q(\vec{r})$ и $\varphi(\vec{r})$ надо выбрать точку, где они обращаются в нуль. В СИ потенциал измеряется в вольтах (В).

Зная напряженность $\vec{E}(\vec{r})$, можно вычислить разность потенциалов и потенциал:

$$\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\,d\vec{r},\quad \varphi(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{E}\,d\vec{r}, \qquad (9)$$

где $\vec{r}_0$ — точка, в которой потенциал принят равным нулю. Зная потенциал $\varphi(\vec{r})$, можно найти проекцию на-

пряженности на любое направление l (исходя из (9) для двух близких точек):

$$E_l = -\frac{\partial\varphi}{\partial l} \qquad (10)$$

и вектор напряженности:

$$\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi = -\left(\vec{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right). \qquad (11)$$

- **Потенциал поля точечного заряда и системы зарядов.**

Потенциал поля точечного заряда Q можно найти с помощью формулы (10):

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} \Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -k\frac{Q}{r^2} \Rightarrow \varphi(\vec{r}) = k\frac{Q}{r} + \text{const}.$$

Обычно потенциал принимают равным нулю на бесконечности. В этом случае:

$$\varphi(r) = k\frac{Q}{r}. \qquad (12)$$

Потенциал поля системы зарядов равен сумме потенциалов полей отдельных зарядов (принцип суперпозиции для потенциала):

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_1(\vec{r}) + \varphi_2(\vec{r}) + \ldots, \quad \varphi_n(\vec{r}) = k\frac{Q_n}{|\vec{r} - \vec{r}_n|},$$
$$n = 1, 2, \ldots. \qquad (13)$$

Если заряд распределен непрерывно, суммирование надо заменить интегрированием.

Пример 3. Поле диска. Рассмотрим тонкий диск радиусом R, равномерно заряженный с поверхностной плотностью σ. Вычислить потенциал в точке A, расположенной на оси диска на расстоянии x от его центра (рис. 25).

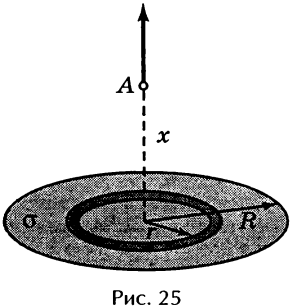


Рис. 25

Решение. Вклад в потенциал тонкого кольца, заключенного между окружностями радиусов r и $r + dr$, равен

$$d\varphi = k\frac{dq}{\sqrt{x^2 + r^2}} = k\frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

(все точки кольца расположены почти на одинаковом расстоянии от точки A). Интегрируя, находим потенциал кольца:

$$\varphi = \int_0^R k\frac{\sigma 2\pi r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} = 2k\pi\sigma(\sqrt{x^2 + R_2} - x).$$

Затем с помощью (10) определим напряженность (она направлена вдоль x):

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx} = 2\pi k\sigma\left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}\right).$$

В пределе $R \to \infty$ получим поле бесконечной плоскости: $E_x = 2\pi k\sigma = \sigma/(2\varepsilon_0)$.

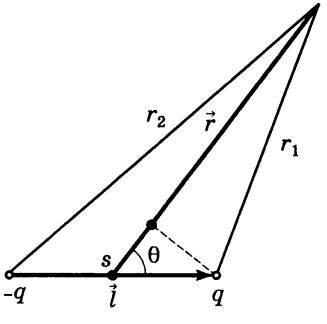


Рис. 26

Пример 4. Поле диполя. Требуется найти потенциал и напряженность электростатического поля вдали от диполя, изображенного на рис. 26.

Решение. Потенциал в точке, задаваемой радиусом-вектором $\vec{r}$, на большом расстоянии от диполя ($r = |\vec{r}| \gg l$) равен:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{kq}{r_1} - \frac{kq}{r_2} \approx$$

$$\approx \frac{kq}{r - s} - \frac{kq}{r + s} \approx k\frac{(\vec{p}\cdot\vec{r})}{r^3},$$

где $s = \left(\frac{\vec{l}}{2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right)$, $\vec{p} = q\vec{l}$ (см. разд. 3.1).

Чтобы найти напряженность, используем тождества: $\mathrm{grad}\,(1/r^3) = -3\vec{r}/r^5$ и $\mathrm{grad}\,(\vec{p}\cdot\vec{r}) = \vec{p}$. В результате имеем:

$$\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi = k\left[\frac{3(\vec{p}\cdot\vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3}\right].$$

Отсюда для модуля напряженности получим

$$E = kp\,r^{-3}\,\sqrt{3\cos^2\theta + 1}\,.$$

Такие же выражения верны для поля любой электронейтральной системы с отличным от нуля дипольным моментом (см. разд. 3.1) на большом от нее расстоянии.

- **Диполь во внешнем поле.** Маленький диполь с дипольным моментом $\vec{p} = q\vec{l}$ во внешнем поле обладает потенциальной энергией

$$W_{\text{п}} = q\varphi(\vec{r}_+) - q\varphi(\vec{r}_-) = q\,\frac{\partial\varphi}{\partial l}\,l = -pE_l = -(\vec{p}\cdot\vec{E}).$$

Эта энергия изменяется как при повороте диполя — на диполь со стороны поля действует вращательный момент:

$$\vec{M} = \vec{l}\times(q\vec{E}) = \vec{p}\times\vec{E},$$

так и при перемещении диполя в неоднородном поле — на диполь действует сила:

$$\vec{F} = q\vec{E}(\vec{r}_+) - q\vec{E}(\vec{r}_-) = q\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,l = p\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial l} = p_x\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial x} + p_y\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial y} + p_z\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}\,.$$

Равновесная ориентация с минимальной энергией соответствует положению $\vec{p}\parallel\vec{E}$, ориентированный таким образом диполь втягивается в область более сильного электрического поля.

3.4. Теорема Гаусса

- **Поток вектора напряженности.** Потоком вектора напряженности через маленький плоский участок площадью ds называется

$$d\Phi = (\vec{E}\cdot d\vec{s}) = E_n\,ds = E\cos\theta\,ds, \qquad (14)$$

где $d\vec{s} = \vec{n}\,ds$, $\vec{n}$ — вектор нормали к плоскости, θ — угол между $\vec{E}$ и $\vec{n}$, $E_n = E\cos\theta$ — проекция $\vec{E}$ на направление нормали. Знак $d\Phi$ зависит от выбора направления нор-

мали. Поток вектора напряженности через поверхность S конечных размеров определяется как

$$\Phi = \int_S E_n \, ds. \qquad (15)$$

В случае замкнутой поверхности направление нормали выбирается в сторону внешнего пространства.

Аддитивность потока: если электростатическое поле является суперпозицией двух полей $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})$, то для любой поверхности $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

Поток вектора напряженности, создаваемый точечным зарядом Q через площадку ds, равен

$$d\Phi = E_r \cos\theta \, ds = \pm k \frac{Q}{r^2} \, ds_\perp = \pm kQ \, d\Omega,$$

где $ds_\perp = |ds \cos\theta|$ — проекция ds на плоскость, перпендикулярную $\vec{r}$; $d\Omega = ds_\perp / r^2$ — телесный угол, под которым площадка видна от заряда Q; знак «+» соответствует острому углу между $\vec{n}$ и $\vec{r}$, а знак «−» — тупому углу. Поток через замкнутую поверхность равен $4\pi kQ$, если заряд Q находится внутри этой поверхности, и нулю — если снаружи.

- **Теорема Гаусса.** Поток вектора напряженности электростатического поля через замкнутую поверхность выражается через полный заряд внутри этой поверхности $q_{\text{охв}}$ (охватываемый поверхностью):

$$\Phi = 4\pi k \, q_{\text{охв}} = \frac{q_{\text{охв}}}{\varepsilon_0}. \qquad (16)$$

Теорема Гаусса и силовые линии. Для графического изображения полей используют силовые линии (линии напряженности) поля, которые проводятся по следующим правилам: а) касательная к силовой линии направлена вдоль вектора $\vec{E}$ в каждой точке пространства; б) густота силовых линий пропорциональна величине напряженности в данной области пространства. Поток вектора напряженности пропорционален числу

силовых линий, пронизывающих поверхность. (По такому же правилу можно ввести линии любого векторного поля.) Теорема Гаусса означает, что силовые линии начинаются и заканчиваются на зарядах, а в пустом пространстве непрерывны. Отметим, что теорема Гаусса и непрерывность силовых линий являются следствием того, что кулоновская сила убывает с расстоянием как $1/r^2$.

Кроме силовых линий, используются также *эквипотенциальные поверхности*, которые перпендикулярны силовым линиям (работа поля при переносе пробного заряда вдоль этой поверхности должна быть равна нулю).

- **Вычисление напряженности с помощью теоремы Гаусса.** Если соображения симметрии позволяют построить замкнутую поверхность (ее называют *гауссовой*), на части которой вектор $\vec{E}$ перпендикулярен поверхности и имеет постоянную величину E, а на остальной части $\vec{E}$ направлен вдоль поверхности ($\vec{E} \perp \vec{n}$), то с помощью теоремы Гаусса (16) для этой поверхности можно найти E.

Пример 1. Поле заряженной нити. Найти напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной нитью (рис. 27).

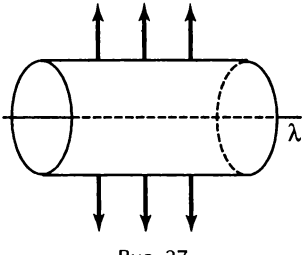


Рис. 27

Решение. Напряженность в любой точке пространства направлена вдоль перпендикуляра к нити, а значение E_r зависит только от расстояния r до нити. В качестве гауссовой поверхности можно выбрать цилиндр радиусом r и образующей длиной l, ось которого находится на нити. Записав теорему Гаусса (15), найдем напряженность:

$$E_r\, 2\pi r l = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2k\lambda}{r}$$

(сравните с примером 2 из разд. 3.3). Разность потенциалов двух точек равна

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Пример 2. Поле заряженной плоскости. Найти напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью (рис. 28).

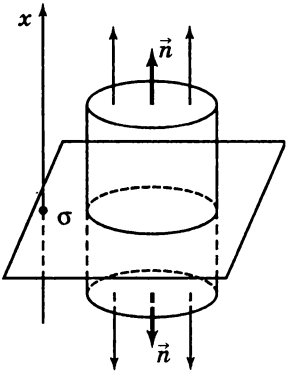


Рис. 28

Решение. Напряженность всюду перпендикулярна плоскости, а E_x зависит только от расстояния до плоскости. В качестве гауссовой поверхности можно выбрать цилиндр, основания которого площадью S расположены симметрично относительно плоскости. Поток через эту поверхность равен $E_x(x)S - E_x(-x)S = 2E_xS$. Записав теорему Гаусса, найдем напряженность:

$$2E_xS = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_x(x) = -E_x(-x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

(см. пример 3 из разд. 3.3). Приняв $\varphi = 0$ при $x = 0$, получим $\varphi(x) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x|$.

Пример 3. Поле заряженного шара. Найти поле равномерно заряженного шара радиусом R.

Решение. Поле равномерно заряженного шара является центральным. В качестве гауссовой поверхности можно выбрать сферу радиусом r. Если $r > R$, то внутрь поверхности попадает весь шар ($q_{\text{охв}} = q$), и мы имеем: $E_r \cdot 4\pi r^2 = q/\varepsilon_0$. Если $r < R$, то $q_{\text{охв}} = qr^3/R^3$, и теорема Гаусса принимает вид: $E_r \cdot 4\pi r^2 = qr^3/\varepsilon_0 R^3$. Окончательно получим:

$$\vec{E} = \begin{cases} k\dfrac{q}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r} & \text{при } r > R, \\ k\dfrac{q\vec{r}}{R^3} = \dfrac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0} & \text{при } r < R \end{cases}$$

(ρ — плотность заряда). Исходя из формулы для радиальной составляющей напряженности $E_r = -d\varphi/dr$ (см. разд. 3.3), находим

$$\varphi = \begin{cases} k\dfrac{q}{r} & \text{при } r > R, \\ -k\dfrac{qr^2}{2R^3} + \text{const} = -k\dfrac{qr^2}{2R^3} + \dfrac{3}{2}k\dfrac{q}{R} & \text{при } r < R \end{cases}$$

(константа определяется из условия непрерывности потенциала на поверхности шара).

- **Теорема Ирншоу.** С помощью теоремы Гаусса можно убедиться в справедливости *теоремы Ирншоу*, которая утверждает, что точечный заряд в пустой области пространства не может находиться в состоянии устойчивого равновесия под действием электрических сил. Действительно, в этом случае напряженность поля остальных зарядов на маленькой сфере, окружающей заряд, должна быть всюду направлена внутрь сферы (если рассматриваемый заряд положительный), но это противоречит теореме Гаусса (все остальные заряды находятся вне сферы).

Уравнения Максвелла в электростатике. Условие потенциальности электростатического поля

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

представляет собой одно из уравнений Максвелла (в интегральной и дифференциальной форме) для случая электростатики. Второе уравнение — теорема Гаусса (для объемного распределения заряда):

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int \rho \, dV \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Подставив сюда $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$, получим *уравнение Пуассона* для потенциала:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \text{ или } \Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

3.5. Электростатика проводников

• **Поле в проводнике. Потенциал проводника.** *Проводником* называется вещество, способное проводить электрический ток (или тело из такого вещества). Для этого вещество должно содержать *свободные заряды*, способные перемещаться по объему проводника. В электростатике рассматривается состояние, в котором заряды пришли в равновесие (т. е. отсутствует направленное движение зарядов — электрический ток). Это значит, что *всюду в объеме проводника напряженность поля должна быть равна нулю.* Отсюда следует, что:

1. Потенциал всех точек проводника имеет одинаковое значение, которое называют *потенциалом проводника*.

2. Для поля вне проводника поверхность проводника является эквипотенциальной. Линии напряженности перпендикулярны поверхности проводника.

3. Объемная плотность заряда в проводнике равна нулю (из теоремы Гаусса следует, что заряд в любом объеме внутри проводника равен нулю). Нескомпенсированные заряды распределены по поверхности проводника.

4. Напряженность поля вблизи поверхности проводника связана с поверхностной плотностью заряда на этом участке поверхности:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (17)$$

Эту формулу можно получить из теоремы Гаусса (16), если в качестве гауссовой поверхности взять маленький цилиндр, одно основание которого проходит вне проводника вблизи его поверхности, а другое — внутри проводника: $ES = \sigma S/\varepsilon_0$.

• **Уединенный проводник.** Потенциал уединенного проводника пропорционален его заряду:

$$\varphi = \frac{1}{C} q,$$

где C — *электроемкость проводника*, зависящая от его формы и размеров (и от диэлектрической проницаемости среды вокруг проводника). Электроемкость измеряется в СИ в *фарадах* (Ф), а в СГС — в см. Например, потенциал и электроемкость уединенного шара радиусом R равны

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R}, \quad C = 4\pi\varepsilon_0 R.$$

- **Соединение проводников.** При соединении проводников с различными потенциалами проводящей проволокой их потенциалы выравниваются. Если проводники расположены далеко друг от друга, то потенциал каждого из них можно рассчитывать как потенциал уединенного проводника, и закон сохранения заряда позволяет найти потенциал составного проводника φ':

$$C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 = C_1\varphi' + C_1\varphi' \Rightarrow \varphi' = \frac{C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2}{C_1 + C_2}$$

(электроемкость проволоки можно считать пренебрежимо малой и ее заряд не учитывать). Если электроемкость одного из проводников очень велика, то его потенциал почти не меняется. Например, при соединении проводника с землей (заземлении) его потенциал становится равным постоянному потенциалу Земли, который принимают равным потенциалу на бесконечности (т. е. нулю).

- **Проводник во внешнем поле.** При внесении любого проводника во внешнее поле свободные заряды перераспределяются таким образом, чтобы напряженность результирующего поля (суперпозиции внешнего поля и поля зарядов проводника) равнялась нулю внутри проводника. Например, если к незаряженному проводнику поднести положительный точечный заряд, то на ближней поверхности проводника соберутся отрицательные заряды, а на дальней — положительные, и заряд с проводником будут притягиваться. (Это явление

называется *электростатической индукцией*.) Так как распределение зарядов на проводнике обычно неизвестно, то расчет по принципу суперпозиции применить невозможно. В некоторых случаях задачу удается решить косвенным путем.

Пример 1. Поднесем точечный заряд $q > 0$ к поверхности заземленного проводника на расстояние a, малое по сравнению с размерами проводника. В этом случае конечный проводник можно заменить бесконечным полупространством из проводника (рис. 29). На поверхности проводника находятся отрицательные наведенные заряды. Требуется найти $\vec{E}_{пл}$, создаваемую этими зарядами в любой точке свободного пространства (при этом распределение этих зарядов неизвестно!).

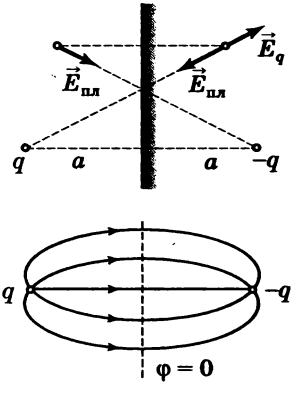


Рис. 29

Начнем с того, что найдем $\vec{E}_{пл}$ внутри проводника в точке, симметричной по отношению к рассматриваемой точке пустого пространства. В этой точке $\vec{E}_{пл}$ компенсирует напряженность, создаваемую в этой же точке зарядом q. Значит, $\vec{E}_{пл}$ внутри проводника точно совпадает с полем воображаемого заряда $(-q)$, помещенного в ту же точку, что и заряд q. Последний шаг: поле зарядов проводника $\vec{E}_{пл}$ симметрично относительно плоскости (все заряды расположены на поверхности!). Значит, *вне проводника* $\vec{E}_{пл}$ точно совпадает с полем воображаемого заряда $(-q)$, но *расположенного симметрично заряду* q. Этот воображаемый заряд называют «изображением» заряда q, а сам метод — *методом электростатических изображений*. Теперь можно найти: а) силу притяжения заряда и проводника $F = kq^2/(2a)^2$; б) напряженность поля во всем пространстве вне проводника (она равна напряженности двух зарядов $+q$ и $-q$); в) распределение зарядов на поверхности проводника — зная напряженность поля возле поверхности, по формуле (17) можно определить σ.

• **Принцип единственности.** При решении задач с неизвестным распределением заряда помогает *принцип единственности,* который можно сформулировать следующим образом: существует единственное распределение зарядов по поверхности проводников и единственное поле $\vec{E}(\vec{r})$ в пространстве между ними, при котором напряженность поля внутри проводников равна нулю, а потенциалы или заряды проводников имеют заданные значения. Поэтому, если удалось угадать такое распределение зарядов или такую конфигурацию поля, при котором эти условия выполняются, то это решение и будет правильным. Например, заметив, что эквипотенциальная поверхность $\varphi = 0$ для поля двух зарядов q и $-q$ совпадает с их плоскостью симметрии (см. рис. 29), можно сделать вывод, что их поле с той стороны от этой плоскости, где находится заряд q, совпадает с полем заряда q и проводящей плоскости (см. предыдущий пример).

Пример 2. Проводящий шар в однородном поле. Рассмотрим проводящий незаряженный шар в однородном поле $\vec{E}_0$. Заряды на шаре распределятся так, чтобы создать внутри шара поле $(-\vec{E}_0)$. Чтобы подобрать такое распределение зарядов, рассмотрим два воображаемых шара такого же радиуса, но равномерно заряженных по объему, один — зарядом плотностью ρ, другой — плотностью $-\rho$. (Поле такого шара было рассмотрено в примере 3 из разд. 3.4.) Если центр положительного шара смещен на малое расстояние $\vec{l}$ по отношению к центру отрицательного (рис. 30), то в области их пересечения поле равно

$$\vec{E} = -\frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0} + \frac{\rho(\vec{r}-\vec{l})}{3\varepsilon_0} = -\frac{\rho\vec{l}}{3\varepsilon_0},$$

т. е. является однородным. Плотность заряда внутри пересечения шаров равна нулю. Устремим теперь $\vec{l}$ к нулю, а ρ к бесконечности, так чтобы $\rho\vec{l}/(3\varepsilon_0) = \vec{E}_0$. В итоге получим распределение зарядов: $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, где $\sigma_0 = pl = 3\varepsilon_0\vec{E}_0$, а также найдем

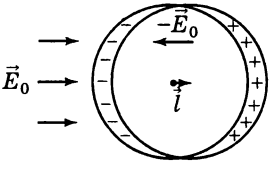


Рис. 30

поле, создаваемое зарядами проводящего шара вне шара: оно совпадает с полем точечного диполя с дипольным моментом $\vec{p} = (\rho V)\vec{l} = 4\pi\varepsilon_0 R^3 \vec{E}_0$ (см. пример 4 из разд. 3.3).

3.6. Электростатика диэлектриков

• **Поляризация диэлектрика. Поляризованность.** *Диэлектриком* называют вещество, которое не проводит электрический ток. Значит, в этом веществе отсутствуют свободные заряды (или их ничтожно мало). Тем не менее, в присутствии диэлектрика происходит *ослабление* электрического поля. Это свидетельствует о том, что при помещении диэлектрика в электрическое поле в объеме и на поверхности появляются макроскопические заряды. Указанные заряды возникают в результате *поляризации диэлектрика* — смещении *связанных зарядов* отдельных молекул или кристаллической решетки друг относительно друга. При поляризации средний дипольный момент молекул становится отличным от нуля и возникает дипольный момент объема диэлектрика. Степень поляризации в данной точке диэлектрика характеризуют *поляризованностью* $\vec{P}$, определяемой как суммарный дипольный момент молекул в расчете на единицу объема:

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V} = n\langle\vec{p}\rangle,$$

где n — концентрация молекул. Для построения макроскопических уравнений поля в диэлектрике можно упрощенно считать, что все молекулы в объеме ΔV имеют одинаковый дипольный момент $\langle\vec{p}\rangle = \vec{P}/n = q_0\langle\vec{l}\rangle$.

• **Поляризованность и связанные заряды.** Механизм образования макроскопических связанных зарядов проще всего представить в случае однородной поляризации ($\vec{P} = \overrightarrow{\text{const}}$). В этом случае объем диэлектрика ос-

тается электронейтральным, а на его поверхности выступают заряды — на передней (по отношению к $\vec{P}$) положительные, на задней — отрицательные. Создаваемая ими напряженность будет направлена *против* поляризованности $\vec{P}$.

При поляризации через произвольную площадку Δs в объеме диэлектрика (включая его границу) в направлении нормали к поверхности проходит заряд

$$\Delta q = n(\Delta s \langle l \rangle \cos\theta) q_0 = \\ = P_n \Delta s = (\vec{P} \cdot \Delta\vec{s}), \quad (18)$$

где $\Delta s \langle l \rangle \cos\theta$ — объем тонкого цилиндрического слоя, молекулы которого при поляризации пересекают площадку (рис. 31). Проинтегрировав по любой замкнутой поверхности, найдем полный связанный заряд, вышедший из охватываемого ею объема, что означает появление *внутри объема* связанного заряда

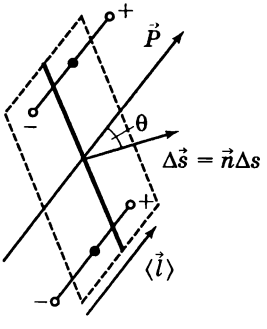


Рис. 31

$$q^{\text{св}}_{\text{охв}} = -\oint \vec{P} \cdot d\vec{s} \quad \text{или} \quad \operatorname{div}\vec{P} = -\rho^{\text{св}}. \quad (19)$$

Здесь $d\vec{s} = \vec{n}ds$ направлен, как обычно, в сторону внешнего пространства. Для поверхностной плотности связанного заряда из (18) получим:

$$\sigma^{\text{св}} = P_n. \quad (20)$$

• **Электрическое смещение.** Макроскопическая напряженность электрического поля в диэлектрике определяется как результат усреднения микроскопической напряженности $\vec{E}$ (сильно меняющейся на межатомных расстояниях) по малому объему, содержащему достаточно много молекул: $\vec{E}(\vec{r}) = \langle \vec{E}_{\text{микро}} \rangle$. Напряжен-

ность поля определяется как связанными, так и сторонними, нанесенными на диэлектрик извне, зарядами:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}(q^{\text{ст}}_{\text{охв}} + q^{\text{св}}_{\text{охв}}). \qquad (21)$$

Так как распределение связанных зарядов заранее не известно, удобно ввести новую величину, которую называют *электрическим смещением:*

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \qquad (22)$$

Из уравнений (19), (21) следует, что электрическое смещение определяется только сторонними зарядами:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{s} = q^{\text{ст}}_{\text{охв}} \qquad (23)$$

(*теорема Гаусса для электрического смещения*). В дифференциальной форме это уравнение имеет вид

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho^{\text{ст}}.$$

- **Изотропный диэлектрик.** Поляризованность $\vec{P}$ в данной точке диэлектрика возникает под воздействием электрического поля и определяется его напряженностью $\vec{E}$. В не очень сильных полях $\vec{P}$ зависит от $\vec{E}$ линейно, а в *изотропном диэлектрике*, кроме того, $\vec{P} \parallel \vec{E}$:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \varkappa \vec{E}, \qquad (24)$$

где $\varkappa$ — *диэлектрическая восприимчивость* вещества. Для электрического смещения в однородном диэлектрике получим:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \qquad (25)$$

где $\varepsilon = 1 + \varkappa$ — *диэлектрическая проницаемость* вещества.

- **Условия на границе раздела диэлектриков.** На границе раздела двух диэлектриков выполняются следующие условия для тангенциальных (касательных) и нормальных компонент:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}, \quad D_{2n} - D_{1n} = \sigma^{\text{ст}}, \quad P_{2n} - P_{1n} = -\sigma^{\text{св}} \qquad (26)$$

(нормаль $\vec{n}$ проведена из первой среды во вторую). Если стороннего заряда на границе нет, то нормальные компоненты смещения равны друг другу. Первое условие получается из условия потенциальности поля $\vec{E}$ (работа по замкнутому контуру равна нулю), второе — из формулы (23). В случае изотропного диэлектрика имеем:

$$E_{1\tau} = E_{2\tau},\ \varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n};\ D_{1n} = D_{2n},\ \frac{D_{1\tau}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2\tau}}{\varepsilon_2}. \quad (27)$$

Видно, что на границе диэлектрических сред происходит *преломление линий напряженности*.

● **Вычисление полей в присутствии диэлектриков.** Уравнения для $\vec{E}$ и $\vec{D}$ вместе с условием связи между ними в данном веществе (25) и граничными условиями (27) однозначно определяют поле во всем пространстве по известному расположению сторонних зарядов. Отметим некоторые свойства решения:

1. Из уравнений (19) и (23) и формулы $\vec{P} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\vec{D}$, которая является следствием (24) и (25), для однородного диэлектрика получим

$$\rho^{\text{св}} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\rho^{\text{ст}}. \quad (28)$$

Значит, в отсутствие стороннего объемного заряда в результате поляризации будет возникать только поверхностный связанный заряд. (Если диэлектрик неоднородный, т. е. ε зависит от координат, то объемный связанный заряд возникает и в отсутствие объемного стороннего заряда.)

2. Если границы однородного диэлектрика совпадают с эквипотенциальными поверхностями того поля $\vec{E}_0$, которое создают сторонние заряды в отсутствие диэлектрика, то все граничные условия удовлетворяются, если положить

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{E}_0(\vec{r})}{\varepsilon}. \quad (29)$$

Пример 1. Если точечный заряд q окружить сферическим слоем из диэлектрика (внутренний радиус R_1, внешний — R_2), то вне диэлектрика напряженность поля не изменится, а внутри

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{q}{r^2}, \quad P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\frac{q}{4\pi r^2},$$

$$\sigma_2^{\text{св}} = P(R_2) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\frac{q}{4\pi R_2^2}, \quad \sigma_1^{\text{св}} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\frac{q}{4\pi R_1^2}.$$

Связанные заряды на поверхностях равны друг другу: $q_2^{\text{св}} = -q_1^{\text{св}} = q\,\dfrac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}$.

Пример 2. Рассмотрим шар из однородного диэлектрика, равномерно заряженный сторонним зарядом с объемной плотностью ρ. Напряженность поля в отсутствие диэлектрика определена в примере 3 из разд. 3.4. В присутствии диэлектрика напряженность при $r < R$ уменьшится в ε раз:

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0\varepsilon}, \quad P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\frac{\rho r}{3},$$

$$\sigma^{\text{св}} = P(R) = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\frac{\rho r}{3}, \quad \rho^{\text{св}} = -\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\rho.$$

Нетрудно проверить, что $\sigma^{\text{св}}4\pi R^2 = -\rho^{\text{св}}\dfrac{4}{3}\pi R^3$, т. е. полный связанный заряд, как и должно быть, равен нулю.

Пример 3. Если в однородное поле $\vec{E}_0$ перпендикулярно напряженности поместить пластину диэлектрика, у которого ε меняется от ε_1 на одном конце до ε_2 на другом, то получим

$$D = \varepsilon_0 E_0 = \text{const}, \quad E = \frac{E_0}{\varepsilon(x)}, \quad P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon},$$

$$\rho^{\text{св}} = -\frac{dP}{dz} = -\frac{D}{\varepsilon^2}\frac{d\varepsilon}{dx},$$

$$\sigma_2^{\text{св}} = P_2 = D\frac{\varepsilon_2 - 1}{\varepsilon_2}, \quad \sigma_1^{\text{св}} = -P_1 = -D\,\frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1}.$$

Легко проверить, что полный связанный заряд равен нулю.

Пример 4. Если в однородное поле $\vec{E}_0$ внести шар из однородного диэлектрика, то он поляризуется однородно ($\vec{P} = \overrightarrow{\text{const}}$). Действительно, равномерная поляризация соответствует сдвигу двух равномерно заряженных шаров из примера 2 в разд. 3.5; как было показано, при этом возникает однородное поле с напряженностью $\vec{E}_1 = -\rho\vec{l}/3\varepsilon_0 = -(q\vec{l}/V)/3\varepsilon_0 = -\vec{P}/3\varepsilon_0$. Полное поле при этом равно $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 = \vec{E}_0 - \vec{P}/3\varepsilon_0$. Из этого уравнения и условия $\vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\vec{E}$ находим

$$\vec{E} = \frac{3\vec{E}_0}{\varepsilon + 2}, \quad \vec{P} = \frac{3\varepsilon_0(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2}\vec{E}_0.$$

При этом выполняются все граничные условия.

- **Механизмы поляризации.** Различают три механизма поляризации диэлектриков.

1. *Ориентационный механизм поляризации полярных диэлектриков.* Молекулы полярного диэлектрика (полярные молекулы) обладают постоянным дипольным моментом p_0 в отсутствие поля (H_2O, HCl и др.). Вследствие теплового движения, в отсутствие поля все направления дипольного момента равноправны, и средний дипольный момент равен нулю. Внешнее поле стремится установить дипольные моменты молекул вдоль $\vec{E}$ (см. разд. 3.3). В результате конкуренции ориентирующего действия поля и теплового движения возникает *средний дипольный момент* $\langle\vec{p}\rangle$, который в слабом поле ($p_0E \ll kT$) пропорционален $\vec{E}$ и убывает с ростом температуры.

В газообразных диэлектриках, в соответствии с распределением Больцмана (см. разд. 2.5), вероятность ориентации $\vec{p}$ пропорциональна $\exp\left(-\frac{W_п}{kT}\right)$, где $W_п = -(\vec{p}\cdot\vec{E})$. Видно, что во внешнем поле средний дипольный момент должен быть направлен вдоль $\vec{E}$ и пропорционален $p_0 f\left(\frac{p_0E}{kt}\right)$, где $f(x)$ — некоторая функция, равная нулю при $x = 0$ и единице при $x \to \infty$ (сильное поле, все диполи почти параллельны). При малых x

(слабое поле) $f(x) \approx \gamma x$, $\langle \vec{p} \rangle \approx \gamma \frac{p_0^2}{kT} \vec{E}$ — средний дипольный момент пропорционален $\vec{E}$ и обратно пропорционален T. Расчет дает для γ значение 1/3, т. е. $\vec{P} = \frac{1}{3} \frac{np_0^2}{\varepsilon_0 kT} \vec{E}$. Поэтому для диэлектрической проницаемости получим

$$\varepsilon = 1 + \frac{1}{3} \frac{np_0^2}{\varepsilon_0 kT}$$

(*формула Дебая — Ланжевена*).

2. *Электронный (деформационный) механизм поляризации неполярных диэлектриков.* В отсутствие внешнего поля дипольный момент неполярной молекулы равен нулю (H_2, O_2, N_2 и т. д.), т. е. наименьшей потенциальной энергией обладает такое состояние молекулы, при котором центр отрицательного заряда (электронного облака) совпадает с центром положительного. При включении внешнего поля центры положительного и отрицательного зарядов смещаются, и возникает сила, стремящаяся вернуть их в положение равновесия; при малом смещении l эта сила пропорциональна l: $\vec{F} = -\beta \vec{l}$ (*квазиупругая сила*). В положении равновесия $q\vec{E} = \beta \vec{l}$, т. е. возникающий под действием поля (*индуцированный*) дипольный момент $\vec{p} = q_0 \vec{l}$ оказывается пропорциональным напряженности поля: $\vec{p} = \alpha \varepsilon_0 \vec{E}$. Определенный таким образом коэффициент α называют *поляризуемостью молекулы.* Поляризуемость диэлектрика равна $\vec{P} = n\vec{p} = n\varepsilon_0 \alpha \vec{E}$, где $\vec{E}$ — поле, действующее на одну молекулу. В газах это поле можно считать равным среднему полю в диэлектрике, и для диэлектрической проницаемости получим:

$$\varepsilon = 1 + \varkappa = 1 + \alpha n.$$

В плотных газах, жидких и твердых диэлектриках надо учитывать отличие поля, действующего на молекулу, от среднего поля в диэлектрике (второе включает в себя поле самой молекулы, а первое — нет).

Рассмотрим однородный кристаллический диэлектрик с неполярными молекулами. Чтобы найти локальное поле, действующее на данную молекулу, рассмотрим сферу, центр которой совпадает с этой молекулой. Если молекулы расположены правильным образом (например, в вершинах кубического кристалла), то поле молекул, находящихся внутри сферы, в ее центре равно нулю. Значит, локальное поле в данной точке равно $\vec{E}_{\text{лок}} = \vec{E} + \vec{E}_1$, где $\vec{E}$ — макроскопическое среднее поле в диэлектрике (равное сумме внешнего поля и поля зарядов на внешней поверхности диэлектрика), а $\vec{E}_1$ — поле зарядов на внутренней поверхности полости. Из примера 4 следует, что $\vec{E}_1 = \vec{P}/3\varepsilon_0$. Получим $\vec{P} = n\varepsilon_0\alpha(\vec{E} + \vec{P}/3\varepsilon_0)$, откуда

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon_0 n\alpha\vec{E}}{1 - \frac{n\alpha}{3}}.$$

Учитывая $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}$, получим

$$\varepsilon - 1 = \frac{n\alpha}{1 - \frac{n\alpha}{3}}, \text{ или } \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n\alpha}{3}.$$

Этот результат известен как *формула Клаузиуса — Масотти*.

3. *Ионная поляризация в твердых диэлектриках, обладающих кристаллической решеткой.* Под действием поля подрешетка положительных ионов смещается целиком в одну сторону, подрешетка отрицательных ионов — в другую.

- **Сегнетоэлектриками** называют вещества (например, сегнетову соль), в которых ниже температуры T_c, называемой *температурой Кюри*, небольшие области — домены — спонтанно поляризованы до насыщения (все диполи ориентированы параллельно). Сегнетоэлектрики по своим свойствам являются электрическими аналогами ферромагнетиков: они имеют аномально большую диэлектрическую проницаемость, зависящую от E и T, проявляют при поляризации гистерезисные свойства, превращаются в обычные диэлектрики при нагревании выше температуры Кюри (подробнее см. разд. 3.13).

3.7. Конденсаторы

- **Электроемкость конденсатора.** *Конденсатором* называется система из двух изолированных друг от друга проводников, один из которых заряжен зарядом $+q$, другой — зарядом $-q$. Проводники называют *обкладками конденсатора*, заряд q — *зарядом конденсатора*, разность потенциалов между положительной и отрицательной обкладками U — *напряжением на конденсаторе*. Напряжение на конденсаторе пропорционально его заряду:

$$U = \frac{1}{C} q, \tag{30}$$

где C — *электроемкость* (или просто *емкость*) конденсатора (измеряется в фарадах).

- **Простые конденсаторы.** Конденсатор называют простым, если: а) электрическое поле сосредоточено в ограниченной области пространства между его обкладками (т. е. можно считать, что все силовые линии начинаются на положительной обкладке и заканчиваются на отрицательной); б) все пространство, в котором сосредоточено поле, заполнено однородным диэлектриком.

Пример 1. Плоский конденсатор. Конденсатор называется плоским, если его обкладками служат две параллельные пластины площадью S, расстояние между которыми мало по сравнению с их размерами ($d \ll \sqrt{S}$). Поле между пластинами можно считать однородным всюду, кроме самых краев. Напряженность поля найдем с помощью формулы (17): $E = q/(\varepsilon_0 \varepsilon S)$. Напряжение на конденсаторе $U = Ed$, а его емкость равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}. \tag{31}$$

Пример 2. Сферический конденсатор. Конденсатор называется сферическим, если его обкладками служат две концентрические сферы радиусов R_1 и R_2. Напряженность поля между обкладками: $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$, где r — расстояние до цент-

ра. Напряжение вычисляется по формуле $U = \int\limits_{R_1}^{R_2} E(r)dr$, а емкость равна

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

При $R_2 \to \infty$ это выражение переходит в емкость уединенной сферы (см. разд. 3.5).

Пример 3. Цилиндрический конденсатор. Конденсатор называется цилиндрическим, если его обкладками служат два концентрических цилиндра радиусов R_1 и R_2 и длиной $l \gg R_2 - R_1$. Напряженность между обкладками равна $E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r l}$. Напряжение вычисляется по формуле $U = \int\limits_{R_1}^{R_2} E(r)dr$, а емкость равна

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln(R_2/R_1)}.$$

- **Составные конденсаторы.** Соединяя обкладки простых конденсаторов, получим *составной* конденсатор. Емкость составного конденсатора определяется формулой (30) и выражается через емкости его компонентов.

1. *Параллельное соединение.* Все обкладки соединены между собой и образуют обкладки составного конденсатора (рис. 32, *а*). В этом случае имеем

$$U = U_i, \quad q = \sum q_i, \quad C = \sum C_i.$$

2. *Последовательное соединение.* Обкладками составного конденсатора служат обкладки крайних конденсаторов (рис. 32, *б*), полный заряд на каждой паре внутренних обкладок равен нулю. Имеем

$$q = q_i, \quad U = \sum U_i, \quad \frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i}.$$

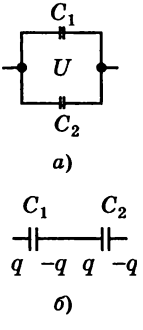


Рис. 32

3. Во многих случаях можно рассчитать емкость составного конденсатора, шаг за шагом заменяя последовательно и параллельно соединенные конденсаторы на эквивалентную емкость. Если же схему нельзя свести к параллельным — последовательным элементам, то можно воспользоваться методом узловых потенциалов.

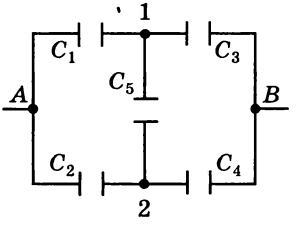


Рис. 33

Пример 4. Рассмотрим схему на рис. 33. Примем $\varphi_A = 0$, тогда $\varphi_B = U$. Потенциалы φ_1 и φ_2 найдем из системы уравнений, выражающих условие электронейтральности в узлах 1 и 2 (полный заряд трех обкладок, подходящих к каждому узлу, должен быть равен нулю):

$$(\varphi_1 - U)C_3 + (\varphi_1 - \varphi_2)C_5 + \varphi_1 C_1 = 0,$$

$$(\varphi_2 - U)C_4 + (\varphi_2 - \varphi_1)C_5 + \varphi_2 C_2 = 0.$$

Решив уравнения, найдем заряд составного конденсатора $q = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2$ и емкость $C = q/U$.

3.8. Энергия электростатического поля

• **Энергия системы зарядов.** Энергия взаимодействия системы зарядов определяется как работа внешних сил, необходимая для создания этой системы, или как работа, совершаемая силами поля при ее уничтожении. Энергия взаимодействия двух точечных зарядов равна энергии одного заряда в поле, создаваемом другим зарядом:

$$W_{12} = q_1\varphi_2(\vec{r}_1) = q_2\varphi_1(\vec{r}_2) = k\frac{q_1 q_2}{r}.$$

Энергия взаимодействия системы точечных зарядов равна

$$W = \sum_{i>j} W_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} W_{ij} = \frac{1}{2}\sum_i q_i\varphi(\vec{r}_i). \qquad (32)$$

Здесь $\varphi(\vec{r}_i)$ — потенциал, создаваемый всеми остальными зарядами в той точке, где находится i-й заряд. Если переписать эту формулу для заряда, непрерывно распределенного по поверхности или объему в ограниченной области пространства, то получим:

$$W = \frac{1}{2}\int\limits_V \varphi(\vec{r})\rho(\vec{r})\,dV + \frac{1}{2}\int\limits_S \varphi(\vec{r})\sigma(\vec{r})\,ds. \qquad (33)$$

Хотя формула (33) получена формальным обобщением (32), между ними есть принципиальные различия. В формуле (32) $\varphi(\vec{r}_i)$ — потенциал, создаваемый *остальными* зарядами, а в (33) $\varphi(\vec{r})$ — потенциал *всех* зарядов в точке $\vec{r}$ (вклад элемента объема или поверхности при уменьшении размеров стремится к нулю). Но самое главное — (32) учитывает только *энергию взаимодействия*, после разнесения точечных зарядов далеко друг от друга остается собственное поле каждого заряда; формула (33) позволяет вычислить *полную энергию* системы непрерывно распределенных зарядов (при разделении системы на всё более мелкие части энергия стремится к нулю).

Пример 1. Вычислить энергию равномерно заряженного шара радиусом R.

Решение. Подставляя в (33) потенциал поля шара (см. пример 3 из разд. 3.4), получим

$$W = \frac{1}{2}\int \rho\varphi\,dV = \frac{\rho}{2}\int\limits_0^R \left(-k\frac{qr^2}{2R^3} + \frac{3}{2}k\frac{q}{R}\right)4\pi r^2 dr = \frac{3}{5}k\frac{q^2}{R}.$$

- **Энергия уединенного проводника.** Все заряды на проводнике находятся при одинаковом потенциале, равном потенциалу проводника. Из формулы (33) имеем

$$W = \frac{q\varphi}{2} = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2C}, \qquad (34)$$

где C — электроемкость проводника (см. разд. 3.5). Это выражение получается и прямым расчетом работы электрического поля при постепенном удалении всего заряда на бесконечность: $W = \int \varphi(q)\,dq = C\int\limits_0^\varphi \varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}C\varphi^2$.

Например, энергия уединенной проводящей сферы равна

$$W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0\varepsilon R},$$

где ε — диэлектрическая проницаемость среды вокруг сферы.

- **Энергия конденсатора.** Из формулы (33) получим

$$W = \frac{q\varphi_1}{2} - \frac{q\varphi_2}{2} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \qquad (35)$$

Поле в конденсаторе можно уничтожить, перенося заряд малыми порциями с одной обкладки на другую: $W = \int U(q)\,dq = C\int\limits_0^U U\,dU = \frac{1}{2}CU^2$. Например, энергия плоского конденсатора равна

$$W = \frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{2d}(Ed)^2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}Sd. \qquad (36)$$

- **Плотность энергии электрического поля.** При полевом подходе надо говорить не об энергии взаимодействующих зарядов, а об энергии окружающего их электрического поля. Объемная плотность энергии электрического поля $w = W/V$ в пустом пространстве зависит только от напряженности поля:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2. \qquad (37)$$

Это выражение верно для любого распределения зарядов (его можно получить, рассмотрев однородное поле плоского конденсатора).

Исходя из уравнений поля (см. разд. 3.4), формулу (33) можно преобразовать к виду

$$W = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 E^2\,dV, \qquad (38)$$

где интегрирование ведется по всему пространству.

Например, при вычислении энергии заряженного шара (пример 1) по формуле (33) интегрирование производилось по объему шара, однако (38) показывает, что только часть энергии поля заключена внутри шара, а часть — в окружающем шар пустом пространстве. Формулы (33) и (38) позволяют вычислить полную энергию поля во всем пространстве только если: а) отсутствуют точечные заряды и заряды, распределенные по линии; б) заряды распределены по конечной области пространства. Однако (38) позволяет вычислять энергию, сосредоточенную в конечной области пространства, даже если полная энергия бесконечна.

В случае диэлектрика плотность энергии оказывается в ε раз больше:

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E^2. \quad (39)$$

Первый член в последнем выражении представляет собой непосредственно энергию электрического поля в диэлектрике, а второй (равный $\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{P}$) — работу, совершаемую полем над молекулами при его включении. Это выражение можно обобщить на случай, когда $\vec{P}$ (и $\vec{D}$) не пропорциональны $\vec{E}$ (сегнетоэлектрики, сильные поля). Для этого надо рассмотреть зарядку плоского конденсатора, заполненного таким диэлектриком:

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{V}\int U\,dq = \frac{1}{V}\int (Ed)\,d(DS) = \int_0^D \vec{E}\cdot d\vec{D}.$$

- **Закон сохранения энергии и вычисление сил.** Для вычисления сил, действующих на заряженное или поляризованное тело в электрическом поле, надо рассмотреть медленное изотермическое изменение его положения. При этом работа внешних сил плюс работа источников равна изменению энергии поля. Так как тело находится в механическом равновесии, то работа внешних сил равна работе силы, действующей со стороны поля, с обратным знаком.

Пример 2. Рассмотрим плоский конденсатор (отключенный от источника), который заполнен жидким или газообразным диэлектриком. Требуется найти силу, действующую на обкладку конденсатора.

Решение. При увеличении расстояния между обкладками на dx энергия увеличится на $\frac{1}{2} EDS\ dx$, а работа равна $F\ dx$. Значит, сила притяжения равна $F = \frac{1}{2} EDS = \frac{1}{2} Eq$, где $\frac{1}{2} E$ — напряженность в диэлектрике, создаваемая одной обкладкой. Если диэлектрик представляет собой твердую пластину, то между диэлектриком и обкладкой существует воздушный промежуток, изменение энергии равно $\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S\ dx$, а сила $F = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S = \frac{1}{2} qE_0$, где $\frac{1}{2} E_0$ — напряженность, создаваемая одной пластиной в воздушном промежутке.

Пример 3. Вычислить силу, которая втягивает пластину из диэлектрика в пространство между обкладками плоского конденсатора.

Решение. Будем считать, что размеры пластины совпадают с размерами обкладок, а толщина пластины чуть меньше, чем расстояние между ними b. Будем также считать, что конденсатор подключен к источнику, который поддерживает на нем постоянное напряжение U. Уменьшим на dx расстояние, на которое пластина вдвинута в конденсатор (рис. 34). Энергия поля в объеме $dV = ab\ dx$ изменится на $dW = \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2\right) ab\ dx$ (a — ширина пластины, $E = U/b$ — напряженность поля), заряд на пластинах изменится на $dq = \Delta\sigma\ a\ dx = (\varepsilon_0 E - \varepsilon_0 \varepsilon E) a\ dx$, работа источника $\delta A_{\text{ист}} = U\ dq$ в два раза больше изменения энергии поля. Записав закон сохранения энергии $F dx + \delta A_{\text{ист}} = dW$, получим $F = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon - 1) abE^2$.

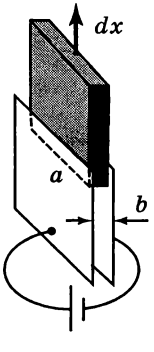


Рис. 34

Заметим, что нам удалось вычислить силу, возникающую вследствие искривления поля у краев конденсатора, хотя расчет энергии производился без учета краевых эффектов.

3.9. Постоянный ток

• **Сила тока. Плотность тока.** *Электрическим током* называется упорядоченное движение электрических зарядов. *Конвекционным током* называют движение зарядов, связанное с перемещением в пространстве заряженного тела. *Ток проводимости* в веществе осуществляется *свободными зарядами* (*носителями тока*) — электронами в металлах, электронами и дырками в полупроводниках, ионами в электролитах. За направление тока принимается направление движения положительных зарядов. Заряд, проходящий за время dt через площадку $d\vec{s} = \vec{n}ds$ внутри проводника в направлении нормали $\vec{n}$, определяется средней скоростью свободных зарядов $\langle\vec{v}\rangle$:

$$dq = q_0 n\langle\vec{v}\rangle \cdot d\vec{s}\ dt = \vec{j} \cdot \vec{s}\ dt, \qquad (40)$$

где q_0 — заряд носителей тока, n — их концентрация, а $\vec{j} = q_0 n\langle\vec{v}\rangle$ — *плотность тока*. *Силой тока* I называется заряд, проходящий через сечение проводника в единицу времени:

$$dq = I\ dt = dt \int \vec{j}\ d\vec{s}, \qquad (41)$$

где интегрирование производится по поперечному сечению. Для *линейного* ($S = \text{const}$) проводника $\vec{j} = \overrightarrow{\text{const}}$, и (41) приобретает вид: $I = jS$. Ток называется *постоянным*, если $I = \text{const}$.

Уменьшение заряда внутри замкнутой поверхности равно $dq_{\text{охв}} = -dt \oint \vec{j} \cdot d\vec{s}$. В дифференциальной форме закон сохранения заряда принимает вид: $\dfrac{d\rho}{dt} = -\text{div}\,\vec{j}$. В случае постоянного тока $\oint \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$ ($\text{div}\,\vec{j} = 0$), т. е. линии тока непрерывны и идут вдоль проводника.

- **Закон Ома в дифференциальной форме.** Для поддержания тока в веществе на свободные заряды должна действовать постоянная сила $\vec{F}$ электромагнитной природы, которую можно характеризовать напряженностью $\vec{E} = \vec{F}/q_0$. Как только эта сила исчезает, за ничтожно малое время средняя скорость свободных зарядов обращается в нуль. При не очень больших значениях E плотность тока в изотропном проводнике должна быть пропорциональна $\vec{E}$:

$$\vec{j} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}, \qquad (42)$$

где σ — *удельная проводимость* вещества, ρ — *удельное сопротивление.* Из закона сохранения заряда следует, что если $\rho = \text{const}$, то $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \rho \oint \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$ ($\operatorname{div}\vec{E} = 0$), т. е. в *однородном проводнике* линии напряженности непрерывны, а в проводе постоянного сечения они параллельны поверхности провода.

- **Закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме.** При протекании тока по проводнику работа, совершенная полем $\vec{E}$ над свободными зарядами, полностью переходит в энергию теплового движения при их соударениях с ионами. Объемная плотность тепловой мощности тока равна работе поля над зарядами в единице объема за единицу времени:

$$w_{\text{тепл}} = n\langle\vec{v}\rangle \cdot \vec{F} = q_0 n\langle\vec{v}\rangle \cdot \vec{E} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \sigma E^2 = \rho j^2. \qquad (43)$$

- **Однородный участок цепи. Сопротивление.** Если на участке цепи протекание тока обеспечивается только электростатическим (кулоновским) полем (т. е. $\rho\vec{j} = \vec{E}_{\text{кул}}$), то участок цепи называется *однородным.* В однородном ($\rho = \text{const}$) проводнике $\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \rho \oint \vec{j} \cdot d\vec{s} = 0$, и в соответствии с теоремой Гаусса (см. разд. 3.4) заряд, создающий поле, расположен только на поверхности.

В проводе постоянного сечения эквипотенциальные поверхности совпадают с поперечными сечениями провода. Сила тока, протекающего в направлении от сечения 1 к сечению 2, пропорциональна разности потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ (*закон Ома для однородного участка цепи*):

$$I \int_1^2 \rho \frac{dl}{S} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{кул}} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = IR. \qquad (44)$$

Если $I < 0$, то ток протекает от 2 к 1. Здесь $R = \int_1^2 (\rho/S) \times$ $\times\, dl$ — *сопротивление проводника*, измеряется в омах (Ом). Для однородного линейного проводника $R = \rho l/S$. Удельное сопротивление зависит от температуры; в широких пределах можно пользоваться линейной зависимостью $\rho = \rho_0(1 + \alpha t)$, где ρ_0 — удельное сопротивление при 0 °C, α — *температурный коэффициент сопротивления*. Для металлов $\alpha \approx 1/273$ (т. е. $\rho \sim T$), для полупроводников $\alpha < 0$.

- **Сторонние силы. ЭДС.** Хотя на отдельном участке цепи ток может поддерживаться электростатическими силами, полная работа этих сил в замкнутой цепи равна нулю. Значит, для компенсации тепловых потерь в цепи должны действовать *сторонние силы* неэлектростатической природы, полная работа которых отлична от нуля, т. е. должны присутствовать *источники тока* (рис. 35). Эти силы имеют электромагнитную природу: $\vec{F}_{\text{стор}} = q_0\vec{E}_{\text{стор}}$, и их работа по переносу пробного заряда q пропорциональна q:

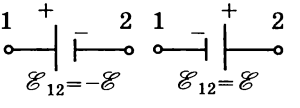


Рис. 35

$$A_q(1 \to 2) = q \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l} = q\mathscr{E}_{12} = \pm q\mathscr{E}, \qquad (45)$$

где $\mathscr{E}$ называют *электродвижущей силой источника* (ЭДС), знак «+» соответствует случаю, когда источник проходится в направлении действия сторонних сил (от отрицательной обкладки к положительной), знак «−» — противоположному случаю. Мощность сторонних сил (мощность источника) равна

$$P_{\text{стор}} = \frac{A_q(1 \to 2)}{t} = I\mathscr{E}_{12} \qquad (46)$$

(работа сторонних сил над всеми зарядами проводника за время dt равна работе по переносу заряда $I\,dt$ с одного конца проводника на другой).

- **Закон Ома для неоднородного участка цепи.** На *неоднородном участке цепи* действуют как электростатические, так и сторонние силы. Дифференциальный закон Ома (42) принимает вид

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho}(\vec{E}_{\text{кул}} + \vec{E}_{\text{стор}}), \qquad (47)$$

а закон Ома для участка цепи записывается так:

$$I\int_1^2 \rho\frac{dl}{S} = \int_1^2 (\vec{E}_{\text{кул}} + \vec{E}_{\text{стор}})\cdot d\vec{l} \Rightarrow IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathscr{E}_{12}. \qquad (48)$$

Если $I < 0$, то ток протекает от 2 к 1. Величину $U_{12} = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathscr{E}_{12}$, равную работе полной силы по переносу единичного заряда между сечениями 1 и 2, называют *напряжением* на участке цепи; для однородного участка напряжение равно разности потенциалов. Закон Ома утверждает, что на любом участке цепи $IR = U_{12}$.

- **Закон Джоуля — Ленца для участка цепи.** Тепловую мощность тока на участке цепи можно найти с помощью формулы (43):

$$P_{\text{тепл}} = \int_1^2 wS\,dl = \int_1^2 \rho j^2 S\,dl = I^2\int_1^2 \rho\frac{dl}{S} = I^2R. \qquad (49)$$

- **Закон Ома для неразветвленной цепи.** В неразветвленной замкнутой цепи $I = \text{const}$; сложив уравнения (48) для всех участков цепи, имеем:

$$I\sum R_i = \sum \mathscr{E}_{ij}. \qquad (50)$$

В случае источника с внутренним сопротивлением r, замкнутого на внешнее сопротивление R, получим: $I = \mathscr{E}/(R + r)$; разность потенциалов на клеммах источника равна $\varphi_+ - \varphi_- = IR = \mathscr{E} - Ir$, ток короткого замыкания источника ($R = 0$) равен $I_{\text{к.з.}} = \mathscr{E}/r$. Закон Ома (50) выражает закон сохранения энергии для неразветвленной цепи: мощность сторонних сил равна мощности тепловых потерь на сопротивлениях цепи.

Полезная мощность источника тока. Если источник служит для передачи энергии во внешнюю цепь, то полная (затраченная) мощность равна мощности сторонних сил: $P_{\text{полн}} = \mathscr{E}I$, потерянная мощность — тепловым потерям на внутреннем сопротивлении: $P_{\text{потер}} = I^2r$. Для полезной мощности получим: $P_{\text{полезн}} = \mathscr{E}I - I^2r = I\,\Delta\varphi$, где $\Delta\varphi$ — разность потенциалов на клеммах источника, $P_{\text{полезн}}$ максимальна при $I = \mathscr{E}/(2r)$.

Если на участок цепи подается разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ и на участке включено устройство, совершающее работу против внешних сил (мотор), то полная мощность: $P_{\text{полн}} = (\varphi_1 - \varphi_2)I$, потерянная мощность: $P_{\text{потер}} = I^2R$ (R — сопротивление обмотки мотора), полезная мощность: $P_{\text{полезн}} = (\varphi_1 - \varphi_2)I - I^2R = -\mathscr{E}_{12}I = \mathscr{E}I$. Величины $\mathscr{E}$ и I зависят от угловой скорости вращения ротора мотора; максимальная $P_{\text{полезн}}$ достигается при $I = (\varphi_1 - \varphi_2)/(2R)$.

- **Расчет разветвленной цепи. Правила Кирхгофа.** Для нахождения токов в различных участках разветвленной цепи надо произвольным образом обозначить неизвестные токи и придать им произвольные направления, после чего воспользоваться одним из следующих методов:

1. *Метод узловых потенциалов.* В качестве неизвестных принимают потенциалы узлов цепи (один из потенциалов принимают равным нулю). С помощью (48) выражают токи через потенциалы, затем для $N-1$ узла записывают закон сохранения заряда: $\sum I_i = 0$ (алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю). Найдя φ_i, из (48) находим токи.

2. *Правила Кирхгофа.* В этом методе неизвестными являются сами токи. Сначала записывают для $N-1$ узла уравнения $\sum I_i = 0$ (первое правило Кирхгофа). Затем выбирают произвольный замкнутый контур, обходят его в произвольном направлении и, суммируя (48) для каждого участка, получают уравнение $\sum I_i R_i = \sum \mathscr{E}_{ij}$ (второе правило Кирхгофа). Повторяя эту процедуру необходимое число раз, получают систему уравнений для токов.

● **Эквивалентные сопротивления и источники.** Несколько соединенных между собой сопротивлений R_i, можно заменить одним эквивалентным сопротивлением R.

1. Последовательно соединенные сопротивления: $R = \sum R_i$.

2. Параллельно соединенные сопротивления: $R^{-1} = \sum R_i^{-1}$.

3. В общем случае для вычисления эквивалентного сопротивления надо использовать методы расчета разветвленных цепей.

Несколько соединенных источников с параметрами $\mathscr{E}_i$, r_i, можно заменить одним эквивалентным источником с параметрами $\mathscr{E}$, r.

1. Последовательное соединение: $\mathscr{E} = \sum \mathscr{E}_i$, $r = \sum r_i$.

2. Параллельное соединение: $\mathscr{E} = \sum \mathscr{E}_i r_i^{-1} / \sum r_i^{-1}$, $r^{-1} = \sum r_i^{-1}$.

3. В общем случае для вычисления эквивалентных $\mathscr{E}$ и r надо использовать методы расчета разветвленных цепей.

• **Классическая электронная теория металлов.** Проводимость металлов осуществляется обобществленными валентными электронами. В классической электронной теории Друде — Лоренца газ электронов считается классическим газом, концентрация которого равна концентрации атомов металла, а температура — температуре металла. Ток проводимости рассчитывается в предположении, что электроны приобретают скорость упорядоченного движения при свободном движении и полностью теряют ее при каждом столкновении. Кроме того, предполагается, что $|\langle\vec{v}\rangle| \ll \langle v\rangle \sim kT$. Средняя скорость упорядоченного движения равна $\langle\vec{v}\rangle \sim$ $\sim a\tau/2 = e\vec{E}\tau/(2m_e)$, где среднее время между столкновениями τ выражается через среднюю длину свободного пробега и среднюю скорость теплового движения: $\tau =$ $= \lambda/\langle\vec{v}\rangle$. С учетом (40) получим:

$$\vec{j} = en\langle\vec{v}\rangle = \frac{e^2 n\lambda}{2m_e\langle v\rangle}\vec{E}, \quad \text{т. е. } \rho = \frac{2m_e\langle v\rangle}{e^2 n\lambda}$$

(при более тщательном анализе получается такой же ответ, но без двойки в числителе; однако для оценочной модели это несущественно).

Обсуждение результатов классической электронной теории.

1. Теория объясняет рост ρ при повышении температуры, но предсказывает зависимость $\rho \sim \sqrt{T}$, а наблюдается $\rho \sim T$.

2. Теория успешно объясняет *закон Видемана— Франца*: для всех металлов произведение коэффициента теплопроводности χ (см. разд. 2.9) и удельного сопротивления пропорционально T (произведение $\chi\rho$ содержит только $\langle v\rangle^2$).

3. Длина свободного пробега электронов, вычисленная из формул классической электронной теории, оказывается на несколько порядков больше межатомного расстояния, что противоречит основным представлениям теории.

4. Классическая электронная теория предсказывает электронный вклад в молярную теплоемкость $\frac{3}{2}RT$ (см. разд. 2.5). Экспериментально вклад электронов в теплоемкость оказывается ничтожно малым.

3.10. Магнитное поле. Сила Лоренца и закон Ампера

• **Магнитная индукция. Сила Лоренца.** Магнитное поле — одна из двух составляющих электромагнитного поля (см. разд. 3.2). Магнитное поле действует на движущиеся частицы, токи и магнитные моменты. Источниками магнитного поля являются движущиеся частицы, токи, магнитные моменты и переменные электрические поля. Характеристикой магнитного поля является вектор магнитной индукции $\vec{B}$. Для определения $\vec{B}$ можно использовать выражение для силы, действующей на заряженную частицу в электромагнитном поле:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \qquad (51)$$

Силу $\vec{F}_л = q\vec{v} \times \vec{B}$, действующую на частицу со стороны магнитного поля, называют *силой Лоренца*. Сила Лоренца перпендикулярна скорости частицы, т. е. работу не совершает.

Для определения магнитной индукции $\vec{B}$ с помощью формулы (51) надо:

1) измерить силу, действующую на неподвижную частицу, чтобы отделить действие электрического поля;

2) найти направление скорости $\vec{v}$, для которого при постоянной v величина магнитной силы максимальна;

3) по величине силы найти модуль магнитной индукции: $B = F_{max}/(qv)$;

4) по направлению $\vec{F}_{max}$ и $\vec{v}$ найти направление $\vec{B}$ с помощью правила буравчика. Магнитную индукцию удобно также определять по вращательному моменту, с которым магнитное поле действует на маленький виток с током. На виток с током действует только магнитное поле.

В СИ магнитная индукция измеряется в *тесла* (Тл).

Пример 1. Рассмотрим движение нерелятивистской частицы массой m с зарядом q в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$. Пусть в некоторый момент времени скорость частицы $\vec{v}$ направлена под углом α к $\vec{B}$. Сила Лоренца перпендикулярна как к $\vec{v}$ (т. е. $v = \text{const}$), так и к $\vec{B}$ (т. е. сохраняются проекции скорости $v_\parallel$ и $v_\perp$ на направление вектора индукции и на перпендикулярную к нему плоскость). В проекции на перпендикулярную плоскость частица движется по окружности, радиус которой можно найти из второго закона Ньютона: $qv_\perp B = mv^2{}_\perp/R$. Период вращения $T = 2\pi R/v_\perp = 2\pi m/qB$ не зависит от скорости. Результирующее движение происходит по спирали радиусом R с шагом $h = v_\parallel T = 2\pi m v \cos\alpha/(qB)$.

- **Закон Ампера.** Сила, действующая на элемент тока в магнитном поле, равна сумме сил Лоренца, действующих на движущиеся свободные заряды:

$$d\vec{F} = q_0[\langle\vec{v}\rangle \times \vec{B}]\, dN = nq_0[\langle\vec{v}\rangle \times \vec{B}]\, dV = \\ = \vec{j} \times \vec{B}\, dV = I\, d\vec{l} \times \vec{B}. \qquad (52)$$

При выводе *силы Ампера*, действующей на элемент объема dV с плотностью тока $\vec{j}$ и на линейный элемент $d\vec{l}$ с током I, использовалась связь тока со средней скоростью свободных зарядов (40). Для вычисления полной силы, действующей на объем с распределенным током $\vec{j}(\vec{r})$ или на протяженный участок провода с током, надо произвести интегрирование. Например, на прямой участок провода длиной $\vec{l}$ с током I в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ действует сила $I\vec{l} \times \vec{B}$. Сила, действующая в однородном поле на любой замкнутый контур с током, равна нулю: $\vec{F} = \oint I\, d\vec{l} \times \vec{B} = I(\oint d\vec{l}) \times \vec{B} = 0$.

- **Магнитный момент контура с током.** Магнитным моментом контура с током называется векторная величина $\vec{p}_m$, равная

$$\vec{p}_m = I \int \vec{n}\, ds, \qquad (53)$$

где интегрирование ведется по любой поверхности, натянутой на контур, а направление нормали определя-

ется направлением движения буравчика при вращении его по току. В случае плоского контура

$$\vec{p}_m = IS\vec{n} = I\vec{S}.$$

Магнитный момент контура, так же как и дипольный момент электрического диполя (см. разд. 3.1 и 3.3), определяет магнитное поле контура на больших расстояниях вдали от него и описывает поведение маленького витка с током в магнитном поле.

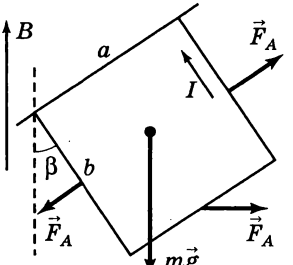


Рис. 36

Пример 2. Рассмотрим прямоугольный контур, длины сторон которого равны a и b, подвешенный за сторону a в однородном вертикальном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ (рис. 36). При включении тока силой I контур отклонится на угол β, при котором момент силы тяжести уравновешивается моментом сил Ампера $mg\frac{1}{2}b \sin\beta = IBab\cos\beta$, или $\operatorname{tg}\beta = 2IBa/(mg)$. Обратите внимание, что вращательный момент, действующий на контур со стороны магнитного поля, равен $\vec{M} = I\vec{S}\times\vec{B} = \vec{p}_m\times\vec{B}$. Аналогичное выражение было получено для вращательного момента, действующего на электрический диполь в электрическом поле (см. разд. 3.3).

3.11. Вычисление магнитной индукции

- **Закон Био — Савара — Лапласа.** Магнитная индукция, создаваемая в точке A элементом тока $I\,d\vec{l}$, равна

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}, \qquad (54)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный от элемента тока к точке A, $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная. Это выражение можно переписать для магнитной ин-

дукции элемента объемного тока $\vec{j}dV$, элемента поверхностного тока $\vec{i}\ ds$ или, разделив на число свободных частиц в элементе тока, для нерелятивистской частицы $q\vec{v}$:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}\times\vec{r}}{r^3}\,dV,\ d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{i}\times\vec{r}}{r^3}\,ds,\ d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\vec{r}}{r^3}. \quad (55)$$

(Поверхностной плотностью тока называют силу тока, приходящуюся на единицу длины отрезка, перпендикулярного направлению тока: $dI = i\ dl$.) Для вычисления магнитной индукции, создаваемой конечным объемом, поверхностью или проводом, надо произвести интегрирование (принцип суперпозиции для магнитной индукции).

Пример 1. Вычислить силу магнитного взаимодействия двух частиц с зарядами q_1 и q_2, скорости которых в некоторый момент равны $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}$ ($v \ll c$) и направлены перпендикулярно соединяющей их линии.

Решение. Магнитная индукция, создаваемая первой частицей в точке, где находится вторая частица, равна $B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 v}{r^2}$ (r — расстояние между частицами) и направлена перпендикулярно $\vec{v}$ и $\vec{r}$. Сила Лоренца в случае одноименных зарядов направлена в сторону частицы 1 и равна $F = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q_1 q_2 v^2}{r^2}$. Отношение магнитной силы к электрической равно $\mu_0\varepsilon_0 v^2 = \frac{v^2}{c^2}$.

Пример 2. Магнитная индукция, создаваемая в центре кругового контура элементом дуги с угловым размером $d\varphi$, равна

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRd\varphi}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\varphi}{R}$$

и направлена вдоль оси (в сторону движения буравчика при его вращении по току). Магнитная индукция, создаваемая в центре окружности всем круговым током, равна $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$.

Пример 3. Найти магнитную индукцию кругового тока в точке A на его оси, находящейся на расстоянии y от центра витка (рис. 37).

Решение. Вектор $\vec{B}$ направлен вдоль оси y, а вклад элемента дуги с угловым размером $d\varphi$ равен

$$dB_y = dB \sin\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IRd\varphi}{R^2+y^2}\frac{R}{\sqrt{R^2+y^2}}.$$

После интегрирования по φ получим

$$B = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+y^2)^{3/2}}.$$

На большом расстоянии от контура ($y \gg R$) магнитная индукция

$$B \approx \frac{\mu_0 IR}{2y^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I(\pi R^2)}{y^3}$$

выражается через магнитный момент $\vec{p}_m = I\vec{S}$ аналогично тому, как напряженность электрического поля выражается через электрический момент диполя (см. пример 4 из разд. 3.3, случай $\vec{r} \parallel \vec{p}$). Можно показать, что и в произвольной точке $\vec{r}$ магнитная индукция плоского маленького витка с током равна

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(\frac{\vec{p}_m \cdot \vec{r}}{r^2}\,\vec{r} - \vec{p}_m\right). \qquad (56)$$

Пример 4. Найдем магнитную индукцию, создаваемую прямым отрезком провода в точке A, положение которой относительно отрезка задается расстоянием y до прямой и углами α_1 и α_2 (рис. 38). Вклад в $\vec{B}$ элемента dx направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через отрезок и точку A, и равен $dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idx}{r^2}\sin\alpha$. Интегрировать удобно по углу α после подстановки $r = y/\sin\alpha$ и замены переменной: $x = -y\,\mathrm{ctg}\,\alpha$, $dx = y\,d\alpha/\sin^2\alpha$. В результате имеем

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi y}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2). \qquad (57)$$

Полагая $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, находим магнитную индукцию бесконечного провода с током:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}. \qquad (58)$$

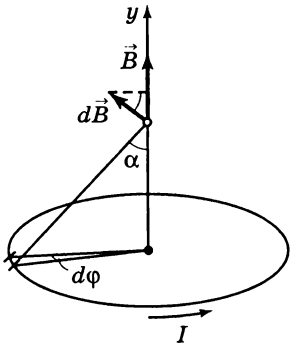


Рис. 37

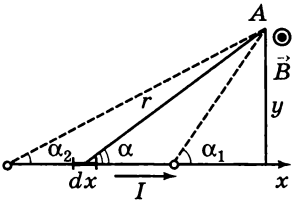


Рис. 38

Если с помощью (57) рассчитать магнитную индукцию в центре прямоугольного контура с током, то получим

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{8I\sqrt{a^2+b^2}}{ab},$$

где a и b — длины сторон контура.

3.12. Циркуляция и поток вектора магнитной индукции

• **Закон полного тока.** Из закона Био — Савара — Лапласа можно вывести утверждение, что *циркуляция магнитной индукции* вдоль любого замкнутого контура определяется алгебраической суммой токов, охватываемых этим контуром (т. е. током, проходящим через натянутую на контур поверхность):

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{охв}} = \mu_0 \int \vec{j}\cdot d\vec{s}, \qquad (59)$$

где положительное направление нормали определяется движением буравчика при его вращении в направлении обхода контура.

- **Теорема Гаусса для магнитного поля.** Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0. \qquad (60)$$

Это значит, что линии магнитной индукции всюду непрерывны, т. е. не существует *магнитных зарядов*, на которых бы начинались или оканчивались линии поля. Магнитный поток в СИ измеряется в *веберах* (Вб).

Пример 1. Поле соленоида. Соленоидом называется длинная цилиндрическая катушка из тонкого плотно намотанного провода. Соленоид характеризуют количеством витков n, намотанных на единицу длины. Идеальной моделью соленоида называют тонкую бесконечно длинную цилиндрическую поверхность с поверхностным током плотностью $i = nI$, текущим перпендикулярно образующей. Нетрудно убедиться, что магнитная индукция в идеальном соленоиде всюду направлена параллельно образующей (для этого надо рассмотреть вклад любых двух симметричных элементов тока). Вне соленоида поле отсутствует. Из закона полного тока и теоремы Гаусса следует, что внутри соленоида $\vec{B} = \overrightarrow{\text{const}}$. Чтобы найти величину B, надо применить закон полного тока к прямоугольному контуру, одна сторона которого проходит вдоль образующей внутри цилиндра, а другая — вне (рис. 39): $Bl = \mu_0 il$. Получим, что магнитная индукция внутри соленоида равна

$$B = \mu_0 i = \mu_0 nI. \qquad (61)$$

Пример 2. Поле толстого провода. Найдем магнитное поле бесконечного прямого провода радиусом R, по которому протекает ток I (рис. 40). Линии индукции имеют вид окружностей. Выбирая окружность радиусом r в качестве контура для закона полного тока (59), при $r > R$ получим $B(2\pi r) = \mu_0 I$. Аналогично при $r < R$ имеем $B(2\pi r) = \mu_0 I(\pi r^2/\pi R^2)$. Из этих равенств находим магнитную индукцию

$$B = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & \text{при } r > R, \\ \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & \text{при } r < R. \end{cases}$$

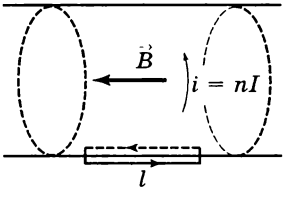


Рис. 39

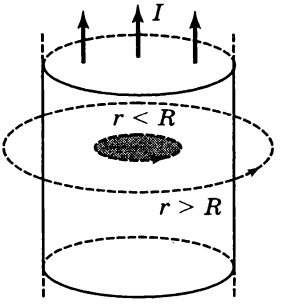


Рис. 40

Пример 3. Поле плоскости с током. Рассмотрим ток, текущий по бесконечной плоскости (x, y) в направлении оси y с постоянной плотностью i. Магнитная индукция над плоскостью при $z > 0$ направлена вдоль x, а при $z < 0$ — противоположно x (в этом можно убедиться, рассмотрев вклад двух линий тока, расположенных симметрично по отношению к данной точке). Выберем прямоугольный контур, одна сторона которого проходит над плоскостью в направлении x, а другая — симметрично ей под плоскостью (рис. 41). Из закона полного тока получим: $2Bl = \mu_0 il$, т. е. $B = \frac{1}{2}\mu_0 i$.

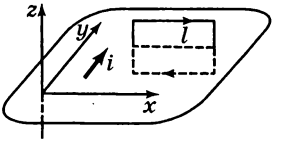


Рис. 41

- **Перемещение контура с током в магнитном поле.** При перемещении или деформации контура с постоянным током I в магнитном поле работа силы Ампера, действующей на участок контура, равна

$$\delta A = d\vec{F} \cdot d\vec{r} = I[d\vec{l} \times \vec{B}] \cdot d\vec{r} = I\vec{B} \cdot [d\vec{r} \times d\vec{l}] = I\vec{B} \cdot d\vec{s},$$

где $d\vec{r}$ — перемещение участка контура $d\vec{l}$, $d\vec{s}$ — элемент площади, заметаемой этим участком при его перемещении. Суммируя вдоль всего контура, получим,

что механическая работа магнитного поля выражается через изменение магнитного потока Ф через контур:

$$\delta A_{\text{мех}} = I\, d\Phi. \qquad (62)$$

Это значит, что контуру с током I в постоянном магнитном поле можно сопоставить *потенциальную функцию* $W_{\text{п}} = -I\Phi$, изменение которой (с обратным знаком) равно работе силы Ампера:

$$A_{\text{мех}} = -\Delta W_{\text{п}}, \quad W_{\text{п}} = -I\Phi. \qquad (63)$$

Для случаев однородного поля или маленького плоского витка формула (63) принимает вид:

$$W_{\text{п}} = -\vec{p}_m \cdot \vec{B}, \qquad (64)$$

где $\vec{p}_m$ — магнитный момент контура с током (см. разд. 3.10). Поскольку это выражение совпадает с потенциальной энергией электрического диполя (см. разд. 3.3), то такой же вид должны иметь выражения для вращательного момента, действующего на магнитный момент, и для силы, действующей на него в неоднородном поле:

$$\vec{M} = \vec{p}_m \times \vec{B}, \ \vec{F} = p_m \frac{\partial \vec{B}}{\partial n} = p_{mx} \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} + p_{my} \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} + p_{mz} \frac{\partial \vec{B}}{\partial z}, \qquad (65)$$

где вектор $\vec{n}$ параллелен вектору $\vec{p}_m$. Равновесная ориентация с минимальной энергией соответствует положению $\vec{p}_m \parallel \vec{B}$; ориентированный таким образом виток втягивается в область более сильного магнитного поля.

Уравнения Максвелла для постоянного магнитного поля. В дифференциальной форме это уравнения

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \ \operatorname{div} \vec{B} = 0,$$

а в интегральной — уравнения (59) и (60).

Векторный потенциал. Второе из уравнений Максвелла можно удовлетворить, если искать индукцию магнитного поля в виде $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$. *Векторный потенциал* $\vec{A}$ определен неоднозначно: $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \chi$, где χ — произвольное скалярное поле, порождает такое же поле $\vec{B}$, что и поле $\vec{A}$ (*калибровочное преобразование* для векторного потенциала). Это обстоятельство позволяет упростить уравнение для векторного потенциала, которое получается после подстановки $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ в первое уравнение Максвелла: $\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$. Выбором

подходящего скалярного поля χ можно добиться выполнения условия $\operatorname{div}\vec{A} = 0$. Для векторного потенциала получаем уравнение

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\vec{j}.$$

Уравнение для каждой из проекций $\vec{A}$ математически тождественно уравнению для скалярного потенциала в электростатике (см. разд. 3.4). Значит, решение этих уравнений имеет вид:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}(\vec{r}\,')dV'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}.$$

Используя это выражение, можно, например, вычислить поле маленького витка с током (см.(56)), а также доказать закон Био — Савара.

3.13. Магнитное поле в веществе

• **Намагниченность вещества.** Вещество считается намагниченным, если оно создает внутри себя и в окружающем пространстве магнитное поле в отсутствие токов проводимости. Источником магнитного поля намагниченного вещества (магнетика) являются магнитные моменты его атомов и молекул (молекулярные токи). В отсутствие внешнего магнитного поля микроскопические магнитные моменты либо отсутствуют (в *диамагнетиках*), либо ориентированы хаотически (в *парамагнетиках*), и создаваемое ими магнитное поле равно нулю (кроме случая постоянных магнитов, см. ниже *ферромагнетики*). При помещении во внешнее магнитное поле вещество намагничивается, т. е. возникает магнитный момент объема вещества. Степень намагниченности в данной точке вещества характеризуют *намагниченностью* $\vec{J}$, равной магнитному моменту в расчете на единицу объема:

$$\vec{J} = \frac{\sum\vec{p}_{mi}}{\Delta V} = n\langle\vec{p}_m\rangle, \qquad (66)$$

где n — концентрация молекул. Для построения макроскопических уравнений поля в магнетике можно уп-

рощенно считать, что все молекулы в объеме ΔV имеют одинаковый магнитный момент $\langle \vec{p}_m \rangle = \vec{J}/n = I_0 \vec{s}$ и могут быть представлены одинаковыми микроскопическими витками с током.

● **Намагниченность и макроскопические молекулярные токи.** При описании собственного магнитного поля огромное число ориентированных микроскопических витков (магнитных моментов) можно заменить распределенными по поверхности и объему макроскопическими молекулярными токами. Проще всего представить себе такую замену в случае однородно намагниченного цилиндра, когда молекулярные витки с током ориентированы вдоль его оси. Внутри цилиндра токи различных витков будут скомпенсированы, а по поверхности будет течь нескомпенсированный поверхностный ток. Магнитная индукция этого тока $\vec{B}_{соб}$ будет внутри цилиндра направлена *в ту же сторону*, что и намагниченность $\vec{J}$.

Если рассмотреть произвольный замкнутый контур, то его участок $d\vec{l}$, расположенный внутри магнетика, пронизывает те витки, центры которых попали в объем $dV = \vec{s} \cdot d\vec{l}$ (рис. 42). На этом участке вклад в охватываемый контуром молекулярный ток (пересекающий натянутую на контур поверхность) равен $I_0 n dV = n I_0 \vec{s} \cdot d\vec{l} = \vec{J} \cdot d\vec{l}$. Производя интегрирование, получим

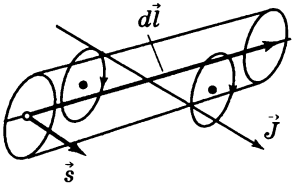


Рис. 42

$$\oint \vec{J} \cdot d\vec{l} = I_{охв}^{мол}. \quad (67)$$

В дифференциальной форме имеем: $\mathrm{rot}\,\vec{J} = \vec{j}_{мол}$. Из этих уравнений можно получить выражение для плотности тока на поверхности магнетика:

$$\vec{i}_{мол} = \vec{J} \times \vec{n}, \quad (68)$$

где $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности магнетика.

- **Напряженность магнитного поля.** Макроскопическая индукция магнитного поля в магнетике определяется как результат усреднения микроскопической $\vec{B}$, сильно меняющейся на межатомных расстояниях, по малому объему, содержащему достаточно много молекул: $\vec{B}(\vec{r}) = \langle \vec{B}_{\text{микро}} \rangle$. Индукция поля определяется как молекулярными, так и сторонними токами (т. е. немолекулярными — токами проводимости, конвекционными токами):

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I^{\text{ст}}_{\text{охв}} + I^{\text{мол}}_{\text{охв}}). \qquad (69)$$

Так как распределение молекулярных токов обычно неизвестно, удобно ввести новую величину, называемую *напряженностью магнитного поля*:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}, \qquad (70)$$

которая определяется только сторонними токами:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I^{\text{ст}}_{\text{охв}} \qquad (71)$$

(закон полного тока для напряженности). В дифференциальной форме имеем: $\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}^{\text{ст}}$. Напряженность измеряется в СИ в А/м.

- **Условия на границе раздела магнетиков.** На границе раздела двух магнетиков выполняются следующие условия для тангенциальных (касательных) и нормальных компонент:

$$B_{2n} = B_{1n}, \quad \vec{H}_1 \times \vec{n} - \vec{H}_2 \times \vec{n} = \vec{i}_{\text{ст}},$$
$$\vec{J}_1 \times \vec{n} - \vec{J}_2 \times \vec{n} = \vec{i}_{\text{мол}} \qquad (72)$$

(нормаль $\vec{n}$ проведена из первой среды во вторую, $|\vec{H} \times \vec{n}| = H_\tau$). Если стороннего тока на границе нет, то второе условие можно записать в виде $H_{1\tau} = H_{2\tau}$. Первое условие получается из теоремы Гаусса (60) для вектора $\vec{B}$, второе — из (71), третье — из (68). По граничным условиям наблюдается формальная аналогия между $\vec{H}$ и $\vec{E}$, а также между $\vec{B}$ и $\vec{D}$ (см. разд. 3.6).

• **Изотропный магнетик.** Намагниченность $\vec{J}$ в данной точке магнетика возникает под воздействием магнитного поля и определяется его индукцией $\vec{B}$. В не очень сильных полях $\vec{J}$ зависит от $\vec{B}$ линейно, а в *изотропном магнетике*, кроме того, $\vec{J} \parallel \vec{B}$. В этом случае векторы $\vec{J}$ и $\vec{H}$ пропорциональны $\vec{B}$ и друг другу, и по историческим причинам (в силу аналогии между граничными условиями для $\vec{E}$ и $\vec{H}$) *магнитная восприимчивость* определяется соотношением

$$\vec{J} = \chi\vec{H}, \quad \vec{J} = \frac{\chi}{\mu_0(1+\chi)}\vec{B}. \tag{73}$$

Из формулы (70) получим:

$$\vec{B} = \mu_0(1+\chi)\vec{H} = \mu_0\mu\vec{H}, \tag{74}$$

где μ — *магнитная проницаемость вещества.* В парамагнетиках $\chi > 0$, в диамагнетиках $\chi < 0$, в обоих случаях $|\chi| \ll 1$ (слабые магнитные свойства). В ферромагнетиках $\chi \gg 1$.

Объемная плотность молекулярного тока пропорциональна объемной плотности стороннего тока: $\vec{j}^{\text{мол}} = \chi\vec{j}^{\text{ст}}$; если объемных сторонних токов нет, то при намагничивании возникают только поверхностные молекулярные токи.

Граничные условия на границе двух изотропных магнетиков имеют вид

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad \frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2}; \; \mu_1 H_{1n} = \mu_2 H_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}.$$

Если границы однородного магнетика всюду касаются линий индукции поля $\vec{B}_0$, которое было до внесения магнетика, то всюду в магнетике $\vec{B} = \mu\vec{B}_0$.

Пример 1. Рассмотрим длинный цилиндр из парамагнетика, помещенный в однородное магнитное поле, индукция которого $\vec{B}_0$ параллельна его оси. Всюду внутри цилиндра (кроме его краев) имеем: магнитная индукция $\vec{B} = \mu\vec{B}_0$, напряженность магнитного поля $\vec{H} = \vec{H}_0 = \vec{B}_0/\mu_0$, намагниченность $\vec{J} = (\mu - 1)\,\vec{B}_0/\mu_0$.

Пример 2. Рассмотрим бесконечный цилиндрический провод круглого сечения из материала с магнитной проницаемостью $\mu > 1$, по которому течет постоянный ток плотностью $\vec{j}$. Молекулярный ток в объеме цилиндра имеет плотность $\vec{j}^{мол} = (\mu - 1)\vec{j}$. Напряженность H можно найти с помощью закона полного тока (71); она равна $H = I/(2\pi r)$ при $r > R$ и $H = Ir/(2\pi R^2)$ при $r < R$ (см. пример 2 из разд. 3.12). Магнитная индукция равна $B = \mu_0 H$ при $r > R$ и $B = \mu_0\mu H$ при $r < R$; она испытывает скачок на поверхностном молекулярном токе. Намагниченность равна $J = (\mu - 1)Ir/(2\pi R^2)$ (вне цилиндра $J = 0$). Линии магнитной индукции представляют собой концентрические окружности, а $\vec{H}$ и $\vec{J}$ параллельны $\vec{B}$. Поверхностный молекулярный ток равен $\vec{i} = \vec{J} \times \vec{n}$; он равен по модулю $i_{мол} = (\mu - 1)I/(2\pi R)$ и направлен противоположно $\vec{j}$. Полный молекулярный ток равен нулю: $j_{мол}\pi R^2 = i_{мол}2\pi R$.

Пример 3. Рассмотрим сердечник из ферромагнетика ($\mu \gg 1$) в виде тора со средним радиусом R, на который намотана обмотка с большим числом N витков с током силой I. В сердечнике сделана узкая поперечная прорезь шириной b. Магнитная индукция непрерывна на границах прорези, поэтому B имеет одинаковое значение всюду на оси сердечника. Чтобы найти B, запишем закон полного тока для напряженности: $NI = \dfrac{B}{\mu_0} b + \dfrac{B}{\mu_0\mu} 2\pi R$. Получим: $B = \dfrac{\mu_0\mu NI}{2\pi R + \mu b}$.

- **Механизмы намагничивания.** Магнитные моменты атомов и молекул создаются: а) движением электронов по замкнутым орбитам (орбитальные магнитные моменты); б) собственными магнитными моментами электронов, связанными с внутренним механическим моментом — спином (спиновые магнитные моменты). Магнитный момент каждого типа пропорционален своему механическому моменту: $\vec{p}_m = -g(e/2m)\vec{L}$, где безразмерный множитель g называют *гиромагнитным отношением*. Для орбитального момента $g = 1$. Для спинового момента $g = 2$.

В *диамагнетике* магнитные моменты всех электронов атома (молекулы) в отсутствие магнитного поля компенсируют друг друга. При включении магнитного поля на каждый магнитный момент начинает действовать вращательный момент, под действием которого

происходит вращение магнитного момента вокруг направления магнитного поля (*ларморовская прецессия*):

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{p}_m \times \vec{B} = -g\frac{e}{2m}\vec{L}\times\vec{B} = g\frac{e}{2m}\vec{B}\times\vec{L}.$$

Вектор $\vec{L}$ (и $\vec{p}_m$) совершает вращение с угловой скоростью $\vec{\omega}_л = ge\vec{B}/2m$. Такое вращение приводит к появлению у каждого электрона дополнительного магнитного момента, направленного против $\vec{B}$ (независимо от направления исходного $\vec{p}_m$).

В *парамагнетике* магнитные моменты электронов в атоме не компенсируют друг друга даже в отсутствие магнитного поля. На слабый диамагнитный механизм намагничивания накладывается более сильный ориентационный механизм: в присутствии поля ориентация магнитного момента по полю оказывается энергетически более выгодной. В слабых полях ($p_m B \ll kT$) средний магнитный момент пропорционален магнитной индукции, в сильных полях происходит насыщение, все магнитные моменты повернуты вдоль поля, и намагниченность практически не меняется. (Ориентационный механизм намагничивания парамагнетиков аналогичен ориентационному механизму поляризации полярных диэлектриков, см. разд. 3.6. В частности, остается верным вывод об обратно пропорциональной зависимости восприимчивости от температуры.)

- **Ферромагнетиками** называются вещества, в которых существует спонтанная намагниченность в макроскопических (больших по сравнению с межатомными расстояниями) областях — *доменах*. Размеры доменов ($\sim 10^{-5} \div 10^{-4}$ м) малы по сравнению с размером образца. В пределах каждого домена спиновые магнитные моменты ориентированы параллельно друг другу, что является результатом специального квантового (обменного) взаимодействия между ними. В отсутствие магнитного поля домены ориентированы таким образом, что средняя намагниченность вещества равна нулю. При включении магнитного поля размеры доменов, на-

правленных вдоль поля, увеличиваются, направленных против поля — уменьшаются. При увеличении поля начинается поворот доменов как целого в направлении поля. В сильных полях домены ориентированы вдоль поля, т. е. наступает насыщение (намагниченность достигает максимального значения $J_н$, называемого *намагниченностью насыщения*).

Зависимость $\vec{J}$ от $\vec{H}$ носит нелинейный характер (рис. 43), т. е. магнитная проницаемость, определяемая формулой $\vec{J} = (\mu - 1)\vec{H}$, зависит от H и достигает громадных значений $\mu \sim 10^5 \div 10^6$. При снятии внешнего поля в веществе наблюдается *остаточная намагниченность* $J_{ост}$. Напряженность $H_к$ магнитного поля, полностью размагничивающего ферромагнитный образец, называется *коэрцессивной силой*. Ферромагнетики, обладающие большой $H_к$, используются для изготовления постоянных магнитов. Зависимость $J(H)$ при прямом и обратном намагничивании до насыщения называется *петлей гистерезиса*.

