ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

Н. А. ВИРЧЕНКО
И. И. ЛЯШКО
К. И. ШВЕЦОВ

СПРАВОЧНИК

Н. А. ВИРЧЕНКО, И. И. ЛЯШКО, К. И. ШВЕЦОВ

ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

СПРАВОЧНИК

Под редакцией
академика АН УССР
И. И. ЛЯШКО

Перевод с украинского

КИЕВ
«НАУКОВА ДУМКА»
1979

УДК 51(08)

Графики функций: Справочник/Вирченко Н. А., Ляшко И. И., Швецов К. И. — Киев: Наук. думка, 1979. — 320 с.

Справочник содержит основные сведения о функциях и методах построения графиков функций, в частности сведения о построении графиков функций элементарными способами и с помощью производной. Впервые в литературе систематизированы сведения о построении графиков не только в декартовой, но и в полярной системе координат. Рассматриваются основные принципы теории геометрического изображения функций.

Рассчитан на инженеров, преподавателей и учащихся средних школ, а также на поступающих в высшие учебные заведения.

Ил. 501.

Рецензенты *Н. И. Шкиль, Т. В. Колесник*

Редакция справочной литературы

В $\frac{00001-146}{М221(04)-79}$ 498-79 1702050000

ПРЕДИСЛОВИЕ

При исследовании различных явлений и процессов природы, решении технических задач, изучении математики сплошь и рядом встречаются примеры изменения одной величины в зависимости от изменения другой — так называемой функциональной зависимости. Понятие функциональной зависимости — одно из важнейших понятий современной математики, оно «как ни одно другое, воплощает в себе диалектические черты современного математического мышления; именно оно приучает мыслить величины в их живой изменчивости, а не в искусственно препарированной неподвижности, в их взаимной связи и обусловленности, а не в искусственном отрыве их друг от друга»*.

Существуют различные способы задания функций: аналитический, табличный, словесный, а также графический. Иногда график является единственно возможным способом задания функции. Он широко используется в технике, лежит в основе работы многих самопишущих автоматических приборов. Однако несмотря на значительное распространение этого способа, справочной литературы, достаточно полно освещающей вопросы исследования функций и построения графиков разнообразнейших функций, причем с привлечением методов высшей математики, пока неоправданно мало. Например, в популярных пособиях И. П. Гурского «Функции и построение графиков», И. Х. Сивашинского «Элементарные функции и графики», Н. Н. Шунды «Функции и их графики» (на украинском языке) в основном изложены методы построения графиков с помощью средств элементарной математики. Определенное место графикам функций отведено во многих пособиях для поступающих в вузы, но и здесь изложение материала ограничивается школьным курсом математики.

Настоящий справочник представляет собой попытку систематизировать основные сведения о функциях и методах построения графиков функций, в частности о построении графиков элементарными способами и с помощью производной. Основное внимание уделено следующим вопросам: исследованию функций, методам построения графиков функций, преобразованию графиков. Кроме того, подробно анализируются построение графиков функций, заданных неявно и в параметрическом виде, построение графиков в полярных координатах и другие вопросы, недостаточно освещенные в литературе.

---

* *Хинчин А. Я.* Педагогические статьи. — М.: Изд-во Акад. пед. наук РСФСР, 1963, с. 68.

Справочник состоит из двух частей. В первой изложены основные сведения о функциях, их свойствах, построении графиков функций элементарными способами. Вторая часть посвящена построению графиков функций с помощью производной. Приведено свыше 500 графиков. Рассмотрены примеры построения графиков повышенной сложности, графиков некоторых важных кривых (спираль Архимеда, улитка Паскаля, астроида, циклоида и др.). В справочнике использован материал из опубликованной справочной литературы, пособий, статей, посвященных этой теме.

Настоящее издание является переводом с украинского (Вірченко Н. О., Ляшко І. І., Швецов К. І. Графіки функцій. Довідник.— К.: Наук. думка, 1977). В нем исправлены ошибки и неточности, замеченные в издании на украинском языке, в частности уточнены некоторые обозначения, термины и формулировки.

Авторы

ЧАСТЬ I

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ СПОСОБАМИ

РАЗДЕЛ 1

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЧИСЛЕ, ПЕРЕМЕННОЙ ВЕЛИЧИНЕ И ФУНКЦИИ

§ 1. Число. Переменная величина. Функция

Множество действительных чисел

Совокупность бесконечных десятичных дробей (положительных и отрицательных) и число 0 образуют множество действительных чисел (числовой континуум) R. Это множество состоит из двух частей (подмножеств): подмножества рациональных чисел (чисел целых и дробных, как положительных, так и отрицательных, а также числа 0) и подмножества иррациональных чисел.

Каждое рациональное число может быть изображено в виде отношения $\pm\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа $1, 2, \ldots, n, \ldots$, при этом оно представляет собой периодическую десятичную дробь. Иррациональное число представляет собой непериодическую десятичную дробь. Например, $\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots$, $5 = \frac{5}{1}$ — рациональные числа; $\pi = 3{,}14159\ldots$, $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ — иррациональные числа.

Основные свойства множества действительных чисел

1. Множество *упорядочено*, т. е. любые два числа a и b этого множества либо равны, либо одно из них больше другого. Упорядоченность обозначают так:

$$a < b \ (a \text{ меньше } b),$$
$$a \leqslant b \ (a \text{ не больше } b),$$
$$a > b \ (a \text{ больше } b),$$
$$a \geqslant b \ (a \text{ не меньше } b).$$

2. Множество *плотно*, т. е. между любыми двумя сколь угодно близкими действительными числами a и b содержится бесконечное множество промежуточных действительных чисел (как рациональных, так и иррациональных).

3. Множество *непрерывно*. Это означает, что любое дедекиндово сечение определяет единственное действительное число a, которое отделяет числа класса A от чисел класса B, само же a является или наибольшим числом в классе A (и тогда в классе B нет наименьшего числа), или наименьшим числом в классе B (и тогда в классе A нет наибольшего числа).

Дедекиндовым сечением множества D называется разбитие всех действительных чисел на два класса: нижний класс A и верхний класс B, причем так, что каждое действительное число содержится лишь в одном классе и произвольное число из нижнего класса A меньше произвольного числа из верхнего класса B.

Действительные числа удобно изображать точками числовой оси. Числовая ось — бесконечная прямая, на которой выбраны начальная точка O, некоторое направление, которое считается положительным, и масштаб (отрезок, являющийся единицей измерения длины). Каждому действительному числу ставится в соответствие одна и только одна точка числовой оси. Числу 0 отвечает точка O. Если число x положительное, то его изображают точкой P, лежащей справа от точки O на расстоянии $OP = x$; если же число x отрицательное, то его изображают точкой Q, лежащей слева от точки O на расстоянии $OQ = -x$ (рис. 1). Справедливо и обратное утверждение: каждая точка числовой оси является изображением одного и только одного

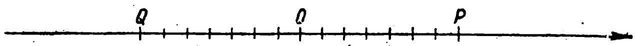


Рис. 1. Числовая ось: O — начальная точка; точки P и Q лежат на оси.

действительного числа. Следовательно, между всеми действительными числами и всеми точками числовой оси существует взаимно однозначное соответствие. Для практических целей отметим следующее утверждение: каждое иррациональное число с произвольной степенью точности можно изобразить с помощью рациональных чисел.

Действительные числа делят на две группы: действительные алгебраические числа (действительные корни алгебраических уравнений с целочисленными коэффициентами) и действительные трансцендентные числа (остальные действительные числа).

Любую конечную или бесконечную совокупность действительных чисел называют *числовым множеством*. Множества обозначают прописными буквами латинского алфавита: X, Y, Z, ..., а числа, им принадлежащие, — строчными буквами: x, y, z, ... Например, $x \in X$ (x принадлежит X). Если же элемент x не принадлежит X, то это записывают так: $x \bar{\in} X$.

Рассмотрим два множества A и B. Если каждый элемент множества X является одновременно и элементом множества B, то говорят, что множество A является *подмножеством* множества B, и записывают: $A \subset B$, или $B \supset A$. Если же $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что множества A и B равны, и записывают так: $A = B$. Множество, которое не содержит ни одного элемента, называют *пустым* множеством и обозначают так: $\varnothing$.

П р о с т е й ш и е д е й с т в и я н а д м н о ж е с т в а м и — объединение (сумма), пересечение (произведение), разность.

Пусть заданы два множества A и B.

Объединением (суммой) множеств A и B называют множество C, которое содержит все элементы множеств A и B и не содержит никаких других элементов (обозначают: $C = A \cup B$).

Пересечением (произведением) множеств A и B называют множество D, которое содержит все общие элементы множеств A и B и не содержит никаких других элементов (обозначают: $D = A \cap B$).

Разностью множеств A и B называют множество F, состоящее из всех тех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, и не содержащее никаких других элементов (записывают: $F = A \setminus B$).

Среди числовых множеств отметим следующие:

ограниченный замкнутый промежуток (сегмент, отрезок) $X = [a; b]$ — множество X содержит все числа x, для которых выполняется неравенство $a \leqslant x \leqslant b$; на числовой оси эта совокупность чисел образует отрезок ab, включающий его концевые точки (рис. 2, *а*);

ограниченный открытый промежуток (интервал) $X =]a; b[$ — множество X содержит все числа x, для которых выполняется неравенство $a < x < b$; на числовой прямой эта совокупность чисел образует отрезок ab без его концевых точек (рис. 2, *б*);

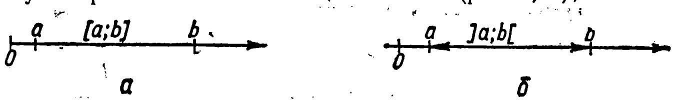


Рис. 2. Числовая ось: *а* — сегмент $[a; b]$; *б* — интервал $]a; b[$.

неограниченные полуоткрытые (или полузамкнутые) промежутки $[a; b[$ и $]a; b]$ — множество X, содержащее все числа, для которых выполняются неравенства $a \leqslant x < b$ и $a < x \leqslant b$. Соответствующий отрезок на числовой оси включает левый конец и не включает правый — в первом случае; включает правый конец и не включает левый — во втором.

Полубесконечные промежутки:

$]b; \infty[$ — множество X, для элементов которого $x > b$;

$[b; \infty[$ — множество X, для элементов которого $x \geqslant b$;

$]-\infty; a[$ — множество X, для элементов которого $x < a$;

$]-\infty; a]$ — множество X, для элементов которого $x \leqslant a$.

На числовой оси эти множества изображают всеми точками соответствующей бесконечной полупрямой.

Множество всех действительных чисел (всю числовую ось) называют промежутком и обозначают $]-\infty, \infty[$.

Пусть a — произвольное число. *δ-окрестностью* точки a называют произвольный открытый интервал вида $]a - \delta; a + \delta[$, иначе: δ-окрестность точки a — это множество всех точек x, для которых выполняется условие $|x - a| < \delta$, где δ — некоторое положительное число (рис. 3). *Окрестность* точки $x = a$ — это произвольное множество, которое содержит некоторую δ-окрестность этой точки.

Абсолютной величиной или *модулем* действительного числа a (обозначается $|a|$, читается «модуль a») называется неотрицательное число, для которого выполняются условия:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0, \\ -a, \text{ если } a < 0, \\ 0, \text{ если } a = 0. \end{cases}$$

Основные свойства абсолютных величин:

$$|a| \geqslant 0.$$

Если $|a| = 0$, то $a = 0$,

$$||a| - |b|| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|,$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|,$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \; (b \neq 0).$$

Если $|a| \leqslant A$ и $|b| \leqslant B$, то $|a + b| \leqslant A + B$ и $|ab| \leqslant AB$.

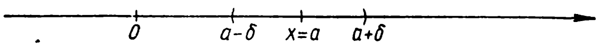


Рис. 3. δ-окрестность точки a.

Рассмотрим непустое множество X. *Верхней гранью* множества X называется произвольное число M такое, что для $\forall x \in X$ выполняется неравенство

$$x \leqslant M.$$

Нижней гранью множества X называется число m такое, что для $\forall x \in X$ справедливо неравенство

$$x \geqslant m.$$

Множества, имеющие верхнюю грань, называются *ограниченными сверху*. Множества, имеющие нижнюю грань, называются *ограниченными снизу*. Множества, ограниченные и сверху и снизу, называются *ограниченными*. Наименьшее из чисел M называется *точной верхней*, а наибольшее из чисел m — *точной нижней гранью* множества.

Если M^* — точная верхняя грань множества X ($M^* = \sup X = \sup \{x\}$), то при произвольном сколь угодно малом числе $\varepsilon > 0$ всегда найдется хотя бы одно число $x_0 \in X$ такое, что $x_0 > M^* - \varepsilon$.

Если m^* — точная нижняя грань множества X ($m^* = \inf X = \inf \{x\}$), то для произвольного сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ всегда найдется хотя бы одно число $x_0 \in X$ такое, что $x_0 < m^* + \varepsilon$. Если множество X ограничено сверху (снизу), то оно имеет и точную верхнюю (нижнюю) грань, т. е. любое ограниченное множество имеет и точную верхнюю и точную нижнюю грани.

Постоянные и переменные величины

В природе и в производственных процессах одни величины изменяются, т. е. изменяются их численные значения, а другие не изменяются. Например, при равномерном движении время и расстояние изменяются, а скорость остается постоянной; при нагревании газа в герметически закрытом сосуде давление и температура газа изменяются, а масса и объем его не меняются.

Переменной величиной называется величина, которая может принимать разные численные значения в данном процессе. Величина, численные значения которой в данном процессе не меняются, называется *постоянной*. Величины, которые сохраняют значение при любых условиях, называются *абсолютными постоянными*, например $\pi = 3{,}141...$

Характер изменения величин очень разнообразен. Одни могут принимать только целые положительные значения, другие — неограниченные отрицательные значения и т. д. Различают дискретные переменные, которые могут принимать конечное или бесконечное множество изолированных численных значений, и непрерывные переменные, которые, приняв два значения: $x = a$ и $x = b$, принимают также (неважно, в каком порядке) и все промежуточные значения $a < x < b$.

Множество значений, которые может принимать рассматриваемая величина x, называется *областью изменения* переменной x или областью значений x. Переменная величина называется *возрастающей*, если каждое ее последующее значение больше предыдущего. Переменная величина называется *убывающей*, если каждое последующее ее значение меньше предыдущего. Возрастающие и убывающие переменные величины называются *монотонными*. Переменная величина *ограничена*, если область ее изменения — ограниченное множество.

Понятие функции

При изучении и исследовании разнообразных явлений природы, решении технических задач приходится рассматривать не столько переменные величины, взятые отдельно, сколько связь между ними, зависимость одной величины от другой. В природе не существует переменных величин, которые изменялись бы изолированно, без связи с другими физическими величинами. Например, пройденный путь можно рассматривать как величину, которая изменяется в зависимости от изменения времени, т. е. пройденный путь является функцией времени. Расстояние, на которое летит пушечный снаряд, и точность попадания зависят от массы снаряда, угла возвышения дула пушки, начальной скорости снаряда, направления и силы ветра и многих других факторов. Абстрагируясь от этих конкретных примеров зависимостей между конкретными величинами, в математике ввели понятие функциональной зависимости или функции.

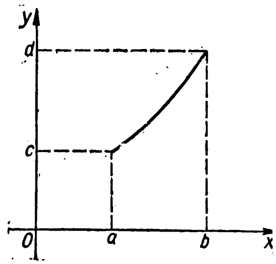


Рис. 4. Область определения функции $y = f(x)$ — отрезок $[a;\ b]$ и область значений функции — отрезок $[c;\ d]$.

Рассмотрим два множества: X и Y, элементами которых могут быть любые объекты, и допустим, что каждому элементу x множества X по некоторому закону поставлен в соответствие один элемент множества Y, который обозначим $y = f(x)$. Тогда f называется *функцией* * *из X в Y* (или *отображением множества X в Y*). Таким образом, если задано отображение f множества X в множество Y, то

* Термин «функция» ввел Лейбниц (1692 г.), а обозначение $f(x)$ принадлежит Эйлеру.

говорят, что на множестве X определена функция f, которая принимает значения $y=f(x)$ из множества Y. Множество X называют областью определения функции, а множество $f(X)$ — множеством значений функции f. Очевидно, что $f(X) \subset Y$. Переменную величину x называют *независимой переменной* или *аргументом*. Равенство $y=f(x)$ означает, что, применив к значению аргумента x закон f, найдем соответствующее этому значению x значение функции y (рис. 4). Например, равенство $y=x^3+5$ определяет y как функцию x при всех значениях x $[X=]-\infty;\ \infty[]$, т. е. определяет закон, по которому любому действительному значению x поставлено в соответствие значение функции y, т. е. в этом случае символ f означает следующие операции: возвести значение x в куб и к результату прибавить 5.

Способы задания функции

Задать функцию означает установить правило (закон), с помощью которого по данным значениям независимой переменной находим соответствующие им значения функции. Рассмотрим некоторые способы задания функции.

Табличный способ. При этом способе в определенном порядке выписываются ряд значений независимой переменной $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и соответствующие им значения функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Таковы, например, таблицы логарифмов, таблицы значений тригонометрических функций и т. д. Табличный способ задания функции очень распространен в технике, естествознании и т. п. Численные результаты последовательных наблюдений какого-либо процесса или явления выписывают в виде таблицы. Например, результаты измерений температуры воздуха на метеорологической станции за один день сформляются так:

t, ч	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T, °C	−1	−2	−2,5	−2	−0,5	1	3	3,4	3,6	3,9

Эта запись определяет температуру T как функцию времени t: $T = f(t)$.

Преимущества табличного способа задания функции состоят в том, что он дает возможность определить те или другие конкретные значения функции сразу, без дополнительных измерений или вычислений. Недостатки: определяет функцию не полностью, а лишь для некоторых значений аргумента, не дает наглядного изображения характера изменения функции с изменением аргумента.

Графический способ. Графиком функции $y=f(x)$ называется множество всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Графиком функции могут быть некоторая кривая, в частности и прямая, множество отдельных точек на плоскости и т. д.

Графический способ задания функции не дает возможности точно определить численные значения аргумента. Однако он имеет большое преимущество перед другими способами — наглядность.

В технике и физике часто пользуются графическим способом задания функции, причем иногда график бывает единственно доступным для этого способом, например при пользовании самопишущими приборами, которые автоматически записывают изменение одной величины в зависимости от изменения другой (барограф, термограф и др.).

Аналитический способ. По этому способу функция задается аналитически, с помощью формулы. Такой способ дает возможность по каждому численному значению аргумента x найти соответствующее ему численное значение функции y точно или с некоторой точностью.

При аналитическом способе функция может быть задана и несколькими разными формулами. Например, функция

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \text{если } -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 1, & \text{если } \quad 0<x<1,\\ \dfrac{1}{x}, & \text{если } \quad 1\leqslant x\leqslant 2,\end{cases}$$

задана в области определения $[-\pi;\ 2]$ с помощью трех формул.

Если зависимость между x и y задана формулой, разрешенной относительно y, т. е. имеет вид $y=f(x)$, то говорят, что функция от x задана в *явном виде*, например

$$y=6x-2,\ y=x^{2\ln x}.$$

Если же значения x и y связаны некоторым уравнением вида $F(x, y)=0$, т. е. формула не разрешена относительно y, то говорят, что функция $y=f(x)$ задана *неявно*, например, уравнение

$$x^2+y^2-r^2=0$$

неявно определяет две функции: $y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$.

Заметим, что не любую неявно заданную функцию можно представить в явном виде: $y=f(x)$. Наоборот, любую явную функцию $y=f(x)$ можно всегда представить и в виде неявной: $y-f(x)=0$.

Укажем еще одну разновидность аналитического задания функции, когда и аргумент x и функция y являются функциями третьей величины — параметра t:

$$x=\varphi(t),$$
$$y=\psi(t),$$

где t принимает значения на множестве T. Здесь каждому численному значению t_0 параметра t из области его изменения T ставятся в соответствие численные значения $x_0=\varphi(t_0)$ и $y_0=\psi(t_0)$ величин x и y. Это соответствие определяет y как функцию от x (или x как функцию от y). Такое задание функциональной зависимости называется *параметрическим*.

Если рассматривать значения x и y как координаты точки на координатной плоскости xOy, то каждому значению t будет соответствовать определенная точка плоскости. Если t изменяется от t_1 до t_2, то точка на плоскости описывает некоторую кривую. Если же исключить параметр t из уравнений, то получим функцию, заданную в явном виде: $y=f(x)$. Параметрическое задание кривых широко применяется в механике, в некоторых теоретических исследованиях по геометрии и т. д.

Аналитический способ является самым распространенным способом задания функции. Это основной способ задания функции в математическом анализе. Компактность, возможность вычисления значения функции при произвольном значении аргумента из области определения, возможность применения к данной функции аппарата математического анализа — основные преимущества аналитического способа задания функции. Недостатки: недостаточная наглядность, необходимость выполнения иногда очень громоздких вычислений.

Словесный способ. Этот способ состоит в том, что функциональная зависимость выражается словами.

Пример 1. Функция $E(x)$ — «целая часть числа x». Вообще через $E(x)=[x]$ обозначают наибольшее из целых чисел, которые не превышают x. Иными словами, если $x=n+r$, где n — целое число (может быть и отрицательным) и $0\leqslant r<1$, то $[x]=n$. Функция $E(x)=[x]$ постоянна на промежутке $[n;\ n+1[$. На этом промежутке $[x]=n$. (E — начальная буква французского слова entier, которое означает «целый». Читается функция $y=E(x)$ так: «игрек равен антье от икс»).

$$E(2,3)=2,\ E(-\pi)=-4.$$

Пример 2. Функция Дирихле определяется так:

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ — рациональное,}\\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное.}\end{cases}$$

Эта функция определена на множестве всех действительных чисел. Аналитическое выражение этой функции было найдено, но оно настолько сложно, что не имеет практического применения. Словесный способ дает краткое и четкое ее определение.

Пример 3. $y=\{x\}$. Так обозначают функцию, которая называется дробной частью числа x. Точнее:

$$y=\{x\}=x-[x],$$

где $[x]$ — целая часть x. Эта функция определена для всех x. Если x — произвольное, то, изобразив его в виде $x=n+r$ $(n=[x])$, где n — целое число и $0\leqslant r<1$, получим $\{x\}=n+r-n=r$. Например:

$$\{0\}=0,\ \{1\}=\{2\}=\cdots=\{n\}=0,$$
$$\{1{,}37\}=0{,}37,\ \{-1{,}3\}=-1{,}3+2=0{,}7.$$

Пример 4. Функция Римана задается так:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{если } x=\dfrac{m}{n}, \text{ где } m \text{ и } n \text{ — взаимно простые числа,}\\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное.}\end{cases}$$

Здесь функция задана описанием закона соответствия между x и $f(x)$.

Пример 5. Такими же являются так называемые арифметические функции, т. е. функции натурального аргумента, которые принимают только натуральные значения, например $n!=1\cdot2\cdot3\ldots n$, или функция $\tau(n)$, которая изображает число делителей числа n, например $\tau(16)=5$, $\tau(12)=6$. Еще пример: функция $\varphi(n)$, которая показывает, сколько в ряду натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ есть чисел, взаимно простых с n, например $\varphi(12)=4$, $\varphi(16)=8$.

Полиграфический способ. Здесь значения функции представляются в виде отрезков, а значения аргумента — в виде чисел, проставленных на концах отрезков, указывающих значения функции. Так, например, на дощечке термометра есть шкала с равными делениями, у которых проставлены числа. Эти числа являются значениями аргумента (температуры). Они стоят на том месте, которое определяет графическое удлинение столбца ртути (значения функции) в связи с ее объемным расширением в результате температурных изменений.

§ 2. Классификация функций

Обратные функции

Функция $y = f(x)$ называется *обратимой*, если она принимает каждое свое значение один раз.

Пусть f — отображение множества E на множество M. Если для любого элемента y из множества M существует единственный элемент $x = g(y)$ множества E, для которого $f(x) = y$, то отображение f называется обратимым. Отображение, обратное к y, обозначают f^{-1} и называют *обратной* функцией. Функция $y = f(x)$ при этом называется *прямой* функцией.

Областью определения обратной функции f^{-1} является множество значений функции f, а множество значений f^{-1} является областью определения функции f.

Функции $y = f(x)$ и $x = f^{-1}(y)$ называются *взаимно обратными*.

Например:

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \quad (x \neq 1),$$

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad (x \neq -1).$$

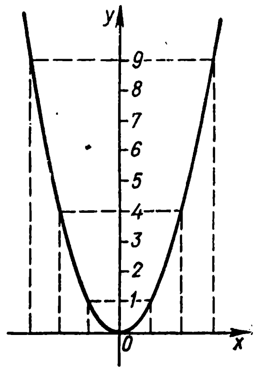


Рис. 5. $y = x^2$.

Для того чтобы некоторая функция имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы разным значениям аргумента из области ее определения соответствовали разные значения функции. Следовательно, чтобы доказать, что некоторая функция необратимая, достаточно указать какие-либо два значения аргумента $x_1 \neq x_2$, для которых $f(x_1) = f(x_2)$.

Например, функция $f(x) = x^2$ (рис. 5), $x \in]-\infty; \infty[$, обратной не имеет, так как двум разным точкам: $-3 \in]-\infty; \infty[$ и $3 \in]-\infty; \infty[$ она ставит в соответствие одну точку: $9 = f(-3) = f(3)$. Функция же $y = f(x) = x^2$, $x \in [0; \infty[$, имеет обратную $x = \sqrt{y}$, так как каждым двум разным точкам $x_1 \neq x_2$ из $[0; \infty[$ она ставит в соответствие две разные точки: $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$. Действительно, $y_1 - y_2 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \neq 0$.

По графику прямой функции $y = f(x)$ достаточно просто определить, имеет ли эта функция обратную. Если какая-либо прямая, параллельная оси Ox, пересекает график прямой функции не более чем в одной точке, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ существует. Если же хотя бы одна из таких прямых пересекает график прямой функции в двух или большем числе точек, то обратная функция не существует. Если прямая функция $y = f(x)$ строго монотонна на множестве x, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ существует и строго монотонна на множестве Y.

Сложные функции

Пусть даны две функции: $y = f(z)$, определенная на множестве Z, и $z = g(x)$, определенная на множестве X. Если $g(X) \subset Z$, то на множестве X можно определить функцию, которая каждому $x \in X$ поставит в соответствие $g(x) = z \in Z$. Тогда на множестве X определена функция $y = f[g(x)] = f_1(x)$. Эта функция называется *сложной* функцией x или суперпозицией (наложением) функций f и g.

Областью определения сложной функции $y = f[g(x)]$ является либо вся область определения функции $z = g(x)$, либо та ее часть, в которой определены значения z, не выходящие из области определения $f(z)$.

Пример 1. Пусть $y = \sin z$, где $z = x^3$. Функция $y = \sin z$ определена на всей числовой оси, функция $z = x^3$ также определена на всей числовой оси. Суперпозиция этих функций $y = \sin x^3$ является сложной функцией x, определенной в $]-\infty; \infty[$.

Пример 2. $y = \sqrt{4 - x^2}$ ($y = \sqrt{z}$, $z = 4 - x^2$). Функция $y = \sqrt{z}$ определена при $z \geqslant 0$, т. е. при $4 - x^2 \geqslant 0$ ($|x| \leqslant 2$), хотя функция $z = 4 - x^2$ определена при всех значениях x. Область определения функции $y = \sqrt{4 - x^2}$: $[-2; 2]$.

При рассмотрении сложных функций следует иметь в виду области определения составляющих функций. Например, из функций $y = \arccos z$ и $z = 3 + x^4$ нельзя образовать сложную функцию. Действительно, выражение $y = \arccos(3 + x^4)$ не задает сложную функцию x, так как функция $y = \arccos z$ определена на $[-1; 1]$, а значения функции $z = 3 + x^4$ при любом x не принадлежат отрезку $[-1; 1]$.

Можно рассматривать суперпозиции не только двух, но и любого конечного числа функций.

Элементарные функции

Основными элементарными функциями называются следующие:

степенная функция $y = x^\alpha$, где $\alpha \in R$;

показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$;

логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$;

тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Элементарными функциями являются основные элементарные функции и те, которые можно образовать из них с помощью конечного числа операций (сложение, вычитание, умножение, деление) и суперпозиции, например

$$y = \sqrt{1 + 3 \sin^3 x},$$

$$y = \frac{\log_4 x + 3\sqrt[3]{x} + 3 \operatorname{tg} x}{10^{2x} + 2x + 4}.$$

Назовем некоторые классы элементарных функций.

Целая рациональная функция, или многочлен

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

где n — целое неотрицательное число (степень многочлена), a_0, a_1, ..., a_n — постоянные числа (коэффициенты).

Дробно-рациональная функция, которая является отношением двух целых рациональных функций:

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m},$$

например

$$y = \frac{4x^3 - 2x^2 + 5}{2x + 1}, \quad y = \frac{x}{x^4 - 1}.$$

Целые рациональные и дробно-рациональные функции образуют класс *рациональных* функций.

Иррациональная функция — это та, которая изображается с помощью суперпозиций рациональных функций и степенных функций с рациональными нецелыми показателями, например:

$$y = \frac{3x^2 + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{1 + 6x} - 4}, \quad y = \sqrt[3]{x + 1}.$$

Рациональные и иррациональные функции образуют класс *алгебраических* функций. Алгебраическая функция — произвольная функция $y = f(x)$, которая удовлетворяет уравнению

$$A_0(x)\,y^n + A_1(x)\,y^{n-1} + \cdots + A_{n-1}(x)\,y + A_n(x) = 0,$$

где n — целое положительное число, $A_0(x)$, $A_1(x)$, ..., $A_{n-1}(x)$, $A_n(x)$ — целые рациональные функции от x, $A_0(x) \neq 0$.

Пример 3. $y = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ — алгебраическая функция, так как она удовлетворяет уравнению $y^3 - x^2 - 1 = 0$.

Пример 4. Функция, определенная уравнением $y^5 + y - x^3 = 0$, является алгебраической, но эта функция не есть явной алгебраической, так как алгебраические уравнения пятой степени и выше, как известно из высшей алгебры, вообще говоря, не разрешимы в радикалах. В этом случае имеем неявную алгебраическую функцию.

Элементарные функции, которые не являются алгебраическими, называются *трансцендентными*, например: $y = \cos x$, $y = 2^x$, $y = \log_3 x$.

Таким образом, все элементарные функции делятся на алгебраические и трансцендентные.

Однозначные и многозначные функции

Если каждому элементу x множества X по некоторому закону поставлен в соответствие не один, а несколько или даже бесконечное число элементов y из множества Y, то функцию называют многозначной. Так, $y = \pm\sqrt{x}$ — двузначная функция (часто вместо этой двузначной функции рассматривают отдельно две однозначные функции: $y = +\sqrt{x}$ и $y = -\sqrt{x}$ — ветви двузначной функции); $y = \operatorname{Arcsin} x$ — многозначная функция и др.

Замечание. Хотя теперь в анализе не рассматривают многозначные функции, пока не будем исключать их из рассмотрения, учитывая существующую техническую литературу.

Ограниченные и неограниченные функции

Функция f, определенная на множестве X, называется *ограниченной* на множестве $X_1 \subseteq X$, если $f(x_1)$, т. е. множество ее значений на множестве X_1, ограничено, т. е. если существуют постоянные m и M такие, что для всех значений x из X_1 выполняется неравенство

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

В противном случае функция называется *неограниченной*.

Число $m_0 = \inf\limits_{x \in X_1} \{f(x)\}$ называется точной нижней гранью функции $f(x)$ на множестве X_1, а число $M_0 = \sup\limits_{x \in X_1} \{f(x)\}$ — точной верхней гранью функции $f(x)$ на множестве X_1.

Разность $M_0 - m_0$ называется *колебанием* функции на множестве X_1.

Пример 5. $f(x) = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, так как для произвольного x выполняется условие $|\sin x| \leqslant 1$.

Пример 6. $f(x) = a^x$ ограничена снизу, так как для любого x выполняется неравенство

$$0 < a^x.$$

Пример 7. $f(x) = \operatorname{tg} x$ ограничена на $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, так как на этом отрезке $|\operatorname{tg} x| \leqslant 1$, а также на любом отрезке $[a; b]$, если $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$. Однако эта функция не ограничена на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, на $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Функция $f(x)$ называется ограниченной в точке x_0, если она ограничена в некоторой окрестности точки x_0. Для ограниченности функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена в любой точке отрезка.

Монотонные функции

Функция $f(x)$ называется *возрастающей* на множестве X, если для произвольных x_1, x_2 из X при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функция $f(x)$ называется *убывающей* на множестве X, если для произвольных x_1, x_2 из X при $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Возрастающие и убывающие функции называют *строго монотонными*.

Если для любых x_1 и x_2 из множества X таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$, то функцию

$f(x)$ называют *неубывающей (невозрастающей)* на множестве X. Невозрастающие и неубывающие функции называют *монотонными*. Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на некотором множестве X, если множество X можно разбить на конечное число подмножеств так, что на каждом из них функция является монотонной.

Сумма двух возрастающих (убывающих) функций является функцией возрастающей (убывающей).

Произведение двух положительных возрастающих (убывающих) функций является функцией возрастающей (убывающей).

Если функция $y = f(x)$ возрастающая, то функция $-f(x)$ убывающая, и наоборот.

Если функция $y = f(x)$ возрастающая ($f(x) \neq 0$), то функция $\frac{1}{f(x)}$ убывающая, и наоборот.

Если функция $y = f(x)$ строго монотонна, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ однозначна, строго монотонна.