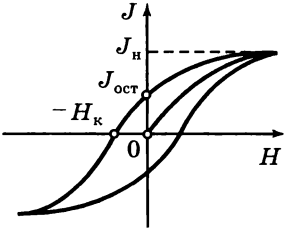


Рис. 43

При нагревании выше *температуры Кюри* вещество теряет ферромагнитные свойства (спонтанная намагниченность доменов исчезает) и становится парамагнетиком. В точке Кюри происходит фазовый переход второго рода.

- **Эффект Холла.** При помещении проводника с током в поперечное (перпендикулярное току) магнитное поле в проводнике возникает поперечное электростатическое поле, направленное перпендикулярно магнитной индукции. Это поле возникает в результате смещения упорядоченно движущихся свободных зарядов под действием силы Лоренца, которое продолжается до тех пор, пока сила Лоренца не будет уравновешена элект-

рической силой: $q_0\langle\vec{v}\rangle \times \vec{B} = -q_0\vec{E}$. Домножив на концентрацию свободных зарядов n, выразим $\vec{E}$ через плотность тока. В результате получим $\vec{E} = -\frac{1}{q_0 n}\vec{j} \times \vec{B}$. Видно, что измерение величины и направления напряженности в эффекте Холла позволяет определить как концентрацию свободных зарядов (в случае свободных зарядов одного типа), так и их знак.

3.14. Электромагнитная индукция

- **Закон электромагнитной индукции.** При перемещении или деформации контура с током в постоянном магнитном поле силы Ампера, направленные на каждом участке перпендикулярно току, согласно (62) совершают механическую работу $\delta A_\perp = I\,d\Phi$. Так как полная работа силы Лоренца над любой движущейся частицей равна нулю, то такая же по величине, но обратная по знаку работа совершается магнитным полем (тангенциальной компонентой силы Лоренца) над движущимися по контуру свободными зарядами, что приводит к возникновению в контуре дополнительной ЭДС индукции:

$$\delta A_\parallel = -I\,d\Phi = -(I\,dt)\frac{d\Phi}{dt} = \mathscr{E}\,dq, \quad \mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (75)$$

Из принципа относительности Эйнштейна следует, что ЭДС индукции должна возникать и при помещении неподвижного контура в изменяющееся со временем магнитное поле. Рассмотрим, например, сближение с постоянной скоростью замкнутого контура и постоянного магнита. В инерциальной системе отсчета (ИСО), связанной с магнитом, создаваемое им поле не зависит от времени, и возникновение ЭДС в контуре объясняется действием силы Лоренца. В другой ИСО, связанной с контуром, наблюдается такая же ЭДС, но в неподвижном проводнике она не может быть вызвана магнитными силами. Следовательно, в изменяющемся

со временем магнитном поле должно возникать электрическое поле. Так как работа этого поля при обходе контура должна быть отлична от нуля, то это поле не является электростатическим: его называют *вихревым электрическим полем*. Итак, независимо от причины, по которой меняется пронизывающий контур магнитный поток, в нем возникает ЭДС индукции, равная

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} \qquad (76)$$

(*закон Фарадея*). Средняя ЭДС индукции за конечное время Δt равна $\mathscr{E}_{\text{ср}} = -\Delta\Phi/\Delta t$. Прошедший по контуру за это время заряд равен $q = \int I\,dt = \int (\mathscr{E}/R)\,dt = -(\Delta\Phi/R)$, где R — сопротивление контура.

Правило Ленца. Направление ЭДС определяется ее знаком; напомним (см. разд. 3.12), что контур должен быть *ориентированным:* положительное направление нормали к поверхности при вычислении Φ и положительное направление обхода контура для определения знака ЭДС должны быть связаны правилом буравчика. Знак «–» в формуле (76) соответствует *правилу Ленца*, которое утверждает, что ЭДС индукции должна иметь такое направление, чтобы магнитное поле текущего в этом направлении тока создавало магнитный поток противоположного знака по сравнению с тем изменением потока, которое является причиной возникновения ЭДС. Правило Ленца тесно связано с законом сохранения энергии.

- **Движение участка контура.** При движении элемента контура $d\vec{l}$ со скоростью $\vec{v}$ работа силы Лоренца по переносу пробного заряда q вдоль $d\vec{l}$ равна $\delta A = q[\vec{v}\times\vec{B}]\cdot d\vec{l} = q\,d\mathscr{E}$. ЭДС, наводимые при произвольном движении участка и при поступательном движении в однородном поле, равны соответственно:

$$\mathscr{E} = \int [\vec{v}\times\vec{B}]\cdot d\vec{l}, \quad \mathscr{E} = [\vec{v}\times\vec{B}]\cdot\vec{l}, \qquad (77)$$

где $\vec{l}$ — вектор, соединяющий начало и конец участка. Если концы движущегося проводника разомкнуты, то между ними возникает разность потенциалов, равная ЭДС (в каждой точке проводника электростатическая сила уравновешивается силой Лоренца).

Пример 1. Рассмотрим движение перемычки сопротивлением r в вертикальном магнитном поле (рис. 44, *а*) по двум горизонтальным рельсам, расстояние между которыми равно l. Предположим, что рельсы замкнуты с одной стороны от перемычки сопротивлением R_1, а с другой — сопротивлением R_2. Чтобы найти ток через перемычку при ее движении со скоростью v, используя (77), вычислим ЭДС в перемычке: $\mathscr{E} = Bvl$. Тот факт, что ЭДС локализована в движущейся перемычке, позволяет изобразить эквивалентную схему (рис. 44, *б*) и найти силу тока: $I = \mathscr{E}/(r + R)$, где $R = R_1R_2/(R_1 + R_2)$.

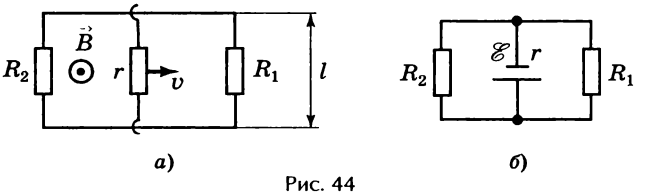


Рис. 44

● **Уравнения для вихревого электрического поля.** Уравнение для вихревого поля в интегральной форме получается при записи закона Фарадея (76) для неподвижного контура в переменном магнитном поле:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{s}. \qquad (78)$$

Так как циркуляция напряженности электростатического поля по замкнутому контуру равна нулю, то такому же уравнению удовлетворяет полное электрическое поле. Дифференциальная форма этого уравнения имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \qquad (79)$$

Уравнения (78), (79) представляют собой одно из уравнений Максвелла (в интегральной и дифференциальной формах).

• **Квазистационарное приближение.** Если токи и поля меняются не очень быстро, то можно пренебречь запаздыванием процессов по времени. Сказанное означает, что переменное магнитное поле в любой точке системы определяется (по формулам Био — Савара — Лапласа) токами в этот же момент времени; электростатическое поле определяется распределением зарядов в этот же момент времени, а вихревое электрическое поле вычисляется по изменяющемуся магнитному полю с помощью (78), (79). Именно в этом приближении рассчитываются цепи переменного тока. Для выполнения этого приближения надо, чтобы характерное время изменения токов r было велико по сравнению, во-первых, с временами локальных релаксационных процессов (например, временем установления равновесного распределения заряда на проводнике $\varepsilon_0\rho$), и, во-вторых, со временем запаздывания $\tau_з = l/c$ (l — характерный размер системы). Последнее условие означает, что мы пренебрегаем током смещения в уравнениях Максвелла (т. е. считаем, что $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}$).

Пример 2. Оценим время τ перераспределения заряда на проводнике. Будем считать, что где-то в проводнике образовался объемный заряд. Убывание заряда внутри произвольного объема подчиняется уравнению $\dfrac{dq}{dt} = -\oint j_n\,ds = -\dfrac{1}{\rho}\oint E_n\,ds =$

$= -\dfrac{q}{\varepsilon_0\rho}$, т. е. $q = q_0 \exp\left(-\dfrac{t}{\varepsilon_0\rho}\right)$, т. е. $\tau = \varepsilon_0\rho$.

• **Самоиндукция и взаимная индукция.** Рассмотрим неподвижный контур с током. Предположим, что ток I в этом контуре равномерно изменяется со временем. Создаваемая этим током магнитная индукция будет меняться со скоростью, пропорциональной dI/dt. Следовательно, возникающее в каждой точке пространства вихревое поле тоже пропорционально dI/dt. Это поле создает в контуре *ЭДС самоиндукции*:

$$\mathscr{E}_c = -L\,\frac{dI}{dt}, \tag{80}$$

где L называется *коэффициентом самоиндукции* или *индуктивностью* контура. Индуктивность измеряется в СИ в *генри* (Гн). Величину $\Phi_c = LI$ называют *собственным магнитным потоком* контура. С учетом (80) получим:

$$\mathscr{E}_c = -\frac{d\Phi_c}{dt}. \qquad (81)$$

Эта формула оказывается верной и в том случае, когда изменяется не только I, но и L.

Заметим, что определение L как коэффициента пропорциональности между потоком и током встречается с трудностями: в случае линейного провода собственный поток бесконечен, а для провода конечной толщины обычное определение потока не годится, так как неясно, как выбрать контур.

Пример 3. Индуктивность соленоида. Рассмотрим соленоид длиной l и площадью S ($l \gg \sqrt{S}$), по которому течет ток с поверхностной плотностью $i = (N/l)I$, где N — число витков, I — ток в обмотке. Магнитное поле в соленоиде однородно, его индукция (в приближении идеального соленоида) согласно формуле (61) равна $B = \mu_0\mu i$. При изменении тока циркуляция вихревого поля вычисляется так: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -S\dfrac{dB}{dt} = -\mu_0\mu S\dfrac{di}{dt}$, а ЭДС на всей длине обмотки равна $\mathscr{E}_c = -N\,\mu_0\mu S\,\dfrac{di}{dt} = \dfrac{N^2\mu_0\mu S}{l}\dfrac{dI}{dt}$. Для индуктивности и собственного потока получим:

$$L = \frac{N^2\mu_0\mu S}{l}, \quad \Phi_c = LI = NBS. \qquad (82)$$

Пример 4. Так как ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока, то наличие в контуре индуктивности препятствует слишком быстрым изменениям тока. Предположим, что последовательно соединенные сопротивление R и катушку индуктивностью L замкнули на источник с постоянной ЭДС, равной $\mathscr{E}$. Нарастание тока от нуля до $I_0 = \mathscr{E}/R$ происходит за конечное время и подчиняется уравнению $\mathscr{E} - L(dI/dt) = IR$, решение которого имеет вид $I = I_0[1 - \exp(-tR/L)]$. Характерное время нарастания тока равно $\tau = L/R$.

Если имеется два неподвижных контура, то изменение тока одного контура вызовет в другом пропорциональную dI/dt ЭДС *взаимной индукции*:

$$\mathscr{E}_{21} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt}, \quad \mathscr{E}_{12} = -L_{12}\frac{dI_2}{dt}, \tag{83}$$

где L_{12} и L_{21} называются *коэффициентами взаимной индукции*; для них оказывается верна *теорема взаимности*: $L_{12} = L_{21}$ (в неферромагнитной среде). Магнитный поток через контур 1, создаваемый током контура 2, определяется как $\Phi_{12} = L_{12}I_2$. Эта величина оказывается определенной и для двух линейных токов.

В квазистационарном приближении можно использовать для векторного потенциала такую же калибровку, как и в магнитостатике (см. раздел 3.13). Магнитный поток можно записать в виде:

$$\Phi = \int \vec{B}\,d\vec{s} = \int \operatorname{rot}\vec{A}\,d\vec{s} = \oint \vec{A}\,d\vec{l}.$$

Для Φ_{12} получаем

$$\Phi_{12} = \oint \vec{A}\,d\vec{l}_1 = \oint\oint \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I_2 d\vec{l}_2}{r_{12}}\,d\vec{l}_1,$$

откуда видно, что выражение для L_{12} симметрично по индексам 1, 2.

- **Энергия контура.** Энергией контура с током называется работа внешних сил и источников при создании тока (или работа вихревого поля при его уничтожении). Работа источника против ЭДС самоиндукции контура вычисляется так:

$$W = A = \int_0^\infty L\frac{dI}{dt}(I\,dt) = \frac{LI^2}{2}. \tag{84}$$

При последовательно полевом подходе энергия должна быть связана не с током в контуре, а с магнитным полем. Зависимость плотности энергии от магнит-

ной индукции проще всего установить в случае длинного соленоида, в котором поле однородно:

$$\frac{W}{V} = \frac{1}{Sl}\frac{\mu_0\mu N^2 S}{l}\frac{I^2}{2} = \left(\frac{\mu_0\mu N I}{l}\right)^2 \frac{1}{2\mu_0\mu} = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{BH}{2}. \quad (85)$$

В случае нелинейной зависимости $\vec{B}$ от $\vec{H}$ для плотности энергии получается выражение:

$$\frac{W}{V} = \int \vec{H}\cdot d\vec{B}.$$

Используя теорему взаимности ($L_{12} = L_{21}$), можно получить обобщение выражения (84) для нескольких контуров:

$$W = \int_0^\infty \left(L_1\frac{dI_1}{dt} + L_{12}\frac{dI_2}{dt}\right)(I_1\,dt) + \int_0^\infty \left(L_2\frac{dI_2}{dt} + L_{21}\frac{dI_1}{dt}\right)(I_2\,dt) =$$

$$= \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + \frac{L_{12}+L_{21}}{2} I_1 I_2 = \frac{I_1\Phi_1}{2} + \frac{I_2\Phi_2}{2}. \quad (86)$$

Здесь Φ_i — полный поток для i-го контура. Видно, что энергия токов включает в себя энергию каждого тока и энергию их взаимодействия. С помощью уравнений магнитного поля можно показать, что это выражение всегда преобразуется к виду:

$$W = \int \frac{B^2}{2\mu_0\mu}\,dV = \int \frac{BH}{2}\,dV. \quad (87)$$

- **Закон сохранения энергии и вычисление сил.** При медленном изотермическом изменении расположения тел и контуров с током суммарная работа внешних сил и источников тока идет на изменение энергии магнитного поля и на выделение джоулевой теплоты. При этом работа внешних сил над каждым телом равна работе сил, действующих на тело со стороны магнитного поля. Если токи поддерживаются постоянными, то надо учитывать только дополнительную работу источников против ЭДС индукции, а работа исходной ЭДС равна выделяющейся теплоте, и в законе сохранения энергии они сокращаются.

Пример 5. Рассмотрим два контура с токами I_1 и I_2, которые поддерживаются постоянными. Запишем закон сохранения энергии при медленном смещении первого контура. Согласно (86) изменяется только энергия взаимодействия токов, равная $W_{12} = L_{12}I_1I_2 = I_1\Psi_{12} = I_1\Phi_{12}$, где Φ_{12} — поток в первом контуре, создаваемый вторым током. В то же время потенциальная функция контура с током во внешнем поле равна $W_п = -I\Phi$ (см. вторую формулу (63)). Кажущееся противоречие объясняется, если учесть дополнительную работу источников против ЭДС индукции в каждом контуре. Эта работа равна $I_1 d\Phi_{12} + I_2 d\Phi_{21} = I_1 dL_{12}I_2 + I_2 dL_{21}I_1$, что в два раза больше, чем изменение энергии поля $dW_{12} = I_1 I_2 dL_{12}$.

3.15. Уравнения Максвелла

• **Ток смещения.** Для обобщения уравнений электромагнитного поля в вакууме на переменные поля необходимо изменить только одно из написанных ранее уравнений (см. разд. 3.4, 3.12); три уравнения оказываются верными в общем случае. Однако закон полного тока для магнитного поля в случае переменных полей и токов оказывается неверным. В соответствии с этим законом ток $\int \vec{j} \cdot d\vec{s}$ должен быть одинаковым для любых двух натянутых на контур поверхностей; если заряд в объеме между выбранными поверхностями меняется, то это утверждение вступает в противоречие с законом сохранения заряда. Например, при зарядке конденсатора (рис. 45) ток через одну из указанных поверхностей равен $I = dq/dt$, а через другую (проходящую между пластинами) — нулю. Чтобы снять указанное противоречие, Максвелл ввел в это уравнение *ток смещения*, плотность которого пропорциональна скорости изменения электрического поля:

$$\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \qquad (88)$$

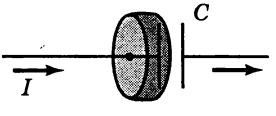


Рис. 45

В диэлектрической среде плотность тока смещения выражается так:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}. \qquad (89)$$

Первый член представляет собой плотность тока смещения в вакууме, второй — плотность реального тока, обусловленного движением связанных зарядов при изменении поляризованности. Ток смещения через поверхность равен $d\Phi_D/dt$, где Φ_D — поток вектора $\vec{D}$ через поверхность. Введение тока смещения снимает противоречие с законом сохранения заряда. Например, при зарядке плоского конденсатора ток смещения через поверхность, проходящую между пластинами, $I_{\text{см}} = S(dD/dt) = S(d\sigma/dt) = dq/dt$, равен току по подводящим проводам.

- **Система уравнений Максвелла в вакууме.** После введения тока смещения система уравнений Максвелла в дифференциальной форме принимает вид:

1) $\operatorname{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, 2) $\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$,

3) $\operatorname{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$, 4) $\operatorname{div}\vec{B} = 0$.

Система уравнений Максвелла в интегральной форме:

1) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{s}$,

2) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int \vec{j}\cdot d\vec{s} + \mu_0\varepsilon_0 \dfrac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{s}$,

3) $\oint \vec{E}\cdot d\vec{s} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int \rho\, dV$,

4) $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$.

Плотности заряда и тока связаны соотношением

$$\oint \vec{j}\cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt}\int \rho\, dV \quad \left(\operatorname{div}\vec{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}\right),$$

выражающим закон сохранения заряда (это уравнение является следствием уравнений Максвелла).

● **Решение уравнений Максвелла в виде запаздывающих потенциалов.** Первому и четвертому уравнениям Максвелла можно удовлетворить, если искать поля в виде

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

Скалярный и векторный потенциалы определены с точностью до *калибровочного преобразования*:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}\chi, \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial\chi}{\partial t}.$$

С помощью калибровочного преобразования можно упростить уравнения для потенциалов, порождаемые вторым и третьим уравнениями Максвелла. Для этого на потенциалы накладывают требование, чтобы они удовлетворяли *калибровке Лоренца*:

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

В этом случае уравнения для потенциалов удовлетворяют *уравнению Даламбера*:

$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j}, \quad \Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

В отсутствие правой части уравнение Даламбера превращается в волновое уравнение (см. гл. 4). В присутствии источников (токов и зарядов), зависящих от времени, уравнения Даламбера имеют решения в виде *запаздывающих потенциалов*:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{j}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right)dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Потенциалы в данной точке определяются значениями зарядов и токов в остальных точках пространства, но в предшествующие моменты времени, с учетом «запаздывания», т. е. времени, которое необходимо световому сигналу, чтобы доставить в данную точку информацию о значении тока и заряда в удаленной точке пространства.

- **Уравнения Максвелла в среде** имеют вид:

дифференциальная форма интегральная форма

1) $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{s}$;

2) $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, $\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int \vec{j}\cdot d\vec{s} + \frac{d}{dt}\int \vec{D}\cdot d\vec{s}$;

3) $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$, $\oint \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int \rho\, dV$;

4) $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, $\oint \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$

и служат для определения четырех величин $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$. К уравнениям Максвелла в среде надо добавить *материальные уравнения* связи между $\vec{D}, \vec{E}$ и $\vec{H}, \vec{B}$, характеризующие электрические и магнитные свойства среды. Для изотропных линейных сред эти уравнения имеют вид:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0\mu\vec{H}.$$

Из уравнений Максвелла можно получить граничные условия для $\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$ (см. разд. 3.6, 3.13).

- **Закон сохранения энергии для электромагнитного поля.** Из уравнений Максвелла можно вывести следующее уравнение для любого объема V, ограниченного поверхностью S:

$$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right) dV + \int (\vec{j}\cdot\vec{E})\, dV + \frac{1}{\mu_0}\oint [\vec{E}\times\vec{B}]\cdot d\vec{s} = 0.$$

Первый член описывает изменение энергии электромагнитного поля в рассматриваемом объеме. Видно, что в общем случае для плотности энергии электромагнитного поля оказываются верными формулы, полученные ранее для постоянного электрического и магнитного полей. Второй член представляет собой мощность работы поля над частицами в рассматриваемом объеме. Наконец, третий член описывает поток электромагнитной энергии через ограничивающую объем замкнутую поверхность. Плотность потока энергии

в данной точке пространства (*вектор Пойнтинга*) определяется векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$ в этой же точке:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\,\vec{E}\times\vec{B} = \vec{E}\times\vec{H}. \qquad (90)$$

Последнее выражение справедливо и для плотности потока электромагнитной энергии в веществе. Плотность энергии в среде имеет вид:

$$w = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}. \qquad (91)$$

Пример 1. Рассмотрим зарядку плоского конденсатора с круглыми пластинами, расположенными на расстоянии b. Скорость изменения энергии в цилиндре радиусом r (меньше размеров пластин) равна $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,\varepsilon_0\varepsilon E^2\right)(\pi r^2 b) = \pi r^2 bE\,\frac{dD}{dt}$. Напряженность магнитного поля найдем из второго уравнения Максвелла: $H(2\pi r) = \frac{dD}{dt}(\pi r^2)$ (справа стоит ток смещения). Получаем, что скорость притока энергии через боковую поверхность цилиндра $S(2\pi rb) = HE(2\pi rb) = E\pi r^2 b\,\frac{dD}{dt}$ равна скорости изменения энергии в объеме.

- **Релятивистские свойства полей.** При переходе из одной инерциальной системы отсчета (ИСО) в другую изменяются как источники электромагнитного поля (плотности заряда и тока), так и сами поля, но уравнения Максвелла сохраняют свой вид. Проще всего выглядят формулы преобразования для источников ρ и $\vec{j} = \rho\vec{v}$ (ρ — плотность движущегося заряда). Если обозначить за ρ_0 плотность заряда в ИСО, в которой $\vec{j} = \vec{v} = 0$, то с учетом сокращения продольных размеров (см. разд. 1.11) получим

$$\rho = \gamma\rho_0, \quad \vec{j} = \gamma\rho_0\vec{v}; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Сравнивая с 4-вектором энергии-импульса, видим, что $(\vec{j}, \rho c)$ образуют 4-вектор, т. е. преобразуются друг через друга так же, как $(\vec{r}, ct)$, по формулам преобразования Лоренца. Зная, как преобразуются источники поля, можно найти формулы для преобразования $\vec{E}$, $\vec{B}$. Они выглядят так:

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}, \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} + \vec{V} \times \vec{B}),$$

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}, \quad \vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{V} \times \vec{E}\right). \qquad (92)$$

Здесь $\vec{V}$ — скорость системы отсчета K' относительно системы K, преобразования записаны для компонент полей, параллельных и перпендикулярных $\vec{V}$. Инвариантами этих преобразований являются скалярные величины $\vec{E} \cdot \vec{B}$ и $E^2 - c^2B^2$:

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = \vec{E}' \cdot \vec{B}', \quad E^2 - c^2B^2 = (E')^2 - c^2(B')^2. \qquad (93)$$

При $V \ll c$ формулы преобразования полей принимают следующий упрощенный вид:

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \times \vec{B}, \quad \vec{B}' = \vec{B} - \frac{1}{c^2}\vec{V} \times \vec{E}. \qquad (94)$$

Пример 2. Магнитное поле нерелятивистской частицы. Рассмотрим частицу, которая движется относительно ИСО K с постоянной нерелятивистской скоростью $\vec{v}$. В ИСО K', связанной с движущейся частицей, имеется только электрическое поле $\vec{E}' = kq\vec{r}'/r'^3$. Для перехода в ИСО K надо записать формулы преобразования (94) с $\vec{V} = -\vec{v}$. Учитывая, что в нерелятивистском пределе длины отрезков не меняются, получим (для момента, когда частица проходит в K через начало координат):

$$\vec{E} = \vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{B} = \frac{\vec{v} \times \vec{E}'}{c^2} = \frac{\mu_0 q}{4\pi}\frac{\vec{v} \times \vec{r}'}{r^3}.$$

При выводе этих формул было использовано равенство $1/c^2 = \mu_0\varepsilon_0$.

Пример 3. Поляризация диэлектрика при движении в магнитном поле. При движении диэлектрика с нерелятивистской скоростью перпендикулярно линиям индукции магнитного поля происходит его поляризация. В ИСО, связанной

с диэлектриком, существует поперечное электрическое поле $\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B}$. Характер поляризации диэлектрика зависит от его формы.

Пример 4. Электрическое поле релятивистской частицы. Рассмотрим частицу, которая движется относительно ИСО K с постоянной релятивистской скоростью $\vec{v}$. В ИСО K', связанной с движущейся частицей, имеется только электрическое поле $\vec{E}' = kq\vec{r}'/r'^3$. Для перехода в ИСО K следует использовать формулы преобразования (92) с $\vec{V} = -\vec{v}$. Запишем ответ для момента времени, когда частица в ИСО K проходит через начало координат, для точки, лежащей в плоскости (x, y). При переходе от координат (x', y') к координатам (x, y) надо учесть, что $x' = \gamma x$, $y' = y$ (координаты точки измеряются в K одновременно с прохождением частицы через начало координат). В результате получим

$$E_x = E'_x = k\frac{q\gamma x}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{3/2}}, \quad E_y = \gamma E'_y = k\frac{q\gamma y}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{3/2}}.$$

Видно, что вектор $\vec{E}$ коллинеарен вектору $\vec{r}$. Однако на одном и том же расстоянии от заряда поле в точке, расположенной на линии его движения, меньше, чем в точке, расположенной на перпендикуляре к скорости. Магнитное поле в той же точке определяется выражением:

$$\vec{B} = \frac{\gamma}{c^2}\,\vec{v} \times \vec{E}' = \frac{1}{c^2}\,\vec{v} \times \vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\gamma q\vec{v} \times \vec{r}}{[(\gamma x)^2 + y^2]^{3/2}}.$$

Отметим, что рассмотренное электрическое поле не является потенциальным.

4. Колебания и волны

4.1. Гармонические колебания. Сложение колебаний

- **Общие определения.** Колебаниями называют такое изменение состояния системы, при котором параметры состояния меняются со временем по периодическому или почти периодическому закону. Если колебания происходят под воздействием внешнего периодического воздействия, то их называют *вынужденными*. Если колебания происходят без внешних воздействий, за счет отклонения системы от устойчивого положения равновесия, то их называют *свободными* или *собственными*. Колебания характеризуются *периодом* T и *частотой* $\nu = 1/T$ (измеряется в *герцах*: Гц).
- **Гармонические колебания.** Колебания величины x называют *гармоническими*, если она меняется со временем t по закону:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (1)$$

где A — *амплитуда* колебаний, $\varphi = (\omega t + \varphi_0)$ — *фаза* колебаний, φ_0 — *начальная фаза*, $\omega = 2\pi/T$ — *циклическая*, или *круговая*, *частота* колебаний. Первая и вторая производные величины x по времени

$$\dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi/2),$$

$$\ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) \qquad (2)$$

совершают гармонические колебания с такой же частотой, но с амплитудами ωA и $\omega^2 A$ и со сдвигом по фазе на $\pi/2$ и π соответственно.

Пример 1. Если известны начальные (при $t = 0$) значения величины x: $x(0) = x_0$ и ее производной: $\dot{x}(0) = \upsilon_0$, то можно определить амплитуду и начальную фазу колебаний. Из урав-

нений $x_0 = A\cos\varphi_0$ и $v_0 = -\omega A\sin\varphi_0$ находим $A = \sqrt{x_0^2 + (v_0/\omega)^2}$ и $\operatorname{tg}\varphi_0 = -v_0/(\omega x_0)$.

• **Уравнение гармонических колебаний.** Как видно из (2), если величина x изменяется по закону гармонических колебаний (1), то она удовлетворяет *уравнению гармонических колебаний*:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \qquad (3)$$

Верно и обратное утверждение: если *уравнение движения* физической системы, состояние которой определяется одной величиной x, удалось при некоторых условиях (обычно — при малых значениях x) привести к дифференциальному уравнению $\ddot{x} + \gamma x = 0$, где γ — положительная постоянная, то x изменяется по закону (1) с $\omega = \sqrt{\gamma}$ (параметры A и φ_0 определяются начальными условиями, см. пример 1).

Если при изменении состояния физической системы квадратичная функция

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\varkappa x^2 (\mu, \varkappa \text{ — положительные константы}) \qquad (4)$$

остается постоянной: $E = \text{const}$, то x изменяется по закону (1) при $\omega = \sqrt{\varkappa/\mu}$. Действительно, продифференцировав (4) по времени, получим уравнение $\mu\ddot{x} + \varkappa x = 0$, которое является уравнением гармонических колебаний. Обычно величина E пропорциональна энергии колебательной системы при малых x, поэтому такой подход называют *энергетическим методом* определения частоты колебаний.

• **Комплексная экспонента и векторная диаграмма.** Формула Эйлера $\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ позволяет рассматривать закон гармонических колебаний (1) как действительную часть комплексной экспоненты $x(t) = \operatorname{Re}\tilde{x}$, где

$$\tilde{x} = \tilde{A}\exp(i\omega t), \qquad (5)$$

а $\tilde{A} = A\exp(i\varphi_0)$ называется *комплексной амплитудой* колебаний. Такой подход особенно удобен при рассмотрении систем, которые описываются линейными уравнениями, так как в этом случае действительная и мнимая часть преобразуются независимо друг от друга.

Закон гармонических колебаний (1) может быть получен как проекция на ось x радиуса-вектора величиной A, который равномерно вращается против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью ω от начального углового положения φ_0 (в этом случае угол с осью x меняется по закону $\varphi = \varphi_0 + \omega t$). Такой подход называется *методом векторных диаграмм;* он особенно удобен при *сложении гармонических колебаний*, так как позволяет сложение функций заменить наглядным сложением векторов (проекция суммы векторов равна сумме проекций).

● **Сложение гармонических колебаний одного направления.** Сумма двух гармонических колебаний одинаковой частоты, амплитуды которых равны A_1 и A_2, а начальные фазы — φ_1 и φ_2, представляет собой гармоническое колебание такой же частоты, амплитуда и начальная фаза которого могут быть найдены методом векторных диаграмм (рис. 46):

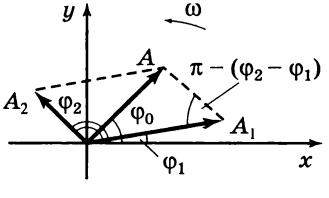


Рис. 46

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

(параллелограмм на векторной диаграмме вращается с угловой скоростью ω как одно целое). Разность фаз колебаний одинаковой частоты не меняется со временем;

такие колебания называются *когерентными*. При $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$ амплитуда максимальна: $A = A_1 + A_2$, а при $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$ — минимальна: $A = |A_1 - A_2|$.

При сложении некогерентных колебаний с различными частотами параллелограмм на векторной диаграмме деформируется со временем, модуль результирующего вектора и угловая скорость его вращения меняются, т. е. движение не является гармоническим колебанием. Однако при сложении колебаний с *близкими частотами* ($\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1, \omega_2$) на промежутке времени, малом по сравнению с *временем когерентности* $\tau_{\text{ког}} = 2\pi/\Delta\omega$, колебания можно считать приблизительно когерентными. Колебания происходят с циклической частотой $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$, а их амплитуда периодически (с периодом $2\pi/\Delta\omega$) изменяется от $A_1 + A_2$ до $|A_1 - A_2|$. Такие колебания называются *биениями*, $\omega_б = \Delta\omega$ — циклической частотой биений, а период изменения амплитуды $T_б = 2\pi/\omega_б$ — периодом биений. Если $A_1 = A_2 = A$, то

$$x(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2 + w_1}{2}t + \varphi_0\right).$$

Биения представляют собой один из примеров *модулированных* колебаний, т. е. колебаний, происходящих по закону гармонических колебаний (1), в котором один из параметров периодически изменяется со временем с периодом, значительно превышающим период основных колебаний. Различают амплитудную, частотную и фазовую модуляции.

Произвольное периодическое колебание с периодом T может быть разложено в *ряд Фурье* по гармоническим колебаниям с частотами $\omega_n = n(2\pi/T)$. Такое разложение называется *гармоническим анализом* периодического колебания, а члены разложения — первой (основной), второй, третьей и т. д. *гармониками* периодического колебания. Непериодические колебания имеют, как правило, непрерывный спектр частот и могут быть представлены в виде *интеграла Фурье* по гармо-

ническим колебаниям всех частот от нуля до бесконечности. Периодические колебания имеют линейчатый спектр частот, однако не любые колебания с линейчатым спектром являются периодическими.

- **Сложение взаимно перпендикулярных гармонических колебаний.** Если точка движется по плоскости таким образом, что ее проекции на оси x, y совершают гармонические колебания, то говорят о сложении взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. При сложении колебаний *одинаковой частоты* $x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ и $y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_1)$ траекторией точки является наклонный эллипс:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Такое движение называют *эллиптически поляризованными колебаниями*. При $\varphi_2 - \varphi_1 = (2m + 1)\pi/2$ оси эллипса совпадают с осями координат. При $\varphi_2 - \varphi_1 = m\pi$ эллипс вырождается в прямую; такое движение называется *линейно поляризованными колебаниями*. Движение точки может происходить по часовой стрелке (при $2m\pi < \varphi_2 - \varphi_1 < 2m\pi + \pi$) или против часовой стрелки; в этих случаях говорят о правой или левой эллиптической поляризации.

При сложении взаимно перпендикулярных колебаний с различными, но кратными частотами результирующее движение происходит по траекториям, называемым *фигурами Лиссажу*. По виду фигуры Лиссажу можно установить отношение частот.

4.2. Свободные незатухающие колебания

- **Свободные механические колебания.** Если смещение консервативной механической системы из положения устойчивого равновесия описывается одним пара-

метром x, то при малых x потенциальная энергия имеет вид

$$E_п(x) = \frac{1}{2}x^2\left(\frac{d^2E_п}{dx^2}\right)_{x=0} + \frac{1}{6}x^3\left(\frac{d^3E_п}{dx^3}\right)_{x=0} + \ldots \approx \frac{\varkappa x^2}{2}, \quad (6)$$

т. е. при малых отклонениях от устойчивого равновесия система совершает гармонические колебания. Потенциальную энергию колебательной системы принято отсчитывать от положения устойчивого равновесия ($E_п = 0$ при $x = 0$). *Обобщенная сила* $F_x = -dE_п/dx$ при малых x пропорциональна смещению: $F_x = -\varkappa x$. (Если x — линейная координата, то обобщенная сила — проекция силы на направление смещения; если x — угол отклонения φ, то F_x — вращательный момент M.)

Если механическая система представляет собой материальную точку или поступательно движущееся тело, то кинетическая энергия имеет вид $E_к = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$.

Уравнение движения

$$m\ddot{x} = -\varkappa x \quad (7)$$

имеет такой же вид, как для груза на пружине. Поэтому действующую на тело *возвращающую* (т. е. направленную в сторону положения равновесия) силу называют при малых x *квазиупругой* силой: $F_x = -\varkappa x$, а коэффициент $\varkappa$ — *эффективной жесткостью*. Циклическая частота и период колебаний имеют вид:

$$\omega = \sqrt{\frac{\varkappa}{m}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\varkappa}}. \quad (8)$$

Точка совершает гармонические колебания: $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$, а ее кинетическая и потенциальная энергии — гармонические колебания с частотой 2ω:

$$E_к = E\sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}E[1 - \cos(2\omega t + 2\varphi_0)],$$

$$E_п = E\cos^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}E[1 + \cos(2\omega t + 2\varphi_0)],$$

где $E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \varkappa A^2$ — полная механическая энергия, которая пропорциональна квадрату амплитуды. Средняя кинетическая энергия равна средней потенциальной энергии.

Пример 1. Потенциальная энергия жидкости в U-образной трубке (рис. 47) при смещении жидкости на x увеличивается на $\Delta mgx = (\rho Sx)gx = (2\rho gS)x^2/2$ (ρ — плотность жидкости, S — сечение трубки), а кинетическая энергия равна $m\dot{x}^2/2$. Значит, циклическая частота колебаний равна $\omega = \sqrt{2\rho gS/m}$.

Пример 2. В одной из «дорезерфордовских» моделей атома водорода положительный заряд предполагался равномерно распределенным по шару радиусом R, равным радиусу атома, а электрон располагался в центре шара. Найдем частоту колебаний электрона при смещении его из положения равновесия. Сила притяжения электрона при смещении на r равна $F_r = -ke^2r/R^2$ (см. разд. 3.4), поэтому при смещении на $r < R$ будут происходить гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{ke^2/(mR^3)}$.

Пример 3. Физический маятник. *Физическим маятником* называется твердое тело с горизонтальной неподвижной осью вращения, не проходящей через его центр масс. При отклонении маятника от положения равновесия на малый угол α (рис. 48) возникает момент силы тяжести, рав-

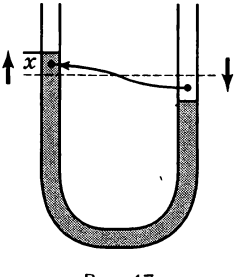


Рис. 47

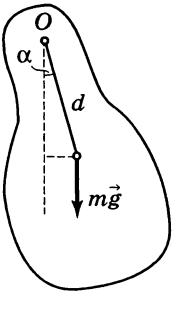


Рис. 48

ный $M = -mgd \sin\alpha$ (d — расстояние от центра масс до оси вращения), стремящийся вернуть тело в положение равновесия. Уравнение вращательного движения твердого тела имеет вид: $I\ddot{\varphi} = -mgd \sin\alpha$, где I — момент инерции тела относительно оси вращения. При малых углах отклонения $\alpha \ll 1$ это уравнение превращается в уравнение гармонических колебаний относительно угла α: $\ddot{\alpha} + (mgd/I)\alpha = 0$. Циклическая частота и период колебаний маятника равны

$$\omega = \sqrt{mgd/I}\,, \quad T = 2\pi\sqrt{I/(mgd)}\,.$$

Например, для однородного стержня длиной l, подвешенного за один из своих концов, получим $I = ml^2/3$, $d = l/2$, $T = 2\pi\sqrt{2l/(3g)}$. *Приведенной длиной* L физического маятника называется длина такого математического маятника, период которого $T = 2\pi\sqrt{L/g}$ равен периоду данного физического маятника: $L = I/(md)$. (Для однородного стержня, подвешенного за конец, $L = 2l/3$.) Точка, находящаяся на расстоянии L от оси подвеса и лежащая на прямой, проходящей через центр масс перпендикулярно оси подвеса, называется *центром качаний*. Если подвесить тело на оси, проходящей через центр качаний параллельно прежней оси, то период колебаний, а значит, и приведенная длина маятника не изменятся.

Обобщенной силой в данном примере является момент силы тяжести. Частоту можно определить и энергетическим методом, найдя зависимость потенциальной энергии от угла отклонения: $E_п = mgd(1 - \cos\alpha) \approx mgd\alpha^2/2$. Для полной энергии получим: $E = \frac{1}{2} I\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} mgd\alpha^2$, откуда находим частоту колебаний.

Гармонические колебания являются *изохронными*, т. е. их период не зависит от амплитуды. Дело в том, что в уравнении гармонических колебаний $\ddot{x} + \gamma x = 0$ коэффициент γ имеет размерность $с^{-2}$, и по соображениям размерности период не может зависеть ни от чего, кроме γ. Колебания большой амплитуды перестают быть гармоническими, а значит, и изохронными — возникает зависимость периода от амплитуды. Однако в некоторых специальных случаях даже малые колебания могут не быть изохронными. Это происходит тогда, когда в формуле (6) для разложения $E_п$ по x вторая про-

изводная обращается в нуль. Такая ситуация возникает, например, при отклонении груза, прикрепленного к середине *недеформированной* пружины с закрепленными концами, в перпендикулярном пружине направлении. Потенциальная энергия при малых x пропорциональна x^4, и уравнение движения имеет вид: $\ddot{x} + \gamma x^3 = 0$. Размерность γ в этом случае $м^{-2}с^{-2}$, и период колебаний $T \sim \gamma^{-1/2} A^{-1}$ обратно пропорционален амплитуде.

- **Колебательные системы с несколькими степенями свободы.** Если смещение системы из устойчивого положения равновесия характеризуется N независимыми параметрами $x_1, \ldots, x_N$, то при произвольном малом начальном отклонении зависимость $x_i(t)$ не будет гармоническим колебанием. Однако любое движение может быть представлено в виде суммы N специальных движений, называемых *нормальными колебательными модами*, в каждом из которых все x_i совершают гармонические колебания с некоторой циклической частотой, характеризующей данную моду. В общем случае все N частот могут быть различными.

Пример 4. Связанные маятники. Рассмотрим два одинаковых математических маятника длиной l, грузы которых соединены недеформированной пружиной жесткостью k (рис. 49). Нормальные моды данной системы позволяет угадать симметрия системы. Гармонические колебания возникают при: а) одинаковом отклонении маятников в одну сторону ($x_1 = x_2$) и б) при одинаковом отклонении маятников в разные стороны ($x_1 = -x_2$). В первом случае: $\omega_1 = \sqrt{g/l}$, во втором: $\omega_2 = \sqrt{(g/l) + (2k/m)}$. Если отклонить в сторону только первый маятник, что соответствует начальным условиям $(x_{10}, x_{20}) = (A, 0)$, то такое отклонение можно представить в виде суммы двух нормальных отклонений: $(A, 0) = \left(\frac{1}{2}A, \frac{1}{2}A\right) +$

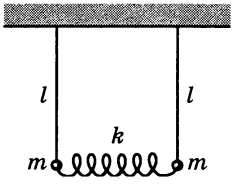


Рис. 49

$+\left(\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}A\right)$. Это значит, что движение первого маятника будет совершаться по закону: $x_1 = \frac{1}{2}A\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{2}A\cos(\omega_2 t)$, а второго маятника — по закону: $x_2 = \frac{1}{2}A\cos(\omega_1 t) - \frac{1}{2}A\cos(\omega_2 t)$. Если $k/m \ll g/l$, то частоты ω_1 и ω_2 будут близки: $\Delta\omega \approx \omega_1 \frac{k/m}{g/l}$, и при наложении двух колебаний с близкими частотами будут наблюдаться биения (см. разд. 4.1): через время $T_б/2 = \pi/\Delta\omega$ второй маятник раскачается, а первый остановится, еще через такое же время энергия снова перейдет к первому маятнику, и т. д.

• **Свободные колебания в электрическом контуре.** Колебательным контуром называется замкнутая цепь, состоящая из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L (рис. 50). Процессы в колебательном контуре, как и в цепях переменного тока, исследуются в области частот, где выполняется условие *квазистационарности* (см. разд. 3.14), т. е. $\omega \ll c/l$, где l — характерные размеры системы (в этом приближении, в частности, можно не учитывать излучение контура). Закон Ома для участка цепи, содержащего индуктивность, при выбранном правиле знаков для обхода контура и для заряда конденсатора имеет вид: $IR = (\varphi_1 - \varphi_2) + \mathscr{E}$, где R — сопротивление проводов и катушки. С учетом соотношений: $I = \dot{q}$ (верного при выбранных знаках), $q = (\varphi_2 - \varphi_1)/R$ и $\mathscr{E} = -L\dot{I}$ имеем $IR = -(q/C) - L\dot{I}$. Отсюда получим

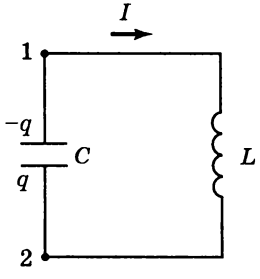


Рис. 50

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = 0. \qquad (9)$$

Если сопротивление контура пренебрежимо мало (что соответствует $R \ll \sqrt{L/C}$), то заряд на конденсаторе изменяется по гармоническому закону $q = q_m \cos(\omega t + \varphi_0)$ с циклической частотой и периодом, равными

$$\omega = 1/\sqrt{LC}\,, \quad T = 2\pi\sqrt{LC}\,. \tag{10}$$

Ток в контуре изменяется по гармоническому закону с амплитудой $I_m = \omega q_m$ с опережением по фазе на $\pi/2$. Энергия контура

$$W = \frac{LI^2}{2} + \frac{q^2}{2C}$$

переходит из электрической формы в магнитную и обратно: в момент максимальной зарядки конденсатора она равна $W = q_m^2/(2C)$, а когда заряд конденсатора равен нулю, то $W = LI_m^2/2$. Для зависимости магнитной и электрической энергии от времени верны такие же соотношения, как для кинетической и потенциальной энергий при механических колебаниях.

4.3. Затухающие и вынужденные колебания

- **Затухающие колебания.** Если в колебательной системе происходят потери энергии, то амплитуда колебаний уменьшается со временем. Если потери энергии механических колебаний определяются силой вязкого трения, которая при малых скоростях пропорциональна скорости, то уравнение движения $ma = -\varkappa x - bv$ приводится к линейному дифференциальному уравнению

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \tag{11}$$

которое называется *уравнением затухающих колебаний*. Здесь $\beta = b/(2m)$ — *коэффициент затухания*, ω_0 — циклическая частота собственных колебаний

в отсутствие затухания (при $\beta \to 0$). Решение этого уравнения удобно искать в виде экспоненты: $\tilde{x} = \tilde{A} \exp(-\gamma t)$. Подставляя в (11), получим для γ квадратное уравнение: $\gamma^2 - 2\beta\gamma + \omega_0^2 = 0$. Если $\beta < \omega_0$, то уравнение имеет два комплексно сопряженных решения: $\gamma_{1,2} = \beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, которые приводят к одинаковым ответам, поэтому можно взять любое. Применяя формулу Эйлера (см. разд. 4.1), получим:

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}, \qquad (12)$$

где постоянные A_0 и φ_0 определяются начальными условиями.

Функция (12) принимает нулевое значение через равные промежутки времени $T = 2\pi/\omega$ (рис. 51), поэтому ω и T условно называют частотой и периодом затухающих колебаний. Если $\beta \ll \omega_0$, то на каждом временном интервале $T \ll \tau \ll \beta^{-1}$ колебания можно считать гармоническими, а $A(t) = A_0 \exp(-\beta t)$ имеет смысл амплитуды колебаний на этом интервале. Поэтому $A(t)$ называют (при любом $\beta < \omega_0$) зависящей от времени *амплитудой затухающих колебаний*. За время $\tau = \beta^{-1}$ амплитуда убывает в e раз. Убывание амплитуды за период, равное $A(t)/A(t+T) = \exp(\beta T)$, называют *декрементом затухания*, а логарифм декремента

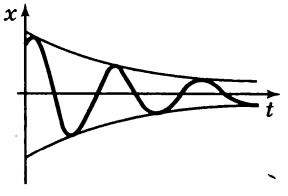


Рис. 51

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T \qquad (13)$$

называют *логарифмическим декрементом затухания*. Величина $1/\lambda$ показывает, за сколько полных колебаний амплитуда уменьшается в e раз.

Если $\beta > \omega_0$ (сильное затухание), то квадратное уравнение для γ имеет два действительных положительных корня: $\gamma_{1,2} = \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$, и общее решение

$$x(t) = A_1 \exp(-\gamma_1 t) + A_2 \exp(-\gamma_2 t) \qquad (14)$$

имеет неколебательный (ангармонический) характер (параметры A_1, A_2 определяются начальными условиями).

- **Затухающие электрические колебания.** Сравнивая уравнение колебаний в электрическом контуре (9) с уравнением затухающих колебаний (11), находим выражения для коэффициента затухания и логарифмического декремента затухания:

$$\beta = \frac{R}{2L}, \quad \lambda = \beta T = \pi \frac{R}{\sqrt{L/C}}. \qquad (15)$$

Условие слабого затухания $\lambda \ll 1$ имеет вид: $R \ll \sqrt{L/C}$ (величину $\sqrt{L/C}$ называют *волновым сопротивлением контура*).

- **Вынужденные механические колебания.** Движение системы под воздействием внешней периодической силы называют *вынужденными колебаниями*, саму внешнюю силу называют *вынуждающей силой*. Из уравнения движения $ma = -\varkappa x - bv + F_x(t)$ получим *уравнение вынужденных колебаний*:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \qquad (16)$$

где принято обозначение $f(t) = F_x(t)/m$.

Общее решение такого *неоднородного* (с отличной от нуля правой частью) уравнения может быть представлено в виде суммы частного (т. е. любого) решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения. (Общее решение должно содержать свободные параметры, позволяющие удовлетворить любым начальным условиям.) Однородное уравнение представляет собой уравнение затухающих колебаний, его

общее решение (формулы (12) и (14)) экспоненциально затухает за время $\tau \sim 1/\beta$. Затухание собственных колебаний означает окончание переходного режима установления колебаний и наступление режима *установившихся* вынужденных колебаний, характеристики которого определяются функцией $f(t)$ и параметрами β, ω_0, но не зависят от начальных условий.

Частное решение уравнения (16) будем искать в виде установившихся колебаний. Так как любая периодическая сила $F_x(t)$ может быть разложена в ряд Фурье, то естественно исследовать установившиеся вынужденные колебания под действием гармонической вынуждающей силы $f(t) = F_x(t)/m = (F_0/m)\cos\Omega t$. Будем искать их в виде гармонических колебаний такой же частоты, но со сдвигом по фазе:

$$x = A\cos(\Omega t + \varphi). \qquad (17)$$

Подставляя (17) в уравнение (16), находим

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}. \qquad (18)$$

При $\Omega = 0$ получим $\varphi = 0$ и $A = F_0/(m\omega_0^2) = F_0/\varkappa$, что соответствует статическому смещению тела вслед за медленно меняющейся силой. При $\Omega \to \infty$ имеем $A \to 0$ и $\varphi \to -\pi$. Графики $A(\Omega)$ и $\varphi(\Omega)$ приведены на рис. 52.

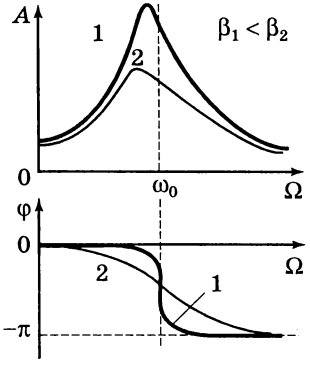


Рис. 52

- **Резонанс.** Максимальное значение амплитуды установившихся колебаний достигается при *резонансной частоте* $\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$

и равно $A_{max} = A(\Omega_p) = F_0/(2m\beta\omega)$, где $\omega = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$ — циклическая частота затухающих колебаний. При $\beta \ll \omega_0$ зависимость $A(\Omega)$ содержит резкий и узкий максимум при резонансной частоте, которая в этом пределе близка к собственной частоте колебаний системы. Это явление называется *резонансом*, а кривые зависимости $A(\Omega)$ — *резонансными кривыми*. Характеристики максимумов (при $\beta \ll \omega_0$): отношение A_{max} к статическому отклонению $A(0)$ равно $\omega/(2\beta) = \pi/\lambda$ (λ — логарифмический декремент затухания); величину $Q = \pi/\lambda$ называют *добротностью* колебательной системы. Ширина максимума на уровне $A_{max}/\sqrt{2}$ равна коэффициенту затухания: $\Delta\Omega \approx \beta$.

Амплитуда установившихся колебаний скорости достигает максимального значения $F_0/(2m\beta)$ при $\Omega = \omega_0$. При резонансе колебания скорости происходят в фазе с колебаниями возмущающей силы.

Рассмотрим процесс установления колебаний при частоте вынуждающей силы, равной резонансной частоте (предполагается, что $\beta \ll \omega_0$). Если в начальный момент смещение и скорость точки равнялись нулю, то в рассматриваемом пределе начальным условиям удовлетворяет решение:

$$x \approx A_{max} \sin \omega t + A_{max} e^{-\beta t} \sin \omega t = A_{max} (1 - e^{-\beta t}) \sin \omega t.$$

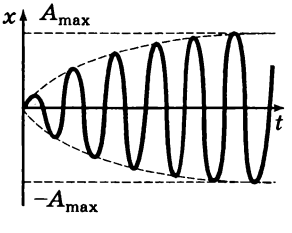


Рис. 53

Полученная зависимость изображена на рис. 53. При $t \ll 1/\beta$ амплитуда растет пропорционально времени: $A(t) \approx A_{max}\, \beta t = F_0 t/(2m\omega)$; затухание на этом этапе влияния не оказывает. Отметим, что время установления колебаний велико по сравнению с периодом: $1/\beta \gg 2\pi/\omega$. Если частота Ω близка к ω, но отличается от нее, то движение на на-

чальном этапе $t \ll 1/\beta$ представляет собой сумму колебаний с близкими частотами. Если выполнено условие $\omega \gg |\Omega - \omega| \gg 1/\beta$, то в процессе установления колебаний происходят явно выраженные биения (амплитуда колебаний возрастает почти до $2A_{max}$ и уменьшается почти до нуля с периодом $T_б = 2\pi/|\Omega - \omega|$).

- **Резонанс при произвольном периодическом воздействии.** Если период внешнего воздействия $F_x(t)$ кратен периоду собственных колебаний системы $T = 2\pi/\omega$, то в разложении $F_x(t)$ в ряд Фурье может присутствовать гармоника с частотой ω. Если добротность колебательной системы велика, то под действием этой гармоники могут возникнуть гармонические колебания заметной амплитуды. Например, для раскачивания качелей можно подталкивать их на каждом размахе (тогда резонансную частоту будет иметь первая гармоника), можно — через раз (будет работать вторая гармоника), и т. д.

- **Вынужденные электрические колебания.** Если в колебательный контур (см. разд. 4.2) включить переменную ЭДС $\mathscr{E}(t)$, то вынужденные колебания будут описываться таким же дифференциальным уравнением, как и для механической системы:

$$\ddot{q} + 2\beta\dot{q} + \omega_0^2 q = \mathscr{E}(t)/L. \qquad (19)$$

Здесь q — заряд на конденсаторе, $\beta = R/(2L)$ — коэффициент затухания, $\omega_0^2 = 1/\sqrt{LC}$ — циклическая частота собственных колебаний контура. Рассмотрим установившиеся колебания под действием гармонического воздействия $\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0 \cos \Omega t$. Колебания заряда происходят по закону $q(t) = q_0 \cos(\Omega t + \varphi)$, где для амплитуды q_0 и сдвига по фазе φ верны выражения (18). Однако в электрической цепи интерес представляют не колебания заряда, а колебания тока $I = \dot{q}$, которые происходят по закону $I = I_0 \cos(\Omega t - \varphi_1)$ с амплитудой и сдвигом по фазе, равными

$$I_0 = \mathscr{E}_0 \left[R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1}{R} \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right). \qquad (20)$$

Максимум амплитуды колебаний тока (резонанс) достигается при значении $\Omega_p = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ и равен $I_0(\Omega_p) = \mathscr{E}_0/R$. При резонансе колебания тока происходят в фазе с колебаниями ЭДС.

Колебания напряжения на сопротивлении, конденсаторе и катушке индуктивности описываются следующими формулами:

$$U_C = \frac{q}{C} = I_0 \frac{1}{\Omega C} \cos\left(\Omega t - \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U_L = L\frac{dI}{dt} = I_0(\Omega L) \cos\left(\Omega t - \varphi_1 + \frac{\pi}{2}\right).$$

Коэффициенты пропорциональности между амплитудами тока и напряжения называют: $x_C = 1/(\Omega C)$ — *емкостным сопротивлением*, $x_L = \Omega L$ — *индуктивным сопротивлением*. Величину $x = x_L - x_C$ называют *реактивным сопротивлением* цепи, сопротивление R — *активным сопротивлением* (в том смысле, что только на нем рассеивается энергия), величину $z = \sqrt{R^2 + x^2}$ — *полным сопротивлением*. Формулу (20) можно переписать в виде: $I_0 = \mathscr{E}_0/z$, $\operatorname{tg} \varphi_1 = x/R$. Все эти соотношения становятся очень наглядными при использовании векторных диаграмм (рис. 54). При резонансе $x = 0$, т. е. колебания напряжений на емкости и на индуктив-

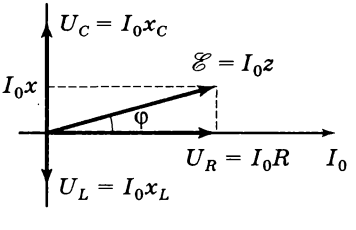


Рис. 54

ности компенсируют друг друга и сопротивление цепи превращается в активное сопротивление R.

• **Мощность на участке цепи.** *Действующим*, или *эффективным*, *значением* переменного тока (напряжения, ЭДС) называется такое значение постоянного тока, при котором на активном сопротивлении выделяется за период такое же количество теплоты, как при переменном токе (т. е. среднеквадратичное за период значение):

$$\int_0^T I^2 R\, dt = I_д^2 RT.$$

Для синусоидального тока $I_д = I_0/\sqrt{2}$, $U_д = U_0/\sqrt{2}$. Если сдвиг фазы между током и напряжением равен φ, то средняя за период мощность равна

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T U_0 \cos(\Omega t)\, I_0 \cos(\Omega t - \varphi)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos\varphi = I_д U_д \cos\varphi.$$

Для реактивного сопротивления средняя мощность равна нулю.

4.4. Упругие волны

• **Основные определения.** Если непрерывная среда обладает упругими свойствами, то движение точек в одном месте среды (в *источнике*) приводит к распространению этого движения с определенной скоростью в виде упругой волны. Волновое движение среды описывают функцией $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$, задающей смещение *частицы среды* от равновесного положения $\vec{r}$ в момент времени t. (Частицей среды называют достаточно маленький *макроскопический*, т. е. содержащий боль-

шое число атомов и молекул, элемент среды.) Упругая волна может распространяться в трехмерной среде, двухмерной среде (упругая мембрана) и одномерной среде (упругий стержень, натянутая жесткая нить, столб воздуха). Простейший вид волны — *плоская волна*, в которой функция $\vec{\xi} = \vec{\xi}(x, t)$ меняется только в одном направлении и зависит от координаты x. Если при этом вектор $\vec{\xi}$ перпендикулярен направлению распространения волны, то волна называется *поперечной*, а если параллелен — *продольной*.

Среда называется *однородной*, если все ее точки эквивалентны, *изотропной*, если в ней равноправны все направления, *упругой*, если возникающие силы зависят только от смещения (деформации), *линейной*, если силы пропорциональны деформациям. В абсолютно упругой среде механическая энергия волны не рассеивается (не превращается во внутреннюю). Если среда обладает только объемной упругостью, то в ней могут распространяться только продольные волны (жидкость, газ), если она обладает также упругостью формы, то возможны и поперечные (сдвиговые) волны. В линейной среде распространение волн описывается линейными дифференциальными уравнениями, и осуществляется *принцип суперпозиции*: если два независимых источника вызывают две разных волны $\vec{\xi}_1(\vec{r}, t)$ и $\vec{\xi}_2(\vec{r}, t)$, то совместное действие источников вызовет волну $\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \vec{\xi}_1(\vec{r}, t) + \vec{\xi}_2(\vec{r}, t)$. Такое же утверждение верно и для одного источника, движение которого можно разложить на два движения. Поскольку любую функцию времени можно представить в виде интеграла Фурье по гармоническим функциям, то волновое движение линейной среды можно разложить на *гармонические волны*. Через произвольную точку гармонической волны можно провести единственную поверхность постоянной фазы, которая называется *волновой поверхностью*, или *фронтом волны*.

• **Уравнение плоской гармонической волны.** Если в источнике смещение происходит по закону $\xi(0, t) = \xi_m \cos \omega t$, то в точках с координатой x смещение происходит по такому же закону, но с запаздыванием на x/v, где v — скорость распространения волны:

$$\xi(x, t) = \xi_m \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)\right] = \xi_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) =$$

$$= \xi_m \cos(\omega t - kx). \quad (21)$$

Здесь $\lambda = 2\pi v/\omega = vT$ — *длина волны*, $k = \omega/v = 2\pi/\lambda$ — *волновое число*. Длина волны представляет собой пространственный период профиля гармонической волны; точки, отстоящие на длину волны, совершают синхронные колебания (разность фаз $\Delta\varphi = 2\pi$), разность фаз между произвольными точками $\Delta\varphi = 2\pi(x_2 - x_1)/\lambda$. В уравнении (21) предполагается, что потери энергии на расстоянии x пренебрежимо малы; небольшое рассеивание энергии можно учесть эмпирически, введя в (21) множитель $\exp(-\gamma x)$, где γ — *коэффициент затухания волны*. Если ввести *волновой вектор* $\vec{k}$, направленный перпендикулярно фронту волны в сторону ее распространения, то (21) принимает вид, инвариантный по отношению к выбору системы координат:

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi_m \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}),$$

$$\tilde{\xi}(\vec{r}, t) = \tilde{\xi}_m e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}. \quad (22)$$

Последняя форма записи уравнения бегущей волны использует формулу Эйлера; физический смысл имеет только действительная часть $\mathrm{Re}\,\tilde{\xi}_m$. Если скорость волны не зависит от частоты (отсутствует дисперсия), то плоское волновое возмущение любой формы распространяется без искажения формы.

• **Сферические и цилиндрические расходящиеся волны.** Если волна распространяется от точечного (сферического) или линейного (цилиндрического) источни-

ка изотропно по всем направлениям, то волновые поверхности будут иметь соответственно форму сфер или круговых цилиндров. В этих случаях уравнения расходящихся волн в отсутствие потерь энергии имеют следующий вид:

$$\xi(r, t) = \frac{\xi_0}{r} \cos(\omega t - kr) \quad \text{(сферическая волна)},$$

$$\xi(R, t) = \frac{\xi_0}{\sqrt{R}} \cos(\omega t - kR) \quad \text{(цилиндрическая волна)},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. Убывание амплитуды происходит вследствие возрастания площади волновой поверхности; закон сохранения энергии требует, чтобы поток энергии оставался постоянным (напомним, что энергия колебаний пропорциональна квадрату амплитуды; также см. ниже).

- **Волновое уравнение.** Непосредственной подстановкой можно убедиться, что смещение гармонической волны $\xi(\vec{r}, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \text{или} \quad \Delta\xi = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \qquad (23)$$

которое называется *волновым уравнением*. Если скорость гармонической волны не зависит от частоты (зависимость ω от k является линейной, т. е. отсутствует дисперсия), то такому же уравнению удовлетворяет любая суперпозиция плоских волн. Верно также и обратное утверждение: если уравнение движения частицы среды удалось привести к (23), то волновые возмущения данной среды распространяются со скоростью v.

В одномерном случае общее решение уравнения (23) имеет вид:

$$\xi = f_1(x - vt) + f_2(x + vt), \qquad (24)$$

где f_1 и f_2 — произвольные (дифференцируемые) функции. Первое слагаемое описывает распространение плоского сигнала $f_1(x)$ со скоростью v без изменения

формы в направлении положительных x, а второе слагаемое — распространение сигнала $f_2(x)$ со скоростью v в направлении отрицательных x.

Пример 1. Упругий стержень. Силы, возникающие при продольных упругих деформациях стержня, подчиняются закону Гука: $\sigma = E\varepsilon$, где $\sigma = F/S$ — *напряжение* в данной точке стержня (среды), ε — (относительная) деформация $\Delta l/l$, E — модуль Юнга. Деформация в точке с координатой x выражается через частную производную: $\varepsilon = \dfrac{\xi(x+dx)-\xi(x)}{dx} \approx \dfrac{\partial\xi}{\partial z}$. Сила, действующая на частицу среды размером Δx и массой $\Delta m = \rho\,\Delta x S$, равна $\sigma(x+\Delta x) - \sigma(x)$. Уравнение движения частицы среды имеет вид:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{E}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Значит, скорость распространения волн в упругом стержне равна $v = \sqrt{E/\rho}$. С такой же скоростью распространяется продольная волна в упругой среде.

Пример 2. Натянутая струна. По струне, сила натяжения которой равна T, может распространяться поперечная волна. Пусть профиль струны в данный момент задается функцией $\xi(x, t)$. Получим уравнение движения частицы среды размером Δx в предположении «плавной» волны: $d\xi/dx \ll 1$. Вертикальная проекция силы натяжения равна $F_\perp(x) = T\sin\alpha \approx T(d\xi/dx)$ (α — угол наклона струны); вертикальная сила, действующая на частицу среды размером Δx и массой $\Delta m = \rho_1\,\Delta x\,S$, равна $F_\perp(x+\Delta x) - F_\perp(x)$ (ρ_1 — линейная плотность струны). Уравнение движения частицы среды имеет вид:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_1}{T}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}.$$

Значит, скорость распространения волн в струне равна $v = \sqrt{T/\rho_1}$.

Пример 3. Воздушный столб в цилиндре. Объемная упругость газа (или любой термодинамически простой среды) характеризуется объемным модулем упругости $K = -V(dp/dV) = \rho(dp/d\rho)$. Значение K зависит от условий, при которых происходит объемная деформация газа. Для звуковых колебаний ($\nu > 16$ Гц) можно пренебречь теплообменом между разными частицами среды и считать K адиабатическим модулем упру-

гости: $K_{ад} = -V(dp/dV)_{ад}$. Изменение давления в данной точке цилиндра равно (при малых деформациях) $\Delta p(x) = -K(dV/V) = K(d\xi/dx)$; сила, действующая на частицу воздушной среды размером Δx и массой $\Delta m = \rho\,\Delta x\,S$, вычисляется по формуле $\Delta F = [\Delta p(x) - \Delta p(x + \Delta x)]S$. Уравнение движения частицы среды имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{K}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}.$$

Значит, скорость распространения волн в воздушном цилиндре равна $v = \sqrt{K/\rho} = \sqrt{\partial p/\partial \rho}$. (Эти выражения верны для любой термодинамически простой среды: для реального газа, для жидкости.) Для звуковых волн в идеальном газе получим: $K = \gamma p$, $v = \sqrt{\gamma p/\rho} = \sqrt{\gamma RT/\mu}$, где γ — показатель адиабаты (см. разд. 2.2).

● **Объемная плотность энергии. Плотность потока энергии.** Плотности кинетической и потенциальной энергии в данной точке плоской упругой продольной волны равны:

$$w_к = \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2, \quad w_п = \frac{E}{2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2.$$

Для бегущей волны произвольной формы $\xi = f(x \pm vt)$ выполняется соотношение $(d\xi/dt)^2 = v^2(d\xi/dx)^2$. Учитывая, что для упругой продольной волны $v^2 = E/\rho$, получим, что плотности кинетической и потенциальной энергии в каждой точке бегущей волны равны друг другу. Это утверждение верно для бегущей волны любой природы. В случае гармонической плоской волны (21) объемная энергия волны и ее среднее по времени значение имеют вид:

$$w = w_к + w_п = \rho\omega^2\xi_m^2\sin^2(\omega t - kx), \quad \langle w \rangle = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_m^2.$$

Плотность потока энергии (*вектор Умова*) в данной точке бегущей волны равна

$$\vec{U} = w\vec{u}, \tag{25}$$

где $\vec{u}$ — скорость переноса энергии. Для бездисперсионной среды $\vec{u} = \vec{v}$, где $\vec{v}$ — скорость распространения

волны, входящая в волновое уравнение (24). Для гармонической бегущей волны (21) $u = v$, где v — фазовая скорость волны: $v = \omega/k$. Энергия, переносимая бегущей волной через площадку $d\vec{s}$ за единицу времени (поток энергии), равна $d\Phi = \vec{U} \cdot d\vec{s}$. Модуль среднего по времени значения модуля вектора Умова (его иногда называют *интенсивностью волны)* для гармонической плоской волны равен $I = |\langle\vec{U}\rangle| = v\langle w\rangle = \frac{1}{2}\rho v\omega^2\xi_m^2$.

В случае произвольной (в том числе стоячей) продольной упругой волны можно использовать выражение для $\vec{U}$ через мощность упругих сил (на единицу площади):

$$\vec{U} = -\sigma\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t},$$

где $\sigma = E\ d\xi/dx$ — напряжение в данной точке среды (см. пример 1). Для поперечной волны в струне (пример 2) поток энергии имеет аналогичный вид:

$$P = T_{\perp}\frac{\partial\xi}{\partial t} = -T\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial t}.$$

• **Дисперсия. Групповая скорость.** Зависимость скорости гармонической волны от частоты или длины волны называется *дисперсией*, а среда, в которой наблюдается это явление, называется *диспергирующей*. В диспергирующей среде несинусоидальный бегущий импульс меняет свою форму в процессе движения, поскольку гармонические волны, входящие в его разложение Фурье, перемещаются с разной скоростью. Скорость переноса энергии, входящая в выражение (25) для вектора Умова, определяется в этом случае как скорость движения центра импульса (или как скорость точки, в которой деформация максимальна) и называется *групповой скоростью* волнового пакета (в отличие от *фазовой скорости* синусоидальной волны $v = \omega/k$). Конечный импульс размером Δx называют *волновым пакетом* по той причине, что в его разложение в интеграл Фурье по гармоническим волнам входит конечная

группа волн, спектральная ширина которой определяется соотношением: $\Delta x \cdot \Delta k \sim 1$. Групповая скорость такого импульса равна

$$u_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dk} = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}, \qquad (26)$$

где $v = \omega/k$ — фазовая скорость волны. Понятием групповой скорости волнового пакета можно пользоваться только в том случае, если его спектральная ширина столь мала, что зависимость $\omega(k)$ можно считать линейной.

Для иллюстрации рассмотрим волну, являющуюся суперпозицией всего двух бегущих волн близких частот и одинаковой амплитуды:

$$\xi = \xi_m \cos[(\omega + \Delta\omega)t - (k + \Delta k)x] + \xi_m \cos[(\omega - \Delta\omega)t - (k - \Delta k)x] = \\ = 2\xi_m \cos(\Delta\omega t - \Delta k x)\cos(\omega t - kx).$$

Видно, что огибающая волн имеет пространственный период $\Delta x = 2\pi/\Delta k$ и перемещается со скоростью $u = \Delta\omega/\Delta k$.

- **Интерференция волн.** Две волны называются *когерентными*, если в любой точке пространства они создают когерентные колебания, разность фаз которых не меняется со временем (см. разд. 4.1). Источники когерентных волн называются *когерентными источниками*. При сложении некогерентных волн средняя по времени энергия результирующего колебания равна сумме их средних энергий. При сложении когерентных волн, колебания частиц в которых происходят в одном или близких направлениях, может наблюдаться явление *интерференции*, т. е. устойчивое во времени ослабление колебаний в одних точках пространства и усиление — в других. Если точка находится на расстоянии r_1 от одного из когерентных источников и на расстоянии r_2 — от другого, то разность фаз между колебаниями в этой точке равна

$$\Delta\varphi = (\varphi_{10} - kr_1) - (\varphi_{20} - kr_2) = \\ = 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda} - (\varphi_{20} - \varphi_{10}) = 2\pi\frac{\Delta}{\lambda} - \Delta\varphi_0.$$

Здесь $\Delta\varphi_0$ — разность фаз между колебаниями источников, $\Delta = (r_2 - r_1)$ — *разность хода волн*. Условие максимума результирующих колебаний: $\Delta\varphi = \pm 2\pi m$, условие минимума — $\Delta\varphi = \pm 2\pi(m - \frac{1}{2})$, где m — порядок интерференционного максимума (минимума). В случае синфазных источников ($\Delta\varphi_0 = 0$) эти условия принимают особенно простой вид:

$$\Delta = \pm m\lambda \text{ (максимум)}, \quad \Delta = \pm(m - \frac{1}{2})\lambda \text{ (минимум)}.$$

Пример 4. Рассмотрим два линейных когерентных источника цилиндрических волн, которые находятся на расстоянии $\lambda/2$ друг от друга. В точках, расположенных вдали от источников, разность хода волн определяется только направлением излучения и равна $\Delta = \frac{1}{2}\lambda\cos\theta$ (рис. 55).

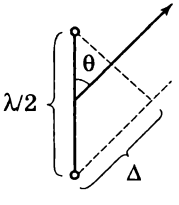


Рис. 55

В случае синфазных источников излучение ослаблено в направлении $\theta = 0$ и усилено в направлении $\theta = \pi/2$, а в случае источников, совершающих колебания в противофазе ($\varphi_0 = \pi$), — наоборот.

• **Стоячие волны. Собственные колебания.** Важным примером интерференции является *стоячая волна*, возникающая при сложении двух одинаковых плоских бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу:

$$\xi = \xi_m \cos(\omega t - kx) + \xi_m \cos(\omega t + kx) = \\ = 2\xi_m \cos kx \cos \omega t. \quad (27)$$

Амплитуда колебаний точек волны $A(x) = 2\xi_m \cos kx$ периодически меняется от нуля (в *узлах* волны) до $2A$ (в *пучностях* волны). Расстояние между соседними узлами равно $\lambda/2$. Колебания точек между двумя узлами происходят в фазе, но по разные стороны узла — в противофазе. В узлах равна нулю амплитуда колебаний скорости, но максимальное значение имеет амплитуда колебаний деформации $d\xi/dx$. В пучностях, наоборот,

отсутствуют деформации, но с максимальной амплитудой происходят колебания скорости. Средняя по времени энергия имеет одинаковое значение во всех точках стоячей волны. Вектор Умова равен нулю как в узлах, так и в пучностях, а в промежуточных точках периодически меняет свое направление.

Если конец стержня, совершающего колебательное движение, жестко закреплен, то смещение точек конца стержня равно нулю; если конец стержня свободен, то равна нулю деформация. В первом случае граничное условие имеет вид $\xi|_{x=0} = 0$, а во втором — $d\xi/dx|_{x=0} = 0$, где значение $x = 0$ соответствует концу стержня. (Такие же условия возникают для колебаний воздуха в цилиндрической трубке в случае закрытого или открытого конца трубки. Для поперечных колебаний натянутой струны из примера 2 возможен только первый вариант, когда конец струны закреплен.) Если все точки конечного стержня совершают гармонические колебания с одной частотой, то такое движение называют *собственными колебаниями* стержня. Если сделать мысленный разрез бесконечно длинного стержня в том месте, где находится узел стоячей волны, то будет удовлетворяться граничное условие для закрепленного конца, а если в том месте, где пучность, — то для свободного. Значит, свободные колебания стержня длиной l в случае двух свободных или двух закрепленных концов должны удовлетворять условию $l = \frac{1}{2} m\lambda$, или $\omega_m = \pi m v/l$ (спектр собственных колебаний, $m = 1, 2, \ldots$), а в случае одного закрепленного конца — условию $l = \frac{1}{2}\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda$, или $\omega_m = \pi\left(m - \frac{1}{2}\right) v/l$. Собственное колебание с наинизшей частотой называется *основным колебанием*, все остальные собственные колебания — *обертонами* или *гармониками*.

• **Отражение бегущей волны.** Рассмотрим отражение бегущего импульса от конца стержня. Если конец стержня закреплен, то граничному условию $\xi|_{x=0} = 0$ и начальным условиям (один набегающий импульс) удовлетворяет суперпозиция набегающего импульса и точно такого же по форме бегущего ему навстречу импульса, в котором смещения точек имеют противоположное направление (рис. 56, *а*). Если же конец стержня свободен, то граничному условию $d\xi/dx|_{x=0} = 0$ удовлетворяет бегущий навстречу импульс смещений такого же знака (рис. 56, *б*). В случае бегущей волны отражение от свободного конца происходит без изменения фазы, при этом образуется стоячая волна с пучностью на конце стержня. Отражение от закрепленного конца происходит с изменением фазы на π, при этом образуется стоячая волна с узлом на конце стержня.

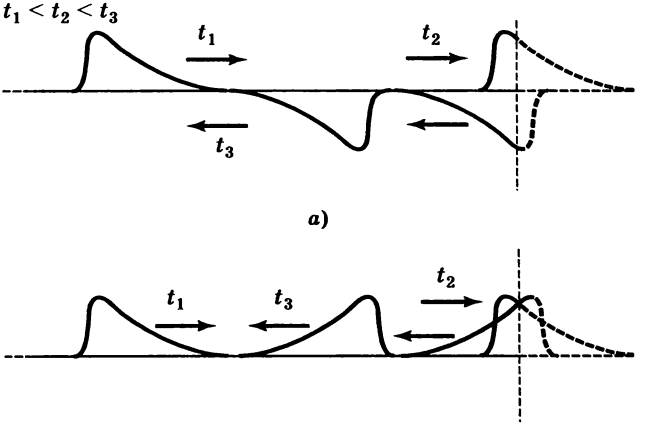


Рис. 56

• **Эффект Доплера в акустике.** При движении источника и (или) приемника волн, если расстояние между ними изменяется, то регистрируемая частота отличается от излучаемой. Направим ось x от приемника к источнику. Если источник излучает звук с частотой ν_0 и движется вдоль оси x со скоростью $v_x^{\text{и}}$ (рис. 57), то расстояние между соседними максимумами волны, распространяющейся вдоль x со скоростью v в направлении приемника, будет равно $\lambda = vT_0 + v_x^{\text{и}}T_0$, а ее частота равна v/λ:

$$\nu = \nu_0 \frac{v}{v + v_x^{\text{и}}}. \qquad (28)$$

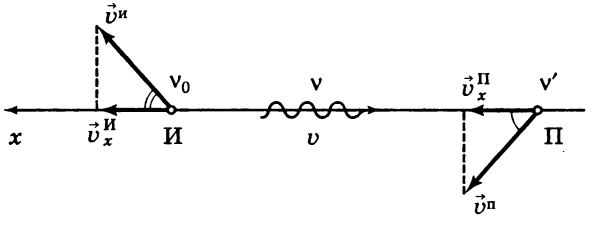


Рис. 57

Если приемник неподвижен, то он зарегистрирует именно эту частоту. Если приемник движется со скоростью $v_x^{\text{п}}$, то интервал времени между приходом соседних максимумов равен $T' = \lambda/(v + v_x^{\text{п}})$, а частота принимаемого сигнала равна $1/T'$:

$$\nu' = \nu \frac{v + v_x^{\text{п}}}{v} = \nu_0 \frac{v + v_x^{\text{п}}}{v + v_x^{\text{и}}}. \qquad (29)$$

Эффект Доплера наблюдается в том случае, когда изменяется расстояние между источником и приемником.

4.5. Электромагнитные волны

• **Свойства электромагнитных волн.** Электромагнитной волной называется распространение возмущений электромагнитного поля в пустом пространстве или в среде в отсутствие источников. Существование электромагнитных волн следует из теории Максвелла (см. разд. 3.15), в которой утверждается, что переменное электрическое поле порождает переменное магнитное поле, а переменное магнитное поле порождает переменное электрическое поле. В случае однородной изотропной среды уравнения Максвелла имеют вид:

$$1)\ \mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \qquad 2)\ \mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t},$$

$$3)\ \mathrm{div}\,\vec{D} = 0, \qquad 4)\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0, \tag{30}$$

где $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$. Для электромагнитного поля, зависящего только от координаты x, получаем уравнения:

$$-\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial x}, \qquad \mu\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

$$\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x}, \qquad \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x}. \tag{31}$$

В этом случае уравнения для продольных компонент имеют вид: $dE_x/dx = dE_x/dt = 0$, $dH_x/dx = dH_x/dt = 0$, т. е. все продольные компоненты поля являются постоянными величинами.

Нетрудно убедиться, что поперечные компоненты электромагнитного поля подчиняются волновому уравнению:

$$\Delta E_y = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad \Delta H_z = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}$$

(таким же уравнениям подчиняются E_z и H_y). Из этих уравнений следует, что электромагнитные возмущения в среде распространяются со скоростью

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{n}, \tag{32}$$

где $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \approx 3 \cdot 10^8$ м/с — ***скорость электромагнитных волн в вакууме***, а $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ — показатель преломления среды.

Рассмотрим плоскую электромагнитную волну определенной частоты (***монохроматическую плоскую волну***), распространяющуюся вдоль оси x:

$$E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kx),\ E_z = E_{0z}\cos(\omega t - kx + \varphi).$$

Из (31) получаем: $H_y = -\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0/\mu\mu_0}\,E_z$, $H_z = \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0/\mu\mu_0}\,E_y$. Из этих формул можно получить свойства плоской бегущей электромагнитной волны:

1. Электромагнитная волна *поперечна*.

2. Так как $\vec{E}\cdot\vec{H} = 0$, то $\vec{E} \perp \vec{H}$. Векторы $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{k})$ образуют правую тройку векторов (т. е. направление вектора $\vec{E} \times \vec{H}$ совпадает с направлением распространения волны).

3. Величины векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ в каждый момент времени связаны соотношением $\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E = \sqrt{\mu\mu_0}\,H$ $(E = vB)$.

От разности фаз φ зависит характер поляризации волны. При $\varphi = \pm m\pi$ волна оказывается *плоскополяризованной*, т. е. вектор $\vec{E}$ совершает колебания в одной плоскости (эту плоскость называют *плоскостью поляризации волны*), а при иной разности фаз — *эллиптически поляризованной* или (при $\varphi = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$ и при $E_{0x} = E_{0y}$) — *поляризованной по кругу* (см. разд. 4.1).

● **Энергия электромагнитных волн.** Объемная плотность энергии электромагнитной волны вычисляется по формуле

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2 = \frac{1}{v}EH.$$

В случае монохроматической плоскополяризованной волны имеем

$$w = \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2\cos^2(\omega t - kx),\quad \langle w\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2.$$

Для эллиптически поляризованной волны:

$$w = \varepsilon\varepsilon_0[E_{0y}^2 \cos^2(\omega t - kx) + E_{0z}^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi)],$$

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0(E_{y0}^2 + E_{z0}^2).$$

Для волны, поляризованной по кругу ($E_{0y} = E_{0z} = E_0$, $\varphi = \frac{1}{2}\pi \pm \pi m$), плотность энергии не меняется со временем: $w = \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2$.

Плотность потока энергии в электромагнитной волне определяется вектором Пойнтинга (см. разд. 3.15):

$$\vec{S} = w\vec{v} = \vec{E} \times \vec{H},$$

который направлен в сторону распространения волны. *Интенсивностью электромагнитной волны* называется модуль среднего по времени вектора Пойнтинга:

$$I = |\langle \vec{S} \rangle| = v\langle w \rangle.$$

- **Давление волны.** В соответствии с теорией относительности, поток энергии электромагнитного поля в вакууме означает существование импульса электромагнитного поля. Объемная плотность импульса электромагнитного поля равна (по модулю) w/c, поток импульса равен $\vec{S}/c$, его модуль равен w. При отражении или поглощении волны происходит изменение импульса волны, что должно проявляться в давлении волны на препятствие. При нормальном отражении плоской волны давление равно $p = \langle w \rangle(1 + R)$, где R — доля отраженной энергии (*коэффициент отражения*). В рамках электродинамики давление волны объясняется действием магнитного поля волны на ток, возбуждаемый на отражающей поверхности электрическим полем волны.

- **Излучение плоского тока.** Простейшим примером системы, создающей переменные поля и излучающей плоскую электромагнитную волну, является переменный по времени плоский ток. Рассмотрим ток в плос-

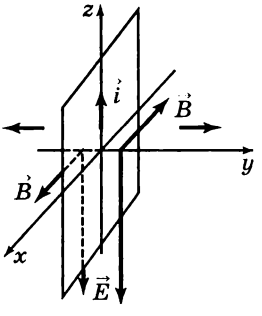


Рис. 58

кости (x, z), направленный вдоль z и изменяющийся по закону $i_z = i_0 \cos \omega t$ (рис. 58). Из закона плоского тока для узкого контура, охватывающего ток, получим $B_x(0, t) = \pm \frac{1}{2}\mu_0 i_0 \cos \omega t$, где знак «–» соответствует полю справа от плоскости (для малых $y > 0$), знак «+» — слева от плоскости. Используя связь между E и B в плоской волне, получим $E_z(0, t) = -A_E \cos \omega t$, где $A_E = \frac{1}{2}\mu_0 c i_0 = i_0/(2\varepsilon_0 c)$. Электрическое поле направлено против тока, его работа над током отрицательна, т. е. ток отдает волне энергию. Поле вдали от плоскости имеет вид $E(y, t) = -A_E \cos(\omega t - ky)$ при $y > 0$ и $E(y, t) = -A_E \cos(\omega t + ky)$ при $y < 0$.

- **Излучение волн движущимися зарядами.** Излучение электромагнитных волн происходит при движении зарядов с ускорением. Простейшая излучающая система — электрический диполь, дипольный момент которого быстро меняется со временем (*осциллятор*, или *вибратор Герца*). Так как электромагнитные возмущения распространяются со скоростью c, то поле излучения на расстоянии r в момент времени t определяется движением зарядов в диполе в момент $t' = t - r/c$. Поле излучения выглядит достаточно просто только в *волновой зоне*, т. е. на расстояниях, больших как по сравнению с размерами диполя, так и по сравнению с $\lambda = c\tau$, где τ — характерное время изменения дипольного момента (в случае гармонических колебаний λ — длина волны). Электрическое и магнитное поля в волновой зоне перпендикулярны

радиусу-вектору $\vec{r}$, проведенному от диполя к точке наблюдения:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r^3}\,[(\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}) \times \vec{r}]_{t-r/c},$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi c r^2}\,[\ddot{\vec{p}} \times \vec{r}]_{t-r/c}.$$

Взаимное расположение векторов $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\vec{r}$ изображено на рис. 59.

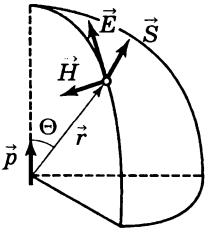


Рис. 59

Решение уравнений Максвелла в виде запаздывающих потенциалов (см. разд. 3.15) позволяет написать выражения для потенциалов в точке $\vec{r}$ в момент времени t. Например, векторный потенциал имеет вид:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}(t - r/c)}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec{p}}(t - r/c)}{r}.$$

При вычислении $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ главную роль в волновой зоне играет член, возникающий при дифференцировании аргумента $\dot{\vec{p}}$, что приводит к приведенному выше выражению для $\vec{B}$. Аналогичные, но более громоздкие вычисления можно провести и для электрического поля.

Убывание полей с расстоянием происходит по закону $1/r$. Вектор Пойнтинга в волновой зоне направлен вдоль $\vec{r}$; в направлении, составляющем угол θ с вектором $\vec{p}$, он равен:

$$S = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sin^2\theta}{4\pi c^3 r^2}(\ddot{\vec{p}}\,|_{t-r/c})^2.$$

Поток энергии через замкнутую поверхность есть не что иное, как мощность излучения диполя:

$$P = \int_0^\pi S(\theta) 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\ddot{\vec{p}}^2}{3c^3}.$$

Считая, что движется только один из зарядов диполя, получим формулу для мощности излучения ускоренно движущейся частицы:

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q^2\ddot{\vec{r}}^2}{3c^3}, \qquad (33)$$

которая оказывается пропорциональной квадрату ее ускорения.

Линейным гармоническим осциллятором называется электрический диполь, момент которого изменяется по гармоническому закону: $\vec{p} = \vec{p}_0 \cos \omega t$. Зависимость интенсивности излученной волны от угла θ имеет вид:

$$I = |\langle \vec{S} \rangle| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p_0^2\omega^4\sin^2\theta}{8\pi c^3 r^2}.$$

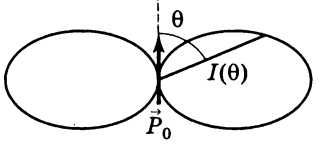


Рис. 60

Зависимость $I(\theta)$ при $r =$ $=$ const (*диаграмма направленности*) показана на рис. 60. Средняя по времени мощность излучения такого осциллятора

$$P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\omega^4\vec{p}_0^2}{3c^3} \qquad (34)$$

пропорциональна четвертой степени его частоты.

Пример 1. Свободный электрон в поле плоской электромагнитной волны с амплитудой E_0 совершает вынужденные колебания с амплитудой $A = eE_0/(m\omega^2)$ (уравнение движения электрона имеет вид: $m\ddot{x} = -eE_0 \cos \omega t$). Видно, что мощность излучения свободного электрона в поле электромагнитной волны не зависит от частоты, а сечение рассеяния (отношение мощности излучения к интенсивности падающей волны) равно $\sigma = \frac{P}{I} = \frac{8}{3}\frac{(ke^2)^2}{m^2c^4} \sim 10^{-30}$ м^2. Другая ситуация возникает, когда в поле электромагнитной волны попадает атомный электрон, собственная частота ω_0 колебаний которого велика по

сравнению с частотой падающей (световой) волны. Амплитуда колебаний в этом случае (см. разд. 4.3) равна $A = eE_0/(m\omega_0{}^2)$, т. е. почти не зависит от ω. В этом случае мощность излучения и сечение рассеяния света пропорциональны ω^4, что дает качественное объяснение голубому цвету неба (голубой свет рассеивается сильнее).

Пример 2. Если представить, что электрон в атоме совершает собственные колебания с частотой ω_0, то энергия колебаний равна $W = m\omega_0^2 A^2$, а мощность излучения равна $P = -\dfrac{dW}{dt} = \dfrac{ke^2\omega_0^4 A^2}{3c^3}$. Получаем $\dfrac{dW}{dt} = -\dfrac{ke^2\omega_0^2}{3mc^3}W$, следовательно, энергия атома изменяется по закону $W = W_0 \exp(-t/\tau)$, где $\tau = 3mc^3/(ke^2\omega_0^2) \sim 10^{-9} \div 10^{-10}$ с называют *временем высвечивания атома.*

● **Эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме.** Главное отличие от акустического эффекта Доплера (см. разд. 4.4) состоит в том, что отсутствует система отсчета, связанная со средой, в которой распространяется волна. Поэтому соотношение между частотой излучения ν_0 (измеренной в системе отсчета источника $K_и$) и зарегистрированной частотой ν (измеренной в системе отсчета приемника $K_п$) может зависеть только от их относительной скорости. Пусть в $K_п$ источник движется со скоростью υ, направленной под углом θ к радиусу-вектору, проведенному от приемника к источнику. Повторяя рассуждения, приведенные в разд. 4.4, получим

$$\nu = \frac{\tilde{\nu}_0}{1 + (\upsilon/c)\cos\theta},$$

где $\tilde{\nu}_0$ — частота источника, измеренная часами системы $K_п$. Переходя к собственному времени ($\tilde{T}_0 = \gamma T_0$, или $\tilde{\nu}_0 = \nu_0/\gamma$, см. разд. 1.11), получим

$$\nu = \frac{\nu_0}{\gamma[1 + (\upsilon/c)\cos\theta]} = \frac{\nu_0\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}{1 + (\upsilon/c)\cos\theta}. \qquad (35)$$

Видно, что вследствие преобразования времени наблюдается не только продольный, но и поперечный эффект Доплера (при движении источника перпендикулярно направлению на приемник).

Полезно посмотреть на эффект Доплера с иной точки зрения. Поскольку фаза колебания в данной точке волны ($\omega t - \vec{k}\vec{r}$) должна быть инвариантна по отношению к переходу в другую систему отсчета, то (k, ω/c) представляет собой 4-вектор нулевой длины ($k^2 - \omega^2/c^2 = 0$). Если в системе $K_п$ ось x направить параллельно скорости источника $\vec{v}^и$ (рис. 61), то в этой системе отсчета $k_x = -k \cos\theta = -(\omega/c)\cos\theta$. Применяя для перехода к системе $K_и$ преобразования Лоренца, имеем: $\omega_0/c = \gamma[(\omega/c) - k_x(v/c)]$, или $\omega_0 = \gamma[\omega + \omega(v/c)\cos\theta]$. Выражая ω, приходим к (35). Этот метод позволяет, записав преобразования Лоренца для волнового вектора $\vec{k}$, получить формулы для явления аберрации света, имеющего важное значение в астрономии.

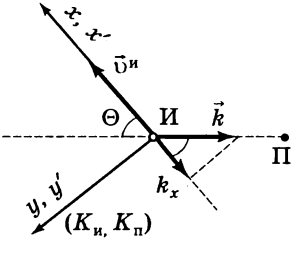


Рис. 61

• **Шкала электромагнитных волн.** В зависимости от способов излучения и регистрации электромагнитных волн, в шкале частот ν или длин волн в вакууме $\lambda = c/\nu$ выделяют несколько диапазонов с условными (перекрывающимися) границами:

1. Радиоволны ($\lambda > 0{,}05$ мм).
2. Оптическое (световое) излучение (10 нм $< \lambda <$ 1 мм):
   а) инфракрасное (ИК) излучение (770 нм $< \lambda <$ 1 мм),
   б) видимый свет (380 нм $< \lambda <$ 770 нм),
   в) ультрафиолетовое (УФ) излучение (10 нм $< \lambda <$ 380 нм).
3. Рентгеновское излучение (0,01 пм $< \lambda <$ 100 нм).
4. Гамма-излучение (гамма-лучи) ($\lambda < 0{,}1$ нм).

5. Оптика

5.1. Геометрическая оптика. Фотометрия

• **Основные законы геометрической оптики.** Оптика занимается изучением электромагнитного излучения оптического (светового) диапазона (см. разд. 4.5) явлений, возникающих при его распространении в пространстве и взаимодействии с веществом. *Геометрическая оптика* не рассматривает волновой характер и поляризацию светового излучения, оперируя понятиями *световых лучей*, указывающих направление распространения света, и узких *световых пучков*, образованных световыми лучами.

Основные законы геометрической оптики перечислены ниже.

1. *Закон прямолинейного распространения света.*

2. *Закон независимости световых пучков.* Энергия в каждом пучке распространяется независимо от других пучков; освещенность поверхности, на которую падает несколько пучков, равна сумме освещенностей, создаваемых каждым пучком в отдельности.

3. *Закон отражения света.* Отраженный луч лежит в *плоскости падения*, образуемой падающим лучом и нормалью к поверхности в точке падения; угол падения равен углу отражения. Все углы отсчитываются от нормали.

4. *Закон преломления света.* Преломленный луч лежит в плоскости падения; отношение синуса угла падения α_1 к синусу угла преломления α_2 зависит от длины волны, но не зависит от угла падения (закон Снеллиуса):

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = n_{21} = \frac{n_1}{n_2}. \qquad (1)$$

Постоянная величина n_{21} называется *относительным показателем преломления* второй среды относительно первой, который равен отношению (*абсолютных*) *показателей преломления* каждой из сред (показателей преломления среды относительно вакуума). С точки зрения волновой оптики абсолютный показатель преломления указывает, во сколько раз фазовая скорость световой волны данной частоты меньше, чем скорость этой волны в вакууме:

$$v = \frac{c}{n}, \quad n = \sqrt{\mu\varepsilon} \approx \sqrt{\varepsilon} \qquad (2)$$

(см. разд. 4.5). Если $n_2 < n_1$, то при $\alpha_1 > \alpha_{пред}$, где $\sin\alpha_{пред} = n_{21} < 1$, наблюдается *полное отражение света*, т. е. отсутствует преломленный луч. При распространении луча света в среде с постепенно меняющимся вдоль некоторой оси показателем преломления (в слоистой среде) удобно использовать формулу (1) в виде $n \sin\alpha = \text{const}$, где α — угол с указанной осью. Видно, что α постепенно меняется, т. е. происходит искривление луча.

К перечисленным законам геометрической оптики следует добавить *принцип обратимости световых пучков*.

Законы геометрической оптики действуют тогда, когда оказываются несущественными явления интерференции, дифракции и поляризации. Это происходит в тех случаях, когда амплитуда волны и ее первые пространственные производные мало меняются на длине волны. Эти условия нарушаются на границе тени, вблизи геометрической точки схождения лучей (фокуса), при прохождении света через узкие диафрагмы, при распространении света в средах с резко меняющимся показателем преломления или с большим поглощением. Например, при прохождении света через диафрагму с минимальным размером d пучок света расплывается за счет дифракции на расстоянии $l \sim d^2/\lambda$; на расстояниях, малых по сравнению с l, можно пользоваться законами геометрической оптики.

С законами геометрической оптики тесно связаны *принцип Гюйгенса* (волновое построение Гюйгенса) и

принцип Ферма. Принцип Гюйгенса опирается на абстрактно-волновые представления и позволяет построить в каждой точке вспомогательную волновую поверхность, нормаль к которой указывает направление луча света. Для построения волновой поверхности в момент времени $t+\Delta t$ все точки волновой поверхности в момент времени t рассматриваются как источники вторичных световых волн. Огибающая сферических волновых поверхностей вторичных волн образует новую волновую поверхность основной волны.

Принцип Ферма является одним из примеров вариационных принципов, играющих в физике большую роль. Он утверждает, что время распространения света по истинной траектории является экстремальным (обычно — минимальным или максимальным) по сравнению со всеми воображаемыми близлежащими траекториями. Более точно — это время не меняется (в первом порядке малости) при малом искажении траектории. Время прохождения света через среду с переменным (или кусочно-переменным) показателем преломления удобно выражать через *оптическую длину пути* L:

$$t=\int_1^2 \frac{dl}{c/n}=\frac{L}{c}, \quad L=\int_1^2 n\,dl. \tag{3}$$

Это понятие оказывается полезным и при изучении интерференции. Принципы Гюйгенса и Ферма позволяют получить основные законы геометрической оптики, но не позволяют выйти за ее пределы.

Одной из важных задач геометрической оптики является построение *изображений*, формируемых оптическими системами, и изучение их свойств. Изображением называется точка схождения лучей, прошедших оптическую систему. Система отражающих и преломляющих сферических (и плоских) поверхностей, перпендикулярных к некоторой оси, формирует изображение точечного источника лучами, падающими под малым углом к оси (*параксиальное приближение*). Ось системы называют *оптической осью*; точку схождения

параллельного оси пучка лучей — *фокусом системы*; перпендикулярную оси плоскость, проведенную в фокусе, — *фокальной плоскостью*. Теоретический предел размеров изображения и разрешающей способности оптических систем определяется дифракцией света. Важное для дальнейшего изучения свойство изображений: оптические длины всех лучей от источника до изображения одинаковы, т. е. оптическая система не изменяет разности хода лучей.

- **Фотометрия.** Излучение в данной точке пространства в данном направлении характеризуется *интенсивностью лучистого потока* I:

$$d\Phi = I\cos\theta\, ds\, d\Omega, \tag{4}$$

где $d\Phi$ —*лучистый поток* (энергия, переносимая в единицу времени через площадку ds лучами, заключенными в телесном угле $d\Omega$); θ — угол между выделенным направлением и нормалью к площадке. Произведение $\cos\theta\, ds$ называется *видимой величиной площадки* в данном направлении. Объемная плотность лучистой энергии $u = dW/dV$ равна

$$u = \frac{1}{c}\int I\, d\Omega. \tag{5}$$

В случае изотропного излучения $u = 4\pi I/c$. Интенсивность I и плотность u можно подвергнуть *спектральному разложению* по частотам или длинам волн:

$$u = \int_0^\infty u_\nu\, d\nu = \int_0^\infty u_\omega\, d\omega = \int_0^\infty u_\lambda\, d\lambda.$$

Приравнивая энергию, заключенную в соответствующих друг другу спектральных интервалах, можно найти связь между различными спектральными представлениями. Например, приравняв $u_\nu\, d\nu = u_\lambda\, d\lambda$, с учетом $\lambda = c/\nu$ получим

$$u_\nu = (c/\nu^2)u_\lambda.$$

Аналогично можно произвести разложение по двум взаимно перпендикулярным поляризациям.

Определенные выше *энергетические характеристики* используют при объективном описании излучения. *Фотометрические*, или *световые* характеристики учитывают восприимчивость глаза к световому излучению. Лучистый поток измеряют в ваттах, а соответствующую ему фотометрическую единицу называют *световым потоком* и измеряют в *люменах* (лм). Чтобы перейти к световому потоку, надо лучистый поток умножить на *световую эффективность* η (измеряется в лм/Вт), которая для длины волны $\lambda_0 = 555$ нм равна $\eta_0 = 625$ лм/Вт, а для других длин волн равна $\eta_0 V_\lambda$, где V_λ — кривая *видности*, или *относительной спектральной чувствительности* глаза ($V(\lambda) = 1$ при $\lambda = 555$ нм и падает до нуля при приближении к границам видимого диапазона). Для пересчета от произвольного лучистого потока к световому потоку можно использовать формулу $\Phi_{св} = \eta_0 \int \Phi_\lambda V_\lambda d\lambda$. Аналогичным образом происходит пересчет от остальных энергетических характеристик к световым и наоборот (например, от интенсивности излучения к интенсивности света).

Для характеристики точечного источника используют *энергетическую силу источника*, определяемую как лучистый поток в данном направлении в расчете на единичный телесный угол: $d\Phi = J d\Omega$. Световая характеристика — *сила света источника* — определяется через световой поток. Единица силы света *кандела* является основной единицей СИ (лм = кандела · ср, где ср — *стерадиан*). Если не происходит поглощения или рассеяния излучения, то на расстоянии r от источника в том же направлении интенсивность излучения равна

$$I = \frac{J}{r^2}.$$

Поток лучистой энергии, приходящийся на единицу площади освещаемой поверхности, называется *энергетической освещенностью*. Соответствующая световая величина называется просто *освещенностью* и измеряется в *люксах* (лк). Если излучение точечного источника падает под углом θ к нормали, то

$$E = \frac{J}{r^2} \cos\theta.$$

Для протяженных источников, т. е. для излучающей поверхности, вводят *энергетическую яркость* в данном направлении B_θ (световая характеристика — *яркость*). Энергетическая сила источника, соответствующего площадке ds, равна

$$dJ = B_\theta \cos\theta\, ds, \text{ или } d\Phi = B_\theta \cos\theta\, ds\, d\Omega, \qquad (6)$$

где θ — угол между нормалью к излучающей поверхности и направлением излучения. Источник, у которого $B\theta$ не зависит от направления, называется *ламбертовским источником*. Ламбертовский источник любой формы кажется равномерно ярким (например, диск Солнца). *Энергетическая светимость* R (световая характеристика — *светимость*) определяется как полный лучистый поток в телесном угле 2π в расчете на единицу площади излучающей поверхности:

$$R = \int B_\theta \cos\theta\, d\Omega. \qquad (7)$$

Для ламбертовского источника $R = \pi B$.

Пример. Освещенность, создаваемая светящейся поверхностью S на некотором участке освещаемой поверхности ds', равна сумме вкладов от всех участков ds. Телесный угол, под которым ds' видна от ds, равен $\cos\theta' ds'/r^2$ (рис. 62). Для светового потока, посылаемого в этот телесный угол, имеем $B_\theta \cos\theta\, ds$ ($\cos\theta'\, ds'/r^2$). Так как $\cos\theta\, ds/r^2$ равен телесному углу $d\Omega$, под которым излучающий участок виден от точки освещения, то $dE = B_\theta \cos\theta'\, d\Omega$.

Например, при освещении ламбертовским диском маленькой площадки, расположенной на оси диска и ориентированной перпендикулярно оси (рис. 63), $d\Omega = 2\pi \sin\theta' d\theta'$, и после

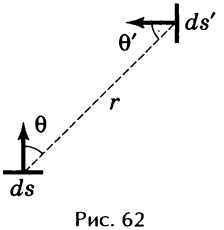


Рис. 62

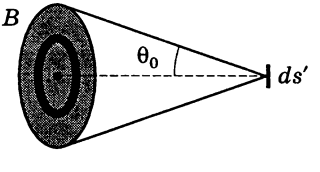


Рис. 63

интегрирования получим $E = \pi B \sin^2 \theta_0$, где θ_0 — угол полураствора конуса, под которым диск виден от освещаемой площадки.

5.2. Интерференция света

• **Когерентность световых волн.** При наложении световых волн, обладающих очень высокой частотой колебаний, можно наблюдать только усредненную по времени энергию колебаний, которую характеризуют *интенсивностью колебаний* $I = \langle \vec{E}^2 \rangle$. При сложении двух колебаний $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ получим $I = I_1 + I_2 + I_{12}$, где $I_{12} = 2\langle \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \rangle$ называют интерференционным членом. Если $I_{12} = 0$, то пучки света называют *некогерентными*. Волны, поляризованные во взаимно перпендикулярных направлениях, всегда некогерентны. Монохроматические волны являются когерентными только в том случае, если остается постоянной их разность фаз (т. е. их частоты совпадают) и если они параллельно (или почти параллельно) поляризованы. При наложении таких волн

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\,\cos \Delta\varphi,$$

где $\Delta\varphi$ — разность фаз колебаний в данной точке. В частном случае при $I_1 = I_2 = I_0$ имеем $I = 2I_0(1 + \cos \Delta\varphi)$. Для синфазных колебаний: $I = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2$, для колебаний в противофазе: $I = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2$.

• **Интерференция двух волн.** При наложении двух плоских волн $E_1 = E_{10} \cos(\omega t - \vec{k}_1 \cdot \vec{r})$ и $E_2 = E_{20} \cos(\omega t - \vec{k}_2 \cdot \vec{r})$ получим $\Delta\varphi = (\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}$. Поверхности постоянной разности фаз представляют собой плоскости, перпендикулярные вектору $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$. Расстояние между соседними плоскостями с максимальной интенсивностью равно

$$\Delta x = \frac{2\pi}{|\vec{k}_1 - \vec{k}_2|} = \frac{\pi}{k \sin(\alpha/2)} = \frac{\lambda}{2\sin(\alpha/2)}, \qquad (8)$$

где α — угол между векторами $\vec{k}_1$ и $\vec{k}_2$. При малых α получим $\Delta x \sim \lambda/\alpha$. Если в области перекрытия волн поставить плоский экран, параллельный $(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)$, то на нем будут наблюдаться параллельные чередующиеся темные и светлые полосы.

При наложении сферических волн от двух синфазных точечных источников условие максимума интенсивности m-го порядка имеет вид $r_2 - r_1 = m\lambda$ (это уравнение гиперболоида вращения с осью, проходящей через источники). При размещении экрана параллельно этой оси получим светлые и темные полосы в виде гипербол. Если расстояние до экрана D велико по сравнению с расстоянием d между источниками, то в центре экрана получим равноотстоящие, почти параллельные полосы. Расстояние между полосами будет такое же, как в *опыте Юнга*, где интерференция создается двумя параллельными линейными источниками когерентного света. Если x — расстояние от некоторой точки экрана до его центра (рис. 64), то $r_1^2 = D^2 + (x + d/2)^2$, $r_2^2 = D^2 + (x - d/2)^2$, и при d, $x \ll D$ получим для разности хода $\Delta = r_1 - r_2 \approx xd/D \approx \alpha x$, где $\alpha \approx d/D$ — угол, под которым источник виден из центра экрана. Интенсивность меняется от $4I$ при $\Delta = \alpha x = m\lambda$ до нуля при $\Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$. Расстояние между полосами равно $\Delta x = \lambda/\alpha = \lambda D/d$.

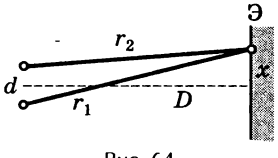


Рис. 64

На большом расстоянии от двух синфазных линейных источников (r_1, $r_2 \gg d$) можно написать $r_2 - r_1 \approx d \sin\theta$, где θ — угол между нормалью к плоскости источников и направлением наблюдения интерференции (*приближение Фраунгофера*). Амплитуды колебаний в интерферирующих волнах можно считать одинаковыми, т. е. $I = 2I_0[1 + \cos(kd \sin\theta)]$. Максимумы интерференции наблюдаются под углами, удовлетворяющими соотношению $\sin\theta = m\lambda/d$.

• **Интерференция большого числа волн.** Рассмотрим интерференцию от N одинаковых синфазных источников, расположенных на одной прямой на расстоянии d друг от друга. На большом расстоянии от источников ($r \gg Nd$) в направлении θ происходит сложение N колебаний одинаковой амплитуды A_0, а разность фаз между соседними колебаниями равна $\phi = 2\pi d \sin\theta/2$. Результирующую амплитуду A найдем из уравнений (см. векторную диаграмму на рис. 65): $A_0 = R\sin(\phi/2)$, $A = R\sin(N\phi/2)$. Исключая радиус описанной окружности R, получим:

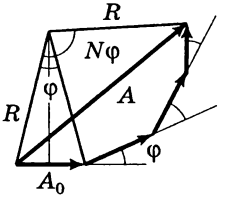


Рис. 65

$$A = A_0\frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}, \quad I = I_0\frac{\sin^2(N\phi/2)}{\sin^2(\phi/2)}. \qquad (9)$$

• **Интерференция от естественных источников света.** Излучение естественных (тепловых) источников света состоит из множества *цугов волн*, спонтанно испущенных возбужденными атомами при их *высвечивании*, т. е. при возвращении в нормальное состояние. Длительность цуга $\sim 10^{-10} \div 10^{-8}$ с, он содержит $10^6 \div 10^8$ колебаний. Значит, два разных естественных источника некогерентны даже при выделении в их излучении узкой спектральной полосы, поскольку разность фаз колебаний очень быстро и хаотически меняется в каждой точке наблюдения. Для наблюдения интерференции надо излучение от одного источника расщепить на два или несколько пучков и заставить их попадать в точку наблюдения различными путями. При этом будет происходить интерференция каждого из цугов с самим собой, и условие максимума или минимума будет одновременно выполняться для всех цугов одной частоты, испущенных из одной и той же точки источника. Удобно ввести *оптическую разность хода* пучков

$$\Delta = \int n_2\,dl - \int n_1\,dl,$$

где интегрирование ведется вдоль линии, которую данный пучок проходит от точки излучения до точки интерференции. Условие максимума: $\Delta = m\lambda$; условие минимума: $\Delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, где m называется *порядком интерференции*.

Приведем классические примеры получения двух когерентных источников.

1. *Опыт Юнга* (упоминался выше). Солнечный свет падает на очень узкую щель в первом экране, вследствие дифракции расходится и падает на две узкие щели во втором экране. Опять же из-за дифракции после этих щелей свет расходится и образует перекрывающиеся когерентные пучки.

2. *Зеркала Френеля*. Свет от ярко светящейся щели падает на два зеркала, скрещенных под углом почти 180°. Близко расположенные мнимые изображения щели образуют два когерентных источника.

3. *Бипризма Френеля*. Свет от ярко освещенной щели преломляется в двух стеклянных призмах с малыми преломляющими углами, сложенных своими основаниями. В результате преломления образуются два близко расположенных мнимых изображения щели.

4. *Билинза Бийе*. Собирающая линза разрезается пополам и половинки слегка раздвигаются. Билинза освещается узкой щелью, параллельной линии разреза. Каждая половинка линзы формирует свое действительное изображение щели.

5. *Зеркало Ллойда*. Свет от узкой щели отражается от зеркальной плоскости, образуя мнимое изображение щели. Интерферируют свет от самой щели и от ее изображения.

- **Влияние размеров источника. Пространственная когерентность.** Разность хода лучей в данной точке экрана имеет определенное значение только в случае точечного источника. При переходе от одной точки протяженного источника к другой разность хода меняется. Если разность хода изменится на $\lambda/2$, то условие максимума превратится в условие минимума, т. е. наложе-

ние интерференционных картин от разных участков протяженного источника приводит к смазыванию общей интерференционной картины.

Рассмотрим, например, плоский источник. Предположим, что первый из интерферирующих лучей исходит от источника под углом α_1 к его нормали, а второй — под углом α_2. Пусть эти лучи лежат в одной плоскости с нормалью, а углы излучения почти одинаковы для всех точек источника (рис. 66). При переходе от одного конца источника к другому длина пути первого луча изменится на $l \sin \alpha_1$, второго — на $l \sin \alpha_2$ (l — размеры источника в плоскости лучей), а разность хода изменится на $l(\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$. Условие сохранения интерференционной картины (условие *пространственной когерентности*) принимает вид

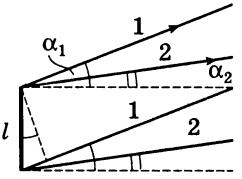


Рис. 66

$$l|\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1| < \lambda/2.$$

Пример 1. В опыте Юнга l — ширина щели в первом экране, $\alpha_1 = -\alpha_2 = b/(2L)$, где b — расстояние между щелями во втором экране, $L \gg b$ — расстояние между экранами; получим: $2l(b/2L) < \lambda/2$, т. е. $l < \lambda L/(2b)$. Перепишем эту формулу в виде: $b < \lambda/(2\psi)$, где $\psi = l/L$ — угловые размеры источника, или угол расхождения падающих на две щели лучей. Например, при прямом освещении щелей Солнцем $\psi \approx 0{,}009$ рад, $\lambda \approx 500$ нм, т. е. расстояние между щелями должно быть меньше 0,06 мм. Именно поэтому надо сначала солнечный свет пропускать через узкую щель.

• **Влияние немонохроматичности света. Временная когерентность.** Нарушение монохроматичности складывающихся волн может привести к смазыванию картины интерференции. Предположим, что частоты излучаемых волн лежат в узком спектральном интервале $\Delta\omega$. Сильное искажение картины интерференции происходит в том случае, если разность хода Δ превышает некоторое критическое значение $L_к$, которое называют

длиной когерентности; $L_к$ имеет смысл *длины цуга волн*, испускаемого атомом в одном акте излучения (напомним, что устойчивая интерференция происходит при сложении цугов в одном из разделенных пучков с соответствующими им цугами в другом пучке). Время $\tau_к = L_к/c$, которое называют *временем когерентности*, имеет смысл *длительности цуга волн*. В соответствии с общими свойствами преобразования Фурье, спектральная ширина волнового пакета связана с его длительностью соотношением $\Delta\omega\,\Delta t \sim 2\pi$. (Пример: «оборванная» синусоида $A(t)\sin\omega_0 t$, где $A = \text{const}$ в интервале $-\tau/2 < t < \tau/2$ и $A = 0$ вне этого интервала, имеет разложение Фурье $a(\omega) \sim \dfrac{\sin\left[\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)\tau\right]}{(\omega-\omega_0)\tau}$, ширина которого равна $\Delta\omega \sim \dfrac{2\pi}{\tau}$.) Максимальный порядок спектра, в котором можно наблюдать интерференцию, можно оценить как $N \sim L_к/\lambda = \tau_к/T = \omega/\Delta\omega$.

● **Интерференция в тонких пленках.** Рассмотрим интерференцию лучей, отраженных от передней и задней поверхностей тонкой пленки (рис. 67). Будем считать фронт волны плоским, т. е. источник достаточно удаленным. Так как фронт преломленной волны перпендикулярен лучу, то луч 1 в точке D и луч 2 в точке D' имеют одинаковые фазы. Значит, оптическая разность хода лучей в точке D равна $n(D'C + CD)$. Кроме того, к разности хода надо добавить $\lambda/2$, что позво-

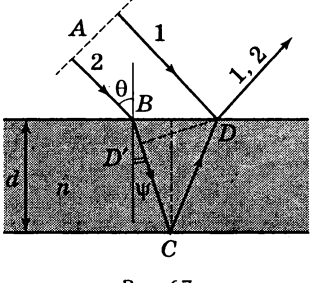


Рис. 67

лит учесть изменение фазы на π при отражении от среды с бо́льшим показателем преломления (на границе воздух — пленка в точке D). После преобразований получим:

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\theta} = 2\,dn\cos\psi + \frac{\lambda}{2},$$

где θ, ψ — углы падения и преломления, d — толщина пленки, n — ее показатель преломления. Условие максимума для наблюдения в отраженном свете $\Delta = m\lambda$ выполняется для определенных длин волн. Для очень тонких пленок условию максимума удовлетворяют одна или две длины волны из видимого диапазона, и пленка оказывается окрашенной. Условию максимума для наблюдения в отраженном свете соответствует для той же длины волны условие минимума для наблюдения в проходящем свете (отражений на границе воздух — пленка не происходит). Как всегда при интерференции, энергия не увеличивается, а перераспределяется.

Рассмотрим теперь два важных случая.

1. *Полосы равной толщины*. Если лучи падают под почти постоянным углом, например нормально, а толщина пленки меняется, то линии постоянной толщины есть линии постоянной разности хода. При освещении монохроматическим светом эти линии будут видны в виде темных или светлых полос. При наблюдении в белом свете (при условии малой толщины пленки) линии будут цветными. Интерференция происходит вблизи поверхности пленки (интерференционная картина локализована на поверхности).

2. *Полосы равного наклона*. Толщина пленки постоянна, освещение ведется рассеянным светом от удаленного источника. Меняя угол наблюдения, мы будем получать то условие максимума, то минимума. Интерференционная картина локализована на бесконечности (или в фокальной плоскости линзы). Для очень тонких пленок свет может быть не монохроматичным, наблюдение под данным углом выделяет ту длину волны, для которой выполнено условие максимума.

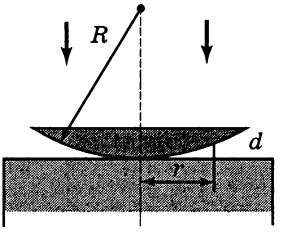


Рис. 68

Пример 2. Кольца Ньютона. Если плосковыпуклую линзу положить на поверхность стеклянной пластинки (рис. 68) и освещать монохроматическим светом, падающим нормально, то на воздушном промежутке будут наблюдаться полосы равной толщины, имеющие форму окружностей. Толщина промежутка равна $d \approx \sqrt{R^2 + r^2} - R \approx r^2/(2R)$, где r — радиус окружности. Условие минимума имеет вид $2d + (\lambda/2) = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, или $r_m = \sqrt{m\lambda R}$. В центре картины будет темное пятно.

• **Принципы голографии.** Голография используется для записи объемного изображения предмета. Предмет освещается светом лазера, обладающим очень высокой степенью когерентности, и попадает на фотопластинку. Информацию о форме предмета несет зависимость фазы предметной волны от положения на пластинке. Если на пластинку одновременно со светом, отраженным от предмета, послать отраженный от зеркала опорный лазерный луч, которым освещается предмет, то в результате интерференции образуется волна, амплитуда и интенсивность которой будут зависеть от фазы предметной волны. Так как почернение фотопластинки пропорционально интенсивности, то на ней сохранится информация о фазе волны. Освещая проявленную пластинку светом того же лазера, можно восстановить исходный сигнал.

При записи интерференционного сигнала в объеме толстой прозрачной фотопластинки возникает *объемная голограмма*, которая несет информацию как о форме предмета, так и о длине волны лазерного сигнала. При освещении голограммы белым светом волны других частот гасят друг друга за счет интерференции, и возникает изображение предмета, освещенного моно-

хроматическим лазерным светом. Если в одной пластинке записать три голограммы от лазеров с различными длинами волн, то при освещении белым светом возникает объемное цветное изображение.

• **Излучение Вавилова — Черенкова.** При движении частицы в среде со скоростью V, превышающей фазовую скорость $v = c/n$ света в этой среде, возникает излучение электромагнитных волн под определенным углом к направлению движения частицы. Элементарное объяснение этого явления совершенно аналогично объяснению возникновения ударной волны при движении со сверхзвуковой скоростью. При прохождении частицы возникает излучение возбужденных ею атомов среды. Разность хода волн, излученных возбужденными атомами в направлении θ из положений A и B (рис. 69), равна

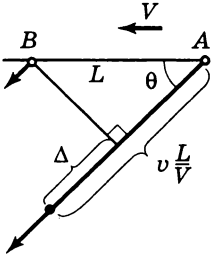


Рис. 69

$$\Delta = v\frac{L}{V} - L\cos\theta = L\left(\frac{v}{V} - \cos\theta\right).$$

Если $V < v$, то для любого угла θ можно подобрать такое L, что излучение точек A и B гасит друг друга ($\Delta = \lambda/2$). При $V > v$ то же самое относится к любому углу, не равному $\theta = \arccos(v/V)$ (можно добиться $\Delta = \pm\lambda/2$). Однако в направлении θ_0 все точки излучают волны с одной и той же фазой, т. е. происходит взаимное усиление излучения.

5.3. Дифракция

• **Принцип Гюйгенса — Френеля.** Дифракцией называются отклонения от закона прямолинейного распространения света. Приближенный расчет интенсив-

ности света после препятствий или отверстий в экране опирается на *принцип Гюйгенса — Френеля*, который дополняет геометрическое построение Гюйгенса (см. разд. 5.1) условием интерференции вторичных лучей. Согласно этому принципу, все точки произвольной поверхности, окружающей источники волн, являются источниками когерентных вторичных волн, а амплитуда колебаний волны в произвольной точке вне этой поверхности может быть получена как результат интерференции вторичных волн. Обычно в качестве такой поверхности выбирают фронт волны, тогда источники вторичных волн синфазны. Амплитуда вторичной волны пропорциональна амплитуде первичной волны и площади участка поверхности:

$$dE = E_0 \frac{K(\alpha)}{r} \exp\left[i(\omega t - kr)\right] ds, \qquad (10)$$

где E_0 — (комплексная) амплитуда первичной волны в точках фронта, α — угол между направлением излучения и нормалью к поверхности, r — расстояние от фронта вторичных источников до точки наблюдения, $K(\alpha)$ — медленно убывающая функция ($K(\pi) = 0$).

● **Зоны Френеля.** Рассмотрим излучение точечного источника света. В качестве поверхности вторичных волн выберем сферу радиусом a и изучим вклад различных участков сферы в колебания волны в точке B, находящейся на расстоянии $a + b$ от источника (рис. 70). Из точки B радиусами r и $r + dr$ засечем на сфере две окружности. Из теоремы косинусов $r^2 = a^2 + (a + b)^2 - 2a(a + b)\cos\theta$ получим $r\,dr = a(a + b)\sin\theta d\theta$. Значит, величина $ds/r = 2\pi a^2 \sin\theta d\theta / r = 2\pi a\,dr/(a + b)$ не зависит от r, т. е. вклады от участков, соответствующих одинаковым изменениям длины пути dr (т. е. одинаковым приращениям фазы $d\varphi$), имеют одинаковые амплитуды dE. Следовательно, векторная диаграмма складывающихся колебаний (рис. 71) имеет вид медленно закручивающейся спирали (с учетом медленного уменьшения $K(\alpha)$). Из соображений симметрии можно сделать

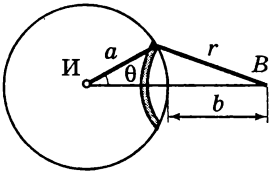


Рис. 70

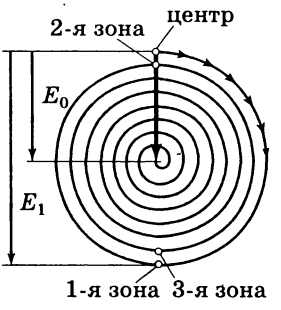


Рис. 71

вывод, что спираль сходится к центру окружности. Сумма всей спирали соответствует свободному распространению света в отсутствие экранов.

Часть поверхности от центра до точек, где $r_1 = b + \lambda/2$, называется *первой зоной Френеля*, от края первой зоны до $r_2 = b + \lambda$ — второй зоной Френеля, и т. д. Видно, что если открыть только первую зону Френеля, а все остальное закрыть экраном, то амплитуда колебаний будет в 2 раза больше, чем в отсутствие экрана, а интенсивность — в 4 раза больше. Если открыть две первые зоны, то амплитуда и интенсивность в точке B будут близки к нулю, и т. д. Наоборот, если закрыть экраном небольшое число центральных зон Френеля, то это почти не скажется на интенсивности колебаний в точке B — она будет почти такой же, как и в отсутствие экрана (этот парадоксальный факт известен под названием «пятно Пуассона»). Чтобы понять, какие зоны будут закрыты или открыты в каждом конкретном случае, полезно знать радиус окружности R, засекаемой из точки B радиусом-вектором $b + \Delta$. При малых Δ он имеет вид

$$R(\Delta) = \sqrt{\frac{2ab\Delta}{a+b}}\,.$$

Чтобы найти радиус m-й зоны Френеля, надо подставить $\Delta = m\lambda$. Для плоского фронта волны, что соответствует предельному случаю $a \to \infty$, получим $R(\Delta) = \sqrt{2b\Delta}$.

Метод зон Френеля хорошо работает только при не очень большом числе зон Френеля. Этот метод сложно применить к точкам, лежащим в стороне от центра экрана. Дифракционные эффекты пропадают при $\Delta \gg \lambda$, т. е. при $b \ll R^2/\lambda$.

● **Дифракция Фраунгофера от щели.** Дифракцией Фраунгофера называют дифракцию в параллельных лучах, т. е. когда разность фаз вторичных волн, исходящих от различных точек рассматриваемого участка волнового фронта, можно найти в предположении их параллельности. В этом приближении дифракционная картина упрощается, и можно рассчитывать интенсивность света в разных точках экрана. Приближение Фраунгофера действует в двух случаях: во-первых, если лучи света после дифракции собираются линзой в ее фокальной плоскости, и во-вторых, если экран удален от дифракционного отверстия на достаточно большое расстояние ($r \gg R^2/\lambda$).

Рассчитаем в приближении Фраунгофера дифракцию плоской монохроматической волны на щели шириной b. Ограничимся изучением нормального падения волны на экран со щелью; в этом случае все точки щели являются источниками вторичных синфазных волн. Разобьем плоскость щели на большое число N одинаковых узких полосок (рис. 72). Амплитуда света от каждой полоски равна E_0/N, где E_0 — амплитуда света, посылаемого щелью в направлении $\theta = 0$ (в этом случае все полоски излучают свет синфазно). При излучении в направлении, составляю-

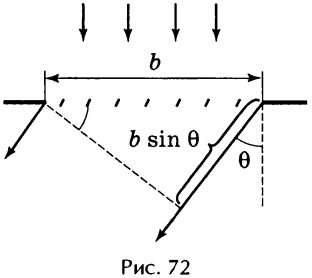


Рис. 72

щем угол θ с нормалью, разность фаз между излучением соседних полосок равна $\delta\varphi = (2\pi/\lambda)(b/N)\sin\theta$, разность фаз между крайними полосками равна $\varphi = (2\pi/\lambda)b\sin\theta = N\,\delta\varphi$. Используя выражение (9) для интерференции N источников, получим амплитуду излучения щели в направлении θ ($\sin\delta\varphi$ надо заменить на $\delta\varphi$):

$$E_1(\theta) = E_0\,\frac{\sin(\varphi/2)}{\varphi/2}, \text{ где } \varphi = 2\pi\,\frac{b}{\lambda}\,\sin\theta. \qquad (11)$$

Интенсивность излучения, определяемая по формуле $I_1 = I_0\sin^2(\varphi/2)/(\varphi/2)^2$, а также характерные векторные диаграммы изображены на рис. 73. Условие минимумов излучения имеет вид:

$$b\sin\theta = m\lambda \quad (m = 1, 2, \ldots). \qquad (12)$$

Условие максимумов: $b\sin\theta \approx \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda\ (m = 1, 2, \ldots)$.

Максимумы интенсивности относятся как $I_0 : I_1 : I_2 \ldots \approx 1 : (1{,}5\pi)^2 : (2{,}5\pi)^2 \ldots$. Максимальный порядок спектра определяется условием $m \leqslant b/(2\lambda)$.

• **Дифракция Фраунгофера на круглом отверстии. Разрешающая способность оптических приборов.** В случае дифракции на круглом отверстии распределение интенсивности имеет вид концентрических тем-

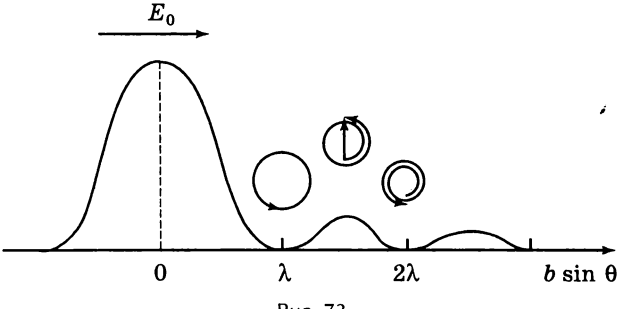


Рис. 73

ных и светлых кругов вокруг центрального светлого пятна. Распределение интенсивности при малых углах θ с осью отверстия выражается через функцию Бесселя первого порядка: $I = I_0 J_1^2(\pi D\theta/\lambda)$, где D — диаметр отверстия. Внешне угловое распределение интенсивности мало отличается от случая дифракции на щели; первый минимум соответствует углу $\theta_1 = 1{,}22\lambda/D$.

Угол θ_1 можно считать углом дифракционного расширения пучка света. Расплывание пучка будет слабым на расстояниях l, удовлетворяющих условию: $l\theta_1 \ll D$, или $l \ll D^2/\lambda$. Это неравенство является условием применимости геометрической оптики (см. разд. 5.1).

При наблюдении в оптический прибор (линза, телескоп) двух близких точек они будут изображаться на экране в виде маленьких дифракционных кружков. Условно считается, что изображения точек неразличимы, если они сблизились настолько, что центральный максимум одного кружка совпал с первым минимумом другого (*критерий Рэлея*). Значит, угловое разрешение таких приборов выражается формулой

$$\theta_{\min} = 1{,}22\frac{\lambda}{D}.$$

Этот предел возможного разрешения прибора накладывается волновой природой света и не может быть превзойден никакими техническими усовершенствованиями.

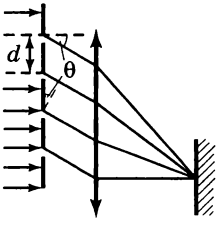


Рис. 74

• **Дифракционная решетка.** Дифракционной решеткой называется последовательность из большого числа N одинаковых параллельных щелей. Ширина каждой щели равна b, расстояние между соседними щелями, которое называют *периодом решетки*, равно d (рис. 74). Каждая щель излучает в направлении θ свет, амплитуда которого E_1 определяется выражением (11).

Разность фаз между соседними щелями равна $\delta = 2\pi d/\lambda \sin\theta$, и для вычисления итоговой амплитуды можно опять воспользоваться формулой (9) для суммы колебаний N независимых источников:

$$E = E_1 \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)}, \quad I = I_1 \frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)},$$

$$\text{где } \delta = 2\pi\frac{d}{\lambda} \sin\theta.$$

Главные максимумы дифракционной решетки определяются условием

$$d \sin\theta = m\lambda. \tag{13}$$

В направлении главных максимумов интенсивность излученной волны $I = N^2 I_1$ полностью определяется интенсивностью излучения отдельной щели в этом направлении. Если главный максимум окажется вблизи минимума $I_1(\theta)$, определяемого условием $b \sin\theta = m\lambda$, то этот максимум окажется подавленным. Максимальный порядок спектра определяется условием $m \leqslant d/\lambda$.

Между каждыми двумя главными максимумами дифракционная картина содержит $N - 1$ минимум и $N - 2$ *добавочных максимума*. Минимумы определяются условиями $d \sin\theta = (m + n/N)\lambda$ ($n = 1, 2, \ldots, N - 1$). Интенсивность добавочных максимумов гораздо меньше, чем главных, и при большом числе штрихов их можно не учитывать.

При падении света на решетку под углом $\theta_0 \neq 0$ условие главных максимумов приобретает вид:

$$d(\sin\theta - \sin\theta_0) = m\lambda. \tag{14}$$

Для грубых решеток ($d \gg \lambda$) эффективным оказывается использование скользящих лучей ($\theta_0 \approx \pi/2$), для которых условие главных максимумов приобретает вид: $d \cos\theta_0 (\theta - \theta_0) = m\lambda$. Видно, что роль эффективного периода в этом случае играет малая величина $d \cos\theta_0$.

• **Дифракционная решетка как спектральный прибор.** Свойства любого спектрального прибора определяются его *угловой дисперсией*, *дисперсионной областью* и *разрешающей способностью*.

Угловой дисперсией называется производная $D_m = d\theta_m/d\lambda$, где θ_m — положение главного максимума m-го порядка. Из условия главного максимума получим

$$D_m = \frac{m}{d\cos\theta}.$$

Дисперсионной областью называется максимальная ширина $\Delta\lambda$ спектрального интервала, при которой еще нет перекрытия спектров соседних порядков. Из уравнений $d\sin\theta = m(\lambda + \Delta\lambda)$ и $d\sin\theta = (m+1)\lambda$ имеем $\Delta\lambda = \lambda/m$. Видно, что для исследования широких участков спектра надо применять низкие порядки.

Разрешающей способностью называется отношение $R = \lambda/\delta\lambda$, где $\delta\lambda$ — наименьшая разность длин волн, которые может разрешить спектральный прибор. Две линии считаются разрешенными, если максимум одной линии попал на минимум другой (критерий Рэлея). Из уравнений $d\sin\theta = (m + 1/N)\lambda$ и $d\sin\theta = m(\lambda + \delta\lambda)$ получим $\delta\lambda = \lambda/(mN)$, т. е.

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN.$$

• **Дифракция рентгеновских лучей на кристалле.** Длина волны рентгеновских лучей сравнима с расстоянием между атомами кристаллической решетки, которая для падающих лучей представляет собой *пространственную дифракционную решетку*. Условие дифракционных максимумов состоит в одновременном выполнении трех уравнений (14) для трех взаимно перпендикулярных кристаллических осей (*условия Лауэ*):

$$d_1(\cos\alpha - \cos\alpha_0) = n_1\lambda,$$
$$d_2(\cos\beta - \cos\beta_0) = n_2\lambda, \quad d_3(\cos\gamma - \cos\gamma_0) = n_3\lambda,$$

где α, β, γ — углы с осями, связанные условием $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. Эти три уравнения нельзя одновременно удовлетворить при произвольно выбранном направлении падающего луча и заданной длине волны. Это значит, что при облучении кристалла монохроматическими, но рассеянными рентгеновскими лучами (т. е. имеющими всевозможные направления) возникают дифракционные максимумы во вполне определенных направлениях. Анализ получающихся *лауэграмм* позволяет получать информацию о строении кристалла. Дифракционные максимумы отсутствуют, если $\lambda/2$ превышает все периоды решетки; для видимого света кристалл можно считать однородной средой.

Отражение рентгеновских лучей от поверхности кристалла можно также рассматривать как интерференцию лучей, отраженных от системы последовательных атомных плоскостей в кристалле. По аналогии с интерференцией в тонких пленках (см. разд. 5.2), разность хода между лучами, отраженными от соседних плоскостей, равна $d \sin\theta$, где θ — угол между падающим лучом и атомной плоскостью (не с нормалью!), а d — межплоскостное расстояние. (Отметим, что показатель преломления рентгеновских лучей мало отличается от единицы, см. разд. 5.5.) Отражение наблюдается только в направлениях дифракционных максимумов, удовлетворяющих *условию Вульфа — Брегга*:

$$2d \sin\theta = m\lambda,$$

где $m = 1, 2, \ldots$ — порядок дифракционного максимума.

5.4. Поляризация света. Формулы Френеля

• **Поляризованный и естественный свет.** Плоская волна называется *линейно поляризованной* или *плоскополяризованной*, если колебания вектора $\vec{E}$ происхо-

дят в одной плоскости, перпендикулярной фронту волны (ее называют *плоскостью поляризации* волны). Монохроматическая плоская волна либо линейно поляризована, либо поляризована по эллипсу или по кругу (см. разд. 4.5). Эллиптически поляризованная волна представляет собой сумму двух взаимно перпендикулярных плоских волн, между колебаниями которых имеется разность фаз. *Естественный свет*, испущенный нагретыми телами, является неполяризованным, поскольку направление колебаний вектора $\vec{E}$ в каждой точке быстро и хаотически меняется. Смесь естественного и поляризованного света называется *частично поляризованным* светом.

Поляризатором называется устройство, поглощающее свет, поляризованный в одной плоскости, но пропускающее свет, поляризованный в перпендикулярной плоскости. Плоскость поляризации прошедшего света называют *плоскостью пропускания поляризатора*. Если естественный свет пропустить через поляризатор, то он станет линейно поляризованным, а его интенсивность уменьшится в два раза (если нет поглощения в плоскости пропускания поляризатора). Если линейно поляризованный свет интенсивностью I_0 пропустить через поляризатор, плоскость пропускания которого составляет угол α с плоскостью колебаний световой волны, то интенсивность прошедшей волны будет составлять

$$I = I_0 \cos^2 \alpha$$

(*закон Малюса*). Объясняется это тем, что линейно поляризованный свет с амплитудой E_0 представляет собой сумму двух линейно поляризованных волн: волна, поляризованная в плоскости пропускания (ее амплитуда равна $E_0 \cos \alpha$), пройдет через поляризатор без изменений, а вторая волна будет поглощена.

- **Отражение и преломление волн. Формулы Френеля.** Интенсивность и поляризация отраженной и пре-

ломленной волн зависят от того, как поляризована падающая волна. Запишем граничные условия на поверхности раздела двух сред:

$$E_\tau^{\mathrm{i}} + E_\tau^{\mathrm{r}} = E_\tau^{\mathrm{d}}, \quad n_1^2\,(E_n^{\mathrm{i}} + E_n^{\mathrm{r}}) = n_2^2\,E_n^{\mathrm{d}},$$

$$H_\tau^{\mathrm{i}} + H_\tau^{\mathrm{r}} = H_\tau^{\mathrm{d}}, \quad H_n^{\mathrm{i}} + H_n^{\mathrm{r}} = H_n^{\mathrm{d}}.$$

Здесь нижние индексы τ, n обозначают тангенциальную и нормальную компоненты, а верхние индексы i, r, d соответствуют падающей, отраженной и преломленной волнам. Для плоской монохроматической волны

$$\vec{E}^{\mathrm{i}} = \vec{E}_0^{\mathrm{i}} \exp\,[i(\omega t - \vec{k}^{\mathrm{i}} \cdot \vec{r})],$$

$$\vec{E}^{\mathrm{r}} = \vec{E}_0^{\mathrm{r}} \exp[i(\omega t - \vec{k}^{\mathrm{r}} \cdot \vec{r})],$$

$$\vec{E}^{\mathrm{d}} = \vec{E}_0^{\mathrm{d}} \exp[i(\omega t - \vec{k}^{\mathrm{d}} \cdot \vec{r})],$$

при этом соотношения для волновых векторов (рис. 75) имеют вид:

$$k_\parallel^{\mathrm{r}} = k_\parallel^{\mathrm{d}} = k_1 \sin\alpha,$$

$$k^{\mathrm{r}} = k_1, \quad k^{\mathrm{d}} = k_2,$$

где $k_1 = \omega n_1/c$, $k_2 = \omega n_2/c$.

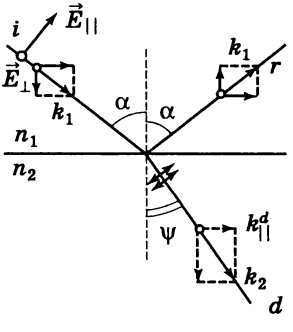


Рис. 75

Из данных соотношений получим закон отражения. В случае, когда $k_2 > k_1 \sin\alpha$ ($\sin\alpha < n_2/n_1$), приходим к *закону Снеллиуса*: $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\psi$. Если $\sin\alpha > n_2/n_1$, то происходит полное отражение волны и

$$k_\perp^{\mathrm{d}} = -i\sqrt{k_1^2 \sin^2\alpha - k_2^2} = -i(\omega/\,c)\sqrt{n_1^2 \sin^2\alpha - n_2^2}$$

оказывается мнимым, т. е. амплитуда прошедшей волны экспоненциально затухает с характерной глубиной проникновения $\delta \sim 1/\left|k_\perp^{\mathrm{d}}\right|$.

Амплитуды прошедшей и отраженной волн зависят от поляризации падающей волны. Приведем результат для отраженных волн:

$$A_{\parallel}^{r} = -A_{\parallel}^{i}\,\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\psi)}{\operatorname{tg}(\alpha+\psi)}, \quad A_{\perp}^{r} = -A_{\perp}^{i}\,\frac{\sin(\alpha-\psi)}{\sin(\alpha+\psi)}$$

(*формулы Френеля*). Здесь первая формула относится к волне, поляризованной в плоскости падения, а вторая — к волне, поляризованной в перпендикулярной плоскости. Видно, что при угле падения, удовлетворяющем условию $\alpha + \psi = \pi/2$, волна, поляризованная в плоскости падения, отражаться не будет. Так как в этом случае $\sin\psi = \cos\alpha$, то угол падения, при котором отраженная волна будет линейно поляризованной перпендикулярно плоскости падения (*угол Брюстера*), удовлетворяет соотношению:

$$\operatorname{tg}\alpha = n.$$

Качественное объяснение состоит в том, что в этом случае направление колебаний диполей (указаны на рисунке), возбужденных во второй среде волной, поляризованной в плоскости падения, оказывается параллельным направлению отраженной волны (отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны). Но осциллятор не излучает волну в направлении своих колебаний (см. разд. 4.5).

В случае нормального падения различие между поляризациями пропадает:

$$A^{r} = A^{i}\,\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}.$$

Видно, что при отражении от оптически более плотной среды ($n_2 > n_1$) фаза колебаний сменяется на противоположную (точнее, к фазе добавляется π).

Отношение потока отраженной энергии к потоку падающей энергии называется *коэффициентом отражения*. При нормальном падении он равен

$$R = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}. \qquad (15)$$

Коэффициент пропускания равен $D = 1 - R$. Коэффициенты R и D зависят только от относительного показателя преломления двух сред.

Пример. Просветление оптики. Коэффициент отражения стекол в оптических приборах невелик (несколько процентов). Тем не менее важной задачей является уменьшение отражения для определенных длин волн. Для этого на поверхность наносят прозрачную пленку с показателем преломления $n' = \sqrt{n}$ (n — показатель преломления стекла) и толщиной $\lambda/(4n')$. Оптическая разность хода между лучами, отраженными от поверхностей пленки, равна $\lambda/2$ (изменение фазы при отражении учитывать не надо, так как оно происходит у каждого из лучей), а коэффициенты отражения на этих поверхностях будут близки друг к другу (см. формулу (15)). В результате произойдет почти полное гашение отраженного света.

- **Оптически анизотропные среды.** В случае сред, обладающих анизотропией, векторы $\vec{E}$ и $\vec{D}$ в общем случае уже не параллельны друг другу. Линейная связь между ними носит тензорный характер, т. е. каждая из компонент вектора $\vec{D}$ выражается в виде линейной комбинации всех трех компонент вектора $\vec{E}$. Существуют три взаимно перпендикулярные оси, называемые *диэлектрическими осями кристалла*, для которых $D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_i E_i$ ($i = 1, 2, 3$). Значения ε_i называются *главными диэлектрическими проницаемостями* кристалла. Мы рассмотрим только случай *одноосных кристаллов*, у которых две из трех ε_i равны друг другу ($\varepsilon = \varepsilon_\perp$). Выделенная ось ($\varepsilon = \varepsilon_\parallel$) называется *оптической осью кристалла*.

При распространении в одноосном кристалле плоской волны вводят *главное сечение кристалла* — плоскость, проходящую через оптическую ось и вектор нормали $\vec{n}$ к фронту волны. Оказывается, что распространение линейно поляризованной световой волны зависит от направления ее поляризации. Волна, поляризованная перпендикулярно главному сечению, называется *обыкновенной*. Скорость распространения такой волны $v_\perp = c/\sqrt{\varepsilon_\perp}$ не зависит от направления; колебания векто-

ров $\vec{E}$ и $\vec{D}$ направлены одинаково; направление распространения энергии (т. е. вектора Пойнтинга $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$) перпендикулярно фронту волны. Волна, поляризованная параллельно главному сечению, называется *необыкновенной*. Скорость ее распространения зависит от угла между $\vec{n}$ и оптической осью (при угле $\pi/2$ между ними она равна $v_{\parallel} = c/\sqrt{\varepsilon_{\parallel}}$). Колебания векторов $\vec{E}$ и $\vec{D}$ происходят в разных направлениях, вектор Пойнтинга $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ не перпендикулярен фронту волны (нормаль к фронту волны параллельна $\vec{D} \times \vec{H}$). Разница между обыкновенным и необыкновенным лучами исчезает только при распространении света параллельно оптической оси.

При падении света на поверхность кристалла он разделяется на обыкновенный и необыкновенный лучи, линейно поляризованные перпендикулярно друг другу и имеющие разные показатели преломления (*явление двулучепреломления*). Закону преломления (см. разд. 5.1) подчиняется направление распространения фронта необыкновенной волны, сам же луч может выйти из плоскости падения. Даже при нормальном падении луча на кристалл, вырезанный под углом к оптической оси, происходит пространственное разделение лучей (рис. 76). Положения фронтов указаны черточками, положение оптической оси — стрелкой. Необыкновенный луч поляризован в плоскости чертежа, обыкновенный — перпендикулярен ей.

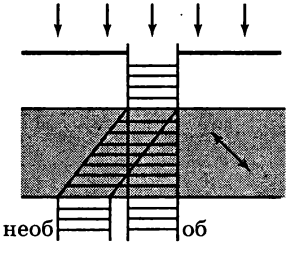


Рис. 76

Для получения и анализа поляризованного света используют *поляризационные призмы* (*николи*), разрезанные под углом к распространению лучей таким образом, что обыкновенный луч испытывает на плоскости разреза полное отражение и уходит в сто-

рону, а необыкновенный луч проходит прямо. Другой способ получения поляризованного света основан на различии в поглощении обыкновенного и необыкновенного лучей в некоторых веществах. При пропускании света через *дихроичную пластину* (пластинку турмалина, поляроид) обыкновенный луч поглощается, и наружу выходит линейно поляризованный необыкновенный луч.

Для анализа характера поляризации света изучают зависимость интенсивности от ориентации николя. Если интенсивность не меняется, то свет либо естественный, либо поляризован по кругу. Чтобы различить эти случаи, используют *пластинку в четверть волны*, или *компенсатор*. Толщина пластинки d подобрана так, чтобы разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами $\Delta = \Delta n\, d$ равнялась $\lambda/4$. Сдвиг фаз между взаимно перпендикулярными колебаниями станет равным либо нулю, либо π, и круговая поляризация превратится в линейную.

- **Вращение плоскости поляризации.** При распространении в некоторых веществах (их называют *оптически активными*) линейно поляризованного света происходит *вращение плоскости поляризации*. Угол поворота пропорционален толщине пластины: $\chi = \alpha l$, где α — *вращение на единицу длины*. В зависимости от направления поворота различают право- и левовращающие вещества. Пример — пластинка кварца, вырезанная перпендикулярно оптической оси (кварц бывает как лево-, так и правовращающим). В растворах оптически активного вещества в неактивном растворителе α пропорционально концентрации. Молекулы активных веществ обладают асимметрией по отношению к правому и левому вращению по типу спирали. Явление вращения плоскости поляризации можно охарактеризовать как круговое двойное лучепреломление. Волны, поляризованные по кругу в разные стороны, распространяются с разными скоростями, т. е. разность фаз между ними меняется. Сумма двух таких ко-

лебаний представляет собой линейное колебание, направление которого зависит от разности фаз.

- **Искусственная анизотропия.** При помещении многих изотропных тел в однородное электрическое поле у них возникает одноосная анизотропия с оптической осью, ориентированной параллельно напряженности поля (*электрооптический эффект Керра*). Разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами при распространении света перпендикулярно $\vec{E}$ пропорциональна квадрату напряженности:

$$\Delta\varphi = 2\pi BlE^2,$$

где l — толщина слоя вещества, а B называется *постоянной Керра*. Искусственная анизотропия возникает в тех случаях, когда поляризуемость молекул вещества зависит от их ориентации по отношению к полю. Аналогичный эффект возникает при помещении некоторых веществ в магнитное поле (*эффект Коттона — Мутона*). Он описывается соотношением $\Delta\varphi = 2\pi ClB^2$.

При помещении неактивных веществ в сильное магнитное поле может возникнуть оптическая активность для света, распространяющегося параллельно вектору $\vec{B}$ (*магнитное вращение плоскости поляризации*). Вращение на единицу длины в этом случае (для диа- и парамагнетиков) пропорционально величине магнитной индукции: $\alpha = RB$, где R называется *постоянной Верде*.

5.5. Дисперсия и поглощение света

- **Классическая модель диспергирующей среды.** При распространении в веществе электромагнитной волны заряженные частицы среды приходят в вынужденное колебательное движение. Амплитуда этих колебаний и их сдвиг по фазе по отношению к колебаниям напряженности зависят от соотношения частоты волны ω и частоты собственных колебаний частиц ω_0 (см. разд. 4.3).

Результирующее волновое возмущение можно рассматривать как результат интерференции исходной волны и волн, излученных частицами среды (такой подход называют *молекулярной оптикой*). Однако в случае однородной среды можно получить частотные характеристики волны полуфеноменологически, учитывая возникающую при смещении частиц поляризованность, вводя зависящие от частоты диэлектрическую восприимчивость и проницаемость и вычисляя показатель преломления. Затухание волны, т. е. преобразование энергии колебаний в тепловую энергию, учитывается введением полуэмпирических коэффициентов затухания осцилляторов; диэлектрическая проницаемость и показатель преломления становятся при этом комплексными числами.

Рассмотрим сначала среду из одинаковых осцилляторов. Уравнение движения заряженной частицы имеет вид

$$\ddot{\vec{\xi}} + 2\beta\dot{\vec{\xi}} + \omega_0^2\vec{\xi} = \frac{e}{m}\vec{E},$$

где $\vec{E}$ — поле, действующее на частицу (в оптическом диапазоне играют роль только электроны). В неплотных газах можно не учитывать отличие локального поля от среднего, т. е. считать, что на электроны действует непосредственно поле волны $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})]$. Решение уравнения движения ищем в виде $\vec{\xi} = \vec{\xi}_0 \exp(i\omega t)$, и после подстановки получим

$$\vec{\xi} = \frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega)}\vec{E}$$

(в комплексной записи автоматически учитывается сдвиг фаз). Смещение частиц приводит к появлению у молекул дипольных моментов $\vec{p} = \varepsilon\vec{\xi}$, т. е. к появлению поляризованности $\vec{P} = N\vec{p}$ (N — концентрация). Из соотношения $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E}$ находим комплексную диэлектрическую проницаемость

$$\varepsilon = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\beta\omega)}. \qquad (16)$$

Показатель преломления тоже будет мнимый: $\sqrt{\varepsilon} = n - i\varkappa$, причем через действительную часть выражается фазовая скорость волны, а через $\varkappa$ — коэффициент затухания:

$$E = E_0 \exp\left(-\frac{\varkappa\omega}{c}x\right) \exp[i(\omega t - kx)]. \qquad (17)$$

Чтобы найти $n(\omega)$ и $\varkappa(\omega)$, надо в равенстве $\varepsilon = (n - i\varkappa)^2$ приравнять действительные и мнимые части. Вдали от собственной частоты (при $|\omega - \omega_0| \gg \beta$) получим

$$\varepsilon = n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Зависимости $n(\omega)$ и $\varkappa(\omega)$ качественно изображены на рис. 77. Там, где поглощение невелико, показатель преломления возрастает с частотой (*нормальная дисперсия*). В узкой области сильного поглощения наблюдается *аномальная дисперсия.*

Аналогичная ситуация возникает возле каждой собственной частоты (ω_{01} и ω_{02} на рис. 77). Например, в инфракрасной области спектра наблюдаются полосы поглощения и аномальной дисперсии, связанные с колебаниями ионов. Полосы поглощения в ультрафиолетовой (иногда — в видимой) областях спектра объясняются колебаниями электронов на внешних оболочках атомов (оптических электронов). В рентгеновской об-

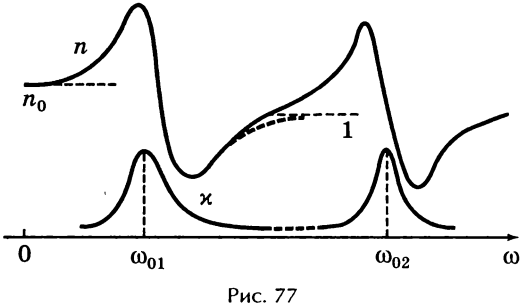


Рис. 77

ласти спектра частота волны ω велика по сравнению со всеми собственными частотами и зависимость $n(\omega)$ определяется колебаниями электронов, которые можно считать свободными:

$$n^2 = 1 - \frac{Ne^2}{m\varepsilon_0\omega^2}. \qquad (18)$$

Коэффициент преломления рентгеновских лучей мало отличается от единицы. Такая же формула верна для волны, распространяющейся в разреженной плазме, содержащей свободные электроны.

Фазовая скорость волны в плазме (а также справа от полосы поглощения в диэлектрике) оказывается больше скорости света в вакууме ($n < 1$). Однако здесь не содержится противоречия с теорией относительности, так как групповая скорость волны $u = d\omega/dk$ (см. разд. 4.4) будет при этом меньше c. Убедимся в этом для волны в плазме. Используя соотношение $k^2 = \omega^2 n^2(\omega)/c^2$ и уравнение (18), получим:

$$c^2 k\, dk = \omega\, d\omega \Rightarrow \frac{\omega}{k}\frac{d\omega}{dk} = c^2.$$

Значит, в этом случае $u = nc < c$.

У полярных молекул (например, воды) широкая полоса аномальной дисперсии находится в области сантиметровых радиоволн, где амплитуда вращательных колебаний диполей, стремящихся повернуться вслед за напряженностью поля, сильно зависит от частоты. Именно в этой области происходит уменьшение $n = \sqrt{\varepsilon}$ от большого статического значения (для воды $n_0 \approx 9$) к высокочастотному значению (для воды $n \approx 1{,}3$).

Формула (16) верна только при n, близких к единице, когда можно пренебречь отличием поля, действующего на молекулу, от среднего поля в веществе. Обобщением на случай плотных газов и жидкостей является *формула Лорентц — Лоренца*:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ne^2}{3\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

которая следует из формулы Клаузиуса — Масотти (см. разд. 3.6).

При изменении плотности вещества величина

$$r = \frac{1}{\rho}\,\frac{n^2-1}{n^2+2},$$

которая называется *удельной рефракцией*, должна оставаться постоянной.

• **Рассеяние света. Ослабление волны.** Интенсивность волны в среде уменьшается не только из-за поглощения света, но и вследствие его рассеяния. Рассеяние объясняется излучением света атомными осцилляторами, которое происходит по всем направлениям (см. разд. 4.5). Однако в идеально однородной среде свет, рассеянный молекулами, находящимися на расстоянии $\lambda/2$ друг от друга, испытывал бы полное интерференционное гашение, и ослабление за счет рассеяния в этом случае отсутствовало бы. Рассеяние наблюдается на малых инородных частицах (*тиндалевское рассеяние в мутных средах*) и на неоднородностях, возникающих вследствие флуктуаций плотности (*рэлеевское рассеяние*).

Интенсивность света, рассеянного на неоднородностях, размеры которых малы по сравнению с длиной волны, пропорциональна λ^{-4} (*закон Рэлея*, см. также разд. 4.5). Этим объясняется голубой цвет неба (рассеянный солнечный свет) и желто-красный цвет солнца (проходящий свет). Степень поляризации рассеянного естественного света зависит от угла рассеяния; свет, рассеянный под углом $\pi/2$, оказывается полностью поляризованным. Качественное объяснение состоит в том, что в этом направлении излучают только осцилляторы, направление колебаний которых перпендикулярно направлению рассеяния. Рассеяние на неоднородностях, бо́льших по сравнению с длиной волны, слабо зависит от частоты; этим объясняется белый цвет облаков.

Рэлеевское рассеяние на флуктуациях плотности или концентрации зависит от температуры. При приближении к критической точке средние размеры флуктуаций резко возрастают и наблюдается белое помутнение жидкости, называемое *критической опалесценцией*.

Ослабление пучка света при не очень большой интенсивности происходит по экспоненциальному закону (*закон Бугера*):

$$I = I_0 e^{-\alpha x},$$

где *коэффициент ослабления* α равен сумме коэффициента поглощения, который выражается через мнимую часть показателя преломления (см. формулу (17)), и коэффициента рассеяния, который описывает ослабление волны из-за рассеяния.

5.6. Тепловое излучение

- **Равновесное тепловое излучение.** Излучение электромагнитной (лучистой) энергии телом за счет энергии хаотического (теплового) движения его молекул называется *тепловым излучением*. Свойства теплового излучения определяются материалом тела и его температурой. Если из любого материала сделать замкнутую полость и поддерживать температуру ее стенок постоянной, то система (стенка + излучение) придет в состояние термодинамического равновесия, и в объеме полости установится *равновесное тепловое излучение*. Важнейшая особенность равновесного излучения состоит в том, что его свойства полностью определяются температурой стенок и не зависят от их материала. Это утверждение является следствием второго начала термодинамики. Кроме того, равновесное излучение однородно и изотропно.

Основные характеристики как излучения с поверхности тела, так и излучения в объеме были введены в разд. 5.1. Излучение с поверхности характеризуется энергетической яркостью B и энергетической светимостью R, равной количеству лучистой энергии, излученной с единицы поверхности за единицу времени по всем направлениям (т. е. в телесный угол 2π). Вводятся также спектральные разложения энергетической светимости

r_λ, r_ω, r_ν, например, $R = \int\limits_0^\infty r_\lambda \, d\lambda$; величины r называются *излучательными способностями тела*. Излучение в объеме характеризуется интенсивностью лучистого потока I и объемной плотностью лучистой энергии u, а также их спектральными разложениями. В случае изотропного излучения они связаны соотношением $u = 4\pi I/c$. Освещенность E определяется как полный лучистый поток через единичную площадку со всех направлений (из телесного угла 2π); в случае изотропного излучения выполняются соотношения

$$E = \pi I = \frac{1}{4} \, cu.$$

Спектральные плотности освещенности E обозначим ε_λ, ε_ν и ε_ω. Пересчет от одной спектральной характеристики к другой обсуждается в разд. 5.1.

• **Поглощательная способность. Закон Кирхгофа.** *Поглощательной способностью* тела называется доля падающей лучистой энергии, поглощенная телом (для узкого интервала длин волн или частот):

$$a_\lambda = \frac{d\Phi_{\text{погл}}}{d\Phi_{\text{пад}}}.$$

Тело, для которого $a\lambda = 1$ во всем спектральном интервале, называется *абсолютно черным телом*. Моделью черного тела может служить замкнутая полость с небольшим отверстием; почти все лучи, попадающие в полость через отверстие, в результате многократных отражений от внутренних стенок оказываются поглощенными. Тело, у которого $a_\lambda = \text{const} < 1$, называют *серым*.

Так как равновесное излучение находится в равновесии с поверхностью, то для любого спектрального интервала количество поглощенной лучистой энергии, равное $\varepsilon_\lambda \, a_\lambda \, d_\lambda$, должно быть равно количеству излучен-

ной энергии, равному $r_\lambda\, d\lambda$. Поскольку характеристики равновесного объемного излучения не зависят от свойств конкретного тела, то отношение излучательной способности любого тела к его поглощательной способности оказывается универсальной функцией длины волны и температуры (*закон Кирхгофа*):

$$\frac{r_\lambda}{a_\lambda} = \varepsilon_\lambda(T) = \frac{1}{4}\, cu_\lambda(T). \qquad (19)$$

Поскольку для абсолютно черного тела поглощательная способность равна единице, то стоящая справа функция есть не что иное, как *излучательная способность абсолютно черного тела*, которую обозначим $r^*\lambda$:

$$\frac{r_\lambda}{a_\lambda} = r^*_\lambda\,(T).$$

Видно, что излучательная способность абсолютно черного тела и его энергетическая светимость не зависят от способа его изготовления; они связаны с объемной плотностью энергии соотношениями

$$r^*_\lambda(T) = \frac{1}{4}\, cu_\lambda(T), \quad R^*(T) = \frac{1}{4}\, cu(T). \qquad (20)$$

При одной и той же температуре абсолютно черное тело обладает самой большой излучательной способностью и энергетической светимостью. Например, для серого тела $R = \alpha R^*$. Отметим, что поскольку равновесное излучение изотропно, черное тело является ламбертовским источником (см. разд. 5.1).

- **Законы Стефана — Больцмана и Вина.** Излучательная способность абсолютно черного тела при данной температуре стремится к нулю при малых и больших λ и достигает максимального значения при некоторой длине волны λ_m, которая зависит от температуры. Площадь под кривой r^*_λ равна энергетической светимости $R^*(T)$. Применение к равновесному излучению в полости общих соотношений термодинамики позволило получить

для него ряд общих соотношений. (Температура равновесного теплового излучения считается равной температуре стенок.) *Закон Стефана—Больцмана* утверждает, что энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени температуры:

$$R^* = \sigma T^4, \tag{21}$$

где $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт · м$^{-2}$К$^{-4}$ — *постоянная Стефана—Больцмана.*

Для вывода (21) надо воспользоваться выражением для давления изотропного излучения $p = u/3$ (см. разд. 2.5) и формулой $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$, которая является следствием второго начала термодинамики (разд. 2.3). Подставляя $U = u(T)V$, придем к уравнению $4u = du/dT$, откуда получим $u \sim T^4$. Кроме того, из формулы для давления и из первого начала термодинамики $\left(0 = d(uV) + \frac{1}{3}u\,dV\right)$ можно для равновесного излучения вывести уравнение адиабатического процесса: $uV^{4/3} = \text{const}$. Отсюда с учетом $u \sim T^4$ получим $VT^3 = \text{const}$.

Если рассмотреть медленное адиабатическое изменение объема излучения, заключенного в сосуд с зеркальными стенками, и применить к отражению света от движущегося зеркала формулу эффекта Доплера (см. разд. 4.4,4.5), то удается доказать *формулу Вина*:

$$r_\lambda^* = \lambda^{-5} f_1(\lambda T) \quad \text{или} \quad r_\lambda^* = T^5 f_2(\lambda T), \tag{22}$$

где $f_i(x)$ — неизвестные функции, вид которых не может быть установлен в рамках термодинамики. Аналогичные выражения для r_ω^* имеют вид

$$r_\omega^* = \omega^3 \varphi_1(\omega/T) \quad \text{или} \quad r_\omega^* = T^3 \varphi_2(\omega/T). \tag{23}$$

Из формулы Вина (22) (или (23)) можно вывести закон Стефана — Больцмана (21). Кроме того, из этих формул следует *закон смещения Вина*, выражающий зави-

симость положения максимума функции r^*_λ (или r^*_ω) от температуры:

$$\lambda_m T = b \quad (\omega_m/T = b_1), \quad (24)$$

где $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ м·К — постоянная Вина. Например, при уменьшении температуры в два раза положение максимума функции r^*_ω (или u_ω) становится в два раза ближе к началу координат, а сам максимум становится в восемь раз ниже (рис. 78); площадь под графиком уменьшается при этом в 16 раз.

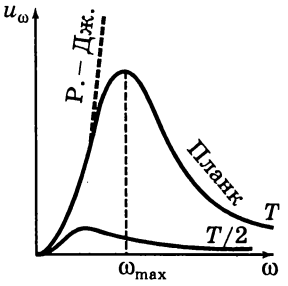


Рис. 78

- **Формула Рэлея—Джинса.** Рэлей и Джинс предприняли попытку получить вид функции u_ω в рамках классической статистической физики. Они рассмотрели излучение в полости как ансамбль стоячих электромагнитных волн, случайным образом обменивающихся энергией со стенками и между собой. С точки зрения статистики, каждая независимая стоячая волна, имеющая некоторую частоту колебаний, эквивалентна осциллятору с такой же частотой. Вычисление энергии сводится к двум независимым вопросам:

1. Какое число dg осцилляторов (стоячих волн) приходится на интервал частот $d\omega$? Ответ должен выражаться в виде функции $G(\omega)$, которую называют *плотностью состояний*: $dg = VG(\omega)\,d\omega$, где V — объем сосуда.

Для вычисления $G(\omega)$ можно рассмотреть сосуд в форме прямоугольного параллелепипеда со сторонами L_x, L_y, L_z. Граничные условия (например, требование, чтобы на границах находились узлы стоячих волн) приводят к условиям $k_\xi L_\xi = m_\xi \pi$ ($\xi = x, y, z$). Значит, в пространстве волновых векторов допустимые состояния соответствуют узлам решетки со сторонами π/L_ξ и объемом ячейки $\delta = \pi^3/(L_x L_y L_z) = n^3/V$. Объем k-пространства, соответствующий изменению величины вол-

нового вектора от k до $k + dk$, равен $\frac{1}{8}(4\pi k^2\, dk)$ (объем сферического слоя, отсекаемый первым квадрантом). Разделив на объем ячейки, получим число пространственно различных колебаний в интервале dk: $dg = V\frac{k^2 dk}{2\pi^2}$. Необходимо также учесть дополнительные степени свободы (в случае электромагнитных волн—два возможных состояния поляризации), которые для общности учтем дополнительным множителем γ.

Найдем число состояний на единицу объема:

$$\frac{dg}{V} = \gamma\frac{k^2 dk}{2\pi^2}. \qquad (25)$$

Эта формула получена из граничных условий и имеет очень общий характер и многочисленные применения. Для перехода к ω надо учесть соотношение $k = \omega/c$. Окончательно получим

$$G(\omega) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}. \qquad (26)$$

2. Чему равна средняя энергия одного осциллятора?

Классическая физика дает следующий ответ (см. разд. 2.2): каждому осциллятору, независимо от его частоты, надо приписать две степени свободы, и в соответствии с теоремой о равнораспределении энергии, средняя энергия каждого осциллятора должна быть равна kT, где k — постоянная Больцмана.

В результате таких рассуждений классическая физика приводит к *формуле Рэлея —Джинса*:

$$u_\omega = G(\omega)kT = \frac{\omega^2 kT}{\pi^2 c^3}. \qquad (27)$$

Опыт показывает, что формула Рэлея — Джинса хорошо выполняется на малых частотах (при $\omega \ll \omega_{max}$), но абсолютно неверна на больших (рис. 78). Действительно, хотя (27) удовлетворяет требованиям, налагаемым на любую возможную функцию u_ω формулой Вина (23), но сразу видно, что полученная функция не имеет мак-

симума; она монотонно возрастает, и интеграл $\int\limits_0^\omega u_\omega\, d\omega$, т. е. полная энергия излучения, равен бесконечности! Эта ситуация стала одним из признаков глубокого кризиса классической физики и была названа современниками *ультрафиолетовой катастрофой*.

- **Формула Планка.** Теорема о равнораспределении энергии является следствием того, что классическая энергия осциллятора, пропорциональная квадрату его амплитуды, может принимать любые, в том числе очень маленькие значения. Согласно *квантовой гипотезе Планка* энергия осциллятора (отсчитываемая от минимального значения) может принимать только дискретные значения, кратные некоторой величине, зависящей от частоты осциллятора:

$$\varepsilon_n(\omega) = n\varepsilon_1(\omega), \quad n = 0, 1, \ldots . \tag{28}$$

Для вычисления средней энергии можно использовать формулу Максвелла — Больцмана (см. разд. 2.5), согласно которой вероятность состояния с энергией ε пропорциональна $\exp[-\varepsilon/(kT)]$. Получаем

$$\langle\varepsilon(\omega)\rangle = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_1 \exp[(-n\varepsilon_1)/(kT)]}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp[(-n\varepsilon_1)/(kT)]}.$$

Ряд в знаменателе есть просто сумма геометрической прогрессии, а числитель получается из знаменателя дифференцированием по $1/(kT)$. Проведя вычисления, имеем

$$\langle\varepsilon(\omega)\rangle = \varepsilon_1\left[\exp\left(\frac{\varepsilon_1}{kT}\right) - 1\right]^{-1},$$

$$u_\omega = G(\omega)\langle\varepsilon(\omega)\rangle = \frac{\omega^2\langle\varepsilon(\omega)\rangle}{\pi^2 c^3}. \tag{29}$$

Сравнение с формулой Вина (23) показывает, что $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\omega)$ должна быть пропорциональна ω:

$$\varepsilon_1(\omega) = \hbar\omega, \tag{30}$$

где $\hbar = h/(2\pi) = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж $\omega \cdot$ с — универсальная постоянная, называемая *постоянной Планка*. Так как энергия кванта пропорциональна частоте осциллятора, то при данной температуре колебания высоких частот возбуждаются с очень малой вероятностью и их вклад в энергию излучения оказывается ничтожно малым. Это разрешает проблему ультрафиолетовой катастрофы.

После подстановки (30) в формулу для средней энергии получим *формулу Планка* для спектральной плотности энергии:

$$u_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right]^{-1}. \tag{31}$$

График этой функции приведен на рис. 78. Запишем формулу Планка также в переменных ν и λ:

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\left[\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1\right]^{-1},$$

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\left[\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1\right]^{-1}. \tag{32}$$

При $\hbar\omega \ll kT$ формула Планка переходит в формулу Рэлея — Джинса (27). Из формулы Планка можно получить выражения для постоянных Стефана — Больцмана и Вина через универсальные постоянные:

$$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 \hbar^3}, \quad b \approx 0{,}345\frac{hc}{k}.$$

Формула Планка очень хорошо согласуется с экспериментом во всем диапазоне частот.

5.7. Световые кванты

• **Фотоэффект.** *Внешним фотоэффектом* называют вырывание электронов из вещества под действием света. Для изучения фотоэффекта используют вакуумную лампу с холодным катодом (в этом случае термоэлектронную эмиссию можно не учитывать). Облучая катод светом фиксированной частоты и интенсивности, снимают вольтамперную характеристику лампы (зависимость тока от анодного напряжения). По вольтамперной характеристике (рис. 79) узнают: а) число электронов, вырываемых из катода в единицу времени (оно выражается через ток насыщения: $N = I_{нас}/e$) и б) максимальную кинетическую энергию вырываемых электронов; она выражается через *задерживающее напряжение*, т. е. анодное напряжение, при котором ток обращается в нуль:

$$\frac{1}{2}\,mv^2 = eU_з.$$

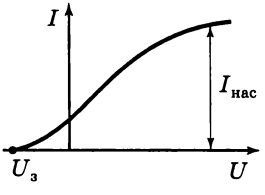


Рис. 79

При этом напряжении даже самые быстрые электроны не могут долететь до анода.

Первый закон фотоэффекта: количество электронов, вырываемых светом из металла в единицу времени, прямо пропорционально интенсивности световой волны[1].

Второй закон фотоэффекта: максимальная кинетическая энергия фотоэлектронов линейно возрастает с частотой света и не зависит от интенсивности света. Если частота света меньше определенной для данного вещества минимальной частоты ν_{min}, то фотоэффект не наблюдается (*красная граница фотоэффекта*). Экспериментально было обнаружено, что зависимость $eU_з$ от ν для данного металла имеет вид наклонной прямой,

[1] Законы фотоэффекта были открыты Столетовым.

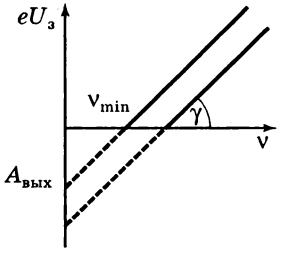


Рис. 80

причем наклон прямых, построенных для разных металлов, оказался одинаковым (рис. 80).

Классическая волновая теория света не смогла объяснить второй закон фотоэффекта. Кроме того, в рамках этой теории выглядело необъяснимым полное отсутствие задержки между началом облучения и возникновением тока.

● **Кванты света.** Объяснение законов фотоэффекта было дано Эйнштейном. Он опирался на квантовую гипотезу Планка (разд. 5.6), но пошел гораздо дальше, предположив, что кванты световой энергии поглощаются целиком отдельными электронами. Это означает, что в процессе поглощения свет ведет себя как локализованная частица (ее назвали *фотоном*) с энергией

$$E_\nu = h\nu = \hbar\omega = hc/\lambda. \qquad (33)$$

Как любая безмассовая частица, движущаяся со скоростью света, *квант света — фотон* — обладает импульсом

$$p_\nu = E_\nu/c = h\nu/c = h/\lambda. \qquad (34)$$

Связь между энергией и импульсом безмассовой частицы дается теорией относительности (см. разд. 1.11).

Квантовые свойства света проявляются при испускании, поглощении и рассеянии света. В явлениях, связанных с распространением света, проявляются его волновые свойства. Свет обладает двойственной природой (корпускулярно-волновой дуализм). Такие же свойства проявляют все элементарные частицы.

Фотоэффектом (актом фотоэффекта) называется поглощение фотона какой-нибудь частицей, например электроном. В результате фотоэффекта квант света исчезает, а электрон приобретает дополнительную энер-

гию. Если фотоэлектрон вылетает из вещества, то наблюдается внешний фотоэффект; если остается внутри, то имеет место *внутренний фотоэффект*. При внутреннем фотоэффекте электроны могут переходить из связанного состояния в свободное, в результате чего увеличивается число носителей тока и, следовательно, уменьшается сопротивление. Фотоэффект используется при создании фотоэлементов, фотореле и т. д.

Пример 1. Может ли происходить фотоэффект на свободном электроне?

Решение. Нет, не может, так как при этом не могут одновременно выполняться законы сохранения энергии и импульса. Это становится очевидным, если перейти в инерциальную систему отсчета, в которой электрон после фотоэффекта покоится. До фотоэффекта в системе были квант света и движущийся электрон, а после фотоэффекта — только неподвижный электрон, т. е. энергия не сохраняется.

Поглощая квант света, электрон приобретает энергию $h\nu$. При вылете из металла энергия каждого электрона уменьшается на определенную величину, которую называют *работой выхода* $A_{вых}$ (работа, которую необходимо затратить, чтобы удалить электрон из металла; работа выхода зависит от рода вещества). Максимальная энергия электронов после вылета (если нет других потерь) имеет вид

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - A_{вых} \qquad (35)$$

(*уравнение Эйнштейна*). Если $h\nu < A_{вых}$, то внешний фотоэффект не происходит. Значит, *красная граница фотоэффекта* равна

$$\nu_{min} = A_{вых}/h.$$

Из (35) видно, что наклон прямых на графике $eU_з$ от ν (рис. 80) равен h, а отрезок, отсекаемый прямой от оси ординат, равен работе выхода.

Энергию фотонов и работу выхода принято выражать во внесистемных единицах — *электронвольтах* (эВ). Один эВ равен энергии, приобретенной электро-

ном при прохождении им разности потенциалов −1 В: 1 эВ = 1,6022 · 10^{-19} Дж. Если, например, задерживающее напряжение равно −3,5 В, то максимальная кинетическая энергия электронов равна 3,5 эВ.

Пример 2. Существование работы выхода означает, что на границе металла возникают силы, удерживающие электрон внутри металла. Как объяснить притяжение электрона к электронейтральному металлу?

Решение. Заряженная частица притягивается наведенными на поверхности проводника зарядами противоположного знака. Сила притяжения вычисляется с помощью метода электростатических изображений (разд. 3.5). Вылетающие и возвращающиеся электроны образуют возле поверхности отрицательно заряженное облако, а заряды на поверхности металла — положительно заряженный слой. Между заряженными слоями существует ненулевая средняя напряженность поля, направленная наружу.

- **Граница рентгеновского спектра.** Если электроны разогнать в вакуумной трубке, к электродам которой приложено напряжение в несколько киловольт, то при ударе электронов об анод возникает *тормозное рентгеновское излучение*. Исследование спектра этого излучения показывает, что в нем отсутствуют длины волн, меньшие некоторого значения $\lambda_к$, которое обратно пропорционально приложенному к трубке напряжению. Этот факт находит естественное объяснение в квантовой оптике. Энергия излученного фотона не может превысить кинетическую энергию электрона: $hc/\lambda \leqslant eU$, откуда получим

$$\lambda \geqslant \lambda_к = \frac{hc}{eU}.$$

Теоретическое значение коэффициента пропорциональности между $\lambda_к$ и $1/U$ хорошо согласуется с экспериментом.

- **Давление света.** Давление света было предсказано Максвеллом на основе электромагнитной теории и измерено Лебедевым. Установка Лебедева состояла из легкого стержня, подвешенного в вакууме на тонкой

нити. По краям стержня были закреплены две тонких пластинки — одна отражающая, другая поглощающая. Освещая пластинки и измеряя закручивание нити, он вычислял световое давление.

Электромагнитная теория давала следующее объяснение световому давлению: электрическое поле электромагнитной волны вызывает в металле ток, на который действует сила Ампера со стороны магнитного поля волны; эта сила направлена в сторону распространения волны и является причиной светового давления. Гораздо проще выглядит объяснение давления на языке световых квантов: фотоны, каждый из которых обладает импульсом (34), поглощаются или отражаются, передавая свой импульс веществу. При отражении фотона переданный импульс в два раза больше, чем при поглощении (см. также разд. 4.5).

- **Эффект Комптона.** При взаимодействии фотона со свободным электроном процесс поглощения фотона запрещен законами сохранения, но может происходить рассеяние фотона. Если первоначально электрон покоился, то в результате взаимодействия он приобретет некоторую скорость. Закон сохранения энергии требует, чтобы энергия фотона уменьшилась на величину кинетической энергии электрона, что означает, что должна уменьшиться его частота. В то же время с точки зрения волновой теории частота рассеянного света должна совпадать с частотой падающего. Это явление называется *эффектом Комптона*, оно было обнаружено при рассеянии рентгеновских лучей и сыграло важную роль в утверждении квантовых представлений.

Рассеяние фотона на электроне можно рассматривать как упругое соударение двух частиц, подчиняющееся законам сохранения энергии и импульса:

$$pc + mc^2 = p'c + \vec{E}'_e, \quad \vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}'_e,$$

где $\vec{p}$ и $\vec{p}'$ — начальный и конечный импульсы фотона, $\vec{p}'_e$ и $\vec{E}'_e$ — импульс и энергия электрона отдачи. Выразим энергию и импульс электрона отдачи и подставим

в соотношение $\vec{E}_e'^{\,2} - \vec{p}_e'^{\,2}c^2 = m^2c^4$ (см. разд. 1.11). После преобразований имеем

$$mc(p - p') = pp'(1 - \cos\theta),$$

где θ — угол рассеяния фотона (угол между векторами $\vec{p}$ и $\vec{p}'$). Выразив из уравнения (34) импульсы падающего и рассеянного фотонов: $p = h/\lambda$, $p' = h/\lambda'$, получим формулу для зависимости эффекта Комптона от угла рассеяния:

$$\lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\theta).$$

Величина $\lambda_C = h/mc = 2{,}43 \cdot 10^{-12}$ м называется *комптоновской длиной волны электрона*. Энергия фотона с длиной волны λ_C равна энергии покоя электрона mc^2. Максимальный эффект соответствует рассеянию фотона на угол $\theta = \pi$.

● **Число фотонов в равновесном излучении.** Формулу Планка (31) для плотности энергии равновесного теплового излучения можно записать на языке световых квантов следующим образом:

$$u_\omega = \hbar\omega G(\omega) N_\omega,$$

где $\hbar\omega$ — энергия одного кванта, $G(\omega) = \omega^2/\pi^2c^3$ — плотность состояний, а

$$N_\omega = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \qquad (36)$$

имеет смысл числа фотонов в состоянии с определенной частотой ω.

5.8. Принцип работы лазеров

● **Спонтанные и вынужденные переходы. Коэффициенты Эйнштейна.** Рассмотрим атом, находящийся в поле равновесного излучения. Если атом находится в состоянии с энергией E_i, то под воздействием излучения он может перейти в состояние с большей энер-

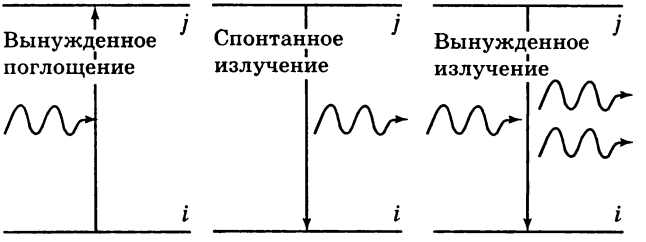


Рис. 81

гией E_j, поглотив при этом световой квант с частотой $\omega = (E_j - E_i)/\hbar$ (рис. 81). Такой процесс называют *вынужденным* (*индуцированным*) *поглощением*. Вероятность такого перехода в единицу времени пропорциональна плотности энергии излучения на частоте ω:

$$P_{i \to j} = B_{ij} u_\omega.$$

Обратный переход из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией связан с рождением и излучением кванта частоты ω. Он может происходить двумя способами. Первый тип переходов называется *спонтанным излучением*, он происходит и в отсутствие внешнего излучения (при $u_\omega = 0$), и его вероятность от u_ω не зависит

$$P^{\text{сп}}_{j \to i} = A_{ji}.$$

Второй тип переходов называется *вынужденным излучением*, он происходит под воздействием кванта частоты ω. Вероятность перехода в единицу времени, как и для вынужденного поглощения, пропорциональна u_ω:

$$P^{\text{вын}}_{j \to i} = B_{ji} u_\omega.$$

Введенные таким образом коэффициенты B_{ij}, B_{ji} и A_{ji} называются *коэффициентами Эйнштейна*, они не зависят от температуры излучения.

• **Равновесие между атомами и излучением.** Пусть в объеме, заполненном равновесным излучением при температуре T, находятся одинаковые атомы. Будем считать, что установилось тепловое равновесие между атомами и излучением, при этом среднее число атомов в состоянии i равно N_i, а в состоянии j равно N_j. Эти числа при температуре T связаны между собой *соотношением Больцмана*:

$$N_j = N_i e^{-(E_j - E_i)/kT}.$$

В состоянии равновесия число переходов из i в j должно быть равно числу обратных переходов:

$$N_i B_{ij} u_\omega = N_j (A_{ji} + B_{ji} u_\omega). \qquad (37)$$

Из соотношения Больцмана следует, что при $T \to \infty$ $N_i/N_j \to 1$. Учитывая, что при этом $u_\omega \to \infty$, получаем, что $B_{ij} = B_{ji}$.

Выразим из (37) u_ω:

$$u_\omega = \frac{A_{ji}/B_{ji}}{e^{\hbar\omega/kT} - 1} \qquad (38)$$

(мы учли, что $N_i/N_j = \exp(\hbar\omega/kT)$). Видно, что мы фактически вывели формулу Планка для равновесного излучения. Отношение A_{ji}/B_{ji} может быть получено из условия, что при высоких температурах должна быть верна классическая формула Рэлея — Джинса:

$$\frac{A_{ji}}{B_{ji}} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3}.$$

Посмотрим на это соотношение с иной точки зрения. Учитывая (36) для числа квантов с определенной частотой, запишем (38) в виде

$$\frac{B_{ji} u_\omega}{A_{ji}} = N_\omega.$$

Значит, отношение вероятности вынужденного излучения к вероятности спонтанного излучения равно числу квантов частоты ω. Можно сказать иначе: вероят-

ность вынужденного излучения в расчете на один квант равна вероятности спонтанного излучения. Видно, что спонтанное и вынужденное излучение должны быть одной природы. Объяснение (качественное) состоит в том, что даже в отсутствие в системе световых квантов в полости существуют так называемые *нулевые колебания* электромагнитного поля данной частоты $\left(\text{энергия осциллятора в квантовой механике равна } \hbar\omega\left(N+\frac{1}{2}\right)\right)$. Именно эти колебания и являются причиной спонтанных переходов.