Если функция $x = f(t)$ возрастает на $[\alpha; \beta]$, а функция $y = F(x)$ возрастает на $[f(\alpha); f(\beta)]$, то функция $y = F[f(t)]$ возрастает на $[\alpha; \beta]$.

Если функция $x = f(t)$ убывает на $[\alpha; \beta]$, а функция $y = F(x)$ убывает на $[f(\beta); f(\alpha)]$, то функция $y = F[f(t)]$ возрастает на $[\alpha; \beta]$.

Если функция $x = f(t)$ возрастает на $[\alpha; \beta]$, а функция $y = F(x)$ убывает на $[f(\beta); f(\alpha)]$, то функция $y = F[f(t)]$ убывает на $[\alpha; \beta]$.

Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$ — монотонно возрастающие функции; тогда, если $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$, то $\varphi[\varphi(x)] \leqslant f[f(x)] \leqslant \psi[\psi(x)]$.

Заметим, что немонотонная функция $y = f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ может иметь обратную функцию, если уравнение $y = f(x)$ при каждом фиксированном $y \in]-\infty; \infty[$ имеет единственное решение.

Все основные элементарные функции являются функциями монотонными или во всей области своего определения, или в отдельных ее частях.

Четные и нечетные функции

Числовое множество X называется симметричным, если для произвольного $x \in X$ число $-x \in X$, например множество целых чисел, отрезок $[-a; a]$, интервалы $]-a; a[$ и $]-\infty; \infty[$ и другие множества, симметричные относительно начала координат.

Функция f, определенная на симметричном множестве X, называется *четной*, если для $\forall x \in X$ выполняется равенство

$$f(-x) = f(x),$$

например $y = x^2$, $y = \cos x$, $y = |x|$, $y = f(|x|)$.

Функция f, определенная на симметричном множестве x, называется *нечетной*, если для $\forall x \in X$ выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x),$$

например $y = x^3$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \frac{|x|}{2x}$.

Основные свойства четных и нечетных функций

1. Алгебраическая сумма двух четных (нечетных) функций есть функция четная (нечетная).

2. Произведение двух четных (нечетных) функций есть функция четная; произведение четной и нечетной функций есть функция нечетная.

3. Если $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$ — нечетные функции, то сложная функция $y = f[\varphi(t)]$ — нечетная.

4. Если $y = f(x)$ — четная функция, а $x = \varphi(t)$ — нечетная, то функция $y = f[\varphi(t)]$ — четная; если $\varphi(x)$ — четная функция, то и функция $f[\varphi(x)]$ — четная.

5. Если $y_1 = f(x)$ — четная функция, причем $f(x) \neq 0$, то и функция $\frac{1}{f(x)}$ — четная.

И для четных, и для нечетных функций выполняется равенство

$$|f(x)| = |f(-x)|.$$

Из определения четной и нечетной функций следует, что нет смысла говорить о четности или нечетности функции, определенной на несимметричном множестве. Условие симметричности области определения функции является необходимым для того, чтобы функция могла быть четной или нечетной. Однако оно не является достаточным. Например, области определения функций $y = x + 3$ и $y = 3^x$ симметричны (вся числовая ось), но эти функции не являются ни четными, ни нечетными. Функции, которые не есть ни четными, ни нечетными, называются функциями общего вида. Заметим, что произвольную функцию $f(x)$, определенную на симметричном множестве, можно изобразить в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

где первое слагаемое — четная функция, а второе — нечетная, причем такое изображение единственное.

Пример 8. $e^x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Здесь функция общего вида e^x, определенная на интервале $]-\infty; \infty[$, представлена в виде суммы четной и нечетной функций.

Периодические функции

Пусть f определена на множестве X. Если существует $\omega \neq 0$ такое, что для $\forall x \in X$ числа $x + \omega$ и $x - \omega$ также принадлежат множеству X и $f(x + \omega) = f(x)$ ($f(x - \omega) = f(x)$), то функцию f называют *периодической* с периодом ω.

Пример 9. Функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют период $2n\pi$, где $n \in Z$.

Пример 10. Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ имеют период $n\pi$, где $n \in Z$.

Если периодическая функция имеет период ω, то она имеет бесконечное множество периодов: 2ω, 3ω,..., $-\omega$, -2ω, -3ω,... Наименьший из положительных периодов (если он существует) называется *основным периодом* периодической функции. Следовательно, если периодическая функция имеет основной период ω_0, то любой другой ее период кратен ω_0. Следует иметь в виду, что наименьшего положительного периода функция может и не иметь. Например, для функции $f(x) = 3$ любое действительное число является периодом, а наименьшего положительного среди действительных чисел нет. Вообще функция $f(x) = \text{const}$ является периодической, так как имеет одно и то же постоянное значение при произвольном значении аргумента, т. е. при любом действительном значении $\alpha \neq 0$ $f(x + \alpha) = f(x)$. Таким образом, любое число α является периодом этой функции, т. е. функция не имеет основного периода.

Функция $f(x)$ называется *антипериодической*, если

$$f(x + \omega) = -f(x) \quad (\omega \neq 0),$$

в этом случае $f(x)$ является периодической с периодом 2ω. Действительно,

$$f(x + 2\omega) = f(x + \omega + \omega) = f(x + \omega) = -(-f(x)) = f(x).$$

Из определения периодичности следует, что сумма и произведение двух функций с одним и тем же периодом ω являются функциями с периодом ω. Заметим при этом, что если число ω было наименьшим положительным периодом двух заданных функций, то после их сложения или умножения ω может перестать быть наименьшим из положительных периодов.

Пример 11. Функции $f_1(x) = 3\sin x + 2$ и $f_2(x) = 2 - 3\sin x$ имеют наименьший период 2π, а их сумма $f_1(x) + f_2(x) = 4$ наименьшего периода не имеет.

Пример 12. Функции $\varphi_1(x) = \sin x + 1$ и $\varphi_2(x) = 1 - \sin x$ имеют наименьший период 2π, а для произведения $\varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) = \cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ наименьшим положительным периодом есть число π.

Если $f(x)$ — периодическая функция с периодом ω, то функция $y(x) = f(ax)$ также периодическая с периодом τ, где $\tau = \dfrac{\omega}{a}$, a — произвольное действительное число ($a \neq 0$), и точки x и ax принадлежат области определения $f(x)$.

Если $f(x)$ — периодическая функция с периодом ω, то функция $f(ax + b)$, где $a > 0$, также периодическая с периодом $\dfrac{\omega}{a}$.

Если при всех x и некотором ω выполняется равенство

$$f(x + \omega) = \frac{1}{f(x)} \quad (\omega \neq 0),$$

то функция $f(x)$ периодическая с периодом 2ω.

Если функция $u = \varphi(x)$ — периодическая, то и сложная функция $y = f[\varphi(x)]$ — периодическая, причем периоды этих функций совпадают, если функция $y = f(u)$ строго монотонна. Если же $y = f(u)$ не строго монотонна, то период функции $y = f[\varphi(x)]$ может быть меньше периода функции $u = \varphi(x)$.

Если для функции $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ выполняется равенство

$$f(x + \omega) = kf(x),$$

где k и ω — положительные постоянные, то $f(x) = a^x \varphi(x)$, где a — постоянная, а $\varphi(x)$ — периодическая функция с периодом ω.

Период алгебраической суммы периодических функций равен наименьшему кратному периодов всех слагаемых (за исключением периодов тех подобных членов, сумма которых после приведения равна нулю). В частности, периоды функций

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i \sin b_i x+\sum_{k=1}^{m} c_k \cos d_k x$$

и

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i \operatorname{tg} b_i x+\sum_{k=1}^{m} c_k \operatorname{ctg} d_k x,$$

где a_i, c_k — действительные, отличные от нуля числа, а b_i, $d_k \in N$, вычисляются соответственно по формулам

$$\omega=\frac{2\pi}{D(a_1, a_2,\ldots, a_n, c_1, c_2,\ldots, c_m)}$$

и

$$\omega=\frac{\pi}{D(a_1, a_2,\ldots, a_n, c_1, c_2,\ldots, c_m)}.$$

Если же b_i, d_k — рациональные числа имеют вид соответственно $b_i = \frac{p_i}{q_i}$, $d_k=\frac{r_k}{s_k}$, то периоды приведенных функций вычисляются по формулам

$$\omega=\frac{2\pi K(q_1, q_2,\ldots, q_n, s_1, s_2,\ldots, s_m)}{D(p_1, p_2,\ldots, p_n, r_1, r_2,\ldots, r_m)}$$

и

$$\omega=\frac{\pi K(q_1, q_2,\ldots, q_n, s_1, s_2,\ldots, s_m)}{D(p_1, p_2,\ldots, p_n, r_1, r_2,\ldots, r_m)}.$$

Для установления непериодичности функции достаточно показать, что она непериодически повторяет какое-либо свойство рассматриваемой функции.

Приведем некоторые примеры периодических функций.

Пример 13. $f(x)=\{x\}=x-[x]$. Эта функция имеет период $\omega=1$. Действительно, $f(x+1)=\{x+1\}=x+1-[x+1]$, но $[x+1]=[x]+1$, тогда $\{x+1\}=x+1-[x]-1=x-[x]=\{x\}$ для произвольного x.

Пример 14. Для функции Дирихле

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ — рациональное,}\\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное,}\end{cases}$$

произвольное рациональное число r является периодом. Действительно,

$$\chi(x+r)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ — рациональное,}\\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное;}\end{cases}$$

так как r — рациональное, то сумма $x+r$ — рациональное число, как сумма двух рациональных чисел; с другой стороны, $x+r$ — иррациональное, как сумма иррационального и рационального чисел. Следовательно,

$$\chi(x+r)=\chi(x).$$

§ 3. Предел функции. Непрерывность функции

Предел числовой последовательности

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ всех натуральных чисел. Такая функция называется *бесконечной числовой последовательностью*. Если обозначить $f(n)$ через x_n, то числовую последовательность можно записать в виде $\{x_n\}$ или в развернутом виде $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Последовательность считается заданной, если известен закон ее образования, т. е. правило, по которому можно определить любой член. последовательности.

Число a называется *пределом числовой последовательности*, если для $\forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ такое, что для всех значений x_n, у которых номер $n > N(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Символическая запись:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \text{ или } x_n \to a \ (n \to \infty).$$

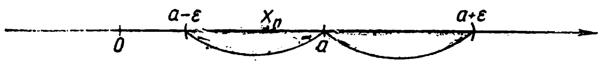


Рис. 6. Геометрический смысл предела последовательности $\{x_n\}$.

Геометрический смысл предела последовательности. Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел a, то все члены этой последовательности начиная с номера $n = N + 1$ попадают в ε-окрестность точки a (рис. 6).

Числовая последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, а последовательность, не имеющая предела,— расходящейся.

Необходимое и достаточное условие существования предела последовательности (критерий Коши). Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall\varepsilon > 0 \exists x_N$ такое, что произвольные два члена последовательности, стоящие после x_N, отличались друг от друга на число, меньшее ε:

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \text{ для всех } n > N \text{ при } \forall p > 0.$$

Основные теоремы о пределах последовательности

1. Последовательность может иметь только один предел.
2. Последовательность, имеющая конечный предел, ограниченна; последовательность, имеющая бесконечный предел, не ограниченна.
3. Монотонная ограниченная последовательность имеет конечный предел; если эта последовательность монотонно возрастает, то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \geqslant x_n$; если она монотонно убывает, то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \leqslant x_n$.
4. Монотонная неограниченная последовательность имеет бесконечный предел; если эта последовательность монотонно возрастает, то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$; если она монотонно убывает, то $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = -\infty$.

Пример 1. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{n}{n+1}$ имеет предел, равный 1.

Надо доказать, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ такое, что для $\forall n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - 1| < \varepsilon.$$

Выберем любое $\varepsilon > 0$. Поскольку

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon,$$

то для отыскания N достаточно решить неравенство $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$. Имеем

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1.$$

Следовательно, если номер N больше $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, то неравенство $|x_n - 1| < \varepsilon$ выполняется. В качестве N можно взять наибольшее целое число из чисел $\frac{1}{\varepsilon} - 1 : N = E\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right)$. Этим доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Пример 2. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пусть ε — произвольное число из $\left]0; \frac{1}{2}\right[$. Поскольку

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p},$$

а при $p = n$ $|x_{n+p} - x_n| > \frac{1}{2} > \varepsilon$ для всех n, то заданная последовательность расходящаяся.

Предел функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a.

Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \to a$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, отличных от a, для которых $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Это записывают так: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Геометрически: поскольку из $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$, то это означает, что для всех точек x, удаленных от точки a не далее чем на δ, точки графика $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ (рис. 7).

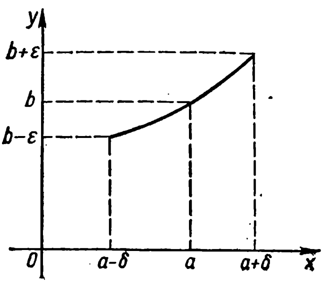


Рис. 7. Геометрический смысл предела функции $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Признаки существования предела

1. Функция $f(x)$ имеет предел b при $x = a$, если при произвольной последовательности значений $x (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, принадлежащей области определения функции и имеющей пределом число a, последовательность соответствующих значений функции $f(x_1)$, $f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$ имеет предел b.

2. Критерий Коши. Для того чтобы функция $f(x)$ имела конечный предел при $x = a$, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0 \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых x_1 и x_2 из области определения функции и при $|x_1 - a| < \delta$, $|x_2 - a| < \delta$ выполнялось условие $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Односторонние пределы функции. Число b называется *правым пределом* функции $f(x)$ в точке a, если для $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что для всех x, для которых выполняются неравенства $a < x \leqslant a + \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Правый предел функции $f(x)$ в точке a обозначают $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $f(a + 0)$.

Число b называется *левым пределом* функции $f(x)$ в точке a, если для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для всех x, для которых выполняются неравенства $a - \delta \leqslant x < a$, будет $|f(x) - b| < \varepsilon$. Левый предел функции $f(x)$ в точке a обозначают $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $f(a - 0)$.

Для того чтобы число b было пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, необходимо и достаточно, чтобы левый и правый пределы $f(a + 0)$ и $f(a - 0)$ существовали и равнялись b.

Функция $f(x)$ имеет предел $+\infty$ при $x \to a$, если, какое бы большое ни было положительное число M, существует такое число $\delta > 0$, что для всех значений x, для которых выполняется неравенство $|x - a| < \delta$, $f(x) > M$.

Функция $f(x)$ имеет предел $-\infty$ при $x \to \infty$, если, какое бы большое ни было отрицательное число $-M$, существует такое число $\delta > 0$, что для всех значений x, для которых выполняется неравенство $|x - a| < \delta$, $f(x) < -M$.

Функция $f(x)$ имеет предел ∞ при $x \to a$, если, какое бы большое ни было положительное число M, существует такое число $\delta > 0$, что для всех значений x, для которых выполняется неравенство $|x - a| < \delta$, $|f(x)| > M$.

Функция $f(x)$ имеет предел b при $x \to +\infty$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $x > N$, где N — сколь угодно большое положительное число, $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Функция $f(x)$ имеет предел b при $x \to -\infty$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $x < -N$, где N — сколь угодно большое положительное число, $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Функция $f(x)$ имеет предел b при $x \to \infty$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всех $|x| > N$, где N — сколь угодно большое положительное число, $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Теоремы о пределах

1. Предел постоянной величины равен этой величине:

$$\lim a = a.$$

2. Предел алгебраической суммы конечного числа функций, имеющих конечные пределы, равен алгебраической сумме пределов этих

функций:

$$\lim_{x\to a}[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x) \pm$$
$$\pm \ldots \pm \lim_{x\to a} f_n(x).$$

3. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, если существуют конечные пределы сомножителей:

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)\cdot f_2(x)\ldots f_n(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x)\cdot \lim_{x\to a} f_2(x)\ldots \lim_{x\to a} f_n(x).$$

4. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел делителя отличен от нуля и пределы делимого и делителя существуют:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)} \quad (\lim_{x\to a}\varphi(x) \neq 0).$$

5. Если функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi(x \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$$

и если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

6. Монотонная функция непрерывного аргумента имеет предел (конечный или бесконечный) при любом значении аргумента x (конечном или бесконечном); монотонная ограниченная функция имеет конечный предел при любом значении аргумента x.

Некоторые важные пределы. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$, где x — длина дуги или угол в радианах;

число e: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e = 2{,}71828\ldots$ (иррациональное число);

число C: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right) = C = 0{,}5772\ldots$ (постоянная Эйлера).

Символ Ландау. Для двух функций $f(x)$ и $g(x) > 0$, определенных в области D, символ

$$f(x) = O(g(x))$$

означает, что существует такая постоянная $K > 0$, что

$$|f(x)| \leqslant Kg(x) \text{ для } \forall x \in D.$$

Классификация бесконечно малых функций

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$, то функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$, то всегда можно записать $f(x) = b + \alpha(x_0)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$ функция.

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0$.

а) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = L$ ($L = \text{const}$, $L \neq 0$), то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют *бесконечно малыми одного порядка малости* и записывают

$$\alpha = O(\beta), \quad \beta = O(\alpha).$$

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0$, k — фиксированное положительное число. Если $\alpha(x)$ и $\beta^k(x)$ — бесконечно малые функции одного порядка, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой порядка k относительно бесконечно малой $\beta(x)$.

б) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функцию $\alpha(x)$ называют бесконечно малой высшего порядка малости, чем $\beta(x)$, и записывают

$$\alpha = o(\beta);$$

функцию $\beta(x)$ в этом случае называют бесконечно малой низшего порядка малости, чем $\alpha(x)$.

в) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, т. е. $\alpha(x) - \beta(x) = o(\alpha)$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют эквивалентными бесконечно малыми и записывают

$$\alpha \sim \beta.$$

г) Если предел отношения $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ при $x \to x_0$ не существует, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют несравнимыми.

При отыскании предела отношения двух бесконечно малых функций каждая из них может быть заменена эквивалентной ей бесконечно малой.

Пример 3. Дано функцию $f(x) = \sqrt{x+4}$. Пользуясь определением предела функции, доказать, что

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 3.$$

Надо доказать, что для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $|x - 5| < \delta \Rightarrow |f(x) - 3| < \varepsilon$. Рассмотрим выражение

$$|\sqrt{x+4} - 3| = \frac{|x-5|}{|\sqrt{x+4} + 3|}.$$

Так как $|\sqrt{x+4} + 3| \geqslant 3$ при всех x из области определения функции $[-4; \infty[$, то $|\sqrt{x+4} - 3| \leqslant \frac{|x-5|}{3}$. Поэтому для всех x, для которых $|x - 5| < 3\varepsilon$, справедливо неравенство

$$|\sqrt{x+4} - 3| < \varepsilon.$$

Положим $\delta = 3\varepsilon$. Будем иметь $\lim\limits_{x \to 5} \sqrt{x+4} = 3$.

Пример 4. Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-8}{x^3-8}.$$

Здесь числитель и знаменатель в точке $x=2$ имеют предел, равный нулю. Применить теорему о пределе частного нельзя. Разлагаем числитель и знаменатель на множители:

$$x^2+2x-8=(x-2)(x+4),\quad x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4).$$

После сокращения на $x-2$ получим выражение

$$\frac{x+4}{x^2+2x+4}$$

и, применив теорему о пределе частного, найдем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+4}{x^2+2x+4}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}.$$

Заметим, что сокращение дроби на $x-2$ было законным, так как при отыскании предела функции в точке $x=2$ значение ее в точке $x=2$ не принимает участия, а потому мы на 0 не сокращали.

Пример 5. Найти предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3+2x^2-5}{5x^3+x-8}.$$

В данном случае теорему о пределе частного непосредственно применить нельзя, так как ни делимое, ни делитель не имеют конечного предела при $x\to+\infty$. Преобразуем дробь, разделив ее числитель и знаменатель на x^3. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x^2-5}{5x^3+x-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^3}}{5+\frac{1}{x^2}-\frac{8}{x^3}}.$$

Так как при $x\to\infty$

$$\frac{2}{x}\to 0,\ \frac{5}{x^3}\to 0,\ \frac{1}{x^2}\to 0,\ \frac{8}{x^3}\to 0,$$

то, применив теорему о пределе суммы, убеждаемся, что числитель имеет предел, равный 4, а знаменатель имеет предел 5. По теореме о пределе частного имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x^2-5}{5x^3+x-8}=\frac{4}{5}.$$

Пример 6. Найти предел

$$\lim_{x\to\pm\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).$$

а) Пусть $x\to+\infty$. Теорему о пределе суммы непосредственно применить нельзя, так как выражение в скобках есть разность двух бесконечно малых величин, о которой без специального исследования ничего конкретного сказать нельзя. Умножим и разделим функцию на выражение, сопряженное с $\sqrt{x^2+1}-x$, т. е. на $\sqrt{x^2+1}+x$:

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x^2+1-x^2)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2},$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0.$

б) Пусть $x\to-\infty$. Выражение, стоящее в скобках, имеет в этом случае положительное значение и неограниченно возрастает по абсолютной величине; множитель x, стоящий перед скобкой, также неограниченно возрастает по абсолютной величине, но сохраняет отрицательное значение. А потому все выражение $x(\sqrt{x^2+1}-x)$ при $x\to-\infty$ неограниченно возрастает по абсолютной величине, сохраняя отрицательное значение, и

$$\lim_{x\to-\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)=-\infty.$$

Пример 7. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}.$$

Так как $\sin x\sim x$ и $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}\times$$

$$\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Пример 8. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{1}{x}, & \text{если } 0<x<\infty,\\ x\cos\frac{1}{x}, & \text{если } -\infty<x<0,\end{cases}$$

имеет левый предел в точке 0 и не имеет в ней правого предела.

Рассмотрим две последовательности значений, сходящиеся к нулю:

$$x_n = \frac{1}{2\pi n} \text{ и } \tilde{x}_n = \frac{2}{\pi(4n+1)}.$$

Тогда $f(x_n) = \cos 2\pi n = 1$, $f(\tilde{x}_n) = \cos\frac{\pi(4n+1)}{2} = 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, а $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = 0$. Но $x_n \to +0$, $\tilde{x}_n \to +0$, тогда правый предел не существует. Выражение $x\cos\frac{1}{x}$ при $x \to -0$ является произведением бесконечно малой функции x на ограниченную функцию $\cos\frac{1}{x}$, тогда $\lim\limits_{x\to-0} x\frac{1}{\cos x} = 0$. Отсюда и следует, что

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} x\cos\frac{1}{x} = 0.$$

Непрерывность функции

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если число a принадлежит области определения функции, предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и равен значению функции в точке $x = a$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

т. е. если функция $f(x)$ определена при $x=a$ и для $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\delta(\varepsilon, a)>0$ такое, что при всех x, для которых $|x-a| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

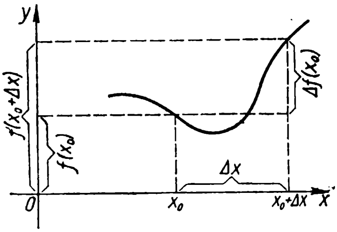


Рис. 8. Приращение аргумента и приращение функции.

Определение непрерывной функции можно дать с помощью понятия приращений. Приращением аргумента x в точке x_0 называется разность

$$\Delta x = x - x_0.$$

Приращением функции $f(x)$ в точке x_0 называется разность

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0).$$

Приращения аргумента и функции по знаку могут быть и положительными, и отрицательными (рис. 8).

Функция $f(x)$, определенная в окрестности точки a, называется *непрерывной в точке* $x = a$, если

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f(a) = 0,$$

т. е. функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Критерий непрерывности. Для того чтобы функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки a, включая и точку a, была непрерывной в точке a, необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности точек x_n ($n = 1, 2, \ldots$), взятых из этой окрестности, сходящейся к точке a, последовательность $f(x_n)$ ($n = 1, 2, \ldots$) сходилась к $f(a)$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторого множества X, называется непрерывной на этом множестве X.

Если выполняется равенство

$$f(a-0) = f(a) \quad (f(a+0) = f(a)),$$

то говорят, что функция $f(x)$ *непрерывна слева* (*справа*) в точке $x = a$. Для непрерывности функции в точке $x = a$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$f(a-0) = f(a+0) = f(a).$$

В тех точках a, которые находятся внутри или на границе области определения функции и в которых она неопределенна либо значение $f(a)$ не совпадает со значением предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, либо $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ не существует, функция имеет разрыв.

Различают точки разрыва первого рода и точки разрыва второго рода. *Точки разрыва первого рода* — это точки, в которых существуют конечные односторонние пределы

$$f(a-0) = \lim_{x\to a-0} f(x) \text{ и } f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x).$$

Если a — точка разрыва первого рода функции $f(x)$ и правый предел функции $f(x)$ в точке a не равен левому пределу этой функции, то абсолютную величину разности правого и левого пределов функции $f(x)$ в точке a называют *скачком* функции в точке a. *Точки разрыва второго рода* — это точки разрыва функции $f(x)$, в которых не существует хотя бы один из пределов или этот предел бесконечен. *Устранимая точка* — это точка разрыва функции $f(x)$, когда $\lim f(x)$ существует: $f(a-0) = f(a+0)$, но при $x = a$ функция или не задана, или имеет значение

$$f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x).$$

Если хотя бы один из пределов $f(a-0)$ или $f(a+0)$ равен ∞, то точка $x = a$ называется *точкой бесконечного разрыва*.

Теорема о непрерывности монотонной функции. Если множество значений монотонно возрастающей (убывающей) функции $f(x)$, которые она принимает, когда x изменяется на множестве X, находится в некотором множестве Y и заполняет его сплошь, то функция $f(x)$ в X непрерывна.

Из теорем о пределах функций следует

теорема об арифметических операциях над непрерывными функциями. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a, то в этой точке непрерывны и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(a) \neq 0$). Из этой и предыдущей теорем следует

Теорема о непрерывности элементарных функций. Любая элементарная функция непрерывна в области своего определения.

Теорема о суперпозиции непрерывных функций. Пусть функция $\varphi(y)$ определена на множестве Y, а функция $f(x)$ — на множестве X, причем значения последней функции не выходят за пределы Y, когда x изменяется в X. Если $f(x)$ непрерывна в точке $x = a \in X$, а $\varphi(y)$ непрерывна в соответствующей точке $y_0 = f(a) \in Y$, то и сложная функция $\varphi(f(x))$ непрерывна в точке $x = a$.

Пример 9. Задана функция

$$f(x) = \sqrt{x+6}.$$

Доказать, что в точке $x = 3$ функция непрерывна.

В точке $x = 3$ функция определена: $f(x) = 3$. Выберем $\forall \varepsilon > 0$. Рассмотрим разность $f(x) - f(3) = \sqrt{x+6} - 3$ и оценим ее по модулю. При $\delta > 0$ для значений x, для которых выполняется неравенство $|x-3| < \delta$, выполняется также и неравенство

$$|\sqrt{x+6} - 3| = \frac{|x-3|}{|\sqrt{x+6}+3|} < \frac{|x-3|}{3} < \frac{\delta}{3}.$$

Пусть $\delta = 3\varepsilon$, тогда при всех значениях x, для которых $|x-3| < 3\varepsilon$, выполняется неравенство $|\sqrt{x+6} - 3| < \varepsilon$. Непрерывность функции при $x = 3$ доказана.

Пример 10. Доказать непрерывность функции

$$f(x) = 5x^2 - 3x + 2$$

при любом x.

Пусть x_0 — произвольная точка числовой оси. Найдем $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0}(5x^2 - 3x + 2) = 5x_0^2 - 3x_0 + 2.$$

Далее вычисляем значение функции в точке x_0:

$$f(x_0) = 5x_0^2 - 3x_0 + 2.$$

Сравнивая полученные результаты, видим, что

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Следовательно, функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 по определению непрерывности. Так как точка x_0 — произвольная точка числовой оси, то функция $f(x)$ непрерывна для всех значений x.

Пример 11. Доказать, что функция

$$f(x) = \cos x$$

непрерывна при любом x.

Из

$$|\Delta f(x_0)| = |\cos(x_0 + \Delta x) - \cos x_0| =$$
$$= \left|2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x}{2}\right| < 2\left|\frac{\Delta x}{2}\right| = |\Delta x|$$

следует равенство

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0.$$

Этим доказана непрерывность функции $f(x) = \cos x$ в произвольной фиксированной точке $x_0 \in]-\infty; \infty[$, а следовательно, и на всей числовой оси.

Пример 12. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \frac{(x^2-4)\,3^x + \operatorname{arctg} x \cdot \cos x + 4^x}{\sin^3 x}.$$

Каждое слагаемое в числителе при всех значениях x является непрерывной функцией как произведение непрерывных функций. Сумма трех непрерывных функций также непрерывная функция. Знаменатель содержит функцию, непрерывную при всех значениях x, кроме $x = \pi n$ ($n \in Z$). Следовательно, рассматриваемая функция непрерывна при всех значениях x, кроме $x = \pi n$, где она не определена.

Пример 13. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \cos \log_a 2x \ (0 < x < \infty).$$

Имеем суперпозицию функций. Положим $u = \log_a 2x$. Так как логарифмическая функция $u = \log_a 2x$ непрерывна на $]0; \infty[$, а функция $\cos u$ непрерывна на $]-\infty; \infty[$, то по теореме о непрерывности суперпозиции функций функция $f(x) = \cos \log_a 2x$ непрерывна на $]0; \infty[$.

Пример 14. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{7}(2x^2+5), & \text{если } -\infty < x \leqslant 1, \\ 5-4x, & \text{если } \quad 1 < x < 3, \\ x-5, & \text{если } \quad 3 \leqslant x < \infty. \end{cases}$$

Область определения функции: $]-\infty; \infty[$. На интервалах $]-\infty; 1[$, $]1; 3[$, $]3; \infty[$ функция непрерывна. Разрывы могут быть только в точках $x = 1$, $x = 3$.

Вычислим односторонние пределы функции в точке $x = 1$:

$$f(1-0) = \lim_{x \to 1-0} \frac{1}{7}(2x^2+5) = 1,$$

$$f(1+0) = \lim_{x \to 1+0} (5-4x) = 1.$$

Значение функции в точке $x = 1$ определяется первым аналитическим выражением, т. е.

$$f(1) = \frac{1}{7}(2+5) = 1.$$

Так как $f(1-0) = f(1+0) = f(1) = 1$, то в точке $x = 1$ заданная функция непрерывна.

Рассмотрим $f(x)$ в точке $x = 3$:

$$f(3-0) = \lim_{x \to 3-0} (5-4x) = -7,$$

$$f(3+0) = \lim_{x \to 3+0} (x-5) = -2,$$

$$f(3-0) \neq f(3+0).$$

Функция в точке $x = 3$ имеет разрыв первого рода. Скачок функции в точке разрыва: $f(3+0) - f(3-0) = -2 - (-7) = 5$.

Пример 15. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \cos^2 \frac{1}{x}.$$

Пусть $x_n = \frac{1}{n\pi}$ $(n \in N)$. Тогда $x_n \to 0$ при $n \to \infty$, а $\cos^2 \frac{1}{x} \to 1$ при $n \to \infty$. Если $\tilde{x}_n = \frac{2}{\pi(1+2n)}$ $(n \in N)$, то $\tilde{x}_n \to 0$ при $n \to \infty$, а $\cos^2 \frac{1}{\tilde{x}_n} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, предел $\lim\limits_{x \to 0} \cos^2 \frac{1}{x}$ не существует, $x = 0$ — точка разрыва второго рода.

Основные свойства непрерывных функций на отрезке

1. Первая теорема Вейерштрасса. Непрерывная функция на отрезке $[a; b]$ ограничена на этом отрезке.

2. Вторая теорема Вейерштрасса. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то среди ее значений на этом отрезке существуют наименьшее и наибольшее.

3. Первая теорема Больцано — Коши. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и если значения этой функции на концах этого отрезка противоположны по знаку, то существует по меньшей мере одна точка $c \in]a; b[$, значение функции в которой равно нулю: $f(c) = 0$.

4. Вторая теорема Больцано — Коши. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и если $f(a) \neq f(b)$, то для произвольного числа A, находящегося между числами $f(a)$ и $f(b)$, существует по меньшей мере одна точка $c \in]a; b[$ такая, что $f(c) = A$.

РАЗДЕЛ 2

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКА

§ 1. Системы координат

Декартова система координат

Плоскость, на которой задана система координат, называется *координатной плоскостью*. Декартова, или прямоугольная, система координат определяется линейной единицей измерения и двумя взаимно перпендикулярными числовыми осями. Точка пересечения осей называется *началом координат*, а оси — *координатными осями*. Одна из них называется *осью абсцисс*, а другая — *осью ординат*. Оси координат соответственно обозначаются Ox и Oy.

С каждой точкой P плоскости, в которой выбрана система координат, можно связать два числа, которые получаем следующим образом. Опускаем из точки P перпендикуляры на оси координат. Пусть

P_x — основание перпендикуляра на оси абсцисс, а P_y — основание перпендикуляра на оси ординат. Точке P_x на числовой прямой, каковой является ось абсцисс, соответствует действительное число x, точке P_y на оси ординат соответствует также действительное число y. Эти числа называются *координатами* точки $P : x$ — абсциссой, а y — ординатой (рис. 9). Каждую пару действительных чисел можно рассматривать как координаты некоторой точки на плоскости. Чтобы построить точку по ее координатам x_0 и y_0, надо отложить числа x_0 и y_0 соответственно на оси абсцисс и оси ординат, а затем из этих точек провести перпендикуляры к соответствующим осям. Точка пересечения перпендикуляров и есть искомой.

Координаты точек плоскости записывают в такой последовательности — сначала абсцисса, затем ордината: $P(x_0; y_0)$. Если на плос-

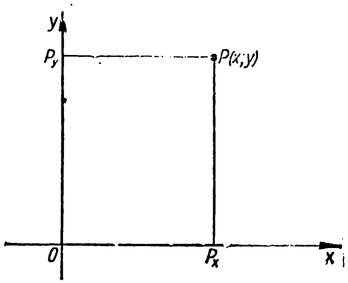


Рис. 9. Координаты точки P на плоскости xOy.

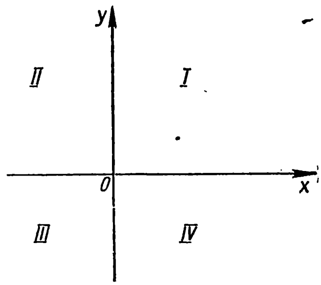


Рис. 10. Квадранты *I, II, III, IV* координатной плоскости xOy.

кости выбрана система координат, то между ее точками и множеством пар действительных чисел существует взаимно однозначное соответствие.

Координатные оси разбивают всю плоскость на четыре части, которые имеют название *квадрантов*. Каждый из квадрантов является прямым углом с вершиной в начале координат. Квадранты нумеруют так, как показано на рис. 10. В каждом квадранте знаки координат точек не изменяются. Эти знаки такие: в I квадранте — (+; +), во II — (—; +), в III — (—; —), в IV — (+; —).

Полярная система координат

Полярные координаты точки на плоскости — это два числа, которые определяют положение этой точки относительно некоторой фиксированной точки O (полюса) и некоторого фиксированного луча $O\rho$ (полярной оси). Первая координата ρ точки $M(\rho; \varphi)$ — полярный радиус — определяет расстояние точки от полюса: $OM = \rho$; вторая координата φ — полярный угол — угол, на который надо повернуть ось $O\rho$ в положительном или отрицательном направлении до совпадения с лучом OM (рис. 11). Полярный угол считается положительным при отсчете от полярной оси против часовой стрелки и отрицательным — при отсчете в противоположную сторону.

Если в полярной системе координат условимся длину полярного радиуса считать неотрицательной ($0 \leqslant \rho < \infty$) и полярный угол брать в интервале $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, то этим устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и полярными координатами $(\rho; \varphi)$, за исключением полюса, который конкретного полярного угла не имеет. Это соответствие удобно иметь в виду при решении задач на построение отдельных точек на плоскости, определение расстояния между двумя точками, деление отрезка в заданном отношении и др.

При исследовании функций и построении их графиков часто полярный радиус принимает отрицательные значения, а полярный угол принимает значения, большие 2π или отрицательные. Например, в функции $\rho = \sin 2\varphi$ при $\varphi = \frac{2}{3}\pi$ полярный радиус $\rho = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в функции $\rho = 2\varphi$ угол может принимать произвольные значения.

Во многих задачах приходится рассматривать значения полярного угла φ и полярного радиуса ρ от $-\infty$ до $+\infty$. Отрицательные значения φ откладывают от полярной оси по часовой стрелке, а отрицательные значения ρ — на продолжении луча OQ с другой стороны от полюса. Тогда значения φ между 0 и 2π или между $-\pi$ и $+\pi$ называют главными. В этом случае произвольная пара координат $(\rho; \varphi)$ определяет на плоскости только одну точку, а одной точке плоскости соответствует множество пар чисел. Действительно, при изменении φ от $-\infty$ до $+\infty$ луч может бесконечное число раз занимать одно и то же положение, например луч OQ при $\varphi = \alpha$, $\alpha + 2\pi$, $\alpha + 4\pi$, ..., $\alpha + 2k\pi$, ..., где k — целое положительное или отрицательное число, занимает одно и то же положение (рис. 12). Точка на луче с полярным радиусом $\rho = a$ может быть определена одной из пар координат

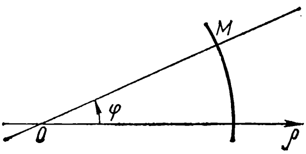


Рис. 11. Полярные координаты точки M.

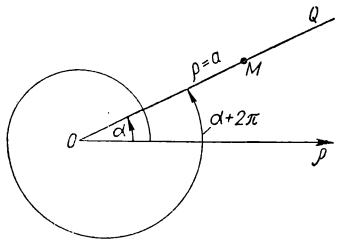


Рис. 12. Построение точки в полярной системе координат.

$$(a; \alpha),\ (a; \alpha + 2\pi),\ \dots,\ (a; \alpha + 2k\pi),\ \dots$$

Это следует иметь в виду и при построении графиков функций, заданных в полярной системе координат.

Переход от декартовых координат к полярным и наоборот выполняется по формулам

$$x = \rho\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\varphi$$

и

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$\varphi = \operatorname{Arctg}\frac{y}{x} = \operatorname{Arcsin}\frac{y}{\rho}\ (x \neq 0),$$

где x, y — декартовы координаты произвольной точки $M(x; y)$, а ρ, φ — ее полярные координаты. Здесь декартова система координат выбрана так, что ее начало O совпадает с полюсом полярной системы, а ось абсцисс Ox — с полярной осью.

Преобразования декартовой системы координат

Известно, что положение точки на плоскости определяется двумя координатами относительно некоторой системы координат. Координаты точки изменятся, если выберем другую систему координат. Задача преобразования координат и заключается в том, чтобы, зная координаты точки в одной системе координат, определить ее координаты в другой системе.

Перенос начала координат. При этом преобразовании изменяется начало системы координат, а направление осей и масштаб остаются неизменными. Пусть имеем две системы координат с разными началами O и O_1 и одинаковым направлением осей (рис. 13). Обозначим через a и b координаты нового начала O_1 в старой системе координат и через x, y и x', y' — координаты произвольной точки M соответственно в старой и новой системе. Тогда старые координаты x и y произвольной точки M через ее новые x' и y' выразятся формулами

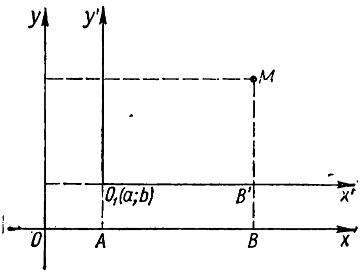


Рис. 13. Перенос начала координат.

$$x = a + x',$$
$$y = b + y',$$

где $OA = a$, $OB = x$, $AB = x'$, $AO_1 = b$, $BM = y$, $B'M = y'$ (см. рис. 13), а новые координаты точки через ее старые — формулами

$$x' = x - a,$$
$$y' = y - b.$$

Поворот координатных осей. При этом преобразовании начало координат и масштаб не изменяются, но оси поворачиваются на один и тот же угол.

Пусть M — точка на плоскости с координатами x и y в старой системе координат (рис. 14) и пусть новая ось Ox' образует со старой осью Ox (так же, как и ось Oy' с осью Oy) угол α. Угол поворота отсчитывается в направлении, противоположном движению часовой стрелки. Координаты точки M в новой системе координат обозначим через x' и y'.

Старые координаты произвольной точки M через ее новые координаты при повороте осей на угол α выразятся формулами

$$x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Здесь $OA = x$, $OB = x'$, $AM = y$, $MB = y'$. Новые координаты точки M через старые выразятся так:

$$x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha,$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha.$$

Общий случай (перенос начала и поворот осей координат). Объединяя формулы переноса начала координат и формулы поворота осей координат, получаем формулы общего преобразования координат, которое включает как частные случаи параллельный перенос (при $\alpha = 0$) и поворот осей (при $a = b = 0$):

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a,$$
$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b.$$

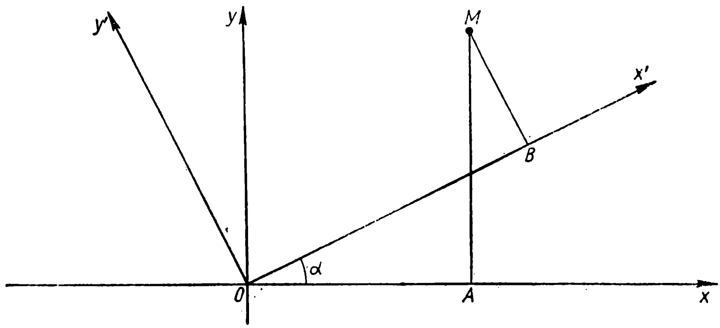


Рис. 14. Поворот координатных осей.

Заметим, что эти формулы — линейные относительно x' и y', т. е. имеют общий вид:

$$x = Ax' + By' + C,$$
$$y = A_1x' + B_1y' + C_1.$$

Новые координаты x', y' выразятся через старые x, y так:

$$x' = (x - a)\cos\alpha + (y - b)\sin\alpha,$$
$$y' = -(x - a)\sin\alpha + (y - b)\cos\alpha.$$

Эти формулы также линейны относительно x, y.

§ 2. Исследование функции в декартовой системе координат

Область определения функции

При табличном способе задания функции к области ее определения относятся все значения x, указанные в таблице. При этом для промежуточного значения x, которого нет в таблице, функция может быть и не определена. Следует заметить, что при табличном способе задания функция может быть задана и для всех значений x, которые находятся между двумя крайними числами в таблице. При этом должен быть указан способ определения для произвольных промежуточных значений x (чаще всего таким способом является линейное интерполирование).

При графическом способе задания функции область определения очевидна из графика, а при словесном — из словесного определения данной функции.

При аналитическом способе задания функции область определения функции находят как множество всех значений x, при которых формула, определяющая функцию, имеет смысл. Часто такую область определения функции называют естественной. Дополнительные условия могут уменьшить естественную область определения функции.

Областью определения функции может быть множество отдельных точек. Так, например, функция $f(x) = \sqrt{-(x-1)^2}$ областью определения имеет только одну точку $x = 1$. При аналитическом способе задания функции может случиться, что выражение для функции содержит дробь, знаменатель которой превращается в нуль при определенном значении x, или корни четной степени из отрицательного выражения и др. Чтобы найти область определения функции в таких случаях, надо отбросить все значения x, для которых знаменатели дробей, входящих в выражение для функции, превращаются в нуль, и все значения x, для которых подкоренные выражения четной степени отрицательны. Заметим, что при исследовании области определения функции не рекомендуется осуществлять преобразования в формуле, которой задана функция.

Рассмотрим некоторые примеры на отыскание области определения функции.

Пример 1.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

Выражение $\sqrt{4-x^2}$ принимает действительные значения, если $4-x^2 \geqslant 0$, т. е. если $|x| \leqslant 2$. Но при $x = \pm 2$ знаменатель дроби равен нулю, дробь теряет смысл, а потому значения ± 2 не могут входить в область определения функции. Функция определена только при $|x| < 2$. Область определения: $]-2;\ 2[$.

Пример 2.

$$f(x) = \arcsin \frac{4x}{2+x}.$$

Область определения функции $y = \arcsin x$ есть совокупность значений $|x| \leqslant 1$. В данном примере отыскание области определения сводится к решению неравенства

$$\left|\frac{4x}{2+x}\right| \leqslant 1.$$

Имеем

$$\begin{cases} 4x \leqslant 2+x, \\ -2-x \leqslant 4x, \end{cases}$$

откуда $x \leqslant \frac{2}{3}$, $x \geqslant -\frac{2}{5}$. Область определения: $\left[-\frac{2}{5};\ \frac{2}{3}\right]$.

Пример 3.

$$f(x)=3+\sqrt{\lg\cos x}.$$

Функция имеет смысл, если подкоренное выражение существует и неотрицательно: $\lg\cos x\geqslant 0$, отсюда $\cos x\geqslant 1$; но $\cos x$ не может быть большим единицы, следовательно, возможен только случай $\cos x=1$, тогда $x=2k\pi$ $(k\in Z)$. Область определения заданной функции — множество точек $x=2k\pi$ $(k\in Z)$.

Пример 4.

$$f(x)=\log_3\log_4\log_5 x.$$

Чтобы функция $f(x)$ была определена, должно выполняться неравенство

$$\log_4\log_5 x>0,$$

отсюда $\log_5 x>1$ и $x>5$. Область определения: $]5;\ \infty[$.

Пример 5.

$$f(x)=\frac{2}{x}+3^{\arcsin x}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}.$$

Заданная функция определена, если одновременно выполняются следующие неравенства:

$$x\neq 0,\ -1\leqslant x\leqslant 1 \text{ и } x>2.$$

Неравенства $-1\leqslant x\leqslant 1$ и $x>2$ несовместимы, потому функция не определена ни при каком x.

Пример 6. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0;\ 1]$. Найти область определения функций: а) $f(4x^2)$; б) $f(\operatorname{tg} x)$.

а) Введем вспомогательный аргумент $t=4x^2$. Тогда функция $f(4x^2)=f(t)$ определена, если $0\leqslant t\leqslant 1$, т. е. $0\leqslant 4x^2\leqslant 1$, отсюда $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$. Область определения функции $f(4x^2)$: $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$.

б) Введем вспомогательный аргумент $t=\operatorname{tg} x$. Тогда функция $f(\operatorname{tg} x)=f(t)$ определена, если $0\leqslant t\leqslant 1$, т. е. $0\leqslant\operatorname{tg} x\leqslant 1$, отсюда $k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in Z)$. Область определения функции $f(\operatorname{tg} x)$: $k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi$ $(k\in Z)$.

Область значений функции. График ограниченной функции

Область значений функции $E(f)$ — это множество значений функции, которые она принимает при всех значениях аргумента из области определения ее (см. рис. 4). Область значений функции может состоять из отдельных точек, одной точки, одного или нескольких интервалов и т. д. Очевидно, что для ограниченной функции область ее значений не может быть неограниченным множеством, а для неограниченной функции — ограниченным. Например, для неограниченной функции $y=x^4$ область значений функции — $[0;\ \infty[$, а для ограниченной функции $y=\cos x$ область значений — отрезок $[-1;\ 1]$.

При табличном и графическом способах задания функции области значений очевидны. Для отыскания области значений функции, заданной аналитически: $y = f(x)$, надо найти все значения y, при которых уравнение $f(x) = y$ имеет действительные решения.

Если общее решение уравнения $f(x) = y$ можно записать в виде $x = F(y)$, то для отыскания области значений функции f надо найти множество тех y, для которых выражение $F(y)$ имеет смысл.

Если функция задана на нескольких интервалах и по-разному на каждом из них, то исследуют значения такой функции на каждом интервале.

Иногда для отыскания области значений функции удобно применить другой способ, а именно вычислить $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$. Этот способ часто применяют, когда рассматриваемая функция является дробно-линейной.

Во многих случаях найти область значений функции нелегко. Тогда выполняют возможные исследования функции, строят график, а после этого область значений функции становится очевидной.

Если известна область значений функции, то легко указать возможные наибольшее и наименьшее значения, которые принимает эта функция.

График ограниченной функции ($|f(x)| \leqslant M$) находится в полосе между прямыми, параллельными оси абсцисс, проведенными на расстоянии M от нее.

График функции, ограниченной снизу ($f(x) > m$), расположен выше прямой, параллельной оси абсцисс, проведенной на расстоянии m от нее.

График функции, ограниченной сверху ($f(x) < M$), расположен ниже прямой, проведенной параллельно оси абсцисс на расстоянии M. Так, например, график функции $y = \sin x$ находится между прямыми $y = -1$ и $y = 1$, так как $|\sin x| \leqslant 1$. Функция $y = a^x$ ограничена снизу ($a^x > 0$), и ее график находится над осью абсцисс. Функция $y = -\frac{1}{2}x^2$ ограничена сверху $\left(-\frac{1}{2}x^2 \leqslant 0\right)$, и ее график лежит под осью абсцисс.

Рассмотрим некоторые примеры на отыскание области значений функции.

Пример 7. Найти область значений функции

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3}.$$

Решив это равенство относительно x, получим

$$x = \pm\sqrt{\frac{3y - 1}{y - 1}}.$$

Отсюда следует, что действительным значениям x соответствуют только те значения y, для которых $\frac{3y - 1}{y - 1} \geqslant 0$. Решив это неравенство, получим $y \leqslant \frac{1}{3}$ и $y > 1$, т. е. областью значений функции является $\left]-\infty;\ \frac{1}{3}\right] \cup \left]1;\ \infty\right[$. В данном случае функция не ограничена сверху, так как область значений содержит интервал $]1;\ \infty[$, и не ограничена снизу, так как область значений содержит $\left]-\infty;\ \frac{1}{3}\right]$.

Пример 8. Найти область значений функции

$$y = x^2 - 4x + 7.$$

Преобразуем квадратный трехчлен $x^2 - 4x + 7$, выделив из него полный квадрат:

$$y = (x-2)^2 + 3.$$

Выражение $(x-2)^2$ принимает все неотрицательные значения, а потому областью значений заданной функции является множество $y \geqslant 3$. Эта функция не ограничена сверху.

Пример 9. Найти область значений функции

$$y = \frac{3}{1-x^2}.$$

Решив это равенство относительно x, получим

$$x = \pm\sqrt{\frac{y-3}{y}}.$$

Область значений функции y определяем из соотношения

$$\frac{y-3}{y} \geqslant 0 \quad (y \neq 0).$$

Область значений функции: $]-\infty;\ 0[\ \cup\ [3;\ \infty[$. Область определения функции: $]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]-1;\ 1[\ \cup\ ]1;\ \infty[$. Чтобы найти область значений функции на каждом из интервалов области определения функции, учтем, что для x, для которых $x^2 < 1$, функция отрицательна, а для x, для которых $x^2 < 1$, функция положительна. Интервалу $]-1;\ 1[$ области определения функции соответствует $[+3;\ \infty[$ области значений функции. Если $y < 0$, а $x = \sqrt{\frac{y-3}{y}}$, то $\forall y \in\ ]-\infty;\ 0[$ будут соответствовать два значения x. Интервалам $]-\infty;\ -1[$ и $]1;\ \infty[$ области определения функции будет соответствовать интервал $]-\infty;\ 0[$ области значений функции.

Пример 10. Найти область значений функции

$$y = \frac{x+1}{2x-1}.$$

Для отыскания области значений заданной функции решаем равенство $y = \frac{x+1}{2x-1}$ относительно x. Получаем $x = \frac{y+1}{2y-1}$. Отсюда

$y \neq \frac{1}{2}$. Область значений функции: $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; \infty\right[$. Пользуясь другим способом, находим

$$\lim_{x \to \pm\infty} y = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1}{2}.$$

Значения $y = \frac{1}{2}$ надо исключить из области значений функции. Область значений: $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}; \infty\right[$.

Четность и нечетность функции.
Особенности графика четной и нечетной функций

Четность или нечетность функции проверяем, исходя из определения четной и нечетной функций (см. § 2 разд. 1).

Пример 11.

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}.$$

Функция определена на множестве $|x| \leqslant 2$, симметричном относительно начала координат, и

$$f(-x) = \sqrt{4-(-x)^2} = \sqrt{4-x^2} = f(x) \text{ для } \forall x \in [-2; 2].$$

Следовательно, $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ — четная функция.

Пример 12.

$$f(x) = \log_a \left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \quad (a \neq 1,\ a > 0).$$

Функция определена на множестве $]-\infty; \infty[$, симметричном относительно начала координат, и

$$f(-x) = \log_a \left(-x + \sqrt{1+x^2}\right) = \log_a \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} =$$
$$= -\log_a \left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = -f(x),$$

т. е. выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$ для $\forall x \in]-\infty; \infty[$. Функция нечетная.

Пример 13.

$$f(x) = \log_a x.$$

Функция определена на несимметричном множестве $]0; \infty[$. Следовательно, из определения четности и нечетности функций делаем вывод, что данная функция не может быть ни четной, ни нечетной.

График четной функции — кривая, для которой ось Oy является осью симметрии. График нечетной функции — кривая, для которой начало координат является центром симметрии.

Эти особенности графиков четной и нечетной функций позволяют сократить процесс построения графиков таких функций, а именно: достаточно начертить график функции в той части области определения, которая соответствует положительным значениям аргумента, а затем продолжить этот график симметрично относительно оси Oy, если функция четная, и симметрично относительно начала координат, если функция нечетная (рис. 15).

Пример 14. Продолжить функцию

$$f(x) = 4x^5 + x^2 - 6\sin x, \quad x \geqslant 0,$$

на всю числовую ось так, чтобы получить нечетную функцию.

Пусть $x < 0$. Тогда

$$f(-x) = 4(-x)^5 + (-x)^2 - 6\sin(-x) = -4x^5 + x^2 + 6\sin x.$$

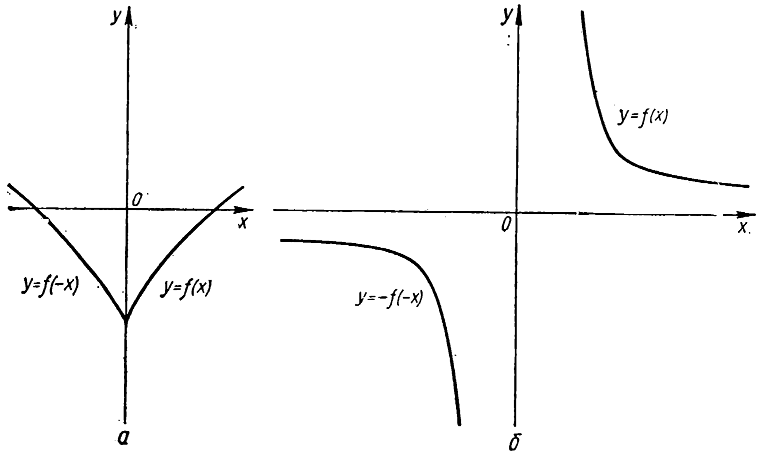


Рис. 15. Графики четной (*а*) и нечетной (*б*) функций.

Так как надо получить нечетную функцию, то будем требовать, чтобы при $x < 0$ выполнялось равенство

$$f(x) = -f(-x),$$

т. е.

$$f(x) = -f(-x) = -(-4x^5 + x^2 + 6\sin x) = 4x^5 - x^2 - 6\sin x.$$

Следовательно, искомая функция будет иметь вид

$$f(x) = \begin{cases} 4x^5 + x^2 - 6\sin x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ 4x^5 - x^2 - 6\sin x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Виды симметрии. График обратной функции

Симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно вертикальной оси $x = x_0$. График функции $y = f(x)$ симметричен относительно вертикальной оси $x = x_0$, если

$$f(x_0 - x) = f(x_0 + x)$$

для всех x из области определения функции $f(x)$. В частности, график четной функции симметричен относительно оси ординат ($x_0 = 0$).

Пример 15. Определить, относительно какой вертикальной оси симметричен график функции

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Из условия симметрии имеем

$$-2axx_0 - bx \equiv 2axx_0 + bx.$$

Отсюда $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, т. е. $x = -\dfrac{b}{2a}$ — ось симметрии.

Пример 16. Определить вертикальную ось симметрии графика функции

$$y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Записываем условие симметрии:

$$\frac{1}{(x_0 - x)^2} + \frac{1}{(1 - x_0 + x)^2} \equiv \frac{1}{(x_0 + x)^2} + \frac{1}{(1 - x_0 - x)^2}.$$

Отсюда, считая, что знаменатели не равны нулю, имеем

$$x_0 \left[(1 - 2x_0)^2 + 2(1 - 2x_0)(x_0^2 - x^2) + (x_0^2 - x^2)^2\right] \equiv$$
$$\equiv (1 - x_0)(x_0^2 - x^2)^2,$$

$$\begin{array}{c|l} (x_0^2 - x^2)^2 & x_0 = 1 - x_0, \\ x_0^2 - x^2 & 2x_0(1 - 2x_0) = 0, \\ (x_0^2 - x^2)^0 & x_0(1 - 2x)^2 = 0, \end{array}$$

$$x_0 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $x = \dfrac{1}{2}$ — ось симметрии.

Пример 17. Определить вертикальную ось симметрии графика функции

$$y = a + b\cos x.$$

Записываем условие симметрии:

$$a + b\cos(x_0 - x) \equiv a + b\cos(x_0 + x),$$
$$\cos x_0 \cos x + \sin x_0 \sin x \equiv \cos x_0 \cos x - \sin x_0 \sin x.$$

Отсюда получаем

$$\sin x_0 = 0, \quad x_0 = k\pi \ (k \in Z),$$

следовательно, $x = k\pi$ ($k \in Z$) — оси симметрии.

Симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно точки (x_0; y_0). Точка M (x_0; y_0) является центром симметрии графика функции $y = f(x)$, если для всех x, принадлежащих области ее определения, выполняется тождество

$$y_0 \equiv \frac{1}{2}\left[f(x_0 - x) + f(x_0 + x)\right].$$

В частности, график нечетной функции симметричен относительно начала координат $O(0;\ 0)$.

Пример 18. Определить центры симметрии графиков функций:

а) $y = ax + b$; б) $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$; в) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

а) Записываем условие симметрии:

$$2y_0 \equiv a(x_0 - x) + b + a(x_0 + x) + b.$$

Отсюда $y_0 \equiv ax_0 + b$, где x_0 — произвольное. Точка $M(x_0;\ ax_0 + b)$ — центр симметрии графика функции $y = ax + b$.

б) Из условия симметрии

$$2y_0 \equiv \frac{ax_0 + b - ax}{cx_0 + d - cx} + \frac{ax_0 + b + ax}{cx_0 + d + cx}$$

получаем

$$2y_0\left[(cx_0 + d)^2 - c^2x^2\right] \equiv 2(ax_0 + b)(cx_0 + d) - 2acx^2.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & -2y_0c^2 = -2ac, \\ x^0 & 2y_0(cx_0 + d)^2 = 2(ax_0 + b)(cx_0 + d). \end{array}$$

Отсюда находим, что $y_0 = \dfrac{a}{c}$, $x_0 = -\dfrac{d}{c}$, т. е. точка $M\left(-\dfrac{d}{c};\ \dfrac{a}{c}\right)$ — центр симметрии графика функции $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

в) Условие симметрии:

$$2y_0 \equiv a(x_0 - x)^3 + b(x_0 - x)^2 + c(x_0 - x) + d + a(x_0 + x)^3 + b(x_0 + x)^2 + c(x_0 + x) + d,$$

отсюда

$$y_0 \equiv ax_0^3 + 3ax_0x^2 + bx_0^2 + bx^2 + cx_0 + d.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим

$$x_0 = -\frac{b}{3a},\quad y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d.$$

Точка $M\left(-\dfrac{b}{3a};\ ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d\right)$ — центр симметрии графика функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

При исследовании функций надо иметь в виду следующие положения.

1. Если график функции $y = f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ симметричен относительно двух вертикальных осей $x = a$ и $x = b$ $(b > a)$, то функция $f(x)$ — периодическая, ее период $2b - 2a$.

2. Если график функции $y = f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ симметричен относительно двух точек $A(a;\ y_0)$ и $B(b;\ y_1)$ $(b > a)$, то функцию $f(x)$ можно изобразить в виде суммы линейной функции и некоторой периодической функции с периодом $2b - 2a$. В частности, если $y_0 = y_1$, то функция $f(x)$ — периодическая.

3. Если график функции $y = f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ симметричен относительно точки $A(a;\ y_0)$ и прямой $x = b$ $(b \neq a)$, то функция $f(x)$ — периодическая с периодом $4b - 4a$.

График обратной функции. Если независимую переменную y в обратной функции $x = f^{-1}(y)$ откладывать по оси Oy, а значения функции $x = f^{-1}(y)$ — по оси Ox, то график обратной функции будет совпадать с графиком прямой функции $y = f(x)$.

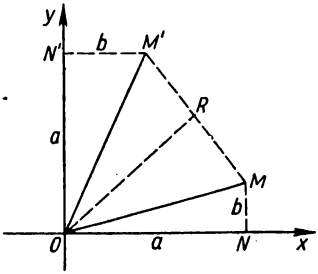


Рис. 16. Построение точек двух взаимно обратных функций.

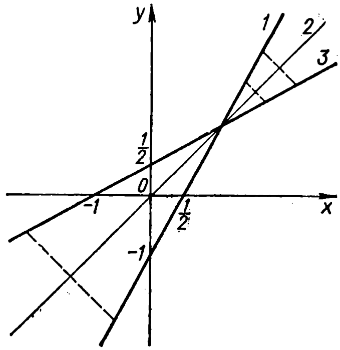


Рис. 17. Графики функции $y = 2x - 1$ (*1*) и обратной ей $y = \frac{x+1}{2}$ (*3*); ось симметрии $y = x$ (*2*).

Обозначим независимую переменную в обратной функции буквой x, а обратную функцию — буквой y, т. е. вместо функции $x = f^{-1}(y)$ будем рассматривать функцию $y = \varphi(x)$. Заметим, что обратная функция $y = \varphi(x)$, когда x пробегает точки множества Y, и функция $x = f^{-1}(y)$, когда $y \in Y$, те же, так как у них одинаковые область определения и закон соответствия.

Чтобы построить график обратной функции $y = \varphi(x)$, надо график прямой функции $y = f(x)$ симметрично отобразить относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Действительно, допустим, что при $x = a$, $y = f(a) = b$ точка $M(a;\ b)$ принадлежит графику прямой функции, а точка $M'(b;\ a)$ — графику обратной функции, так как $a = \varphi(b)$. Имеем (рис. 16) $\triangle ON'M' = \triangle ONM$, отсюда $\angle N'OM' = \angle NOM$ и $OM' = OM$, тогда биссектриса OR координатного угла является биссектрисой $\angle MOM'$, и так как $\triangle MOM'$ равнобедренный, биссектриса OR является осью симметрии $\triangle MOM'$. Следовательно, каждой точке M на графике прямой функции соответствует точка M' на графике обратной функции, симметричном относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов графику прямой функции.

Пример 19. Найти функцию, обратную функции $y = 2x - 1$, и построить ее график.

Находим из заданного уравнения x:

$$x = \frac{y+1}{2}.$$

Заменяя в этом равенстве x на y, а y на x, получаем

$$y = \frac{x+1}{2}.$$

Графики заданной функции и обратной ей показаны на рис. 17.

Замечание. График обратной функции можно построить еще так: сначала построить график функции $y = f(-x)$ (симметричным отображением относительно оси Oy), затем этот график повернуть на $90°$ относительно начала координат по часовой стрелке.

Периодичность функции. График периодической функции

Установление факта периодичности функции существенно облегчает ее изучение и построение графика: периодическую функцию можно исследовать в пределах одного периода. Для построения графика периодической функции с периодом ω достаточно построить график этой функции на интервале $]x;\ x+\omega[$, а затем полученный график периодически продолжить. Периодическим продолжением заданной функции $f(x)$ с периодом ω, определенной на некотором отрезке $[a;\ b]$ или на интервале $]a;\ b[$, называется построение такой периодической функции $F(x)$ с периодом ω, которая совпадает с заданной функцией $f(x)$ на $[a;\ b]$ или на $]a;\ b[$.

Рассмотрим некоторые примеры на установление периодичности функции.

Пример 20.

$$f(x) = \sin 4x.$$

Существует ли такое $\omega \neq 0$, чтобы для всех действительных x (область определения заданной функции — вся числовая ось) выполнялось условие $\sin 4(x+\omega) = \sin 4x$?

Имеем

$$\sin 4(x+\omega) - \sin 4x = 0,$$

или

$$2\cos(4x + 2\omega)\sin 2\omega = 0,$$

что может выполняться при $\sin 2\omega = 0$; тогда $2\omega = k\pi$ $(k \in Z)$. Следовательно, такие значения ω существуют, функция является периодической, наименьший положительный ее период $\frac{\pi}{2}$.

Пример 21.

$$f(x) = 1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Функция периодическая с периодом $\omega = 2\pi$, так как

$$1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 - \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = 1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}(x + 2\pi).$$

Пример 22.

$$f(x) = 1 + \operatorname{tg}\frac{x}{5} + \cos\frac{x}{3}.$$

Функция $\cos\frac{x}{3}$ имеет период $\omega_1 = 6\pi$, так как

$$\cos\frac{x}{3} = \cos\left(\frac{x}{3} + 2\pi\right) = \cos\frac{1}{3}(x + 6\pi).$$

Функция $\operatorname{tg}\frac{x}{5}$ имеет период $\omega_2 = 5\pi$, так как

$$\operatorname{tg}\frac{x}{5} = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{5} + \pi\right) = \operatorname{tg}\frac{1}{5}(x + 5\pi).$$

Период заданной функции $f(x)$ — наименьшее кратное чисел 6π и 5π, т. е. $\omega = 30\pi$.

Пример 23.

$$f(x) = a\sin(\alpha x + \beta) \quad (\alpha \neq 0),$$

где a, α, β — постоянные числа.

Эту функцию часто называют гармоникой. Покажем, что она периодическая и ее периодом является $\omega = \frac{2\pi}{\alpha}$, т. е. для всех x выполняется равенство $f\left(x + \frac{2\pi}{\alpha}\right) = f(x)$. Действительно,

$$a\sin(\alpha x + \beta) = a\sin[(\alpha x + \beta) + 2\pi] = a\sin\left[\alpha\left(x + \frac{2\pi}{\alpha}\right) + \beta\right];$$

можно доказать, что число $\frac{2\pi}{\alpha}$ является и наименьшим положительным периодом.

Пример 24. Докажем, что функция

$$f(x) = \sin x^2$$

непериодическая.