- **Инверсная заселенность уровней.** В каждом акте вынужденного излучения происходит образование нового кванта, причем рожденный квант имеет такую же фазу, как квант, вызвавший это излучение. Иначе говоря, вместо одного кванта в системе появляются два *когерентных кванта*. Каждый из этих квантов может в свою очередь вызвать появление нового когерентного кванта и т. д. Таким образом может происходить усиление когерентного излучения. Однако вновь рожденные кванты поглощаются атомами, находящимися в более низком из двух энергетических состояний. В равновесном состоянии число атомов в нижнем состоянии (населенность нижнего уровня) выше, чем в верхнем. Значит, поглощение будет превалировать над вынужденным излучением, и усиление оказывается невозможным.

Для того, чтобы усиление когерентного луча стало возможным, надо создать метастабильное состояние, обладающее инверсной населенностью уровней. Тогда усиление потока J квантов будет происходить по формуле

$$dJ = \sigma(n_j - n_i)J\,dx, \quad \text{или} \quad J(x) = J(0)e^{\gamma x},$$

где n_j, n_i — концентрации атомов, σ — сечение вынужденного поглощения или излучения, $\gamma = \sigma(n_j - n_i)$ — *коэффициент квантового усиления* среды. Для создания инверсной населенности используются различные методы накачки. Самыми распространенными являются

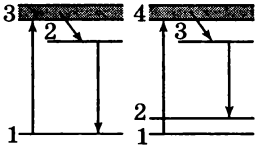


Рис. 82

трехуровневые и четырехуровневые схемы (рис. 82). В трехуровневой схеме (рубиновый лазер) происходит интенсивная накачка с нижнего уровня 1 на широкий короткоживущий уровень 3, с которого происходит заполнение долгоживущего (метастабильного) уровня 2. Необходимо добиться, чтобы населенность верхнего рабочего уровня 2 превысила населенность нижнего рабочего уровня 1. Трудность состоит в том, что изначально населенность уровня 2 много меньше населенности уровня 1, и требуется интенсивная накачка. Этого недостатка лишена четырехуровневая схема, в которой нижний рабочий уровень 2 содержит вначале так же мало атомов, как уровень 3. Заполнение уровня 3 происходит с уровня 4, на который происходит накачка с основного уровня 1. По этой схеме работает неодимовый лазер.

● **Элементы устройства лазеров.** Чтобы использовать явление квантового усиления когерентного света для создания *квантового генератора*, надо обеспечить создание положительной обратной связи — луч должен усиливать сам себя. Для этого на торцах образца помещают зеркала (или наносят зеркальные покрытия). Одно из зеркал делают полупрозрачным, что обеспечивает выход лазерного луча из системы. Чтобы происходило усиление начального луча лучом, отраженным от двух зеркал, должно выполняться условие

$$2Ln = m\lambda/2,$$

где n — показатель преломления, L — расстояние между образцами (длина образца), m — целое число. Чтобы могла происходить генерация, полный коэффициент усиления луча на всем замкнутом пути должен быть больше единицы:

$$R_1R_2e^{2\gamma L} > 1,$$

где R_1, R_2 — коэффициенты отражения зеркал.

6. Квантовая механика. Атомная физика

К началу XX века в классической физике накопились противоречия, для полного разрешения которых потребовалось изменить основные представления о пространстве и времени (теория относительности Эйнштейна, глава 1) и о законах движения частиц на атомных масштабах (квантовая механика). Первые квантовые представления появились в самом начале века (формула Планка для теплового излучения и Эйнштейна для фотоэффекта, глава 5), однако квантовая механика как замкнутая наука сложилась только к концу 20-х годов.

6.1. Строение атома. Модель Бора

Теория атома должна была в первую очередь объяснить накопленные экспериментальные факты по спектрам излучения разреженных газов (т. е. отдельных атомов).

Атомные спектры представляют собой отдельные очень узкие линии (*линейчатые спектры*), расположение которых характерно для каждого элемента. Было замечено, что любая частота представляет собой разность каких-нибудь двух *термов*: $\nu_{mn} = T_m - T_n$, так что элемент можно характеризовать не набором частот, а набором термов. Для водорода $T_n = R_\nu/n^2$, где R_ν — *постоянная Ридберга* (для частоты). Спектральные линии, для которых один из термов фиксирован, называют *спектральной серией*. Например, в спектре атома водорода выделяют серии Пашена ($n = 1$), серию Бальмера ($n = 2$) и т. д.

Однако в начале века отсутствовали даже ясные представления о структуре атома, т. е. о массивном ядре и электронных орбитах. Более привлекательной казалась *модель Томсона*, в которой масса и положительный заряд равномерно распределены по объему атома, а электроны заключены внутри этого положительного облака, как изюм в пудинге.

- **Ядерная модель атома** была установлена в *опытах Резерфорда* по рассеянию α-частиц на атомах тонкой фольги. Результаты опытов соответствовали рассеянию на тяжелых кулоновских центрах ничтожно малых размеров (в том числе наблюдалось заметное число случаев рассеяния назад). Атом с порядковым номером Z состоит из тяжелого ядра с зарядом $+Ze$, в поле которого находятся электроны. Атом, у которого число электронов не равно Z, называется *ионом*. Минимальная энергия, необходимая для удаления электрона и образования иона, называется *энергией ионизации*.

Ядерная модель находится в неразрешимом противоречии с основными представлениями классической физики. Электроны притягиваются к ядру, поэтому они не могут покоиться, а должны двигаться вокруг ядра по замкнутым орбитам (поэтому ядерную модель иногда называют *планетарной*). Но при движении с ускорением электрон излучает электромагнитные волны и за время порядка 10^{-8} с должен излучить всю энергию и упасть на ядро (см. раздел 4.5). В рамках классической физики атом не может быть устойчивым.

- **Модель Бора.** Полуклассическая модель Бора описывает свойства атома водорода и водородоподобных ионов (один электрон в поле ядра Ze). В основе модели лежат *постулаты Бора*:

1. Электроны могут двигаться только по определенным стационарным орбитам, в соответствии с классическими уравнениями движения, но без излучения энергии.

2. Момент импульса может при этом принимать только дискретные значения $L_n = n\hbar$. Для круговых орбит правило квантования принимает вид

$$mv_n r_n = n\hbar. \qquad (1)$$

Если ввести длину волны де Бройля для электрона на круговой орбите: $\lambda = h/p = 2\pi\hbar/p$ (см. раздел 6.2), то правило квантования (1) принимает вид условия существования замкнутой стоячей волны: $2\pi r_n = n\lambda$ (на длине орбиты укладывается целое число волн де Бройля).

3. Излучение или поглощение квантов электромагнитного излучения происходит только при переходе с одной стационарной орбиты на другую:

$$\hbar\omega = E_n - E_m. \qquad (2)$$

- **Атом водорода.** Для движения электрона по круговой орбите из правила квантования (1) и уравнения движения

$$\frac{ke^2}{r_n^2} = m\frac{v_n^2}{r_n} \qquad (3)$$

находим скорость электрона на n-й орбите и ее радиус:

$$v_n = \frac{ke^2}{n\hbar}, \quad r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mke^2},$$

а также энергию электрона

$$E_n = \frac{mv_n^2}{2} - \frac{ke^2}{r_n} = -\frac{ke^2}{2r_n} = -\frac{R}{n^2}, \qquad (4)$$

где величина

$$R = \frac{m(ke^2)^2}{2\hbar^2} \approx 13{,}6 \text{ эВ} \qquad (5)$$

называется постоянной Ридберга (для энергии электрона). Состояние с номером $m = 1$ и энергией $E_1 = -R = -13{,}6$ эВ называется *основным состоянием атома*, остальные значения соответствуют возбужденным состояниям. Время жизни возбужденных состояний порядка 10^{-8} с. Радиус орбиты электрона в основном со-

стоянии атома водорода называют *боровским радиусом* и обозначают a_0:

$$a_0 = r_1 = \frac{\hbar^2}{mke^2} \approx 0{,}53 \text{ Å}.$$

Энергия ионизации атома водорода (в основном состоянии) равна $|E_1| = R$. Число n называют *главным квантовым числом*. Спектр излучения атома водорода:

$$\frac{1}{\lambda} = R_\lambda\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2}\right), \qquad (6)$$

где $R_\lambda = \frac{m(ke^2)^2}{4\pi\hbar^3} = 1{,}097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ — *постоянная Ридберга* (для обратной длины волны), n_1 — номер начального состояния, n_2 — номер конечного состояния электрона. Линии водорода с $n_2 = 1$ и $n_1 = 2, 3, \ldots$ образуют серию Лаймана (ультрафиолетовая область), линии с $n_2 = 2$ и $n_1 = 3, 4, \ldots$ — серию Бальмера (видимая область), с $n_2 = 3$ — серию Пашена (инфракрасная область), далее следуют серии Брэкета, Пфунда и т. д.

• **Водородоподобные ионы. Учет движения ядра.** Формулы, полученные для атома водорода, легко обобщаются на случай водородоподобного иона — одного электрона в поле заряда Ze. Надо просто во всех формулах заменить e^2 на Ze^2. Постоянная Ридберга при этом умножается на Z^2. Например, в случае одноэлектронного иона гелия He^+ энергия электрона принимает значения $E_n = -4R/n^2$. Видно, что энергия с номером $2n$ совпадает с энергией электрона в атоме водорода с номером n. Это означает, что переход, например, с четвертого уровня на второй должен соответствовать такой же частоте, как переход со второго уровня атома водорода на первый. Анализ спектров показывает, что все соответствующие уровни иона гелия лежат ниже уровней атома водорода примерно на 0,04%. Это отличие объясняется конечностью массы ядра: происходит движение

как электрона, так и ядра вокруг их общего центра масс. Учесть движение ядра проще всего заменой массы электрона m на приведенную массу μ (см. раздел 1.7). Это приводит к умножению всех значений энергии и частот на множитель $M/(m + M)$, где M — масса ядра. Для атома водорода повышение энергии самое большое.

По этой же причине уровни энергии электронов в более тяжелых изотопах лежат ниже (*изотопический эффект*). Например, уровни дейтерия лежат немного ниже уровней водорода, а уровни трития — немного ниже уровней дейтерия.

- **Условие квантования Бора — Зоммерфельда.** Обобщением правила квантования орбит является *условие квантования Бора — Зоммерфельда*:

$$\oint p\, dq = 2\pi n\hbar, \tag{7}$$

где q, p — обобщенные координата и импульс. Если в качестве обобщенных координат для движения в центральном поле взять угол φ и момент импульса L, то получим правило квантования Бора. В случае одномерного движения условие квантования (7) принимает вид

$$2\oint_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m(E_n - U(x))}\, dx = 2\pi n\hbar,$$

где x_1, x_2 — точки поворота, в которых импульс обращается в нуль. Например, в случае осциллятора $U(x) = m\omega^2x^2/2$, и после вычисления интеграла получаем

$$E_n = n\hbar\omega,$$

что с точностью до слагаемого $\hbar\omega/2$ (нулевые колебания) совпадает с точным ответом, даваемым квантовой механикой.

Теория Бора не является последовательно квантовой теорией. Она не описывает тонкую структуру водородоподобных атомов, а также свойства многоэлектронных атомов, начиная с атома гелия.

6.2. Элементы квантовой механики

• **Корпускулярно-волновой дуализм. Волны де Бройля.** Движущаяся частица вещества может проявлять волновые свойства. Соответствующие длина волны, волновой вектор и циклическая частота определяются *формулами де Бройля*:

$$\lambda = \frac{\hbar}{p}, \quad k = \frac{p}{\hbar}, \quad \omega = \frac{E}{\hbar}, \tag{8}$$

где p — импульс частицы, E — ее релятивистская энергия. Фазовая скорость волны де Бройля свободной частицы, имеющей скорость v, равна c^2/v, ее групповая скорость равна v. С частицей связывается комплексная *волновая функция* $\psi(\vec{r})$, имеющая статистический смысл. Квадрат модуля волновой функции равен плотности вероятности обнаружения частицы в данной точке пространства:

$$dP = |\psi(\vec{r})|^2\, dV. \tag{9}$$

Явления интерференции и дифракции при распространении частиц и их детектировании возникают благодаря *принципу суперпозиции*: если реализуются состояния ψ_1 и ψ_2, то реализуется и их суперпозиция $\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$. Волновые свойства частиц были впервые обнаружены в опытах по дифракции электронов на кристаллах в 1927 г. (*опыты Дэвиссона — Джермера*).

• **Соотношения неопределенностей Гейзенберга.** Измерение координат частицы и проекций ее импульса носит статистический характер. Неопределенности в измерениях этих величин связаны соотношениями

$$\Delta p_x\, \Delta x \geqslant \frac{1}{2}\hbar, \quad \Delta p_y\, \Delta y \geqslant \frac{1}{2}\hbar, \quad \Delta p_z\, \Delta z \geqslant \frac{1}{2}\hbar. \tag{10}$$

Импульс и координата не могут одновременно принимать точные значения, понятие классической траектории теряет свой смысл.

Например, состояние электрона с определенным импульсом p_x задается волновой функцией в виде плоской волны:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_x x\right).$$

При этом электрон оказывается полностью делокализованным в пространстве. Чтобы узнать, какова неопределенность в измерении импульса для электрона с локализованной волновой функцией $\psi(x)$, надо разложить эту функцию в интеграл Фурье по волновым функциям с определенным импульсом:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_x x\right) \varphi(p_x)\, dp_x.$$

Вероятность того, что при измерении p_x результат будет лежать в интервале $(p_x,\ p_x + dp_x)$, определяется квадратом фурье-образа $|\varphi(p_x)|^2\, dp_x$. В соответствии с общими свойствами преобразования Фурье, ширины функции и ее фурье-образа связаны соотношением $\Delta x \cdot \Delta(p_x/\hbar) \geqslant \frac{1}{2}$ (см. также раздел 5.2, обсуждение временной когерентности).

Соотношение неопределенностей для времени и энергии имеет вид:

$$\Delta E\, \Delta t \geqslant \hbar, \tag{11}$$

где ΔE — неопределенность энергии состояния, Δt — время жизни частицы в этом состоянии.

Пример 1. Невозможность локализации электрона в ядре. Если предположить, что электрон заключен внутри ядра размером $r \sim 10^{-15}$ м, то неопределенность его координаты будет порядка размеров ядра, а неопределенность импульса $\Delta p \sim \hbar/r$. Принимая, что среднее значение импульса порядка его неопределенности, для энергии получаем оценку: $E = p^2/2m \sim 10^{-8}$ Дж $\approx 10^5$ МэВ, что на много порядков превосходит энергию связи электрона в атоме.

Пример 2. Оценка энергии основного состояния атома водорода. Считая, что неопределенность координаты порядка среднего размера атома, а неопределенность импульса порядка среднего импульса, получим связь между импульсом и радиусом:

$$p \sim \frac{\hbar}{r}.$$

Подставляя $p(r)$ в выражение (4) для энергии электрона, получим энергию как функцию одного параметра — радиуса орбиты:

$$E \sim \frac{\hbar^2}{2mr^2} - k\frac{e^2}{r}.$$

Это выражение принимает минимальное значение, равное (с точностью до безразмерного множителя) энергии основного состояния, при значении r, равном боровскому радиусу.

- **Уравнение Шредингера.** Развитие со временем волновой функции частицы в силовом поле $U(\vec{r})$ описывается *временны́м уравнением Шредингера*:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi. \qquad (12)$$

В состоянии с определенной энергией E (*стационарном состоянии*) волновая функция имеет вид

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\exp\left(-i\frac{E}{\hbar}t\right). \qquad (13)$$

Пространственная часть волновой функции стационарного состояния подчиняется *стационарному уравнению Шредингера:*

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0. \qquad (14)$$

Волновая функция свободной частицы ($U = 0$) в состоянии с определенным импульсом $\vec{p}$ записывается следующим образом:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\exp\left[-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\vec{r})\right].$$

Плотность потока вероятности определяется выражением

$$\vec{S} = -\frac{i\hbar}{2m}[\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*]$$

и в случае свободной частицы с импульсом $\vec{p} = m\vec{v}$ равна $\vec{S} = \vec{v}|\psi(\vec{r})|^2$. Изменение вероятности обнаружить частицу в некоторой области определяется потоком вероятности через границу этой области.

Решения стационарного уравнения Шредингера (14), описывающие *связанные состояния* частицы в потенциальном поле, должны удовлетворять следующим условиям:

1. Функция и ее первые производные должны быть непрерывны.

2. Функция должна быть нормированной: $\int |\psi|^2 \, dV = 1$. Эти два условия могут быть удовлетворены только при определенных значениях энергии $E_1, E_2, \ldots$ (*дискретность* энергетических уровней).

3. В одномерном случае решения действительны и *неврожденны*, т. е. каждому значению энергии E_n соответствует одна функция $\psi_n(x)$. Функция ψ_n обращается в нуль в $n-1$ точках (*узлах* волновой функции).

Среднее значение физической величины $g(\vec{r})$, являющейся функцией координат, вычисляется по формуле:

$$\langle g \rangle = \int g |\psi|^2 \, dV,$$

где $\psi(\vec{r})$ — нормированная волновая функция.

Пример 3. Яма с бесконечными стенками. Если потенциальная энергия имеет вид

$$U = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant L; \\ \infty & \text{при } x < 0 \text{ или } x > L, \end{cases}$$

то волновая функция обращается в нуль на краях ямы, при $x = 0$ и $x = L$. Уравнение Шредингера (14) принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\psi = 0$$

и имеет решения

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin k_n x, \quad k_n = \frac{n\pi}{L}.$$

На ширине ямы укладывается целое число полуволн де Бройля. Энергия n-го уровня равна $E_n = \dfrac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$.

Пример 4. Яма с конечными стенками. Если потенциальная энергия имеет вид

$$U = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant L; \\ U_0 > 0 & \text{при } x > L; \\ \infty & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

то уравнение Шредингера внутри ямы имеет такой же вид, как в предыдущем примере, а вне ямы, при $x > L$, принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\psi = 0.$$

Локализованное состояние соответствует энергиям в интервале $0 < E < U_0$. Волновая функция обращается в нуль при $x = 0$, равна $\psi_1(x) = A\sin(k_1 x)$ внутри ямы и $\psi_2(x) = B\exp(-k_2 x) + C\exp(k_2 x)$ вне ямы, где $k_1 = \sqrt{2mE/\hbar^2}$, $k_2 = \sqrt{2m(U_0 - E)/\hbar^2}$. Из условия конечности и интегрируемости волновой функции получаем $C = 0$. Условия непрерывности волновой функции $\psi_1(L) = \psi_2(l)$ и ее гладкости $d\psi_1(L)/dx = d\psi_2(L)/dx$ после исключения коэффициентов A и B приводят к уравнению для допустимых значений энергии: $k_1 \operatorname{ctg} k_1 L = -k_2$. В узкой яме связанные состояния отсутствуют; первое связанное состояние $E = U_0$ возникает при ширине $L_0 = \frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{\sqrt{2mU_0}}$.

Пример 5. Гармонический осциллятор. Потенциальная энергия гармонического осциллятора: $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$. Энергии стационарных состояний равны $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, волновые функции стационарных состояний выражаются через специальные функции — полиномы Эрмита. Энергия основного состояния ($n = 0$) равна $\frac{1}{2}\hbar\omega$ (энергия нулевых колебаний).

Уравнение Шредингера для осциллятора после обезразмеривающей замены $E = \frac{\hbar\omega}{2}\varepsilon$, $x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\xi$ принимает вид

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + (\varepsilon - \xi^2)\psi = 0.$$

При $\xi \to \infty$ членом ε в скобках можно пренебречь, и мы получаем асимптотическое при больших ξ поведение волновой функции: $\psi \sim \exp(-\xi^2/2)$. Ищем волновую функцию в виде $\psi = \exp(-\xi^2/2)\,\varphi(\xi)$, для φ получаем уравнение

$$\varphi'' - 2\xi\varphi' + (\varepsilon - 1)\varphi = 0.$$

Представляя $\varphi(\xi)$ в виде ряда: $\varphi = a_0 + a_1\xi + \ldots$, после подстановки в уравнение получим серию рекуррентных соотношений: $2a_2 + (\varepsilon - 1)a_0 = 0$, $6a_3 + (\varepsilon - 3)a_1 = 0, \ldots, n(n+1)a_{n+1} + (\varepsilon - 2n - 1)a_{n-1} = 0, \ldots$. Волновая функция $\psi(\xi)$ удовлетворяет условию конечности только в том случае, если ряд для $\varphi(\xi)$ содержит конечное число членов (в противном случае $\varphi(\xi)$ при $\xi \to \infty$ растет как $\exp(\xi^2)$). Ряд содержит либо только нечетные степени ($a_0 = 0$), либо только четные ($a_1 = 0$). Условие обрыва ряда позволяет получить допустимые значения энергии: $\varepsilon_n = 2n + 1$, или $E_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$.

Пример 6. Туннельный эффект. При падении на потенциальный барьер волны де Бройля, соответствующей свободной частице с энергией, меньшей высоты барьера, существует отличная от нуля вероятность обнаружить частицу по другую сторону барьера. Прозрачностью барьера называется отношение интенсивности (плотности потока вероятности) прошедшей волны и волны падающей. Прозрачность потенциального барьера (рис. 83) дается формулой

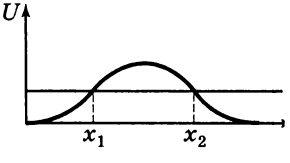


Рис. 83

$$D = D_0 \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2m[U(x) - E]}\,dx\right).$$

Частица может быть обнаружена под барьером, в области, запрещенной для движения в классической механике.

- **Операторы физических величин.** Любой наблюдаемой физической величине в квантовой механике сопоставляется эрмитов (самосопряженный) оператор, действующий на волновые функции. Физическая величи-

на G имеет определенное значение λ_G только в состояниях, являющихся собственными функциями оператора $\hat{G}$:

$$\hat{G}\psi = \lambda_G \psi.$$

Система собственных функций эрмитова оператора является *полной* — любая функция может быть представлена в виде линейной суперпозиции этих функций. Если состояние является суперпозицией собственных функций с разными λ: $\psi = \sum C_i \psi_i$, то вероятность получить при измерении значение λ_i равна $|C_i|^2$, а среднее значение величины G в этом состоянии равно

$$\langle G \rangle = \sum \lambda_i |C_i|^2 = \int \psi^* \hat{G} \psi \, dV. \qquad (15)$$

Оператор координаты имеет вид $\hat{x}\psi = x\psi$, оператор проекции импульса — $\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$, оператор энергии (*гамильтониан*) определяется выражением:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U. \qquad (16)$$

Уравнения Шредингера (12) и (14) принимают вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \quad \text{и} \quad \hat{H}\psi = E\psi. \qquad (17)$$

Физические величины A и B *соизмеримы* (могут одновременно иметь определенные значения), если они коммутируют: $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 0$. В случае координаты и проекции импульса

$$\hat{x}\hat{p}_x - \hat{p}_x \hat{x} = i\hbar. \qquad (18)$$

Физическая величина сохраняется со временем, если ее оператор коммутирует с гамильтонианом.

Пример 7. Квантовый осциллятор. Операторный подход. Коммутационные соотношения позволяют получить важные результаты чисто алгебраическим способом. Найдем собст-

венные значения и собственные функции гамильтониана, описывающего квантовый осциллятор:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2},$$

исходя только из коммутационного соотношения (18) между координатой и импульсом. Перейдем к безразмерным операторам с помощью замен:

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}q, \quad \hat{p}_x = \sqrt{\hbar m\omega}\,\hat{p}, \quad \hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}\hat{h},$$

причем $\hat{p} = -i\frac{d}{dq}$. Безразмерный гамильтониан имеет вид

$$\hat{h} = \hat{p}^2 + \hat{q}^2,$$

а безразмерные операторы координаты и импульса подчиняются соотношению

$$\hat{q}\,\hat{p} - \hat{p}\,\hat{q} = i.$$

Введем операторы «повышения» и «понижения»:

$$\hat{a}^+ = \hat{q} - i\hat{p}, \quad \hat{a}^- = \hat{q} + i\hat{p},$$

для которых верны тождества

$$\hat{a}^+\hat{a}^- = \hat{h} - 1, \quad \hat{a}^-\hat{a}^+ = \hat{h} + 1, \quad [\hat{a}^+\hat{a}^-] = -2.$$

Собственные значения λ и собственные функции $\psi\lambda$ оператора $\hat{A} = \hat{a}^+\hat{a}^-$ обладают следующими свойствами:

1. Собственные значения неотрицательны ($\lambda \geqslant 0$). Собственное значение обращается в нуль в том и только в том случае, если $\hat{a}^-\psi_0 = 0$.

2. Если $\psi\lambda$ — нормированная собственная функция с $\lambda > 0$, то $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\hat{a}^-\psi\lambda$ — нормированная собственная функция с $\lambda' = \lambda - 2$, а $\frac{1}{\sqrt{\lambda+2}}\hat{a}^+\psi_\lambda$ —нормированная собственная функция с $\lambda' = \lambda + 2$.

Из этого следует, что собственными значениями оператора $\hat{A}$ являются целые четные числа, оператора $\hat{h}$ — нечетные

числа, оператора энергии — значения $E_n = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)$. Основное состояние ($n = 0$) подчиняется уравнению $\hat{a}^{-}\psi_0 = 0$, или $\frac{d\psi_0}{dq} = -q\psi_0$. Получаем $\psi_0(q) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\exp(-q^2/2)$. Все остальные функции могут быть получены последовательным действием оператора повышения: $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q - d/dq)\psi_0$, $\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(q - d/dq)\psi_1$ и т. д.

- **Оператор углового момента.** *Оператор орбитального углового момента* (момента импульса) электрона $\hat{\vec{L}}$ относительно точки O определяется соотношениями

$$\hat{L}_x = \hat{y}\,\hat{p}_z - \hat{z}\,\hat{p}_y, \quad \hat{L}_y = \hat{z}\,\hat{p}_x - \hat{x}\,\hat{p}_z,$$
$$\hat{L}_z = \hat{x}\,\hat{p}_y - \hat{y}\,\hat{p}_x, \tag{19}$$

а оператор квадрата момента — соотношением $\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2$. Проекции момента не коммутируют друг с другом:

$$[\hat{L}_x\,\hat{L}_y] = i\hbar\hat{L}_z, \; [\hat{L}_y\,\hat{L}_z] = i\hbar\hat{L}_x, \; [\hat{L}_z\,\hat{L}_x] = i\hbar\hat{L}_y, \tag{20}$$

т. е. не могут одновременно принимать определенные значения. Однако каждая из проекций коммутирует с квадратом импульса, поэтому можно говорить об общих собственных функциях операторов $\hat{L}_z$ и $\hat{L}^2$.

Собственные значения могут быть найдены чисто алгебраическим путем из коммутационных соотношений (20). Общие собственные функции операторов $\hat{L}^2$

и $\hat{L}_z$ могут отвечать только следующим собственным значениям:

$$\hat{L}^2\,\psi_{l,m} = l(l+1)\hbar^2\psi_{l,m}, \quad \hat{L}_z\,\psi_{l,m} = m\hbar\psi_{l,m}, \qquad (21)$$

причем l — целое или полуцелое неотрицательное число, а при заданном l число m может принимать $2l+1$ значений: $m = -l, -l+1, \ldots, l-1, l$.

Перейдем к безразмерным операторам: $\hat{L}_x = \hbar\hat{l}_x$, $\hat{L}_y = \hbar\hat{l}_y$, $\hat{L}_z = \hbar\hat{l}_z$, удовлетворяющим коммутационным соотношениям $[\hat{l}_x\,\hat{l}_y] = i\hat{l}_z$ и т. д. Введем операторы «повышения» и «понижения»:

$$\hat{l}^+ = \hat{l}_x + i\hat{l}_y, \quad \hat{l}^- = \hat{l}_x - i\hat{l}_y,$$

удовлетворяющие соотношениям:

$$[\hat{l}_z\,\hat{l}^+] = \hat{l}^+, [\hat{l}_z\,\hat{l}^-] = -\hat{l}^-, \ \hat{l}^+\hat{l}^- = \hat{l}^2 - \hat{l}_z^2 + \hat{l}_z, \ \hat{l}^-\hat{l}^+ = \hat{l}^2 - \hat{l}_z^2 - \hat{l}_z.$$

Если ψ является собственной функцией операторов $\hat{l}^2$ и $\hat{l}_z$, с собственными значениями λ и μ, то $\hat{l}^+\psi$ будет собственной функцией этих операторов с собственными значениями λ, $\mu + 1$, а $\hat{l}^-\psi$ — собственной функцией с собственными значениями λ, $\mu - 1$. Минимальное значение μ_1 и максимальное — μ_2 удовлетворяют уравнениям:

$$\lambda - \mu_1^2 + \mu_1 = 0, \quad \lambda - \mu_2^2 - \mu_2 = 0.$$

Отсюда следует, что $\mu_1 = -\mu_2$, причем $\mu_2 - \mu_1 = 2\mu_2 = l$ — целое число. Для собственного значения оператора $\hat{l}^2$ получаем $\lambda = l(l+1)$.

Видно, что максимальное значение проекции углового момента $\hbar l$ меньше его модуля $\hbar\sqrt{l(l+1)}$. В векторной модели угловой момент изображают в виде вектора, образующего фиксированный угол с осью z и вращающегося вокруг этой оси. При этом проекции L_x и L_y не имеют фиксированных значений, что отражает не-

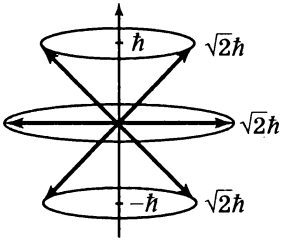


Рис. 84

соизмеримость L_z с L_x и L_y. На рис. 84 изображен случай $l = 2$.

Чтобы увидеть, какие собственные значения может иметь *орбитальный* угловой момент, определяемый формулами (19), удобно произвести переход к сферическим координатам. Орбитальный момент является функцией только угловых переменных, причем коммутирующие операторы $\hat{L}_z$ и $\hat{L}^2$ принимают вид

$$\hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi},$$

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\hat{\Lambda}, \text{ где } \hat{\Lambda} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \quad (22)$$

Для дальнейшего важно, что оператор $\hat{\Lambda}$ совпадает с угловой частью оператора Лапласа, записанного в сферических координатах:

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\hat{\Lambda}. \quad (23)$$

Собственные функции могут быть представлены в виде произведения функций отдельных угловых переменных: $\psi_{l,m} = \Theta_{l,m}(\theta)\Phi_m(\varphi)$. Уравнение для определения функции Φ

$$-i\hbar\frac{d\Phi_m}{d\varphi} = m\hbar\Phi_m$$

имеет решение $\Phi_m = A\exp(im\varphi)$, которое является однозначной функцией угла φ *только при целых значениях* m. Значит, в случае орбитального момента реализуются только целые значения чисел l и m. Число l на-

зывают *орбитальным квантовым числом*, а число m — *магнитным квантовым числом* (используют обозначение m_l). Полуцелые значения реализуются в случае собственного углового момента — *спина* (используют обозначения s и m_s).

Уравнение для собственных функций оператора $\hat{\Lambda}$ имеет решение в виде известных в математической физике *шаровых функций* $Y_{lm}(\theta, \varphi) = \Phi_m(\varphi)\Theta_{ml}(\theta)$ с собственными значениями $-l(l+1)$. (Функции $\Theta(\theta)$ имеют вид специальных функций — *присоединенных функций Лежандра*). Например, $\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$, $\Theta_{1,0}(\theta) = \sqrt{\frac{3}{2}} \cos\theta, \Theta_{1,\pm1} = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} \sin\theta, \Theta_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{8}} (3\cos^2\theta - 1)$. Каждая из функций нормируется на единицу: $\int_0^{2\pi} \Phi^2 \, d\varphi = 1$, $\int_0^{\pi} \Theta^2 \sin\theta \, d\theta = 1$. Шаровые функции образуют полную систему функций угловых переменных — любая функция переменных θ, φ может быть разложена по шаровым функциям.

- **Сложение угловых моментов.** Оператор суммы двух моментов H в $\hat{\vec{L}} = \hat{\vec{L}}_1 + \hat{\vec{L}}_2$, значения которых характеризуются квантовыми числами l_1 и l_2 (т. е. $\hat{\vec{L}}_1^2$ и $\hat{\vec{L}}_2^2$ имеют собственные значения $\hbar\sqrt{l_1(l_1+1)}$ и $\hbar\sqrt{l_2(l_2+1)}$) характеризуется квантовым числом l, которое может принимать следующие значения: $|l_1 - l_2| \leqslant l \leqslant l_1 + l_2$. Максимальное значение соответствует параллельному расположению моментов, минимальное — антипараллель-

ному. Оператор $\hat{L}^2$ не коммутирует с операторами $\hat{L}_{1z}$ и $\hat{L}_{2z}$, поэтому собственные функции операторов $\hat{L}^2$ и $\hat{L}_z$ не являются собственными функциями $\hat{L}_{1z}$ и $\hat{L}_{2z}$ (но являются собственными функциями $\hat{L}_1^2$ и $\hat{L}_2^2$).

- **Движение в центральном поле.** В этом случае потенциальная энергия $U(\vec{r})$ зависит только от модуля $\vec{r}$. Поскольку операторы орбитального момента $\hat{L}_z$ и $\hat{L}^2$ коммутируют с $\hat{r}^2$ и $\hat{p}_x^2$, то они коммутируют и с гамильтонианом. Значит, как и в классической механике, при движении частицы в центральном поле сохраняются величина углового момента и его проекция на ось z. Волновая функция любого состояния $\psi(r, \theta, \varphi)$ может быть разложена по общим собственным функциям $\psi_{E,\,l,\,m_l}$ трех коммутирующих операторов $\hat{H}$, $\hat{L}_z$ и $\hat{L}^2$, соответствующих трем одновременно измеримым физическим величинам: энергии, проекции орбитального момента и его величине. Будем использовать разделение переменных, т. е. искать собственные функции в виде: $\psi_{E,\,l,\,m_l} = R_{E,l}(r)\Phi_{m_l}(\varphi)\Theta_{l,\,m_l}(\theta)$. Записывая гамильтониан в сферических координатах и учитывая (22) и (23), получим

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2mr^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + U(r). \qquad (24)$$

Уравнение Шредингера в форме (17) (уравнение на собственные значения) после действия гамильтониана $\hat{H}$ в форме (24) на функцию $\psi_{E,\,l,\,m_l}$ превращается в уравнение для радиальной части волновой функции $R_{E,l}(r)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{1}{r^2}\,\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right)R_{E,l} + \left(\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + U(r)\right)R_{E,l} = ER_{E,l}. \qquad (25)$$

Как и в классической механике (см. раздел 1.7), к потенциальной энергии добавляется *центробежная энергия* $\hbar^2 l(l+1)/2mr^2$. Видно, что магнитное квантовое число не входит в уравнение для допустимых значений энергии. Каждому уровню энергии соответствует два квантовых числа: орбитальное число l и *радиальное число* $n_r = 0, 1, 2, \ldots$, нумерующее допустимые дискретные значения энергии. Уровень $E_{n_r, l}$ оказывается $(2l+1)$-кратно вырожденным по значениям магнитного квантового числа m_l.

- **Магнитный момент.** В классической физике движущаяся по замкнутой траектории заряженная частица обладает магнитным моментом. Величина и направление магнитного момента полностью определяют как собственное магнитное поле движущегося заряда, так и его взаимодействие с внешним магнитным полем (см. раздел 3.3). Для орбитального движения отношение магнитного момента к механическому равно $-e/2m$. Значит, проекция орбитального магнитного момента на ось z принимает значения $\mu_z = -(e/2m)\hbar m_l = -\mu_B m_l$, а величина орбитального магнитного момента равна $\mu_B\sqrt{l(l+1)}$, где $\mu_B = e\hbar/2m \approx 9{,}274 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл называется *магнетоном Бора*. В общем случае соотношение между магнитным и механическим моментами записывается в виде: $\mu_z = g(e/2m)L_z$ (или $(\mu_z/\mu_B) = g(L_z/\hbar)$), где безразмерный множитель g называют *гиромагнитным отношением*. Для орбитального момента $g_l = 1$, для спинового $g_s = 2$.

При помещении атома в магнитное поле, направленное вдоль оси z, у электрона возникает добавочная энергия взаимодействия магнитного момента с магнитным полем: $\Delta E = -\mu_z B = \mu_B m_l B$. Видно, что в магнитном поле должно сниматься вырождение по магнитному квантовому числу m_l — вместо одного уровня возникает $2l+1$ эквидистантных уровней, расстояние между

которыми пропорционально магнитному полю. При этом каждая спектральная линия должна расщепляться на три равноудаленных линии (с учетом *правил отбора*, обсуждаемых ниже, изменение m_l при переходе между уровнями может быть только $\Delta m_l = 0, \pm 1$). Этот эффект носит название *нормального эффекта Зеемана*. Наличие у электрона собственного (спинового) магнитного момента приводит к сильному усложнению картины расщепления линий в магнитном поле.

- **Атом водорода в квантовой механике.** Для потенциальной энергии $U(r) = -ke^2/r$ уравнение (25) имеет следующие решения:

1. Возможные значения энергии определяются формулой

$$E_{n_r l} = -\frac{R}{(n_r + l + 1)^2},$$

где R — постоянная Ридберга (см. (5)). Величину $n = n_r + l + 1$ называют *главным квантовым числом*. Видно, что энергия электрона определяется только главным квантовым числом. Одному и тому же главному квантовому числу n соответствуют состояния с различными значениями l: $l = 0, 1, \ldots, n - 1$. Полное вырождение каждого уровня энергии составляет $\sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = n^2$. Дополнительное вырождение является специальным свойством кулоновского потенциала. Отметим, что энергетические уровни совпадают с теми, которые получались в полуклассической теории Бора (раздел 6.1), однако имеются важные отличия: там в основном состоянии ($n = 1$) орбитальный момент равен $L = \hbar$, а в квантовой теории момент основного состояния равен нулю.

2. Радиальные функции имеют вид

$$R_{n,l} = r^l \exp\left(-\frac{r}{na_0}\right) P_{n_r}(r),$$

где $P_{n_r}(r)$ — многочлен степени $n_r = n - l - 1$, а a_0 — боровский радиус. Например,

$$R_{1,0} = \frac{2}{\sqrt{a_0^3}} e^{-r/a_0}, \quad R_{2,0} = \frac{1}{\sqrt{8a_0^3}} e^{-r/2a_0} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right),$$

$$R_{2,1} = \frac{1}{2\sqrt{6a_0^3}} \frac{r}{a_0} \exp\left(-\frac{r}{2a_0}\right).$$

Радиальные функции нормированы на единицу: $\int\limits_0^\infty R^2 r^2\, dr = 1$. Вероятность обнаружить электрон на расстоянии от ядра, лежащем в интервале $(r, r + dr)$, равна $dP = \int\limits_{(r,\, r+dr)} |\psi|^2\, dV = R(r)^2 r^2\, dr$. В основном состоянии наиболее вероятное расстояние от электрона до ядра равно боровскому радиусу a_0 (радиусу первой электронной орбиты в теории Бора).

Электронное состояние обозначают латинской буквой, указывающей на значение орбитального квантового числа (s для $l = 0$, p для $l = 1$, d для $l = 2$, f для $l = 3$, далее по алфавиту), перед которой указывают значение главного квантового числа. Например, $3d$ соответствует электрону с $n = 3$ и $l = 2$.

- **Спектры щелочных металлов.** В случае щелочных металлов (Li, Na, ...) состояние атома определяется состоянием электрона на внешней оболочке. Этот электрон находится в центрально-симметричном поле ядра и $Z - 1$ электронов на внутренних оболочках. Радиус внешней оболочки заметно больше радиусов внутренних оболочек ($r_n \sim n^2$), поэтому в основной области существования внешнего электрона электрическое поле совпадает с полем заряда $+e$. Искажение поля внутренними электронами оказывает большее влияние на состояния с меньшим орбитальным числом l, так как при

малых $r\psi(r) \sim r^l$. Для уровней энергии $E_{n,l}$, где $n = n_r + l + 1$ — главное квантовое число, используют выражение

$$E_{n,l} = -\frac{R}{(n+\alpha_l)^2},$$

где $\alpha_l < 0$ — *ридберговская поправка*. Для построения спектра надо принять во внимание, что главное квантовое число n наинизшего состояния внешнего электрона равно номеру оболочки, в которой находится этот электрон (для лития $n = 2$, для калия $n = 3$ и т. д.). Кроме того, необходимо учитывать правило отбора для орбитального числа l: $\Delta l = \pm 1$. На рис. 85 приведена схема спектральных линий атома Li и указаны названия первых основных серий.

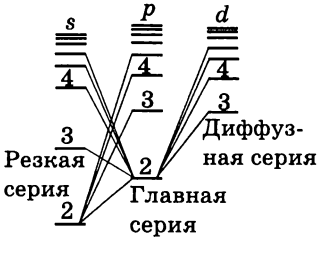


Рис. 85

• **Спин электрона.** Ряд экспериментальных фактов указывает на то, что для описания состояния электронов в атоме недостаточно трех квантовых чисел, связанных с его пространственным движением. К этим фактам относятся:

1. Мультиплетная (тонкая) структура спектральных линий щелочных металлов. Например, самая интенсивная из линий главной серии — резонансная линия, соответствующая переходу в основное s-состояние из первого возбужденного p-состояния, имеет вид ярко выраженного дублета.

2. Аномальный эффект Зеемана. Расщепление атомных линий в магнитном поле не описывается нормальным эффектом Зеемана, связанным с магнитным моментом орбитального движения.

3. Результаты опытов Штерна — Герлаха по измерению магнитных моментов атомов водорода (1921).

Пучок атомов водорода направлялся в область сильно неоднородного магнитного поля, где на них действовала сила $\mu_z(dB/dz)$. Проекция орбитального момента $\mu_z = m_l\mu_B$ может иметь $2l + 1$ различных значений. Атомы с электронами в s-состоянии не должны испытывать отклонения; если имеется доля атомов с электронами в p-состоянии, то они должны разделиться на три пучка. Было обнаружено, что пучок атомов разделяется на два, отклоняемых магнитным полем в разные стороны на одинаковые расстояния.

Можно сделать вывод: электроны обладают внутренним угловым моментом (*спином*), не связанным с движением электрона по орбите. Проекция спина на ось z может иметь два значения, из чего следует, что *спиновое квантовое число* s должно быть равно $1/2$ (поскольку $2s + 1 = 2$). Величина спинового момента равна $\hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{\sqrt{3}}{2}\hbar$. Проекция спинового момента на ось z равна $\hbar m_s$, где $m_s = \pm\frac{1}{2}$ — *магнитное спиновое число*.

Напомним, что полуцелое значение углового момента не противоречит перестановочным соотношениям.

Так как проекция спина может принимать 2 значения, то теперь набору квантовых чисел n, l соответствует $2(2l+1)$ различных состояний, а квантовому числу n соответствует $2n^2$ состояний.

Измерение величины отклонения атомов в магнитном поле позволяет установить значение собственного магнитного момента. Оказалось, что собственный момент электрона обладает аномальным гиромагнитным отношением $g_s = 2$: отношение спинового магнитного момента к механическому равно не $e/2m$, а e/m. Проекция магнитного момента на ось z принимает значение $(e/m)\hbar m_s = \pm\mu_B$. Аномальное значение гиромагнитного отношения подтверждается результатами опытов Эйнштейна — де Гааза (1914), в которых исследовались магнитомеханические эффекты (образование ме-

ханического момента при намагничивании железного образца).

Внутренним магнитным моментом — спином — обладают все элементарные частицы. Спин протона, нейтрона и μ-мезонов равен 1/2, спин фотона равен 1, спин π-мезонов равен 0.

- **Тонкая структура спектральных линий.** Тонкая структура линий водородоподобных атомов и щелочных металлов объясняется взаимодействием спинового магнитного момента с орбитальным. Появление такого взаимодействия проще всего понять в системе отсчета, связанной с электроном. В этой системе отсчета движущееся ядро создает магнитное поле, с которым взаимодействует спиновый магнитный момент. С учетом спин-орбитального взаимодействия сохраняются (коммутируют с гамильтонианом) следующие операторы: полный угловой момент $\hat{J}^2$, его проекция $\hat{J}_z$ и величина орбитального момента $\hat{L}^2$. Положение уровней $E_{n,l,j}$ определяется тремя квантовыми числами: n, l, j. (В многоэлектронных атомах для квантовых чисел углового момента используют прописные буквы L, S, J. Для спектроскопических обозначений орбитального момента используют буквы $S, P, D, F, \ldots$. В щелочных металлах состояние атома определяется одним электроном, и можно использовать как прописные, так и строчные буквы.) Вырождение каждого уровня составляет $2j+1$ состояний с различными значениями проекции полного момента. При заданном l полный момент может принимать два значения: $j = \left(l \pm \frac{1}{2}\right)$, при $l = 0$ получается только одно значение $j = \frac{1}{2}$. Значит, s-уровни не расщепляются (синглетные уровни), а уровни с $l > 0$ расщепляются на два близких уровня (дублетные уровни). При построении спектров надо учитывать правила отбора: $\Delta l = \pm 1$, $\Delta j = 0, \pm 1$. Например, при пе-

реходе с дублетного p-состояния в синглетное s-состояние возникает две линии (дублеты главной серии), а при переходе с дублетного d-состояние в дублетное p-состояние возникают три линии (сложные дублеты диффузной серии). Величина расщепления уменьшается с ростом орбитального числа, но быстро возрастает при переходе к атомам с бо́льшим порядковым номером.

В атоме водорода и водородоподобных ионах спин-орбитальное взаимодействие частично компенсируется релятивистскими поправками, и окончательный ответ для уровней энергии не содержит зависимости от орбитального квантового числа:

$$\Delta E_{n,j} = \alpha^2 R \frac{Z}{n^3}\left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{j+1/2}\right),$$

где $\alpha = ke^2/\hbar c \approx 1/137$ называется *постоянной тонкой структуры*. Дополнительное вырождение по орбитальному квантовому числу является специфической особенностью кулоновского потенциала.

6.3. Структура и спектры сложных атомов

• **Самосогласованное поле.** При переходе к многоэлектронным атомам задача описания атомных состояний существенно усложняется. В общем случае необходимо рассматривать волновую функцию, зависящую от координат и спиновых переменных всех электронов, и учитывать взаимодействие электронов не только с ядром, но и друг с другом. Однако хорошее описание дает приближение самосогласованного поля, в котором каждый электрон движется в усредненном поле ядра и остальных электронов. Потенциал самосогласованного поля $\varphi(r)$ описывается уравнением Томаса — Ферми, позволяющим получить наиболее выгодное энергетически распределение электронов в пространстве вокруг атома.

Решение уравнения Шредингера для электрона в самосогласованном поле позволяет получить стационарные состояния, энергия которых $E_{n,l}$ зависит от главного квантового числа и орбитального квантового числа. Первым делом необходимо выяснить структуру основного (обладающего наименьшей энергией) состояния атома. Какие одноэлектронные состояния занимают электроны в основном состоянии? На первый взгляд может показаться, что наиболее выгодно поместить все электроны в наинизшее состояние $1s$. Однако такое распределение электронов оказывается невозможным вследствие *принципа запрета Паули*, связанного со свойством тождественности частиц.

- **Тождественность частиц. Принцип Паули.** Принцип тождественности частиц в квантовой механике приобретает значительно более сильный смысл, чем в классической. В классической физике частицы одинаковы, но отличимы друг от друга: при перестановке двух электронов возникает состояние, которое надо учитывать как новое, не зависящее от начального. В квантовой механике частицы тождественны, т. е. абсолютно неотличимы: состояние, возникающее при перестановке частиц, тождественно совпадает с начальным состоянием. Это значит, что $|\psi(1, 2)|^2 = |\psi(2, 1)|^2$. Возникают две возможности: либо волновая функция симметрична относительно состояний частиц, т. е. $\psi(1, 2) = \psi(2, 1)$, либо антисимметрична, т. е. $\psi(1, 2) = -\psi(2, 1)$. Частицы первого типа называются *бозонами*, частицы второго типа — *фермионами*. В теории элементарных частиц доказывается, что к бозонам относятся частицы с целым спином, а к фермионам — частицы с полуцелым спином. Если волновая функция строится из одночастичных волновых функций, то в случае бозонов она должна быть симметризована, а в случае фермионов — антисимметризована. Например, в случае двух бозонов с одночастичными состояниями ψ_1 и ψ_2 волновая функция имеет вид $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2) + \psi_2(\vec{r}_1)\psi_1(\vec{r}_2)]$, а в случае двух фермионов $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2) - \psi_2(\vec{r}_1)\psi_1(\vec{r}_2)]$.

Электроны являются фермионами, т. е. система нескольких электронов описывается антисимметричной (по состояниям частиц) волновой функцией. Легко заметить, что в такой системе никакие два электрона не могут находиться в абсолютно одинаковых состояниях: волновая функция такого состояния должна быть тождественно равна нулю. Именно в этом и заключается принцип запрета Паули.

- **Таблица Менделеева.** Для описания электронной структуры основного состояния атома с порядковым номером Z надо расположить Z электронов по различным квантовым состояниям с наименьшей энергией. Для подсчета электронных состояний можно выбрать любой набор независимых квантовых чисел одного электрона, например, как в случае щелочных металлов, n, l, j и m_j. Однако удобнее не учитывать спин-орбитальное взаимодействие и использовать числа n, l, m_l и m_s для электрона в центрально-симметричном самосогласованном поле. (Для полного описания термов основного и возбужденного состояний придется выбрать набор квантовых чисел, описывающих состояние всего атома и относящихся к сохраняющимся величинам.)

Все электроны, имеющие одинаковое главное квантовое число n, относятся к одному *электронному слою*. Максимальное число электронов в n-м слое равно $2n^2$. Слой с $n = 1$ называется K-слоем, с $n = 2$ — L-слоем и далее по алфавиту. Все электроны в данном слое с фиксированным числом l образуют *электронную оболочку* с $2(2l + 1)$ электронами. Электроны данного слоя с большим значением l имеют большую энергию, благодаря возрастающему вкладу центробежной энергии. Состояние электрона обозначается номером главного

квантового числа, за которым следует буква, соответствующая его орбитальному числу. Если атом содержит несколько электронов из одной оболочки, то справа вверху указывается число электронов. Приведем электронные конфигурации ряда атомов:

K-слой:

$$^{1}\mathrm{H} - 1s, \quad ^{2}\mathrm{He} - 1s^2;$$

L-слой:

$^{3}\mathrm{Li} - 1s^2 2s$, $^{4}\mathrm{Be} - 1s^2 2s^2$,
$^{5}\mathrm{B} - 1s^2 2s^2 2p$, $^{6}\mathrm{C} - 1s^2 2s^2 2p^2$,
$^{7}\mathrm{N} - 1s^2 2s^2 2p^3$, $^{8}\mathrm{O} - 1s^2 2s^2 2p^4$,
$^{9}\mathrm{F} - 1s^2 2s^2 2p^5$, $^{10}\mathrm{Ne} - 1s^2 2s^2 2p^6$;

две оболочки *M*-слоя:

$^{11}\mathrm{Na} - [K, L]3s$, $^{12}\mathrm{Mg} - [K, L]3s^2$,
$^{13}\mathrm{Al} - [K, L]3s^2 3p$, $^{14}\mathrm{Si} - [K, L]3s^2 3p^2$,
$^{15}\mathrm{P} - [K, L]3s^2 3p^3$, $^{16}\mathrm{S} - [K, L]3s^2 3p^4$,
$^{17}\mathrm{Cl} - [K, L]3s^2 3p^5$, $^{18}\mathrm{Ar} - [K, L]3s^2 3p^6$;

s-оболочка *N*-слоя:

$^{19}\mathrm{K} - [K,L]3s^2 3p^6 4s$, $^{20}\mathrm{Ca} - [K, L]3s^2 3p^6 4s^2$;

d-оболочка *M*-слоя:

$^{21}\mathrm{Sc} - [K, L]3s^2 3p^6 3d 4s^2$, $^{22}\mathrm{Ti} - [K,L]3s^2 3p^6 3d^2 4s^2$

и т. д.

Видно, что начиная с номера 19 нарушается последовательное заполнение слоев — энергия *s*-электронов *N*-слоя оказывается меньше, чем энергия *d*-электронов *M*-слоя. Химические свойства элементов определяются числом электронов во внешнем слое, поэтому возникает периодичность химических свойств. Например, благородные газы гелий $^{4}\mathrm{He}$, неон $^{10}\mathrm{Ne}$, аргон $^{18}\mathrm{Ar}$, криптон $^{36}\mathrm{Kr}$, ксенон $^{54}\mathrm{Xe}$ и радон $^{86}\mathrm{Rn}$ отличаются тем, что на них заканчивается заполнение *p*-оболочек и они обладают большой энергией ионизации. У следующих по номеру атомов (литий, натрий, калий, рубидий, цезий и франций) имеется заполненная *p*-оболочка и один электрон в *s*-оболочке следующего слоя. Эти атомы образуют группу щелочных металлов и обладают малой энергией ионизации.

Отметим, что полный угловой и магнитный момент электронов любой заполненной оболочки равен нулю.

- **Термы сложных атомов.** В легких и средних атомах спин-орбитальное взаимодействие для отдельных электронов невелико, и сложение моментов происходит по следующей схеме. Орбитальные моменты электронов складываются в полный орбитальный момент $\hat{\vec{L}}$, который характеризуется квантовым числом L, а спины электронов складываются в полный спиновый момент $\hat{\vec{S}}$ (квантовое число S). В свою очередь орбитальный и спиновый моменты складываются в полный момент атома $\hat{\vec{J}}$. Такая схема носит название нормальной LS-связи, или *связи Рассела — Саундерса*. Число L всегда целое, а число S целое, если в оболочке четное число атомов, и полуцелое, если нечетное. Отметим, что складывать нужно только моменты электронов в незаполненной оболочке.

В случае нормальной связи сохраняются полный момент (величина и проекция), величины орбитального и спинового моментов. Каждый терм характеризуется квантовыми числами L, S и J и в отсутствие магнитного поля $(2J + 1)$-кратно вырожден. При заданных L, S квантовое число J может принимать $2S + 1$ значений от $L - S$ до $L + S$, поэтому число $2S + 1$ называют *мультиплетностью* терма. Отличие между энергиями термов из одного мультиплета определяется сравнительно слабым спин-орбитальным взаимодействием. Спектральные обозначения термов: орбитальное квантовое число атома изображается с помощью прописной буквы S, P, D, F, G и далее по алфавиту (в отличие от одноэлектронных состояний, где используются строчные буквы). Справа внизу указывается число J, которое выделяет данный терм из мультиплета, а слева вверху указывается мультиплетность терма $2S + 1$. (Следует иметь в виду, что при $L < S$ реальная мультиплетность терма равна $2L + 1$, но принято указывать $2S + 1$.) Например, терм $^2P_{3/2}$ соответствует квантовым числам

$L = 1$, $S = 1/2$ и $J = 3/2$. Кроме того, на схеме спектральных переходов, где надо изображать возбужденные состояния, указывают главное квантовое число возбужденного электрона (наименьшее число равно номеру слоя, к которому принадлежит незаполненная оболочка).

При сложении спиновых и орбитальных моментов электронов можно получить различные квантовые числа. Чтобы узнать, какие квантовые числа соответствуют основному состоянию атома, используют эмпирические *правила Хунда*. Первое правило: у терма с наименьшей энергией значение S максимально, и при этом значении S максимально значение L. Второе правило: $J = |L - S|$, если оболочка заполнена не более чем наполовину, и $J = L + S$ в обратном случае. Смысл первого правила Хунда заключается в том, что если у электронов одинаковые спиновые состояния, то у них разные пространственные состояния, что соответствует меньшей энергии взаимодействия между электронами. Например, у углерода для оболочки $2p^2$ полный спин равен $S = 1$, а орбитальное число не может иметь максимальное значение $L = 2$, так как в этом случае у двух электронов были бы одинаковые квантовые числа. Значит $L = 1$, а так как два электрона заполняют меньше половины p-оболочки, в которой 6 мест, то $J = |L - S| = 0$. Основной терм углерода $3P_0$. Проверьте, что основной терм атома азота $^4S_{3/2}$.

При построении схемы спектральных линий и выяснении мультиплетности линии излучения необходимо использовать как мультиплетность термов, так и *правила отбора* для переходов между термами. Правила отбора для излучательных переходов могут быть получены путем вычисления вероятности перехода между состояниями. Однако смысл правил отбора можно понять исходя из закона сохранения момента, с учетом того, что спин излученного фотона равен 1.

Правило отбора для числа J: $\Delta J = 0, \pm 1$, но запрещен переход между двумя состояниями с $J = 0$. Правило отбора для числа m_j: $\Delta m_j = 0, \pm 1$. Правило отбора для квантового числа S: $\Delta S = 0$. Правило отбора для квантового

числа L: $\Delta L = 0, \pm 1$, но запрещен переход между двумя состояниями с $L = 0$. В атомах с одним электроном в незаполненной оболочке переходы с $\Delta L = 0$ запрещены.

Правило отбора для спинового числа связано с тем, что магнитное поле электромагнитной волны слабо взаимодействует с магнитным моментом электрона (воздействие на орбитальный момент определяется электрическими силами). Например, в атомах с двумя электронами наблюдаются независимые серии для состояний с $S = 0$ (синглетные термы) и для состояний с $S = 1$ (триплетные термы). В случае гелия при описании данных используют исторически возникшее представление о двух видах гелия: парагелий ($S = 0$) и ортогелий ($S = 1$).

- **Характеристические рентгеновские спектры.** При бомбардировке анода электронной лампы энергичными электронами наблюдается рентгеновское излучение двух видов. Тормозное излучение связано с излучением рентгеновских квантов непосредственно электронами. Характерной особенностью этого излучения является коротковолновая граница спектра (см. раздел 5.7) и плавное распределение интенсивности излучения по спектру. На этом фоне выделяется ряд интенсивных узких линий характеристического излучения. Такое излучение возникает при выбивании электрона, принадлежащего одному из внутренних электронных слоев, после чего на освободившееся место переходит электрон с более высокого слоя и излучается рентгеновский квант. Если выбивается один из двух электронов K-слоя, то для рентгеновских линий используются обозначения: K_α для перехода электрона из L-слоя, K_β для перехода электрона из M-слоя и т. д. Если выбивается электрон из L-слоя, то спектральные линии обозначаются L_α, L_β и т. д.

Для электронов внутренних слоев поле ядра почти не экранировано. Поэтому, в отличие от электронов внешних слоев, энергия внутренних электронов должна сильно зависеть от порядкового номера ядра. Можно ожидать, что энергия этих электронных уровней долж-

на описываться формулой для водородоподобных атомов, с поправкой на экранирование:

$$E_n = \frac{R(Z-\delta)^2}{n^2}.$$

Поправка на экранирование может быть эмпирически внесена прямо в формулу для спектральных линий. Например, для линии K_α получим

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{3}{4} R_\lambda (Z-\sigma)^2,$$

где экранировочная поправка σ для легких атомов примерно равна единице. Этот закон был открыт в 1913 г. Мозли, который сформулировал его как закон линейной зависимости $\sqrt{\nu}$ для частоты характеристической линии от порядкового номера Z. *Закон Мозли* позволил правильно определить порядковые номера многих элементов в таблице Менделеева.

- **Атом во внешнем магнитном поле.** В достаточно слабых магнитных полях ($B < 1$ Тл) энергия взаимодействия электрона с магнитным полем мала по сравнению со спин-орбитальным взаимодействием, и магнитное расщепление термов мало по сравнению с расстоянием между термами мультиплета. В этом случае наблюдается *аномальный эффект Зеемана*, т. е. уровень энергии расщепляется на $2J + 1$ подуровней с разными квантовыми числами m_j, причем расстояние между подуровнями пропорционально величине магнитного поля и зависит от квантовых чисел L, S и J. Величина смещения подуровня выражается формулой $\Delta E = g_J m_J \mu_B B$, где μ_B — магнетон Бора, а

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

называют *фактором Ланге*.

Сложный характер эффекта Зеемана в слабых полях объясняется аномальным значением спинового магнитного момента, для которого гиромагнитное отношение равно 2. В ре-

зультате полный магнитный момент $\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\left(\hat{\vec{L}} + 2\hat{\vec{S}}\right)$ оказывается не пропорционален полному моменту $\hat{\vec{J}}$. В векторной модели магнитный момент можно представить быстро вращающимся вокруг сохраняющегося вектора полного момента, и в результате усреднения должна остаться только проекция магнитного момента на полный момент:

$$\vec{\mu}_J = \vec{J}\frac{(\vec{\mu}\vec{J})}{J^2} = -\frac{e}{2m}\,\vec{J}\frac{(\vec{L}+\vec{S})(\vec{L}+2\vec{S})}{J^2}.$$

Выражая $(\vec{L}\,\vec{S}) = \frac{1}{2}(J^2 - L^2 - S^2)$ и заменяя J^2 на $J(J+1)$, L^2 на $L(L+1)$ и S^2 на $S(S+1)$, получаем $\vec{\mu}_J = -\frac{e}{2m}\,g_J\vec{J}$, где g_J — фактор Ланге, выражение для которого приведено выше.

Чтобы получить расщепление спектральных линий в магнитном поле, надо учесть правила отбора. Например, уровень $^2P_{3/2}$ расщепится на 4 уровня с фактором Ланге $\frac{4}{3}$, а синглетный уровень $^2S_{1/2}$ — на два уровня с фактором Ланге 2, но будет наблюдаться не 8 уровней, а 6, так как переходы с $m_J = 3/2$ на $m_J = -1/2$ и с $m_J = -3/2$ на $m_J = 1/2$ запрещены правилом отбора $\Delta m_J = 0, \pm 1$.

При помещении атома в сильное магнитное поле тонкую структуру уровней можно не учитывать, т. е. можно пренебречь спин-орбитальным взаимодействием. Уровень с квантовыми числами m_L, m_S смещается в магнитном поле на $\Delta E = \mu_B B(m_L + 2m_S)$. Изменение частоты излучения составляет $\hbar\Delta\omega = \mu_B B(\Delta m_L + \Delta m_S)$. С учетом правил отбора $\Delta m_S = 0$, $\Delta m_L = 0, \pm 1$ получаем, что происходит расщепление каждой линии на три — две смещенных и одну несмещенную. Значит, в сильном магнитном поле эффект Зеемана становится нормальным. Это явление носит название *эффекта Пашена — Бака*.

Список литературы к разделу «Физика»

Бейзер А. Основные представления современной физики. — М.: Атомиздат, 1973. — 548 с.

Дубровский И. М., Егоров Б. В., Рябошапка К. П. Справочник по физике. — Киев: Наукова думка, 1986. — 558 с.

Енохович А. С. Справочник по физике. — М.: Просвещение, 1978. — 512 с.

Иродов И. Е. Задачи по общей физике. — М.: Наука, 1988. — 416 с.

Иродов И. Е. Механика. Основные законы. — М.: Физматлит, 2000. — 320 с.

Иродов И. Е. Электромагнетизм. Основные законы. — М.: Физматлит, 2000. — 352 с.

Иродов И. Е. Волновые процессы. Основные законы. — М.: Физматлит, 2000. — 256 с.

Иродов И. Е. Квантовая физика. Основные законы. — М.: Физматлит, 2001. — 272 с.

Иродов И. Е. Физика макросистем. Основные законы. — М.: Физматлит, 2001. — 200 с.

Калашников С. Г. Электричество. — М.: Наука, 1985. — 576 с.

Кикоин А. К, Кикоин И. К. Молекулярная физика. — М.: Наука, 1976. — 480 с.

Киттель Ч., Найт В., Рудерман М. Механика. — М.: Наука, 1975. — 480 с.

Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. Справочник по элементарной физике. — М.: Наука, 1988. — 256 с.

Курс физики / Под ред. Папалекси Н. Д., тт. 1, 2. — М.: Гостехиздат, 1948.

Кухлинг Х. Справочник по физике. — М.: Наука, 1982. — 520 с.

Лансберг Г. С. Оптика. — М.: Наука, 1976. — 926 с.

Матвеев А. Н. Механика и теория относительности. — М.: Высшая школа, 1986. — 320 с

Матвеев А. Н. Молекулярная физика. — М.: Высшая школа, 1981. — 400 с.

Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм. — М.: Высшая школа, 1983. — 463 с.

Орир Дж. Физика, тт. 1, 2. — М.: Мир, 1981.

Парселл Э. Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1971. — 448 с.

Савельев И. В. Курс физики. Т. 1. Механика. Молекулярная физика. — М.: Наука, 1989. — 350 с.

Савельев И. В. Курс физики. Т. 2. Электричество и магнетизм. — М.: Наука, 1989. — 496 с.

Савельев И. В. Курс физики. Т. 3. Квантовая физика. — М.: Наука, 1989. — 301 с.

Сивухин Д. В. Механика. — М.: Наука, 1989. — 576 с.

Сивухин Д. В. Термодинамика и молекулярная физика. — М.: Наука, 1990. — 592 с.

Сивухин Д. В. Электричество. — М.: Наука, 1991. — 688 с.

Сивухин Д. В. Оптика. — М.: Наука, 1992. — 752 с.

Стрелков С. П. Механика. — М.: Наука, 1975. — 560 с.

Таблицы физических величин, справочник / Под ред. И. К. Кикоина. — М.: Атомиздат, 1976. — 1008 с.

Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс. М. Фейнмановские лекции по физике, тт. 1 —9. — М.: Мир, 1965—1967.

Физическая энциклопедия / Под ред. А. М. Прохорова, тт. 1 —5. — М.: Сов. энциклопедия, 1988 — 1998.

Физический энциклопедический словарь / Под ред. А. М. Прохорова. — М.: Сов. энциклопедия, 1983. — 928 с.

Хайкин С. Э. Физические основы механики. — М.: Наука, 1971. — 752 с.

Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике. — М.: Наука, 1985. — 512 с.

Яворский Б. М., Детлаф А. А. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов. — М.: Наука, 1974. — 942 с.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Основные обозначения

A — работа;

a — абсолютная величина ускорения,

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,;$$

$\vec{a}$ — ускорение, $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$;

a_x, a_y, a_z — компоненты ускорения в декартовой системе координат;

$\vec{a}^n, \vec{a}^\tau$ — нормальное и касательное ускорения;

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ — скалярное произведение векторов;

$\vec{a} \times \vec{b}$ — векторное произведение векторов;

$\vec{F}$ — сила;

f_0 — статический коэффициент трения;

f — динамический коэффициент трения;

I_z — момент инерции относительно оси z;

$\vec{K}_P$ — момент количества движения относительно центра P, $\vec{K}_P = \vec{r} \times m\vec{v}$;

$\vec{M}$ — момент силы, момент пары сил;

m — масса материальной точки, масса тела;

$\vec{N}$ — сила нормального давления;

$\vec{Q}$ — количество движения (количество движения материальной точки: $\vec{Q} = m\vec{v}$);

$\vec{R}$ — главный вектор системы сил, $\vec{R} = \sum \vec{F}_k$;

$\vec{R}^*$ — равнодействующая;

$\vec{r}_P$ — радиус-вектор, проведенный из точки P;

s — дуговая координата;

$\vec{S}$ — импульс силы;

T — кинетическая энергия, $T = \frac{1}{2} mv^2$;

t — время;

v — абсолютная величина скорости,

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};$$

$\vec{v}$ — скорость, $\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\}$;

v_x, v_y, v_z — компоненты скорости в декартовой системе координат;

x, y, z — декартовы координаты;

$\dot{x}$; $\ddot{x}$ — краткие обозначения первой и второй производной по времени;

Φ — сила инерции;

φ — угол поворота;

ω — угловая скорость;

ε — угловое ускорение.

1. Кинематика

Кинематика — раздел механики, в котором изучаются геометрические свойства движения точки или тела вне зависимости от их массы и причин, вызывающих это движение.

1.1. Кинематика точки

Задать движение точки — значит задать правило, в соответствии с которым можно указать положение точки в каждый момент времени. Наиболее распространенными и удобными способами задания движения точки являются: векторный, координатный и естественный.

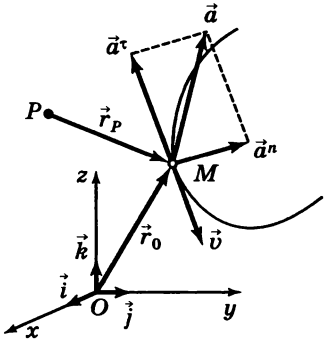


Рис. 1

- **Векторный способ задания движения точки.** Положение точки M задается *радиусом-вектором* $\vec{r}_P(t)$, проведенным в нее из неподвижного центра (полюса) P (рис. 1). Радиус-вектор является векторной функцией скалярного аргумента — времени t, с течением времени конец вектора $\vec{r}_P$ описывает в пространстве кривую, которая называется *траекторией* точки.

Наряду с радиусом-вектором кинематическое состояние точки M характеризуют векторы скорости $\vec{v}(t)$ и ускорения $\vec{a}(t)$.

Скорость точки $\vec{v} = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = \dot{\vec{r}}_P$ — вектор производной по времени от радиуса-вектора, характеризует быстроту и направление изменения положения точки в пространстве. Вектор скорости направлен по касательной к траектории в точке M.

Ускорение точки $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}_P$ — вектор первой производной по времени от вектора скорости, или второй производной от радиуса-вектора. Ускорение удобно представить в виде суммы двух векторов $\vec{a}^\tau$ и $\vec{a}^n$, расположенных в плоскости, образуемой векторами $\vec{v}$ и $\vec{a}$:

$$\vec{a} = \vec{a}^\tau + \vec{a}^n.$$

Вектор $\vec{a}^\tau$ направлен параллельно $\vec{v}$ и называется *касательным* (тангенциальным) ускорением, а вектор $\vec{a}^n$ направлен перпендикулярно $\vec{a}^\tau$ в сторону вогнутости траектории и называется *нормальным* ускорением.

Величины a^τ и a^n можно найти по формулам

$$a^\tau = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{v}|}{v} = |\dot{\vec{v}}|, \quad a^n = \sqrt{a^2 - (a^\tau)^2},$$

где $v = |\vec{v}|$, $\vec{a}\cdot\vec{v}$ —скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{v}$.

- **Координатный способ задания движения точки.** Положение точки в пространстве задается тремя функциями времени

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \tag{1}$$

где x, y, z — декартовы координаты точки M. Этот способ является другим представлением векторного, так как радиус-вектор $\vec{r}_0$, выходящий из начала координат, можно представить в виде векторной суммы

$$\vec{r}_0 = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы (орты), направленные вдоль координатных осей x, y, z (рис. 1).

Проекции скорости на оси координат v_x, v_y, v_z определяются дифференцированием по времени соответствующих функций (1):

$$v_x = \dot{x}\,, \quad v_y = \dot{y}\,, \quad v_z = \dot{z}\,. \tag{2}$$

Вектор скорости находится в виде геометрической суммы трех векторов:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

а модуль скорости — по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,. \tag{3}$$

Проекции ускорения на оси координат a_x, a_y, a_z, ускорение $\vec{a}$, а также его модуль a находятся по формулам

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}\,, \quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}\,, \quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}\,,$$

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \quad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{4}$$

Касательное ускорение вычисляется при помощи выражения

$$a^\tau = \frac{|\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}|}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} = |\dot{v}|\,. \tag{5}$$

При $\dot{v} > 0$ движение точки называется *ускоренным*, так как модуль скорости v является в данный момент времени возрастающей функцией. При $\dot{v} < 0$ движение называется *замедленным*.

- **Естественный способ задания движения точки.** Положение точки в пространстве определяется заданием:

а) траектории точки;

б) начала отсчета на траектории (точки O, от которой будет отсчитываться дуговая координата s);

в) положительного направления отсчета дуговой координаты;

г) закона движения точки $s = s(t)$ — зависимости ее дуговой координаты от времени.

Дуговая координата s — это длина дуги траектории, отсчитываемая от точки O до точки M. Если отсчет длины ведется в положительном направлении, то значение дуговой координаты положительно, а в противоположном случае — отрицательно.

Естественные оси координат наиболее удобны для изучения движения точки, заданного естественным способом. Сначала в точке M строится *соприкасающаяся окружность*, которая из всех мыслимых окружностей, проходящих через точку M, наиболее плотно смыкается с траекторией (рис. 2). Центр этой окружности называется *центром кривизны* траектории, а ее радиус ρ — *радиусом кривизны* траектории в точке M. Величина $k = 1/\rho$ называется *кривизной* траектории. На пологих участках траектории значения ρ больше, чем в точках искривленных участков, а k, наоборот, — меньше. Плоскость, в которой лежит соприкасающаяся окружность, называется *соприкасающейся плоскостью*, и часть траектории в окрестности точки M «практически» лежит в этой плоскости.

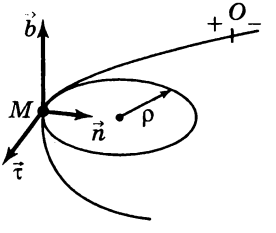


Рис. 2

Естественными осями координат называются три взаимно перпендикулярные оси: касательная к траектории в точке M, направленная в сторону возрастания дуговой координаты s; *главная нормаль*, лежащая в соприкасающейся плоскости и направленная к центру кривизны; *бинормаль*, перпендикулярная соприкасающейся плоскости и направленная так, что если посмотреть навстречу ее положительному направлению, ближайший поворот от касательной оси к оси главной нормали кажется происходящим против хода часовой стрелки. Единичные векторы (орты) обозначаются соответственно $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ (рис. 2), они образуют правую тройку. По построению $\vec{v} \parallel \vec{\tau}$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Используя естественные оси координат, векторы скорости и ускорения точки M можно записать в виде

$$\vec{v} = \dot{s}\,\vec{\tau}, \quad \vec{a} = \vec{a}^{\tau} + \vec{a}^{n} = \ddot{s}\,\vec{\tau} + a^{n}\vec{n},$$
$$v = |\dot{s}|\,, \quad a^{\tau} = |\ddot{s}|\,, \quad a^{n} = v^2/\rho. \tag{6}$$

Величина $\dot{s}$ представляет собой алгебраическое значение скорости и может быть как меньше, так и больше нуля. При положительном значении $\dot{s}$ скорость точки направлена в сторону положительного отсчета дуговой координаты. Абсолютное значение $\dot{s}$ равно модулю скорости v. Аналогично $\ddot{s}$ представляет собой алгебраическое значение касательного ускорения (например, при $\ddot{s} < 0$ вектор $\vec{a}^{\tau}$ направлен в сторону отрицательного отсчета дуговой координаты).

При одинаковых знаках величин $\dot{s}$ и $\ddot{s}$ движение точки в рассматриваемый момент времени ускоренное, при разных — замедленное. Нормальное ускорение равно нулю при движении точки по прямолинейному участку траектории. Касательное ускорение точки равно нулю, когда при движении точки алгебраическое значение величины скорости остается постоянным.

Равнопеременным движением точки называется движение, при котором $a^{\tau} = a_0 = \text{const}$. В этом случае алгебраическое значение скорости и дуговая координата могут быть найдены по формулам

$$v = v_0 + a_0(t - t_0),$$
$$s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\,a_0(t - t_0)^2. \tag{7}$$

Здесь v_0 и s_0 — алгебраическое значение скорости и дуговая координата, соответствующие моменту времени t_0.

Равномерным называется такое движение точки, при котором $a^{\tau} = 0$.

В общем случае дуговая координата s и пройденный точкой путь D могут быть найдены по формулам:

$$s = \int_{t_0}^{t} \dot{s}\ dt, \quad D = \int_{t_0}^{t} |\dot{s}|\ dt.$$

Отсюда видна разница между дуговой координатой и путем, пройденным точкой.

Пример. Линейка AB эллипсографа длиной $2l = 2$ м (рис. 3) движется так, что угол φ (в радианах) изменяется по закону $\varphi = -\frac{1}{2}t^2 + 2t + \frac{\pi}{6} - \frac{3}{2}$. При этом точка B линейки движется по горизонтальной прямой, а точка A — по вертикальной. Найти траекторию точки C, лежащей на середине линейки, а также ее скорость, ускорение и радиус кривизны траектории при $t = 1$ с.

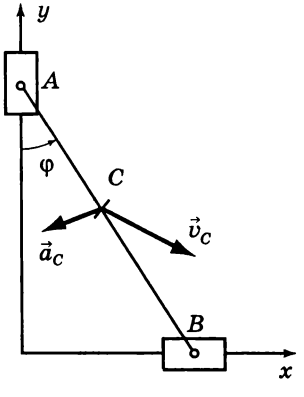


Рис. 3

Решение. Перейдем сначала к ранее рассмотренному координатному способу задания движения. Введем оси координат, как указано на рисунке, после чего найдем $x_C = l\sin\varphi$, $y_C = l\cos\varphi$. Возводя в квадрат правые и левые части уравнений движения и складывая их почленно, получим уравнение траектории

$$x_C^2 + y_C^2 = l^2,$$

откуда следует, что точка C движется по окружности радиуса l.

Воспользовавшись затем формулами (2)—(6) и учитывая, что моменту времени $t = 1$ с соответствуют $\varphi = \pi/6$, $\dot{\varphi} = 1\ \text{с}^{-1}$, $\ddot{\varphi} = -1\ \text{с}^{-2}$, найдем

$$v_{C_x} = \dot{x}_C = l\cos\varphi\ \dot{\varphi} = 0{,}87\ \text{м/с},$$

$$v_{C_y} = \dot{y}_C = -l\sin\varphi\ \dot{\varphi} = -0{,}5\ \text{м/с},$$

$$v_C = \sqrt{v_{C_x}^2 + v_{C_y}^2} = 1 \text{ м/с},$$

$$a_{C_x} = \dot{v}_{C_x} = l(-\sin\varphi\,\dot{\varphi}^2 + \cos\varphi\,\ddot{\varphi}) = -1{,}37 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{C_y} = \dot{v}_{C_y} = l(-\cos\varphi\,\dot{\varphi}^2 - \sin\varphi\,\ddot{\varphi}) = -0{,}37 \text{ м/с}^2, \qquad (8)$$

$$a_C = \sqrt{a_{C_x}^2 + a_{C_y}^2} = 1{,}41 \text{ м/с}^2,$$

$$a_C^\tau = \frac{v_{C_x} a_{C_x} + v_{C_y} a_{C_y}}{v_C} = -1{,}0 \text{ м/с}^2,$$

$$a_C^n = \sqrt{a_C^2 - (a_C^\tau)^2} = 1{,}0 \text{ м/с}^2,$$

$$\rho = \frac{v_C^2}{a_C^n} = 1{,}0 \text{ м},$$

причем последний результат очевиден заранее, исходя из полученного уравнения траектории.

1.2. Кинематика твердого тела

Теорема: проекции скоростей двух точек твердого тела на прямую, их соединяющую, равны (рис. 4).

Эта теорема справедлива для произвольного движения тела и утверждает, что проекции должны быть равны и по величине, и по направлению.

Простейшие движения твердого тела: поступательное и вращение вокруг неподвижной оси.

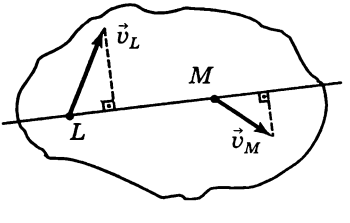


Рис. 4

- **Поступательное движение.** Движение твердого тела называется *поступательным*, если любая прямая, проведенная в нем, при движении остается параллельной своему первоначальному направлению. Свойства поступательного движения: траектории всех точек твердого тела при наложении совпадают, скорости и ускорения всех точек тела одинаковы в каждый момент времени:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B = \vec{v}, \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B = \vec{a},$$

где A и B —любые точки.

- **Вращение вокруг неподвижной оси.** При *вращении твердого тела вокруг неподвижной оси*, называемой осью вращения, его точки, лежащие на оси, остаются неподвижными. Через ось проведем две плоскости — неподвижную и подвижную, в которой находится точка тела, скорость и ускорение которой необходимо найти. Двугранный угол φ между подвижной и неподвижной плоскостями называется углом поворота тела, он измеряется в радианах. Угол поворота считают положительным, когда он отсчитывается от неподвижной плоскости к подвижной против хода часовой стрелки, если смотреть навстречу положительному направлению оси вращения. Чтобы было известно положение тела (и каждой его точки) в любой момент времени, необходимо знать зависимость угла φ от времени t:

$$\varphi = \varphi(t).$$

Это уравнение выражает *закон вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.*

Вместе с функцией $\varphi(t)$ ее первая и вторая производные по времени характеризуют кинематическое состояние твердого тела в рассматриваемый момент времени

$$\omega = \dot{\varphi}, \quad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi},$$

где ω — угловая скорость тела, ε — его угловое ускорение.

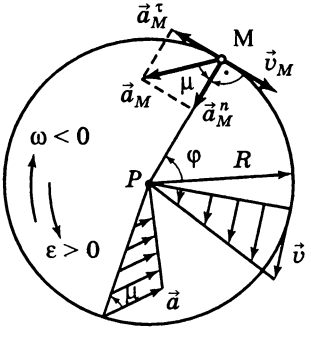


Рис. 5

Траекторией произвольной точки M твердого тела является окружность, радиус которой R называется радиусом вращения точки. На рис. 5 эта окружность изображена со стороны положительного направления оси вращения. Знак ω указывает направление вращения: если он положителен, то вращение происходит против хода часовой стрелки. Угловую скорость и угловое ускорение удобно изображать при помощи дуговых стрелок с учетом их знаков. Если знаки ω и ε одинаковы, то говорят, что вращение ускоренное, если знаки разные — замедленное.

Вращение твердого тела называется *равнопеременным*, когда $\varepsilon = \varepsilon_0 = \text{const}$. В этом случае зависимости угла поворота и угловой скорости от времени даются формулами

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon_0(t - t_0),$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\varepsilon_0(t - t_0)^2,$$

аналогичными формулам (7) для равнопеременного движения точки.

Равномерное вращение твердого тела является частным случаем равнопеременного, когда $\varepsilon_0 = \text{const} = 0$.

В общем случае при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси модуль скорости точки M находится по формуле

$$v = |\omega|R, \tag{9}$$

при этом скорость направлена по касательной к окружности, т. е. перпендикулярно к радиусу, и ее направле-

ние согласовано с направлением дуговой стрелки ω. Величины касательного, нормального и полного ускорения можно найти по формулам, являющимся частными случаями формул (6):

$$a^{\tau} = |\varepsilon| R, \quad a^{n} = \omega^2 R, \quad a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,.$$

Вектор касательного ускорения $\vec{a}^{\tau}$ направлен по касательной к окружности, и его направление согласовано с направлением дуговой стрелки ε, вектор $\vec{a}^{n}$ направлен по радиусу R к центру окружности. Острый угол μ между $\vec{a}$ и R можно найти по формуле

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{a^{\tau}}{a^{n}} = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2},$$

при этом направление ближайшего поворота от $\vec{a}$ к $\overrightarrow{MP}$ будет согласовано с направлением дуговой стрелки ε.

Величины ω, ε, входящие в последние формулы, одинаковы для всех точек тела и характеризуют кинематическое состояние тела в целом.

Из формул следует, что векторы $\vec{v}$ и $\vec{a}$ разных точек тела, лежащих на одном радиусе, параллельны между собой и линейно зависят от расстояния до оси вращения (рис. 5).

1.3. Плоскопараллельное движение твердого тела

• **Плоскопараллельным** называется такое движение твердого тела, при котором остается постоянным расстояние от любой его точки до некоторой неподвижной плоскости, которая называется основной.

Изучение плоскопараллельного движения сводится к исследованию движения плоской фигуры в ее плоскости. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси является частным случаем плоскопараллельного движения. Угол поворота плоской фигуры $\varphi(t)$ отсчи-

тывается от некоторой неподвижной прямой до прямой, неизменно связанной с фигурой. Правило знаков для φ принимается такое же, как в случае вращения тела вокруг неподвижной оси.

Положение плоской фигуры полностью определено, если известны координаты некоторой ее точки (полюса, центра) P и угол поворота. Соотношения

$$x_P = x(t), \quad y_P = y(t), \quad \varphi = \varphi(t),$$

задающие три функциональные зависимости от времени, называются *уравнениями движения плоской фигуры*. Угловая скорость ω и угловое ускорение ε вводятся аналогично случаю вращения тела вокруг неподвижной оси: $\omega = \dot{\varphi}$, $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}$.

- **Теорема о скоростях точек плоской фигуры:** скорость любой точки B плоской фигуры равна геометрической сумме векторов скорости полюса $\vec{v}_P$ и скорости $\vec{v}_{BP}$, которую имела бы точка B при вращении фигуры вокруг неподвижного полюса P (рис. 6):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{v}_{BP}.$$

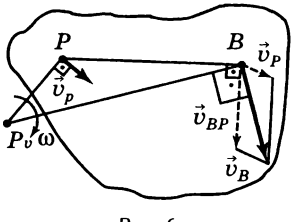


Рис. 6

Скорость $\vec{v}_{BP}$ перпендикулярна отрезку BP, ее величина подсчитывается по формуле $v_{BP} = |\omega| BP$, а направление согласовано с направлением дуговой стрелки ω.

Точка P_v плоской фигуры, скорость которой в рассматриваемый момент времени равна нулю, называется *мгновенным центром скоростей*. Если эту точку принять в качестве полюса, скорость произвольной точки B плоской фигуры определится по формуле $\vec{v}_B = \vec{v}_{BP_v}$. Направление $\vec{v}_B$ будет согласовано с направлением дуговой стрелки угловой скорости, а ее модуль

найдется из формулы $v_B = |\omega| BP_v$. Скорости точек плоской фигуры в рассматриваемый момент времени будут распределены так же, как в случае вращения фигуры вокруг неподвижной оси, проходящей через мгновенный центр скоростей. Поэтому можно воспользоваться формулой (9) вращательного движения

$$|\omega| = \frac{v_B}{BP_v} = \frac{v_C}{CP_v} = \frac{v_D}{DP_v}.$$

На рис. 7 показаны варианты расположения мгновенного центра скоростей:

а) при качении без проскальзывания по неподвижной поверхности мгновенный центр скоростей находится в точке касания (рис. 7, *а*);

б) если $\vec{v}_B \parallel \vec{v}_C$ и $\vec{v}_B \perp BC$, то положение P_v определяется построением, показанным на рис. 7, *б*;

в) если $\vec{v}_B \parallel \vec{v}_C$ и отрезок BC не перпендикулярен $\vec{v}_B$, то мгновенного центра скоростей нет, $\omega = 0$, а скорости всех точек тела одинаковы в данный момент времени (рис. 7, *в*).

Пример. Найти в момент времени $t = 1$ с скорости точек A, B и C линейки эллипсографа, движение которого описано в примере из разд. 1.1.

Решение. Стержень AB совершает плоскопараллельное движение. Проводя перпендикуляры к направлениям скоростей точек A и B, найдем положение мгновенного центра

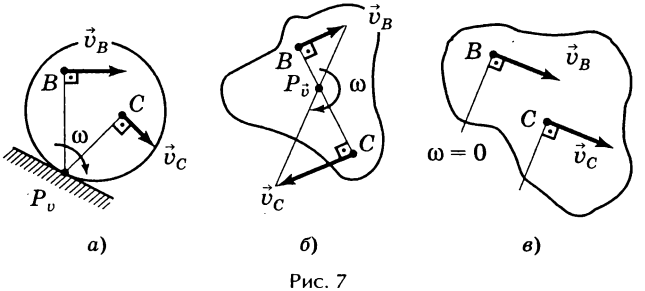


Рис. 7

скоростей P_v (рис. 8). Угловую скорость $\omega = \dot{\varphi} = 1\ \text{с}^{-1}$ изобразим дуговой стрелкой с учетом знака. Направим скорости точек A, B и C перпендикулярно прямым, соединяющим их с P_v, согласовав их направления с дуговой стрелкой угловой скорости. Величины скоростей найдем из соотношения

$$\omega = \frac{v_A}{AP_v} = \frac{v_B}{BP_v} = \frac{v_C}{CP_v},$$

откуда $v_A = v_C = 1{,}0$ м/с, $v_B = \sqrt{3} = 1{,}73$ м/с.

- **Теорема об ускорениях точек плоской фигуры:** ускорение любой точки B плоской фигуры равно геометрической сумме векторов ускорения полюса $\vec{a}_P$ и ускорения $\vec{a}_{BP}$, которое имела бы точка B при вращении фигуры вокруг неподвижного полюса P:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_P + \vec{a}_{BP} = \vec{a}_P + \vec{a}^{\,\tau}_{BP} + \vec{a}^{\,n}_{BP}. \qquad (10)$$

Модули векторов $\vec{a}^{\,\tau}_{BP}$ и $\vec{a}^{\,n}_{BP}$ и их ориентация на плоскости следующие: $\vec{a}^{\,n}_{BP} \parallel BP$ и направлен к полюсу P; $a^n_{BP} = \omega^2 BP$; $\vec{a}^{\,\tau}_{BP} \perp BP$ и согласован с направлением дуговой стрелки ε, $\vec{a}^{\,\tau}_{BP} = |\varepsilon| BP$ (рис. 9).

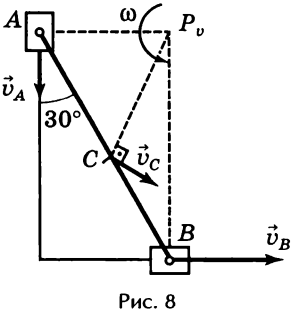


Рис. 8

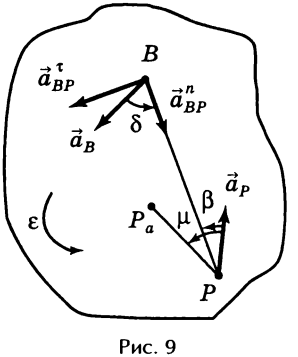


Рис. 9

Если спроектировать векторное равенство (10) на два направления — параллельное BP и перпендикулярное BP, получится система двух скалярных уравнений

$$a_B \cos\delta = -a_P \cos\beta + \omega^2 BP,$$

$$a_B \sin\delta = -a_P \sin\beta + |\varepsilon| BP,$$

в которых фигурируют семь величин — a_B, a_P, δ, β, BP, ω, ε. Если пять из них известны, то оставшиеся две могут быть найдены путем решения системы.

Мгновенным центром ускорений плоской фигуры называется неизменно связанная с ней точка P_a, ускорение которой в рассматриваемый момент времени равно нулю. Картина распределения ускорений точек плоской фигуры такая же, как при ее вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через точку P_a.

1.4. Произвольное движение твердого тела

Скорость $\vec{v}_B$ и ускорение $\vec{a}_B$ любой точки твердого тела, совершающего произвольное движение, могут быть найдены, если в рассматриваемый момент времени известны: скорость $\vec{v}_P$ и ускорение $\vec{a}_P$ некоторой точки P тела, а также векторы угловой скорости $\vec{\omega}$ и углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ тела. Соответствующие формулы имеют вид

$$\begin{aligned} \vec{v}_B &= \vec{v}_P + \vec{\omega} \times \overrightarrow{PB}, \\ \vec{a}_B &= \vec{a}_P + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{PB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{PB}). \end{aligned} \qquad (11)$$

Векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ характеризуют кинематическое состояние тела в рассматриваемый момент времени. Можно показать, что они не зависят от выбора полюса P.