Допустим обратное: пусть существует такое число $\omega \neq 0$, что при всех значениях x справедливо равенство $\sin x^2 = \sin(x + \omega)^2$. Положив $x = 0$, будем иметь $0 = \sin\omega^2$. Но тогда $\omega^2 = n\pi$ ($n \in Z$), следовательно, $\omega = \sqrt{n\pi}$. Подставив это значение ω в равенство $\sin x^2 = \sin(x + \omega)^2$, получим

$$\sin x^2 = \sin(x + \sqrt{n\pi})^2 = \sin(x^2 + 2x\sqrt{n\pi} + n\pi).$$

Пусть

$$x \neq \frac{2k\pi - n\pi}{2\sqrt{n\pi}}, \quad \text{где } k \in Z,$$

тогда

$$2x\sqrt{n\pi} + n\pi \neq 2k\pi$$

и, следовательно,

$$\sin x^2 \neq \sin(x^2 + 2x\sqrt{n\pi} + n\pi).$$

Пришли к противоречию. Это и доказывает, что $f(x) = \sin x^2$ — непериодическая функция.

Пример 25.

$$f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x.$$

Имеем

$$f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

Замечание. Используя свойства периодических функций (см. с. 19), можно в примерах 20—23 сразу записать периоды заданных функций.

Пример 26. Продолжить функцию

$$f(x) = 3^x, \quad 0 \leqslant x \leqslant 4,$$

четным способом на отрезок $[-4; 0]$, а затем периодически продолжить полученную функцию на всю ось с периодом $\omega = 8$.

Продолжим функцию $f(x) = 3^x$ четным способом на отрезок $[-4; 0]$, при этом должно выполняться условие

$$f(x) = f(-x) = 3^x.$$

Четное продолжение будет иметь вид:

$$f(x) = \begin{cases} 3^x, & 0 \leqslant x \leqslant 4, \\ 3^{-x}, & -4 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases}$$

Так как функция имеет период $\omega = 8$, то для всех x, для которых выполняется условие

$$8k \leqslant x \leqslant 8k + 4,$$

имеем

$$f(x) = f(x - 8k).$$

Так как $0 \leqslant x - 8k \leqslant 4$, то $f(x) = f(x - 8k) = 3^{x-8k}$. Аналогично находим, что при $8k - 4 \leqslant x \leqslant 8k$

$$f(x) = f(x - 8k) = 3^{-(x-8k)}.$$

Следовательно,

$$f(x) = \begin{cases} 3^{x-8k}, & \text{если } 8k \leqslant x \leqslant 8k + 4, \\ 3^{8k-x}, & \text{если } 8k - 4 \leqslant x \leqslant 8k. \end{cases}$$

Нули и знаки функции

Нулем функции называется то действительное значение x, при котором значение функции равно нулю.

Геометрический смысл понятия нулей функции. Нули функции — это абсциссы точек, в которых график функции пересекает ось Ox или касается ее. При переходе через эти точки функция может менять знак (рис. 18). Заметим, что функция может менять знак и при переходе через точку разрыва. Если график только касается оси Ox, то в точке касания функция знака не меняет.

Для того чтобы найти нули функции $f(x)$, надо решить уравнение $f(x)=0$. Действительные корни этого уравнения и есть нулями функции $y=f(x)$. Допустим, что решениями уравнения $f(x)=0$ являются $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, т. е. нулями функции $y=f(x)$ являются $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Они разбивают область определения функции $f(x)$ на части, причем на каждой из этих частей функция определена и не превращается в нуль.

Интервалы, где функция не имеет ни нулей, ни точек разрыва, т. е. знак функции не меняется, называют *интервалами знакопостоянства*.

Чтобы определить знак функции для всех точек интервала знакопостоянства, достаточно определить знак функции в произвольной точке этого интервала (проще всего вычислить значение функции в какой-либо конкретной точке). Если область определения функции состоит из нескольких интервалов знакопостоянства, то исследование знаков функции проводится отдельно на каждом интервале.

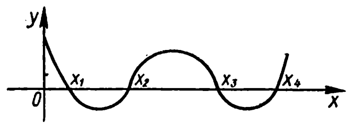


Рис. 18. Нули функции $y=f(x)$: x_1, x_2, x_3, x_4. На интервалах $]x_1; x_2[$, $]x_3; x_4[$ функция отрицательна; на интервале $]x_2; x_3[$ —положительна.

Пример 27. Найти интервалы знакопостоянства функции

$$f(x)=\frac{x^2-5x+6}{x-4}.$$

Область определения этой функции: $]-\infty; 4[\,\cup\,]4; \infty[$. Определим точки, где функция превращается в нуль. Для этого приравняем нулю числитель:

$$x^2-5x+6=0,$$

откуда $x_1=2$, $x_2=3$. Исследование знаков функции будем проводить на таких интервалах:

$$]-\infty; 2[,\quad]2; 3[,\quad]3; 4[,\quad]4; \infty[.$$

В каждом из этих интервалов берем по конкретной точке. Например, рассмотрим в каждом интервале соответственно точки

$$1,\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2},\ 5.$$

Исследуем знаки в этих точках. Получим соответственно следующие знаки в каждом из интервалов:

«—», «+», «—», «+».

Нули функции: $x=2$, $x=3$. Интервалы знакопостоянства:

$$]-\infty; 2[,\quad]2; 3[,\quad]3; 4[,\quad]4; \infty[.$$

Пример 28. Исследовать знаки функции

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{3+2x}}{\sqrt{3-x}-1}.$$

Функция определена при выполнении условий

$$x^2-2\geqslant 0,\quad 3+2x\geqslant 0,\quad 3-x\geqslant 0,\quad \sqrt{3-x}-1\neq 0.$$

Область определения: $\left[-\frac{3}{2};\ -\sqrt{2}\right]$, $[\sqrt{2};\ 2[$, $]2;\ 3]$. Ищем нули функции. Для этого приравняем числитель нулю:

$$\sqrt{x^2-2}-\sqrt{3+2x}=0,\quad x^2-2=3+2x,$$

$$x^2-2x-5=0,\quad x_1=1-\sqrt{6},\quad x_2=1+\sqrt{6}.$$

Следовательно, нулями функции являются точки $1-\sqrt{6}$, $1+\sqrt{6}$; из них лишь первая входит в область определения функции. Учитывая это, область определения функции разбиваем на следующие промежутки:

$$\left[-\frac{3}{2};\ 1-\sqrt{6}\right[,\quad]1-\sqrt{6};\ -\sqrt{2}],\quad [\sqrt{2};\ 2[,\quad]2;\ 3].$$

Исследуем знаки функции в этих промежутках, не вычисляя ее значений в конкретных точках. Для этого преобразуем формулу, которой задана функция:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{3+2x}}{\sqrt{3-x}-1}=\frac{\sqrt{x^2-2}-\sqrt{3+2x}}{\sqrt{3-x}-1}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{3+2x}}{\sqrt{3-x}+1}\cdot\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{3+2x}}=$$

$$=\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{3+2x}}\cdot\frac{x^2-2-(3+2x)}{3-x-1}=\frac{x^2-2x-5}{2-x}\times$$

$$\times\frac{\sqrt{3-x}+1}{\sqrt{x^2-2}+\sqrt{3+2x}}.$$

Второй сомножитель в этом произведении в области определения функции положителен, а знак первого сомножителя исследуем. Имеем

в	$\left[-\frac{3}{2};\ 1-\sqrt{6}\right[$	«+»
»	$]1-\sqrt{6};\ -\sqrt{2}]$	«—»
»	$[\sqrt{2};\ 2[$	«—»
»	$]2;\ 3]$	«+»

Монотонность функции

Монотонность функции — одна из важных характеристик функции. При исследовании функции надо уметь находить интервалы ее монотонности. Чтобы найти эти интервалы, можно воспользоваться таким утверждением: если функция строго монотонна на $[a;\ b]$, то она каждое свое значение принимает только при одном значении x.

При элементарном исследовании функций на монотонность пользуются преимущественно определением монотонности и основными свойствами (см. с. 16).

Пусть из уравнения $f(x) = y$ имеем несколько однозначных выражений x через y:

$$x = \varphi_1(y),\ x = \varphi_2(y),\ \ldots,\ x = \varphi_n(y).$$

Если $x \in\ ]a;\ b[$, то каждому значению $f(x) = y$ соответствует только одно значение x из $]a;\ b[$, а именно $\varphi_i(y)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Чтобы найти все интервалы монотонности, надо определить все интервалы, которые являются областями определения функций $\varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y)$. Если функция монотонна на отрезке $[a;\ b]$, то

а) когда она положительна и возрастает, ее график отклоняется от оси Ox с возрастанием x;

б) когда она положительна и убывает, ее график приближается к оси Ox с возрастанием x;

в) когда она отрицательна и убывает, ее график отклоняется от оси Ox (вниз) с возрастанием x;

г) когда она отрицательна и возрастает, ее график приближается к оси Ox с возрастанием x.

Пример 29. Исследовать на монотонность функцию

$$f(x) = x^3 + x.$$

Функция определена для всех точек числовой оси. Возьмем на числовой оси произвольные точки x_1 и x_2. Пусть $x_2 > x_1$. Рассмотрим разность

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1).$$

Второй множитель при любых действительных значениях x_1 и x_2 положителен. Действительно,

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + 1 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 + 1.$$

Так как $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$, а это означает, что функция $f(x)$ возрастает во всей области своего определения.

Пример 30. Исследовать на монотонность функцию

$$f(x) = (x^2 + 6x + 11)\ln(x^2 + 6x + 11).$$

Пусть $x^2 + 6x + 11 = t$. Функция $y = t\ln t$ при $t > 1$ является произведением двух возрастающих положительных функций (см. с. 17) и потому возрастает. Функция $t = x^2 + 6x + 11 = (x + 3)^2 + 2$ возрастает при $x > -3$ и убывает при $x < -3$. Поэтому (см. с. 17) данная функция возрастает при $x > -3$ и убывает при $x < -3$.

Пример 31. Исследовать на монотонность функцию

$$y = \frac{x - 3}{x + 3}.$$

Область определения данной функции: $]-\infty; -3[\cup]-3; \infty[$. Представим x через y:

$$x = \frac{3(y+1)}{1-y}.$$

Каждому значению y из области значений соответствует одно значение x из области определения функции. Функция монотонна на каждом интервале $]-\infty; -3[$ и $]-3; \infty[$. Далее с помощью сравнения значений функции в двух точках каждого интервала устанавливаем, убывает или возрастает функция на соответствующем интервале. Возьмем на первом интервале $x = -4$ и $x = -5$, значения функции в этих точках будут: $y = 7$ и $y = 4$. Следовательно, на интервале $]-\infty; -3[$ функция возрастает. Аналогично, на втором интервале возьмем $x = 4$ и $x = 5$, соответствующие значения функции будут: $\frac{1}{7}$ и $\frac{1}{4}$. Функция возрастает и на интервале $]-3; \infty[$.

Выпуклость функции

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a; b]$. Функция на этом отрезке *выпуклая*, если выполняется неравенство

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leqslant f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \quad (x_1 \neq x_2)$$

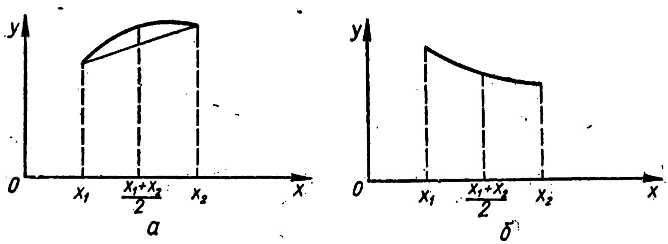


Рис. 19. Кривые $y = f(x)$ на $]x_1; x_2[$: выпуклая (*а*), вогнутая (*б*).

для всех x_1 и $x_2 \in [a; b]$ (рис. 19, *а*). Функция на отрезке $[a; b]$ *вогнутая*, если выполняется неравенство

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geqslant f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

для всех x_1 и $x_2 \in [a; b]$ (рис. 19, *б*).

Некоторые свойства выпуклых функций

1. Произведение выпуклой (вогнутой) функции на положительное постоянное число является выпуклой (вогнутой) функцией.

2. Произведение выпуклой (вогнутой) функции на отрицательное постоянное число является вогнутой (выпуклой) функцией.

3. Сумма двух выпуклых функций является выпуклой функцией.

4. Если $f(x)$ — вогнутая и возрастающая функция, а $x = \varphi(t)$ — вогнутая, то и сложная функция $f(\varphi(t))$ является вогнутой.

5. Если $f(x)$ — вогнутая и убывающая функция, а $x = \varphi(t)$ — выпуклая, то сложная функция $f(\varphi(t))$ является вогнутой.

6. Если $f(x)$ — выпуклая и возрастающая функция, а $x = \varphi(t)$ — выпуклая, то и сложная функция $f(\varphi(t))$ является выпуклой.

7. Если $f(x)$ — выпуклая и убывающая функция, а $x = \varphi(t)$ — вогнутая, то функция $f(\varphi(t))$ является выпуклой.

8. Если $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — взаимно обратные функции (в соответствующих промежутках), то:

а) если функция $f(x)$ — вогнутая и возрастающая, то функция $g(x)$ является выпуклой и возрастающей;

б) если функция $f(x)$ — выпуклая и убывающая, то функция $g(x)$ является вогнутой и убывающей;

в) если функция $f(x)$ — выпуклая и убывающая, то функция $g(x)$ является выпуклой и убывающей.

9. Вогнутая функция $f(x)$ на $[a; b]$, отличная от постоянной, не может принимать наибольшего значения внутри этого отрезка.

10. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ — положительные и выпуклые, то для того чтобы функция $y = \dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ была выпуклой, надо, чтобы одна из этих функций была возрастающей, а другая — убывающей.

11. Если функция $y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ — выпуклая, а функция $f(x)$ — отрицательная, выпуклая и возрастающая, то функция $\varphi(x)$ является положительной, вогнутой и возрастающей.

12. Если функция $y = \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ — вогнутая, а $f(x)$ и $\varphi(x)$ — выпуклые и отрицательные, то одна из рассматриваемых функций является возрастающей, а другая — убывающей.

13. Если функция $f(x)$ — выпуклая, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ является вогнутой ($f(x) \neq 0$).

14. Если функция $f(x)$ — положительная и выпуклая, то функция $y = \sqrt[n]{f(x)}$ является выпуклой (n — натуральное число).

15. Если функция $y = [f(x)]^n$ — выпуклая (n — натуральное число), то функция $f(x)$ является положительной и вогнутой.

16. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ — положительные, возрастающие, вогнутые, то функция $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ является положительной, возрастающей, вогнутой.

17. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ — положительные, убывающие, вогнутые, то функция $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ является положительной, вогнутой.

18. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ — отрицательные, возрастающие, выпуклые, то функция $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ является положительной, вогнутой.

19. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ — отрицательные, убывающие, выпуклые, то функция $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ является положительной, вогнутой.

20. Если функция $f(x)$ — положительная, убывающая, выпуклая, а функция $\varphi(x)$ — положительная, возрастающая, выпуклая, то функция $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ является положительной, выпуклой.

21. Если функция $f(x)$ — отрицательная, возрастающая, вогнутая, а функция $\varphi(x)$ — отрицательная, убывающая, вогнутая, то функция $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ является положительной, выпуклой.

22. Если функция $f(x)$ — положительная, возрастающая, выпуклая, а функция $\varphi(x)$ — отрицательная, возрастающая, вогнутая, то функция $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ является отрицательной, вогнутой.

23. Если функция $f(x)$ — положительная, убывающая, выпуклая, а функция $\varphi(x)$ — отрицательная, убывающая, вогнутая, то функция $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ является отрицательной, вогнутой.

24. Если функция $f(x)$ — положительная, возрастающая, вогнутая, а функция $\varphi(x)$ — отрицательная, возрастающая, выпуклая, то функция $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ является отрицательной, выпуклой.

25. Если функция $f(x)$ — положительная, убывающая, вогнутая, а функция $\varphi(x)$ — отрицательная, возрастающая, выпуклая, то функция $y = f(x) \cdot \varphi(x)$ является отрицательной, выпуклой.

Применение этих свойств упрощает исследование функций на выпуклость.

Пример 32. Исследовать на выпуклость функцию

$$f(x) = \lg(-x^2 + 5x - 6).$$

Корни квадратного трехчлена: 2 и 3. Поэтому $-x^2 + 5x - 6 > 0$ на интервале $]2;\ 3[$, и функция $f(x) = \lg(-x^2 + 5x - 6)$ определена на $]2;\ 3[$. Функция $t = -x^2 + 5x - 6$ выпуклая. Функция $f(x) = \lg t$ возрастающая и выпуклая. Следовательно, и функция $f(x) = \lg(-x^2 + 5x - 6)$ является выпуклой.

Исследовать кривую на выпуклость просто и удобно с помощью методов высшей математики (к этим исследованиям вернемся ниже). С помощью методов элементарной математики исследуют функцию на выпуклость таким образом: определяют знак величины

$$D = f(x_1) + f(x_2) - 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

в области определения функции. Если знак в области определения изменяется, то область раскладывают на части, где выражение знакопостоянно. Если величина D положительная на рассматриваемом интервале, то функция на этом интервале вогнутая, если же величина D отрицательная, то функция выпуклая.

Пример 33. Исследовать на выпуклость функцию

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Рассматриваем выражение

$$D = (ax_1^2 + bx_1 + c) + (ax_2^2 + bx_2 + c) - 2\left[a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + c\right] = a\left(x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - x_1x_2 - \frac{1}{2}x_2^2\right) = \frac{a}{2}(x_1 - x_2)^2.$$

Из последнего очевидно, что при $a < 0$ функция выпуклая, а при $a > 0$ — вогнутая.

Пример 34. Для функции

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$D = (x_1 - x_2)^2 \left[\frac{3}{4} a (x_1 + x_2) + \frac{b}{2} \right].$$

Следовательно,

$$D > 0, \text{ если } \frac{x_1 + x_2}{2} > -\frac{b}{3a} \ (x_1 \neq x_2),$$

$$D < 0, \text{ если } \frac{x_1 + x_2}{2} < -\frac{b}{3a} \ (x_1 \neq x_2).$$

На интервале $\left]-\infty;\ -\frac{b}{3a}\right[$ функция выпуклая, а на интервале $\left]-\frac{b}{3a};\ \infty\right[$ — вогнутая.

Точка графика, в которой изменяется направление выпуклости, называется *точкой перегиба*. Касательная к кривой в точке перегиба пересекает график, если она существует.

Характерные точки графика функции

К характерным точкам графика относятся:

точки пересечения графика с координатными осями;

предельные значения функции, т. е. ее значения на границе области определения;

точки, в которых функция принимает экстремальные значения;

точки перегиба и др.

Рассмотрим коротко, как находят эти точки.

Точки пересечения графика с координатными осями.

а) С осью Oy: $x = 0$, $y = f(0)$.

б) С осью Ox: $y = 0$, а из уравнения $f(x) = 0$ находят x.

Пример 35.

$$y = \log_2 (x + 8) - 1.$$

Точки пересечения с осью ординат:

$$x = 0; \quad y(0) = \log_2 (0 + 8) - 1 = \log_2 8 - 1 = 3 - 1 = 2.$$

Имеем одну точку пересечения графика с осью Oy: (0; 2). Точки пересечения с осью Ox:

$$y = \log_2 (x + 8) - 1 = 0, \quad \log_2 (x + 8) = 1,$$

$$x + 8 = 2, \quad x = -6.$$

Следовательно, график пересекает ось Ox в одной точке (—6; 0).

Предельные значения функции. Если область определения функции — отрезок, то предельные значения функции вычисляем, подставив в выражение для функции предельные значения аргумента.

Если область определения функции — открытый промежуток, то находят предел функции, если он существует, когда аргумент стремится к предельному значению:

$$\lim_{x \to a} f(x),$$

где a — абсцисса открытого конца промежутка. Этот предел может быть конечным, а может случиться, что функция стремится к бесконечности определенного знака.

На графике разный характер поведения функции у конца интервала, где она определена, выражается так. Если в точке a функция имеет бесконечный предел, то график функции прилегает к вертикальной прямой $x = a$; при приближении x к a график неограниченно отклоняется от оси Ox вверх или вниз в зависимости от знака функции.

Если в точке a, не принадлежащей области определения, функция имеет конечный предел y_0, то график функции при приближении x к a приближается к точке плоскости с координатами $(a;\ y_0)$. Этот факт будем изображать на графике с помощью стрелки на том конце кривой графика, который лежит в точке с координатами $(a;\ y_0)$.

Если предел (конечный или бесконечный) функции на конце промежутка не существует, то построить график функции у этой точки невозможно.

Пример 36. Исследовать предельные значения функции

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{1 - x}.$$

Область определения функции: $]-\infty;\ 1[\ \cup\ ]1;\ \infty[$. Вычисляем

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - x^2}{1 - x} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{1 - x} = 2,$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - x^2}{1 - x} = +\infty.$$

Пример 37.

$$f(x) = \sqrt{x - 1} - 2.$$

Область определения функции: $[1;\ \infty[$.

Предельные значения функции:

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x - 1} - 2 = \infty,$$

$$f(1) = \sqrt{1 - 1} - 2 = -2.$$

Точки экстремума. Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции иногда удобно преобразовать аналитическое выражение, с помощью которого задана функция, так, чтобы было легко определить наибольшее (наименьшее) ее значение, или же воспользоваться замечаниями, что:

среднее арифметическое двух (или больше) положительных величин не меньше среднего геометрического этих величин;

сумма двух переменных положительных величин наименьшая, если эти величины равны (при условии, что произведение их является постоянной величиной).

Максимум функции — это ее значение в той точке, в которой оно является наибольшим в любой достаточно малой окрестности этой точки.

Минимум функции — это значение функции в той ее точке, в которой оно является наименьшим в любой достаточно малой окрестности этой точки.

Максимум (минимум) функции означает, что функция имеет наибольшее (наименьшее) значение сравнительно с ее значениями в достаточно близких соседних точках с обеих сторон.

Подробнее этот вопрос рассмотрен в ч. II.

Пример 38. Найти точки экстремума функции

$$y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}.$$

Находим x:

$$4xy - 4y = x^2 - 6x + 9,$$

$$x^2 - (6 + 4y)x + 4y + 9 = 0,$$

$$x_{1,2} = 3 + 2y \pm 2\sqrt{y^2 + 2y}.$$

В точках экстремума должно быть $x_1 = x_2$, а следовательно,

$$y^2 + 2y = 0,$$

откуда

$$y_1 = 0, \quad y_2 = -2.$$

Соответствующие им значения аргумента:

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -1.$$

Точки экстремума: (3; 0) и (—1; —2).

Асимптоты графика функции

При исследовании характера поведения функции большое значение имеют исследование поведения $f(x)$ при неограниченном возрастании (по абсолютной величине) аргумента x, а также исследование случаев неограниченного возрастания абсолютной величины значений $f(x)$ в конечной части области определения. Геометрически эти исследования приводят к понятию асимптоты графика.

Прямая $y = kx + b$ называется *асимптотой* кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки $P(x; f(x))$, лежащей на кривой, до этой прямой стремится к нулю при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ (рис. 20).

Различают горизонтальные, вертикальные и наклонные асимптоты.

Кривая $y = f(x)$ имеет *горизонтальную* асимптоту $y = b$, если существует конечный предел функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ и этот предел равен b, т. е.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \quad \text{или} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b.$$

Кривая $y = f(x)$ имеет *вертикальную* асимптоту $x = a$, если при $x \to a$, $x \to a - 0$, $x \to a + 0$ $f(x) \to \infty$ ($f(x) \to -\infty$). Для отыскания вертикальных асимптот надо найти те значения аргумента, вблизи которых $f(x)$ неограниченно возрастает по абсолютной величине. Если такими значениями аргумента окажутся $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то уравнения вертикальных асимптот будут иметь вид

$$x = a_1, \; x = a_2, \; \ldots, \; x = a_n.$$

Кривая $y = f(x)$ имеет *наклонную* асимптоту $y = kx + b$ в том и только в том случае, если существуют конечные пределы

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x},$$

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx]$$

(надо отдельно рассматривать случаи $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$). Наклонная асимптота — *правая*, если график приближается к ней при $x \to +\infty$, *левая*, если график приближается к ней при $x \to -\infty$; *двусторонняя*, если график приближается к ней как при $x \to -\infty$, так и при $x \to +\infty$. Заметим, что асимптота кривой $y = f(x)$ может пересекаться с этой кривой как в конечном, так и в бесконечном множестве точек.

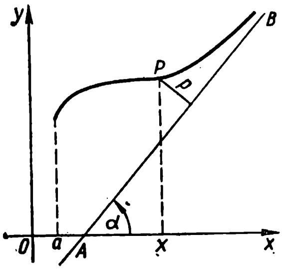


Рис. 20. Прямая AB — асимптота кривой $y = f(x)$.

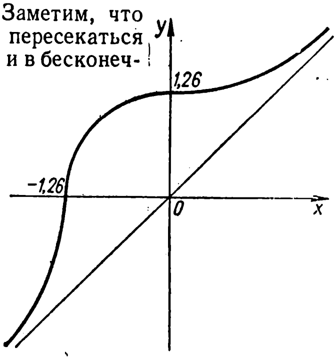


Рис. 21. Двусторонняя асимптота кривой $y = \sqrt{x^3 + 2}$.

Чтобы сделать вывод об интервалах, на которых кривая расположена над асимптотой или под ней, надо рассмотреть разность

$$\delta = y_{\text{крив}} - y_{\text{асимпт}}.$$

На тех интервалах, где $\delta > 0$, кривая находится над асимптотой, а на тех, где $\delta < 0$, — под ней.

Пример 39. Найти асимптоты кривой

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 2}.$$

Имеем

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2}}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x^3+2) - x^3}{\sqrt[3]{(x^3+2)^2} + x\sqrt[3]{x^3+2} + x^2} = 0.$$

Кривая $y = \sqrt[3]{x^3+2}$ имеет двустороннюю наклонную асимптоту $y = x$ (рис. 21).

Пример 40. Найти асимптоты кривой

$$y = \frac{3}{x^2-4}.$$

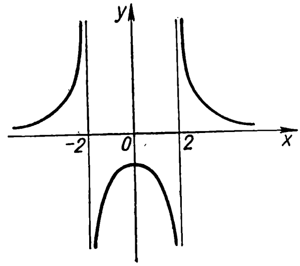


Рис. 22. Эскиз графика $y = \frac{3}{x^2-4}$; $x = \pm 2$ — вертикальные асимптоты; $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

Находим горизонтальные асимптоты:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3}{x^2-4} = 0.$$

Горизонтальная асимптота одна: $y = 0$ (ось Ox). Для определения вертикальных асимптот находим те значения x, в окрестности которых $f(x) = \frac{3}{x^2-4}$ неограниченно возрастает по абсолютной величине. Такими значениями являются $x = \pm 2$. Следовательно, вертикальными асимптотами являются прямые $x = -2$ и $x = 2$ (рис. 22).

Пример 41. Найти асимптоты кривой

$$y = x + 2\ln x.$$

Имеем

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{2\ln x}{x}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (y - kx) = \lim_{x\to+\infty} 2\ln x = \infty.$$

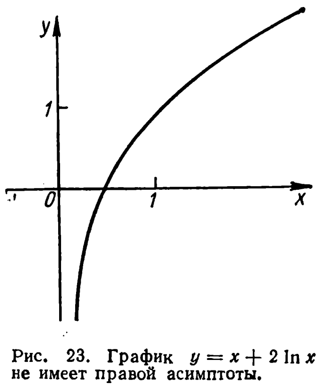


Рис. 23. График $y = x + 2\ln x$ не имеет правой асимптоты.

График данной функции правой наклонной асимптоты не имеет. Так как при $x \to 0+0$ $y \to -\infty$, то кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ (ось Oy) (рис. 23).

Порядок исследования функции и схема построения ее графика

Рекомендуем следующий порядок исследования функции и построения ее графика:

1) область определения функции;

2) область значений функции;

3) четность и нечетность функции, периодичность;

4) характерные точки графика, монотонность и выпуклость функции;

5) асимптоты графика;

6) построение графика функции.

Сделаем некоторые замечания относительно этой схемы.

При построении графиков многих функций нет надобности проводить полное исследование функции по этой схеме, некоторые пункты можно опустить. Это касается в первую очередь графиков основных элементарных функций, хорошо изученных в теоретическом курсе математики средней школы, а также графиков некоторых простейших элементарных функций.

Построение графика функции удобно выполнять параллельно с исследованием функции. Чтобы эскиз графика функции в больших по размерам интервалах ее области определения, в которых нет особенностей этой функции, был более точным, надо взять несколько точек и вычислить значения функции в них.

РАЗДЕЛ 3

ГРАФИКИ ОСНОВНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Степенная функция

Степенной функцией называется функция $y = x^\alpha$, где α — любое действительное число. Природа такой функции существенно зависит от арифметической природы числа α. Если α — число рациональное, то функция $y = x^\alpha$ — алгебраическая; если же α — число иррациональное, то функция $y = x^\alpha$ — трансцендентная.

Степенная функция с натуральным показателем

Пусть $\alpha = m$, где m — натуральное число. Область определения функции: $]-\infty; \infty[$. Если $x \to +\infty$, то функция неограниченно возрастает. Действительно, какое бы большое число N мы ни взяли, при $x > \sqrt[m]{N}$ будет выполняться неравенство $x^m > N$.

Если m — четное число, то функция $y = x^m$ — четная и ее график симметричен относительно оси ординат; если m — нечетное число, то функция $y = x^m$ — нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. Пусть $m = 2n$. Тогда

$$f(-x) = (-x)^{2n} = x^{2n} = f(x).$$

Если $m = 2n + 1$, то

$$f(-x) = (-x)^{2n+1} = -x^{2n+1} = -f(x).$$

На $[0; \infty[$ функция монотонно возрастает от 0 до ∞. Действительно, если $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$, то $y(x_2) - y(x_1) = x_2^m - x_1^m = (x_2 - x_1) \times \times (x_2^{m-1} + x_2^{m-2}x_1 + \cdots + x_1^{m-1}) > 0$. Функция $y = x^m$ при $m = 2n$

на $]-\infty;\ 0[$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0, а при $m=2n+1$ монотонно возрастает от $-\infty$ до 0.

Функция $y=x^m$ при $m>1$ для $x\in]0;\ \infty[$ вогнутая. Действительно, при $x_1\neq x_2$ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

или

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^m\leqslant\frac{x_1^m+x_2^m}{2}.$$

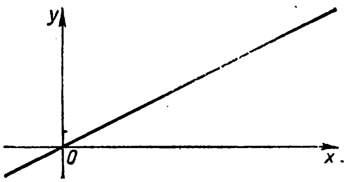


Рис. 24. Прямо пропорциональная зависимость $y=ax$, $a>0$; $y=0{,}5x$.

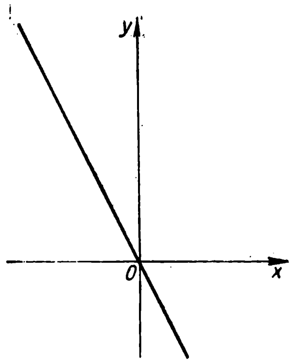


Рис. 25. Прямо пропорциональная зависимость $y=ax$, $a<0$: $y=-2x$.

Справедливость этого неравенства доказывается методом полной математической индукции.

При $m=2$ неравенство выполняется. Действительно, если $m=2$, то

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2=\frac{x_1^2+x_2^2+2x_1x_2}{4}\leqslant\frac{x_1^2+x_2^2+x_1^2+x_2^2}{4}=\frac{x_1^2+x_2^2}{2}.$$

Допустим, что неравенство справедливо для $m=k$:

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^k\leqslant\frac{x_1^k+x_2^k}{2}.$$

Умножив обе части последнего неравенства на $\frac{x_1+x_2}{2}$, получим

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{k+1}\leqslant\frac{x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+x_1^kx_2+x_1x_2^k}{4}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{x_1^{k+1}+x_2^{k+1}+x_1^{k+1}+x_2^{k+1}}{4}=\frac{x_1^{k+1}+x_2^{k+1}}{2}.$$

Следовательно, мы доказали, что если неравенство справедливо для $m=k$, то оно справедливо и для $m=k+1$. Этим самым начальное неравенство доказано.

Функция $y=x^n$ для $x\in]-\infty;\ \infty[$ при $m=2n$ вогнутая, а при $m=2n+1$ — выпуклая.

График функции $y = x^m$ проходит через точки (0; 0), (1; 1).

При $m = 2$ график функции называется квадратной параболой (см. рис. 5), при $m = 3$ — кубической параболой, при $m = 4, 5, \ldots$ — параболой соответствующей степени.

Заметим, что функция $y = ax$, где a — любое действительное число, задает *прямо пропорциональную* зависимость между величинами x и y. Графиком прямо пропорциональной зависимости является прямая, проходящая через начало координат. График функции $y = ax$ проходит в I и III квадрантах, если $a > 0$ (рис. 24), или во II и IV квадрантах, если $a < 0$ (рис. 25).

Степенная функция с целым отрицательным показателем

Пусть $\alpha = -r$, где r — натуральное число. Область определения функции $y = \frac{1}{x^r}$: $]-\infty; 0[\,\cup\,]0; +\infty[$. При r четном функция $y = \frac{1}{x^r}$ — четная и ее график симметричен относительно оси Oy; при r

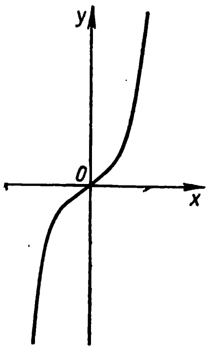


Рис. 26. $y = x^3$.

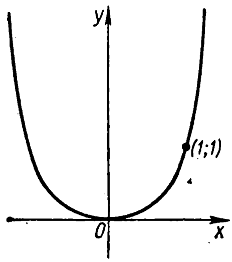


Рис. 27. $y = x^{2n}$, n — натуральное число.

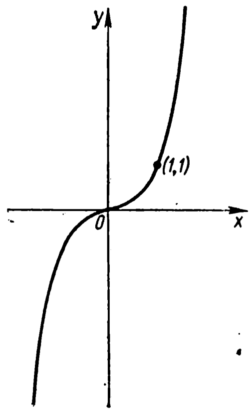


Рис. 28. $y = x^{2n+1}$, n — натуральное число.

нечетном функция $y = \frac{1}{x^r}$ нечетная и ее график симметричен относительно начала координат. Действительно,

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^{2n}} = \frac{1}{x^{2n}} = f(x),$$

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^{2n+1}} = -\frac{1}{x^{2n+1}} = -f(x).$$

Функция $y = \frac{1}{x^r}$ на интервале $]0; +\infty[$ убывает от $+\infty$ до 0. Это следует из того, что функция $y = x^r$ для $x \in]0; \infty[$ возрастает от 0 до $+\infty$ $\left(\text{если } x_1 < x_2, \text{ то } x_1^r < x_2^r, \text{ а следовательно, } \frac{1}{x_1^r} > \frac{1}{x_2^r}\right)$.

Учитывая четность или нечетность при соответствующих r (четных или нечетных), приходим к выводу, что функция $y = \frac{1}{x^r}$ на промежутке $]-\infty; 0[$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$ при четном и монотонно убывает от 0 до $-\infty$ при нечетном r.

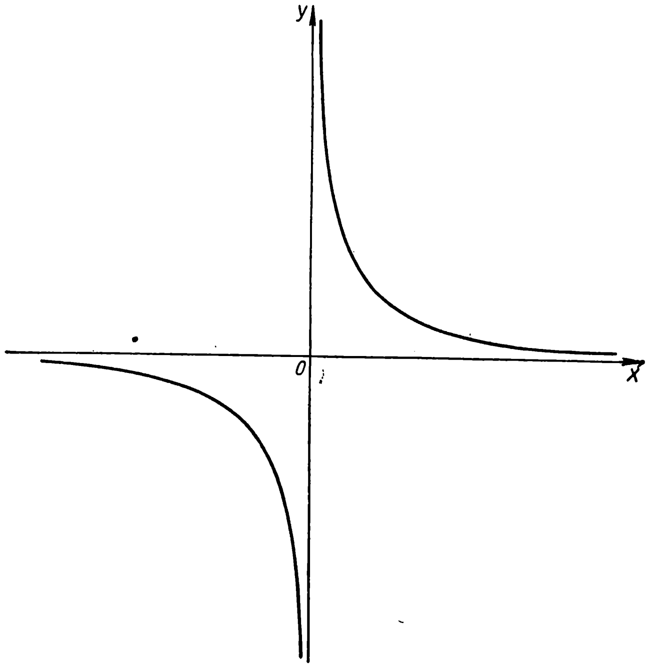


Рис. 29. $y = \frac{1}{x}$.

При $x \in]0; \infty[$ функция $y = \frac{1}{x^r}$ вогнутая. Это очевидно из неравенств

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^r \leqslant \frac{x_1^r + x_2^r}{2},$$

$$\frac{1}{\frac{x_1 + x_2}{2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right).$$

Для $x \in]-\infty;\ 0[$ функция $y=\dfrac{1}{x^r}$ при четном r вогнутая, а при нечетном r — выпуклая.

График функции не пересекает координатных осей и проходит через точку $(1;\ 1)$.

Горизонтальная асимптота: $y=0$. Действительно,

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^{r+1}}=0,$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^r}=0.$$

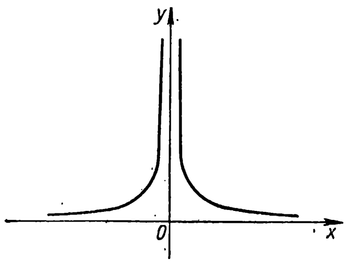


Рис. 30. $y=\dfrac{1}{x^2}$.

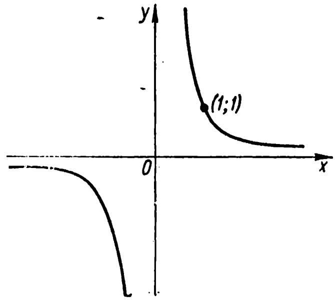


Рис. 31. $y=\dfrac{1}{x^3}$.

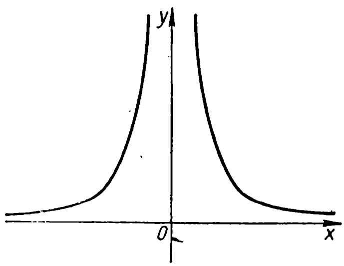


Рис. 32. $y=\dfrac{1}{x^{2n}}$.

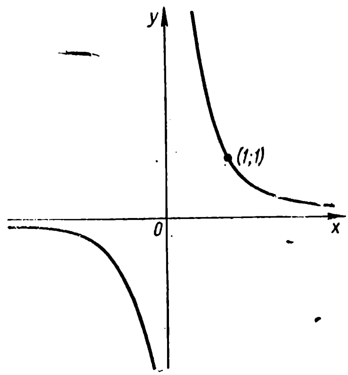


Рис. 33. $y=\dfrac{1}{x^{2n+1}}$.

Вертикальная асимптота: $x=0$, так как в окрестности точки $x=0$ функция $y=\dfrac{1}{x^r}$ неограниченно возрастает по абсолютной величине.

Заметим, что функция $y = \frac{k}{x}$, где k — любое действительное число, задает *обратно пропорциональную* зависимость между величинами x и y. График ее — гипербола, причем при $k > 0$ ветви гиперболы расположены в I и III квадрантах; если же $k < 0$, то ветви гиперболы расположены во II и IV квадрантах (рис. 34, 35).

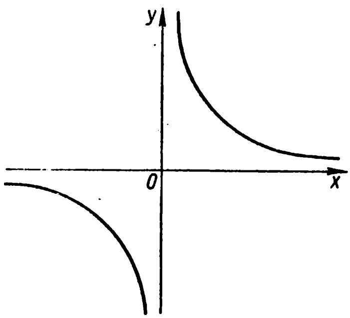


Рис. 34. Обратно пропорциональная зависимость $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$.

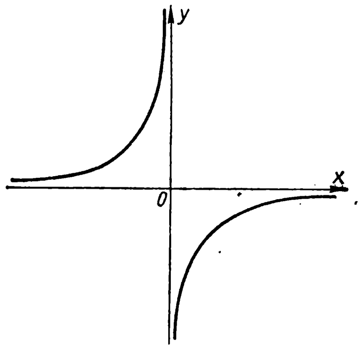


Рис. 35. Обратно пропорциональная зависимость $y = \frac{k}{x}$, $k < 0$.

Степенная функция с рациональным показателем

Рассмотрим функцию $y = x^{\alpha}$, где $\alpha = r$ — рациональное число.

а) Пусть $r = \frac{1}{m}$, где m — натуральное число. Допустим, что m — нечетное число. Из графика функции $y = x^{2n+1}$ (см. рис. 28) видно, что каждому значению $y \in]-\infty; \infty[$ соответствует одно и только одно значение $x = \sqrt[2n+1]{y}$. Следовательно, при нечетном m функция $y = x^m$ имеет обратную функцию $x = \sqrt[m]{y}$, определенную при всех y. Обозначив аргумент функции через x, а значение функции — через y, получим $y = \sqrt[m]{x}$ — обратную функцию, график которой образуем из графика функции $y = x^m$ с помощью симметричного отображения относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов (рис. 36).

Пусть теперь m — четное число. Рассмотрим график функции $y = \sqrt[m]{x}$. Каждому положительному значению y соответствуют следующие два значения $x: x = \sqrt[m]{y}$ и $x = -\sqrt[m]{y}$. Следовательно, при четном m функция, обратная функции $y = x^m$, двузначна. Однако если рассматривать функцию $y = x^m$ только на промежутке $[0; +\infty[$, на котором она возрастает, то каждому значению y будет соответствовать только одно значение $x = \sqrt[m]{y}\,(x > 0)$; функция $y = x^m$ на промежутке $[0; +\infty[$ имеет однозначную обратную функцию $x =$

$=\sqrt[m]{y}$, определенную на промежутке $[0; \infty[$. Далее под $\sqrt[m]{x}$, где m — четное число, будем понимать неотрицательное значение корня. График функции $y=\sqrt[m]{x}$ (рис. 37) получается с помощью симметричного отображения относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов графика функции $y=x^m$.

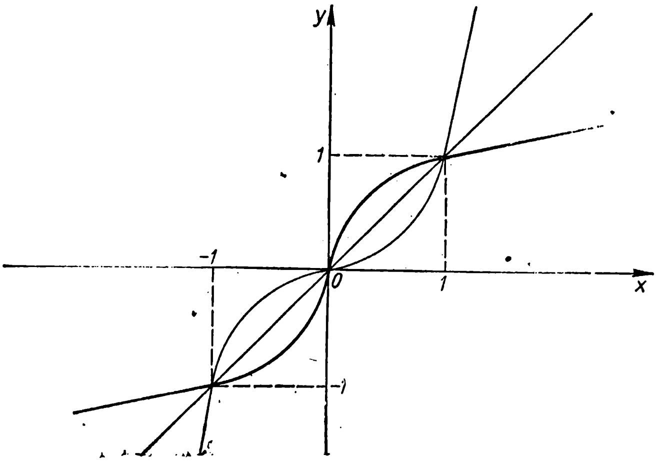


Рис. 36. Степенная функция с положительным рациональным показателем $y=x^{\frac{1}{m}}$, m — нечетное.

б) Пусть $r=\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные и взаимно простые числа. График функции $y=\sqrt[q]{x^p}$ зависит от чисел p и q.

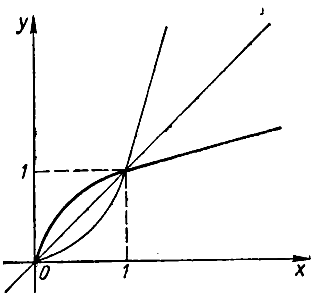


Рис. 37. Степенная функция с положительным рациональным показателем $y=x^{\frac{1}{m}}$, m — четное.

Рассмотрим несколько случаев.

П е р в ы й   с л у ч а й: p — четное число, q — нечетное. Функция $y=\sqrt[q]{x^p}$ определена на интервале $]-\infty; \infty[$. Функция четная: $\sqrt[q]{(-x)^p}=\sqrt[q]{x^p}$, ее график симметричен относительно оси Oy. На $[0; \infty[$ функция монотонно возрастает от 0 до $+\infty$. Для всех x $y=\sqrt[q]{x^p}\geqslant 0$, следовательно, график функции расположен над осью абсцисс, проходит через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$. Функция $y=\sqrt[q]{x^p}$ на $[0; \infty[$ выпуклая при

$0 < \frac{p}{q} < 1$ и вогнутая при $\frac{p}{q} > 1$. При условии $0 < \frac{p}{q} < 1$ график функции на $]0;\ 1[$ лежит выше биссектрисы $y = x$, а на $]1;\ \infty[$ — ниже; если же $\frac{p}{q} > 1$, то на $]0;\ 1[$ график функции расположен ниже биссектрисы $y = x$, а на $]1;\ \infty[$ — выше (рис. 38).

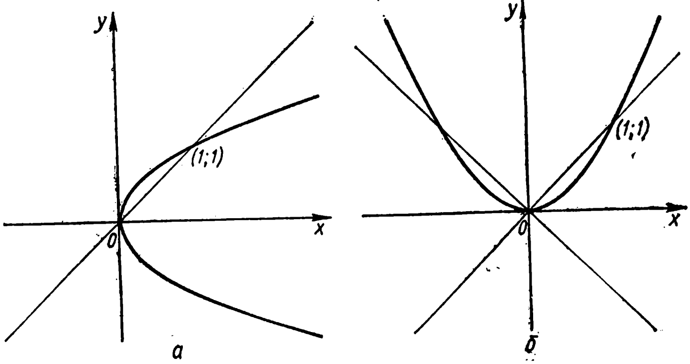


Рис. 38. Степенная функция с положительным рациональным показателем $y = x^{\frac{p}{q}}$, p — четное, q — нечетное: $\frac{p}{q} < 1$ *(а)*; $\frac{p}{q} > 1$ *(б)*.

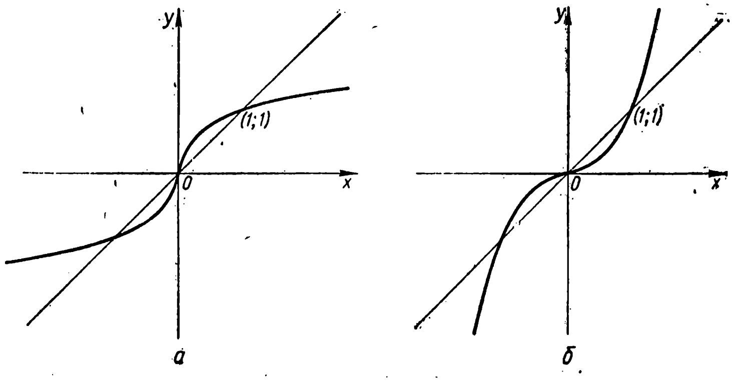


Рис. 39. Степенная функция с положительным рациональным показателем $y = x^{\frac{p}{q}}$, p и q — нечетные: $\frac{p}{q} < 1$ *(а)*, $\frac{p}{q} > 1$ *(б)*.

Второй случай: p и q — нечетные числа. Функция $y = \sqrt[q]{x^p}$ определена на $]-\infty;\ \infty[$. Функция нечетная: $\sqrt[q]{(-x)^p} = -\sqrt[q]{x^p}$, ее график симметричен относительно начала координат.

Функция монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ на $]-\infty;\ \infty[$. График функции проходит через точки $(0;\ 0)$ и $(1;\ 1)$. Функция $y = \sqrt[q]{x^p}$ на $[0;\ \infty[$ выпуклая при $0 < \frac{p}{q} < 1$ и вогнутая при $\frac{p}{q} > 1$ (рис. 39).

Третий случай: p — нечетное число, q — четное. Функция $y = \sqrt[q]{x^p} = (x^p)^{\frac{1}{q}}$ определена на $[0;\ \infty[$, монотонно возрастает на

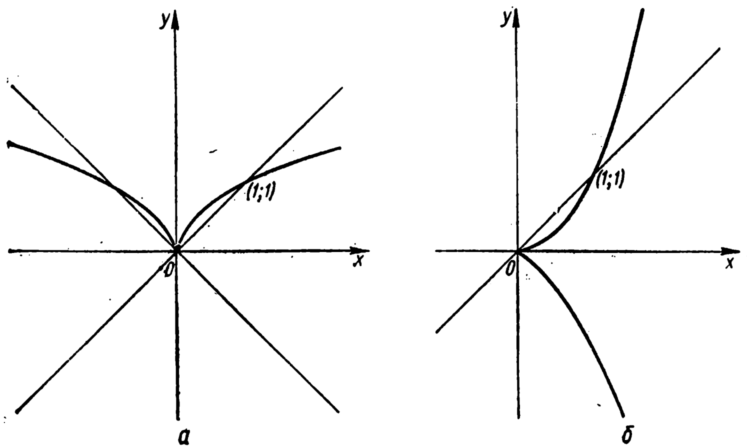


Рис. 40. Степенная функция с положительным рациональным показателем $y = x^{\frac{p}{q}}$, p — нечетное, q — четное; $\frac{p}{q} < 1$ *(а)*; $\frac{p}{q} > 1$ *(б)*.

$[0;\ \infty[$ от 0 до $+\infty$. Для $x \in [0;\ \infty[$ $y = x^{\frac{p}{q}} \geqslant 0$, следовательно, график функции расположен над осью абсцисс. Функция $y = x^{\frac{p}{q}}$ на $[0;\ \infty[$ выпуклая при $0 < \frac{p}{q} < 1$ и вогнутая при $\frac{p}{q} > 1$. График функции проходит через точки $(0;\ 0)$ и $(1;\ 1)$ (рис. 40).

в) Пусть $r = -\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные и взаимно простые числа. Степенную функцию с отрицательным рациональным показателем запишем в виде

$$y = x^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{x^{\frac{p}{q}}} = \frac{1}{\sqrt[q]{x^p}}.$$

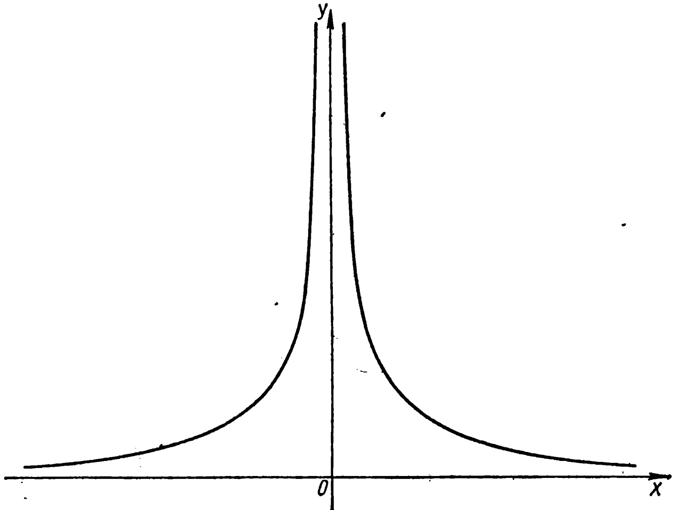


Рис. 41. Степенная функция с отрицательным рациональным показателем $y = x^{-\frac{p}{q}}$, p — четное, q — нечетное; $\frac{p}{q} > 0$.

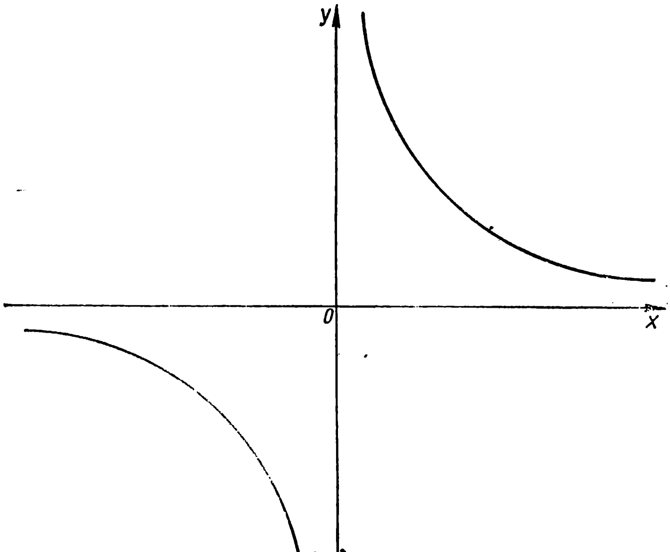


Рис. 42. Степенная функция с отрицательным рациональным показателем $y = x^{-\frac{p}{q}}$, p, q — нечетные; $\frac{p}{q} > 0$.

Первый случай: p — четное число, q — нечетное. Область определения функции: $]-\infty;\ 0[\ \bigcup\ ]0;\ \infty[$. Функция четная, ее график симметричен относительно оси ординат. На $]0;\ \infty[$ функция $y = x^{-\frac{p}{q}}$ убывающая, так как функция $y = x^{\frac{p}{q}}$ на этом промежутке возрастающая (см. рис. 38). Для $x \in]0;\ \infty[$ $y = x^{-\frac{p}{q}} > 0$, следовательно, график функции лежит над осью абсцисс. График функции проходит через точку (1; 1). Горизонтальная асимптота: $y = 0$ (рис. 41).

Второй случай: p и q — нечетные числа. Область определения функции: $]-\infty;\ 0[\ \bigcup\ ]0;\ \infty[$. Функция нечетная, ее график симметричен относительно начала координат. Функция убывающая. Горизонтальная асимптота: $y = 0$. Вертикальная асимптота: $x = 0$ (рис.42).

Третий случай: p — нечетное число, q — четное. Область определения функции: $]0;\ \infty[$. Функция убывающая на $]0;\ \infty[$. Горизонтальная асимптота: $y = 0$. Вертикальная асимптота: $x = 0$ (рис. 43).

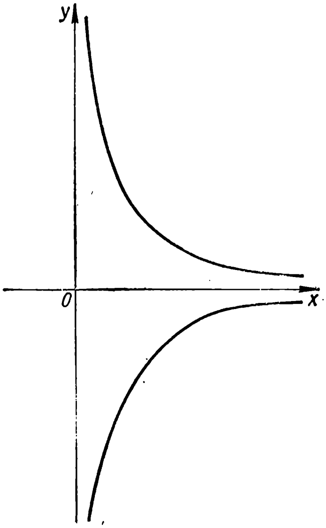


Рис. 43. Степенная функция с отрицательным рациональным показателем $y = x^{-\frac{p}{q}}$, p — нечетное, q — четное; $\frac{p}{q} > 0$.

Степенная функция с иррациональным показателем

Степенью положительного числа x с иррациональным показателем α называется предел, к которому стремится последовательность рациональных степеней этого числа, если последовательность показателей стремится к α, т. е.

$$x^{\alpha} = \lim_{r_n \to \alpha} x^{r_n}.$$

Будем считать в случае иррационального $\alpha > 0$, что функция $y = x^{\alpha}$ определена на $[0;\ \infty[$. Функция возрастает на $]0;\ \infty[$ от 0 до $+\infty$. Для всех $x \in [0;\ \infty[$ $y = x^{\alpha} \geqslant 0$, следовательно, график функции лежит над осью абсцисс. Функция вогнутая при $\alpha > 1$ и выпуклая при $0 < \alpha < 1$. График функции проходит через начало координат и точку (1; 1) (рис. 44).

График функции $y = x^{-\alpha}$, где α — иррациональное число, приведен на рис. 45.

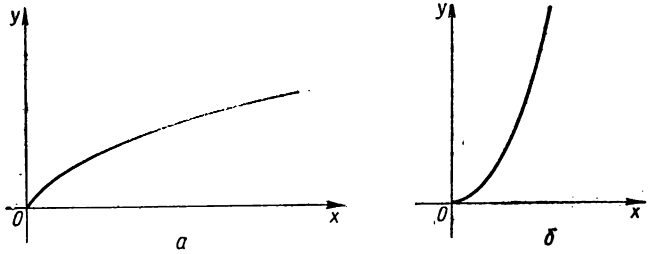


Рис. 44. Степенная функция с положительным иррациональным показателем $y = x^{\alpha}$, α — положительное иррациональное число: $\alpha < 1$ *(а)*; $\alpha > 1$ *(б)*.

§ 2. Показательная функция

Показательная функция имеет вид

$$y = a^x,$$

где $a > 0$ и $a \neq 1$. Эта функция принадлежит к трансцендентным функциям. Область определения функции: $]-\infty; \infty[$. Область значений функции: $0 < y < \infty$, график лежит над осью абсцисс.

Если $x = 0$, то $y = a^0$, т. е. график пересекает ось ординат в точке (0; 1).

При $a > 1$ функция $y = a^x$ монотонно возрастает, а при $a < 1$ монотонно убывает. Действительно, вычислим значения функции в точках x_1 и x_2 ($x_2 > x_1$):

$$f(x_1) = a^{x_1},\ f(x_2) = a^{x_2},$$

далее рассмотрим разность

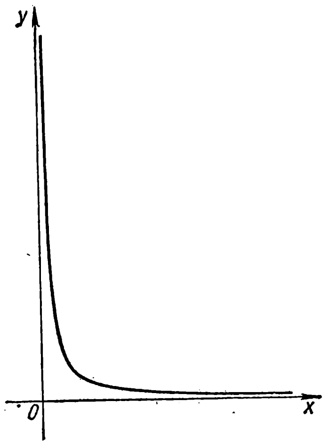


Рис. 45. Степенная функция с отрицательным иррациональным показателем $y = x^{-\alpha}$.

$$a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1)$$

и определим ее знак. Так как a^{x_1} всегда больше нуля, знак произведения зависит от знака второго сомножителя.

Если $x_2 - x_1 > 0$, то $a^{x_2 - x_1} > 1$ при $a > 1$ и $a^{x_2 - x_1} < 1$ при $a < 1$. Поэтому

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \text{ при } a > 1,$$
$$f(x_2) - f(x_1) < 0 \text{ при } a < 1,$$

т. е. $f(x_2) > f(x_1)$ при $a > 1$ и $f(x_2) < f(x_1)$ при $a < 1$, если $x_2 > x_1$.

Если $x \to +\infty$, то $a^x \to +\infty$ при $a > 1$ и $a^x \to 0$ при $a < 1$. Если $x \to -\infty$, то $a^x \to 0$ при $a > 1$ и $a^x \to +\infty$ при $a < 1$. Ось абсцисс — асимптота графика функции, причем кривая приближается асимптотически к оси Ox.

Для исследования выпуклости графика определим знак разности

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

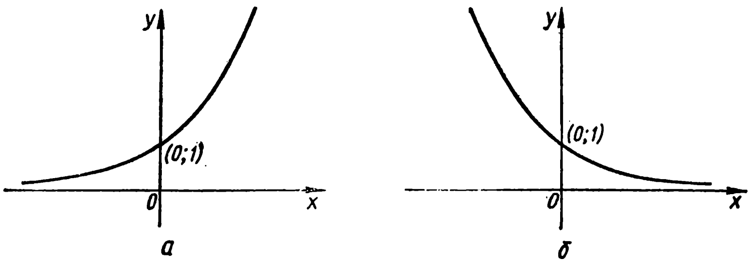


Рис. 46. Показательная функция $y = a^x$: $a > 1$ (*а*); $a < 1$ (*б*).

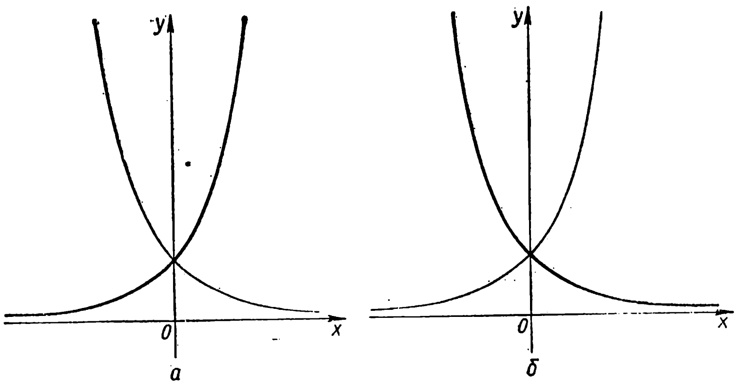


Рис. 47. Показательная функция $y = a^{-x}$: $a < 1$ (*а*); $a > 1$ (*б*).

а именно:

$$\frac{a^{x_1} + a^{x_2}}{2} - a^{\frac{x_1+x_2}{2}} = \frac{\left(a^{\frac{x_1}{2}} - a^{\frac{x_2}{2}}\right)^2}{2} \geqslant 0.$$

Следовательно, график функции вогнутый.

Заметим, что графики функций a^x и a^{-x} симметричны относительно оси ординат.

Примеры показательных функций приведены на рис. 46—49.

§ 3. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция имеет вид

$$y = \log_a x,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$. Область определения функции: $]0;\ \infty[$. Если $a > 1$, то логарифмическая функция положительна при $x > 1$, отрицательна при $0 < x < 1$ и равна нулю при $x = 1$.

Если $0 < a < 1$, то логарифмическая функция положительна при $0 < x < 1$, отрицательна при $x > 1$ и равна нулю при $x = 1$. При $a > 1$ функция монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, при $a < 1$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$, причем тем медленнее, чем больше $|\ln a|$. Если $a > 1$, то

$$\lim_{x \to \infty} \log_a x = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 0+0} \log_a x = -\infty.$$

Если $a < 1$, то

$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 0+0} \log_a x = +\infty.$$

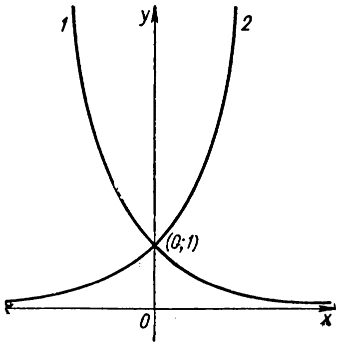


Рис. 48. $y = e^{-x}$ *(1)* и $y = e^x$ *(2)*.

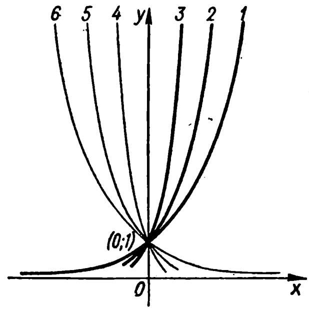


Рис. 49. Показательная функция $y = a^x$: $a = 2$ *(1)*; $a = e$ *(2)*; $a = 10$ *(3)*; $a = \frac{1}{2}$ *(4)*; $a = \frac{1}{e}$ *(5)*; $a = \frac{1}{10}$ *(6)*.

При $a > 1$ функция $y = \log_a x$ выпуклая, при $a < 1$ — вогнутая. График функции проходит через точку (1; 0) и приближается асимптотически к оси ординат. Заметим, что так как логарифмическая функция $y = \log_a x$ является обратной показательной функции $y = a^x$, то ее график симметричен графику показательной функции (при одном и том же основании) относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Примеры логарифмических функций приведены на рис. 50, 51.

§ 4. Тригонометрические функции

К ним принадлежат функции

$$y = \sin x,\quad y = \cos x,\quad y = \operatorname{tg} x,\quad y = \operatorname{ctg} x.$$

Ф у н к ц и я $y = \sin x$. Область определения функции: $]-\infty;\ \infty[$. Область значений функции: $[-1;\ 1]$. Функция нечетная, периодическая с периодом 2π. Точки пересечения с осью абсцисс: $x = n\pi$ $(n \in Z)$, эти точки являются и точками перегиба графика кри-

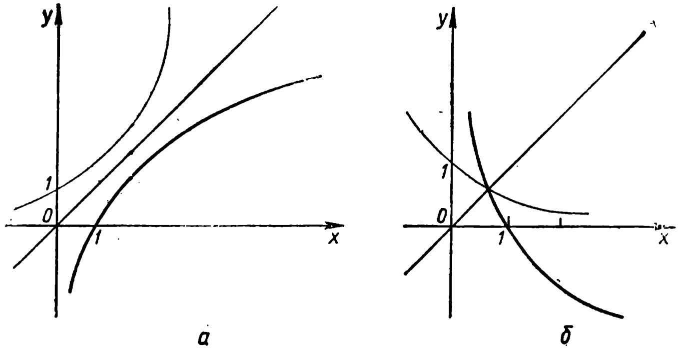


Рис. 50. Логарифмическая функция: $y = \log_2 x$ *(а)*; $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ *(б)*.

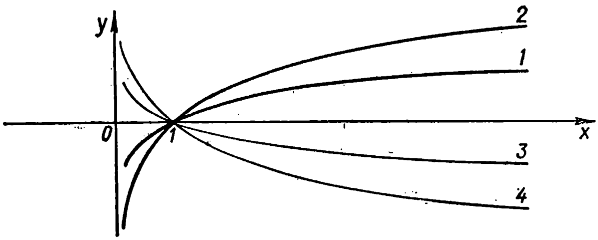


Рис. 51. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$; $a = 10$ *(1)*; $a = e$ *(2)*; $a = \frac{1}{10}$ *(3)*; $a = \frac{1}{e}$ *(4)*.

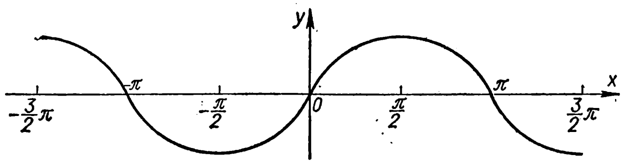


Рис. 52. Тригонометрическая функция $y = \sin x$.

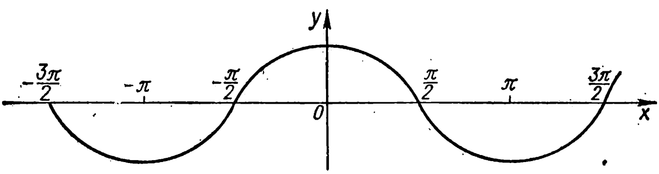


Рис. 53. Тригонометрическая функция $y = \cos x$.

вой. Функция на $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ возрастает от 0 до 1, на $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right[$ убывает от 1 до —1, на $\left]\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right[$ возрастает от —1 до 0. Функция на $[0; \pi]$ выпуклая, а на $]\pi; 2\pi[$ вогнутая.

График функции $y = \sin x$ представлен на рис. 52. Кривую $y = \sin x$ называют *синусоидой*.

Функция $y = \cos x$. Область определения функции: $]-\infty; \infty[$. Область значений функции: $[-1; 1]$. Функция четная, периодическая с периодом 2π. Точки пересечения с осью абсцисс: $\frac{\pi}{2}(2n + 1)$ $(n \in Z)$, эти точки являются и точками перегиба. Функция на

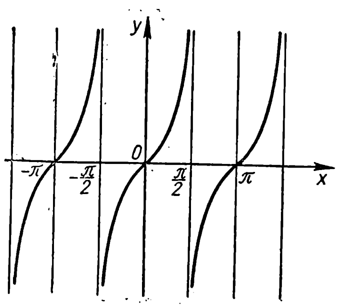


Рис. 54. Тригонометрическая функция $y = \operatorname{tg} x$.