В случаях вращения тела вокруг неподвижной оси и при плоскопараллельном движении вектор $\vec{\omega}$ равен первой производной от угла поворота по времени и направлен перпендикулярно основной плоскости. При этом, если посмотреть навстречу вектору $\vec{\omega}$, вращение

будет казаться происходящим против хода часовой стрелки. Вектор $\vec{\varepsilon}$ в этих случаях направлен параллельно вектору $\vec{\omega}$, если знаки $\dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$ одинаковы. В противном случае $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ антипараллельны.

При произвольном движении малое перемещение тела удобно представить как совокупность его простейших движений, совершаемых одновременно, — малого поступательного перемещения вместе с полюсом P и малого поворота вокруг оси, проходящей через полюс.

Если $\vec{v}_P = 0$, что имеет место, например, при *сферическом движении*, формула для скорости (11) принимает вид *формулы Эйлера*

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \overrightarrow{PB}.$$

В этом случае распределение скоростей точек тела такое же, как при вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через P параллельно вектору $\vec{\omega}$, поэтому она называется *мгновенной осью вращения*. Скорости всех точек тела, оказавшихся на этой оси в рассматриваемый момент времени, будут равны нулю, и малое перемещение тела можно рассматривать как поворот на малый угол вокруг мгновенной оси вращения.

1.5. Сложное движение точки

• **Основные понятия.** Часто за одной и той же точкой M следят два наблюдателя, один из них находится в основной системе координат $Oxyz$, которая считается неподвижной, другой — в подвижной системе координат $Px_1y_1z_1$, которая известным образом движется относительно неподвижной (рис. 10). В этом случае, если будет задан закон движения точки в подвижной системе координат, то тем самым в любой момент времени будет задано положение точки и в неподвижной системе координат. Движение точки, заданное таким образом, называется *сложным* (составным) движением точки.

Описанный способ задания движения точки отличен от изученных ранее. Скорость точки и ее ускорение можно определить так: надлежащими преобразованиями перейти к одному из изученных способов задания движения точки и затем действовать соответствующим образом. Однако эту же задачу можно решить по-другому, опираясь на рассматриваемые ниже теоремы о скоростях и ускорениях при сложном движении точки.

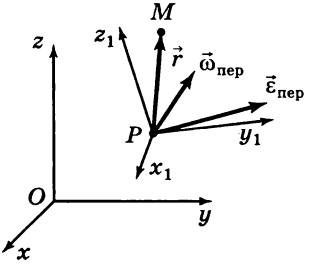


Рис. 10

Абсолютным движением точки M называется ее движение по отношению к неподвижной (абсолютной) системе координат. Траектория точки, ее скорость и ускорение называются соответственно *абсолютной траекторией, абсолютной скоростью* $\vec{v}_{абс}$ и *абсолютным ускорением* $\vec{a}_{абс}$.

Относительным движением точки M называется ее движение по отношению к подвижной системе координат. Траектория точки, ее скорость и ускорение по отношению к подвижной системе координат называются соответственно *относительной траекторией, относительной скоростью* $\vec{v}_{отн}$ и *относительным ускорением* $\vec{a}_{отн}$.

Переносным движением называется движение подвижной системы координат по отношению к неподвижной. При этом движении подвижная система «переносит» вместе с собой множество неизменно связанных с ней точек.

Переносной скоростью $\vec{v}_{пер}$ и *переносным ускорением* $\vec{a}_{пер}$ называются скорость и ускорение той неизменно связанной с подвижной системой точки B, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M.

Если известны скорость $\vec{v}_P$ и ускорение $\vec{a}_P$ некоторой точки, принадлежащей подвижной системе, а также угловая скорость $\vec{\omega}_{\text{пер}}$ и угловое ускорение $\vec{\varepsilon}_{\text{пер}}$ подвижной системы, то $\vec{v}_B$ и $\vec{a}_B$ можно найти, пользуясь формулами (11):

$$\vec{v}_B = \vec{v}_P + \vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{r},$$

$$\vec{a}_B = \vec{a}_P + \vec{\varepsilon}_{\text{пер}} \times \vec{r} + \vec{\omega}_{\text{пер}} \times (\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{r}).$$

- **Основные теоремы.** *Теорема о скоростях при сложном движении точки*: вектор абсолютной скорости равен геометрической сумме векторов относительной и переносной скоростей

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Теорема об ускорениях при сложном движении точки: вектор абсолютного ускорения равен геометрической сумме векторов относительного, переносного и *кориолисова* ускорений

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

Вектор ускорения Кориолиса определяется формулой

$$\vec{a}_{\text{кор}} = 2(\vec{\omega}_{\text{пер}} \times \vec{v}_{\text{отн}}) \qquad (12)$$

и находится в соответствии с правилами вычисления векторного произведения.

При нахождении векторов $\vec{a}_{\text{отн}}$ и $\vec{a}_{\text{пер}}$ необходимо иметь в виду, что каждый из них может являться геометрической суммой нескольких составляющих, например, касательного и нормального ускорений.

Пример. По линейке эллипсографа, движение которого описано в примере из разд. 1.1, движется точка M по закону $AM = 0{,}5t^2 - 2t + 2{,}5$. Определить ее скорость и ускорение в момент времени $t = 1$ с.

Решение. Найдем скорость и ускорение, пользуясь теоремами сложного движения точки. Введем подвижную систему координат, связав ее со стержнем AB. При таком выборе относительное движение точки M будет задано естественным способом. При $t = 1$ с она окажется в середине отрезка.

Относительные скорость и ускорение найдем, пользуясь формулами (6)

$$v_{\text{отн}} = \dot{L} = t - 2 = -1 \text{ м/с},$$

$$\vec{a}^{\tau}_{\text{отн}} = \ddot{L} = 1 \text{ м/с}^2, \quad a^{n}_{\text{отн}} = v^2_{\text{отн}}/\rho_{\text{отн}} = 0, \text{ (так как } 1/\rho_{\text{отн}} = 0),$$

где использовано обозначение $L = AM$.

Изобразим на рис. 11 относительные скорость и ускорение с учетом знаков.

Переносными скоростью и ускорением точки M будут являться скорость и ускорение того пункта линейки эллипсографа, в котором точка окажется в момент $t = 1$ с. Этим пунктом будет являться точка C линейки, скорость и ускорение которой были найдены при решении примера, разобранного в разд. 1.1 (см. формулы (8)):

$$\vec{v}_{\text{пер}} = \vec{v}_C, \quad \vec{a}_{\text{пер}} = \vec{a}_C.$$

Найдем ускорение Кориолиса (12). Вектор угловой скорости подвижной системы координат направлен к наблюдателю перпендикулярно плоскости рисунка. Вектор $\vec{a}_{\text{кор}}$ располагается в плоскости рисунка перпендикулярно $\vec{v}_{\text{отн}}$ так, что если посмотреть навстречу $\vec{a}_{\text{кор}}$, поворот от $\vec{\omega}$ в ближайшую сторону к $\vec{v}_{\text{отн}}$ кажется происходящим против хода часовой *а* стрелки (рис. 11). Модуль $\vec{a}_{\text{кор}}$ равен

$$|\vec{a}_{\text{кор}}| = 2|\vec{\omega}||\vec{v}_{\text{отн}}| \sin 90° = 2 \text{ м/с}^2.$$

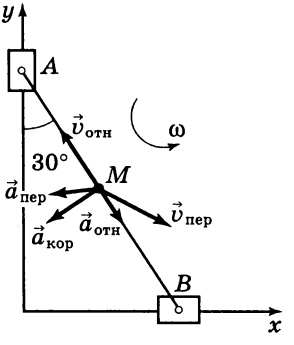


Рис. 11

Находим абсолютную скорость точки M

$$\vec{v}_{\text{абс}} = \vec{v}_{\text{отн}} + \vec{v}_{\text{пер}}.$$

Спроектируем обе части векторного равенства на оси x и y

$$a_{\text{абс}\,x} = v_{\text{отн}\,x} + v_{\text{пер}\,x} = -1 \sin 30° + 1 \cos 30° = 0{,}37 \text{ м/с},$$

$$a_{\text{абс}\,y} = v_{\text{отн}\,y} + v_{\text{пер}\,y} = 1 \cos 30° - 1 \sin 30° = 0{,}37 \text{ м/с},$$

откуда $\vec{v}_{\text{абс}} = \sqrt{v^2_{\text{абс}\,x} + v^2_{\text{абс}\,y}} = 0{,}52$ м/с.

Находим абсолютное ускорение точки M

$$\vec{a}_{\text{абс}} = \vec{a}_{\text{отн}} + \vec{a}_{\text{пер}} + \vec{a}_{\text{кор}}.$$

Спроектируем обе части последнего векторного соотношения на оси x и y с учетом формул (8)

$$a_{\text{абс}\,x} = 1 \sin 30° - 1{,}37 - 2 \cos 30° = -2{,}60 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{\text{абс}\,y} = -1 \cos 30° - 0{,}37 - 2 \sin 30° = -2{,}24 \text{ м/с}^2.$$

Поэтому $a_{\text{абс}} = \sqrt{a^2_{\text{абс}\,x} + a^2_{\text{абс}\,y}} = 3{,}43 \text{ м/с}^2$.

При решении задач кинематики с помощью теорем сложного движения точки нахождение кинематических характеристик относительного и переносного движений можно начинать только после выбора подвижной системы координат. Поэтому вопрос о направлении ускорения Кориолиса лишен всякого смысла, пока не указаны неподвижная система, а также подвижная система и закон ее движения.

2. Основные понятия и аксиомы механики

2.1. Основные понятия механики

• **Механические системы. Силы.** *Механической системой* называется совокупность материальных точек, выделенных по некоторому признаку. Как правило, положение какой-либо точки, ее скорость и ускорение зависят от положений и скоростей остальных точек.

Несвободной механической системой называется такая система точек, на положения и скорости которых наложены ограничения. Материальные тела, которые осуществляют эти ограничения, называются *механическими связями*, наложенными на механическую систему. Соотношения, связывающие координаты, скорости точек системы и время, называются *уравнениями связей*. Материальная система называется *свободной* в случае отсутствия механических связей.

Абсолютно твердым телом (твердым телом, телом) называется совокупность материальных точек, взаимное положение которых не меняется.

При взаимодействии точек (тел) механической системы происходит изменение их кинематического состояния. Мерой такого взаимодействия является *сила*, изображаемая на рисунках в виде направленного прямолинейного отрезка. *Линией действия силы* называется прямая, вдоль которой направлен этот отрезок.

Совокупность сил, выделенных по какому-либо признаку, называется *системой сил* и обозначается $\{\vec{F}_i\}$.

Система сил называется *уравновешенной*, если приложенная к свободному твердому телу, находящемуся в покое, она не выводит его из этого состояния.

Системы сил $\{\vec{F}_i\}$ и $\{\vec{G}_j\}$ называются *эквивалентными*, если порознь приложенные к свободному твердому

телу они вызывают одинаковое изменение его кинематического состояния.

Если существует сила $\vec{R}^*$, эквивалентная системе сил, то она называется *равнодействующей*.

Силы, с которыми механические связи действуют на точки системы, называются *силами реакций связей*. Силы, действующие на точки системы и не являющиеся силами реакций, называются *активными силами*.

- **Моменты сил.** *Моментом силы $\vec{F}$ относительно центра (точки) P* называется вектор $\vec{M}_P(\vec{F})$, равный векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}_P$, проведенного из центра в точку приложения силы, на вектор силы: $\vec{M}_P(\vec{F}) = \vec{r}_P \times \vec{F}$ (рис. 12).

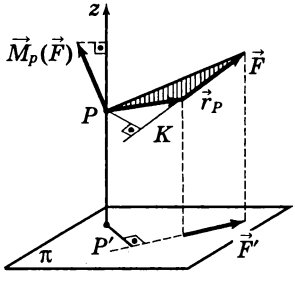


Рис. 12

Модуль момента силы равен произведению модуля силы на величину ее плеча относительно центра. *Плечом силы $\vec{F}$* относительно центра называется отрезок перпендикуляра PK, опущенного из центра на линию действия. Вектор $\vec{M}_P(\vec{F})$ перпендикулярен плоскости, в которой располагаются сила и центр, и направлен так, что если посмотреть ему навстречу, поворот силы вокруг центра кажется происходящим против хода часовой стрелки. Если силу перенести по линии действия, ее момент относительно того же центра не изменится.

Моментом силы $\vec{F}$ относительно оси z называется скалярная величина $M_z(\vec{F})$, равная проекции на эту ось вектора момента силы относительно любого центра, лежащего на этой оси. Для вычисления момента силы относительно оси необходимо:

1) провести любую плоскость π, перпендикулярную оси, и отметить точку P' их пересечения (рис. 12);

2) найти $\vec{F}'$ — проекцию силы на плоскость;

3) найти абсолютное значение момента вектора $\vec{F}'$ относительно центра P';

4) полученной величине присвоить знак, наблюдая за вращением $\vec{F}'$ вокруг P' со стороны положительного направления оси, при этом вращению против хода часовой стрелки будет соответствовать положительный знак.

Момент силы относительно оси не изменится, если силу перенести вдоль линии действия. Момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось находятся в одной плоскости; в этом случае линия действия силы либо параллельна оси, либо ее пересекает.

Момент силы $\vec{F}$ относительно начала системы координат O и моменты силы относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r}_O \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = M_x(\vec{F})\vec{i} + M_y(\vec{F})\vec{j} + M_z(\vec{F})\vec{k};$$

$$M_x(\vec{F}) = yF_z - zF_y,\ M_y(\vec{F}) = zF_x - xF_z,\ M_z(\vec{F}) = xF_y - yF_x,$$

где F_x, F_y, F_z — проекции силы на координатные оси, а x, y, z — координаты точки ее приложения.

Главным вектором системы сил $\{\vec{F}_k\}$ называется вектор $\vec{R}$, равный геометрической сумме всех сил системы:

$$\vec{R} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k.$$

Главным моментом системы сил относительно центра P называется вектор $\vec{M}_P$, равный геометрической сумме векторов моментов всех сил системы относительно центра P:

$$\vec{M}_P = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_P(\vec{F}_k) = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_{kP} \times \vec{F}_k.$$

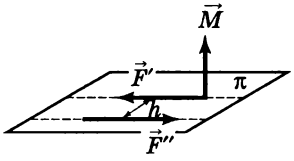


Рис. 13

- **Парой сил** называется система двух сил $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, приложенных к одному твердому телу, которые равны по модулю, параллельны и направлены в противоположные стороны (рис. 13).

Кратчайшее расстояние h между линиями действия сил пары называется *плечом пары*, а плоскость, в которой лежат силы, — *плоскостью действия пары*.

Свойства пары сил:

1. Главный вектор пары сил равен нулю.

2. Главный момент пары сил $\vec{M} = \vec{M}(\vec{F}', \vec{F}'')$ не зависит от выбора центра и называется *моментом пары сил*. Он равен моменту одной из сил пары относительно точки приложения другой силы. Момент пары сил является мерой ее механического действия на твердое тело. Под действием пары сил свободное твердое тело, находившееся до того в покое, начинает вращаться вокруг оси, параллельной вектору момента пары сил.

2.2. Аксиомы механики

Основные аксиомы механики (*законы Галилея — Ньютона*) перечислены ниже.

- **1. Закон инерции** (*первый закон Ньютона*): если на свободную материальную точку не действуют силы, то она сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения.

- **2. Закон пропорциональности силы и ускорения** (*второй закон Ньютона*) записывается в виде векторного равенства

$$m\vec{a} = \vec{F},$$

согласно которому сила, действующая на свободную точку, сообщает ей ускорение, вектор которого параллелен силе и пропорционален ее величине.

Масса точки m входит во второй закон скалярным коэффициентом пропорциональности. В механике масса полагается постоянной величиной, она является мерой инертности и гравитационных свойств материальной точки.

Системы отсчета, в которых выполняются первый и второй законы Ньютона, называются *инерциальными системами отсчета*. Если в некоторой системе отсчета эти законы не выполняются, то она называется *неинерциальной*.

- **3. Закон равенства действия и противодействия** (*третий закон Ньютона*): всякому действию соответствует равное и противоположно направленное противодействие.

Силовые воздействия одних материальных тел на другие не бывают односторонними, они всегда взаимны. Силы не возникают сами по себе, а являются результатом контактного или пространственного взаимодействия тел. Появление силы, действующей на тело, предполагает наличие другого тела, на которое, в свою очередь, будет действовать сила со стороны первого тела. Закон утверждает, что эти силы равны по величине, противоположны по направлению и их линии действия совпадают.

- **4.** Система сил, приложенных к одной точке, имеет равнодействующую $\vec{R}^*$, которая равна их геометрической сумме.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей системы сходящихся сил (является следствием четвертой аксиомы): момент равнодействующей системы сходящихся сил относительно произвольного центра равен геометрической сумме моментов сил системы относительно того же центра.

- **5.** Кинематическое состояние несвободной механической системы не изменяется, если отбросить механические связи, наложенные на систему, заменив их действие силами реакций связей.

3. Статика

3.1. Основные законы и теоремы статики

- **Задачами статики** являются:

1) преобразования систем сил в эквивалентные системы сил;

2) определение условий равновесия систем сил, действующих на твердое тело.

- **Аксиомы статики.** Дополнительно к общим законам механики в статике присоединяют следующие аксиомы.

1. *Аксиома об уравновешенности двух сил, приложенных к твердому телу*: две силы, приложенные к твердому телу, взаимно уравновешиваются только в том случае, если силы направлены в разные стороны вдоль общей линии действия и модули их равны.

2. *Аксиома присоединения и исключения уравновешенных систем сил*: действие системы сил на твердое тело не изменится, если к ней добавить или из нее исключить уравновешенную систему сил.

Из последних двух аксиом следует, что силу, приложенную к твердому телу, можно переносить вдоль линии действия, при этом действие силы на тело не будет меняться.

3. *Аксиома о сохранении равновесия механической системы при наложении дополнительных механических связей*: если механическая система находится в состоянии равновесия, то оно сохранится, если на систему наложить дополнительную механическую связь. Отсюда, в частности, следует, что равновесие деформируемого тела, находящегося под действием некоторой системы сил, сохранится при его затвердевании, так как затвердевание тела эквивалентно наложению до-

полнительных механических связей на систему материальных точек, образующих деформируемое тело.

- **Основные теоремы статики.**

Можно доказать, что две пары сил эквивалентны в том случае, если их моменты равны. Это означает, что, не изменяя действия пары на твердое тело, ее можно переносить в любое место в плоскости ее действия, при этом пару можно поворачивать, менять величины сил и плеча, оставляя постоянным направление вращения и величину момента пары. Пару можно также переносить в другую плоскость, параллельную исходной плоскости действия пары. Таким образом, основной характеристикой пары является вектор ее момента, поэтому пару удобнее представлять этим вектором, а не двумя антипараллельными силами.

Теорема о результирующей паре сил: система пар, приложенных к твердому телу, эквивалентна одной паре сил, момент которой равен геометрической сумме моментов исходных пар.

Теорема о параллельном переносе силы: силу, не меняя ее действия на твердое тело, можно параллельно перенести в любую точку тела, добавив к нему при этом пару сил (эта пара называется присоединенной), момент которой равен моменту переносимой силы относительно той точки, куда сила переносится.

Теорема о приведении системы сил к центру: произвольная система сил, приложенных к твердому телу, эквивалентна одной силе, приложенной в наперед выбранном центре P, и одной паре сил. При этом сила равна главному вектору системы сил $\vec{R}$, а момент пары сил — главному моменту системы сил $\vec{M}_P$ относительно выбранного центра.

Теорема об эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу: для того чтобы системы сил были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы у них были одинаковые главные векторы и главные моменты относительно одного и того же центра.

Теорема Вариньона о моменте равнодействующей: если система сил имеет равнодействующую $\vec{R}^*$, то ее мо-

мент относительно любого центра P равен геометрической сумме векторов моментов всех сил системы относительно того же центра:

$$\vec{M}_P(\vec{R}^*) = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_P(\vec{F}_k).$$

Следствие: момент равнодействующей относительно произвольной оси равен алгебраической сумме моментов всех сил системы относительно той же оси.

3.2. Условия уравновешенности систем сил, приложенных к твердому телу

• **Уравнения равновесия твердого тела.** Для того чтобы система сил, приложенных к твердому телу, была уравновешенной, необходимо и достаточно, чтобы были равны нулю ее главный вектор и главный момент относительно какого-либо центра

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_k = 0; \quad \vec{M}_P = \sum \vec{M}_P(\vec{F}_k) = 0. \qquad (1)$$

Условия уравновешенности системы сил, приложенных к твердому телу, в координатной форме получаются из векторных уравнений (1) и имеют вид системы шести уравнений

$$\begin{aligned} &\sum F_{kx} = 0, \quad &&\sum F_{ky} = 0, \quad &&\sum F_{kz} = 0, \\ &\sum M_x(\vec{F}_k) = 0, \quad &&\sum M_y(\vec{F}_k) = 0, \quad &&\sum M_z(\vec{F}_k) = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Верхние три уравнения называются *уравнениями проекций* сил на координатные оси; они отражают тот факт, что при равновесии твердого тела алгебраическая сумма проекций всех сил, приложенных к телу, на каждую координатную ось должна быть равна нулю. Нижние три уравнения называются *уравнениями мо-*

ментов сил относительно координатных осей. Эти уравнения указывают на то, что при равновесии тела алгебраическая сумма моментов всех сил, действующих на тело, относительно каждой координатной оси должна быть равна нулю.

Система уравнений (2) называется *основной системой уравнений равновесия твердого тела*, находящегося под действием произвольной системы сил. Существуют другие формы системы уравнений равновесия, каждая из которых состоит из шести уравнений. При использовании таких систем приходится следить за выполнением условий, накладывающих ограничения на выбор осей, относительно которых вычисляются суммы моментов сил.

В каждой задаче о равновесии твердого тела или конструкции, состоящей из нескольких тел, кроме заданных величин, имеются величины, которые необходимо найти в процессе решения. Задача о равновесии называется *статически определимой*, если она решается до конца методами статики. В этом случае необходимо, чтобы число неизвестных не превышало числа уравнений равновесия. Задача называется *статически неопределимой*, если ее нельзя решить, пользуясь только уравнениями статики. Поэтому задача о равновесии одного тела, содержащая семь и более неизвестных, заведомо является статически неопределимой.

- **Частные случаи уравнений равновесия твердого тела.** В частных случаях расположения сил одно или несколько уравнений системы (2) могут обращаться в тождества. Например, если все силы перпендикулярны координатной оси z, в тождество обращается уравнение проекций на ось z, и число уравнений равновесия уменьшается в этом случае до пяти; если линии действия всех сил пересекают ось y, в тождество обращается уравнение моментов относительно оси y.

Ниже рассмотрены системы сил, равновесие которых описывается тремя уравнениями равновесия.

Система сил называется *сходящейся*, если линии действия сил пересекаются в одной точке. Выберем на-

чало координат в этой точке. Уравнения моментов основной системы (2) обращаются в тождества, а оставшиеся три

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum F_{kz} = 0$$

образуют систему уравнений равновесия.

Система сил называется *плоской*, если силы располагаются в одной плоскости. Направим координатные оси так, чтобы все силы оказались в плоскости xOy; в этом случае третье, четвертое и пятое уравнения основной системы (2) обращаются в тождества, оставшиеся три

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum F_{ky} = 0, \quad \sum M_O(\vec{F}_k) = 0 \qquad (3)$$

образуют систему уравнений равновесия плоской системы сил. Здесь уравнение моментов относительно оси z записано в иной, эквивалентной форме: в данном случае векторы моментов перпендикулярны плоскости действия сил, если центр расположен в той же плоскости. Поэтому можно рассматривать момент силы относительно центра как скалярную величину. В правой системе координат момент считается положительным, если сила стремится повернуться вокруг центра против хода часовой стрелки.

В случае плоской системы сил можно пользоваться другими формами уравнений равновесия. Одна из них:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad \sum M_P(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_S(\vec{F}_k) = 0,$$

где P и S — любые точки плоскости, для которых отрезок PS неперпендикулярен оси x.

Еще одна форма уравнений равновесия:

$$\sum M_P(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_S(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_E(\vec{F}_k) = 0,$$

где P, S, E — любые точки плоскости, не лежащие на одной прямой.

Совокупность сил называется *системой параллельных сил*, если линии действия сил параллельны. Ось z направим параллельно линиям действия. Первое, второе и шестое уравнения системы (2) обращаются в тождества, оставшиеся

$$\sum F_{kz} = 0, \quad \sum M_x(\vec{F}_k) = 0, \quad \sum M_y(\vec{F}_k) = 0$$

образуют систему уравнений равновесия тела, находящегося под действием параллельных сил.

3.3. Решение задач статики

• **Общая схема решения задач о равновесии тела** (или конструкции, состоящей из нескольких тел) содержит несколько этапов. Необходимо:

1. Выбрать тело (или конструкцию), исследование равновесия которого позволит определить требуемые величины. Нарисовать расчетную *схему* — упрощенный рисунок, на который вынесены лишь необходимые для решения линейные размеры и углы, а несущественные детали опущены.

2. Изобразить на схеме активные силы, заданные в условии задачи.

3. Если тело несвободно, отбросить наложенные на него механические связи, заменив их действие реакциями связей. После такой замены тело становится свободным.

4. Проверить выполнение необходимого условия статической определимости задачи: число неизвестных, появившихся на расчетной схеме, не должно превышать числа уравнений равновесия для рассматриваемой системы сил.

5. В случае выполнения этого условия составить систему уравнений равновесия, решить ее и исследовать полученные результаты.

При решении задачи желательно действовать строго по описанной схеме.

Опыт показывает, что наиболее часто ошибки допускаются при замене связей их реакциями. Остановимся подробнее на этом вопросе.

- **Правила расстановки сил реакций механических связей.** Каждая механическая связь представляет либо тело, либо механическое устройство, которое накладывает какие-либо ограничения на перемещение тела в пространстве. При этом, в зависимости от вида связи, некоторые перемещения запрещены, а некоторые — разрешены. Это обстоятельство позволяет заранее, не находя численных значений силовых факторов действия связи, указать на некоторые качественные особенности. Правило, которому необходимо следовать при замене связей силами реакций, заключается в следующем: реакция связи в общем случае может состоять из двух силовых факторов — силы, приложенной в точке наложения связи, и пары сил.

Если связь запрещает поступательное перемещение тела, появляется сила реакции, направление которой противоположно запрещенному перемещению. Если связь запрещает поворот тела, то возникает пара сил реакции связи, которая обеспечивает это запрещение, при этом вектор момента пары будет направлен вдоль оси запрещенного поворота.

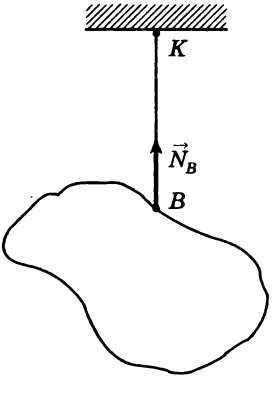


Рис. 14

- **Некоторые типы механических связей.**

1. *Идеально гибкая нерастяжимая невесомая нить.* На рис. 14 изображена нить, прикрепленная к твердому телу в точке B. Рассматриваемая связь наложена в точке B, в силу идеальной гибкости нити разрешен поворот тела вокруг любой оси, проходящей через эту точку. Это означает, что пары сил реакции не возникает.

Для этого типа связи разрешены малые поступательные перемещения тела, при которых точка B движется по поверхности сферы радиуса BK с центром в точке K, поэтому в направлении разрешенных перемещений сила реакции возникнуть не может. Запрещено поступательное перемещение тела в направлении KB, так как нить нерастяжима. Это означает, что появляется сила реакции $\vec{N}_B$, приложенная к телу в точке B, направленная по прямой BK.

2. Аналогично направляются силы реакции, когда связь осуществляется посредством либо *свободного опирания двух тел*, поверхность одного из которых является абсолютно гладкой (рис. 15), либо *подвижного шарнира* (рис. 16).

3. *Жесткая заделка.* Связь запрещает любое поступательное перемещение тела, поэтому возникает сила реакции связи $\vec{R}_B$, направление которой неизвестно. Ее обычно представляют тремя составляющими, параллельными координатным осям. Жесткая заделка запрещает поворот вокруг любой оси, проходящей через точку B, поэтому возникает пара сил реакции, момент которой $\vec{M}_B$ не известен ни по величине, ни по направлению. Обычно неизвестную пару заменяют эквивалентной системой трех пар, моменты которых направлены вдоль осей координат (рис. 17).

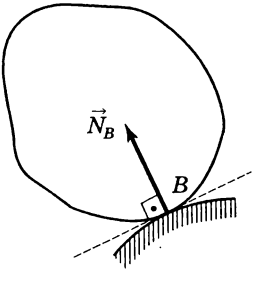


Рис. 15

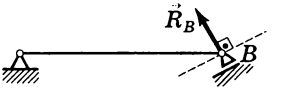


Рис. 16

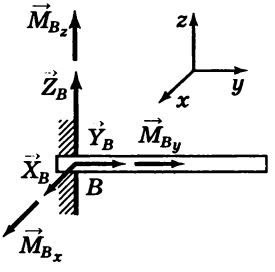


Рис. 17

Если на тело наложено несколько связей, то каждая из них исследуется независимо от остальных связей и приложенных к телу сил.

Неизвестными в задачах статики могут быть не только реакции связей, но и углы, линейные размеры конструкций и др. параметры.

Пример 1. Найти реакцию жесткой заделки B изогнутой невесомой балки BDE (рис. 18), находящейся под действием силы $F = 20$ кН и пары сил с моментом $M = 2$ кН · м при следующих данных: $\alpha = 30°$, $BD = 2$ м, $DE = 1$ м.

Решение. Будем следовать общей схеме решения задач о равновесии тела.

1. Реакция жесткой заделки B может быть найдена из исследования равновесия балки, поэтому в качестве твердого тела выбираем балку BDE. Отдельно рисуем расчетную схему (рис. 19).

2. Расставляем на схеме активные силовые факторы, действующие на балку, — силу $\vec{F}$ и пару сил $\vec{M}$, которую изображаем при помощи дуговой стрелки в направлении вращения пары (в рассматриваемом случае по ходу часовой стрелки).

3. Балка несвободна, так как на нее наложена связь — жесткая заделка в точке B. Делаем балку свободной: отбрасываем связь, заменяя ее реакцией связи. Реакция заделки со-

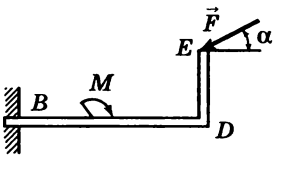


Рис. 18

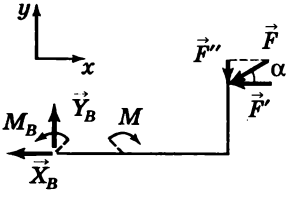


Рис. 19

стоит из силы $\vec{R}_B$, неизвестной ни по величине, ни по направлению, и пары сил с моментом M_B, неизвестным ни по величине, ни по направлению вращения.

Вводим систему координат xy, как показано на рисунке. Поскольку направление силы $\vec{R}_B$ неизвестно, представим ее двумя составляющими: $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$. Неизвестную пару сил реакции M_B изобразим дуговой стрелкой. Отметим, что не нужно гадать, куда на самом деле направлены составляющие и дуговая стрелка момента пары — все это выяснится после решения задачи. Например, на расчетной схеме $\vec{X}_B$ была нами направлена влево лишь потому, что при этом она оказалась заметнее на рисунке.

Заменим $\vec{F}$ эквивалентной системой сил, состоящей из двух составляющих $\vec{F}'$ и $\vec{F}''$, направленных параллельно координатным осям

$$\vec{F} = \vec{F}' + \vec{F}'', \quad F' = F\cos\alpha, \quad F'' = F\sin\alpha.$$

4. Теперь на расчетной схеме оказалась свободная балка, находящаяся под действием сил, расположенных в одной плоскости. В этом случае система уравнений равновесия состоит из трех уравнений. Количество неизвестных — X_B, Y_B, M_B — равно трем. Это означает, что количество неизвестных и количество уравнений совпадают и необходимые условия статической определимости задачи выполнены.

5. Воспользуемся основной формой уравнений равновесия для плоской системы сил (3), выбрав в качестве моментной точки центр B.

Основная опасность при составлении уравнений равновесия — возможность потери какой-либо силы, либо пары сил, поэтому рекомендуется выписать в строке все силы и все пары сил, приложенные к телу, а уравнения равновесия составлять под этой строкой.

Силы, пары сил	$\vec{X}_B$	$\vec{Y}_B$	M_B	$\vec{F}'$	$\vec{F}''$	M
$\sum F_{kx}$	$= -X_B +$	$0 +$	$0 -$	$F' +$	$0 +$	$0 = 0,$
$\sum F_{ky}$	$= 0 +$	$Y_B +$	$0 +$	$0 -$	$F'' +$	$0 = 0,$
$\sum M_B(\vec{F}_k)$	$= 0 +$	$0 +$	$M_B +$	$F'DE -$	$F''BD -$	$M = 0.$

Подставив исходные данные, найдем решение задачи

$$X_B = -17{,}1 \text{ кН}, \quad Y_B = 10 \text{ кН}, \quad M_B = 4{,}9 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Знаки ответов говорят о том, что направление составляющей $\vec{X}_B$ противоположно указанному на расчетной схеме, а направления составляющей $\vec{Y}_B$ и дуговой стрелки M_B соответствуют изображенным.

На схеме (рис. 19) не рекомендуется зачеркивать и рисовать заново $\vec{X}_B$ с учетом знака ответа, так как при этом становятся невозможными проверка правильности составления уравнений равновесия и интерпретация результатов.

Сила реакции заделки $\vec{R}_B$ является геометрической суммой ортогональных составляющих $\vec{X}_B$ и $\vec{Y}_B$, поэтому ее величина может быть найдена по формуле

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = 19{,}8 \text{ кН}.$$

Пример 2. Конструкция, состоящая из двух невесомых стержней BD и DE, изображена на рис. 20. Стержни имеют одинаковую длину 4 м и соединены между собой и с основанием при помощи шарниров, причем $BE = BD$. Левый стержень BD в средней точке нагружен горизонтальной силой $F = 20$ кН, правый стержень DE нагружен парой сил $M = 10$ кН · м. Определить опорные реакции и давление в промежуточном шарнире D.

Решение. Рассмотрим равновесие каждого стержня в отдельности, для чего расчленим конструкцию на две части — стержни BD и DE, расставим активные силы и реакции связей.

Расчетная схема задачи после описанных действий представлена на рис. 21, система координат — общая для обоих

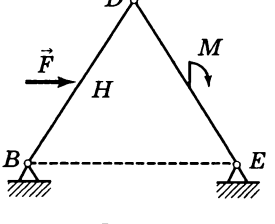


Рис. 20

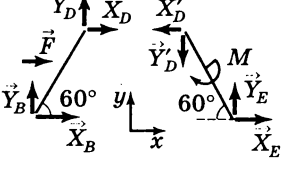


Рис. 21

стержней. Сила $\vec{R}_D$, действующая на стержень BD со стороны стержня ED, представлена двумя составляющими $\vec{X}_D$ и $\vec{Y}_D$, сила $\vec{R}'_D$ действия стержня DB на стержень ED — составляющими $\vec{X}'_D$ и $\vec{Y}'_D$. Поскольку сила действия $\vec{R}_D$ и сила противодействия $\vec{R}'_D$ должны удовлетворять аксиоме действия — противодействия, то и их составляющие будут связаны соотношениями: $\vec{X}_D = -\vec{X}'_D$, $\vec{Y}_D = -\vec{Y}'_D$, т. е. составляющие равны и противоположно направлены, и это уже учтено на схеме. При этом алгебраические значения составляющих будут связаны соотношениями

$$X_D = X'_D, \quad Y_D = Y'_D. \tag{4}$$

Количество неизвестных — X_B, Y_B, X_D, Y_D, X'_D, Y'_D, X_E, X_E — равно восьми. Равновесие каждого стержня будет описываться тремя уравнениями равновесия; вместе с двумя уравнениями (4) они образуют систему восьми уравнений с восьмью неизвестными (необходимые условия статической определимости задачи выполняются).

Ниже выписаны уравнения равновесия:

для стержня BD

$$\sum F_{kx} = X_B + X_D + F = 0,$$

$$\sum F_{ky} = Y_B + Y_D = 0$$

$$\sum M_B(\vec{F}_k) = -Fa \sin 60° - X_D\, 2a \sin 60° + Y_D\, 2a \cos 60° = 0,$$

для стержня ED

$$\sum F_{kx} = -X'_D + X_E = 0,$$

$$\sum F_{ky} = -Y'_D + Y_E = 0$$

$$\sum M_E(\vec{F}_k) = X'_D\, 2a \sin 60° + Y'_D\, 2a \cos 60° - M = 0.$$

Решив эту систему уравнений с учетом равенств (4), в итоге получим: $X_B = -16{,}44$ кН; $Y_B = -11{,}16$ кН; $X_D = X'_D = -3{,}56$ кН; $Y_D = Y'_D = 11{,}16$ кН; $X_E = -3{,}56$ кН; $Y_E = 11{,}16$ кН.

3.4. Центр параллельных сил. Центр тяжести твердого тела

• **Центр параллельных сил.** Пусть на точки твердого тела действует система параллельных сил $\{\vec{F}_k\}$. Силы могут поворачиваться вокруг точек их приложения, оставаясь параллельными. Можно доказать, что система имеет равнодействующую $\vec{R}^*$, если главный вектор отличен от нуля. При этом линия действия $\vec{R}^*$ проходит всегда через одну и ту же неизменно связанную с телом точку C независимо от ориентации сил. Эта точка называется *центром параллельных сил*, и ее положение в пространстве определяется радиусом-вектором $\vec{r}_C$:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum F_k \vec{r}_k}{\sum F_k},$$

где $\vec{r}_k$ —радиус-вектор точки приложения силы $\vec{F}_k$, а F_k — алгебраическое значение силы.

Координаты x_C, y_C, z_C центра параллельных сил можно определить по формулам

$$x_C = \frac{\sum F_k x_k}{\sum F_k}, \quad y_C = \frac{\sum F_k y_k}{\sum F_k}, \quad z_C = \frac{\sum F_k z_k}{\sum F_k}.$$

• **Центром тяжести твердого тела** называют центр параллельных сил, представляющих силы тяжести материальных частиц, из которых состоит тело. Если тело находится на поверхности Земли и его размеры малы по сравнению с радиусом Земли, то можно считать, что линии действия сил тяжести параллельны, а их величины зависят лишь от объема материальных частиц, плотности материала и ускорения свободного падения g, одинакового для всех частиц.

Формулы для нахождения центра тяжести следуют из формул для нахождения центра параллельных сил

$$\vec{r}_C = \frac{\int\limits_V \gamma \vec{r} dV}{\int\limits_V \gamma dV}, \quad x_C = \frac{\int\limits_V \gamma x dV}{\int\limits_V \gamma dV}, \quad y_C = \frac{\int\limits_V \gamma y dV}{\int\limits_V \gamma dV}, \quad z_C = \frac{\int\limits_V \gamma z dV}{\int\limits_V \gamma dV},$$

где V — объем тела, $\gamma = \gamma(x, y, z)$ — удельный вес; $G = \int\limits_V \gamma\, dV$ — вес тела.

Аналогичные формулы имеют место для нахождения центра тяжести тела, имеющего форму поверхности или линии.

- **Способы нахождения центра тяжести.**

Симметричные тела. Если тело имеет плоскость (ось, центр) материальной симметрии, то его центр тяжести находится в этой плоскости (на оси, в центре).

Метод разбиения. Пусть тело составлено, например, из трех частей (рис. 22), для каждой из которых известен вес G_1, G_2, G_3 и положение центра тяжести $\vec{r}_{C_1}$, $\vec{r}_{C_2}$, $\vec{r}_{C_3}$. Радиус-вектор центра тяжести тела $\vec{r}_C$ и его координаты находятся по формулам

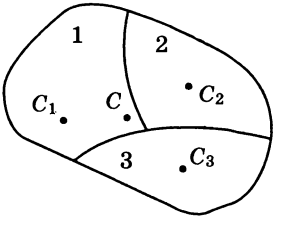


Рис. 22

$$\vec{r}_C = \frac{G_1\vec{r}_{C_1} + G_2\vec{r}_{C_2} + G_3\vec{r}_{C_3}}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$x_C = \frac{G_1 x_{C_1} + G_2 x_{C_2} + G_3 x_{C_3}}{G_1 + G_2 + G_3}, \qquad (5)$$

$$y_C = \frac{G_1 y_{C_1} + G_2 y_{C_2} + G_3 y_{C_3}}{G_1 + G_2 + G_3},$$

$$z_C = \frac{G_1 z_{C_1} + G_2 z_{C_2} + G_3 z_{C_3}}{G_1 + G_2 + G_3}.$$

Метод отрицательных масс. Пусть теперь необходимо найти центр тяжести нового тела, составленного из частей *1* и *2* (его можно получить, вырезав из основного тела часть *3*). Решение можно получить либо по формулам аналогичным (5), либо по формулам

$$\vec{r}_C{}' = \frac{G\vec{r}_C - G_3\vec{r}_{C_3}}{G - G_3}, \quad x_C{}' = \frac{Gx_C - G_3x_{C_3}}{G - G_3},$$

$$y_C{}' = \frac{Gy_C - G_3y_{C_3}}{G - G_3}, \quad z_C{}' = \frac{Gz_C - G_3z_{C_3}}{G - G_3},$$

где $G = G_1 + G_2 + G_3$ — вес тела, составленного из трех частей, а G_3 — вес вырезанной части, который в формулы входит с отрицательным знаком, что и послужило основанием для названия метода.

3.5. Распределенные силы

В практике часто встречаются случаи, когда к телу приложены не сосредоточенные силы, а нагрузки, распределенные по некоторому объему, поверхности или линии. Частный случай объемного распределения силы веса был рассмотрен в разд. 3.4. Векторная величина $\vec{q}$, характеризующая нагрузку, называется *интенсивностью нагрузки* и измеряется в Н/м^3, Н/м^2 или Н/м.

При решении задач статики распределенную нагрузку обычно заменяют более простой статически эквивалентной силой (системой сил).

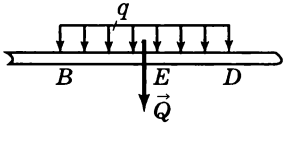


Рис. 23

1. *Равномерно распределенная нагрузка* интенсивности $\vec{q}$ (рис. 23) в плоской задаче статики имеет равнодействующую $\vec{Q} = \vec{q}BD$, линия действия которой проходит через середину отрезка приложения нагрузки $BE = ED$.

2. *Линейно распределенная нагрузка* в плоских задачах статики (рис. 24) имеет равнодействующую $\vec{Q} = \frac{1}{2}\vec{q}_{max}BD$, проходящую через точку E, причем $BE = \frac{2}{3}BD$.

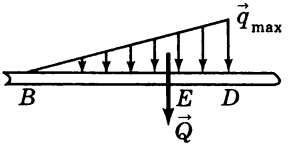


Рис. 24

3.6. Законы трения (законы Кулона)

• **Законы трения скольжения.** Рассмотрим тело веса G, находящееся в покое на негладкой горизонтальной плоскости (рис. 25). Попытка передвинуть тело, приложив к нему горизонтальную силу $\vec{F}$, не приводит к успеху до тех пор, пока величина силы не достигнет некоторого значения $\vec{F}^*$. Равнодействующая сил реакций опоры может быть представлена в виде двух составляющих — *силы нормального давления* $\vec{N}$ и *силы трения покоя* $\vec{F}_{тр}$. Уравнение проекций сил на горизонтальную ось дает $F_{тр} = F$.

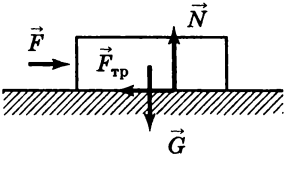


Рис. 25

Опыт показывает, что F^* и N связаны соотношением (*закон Кулона*)

$$F^* = f_0 N,$$

где f_0 называется *статическим коэффициентом трения*; он зависит от материалов соприкасающихся тел и состояния их поверхностей.

Пока $F \leqslant F^*$, тело будет оставаться в покое. Если же к нему приложить силу, бóльшую чем F^*, то оно станет двигаться.

При движении силу сопротивления можно найти, пользуясь формулой

$$F_{тр} = fN, \qquad (6)$$

где f называется *динамическим коэффициентом трения*, а $F_{тр}$ — силой трения скольжения.

Отметим, что динамический коэффициент трения всегда меньше статического коэффициента трения: $f < f_0$.

• **Законы трения качения.** Рассмотрим диск радиуса R, покоящийся на негладкой горизонтальной плоскости (рис. 26). Попытка перекатить диск, приложив к его центру горизонтальную силу $\vec{F}$, не приведет к успеху, пока величина силы остается меньше предельного значения F^{**}.

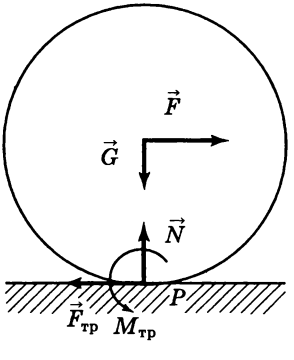


Рис. 26

Силы реакции опоры, распределенные по малой поверхности вблизи точки контакта P, в соответствии с теоремой о приведении системы сил к центру могут быть заменены эквивалентной системой — силой нормального давления $\vec{N}$, силой трения покоя $\vec{F}_{тр}$, приложенными в точке контакта P, а также парой сил трения качения с моментом $M_{тр}$.

При равновесии диска из уравнения моментов относительно центра P следу-

ет $FR = M_{тр}$. Опыт показывает, что F^{**} и N связаны соотношением $F^{**} = kN/R$, при этом

$$M^{**} = kN. \tag{7}$$

Размерный коэффициент k [см] называется *коэффициентом трения качения.*

Поверхность качения называют *абсолютно шероховатой*, когда $f \neq 0$ и $k = 0$.

Опыт показывает, что при прочих равных условиях F^{*} много больше F^{**}, поэтому в технике при необходимости уменьшить потери на трение стремятся заменить скольжение качением.

4. Динамика материальной точки

4.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Движение материальной точки по отношению к инерциальной системе отсчета описывается вторым законом Ньютона:

$$m\vec{a} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j + \sum_{k=1}^{l} \vec{R}_k, \qquad (1)$$

где m —масса точки, $\vec{a}$ — ее ускорение. В правой части равенства (1) стоит геометрическая сумма всех сил, приложенных к точке.

Причины возникновения каждой из сил могут быть различными. Здесь мы будем различать *силы активные* $\vec{F}_j$ и *силы реакций связей* $\vec{R}_k$. Активные силы зависят от времени t, а также от положений и скоростей точек механической системы. К активным силам относятся, например, силы тяжести, упругости, вязкого трения, аэрогидродинамического сопротивления и т. п.

Силы реакций связей действуют на несвободную материальную точку, когда ее движение стеснено механическими связями. Эти силы можно определить лишь в процессе решения задачи динамики.

Выберем декартовы оси инерциальной системы отсчета x, y, z и, проектируя на них обе части векторного равенства (1), получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{jx} + \sum R_{kx},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{jy} + \sum R_{ky},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{jz} + \sum R_{kz}.$$

Эти три уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки в декартовых координатах.*

Дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси координат имеют вид

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F_{j\tau} + \sum R_{k\tau},$$

$$\frac{mv^2}{\rho} = \sum F_{jn} + \sum R_{kn},$$

$$0 = \sum F_{jb} + \sum R_{kb}.$$

Здесь учтено, что $a_\tau = \frac{dv}{dt}$, $a_n = \frac{v^2}{\rho}$, $a_b = 0$.

4.2. Первая и вторая задачи динамики

В уравнения движения (см. разд. 4.1) неизвестные могут входить как в левые, так и в правые части. В зависимости от этого задачи динамики делятся на два типа, которые рассмотрены ниже.

- **Первая задача динамики.** Задан закон движения и активные силы, необходимо найти силы реакций связей.

Пример 1. Груз веса G, которому в момент времени $t_0 = 0$ была сообщена некоторая начальная скорость, поднимается по наклонной шероховатой плоскости (рис. 27). Определить величины сил трения $F_{тр}$ и нормального давления N, действующих на тело, если известны коэффициент трения о плоскость f и угол наклона α.

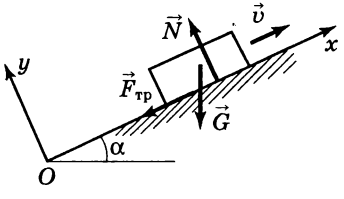


Рис. 27

Решение. Введем декартовы оси координат, совместив начало отсчета O с положением груза при $t = 0$. Изобразим груз в произвольном положении и действующие на него силы. Принимая груз за материальную точку, запишем для него второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}. \qquad (2)$$

Проектируя обе части векторного равенства (2) на ось y, имеем $0 = -G\cos\alpha + N$ (учтено, что ускорение груза параллельно оси x). Отсюда находим $N = G\cos\alpha$. Используя далее закон Кулона (уравнение (3) в гл. 3), получим силу трения $F_{\text{тр}} = Nf = G\cos\alpha\, f$.

- **Вторая задача динамики.** Заданы активные силы, уравнения механических связей, начальное положение точки и ее начальная скорость, необходимо найти закон движения точки и реакции связей.

Вторую задачу динамики рекомендуется решать последовательно в несколько этапов, перечисленных ниже.

1. Рисуют предполагаемую траекторию движения, на которой изображают материальную точку.

2. Рисуют силы, приложенные к точке.

3. Записывают второй закон Ньютона в векторной форме.

4. Выбирают удобную систему координат.

5. Записывают уравнения движения точки в проекциях либо на оси декартовой системы координат, либо на оси естественного трехгранника.

В первом случае все активные силы необходимо выразить через $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, а во втором — через $t, s, \dot{s}$.

6. К полученным дифференциальным уравнениям добавляют начальные условия: значения координат и проекций скорости точки в начальный момент времени (они берутся из условия задачи с учетом введенной системы координат).

7. Поставленную задачу решают численно или аналитически методами, известными из курса высшей математики.

Указанные этапы решения рекомендуется выполнять, не меняя порядка их следования.

Пример 2. Дополнительно к условиям задачи примера 1 дано, что в момент времени t_* скорость груза стала равна половине начальной. Найти начальную скорость груза v_0 и путь D, пройденный им за время t_*.

Решение. Проектируем обе части векторного равенства (2) на ось x. Используя формулы $G = mg$ и $F_{тр} = G f \cos\alpha$, получим

$$\ddot{x} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha).$$

Общее решение полученного дифференциального уравнения и выражение для скорости груза даются формулами (подробности их получения опущены, а их правильность можно проверить путем дифференцирования)

$$x = -\frac{1}{2}g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t^2 + C_1 t + C_2,$$

$$\dot{x} = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t + C_1.$$

Последние два соотношения должны быть справедливы в любой момент времени t, стало быть, и в начальный момент времени $t_0 = 0$, и в момент времени t_*, т. е. соотношения будут удовлетворяться, если в них вместо t, x, dx/dt будут подставлены сначала значения 0, 0, v_0, а затем t_*, D, $v_0/2$. После подстановок получим систему четырех уравнений

$$0 = C_2,$$

$$v_0 = C_1,$$

$$D = -\frac{1}{2}g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t_*^2 + C_1 t_* + C_2,$$

$$\frac{1}{2}v_0 = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t_* + C_1$$

с четырьмя неизвестными C_1, C_2, v_0, D, решая которую, найдем искомые величины

$$v_0 = 2g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t_*,$$

$$D = \frac{3}{2}g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t_*^2.$$

5. Общие теоремы динамики механической системы

Довольно часто удается выделить важные особенности движения механической системы, не прибегая к интегрированию системы дифференциальных уравнений движения. Это достигается применением общих теорем динамики.

5.1. Основные понятия и определения

• **Внешние и внутренние силы.** Любая сила, действующая на точку механической системы, обязательно является либо активной силой, либо реакцией связи. Всю совокупность сил, действующих на точки системы, можно разделить на два класса иначе: на *внешние силы* $\vec{F}^e$ и *внутренние силы* $\vec{F}^i$ (индексы e и i — от латинских слов externus — внешний и internus — внутренний). Внешними называются силы, действующие на точки системы со стороны точек и тел, не входящих в состав рассматриваемой системы. Внутренними называются силы взаимодействия между точками и телами рассматриваемой системы.

Это разделение зависит от того, какие материальные точки и тела включены исследователем в рассматриваемую механическую систему. Если расширить состав системы, включив в нее дополнительно точки и тела, то некоторые силы, которые для прежней системы были внешними, для расширенной системы могут стать внутренними.

- **Свойства внутренних сил.** Поскольку эти силы являются силами взаимодействия между частями системы, они входят в полную систему внутренних сил «двойками», организованными в соответствии с аксиомой действия — противодействия. У каждой такой «двойки» сил главный вектор и главный момент относительно произвольного центра равны нулю. Так как полная система внутренних сил состоит только из «двоек», то:

1) главный вектор системы внутренних сил равен нулю,

2) главный момент системы внутренних сил относительно произвольной точки равен нулю.

Массой системы m называется арифметическая сумма масс m_k всех точек и тел, образующих систему:

$$m = \sum m_k.$$

- **Центром масс** (центром инерции) механической системы называется геометрическая точка C, радиус-вектор и координаты которой x_C, y_C, z_C определяются формулами

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{m}, \quad x_C = \frac{\sum m_k x_k}{m}, \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{m}, \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{m},$$

где $\vec{r}_k$, x_k, y_k, z_k — радиусы-векторы и координаты точек, образующих систему.

Для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести, положения центра масс и центра тяжести совпадают, в других случаях это разные геометрические точки.

Вместе с инерциальной системой отсчета часто рассматривают одновременно неинерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно. Ее оси координат $Cx^*y^*z^*$ (*оси Кёнига*) выбирают так, чтобы начало отсчета C постоянно совпадало с центром масс механической системы. В соответствии с определением центр масс неподвижен в осях Кёнига и находится в начале координат.

- **Моментом инерции** системы относительно оси z называется скалярная величина I_z, равная сумме произведений масс m_k всех точек системы на квадраты их расстояний h_k до оси:

$$I_z = \sum m_k h_k^2 .$$

Если механической системой является твердое тело, для нахождения I_z можно воспользоваться формулой

$$I_z = \int_V \rho(x^2 + y^2)dV,$$

где $\rho(x, y, z)$ — плотность, а V — объем, занимаемый телом.

Момент инерции однородного диска массы m радиуса R относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр, подсчитывается по формуле

$$I_z = \frac{1}{2} mR^2. \qquad (1)$$

Теорема Гюйгенса о моментах инерции относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс:

$$I_z = I_{Cz} + md^2,$$

где I_z и I_{Cz} — моменты инерции относительно параллельных осей z и C_z, причем ось C_z проходит через центр масс, d — расстояние между осями, m — масса системы. Из теоремы следует, что $I_{Cz} < I_z$.

5.2. Теорема о движении центра масс

- **Формулировка теоремы:** центр масс механической системы движется так же, как двигалась бы материальная точка с массой m, равной массе системы под действием внешних сил, приложенных к системе:

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^e , \qquad (2)$$

где m — масса системы, а $\vec{a}_C$ — ускорение центра масс.

Математическая запись теоремы (2) похожа на второй закон Ньютона. Дадим более подробное изложение теоремы. При движении системы ее центр масс C движется по некоторой траектории. Пусть, например, в момент времени t_0 он находится в положении B и имеет скорость $\vec{v}_{C0}$. Если теперь в момент времени t_0 в положение B поместить точку массы m, сообщить ей скорость $\vec{v}_{C0}$ и приложить к ней силы, равные внешним силам, действующим на систему, то, начиная с этого момента, точка будет двигаться вместе с центром масс системы, по одной и той же траектории, с одинаковой скоростью и одинаковым ускорением.

Из уравнения (2) можно получить дифференциальные уравнения движения центра масс в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$m\ddot{x}_C = \sum F^{e}_{kx}, \quad m\ddot{y}_C = \sum F^{e}_{ky}, \quad m\ddot{z}_C = \sum F^{e}_{kz}.$$

- **Закон сохранения скорости центра масс механической системы:** если главный вектор внешних сил системы равен нулю, центр масс системы движется с постоянной скоростью, т. е. если $\sum \vec{F}^{e}_{k} = 0$, то $\vec{v}_C = \overrightarrow{\text{const}}$.

Отметим, что в этом случае постоянным является вектор скорости, а не только его модуль, поэтому центр масс будет двигаться равномерно и прямолинейно.

Если проекция главного вектора внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось остается постоянной. Например, если $\sum F^{e}_{kx} = 0$, то $v_{Cx} = \text{const}$.

Пример. По боковой грани призмы массы m_1, находящейся на гладкой горизонтальной плоскости, под действием силы веса скатывается однородный диск массы m_2 (рис. 28). Угол наклона боковой грани к основанию равен α. В начальный момент скорости призмы и диска равны нулю. Определить расстояние d_1,

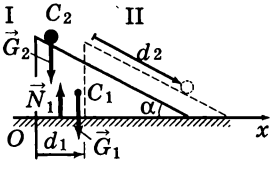


Рис. 28

на которое сдвинется призма, когда центр диска переместится вдоль грани на расстояние d_2.

Решение. Включим в механическую систему два тела — призму и диск и расставим внешние силы — активные силы веса $\vec{G}_1$ и $\vec{G}_2$ и силу реакции $\vec{N}_1$ гладкой плоскости. Характерная особенность системы внешних сил заключается в том, что все они перпендикулярны горизонтальной оси, и поэтому сумма их проекций на эту ось равна нулю.

Направим ось x горизонтально слева направо с началом в точке O. На рис. 28 изобразим систему в двух положениях: начальном — I и в тот момент времени, когда диск переместился по грани призмы на расстояние d_2 — II. Поскольку направление и величина перемещения призмы заранее неизвестны, то, особенно не гадая, изобразим положение II правее начального положения I.

Так как $\sum F^{e}_{kx} = 0$, из закона сохранения проекции скорости центра масс системы на ось x следует $v_{Cx} = \text{const}$. Так как в положении I все скорости были равны нулю, то $v_{Cx} = 0$. Отсюда следует, что $x_C = \text{const}$ или $x^{\text{I}}_C = x^{\text{II}}_C$. Пользуясь формулами для координат центра масс, перепишем последнее равенство так:

$$\frac{m_1 x^{\text{I}}_{C_1} + m_2 x^{\text{I}}_{C_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x^{\text{II}}_{C_1} + m_2 x^{\text{II}}_{C_2}}{m_1 + m_2}. \qquad (3)$$

Здесь $x^{\text{I}}_{C_1}$ и $x^{\text{I}}_{C_2}$ — координаты центров масс призмы и диска в положении I, а $x^{\text{II}}_{C_1}$ и $x^{\text{II}}_{C_2}$ — аналогичные величины в положении II.

Из рис. 28 видно, что

$$x^{\text{II}}_{C_1} = x^{\text{I}}_{C_1} + d_1,\ x^{\text{II}}_{C_2} = x^{\text{I}}_{C_2} + d_1 + d_2 \cos\alpha.$$

Подставляя эти соотношения в формулу (3), после алгебраических преобразований найдем $d_1 = -\dfrac{m_2 d_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2}$.

Знак полученного ответа говорит о том, что перемещение призмы направлено противоположно изображенному на рисунке.

5.3. Теорема об изменении количества движения

- **Количеством движения точки** массы m, движущейся со скоростью v, называется вектор

$$\vec{Q} = m\vec{v}.$$

Количеством движения механической системы называется главный вектор количеств движения всех точек системы:

$$\vec{Q} = \Sigma\, \vec{Q}_k.$$

Можно доказать, что количество движения системы равно количеству движения воображаемой материальной точки, имеющей массу системы и движущейся со скоростью центра масс: $\vec{Q} = m\vec{v}_C$.

- **Импульс силы.** Пусть к движущейся материальной точке приложена сила $\vec{F}$ (кроме нее к точке могут быть приложены и другие силы, но сейчас мы выделили только одну из них).

Элементарным импульсом силы $\vec{F}$ за элементарный промежуток времени dt называется вектор $d\vec{S}$:

$$d\vec{S} = \vec{F}\, dt.$$

Импульсом силы $\vec{F}$ за конечный промежуток времени от t_0 до t называется вектор $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t} d\vec{S} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\, dt.$$

Проекции импульса силы на координатные оси могут быть вычислены по формулам

$$S_x = \int_{t_0}^{t} F_x\, dt, \quad S_y = \int_{t_0}^{t} F_y\, dt, \quad S_z = \int_{t_0}^{t} F_z\, dt.$$

- **Разные формулировки теоремы о количестве движения.**

Теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме: производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил системы:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^e$$

или, по-другому: дифференциал количества движения системы равен геометрической сумме элементарных импульсов всех внешних сил, действующих на точки системы:

$$d\vec{Q} = \sum d\vec{S}_k^e .$$

Проектируя на оси координат (например, на ось x), получим

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e \quad \text{или} \quad dQ_x = \sum dS_{kx}^e .$$

Теорема об изменении количества движения в интегральной форме: изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил системы за тот же промежуток времени:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^e ,$$

где векторы $\vec{Q}$ и $\vec{Q}_0$ соответствуют моментам времени t и t_0, а $\vec{S}_k^e$ — импульсы внешних сил системы за промежуток времени от t_0 до t. В проекциях на координатные оси (например, на ось x)

$$Q_x - Q_{x0} = \sum S_{kx}^e .$$

При использовании теоремы применительно к одной материальной точке следует иметь в виду, что любая сила, приложенная к точке, является внешней.

- **Закон сохранения количества движения.**

Закон сохранения количества движения механической системы:

$$\text{если} \sum \vec{F}_k^e = 0, \text{ то } \vec{Q} = \overrightarrow{\text{const}}.$$

Закон сохранения проекции количества движения на какую-либо ось (например, на ось x):

$$\text{если} \sum F_{kx}^e = 0, \text{ то } Q_x = \text{const}. \qquad (4)$$

Пример. По гладкой горизонтальной плоскости со скоростью v_0 движется прямоугольный параллелепипед массы m_1, на верхней грани которого покоятся две самоходные тележки с массами m_2 и m_3 (рис. 29). В некоторый момент времени тележки начинают двигаться навстречу друг другу, при этом законы их движения по отношению к параллелепипеду задаются функциями $d_2 = h_2t^3$, $d_3 = h_3t^3$. Найти зависимость скорости параллелепипеда от времени.

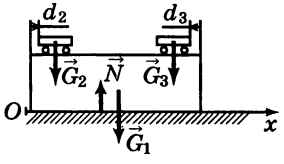


Рис. 29

Решение. В систему включим три тела — параллелепипед и обе тележки. Изобразим внешние силы — активные силы веса $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3$, а также реакцию плоскости $\vec{N}$. Все они вертикальны, и сумма их проекций на горизонталь равна нулю. Поэтому применим закон (4) о сохранении проекции количества движения системы на ось x — запишем Q_{x0} в момент времени t_0, затем Q_x в произвольный момент времени t и приравняем полученные величины:

$$Q_{x0} = m_1v_0 + m_2v_0 + m_3v_0,$$

$$Q_x = m_1v_1 + m_2(v_1 + \dot{d}_2) + m_3(v_1 - \dot{d}_3).$$

В последнем выражении скорости тележек подсчитывались в соответствии с теоремой о скоростях при сложном движении точки. После приравнивания правых частей равенств и проведения алгебраических выкладок получим

$$v_1 = v_0 - \frac{3t^2(m_2h_2 - m_3h_3)}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

5.4. Теорема об изменении кинетического момента

- **Момент количества движения и кинетический момент.**

Моментом количества движения материальной точки относительно неподвижного центра P называется вектор $\vec{K}_P$, равный векторному произведению радиуса-вектора, соединяющего центр с точкой, на количество движения точки:

$$\vec{K}_P = \vec{M}_P(\vec{Q}) = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Кинетическим моментом (главным моментом количества движения) механической системы относительно центра P называется геометрическая сумма моментов количеств движения всех точек системы относительно центра

$$\vec{K}_P = \sum \vec{K}_{Pj}.$$

Моментом количества движения точки относительно оси x называется величина K_x, равная проекции на эту ось момента количества движения точки относительно любого центра P, принадлежащего оси:

$$K_x = M_x(\vec{Q}).$$

Вычисляется K_x так же, как момент силы относительно оси.

Кинетическим моментом системы относительно оси x называется проекция на нее кинетического момента системы относительно любого центра P, принадлежащего оси:

$$K_x = \sum K_{jx}.$$

Аналитическое выражение для кинетического момента системы относительно оси x имеет вид

$$K_x = \sum m_j(y_j\dot{z}_j - \dot{y}_j z_j).$$

Формулы для K_y и K_z аналогичны приведенной.

Можно показать, что кинетический момент системы относительно центра P равен сумме момента количества движения центра масс относительно центра P и кинетического момента системы относительно центра масс C в ее относительном движении в системе Кёнига

$$\vec{K}_P = \vec{M}_P + \vec{K}_C^*.$$

Здесь $\vec{M}_P = \vec{M}_P(m\vec{v}_C)$, $\vec{K}_C^*$ — кинетический момент системы в ее движении по отношению к системе отсчета Кёнига.

Кинетический момент K_z твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси z с угловой скоростью ω, вычисляется по формуле

$$K_z = I_z \omega, \tag{5}$$

где I_z — момент инерции твердого тела относительно оси z.

- **Теорема об изменении кинетического момента механической системы:** производная по времени от кинетического момента относительно любого неподвижного центра P равна главному моменту внешних сил системы относительно того же центра:

$$\frac{d\vec{K}_P}{dt} = \sum \vec{M}_P(\vec{F}_j^e). \tag{6}$$

Проектируя (6) на оси координат (например, на ось x), получим теорему об изменении кинетического момента системы относительно неподвижной оси:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum M_x(\vec{F}_j^e). \tag{7}$$

Если эту теорему применить к изучению движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z, получим *дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси*:

$$I_z \ddot{\varphi} = \sum M_z(\vec{F}_j^e),$$

где φ — угол поворота.

- **Закон сохранения кинетического момента:** если главный момент внешних сил системы относительно центра P равен нулю, то главный момент количеств движения относительно этого центра будет постоянным. Например,

$$\text{если } \sum \vec{M}_P(\vec{F}_j^{\,e}) = 0, \text{ то } \vec{K}_P = \overrightarrow{\text{const}}.$$

В правой части равенства располагается вектор-константа, т. е. и величина вектора, и его направление не зависят от времени.

Если сумма моментов внешних сил системы относительно какой-либо неподвижной оси равна нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси остается постоянным. Например,

$$\text{если } \sum M_x(\vec{F}_j^{\,e}) = 0, \text{ то } K_x = \text{const}.$$

Пример. На однородный барабан массы m_1 и радиуса R намотана невесомая нить с грузом массы m_2 на конце (рис. 30). Определить ускорение груза, пренебрегая силами трения при вращении барабана.

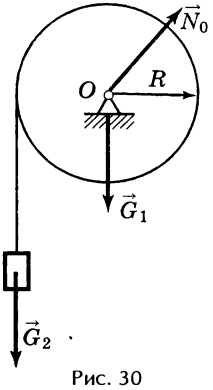


Рис. 30

Решение. Включим в систему барабан, груз и нить. Расставим внешние силы — активные силы веса $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ и силу реакции $\vec{N}_O$, проходящую через ось вращения O. Направление силы $\vec{N}_O$ заранее неизвестно, поэтому рисуем ее произвольно. Пары сил трения в оси не возникает, что следует из условия задачи.

Воспользуемся теоремой об изменении кинетического момента системы относительно оси вращения барабана (7):

$$\frac{dK_O}{dk} = \sum M_O(\vec{F}_j^{\,e}). \qquad (8)$$

Подсчитывая K_O как сумму кинетических моментов барабана и груза, с учетом (1), (5) и равенства $v_2 = \omega_1 R$ получим

$$K_O = v_2 R\left(\frac{1}{2} m_1 + M_2\right). \qquad (9)$$

Вычислим сумму моментов внешних сил относительно оси

$$\sum M_O(\vec{F}_j^{\,e}) = m_2 g R. \qquad (10)$$

Подставив правые части формул (9), (10) в выражение (8) и проведя дифференцирование, найдем

$$a_2 = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} g.$$

5.5. Теорема об изменении кинетической энергии

• **Элементарная работа.** Рассмотрим точку B, перемещающуюся под действием системы сил. Малое перемещение точки вдоль траектории характеризуется вектором $d\vec{r}$ (рис. 31). Из системы выделим одну силу $\vec{F}$.

Элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ называется скалярная величина dA, равная скалярному произведению векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\, dr \cos\alpha.$$

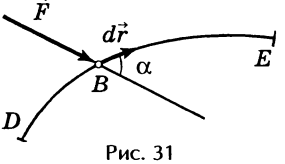


Рис. 31

В координатной форме элементарная работа подсчитывается по формуле

$$dA = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz,$$

где F_x, F_y, F_z, dx, dy, dz — координаты векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ соответственно.

Следует подчеркнуть, что, несмотря на принятую форму записи, элементарная работа dA не обязательно является полным дифференциалом некоторой функции, зависящей от координат.

Знак элементарной работы определяется косинусом угла α: она положительна для $0 \leqslant \alpha < \pi/2$, отрицательна для $\pi/2 < \alpha \leqslant \pi$ и равна нулю при $\alpha = \pi/2$.

- **Вычисление элементарной работы в частных случаях.**

1. Элементарная работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси z, находится по формуле

$$dA = \pm M_z(\vec{F})d\varphi.$$

2. Сумма элементарных работ сил пары, приложенной к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси и при плоскопараллельном движении, может быть подсчитана так:

$$dA = \pm M\ d\varphi.$$

Здесь M — момент пары сил, $d\varphi$ — элементарный угол поворота тела. Знак «плюс» берется при одинаковых направлениях дуговых стрелок момента пары и направления вращения, «минус» — при различных направлениях (плоскость действия пары предполагается параллельной основной плоскости).

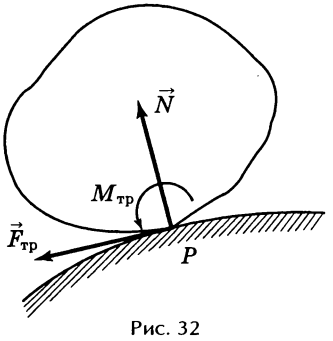


Рис. 32

3. При вычислении элементарных работ сил трения, приложенных к телу, катящемуся без проскальзывания, необходимо учесть, что в точке касания P (рис. 32) действуют: сила нормального давления $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и пара сил трения качения с моментом $M_{тр} = Nk$. Поскольку, в силу отсутствия проскальзывания,

точка касания является мгновенным центром скоростей и ее скорость $\vec{v}_P$ равна нулю, то и $d\vec{r} = \vec{v}_P\, dt = 0$, откуда

$$dA_N = dA_{\text{тр}} = 0, \quad dA_M = -M_{\text{тр}}\, d\varphi = -Nk\, d\varphi.$$

4. Можно доказать, что сумма элементарных работ сил, приложенных к твердому телу, равна сумме элементарных работ статически эквивалентной системы сил. По теореме о приведении системы сил к заданному центру произвольную систему сил можно заменить эквивалентной системой, состоящей из силы $\vec{R}$, приложенной в наперед заданной точке P, и пары сил с моментом $\vec{M}_P$. Поэтому довольно часто вместо громоздкого подсчета суммы элементарных работ большого числа сил, приложенных к телу, подсчитывают сумму элементарных работ одной силы и одной пары.

Пример 1. Система элементарных сил тяжести твердого тела всегда имеет равнодействующую, равную весу тела G, приложенную в центре тяжести C. Поэтому сумма элементарных работ сил тяжести равна работе силы веса на перемещении центра тяжести тела.

Пример 2. Сумма элементарных работ внутренних сил, приложенных к точкам твердого тела, равна нулю, так как главный вектор и главный момент системы внутренних сил равны нулю.

- **Работа силы. Потенциальная сила.** *Работа силы* $\vec{F}$ на конечном перемещении точки по траектории DE (см. рис. 31) равна криволинейному интегралу

$$A = \int\limits_{DE} dA = \int\limits_{DE} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{DE} F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz.$$

Сила называется *потенциальной*, если ее работа не зависит от формы траектории, а зависит лишь от ее начальной и конечной точек.

Примером потенциальной силы является сила тяжести G, ее работа может быть подсчитана по формуле

$$A = -G(z - z_0).$$

Здесь ось z выбрана параллельно линии действия силы веса и направлена ей навстречу, $\vec{G}$ — сила веса, z_0, z — координаты начальной и конечной точек траектории.

- **Кинетическая энергия.** *Кинетической энергией точки* массы m, движущейся со скоростью $\vec{v}$, называется скалярная величина T, определяемая формулой

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетической энергией механической системы называется сумма кинетических энергий всех ее точек:

$$T = \sum T_j = \sum \frac{m_j v_j^2}{2}.$$

Можно доказать, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии центра масс и кинетической энергии системы при ее относительном движении в системе отсчета Кёнига:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \sum \frac{m_j (v_j^*)^2}{2},$$

где $m = \sum m_j$, а v_j^* — относительные скорости точек.

- **Формулы для кинетической энергии твердого тела:**

а) при его поступательном движении: $T = \frac{1}{2} m v_C^2$,

б) при вращении вокруг неподвижной оси z: $T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$,

в) при плоскопараллельном движении: $T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$, где I_C — момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной основной плоскости и проходящей через центр масс C.

- **Разные формулировки теоремы о кинетической энергии.**

Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: дифференциал кинетической энергии механической системы равен сумме элементарных работ сил, приложенных к точкам системы, на их элементарных перемещениях

$$dT = \sum dA_j. \qquad (11)$$

Теорема об изменении кинетической энергии в интегральной форме: изменение кинетической энергии механической системы при некотором ее перемещении равно сумме работ всех сил, приложенных к точкам системы, на перемещениях этих точек

$$T - T_0 = \sum A_j.$$

Замечание. В отличие от трех ранее рассмотренных теорем динамики системы последняя теорема характеризуется следующими особенностями:

1) теорема об изменении кинетической энергии связывает не векторные величины, а скалярные;

2) в правую часть равенства входят работы всех сил, не только внешних, но и внутренних (возможно также разбиение суммы работ на сумму работ активных сил и сил реакций связей);

3) сумма работ внутренних сил, приложенных к точкам твердого тела, равна нулю.

Пример. Однородный диск под действием силы веса G скатывается без проскальзывания по идеально шероховатой плоскости, наклоненной под углом α к горизонту (рис. 33). Определить ускорение центра диска, величину силы трения и минимальное значение коэффициента трения f^*, при котором возможно качение без проскальзывания.

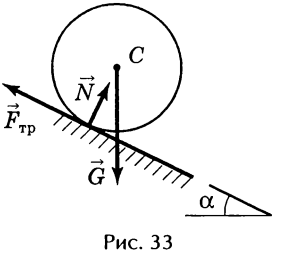


Рис. 33

Решение. В качестве механической системы выберем диск и применим для исследования движения теорему об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме (11). Подсчитывая кинетическую энергию диска, найдем

$$T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 = \frac{3}{4} m v_C^2 .$$

Здесь учтено, что $I_C = \frac{1}{2} mr^2$ и $v_C = \omega r$. Так как исследуемая система является твердым телом, то $\sum dA^{\text{i}} = 0$. Подсчитаем сумму элементарных работ внешних сил и, подставив найденные выражения для T и $\sum dA^{\text{e}}$ в равенство (11), получим

$$d\left(\frac{3}{4} 3m v_C^2\right) = mgr \sin\alpha \, d\varphi.$$

Поделив обе части равенства на dt с учетом кинематических соотношений $\dot{v}_C = a_C, \dot{\varphi} = \omega$, найдем

$$a_C = \frac{2}{3} g \sin\alpha. \qquad (12)$$

Запишем формулировку теоремы о движении центра масс системы (2) применительно к рассматриваемой задаче

$$m\vec{a}_C = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}.$$

Спроектируем полученное векторное равенство на две перпендикулярные оси, первая из которых параллельна нормальной силе реакции $\vec{N}$:

$$0 = -G\cos\alpha + N, \quad ma_C = G\sin\alpha - F_{\text{тр}}.$$

С учетом (12) находим решение этой системы: $F_{\text{тр}} = \frac{1}{3} G \sin\alpha$, $N = G\cos\alpha$. Подставляя полученные величины в формулировку закона трения Кулона, определим минимальное значение коэффициента трения f^*, при котором возможно качение без проскальзывания: $f^* = \frac{1}{3} \operatorname{tg}\alpha$.

6. Принцип Даламбера. Элементы аналитической механики

6.1. Принцип Даламбера

• **Силы инерции. Принцип Даламбера.** Пусть точка материальной системы движется под действием некоторой системы сил (эти силы могут быть разбиты либо на внешние и внутренние, либо на активные и силы реакций связей). Равнодействующую этой системы сходящихся сил обозначим $\vec{F}$.

Силой инерции точки называется векторная величина $\vec{\Phi}$, равная произведению массы точки на ее ускорение и направленная противоположно ускорению:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}.$$

Сила $\vec{\Phi}$ фиктивна, она не входит в число реальных сил, действующих на точку.

Принцип Даламбера: при движении механической системы (точки) любое ее состояние можно рассматривать как положение равновесия, если к реальным силам, действующим на каждую точку системы, добавить фиктивные силы инерции.

В соответствии с этим принципом, если к каждой точке системы добавить силу $\vec{\Phi}_j = m_j\vec{a}_j$, то система сил, состоящая из реальных $\vec{F}_j$ и фиктивных $\vec{\Phi}_j$ сил, будет удовлетворять всем уравнениям статики, т. е. главный вектор системы сил и ее главный момент относительно произвольного центра P будут равны нулю:

$$\sum \vec{F}_j + \vec{\Phi}_j = 0,$$

$$\sum \vec{M}_P(\vec{F}_j) + \sum \vec{M}_P(\vec{\Phi}_j) = 0.$$

В координатной форме эти уравнения записываются так:

$$\sum F_{jx} + \Phi_{jx} = 0, \qquad \sum M_x(\vec{F}_j) + \sum M_x(\vec{\Phi}_j) = 0.$$

$$\sum F_{jy} + \Phi_{jy} = 0, \qquad \sum M_y(\vec{F}_j) + \sum M_y(\vec{\Phi}_j) = 0.$$

$$\sum F_{jz} + \Phi_{jz} = 0, \qquad \sum M_z(\vec{F}_j) + \sum M_z(\vec{\Phi}_j) = 0.$$

Принцип Даламбера позволяет перенести методы решения задач статики на задачи динамики.

Пример 1. В кабине лифта, поднимающегося замедленно с ускорением a, находится груз веса G (рис. 34). Определить давление пола лифта на груз.

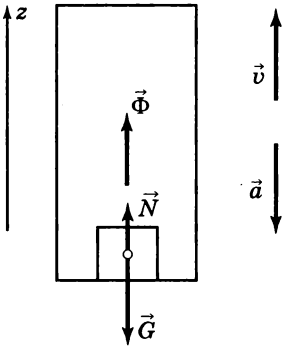


Рис. 34

Решение. Примем груз за материальную точку и расставим реальные силы, действующие на него, — активную силу веса $\vec{G}$ и силу давления пола на груз $\vec{N}$. Добавим к этим силам фиктивную силу инерции $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ (обратите внимание: сила $\vec{\Phi}$ на рисунке направлена не против перемещения лифта, а противоположно вектору ускорения).

Полученная система трех сил $\vec{G}, \vec{N}, \vec{\Phi}$ уравновешена в соответствии с принципом Даламбера. Линии действия всех сил направлены вдоль одной прямой, поэтому равновесие системы описывается одним уравнением $\sum F_z = 0$, остальные пять уравнений обращаются в тождества. Уравнение равновесия имеет вид

$$-G + N + \Phi = 0.$$

Подставляя вместо Φ модуль силы инерции ma (знак минус был учтен на рисунке), имеем $N = G(g - a)$. Видно, что сила давления пола меньше веса груза.

Система сил инерции может оказаться громоздкой в случаях большого количества материальных точек или распределенных масс. Пользуясь теоремой статики о приведении системы сил к центру, систему сил инерции $\vec{\Phi}_j$ можно заменить эквивалентной системой, состоящей из одной силы $\vec{\Phi}_j$, приложенной в наперед заданном центре P (она равна *главному вектору сил инерции* $\vec{\Phi} = \sum \vec{\Phi}_j$ и не зависит от выбора центра), и одной пары сил, момент которой $\vec{M}_P^{\text{и}}$ равен *главному моменту сил инерции* относительно центра: $\vec{M}_P^{\text{и}} = \sum \vec{M}_P(\vec{\Phi}_j)$.

Можно показать, что $\vec{\Phi}$ подсчитывается по формуле

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_C,$$

где m — масса системы, $\vec{a}_C$ — ускорение центра масс.

- **Выражения для главного момента сил инерции твердого тела и его проекций на координатные оси:**

1. При поступательном движении: $\vec{M}_C^{\text{и}} = 0$.

2. При вращении вокруг неподвижной оси z: $M_z^{\text{и}} = -I_z\varepsilon$.

3. При плоскопараллельном движении: $M_C^{\text{и}} = -I_C\varepsilon$.

Здесь ε — угловое ускорение тела, I_z и I_C — моменты инерции тела относительно оси z и оси, проходящей через центр масс перпендикулярно основной плоскости (знаки «минус» в формулах означают, что направления углового ускорения и момента пары сил инерции противоположны).

Пример 2. Однородный диск радиуса r катится вверх без проскальзывания по дуге окружности радиуса R (рис. 35). Коэффициент трения качения равен k. Определить ускорение центра диска и силу давления диска на опору в тот момент, когда скорость центра диска равна v_0, а угол между вертикалью и прямой, соединяющей центры диска и дуги, равен α.

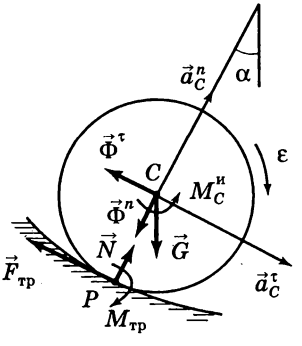


Рис. 35

Решение. Ускорение центра диска состоит из двух составляющих $\vec{a}_C^\tau$ и $\vec{a}_C^n$, причем направление $\vec{a}_C^\tau$ заранее неизвестно, а $a_C^n = v_0^2/(R-r)$. При отсутствии проскальзывания $a_C^\tau = \varepsilon r$, где ε — угловое ускорение диска.

Силы инерции диска приведем к центру масс, при этом силу инерции разложим на две составляющие $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}^\tau + \vec{\Phi}^n$, где $\vec{\Phi}^\tau = -m\vec{a}_C^\tau$ и $\vec{\Phi}^n = -m\vec{a}_C^n$. Величина момента пары сил инерции будет равна $M_C^и = I_C\,\varepsilon = mra_C^\tau/2$, соответствующую ему дуговую стрелку направим противоположно дуговой стрелке предполагаемого углового ускорения.

Изображенная на рис. 35 система сил уравновешена в силу принципа Даламбера. Выпишем уравнения равновесия для плоской системы сил:

$$F_{тр} + \Phi^\tau - G\sin\alpha = 0, \qquad (1)$$

$$N - \Phi^n - G\cos\alpha = 0, \qquad (2)$$

$$-M_{тр} + M_C^и + \Phi^\tau r - Gr\sin\alpha = 0. \qquad (3)$$

Здесь (1) —уравнение проекций на направление $\vec{F}_{тр}$, (2) — уравнение проекций на направление $\vec{N}$, (3) — уравнение моментов относительно центра P. Присоединив к этим уравнениям закон Кулона (см. гл. 3):

$$M_{тр} = kN,$$

получим окончательно систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными a_C^τ, N, $F_{тр}$, $M_{тр}$, решив которую, найдем:

$$a_C^\tau = \frac{2}{3r}\left[gr\sin\alpha + k\left(g\cos\alpha + \frac{v_0^2}{R-r}\right)\right],\ N = m\left(g\cos\alpha + \frac{v_0^2}{R-r}\right).$$

6.2. Классификация механических связей. Обобщенные координаты

• **Классификация механических связей.** *Механическими связями* называются некоторые устройства (тела), накладывающие ограничения на положения и скорости точек механической системы. Эти ограничения выполняются всегда независимо от заданных сил и записываются в виде соотношений, называемых *уравнениями связей*.

Стационарными связями называются связи, не зависящие от времени; связи, зависящие от времени, называются *нестационарными*.

Связи, в уравнения которых входят координаты точек и время, называются *геометрическими*; связи называются *кинематическими* (дифференциальными), если в уравнения связей входят скорости, координаты точек и время.

Если кинематическую связь можно «заменить» эквивалентной геометрической, то она называется *кинематической интегрируемой*, в противном случае — *неинтегрируемой*.

Геометрические и кинематические интегрируемые связи называются *голономными*, а кинематические неинтегрируемые — *неголономными*. Механическая система называется голономной, если на нее наложены только голономные связи, и неголономной, если имеется хотя бы одна неголономная связь.

Связи называются *неосвобождающими*, если ограничения, накладываемые ими на положения точек, их скорости и время, могут быть записаны в форме равенств. *Освобождающие связи* записываются в форме неравенств.

• **Возможным (виртуальным) перемещением** точки механической системы называется любое допускаемое наложенными связями перемещение $\delta\vec{r}$ из положения, занимаемого точкой в данный момент времени (при построении таких перемещений надо мысленно остановить время, при этом нестационарные связи станут не-

подвижными, т. е. — стационарными). Возможные перемещения точка не совершает, но могла бы совершить, не нарушая связей в данный момент времени.

Возможным перемещением системы называется любая совокупность возможных перемещений точек системы $\delta\vec{r}_j$, допускаемых всеми наложенными на нее связями.

В качестве примера рассмотрим точку, на которую наложена нестационарная связь — плоскость, движущаяся поступательно со скоростью $\vec{v}$ (рис. 36). В соответствии с теоремой о сложном движении точки ее действительное перемещение $d\vec{r}$ равно геометрической сумме относительного $\delta\vec{r}$ и переносного, равного $\vec{v}\ dt$. На рисунке видна разница между действительным и возможным перемещениями точки.

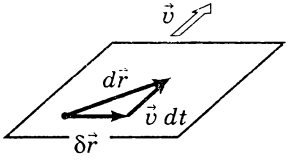


Рис. 36

Для стационарных связей действительные перемещения точек находятся среди возможных.

Механическая система может иметь множество различных возможных перемещений. Однако для систем, состоящих из материальных твердых тел и конечного количества материальных точек, существует некоторое число независимых между собой возможных перемещений, через которые можно выразить любое другое возможное перемещение. Число независимых перемещений называется *числом степеней свободы механической системы*.

- **Обобщенными координатами** называются независимые между собой параметры, которые однозначно определяют положение каждой точки механической системы. В случае голономной системы число степеней свободы равно числу обобщенных координат, в случае неголономной системы число степеней свободы меньше числа обобщенных координат. Рассмотрим конкретные примеры.

1. Свободная материальная точка в пространстве является системой с тремя степенями свободы.

2. Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы. Действительно, положение любой точки тела в пространстве можно определить, зная положение трех его точек B_1, B_2, B_3, не лежащих на одной прямой. Положение каждой из точек можно задать тремя параметрами, например, координатами x_j, y_j, z_j ($j = 1, 2, 3$). Общее число координат равно девяти, но эти 9 чисел не могут задаваться произвольно, так как они связаны тремя уравнениями, согласно которым расстояния d_{12}, d_{23}, d_{31} между точками должны оставаться постоянными, поскольку они принадлежат твердому телу. Если, например, известны шесть координат x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, x_3, то оставшиеся три z_2, y_3, z_3 могут быть найдены из уравнений связей.

3. Тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы, и в качестве обобщенной координаты можно выбрать угол поворота φ.

4. Твердое тело при плоскопараллельном движении имеет три степени свободы, в качестве обобщенных координат можно, например, выбрать угол поворота и две декартовы координаты какой-либо точки тела.

5. Твердое тело при поступательном движении имеет три степени свободы, в качестве обобщенных координат можно выбрать три декартовы координаты какой-либо точки тела.

6. Система, состоящая из призмы, положенной на плоскость, и диска, катящегося без проскальзывания по боковой грани призмы, имеет две степени свободы (рис. 37).

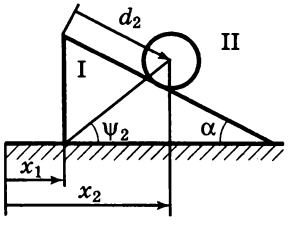


Рис. 37

7. Система, состоящая из двух свободных точек, имеет шесть степеней свободы.

8. Механизм швейной машины, состоящий из большого числа твердых тел, имеет одну степень свободы.

9. Тонкий прямолинейный стержень на плоскости, который должен двигаться так, чтобы скорость его центра была параллельна оси стержня, имеет две степени свободы.

Из приведенных примеров механических систем лишь одна — последняя — была неголономной, остальные были голономными.

Вернемся снова к понятию обобщенных координат, взяв для иллюстрации систему из примера 6. Положение каждой точки диска и призмы будет известно, как только будут заданы значения величин, входящих в один из наборов, состоящих из двух параметров: (x_1, x_2), или (x_1, d_2), или (x_2, ψ_2), или (x_1, ψ_2), или $q_1 = \frac{1}{3}(x_1 + x_2)$, $q_2 = \frac{1}{2}x_1 - x_2$ и т. д.

Подведем итоги: для рассматриваемой системы вариантов выбора обобщенных координат существует бесконечно много, но каждый фиксированный набор всегда содержит две независимые величины. Так как данная система голономна, число обобщенных координат равно двум, т. е. числу степеней свободы. Координаты называются обобщенными, поскольку они могут не иметь явно выраженного геометрического смысла, как, например, в случае координат q_1, q_2.

- **Идеальные связи.** Связи называются *идеальными*, если сумма работ их реакций $\vec{R}_j$ равна нулю на любом возможном перемещении системы:

$$\sum \delta A_j^R = 0.$$

Примером системы с идеальными связями служит свободное твердое тело. Любой сложный механизм, состоящий из нескольких твердых тел, можно трактовать как механическую систему с идеальными связями, если тела соединены абсолютно жестко, при помощи идеальных шарниров (без трения), невесомыми не-

растяжимыми идеально гибкими нитями. Кроме того, поверхности соприкосновения должны быть либо абсолютно гладкими, либо идеально шероховатыми, когда одно из тел катится по другому без проскальзывания.

6.3. Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений: для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ активных сил $\vec{F}_j$ на любом возможном перемещении системы была равна нулю.

Математическая запись принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A_j^F = 0.$$

Пример. Найти угол φ отклонения от вертикали оси тяжелого однородного стержня веса G, к нижнему концу которого B приложена горизонтальная сила F (рис. 38).