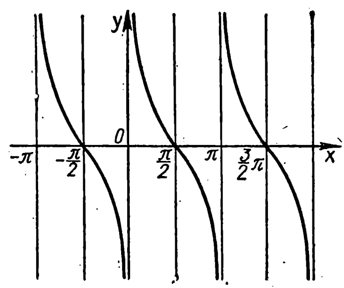


Рис. 55. Тригонометрическая функция $y = \operatorname{ctg} x$.

$]0; \pi[$ убывает от 1 до —1, на $]\pi; 2\pi[$ возрастает от —1 до 1. Функция на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ выпуклая, на $\left]\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right[$ вогнутая, на $\left[\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right]$ выпуклая.

График функции изображен на рис. 53. Кривую $y = \cos x$ называют *косинусоидой*.

Функция $y = \operatorname{tg} x$. Область определения функции — множество всех действительных чисел, кроме $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in Z)$. Область значений функции: $]-\infty; \infty[$. Функция нечетная, периодическая с периодом π. Точки пересечения с осью абсцисс: $x = k\pi$ $(k \in Z)$, эти же точки — точки перегиба. Функция на $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Функция вогнутая на $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, выпуклая — на $\left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$. Вертикальные асимптоты: $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ $(k \in Z)$.

График функции $y = \operatorname{tg} x$ изображен на рис. 54. Кривая $y = \operatorname{tg} x$ называется *тангенсоидой*.

Ф у н к ц и я $y = \operatorname{ctg} x$. Область определения функции—множество всех действительных чисел, кроме $x = k\pi$ $(k \in Z)$. Область значений функции: $]-\infty; \infty[$. Функция нечетная, периодическая с периодом π. Точки пересечения с осью абсцисс: $x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ $(k \in Z)$, эти же точки — точки перегиба. Функция на $]0; \pi[$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$. На $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ функция вогнутая, на $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ — выпуклая. Вертикальные асимптоты: $x = k\pi$ $(k \in Z)$.

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ представлен на рис. 55. Кривую $y = \operatorname{ctg} x$ называют *котангенсоидой*.

§ 5. Обратные тригонометрические функции

Простейшие обратные тригонометрические функции следующие: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. Заметим, что функции $y = \sin x$ и $y = \operatorname{Arcsin} x$, $y = \cos x$ и $y = \operatorname{Arccos} x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{Arctg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = \operatorname{Arcctg} x$ являются попарно взаимно обратными.

Для построения графиков обратных тригонометрических функций используют свойства графиков взаимно обратных функций (см. § 2 разд. 2). Построение осуществляют так: соответствующий график прямой тригонометрической функции зеркально отображают относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Кратко рассмотрим свойства и графики обратных тригонометрических функций.

А р к с и н у с $y = \operatorname{Arcsin} x$. Функция $y = \operatorname{Arcsin} x$ определена для $|x| \leqslant 1$, многозначна. Рассматривают одну ветвь этой функции, соответствующую $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Это значение y называют *главным значением* $\operatorname{Arcsin} x$ и обозначают $\arcsin x$. Другие значения $y = \operatorname{Arcsin} x$ выражаются через главное его значение формулой

$$\operatorname{Arc\,sin} x = \arcsin x + 2k\pi \ (k \in Z).$$

Следовательно, область определения функции $y = \arcsin x : [-1; 1]$; область значений: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Функция $y = \arcsin x$ — нечетная, на $[-1; 1]$ монотонно возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. График функции проходит через точку $(0; 0)$. Эта точка является и точкой перегиба графика. На $[-1; 0]$ функция выпуклая, на $]0; 1[$ — вогнутая.

Графики функций $y = \operatorname{Arcsin} x$ и $y = \arcsin x$ приведены соответственно на рис. 56 и 57.

А р к к о с и н у с $y = \operatorname{Arccos} x$. Функция $y = \operatorname{Arccos} x$ определена для $|x| \leqslant 1$, многозначна. Ветвь этой функции, соответствующую $y \in [0; \pi]$, называют *главным значением* $\operatorname{Arccos} x$ и обозначают $y = \arccos x$. Другие значения $y = \operatorname{Arccos} x$ выражаются через главное его значение формулой

$$\operatorname{Arccos} x = 2k\pi - \arccos x \ (k \in Z).$$

Область определения функции $y = \arccos x$: $[-1;\ 1]$. Область значений функции $y = \arccos x$: $[0;\ \pi]$. На $[-1;\ 1]$ функция $y = \arccos x$ монотонно убывает от π до 0. Для функции $y = \arccos x$ выполняется равенство

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

График функции $y = \arccos x$ проходит через точку $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, которая одновременно является и точкой перегиба, и центром симметрии кривой. На $[-1;\ 0]$ функция $y = \arccos x$ вогнутая, на $]0;\ 1[$ — выпуклая.

Графики функций $y = \operatorname{Arccos} x$ и $y = \arccos x$ приведены соответственно на рис. 58 и 59.

Арктангенс $y = \operatorname{Arctg} x$. Функция $y = \operatorname{Arctg} x$ определена для $-\infty < x < +\infty$, многозначна. Значение функции $y = \operatorname{Arctg} x$,

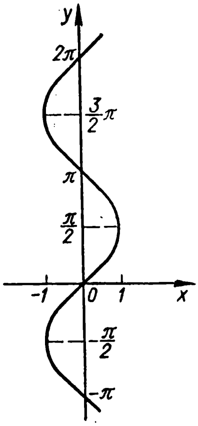


Рис. 56. Обратная тригонометрическая функция $y = \operatorname{Arcsin} x$.

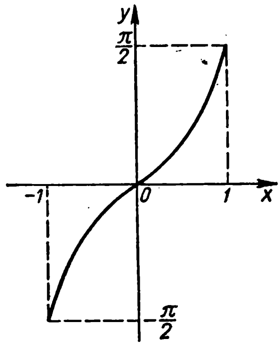


Рис. 57. Обратная тригонометрическая функция $y = \arcsin x$.

соответствующее $y \in \left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$, называют *главным значением* $\operatorname{Arctg} x$ и обозначают $y = \operatorname{arctg} x$. Другие значения $y = \operatorname{Arctg} x$ выражаются через главное его значение формулой

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + k\pi \ (k \in Z).$$

Область определения функции $y = \operatorname{arctg} x$: $]-\infty;\ \infty[$. Область значений функции $y = \operatorname{arctg} x$: $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ нечетная. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ на $]-\infty;\ \infty[$ монотонно возрастает от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{значения } \pm\frac{\pi}{2} \text{ не достигаются}\right)$. График функции $y = \operatorname{arctg} x$ проходит через точку $(0;\ 0)$, которая одновременно является и точкой перегиба, и центром симметрии кривой. На $]-\infty;\ 0]$

функция $y = \operatorname{arctg} x$ вогнутая, на $]0; \infty[$ — выпуклая. Горизонтальные асимптоты для $y = \operatorname{Arctg} x$: $y = \pm\ (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Графики функций $y = \operatorname{Arctg} x$ и $y = \operatorname{arctg} x$ приведены соответственно на рис. 60 и 61.

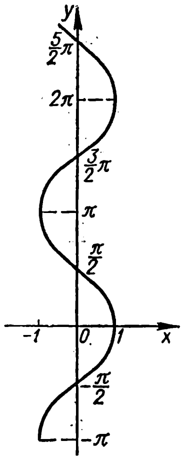


Рис. 58. Обратная тригонометрическая функция $y = \operatorname{Arccos} x$.

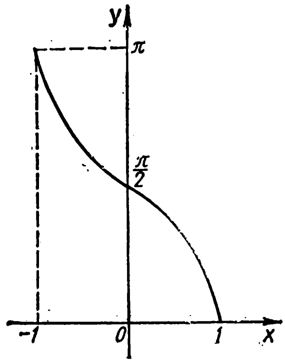


Рис. 59. Обратная тригонометрическая функция $y = \arccos x$.

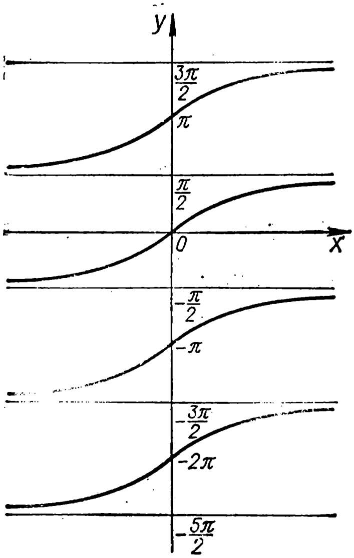


Рис. 60. Обратная тригонометрическая функция $y = \operatorname{Arctg} x$.

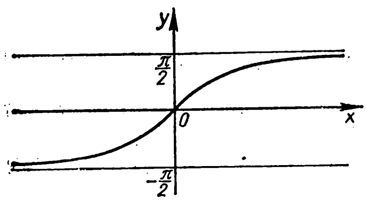


Рис. 61. Обратная тригонометрическая функция $y = \operatorname{arctg} x$.

А р к к о т а н г е н с $y = \operatorname{Arcctg} x$. Функция $y = \operatorname{Arcctg} x$ определена для $-\infty < x < +\infty$, многозначна. Значение функции $y = \operatorname{Arcctg} x$, соответствующее $y \in]0; \pi[$, называют *главным значением* $\operatorname{Arcctg} x$ и обозначают $y = \operatorname{arcctg} x$. Все другие значения $y = \operatorname{Arcctg} x$ выражаются через главное его значение формулой

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + k\pi \ (k \in Z).$$

Область определения функции $y = \operatorname{arcctg} x$: $]-\infty; \infty[$. Область значений функции $y = \operatorname{arcctg} x$: $]0; \pi[$. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ — функция общего вида. Выполняется равенство

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ монотонно убывает от π до 0 на $[-\infty; \infty[$ (значения π и 0 не достигаются). График функции $y = \operatorname{arcctg} x$

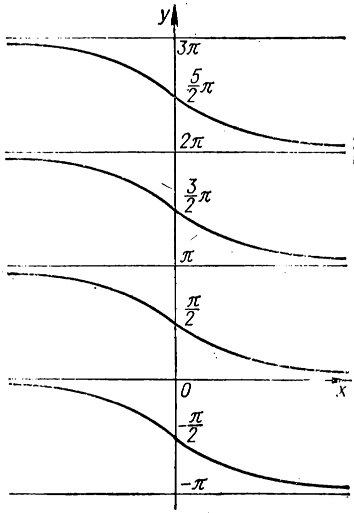


Рис. 62. Обратная тригонометрическая функция $y = \operatorname{Arcctg} x$.

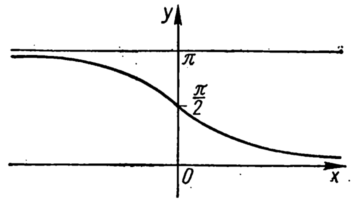


Рис. 63. Обратная тригонометрическая функция $y = \operatorname{arcctg} x$.

проходит через точку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, которая одновременно является и точкой перегиба, и центром симметрии кривой. На $]-\infty; 0[$ функция $y = \operatorname{arcctg} x$ выпуклая, на $]0; \infty[$ — вогнутая. Горизонтальные асимптоты для $y = \operatorname{Arcctg} x$: $y = \pm k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Графики функций $y = \operatorname{Arcctg} x$ и $y = \operatorname{arcctg} x$ приведены соответственно на рис. 62 и 63.

РАЗДЕЛ 4

ДЕЙСТВИЯ С ГРАФИКАМИ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

§ 1. Арифметические действия с графиками

Сложение и вычитание графиков

Общий метод построения графиков суммы и разности двух функций заключается в том, что предварительно строят два графика для обеих функций, а затем складывают или вычитают ординаты этих кривых при одних и тех же значениях x (удобно — в характерных точках). По полученным точкам строят искомый график и выполняют проверку в нескольких контрольных точках.

В отдельных случаях построение графиков суммы и разности функций можно выполнять так.

Если надо построить график суммы двух функций, то строят вначале график одной, более простой, функции, затем к нему пристраивают график второй функции, ординаты которого откладывают от соответствующих точек первого графика.

Если надо построить график разности двух функций, то строят сначала график функции-уменьшаемого, а затем от него откладывают ординаты функции-вычитаемого, взятые с противоположным знаком. Иногда удобно начертить график функции-вычитаемого с противоположным знаком и ординаты обеих кривых (функции-уменьшаемого и функции-вычитаемого с противоположным знаком) сложить.

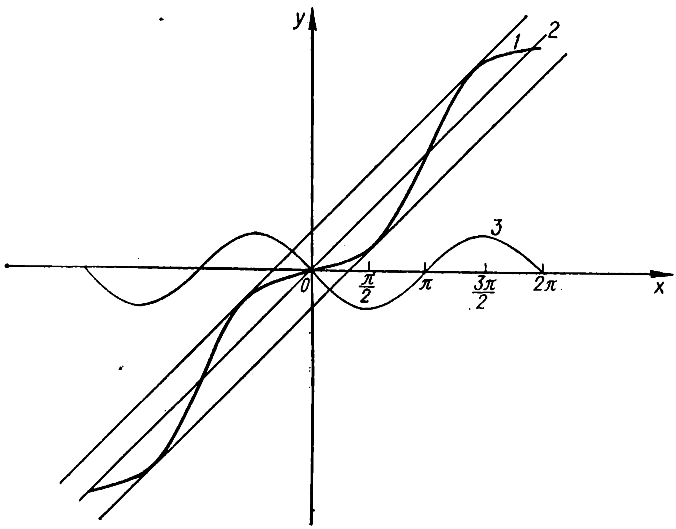


Рис. 64. $y = x - \sin x$ (*1*); $y = x$ (*2*); $y = -\sin x$ (*3*).

Замечание. Представленный метод построения графика алгебраической суммы конечного числа функций удобно применять в более простых случаях. Если же функции-слагаемые имеют более сложную природу, то следует выполнять исследование и построение графика функции по схеме § 2 разд. 2, а еще лучше — с помощью методов высшей математики (см. ч. II).

Пример 1. Построить график функции

$$y = x - \sin x.$$

Имеем две функции: $y(x)=x$ и $y(x) = -\sin x$. Строим график функции $y = x$, затем от него (а не от оси абсцисс) откладываем ординаты второй функции. Поскольку $|\sin x| \leqslant 1$, то целесообразно провести две вспомогательные прямые: $y = x + 1$ и $y = x - 1$. В точках, где $\sin x = 0$ (т. е. при $x = k\pi$, $k \in Z$), $y = x$, а это значит, что соответствующие точки графика заданной функции лежат на прямой $y = x$. В тех точках, где $\sin x = 1$ $\left(\text{т. е. при } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z\right)$, $y = x - 1$, а это значит, что соответствующие точки графика заданной функции лежат на прямой $y = x - 1$. В точках, где $\sin x = -1$ $\left(x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z\right)$, $y = x + 1$, а это означает, что соответствующие точки лежат на прямой $y = x + 1$. Следовательно, на прямых $y = x - 1$ и $y = x + 1$ лежат вершины синусоиды (рис. 64).

Пример 2. Построить график функции

$$y = x + \frac{1}{x}.$$

Строим графики функций-слагаемых $y = \frac{1}{x}$ и $y = x$. Затем складываем ординаты кривых при одинаковых значениях x. Возьмем значения $x = \frac{1}{2}$, 1, 2, 3, ... Складывая ординаты обоих графиков для каждого из этих значений x, получаем точки A, B, C, D. Соединив их плавной линией, получим одну ветвь графика функции (при $x > 0$). Заметив, что функция нечетная и график ее симметричен относительно начала координат, строим вторую ветвь графика заданной функции (при $x < 0$).

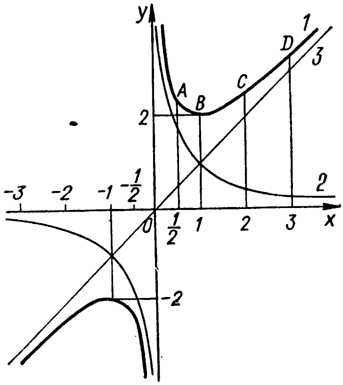


Рис. 65. $y = x + \frac{1}{x}$ (1); $y = \frac{1}{x}$ (2); $y = x$ (3).

График функции $y = x + \frac{1}{x}$ представлен на рис. 65.

Пример 3. Построить график функции

$$y = \sin x + \cos x.$$

Заданную функцию рассматриваем как сумму двух функций:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x.$$

Проведем исследование и построение графика функции по схеме § 2 разд. 2.

Область определения функции-суммы: общая часть областей определения функций-слагаемых, в данном случае $]-\infty;\ \infty[$. Область значений функции-суммы: $[-1;\ 1]$. Функция периодическая с периодом 2π. Характерные точки графика функции-суммы: точки пересечения с осью абсцисс $\left(\frac{3}{4}\pi;\ 0\right)$, $\left(\frac{7}{4}\pi;\ 0\right)$; точка пересечения с осью ординат $(0;\ 1)$; предельные значения функции равны 1; $A_1\left(\frac{\pi}{4};\ \sqrt{2}\right)$ — точка максимума заданной функции, $A_2\left(-\frac{5}{4}\pi;\right.$

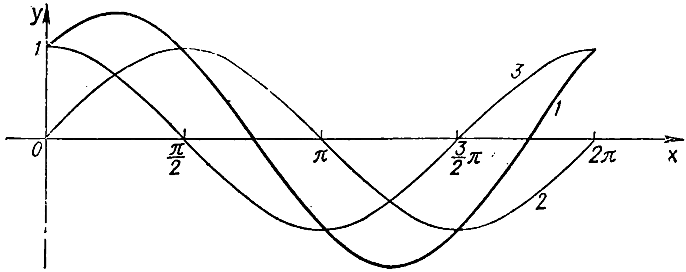


Рис. 66. $y = \sin x + \cos x$ (1); $y = \sin x$ (2); $y = \cos x$ (3).

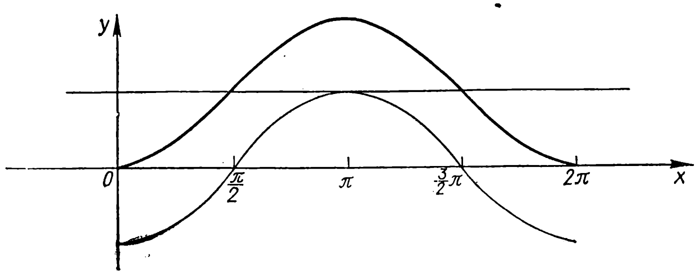


Рис. 67. $y = 1 - \cos x$.

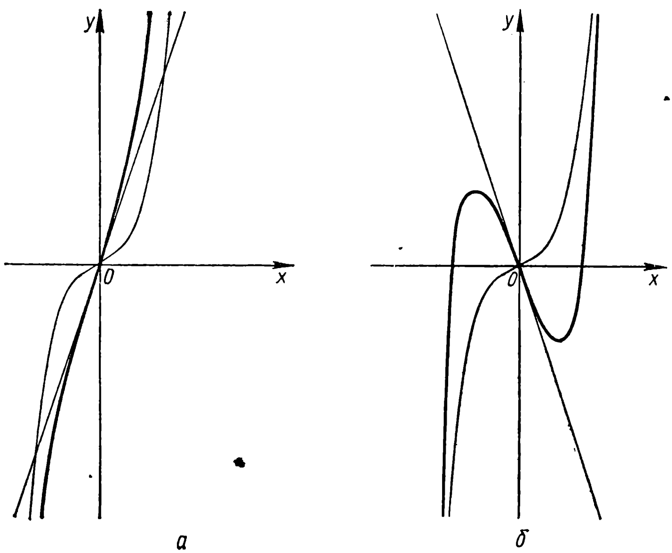


Рис. 68. $y = x^3 + 3x$ (а); $y = x^3 - 3x$ (б).

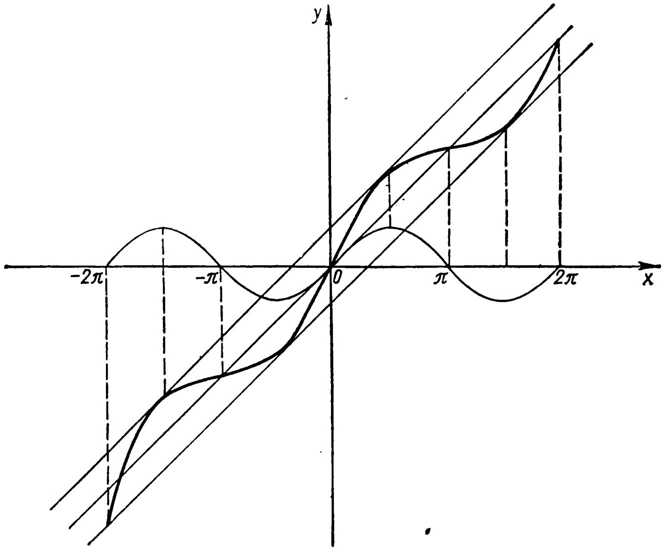


Рис. 69. $y = x + \sin x$.

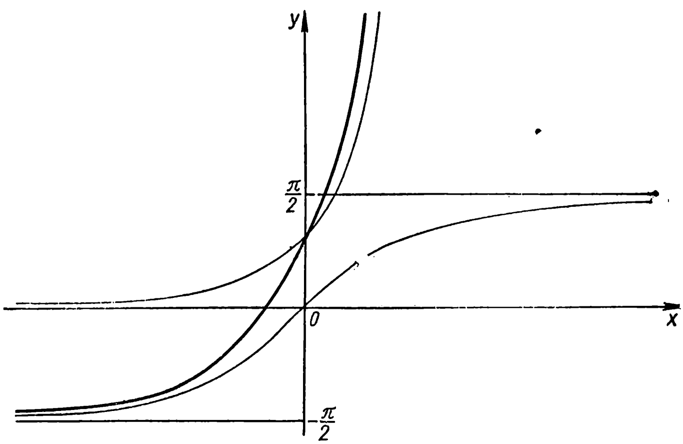


Рис. 70. $y = \operatorname{arctg} x + 2^x$.

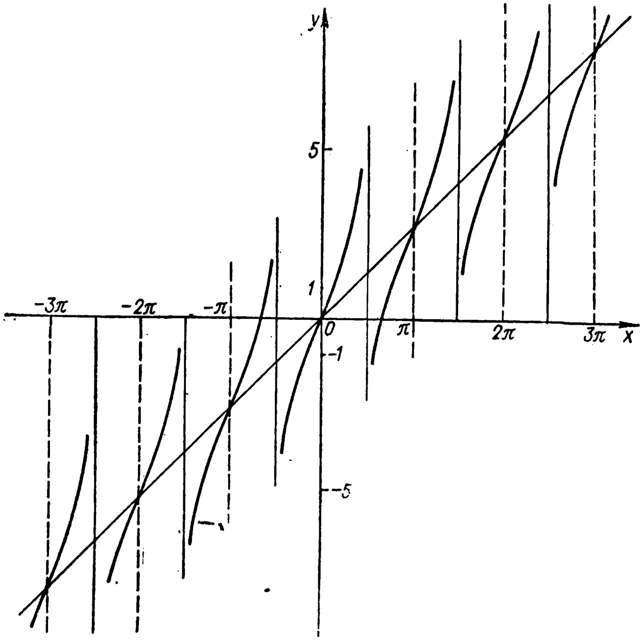


Рис. 71. $y = x + \operatorname{tg} x$

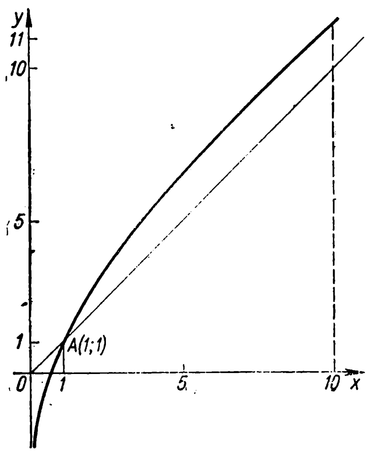


Рис. 72. $y = x + \lg x$.

$-\sqrt{2}\Big)$ — точка минимума заданной функции. На интервалах $\left]0;\ \frac{\pi}{4}\right[$ и $\left]\frac{3}{4}\pi;\ 2\pi\right[$ функция монотонно возрастает, на $\left]\frac{\pi}{4};\ \frac{3}{4}\pi\right[$ — монотонно убывает. На $\left]0;\ \frac{3}{4}\pi\right[$ функция выпуклая, на $\left]\frac{3}{4}\pi;\ \frac{7}{4}\pi\right[$ — вогнутая, на $\left]\frac{7}{4}\pi;\ 2\pi\right[$ — выпуклая.

График функции $y = \sin x + \cos x$ представлен на рис. 66.

Примеры построения графиков суммы и разности функций представлены на рис. 67—76.

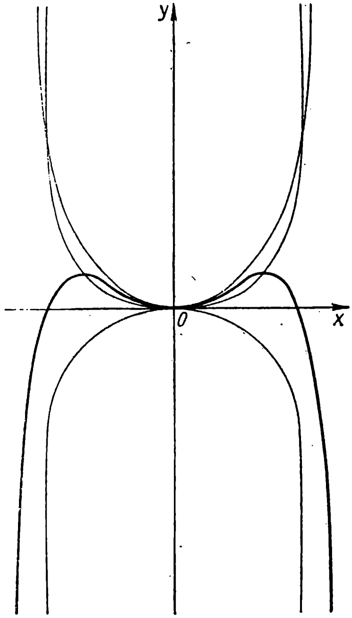


Рис. 73. $y = x^2 - x^4$.

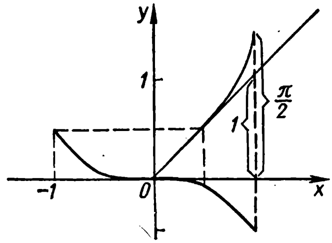


Рис. 74. $y = x - \arcsin x$.

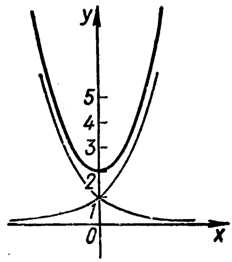


Рис. 75. $y = a^x + a^{-x}$.

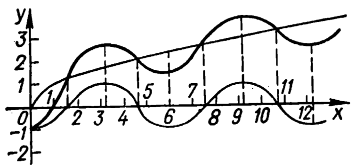


Рис. 76. $y = \sqrt{x} - \cos x$.

Умножение и деление графиков

Если заданы графики функций $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, то можно построить «по точкам» график функции $y = y_1(x)\,y_2(x)$ или $y = \frac{y_1(x)}{y_2(x)}$ ($y_2 \neq 0$). Заметим, что если при сложении (вычитании) графиков можно пользоваться циркулем для сложения ординат, то при умножении (делении) надо предварительно выразить отрезки (ординаты) числами и лишь затем умножить (разделить) эти числа с учетом их знаков. Деление графиков можно привести к умножению:

$$y = y_1(x) \cdot \frac{1}{y_2(x)}.$$

Заметим, что произведение или частное двух функций лучше исследовать и строить их график по схеме § 2 разд. 2. Иногда произведение или частное двух функций можно упростить, и построение графика упрощенной функции значительно облегчается.

Указанный метод построения графиков произведения или частного функций нерационален и используется крайне редко. Такие графики лучше всего строить с помощью методов высшей математики (см. ч. II).

Пример 4. Построить график функции

$$y = x \sin x.$$

Строим графики функций $y = x$, $y = \sin x$ (рис. 77). Умножение этих графиков упрощается благодаря тому, что функция $y = \sin x$ периодически принимает значения 0, 1, —1. При $x = k\pi$ $(k \in Z)$

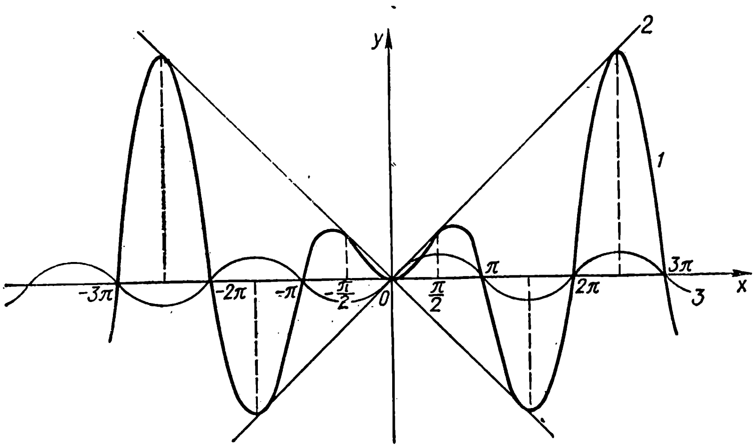


Рис. 77. $y = x \sin x$ *(1)*; $y = x$ *(2)*; $y = \sin x$ *(3)*.

$\sin x = 0$ и $y = x \sin x = 0$, т. е. соответствующая точка графика функции $y = x \sin x$ находится на оси абсцисс. При $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = 1$, а $y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, т. е. соответствующая точка графика функции $y = x \sin x$ лежит на прямой $y = x$. При $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ $\sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = -1$, следовательно, соответствующая точка графика функции $y = x \sin x$ лежит на прямой $y = -x$.

Поскольку заданная функция $y = x \sin x$ четная, то указанное построение производим только для правой части графика, левую часть графика (для $x < 0$) строим симметрично правой относительно оси ординат.

График функции $y = x \sin x$ представлен на рис. 77.

Пример 5. Построить график функции

$$y = e^{-x}\sin x.$$

Строим графики функций $y = e^{-x}$ и $y = \sin x$. Поскольку $\sin x = 0$ при $x = k\pi$ ($k \in Z$), график функции $y = e^{-x}\sin x$ проходит через точки ($k\pi$; 0) ($k \in Z$). Кроме того, следует иметь в виду, что при $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in Z$) $\sin x = 1$ и график функции $y = e^{-x}\sin x$ касается графика функции $y = e^{-x}$ сверху. При $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$

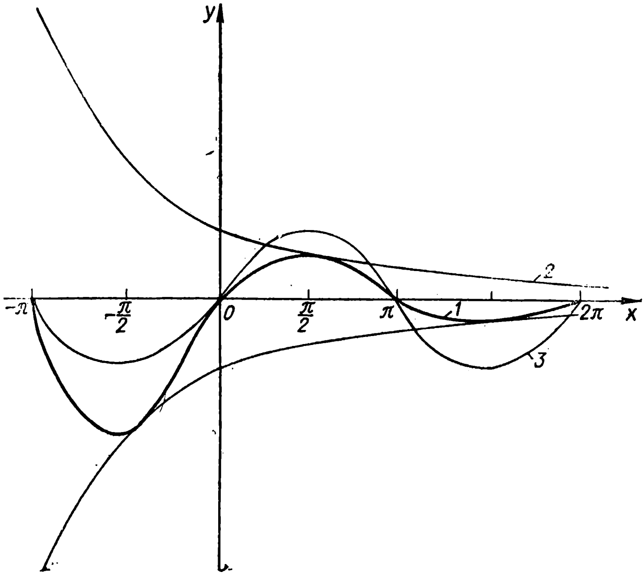


Рис. 78. $y = e^{-x}\sin x$ *(1)*; $y = e^{-x}$ *(2)*; $y = \sin x$ *(3)*.

($k \in Z$) $\sin x = -1$ и график функции $y = e^{-x}\sin x$ касается графика функции $y = -e^{-x}$ снизу. Следовательно, график функции $y = e^{-x}\sin x$ располагается между графиками функций $y = e^{-x}$ и $y = -e^{-x}$ и периодически ($\omega = 2\pi$) касается их.

График функции представлен на рис. 78.

Пример 6. Построить график функции

$$y = \frac{\ln x}{x}.$$

Строим графики функций $y = \ln x$, $y = \frac{1}{x}$. График функции $y = \frac{\ln x}{x}$ пересекает ось абсцисс в точке (1; 0). Умножим ординаты

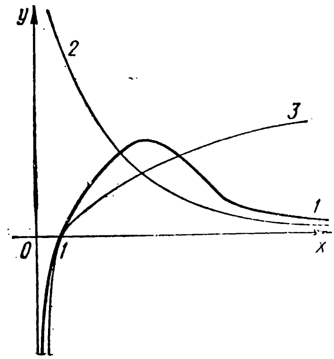


Рис. 79. $y = \frac{\ln x}{x}$ *(1)*; $y = \frac{1}{x}$ *(2)*; $y = \ln x$ *(3)*.

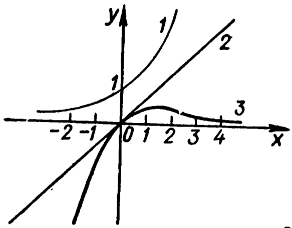


Рис. 80. $y = 2^x$ *(1)*; $y = x$ *(2)*; $y = \frac{x}{2^x}$ *(3)*.

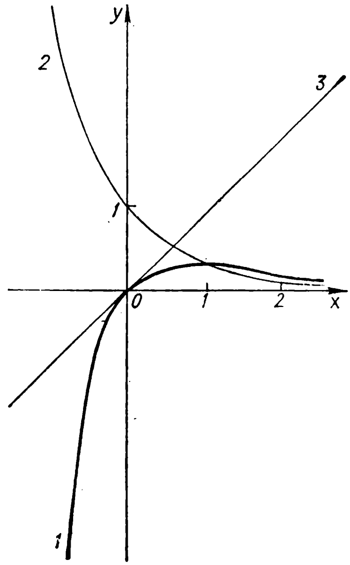


Рис. 81. $y = xe^{-x}$ *(1)*; $y = e^{-x}$ *(2)*; $y = x$ *(3)*.