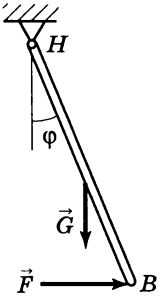


Рис. 38

Решение. В механическую систему включим стержень, являющийся твердым телом. Пренебрегая трением в шарнире, заключаем, что связи, наложенные на систему, идеальные и к исследованию ее равновесия можно применить принцип возможных перемещений.

Из состояния равновесия, характеризуемого углом φ, сообщаем системе возможное перемещение — поворачиваем стержень на малый угол $\delta\varphi$ вокруг шарнира H в сторону увеличения угла φ, подсчитываем сумму элементарных работ активных сил $\vec{N}$ и $\vec{F}$ и приравниваем ее нулю:

$$-GL \sin\varphi\, \delta\varphi + F2L \cos\varphi\, \delta\varphi = 0$$

(принимаем длину стержня равной $2L$), или после преобразований:

$$\delta\varphi\,(-GL \sin\varphi + F2L \cos\varphi) = 0.$$

Поскольку возможное перемещение $\delta\varphi$ произвольно, то для того, чтобы произведение было равно нулю, необходимо приравнять нулю выражение, заключенное в круглые скобки:

$$-GL\sin\varphi + F2L\cos\varphi = 0.$$

Отсюда находим искомый угол $\varphi = \operatorname{arctg}(2F/G)$.

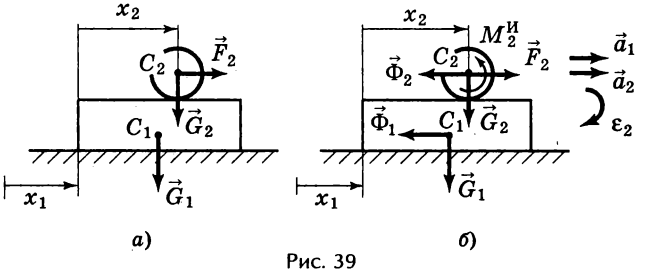
6.4. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера — Лагранжа)

Формулировка общего уравнения динамики: механическая система, на которую наложены идеальные связи, движется так, что в каждый момент времени сумма элементарных работ всех активных сил $\vec{F}_j$ и сил инерции $\vec{\Phi}_j$ на любом возможном перемещении системы равна нулю. Математическая формулировка принципа Даламбера — Лагранжа:

$$\sum \delta A_j^F + \sum \delta A_j^\Phi = 0.$$

Пример. По гладкой горизонтальной поверхности движется прямоугольный параллелепипед массы m_1, по его верхней идеально шероховатой поверхности катится однородный диск массы m_2 и радиуса r_2, к центру которого приложена постоянная горизонтальная сила F_2 (рис. 39, *а*). Найти ускорения параллелепипеда a_1 и центра диска a_2.

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из параллелепипеда и диска. Наложенные связи являются идеальными, и



а) *б*)

Рис. 39

для изучения движения системы можно применить общее уравнение динамики. В качестве координат, определяющих положение системы, выберем абсолютную координату параллелепипеда x_1 и координату x_2, характеризующую положение диска по отношению к параллелепипеду.

Векторы ускорений параллелепипеда a_1 и центра диска a_2 горизонтальны, их величины $a_1 = \ddot{x}_1$, $a_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2$, угловое ускорение диска $\varepsilon_2 = \ddot{x}_2 / r_2$. Предполагаемые направления векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и соответствующее им направление дуговой стрелки ε_2 изображены на рис. 39, *б*. К активным силам $\vec{F}_2$, $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ ($\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ — силы веса параллелепипеда и диска) добавим силы инерции $\vec{\Phi}_1 = -m_1 \vec{a}_1$, $\vec{\Phi}_2 = -m_2 \vec{a}_2$ и пару сил инерции с моментом $M_2^{и} = -I_{2C}\varepsilon_2$ (см. рис. 39, *б*).

Сообщим системе возможное перемещение, увеличив координаты x_1, x_2 на величины δx_1 и δx_2. При этом диск повернется на угол $\delta\varphi_2 = \delta x_2 / r_2$.

Подсчитаем сумму элементарных работ активных сил и сил инерции на возможном перемещении и приравняем ее нулю:

$$F_2(\delta x_1 + \delta x_2) - m_1 a_1 \delta x_1 - m_2 a_2(\delta x_1 + \delta x_2) - I_{2C}\varepsilon_2 \delta\varphi_2 = 0.$$

После преобразований получим

$$\delta x_1[F_2 - m_1\ddot{x}_1 - m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)] + \\ + \delta x_2\left[F_2 - m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) - \frac{1}{2} m_2 \ddot{x}_2\right] = 0. \qquad (4)$$

Здесь возможные перемещения δx_1 и δx_2 могут принимать произвольные независимые между собой значения. Чтобы равенство нулю выполнялось всегда, необходимо, чтобы оба выражения, стоящие множителями при δx_1 и δx_2 и заключенные в квадратные скобки, были равны нулю. Таким образом, равенство (4) распадается на систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$F_2 - m_1\ddot{x}_1 - m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = 0,$$

$$F_2 - m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) - \frac{1}{2} m_2 \ddot{x}_2 = 0.$$

Решая систему, найдем

$$a_1 = \ddot{x}_1 = \frac{F_2}{3m_1 + m_2}, \quad a_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = \frac{F_2(2m_1 + m_2)}{m_2(3m_1 + m_2)}. \qquad (5)$$

6.5. Уравнения Лагранжа второго рода

Для описания движения голономной механической системы с n степенями свободы, на которую наложены идеальные связи, используют уравнения *Лагранжа второго рода*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (6)$$

Здесь q_j — *обобщенные координаты*, количество которых равно числу степеней свободы n, $\dot{q}_j$ — *обобщенные скорости*, равные производным по времени от обобщенных координат, T — кинетическая энергия системы, Q_j — *обобщенные силы*.

Величины T и Q_j должны быть представлены в виде функций обобщенных скоростей, обобщенных координат и времени:

$$T = T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, q_1, \ldots, q_n, t),$$

$$Q_j = Q_j(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, q_1, \ldots, q_n, t).$$

Обобщенные силы находятся из выражения для суммы элементарных работ активных сил $\vec{F}_i$ на возможном перемещении системы, преобразованного к виду

$$\sum \delta A^F{}_i = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} Q_j \, \delta q_j.$$

Количество обобщенных сил равно числу степеней свободы.

Физическая размерность обобщенной силы Q_j зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты q_j, так как размерность их произведения $Q_j \, \delta q_j$ должна совпадать с размерностью работы силы. По этой причине Q_j может не иметь явного физического смысла, отсюда и ее название — обобщенная сила.

После подстановки в (6) функций T и Q_j получается система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которую необходимо интегрировать с учетом начальных условий.

Пример. Чтобы наглядно проявились достоинства изложенной методики, составим в форме уравнений Лагранжа второго рода дифференциальные уравнения движения механической системы, рассмотренной в примере из разд. 6.4.

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из параллелепипеда и диска. Наложенные связи являются голономными и идеальными, поэтому можно применять уравнения Лагранжа второго рода. Система имеет две степени свободы; в качестве обобщенных координат, определяющих ее положение, выберем абсолютные координаты параллелепипеда $q_1 = x_1$ и центра диска $q_2 = x_1 + x_2$ (см. рис. 39, *а*).

Запишем выражение кинетической энергии системы и приведем его к виду функции, зависящей от $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, q_1, q_2, t:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_{C2}^2}{2} + \frac{I_{C2}\omega_2^2}{2} =$$

$$= \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{q}_2^2}{2} + \frac{m_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2}{4}.$$

При проведении выкладок использована формула (1) из гл. 5 и кинематическое соотношение $\omega_2 = (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)/r_2$.

Из-за простой кинематики и удачного выбора обобщенных координат оказалось, что в выражение кинетической энергии не входят ни обобщенные координаты, ни время.

Вычислим обобщенные силы. Для этого подсчитаем сумму элементарных работ активных сил $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{F}_2$ на возможном перемещении системы, задаваемом вариациями δq_1, δq_2, направленными в сторону увеличения координат q_1 и q_2:

$$\sum \delta A_i^F = F_2\,\delta q_2 = 0\,\delta q_1 + F_2\,\delta q_2.$$

Коэффициенты, стоящие при вариациях обобщенных координат, являются искомыми выражениями обобщенных сил, откуда

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = F_2.$$

Осталось записать систему уравнений движения (6):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2.$$

С учетом найденных выражений T, Q_1 и Q_2 после соответствующих преобразований уравнения движения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{q}_1 - \frac{1}{2}m_2(\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1) &= 0, \\ m_2\ddot{q}_2 + \frac{1}{2}m_2(\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1) &= F_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Решение системы (7) совпадает с решением (5) этой же задачи, полученным ранее иным способом.

В отличие от уравнений Лагранжа второго рода, общее уравнение динамики пригодно также для изучения неголономных систем, поэтому оно имеет более широкие возможности применения. В то же время применение уравнений (6) для исследования голономных систем более предпочтительно, так как оно требует меньшего количества простых действий.

Список литературы к разделу «Теоретическая механика»

Айзенберг Т. Б., Воронков И. М., Осецкий В. М. Руководство к решению задач по теоретической механике. — М.: Высшая школа, 1968. — 419 с.

Айзерман М. А. Классическая механика. — М.: Наука, 1980. — 368 с.

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах, т. 1. Статика и кинематика. — М.: Наука, 1990. — 672 с.

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах, т. 2. Динамика. — М.: Наука, 1991. — 639 с.

Бать М. И., Джанелидзе Г. Ю., Кельзон А. С. Теоретическая механика в примерах и задачах, т. 3. Специальные главы механики. — М.: Наука, 1993. — 487 с.

Бутенин Н. В. Введение в аналитическую механику. — М.: Наука, 1991 — 256 с.

Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики, ч. 1. Кинематика, статика, динамика материальной точки. — М.: Наука, 1972. — 467 с.

Бухгольц Н. Н. Основной курс теоретической механики, ч. 2. Динамика системы материальных точек. — М.: Наука, 1972. — 332 с.

Воронков И. М. Курс теоретической механики. — М.: Наука, 1964. — 596 с.

Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. — М.: Наука, 1966. — 300 с.

Добронравов В. В., Никитин Н. Н. Курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1983. — 575 с.

Ишлинский А. Ю. Классическая механика и силы инерции. — М.: Наука, 1987. — 320 с.

Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической меха-

ники, т. 1. Статика и кинематика. — М.: Наука, 1982. — 352 с.

Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики, т. 2. Динамика. —М.: Наука, 1983. — 640 с.

Маркеев А. П. Теоретическая механика. — М.: Наука, 1990. — 414 с.

Мещерский И. В. Сборник задач по теоретической механике. — М.: Наука, 1986 — 448 с.

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. / Под ред. Яблонского А. А. — М.: Высшая школа, 1985 — 368 с.

Тарг С. М. Краткий курс теоретической механики. — М.: Высшая школа, 1995. — 416 с.

Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики, ч. 1. Статика. Кинематика. — М.: Высшая школа, 1984. — 343 с.

Яблонский А. А., Никифорова В. М. Курс теоретической механики, ч. 2. Динамика. — М.: Высшая школа, 1984. — 423 с.

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Основные обозначения

A — площадь поперечного сечения;

D — диаметр стержня;

E — модуль упругости первого рода;

F — сила;

$F_{кр}$ — критическая сила;

G — модуль упругости второго рода;

I_p — полярный момент инерции стержня;

I_x, I_y — осевые моменты инерции стержня;

i — радиус инерции стержня;

k — кривизна оси стержня;

l — длина (стержня);

M_x, M_y — изгибающие моменты;

M_z — крутящий момент;

N — продольная сила;

n — коэффициент запаса;

Q_x, Q_y — поперечные силы;

q — распределенная вдоль оси нагрузка;

S_x, S_y — статические моменты плоской фигуры относительно осей x и y;

$S_x^{отс}$ — статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно оси x;

W_p — полярный момент сопротивления сечения;

W_x, W_y — осевые моменты сопротивления сечения;
x, y, z — прямоугольные декартовы координаты;
γ — угловая деформация;
ε — линейная деформация;
λ — гибкость стержня;
μ — коэффициент приведенной длины;
ν — коэффициент Пуассона;
σ — нормальное напряжение;
$\sigma_{кр}$ — критическое напряжение;
$[\sigma]$ — допускаемое нормальное напряжение;
τ — касательное напряжение;
$[\tau]$ — допускаемое касательное напряжение;
φ — угол.

1. Основные понятия

1.1. Введение. Внешние и внутренние силы

- **Деформация, прочность и жесткость.** Сопротивление материалов представляет собой часть механики, в которой рассматриваются вопросы расчета элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Сопротивление материалов опирается на знания теоретической механики. Но если объектом теоретической механики является абсолютно твердое тело, то в сопротивлении материалов рассматриваются деформируемые твердые тела.

На практике реальные части машин и сооружений подвергаются воздействию разного рода сил. Под действием этих сил происходит *деформация* тел, т. е. изменение взаимного расположения частиц материала. Если силы достаточно велики, возможно разрушение тела.

Способность тела воспринимать нагрузки без разрушения и больших деформаций называют соответственно *прочностью* и *жесткостью*.

Некоторые состояния равновесия тел и конструкций оказываются *неустойчивыми*, т. е. такими, при которых незначительные механические воздействия, как правило, случайного характера, могут привести к существенным отклонениям от этих состояний. Если же отклонения также невелики, то такие состояния равновесия называют *устойчивыми*.

- **Внешние силы.** К внешним силам, действующим на конструкцию, относятся активные силы (нагрузки) и реакции внешних связей. Различают несколько видов нагрузок.

Сосредоточенная сила, приложенная в точке. Ее вводят вместо реальных сил, действующих на неболь-

шой участок поверхности элемента конструкции, размерами которого можно пренебречь.

Распределенные силы. Например, силы давления жидкости на дно сосуда относятся к распределенным по поверхности нагрузкам и измеряются в единицах Н/м^2, а силы веса — к нагрузке, распределенной по объему и измеряемой в Н/м^3. В ряде случаев вводят нагрузку, распределенную по линии, интенсивность которой измеряется в Н/м.

Одним из вариантов нагрузок является *сосредоточенный момент* (пара сил).

- **Внутренние силы в стержне.** Наиболее распространенным элементом конструкций является стержень, поэтому в сопротивлении материалов ему уделяют главное внимание.

Продольная ось и поперечное сечение — основные геометрические элементы стержня. Принимается, что поперечные сечения стержня перпендикулярны продольной оси, а продольная ось проходит через центры тяжести поперечных сечений.

Внутренними силами стержня называют силы взаимодействия между его отдельными частями, возникающие под действием внешних сил (предполагается, что в отсутствие внешних сил внутренние силы равны нулю).

Рассмотрим стержень, находящийся в равновесии под действием некоторой системы внешних сил (рис. 1, *а*). Мысленно проведем произвольное поперечное сечение, которое делит стержень на две части *Л* и *П*. На правую часть *П* стержня со стороны левой части *Л* действует система распределенных по поверхности поперечного сечения сил — внутренних сил по отношению к стержню в целом. Эту систему сил можно привести к главному вектору $\vec{R}$ и главному моменту $\vec{M}$, взяв центр тяжести сечения — точку O — в качестве центра приведения.

- **Внутренние силовые факторы.** Выберем систему координат, расположив оси x, y в поперечном сечении, а ось z перпендикулярно ему, и разложим $\vec{R}$ и $\vec{M}$ на составляющие по этим осям: Q_x, Q_y, N и M_x, M_y, M_z (рис. 1, *б*).

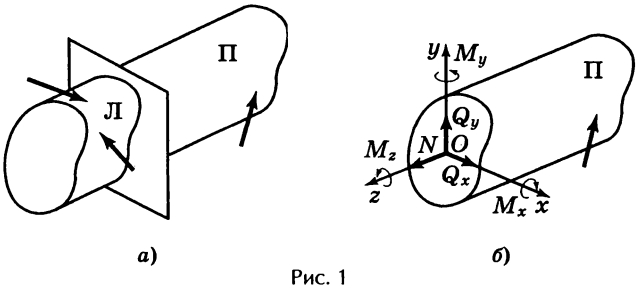


Рис. 1

Эти шесть величин называются *внутренними силовыми факторами стержня* (или *внутренними усилиями*) в рассматриваемом сечении. Каждое из этих усилий имеет свое название, соответствующее его направлению или определенному виду деформации стержня, который вызывается этим усилием. Силы Q_x и Q_y называются *поперечными* (*перерезывающими*) силами, а N — *нормальной* (*продольной*) силой. Моменты M_x и M_y называются *изгибающими* моментами, а M_z — *крутящим* моментом.

- **Метод сечений.** Так как отсеченная часть стержня *П* находится в равновесии, можно составить шесть уравнений статики для действующих на эту часть сил, из которых определяются все шесть внутренних силовых факторов

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0,$$

$$\sum m_x(\vec{F}) = 0, \quad \sum m_y(\vec{F}) = 0, \quad \sum m_z(\vec{F}) = 0.$$

Этот способ определения внутренних усилий называют *методом сечений*.

На основании закона действия и противодействия правая часть стержня действует на левую с такими же, но противоположно направленными усилиями, поэтому их можно также определить, исходя из равновесия части *Л* стержня.

1.2. Напряжения и деформации в точке

• **Напряжения.** *Вектором напряжения* p называется интенсивность распределенных по сечению внутренних сил в некоторой точке сечения (рис. 2). Его составляющие, лежащие в плоскости сечения, называются *касательными напряжениями* τ_x, τ_y, а составляющая, перпендикулярная сечению, — *нормальным напряжением* σ. Напряжения измеряются в единицах Н/м^2 (Па) и зависят не только от выбора точки, но и от ориентации сечения (или площадки dA, рис. 2), проходящего через эту точку. Вся совокупность напряжений в заданной точке для разных площадок называется *напряженным состоянием* в этой точке.

При известных напряжениях в сечении стержня его внутренние силовые факторы могут быть найдены по формулам

$$N = \int_A \sigma\, dA, \quad Q_x = \int_A \tau_x\, dA, \quad Q_y = \int_A \tau_y\, dA,$$

$$M_x = -\int_A \sigma y\, dA, \quad M_y = -\int_A \sigma x\, dA, \qquad (1)$$

$$M_z = \int_A (\tau_y x - \tau_x y)\, dA,$$

где интегрирование распространено на всю площадь сечения A.

• **Деформации.** Рассмотрим произвольную точку K тела в начальном недеформированном состоянии и проведем через нее в направлении осей x и y два бесконечно малых отрезка длиной dx и dy (рис. 3).

Под действием нагрузки происходит деформация тела, точка K перемещается в точку K', отрезки dx и dy изменяют свою длину на величины Δx и Δy, а угол $\pi/2$ между ними изменяется на γ_{xy}.

Отношения

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{dx}, \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta y}{dy}$$

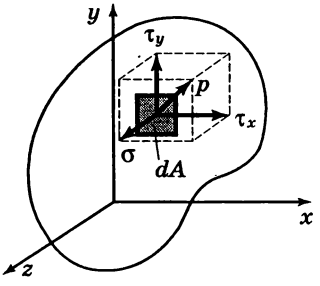


Рис. 2

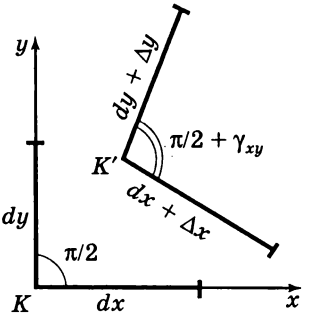


Рис. 3

называются *линейными деформациями* в точке K в направлении осей x и y соответственно, а величина γ_{xy} — *угловой деформацией* (углом сдвига) в точке K между осями x и y. Вся совокупность линейных и угловых деформаций для различных направлений, проходящих через рассматриваемую точку, называется *деформированным состоянием* в этой точке.

1.3. Основные понятия и допущения

• **Упругостью** называют свойство тела, выражающееся в однозначной зависимости между силами, действующими на тело, и его деформациями. В частности, упругое тело после снятия нагрузок возвращается в исходное состояние.

В некоторых случаях после снятия нагрузок исчезает лишь часть полной деформации, называемая *упругой*. Оставшаяся часть — так называемая *остаточная* (*пластическая*) деформация связана со свойством тела, которое называется *пластичностью*.

- **Основные допущения, принятые в сопротивлении материалов:**

1. Тела считаются сплошными (без пустот) и однородными, т. е. свойства материала тела в разных точках одинаковы.

2. Материал тела *изотропен*, т. е. его свойства по всем направлениям одинаковы. (В ряде случаев приходится отказываться от этого допущения для *анизотропных* тел, свойства материала которых в разных направлениях различаются. Например, свойства дерева в направлении вдоль волокон и поперек различны.)

3. Деформации тела в каждой точке прямо пропорциональны напряжениям в этой точке. Это свойство называют *линейной упругостью* или *законом Гука*.

4. Предполагается малость деформаций тела, а также малость перемещений его точек по сравнению с геометрическими размерами самого тела.

5. Справедлив *принцип независимости действия сил* (принцип суперпозиции), согласно которому какая-либо величина α, зависящая от действия нескольких сил, равна сумме величин a_i, найденных от каждой силы в отдельности. Этот принцип следует из допущений 3 и 4.

2. Напряженно-деформированное состояние в точке

2.1. Виды напряженного состояния

• **Главные напряжения и главные направления.** Анализ напряженного состояния в некоторой точке K тела удобно проводить, мысленно выделяя элементарный параллелепипед в окрестности этой точки и рассматривая напряжения, действующие на его грани. Ввиду малости параллелепипеда можно считать, что напряженное состояние во всех его точках одинаково (однородно) и совпадает с напряженным состоянием в исследуемой точке K. Изменяя ориентацию этого параллелепипеда, можно добиться того, чтобы все его грани были свободны от касательных напряжений. Соответствующие нормальные напряжения называются *главными напряжениями*, а их направления — *главными направлениями* в точке K.

Различают *линейное, плоское и объемное (одноосное, двухосное и трехосное)* напряженные состояния в точке в зависимости от того, испытывает ли параллелепипед, ориентированный по главным направлениям, растяжение (или сжатие) соответственно в одном, двух или трех взаимно перпендикулярных направлениях.

• **Плоское напряженное состояние. Закон парности.** В дальнейшем ввиду особой важности ограничимся случаем плоского напряженного состояния, при котором на двух противоположных гранях элементарного параллелепипеда напряжения отсутствуют. На остальных гранях в общем случае их ориентации действуют касательные и нормальные напряжения (рис. 4). Из однородности напряженного состояния параллелепипеда следует, что одноименные напряжения на противо-

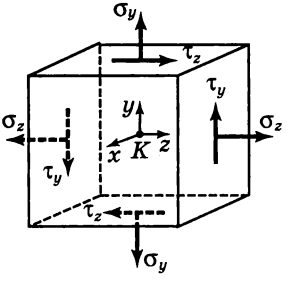


Рис. 4

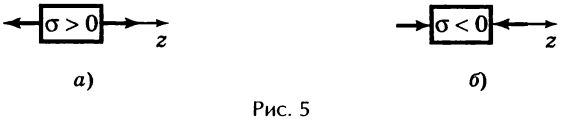
положных гранях численно равны. Очевидно, что нормальные усилия на гранях параллелепипеда взаимно уравновешены. Касательные усилия на тех же гранях образуют две пары сил с моментами $(\tau_y\, dy\, dx)\, dz$ и $(\tau_z\, dz\, dx)\, dy$ противоположного направления, где dx, dy, dz — размеры параллелепипеда. Эти моменты должны быть уравновешены, откуда $\tau_z = \tau_y$.

Последнее равенство выражает *закон парности касательных напряжений*: на любых взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по величине и направлены так, что стремятся вращать элемент в противоположные стороны (рис. 4). Сказанное позволяет ввести единое обозначение: $\tau = \tau_z = \tau_y$.

2.2. Одноосное растяжение и сжатие

• **Модуль упругости первого рода.** Рассмотрим элементарный параллелепипед в состоянии одноосного растяжения или сжатия, на двух противоположных гранях которого действуют только нормальные напряжения (рис. 5).

Правило знаков: растягивающие напряжения считаются положительными, а сжимающие — отрицательными.



а) *б*)

Рис. 5

В соответствии с законом Гука напряжение и линейная деформация в направлении оси z прямо пропорциональны:

$$\sigma = E\varepsilon_z. \qquad (1)$$

Коэффициент пропорциональности E называется *модулем упругости первого рода* и имеет размерность напряжения, так как ε_z — безразмерная величина. При $\sigma > 0$ (растяжение) ε_z — также больше нуля, что соответствует удлинению параллелепипеда в направлении оси z. При $\sigma < 0$ (сжатие) имеем $\varepsilon_z < 0$, что соответствует укорочению параллелепипеда.

• **Коэффициент Пуассона.** Линейные деформации в направлении осей x и y из соображений симметрии равны между собой и также пропорциональны напряжению или, с учетом (1), деформации ε_z:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z = -\frac{\nu\sigma}{E}. \qquad (2)$$

Постоянный безразмерный коэффициент пропорциональности ν называется *коэффициентом Пуассона*, а знак минус учитывает разные знаки продольной ε_z и поперечных ε_x, ε_y деформаций. В частности, при $\sigma > 0$, $\varepsilon_z > 0$ величины ε_x, ε_y меньше нуля, т. е. поперечные размеры параллелепипеда уменьшаются.

Постоянные величины E и ν характеризуют упругие свойства конкретного материала, например для стали $E = 210$ ГПа, $\nu = 0{,}25 \div 0{,}3$.

2.3. Чистый сдвиг

• **Чистый сдвиг.** Рассмотрим частный вид плоского напряженного состояния, при котором на боковые грани элементарного параллелепипеда действуют только касательные напряжения τ (рис. 6, *а*). По закону парности напряжения на соседних гранях одинаковы. Такой вид напряженного состояния называется *чистым сдвигом*.

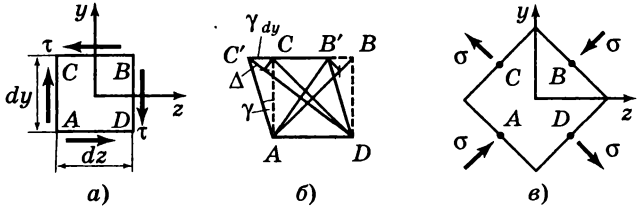


Рис. 6

Характер деформации параллелепипеда показан на рис. 6, *б*. Первоначально прямые углы между боковыми гранями изменяются на величину γ, называемую углом сдвига, а линейные деформации ε_x, ε_y, ε_z равны нулю.

- **Модуль сдвига.** Закон Гука в данном случае имеет вид

$$\tau = G\gamma. \qquad (3)$$

Коэффициент пропорциональности G называют *модулем сдвига или модулем упругости второго рода*. Размерность модуля совпадает с размерностью напряжений.

Нетрудно видеть, что при $dy = dz$ диагональный отрезок AB параллелепипеда укорачивается, а отрезок CD удлиняется на одну и ту же величину $\Delta = \gamma\, dy \sin 45°$ (рис. 6, *б*), поэтому на другой элементарный параллелепипед, выделенный в окрестности той же точки и повернутый на угол 45° относительно первого, должны действовать соответствующие нормальные напряжения σ (рис. 6, *в*). Касательных напряжений здесь уже не будет, поэтому нормальные напряжения σ — главные напряжения, а их направления — главные направления для данного напряженного состояния.

- **Связь между G, E и ν.** Рассмотрим элемент, образованный диагональным разрезом параллелепипеда (рис. 7). На его грани действуют силы, по величине равные $\tau\, dx\, dy$, $\tau\, dx\, dz$ и $\sigma\, dx\, dz/\cos 45°$.

Из равновесия этого элемента получим

$$\sigma = \tau. \qquad (4)$$

С учетом (3), (4) деформация отрезка CD (рис. 6, *б*) равна $\varepsilon_{CD} = \Delta/CD = \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}\tau/G = \frac{1}{2}\sigma/G$.

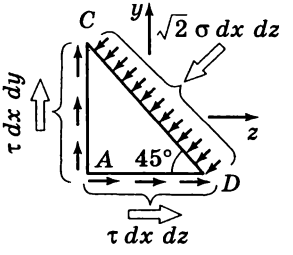


Рис. 7

С другой стороны, рассматривая состояние на рис. 6, *в* как комбинацию двух одноосных напряженных состояний (растяжения и сжатия по перпендикулярным направлениям), из закона Гука (1), (2) получим $\varepsilon_{CD} = \frac{\sigma}{E} + \frac{\nu\sigma}{E}$. Отсюда $\frac{\sigma}{2G} = \frac{\sigma}{E} + \frac{\nu\sigma}{E}$ или $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$.

Таким образом, модуль сдвига G определяется через уже введенные постоянные E и ν.

3. Центральное растяжение и сжатие

3.1. Продольная сила

Центральным растяжением (*сжатием*) называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только продольная сила N, а все остальные внутренние усилия равны нулю.

Правило знаков: растягивающие продольные силы считаются положительными, а сжимающие — отрицательными.

Пример. На рис. 8, *а* показан стержень, нагруженный двумя силами F_1 и F_2, лежащими на его оси. Для определения продольной силы используем метод сечений (см. разд. 1.1). Про-

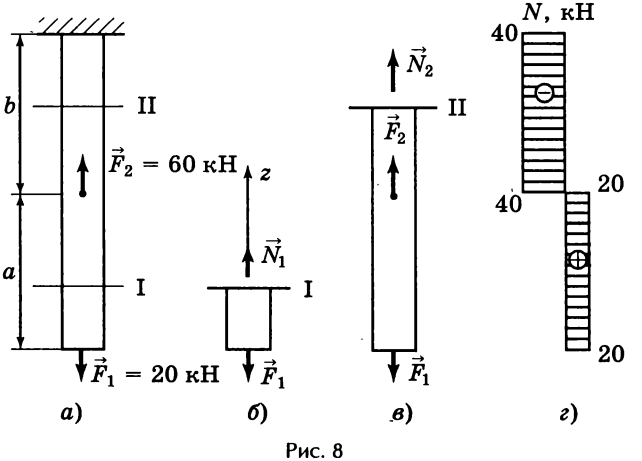


Рис. 8

ведем произвольное сечение I на участке «a» стержня и рассмотрим равновесие свободной отсеченной части (рис. 8, *б*). Действие отброшенной части заменим неизвестной силой N_1, считая ее положительной. Из уравнения равновесия этой отсеченной части в форме равенства нулю суммы проекций всех сил на ось z: $N_1 - F_1 = 0$ следует $N_1 = F_1 = 20$ кН. Аналогично для сечения II на участке «b» стержня получим (рис. 8, *в*) $N_2 + F_2 - F_1 = 0$, откуда $N_2 = F_1 - F_2 = -40$ кН.

Таким образом, продольная сила на участках «a» и «b» стержня различна. Участок «a» стержня испытывает растяжение ($N > 0$), а участок «b» — сжатие ($N < 0$). При переходе от участка «a» к участку «b» сила N изменяется скачком на величину силы F_2.

Для иллюстрации характера изменения продольной силы вдоль стержня принято строить график функции $N(z)$, называемый *эпюрой* продольной силы. На этом графике указывают числовые значения продольной силы в характерных сечениях, а также их знаки. Для рассмотренного примера эпюра $N(z)$ показана на рис. 8, *г*.

3.2. Напряжения и деформации при растяжении или сжатии

- **Гипотеза плоских сечений.** Для определения напряжений при растяжении или сжатии примем *гипотезу плоских сечений*: поперечные сечения стержня после деформации остаются плоскими и перпендикулярными оси стержня. Опыт показывает, что эта гипотеза нарушается только для областей так называемых местных напряжений, в непосредственной близости от точек приложения внешних сил, или в местах резкого изменения площади поперечного сечения, где происходит так называемая *концентрация напряжений*. Их учет составляет особую задачу, нами не затрагиваемую.

- **Формулы для напряжений и деформаций.** Рассмотрим стержень, растягиваемый двумя силами (рис. 9, *а*).

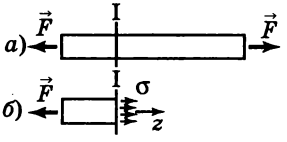


Рис. 9

В соответствии с гипотезой плоских сечений и постоянством продольной силы вдоль стержня ($N = F$), напряженное и деформированное состояние точек стержня вне окрестности концов однородно и нормальные напряжения по поперечному сечению распределены равномерно (рис. 9, *б*).

Из формулы (1) гл. 1 следует $N = \int\limits_A \sigma\, dA = \sigma A$, отсюда

$$\sigma = \frac{N}{A}. \qquad (1)$$

Формула (1) позволяет вычислять нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня при центральном растяжении или сжатии по известной продольной силе N и площади поперечного сечения A.

Выделенный из стержня элементарный параллелепипед находится в условиях одноосного растяжения (см. рис. 5, *а*). Его деформации определяются из закона Гука (см. разд. 2.2). В частности, продольная деформация

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}.$$

Суммируя удлинения малых элементов по всей длине стержня, получим его *абсолютное удлинение*

$$\Delta l = \int\limits_0^l \varepsilon_z\, dz = \varepsilon_z l = \frac{Nl}{EA},$$

где l — длина стержня.

Величина EA называется *жесткостью сечения стержня при растяжении и сжатии.*

3.3. Расчеты на прочность при растяжении и сжатии

- **Допускаемое напряжение.** Для обеспечения прочности стержня, испытывающего растяжение или сжатие, необходимо ограничить максимальные напряжения этого стержня некоторым значением, называемым *допускаемым напряжением* $[\sigma]$. Его величина выбирается на основе устанавливаемого заранее для данного материала опасного значения напряжения с учетом коэффициента запаса. Для материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, вводят два разных допускаемых напряжения $[\sigma^p]$ и $[\sigma^c]$.
- **Задачи расчета на прочность.** Таким образом, условие прочности в данном случае имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{|N|}{A} \leqslant [\sigma].$$

Пользуясь им, можно решать следующие задачи:

1. По заданным нагрузкам, размерам сечения и величине допускаемого напряжения проверять прочность стержня.

2. По заданным нагрузкам и известной величине допускаемого напряжения определять размеры поперечного сечения:

$$A \geqslant \frac{|N|}{[\sigma]}.$$

3. По заданным размерам сечения и известной величине допускаемого напряжения определять величину допускаемой продольной силы:

$$N \leqslant [\sigma]A.$$

Пример. Для чугунного стержня (рис. 8, *а*) с площадью сечения $A = 5$ см^2 проверить условия прочности при $[\sigma^p] = 30$ МПа, $[\sigma^c] = 100$ МПа.

Решение. На участке «*a*» стержень испытывает растягивающее усилие $N_1 = 20$ кН (см. рис. 8, *г*), поэтому нормальное напряжение в сечениях на этом участке $\sigma_1 = N_1/A = 40$ МПа.

На участке «*b*», испытывающем сжатие, $N_2 = -40$ кН. Соответствующее напряжение $\sigma_2 = |N_2|/A = 80$ МПа.

Так как допускаемые напряжения на растяжение и сжатие для чугуна различны, необходимо проверить два условия $\sigma_1 \leqslant [\sigma^p]$ и $\sigma_2 \leqslant [\sigma^c]$. Первое оказывается невыполненным, поэтому условие прочности в целом не соблюдено.

4. Кручение

4.1. Крутящий момент

Кручением называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает только крутящий момент M_z, а все остальные внутренние силовые факторы равны нулю.

Правило знаков: если при взгляде со стороны внешней нормали к сечению крутящий момент направлен против хода часовой стрелки, он считается положительным.

Пример. Рассмотрим стержень, нагруженный двумя моментами m_1 и m_2, плоскости действия которых перпендикулярны оси стержня (рис. 10, *а*). В соответствии с методом сечений проведем произвольное поперечное сечение *I* на участке «*a*» и рассмотрим равновесие свободной отсеченной части стержня (рис. 10, *б*). Действие отброшенной части заменим неизвестным крутящим моментом M_{z1}, выбрав его направление положительным. Из уравнения равновесия для отсеченной части в форме равенства нулю суммы моментов всех сил относительно оси *z*: $M_{z1} - m_1 = 0$ следует $M_{z1} = m_1 = 30$ кН · м. Аналогично для сечения II будем иметь (рис. 10, *в*) $M_{z2} + m_2 - m_1 = 0$, откуда $M_{z2} = m_1 - m_2 = -10$ кН · м.

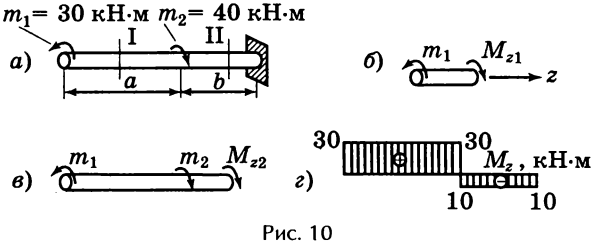


Рис. 10

На рис. 10, *г* дана эпюра крутящего момента, показывающая характер изменения величины M_z вдоль оси стержня. На границе участков «*a*» и «*b*» стержня крутящий момент претерпевает скачок на величину, равную моменту m_2.

4.2. Напряжения и деформации при кручении

• **Напряженное состояние при кручении.** Ограничимся рассмотрением стержней с поперечным сечением в форме круга или кольца.

Для установления закона распределения напряжений по сечению примем допущение, подтверждаемое опытом, о том, что при кручении поперечные сечения стержня в результате деформации поворачиваются вокруг продольной оси как жесткие диски (кольца). Условия применимости этого допущения аналогичны условиям применимости гипотезы плоских сечений при растяжении или сжатии (см. разд. 3.2).

Рассмотрим стержень, испытывающий кручение под действием двух моментов, приложенных на его концах (рис. 11, *а*). Разобьем его на соосные трубки (рис. 11, *б*) и выделим одну с внутренним радиусом ρ и бесконечно малой толщиной $d\rho$ (рис. 11, *в*).

В силу принятого допущения относительно характера деформирования стержня можно утверждать, что

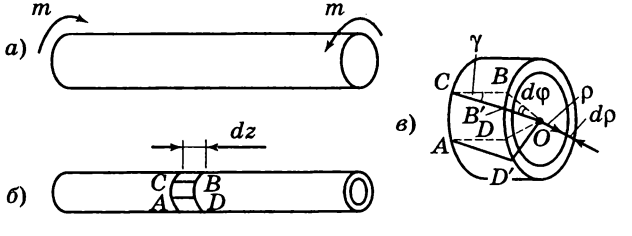


Рис. 11

бесконечно малый элемент $ACBD$, выделенный из трубки (рис. 11, *в*), испытывает деформацию, соответствующую чистому сдвигу (см. разд. 2.3). Отсюда следует, что по боковым граням элемента действуют только касательные напряжения τ (см. рис. 6, *а*).

- **Полярный момент инерции.** Угол сдвига элемента $\gamma = BB'/dz = \rho\, d\varphi/dz$ (рис. 11, *в*), где $d\varphi/dz$ — *погонный угол закручивания* трубки или угол закручивания на единицу длины. Из формулы (3) гл. 2 (закон Гука) следует

$$\tau = G\gamma = G\rho\frac{d\varphi}{dz}. \qquad (1)$$

Величина погонного угла закручивания $d\varphi/dz$ одинакова для всех соосных трубок, из которых составлен стержень. Поэтому из формулы (1) вытекает, что касательные напряжения в поперечных сечениях стержня прямо пропорциональны расстоянию ρ до его оси (рис. 12).

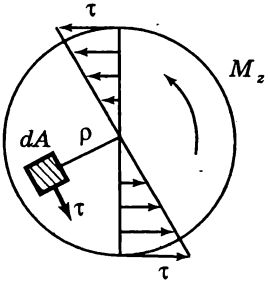


Рис. 12

Крутящий момент M_z может быть получен суммированием моментов всех распределенных по сечению напряжений относительно оси z:

$$M_z = \int_A \tau\rho\, dA = GI_p\frac{d\varphi}{dz}; \quad \text{где } I_p = \int_A \rho^2\, dA. \qquad (2)$$

Интеграл по поверхности сечения I_p называется *полярным моментом инерции сечения* и представляет собой геометрическую характеристику этого сечения.

Для круга диаметра D имеем $I_p = \frac{\pi}{32} D^4$.

Для кольца $I_p = \frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$, где d и D — внутренний и внешний диаметры соответственно.

• **Касательные напряжения. Угол закручивания.** Используя (2), находим

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z}{GI_p}. \qquad (3)$$

Подставляя это выражение в (1) для τ, получим основную формулу для касательных напряжений в поперечных сечениях стержня при кручении

$$\tau = \frac{M_z\rho}{I_p}. \qquad (4)$$

Угол *закручивания* всего стержня на рис. 11, *а*, т. е. угол взаимного поворота его крайних сечений, можно найти, зная погонный угол закручивания (3) и учитывая постоянство величины M_z вдоль оси стержня ($M_z = m$):

$$\Delta\varphi = \int_0^l \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_z l}{GI_p},$$

где l — длина стержня.

Величина GI_p называется *жесткостью сечения при кручении.*

4.3. Расчеты на прочность при кручении

Значение наибольшего касательного напряжения при кручении находится из формулы (4) при $\rho = \rho_{max}$:

$$\tau_{max} = \frac{|M_z|\rho_{max}}{I_p} = \frac{|M_z|}{W_p}. \qquad (5)$$

Величина $W_p = I_p/\rho_{max}$ называется *полярным моментом сопротивления сечения.*

Для круга $W_p = \frac{\pi}{16} D^3$.

Для кольца $W_p = \frac{\pi}{16} D^3(1 - d^4/D^4)$.

Условие прочности сводится к неравенству $\tau_{max} = |M_z|/W_p \leqslant [\tau]$, где $[\tau]$ — допускаемое напряжение при кручении.

Как и при расчете на прочность при растяжении и сжатии, возможны следующие три вида задач, различающихся формой использования условия прочности.

1. Проверочный расчет: $|M_z|/W_p \leqslant [\tau]$.
2. Подбор сечения: $W_p \geqslant |M_z|/[\tau]$.
3. Определение допускаемой нагрузки: $|M_z| \leqslant [\tau]W_p$.

Пример. Для стального стержня кругового сечения (рис. 10, *а*) подобрать диаметр из условия прочности при $[\tau] = 100$ МПа.

Решение. Так как поперечное сечение постоянно вдоль стержня, опасными будут сечения на участке «*а*», где возникает максимальный крутящий момент $M_z = 30$ кН · м (см. рис. 10, *г*).

Из условия прочности

$$\tau_{max} = \frac{M_z}{W_p} = \frac{16M}{\pi D^3} \leqslant |\tau|$$

находим $D \geqslant \sqrt[3]{16M_z/(\pi[\tau])} = 0{,}119$ м.

Округляя в бо́льшую сторону, выбираем окончательно $D = 12$ см.

5. Прямой изгиб

5.1. Изгибающий момент и поперечная сила

• **Определения.** *Изгибом* называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникают изгибающие моменты M_x и M_y и, быть может, поперечные силы Q_x и Q_y, а остальные внутренние силовые факторы (N и M_z) равны нулю.

В случае равенства нулю поперечных сил изгиб называют *чистым*, а при наличии поперечных сил имеем так называемый *поперечный изгиб*.

Будем рассматривать стержни, поперечные сечения которых имеют ось симметрии y. Если на такой стержень действует система внешних сил, лежащих в плоскости yz и направленных перпендикулярно продольной оси стержня (рис. 13), то в его поперечных сечениях возникнут только два внутренних силовых фактора — изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y. Такой изгиб называют *прямым* (о косом изгибе см. разд. 6.1).

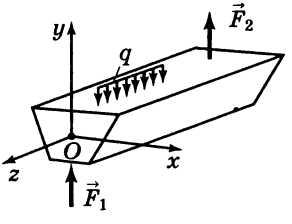


Рис. 13

Правило знаков: изгибающий момент считается положительным, если он приводит к растяжению нижних волокон и сжатию верхних; поперечная сила положительна, если при воздействии на сечение справа она направлена вниз, а при воздействии слева — вверх.

Как уже отмечалось, внутренние силовые факторы стержня зависят от продольной координаты рассмат-

риваемого сечения, т. е. являются функциями переменной z.

- **Дифференциальные уравнения равновесия стержня.** Рассмотрим стержень, на который действует распределенная вдоль его оси нагрузка q (рис. 14, *а*). Выделим двумя сечениями бесконечно малый элемент (рис. 14, *б*), действие отброшенных частей стержня заменим соответствующими внутренними усилиями, направления которых выбраны положительными.

Вычисляя сумму проекций всех сил на ось y и сумму моментов сил относительно точки O, составим соответствующие уравнения равновесия элемента

$$qdz + Q_y - (Q_y + dQ_y) = 0,$$

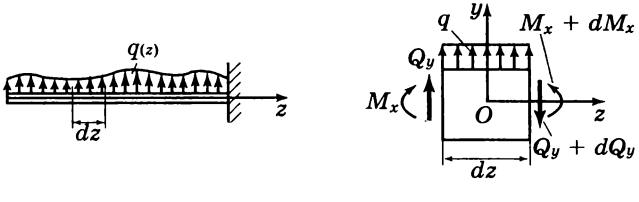
$$-M_x + (M_x + dM_x) - Q_y\, dz = 0.$$

Из них следуют соотношения

$$\frac{dQ_y}{dz} = q, \quad \frac{dM_x}{dz} = Q_y, \tag{1}$$

называемые *дифференциальными уравнениями равновесия стержня при изгибе*. Уравнения (1), которым должны удовлетворять функции $Q_y(z)$ и $M_x(z)$, часто используют при построении эпюр изгибающих моментов и поперечных сил, а также при проверке этого построения.

Стержни, работающие преимущественно на изгиб, принято называть *балками*.



а) *б*)

Рис. 14

- **Примеры построения эпюр.** Рассмотрим примеры построения эпюр $Q_y(z)$ и $M_x(z)$ для некоторых балок с использованием метода сечений.

На рис. 15, *а* показана консольная, т. е. с защемленным концом, балка, нагруженная сосредоточенной силой. В соответствии с методом сечений проведем произвольное поперечное сечение K, отстоящее на расстояние z от свободного конца балки, и рассмотрим равновесие свободной отсеченной части. Действие отброшенной части заменим неизвестными усилиями Q_y и M_x, считая их направления положительными. Вычисляя сумму проекций всех сил на ось y и сумму моментов сил относительно точки K, составим соответствующие уравнения равновесия

$$Q_y - F = 0, \quad -M_x - Fz = 0,$$

откуда получим $Q_y = F$, $M_x = -Fz$. Таким образом, поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется прямо пропорционально расстоянию z, принимая значения 0 и $-Fl$ соответственно на свободном ($z = 0$) и защемленном ($z = l$) концах балки. На рис. 15, *а* даны соответствующие эпюры Q_y и M_x.

Та же процедура для балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 15, *б*), дает

$$-qz - Q_y = 0, \quad \frac{1}{2}qz^2 + M_x = 0,$$

откуда $Q_y = -qz$, $M_x = -\frac{1}{2}qz^2$. В данном случае поперечная сила есть линейная функция z, а изгибающий момент зависит от z по закону квадратной параболы, чему соответствуют эпюры Q_y и M_x на рис. 15, *б*.

Аналогично для консольной балки, нагруженной моментом (рис. 15, *в*), получим $Q_y = 0$, $M_x = m$.

Для двухопорных балок (рис. 16), у которых нет свободных концов, необходимо предварительно найти опорные реакции из условий равновесия для балки в целом. После этого можно приступить к определению внутренних усилий аналогично предыдущему.

Для произвольного сечения на участке AB балки, нагруженной в центре ($AB = BC = l/2$) сосредоточенной силой F (рис. 16, *а*), получим: $Q_y = R_1 = F/2$, $M_x = R_1z = Fz/2$, где z — расстояние от левого конца A. Для сечения на участке BC находим: $Q_y = R_1 - F = -F/2$, $M_x = R_1z - F(z - l/2) = F(l - z)/2$. Соответствующие эпюры даны внизу на рис. 16, *а*.

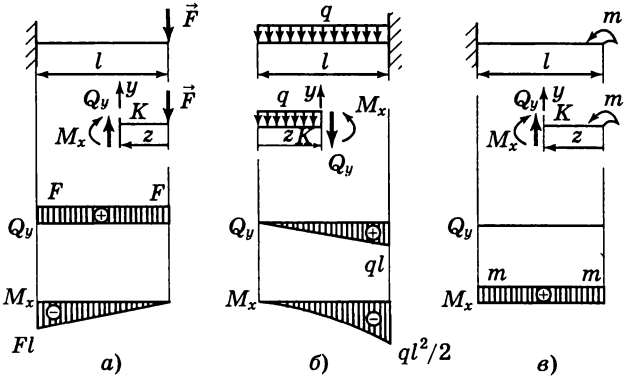

$\vec{F}$
l
Q_y
y
K
M_x
z
F
Fl
а)
q
ql
$ql^2/2$
б)
m
в)

Рис. 15

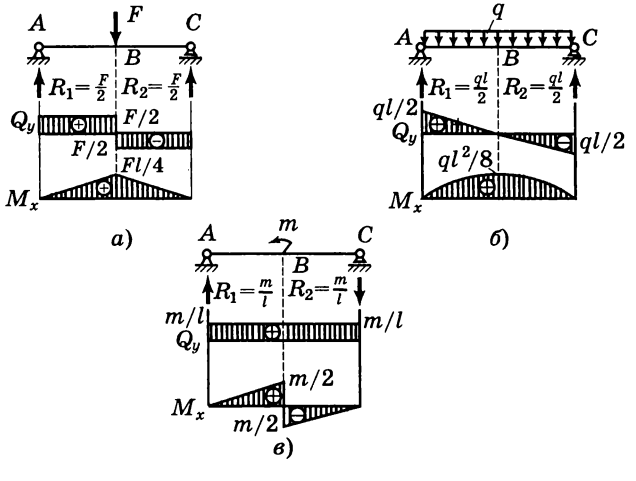

A
B
C
F
$R_1 = \frac{F}{2}$
$R_2 = \frac{F}{2}$
Q_y
$F/2$
$Fl/4$
M_x
а)
q
$R_1 = \frac{ql}{2}$
$R_2 = \frac{ql}{2}$
$ql/2$
$ql^2/8$
б)
m
$R_1 = \frac{m}{l}$
$R_2 = \frac{m}{l}$
m/l
$m/2$
в)

Рис. 16

Для балки на рис. 16, *б*: $Q_y = R_1 - qz = q(l/2 - z)$, $M_x = R_1 z - qz^2/2 = qz(l - z)/2$. Для середины балки имеем $M_x = ql^2/8$.

Для участка *AB* балки на рис. 16, *в*: $Q_y = R_1 = m/l$, $M_x = R_1 z = mz/l$, а для участка *BC*: $Q_y = R_1 = m/l$, $M_x = R_1 z - m = m(z/l - 1)$.

• **Особенности эпюр M_x и Q_y.** Кратко сформулируем качественные особенности эпюр, вытекающие из соотношений (1).

1. На участке балки, свободном от нагрузки ($q = 0$), величина Q_y постоянна, а M_x — линейная функция z.

2. На участке равномерно распределенной нагрузки ($q = \text{const}$), Q_y — линейная функция, а M_x — квадратичная (см. рис. 15, *б*, 16, *б*).

3. В точках приложения сосредоточенной силы величина Q_y претерпевает скачок на величину этой силы, а эпюра M_x имеет излом (рис. 16, *а*).

4. В точках приложения сосредоточенного момента величина M_x претерпевает скачок на величину этого момента (рис. 16, *в*).

В точках экстремумов функции M_x величина $Q_y = 0$ (рис. 16, *б*).

Знание качественных особенностей эпюр позволяет строить эпюры, не находя функциональных зависимостей $Q_y(z)$ и $M_x(z)$, а вычисляя значения Q_y и M_x только на границах характерных участков. Экстремальные значения M_x определяются после нахождения точек экстремума из условий $Q_y = 0$.

5.2. Напряжения и деформации при прямом чистом изгибе

• **Гипотезы чистого изгиба.** Рассмотрим стержень в состоянии чистого изгиба (рис. 17, *а*). В его поперечных сечениях возникает единственный, отличный от нуля силовой фактор — постоянный изгибающий момент $M_x = m$.

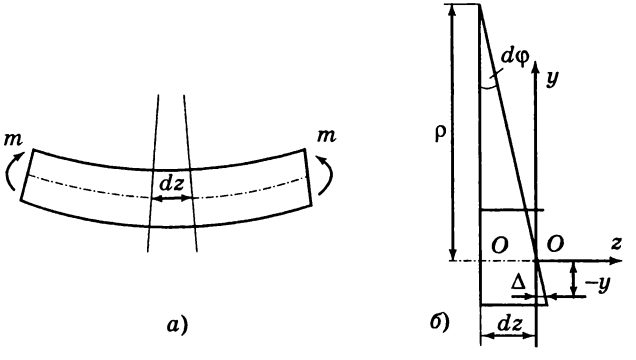


Рис. 17

Будем использовать *гипотезу*[1] *плоских сечений*: плоские до деформации поперечные сечения стержня остаются после деформации плоскими и перпендикулярными деформированной продольной оси.

В соответствии с этой гипотезой два близких сечения поворачиваются относительно друг друга на угол $d\varphi$ (рис. 17, *б*). В результате такой деформации возникает *нейтральный слой*, продольные волокна которого $O—O$ не изменяют своей длины. В нижней части сечения продольные волокна удлиняются (а в верхней — укорачиваются) на величину $\Delta = -y\,d\varphi$. Продольная деформация волокна равна $\varepsilon = \Delta/dz = -y\,d\varphi/(\rho\,d\varphi) = -y/\rho$, где ρ — радиус кривизны нейтрального слоя.

Дополнительно к гипотезе плоских сечений предположим, что продольные волокна стержня не давят друг на друга. Отсюда следует, что они находятся в состоянии одноосного растяжения или сжатия (см. рис. 5).

- **Кривизна оси. Формула для нормальных напряжений.** В соответствии с законом Гука имеем

$$\sigma = E\varepsilon = -\frac{Ey}{\rho}. \qquad (2)$$

[1] Аналогичная гипотеза использовалась в разд. 3.2.

Отсюда следует, что нормальные напряжения σ в поперечном сечении стержня изменяются прямо пропорционально расстоянию y от нейтрального слоя (рис. 18).

Используя формулы (1) гл. 1 и равенство нулю продольной силы, получим

$$N = \int_A \sigma\, dA = -\frac{E}{\rho} \int_A y\, dA = 0,$$

$$M_x = -\int_A \sigma y\, dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2\, dA.$$

Из первого равенства вытекает, что *нейтральная ось* x поперечного сечения проходит через центр тяжести, следовательно, величина ρ есть радиус кривизны изогнутой оси стержня. Из второго равенства выводим формулу, определяющую кривизну оси,

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}, \quad \text{где } I_x = \int_A y^2\, dA. \qquad (3)$$

Величина I_x называется *моментом инерции сечения относительно оси* x (см. часть «Теоретическая механика», разд. 5.1), а произведение EI_x — *жесткостью сечения при изгибе.*

Из (2), (3) получим основную формулу для нормальных напряжений стержня при прямом изгибе

$$\sigma = -\frac{M_x y}{I_x}, \qquad (4)$$

в которой знак «минус» необходим для согласования правила знаков величин σ и M_x. При $M_x > 0$ (рис. 19) верхние волокна сжимаются ($y > 0$, $\sigma < 0$), нижние рас-

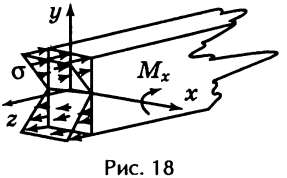


Рис. 18

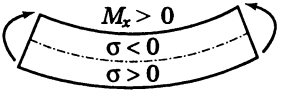


Рис. 19

тягиваются ($y < 0, \sigma > 0$); при $M_x < 0$ знаки напряжений в верхней и нижней частях сечения меняются на противоположные.

5.3. Напряжения и деформации при прямом поперечном изгибе

• **Касательные напряжения. Формула Журавского.** При прямом поперечном изгибе в сечениях стержня возникает не только изгибающий момент M_x, но и поперечная сила Q_y, связанная с касательными напряжениями в сечении формулой

$$Q_y = \int_A \tau_x \, dA.$$

Несмотря на наличие касательных напряжений, формулы (3), (4), полученные для чистого изгиба, применимы и в этом случае.

Для определения касательных напряжений рассмотрим балку на рис. 20, *а*. Вырежем из нее двумя близкими поперечными сечениями и одним продольным малый элемент (рис. 20, *б*). По его боковым граням действуют нормальные напряжения, вычисляемые по формуле (4). Так как изгибающий момент справа больше, чем слева, на величину dM_x, то и нормальное напряжение справа больше на величину $d\sigma = dM_x y / I_x$.

Для того чтобы элемент оставался в равновесии, к его нижней грани должны быть приложены касательные напряжения τ (рис. 20, *б*).

Примем допущение об их равномерном распределении по ширине поперечного сечения. Тогда из условия равновесия элемента в форме равенства нулю суммы проекций всех сил на ось z:

$$\tau b \, dz - \int_{A_{отс}} d\sigma \, dA = 0,$$

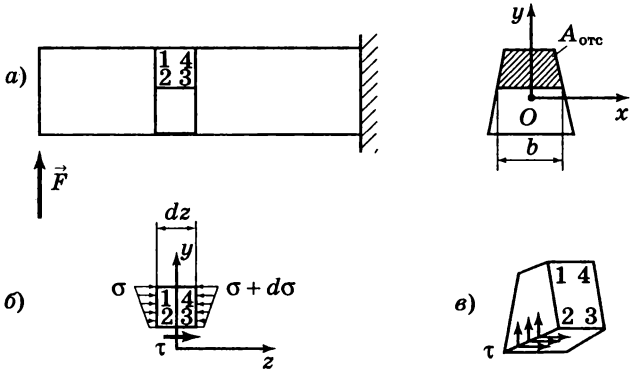


Рис. 20

где интеграл распространен на отсеченную часть поперечного сечения стержня, следует

$$\tau = \frac{\int\limits_{A_{отс}} d\sigma dA}{b dz} = \frac{dM_x}{dz} \frac{\int\limits_{A_{отс}} y dA}{b I_x} .$$

Учитывая второе уравнение (1), для касательных напряжений получим *формулу Журавского*:

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{отс}}{I_x b}, \text{ где } S_x^{ост} = \int\limits_{A_{отс}} y\, dA. \qquad (5)$$

Величина $S_x^{отс}$ называется *статическим моментом отсеченной части поперечного сечения относительно оси x*.

На основании закона парности касательных напряжений (см. разд. 2.1) формула (5) определяет также касательные напряжения в поперечном сечении стержня (рис. 20, *в*).

• **Сечение прямоугольной формы.** В частном случае сечения прямоугольной формы (рис. 21) имеем

$$I_x = \frac{1}{12} bh^3, \quad S_x^{\text{отс}} = y_C A_{\text{ост}} = \frac{1}{2} b \left(\frac{1}{4} h^2 - y^2 \right).$$

Подставляя эти выражения в формулу (5), находим

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b} = \frac{6Q_y}{bh^3}\left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Видно, что величина τ меняется по высоте сечения по закону квадратной параболы, достигая максимального значения при $y = 0$ (т. е. на оси x):

$$\tau_{\max} = \frac{3Q_y}{2bh}. \quad (6)$$

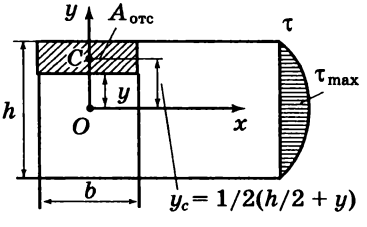


Рис. 21

На рис. 21 показана эпюра касательных напряжений по высоте прямоугольного сечения.

5.4. Расчет на прочность при прямом изгибе

• **Максимальные напряжения.** Из формулы (4) следует, что наибольшие по модулю нормальные напряжения достигаются в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной оси x, при $|y| = y_{\max}$:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x| y_{\max}}{I_x} = \frac{|M_x|}{W_z}, \text{ где } W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}. \quad (7)$$

Величина W_x называется *моментом сопротивления сечения при изгибе* (осевым моментом сопротивления).

Для сечения прямоугольной формы (рис. 21)

$$W_x = \frac{bh^2}{6} \quad \text{и} \quad \sigma_{\max} = \frac{6|M_x|}{bh^2}. \qquad (8)$$

Сопоставим величины $\sigma_{\max}$ и $\tau_{\max}$ для балки прямоугольного сечения. По порядку величины $Q_y \sim F$ и $M_x \sim \sim Fl$, где F — действующая на балку характерная сила, а l — длина балки. Тогда из (6), (8) получим

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} \sim \frac{h}{l} \ll 1.$$

Таким образом, касательные напряжения малы по сравнению с нормальными. Этот вывод справедлив и для стержней других форм поперечного сечения (исключение составляют тонкостенные стержни, когда возможно появление больших касательных напряжений).

- **Условия прочности балок.** Как правило, расчет на прочность для балок проводят по нормальным напряжениям с использованием условия прочности в форме

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} \leqslant [\sigma].$$

Если же материал стержня (например, дерево) плохо сопротивляется сдвиговым деформациям (срезу), то необходим расчет и по касательным напряжениям:

$$\tau_{\max} = \frac{|Q_y|}{I_x}\left(\frac{S_x^{\text{отс}}}{b}\right)_{\max} \leqslant [\tau].$$

В случаях, когда материал, из которого изготовлен стержень, имеет различные допускаемые напряжения при растяжении $[\sigma^{\text{р}}]$ и сжатии $[\sigma^{\text{с}}]$, расчет на прочность проводят отдельно по растягивающим и сжимающим напряжениям:

$$\sigma_{\max}^{\text{р}} = \frac{|M_x| y_{\max}^{\text{р}}}{I_x} \leqslant [\sigma^{\text{р}}], \quad \sigma_{\max}^{\text{с}} = \frac{|M_x| y_{\max}^{\text{с}}}{I_x} \leqslant [\sigma^{\text{с}}],$$

где $y_{\max}^{\text{р}}$ и $y_{\max}^{\text{с}}$ — расстояния от оси x до наиболее удаленных от этой оси точек растянутой и сжатой частей поперечного сечения соответственно.

Как и при растяжении — сжатии или кручении, при расчете на прочность стержней, работающих на изгиб, решается какая-либо из трех задач:

1) проверочный расчет;

2) подбор сечения;

3) определение допускаемой нагрузки.

Все необходимые для расчета на прочность геометрические характеристики прокатных сечений (двутавр, швеллер и т. п.) приводятся в специальных таблицах, называемых сортаментом прокатной стали.

Пример. Для стальной двутавровой балки (№ 55) длиной $l = 3{,}2$ м (см. рис. 16, *б*) из условия прочности определить допускаемую нагрузку $[q]$ при $[\sigma] = 160$ МПа.

Решение. Опасным для рассматриваемой балки будет сечение в середине пролета, где возникнет максимальный изгибающий момент $M_x = ql^2/8$.

В сортаменте прокатной стали находим для двутавра следующий момент сопротивления: $W_x = 2000$ см^3.

Из условия прочности

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{ql^2}{8W_x} \leqslant [\sigma]$$

следует $q \leqslant 8W_x[\sigma]/l^2 = 250$ Н/м. Таким образом, $[q] = 250$ кН/м.

6. Сложное сопротивление

Сложным сопротивлением называются виды деформаций стержня, при которых в его поперечных сечениях одновременно возникает не менее двух отличных от нуля внутренних силовых факторов. Исключением является прямой поперечный изгиб, который рассматривается как простой вид деформации, несмотря на возникающие при этом два силовых фактора — изгибающий момент и поперечную силу, так как в подавляющем большинстве случаев расчеты на прочность и жесткость ведутся без учета влияния поперечных сил, т. е. по одному силовому фактору — изгибающему моменту.

6.1. Косой изгиб

• **Определение.** При рассмотрении прямого поперечного изгиба предполагалось, что поперечное сечение симметрично относительно оси y. Оказывается, все результаты главы 5 справедливы и для сечения произвольной формы, если оси x и y являются *главными центральными осями инерции*, т. е. взаимно перпендикулярными осями, проходящими через центр тяжести сечения, для которых осевые моменты инерции принимают экстремальные значения. В дальнейшем в качестве осей x и y будут выбираться главные центральные оси.

Косым изгибом называется общий случай изгиба стержня (см. разд. 5.1), при котором в поперечном се-

чении возникают два изгибающих момента M_x и M_y и, быть может, поперечные силы Q_x, Q_y.

Пользуясь принципом независимости действия сил, можно определить нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения с координатами x, y по формуле

$$\sigma = -\frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y}, \qquad (1)$$

которая является следствием формулы (4) гл. 5.

- **Нейтральная ось при косом изгибе.** Как и при прямом изгибе, в сечении существует нейтральная ось, в точках которой напряжения равны нулю. Ее уравнение

$$\frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y} = 0. \qquad (2)$$

Перечислим некоторые свойства нейтральной оси при косом изгибе.

1. Нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения.

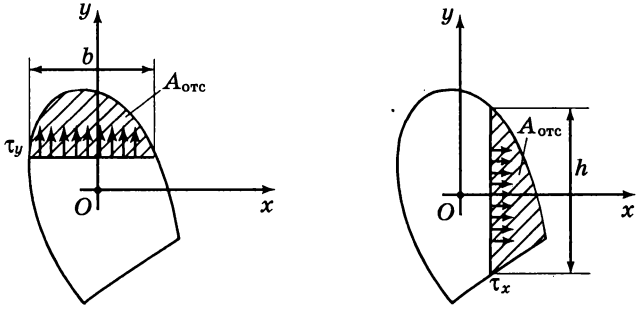
2. Нейтральная ось делит сечение на две части: в одной $\sigma > 0$, в другой $\sigma < 0$.

3. Нормальные напряжения в сечении изменяются прямо пропорционально расстоянию от нейтральной оси, достигая максимальных значений (по модулю) в наиболее удаленных от нейтральной оси точках сечения.

Касательные напряжения τ_y и τ_x в поперечном сечении (рис. 22, *а* и *б*) могут быть определены по формуле (5) гл. 5:

$$\tau_y = \frac{Q_y S_x^{\text{отс}}}{I_x b}, \quad \tau_x = \frac{Q_x S_y^{\text{отс}}}{I_y h}.$$

Как и при прямом поперечном изгибе, касательные напряжения, как правило, играют второстепенную роль, поэтому условия прочности накладывают ограничения на максимальные нормальные напряжения.



а) *б)*

Рис. 22

Пример. Вычислить максимальные нормальные напряжения в опасном сечении балки (рис. 23, *а*), испытывающей косой изгиб. Форма сечения— прямоугольная, $b = 6$ см, $h = 12$ см.

Решение. На рис. 23, *б*, *г* показаны схемы нагружения балки в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а на рис. 23, *в*, *д* — соответствующие эпюры изгибающих моментов M_x, M_y. Судя по эпюрам, опасным сечением является заделка, где $M_x = -20$ кН · м, $M_y = 5$ кН · м.

Для прямоугольного сечения $I_x = bh^3/12$, $I_y = hb^3/12$, и уравнение нейтральной оси (2) для опасного сечения принимает вид $-y + x = 0$.

Из расположения нейтральной линии (рис. 24) видно, что самыми опасными точками сечения являются точки B и C, как наиболее удаленные от нейтральной оси. Подставляя их координаты в (1), вычислим напряжения в этих точках

$$\sigma_B = -\frac{M_x y_B}{I_x} - \frac{M_y x_B}{I_y} = 208 \text{ МПа},$$

$$\sigma_C = -\frac{M_x y_C}{I_x} - \frac{M_y x_C}{I_y} = -208 \text{ МПа}.$$

На рис. 24 изображена эпюра σ, характеризующая изменение нормальных напряжений в направлении, перпендикулярном нейтральной оси.

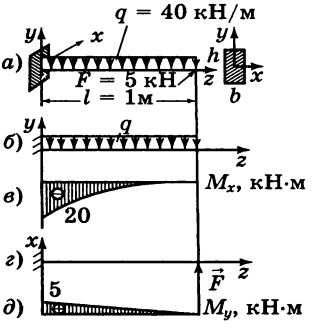


Рис. 23

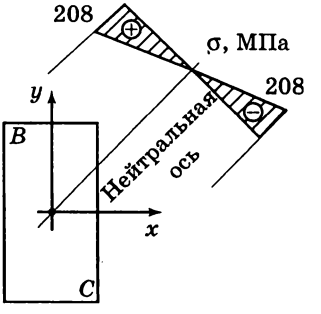


Рис. 24

6.2. Внецентренное растяжение или сжатие

● **Внецентренным растяжением или сжатием** называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечном сечении возникают продольная сила N и изгибающие моменты M_x, M_y (и, быть может, поперечные силы Q_x, Q_y).

Продольная сила и изгибающие моменты могут рассматриваться как результат воздействия на стержень внецентренно приложенной силы $F = N$ (рис. 25). Именно поэтому такой вид сложного сопротивления называют внецентренным растяжением или сжатием.

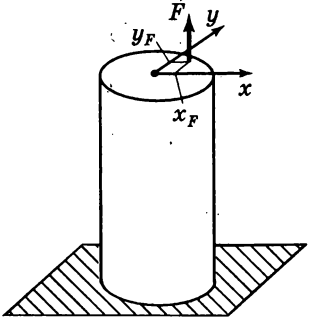


Рис. 25

Изгибающие моменты связаны с координатами точки приложения силы F соотношениями $M_x = -Fy_F$, $M_y = -Fx_F$. Поэтому из (1), формулы (1) гл. 3 и принципа независимости действия сил для нормальных напряжений в произвольной точке любого поперечного сечения с координатами x, y получим

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_x y}{I_x} - \frac{M_y x}{I_y} = F\left(\frac{1}{A} + \frac{y_F y}{I_x} + \frac{x_F x}{I_y}\right). \qquad (3)$$

• **Нейтральная ось при внецентренном растяжении или сжатии.** Уравнение нейтральной оси поперечного сечения, в точках которой напряжения равны нулю, имеет в данном случае вид

$$\frac{1}{A} + \frac{y_F y}{I_x} + \frac{x_F x}{I_y} = 0. \qquad (4)$$

Нетрудно видеть, что нейтральная ось не проходит через центр тяжести сечения. Остальные свойства такие же, как и при косом изгибе. Дополнительно укажем еще одно свойство нейтральной оси при внецентренном растяжении или сжатии: нейтральная ось не пересекает той четверти сечения, в которой приложена сила F.

• **Ядро сечения.** Положение нейтральной оси, как видно из уравнения (4), зависит от координат точки приложения силы F. Если точка приложения силы F располагается достаточно близко к центру тяжести сечения, в области, которая называется *ядром сечения*, то нейтральная ось проходит за пределами поперечного сечения, т. е. все точки сечения испытывают нормальные напряжения одного знака. На рис. 26 показаны ядра для прямоугольного и кругового сечений.

Условия прочности при внецентренном растяжении или сжатии имеют вид ограничений на максимальные нормальные напряжения.

Пример. Вычислить максимальные нормальные напряжения в поперечном сечении внецентренно сжатого стержня прямоугольного сечения при $b = 6$ см, $h = 12$ см (рис. 27, *а*). Точка K приложения силы $F = 144$ кН имеет координаты $x_F = -1$ см, $y_F = 6$ см (рис. 27, *б*).

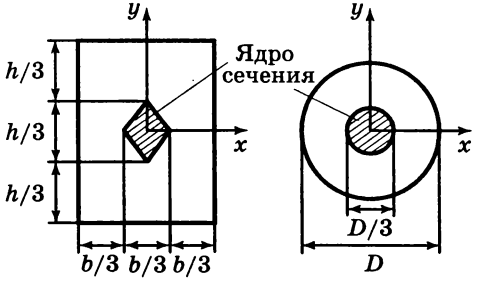


Рис. 26

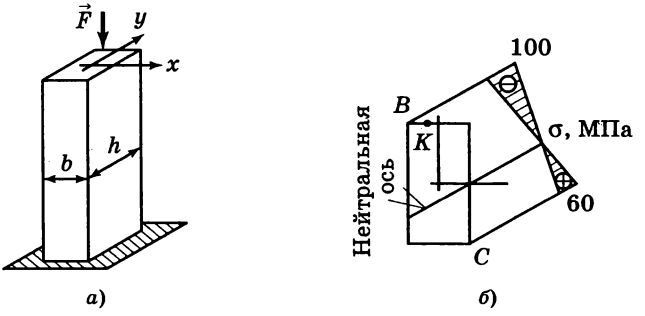


Рис. 27

Решение. Вычислим геометрические характеристики сечения:

$$A = bh = 72 \text{ см}^2,$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = 864 \text{ см}^4,$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = 216 \text{ см}^4.$$

Уравнение нейтральной оси (4) принимает вид $1 + y/2 - x/3 = 0$. Из ее расположения (рис. 27, *б*) видно, что B и C — наиболее напряженные точки сечения. Подставляя в (3) их коор-

динаты, находим напряжения в этих точках (силу F следует взять со знаком «минус», так как ее направление противоположно показанному на рис. 25):

$$\sigma_B = -F\left(\frac{1}{A} + \frac{y_F y_B}{I_x} + \frac{x_F x_B}{I_y}\right) = -100 \text{ МПа},$$

$$\sigma_C = -F\left(\frac{1}{A} + \frac{y_F y_C}{I_x} + \frac{x_F x_C}{I_y}\right) = 60 \text{ МПа}.$$

На рис. 27, *б* построена эпюра σ, показывающая закон распределения нормальных напряжений в направлении, перпендикулярном нейтральной оси.

6.3. Изгиб с кручением

• **Изгибом с кручением** называется такой вид деформации стержня, при котором в его поперечных сечениях возникает крутящий момент M_z, изгибающие моменты M_x, M_y и, быть может, поперечные силы Q_x, Q_y.

Будем рассматривать стержни кругового сечения. Ввиду его симметрии любые две взаимно перпендикулярные центральные оси сечения являются главными. Поэтому их всегда можно выбрать так, чтобы в рассматриваемом сечении суммарный изгибающий момент имел только одну составляющую, например M_x.

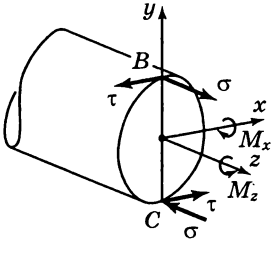


Рис. 28

Наибольшие по модулю нормальные напряжения в сечении определяются по формуле (7) гл. 5 для прямого изгиба

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} \qquad (5)$$

и достигаются в точках B и C, наиболее удаленных от нейтральной оси x (рис. 28).

По формуле (5) гл. 4 находим наибольшие касательные напряжения при кручении

$$\tau_{max} = \frac{|M_z|}{W_p}. \qquad (6)$$

Они возникают в точках границы сечения, в том числе и в точках B и C.

Таким образом, точки B и C наиболее опасны. В их окрестности реализуется плоское напряженное состояние, являющееся комбинацией одноосного растяжения (или сжатия) и чистого сдвига.

- **Условия прочности Сен-Венана и Мизеса.** В отличие от всех видов деформаций, рассмотренных ранее, в данном случае могут быть существенны как σ, так и τ, поэтому возникает вопрос об условии прочности для такого вида напряженного состояния. Существуют различные теории прочности, отвечающие на этот вопрос. Чаще всего применяют условия прочности Сен-Венана

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant [\sigma]$$

или Мизеса

$$\sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leqslant [\sigma].$$

Используя соотношение между моментами сопротивления $W_P = 2W_x$, а также учитывая, что при произвольной ориентации осей x и y в формуле (5) величину M_x следует заменить на суммарный изгибающий момент $M_и = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$, условия прочности приводятся к следующему окончательному виду:

$$\frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}}{W_x} \leqslant [\sigma] \quad \text{(Сен-Венан)},$$

$$\frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75\,M_z^2}}{W_x} \leqslant [\sigma] \quad \text{(Мизес)},$$

где $W_x = \pi D^3/32$ — осевой момент сопротивления для круга диаметра D.

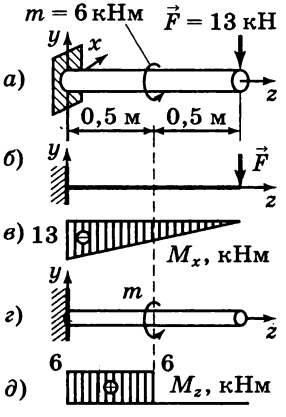


Рис. 29

Пример. Из условия прочности Мизеса подобрать диаметр стального вала, испытывающего изгиб с кручением (рис. 29, *а*). Допускаемое напряжение $[\sigma] = 150$ МПа.

Решение. Схема нагружения вала в вертикальной плоскости и соответствующая эпюра изгибающего момента M_x даны на рис. 29, *б*, *в*.

Схема нагружения вала внешним моментом и эпюра возникающих крутящих моментов M_z показаны на рис. 29, *г*, *д*.

Наиболее опасно сечение в заделке, где возникают максимальный изгибающий $M_x = 13$ кН · м и крутящий $M_z = 6$ кН · м моменты.

Из условия прочности

$$\frac{32\sqrt{M_x^2 + 0,75\,M_z^2}}{\pi D^3} \leqslant [\sigma]$$

находим: $D \geqslant 0,098$ м. Таким образом, можем принять $D = 10$ см.

7. Устойчивость сжатых стержней

7.1. Критическая сила

В разд. 1.1 уже отмечалось, что некоторые состояния равновесия тел или систем оказываются неустойчивыми, т. е. такими, при которых незначительные механические воздействия могут привести к существенным отклонениям от этих состояний. Каждое из этих состояний равновесия характеризуется определенным значением нагрузки, отделяющим области устойчивого и неустойчивого равновесия.

Применительно к сжатому стержню (рис. 30) оказывается, что при величине сжимающей силы F, не превышающей некоторого значения, называемого *критической силой* $F_{кр}$, прямолинейная форма равновесия стержня устойчива. Если же $F > F_{кр}$, то прямолинейная форма равновесия неустойчива, и стержень стремится принять иную, устойчивую форму равновесия с криволинейной осью.

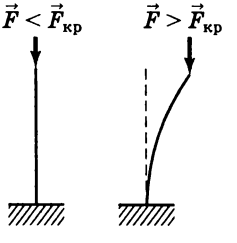


Рис. 30

Сжимающие напряжения $\sigma_{кр} = F_{кр}/A$, соответствующие критической силе, называются *критическими напряжениями*.

7.2. Формула Эйлера

Таким образом, при $F > F_{кр}$ решение задачи о равновесии стержня неединственно. Анализ условий этой неединственности позволяет получить формулу для величины $F_{кр}$.

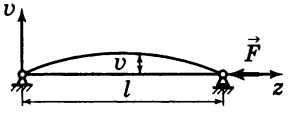


Рис. 31

Рассмотрим шарнирно опертый центрально сжатый стержень в слегка изогнутом состоянии (рис. 31). Изгибающий момент в поперечном сечении стержня равен $M = -Fv$, где прогиб $v(z)$ задает криволинейную ось стержня. Кривизна k изогнутой оси при малых прогибах стержня ($v/l \ll 1$, $v' < 1$) равна

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{v''}{(1+v'^2)^{3/2}} \approx \frac{d^2v}{dz^2}.$$

При анализе деформации изгиба была получена формула (3) гл. 5, связывающая кривизну и изгибающий момент,

$$k = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI},$$

в которой согласованы правила знаков для кривизны $k = 1/\rho$ и момента M.

Отсюда приходим к дифференциальному уравнению изогнутой оси стержня

$$v'' = -a^2 v, \tag{1}$$

где обозначено $a^2 = F/(EI)$.

Граничные условия учитывают закрепления концов стержня:

$$v(0) = v(l) = 0. \tag{2}$$

Уравнение (1) при граничных условиях (2) имеет очевидное тривиальное решение $v = 0$, соответствующее прямолинейной форме равновесия. Нас интересуют ненулевые решения.

Общий интеграл уравнения (1) имеет вид

$$v = C_1 \sin(az) + C_2 \cos(az).$$

Из первого граничного условия следует, что $C_2 = 0$, а из второго — $C_1 \sin(al) = 0$. Сокращая на $C_1 \neq 0$, приходим к равенству

$$\sin(al) = 0,$$

которое будет выполнено, если $al = \pi n$ или

$$F = \frac{\pi^2 n^2 EI}{l^2} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Таким образом, установлено, что если величина сжимающей силы F принимает дискретные значения, определяемые формулой (3), то наряду с прямолинейным возможны искривленные состояния равновесия стержня, имеющие форму синусоиды

$$v = C_1 \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right).$$

Из (3) при $n = 1$ получаем *формулу Эйлера* для критической силы

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2}. \tag{4}$$

Более точная теория показывает, что неоднозначность форм равновесия имеет место при всех силах F, превышающих эйлерову силу (4).

7.3. Влияние способов закрепления концов стержня на величину критической силы

Можно рассмотреть аналогичные задачи для других случаев закрепления концов стержня (рис. 32). Их решение показывает, что критическую силу можно определять по формуле, подобной (4):

$$F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2}, \tag{5}$$

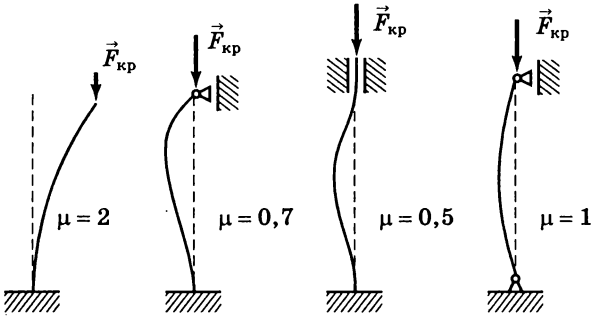


Рис. 32

введя понятие *приведенной длины* μl и *коэффициента приведенной длины* μ.

Величину μl можно истолковать как часть длины стержня, на которой укладывается полуволна синусоиды, соответствующей его искривленной оси. Значения коэффициента μ для некоторых случаев закрепления стержня даны на рис. 32.

Пример. Найти критическую силу для стального стержня длиной $l = 4$ м (рис. 32), жестко заделанного одним концом. Сечение стержня — двутавр № 22.

Решение. По сортаменту находим для данного двутавра моменты инерции $I_x = 2550$ см^4, $I_y = 157$ см^4. Естественно, что стержень теряет устойчивость в плоскости наименьшей жесткости, поэтому следует выбрать наименьший момент инерции $I_{min} = I_y = 157$ см^4.

Для заданного закрепления коэффициент $\mu = 2$, модуль упругости стали $E = 210$ ГПа.

По формуле Эйлера (5) получим $F_{кр} = \dfrac{\pi^2 E I_{min}}{(\mu l)^2} = 50{,}8$ кН.

7.4. Пределы применимости формулы Эйлера

Критические напряжения, соответствующие критической силе (5), равны

$$\sigma_{кр} = \frac{F_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 E}{(\mu l/i)^2},$$

где $i = \sqrt{I/A}$ — радиус инерции сечения.

Введем обозначение $\lambda = \mu l/i$. Тогда предыдущая формула принимает вид

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \qquad (6)$$

Величина λ называется *гибкостью стержня*.

Из (6) следует, что с уменьшением гибкости значение $\sigma_{кр}$ неограниченно возрастает. Ясно, что формулой (6) нельзя пользоваться при слишком больших напряжениях, так как материал стержня в этих условиях не подчиняется закону Гука.

Величина наибольшего напряжения, при котором справедлив закон Гука, называется *пределом пропорциональности* и обозначается $\sigma_{пц}$.

Пределы применимости формулы Эйлера устанавливаются неравенством $\sigma_{кр} < \sigma_{пц}$ или $\pi^2 E/\lambda^2 < \sigma_{пц}$. В результате получим $\lambda > \lambda_0 = \pi\sqrt{E/\sigma_{пц}}$.

Зависимость $\sigma_{кр}$ от λ при $\lambda < \lambda_0$ находят экспериментальным путем. На рис. 33 схематически сплошной линией показан полный график зависимости $\sigma_{кр}(\lambda)$. При очень малых гибкостях стержень при сжатии теряет прочность, поэтому критические напряжения практически равны соответствующим напряжениям потери прочности.

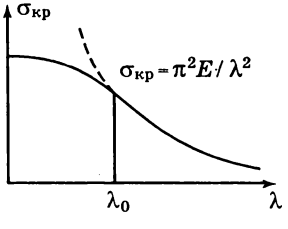


Рис. 33

7.5. Расчеты сжатых стержней на устойчивость

На практике необходимо обеспечить устойчивую работу сжатых стержней, поэтому напряжения в стержне не должны превосходить критических с некоторым запасом:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leqslant \frac{\sigma_{кр}}{n}, \qquad (7)$$

где n — коэффициент запаса.

Для удобства вводится *коэффициент продольного изгиба* $\varphi = \sigma_{кр}/(n[\sigma])$. Тогда условие (7) принимает вид

$$\frac{F}{A} \leqslant [\sigma]\varphi. \qquad (8)$$

Зависимости $\varphi(\lambda)$ для разных материалов приводятся в справочниках в виде таблиц.

Пользуясь условием (8), можно решать те же задачи, что и при расчете на прочность (см. разд. 3.3).

Список литературы к разделу «Сопротивление материалов»

Беляев Н. М. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1976. — 607 с.

Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 560 с.

Гастев В. А. Краткий курс сопротивления материалов. — М.: Наука, 1977. — 456 с.

Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 1989. — 622 с.

Иосилевич Г. Б. и др. Прикладная механика. — М.: Машиностроение, 1985. — 575 с.

Кинасошвили Р. С. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1976. — 607 с.

Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Наука, 1988. — 711 с.

Сопротивление материалов. / Под ред. Писаренко Г. С. — Киев: Высшая школа, 1986. — 775 с.

Сопротивление материалов. / Под ред. Смирнова А. Ф. — М.: Высшая школа, 1975. — 480 с.

Степин П. А. Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 1988. — 366 с.

Терегулов И. Г. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. — М.: Высшая школа, 1984. — 472 с.

Тимошенко С. П. Механика материалов. — М.: Мир, 1976. — 669 с.

Толоконников Л. А. Механика деформируемого твердого тела. — М.: Высшая школа, 1979. — 318 с.

Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986. — 512 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Элементарные функции и их свойства

В приложении 1 обычно считается, что n — целое положительное число (другие случаи специально оговариваются).

1.1. Тригонометрические функции

- **Простейшие соотношения.**

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = 1,$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \qquad \cos(-x) = \cos x,$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \qquad \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x,$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

- **Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента.**

$$\sin x = \pm\sqrt{1 - \cos^2 x} = \pm\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}},$$

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x} = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \pm\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}},$$

$$\operatorname{tg} x = \pm\frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \pm\frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x},$$

$$\operatorname{ctg} x = \pm\frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x} = \pm\frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{1}{\operatorname{tg} x}.$$

- **Формулы сложения.**

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y,$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}.$$

- **Формулы приведения.**

$$\sin(x \pm n\pi) = (-1)^n \sin x,$$

$$\cos(x \pm n\pi) = (-1)^n \cos x,$$

$$\sin\left(x \pm \frac{2n+1}{2}\pi\right) = \pm(-1)^n \cos x,$$

$$\cos\left(x \pm \frac{2n+1}{2}\pi\right) = \mp(-1)^n \sin x,$$

$$\operatorname{tg}(x \pm n\pi) = \operatorname{tg} x,$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm n\pi) = \operatorname{ctg} x,$$

$$\operatorname{tg}\left(x \pm \frac{2n+1}{2}\pi\right) = -\operatorname{ctg} x,$$

$$\operatorname{ctg}\left(x \pm \frac{2n+1}{2}\pi\right) = -\operatorname{tg} x,$$

$$\sin\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x \pm \cos x),$$

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x \mp \sin x),$$

$$\operatorname{tg}\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} x \pm 1}{1 \mp \operatorname{tg} x},$$

$$\operatorname{ctg}\left(x \pm \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{ctg} x \mp 1}{1 \pm \operatorname{ctg} x}.$$

- **Суммы и разности тригонометрических функций.**

$$\sin x + \sin y = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\sin^2 x - \sin^2 y = \cos^2 y - \cos^2 x = \sin(x+y)\sin(x-y),$$

$$\sin^2 x - \cos^2 y = -\cos(x+y)\cos(x-y),$$

$$\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}, \quad \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \frac{\sin(y \pm x)}{\sin x \sin y},$$

$$a\cos x + b\sin x = r\sin(x+\varphi) = r\cos(x-\psi),$$

где $r = \sqrt{a^2+b^2}$, $\sin\varphi = a/r$, $\cos\varphi = b/r$, $\sin\psi = b/r$, $\cos\psi = a/r$.

- **Произведения тригонометрических функций.**

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)],$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) + \cos(x+y)],$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x-y) + \sin(x+y)].$$

- **Степени тригонометрических функций.**

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2},$$

$$\sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2},$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x,$$

$$\sin^3 x = -\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x,$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8},$$

$$\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8},$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x,$$

$$\sin^5 x = \frac{1}{16}\sin 5x - \frac{5}{16}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x,$$

$$\cos^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^k \cos[2(n-k)x] + \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n,$$

$$\cos^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^k \cos[(2n-2k+1)x],$$

$$\sin^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} C_{2n}^k \cos[(2(n-k)x] + \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n,$$

$$\sin^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_{2n+1}^k \sin[(2n-2k+1)x],$$

где $C_m^k = \dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ — биномиальные коэффициенты ($0! = 1$).