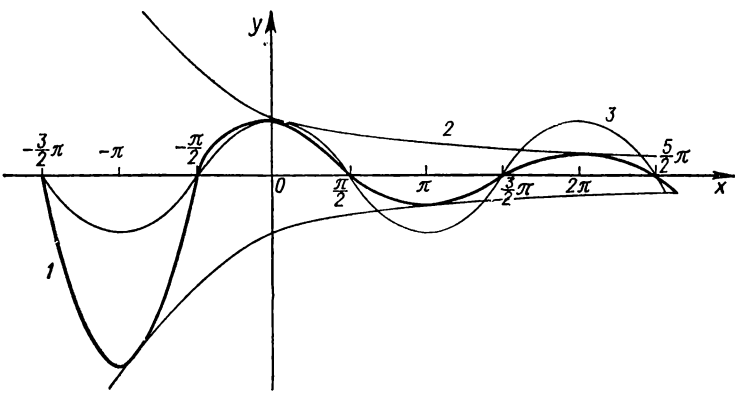


Рис. 82. $y = e^{-x} \cos x$ *(1)*; $y = e^{-x}$ *(2)*; $y = \cos x$ *(3)*.

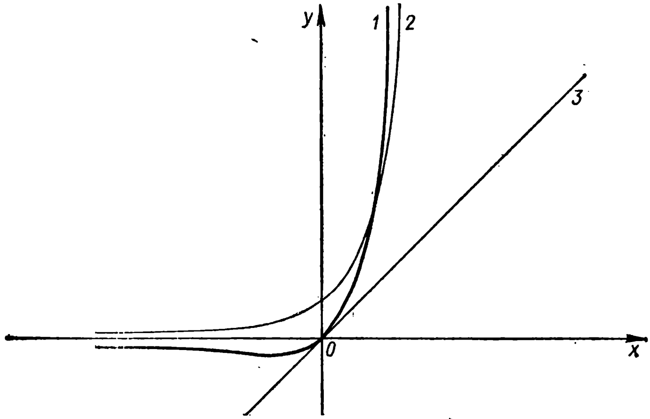


Рис. 83. $y = xe^x$ (1); $y = e^x$ (2); $y = x$ (3).

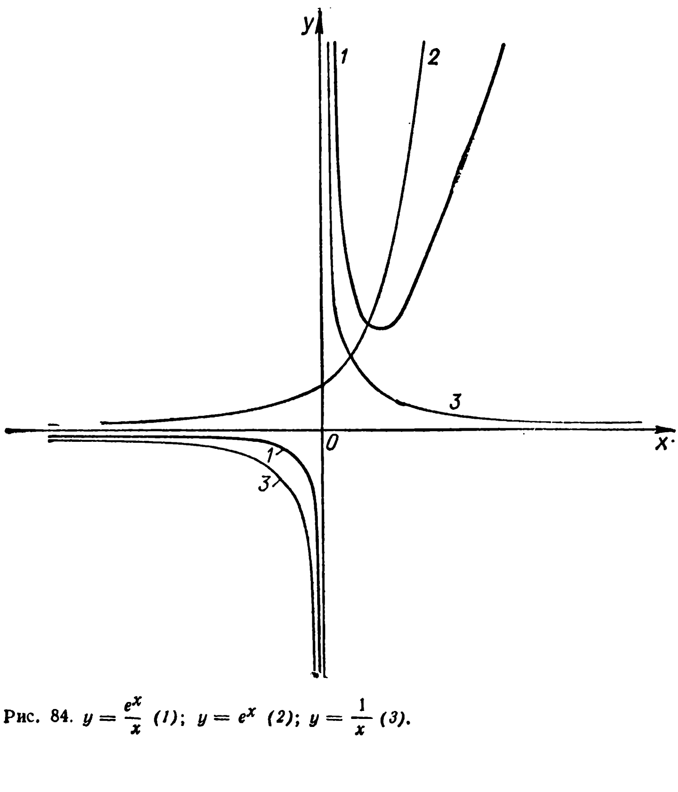


Рис. 84. $y = \frac{e^x}{x}$ (1); $y = e^x$ (2); $y = \frac{1}{x}$ (3).

графиков $y=\ln x$ и $y=\frac{1}{x}$ при $x=e\approx 2{,}72\ldots$, $x=4$. Учитывая предельные значения функции

$$\lim_{x\to 0+0} y=\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{x}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to +\infty} y=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0,$$

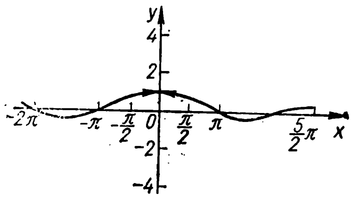


Рис. 85. $y=\frac{\sin x}{x}$.

строим график функции $y=\frac{\ln x}{x}$ (рис. 79).

Пример 7. Построить график функции

$$y=\frac{x}{2^x}.$$

Строим графики функций $y=x$, $y=2^x$. Далее делим ординаты графика функции $y=x$ на ординаты графика $y=2^x$ при одинаковых значениях абсцисс. При этом учитываем, что если $x\to+\infty$, то $y=2^x$ возрастает быстрее, чем $y=x$, а поэтому $y\to 0$ при $x\to+\infty$, т. е. ось абсцисс — асимптота графика. Заметим, что точки $(0;\ 0)$, $\left(1;\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(2;\ \frac{1}{2}\right)$ принадлежат графику функции $y=\frac{x}{2^x}$.

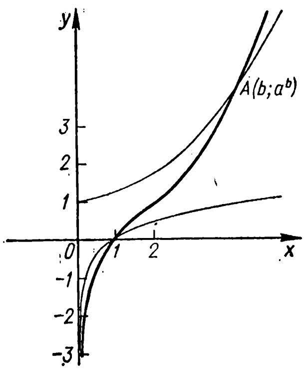


Рис. 86. $y=a^x\log_b x$, $a>1$, $b>1$.

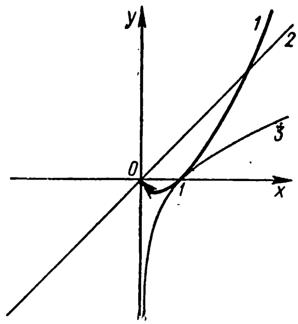


Рис. 87. $y=x\ln x$ (1); $y=x$ (2); $y=\ln x$ (3).

График функции $y=\frac{x}{2^x}$ представлен на рис. 80.

Примеры построения графиков произведения и частного функций приведены на рис. 81—87.

§ 2. Простейшие преобразования графиков

Преобразования, не изменяющие масштаба

Приведем здесь преобразования симметрии, обусловленные особенностями графиков четных и нечетных функций, а именно:

график функции $y = -f(x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси абсцисс (рис. 88);

график функции $y = f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно оси ординат (см. рис. 15, *а*);

график функции $y = -f(-x)$ симметричен графику функции $y = f(x)$ относительно начала координат (см. рис. 15, *б*).

Параллельный перенос (сдвиг) вдоль оси абсцисс. График функции

$$y = f(x + a)$$

получаем из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса (сдвига) последнего вдоль оси Ox на $|a|$ единиц масштаба в направлении, имеющем знак, противоположный знаку числа a. Это выполняется так: строим известный график функции $y = f(x)$. Далее ось ординат параллельно переносим вдоль оси абсцисс на $|a|$ единиц масштаба в направлении, имеющем знак числа a. Это и есть окончательная ось ординат. Например, для построения графика функции $y = f(x + 2)$ вспомогательную ось ординат графика функции $y = f(x)$ переносим параллельно вдоль оси абсцисс на две единицы масштаба вправо. Для построения графика функции $y = f(x - 2)$ вспомогательную ось ординат графика функции $y = f(x)$ переносим параллельно вдоль оси абсцисс на две единицы масштаба влево.

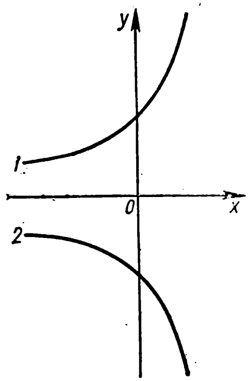


Рис. 88. $y = f(x)$ *(1)*; $y = -f(x)$ *(2)*.

Пример 1. Построить график функции

$$y = (x - 3)^2.$$

Строим график функции $y = x^2$. Далее ось ординат переносим параллельно вдоль оси абсцисс на три единицы масштаба влево, как показано на рис. 89.

Параллельный перенос (сдвиг) вдоль оси ординат. График функции $y = f(x) + b$ получаем из графика функции $y = f(x)$ с помощью параллельного переноса (сдвига) последнего вдоль оси Oy на $|b|$ единиц масштаба в направлении, имеющем знак числа b. Этот перенос выполняется так: строим известный график функции $y = f(x)$. Далее ось абсцисс переносим параллельно вдоль оси ординат на $|b|$ единиц масштаба в направлении, имеющем знак, противоположный знаку числа b. Это и есть окончательная ось абсцисс. Например, для построения графика функции $y = f(x) + 4$ вспомогательную ось абсцисс графика функции $y = f(x)$ опускаем вдоль оси ординат на четыре единицы. Для построения графика функции $y = f(x) - 4$

вспомогательную ось абсцисс графика функции $y = f(x)$ поднимаем вдоль оси ординат на четыре единицы вверх.

Пример 2. Построить график функции

$$y = x^2 + 3.$$

Строим график функции $y = x^2$. Далее ось обсцисс опускаем вдоль оси ординат на три единицы, как показано на рис. 90.

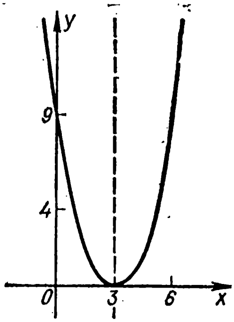


Рис. 89. $y = (x - 3)^2$.

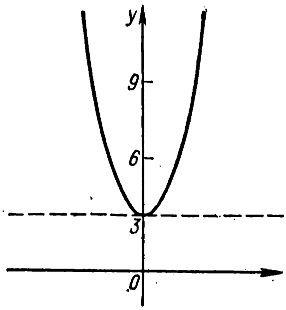


Рис. 90. $y = x^2 + 3$.

Преобразования, изменяющие масштаб

Растяжение или сжатие по оси абсцисс. График функции

$$y = f(kx)$$

получаем из графика функции $y = f(x)$ с помощью сжатия по оси абсцисс исходного графика пропорционально коэффициенту k при аргументе (если $k > 1$, то график сжимается в k раз, а если $0 < k < 1$, то график растягивается в $\frac{1}{k}$ раз). Если $k < 0$, то можно сначала построить график функции $y = f(|k|x)$, а затем отобразить его симметрично относительно оси Oy.

Сжатие или растяжение графика функции по оси абсцисс осуществляется так: строим график функции $y = f(x)$, далее при $k > 1$ уменьшаем абсциссы точек этого графика в k раз, при $0 < k < 1$ увеличиваем абсциссы точек в $\frac{1}{k}$ раз, оставляя при этом ординаты без изменения.

Пример 3. Построить график функции

$$y = \sin 2x.$$

Строим график функции $y = \sin x$, далее сжимаем график по оси абсцисс в два раза (здесь $k = 2 > 1$), т. е. уменьшаем абсциссы точек графика в два раза, оставив ординаты без изменения (рис. 91). Заметим, что период функции $y = \sin 2x$ равен π. Сжатие удобно проводить в характерных точках графика функции $y = \sin x$.

Примеры построения графиков функций с помощью сжатия или растяжения приведены на рис. 92—98.

Растяжение или сжатие по оси ординат. График функции

$$y = mf(x)$$

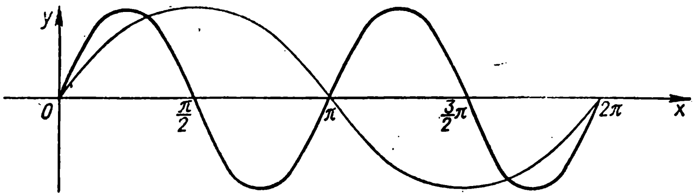


Рис. 91. $y = \sin 2x$.

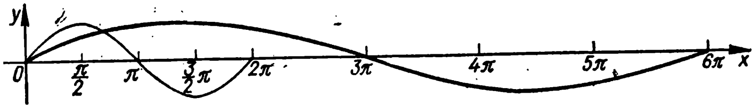


Рис. 92. $y = \sin \frac{x}{3}$.

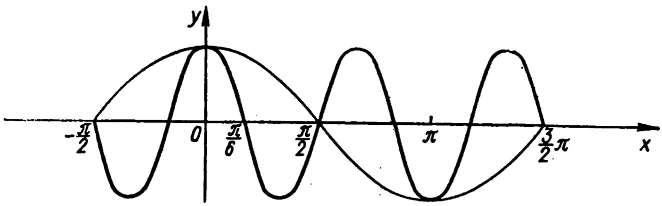


Рис. 93. $y = \cos 3x$.

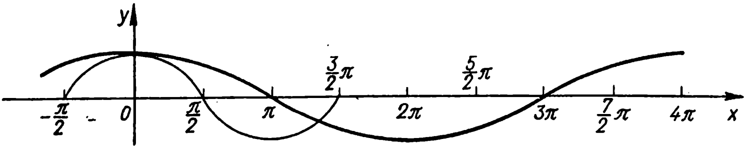


Рис. 94. $y = \cos \frac{x}{2}$.

получаем из графика функции $y = f(x)$ с помощью растяжения этого графика по оси ординат пропорционально коэффициенту m при функции (если $m > 1$, то график растягивается в m раз, если $0 < m < 1$, то график сжимается в $\frac{1}{m}$ раз). Если $m < 0$, то можно

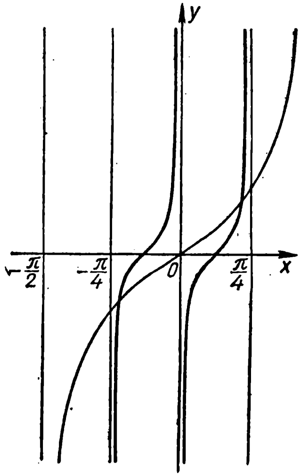


Рис. 95. $y = \operatorname{tg} 2x$.

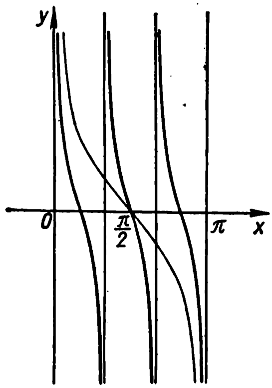


Рис. 96. $y = \operatorname{ctg} 3x$.

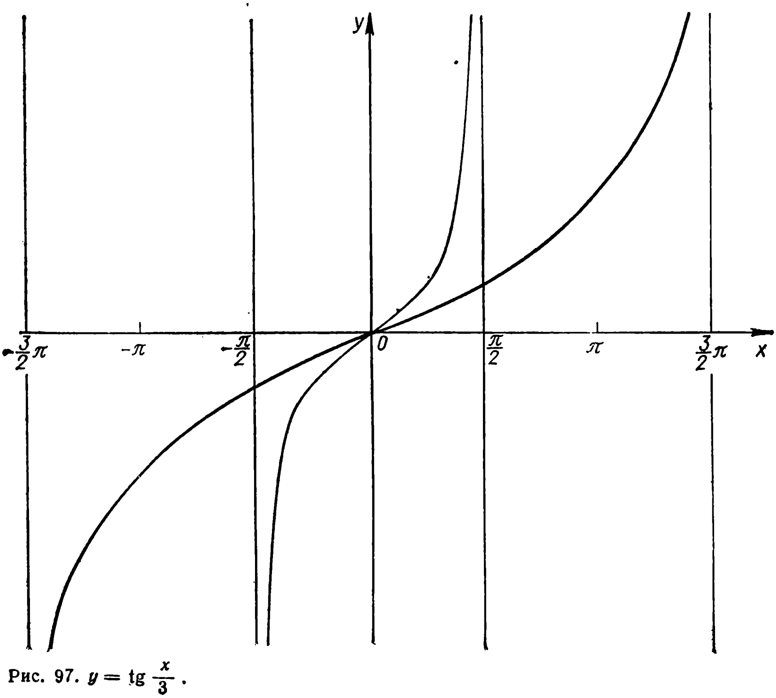


Рис. 97. $y = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$.

сначала построить график функции $y = |m| f(x)$, а затем отобразить его симметрично относительно оси Ox.

Растяжение или сжатие графика функции по оси ординат выполняется так: строим график функции $y = f(x)$, далее при $m > 1$ увеличиваем ординаты точек этого графика в m раз, при $0 < m < 1$ уменьшаем ординаты точек в $\frac{1}{m}$ раз, оставляя при этом абсциссы без изменения.

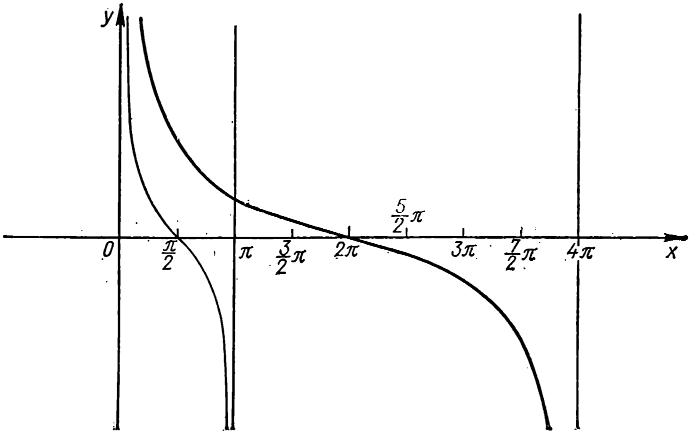


Рис. 98. $y = \operatorname{ctg} \frac{x}{4}$.

Пример 4. Построить график функции

$$y = \frac{1}{3} \sin x.$$

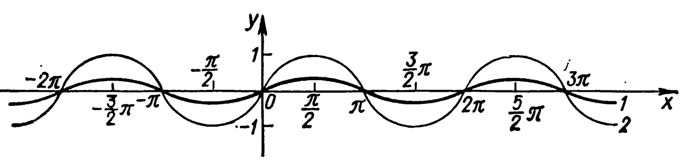


Рис. 99. $y = \frac{1}{3} \sin x$ (1); $y = \sin x$ (2).

Строим график функции $y = \sin x$, далее осуществляем сжатие графика по оси ординат в три раза $\left(\text{здесь } m = \frac{1}{3} < 1\right)$, т. е. уменьшаем ординаты точек графика в три раза, оставляя абсциссы без изменения (рис. 99). Сжатие удобно проводить в характерных точках графика функции $y = \sin x$.

Построение графика функции $y = mf(kx + a) + b$. Этот график строят, применяя в определенной последовательности описанные выше преобразования.

Сначала строим график функции $y = f(x + a)$, далее строим график функции $y = f(kx + a)$ (заметим, что при этом преобразовании на k умножается только x). Затем строим график функции $y = mf(kx + a)$. Наконец, получаем график функции

$$y = mf(kx + a) + b.$$

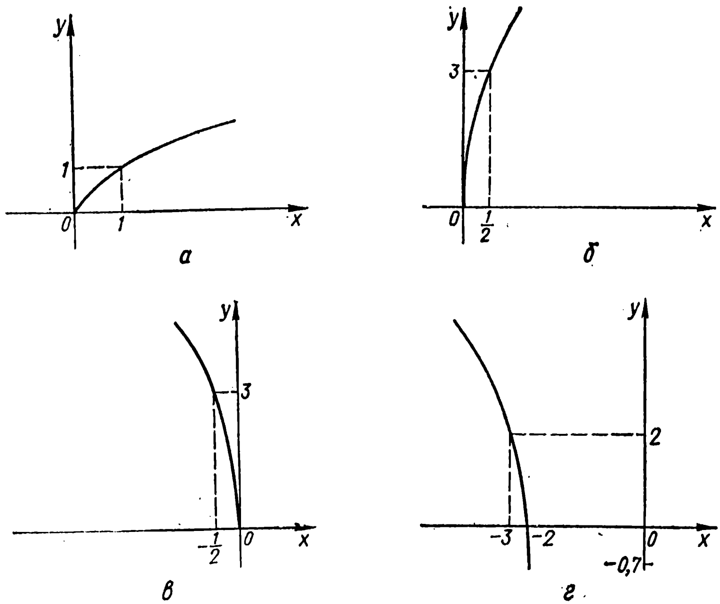


Рис. 100. $y = \sqrt{x}$ *(а)*; $y = 3\sqrt{2x}$ *(б)*; $y = 3\sqrt{-2x}$ *(в)*; $y = 3\sqrt{-2(x+2)} - 0,7$ *(г)*.

Можно эти преобразования выполнять в другом порядке: сначала построить график функции $y = f(kx)$, затем перенести его вправо (или влево) на $\frac{a}{k}$, поднять (или опустить) на $\frac{b}{m}$ и, наконец, растянуть (или сжать) в m раз. В зависимости от знаков k и m придется, возможно, отображать график симметрично относительно оси Oy или оси Ox.

Заметим, что рассмотренные преобразования можно выполнять в любом порядке, но величины, на которые график переносится вдоль осей, зависят от порядка преобразований.

Пример 5. Построить график функции

$$y = 3\sqrt{-2(x + 2)} - 0,7.$$

Строим график функции $y=\sqrt{x}$ (рис. 100). Далее последовательно преобразуем график функции $y=\sqrt{x}$, а именно: увеличив в $3\sqrt{2}$ раза ординаты точек графика функции $y=\sqrt{x}$, оставив неизменными их абсциссы, построим график функции $y=3\sqrt{2x}$; с помощью симметричного отображения относительно оси Oy строим график функции $y=3\sqrt{-2x}$; затем выполняем параллельный перенос полученного графика на две единицы масштаба влево, т. е. вспомогательную ось ординат графика функции $y=3\sqrt{-2x}$ переносим параллельно вдоль оси абсцисс на две единицы масштаба вправо, наконец, выполняем параллельный перенос последнего графика на 0,7 единицы масштаба вдоль оси ординат вниз, т. е. вспомогательную ось абсцисс графика поднимаем вдоль оси ординат на 0,7 единицы масштаба вверх.

График функции $y=3\sqrt{-2(x+2)}-$ $-0{,}7$ приведен на рис. 100.

Пример 6. Построить график функции

$$y=8x-2x^2.$$

Записываем заданную функцию в виде

$$y=-2[(x-2)^2-4].$$

Очевидно, что график функции $y=$ $=-2[(x-2)^2-4]$ получим из графика параболы $y=x^2$, выполнив последовательно такие преобразования: параллельный перенос вдоль оси абсцисс на две единицы масштаба вправо; параллельный перенос вдоль оси ординат на четыре единицы масштаба вниз; растяжение по оси ординат в два раза; симметричное отображение относительно оси абсцисс.

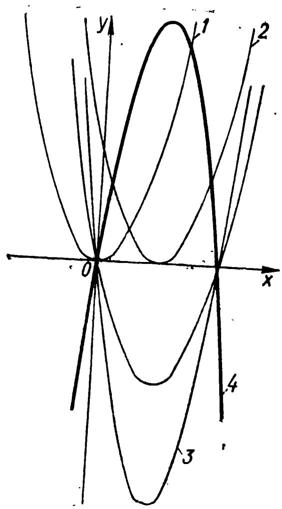


Рис. 101. $y=x^2$ (1); $y=(x-2)^2$ (2); $y=2[(x-2)^2-4]$ (3); $y=8x-2x^2=$ $=-2[(x-2)^2-4]$ (4).

График функции $y=8x-2x^2$ приведен на рис. 101.

Пример 7. Построить график функции

$$y=\sin^2 x.$$

Записываем заданную функцию в виде

$$y=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}.$$

Очевидно, что график функции $y=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$ получим из графика функции $y=\cos x$, выполнив последовательно такие преобразования: сжатие по оси абсцисс в два раза; сжатие по оси ординат в два раза; симметричное отображение относительно оси абсцисс; параллельный перенос вдоль оси ординат вверх на $\frac{1}{2}$ единицы масштаба.

График функции $y = \sin^2 x$ представлен на рис. 102.

Примеры построения графиков функций с помощью рассмотренных преобразований приведены на рис. 103—113.

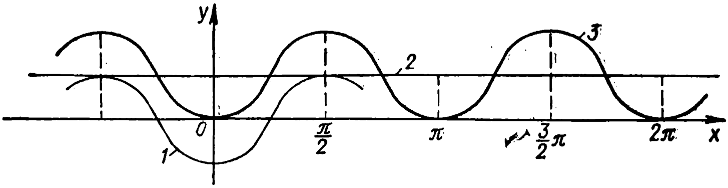


Рис. 102. $y = -\frac{1}{2}\cos x$ *(1)*; $y = \frac{1}{2}$ *(2)*; $y = \sin^2 x = -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}$ *(3)*.

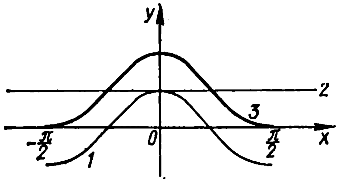


Рис. 103. $y = \frac{1}{2}\cos 2x$ *(1)*; $y = \frac{1}{2}$ *(2)*; $y = \cos^2 x$ *(3)*.

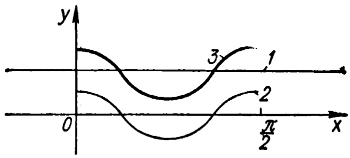


Рис. 104. $y = \frac{3}{4}$ *(1)*; $y = \frac{1}{4}\cos 4x$ *(2)*; $y = \sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{4}\cos 4x + \frac{3}{4}$ *(3)*.

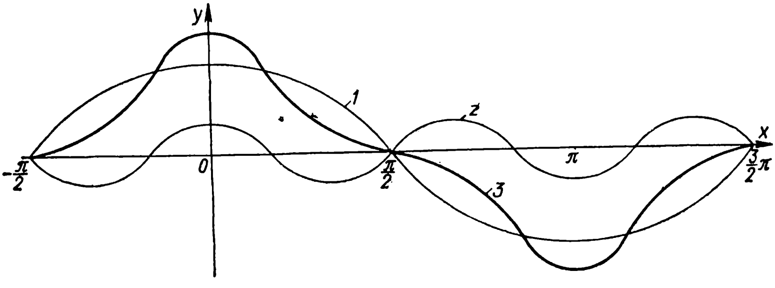


Рис. 105. $y = \frac{3}{4}\cos x$ *(1)*; $y = \frac{1}{4}\cos 3x$ *(2)*; $y = \cos^3 x$ *(3)*.

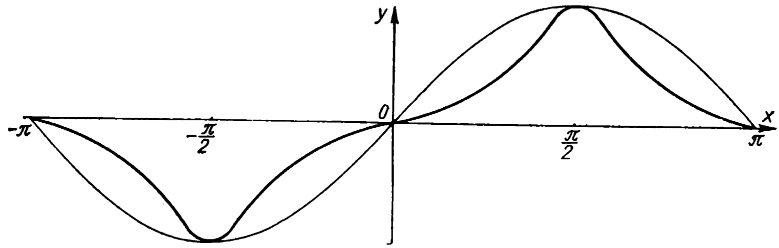


Рис. 106. $y = \sin^3 x$.

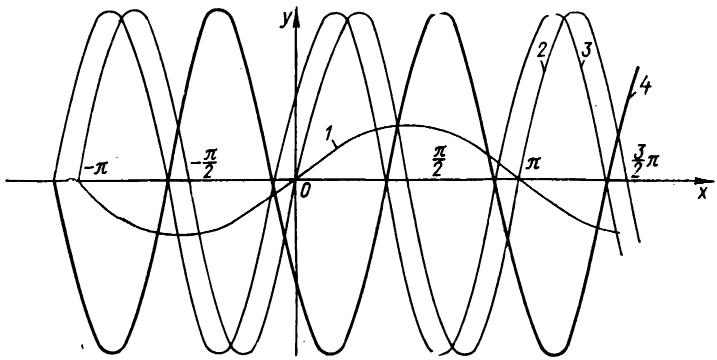


Рис. 107. $y = \sin x$ *(1)*; $y = 3 \sin 2x$ *(2)*; $y = 3 \sin (2x + 8)$ *(3)*; $y = -3 \sin (2x + 8)$ *(4)*.

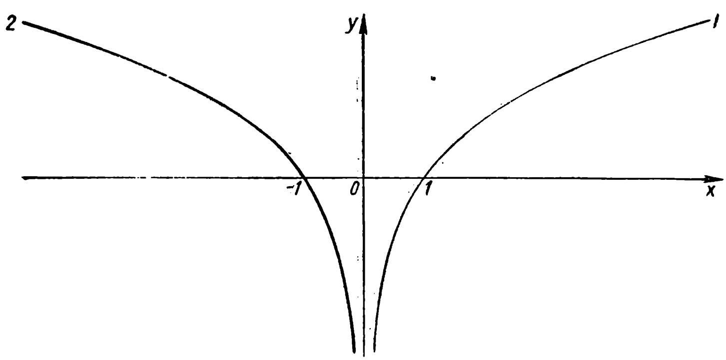


Рис. 108. $y = \log_2 x$ *(1)*; $y = \log_2 (-x)$ *(2)*.

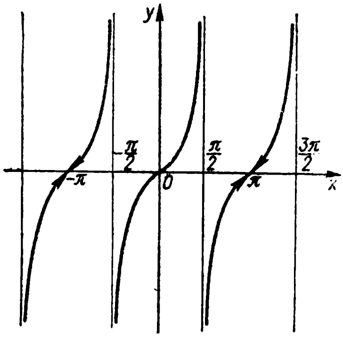


Рис. 109. $y = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}$.

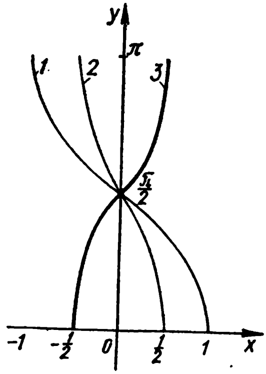


Рис. 110. $y = \arccos x$ *(1)*; $y = \arccos 2x$ *(2)*; $y = \arccos(-2x)$ *(3)*.

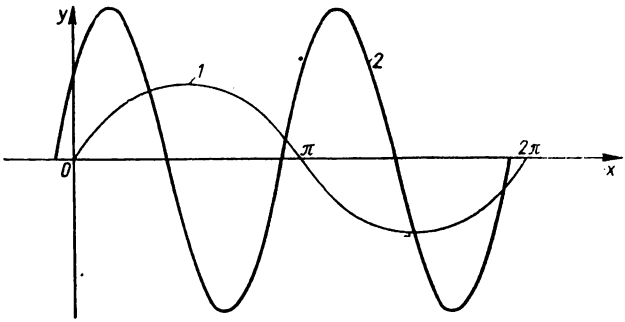


Рис. 111. $y = \sin x$ *(1)*; $y = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ *(2)*.

Построение графиков функций, аналитическое выражение которых содержит знак модуля

Построение графика функции $y = f(|x|)$. Для построения этого графика нужно построить график функции $y = f(x)$ для $x \geqslant 0$, а затем отобразить построенную кривую симметрично относительно оси ординат. Эти две части (построенная и отображенная) дадут в совокупности график функции $y = f(|x|)$ (рис. 114).

Пример 8. Построить график функции

$$y = \sin|x|.$$

Строим график функции $y = \sin x$ для $x \geqslant 0$, а затем этот график зеркально отображаем относительно оси Oy. Получаем график заданной функции (рис. 115).

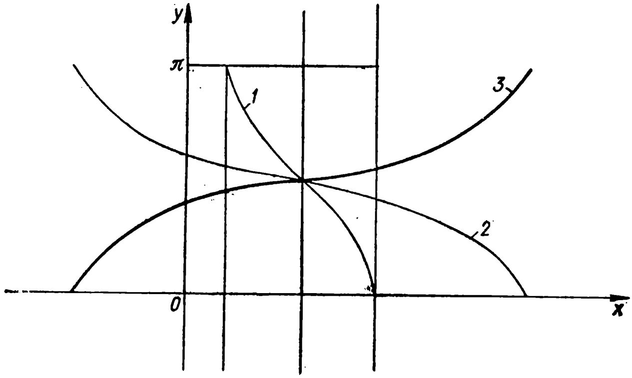


Рис. 112. $y = \arccos x$ *(1)*; $y = \arccos \frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)$ *(2)*; $y = \arccos\left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right)$ *(3)*.

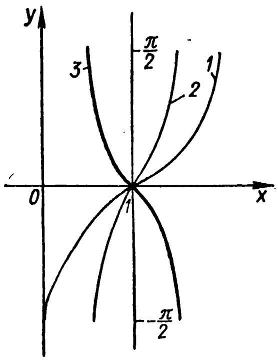


Рис. 113. $y = \arcsin(x - 1)$ *(1)*; $y = \arcsin 2(x - 1)$ *(2)*; $y = -\arcsin 2(x - 1)$ *(3)*.

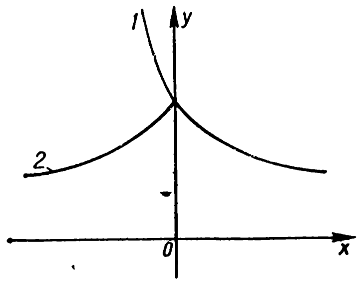


Рис. 114. $y = f(x)$ *(1)*; $y = f(|x|)$ *(2)*.