- **Тригонометрические функции кратных аргументов.**

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x,$
$\sin 2x = 2\sin x\cos x,$
$\cos 3x = -3\cos x + 4\cos^3 x,$
$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x,$
$\cos 4x = 1 - 8\cos^2 x + 8\cos^4 x,$
$\sin 4x = 4\cos x(\sin x - 2\sin^3 x),$
$\cos 5x = 5\cos x - 20\cos^3 x + 16\cos^5 x,$
$\sin 5x = 5\sin x - 20\sin^3 x + 16\sin^5 x,$

$$\cos(2nx) = 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-k(k-1)^2]}{(2k)!} 4^k \sin^{2k} x,$$

$$\cos[2(n+1)x] = \cos x\left\{1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \times\right.$$

$$\left.\times \frac{[(2n+1)^2-1][(2n+1)^2-3^2]\ldots[(2n+1)^2-(2k-1)^2]}{(2k)!}\sin^{2k} x\right\},$$

$$\sin(2nx) = 2n\cos x\left[\sin x + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} (-4)^k \frac{(n^2-1)(n^2-2^2)\ldots(n^2-k^2)}{(2k-1)!} \sin^{2k-1} x\right],$$

$$\sin[2(n+1)x] = (2n+1)\left\{\sin x + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{[(2n+1)^2-1][(2n+1)^2-3^2]\ldots[(2n+1)^2-(2k-1)^2]}{(2k+1)!} \times$$

$$\left. \times \sin^{2k+1} x\right\},$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x},\ \operatorname{tg} 3x = \frac{3\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x},\ \operatorname{tg} 4x = \frac{4\operatorname{tg} x - 4\operatorname{tg}^3 x}{1-6\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}.$$

- **Тригонометрические формулы с половинными углами.**

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}, \quad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x},$$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

- **Формулы Эйлера и Муавра, связь с гиперболическими функциями.**

$$e^{y+ix} = e^y(\cos x + i\sin x),\ i^2 = -1,$$

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos(nx) + i\sin(nx),$$

$$\sin(ix) = i\operatorname{sh} x,\ \cos(ix) = \operatorname{ch} x,\ \operatorname{tg}(ix) = i\operatorname{th} x,\ \operatorname{ctg}(ix) = -i\operatorname{cth} x.$$

1.2. Гиперболические функции

- **Определения.**

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

- **Простейшие соотношения.**

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \qquad \operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1,$$

$$\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x, \qquad \operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \qquad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},$$

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x, \qquad \operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x,$$

$$1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \qquad \operatorname{cth}^2 x - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

- **Соотношения между гиперболическими функциями одного аргумента.**

$$\operatorname{sh} x = \pm\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1} = \pm\frac{\operatorname{th} x}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \pm\frac{1}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}},$$

$$\operatorname{ch} x = \sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{th}^2 x}} = \pm\frac{\operatorname{cth} x}{\sqrt{\operatorname{cth}^2 x - 1}},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}} = \pm\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}}{\operatorname{ch} x} = \frac{1}{\operatorname{cth} x},$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + 1}}{\operatorname{sh} x} = \pm\frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\operatorname{th} x}.$$

- **Формулы сложения.**

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}, \quad \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cth} x \operatorname{cth} y \pm 1}{\operatorname{cth} y \pm \operatorname{cth} x}.$$

- **Суммы и разности гиперболических функций.**

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2\operatorname{sh}\left(\frac{x \pm y}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x \mp y}{2}\right),$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2\operatorname{ch}\left(\frac{x + y}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x - y}{2}\right),$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh}\left(\frac{x+y}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = \operatorname{sh}(x+y) \operatorname{sh}(x-y),$$

$$\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 y = \operatorname{ch}(x+y) \operatorname{ch}(x-y),$$

$$\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y = \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y}, \quad \operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y = \pm \frac{\operatorname{sh}(x \pm y)}{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}.$$

- **Произведения гиперболических функций.**

$$\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(x+y) - \operatorname{ch}(x-y)],$$

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(x+y) + \operatorname{ch}(x-y)],$$

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \frac{1}{2} [\operatorname{sh}(x+y) + \operatorname{sh}(x-y)].$$

- **Степени гиперболических функций.**

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x + \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x - \frac{1}{2},$$

$$\operatorname{ch}^3 x = \frac{1}{4} \operatorname{ch} 3x + \frac{3}{4} \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{sh}^3 x = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 3x - \frac{3}{4} \operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{ch}^4 x = \frac{1}{8} \operatorname{ch} 4x + \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x + \frac{3}{8},$$

$$\operatorname{sh}^4 x = \frac{1}{8} \operatorname{ch} 4x - \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x + \frac{3}{8},$$

$$\operatorname{ch}^5 x = \frac{1}{16} \operatorname{ch} 5x + \frac{5}{16} \operatorname{ch} 3x + \frac{5}{8} \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{sh}^5 x = \frac{1}{16} \operatorname{sh} 5x - \frac{5}{16} \operatorname{sh} 3x + \frac{5}{8} \operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{ch}^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{k} \operatorname{ch}[2(n-k)x] + \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^{n},$$

$$\operatorname{ch}^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{k} \operatorname{ch}[(2n-2k+1)x],$$

$$\operatorname{sh}^{2n} x = \frac{1}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{2n}^{k} \operatorname{ch}[(2(n-k)x] + \frac{(-1)^n}{2^{2n}} C_{2n}^{n},$$

$$\operatorname{sh}^{2n+1} x = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_{2n+1}^{k} \operatorname{sh}[(2n-2k+1)x].$$

- **Гиперболические функции кратных аргументов.**

$\operatorname{ch} 2x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1,$

$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x,$

$\operatorname{ch} 3x = -3\operatorname{ch} x + 4\operatorname{ch}^3 x,$

$\operatorname{sh} 3x = 3\operatorname{sh} x + 4\operatorname{sh}^3 x,$

$\operatorname{ch} 4x = 1 - 8\operatorname{ch}^2 x + 8\operatorname{ch}^4 x,$

$\operatorname{sh} 4x = 4\operatorname{ch} x\,(\operatorname{sh} x + 2\operatorname{sh}^3 x),$

$\operatorname{ch} 5x = 5\operatorname{ch} x - 20\operatorname{ch}^3 x + 16\operatorname{ch}^5 x,$

$\operatorname{sh} 5x = 5\operatorname{sh} x + 20\operatorname{sh}^3 x + 16\operatorname{sh}^5 x.$

$$\operatorname{ch}(nx) = 2^{n-1}\operatorname{ch}^n x + \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} C_{n-k-2}^{k-2}\, 2^{n-2k-2} (\operatorname{ch} x)^{n-2k-2},$$

$$\operatorname{sh}(nx) = \operatorname{sh} x \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} 2^{n-k-1} C_{n-k-1}^{k} (\operatorname{ch} x)^{n-2k-1},$$

где C_m^k — биномиальные коэффициенты, $[A]$ обозначает целую часть числа A.

- **Связь с тригонометрическими функциями.**

$$\operatorname{sh}(ix) = i\sin x, \quad \operatorname{ch}(ix) = \cos x, \quad i^2 = -1,$$
$$\operatorname{th}(ix) = i\operatorname{tg} x, \operatorname{cth}(ix) = -i\operatorname{ctg} x.$$

1.3. Обратные тригонометрические функции

● **Простейшие соотношения.** Главные значения обратных тригонометрических функций определяются неравенствами

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi, \quad \text{где } -1 \leqslant x \leqslant 1,$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi, \quad \text{где } -\infty < x < +\infty.$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, \qquad \arccos(-x) = \pi - \arccos x,$$
$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, \qquad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x,$$
$$\sin(\arcsin x) = x, \qquad \cos(\arccos x) = x,$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \qquad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x,$$

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2n\pi & \text{при } 2n\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2n\pi + \frac{\pi}{2}, \\ -x + 2(n+1)\pi & \text{при } (2n+1)\pi - \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 2(n+1)\pi + \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2n\pi & \text{при } 2n\pi \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi, \\ -x + 2(n+1)\pi & \text{при } (2n+1)\pi \leqslant x \leqslant 2(n+1)\pi. \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - n\pi \quad \text{при } n\pi - \frac{\pi}{2} < x < n\pi + \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x - n\pi \quad \text{при } n\pi < x < (n+1)\pi.$$

● **Соотношения между обратными тригонометрическими функциями.**

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \qquad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2};$$

$$\arcsin x = \begin{cases} \arccos\sqrt{1-x^2} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\arccos\sqrt{1-x^2} & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{при } -1 < x < 1, \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi & \text{при } -1 \leqslant x < 0; \end{cases}$$

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2} & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{при } -1 < x < 1; \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} & x \text{ — любое}, \\ \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{при } x \geqslant 0, \\ -\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{при } x \leqslant 0, \\ \operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x} & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$\operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{при } x > 0, \\ \pi - \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{при } x < 0, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} & \text{при } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

- **Суммы и разности обратных тригонометрических функций.**

$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-y^2})$ при $x^2 + y^2 \leqslant 1$,

$\arccos x + \arccos y = \arccos[xy - \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}]$ при $x + y \geqslant 0$,

$\arccos x - \arccos y = -\arccos[xy + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}]$ при $x - y \geqslant 0$,

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} \quad \text{при } xy < 1,$$

$$\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy} \quad \text{при } xy > -1.$$

1.4. Обратные гиперболические функции

- **Связь с логарифмической функцией, простейшие соотношения.**

$$\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad \operatorname{Arch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2-1}),$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \qquad \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{x-1},$$

$$\operatorname{Arsh}(-x) = -\operatorname{Arsh} x, \qquad \operatorname{Arch}(-x) = \operatorname{Arch} x,$$

$$\operatorname{Arth}(-x) = -\operatorname{Arth} x, \qquad \operatorname{Arcth}(-x) = -\operatorname{Arcth} x.$$

- **Соотношения между обратными гиперболическими функциями.**

$$\operatorname{Arsh} x = \operatorname{Arch} \sqrt{x^2+1} = \operatorname{Arth} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\operatorname{Arch} x = \operatorname{Arsh} \sqrt{x^2-1} = \operatorname{Arth} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x},$$

$$\operatorname{Arth} x = \operatorname{Arsh} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arch} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcth} \frac{1}{x}.$$

- **Суммы и разности обратных гиперболических функций.**

$$\operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arsh} y = \operatorname{Arsh}(x\sqrt{1+y^2} \pm y\sqrt{1+x^2}),$$

$$\operatorname{Arch} x \pm \operatorname{Arch} y = \operatorname{Arch}[xy \pm \sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}],$$

$$\operatorname{Arsh} x \pm \operatorname{Arch} y = \operatorname{Arsh}[xy \pm \sqrt{(x^2+1)(y^2-1)}],$$

$$\operatorname{Arth} x \pm \operatorname{Arth} y = \operatorname{Arth} \frac{x \pm y}{1 \pm xy},$$

$$\operatorname{Arth} x \pm \operatorname{Arcth} y = \operatorname{Arth} \frac{xy \pm 1}{y \pm x}.$$

2. Таблица неопределенных интегралов

2.1. Интегралы, содержащие рациональные функции

- **Интегралы[1], содержащие целые степени $a + bx$.**

1. $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \ln|a+bx|.$

2. $\int (a+bx)^n\,dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}, \quad n \neq -1.$

3. $\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}(a+bx-a\ln|a+bx|).$

4. $\int \frac{x^2dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln|a+bx|\right].$

5. $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|.$

6. $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|.$

7. $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\ln|a+bx| + \frac{a}{a+bx}\right).$

8. $\int \frac{x^2dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^3}\left(a+bx-2a\ln|a+bx| - \frac{a^2}{a+bx}\right).$

9. $\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right|.$

10. $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^3} = \frac{1}{b^2}\left[-\frac{1}{a+bx} + \frac{a}{2(a+bx)^2}\right].$

---

[1] Во всех интегралах постоянная интегрирования C для краткости опускается.

- **Интегралы, содержащие $a + x$ и $b + x$.**

11. $\int \frac{a+x}{b+x}\,dx = x + (a-b)\ln|b+x|.$

12. $\int \frac{dx}{(a+x)(b+x)} = \frac{1}{a-b}\ln\left|\frac{b+x}{a+x}\right|$, $a \neq b$. При $a = b$ см. интеграл 2 при $n = -2$.

13. $\int \frac{x\,dx}{(a+x)(b+x)} = \frac{1}{a-b}(a\ln|a+x| - b\ln|b+x|).$

14. $\int \frac{dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{1}{(b-a)(b+x)} + \frac{1}{(a-b)^2}\ln\left|\frac{a+x}{b+x}\right|.$

15. $\int \frac{x\,dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b}{(a-b)(b+x)} - \frac{a}{(a-b)^2}\ln\left|\frac{a+x}{b+x}\right|.$

16. $\int \frac{x^2dx}{(a+x)(b+x)^2} = \frac{b^2}{(b-a)(b+x)} + \frac{a^2}{(a-b)^2}\ln|a+x| + \frac{b^2-2ab}{(b-a)^2}\ln|b+x|.$

17. $\int \frac{dx}{(a+b)^2(b+x)^2} = -\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{b+x}\right) + \frac{2}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{a+x}{b+x}\right|.$

18. $\int \frac{x\,dx}{(a+b)^2(b+x)^2} = \frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a}{a+x} + \frac{b}{b+x}\right) + \frac{a+b}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{a+x}{b+x}\right|.$

19. $\int \frac{x^2dx}{(a+b)^2(b+x)^2} = -\frac{1}{(a-b)^2}\left(\frac{a^2}{a+x} + \frac{b^2}{b+x}\right) + \frac{2ab}{(a-b)^3}\ln\left|\frac{a+x}{b+x}\right|.$

- **Интегралы, содержащие $a^2 + x^2$.**

20. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

21. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}.$

22. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^3} = \frac{x}{4a^2(a^2+x^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(a^2+x^2)} + \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

23. $\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} = \frac{x}{2na^2(a^2+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$;
$n = 1, 2, \ldots$

24. $\int \frac{xdx}{a^2+x^2} = \frac{1}{2} \ln (a^2+x^2)$.

25. $\int \frac{xdx}{(a^2+x^2)^2} = -\frac{1}{2(a^2+x^2)}$.

26. $\int \frac{xdx}{(a^2+x^2)^3} = -\frac{1}{4(a^2+x^2)^2}$.

27. $\int \frac{xdx}{(a^2+x^2)^{n+1}} = -\frac{1}{2n(a^2+x^2)^n}$; $n = 1, 2, \ldots$.

28. $\int \frac{x^2dx}{a^2+x^2} = x - a \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

29. $\int \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^2} = -\frac{x}{2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

30. $\int \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^3} = -\frac{x}{4(a^2+x^2)^2} + \frac{x}{8a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{8a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

31. $\int \frac{x^2dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} = -\frac{x}{2n(a^2+x^2)^n} + \frac{1}{2n} \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}$; $n = 1, 2, \ldots$.

32. $\int \frac{x^3dx}{a^2+x^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln (a^2+x^2)$.

33. $\int \frac{x^3dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{a^2}{2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2} \ln (a^2+x^2)$.

34. $\int \frac{x^3dx}{(a^2+x^2)^{n+1}} = -\frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{a^2}{2n(a^2+x^2)^n}$;
$n = 2, 3, \ldots$.

35. $\int \frac{dx}{x(a^2+x^2)} = \frac{1}{2a^2} \ln \frac{x^2}{a^2+x^2}$.

36. $\int \frac{dx}{x(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^4} \ln \frac{x^2}{a^2+x^2}$.

37. $\int \frac{dx}{x(a^2+x^2)^3} = \frac{1}{4a^2(a^2+x^2)^2} + \frac{1}{2a^4(a^2+x^2)} +$
$+ \frac{1}{2a^6} \ln \frac{x^2}{a^2+x^2}$.

38. $\int \frac{dx}{x^2(a^2+x^2)} = -\frac{1}{a^2x} - \frac{1}{a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

39. $\int \frac{dx}{x^2(a^2+x^2)^2} = -\frac{1}{a^4x} - \frac{x}{2a^4(a^2+x^2)} - \frac{3}{2a^5}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

40. $\int \frac{dx}{x^3(a^2+x^2)^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^4(a^2+x^2)} - \frac{1}{a^6}\ln\frac{x^2}{a^2+x^2}$.

41. $\int \frac{dx}{x^2(a^2+x^2)^3} = -\frac{1}{a^6x} - \frac{x}{4a^4(a^2+x^2)^2} - \frac{7x}{8a^6(a^2+x^2)} - \frac{15}{8a^7}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

42. $\int \frac{dx}{x^3(a^2+x^2)^3} = -\frac{1}{2a^6x^2} - \frac{1}{a^6(a^2+x^2)} - \frac{1}{4a^4(a^2+x^2)^2} - \frac{3}{2a^8}\ln\frac{x^2}{a^2+x^2}$.

- **Интегралы, содержащие $a^2 - x^2$.**

43. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$.

44. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$.

45. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^3} = \frac{x}{4a^2(a^2-x^2)^2} + \frac{3x}{8a^4(a^2-x^2)} + \frac{3}{16a^5}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$.

46. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{n+1}} = \frac{x}{2na^2(a^2-x^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\int\frac{dx}{(a^2-x^2)^n}$;
$n = 1, 2, \ldots$.

47. $\int \frac{x\,dx}{a^2-x^2} = -\frac{1}{2}\ln|a^2-x^2|$.

48. $\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{1}{2(a^2-x^2)}$.

49. $\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^3} = \frac{1}{4(a^2-x^2)^2}$.

50. $\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2n(a^2-x^2)^n}$; $n = 1, 2, \ldots$.

51. $\int \frac{x^2dx}{a^2-x^2} = -x + \frac{a}{2}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$.

52. $\int \frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2(a^2-x^2)} - \frac{1}{4a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$.

53. $\int \frac{x^3dx}{(a^2-x^2)^3} = \frac{x}{4(a^2-x^2)^2} - \frac{x}{8a^2(a^2-x^2)} - \frac{1}{16a^3}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$.

54. $\int \frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^{n+1}} = \frac{x}{2n(a^2-x^2)^n} - \frac{1}{2n}\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^n}$; $n=1, 2, \ldots$.

55. $\int \frac{x^3dx}{a^2-x^2} = -\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln|a^2-x^2|$.

56. $\int \frac{x^3dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{a^2}{2(a^2-x^2)} + \frac{1}{2}\ln|a^2-x^2|$.

57. $\int \frac{x^3dx}{(a^2-x^2)^{n+1}} = -\frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{a^2}{2n(a^2-x^2)^n}$;
$n = 2, 3, \ldots$.

58. $\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left|\frac{x^2}{a^2-x^2}\right|$.

59. $\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^2} = \frac{1}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left|\frac{x^2}{a^2-x^2}\right|$.

60. $\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^3} = \frac{1}{4a^2(a^2-x^2)^2} + \frac{1}{2a^4(a^2-x^2)} +$
$+ \frac{1}{2a^6}\ln\left|\frac{x^2}{a^2-x^2}\right|$.

- **Интегралы, содержащие $a^3 + x^3$.**

61. $\int \frac{dx}{a^3+x^3} = \frac{1}{6a^2}\ln\frac{(a+x)^2}{a^2-ax+x^2} + \frac{1}{a^3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$.

62. $\int \frac{dx}{(a^3+x^3)^2} = \frac{x}{3a^3(a^3+x^3)} + \frac{2}{3a^3}\int \frac{dx}{a^3+x^3}$.

63. $\int \frac{xdx}{a^3+x^3} = \frac{1}{6a}\ln\frac{a^2-ax+x^2}{(a+x)^2} + \frac{1}{a\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$.

64. $\int \frac{xdx}{(a^3+x^3)^2} = \frac{x^2}{3a^3(a^3+x^3)} + \frac{1}{3a^3}\int \frac{xdx}{a^3+x^3}$.

65. $\int \frac{x^2dx}{a^3+x^3} = \frac{1}{3}\ln|a^3+x^3|$.

66. $\int \frac{dx}{x(a^3+x^3)} = \frac{1}{3a^3} \ln\left|\frac{x^3}{a^3+x^3}\right|.$

67. $\int \frac{dx}{x(a^3+x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3+x^3)} + \frac{1}{3a^6} \ln\left|\frac{x^3}{a^3+x^3}\right|.$

68. $\int \frac{dx}{x^2(a^3+x^3)} = -\frac{1}{a^3x} - \frac{1}{a^3}\int \frac{xdx}{a^3+x^3}.$

69. $\int \frac{dx}{x^2(a^3+x^3)^2} = -\frac{1}{a^6x} - \frac{x^2}{3a^6(a^3+x^3)} - \frac{4}{3a^6}\int \frac{xdx}{a^3+x^3}.$

- **Интегралы, содержащие $a^3 - x^3$.**

70. $\int \frac{dx}{a^3-x^3} = \frac{1}{6a^2} \ln \frac{a^2+ax+x^2}{(a-x)^2} + \frac{1}{a_2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+a}{a\sqrt{3}}.$

71. $\int \frac{dx}{(a^3-x^3)^2} = \frac{x}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{2}{3a^3}\int \frac{dx}{a^3-x^3}.$

72. $\int \frac{xdx}{a^3-x^3} = \frac{1}{6a} \ln \frac{a^2+ax+x^2}{(a-x)^2} - \frac{1}{a\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+a}{a\sqrt{3}}.$

73. $\int \frac{xdx}{(a^3-x^3)^2} = \frac{x^2}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^3}\int \frac{xdx}{a^3-x^3}.$

74. $\int \frac{x^2dx}{a^3-x^3} = -\frac{1}{3} \ln|a^3-x^3|.$

75. $\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)} = \frac{1}{3a^3} \ln\left|\frac{x^3}{a^3-x^3}\right|.$

76. $\int \frac{dx}{x(a^3-x^3)^2} = \frac{1}{3a^3(a^3-x^3)} + \frac{1}{3a^6} \ln\left|\frac{x^3}{a^3-x^3}\right|.$

77. $\int \frac{dx}{x^2(a^3-x^3)} = -\frac{1}{a^3x} + \frac{1}{a^3}\int \frac{xdx}{a^3-x^3}.$

78. $\int \frac{dx}{x^2(a^3-x^3)^2} = -\frac{1}{a^6x} - \frac{x^2}{3a^6(a^3-x^3)} + \frac{4}{3a^6}\int \frac{xdx}{a^3-x^3}.$

- **Интегралы, содержащие $a^4 \pm x^4$.**

79. $\int \frac{dx}{a^4+x^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}} \ln \frac{a^2+ax\sqrt{2}+x^2}{a^2-ax\sqrt{2}+x^2} + \frac{1}{2a^3\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}.$

80. $\int \frac{xdx}{a^4+x^4} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{a^2}.$

81. $\int \frac{x^2dx}{a^4+x^4} = -\frac{1}{4a\sqrt{2}} \ln \frac{a^2+ax\sqrt{2}+x^2}{a^2-ax\sqrt{2}+x^2} + \frac{1}{2a\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{ax\sqrt{2}}{a^2-x^2}$.

82. $\int \frac{dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^3} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

83. $\int \frac{xdx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a^2} \ln\left|\frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}\right|$.

84. $\int \frac{x^2dx}{a^4-x^4} = \frac{1}{4a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| - \frac{1}{2a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

85. $\int \frac{dx}{x(a+bx^m)} = \frac{1}{am} \ln\left|\frac{x^m}{a+bx^m}\right|$.

2.2. Интегралы, содержащие иррациональные функции

- **Интегралы, содержащие $x^{1/2}$.**

1. $\int \frac{x^{1/2}dx}{a^2+b^2x} = \frac{2}{b^2} x^{1/2} - \frac{2a}{b^3} \operatorname{arctg} \frac{bx^{1/2}}{a}$.

2. $\int \frac{x^{3/2}dx}{a^2+b^2x} = \frac{2x^{3/2}}{3b^2} - \frac{2a^2x^{1/2}}{b^4} + \frac{2a^3}{b^5} \operatorname{arctg} \frac{bx^{1/2}}{a}$.

3. $\int \frac{x^{1/2}dx}{(a^2+b^2x)^2} = -\frac{x^{1/2}}{b^2(a^2+b^2x)} + \frac{1}{ab^3} \operatorname{arctg} \frac{bx^{1/2}}{a}$.

4. $\int \frac{x^{3/2}dx}{(a^2+b^2x)^2} = \frac{2x^{3/2}}{b^2(a^2+b^2x)} + \frac{3a^2x^{1/2}}{b^4(a^2+b^2x)} - \frac{3a}{b^5} \operatorname{arctg} \frac{bx^{1/2}}{a}$.

5. $\int \frac{dx}{(a^2+b^2x)x^{1/2}} = \frac{2}{ab} \operatorname{arctg} \frac{bx^{1/2}}{a}$.

6. $\int \frac{dx}{(a^2+b^2x)x^{3/2}} = -\frac{2}{a^2x^{1/2}} - \frac{2b}{a^3} \operatorname{arctg} \frac{bx^{1/2}}{a}$.

7. $\int \frac{dx}{(a^2+b^2x)^2x^{1/2}} = \frac{x^{1/2}}{a^2(a^2+b^2x)} + \frac{1}{a^3b} \operatorname{arctg} \frac{bx^{1/2}}{a}$.

8. $\int \frac{x^{1/2}dx}{a^2-b^2x} = -\frac{2}{b^2} x^{1/2} + \frac{2a}{b^3} \ln\left|\frac{a+bx^{1/2}}{a-bx^{1/2}}\right|$.

9. $\int \frac{x^{3/2}dx}{a^2-b^2x} = -\frac{2x^{3/2}}{3b^2} - \frac{2a^2x^{1/2}}{b^4} + \frac{a^3}{b^5}\ln\left|\frac{a+bx^{1/2}}{a-bx^{1/2}}\right|.$

10. $\int \frac{x^{1/2}dx}{(a^2-b^2x)^2} = \frac{x^{1/2}}{b^2(a^2-b^2x)} - \frac{1}{2ab^3}\ln\left|\frac{a+bx^{1/2}}{a-bx^{1/2}}\right|.$

11. $\int \frac{x^{3/2}dx}{(a^2-b^2x)^2} = \frac{3a^2x^{1/2}-2b^2x^{3/2}}{b^4(a^2-b^2x)} - \frac{3a}{2b^5}\ln\left|\frac{a+bx^{1/2}}{a-bx^{1/2}}\right|.$

12. $\int \frac{dx}{(a^2-b^2x)x^{1/2}} = \frac{1}{ab}\ln\left|\frac{a+bx^{1/2}}{a-bx^{1/2}}\right|.$

13. $\int \frac{dx}{(a^2-b^2x)x^{3/2}} = -\frac{2}{a^3x^{1/2}} + \frac{b}{a^3}\ln\left|\frac{a+bx^{1/2}}{a-bx^{1/2}}\right|.$

14. $\int \frac{dx}{(a^2-b^2x)^2x^{1/2}} = \frac{x^{1/2}}{a^2(a^2-b^2x)} + \frac{1}{2a^3b}\ln\left|\frac{a+bx^{1/2}}{a-bx^{1/2}}\right|.$

- **Интегралы, содержащие $(a+bx)^{p/2}$.**

15. $\int (a+bx)^{p/2}\,dx = \frac{2}{b(p+2)}(a+bx)^{(p+2)/2}.$

16. $\int x(a+bx)^{p/2}\,dx = \frac{2}{b^2}\left[\frac{(a+bx)^{(p+4)/2}}{p+4} - \frac{a(a+bx)^{(p+2)/2}}{p+2}\right].$

17. $\int x^2(a+bx)^{p/2}\,dx = \frac{2}{b^3}\left[\frac{(a+bx)^{(p+6)/2}}{p+6} - \frac{2a(a+bx)^{(p+4)/2}}{p+4} + \right.$

$$\left. + \frac{a^2(a+bx)^{(p+2)/2}}{p+2}\right].$$

- **Интегралы, содержащие $(x^2+a^2)^{1/2}$.**

18. $\int (x^2+a^2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}x(a^2+x^2)^{1/2} + \frac{a^2}{2}\ln[x+(x^2+a^2)^{1/2}].$

19. $\int x(x^2+a^2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{3}(a^2+x^2)^{3/2}.$

20. $\int (x^2+a^2)^{3/2}\,dx = \frac{1}{4}x(a^2+x^2)^{3/2} + \frac{3}{8}a^2x(a^2+x^2)^{1/2} +$

$$+ \frac{3}{8}a^4\ln|x+(x^2+a^2)^{1/2}|.$$

21. $\int \frac{1}{x}(x^2+a^2)^{1/2}\,dx = (a^2+x^2)^{1/2} - a\ln\left|\frac{a+(x^2+a^2)^{1/2}}{x}\right|.$

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln[x + (x^2+a^2)^{1/2}]$.

23. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = (x^2+a^2)^{1/2}$.

24. $\int (x^2+a^2)^{-3/2}\,dx = a^{-2}\,x(x^2+a^2)^{-1/2}$.

- **Интегралы, содержащие $(x^2-a^2)^{1/2}$.**

25. $\int (x^2-a^2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\,x(x^2-a^2)^{1/2} - \frac{a^2}{2}\,\ln|x + (x^2-a^2)^{1/2}|$.

26. $\int x(x^2-a^2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{3}\,(x^2-a^2)^{3/2}$.

27. $\int (x^2-a^2)^{3/2}\,dx = \frac{1}{4}\,x(x^2-a^2)^{3/2} - \frac{3}{8}\,a^2x(x^2-a^2)^{1/2} + \frac{3}{8}\,a^4\ln|x+(x^2-a^2)^{1/2}|$.

28. $\int \frac{1}{x}\,(x^2-a^2)^{1/2}\,dx = (x^2-a^2)^{1/2} - a\arccos\left|\frac{a}{x}\right|$.

29. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|x + (x^2-a^2)^{1/2}|$.

30. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = (x^2-a^2)^{1/2}$.

31. $\int (x^2-a^2)^{-3/2}\,dx = -a^{-2}\,x(x^2-a^2)^{-1/2}$.

- **Интегралы, содержащие $(a^2-x^2)^{1/2}$.**

32. $\int (a^2-x^2)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\,x(a^2-x^2)^{1/2} + \frac{a^2}{2}\,\arcsin\frac{x}{a}$.

33. $\int x(a^2-x^2)^{1/2}\,dx = -\frac{1}{3}\,(a^2-x^2)^{3/2}$.

34. $\int (a^2-x^2)^{3/2}\,dx = \frac{1}{4}\,x(a^2-x^2)^{3/2} + \frac{3}{8}\,a^2x(a^2-x^2)^{1/2} + \frac{3}{8}\,a^4\arcsin\frac{x}{a}$.

35. $\int \frac{1}{x}\,(a^2-x^2)^{1/2}\,dx = (a^2-x^2)^{1/2} - a\ln\left|\frac{a+(x^2-a^2)^{1/2}}{x}\right|$.

36. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a}$.

37. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -(a^2 - x^2)^{1/2}$.

38. $\int (a^2 - x^2)^{-3/2}\,dx = a^{-2}\,x(a^2 - x^2)^{-1/2}$.

● **Формулы приведения.** Ниже параметры a, b, p, m, n могут быть любыми, лишь бы не обращались в нуль знаменатели при последовательном применении формулы. Обозначение: $w = ax^n + b$.

39. $\int x^m(ax^n + b)^p\,dx = \frac{1}{m + np + 1}\left(x^{m+1}w^p + npb\int x^m\,w^{p-1}\,dx\right)$.

40. $\int x^m(ax^n + b)^p\,dx = \frac{1}{bn(p+1)}\Big[-x^{m+1}w^{p+1} + (m + n + np + 1)\int x^m\,w^{p+1}\,dx\Big]$.

41. $\int x^m(ax^n + b)^p\,dx = \frac{1}{b(m+1)}\Big[x^{m+1}w^{p+1} - a(m + n + np + 1)\int x^{m+n}\,w^p\,dx\Big]$.

42. $\int x^m(ax^n + b)^p\,dx = \frac{1}{a(m + np + 1)}\Big[x^{m-n+1}w^{p+1} - b(m - n + 1)\int x^{m-n}\,w^p\,dx\Big]$.

2.3. Интегралы, содержащие показательные функции

1. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax}$.

2. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}$.

3. $\int xe^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right)$.

4. $\int x^2e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right)$.

5. $$\int x^ne^{ax}\,dx = e^{ax}\left[\frac{1}{a}x^n - \frac{n}{a^2}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{a^3}x^{n-2} - \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + (-1)^{n-1}\frac{n!}{a^n}x + (-1)^n\frac{n!}{a^{n+1}}\right],\ n = 1, 2, \ldots.$$

6. $\int P_n(x)\,e^{ax}\,dx = e^{ax}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{a^{k+1}}\frac{d^k}{dx^k}P_n(x)$, где $P_n(x)$ — произвольный полином степени n.

7. $\int \frac{dx}{a + be^{px}} = \frac{x}{a} - \frac{1}{ap}\ln|a + be^{px}|$.

8. $$\int \frac{dx}{ae^{px} + be^{px}} = \begin{cases} \frac{1}{p\sqrt{ab}}\operatorname{arctg}\left(e^{px}\sqrt{\frac{a}{b}}\right) & \text{при } ab > 0, \\ \frac{1}{2a\sqrt{-ab}}\ln\left(\frac{b + e^{px}\sqrt{-ab}}{b - e^{px}\sqrt{-ab}}\right) & \text{при } ab < 0. \end{cases}$$

9. $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + be^{px}}} = \begin{cases} \frac{1}{p\sqrt{a}}\ln\frac{\sqrt{a + be^{px}} - \sqrt{a}}{\sqrt{a + be^{px}} + \sqrt{a}} & \text{при } a > 0, \\ \frac{2}{p\sqrt{-a}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a + be^{px}}}{\sqrt{-a}} & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

10. $\int e^{ax}\sin x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 1}(a\sin x - \cos x)$.

11. $\int e^{ax}\sin^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + 4}\left(a\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \frac{2}{a}\right)$.

12. $$\int e^{ax}\sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}x}{a^2 + n^2}(a\sin x - n\cos x) + \frac{n(n-1)}{a^2 + n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,dx.$$

13. $\int e^{ax}\cos x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+1}(a\cos x + \sin x).$

14. $\int e^{ax}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+4}\left(a\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \frac{2}{a}\right).$

15. $\int e^{ax}\cos^n x\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x}{a^2+n^2}(a\cos x + n\sin x) +$

$$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,dx.$$

2.4. Интегралы, содержащие гиперболические функции

- **Интегралы, содержащие ch x.**

1. $\int \operatorname{ch}(a+bx)\,dx = \frac{1}{b}\operatorname{sh}(a+bx).$

2. $\int x\operatorname{ch}x\,dx = x\operatorname{sh}x - \operatorname{ch}x.$

3. $\int x^2\operatorname{ch}x\,dx = (x^2+2)\operatorname{sh}x - 2x\operatorname{ch}x.$

4. $\int x^{2n}\operatorname{ch}x\,dx = (2n)!\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{x^{2k}}{(2k)!}\operatorname{sh}x - \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\operatorname{ch}x\right].$

5. $\int x^{2n+1}\operatorname{ch}x\,dx = (2n+1)!\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\operatorname{sh}x - \frac{x^{2k}}{(2k)!}\operatorname{ch}x\right].$

6. $\int x^p\operatorname{ch}x\,dx = x^p\operatorname{sh}x - px^{p-1}\operatorname{ch}x + p(p-1)\int x^{p-2}\operatorname{ch}x\,dx.$

7. $\int \operatorname{ch}^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sh}2x.$

8. $\int \operatorname{ch}^3 x\,dx = \operatorname{sh}x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x.$

9. $\int \operatorname{ch}^{2n}x\,dx = C_{2n}^{n}\frac{x}{2^{2n}} + \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{k}\frac{\operatorname{sh}[2(n-k)x]}{2(n-k)},\ n=1,2,\ldots.$

10. $\int \operatorname{ch}^{2n+1}x\,dx = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n} C_{2n+1}^{k}\frac{\operatorname{sh}[(2n-2k+1)x]}{2n-2k+1} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\operatorname{sh}^{2k+1}x}{2k+1}, n=1,2,\ldots.$$

11. $\int \operatorname{ch}^p x\,dx = \frac{1}{p}\operatorname{sh}x\operatorname{ch}^{p-1}x + \frac{p-1}{p}\int \operatorname{ch}^{p-2}x\,dx.$

12. $\int \operatorname{ch}ax\operatorname{ch}bx\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}[a\operatorname{ch}bx\operatorname{sh}ax - b\operatorname{ch}ax\operatorname{sh}bx].$

13. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}x} = \frac{2}{a}\operatorname{arctg}(e^{ax}).$

14. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{2n}x} = \frac{\operatorname{sh}x}{2n-1}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}^{2n-1}x} + \right.$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{2^k(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2k-1)}\frac{1}{\operatorname{ch}^{2n-2k-1}x}\right], n=1,2,\ldots.$$

15. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^{2n+1}x} = \frac{\operatorname{sh}x}{2n}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}^{2n}x} + \right.$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)}{2^k(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}\frac{1}{\operatorname{ch}^{2n-2k}x}\right] +$$

$$+ \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\operatorname{arctg}\operatorname{sh}x, n=1,2,\ldots.$$

16. $\int \frac{dx}{a+b\operatorname{ch}x} =$

$$= \begin{cases} \frac{\operatorname{sign}x}{\sqrt{b^2-a^2}}\arcsin\frac{b+a\operatorname{ch}x}{a+b\operatorname{ch}x} & \text{при } a^2<b^2, \\ \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{th}(x/2)}{a+b-\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{th}(x/2)} & \text{при } a^2>b^2. \end{cases}$$

- **Интегралы, содержащие sh x.**

17. $\int \operatorname{sh}(a+bx)\,dx = \frac{1}{b}\operatorname{ch}(a+bx).$

18. $\int x \operatorname{sh} x\,dx = x \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$

19. $\int x^2 \operatorname{sh} x\,dx = (x^2+2)\operatorname{ch} x - 2x \operatorname{sh} x.$

20. $\int x^{2n} \operatorname{sh} x\,dx = (2n)!\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\operatorname{ch} x - \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}\operatorname{sh} x\right].$

21. $\int x^{2n+1} \operatorname{sh} x\,dx = (2n+1)!\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\operatorname{ch} x - \frac{x^{2k}}{(2k)!}\operatorname{sh} x\right].$

22. $\int x^p \operatorname{sh} x\,dx = x^p \operatorname{ch} x - px^{p-1}\operatorname{sh} x + p(p-1)\int x^{p-2}\operatorname{sh} x\,dx.$

23. $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x.$

24. $\int \operatorname{sh}^3 x\,dx = -\operatorname{ch} x + \frac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x.$

25. $\int \operatorname{sh}^{2n} x\,dx = (-1)^n C_{2n}^n \frac{x}{2^{2n}} +$

$$+ \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C_{2n}^k \frac{\operatorname{sh}[2(n-k)x]}{2(n-k)},\ n = 1, 2, \ldots .$$

26. $\int \operatorname{sh}^{2n+1} x\,dx = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_{2n+1}^k \frac{\operatorname{ch}[(2n-2k+1)x]}{2n-2k+1} =$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k} C_n^k \frac{\operatorname{ch}^{2k+1} x}{2k+1},\ n = 1, 2, \ldots .$$

27. $\int \operatorname{sh}^p x\,dx = \frac{1}{p}\operatorname{sh}^{p-1} x \operatorname{ch} x - \frac{p-1}{p}\int \operatorname{sh}^{p-2} x\,dx.$

28. $\int \operatorname{sh} ax \operatorname{sh} bx\,dx = \frac{1}{a^2-b^2}[a \operatorname{ch} ax \operatorname{sh} bx - b \operatorname{ch} bx \operatorname{sh} ax].$

29. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} ax} = \frac{1}{a} \ln\left|\operatorname{th}\frac{ax}{2}\right|.$

30. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{2n} ax} = \frac{\operatorname{ch} x}{2n-1}\left[-\frac{1}{\operatorname{sh}^{2n-1} x} + \right.$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{2^k (n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{(2n-3)(2n-5)\ldots(2n-2k-1)} \frac{1}{\operatorname{sh}^{2n-2k-1} x}\right],$$

$n = 1, 2, \ldots.$

31. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^{2n+1} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{2n}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}^{2n} x} + \right.$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+1)}{2^k (n-1)(n-2)\ldots(n-k)} \frac{1}{\operatorname{sh}^{2n-2k} x}\right] +$$

$$+ (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \ln \operatorname{th}\frac{x}{2}, \; n = 1, 2, \ldots.$$

32. $\int \frac{dx}{a + b \operatorname{sh} x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \frac{a \operatorname{th}(x/2) - b + \sqrt{a^2+b^2}}{a \operatorname{th}(x/2) - b - \sqrt{a^2+b^2}}.$

33. $\int \frac{Ax + B \operatorname{sh} x}{a + b \operatorname{sh} x}\, dx =$

$$= \frac{B}{b} x + \frac{Ab - Ba}{b\sqrt{a^2+b^2}} \ln \frac{a \operatorname{th}(x/2) - b + \sqrt{a^2+b^2}}{a \operatorname{th}(x/2) - b - \sqrt{a^2+b^2}}.$$

- **Интегралы, содержащие th x или cth x.**

34. $\int \operatorname{th} x\, dx = \ln \operatorname{ch} x.$

35. $\int \operatorname{th}^2 x\, dx = x - \operatorname{th} x.$

36. $\int \operatorname{th}^3 x\, dx = -\frac{1}{2} \operatorname{th}^2 x + \ln \operatorname{ch} x.$

37. $\int \operatorname{th}^{2n} x\, dx = x - \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{th}^{2n-2k+1} x}{2n-2k+1}, \; n = 1, 2, \ldots.$

38. $\int \operatorname{th}^{2n+1} x\,dx = \ln \operatorname{ch} x - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k C_n^k}{2^k \operatorname{ch}^{2k} x} = \ln \operatorname{ch} x -$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{th}^{2n-2k+2} x}{2n-2k+2}, \; n = 1, 2, \ldots .$$

39. $\int \operatorname{th}^p x\,dx = -\frac{1}{p-1} \operatorname{th}^{p-1} x + \int \operatorname{th}^{p-2} x\,dx.$

40. $\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln |\operatorname{sh} x|.$

41. $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx = x - \operatorname{cth} x.$

42. $\int \operatorname{cth}^3 x\,dx = -\frac{1}{2} \operatorname{cth}^2 x + \ln |\operatorname{sh} x|.$

43. $\int \operatorname{cth}^{2n} x\,dx = x - \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{cth}^{2n-2k+1} x}{2n-2k+1}, \; n = 1, 2, \ldots .$

44. $\int \operatorname{cth}^{2n+1} x\,dx = \ln |\operatorname{sh} x| - \sum_{k=1}^{n} \frac{C_n^k}{2k \operatorname{sh}^{2k} x} =$

$$= \ln |\operatorname{sh} x| - \sum_{k=1}^{n} \frac{\operatorname{cth}^{2n-2k+2} x}{2n-2k+2}, \; n = 1, 2, \ldots .$$

45. $\int \operatorname{cth}^p x\,dx = -\frac{1}{p-1} \operatorname{cth}^{p-1} x + \int \operatorname{cth}^{p-2} x\,dx.$

2.5. Интегралы, содержащие логарифмические функции

1. $\int \ln ax\,dx = x \ln ax - x.$

2. $\int x \ln x\,dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2.$

3. $\int x^p \ln ax\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{p+1} x^{p+1} \ln ax - \dfrac{1}{(p+1)^2} x^{p+1} & \text{при } p \neq -1, \\ \dfrac{1}{2} \ln^2 ax & \text{при } p = -1. \end{cases}$

4. $\int (\ln x)^2\,dx = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x.$

5. $\int x(\ln x)^2\,dx = \dfrac{1}{2} x^2 (\ln x)^2 - \dfrac{1}{2} x^2 \ln x + \dfrac{1}{4} x^2.$

6. $\int x^p (\ln x)^2\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{p+1}}{p+1} (\ln x)^2 - \dfrac{2x^{p+1}}{(p+1)^2} \ln x + \dfrac{2x^{p+1}}{(p+1)^3} & \text{при } p \neq -1, \\ \dfrac{1}{3} \ln^3 ax & \text{при } p = -1 \end{cases}$

7. $\int (\ln x)^n\,dx = \dfrac{x}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k (n+1)n \ldots (n-k+1) (\ln x)^{n-k},$
$n = 1, 2, \ldots .$

8. $\int (\ln x)^q\,dx = x(\ln x)^q - q \int (\ln x)^{q-1}\,dx, \quad q \neq -1.$

9. $\int x^n (\ln x)^m\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{m} \dfrac{(-1)^k}{(n+1)^{k+1}} (m+1)m \ldots$
$\ldots (m-k+1)(\ln x)^{m-k}, n, m = 1, 2, \ldots .$

10. $\int x^p (\ln x)^q\,dx = \dfrac{1}{p+1} x^{p+1} (\ln x)^q - \dfrac{q}{p+1} \int x^p (\ln x)^{q-1}\,dx,$
$p, q \neq -1.$

11. $\int \ln (a+bx)\,dx = \dfrac{1}{b} (ax+b) \ln (ax+b) - x.$

12. $\int x \ln (a+bx)\,dx = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - \dfrac{a^2}{b^2}\right) \ln (a+bx) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{a}{b} x\right).$

13. $\int x^2 \ln (a+bx)\,dx = \dfrac{1}{3}\left(x^3 - \dfrac{a^3}{b^3}\right) \ln (a+bx) -$
$- \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{ax^2}{2b} + \dfrac{a^2 x}{b^2}\right).$

14. $\int \dfrac{\ln x\,dx}{(a+bx)^2} = -\dfrac{\ln x}{b(a+bx)} + \dfrac{1}{ab} \ln \dfrac{x}{a+bx}.$

15. $\int \frac{\ln x\,dx}{(a+bx)^3} = -\frac{\ln x}{2b(a+bx)^2} + \frac{1}{2ab(a+bx)} + \frac{1}{2a^2b}\ln\frac{x}{a+bx}$.

16. $\int \frac{\ln x\,dx}{\sqrt{a+bx}} =$

$$= \begin{cases} \frac{2}{b}\left[(\ln x - 2)\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}\ln\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}\right] \text{ при } a>0, \\ \frac{2}{b}\left[(\ln x - 2)\sqrt{a+bx} + 2\sqrt{-a}\ \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}}\right] \text{ при } a<0. \end{cases}$$

17. $\int \ln(x^2+a^2)\,dx = x\ln(x^2+a^2) - 2x + 2a\operatorname{arctg}(x/a)$.

18. $\int x\ln(x^2+a^2)\,dx = \frac{1}{2}\,[(x^2+a^2)\ln(x^2+a^2) - x^2]$.

19. $\int x^2\ln(x^2+a^2)\,dx = \frac{1}{3}\left[x^3\ln(x^2+a^2) - \frac{2}{3}x^3 + 2a^2x - \right.$

$$\left. - 2a^3\operatorname{arctg}(x/a)\right].$$

2.6. Интегралы, содержащие тригонометрические функции

● **Интегралы, содержащие $\cos x$.** Обозначения: $n = 1, 2, 3, \ldots$.

1. $\int \cos(a+bx)\,dx = \frac{1}{b}\sin(a+bx)$.

2. $\int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x$.

3. $\int x^2\cos x\,dx = 2x\cos x + (x^2-2)\sin x$.

4. $\int x^{2n}\cos x\,dx = (2n)!\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!}\sin x + \right.$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)!}\cos x\right].$$

5. $\int x^{2n+1}\cos x\,dx = (2n+1)!\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k\frac{x^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!}\sin x + \right.$

$$\left. + \frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)}\cos x\right].$$

6. $\int x^p\cos x\,dx = x^p\sin x + px^{p-1}\cos x - p(p-1)\int x^{p-2}\cos x\,dx.$

7. $\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x.$

8. $\int \cos^3 x\,dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x.$

9. $\int \cos^{2n} x\,dx = \frac{1}{2^{2n}}C_{2n}^{n}\,x + \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}C_{2n}^{k}\frac{\sin[(2n-2k)x]}{2n-2k}.$

10. $\int \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^{n}C_{2n+1}^{k}\frac{\sin[(2n-2k+1)x]}{2n-2k+1}.$

11. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$

12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$

13. $\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|.$

14. $\int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\cos^{n-2}x},\ n>1.$

15. $\int \frac{x\,dx}{\cos^{2n}x} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2n-2)(2n-4)\ldots(2n-2k+2)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+3)}\times$

$$\times\frac{(2n-2k)x\sin x - \cos x}{(2n-2k+1)(2n-2k)\cos^{2n-2k+1}x} +$$

$$+\frac{2^{n-1}(n-1)!}{(2n-1)!!}(x\operatorname{tg}x + \ln|\cos x|).$$

16. $\int \cos ax\cos bx\,dx = \frac{\sin[(b-a)x]}{2(b-a)} + \frac{\sin[(b+a)x]}{2(b+a)},\ a\neq\pm b.$

17. $\int \frac{dx}{a+b\cos x} =$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{(a-b)\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{a^2-b^2}} & \text{при } a^2 > b^2, \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-a^2}+(b-a)\operatorname{tg}(x/2)}{\sqrt{b^2-a^2}-(b-a)\operatorname{tg}(x/2)} \right| & \text{при } b^2 > a^2. \end{cases}$$

18. $\int \frac{dx}{(a+b\cos x)^2} = \frac{b\sin x}{(b^2-a^2)(a+b\cos x)} - \frac{a}{b^2-a^2}\int \frac{dx}{a+b\cos x}.$

19. $\int \frac{dx}{a^2+b^2\cos^2 x} = \frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{arctg} \frac{a\operatorname{tg} x}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

20. $\int \frac{dx}{a^2-b^2\cos^2 x} =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{a\operatorname{tg} x}{\sqrt{a^2-b^2}} & \text{при } a^2 > b^2, \\ \frac{1}{2a\sqrt{b^2-a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{b^2-a^2}-a\operatorname{tg} x}{\sqrt{b^2-a^2}+a\operatorname{tg} x} \right| & \text{при } b^2 > a^2. \end{cases}$$

21. $\int e^{ax}\cos bx\, dx = e^{ax}\left[\frac{b}{a^2+b^2}\sin bx + \frac{a}{a^2+b^2}\cos bx\right].$

22. $\int e^{ax}\cos^2 x\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+4}\left(a\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \frac{2}{a}\right).$

23. $\int e^{ax}\cos^n x\, dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1} x}{a^2+n^2}(a\cos x + n\sin x) +$

$+ \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2} x\, dx.$

● **Интегралы, содержащие $\sin x$.** Обозначения: $n = 1, 2, 3, \ldots$.

24. $\int \sin(a+bx)\, dx = -\frac{1}{b}\cos(a+bx).$

25. $\int x\sin x\, dx = \sin x - x\cos x.$

26. $\int x^2\sin x\, dx = 2x\sin x - (x^2-2)\cos x.$

27. $\int x^3 \sin x\, dx = (3x^2 - 6)\sin x - (x^3 - 6x)\cos x.$

28. $\int x^{2n} \sin x\, dx = (2n)! \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!} \cos x + \right.$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2n-2k-1}}{(2n-2k-1)!} \sin x \right].$$

29. $\int x^{2n+1} \sin x\, dx = (2n+1)! \left[\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2n-2k+1}}{(2n-2k+1)!} \cos x + \right.$

$$\left. + (-1)^k \frac{x^{2n-2k}}{(2n-2k)!} \sin x \right].$$

30. $\int x^p \sin x\, dx = -x^p \cos x + px^{p-1} \sin x - p(p-1) \int x^{p-2} \sin x\, dx.$

31. $\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x.$

32. $\int x \sin^2 x\, dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x.$

33. $\int \sin^3 x\, dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x.$

34. $\int \sin^{2n} x\, dx = \frac{1}{2^{2n}} C_{2n}^n x + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k C_{2n}^k \frac{\sin[(2n-2k)x]}{2n-2k},$

где $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ — биномиальные коэффициенты ($0! = 1$).

35. $\int \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k+1} C_{2n+1}^k \frac{\cos[(2n-2k+1)x]}{2n-2k+1}.$

36. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$

37. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x.$

38. $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$

39. $\int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^{n-2} x}, n > 1.$

40. $$\int \frac{x\,dx}{\sin^{2n} x} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-2)(2n-4)\ldots(2n-2k+2)}{(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2k+3)} \times$$
$$\times \frac{\sin x + (2n-2k)x\cos x}{(2n-2k+1)(2n-2k)\sin^{2n-2k+1} x} +$$
$$+ \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(2n-1)!}(\ln|\sin x| - x\operatorname{ctg} x).$$

41. $\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{\sin[(b-a)x]}{2(b-a)} - \frac{\sin[(b+a)x]}{2(b+a)}, a \neq \pm b.$

42. $$\int \frac{dx}{a + b\sin x} =$$
$$= \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{b + a\operatorname{tg} x/2}{\sqrt{a^2-b^2}} & \text{при } a^2 > b^2, \\ \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left|\frac{b - \sqrt{b^2-a^2} + a\operatorname{tg} x/2}{b + \sqrt{b^2-a^2} + a\operatorname{tg} x/2}\right| & \text{при } b^2 > a^2 \end{cases}$$

43. $\int \frac{dx}{(a + b\sin x)^2} = \frac{b\cos x}{(a^2-b^2)(a + b\sin x)} + \frac{a}{a^2-b^2}\int \frac{dx}{a + b\sin x}.$

44. $\int \frac{dx}{a^2 + b^2\sin^2 x} = \frac{1}{a\sqrt{a^2+b^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{tg} x}{a}.$

45. $$\int \frac{dx}{a^2 - b^2\sin^2 x} =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2-b^2}\operatorname{tg} x}{a} & \text{при } a^2 > b^2, \\ \frac{1}{2a\sqrt{b^2-a^2}} \ln\left|\frac{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg} x + a}{\sqrt{b^2-a^2}\operatorname{tg} x - a}\right| & \text{при } b^2 > a^2. \end{cases}$$

46. $\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1 + k^2\sin^2 x}} = -\frac{1}{k} \arcsin \frac{k\cos x}{\sqrt{1+k^2}}.$

47. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}} = -\frac{1}{k}\ln\left|k\cos x + \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\right|.$

48. $\int \sin x\,\sqrt{1+k^2\sin^2 x}\,dx =$

$$= -\frac{\cos x}{2}\sqrt{1+k^2\sin^2 x} - \frac{1+k^2}{2k}\arcsin\frac{k\cos x}{\sqrt{1+k^2}},$$

49. $\int \sin x\,\sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx =$

$$= -\frac{\cos x}{2}\sqrt{1-k^2\sin^2 x} - \frac{1-k^2}{2k}\ln\left|k\cos x + \sqrt{1-k^2 2\sin^2 x}\right|.$$

50. $\int e^{ax}\sin bx\,dx = e^{ax}\left[\frac{a}{a^2+b^2}\sin bx - \frac{b}{a^2+b^2}\cos bx\right].$

51. $\int e^{ax}\sin^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+4}\left(a\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \frac{2}{a}\right).$

52. $\int e^{ax}\sin^n x\,dx = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}x}{a^2+n^2}\left(a\sin x - n\cos x\right) +$

$$+\frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,dx.$$

- **Интегралы, содержащие $\cos x$ и $\sin x$.**

53. $\int \sin ax\cos bx\,dx = -\frac{\cos[(a+b)x]}{2(a+b)} - \frac{\cos[(a-b)x]}{2(a-b)},\ a \neq \pm b.$

54. $\int \frac{dx}{b^2\cos^2 ax + c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{abc}\operatorname{arctg}\left(\frac{c}{b}\operatorname{tg} ax\right).$

55. $\int \frac{dx}{b^2\cos^2 ax - c^2\sin^2 ax} = \frac{1}{2abc}\ln\left|\frac{c\operatorname{ctg} ax + b}{c\operatorname{ctg} ax - b}\right|.$

56. $\int \frac{dx}{\cos^{2n}x\sin^{2m}x} = \sum_{k=0}^{n+m+1} C_{n+m+1}^{k}\frac{\operatorname{tg}^{2k-2m-1}x}{2k-2m+1},\ n, m = 1, 2, \ldots.$

57. $\int \frac{dx}{\cos^{2n+1}x\sin^{2m+1}x} = C_{n+m}^{m}\ln|\operatorname{tg} x| + \sum_{k=0}^{n+m} C_{n+m}^{k}\frac{\operatorname{tg}^{2k-2m}x}{2k-2m},$

$n, m = 1, 2, \ldots.$

- **Формулы приведения.** Ниже параметры p и q могут быть любыми, лишь бы не обращались в нуль знаменатели в правой части данных формул.

58. $$\int \sin^p x \cos^q x\, dx = -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{p+q} + \frac{p-1}{p+q}\int \sin^{p-2} x \cos^q x\, dx.$$

59. $$\int \sin^p x \cos^q x\, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+q} + \frac{q-1}{p+q}\int \sin^p x \cos^{q-2} x\, dx.$$

60. $$\int \sin^p x \cos^q x\, dx = \frac{\sin^{p-1} x \cos^{q-1} x}{p+q}\left(\sin^2 x - \frac{q-1}{p+q-2}\right) + \frac{(p-1)(q-1)}{(p+q)(p+q-2)}\int \sin^{p-2} x \cos^{q-2} x\, dx.$$

61. $$\int \sin^p x \cos^q x\, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q+1} x}{p+1} + \frac{p+q+2}{p+1}\int \sin^{p+2} x \cos^q x\, dx.$$

62. $$\int \sin^p x \cos^q x\, dx = -\frac{\sin^{p+1} x \cos^{q+1} x}{q+1} + \frac{p+q+2}{q+1}\int \sin^p x \cos^{q+2} x\, dx.$$

63. $$\int \sin^p x \cos^q x\, dx = -\frac{\sin^{p-1} x \cos^{q+1} x}{q+1} + \frac{p-1}{q+1}\int \sin^{p-2} x \cos^{q+2} x\, dx.$$

64. $$\int \sin^p x \cos^q x\, dx = \frac{\sin^{p+1} x \cos^{q-1} x}{p+1} + \frac{q-1}{p+1}\int \sin^{p+2} x \cos^{q-2} x\, dx.$$

- **Интегралы, содержащие tg x и ctg x.**

65. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x|$.

66. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx = \operatorname{tg} x - x$.

67. $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x|$.

68. $\int \operatorname{tg}^{2n} x\, dx = (-1)^n x - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (\operatorname{tg} x)^{2n-2k+1}}{2n-2k+1}$, $n = 1, 2, \ldots$.

69. $\int \operatorname{tg}^{2n+1} x\, dx = (-1)^{n+1} \ln|\cos x| - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (\operatorname{tg} x)^{2n-2k+2}}{2n-2k+2}$,
$n = 1, 2, \ldots$.

70. $\int \frac{dx}{a + b\operatorname{tg} x} = \frac{1}{a^2+b^2}(ax + b\ln|a\cos x + b\sin x|)$.

71. $\int \frac{\operatorname{tg} x\, dx}{\sqrt{a + b\operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \arccos\left(\sqrt{1-\frac{a}{b}}\cos x\right)$, $b > a$, $b > 0$.

72. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x|$.

73. $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx = -\operatorname{ctg} x - x$.

74. $\int \operatorname{ctg}^3 x\, dx = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x - \ln|\sin x|$.

75. $\int \operatorname{ctg}^{2n} x\, dx = (-1)^n x + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (\operatorname{ctg} x)^{2n-2k+1}}{2n-2k+1}$, $n = 1, 2, \ldots$.

76. $\int \operatorname{ctg}^{2n+1} x\, dx = (-1)^n \ln|\sin x| + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k (\operatorname{ctg} x)^{2n-2k+2}}{2n-2k+2}$,
$n = 1, 2, \ldots$.

77. $\int \frac{dx}{a + b\operatorname{ctg} x} = \frac{1}{a^2+b^2}(ax - b\ln|a\sin x + b\cos x|)$.

2.7. Интегралы, содержащие обратные тригонометрические функции

1. $\int \arcsin \frac{x}{a}\, dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}$.

2. $\int \left(\arcsin \frac{x}{a}\right)^2 dx = x \left(\arcsin \frac{x}{a}\right)^2 - 2x + 2\sqrt{a^2 - x^2} \arcsin \frac{x}{a}$.

3. $\int x \arcsin \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{4}(2x^2 - a^2) \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2}$.

4. $\int x^2 \arcsin \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{9}(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2}$.

5. $\int \arccos \frac{x}{a}\, dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$.

6. $\int \left(\arccos \frac{x}{a}\right)^2 dx = x\left(\arccos \frac{x}{a}\right)^2 - 2x - 2\sqrt{a^2 - x^2} \arccos \frac{x}{a}$.

7. $\int x \arccos \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{4}(2x^2 - a^2) \arccos \frac{x}{a} - \frac{x}{4}\sqrt{a^2 - x^2}$.

8. $\int x^2 \arccos \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3} \arccos \frac{x}{a} - \frac{1}{9}(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2}$.

9. $\int \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2)$.

10. $\int x \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{2}(x^2 + a^2) \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax}{2}$.

11. $\int x^2 \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6} \ln (a^2 + x^2)$.

12. $\int \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = x \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2)$.

13. $\int x \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{1}{2}(x^2 + a^2) \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{ax}{2}$.

14. $\int x^2 \operatorname{arcctg} \frac{x}{a}\, dx = \frac{x^3}{3} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6} \ln (a^2 + x^2)$.

3. Таблица определенных интегралов

В приложении 3 считается, что n — целое положительное число (другие случаи специально оговариваются).

3.1. Интегралы, содержащие степенные функции

1. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{ax^2+b} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$.

2. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n dx}{x+1} = (-1)^n\left[\ln 2 + \sum_{k+1}^{n}\frac{(-1)^k}{k}\right]$.

4. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x+1} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}, \quad 0 < a < 1.$

5. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}dx}{(1+ax)^2} = \frac{\pi(1-\lambda)}{a^\lambda \sin(\pi\lambda)}, \quad 0 < \lambda < 2.$

6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2+2x\cos\beta+1} = \frac{\beta}{2\sin\beta}$.

7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x^a+x^{-a})dx}{x^2+2x\cos\beta+1} = \frac{\pi\sin(a\beta)}{\sin(\pi a)\sin\beta}, \quad |a| < 1, \beta \neq (2n+1)\pi.$

8. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{\pi(a^{\lambda-1}-b^{\lambda-1})}{(b-a)\sin(\pi\lambda)}, \quad 0<\lambda<2.$

9. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}(x+c)dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\lambda)}\left(\frac{a-c}{a-b}\,a^{\lambda-1}+\frac{b-c}{b-a}\,b^{\lambda-1}\right), \quad 0<\lambda<1.$

10. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\lambda}dx}{(x+1)^3} = \frac{\pi\lambda(1-\lambda)}{2\sin(\pi\lambda)}, \quad -1<\lambda<2.$

11. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi(b^{\lambda-2}-a^{\lambda-2})}{2(a^2-b^2)\sin(\pi\lambda/2)}, \quad 0<\lambda<4.$

12. $\displaystyle\int_0^1 x^a(1-x)^{1-a}\,dx = \frac{\pi a(1-a)}{2\sin(\pi a)}, \quad -1<a<1.$

13. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^a(1-x)^{1-a}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}, \quad 0<a<1.$

14. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^a dx}{(1-x)^a} = \frac{\pi a}{\sin(\pi a)}, \quad -1<a<1.$

15. $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \equiv B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p,q>0.$

16. $\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x^q)^{-p/q}\,dx = \frac{\pi}{q\sin(\pi p/q)}, \quad q>p>0.$

17. $\displaystyle\int_0^1 x^{p+q-1}(1-x^q)^{-p/q}\,dx = \frac{\pi p}{q^2\sin(\pi p/q)}, \quad q>p.$

18. $\displaystyle\int_0^1 x^{q/p-1}(1-x^q)^{-1/p}\,dx = \frac{\pi}{q\sin(\pi/p)}, \quad p>1,\ q>0.$

19. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1-x}\,dx = \pi\operatorname{ctg}(\pi p), \quad |p|<1.$

20. $\int\limits_0^1 \frac{x^{p-1}-x^{-p}}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \quad |p|<1.$

21. $\int\limits_0^1 \frac{x^{p}-x^{-p}}{x-1}\,dx = \frac{1}{p} - \pi\operatorname{ctg}(\pi p), \quad |p|<1.$

22. $\int\limits_0^1 \frac{x^{p}-x^{-p}}{1+x}\,dx = \frac{1}{p} - \frac{\pi}{\sin(\pi p)}, \quad |p|<1.$

23. $\int\limits_0^1 \frac{x^{1+p}-x^{1-p}}{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi p}{2}\right) - \frac{1}{p}, \quad |p|<1.$

24. $\int\limits_0^1 \frac{x^{1+p}-x^{1-p}}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{p} - \frac{\pi}{2\sin(\pi p/2)}, \quad |p|<1.$

25. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{1-x}\,dx = \pi[\operatorname{ctg}(\pi p) - \operatorname{ctg}(\pi q)], \quad p, q>0.$

26. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1+a^2x)(1-x)}} = \frac{2}{a}\operatorname{arctg} a.$

27. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-a^2x)(1-x)}} = \frac{1}{a}\ln\frac{1+a}{1-a}.$

28. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}, \quad 1<a.$

29. $\int\limits_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{2(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad n=1, 2, \ldots.$

30. $\int\limits_0^1 \frac{x^{n-1/2} dx}{\sqrt{1-x}} = \frac{\pi(2n-1)!!}{(2n)!!}, \quad n=1, 2, \ldots.$

31. $\int\limits_0^1 \frac{x^{2n} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}, \quad n=1, 2, \ldots.$

32. $\int\limits_0^1 \frac{x^{2n+1} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2\cdot 4\ldots(2n)}{1\cdot 3\ldots(2n+1)}, \quad n=1, 2, \ldots.$

33. $$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1}dx}{(1+ax)^{n+1}} = (-1)^n \frac{\pi C_{\lambda-1}^n}{a^\lambda \sin(\pi\lambda)}, \quad 0<\lambda<n+1.$$

34. $$\int_0^\infty \frac{x^m dx}{(a+bx)^{n+1/2}} = 2^{m+1} m! \frac{(2n-2m-3)!!}{(2n-1)!!} \frac{a^{m-n+1/2}}{b^{m+1}}, \quad a, b>0,$$

$n, m = 1, 2, \ldots, m < b - \frac{1}{2}$.

35. $$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{\pi(2n-3)!!}{2(2n-2)!!} \frac{1}{a^{2n-1}}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

36. $$\int_0^\infty \frac{(x+1)^{\lambda-1}}{(x+a)^{\lambda+1}} dx = \frac{1-a^{-\lambda}}{\lambda(a-1)}, \quad a>0.$$

37. $$\int_0^1 \frac{x^{\lambda-1}dx}{(1+ax)(1-x)^\lambda} = \frac{\pi}{(1+a)^\lambda \sin(\pi\lambda)}, \quad 0<\lambda<1, a>-1.$$

38. $$\int_0^1 \frac{x^{\lambda-1/2}dx}{(1+ax)^\lambda(1-x)^\lambda} = 2\pi^{-1/2}\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1-\lambda)\cos^{2\lambda}k \times$$

$$\times \frac{\sin[(2\lambda-1)k]}{(2\lambda-1)\sin k}, \quad k = \operatorname{arctg}\sqrt{a}; -\frac{1}{2}<\lambda<1, a>0.$$

39. $$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{x^b+1} = \frac{\pi}{b\sin(\pi a/b)}, \quad 0<a\leqslant b.$$

40. $$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(x^b+1)^2} = \frac{\pi(a-b)}{b^2\sin[\pi(a-b)/b]}, \quad a<2b.$$

41. $$\int_0^\infty \frac{x^{\lambda-1/2}dx}{(x+a)^\lambda(x+b)^\lambda} = \sqrt{\pi}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^{1-2\lambda}\frac{\Gamma(\lambda-1/2)}{\Gamma(\lambda)}, \quad \lambda>0.$$

42. $$\int_0^\infty \frac{1-x^a}{1-x^b} x^{c-1} dx = \frac{\pi\sin A}{b\sin C\sin(A+C)}, \quad A = \frac{\pi a}{b}, C = \frac{\pi c}{b};$$

$a+c<b, c>0$.

43. $$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x^2)^{1-b}} = \frac{1}{2}B\left(\frac{1}{2}a, 1-b-\frac{1}{2}a\right), \quad \frac{1}{2}a+b<1, a>0.$$

44. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{(ax^2+b)^n} = \frac{\pi(2m-1)!!(2n-2m-3)!!}{2(2n-2)!!a^m b^{n-m-1}\sqrt{ab}}, \quad a,b>0, n>m+1.$

45. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2m+1}dx}{(ax^2+b)^n} = \frac{m!(n-m-2)!}{2(n-1)!a^{m+1}b^{n-m-1}}, \quad ab>0, n>m+1\geqslant 1.$

46. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{\mu-1}dx}{(1+ax^p)^\nu} = \frac{1}{pa^{\mu/p}}B\left(\frac{\mu}{p}, \nu-\frac{\mu}{p}\right), \quad p>0, 0<\mu<p\nu.$

47. $\displaystyle\int_0^\infty (\sqrt{x^2+a^2}-x)^n\,dx = \frac{na^{n+1}}{n^2-1}, \quad n=2,3,\ldots.$

48. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{(x+\sqrt{x^2+a^2})^n} = \frac{n}{a^{n-1}(n^2-1)}, \quad n=2,3,\ldots.$

49. $\displaystyle\int_0^\infty x^m(\sqrt{x^2+a^2}-x)^n\,dx =$

$$= \frac{n\cdot m!a^{n+m+1}}{(n-m-1)(n-m+1)\ldots(n+m+1)}, \quad n, m=1,2,\ldots,$$

$0\leqslant m\leqslant n-2.$

50. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^m dx}{(x+\sqrt{x^2+a^2})^n} =$

$$= \frac{n\cdot m!}{(n-m-1)(n-m+1)\ldots(n+m+1)a^{n-m-1}}, \quad n=2,3,\ldots.$$

3.2. Интегралы, содержащие экспоненциальные функции

1. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}, \quad a>0.$

2. $\displaystyle\int_0^1 x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}} - e^{-a}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}\frac{1}{a^{n-k+1}}, \quad a>0, n=1,2,\ldots.$

3. $\int\limits_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}}, \quad a > 0, n = 1, 2, \ldots .$

4. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0.$

5. $\int\limits_0^\infty x^{\nu-1} e^{-\mu x}\,dx = \frac{\Gamma(\nu)}{\mu^\nu}, \quad \mu, \nu > 0.$

6. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+e^{ax}} = \frac{\ln 2}{a}.$

7. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2n-1}dx}{e^{px}-1} = (-1)^{n-1}\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{2n}\frac{B_{2n}}{4n}, \quad n = 1, 2, \ldots$ (B_m — числа Бернулли, см. приложение 6.1).

8. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2n-1}dx}{e^{px}+1} = (1-2^{1-2n})\left(\frac{2\pi}{p}\right)^{2n}\frac{|B_{2n}|}{4n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$

9. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^{-px}dx}{1+e^{-qx}} = \frac{\pi}{q\sin(\pi p/q)}, \quad q > p > 0$ или $0 > p > q.$

10. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{bx}+e^{-bx}}\,dx = \frac{\pi}{2b\cos\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}, \quad b > a.$

11. $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-px}-e^{-qx}}{1-e^{-(p+q)x}}\,dx = \frac{\pi}{p+q}\operatorname{ctg}\frac{\pi p}{p+q}, \quad p, q < 0.$

12. $\int\limits_0^\infty (1-e^{-\beta x})^\nu e^{-\mu x}\,dx = \frac{1}{\beta}B\left(\frac{\mu}{\beta}, \nu+1\right).$

13. $\int\limits_0^\infty \exp(-ax^2)\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0.$

14. $\int\limits_0^\infty x^{2n+1}\exp(-ax^2)\,dx = \frac{n!}{2a^{n+1}}, \quad a > 0, n = 1, 2, \ldots .$

15. $\int\limits_0^\infty x^{2n}\exp(-ax^2)\,dx = \dfrac{1\cdot 3\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}a^{n+1/2}}, \quad a>0, n=1,2,\ldots.$

16. $\int\limits_{-\infty}^\infty \exp(-a^2x^2 \pm bx)\,dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{|a|}\exp\left(\dfrac{b^2}{4a^2}\right).$

17. $\int\limits_0^\infty \exp\left(-ax^2 - \dfrac{b}{x^2}\right)dx = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\exp(-2\sqrt{ab}), \quad a, b>0.$

18. $\int\limits_0^\infty \exp(-x^a)\,dx = \dfrac{1}{a}\Gamma\left(\dfrac{1}{a}\right), \quad a>0.$

3.3. Интегралы, содержащие гиперболические функции

1. $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{\operatorname{ch} ax} = \dfrac{\pi}{2|a|}.$

2. $\int\limits_0^\infty \dfrac{dx}{a+b\operatorname{ch}x} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{b^2-a^2}{a+b}} & \text{при } |b|>|a|, \\ \dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\ln\dfrac{a+b+\sqrt{a^2-b^2}}{a+b-\sqrt{a^2-b^2}} & \text{при } |b|<|a|. \end{cases}$

3. $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{2n}dx}{\operatorname{ch} ax} = \left(\dfrac{\pi}{2a}\right)^{2n+1}|E_{2n}|, \quad a>0.$

4. $\int\limits_0^\infty \dfrac{x^{2n}}{\operatorname{ch}^2 ax}\,dx = \dfrac{\pi^{2n}(2^{2n}-2)}{a(2a)^{2n}}|B_{2n}|, \quad a>0.$

5. $\int\limits_0^\infty \dfrac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{ch} bx}\,dx = \dfrac{\pi}{2b\cos\left(\dfrac{\pi a}{2b}\right)}, \quad b>|a|.$

6. $\int\limits_0^\infty x^{2n}\,\frac{\operatorname{ch}ax}{\operatorname{ch}bx}\,dx = \frac{\pi}{2b}\,\frac{d^{2n}}{da^{2n}}\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi a/b\right)}, \quad b > |a|,\ n = 1, 2, \ldots .$

7. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{ch}ax\operatorname{ch}bx}{\operatorname{ch}(cx)}\,dx = \frac{\pi}{c}\,\frac{\cos\left(\frac{\pi a}{2c}\right)\cos\left(\frac{\pi b}{2c}\right)}{\cos\left(\frac{\pi a}{c}\right)+\cos\left(\frac{\pi b}{c}\right)}, \quad c > |a| + |b|.$

8. $\int\limits_0^\infty \frac{x\,dx}{\operatorname{sh}ax} = \frac{\pi^2}{2a^2}, \quad a > 0.$

9. $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{a + b\operatorname{sh}x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{a+b-\sqrt{a^2+b^2}}, \quad ab \neq 0.$

10. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh}ax}{\operatorname{sh}bx}\,dx = \frac{\pi}{2b}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi a}{2b}\right), \quad b > |a|.$

11. $\int\limits_0^\infty x^{2n}\,\frac{\operatorname{sh}ax}{\operatorname{sh}bx}\,dx = \frac{\pi}{2b}\,\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi a}{2b}\right), \quad b > |a|,\ n = 1, 2, \ldots .$

12. $\int\limits_0^\infty \frac{x^{2n}}{\operatorname{sh}^2 ax}\,dx = \frac{\pi^{2n}}{a^{2n+1}}\,|B_{2n}|, \quad a > 0.$

3.4. Интегралы, содержащие логарифмические функции

1. $\int\limits_0^1 x^{a-1}\ln^n x\,dx = (-1)^n\,n!\,a^{-n-1}, \quad a > 0,\ n = 1, 2, \ldots .$

2. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{x+1}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}.$

3. $\int\limits_0^1 \frac{x^n\ln x}{x+1}\,dx = (-1)^{n+1}\left[\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k^2}\right], \quad n = 1, 2, \ldots .$

4. $\int\limits_0^1 \frac{x^{\mu-1}\ln x}{x+a}\,dx = \frac{\pi a^{\mu-1}}{\sin(\pi\mu)}[\ln a - \pi\operatorname{ctg}(\pi\mu)], \quad 0<\mu<1.$

5. $\int\limits_0^1 |\ln x|^{\mu}\,dx = \Gamma(\mu+1), \quad \mu>-1.$

6. $\int\limits_0^{\infty} x^{\mu-1}\ln(1+ax)\,dx = \frac{\pi}{\mu a^{\mu}\sin(\pi\mu)}, \quad -1<\mu<0.$

7. $\int\limits_0^1 x^{2n-1}\ln(1+x)\,dx = \frac{1}{2n}\sum\limits_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad n=1,2,\ldots.$

8. $\int\limits_0^1 x^{2n}\ln(1+x)\,dx = \frac{1}{2n+1}\left[\ln 4 + \sum\limits_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^k}{k}\right], \quad n=0,1,\ldots.$

9. $\int\limits_0^1 x^{n-1/2}\ln(1+x)\,dx = \frac{2\ln 2}{2n+1} + \frac{4(-1)^n}{2n+1}\left[\pi - \sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1}\right],$
$n=1,2,\ldots.$

10. $\int\limits_0^{\infty}\ln\frac{a^2+x^2}{b^2+x^2}\,dx = \pi(a-b), \quad a,b>0.$

11. $\int\limits_0^{\infty}\frac{x^{p-1}\ln x}{1+x^q}\,dx = -\frac{\pi^2\cos(\pi p/q)}{q^2\sin^2(\pi p/q)}, \quad 0<p<q.$

3.5. Интегралы, содержащие тригонометрические функции

1. $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n}x\,dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}, \quad n=1,2,\ldots.$

2. $\int\limits_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}x\,dx = \frac{2\cdot 4\ldots(2n)}{1\cdot 3\ldots(2n+1)}, \quad n=1,2,\ldots.$

3. $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos^n x\,dx =$

$$= -\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(n-2k+1)(n-2k+3)\ldots(n-1)}{(n-2k)(n-2k+2)\ldots n}\,\frac{1}{n-2k} +$$

$$+\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!} & \text{при } n=2m-1,\\[2ex] \dfrac{\pi^2}{8}\cdot\dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!} & \text{при } n=2m,\end{cases}\qquad m=1,2,\ldots.$$

4. $\int\limits_0^{\pi}\dfrac{dx}{(a+b\cos x)^{n+1}} =$

$$= \frac{\pi}{2^n(a+b)^n\sqrt{a^2-b^2}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(2n-2k-1)!!(2k-1)!!}{(n-k)!\,k!}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^k,\ a>|b|.$$

5. $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos ax}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{2a}},\quad a>0.$

6. $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x}\,dx = \ln\left|\dfrac{b}{a}\right|,\quad ab\neq 0.$

7. $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos ax-\cos bx}{x^2}\,dx = \dfrac{1}{2}\pi(b-a),\quad a,b\geqslant 0.$

8. $\int\limits_0^{\infty} x^{\mu-1}\cos ax\,dx = a^{-\mu}\,\Gamma(\mu)\cos\left(\dfrac{1}{2}\pi\mu\right),\quad a>0,\ 0<\mu<1.$

9. $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos ax}{b^2+x^2}\,dx = \dfrac{\pi}{2b}\,e^{-ab},\quad a,b>0.$

10. $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos ax}{b^4+x^4}\,dx = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{4b^3}\exp\left(-\dfrac{ab}{\sqrt{2}}\right)\left[\cos\left(\dfrac{ab}{\sqrt{2}}\right)+\sin\left(\dfrac{ab}{\sqrt{2}}\right)\right],\quad a,b>0.$

11. $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\cos ax}{(b^2+x^2)^2}\,dx = \dfrac{\pi}{4b^3}\,(1+ab)\,e^{-ab},\quad a,b>0.$

12. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos ax\, dx}{(b^2+x^2)(c^2+x^2)} = \frac{\pi(be^{-ac}-ce^{-ab})}{2bc(b^2-c^2)}, \quad a, b, c > 0.$

13. $\displaystyle\int_0^\infty \cos(ax^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}, \quad a > 0.$

14. $\displaystyle\int_0^\infty \cos(ax^p)\, dx = \frac{\Gamma(1/p)}{pa^{1/p}} \cos\frac{\pi}{2p}, \quad a > 0, p > 1.$

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\, dx = \frac{\pi}{2}\,\frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots(2n)}, \quad n = 1, 2, \ldots .$

16. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\, dx = \frac{2\cdot 4\ldots(2n)}{1\cdot 3\ldots(2n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots .$

17. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} a.$

18. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}|a|.$

19. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin ax}{\sqrt{x}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}, \quad a > 0.$

20. $\displaystyle\int_0^\pi x \sin^\mu x\, dx = \frac{\pi^2}{2^{\mu+1}}\frac{\Gamma(\mu+1)}{\left[\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\right]^2}, \quad \mu > -1.$

21. $\displaystyle\int_0^\infty x^{\mu-1}\sin ax\, dx = a^{-\mu}\Gamma(\mu)\sin\left(\frac{1}{2}\pi\mu\right), \quad a > 0, 0 < \mu < 1.$

22. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{a-k^2\sin^2 x}} = \frac{1}{2k}\ln\frac{1+k}{1-k}.$

23. $\displaystyle\int_0^\infty \sin(ax^2)\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}, \quad a > 0.$

24. $\int\limits_0^\infty \sin(ax^p)\,dx = \frac{\Gamma(1/p)}{pa^{1/p}} \sin\frac{\pi}{2p}, \quad a>0, p>1.$

25. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \cos^{2n+1} x\,dx = \frac{n!m!}{2(m+n+1)!}, \quad n, m = 1, 2, \ldots.$

26. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x\,dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}p, \frac{1}{2}q\right).$

27. $\int\limits_0^{2\pi} (a\sin x + b\cos x)^{2n}\,dx = 2\pi \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(a^2+b^2)^n, \quad n = 1, 2, \ldots.$

28. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x \cos ax}{x}\,dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ при } |a|<1, \\ \frac{\pi}{4} \text{ при } |a|=1, \\ 0 \text{ при } 1<|a|. \end{cases}$

29. $\int\limits_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{a^2+1-2a\cos x}} = \begin{cases} 2 & \text{при } 0 \leqslant a \leqslant 1, \\ 2/a & \text{при } 1<a. \end{cases}$

30. $\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{tg} ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign} a.$

31. $\int\limits_0^{\pi/2} (\operatorname{tg} x)^{\pm\lambda}\,dx = \frac{\pi}{2\cos\left(\frac{1}{2}\pi\lambda\right)}, \quad |\lambda|<1.$

32. $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx = \frac{b}{a^2+b^2}, \quad a>0.$

33. $\int\limits_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad a>0.$

34. $\int\limits_0^\infty \exp(-ax^2)\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right).$

35. $\int\limits_0^\infty \cos(ax^2)\cos bx\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{8a}}\left[\cos\left(\frac{b^2}{4a}\right) + \sin\left(\frac{b^2}{4a}\right)\right], \quad a, b > 0.$

36. $\int\limits_0^\infty (\cos ax + \sin ax)\cos(b^2x^2)\,dx = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\pi}{8}}\exp\left(-\frac{a^2}{2b}\right), \quad a, b > 0.$

37. $\int\limits_0^\infty (\cos ax + \sin ax)\sin(b^2x^2)\,dx = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\pi}{8}}\exp\left(-\frac{a^2}{2b}\right), \quad a, b > 0.$

4. Решения обыкновенных дифференциальных уравнений

4.1. Уравнения первого порядка[1)]

1. $y'_x = f(x)$.

Решение: $y = \int f(x)\,dx + C$.

2. $y'_x = f(y)$.

Решение: $x = \int \frac{dy}{f(y)} + C$.

Частные решения: $y = A_k$, где A_k — корни алгебраического (или трансцендентного) уравнения $f(A_k) = 0$.

3. $y'_x = f(x)g(y)$.

Уравнение с разделяющимися переменными.

Решение: $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C$.

Частные решения: $y = A_k$, где A_k — корни алгебраического (или трансцендентного) уравнения $g(A_k) = 0$.

4. $g(x)y'_x = f_1(x)y + f_0(x)$.

Линейное уравнение.

Решение: $y = Ce^F + e^F \int e^{-F} \frac{f_0(x)}{g(x)}\,dx$, где $F(x) = \int \frac{f_1(x)}{g(x)}\,dx$.

5. $g(x)y'_x = f_1(x)y + f_0(x)y^a$.

Уравнение Бернулли. Здесь a — любое (при $a = 0$ и $a = 1$ см. линейное уравнение 4). При $a \neq 1$ замена $w(x) = y^{1-a}$ приводит к линейному уравнению: $w'_x = (1-a)f_1(x)w + (1-a)f_0(x)$.

[1)] В этом приложении приведены решения обыкновенных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых зависят от произвольных функций. Для краткости вместо слов «общее решение» или «общий интеграл» будем писать «решение».

Решение:

$$y^{1-a} = Ce^F + (1-a)e^F \int e^{-F} \frac{f_0(x)}{g(x)}\, dx, \text{ где } F(x) = (1-a) \int \frac{f_1(x)}{g(x)}\, dx.$$

6. $y'_x = f(y/x)$.

Однородное уравнение. Замена $u(x) = y/x$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными: $xu'_x = f(u) - u$.

Решение: $\displaystyle\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + C$.

Частные решения: $y = A_k x$, где A_k — корни алгебраического (или трансцендентного) уравнения $A_k - f(A_k) = 0$.

7. $g(x)y'_x = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x)$.

Уравнение Риккати.

1. Если известно частное решение уравнения Риккати $y_0 = y_0(x)$, то общее решение находится по формуле

$$y = y_0(x) + \Phi(x) \left[C - \int \Phi(x) \frac{f_2(x)}{g(x)}\, dx \right]^{-1},$$

где

$$\Phi(x) = \exp \left\{ \int [2f_2(x)\, y_0(x) + f_1(x)] \frac{dx}{g(x)} \right\}.$$

Частному решению $y_0(x)$ соответствует значение $C = \infty$.

2. Преобразование

$$u(x) = \exp \left(- \int \frac{f_2}{g}\, y\, dx \right)$$

приводит общее уравнение Риккати к линейному уравнению второго порядка

$$g^2 f_2\, u''_{xx} + g[f_2 g'_x - g(f_2)'_x - f_1\, f_2]\, u'_x + f_0 f_2^2\, u = 0,$$

которое часто решается проще, чем исходное уравнение Риккати.

В уравнениях 8—17 принято обозначение: $f = f(x)$.

8. $y = y^2 + fy - a^2 - af$.

Частное решение: $y_0 = a$. Общее решение получается с помощью формулы, приведенной после уравнения 7.

9. $y = fy^2 + ay - ab - b^2f$.

Частное решение: $y_0 = b$. Общее решение получается с помощью формулы, приведенной после уравнения 7.

10. $y'_x = y^2 + xfy + f$.

Частное решение: $y_0 = -1/x$. Общее решение получается с помощью формулы, приведенной после уравнения 7.

11. $y'_x = fy^2 - ax^kfy + akx^{k-1}$.

Частное решение: $y_0 = ax^k$. Общее решение получается с помощью формулы, приведенной после уравнения 7.

12. $y'_x = fy^2 + akx^{k-1} - a^2x^{2k}f$.

Частное решение: $y_0 = ax^k$. Общее решение получается с помощью формулы, приведенной после уравнения 7.

13. $y'_x = -(k+1)x^ky^2 + x^{k+1}fy - f$.

Частное решение: $y_0 = x^{-k-1}$. Общее решение получается с помощью формулы, приведенной после уравнения 7.

14. $xy'_x = fy^2 + ky + ax^{2k}f$.

Решение при $a > 0$: $y = \sqrt{a}\ x^k \operatorname{tg}\left(\sqrt{a}\int x^{k-1} f\,dx + C\right)$.

Решение при $a < 0$: $y = \sqrt{|a|}\ x^k \operatorname{th}\left(-\sqrt{|a|}\int x^{k-1} f\,dx + C\right)$.

15. $xy'_x = x^{2k}fy^2 + (ax^kf - k)y + bf$.

Замена $z = x^ky$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными:

$z'_x = x^{k-1} f(x)(z^2 + az + b)$.

16. $y'_x = fy^2 + gy - a^2f - ag$.

Частное решение: $y_0 = a$. Общее решение получается с помощью формулы, приведенной после уравнения 7.

17. $y'_x = fy^2 + gy + akx^{k-1} - ax^kg - a^2fx^{2k}$.

Частное решение: $y_0 = ax^k$. Общее решение получается с помощью формулы, приведенной после уравнения 7.

В уравнениях 18—33 приняты обозначения: f, g, h — произвольные функции сложного аргумента, который указан в круглых скобках после знака функции и может зависеть от обеих переменных x и y.

18. $y'_x = f(ax + by + c)$.

При $b = 0$ это уравнение вида 1. При $b \neq 0$ замена $u(x) = ax + by + c$ приводит к уравнению вида 2: $u'_x = bf(u) + a$.

19. $y'_x = f(y + ax^k + b) - akx^{k-1}$.

Замена $u = y + ax^k + b$ приводит к уравнению вида 2: $u'_x = f(u)$.

20. $y'_x = \frac{y}{x} f(x^k y^m)$.

Обобщенно-однородное уравнение. Замена $z = x^k y^m$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными: $xz'_x = kz + mzf(z)$.

21. $y'_x = f(x)y^{1+k} + g(x)y + h(x)y^{1-k}$.

Замена $w = y^k$ приводит к уравнению Риккати (см. уравнение 7): $w'_x = kf(x)w^2 + kg(x)w + kh(x)$.

22. $y'_x = -\frac{n}{m}\frac{y}{x} + y^k f(x) g(x^n y^m)$.

Замена $z = x^n y^m$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными:

$$z'_x = m x^{\frac{n-nk}{m}} f(x)\, z^{\frac{k+m-1}{m}} g(z).$$

23. $y'_x = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$.

1. При $\Delta = a\beta - b\alpha \neq 0$ преобразование $x = z + \frac{b\gamma - c\beta}{\Delta}$, $y = u(z) + \frac{c\alpha - a\gamma}{\Delta}$ приводит к уравнению

$$u'_z = f\left(\frac{az + bu}{\alpha z + \beta u}\right).$$

Деля числитель и знаменатель дроби в правой части на z, получим однородное уравнение вида 6.

2. При $\Delta = 0$, $b \neq 0$ замена $w(x) = ax + by + c$ приводит к уравнению вида 2:

$$w'_x = a + bf\left(\frac{bw}{\beta w + b\gamma - c\beta}\right).$$

3. При $\Delta = 0$, $\beta \neq 0$ замена $v(x) = \alpha x + \beta y + \gamma$ приводит к уравнению вида 2:

$$v'_x = \alpha + \beta f\left(\frac{bv + c\beta - b\gamma}{\beta v}\right).$$

24. $y'_x = x^{k-1}y^{1-m}f(ax^k + by^m)$.

Замена $w = ax^k + by^m$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными: $w'_x = x^{k-1}[ak + bmf(w)]$.

25. $y^k y'_x + ax^k + g(x)f(y^{k+1} + ax^{k+1}) = 0$.

Замена $w = y^{k+1} + ax^{k+1}$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными: $w'_x + (k+1)g(x)f(w) = 0$.

26. $[x^k f(y) + xg(y)]y'_x = h(y)$.

Это — уравнение Бернулли относительно $x = x(y)$ (см. уравнение 5).

27. $y'_x = e^{-\lambda x} f(e^{\lambda x} y)$.

Замена $u = e^{\lambda x}y$ приводит к уравнению вида 2: $u'_x = f(u) + \lambda u$.

28. $y'_x = e^{\lambda y} f(e^{\lambda y} x)$.

Замена $u = e^{\lambda x}x$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными (см. уравнение 3): $xu'_x = \lambda u^2 f(u) + u$.

29. $y'_x = yf(e^{\alpha x}y^m)$.

Экспоненциально-однородное уравнение. Замена $z = e^{\alpha x}y^m$ приводит к уравнению вида 2: $z'_x = \alpha z + mzf(z)$.

30. $y'_x = \dfrac{1}{x} f(x^k e^{\alpha y})$.

Экспоненциально-однородное уравнение. Замена $z = x^k e^{\alpha y}$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными: $xz'_x = kz + \alpha zf(z)$.

31. $y'_x = f(x)e^{\lambda y} + g(x)$.

Замена $u = e^{-\lambda y}$ приводит к линейному уравнению: $u'_x = -\lambda g(x)u - \lambda f(x)$.

32. $y'_x = -\dfrac{k}{x} + f(x)g(x^k e^y)$.

Замена $z = x^k e^y$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными: $z'_x = f(x)zg(z)$.

33. $y'_x = -\dfrac{\alpha}{m}\, y + y^k f(x)\, g(e^{\alpha x} y^m)$.

Замена $z = e^{\alpha x} y^m$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными:

$$z'_x = m \exp\left[\frac{\alpha}{m}(1-k)x\right] f(x)\, z^{\frac{k+m-1}{m}}\, g(z).$$

4.2. Линейные уравнения второго порядка

- **Предварительные замечания.**

Линейное однородное уравнение второго порядка имеет вид

$$f_2(x) y''_{xx} + f_1(x) y'_x + f_0(x) y = 0. \qquad (1)$$

Пусть $y_0 = y_0(x)$ — любое нетривиальное ($y_0 \not\equiv 0$) частное решение этого уравнения. Тогда общее решение уравнения (1) можно представить в следующем виде:

$$y = y_0\left(C_1 + C_2 \int \frac{e^{-F}}{y_0^2}\, dx\right), \quad \text{где } F = \int \frac{f_1}{f_2}\, dx. \qquad (2)$$

Для конкретных уравнений, рассмотренных далее, часто будут указаны только частные решения. Общие решения этих уравнений можно получить с помощью формулы (2).

Обозначения: $f = f(x)$ — произвольная функция; a, b, k, α, β — произвольные параметры.

1. $y''_{xx} + ay = f$.

Решение:

$$y = \begin{cases} C_1 \cos(kx) + C_2 \sin(kx) + \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(\xi) \sin[k(x-\xi)]\, d\xi & \text{при } a = k^2 > 0, \\ C_1 \operatorname{ch}(kx) + C_2 \operatorname{sh}(kx) + \dfrac{1}{k}\displaystyle\int_{x_0}^{x} f(\xi) \operatorname{sh}[k(x-\xi)]\, d\xi & \text{при } a = -k^2 < 0, \end{cases}$$

где x_0 — любое.

2. $y''_{xx} + ay'_x + by = f.$

Замена $y = w\exp\left(-\frac{1}{2}ax\right)$ приводит к уравнению вида 1:

$$w''_{xx} + \left(b - \frac{1}{4}a^2\right)w = f\exp\left(\frac{1}{2}ax\right).$$

3. $y''_{xx} + fy'_x = g.$
Решение:

$$y = C_1 + \int e^{-F}\left(C_2 + \int e^F g\,dx\right)dx, \quad \text{где } F = \int f\,dx.$$

4. $y''_{xx} + xfy'_x - fy = 0.$
Частное решение: $y_0 = x.$

5. $y''_{xx} + fy'_x + a(f - a)y = 0.$
Частное решение: $y_0 = e^{-ax}.$

6. $y''_{xx} + fy'_x + a(x^k f - ax^{2k} + kx^{k-1})y = 0.$

Частное решение: $y_0 = \exp\left(-\frac{a}{k+1}x^{k+1}\right).$

7. $y''_{xx} + (f + ax^k + b)y'_x + [(ax^k + b)f + akx^{k-1}]y = 0.$

Частное решение: $y_0 = \exp\left(-\frac{a}{k+1}x^{k+1} - bx\right).$

8. $xy''_{xx} + xfy'_x - [(ax + 1)f + a(ax + 2)]y = 0.$
Частное решение: $y_0 = xe^{ax}.$

9. $xy''_{xx} + (xf + a)y'_x + (a - 1)fy = 0.$
Частное решение: $y_0 = x^{1-a}.$

10. $xy''_{xx} + [(ax + 1)f + ax - 1]y'_x + a^2xfy = 0.$
Частное решение: $y_0 = (ax + 1)e^{-ax}.$

11. $xy''_{xx} + [(ax^2 + bx)f + 2]y'_x + bfy = 0.$

Частное решение: $y_0 = a + \frac{b}{x}.$

12. $xy''_{xx} + (f + ax^{k+1})y'_x + ax^k(f + k)y = 0.$

Частное решение: $y_0 = \exp\left(-\dfrac{a}{k+1}x^{k+1}\right).$

13. $xy''_{xx} + (xf + ax^k)y'_x + [(ax^k - 1)f + akx^{k-1}]y = 0.$

Частное решение: $y_0 = x\exp\left(-\dfrac{a}{k}x^k\right).$

14. $xy''_{xx} + [(ax^k + 1)f + akx^k + 1 - 2k]y'_x + a^2kx^{2k-1}fy = 0.$
Частное решение: $y_0 = (ax^k + 1)\exp(-ax^k).$

15. $x^2y''_{xx} + \alpha xy'_x + \beta y = f(x).$
Неоднородное уравнение Эйлера.
Замена $x = e^t$ приводит к уравнению вида 2:

$$y''_{tt} + (\alpha - 1)y'_t + \beta y = f(e^t).$$

16. $x^2y''_{xx} + xfy'_x + a(f - a - 1)y = 0.$
Частное решение: $y_0 = x^{-a}.$

17. $x^2y''_{xx} + x(f + 2a)y'_x + [(bx + a)f - b^2x^2 + a(a - 1)]y = 0.$
Частное решение: $y_0 = x^{-a}e^{-bx}.$

18. $x^2y''_{xx} + xfy'_x + [(ax^{2k+1} + k)f - a^2x^{4k+2} - k^2 - k]y = 0.$

Частное решение: $y_0 = x^{-k}\exp\left(-\dfrac{a}{2k+1}x^{2k+1}\right).$

19. $y''_{xx} + f\,\mathrm{sh}\,(ax)y'_x - a[a + f\,\mathrm{ch}\,(ax)]y = 0.$
Частное решение: $y_0 = \mathrm{sh}\,(ax).$

20. $y''_{xx} + f\,\mathrm{ch}\,(ax)y'_x - a[a + f\,\mathrm{sh}\,(ax)]y = 0.$
Частное решение: $y_0 = \mathrm{ch}\,(ax).$

21. $y''_{xx} + f\sin(ax)y'_x + a[a - f\cos(ax)]y = 0.$
Частное решение: $y_0 = \sin(ax).$

22. $y''_{xx} + f\cos(ax)y'_x + a[a + f\sin(ax)]y = 0.$
Частное решение: $y_0 = \cos(ax).$

4.3. Нелинейные уравнения второго порядка

Обозначения: f, g, h — произвольные функции сложных аргументов, указанных в круглых скобках после знака функции (аргумент может зависеть от x, y).

1. $y''_{xx} = f(y)$.

Замена $u(y) = y'_x$ приводит к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными: $uu'_y = f(y)$.

$$\text{Решение: } \int [C_1 + 2\int f(y)\,dy]^{-1/2}\,dy = C_2 \pm x.$$

Частные решения: $y = A_k$, где A_k — корни алгебраического (или трансцендентного) уравнения $f(A_k) = 0$.

2. $y''_{xx} = f(ay + bx + c)$.

Замена $w = ay + bx + c$ приводит к уравнению вида 1: $w''_{xx} = a\,f(w)$.

3. $y''_{xx} = f(y + ax^2 + bx + c)$.

Замена $w = y + ax^2 + bx + c$ приводит к уравнению вида 1: $w''_{xx} = f(w) + 2a$.

4. $y''_{xx} = \dfrac{1}{x^3}\,f\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Преобразование $\xi = 1/x$, $w = y/x$ приводит к уравнению вида 1: $w''_{\xi\xi} = f(w)$.

5. $y''_{xx} = x^{-3/2} f(yx^{-1/2})$.

Полагая $w = yx^{-1/2}$, получим

$$\frac{d}{dx}(xw'_x)^2 = \frac{1}{2}\,ww'_x + 2f(w)w'_x.$$

Интегрирование этого уравнения приводит к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными.

$$\text{Решение: } \int \left[C_1 + \frac{1}{4}\,w^2 + 2\int f(w)\,dw\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm \ln|x|.$$

6. $y''_{xx} = f(y + ae^{\lambda x}) - a\lambda^2 e^{\lambda x}$.

Замена $w = y + ae^{\lambda x}$ приводит к уравнению вида 1: $w''_{xx} = f(w)$.

7. $x^2y''_{xx} = x^2f(x^ke^y) + k$.

Замена $y = w - k \ln x$ приводит к уравнению вида 1: $w''_{xx} = f(e^w)$.

8. $x^2y''_{xx} = x^2f(y + a \ln x) + a$.

Замена $w = y + a \ln x$ приводит к уравнению вида 1: $w''_{xx} = f(w)$.

9. $y''_{xx} = f(y + a \sin x) + a \sin x$.

Замена $w = y + a \sin x$ приводит к уравнению вида 1: $w''_{xx} = f(w)$.

10. $y''_{xx} = f(y + a \cos x + b) + a \cos x$.

Замена $w = y + a \cos x + b$ приводит к уравнению вида 1: $w''_{xx} = f(w)$.

5. Ортогональные криволинейные системы координат

Ниже приведены формулы для основных скалярных и векторных дифференциальных операций в ортогональных криволинейных системах координат.

5.1. Произвольная ортогональная система координат

Криволинейные координаты x^1, x^2, x^3 задаются как функции прямоугольных декартовых координат x, y, z:

$$x^1 = x^1(x, y, z), \quad x^2 = x^2(x, y, z), \quad x^3 = x^3(x, y, z).$$

Используя эти зависимости, можно выразить x, y, z через криволинейные координаты x^1, x^2, x^3:

$$x = x(x^1, x^2, x^3), \quad y = y(x^1, x^2, x^3), \quad z = z(x^1, x^2, x^3).$$

Компоненты метрического тензора g_{ij} определяются по формулам

$$g_{ij}(x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial x}{\partial x^i}\frac{\partial x}{\partial x^j} + \frac{\partial y}{\partial x^i}\frac{\partial y}{\partial x^j} + \frac{\partial z}{\partial x^i}\frac{\partial z}{\partial x^j};$$

$$g_{ij}(x^1, x^2, x^3) = g_{ji}(x^1, x^2, x^3); \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Система координат является ортогональной, если выполняются соотношения

$$g_{ij}(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

В этом случае третий инвариант метрического тензора определяется формулой

$$g = g_{11}\, g_{22}\, g_{33}.$$

Ниже приведены основные дифференциальные операторы в ортогональной криволинейной системе координат x^1, x^2, x^3. Соответствующие единичные направляющие вектора обозначаются $\vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3$.

Градиент скаляра p:

$$\nabla p = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial p}{\partial x^1}\,\vec{i}_1 + \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial p}{\partial x^2}\,\vec{i}_2 + \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial p}{\partial x^3}\,\vec{i}_3.$$

Дивергенция вектора $\vec{v} = \vec{i}_1 v_1 + \vec{i}_2 v_2 + \vec{i}_3 v_3$:

$$\nabla\cdot\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(v_1\sqrt{\frac{g}{g_{11}}}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(v_2\sqrt{\frac{g}{g_{22}}}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(v_3\sqrt{\frac{g}{g_{33}}}\right)\right].$$

Градиент скаляра c по вектору $\vec{v}$:

$$(\vec{v}\cdot\nabla)c = \frac{v_1}{\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial c}{\partial x^1} + \frac{v_2}{\sqrt{g_{22}}}\frac{\partial c}{\partial x^2} + \frac{v_3}{\sqrt{g_{33}}}\frac{\partial c}{\partial x^3}.$$

Градиент вектора $\vec{w}$ по вектору $\vec{v}$:

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{w} = \vec{i}_1(\vec{v}\cdot\nabla)w_1 + \vec{i}_2(\vec{v}\cdot\nabla)w_2 + \vec{i}_3(\vec{v}\cdot\nabla)w_3.$$

Ротор вектора $\vec{v}$:

$$\nabla\times\vec{v} = \vec{i}_1\,\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^2}(v_3\sqrt{g_{33}}) - \frac{\partial}{\partial x^3}(v_2\sqrt{g_{22}})\right] +$$

$$+\vec{i}_2\,\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^3}(v_1\sqrt{g_{11}}) - \frac{\partial}{\partial x^1}(v_3\sqrt{g_{33}})\right] +$$

$$+\vec{i}_3\,\frac{\sqrt{g_{33}}}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}(v_2\sqrt{g_{22}}) - \frac{\partial}{\partial x^2}(v_1\sqrt{g_{11}})\right].$$

Оператор Лапласа (лапласиан) скаляра c:

$$\Delta c \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\frac{\partial c}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}}\frac{\partial c}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}}\frac{\partial c}{\partial x^3}\right)\right].$$

Лапласиан вектора $\vec{v}$:

$$\Delta\vec{v} = \nabla(\nabla\cdot\vec{v}) - \nabla\times(\nabla\times\vec{v}).$$

5.2. Цилиндрическая система координат ρ, φ, z

Преобразования координат ($0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$):

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad x = \rho\cos\varphi,$$
$$\operatorname{tg}\varphi = y/x \ (\sin\varphi = y/\rho), \qquad y = \rho\sin\varphi,$$
$$z = z, \qquad z = z.$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{\rho\rho} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = \rho^2, \quad g_{zz} = 1, \quad \sqrt{g} = \rho.$$

Градиент скаляра p:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial \rho}\vec{i}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\vec{i}_\varphi + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{i}_z.$$

Дивергенция вектора $\vec{v}$:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Градиент скаляра c по вектору $\vec{v}$:

$$(\vec{v} \cdot \nabla)c = v_\rho \frac{\partial c}{\partial \rho} + \frac{v_\varphi}{\rho}\frac{\partial c}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial c}{\partial z}.$$

Ротор вектора $\vec{v}$:

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial v_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial z}\right]\vec{i}_\rho +$$

$$+\left(\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho}\right)\vec{i}_\varphi + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\right]\vec{i}_z.$$

Лапласиан скаляра c:

$$\Delta c = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial c}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 c}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}.$$

5.3. Сферическая система координат r, θ, φ

Преобразования координат ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad x = r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$\theta = \arccos\frac{z}{r}, \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}\left(\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), \quad z = r\cos\theta.$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta, \quad \sqrt{g} = r^2\sin\theta.$$

Градиент скаляра p:

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r}\vec{i}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\vec{i}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\vec{i}_\varphi.$$

Дивергенция вектора $\vec{v}$:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Градиент скаляра c по вектору $\vec{v}$:

$$(\vec{v}\cdot\nabla)c = v_r\frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial c}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial c}{\partial \varphi}.$$

Ротор вектора $\vec{v}$:

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta v_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right]\vec{i}_r +$$

$$+\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r}\right]\vec{i}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r v_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial v_z}{\partial\theta}\right]\vec{i}_\varphi.$$

Лапласиан скаляра c:

$$\Delta c = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial c}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial c}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 c}{\partial\varphi^2}.$$

6. Специальные функции и их свойства

В приложении 6 обычно считается, что n — целое положительное число (другие случаи специально оговариваются).

6.1. Некоторые символы и коэффициенты

- **Факториал.**

$$0! = 1! = 1, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)n, \quad n = 2, 3, 4, \ldots,$$

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)(2n) = 2^n n!,$$

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)(2n+1) = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right),$$

$$n!! = \begin{cases} (2k)!! & \text{при } n = 2k \\ (2k+1)!! & \text{при } n = 2k+1, \end{cases} \qquad 0!! = 1.$$

- **Биномиальные коэффициенты.**

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{где } k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$C_a^k = (-1)^k \frac{(-a)_k}{k!} = \frac{a(a-1)\ldots(a-k+1)}{k!}, \text{ где } k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Общий случай:

$$C_a^b = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}, \text{ где } \Gamma(x) \text{ — гамма-функция.}$$

Свойства:

$$C_a^0 = 1, \; C_n^k = 0 \text{ при } k = -1, -2, -3, \ldots \text{ или } k > n,$$

$$C_a^{b+1} = \frac{a}{b+1} C_{a-1}^b = \frac{a-b}{b+1} C_a^b, \; C_a^b + C_a^{b+1} = C_{a+1}^{b+1},$$

$$C_{-1/2}^n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} C_{2n}^n = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

$$C_{1/2}^{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{n2^{2n-1}} C_{2n-2}^{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!},$$

$$C_{n+1/2}^{2n+1} = (-1)^n 2^{-4n-1} C_{2n}^{n}, \quad C_{2n+1/2}^{n} = 2^{-2n} C_{4n+1}^{2n},$$

$$C_{n}^{1/2} = \frac{2^{2n+1}}{\pi C_{2n}^{n}}, \quad C_{n}^{n/2} = \frac{2^{2n}}{\pi} C_{n}^{(n-1)/2}.$$

- **Символ Похгаммера.**

$$(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = (-1)^n \frac{\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-a-n)},$$

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_{n+k} = (a)_n (a+n)_{nk}, \quad (n)_k = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!},$$

$$(a)_{-n} = \frac{\Gamma(a-n)}{\Gamma(a)} = \frac{(-1)^n}{(1-a)_n}, \text{ где } a \neq 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$(1)_n = n!, \quad (1/2)_n = 2^{-2n} \frac{(2n)!}{n!}, \quad (3/2)_n = 2^{-2n} \frac{(2n+1)!}{n!},$$

$$(a+mk)_{nk} = \frac{(a)_{mk+nk}}{(a)_{mk}}, \quad (a+n)_n = \frac{(a)_{2n}}{(a)_n} \quad (a+n)_k = \frac{(a)_k (a+k)_n}{(a)_n}.$$

- **Числа Бернулли, B_n.**

Определение:

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

Численные значения:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30},$$

$$B_6 = \frac{1}{42}, \quad B_8 = -\frac{1}{30}, \quad B_{10} = \frac{5}{66}, \ldots,$$

$$B_{2m+1} = 0 \quad \text{при} \quad m = 1, 2, \ldots.$$

6.2. Гамма-функция

- **Определение. Интегральные представления.**

Гамма-функция $\Gamma(z)$ является аналитической функцией от z всюду, кроме точек $z = 0, -1, -2, \ldots$.

При $\operatorname{Re} z > 0$ имеем

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt.$$

При $-(n+1) < \operatorname{Re} z < -n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$, имеем

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \left[e^{-t} - \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!} \right] t^{z-1}\, dt.$$

- **Формула Эйлера.**

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)} \quad (z \neq 0, -1, -2, \ldots).$$

- **Простейшие свойства.**

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(1) = \Gamma(2) = 1.$$

- **Формулы симметрии.**

$$\Gamma(z)\Gamma(-z) = -\frac{\pi}{z\sin(\pi z)}, \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - z\right) = \frac{\pi}{\cos(\pi x)}.$$

- **Формулы удвоения, утроения и умножения.**

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma(z)\, \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma(3z) = \frac{3^{3z-1/2}}{2\pi}\, \Gamma(z)\, \Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right)\, \Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right),$$

$$\Gamma(nz) = (2\pi)^{(1-n)/2}\, n^{nz-1/2} \prod_{k=0}^{n-1} \Gamma\left(z + \frac{k}{n}\right).$$

- **Дробные значения аргумента.**

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!,$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = (-1)^n \frac{2^n\sqrt{\pi}}{(2n-1)!!}.$$

- **Асимптотическое разложение (формула Стирлинга).**

$$\Gamma(z)=\sqrt{2\pi}\,e^{-z}z^{z-1/2}\left[1+\frac{1}{12}\,z^{-1}+\frac{1}{288}\,z^{-2}+O(z^{-3})\right]\quad(|\arg|z<\pi).$$

- **Логарифмическая производная гамма-функции.**
  Определение:

$$\psi(z)=\frac{d\ln\Gamma(z)}{dz}=\frac{\Gamma'_z(z)}{\Gamma(z)}.$$

Функциональные соотношения:

$$\psi(z)-\psi(1+z)=-\frac{1}{z},$$

$$\psi(z)-\psi(1-z)=-\pi\operatorname{ctg}(\pi z),$$

$$\psi(z)-\psi(-z)=-\pi\operatorname{ctg}(\pi z)-\frac{1}{z},$$

$$\psi\left(\frac{1}{2}+z\right)-\psi\left(\frac{1}{2}-z\right)=\pi\operatorname{tg}(\pi z),$$

$$\psi(mz)=\ln m+\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}\psi\left(z+\frac{k}{m}\right).$$

Интегральные представления ($\operatorname{Re} z>0$):

$$\psi(z)=\int_0^\infty[e^{-t}-(1+t)^{-z}]t^{-1}\,dt,$$

$$\psi(z)=\ln z+\int_0^\infty[t^{-1}-(1-e^{-t})^{-1}]e^{-tz}\,dt,$$

$$\psi(z)=-C+\int_0^1\frac{1-t^{z-1}}{1-t}\,dt,$$

где $C=-\psi(1)=0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера.

Значения при целом аргументе:

$$\psi(1)=-C,\quad\psi(n)=-C+\sum_{k=1}^{n-1}k^{-1}\ (n=2,3,\ldots)$$

6.3. Неполные гамма-функции

- **Определения. Интегральные представления.**

$$\gamma(\alpha, x) = \int_0^x e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0,$$

$$\Gamma(\alpha, x) = \int_0^\infty e^{-t}\, t^{\alpha-1}\, dt = \Gamma(\alpha) - \gamma(\alpha, x).$$

- **Рекуррентные формулы.**

$$\gamma(\alpha+1, x) = \alpha\gamma(\alpha, x) - x^\alpha e^{-x}.$$

$$\Gamma(\alpha+1, x) = \alpha\gamma(\alpha, x) + x^\alpha e^{-x}.$$

- **Асимптотические разложения при $x \to 0$:**

$$\gamma(\alpha, x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{\alpha+n}}{n!(\alpha+n)},$$

$$\Gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) - \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{\alpha+n}}{n!(\alpha+n)}.$$

- **Асимптотические разложения при $x \to \infty$:**

$$\gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) - x^{\alpha-1}e^{-x}\left[\sum_{m=0}^{M-1} \frac{(1-\alpha)_m}{(-x)^m} + O(|x|^{-M})\right],$$

$$\Gamma(\alpha, x) = x^{\alpha-1}e^{-x}\left[\sum_{m=0}^{M-1} \frac{(1-\alpha)_m}{(-x)^m} + O(|x|^{-M})\right],$$

$$\left(-\frac{3}{2}\pi < \arg x < \frac{3}{2}\right).$$

- **Интегралы, связанные с гамма-функцией.**

Интеграл вероятности:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-t^2)\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\gamma\left(\frac{1}{2}, x\right),$$

$$\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-t^2)\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(\frac{1}{2}, x\right).$$

Бета-функция:

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)},$$

где $\operatorname{Re} x > 0$, $\operatorname{Re} y > 0$.

6.4. Функции Бесселя

- **Определение и основные формулы.**

Функции Бесселя первого и второго рода $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ (Y_ν называют также функцией Неймана) являются решениями уравнения Бесселя

$$x^2 y''_{xx} + x y'_x + (x^2 - \nu^2) y = 0$$

и определяются формулами

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k (x/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)},$$

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}. \qquad (1)$$

Формула (1) для $Y_\nu(x)$ пригодна при $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (случаи $\nu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ см. ниже).

Общее решение уравнения Бесселя имеет вид $Z_\nu(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 Y_\nu(x)$ и называется цилиндрической функцией.

Функции Бесселя обладают следующими свойствами:

$$2\nu Z_\nu(x) = x[Z_{\nu-1}(x) + Z_{\nu+1}(x)],$$

$$\frac{d}{dx} Z_\nu(x) = \frac{1}{2}[Z_{\nu-1}(x) - Z_{\nu+1}(x)] = \pm\left[\frac{\nu}{x} Z_\nu(x) - Z_{\nu\pm1}(x)\right],$$

$$\frac{d}{dx}[x^\nu Z_\nu(x)] = x^\nu Z_{\nu-1}(x), \quad \frac{d}{dx}[x^{-\nu} Z_\nu(x)] = -x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x),$$

$$\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n [x^{\nu} Z_{\nu}(x)] = x^{\nu-n} J_{\nu-n}(x),$$

$$\left(\frac{d}{x\,dx}\right)^n [x^{-\nu} J_{\nu}(x)] = (-1)^n x^{-\nu-n} Z_{\nu+n}(x),$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),\ Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x),\ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

- **Функции Бесселя при $\nu = \pm n \pm \frac{1}{2}$; $n = 0, 1, \ldots$.**

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,\ J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,$$

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{1}{x} \sin x - \cos x\right),\ J_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\frac{1}{x} \cos x - \sin x\right),$$

$$J_{n+1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\sin\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (n+2k)!}{(2k)!(n-2k)!(2x)^{2k}} + \right.$$

$$\left. + \cos\left(x - \frac{n\pi}{2}\right) \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{(-1)^k (n+2k+1)!}{(2k+1)!(n-2k-1)!(2x)^{2k+1}}\right],$$

$$J_{-n-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (n+2k)!}{(2k)!(n-2k)!(2x)^{2k}} - \right.$$

$$\left. - \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]} \frac{(-1)^k (n+2k+1)!}{(2k+1)!(n-2k-1)!(2x)^{2k+1}}\right],$$

$$Y_{1/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x,\ Y_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x,$$

$$Y_{n+1/2}(x) = (-1)^{n+1} J_{-n-1/2}(x),\ Y_{-n-1/2}(x) = (-1)^n J_{n+1/2}(x).$$

- **Функции Бесселя при $\nu = \pm n$; $n = 0, 1, 2, \ldots$.**

Пусть $\nu = n$ — произвольное целое число. Справедливы следующие соотношения:

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),\ \ Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x).$$

Функция $J_n(x)$ получается в результате подстановки $\nu = n$ в формулу (1), а функция $Y_n(x)$ находится с помощью предельного перехода при $\nu \to n$ и для неотрицательных n может быть представлена в виде

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \ln \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2k} -$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k} \frac{\psi(k+1) + \psi(n+k+1)}{k!(n+k)!},$$

где $\psi(1) = -\mathcal{C}$, $\psi(n) = -\mathcal{C} + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1}$, $\mathcal{C} = 0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера, $\psi(x) = [\ln \Gamma(x)]'_x$ — логарифмическая производная гамма-функции.

- **Вронскианы и аналогичные формулы.**

Обозначение: $W(f, g) = fg'_x - f'_x g$.

$$W(J_\nu, J_{-\nu}) = -\frac{2}{\pi x} \sin(\pi\nu), \quad W(J_\nu, Y_\nu) = \frac{2}{\pi x},$$

$$J_\nu(x) J_{-\nu+1}(x) + J_{-\nu}(x) J_{\nu-1}(x) = \frac{2\sin(\pi\nu)}{\pi x},$$

$$J_\nu(x) Y_{\nu+1}(x) - J_{\nu+1}(x) Y_\nu(x) = -\frac{2}{\pi x}.$$

- **Интегральные представления.**

Функции J_ν и J_ν можно представить в виде определенных интегралов (при $x > 0$):

$$\pi J_\nu(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin\theta - \nu\theta)\, d\theta - \sin\pi\nu \int_0^\infty \exp(-x \operatorname{sh} t - \nu t)\, dt,$$

$$\pi Y_\nu(x) = \int_0^\pi \sin(x \sin\theta - \nu\theta)\, d\theta - \int_0^\infty (e^{\nu t} + e^{-\nu t} \cos\pi\nu)\, e^{-x \operatorname{sh} t}\, dt.$$

При $|\nu| < \frac{1}{2}$, $x > 0$:

$$J_\nu(x) = \frac{2^{1+\nu}x^{-\nu}}{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\int_1^\infty \frac{\sin(xt)dt}{(t^2-1)^{\nu+1/2}},$$

$$Y_\nu(x) = -\frac{2^{1+\nu}x^{-\nu}}{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\int_1^\infty \frac{\cos(xt)dt}{(t^2-1)^{\nu+1/2}}.$$

При $\nu > -\frac{1}{2}$:

$$J_\nu(x) = \frac{2(x/2)^\nu}{\pi^{1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\nu\right)}\int_0^{\pi/2} \cos(x\cos t)\sin^{2\nu} t\, dt \text{ (формула Пуассона).}$$

При $\nu = 0$, $x > 0$:

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(x \operatorname{ch} t)\, dt, \quad Y_0(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(x \operatorname{ch} t)\, dt.$$

При целых значениях порядка ($n = 0, 1, 2 \ldots$):

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(nt - z\sin t)\, dt \text{ (формула Бесселя),}$$

$$J_{2n}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \cos(z\sin t)\cos(2nt)\, dt,$$

$$J_{2n+1}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin(z\sin t)\sin[(2n+1)t]\, dt.$$

- **Асимптотические разложения при $|x| \to \infty$.**

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{\cos\left(\frac{4x - 2\nu\pi - \pi}{2}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu, 2m)(2x)^{-2m} + \right.\right.$$

$$+ O(|x|^{-2M})\Bigg] - \sin\left(\frac{4x - 2\nu\pi - \pi}{2}\right)\Bigg[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu, 2m+1)(2x)^{-2m-1} +$$

$$+ O(|x|^{-2M-1})\Bigg]\Bigg\},$$

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\Bigg\{\sin\left(\frac{4x - 2\nu\pi - \pi}{4}\right)\Bigg[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu, 2m)(2x)^{-2m} +$$

$$+ O(|x|^{-2M})\Bigg] + \cos\left(\frac{4x - 2\nu\pi - \pi}{4}\right)\Bigg[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m(\nu, 2m+1)(2x)^{-2m-1} +$$

$$+ O(|x|^{-2M-1})\Bigg]\Bigg\},$$

где $(\nu, m) = \dfrac{1}{2^{2m}m!}(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 3^2)\ldots[4\nu^2 - (2m-1)^2] =$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu + m\right)}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu - m\right)}.$$

Для неотрицательных целых n и больших x, имеем

$$\sqrt{\pi x}\ J_{2n}(x) = (-1)^n(\cos x + \sin x) + O(x^{-2}),$$

$$\sqrt{\pi x}\ J_{2n+1}(x) = (-1)^{n+1}(\cos x - \sin x) + O(x^{-2}).$$

● **Асимптотики при больших значениях порядка** ($\nu \to +\infty$).

$$J_\nu(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}}\left(\frac{ex}{2\nu}\right)^\nu, \quad Y_\nu(x) \to -\sqrt{\frac{2}{\pi\nu}}\left(\frac{ex}{2\nu}\right)^{-\nu},$$

где переменная x фиксирована.

$$J_\nu(\nu) \to \frac{2^{1/3}}{3^{2/3}\Gamma(2/3)}\frac{1}{\nu^{1/3}}, \quad Y_\nu(x) \to -\frac{2^{1/3}}{3^{1/6}\Gamma(2/3)}\frac{1}{\nu^{1/3}}.$$

- **Нули функций Бесселя.**

Каждая из функций $J_\nu(x)$, $Y_\nu(x)$ имеет бесконечное множество действительных нулей (для действительных значений ν). Все нули простые, за исключением, быть может, точки $x = 0$.

Приближенные значения нулей функции Бесселя $J_0(\gamma_m) = 0$ можно вычислять по формуле

$$\gamma_m = 2,4 + 3,13(m-1) \quad (m = 1, 2, 3, \ldots),$$

максимальная погрешность которой составляет 0,3%.

- **Функции Ханкеля (функции Бесселя третьего рода).**

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z), \quad i^2 = -1.$$

6.5. Модифицированные функции Бесселя

- **Определения. Основные формулы.**

Модифицированные функции Бесселя первого и второго рода $J_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ (K_ν называется также функцией Макдональда) являются решениями модифицированного уравнения Бесселя

$$x^2 y''_{xx} + xy'_x - (x^2 + \nu^2)y = 0$$

и определяются формулами

$$I_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)}, \quad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{L_{-\nu} - I_\nu}{\sin \pi\nu},$$

(о функции $K_\nu(x)$ при $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ см. ниже).

Модифицированные функции Бесселя обладают следующими свойствами:

$$K_{-\nu}(x) = K_\nu(x), \quad I_{-n}(x) = (-1)^n I_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots;$$

$$2\nu I_\nu(x) = x[I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x)], \quad 2\nu K_\nu(x) = -x[K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x)],$$

$$\frac{d}{dx} I_\nu(x) = \frac{1}{2}[I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)],$$

$$\frac{d}{dx} K_\nu(x) = -\frac{1}{2}[K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x)].$$

- **Модифицированные функции Бесселя при $\nu = \pm n \pm \pm \frac{1}{2}$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$.**

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \operatorname{sh} x, \quad I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\ \operatorname{ch} x,$$

$$I_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\frac{1}{x}\ \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x\right),$$

$$I_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{1}{x}\ \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x\right),$$

$$I_{n+1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\left[e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n+k)!}{k!(n-k)!(2x)^k} - \right.$$

$$\left. - (-1)^n e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2x)^k}\right],$$

$$I_{-n-1/2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\left[e^x \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (n+k)!}{k!(n-k)!(2x)^k} + \right.$$

$$\left. + (-1)^n e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2x)^k}\right],$$

$$K_{\pm 1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}, \quad K_{\pm 3/2}(x) = \frac{\pi}{2x}\left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-x},$$

$$K_{n+1/2}(x) = K_{-n-1/2}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\ e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{k!(n-k)!(2x)^k}.$$

- **Модифицированные функции Бесселя при $\nu = n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$.**

Если $\nu = n$ — неотрицательное целое число, то

$$K_n(x) = (-1)^{n+1} I_n(x) \ln \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-n} \frac{(n-m-1)!}{m!} +$$

$$+ \frac{1}{2} (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \frac{\psi(n+m+1)! + \psi(m+1)}{m!(n+m)!}; \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где $\psi(z)$ — логарифмическая производная гамма-функции; при $n = 0$ первая сумма опускается.

- **Вронскианы и аналогичные формулы.**

Обозначение: $W(f, g) = fg'_x - f'_x g$.

$$W(I_\nu, I_{-\nu}) = -\frac{2}{\pi x} \sin(\pi\nu), \quad W(I_\nu, K_\nu) = -\frac{1}{x},$$

$$I_\nu(x) I_{-\nu+1}(x) + I_{-\nu}(x) I_{\nu-1}(x) = -\frac{2\sin(\pi\nu)}{\pi x},$$

$$I_\nu(x) K_{\nu+1}(x) - I_{\nu+1}(x) K_\nu(x) = \frac{1}{x}.$$

- **Интегральные представления.**

Функции $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$ можно представить с помощью определенных интегралов:

$$I_\nu(x) = \frac{x^\nu}{\pi^{1/2} 2^\nu \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} \exp(-xt)(1-t^2)^{\nu-1/2}\, dt \quad \left(x > 0, \nu > -\frac{1}{2}\right),$$

$$K_\nu(x) = \int_0^\infty \exp(-x \operatorname{ch} t) \operatorname{ch}(\nu t)\, dt \quad (x > 0),$$

$$K_\nu(x) = \frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\pi\nu\right)} \int_0^\infty \cos(x \operatorname{sh} t) \operatorname{ch}(\nu t)\, dt \quad (x > 0, -1 < \nu < 1).$$

$$K_\nu(x) = \frac{1}{\sin\left(\frac{1}{2}\pi\nu\right)} \int_0^\infty \sin(x \operatorname{sh} t) \operatorname{sh}(\nu t)\, dt \quad (x > 0,\ -1 < \nu < 1).$$

При целых значениях порядка:

$$I_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \exp(x \cos t) \cos(nt)\, dt \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$K_0(x) = \int_0^\infty \cos(x \operatorname{sh} t)\, dt = \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{\sqrt{t^2+1}}\, dt \quad (x > 0).$$

- **Асимптотические разложения при $x \to +\infty$.**

$$I_\nu(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left[1 + \sum_{m=1}^{M} (-1)^m \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-3^2)\ldots[4\nu^2-(2m-1)^2]}{m!(8x)^m}\right],$$

$$K_\nu(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\, e^{-x}\left[1 + \sum_{m=1}^{M} \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-3^2)\ldots[4\nu^2-(2m-1)^2]}{m!(8x)^m}\right].$$

В квадратных скобках этих формул отброшены слагаемые порядка $O(x^{-M-1})$.

6.6. Вырожденные гипергеометрические функции

- **Определения. Основные формулы.**

Вырожденные гипергеометрические функции $\Phi(a, b; x)$ и $\Psi(a, b; x)$ являются решениями вырожденного гипергеометрического уравнения

$$xy''_{xx} + (b - x)y'_x - ay = 0.$$

Если $b \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$, то функцию $\Phi(a, b; x)$ можно представить в виде ряда Куммера:

$$\Phi(a, b; x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a)_k}{(b)_k} \frac{x^k}{k!},$$

где $(a)_k = a(a+1)\ldots(a+k-1)$, $(a)_0 = 1$.

В таблице 3 указаны некоторые частные случаи, когда Ф выражается через более простые функции.

Таблица 3

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ФУНКЦИИ КУММЕРА $\Phi(a, b; z)$

a	b	z	Ф	Принятые обозначения
a	a	x	e^x	—
1	2	$2x$	$\frac{1}{x} e^x \operatorname{sh} x$	—
a	$a+1$	$-x$	$ax^{-a}\gamma(a, x)$	неполная гамма-функция $\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1}\, dt$
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-x^2$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} x$	интеграл вероятностей $\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2)\, dt$
$-n$	$\frac{1}{2}$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{n!}{(2n)!}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-n} \times$ $\times H_{2n}(x)$	многочлены Эрмита $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
$-n$	$\frac{3}{2}$	$\frac{x^2}{2}$	$\frac{n!}{(2n+1)!} \times$ $\times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-n} \times$ $\times H_{2n+1}(x)$	
$-n$	b	x	$\frac{n!}{(b)_n} L_n^{(b-1)}(x)$	многочлены Лаггера $L_n^{(\alpha)}(x) =$ $= \frac{e^x x^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+\alpha})$, $\alpha = b - 1$, $(b)_n = b(b+1)\ldots(b+n-1)$

Продолжение табл. 3

a	b	z	Φ	Принятые обозначения
$\nu+\frac{1}{2}$	$2\nu+1$	$2x$	$\Gamma(1+\nu)\,e^{x}\times$ $\times\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} I_{\nu}(x)$	модифицированные функции Бесселя $I_{\nu}(x)$
$n+1$	$2n+2$	$2x$	$\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)\times$ $\times e^{x}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n-\frac{1}{2}}\times$ $\times I_{n+\frac{1}{2}}(x)$	

- **Некоторые преобразования и линейные соотношения.**

Преобразования Куммера:

$$\Phi(a,b;x)=e^{x}\Phi(b-a,b;-x),\quad \Psi(a,b;x)=x^{1-b}\Psi(1+a-b,2-b;x).$$

Линейные соотношения для функции Φ:

$$(b-a)\Phi(a-1,b;x)+(2a-b+x)\Phi(a,b;x)-a\Phi(a+1,b;x)=0,$$

$$b(b-1)\Phi(a,b-1;x)-b(b-1+x)\Phi(a,b;x)+$$
$$+(b-a)x\Phi(a,b+1;x)=0,$$

$$(a-b+1)\Phi(a,b;x)-a\Phi(a+1,b;x)+(b-1)\Phi(a,b-1;x)=0,$$

$$b\Phi(a,b;x)-b\Phi(a-1,b;x)-x\Phi(a,b+1;x)=0,$$

$$b(a+x)\Phi(a,b;x)-(b-a)x\Phi(a,b+1;x)-ab\Phi(a+1,b;x)=0,$$

$$(a-1+x)\Phi(a,b;x)+(b-a)\Phi(a-1,b;x)-(b-1)\Phi(a,b-1;x)=0.$$

Линейные соотношения для функции Ψ:

$$\Psi(a-1,b;x)-(2a-b+x)\Psi(a,b;x)+$$
$$+a(a-b+1)\Psi(a+1,b;x)=0,$$

$$(b-a-1)\Psi(a,b-1;x)-b(b-1+x)\Psi(a,b;x)+$$
$$+x\Psi(a,b+1;x)=0,$$

$$\Psi(a,b;x)-a\Psi(a+1,b;x)-\Psi(a,b-1;x)=0,$$

$$(b-a)\Psi(a,b;x)-x\Psi(a,b+1;x)+\Psi(a-1,b;x)=0,$$

$$(a+x)\Psi(a,b;x)+a(b-a-1)\Psi(a+1,b;x)-$$
$$-x\Psi(a,b+1;x)=0,$$
$$(a-1+x)\Psi(a,b;x)-\Psi(a-1,b;x)+$$
$$+(a-c+1)\Psi(a,b-1;x)=0.$$

- **Формулы дифференцирования и вронскиан.**

Формулы дифференцирования:

$$\frac{d}{dx}\Phi(a,b;x)=\frac{a}{b}\Phi(a+1,b+1;x),$$
$$\frac{d^n}{dx^n}\Phi(a,b;x)=\frac{(a)_n}{(b)_n}\Phi(a+n,b+n;x),$$
$$\frac{d}{dx}\Psi(a,b;x)=-a\Psi(a+1,b+1;x),$$
$$\frac{d^n}{dx^n}\Psi(a,b;x)=(-1)^n(a)_n\Psi(a+n,b+n;x),$$

Вронскиан:

$$W(\Phi,\Psi)=\Phi\Psi'_x-\Phi'_x\Psi=-\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}x^{-b}e^x.$$

- **Вырожденные гипергеометрические функции при $n=0,1,\ldots$.**

$$\Psi(a,n;x)=\frac{(-1)^{n-1}}{n!\Gamma(a-n)}\left\{\Phi(a,n+1;x)\ln x+\right.$$
$$\left.+\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(a)_r}{(n+1)_r}[\psi(a+r)-\psi(1+r)-\psi(1+n+r)]\frac{x^r}{r!}\right\}+$$
$$+\frac{(n-1)!}{\Gamma(a)}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(a-n)_r}{(1-n)_r}\frac{x^{r-n}}{r!},$$

где $n=0,1,2,\ldots$ (последняя сумма опускается при $n=0$), $\psi(z)=[\ln\Gamma(z)]'_x$ — логарифмическая производная гамма-функции:

$$\psi(1)=-\mathscr{C},\quad \psi(n)=-\mathscr{C}+\sum_{k=1}^{n-1}k^{-1},$$

$\mathscr{C}=0{,}5772\ldots$ — постоянная Эйлера.

Если b — отрицательное число, то функцию Ψ можно записать с помощью формулы

$$\Psi(a, b; x) = x^{1-b}\,\Psi(a-b+1, 2-b; x),$$

которая пригодна для любых значений x.

При $b \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$ общее решение вырожденного гипергеометрического уравнения можно представить в виде

$$y = C_1\,\Phi(a, b; x) + C_2\,\Psi(a, b; x),$$

а при $b = 0, -1, -2, -3, \ldots$ — в виде

$$y = x^{1-b}[C_1\,\Phi(a-b+1, 2-b; x) + C_2\,\Psi(a-b+1, 2-b; x)].$$

- **Интегральные представления.**

$$\Phi(a, b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}\int_0^1 e^{xt}\,t^{a-1}\,(1-t)^{b-a-1}\,dt$$

(при $b > a > 0$),

$$\Psi(a, b; x) = \frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty e^{-xt}\,t^{a-1}\,(1+t)^{b-a-1}\,dt$$

(при $a > 0,\ x > 0$),

где $\Gamma(a)$ — гамма-функция.

- **Асимптотические разложения при $|x| \to \infty$.**

$$\Phi(a, b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\,e^x\,x^{a-b}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{(c-a)_n(1-a)_n}{n!}\,x^{-n} + \varepsilon\right],\ x > 0,$$

$$\Phi(a, b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(b-a)}\,(-x)^{-a}\left[\sum_{n=0}^{N}\frac{(a)_n(a-b+1)_n}{n!}\,(-x)^{-n} + \varepsilon\right],$$

$x < 0$,

$$\Psi(a, b; x) = x^{-a}\left[\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\,\frac{(a)_n(a-b+1)_n}{n!}\,x^{-n} + \varepsilon\right],$$

$-\infty < x < +\infty$,

где $\varepsilon = O(x^{-N-1})$.

6.7. Ортогональные многочлены

Все нули каждого из ортогональных многочленов $P_n(x)$, рассмотренных в этом разделе, действительные и простые. Нули многочленов $P_n(x)$ и $P_{n+1}(x)$ перемежаются.

- **Многочлены Лежандра.**

Многочлены (полиномы) Лежандра $P_n = P_n(x)$ удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)y''_{xx} - 2xy'_x + n(n+1)y = 0$$

и определяются формулами

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Многочлены $P_n = P_n(x)$ можно вычислять последовательно с помощью рекуррентных соотношений

$$P_0 = 1, P_1 = x, P_2 = \frac{1}{2}(3x^2-1), \ldots, P_{n+1} = \frac{2n+1}{n+1}xP_n - \frac{n}{n+1}P_{n-1}.$$

Все нули многочлена $P_n(x)$ действительны и лежат в интервале $-1 < x < +1$; функции $P_n(x)$ образуют на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$ ортогональную систему, причем

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \dfrac{2}{2n+1} & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Производящая функция:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2sx+s^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)s^n \quad (|s| < 1).$$

- **Многочлены Лаггера.**

Многочлены Лаггера $L_n = L_n(x)$ удовлетворяют уравнению

$$xy''_{xx} + (1-x)y'_x + ny = 0$$

и определяются формулами

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) =$$

$$= (-1)^n\left[x^n - n^2 x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!}x^{n-2} - \ldots\right].$$

Первые четыре многочлена:

$$L_0 = 1,\ L_1 = -x + 1,\ L_2 = x^2 - 4x + 2,\ L_3 = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6.$$

Рекуррентные формулы (для вычисления L_n при $n \geqslant 2$):

$$L_{n+1}(x) = (2n + 1 - x)\, L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x).$$

Функции $L_n(x)$ образуют на интервале $0 \leqslant x < \infty$ ортогональную систему, причем

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ (n!)^2 & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Присоединенные многочлены Лаггера степени $n - k$ и порядка k определяются так:

$$L_n^k(x) = \frac{d^k}{dx^k} L_n(x).$$

Они удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$xy''_{xx} + (k + 1 - x)y'_x + (n - k)y = 0,$$

где $n = 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots$.

Производящая функция:

$$\frac{1}{1-s} \exp\left(-\frac{sx}{1-s}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \frac{s^n}{n!}.$$

- **Многочлены Чебышева.**

Многочлены Чебышева $T_n = T_n(x)$ удовлетворяют уравнению

$$(1 - x^2)y''_{xx} - xy'_x + n^2 y = 0 \qquad (1)$$

и определяются формулами

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1 - x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \frac{n}{2} \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^m \frac{(n - m - 1)!}{m!(n - 2m)!} (2x)^{n - 2m} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $[A]$ — целая часть A.

Первые четыре многочлена:

$$T_0 = 1,\ T_1 = x,\ T_2 = 2x^2 - 1,\ T_3 = 4x^3 - 3x.$$

Рекуррентные формулы (для вычисления T_n при $n \geqslant 2$):

$$T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

Функции $T_n(x)$ образуют на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant +1$ ортогональную систему, причем

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \frac{1}{2}\pi & \text{при } n = m \neq 0, \\ & \text{при } n = m = 0. \end{cases}$$

Дифференциальному уравнению (1) помимо многочленов Чебышева удовлетворяют также функции Чебышева второго рода:

$$U_0(x) = \arcsin x,$$

$$U_n(x) = \sin(n \arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\,\frac{dT_n(x)}{dx}\quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Производящая функция:

$$\frac{1 - sx}{1 - 2sx + s^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)s^n \quad (|s| < 1).$$

- **Многочлены Эрмита.**

Многочлены Эрмита $H_n = H_n(x)$ удовлетворяют уравнению

$$y''_{xx} - 2xy'_x + 2ny = 0$$

и определяются формулами

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2)\,\frac{d^n}{dx^n}\exp(-x^2).$$

Первые четыре многочлена:

$$H_0 = 1,\ H_1 = x,\ H_2 = 4x^2 - 2,\ H_3 = 8x^3 - 12x.$$

Рекуррентные формулы (для вычисления H_n при $n \geqslant 2$):

$$H_{n+1}(x) = 2x\,H_n(x) - 2nH_{n-1}(x).$$

Функции $H_n(x)$ образуют на интервале $-\infty < x < +\infty$ ортогональную систему, причем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) H_n(x) H_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \sqrt{\pi}\, 2^n\, n! & \text{при } n = m. \end{cases}$$

Функции Эрмита вводятся по формуле $\psi_n(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \times$ $\times H_n(x)$, где $n = 0, 1, \ldots$.

Производящая функция:

$$\exp(-s^2 + 2sx) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{s^n}{n!}.$$

7. Таблицы некоторых физических постоянных

Таблица 4

ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Название	Обозначение	Значение
Боровский радиус	$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k e^2}$	$5{,}2918 \cdot 10^{-11}$ м
Гравитационная постоянная	γ	$6{,}6720 \cdot 10^{-11}$ Н · м²/кг²
Комптоновская длина волны протона	$\lambda_{Cp} = \frac{h}{m_p c}$	$1{,}3214 \cdot 10^{-15}$ м
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda_{Ce} = \frac{h}{m_e c}$	$2{,}4263 \cdot 10^{-12}$ м
Коэффициент в законе Био — Савара	$\frac{\mu_0}{4\pi}$	10^{-7} Гн/м
Коэффициент в законе Кулона	$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$9{,}00 \cdot 10^{9}$ м/Ф
Магнетон Бора	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$	$0{,}9274 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл
Магнитная постоянная	$\mu_0 = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}$	$1{,}2566 \cdot 10^{-8}$ Гн/м
Магнитный момент протона	p_{mp}	$1{,}4106 \cdot 10^{-26}$ Дж/Тл
Магнитный момент электрона	p_{me}	$9{,}2848 \cdot 10^{-24}$ Дж/Тл
Масса нейтрона	m_n	$1{,}6750 \cdot 10^{-27}$ кг

Продолжение табл. 4

Название	Обозначение	Значение
Масса протона	m_p	$1{,}6726 \cdot 10^{-27}$ кг
Масса электрона	m_e	$9{,}1095 \cdot 10^{-31}$ кг
Отношение масс протона и электрона	$\frac{m_p}{m_e}$	1836,15
Постоянная Авогадро	N_A	$6{,}0220 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = R/N_A$	$1{,}3807 \cdot 10^{-23}$ Дж/К
Постоянная Вина	b	$2{,}8978 \cdot 10^{-3}$ м · К
Постоянная Планка	h	$6{,}6262 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1{,}0546 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Постоянная Ридберга а) для энергии, R; б) для циклической частоты, R_ω; в) для частоты, R_ν; г) для обратной длины волны, R_λ	$R = \frac{m_e k^2 e^4}{2\hbar^2}$	13,605 эВ = $2{,}1796 \cdot 10^{-18}$ Дж
	$R_\omega = R/\hbar$	$2{,}0671 \cdot 10^{16}$ с$^{-1}$
	$R_\nu = R/2\pi\hbar$	$3{,}2898 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$
	$R_\lambda = R/2\pi c\hbar$	$1{,}0974 \cdot 10^{7}$ м$^{-1}$
Постоянная Стефана —Больцмана	$\sigma = \frac{\pi^2 k^4}{60 c^2 d \hbar^3}$	$5{,}6703 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м^2 · К^4)
Скорость света в вакууме	c	$2{,}9979 \cdot 10^{8}$ м/с
Удельный заряд электрона	$-e/m_e$	$-1{,}7588 \cdot 10^{11}$ Кл/кг

Продолжение табл. 4

Название	Обозначение	Значение
Удельный заряд протона	e/m_p	$0{,}959 \cdot 10^8$ Кл/кг
Универсальная газовая постоянная	R	8,3144 Дж/(моль · К)
Электрическая постоянная	ε_0	$8{,}8542 \cdot 10^{-12}$ Ф/м
Элементарный заряд	e	$1{,}6022 \cdot 10^{-19}$ Кл
Энергия покоя нейтрона	$m_n c^2$	939,57 МэВ
Энергия покоя протона	$m_p c^2$	938,28 МэВ
Энергия покоя электрона	$m_e c^2$	0,51100 МэВ

Таблица 5

АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Название	Обозначение	Значение
Стандартное ускорение свободного падения	$g = \gamma \frac{M_З}{R_З^2}$	9,8067 м/с^2
Масса Земли	$M_З$	$5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг
Плотность Земли (средняя)	$\rho_З$	$5{,}52 \cdot 10^3$ кг/м^3
Радиус Земли (средний)	$R_З$	6378 км

Продолжение табл. 5

Название	Обозначение	Значение
Расстояние от Земли до Луны (среднее)	—	$3{,}844 \cdot 10^8$ м
Расстояние от Земли до Солнца (среднее)	—	$1{,}496 \cdot 10^{11}$ м
Масса Солнца	M_C	$1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг

Предметный указатель

Абсолютно твердое тело 513
— черное тело 442
Абсолютное удлинение 590
Абсцисса 16
Аксиомы статики 520
Алгебраическое дополнение 44, 45, 46, 51
Амплитуда затухающих колебаний 381
— колебаний 370
Аналитическая геометрия в пространстве 28
— геометрия на плоскости 16
— механика 559
Анизотропия искусственная 436
Арккосинус 66
Арккотангенс 66
Арксинус 65
Арктангенс 66
Асимптота 76
— вертикальная 76
— гиперболы 25
— наклонная 76
— графика функции 76
Атом во внешнем магнитном поле 490
— водорода 461
— в квантовой механике 478

Базис системы векторов 57
Бесконечно большие функции 73
— малые функции 73
Билинза Бийе 416
Бинормаль 499
Бипризма Френеля 416
Бозон 484
Боровский радиус 462

Вектор 29
— *n*-мерный 55
— Пойнтинга 367
— Умова 392
— напряжения 583
— плоскости нормальный 34
— угловой скорости 213
Векторная диаграмма 372
— модель 473
Векторное произведение 32
Векторный потенциал 348
Векторы ортогональные 56
Вероятность 193
— геометрическая 194
— условная 194
Вечный двигатель второго рода 269
— двигатель первого рода 265
Взаимная индукция 359, 361
Вибратор Герца 402
Виртуальное перемещение 563
Внецентренное растяжение (сжатие) 613
Внешние силы 542
Внутренние силы 542
Внутренняя энергия 264
Внутренняя энергия газа Ван-дер-Ваальса 272
— энергия идеального газа 267, 272
Водородоподобные ионы 462
Возможное перемещение 563, 564
Волна монохроматическая плоская 400
— плоская 388, 400
— поляризованная по кругу 400
— поперечная 388, 400

Волна продольная 388
— стоячая 395
— эллиптически поляризованная 400
Волновая зона 402
— поверхность 388
— функция 464
Волновое сопротивление 382
— число 389
— уравнение 390
Волновой вектор 389
— пакет 393
Волны де Бройля 464
— расходящиеся сферические 389
— расходящиеся цилиндрические 389
— упругие 387
— электромагнитные 389
Вращение равномерное 504
— равнопеременное 504
— твердого тела вокруг неподвижной оси 503
Время когерентности 373
— релаксации 263
— собственное 254
Вторая задача динамики 539, 540
Второе начало термодинамики 269
Второй закон Ньютона 518
Вынужденное излучение 455
— (индуцированное) поглощение 455
Выпуклость вверх (вниз) 86
Выражение подынтегральное 102

Газ разреженный 300
— ультраразреженный 300
Гамильтониан 470
Гармоники 396
Геометрическая оптика 407
— прогрессия 143
Геометрический смысл двойного интеграла 126
Геометрический смысл несобственного интеграла 120
— смысл определенного интеграла 115
Гибкость стержня 623
Гипербола 24
Гиперболические функции 631
Гиперболический параболоид 43
Гиперболоид 41
Гипотеза плоских сечений 589, 603
— чистого изгиба 602
Гиромагнитное отношение 353, 477
Гироскоп 251
—тяжелый 251
Гистерезис 325
Главная нормаль 499
Главное квантовое число 462, 478
— сечение кристалла 433
Главные диэлектрические проницаемости 433
— напряжения 583
— центральные оси инерции 610
Главный вектор сил инерции 561
— вектор системы сил 517
— момент сил инерции 561
— момент системы сил относительно центра 517
Голография 420
Градиент 96, 229
Граница рентгеновского спектра 452
График функции 90

Давление волны 401
— критическое 288
— света 452
Движение вращательное 213
— в центральном поле 476
— замедленное 498

Движение относительное 213, 215, 511
— переносное 215, 511
— плоскопараллельное 505
— по окружности 212
— поступательное 212, 503
— равномерное 209, 500
— равнопеременное 500
— равноускоренное 210
— реактивное 224
— с неподвижной точкой 248
— сложное (составное) 510
— твердого тела плоское 213, 247
— ускоренное 498
— центра масс 223
Двойные интегралы 124
Декартова прямоугольная система координат 16, 28
Декремент затухания 381
— затухания логарифмический 381
Деформации при кручении 594
Деформация 577, 580
— линейная 581
— угловая 581
Диамагнетики 349, 353
Диаметр множества 124
— разбиения 114, 124
Дивергенция 140
Динамика 216
— материальной точки 538
— твердого тела 244
Дипольный момент 302
Директриса параболы 25
Дискретность уровней энергии 467
Диспергирующая среда 436
Дисперсия 198, 200, 393, 436
— аномальная 438
— нормальная 438
Дифракционная решетка 426
Дифракция 421
— Фраунгофера на круглом отверстии 425
— Фраунгофера от щели 424
Дифракция рентгеновских лучей на кристалле 428
Дифференциал 78
Дифференциал второго порядка 84
— функции 92
Дифференциальное уравнение неоднородное 170
— уравнение однородное 170
Дифференциальные операции 140
— операции векторные 142
— уравнения второго порядка 681, 684
— уравнения первого порядка 676
— уравнения обыкновенные 161
Дифференцирование интеграла по переменному верхнему пределу 117
— неявной функции 95
Диэлектрик 318
— изотропный 320
Диэлектрическая проницаемость 320
Диэлектрические оси кристалла 433
Длина волны 389
— кривой 119
— когерентности 418
— пути оптическая 409
— свободного пробега 296
Домены 325, 354
Допускаемое напряжение 591
Достаточные условия сходимости несобственных интегралов 121
Дробь неправильная 107
— правильная 107
— рациональная 107

Естественные оси координат 499

Жесткость 577
— сечения стержня 590
Жидкость перегретая 288
Жорданово преобразование 53

Задание функции аналитическое 60
— функции неявное 60
— функции параметрическое 60
Задача Коши 162, 168, 179
— статически неопределимая 523
— статически определимая 523
Задачи расчета на прочность 591
— статики 520
Закон Ампера 340, 341
— Био-Савара-Лапласа 342
— больших чисел 202
— Бугера 441
— Видемана-Франца 339
— вращения твердого тела 503
— всемирного тяготения 238
— Гаусса 201
— Гука 220
— Дальтона 283
— движения 209
— Джоуля-Ленца 334
— Джоуля-Ленца для участка цепи 336
— инерции 518
—Кеплера второй 241
— Кеплера первый 241
— Кеплера третий 241
— Кирхгофа 442
— Кулона 301, 302, 535
— Малюса 430
— Мозли 490
— независимости световых пучков 407
— Ньютона второй 218, 518
— Ньютона первый 216, 518
— Ньютона третий 218, 519
Закон отражения света 407
— Ома 334
— Ома для неоднородного участка цепи 336
— Ома для неразветвленной цепи 337
— парности касательных напряжений 584
— полного тока 345
— преломления света 407
— прямолинейного распространения света 407
Закон равенства действия и противодействия 519
— распределения случайной величины нормальный 201
— релятивистской динамики основной 260
— Рэлея 440
— смещения Вина 444
— Снеллиуса 407, 431
— сохранения импульса 221
— сохранения кинетического момента 552
— сохранения количества движения 549
— сохранения механической энергии 229
— сохранения момента импульса 232, 235
— сохранения электрического заряда 301
— сохранения энергии 224
— сохранения энергии для электромагнитного поля 366
— Стефана-Больцмана 443
— трения качения 536
— трения скольжения 535
— Фарадея 357
— Фика 298
— электромагнитной индукции 356
Законы Галилея-Ньютона 518
— геометрической оптики 407

Законы трения 535
Замена переменной (подстановка) в определенном интеграле 117
— переменных в двойном интеграле 127
— переменных в тройном интеграле 131
Заряд электрический 301
— элементарный 301
Заряды свободные 314
Зеркала Френеля 416
Зеркало Ллойда 416
Значение функции наибольшее 86
Значение функции наименьшее 86
Зоны Френеля 422

Идеальный газ 262, 279
Изгиб 598
— поперечный 598
— прямой 598
— с кручением 616
— чистый 598
Изгибающий момент 579, 598
Излучательная способность тела 442
Излучение Вавилова — Черенкова 421
— волн движущимися зарядами 402
— вынужденное 455
— плоского тока 401
— спонтанное 455
Изотермы реального газа 287
Изотопический эффект 463
Импульс 216, 217, 222
— релятивистский 257
— силы 218, 547
Инверсная заселенность уровней 297
Индуктивность 260
Индукция электростатическая 316
Инерциальные системы отсчета 216, 519
Интеграл дифференциального уравнения 161
— неопределенный 102
— несобственный 120
— определенный 114
— расходящийся 120
— Фурье 157
Интегралы от неограниченных функций 122
— с бесконечными пределами 120
— содержащие гиперболические функции 648, 669
— содержащие иррациональные функции 643
— содержащие логарифмические функции 652, 670
— содержащие обратные тригонометрические функции 662
— содержащие показательные (экспоненциальные) функции 646, 667
Интегралы, содержащие рациональные функции 637
— содержащие тригонометрические функции 654, 671
Интегральная сумма 114, 135, 137
Интегральные кривые 162
Интегрирование иррациональных функций 109
— неравенств 116, 126, 130
— по частям 105, 117
— показательных функций 111
— рациональных функций 107
— тригонометрических функций 112
— четных и нечетных функций 116
Интенсивность волны 393
— колебаний 413
— лучистого потока 410
— нагрузки 534
— электромагнитной волны 401

Интервал 59, 255
— замкнутый 59
— полуоткрытый 59
— сходимости степенного ряда 150
Интерференция в тонких пленках 418
— волн 394, 413
— от естественных источников света 415
— света 413
Источник ламбертовский 412

Калибровка Лоренца 365
Калибровочное преобразование 348, 365
Канонические уравнения 23, 24, 25, 37, 278
— уравнения поверхностей второго порядка 40, 41
— квадрант 16
Квант света 450
Квантовая гипотеза Планка 447
Квантовое число главное 462, 478
— число магнитное 475
Квантовое число магнитное спиновое 481
— число орбитальное 475
— число радиальное 477
— число спиновое 481
Квантовый генератор (лазер) 458
— осциллятор 470
Кинематика 208, 496
— твердого тела 212, 502
— точки 208, 496
Кинетическая теория идеального газа 279
Кинетический момент 550
Кипение 293
Когерентность временная 417
— пространственная 416, 417
— световых волн 413
Когерентные кванты 457
— источники 394
Колебания 370
— вынужденные 382
— гармонические 370
— затухающие 380
— когерентные 373
— линейно поляризованные 374
— механические вынужденные 382
— свободные механические 374
— свободные незатухающие 374
— собственные 395
— электрические вынужденные 385
— электрические затухающие 382
— эллиптически поляризованные 374
Количество движения механической системы 547
— движения точки 547
Коллинеарные векторы 29
Комбинаторика 190
Конденсатор 326
Компенсатор 435
Конус 41
Координата дуговая 499
Координаты вектора 55
— декартовы 16
— полярные 17
— точки 16
Координаты центра тяжести плоской пластины 129
— центра тяжести тела 132
— сферические 29
— цилиндрические 28
Корпускулярно-волновой дуализм 450, 464
Косинус 64
Косинус-преобразование Фурье 159
Космическая скорость вторая 242
— скорость первая 241
Косой изгиб 610

Котангенс 64
Коэффициент взаимной индукции 361
—давления температурный 264
— затухания 380
— затухания волны 389
— квантового усиления 457
— объемного расширения 264
— ослабления 441
— отражения 401, 432
— поверхностного натяжения 294
— полезного действия 268
— приведенной длины 622
— продольного изгиба 624
— Пуассона 585
— самоиндукции 360
— сопротивления температурный 335
— трения динамический 536
— трения качения 536
— трения статический 535
— трения динамический 536
Коэффициенты разложения 56
— Эйнштейна 454, 455
Краевой угол 295
Красная граница фотоэффекта 449
Кривая возгонки 291
— плавления 291
Кривизна 499
— оси 603
Криволинейный интеграл второго рода 134
— интеграл первого рода 133
Критерий Коши сходимости ряда 145
Критерий Рэлея 426
Критическая сила 619
Крутящий момент 579, 593
Кручение 593

Лазер (квантовый генератор) 458
Ламбертовский источник 412
Линеаризация функции 93
Линейная алгебра 44
Линейное дифференциальное уравнение 165, 170
— неоднородное дифференциальное уравнение 170
— однородное дифференциальное уравнение 170, 172
Линейные дифференциальные уравнения второго порядка 681
Линейный гармонический осциллятор 468
Линейчатые спектры 459
Линия уровня 91, 96
Лоренцов четырехмерный вектор (4-вектор) 256
Лучистый поток 410

Магнетик 349
— изотропный 252
Магнетон Бора 477
Магнитная индукция 340
— проницаемость 352
Магнитное поле 340
Магнитный момент 341, 477
Мажоранта ряда 149
Максимум 85
Масса 216, 519
— материальной кривой 134
— плоской пластины 128
— приведенная 236
— системы 543
— стержня переменной плотности 120
— тела переменной плотности 132
Математическое ожидание 198, 200
Матрица 47
— единичная 50
— квадратная 47
— невырожденная 50
— обратимая 50
— обратная 50
— расширенная 51
Мгновенная ось вращения 214, 510

Мгновенный центр скоростей 506
— центр ускорений 509 Метод вариации постоянных 174
— Жордана — Гаусса 53
— замены переменной 105, 106
— касательных (метод Ньютона) 185
— ломаных Эйлера 188
— наименьших квадратов 183
— неопределенных коэффициентов 176
— Ньютона 185
— отрицательных масс 534
— разбиения 533
— Рунге-Кутты 189
— сечений 579
— узловых потенциалов 338
—хорд 186
— электростатических изображений 316
Механизмы поляризации 323
Механическая связь 515, 520, 526
— система 515
Механическое движение 208
Минимум 85
Минор 44
Множество замкнутое 90
— неограниченное 90
— ограниченное 90
— открытое 90
Множитель Ларанжа 99
Модель атома планетарная 460
— атома Томсона 460
— атома ядерная 460
— Бора 460
Модуль вектора 29, 56
— всестороннего сжатия 264
— сдвига 586
— упругости второго рода 586
— упругости первого рода 384
Молекулярная оптика 437
— физика 261
Молекулярно-кинетическая теория 261
Молярная теплоемкость 268
Момент дипольный 302
— импульса 233
— импульса системы 234
—инерции 245, 544
— пары сил 518
—силы 232, 516
— силы относительно оси 233
— сосредоточенный 578
Моменты инерции главные 249
— инерции плоской пластины 129
— инерции тела 132
Мощность 225
Мультиплетность термов 487

Намагниченность вещества 349
— насыщения 355
— остаточная 355
Направляющие косинусы 32
Напряжение 326, 580
— касательное 580
— критическое 619
— максимальное 607
— нормальное 580
Напряжения при кручении 594
Напряженно-деформированное состояние 583
Напряженность магнитного поля 351
— поля тяготения 239
— электрического поля 304
Насыщенный пар 287
Начальные условия 211
Неизвестное базисное 52
— разрешенное 52
— свободное 52
Неинерциальная система отсчета 242, 519
Нейтральный слой 603
Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка 684

Необходимый признак сходимости ряда 143
Неоднородное уравнение Эйлера 683
Неопределенный интеграл 102
Непрерывность 74
Неравенство Клаузиуса 273
— Чебышева 202
Несобственные интегралы 120
Неупругий удар 258
Неявная функция 95
Нулевые колебания 457
Нутация земной оси 250

Обертоны 396
Область определения 60, 90
— сходимости ряда 148
Обобщенные координаты 565, 570
— силы 570
— скорости 570
Обратные гиперболические функции 636
— тригонометрические функции 634
Общее решение дифференциального уравнения 162, 168
— уравнение динамики 568
— уравнение кривой второго порядка 26
Общий интеграл дифференциального уравнения 162, 168
— член последовательности 68
— член ряда 143
Объединение событий 192
Объем критический 288
— области 132
— тела вращения 119
Обыкновенное дифференциальное уравнение 161
Одноосное растяжение 584
— сжатие 584
Одноосные кристаллы 433
Однородное уравнение 164
Окрестность точки 59, 90
Окружность 22
— соприкасающаяся 499
Оператор Гамильтона 142
— Лапласа 142
— орбитального углового момента 472
— углового момента 472
— физических величин 469
Определенный интеграл 114
Определитель 44
— второго порядка 44
— n-го порядка 46
— произведения двух матриц 49
— третьего порядка 44
Оптическая ось 409
— ось кристалла 233
— разность хода 415
Оптически анизотропные среды 433
Опыт Юнга 416
Опыты Девиссона-Джермера 464
— Резерфорда 460
— Эйнштейна-де Гаазе 481
— Юнга 414, 416
Ордината 16
Орт 30
Ортогональные криволинейные системы координат 686
Освещенность 411
Оси Кёнига 543
Основное состояние атома 461
Осциллятор 402
— линейный гармонический 404
Ось вращения 213
— вращения мгновенная 214
Отражение волн 430
— света полное 408
Отрезок 59

Пар насыщенный 288
— ненасыщенный 288
— переохлажденный 288
Пара сил 518

Парабола 125
Параболоид вращения 43
— гиперболический 43
— эллиптический 43
Парадокс близнецов 254
— Гиббса 276
Парамагнетики 349, 354
Параметры термодинамические 261
Первая задача динамики 539
Первое начало термодинамики 264
Первообразная 102
Первый закон Ньютона 216, 518
Перемещение 209
Перестановка 191
Пластичность 581
Плечо пары 518
— силы 232, 516
Плоское напряженное состояние 583
Плоскопараллельное движение твердого тела 505
Плоскость действия пары 518
— поляризации 430
— поляризации волны 400
— фокальная 410
Плотность 222
— вероятности 199
— заряда линейная 302
— заряда поверхностная 302
— заряда пространственная 302
— потока вероятности 466
— тока 333
— энергии электрического поля 330
Площадь криволинейного сектора 118
— многоугольника 18 (?)
— области на плоскости 118, 127
— поверхности вращения 118
— поверхности, заданной векторным уравнением 128
Площадь поверхности, заданной уравнением 128
Поверхностное натяжение 294
Поверхностный интеграл второго рода 138
— интеграл первого рода 137
Поверхность волновая 388
— второго порядка 39
— ориентированная 138
— уровня 91
— эквипотенциальная 311
Повторные интегралы 126
Поглощательная способность тела 442
Погонный угол закручивания 595
Показатель адиабаты 268
Показатель преломления 400, 408
Поле в проводнике 314
— магнитное 303, 340
— однородное 219
Поле потенциальное 226
— силовое 219
— системы зарядов 304
— скалярное 95
— стационарное внешнее 219
— точечного заряда 304
—тяготения 227, 238
— центральное 219
— электрическое 303
— электромагнитное 303
— электростатическое 227, 304
Полная производная 94
Полуось большая 23
— вещественная 24
—действительная 24
— малая 23
— мнимая 24
Поляризатор 430
Поляризационная призма 434
Поляризация диэлектрика 318
— света 429
Поляризованность 318
Полярная ось 17

Полярный момент инерции 595
— момент сопротивления сечения 596
— радиус 17
— угол 17
Поперечная сила 598
Порядок дифференциального уравнения 161
— интерференции 416
Последовательность 68
— бесконечно большая «стремящаяся к бесконечности» 70
— возрастающая (неубывающая) 70
— монотонная 70
— ограниченная 68
— сходящаяся 69
— убывающая (невозрастающая) 70
Постоянная Больцмана 276, 281
— Верде 436
— Керра 436
—Планка 448
— Ридберга 459, 462
Постоянная Стефана-Больцмана 444
— тонкой структуры 383
Постоянный ток 333
Постулаты Бора 460
— специальной теории относительности 252
Потенциал векторного поля 136
— поля тяготения 239
— проводника 314
— электростатического поля 306
Поток вектора магнитной индукции 345
— вектора напряженности 309
— векторного поля 139
Правила дифференцирования 80
Правила отбора 478, 488
— Кирхгофа 337
—Хунда 488
Правило Крамера 51
— Ленца 357
— Лопиталя 83
— Максвелла 290
— треугольника 30
— умножения вероятностей 194
Предел 68, 90, 91
— 1-й замечательный 72
— 2-й замечательный 72
— последовательности 68
— пропорциональности 623
— функции 71
— функции слева 71
— функции справа 71
Преломление волн 430
Преобразование координат 26
— Фурье 157, 158
— Фурье обратное 159
Преобразования Галилея 220
— Лоренца 253
Прецессия гироскопа 251
— ларморовская 354
Приближение гироскопическое 251
— Фраунгофера 414
Признак Даламбера 145
— Коши 145
— Маклорена-Коши интегральный 146
Признак равномерной сходимости Вейерштрасса 149
— сравнения второй 145
— сравнения первый 145
— сходимости Лейбница 146
— экстремума необходимый 85
Признаки сходимости рядов 143, 145
Принцип возможных перемещений 567
— Гюйгенса 408
— Гюйгенса-Френеля 421

Принцип Даламбера 559, 568
— единственности 317
— запрета Паули 484
— обратимости световых пучков 408
— относительности Галилея 220
— относительности Эйнштейна 252
— соответствия 252
—суперпозиции 239, 304, 388
— суперпозиции полей 304
— Ферма 409
Пробный заряд 304
Продольная сила 579, 588
Произведение вектора на число 30
— матриц 48
— матрицы на число 48
— событий 192
Производная 78
— второго порядка 84
— по направлению 95
Произвольное движение твердого тела 509
Пространство элементарных событий 192
Процесс адиабатический 268
— Джоуля-Томсона 266
— изобарный 267
— изотермический 267
— политропный 268
Прочность 577
Прямой изгиб 598
Прямоугольная система координат декартова 16
Путь 209
Пучок прямых 21

Работа 224
— выхода 451
Равнодействующая системы сил 516
Радиус кривизны 499
— сходимости 151
Радиус-вектор 29
Разбиение отрезка 114
Разложение определителя по строке (столбцу) 44
— по системе векторов 56
Размерность вектора 55
Размещение 190
Разность векторов 30
Разрешающая способность оптических приборов 425
Ранг матрицы 49
— системы векторов 57
Распределение Больцмана 286
— Максвелла 283
— Максвелла-Больцмана 286
Распределенные силы 534
Рассеяние рэлеевское 440
— света 440
Расстояние от точки до прямой 22
Реакции связи 220
Реальный газ 287
Резонанс 383
Решение дифференциального уравнения 161, 168
— системы линейных уравнений 51
— системы матричное 52
Ридберговская поправка 480
Ротор векторного поля 136
Ряд Маклорена 152
— расходящийся 143
— степенной 150
— сходящийся 143
— сходящийся абсолютно 147
— сходящийся абсолютно на множестве 148
— сходящийся равномерно 149
— сходящийся условно 147
— Тейлора 152
— функциональный 148
— Фурье 154
Ряд Фурье в комплексной форме 156
— Фурье по косинусам 156
— Фурье по синусам 143
— числовой 143

Самоиндукция 359
Самосогласованное поле 483
Свет естественный 429
— поляризованный 430
Светимость 412
Световые кванты 449
Свободная энергия 273,277
Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций 73
— векторного произведения 33
— двойного интеграла 125
— модуля вектора 56
— неопределенного интеграла 102
— непрерывных функций 75
— определенного интеграла 102
— пределов 71
— равномерно сходящихся рядов 149
— скалярного произведения 31
— смешанного произведения 33
— степенных рядов 152
— сходящихся последовательностей 69
— сходящихся рядов 144
— тройного интеграла 130
— электромагнитных волн 399
Связанное состояние 467
Связь геометрическая 563
— голономная 563
— дифференциальная 563
— идеальная 566
— кинематическая 563
— механическая 563
— неголономная 563
— неосвобождающая 563
— нестационарная 563
— освобождающая 563
— Рассела-Саундерса 487
— стационарная 563
Сегнетоэлектрики 325
Сила 217, 515
— Ампера 341
— внешняя 577
— внутренняя 577, 578
— вынуждающая 382
— источника энергетическая 411
— квазиупругая 324, 375
— Кориолиса 244
— коэрцессивная 355
— критическая 619
— Лоренца 340
— обобщенная 375
— поверхностного натяжения 294
— поперечная 579, 598
— потенциальная 555
— продольная 579, 588
— равнодействующая (результирующая) 218
— реактивная 224
— света источника 411
— сопротивления движению 220
— сосредоточенная 577
— сухого трения 220
— тока 333
— тяжести 220
— упругости 220, 227
— центробежная 244
Силовые линии 210
Силы активные 516, 538
— внешние 542
— внутренние 542, 577
— инерции 242, 559
— консервативные 226
— нормального давления 535
— распределенные 534
— реакций связей 516, 538
— трения покоя 535
Синус 63
Синус-преобразование Фурье 159
Синусоида 64
Система векторов линейно зависимая 57

Система векторов линейно независимая 57
— векторов ортонормированная 56
— двухфазная 291
Система консервативная 227
— координат декартова прямоугольная 28
— координат полярная 17
— координат сферическая 29, 688
— координат цилиндрическая 28, 687
— линейных дифференциальных уравнений179
— линейных уравнений 51
— неопределенная 51
— несовместная 51
— определенная 51
— параллельных сил 525
— разрешенная 52
— сил плоская 524
— сил сходящаяся 523
— совместная 51
— трехфазная 291
Системы *n*-мерных векторов 55
— координат ортогональные криволинейные 686
— обыкновенных дифференциальных уравнений 178
— уравнений равносильные 52
Скалярное произведение 31, 33, 56
Скачок функции 75
Скорость 209
— абсолютная 511
— групповая 393
— нерелятивистская 151
— относительная 511
—переносная 215, 511
— релятивистская 252
— средняя квадратичная 281
— фазовая 393
— электромагнитных волн в вакууме 400
Сложение угловых моментов 475
Сложная функция 60
Сложное движение точки 510
— сопротивление 610
Случайная величина 198
Смачивание 295
— полное 296
Смесь идеальных газов 283
Смешанное произведение 32
Смысл производной геометрический 79
— производной физический 79
Собственные векторы матрицы 55, 57
— значения матрицы 55, 57
Событие 192
— достоверное 192
— невозможное 192
События несовместные 193
— равносильные 193
Совмещение событий 192
Соизмеримость физических величин 470
Соотношение Больцмана 456
Соотношения неопределенностей Гейзенберга 464
Сопротивление активное 386
— емкостное 386
— индуктивное 386
— полное 386
— проводника 385
— реактивное 386
Состояние равновесное 262
— напряженное 580
Сочетание 191
Спектральное разложение 410
Спектральные серии 459
Спектры сложных атомов 483
— щелочных металлов 479
Специальная теория относительности 251
Спин 480
Спонтанные и вынужденные переходы 454

Способы задания функции 459
Сравнение бесконечно малых 73
Среднее квадратичное отклонение 201
Средняя скорость 209, 285
Статика 520
Стационарное состояние 466
Степенной ряд 150
Степень свободы 208
Сумма векторов 30
— двух матриц 47
— интегральная 114, 124, 129, 133, 135, 137, 139
— ряда 143
— событий 192
Суперпозиция функций 60
Сферическая система координат 29, 688
Сферическое движение 510

Таблица Менделеева 485
Тангенс 64
Твердое тело 212
Температура кипения 293
— критическая 288
— Кюри 325, 355
Теорема Абеля 151
— Бернулли 202
— Вариньона 519
— взаимности 361
— Гаусса 309, 310
— Гаусса для магнитного поля 346
— Гаусса для электрического смещения 320
— Гюйгенса о моментах инерции 544
— Ирншоу 313
— Кёнига 226
— Карно 270
— Коши 82
— Кронекера — Капелли 51
— Лагранжа 82
— Нернста 277
Теорема о взаимно перпендикулярных осях 246
— о главных осях инерции 249
— о кинетической энергии 266
— о модуле интеграла 116, 126, 131
— о параллельном переносе силы 521
— о приведении системы сил к центру 521
— о результирующей паре сил 521
— о скоростях при сложном движении точки 512
— о скоростях точек плоской фигуры 506
— о среднем 116, 125, 130
— о суперпозиции частных решений 174
— об изменении количества движения 548
Теорема об интегрировании неравенств 116
— об оценке 116, 125, 130
— об ускорениях при сложном движении точки 512
— об ускорениях точек плоской фигуры 508
— об эквивалентности систем сил, приложенных к твердому телу 521
— Ролля 82
— сложения вероятностей 195
— существования и единственности 162, 167
— Чебышева 202
— Штейнера 246
Теоремы о дифференцируемых функциях 82
— статики 521
Теория вероятностей 190
— относительности общая 243
— относительности специальная 251
Тепловое излучение 441

Теплоемкость 266
— молярная 268
— удельная 268
Теплообмен 264
Теплота 264
Термодинамический потенциал Гиббса 278
Термодинамический потенциал удельный 278
Термы 459
— сложных атомов 488
Тождественность частиц 484
Ток конвекционный 333
— проводимости 333
— смещения 363
Тонкая структура спектральных линий482
Тормозное рентгеновское излучение 452
Точечные множества 90
Точка граничная 90
— критическая 85, 98
— максимума (минимума) 85, 97
— множества внутренняя 90
— перегиба 85, 87
— разрыва второго рода 76
— разрыва первого рода 75
— разрыва функции 75
— условного максимума (минимума) 99
— устранимого разрыва 75
— экстремума 85, 98
Точки скорость 497
— ускорение 497
Траектория 497
Третий закон Ньютона 218, 519
Третье начало термодинамики 277
Тригонометрические функции 63, 626
Тройная точка 291
Тройной интеграл 129
Туннельный эффект 469
Угловая дисперсия 428
Угол Брюстера 432
— закручивания 595
— между векторами 31
— между вектором и осями координат 31
— между прямыми 21 Удельная проводимость 334
— рефракция 440
— теплоемкость 268
Удельное сопротивление 334
Ультрафиолетовая катастрофа 447
Упругие волны 382
Упругость 581
— линейная 582
Уравнение Бернулли 166
— в полных дифференциалах 166
— Ван-дер-Ваальса 287, 288
— волновое 390
— вынужденных колебаний 382
— гармонических колебаний 371
— гиперболы каноническое 24
— Даламбера 365
— движения 218
— затухающих колебаний 280
— касательной 80
— параболы каноническое 25
— эллипса каноническое 23
Уравнение касательной плоскости 96
— Клапейрона — Клаузиуса 292
— кривой второго порядка общее 26
— линии 17
— Майера 268
— Мещерского 224
— окружности 22
— первого порядка 161
— плоской гармонической волны 389

Уравнение плоскости общее 34
— поверхностей второго порядка каноническое 41
— прямой в отрезках 20
— прямой общее 19
— прямой с угловым коэффициентом 20
— прямой, проходящей через две данные точки 22
— Пуассона 268, 313
— с разделенными переменными 163
— с разделяющимися переменными 164
— состояния 262
— состояния калорическое 265
— состояния термическое 265
— Циолковского 224
— Шредингера 466
— Эйлера 250
— Эйнштейна 451
Уравнения движения плоской фигуры 506
— Лагранжа второго рода 570
— Максвелла 363
— Максвелла в вакууме 364
— Максвелла в среде 366
— Максвелла в электростатике 313
— Максвелла для постоянного магнитного поля 348
— моментов сил 523
— проекций сил 522
— равновесия стержня 599
— равновесия твердого тела 522
— связей 515
Уравновешенная система сил 515
Ускорение абсолютное 511
— касательное 497
— кориолисово 216, 512
— материальной точки 209
— нормальное 210, 497
— относительное 511
— переносное 511
Ускорение свободного падения 239
— тангенциальное 209, 497
— центростремительное 212
Условие Вульфа — Брегга 429
— квантования Бора-Зоммерфельда 463
— параллельности (коллинеарности) двух векторов 31
— параллельности плоскостей 36
— параллельности прямой и плоскости 38
— параллельности прямых 21
— перпендикулярности двух векторов 31
— перпендикулярности плоскостей 36
— перпендикулярности прямой и плоскости 38
— перпендикулярности прямых 21
— прочности Мизеса 617
— прочности Сен-Венана 617
Условия Дирихле 154
— Лауэ 428
— прочности балок 608
— равновесия фаз 290
— существования экстремума 85
— экстремума достаточные 86, 97
— экстремума необходимые 85, 97
Условная вероятность 194
Устойчивость сжатых стержней 619

Фаза 290
Фазовый переход 290
— переход второго рода 293
— переход первого рода 291
Фактор Ланге 490
Фермион 484
Ферромагнетики 354
Фигуры Лиссажу 374

Физический маятник 376
Фокус гиперболы 224
— параболы 25
— оптической системы 410
— эллипса 23
Фокусное расстояние 23, 24
Формула барометрическая 286
— Бейеса 196
— Бернулли 197
— Больцмана 276
— Вина 444
— Грина 141
— Дебая — Ланжевена 324
— Журавского 606
— Клаузиуса — Масотти 325
— конечных приращений 82
— Лапласа 295
— Лорентц — Лоренца 439
— Маклорена 85
— Муавра 630
— Муавра-Лапласа интегральная 198
— Муавра-Лапласа локальная 198
— Ньютона-Лейбница 117
— Остроградского — Гаусса 140
— Планка 447
— полной вероятности 196
— Пуассона 198
— Рэлея-Джинса 445
— Симпсона 188
— Стокса 141
— Тейлора 84, 94
— трапеций 187
— Эйлера 510, 619, 621, 630
Формулы прямоугольников 187
— де Бройля 464
— Френеля 430
— Эйлера 630
Фотометрия 407, 410
Фотон 450
Фотоэффект 449
Фронт волны 388
Функции бесконечно малые эквивалентные 73
— дифференцируемые 78
Функции обратные тригонометрические 66
— одинакового порядка 74
— элементарные 61
Функциональный ряд 148
Функция Лагранжа 99
— бесконечно большая 73
— бесконечно малая 73
— более высокого порядка малости 74
— возрастающая (неубывающая) 60
— двух переменных 90
— дифференцируемая 78
— интегрируемая 115
— квадратичная 184
— линейная 183
— логарифмическая 63
— монотонная 60
— непрерывная 74
— непрерывная на множестве 91
— непрерывная слева 75
— непрерывная справа 74
— обратная 60
— ограниченная 91
— подынтегральная 102
— показательная 63
— распределения 199
— рациональная 107
— сложная 60
— степенная 61
— трех переменных 90
— тригонометрическая 63
— убывающая (невозрастающая) 60

Характеристические рентгеновские спектры 498
Характеристическое уравнение 58, 172
Химический потенциал 278

Центр кривизны 499
— масс 221, 543
— параллельных сил 532
— тяжести 233
— тяжести твердого тела 532
Центральное растяжение 588
— сжатие 588
Цикл Карно 270
Цилиндр 43
Цилиндрические координаты 28, 687
Циркуляция 135
— вектора магнитной индукции 345
Цуг волн 415

Частичная сумма ряда 143
Частная производная 92
— производная вторая 94
— производная смешанная 94
Частное приращение 92
— решение 162, 168, 171, 179
Частный интеграл дифференциального уравнения 162
Частота колебаний 370
Число Авогадро 262
— степеней свободы 208, 281, 564
Числовая ось 59
Числовой ряд 143
Числовые множества 59
Чистый сдвиг 585
Член остаточный 85

Шкала температур термодинамическая 270
— электромагнитных волн 406

ЭДС (электродвижущая сила) 335
— взаимной индукции 361
— самоиндукции 359
Эквивалентные системы сил 515
Эквипотенциальные поверхности 311
Экстремум 85
Экстремум функции двух переменных 97
— функции двух переменных условный 99
— функции многих переменных условный 100
— функции трех переменных 98
Эксцентриситет гиперболы 24
— эллипса 23
Электрическая постоянная 302
Электрический диполь 302
— заряд 301
— ток 333
Электрическое поле 303
— смещение 320
Электроемкость конденсатора 326
— проводника 315
Электромагнитная индукция 356
Электромагнитные волны 399
Электронная оболочка 385
— теория металлов 339
Электронный слой 485
Электрооптический эффект Керра 436
Электростатическое поле 304
Элементарная работа 553
Элементарное событие 192
Элементарные функции 61
Элементы матрицы 47
— определителя 46
Эллипс 23
Эллипсоид 41
— вытянутый 41
— сплюснутый 41
Эллиптический параболоид 43
Энергия внутренняя 264, 281
— идеального газа внутренняя 267, 272

Энергия кинетическая 225, 256
— конденсатора 330
— покоя 258
— ионизации 460
— потенциальная 227
— релятивистская 258
— системы зарядов 328
— системы механическая 229
— собственная механическая 229
— уединенного проводника 329
— электромагнитных волн 400
— электростатического поля 328
Энтальпия 266
Энтропия 273
— газа Ван-дер-Ваальса 274
— идеального газа 274
— смешения 276
Эпюра 589
Эффект Доплера в акустике 398
— Доплера для электромагнитных волн в вакууме 405
— Зеемана аномальный 490
— Зеемана нормальный 478
— Комптона
— Коттона — Мутона 436
— Пашена — Бака 491
— Холла 355
Эффективная жесткость 375
— потенциальная энергия 237

Явления капиллярные 296
Ядро сечения 614
Якобиан 127, 132
Яма с бесконечными стенками 467
— с конечными стенками 468
Яркость 412

EqWorld — Мир математических уравнений
(http://eqworld.ipmnet.ru)

Научно-образовательный веб-сайт EqWorld содержит обширную информацию о решениях дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, интегральных уравнений, функциональных уравнений и других математических уравнений. Описаны методы решения уравнений, приведены интересные статьи, даны ссылки на математические справочники, монографии и учебники, указаны адреса научных веб-сайтов, издательств, журналов и др. Сайт постоянно пополняется новыми уравнениями, точными решениями и другой полезной информацией.

Веб-сайт EqWorld предназначен для широкого круга ученых, преподавателей вузов, инженеров, аспирантов и студентов в различных областях математики, механики, физики и инженерных наук. Он работает на русском и английском языках и является бесплатным для его пользователей.

Справочное издание

Полянин Андрей Дмитриевич, Полянин Владимир Дмитриевич, Попов Владимир Александрович и др.

СПРАВОЧНИК ДЛЯ СТУДЕНТОВ
Высшая математика. Физика.
Теоретическая механика. Сопротивление материалов.

Редакция «Образовательные проекты»
Ответственный за выпуск *Н. А. Шармай*
Технический редактор *А. Л. Шелудченко*
Оформление обложки дизайн-группы *«Дикобраз»*
Оригинал-макет подготовлен *ООО «Бета-Фрейм»*

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2; 953005 — литература учебная

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.02.953.Д.000577.02.04 от 03.02.2004 г.

ООО «Издательство Астрель»
129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а

ООО «Издательство АСТ»
667000, Республика Тыва, г. Кызыл, ул. Кочетова, д. 93

Наши электронные адреса: www.ast.ru
E-mail: astpub@aha.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
во ФГУП ИПК «Ульяновский Дом печати»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14

По вопросам приобретения книг обращаться по адресу:
129085, Москва, Звездный бульвар, дом 21, 7 этаж
Отдел реализации учебной литературы
«Издательской группы АСТ»
Справки по телефону: *(095) 215-53-10*, факс *232-17-04*

Настоящий справочник не имеет аналогов в учебной литературе. Он содержит основные понятия, формулы, законы и теоремы высшей математики, физики, теоретической механики и сопротивления материалов.

Во всех разделах разобраны примеры и методы решения задач, поясняющие теоретический материал.

Книга может быть полезна студентам машиностроительных, политехнических, экономических и других вузов.

Она также будет интересна широкому кругу инженеров и научных работников.

ISBN 5-17-030740-3
9 785170 307401