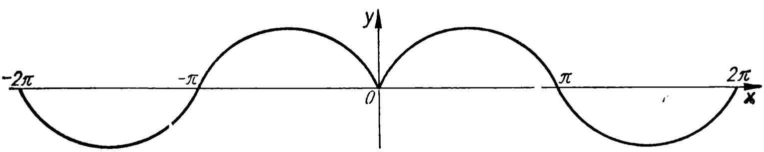


Рис. 115. $y = \sin|x|$.

Пример 9. Построить график функции

$$y = 2^{|x|}.$$

График функции $y = 2^x$ при $x \geqslant 0$ и его зеркальное отображение относительно оси Oy дадут в совокупности график заданной функции (рис. 116).

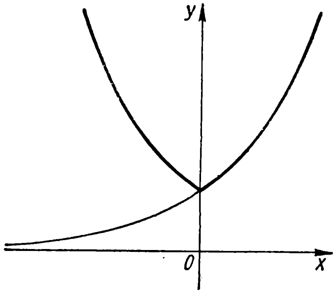


Рис. 116. $y = 2^{|x|}$.

Пример 10. Построить график функции

$$y = \arcsin|x - 1|.$$

Сначала строим график функции $y = \arcsin x$ для $x \geqslant 0$. Отображаем построенный график для $x \geqslant 0$ симметрично относительно оси ординат. Далее выполняем параллельный перенос вдоль оси абсцисс на единицу масштаба вправо.

График функции $y = \arcsin|x - 1|$ представлен на рис. 117.

Примеры построения графиков функций, содержащих модуль аргумента, приведены на рис. 118—121.

Построение графика функции $y = |f(x)|$. Для построения графика функции $y = |f(x)|$ надо

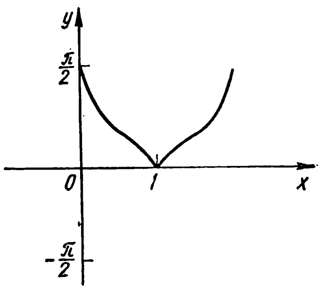


Рис. 117. $y = \arcsin|x - 1|$.

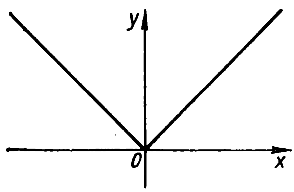


Рис. 118. $y = |x|$.

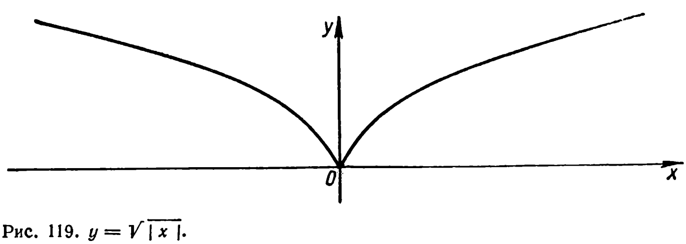


Рис. 119. $y = \sqrt{|x|}$.

построить график функции $y = f(x)$, далее оставить без изменения все части построенного графика, которые лежат выше оси абсцисс, а части, расположенные ниже ее, отобразить симметрично относительно этой оси (рис. 122).

Пример 11. Построить график функции

$$y = |x^2 - 1|.$$

Строим график функции $y = x^2 - 1$ на $]-\infty;\ \infty]$. На интервале $]-1;\ 1[$ функция $y = x^2 - 1 < 0$ (кривая расположена под осью абсцисс). Эту часть графика функции $y = x^2 - 1$ симметрично отображаем относительно оси абсцисс, а остальную его часть оставляем без изменения (рис. 123).

Пример 12. Построить график функции

$$y = |\log_a x|, \quad a > 1.$$

Строим график функции $y = \log_a x$. На интервале $]0;\ 1[$ функция $y =$

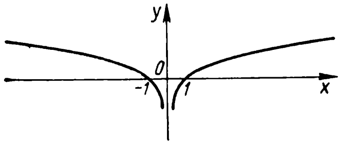


Рис. 120. $y = \log_2 |x|$.

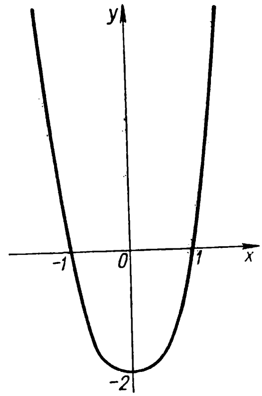


Рис. 121. $y = x^2 + |x| - 2$.

$= \log_a x < 0$ (кривая расположена под осью абсцисс). Эту часть графика функции $y = \log_a x$ симметрично отображаем относительно оси абсцисс, а остальную оставляем без изменения (рис. 124).

Построение графика функции $y = |f(|x|)|$. Для построения графика функции $y = |f(|x|)|$ надо построить график функции $y = f(|x|)$, далее оставить без изменения все части построенного графика, которые лежат выше оси абсцисс, а части, расположенные ниже ее, отобразить симметрично относительно этой оси.

Пример 13. Построить график функции

$$y = |\log_2 |x||.$$

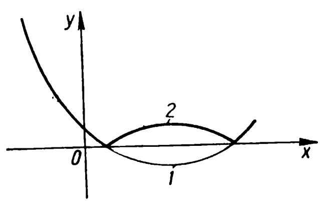


Рис. 122. $y = f(x)$ (1); $y = |f(x)|$ (2).

Строим график функции $y = \log_2 |x|$. Затем строим график модуля этой функции и получаем график заданной функции $y = |\log_2 |x||$ (рис. 125).

Пример 14. Построить график функции

$$y = ||x| - 1|.$$

Построение графика выполняем в три этапа: строим график функции $y = |x|$, выполняем его параллельный перенос вдоль оси ординат на одну единицу масштаба вниз, часть графика, располо-

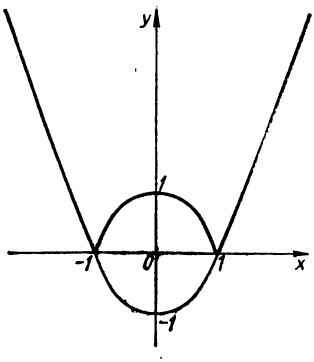


Рис. 123. $y = | x^2 - 1 |$.

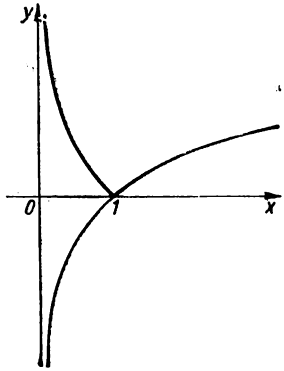


Рис. 124. $y = | \log_a x |$, $a > 1$.

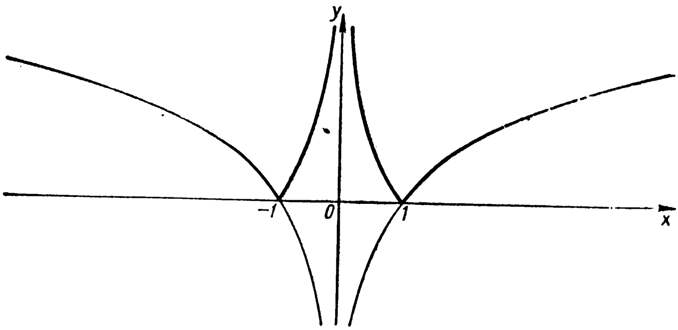


Рис. 125. $y = | \log_2 | x ||$.

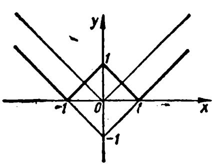


Рис. 126. $y = || x | - 1 |$.

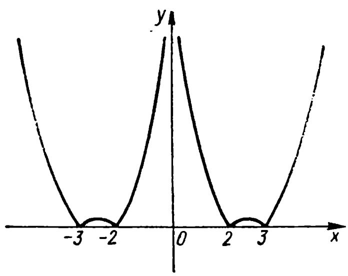


Рис. 127. $y = | x^2 - 5 | x | + 6 |$.

женную под осью абсцисс, симметрично отображаем относительно этой оси (рис. 126).

Примеры построения графиков функций рассмотренного вида приведены на рис. 127, 128.

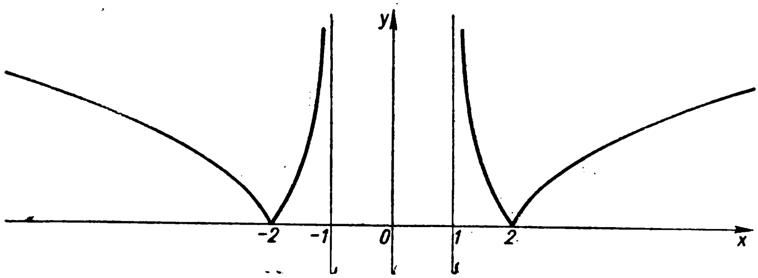


Рис. 128. $y = |\log_2(|x| - 1)|$.

Пример 15. Построить график функции

$$|y| = |x - 1|.$$

Строим график функции $y = |x - 1|$, затем симметрично отображаем его относительно оси абсцисс (рис. 129).

Примеры построения графиков функций, содержащих модули, приведены на рис. 130—134.

Замечание. При построении графиков функций, являющихся суммой, произведением, частным функций или более сложной функцией, из которых одна или несколько содержат знак модуля, находят область определения функции, раскрывают знак модуля на тех промежутках, где выражения с модулем не меняют знака, и, наконец, строят график функции, заданной на разных промежутках разными формулами.

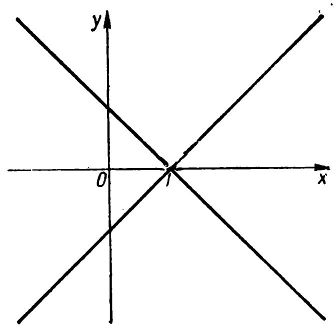


Рис. 129. $|y| = |x - 1|$.

Пример 16. Построить график функции

$$y = |x + 2| + |3x + 1| + \left|x - \frac{1}{2}\right| - 3x + 2.$$

Область определения функции: $]-\infty; \infty[$. Решаем уравнения

$$x + 2 = 0, \qquad x = -2,$$

$$3x + 1 = 0, \qquad x = -\frac{1}{3},$$

$$x - \frac{1}{2} = 0, \qquad x = \frac{1}{2}.$$

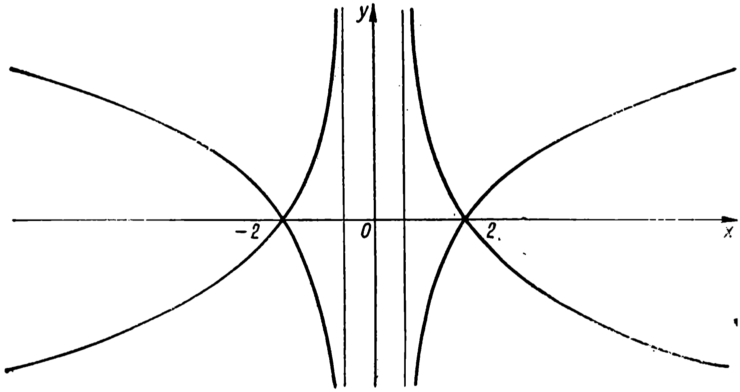


Рис. 130. $|y| = |\log_2(|x| - 1)|$.

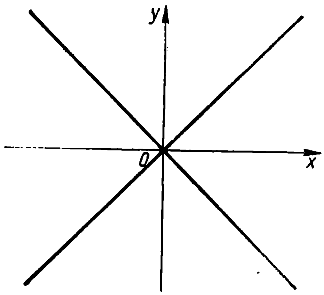


Рис. 131. $|y| = |x|$.

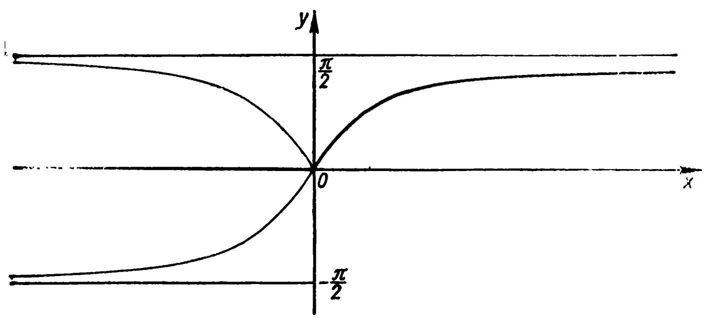


Рис. 132. $y = \frac{1}{2}(|\operatorname{arctg} x| + \operatorname{arctg} x)$.

Рассмотрим промежутки $]-\infty;\ -2]$, $\left]-2;\ -\frac{1}{3}\right]$, $\left]-\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right]$, $\left]\frac{1}{2};\ \infty\right[$. На этих промежутках функции $y=x+2$, $y=3x+1$, $y=x-\frac{1}{2}$ не меняют знака.

При $x \in]-\infty;\ -2]$ $y=-x-2-3x-1-x+\frac{1}{2}-3x+2=$
$=-8x-\frac{1}{2}$;

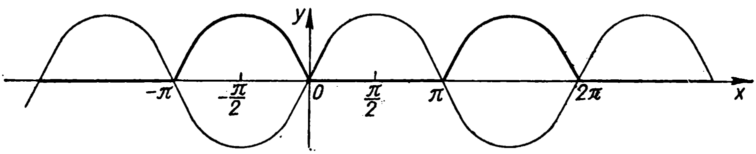


Рис. 133. $y=\frac{1}{2}(|\sin x|-\sin x)$.

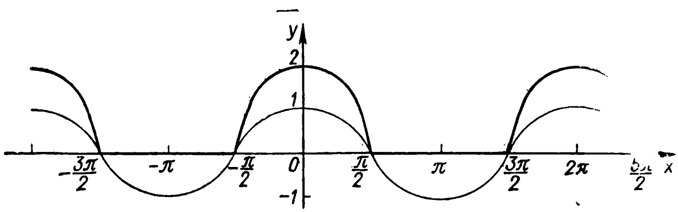


Рис. 134. $y=\cos x+|\cos x|$.

при $x \in \left]-2;\ -\frac{1}{3}\right]$ $y=x+2-3x-1-x+\frac{1}{2}-3x+2=$
$=-6x+3\frac{1}{2}$;

при $x \in \left]-\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right]$ $y=x+2+3x+1-x+\frac{1}{2}-3x+2=5\frac{1}{2}$;

при $x \in \left]-\frac{1}{2};\ \infty\right[$ $y=x+2+3x+1+x-\frac{1}{2}-3x+2=$
$=2x+4\frac{1}{2}$.

График заданной функции приведен на рис. 351, *б*.

РАЗДЕЛ 5

ГРАФИКИ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Построение графиков сложных функций

Рассмотрим сложную функцию

$$y = f[\varphi(x)].$$

Здесь функция y зависит от аргумента x не непосредственно, а через промежуточную функцию $\varphi(x)$. Обозначив $\varphi(x)$ через u, получим $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$.

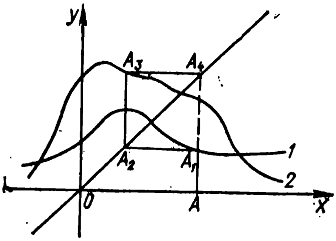


Рис. 135. Геометрическое построение графика сложной функции $y = f[\varphi(x)]$: $y = \varphi(x)$ *(1)*; $y = f(x)$ *(2)*.

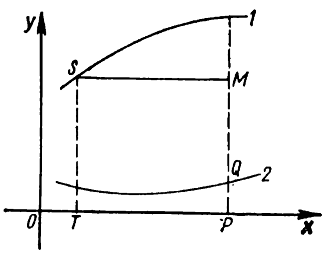


Рис. 136. Построение графика сложной функции с помощью линейки и циркуля: $y = f(x)$ *(1)*; $y = \varphi(x)$ *(2)*.

Часто промежуточную функцию $u = \varphi(x)$ называют внутренней, а функцию $y = f(u)$ — внешней.

Графики сложных функций можно строить, учитывая результаты общего исследования функции (см. § 2 разд. 2) и используя свойства функций $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. При этом надо иметь в виду, что выражение $f[\varphi(x)]$ будет иметь смысл для тех значений x, для которых имеет смысл выражение $\varphi(x)$, и принимать такие значения u, для которых определено выражение $f(u)$.

При построении графиков сложных функций следует учитывать основные свойства четных и нечетных функций, периодических функций, монотонных функций (см. § 2 разд. 1). Надо также найти значения сложной функции на концах интервалов монотонности или установить, как ведет себя функция в окрестности этих точек, если они (или одна из них) не принадлежат области определения.

Приведем другой способ построения графика сложной функции $y = f[\varphi(x)]$ (рис. 135). Обозначим через A, A_1, A_2, A_3, A_4 соответственно точки $(x; 0)$, $(x; \varphi(x))$, $(\varphi(x); \varphi(x))$, $(\varphi(x); f(\varphi(x)))$, $(x; f(\varphi(x)))$.

Построение выполняем в таком порядке: строим графики функций $y = f(x)$ и $y = \varphi(x)$; проводим биссектрису первого и третьего координатных углов ($y = x$); проводим через точку A прямую, параллельную оси Oy, до пересечения с графиком функции $y = \varphi(x)$ (получаем точку A_1); проводим через точку A_1 прямую, параллельную оси Ox, до пересечения с биссектрисой (получаем точку A_2); проводим через точку A_2 прямую, параллельную оси Oy, до пересечения с графиком $y = f(x)$ (получаем точку A_3); проводим через точку A_3 прямую, параллельную оси Ox, до пересечения с продолжением отрезка AA_1. Полученная в пересечении точка $A_4(x; f(\varphi(x)))$ и будет точкой графика функции $y = f[\varphi(x)]$. Аналогично строятся и остальные точки графика.

Пользуясь линейкой и циркулем, можно этот способ упростить. Через точку $P(x; 0)$ проводим перпендикуляр до пересечения с графиком $y = \varphi(x)$. Получаем точку Q, причем $PQ = \varphi(x)$. Далее, на оси абсцисс берем точку T с абсциссой $OT = PQ$. Проведя через

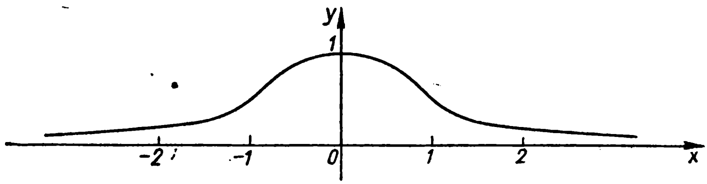


Рис. 137. $y = e^{-x^2}$ (кривая Гаусса).

точку T перпендикуляр до пересечения с графиком $y = f(x)$ в точке S, получим $TS = f(x)$. Проектируя затем точку S на перпендикуляр, проведенный через точку P, получаем точку $M(x; f(\varphi(x)))$ (рис. 136).

Замечание. График функции $y = f[\varphi(x)]$ можно построить еще и так: строим график функции $u = \varphi(x)$, а затем, учитывая значения ординат этой функции и основные свойства функции $y = f(u)$, выполняем построение графика заданной функции*.

Пример 1. Построить график функции

$$y = e^{-x^2} \text{ (кривая Гаусса).}$$

Записываем данную функцию через промежуточный аргумент u: $y = e^{-u}$, где $u = x^2$. Исследуем функцию $y = e^{-x^2}$ по схеме § 2 разд. 2. Область определения функции: $]-\infty; \infty[$. Область значений функции: $]0; 1]$. Функция четная, поскольку внутренняя функция $u = x^2$ — четная. Поэтому достаточно построить график функции для

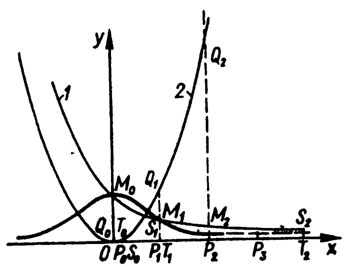


Рис. 138. Другой способ построения графика функции $y = e^{-x^2}$; $y = e^{-x}$ (1); $y = x^2$ (2).

$x \geqslant 0$. Функция $y = e^{-u}$ — убывающая на $]0; \infty[$, а функция $u = x^2$ на $]0; \infty[$ возрастает, следовательно, сложная функция $y = e^{-x^2}$ на $]0; \infty[$ убывающая. Функция $y = e^{-u}$ вогнутая и убывающая, а функция $u = x^2$ — вогнутая и возрастающая. Функция $y = e^{-x^2}$ —

* Более детально о построении графиков сложных функций вида $y = (f(x))^r$, $y = a^{f(x)}$, $y = \log_a f(x)$, $y = \sin f(x)$, $y = \arcsin f(x)$ и т. п. см. в книге: *Шунда Н. М.* Функції та їх графіки.— К.: Рад. школа, 1976.

убывающая на $[0; \infty[$. График функции проходит через точку $(0; 1)$. Предельные значения функции на концах интервала $]-\infty; \infty[$ равны нулю. Горизонтальная асимптота: $y = 0$.

График функции представлен на рис. 137.

Теперь выполним построение графика функции $y = e^{-x^2}$ другим способом. Для примера представим построение произвольной точки M_2 графика функции $y = e^{-x^2}$. Возьмем точку P_2 (2; 0); проведем перпендикуляр до пересечения с графиком $y = x^2$, получим точку Q_2 (2; 4). Отложим на оси абсцисс от начала координат отрезок P_2Q_2, получим точку T_2. Через точку T_2 проведем перпендикуляр к оси абсцисс до пересечения с кривой $y = e^{-x}$, получим точку S_2. Далее, через точку S_2 проведем прямую, параллельную оси абсцисс, до пересечения с прямой P_2Q_2, получим точку M_2. Аналогично строим еще несколько точек графика функции $y = e^{-x^2}$ (рис. 138).

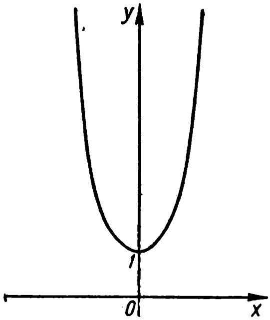


Рис. 139. $y = e^{x^2}$.

Примеры построения графиков сложных функций приведены на рис. 139—144.

Пример 2. Построить график функции

$$y = 2^{\cos x}.$$

Область определения функции: $]-\infty; +\infty[$. Область значений функции: $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$. Функция периодическая с периодом 2π. Функция

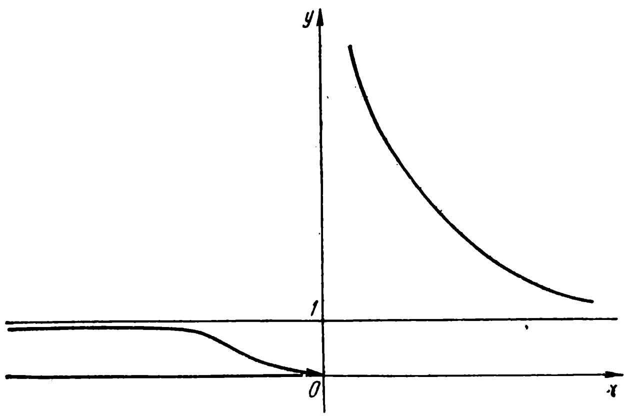


Рис. 140. $y = e^{1/x}$.

на интервалах $\left]-\frac{\pi}{2};\ 0\right[$ и $\left]\pi;\ \frac{3}{2}\pi\right[$ возрастающая, на $]0;\ \pi[$ — убывающая.

График функции представлен на рис. 145.

Примеры построения графиков сложных функций приведены на рис. 146—149.

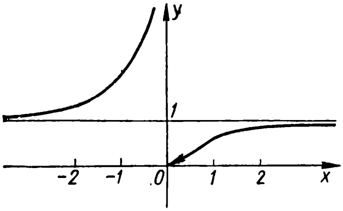


Рис. 141. $y = e^{-1/x}$.

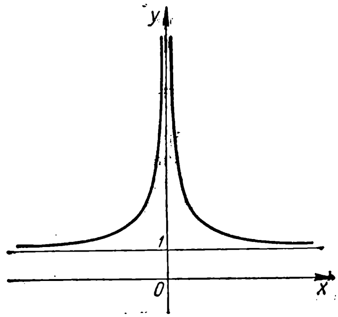


Рис. 142. $y = e^{1/x^2}$.

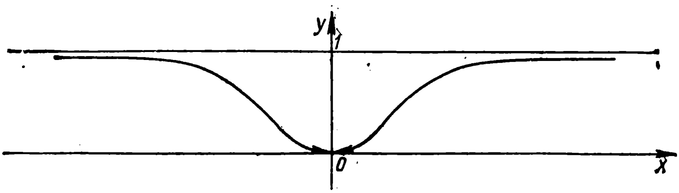


Рис. 143. $y = e^{-1/x^2}$.

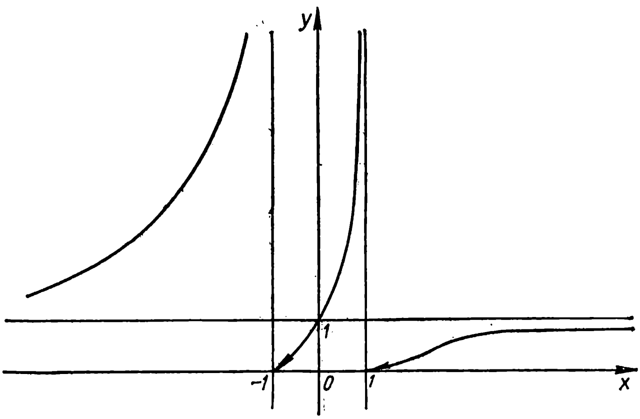


Рис. 144. $y = e^{\frac{2x}{1-x^2}}$.

Пример 3. Дан график функции $y = f(x)$ (рис. 150). Построить график функции $y = [f(x)]^2$.

Строим график функции $y = x^2$. Заметим, что точки A, B, C, D и E графика функции $y = f(x)$ будут принадлежать и графику функции $y = [f(x)]^2$, поскольку в этих точках заданная функция $y = f(x)$ равна 0 или 1.

Пример 4. Построить график функции

$$y = \ln(1 + x^2).$$

Область определения функции: $]-\infty; \infty[$. Область значений функции: $[0; \infty[$. Функция четная. Функция монотонно возрастает при $|x| \to \infty$:

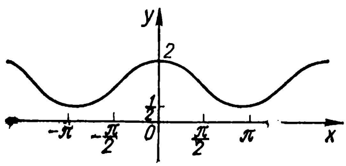


Рис. 145. $y = 2^{\cos x}$.

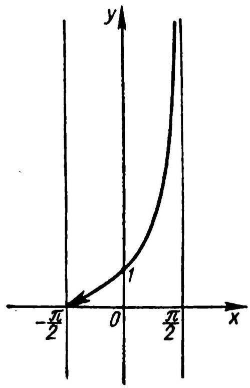


Рис. 146. $y = 2^{\operatorname{tg} x}$.

$$\lim_{x = \pm\infty} \ln(1 + x^2) = +\infty.$$

График функции $y = \ln(1 + x^2)$ представлен на рис. 151.

Пример 5. Построить график функции

$$y = \ln\cos x + \cos x.$$

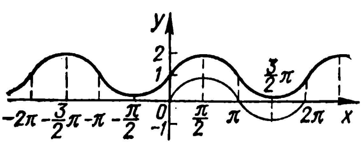


Рис. 147. $y = 2^{\sin x}$.

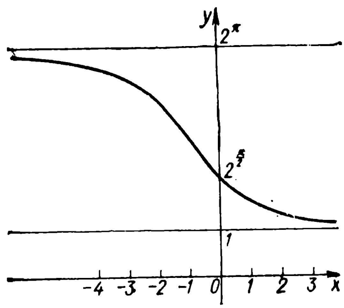


Рис. 148. $y = 2^{\operatorname{arcctg} x}$.

Область определения функции: $\left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$. Область значений функции: $]-\infty; 1]$. Функция четная. Функция периодическая с периодом 2π. Для $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ функция убывающая как сумма двух убывающих функций. Для $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ график функции выпуклый. Наибольшего значения ($y = 1$) функция достигает при $x = 0$. Вертикальная асимптота: $x = \frac{\pi}{2}$.

График функции $y = \ln \cos x + \cos x$ представлен на рис. 152.

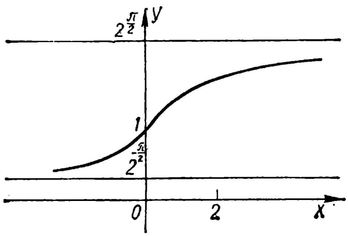


Рис. 149. $y = 2^{\operatorname{arctg} x}$.

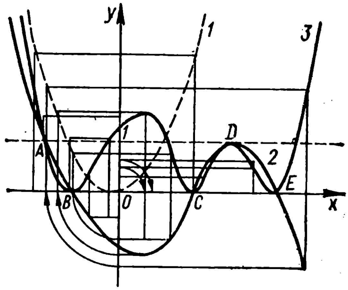


Рис. 150. Построение графика $y = [f(x)]^2$ по данному графику $y = f(x)$: $y = x^2$ *(1)*; $y = f(x)$ *(2)*; $y = [f(x)]^2$ *(3)*.

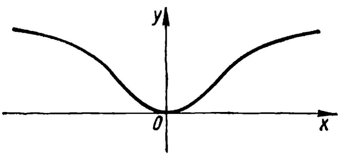


Рис. 151. $y = \ln(1 + x^2)$.

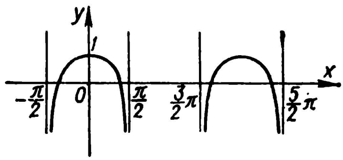


Рис. 152. $y = \ln \cos x + \cos x$.

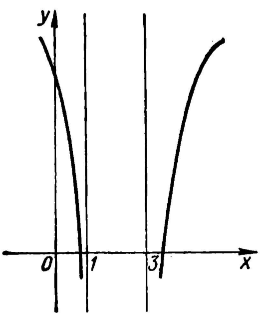


Рис. 153. $y = \ln[(x - 1) \times (x - 2)^2 (x - 3)^3]$.

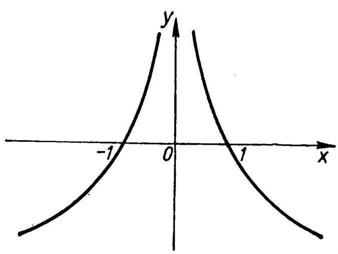


Рис. 154. $y = \ln \frac{1}{x^2}$.

Примеры построения графиков сложных функций приведены на рис. 153—164.

Пример 6. Построить график функции

$$y = \arcsin \frac{1}{x}.$$

Область определения функции: $\left|\frac{1}{x}\right| \leqslant 1$, или $]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$.

Область значений функции: $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, причем $y(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $y(1) = \frac{\pi}{2}$. Функция нечетная. Функция монотонно убывает в области определения. Заметим, что $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 0$. Горизонтальная асимптота: $y = 0$.

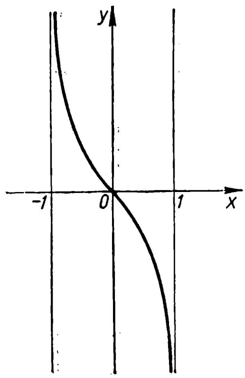


Рис. 155. $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

График функции $y = \arcsin \frac{1}{x}$ представлен на рис. 165.

Пример 7. Построить график функции

$$y = \arccos(\cos x).$$

Функция периодическая с периодом 2π, четная. Область значений функции: $[0; \pi]$. Имеем $\cos y = \cos x$, откуда $y = x + 2k\pi$ или $y = -x + 2k\pi$ $(k \in Z)$. Записываем функцию на $[0; 2\pi]$ так:

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ -x + 2\pi, & \text{если } \pi \leqslant x \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

Учитывая периодичность, строим график заданной функции (рис. 166).

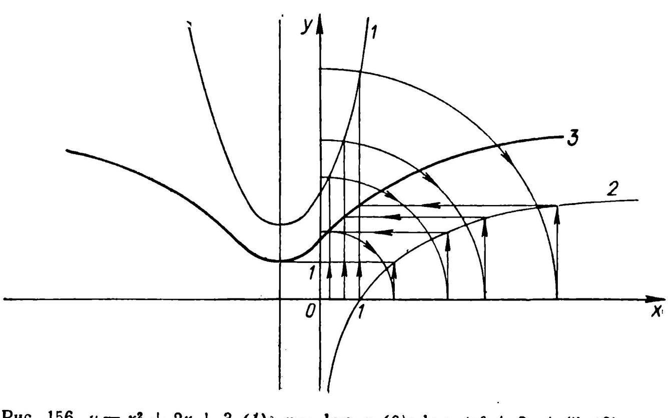


Рис. 156. $y = x^2 + 2x + 3$ *(1)*; $y = \log_2 x$ *(2)*; $\log_2 (x^2 + 2x + 3)$ *(3)*.

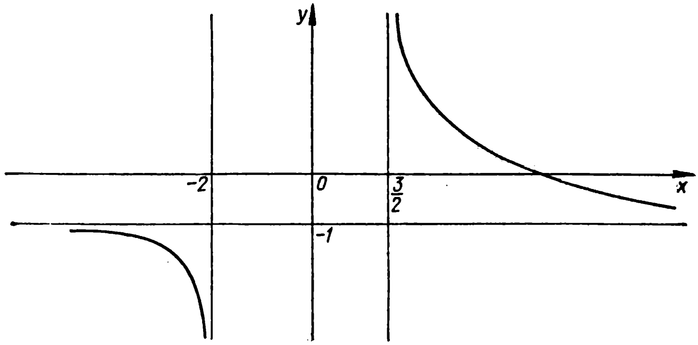


Рис. 157. $y = \log_2 \dfrac{2 + x}{2x - 3}$.

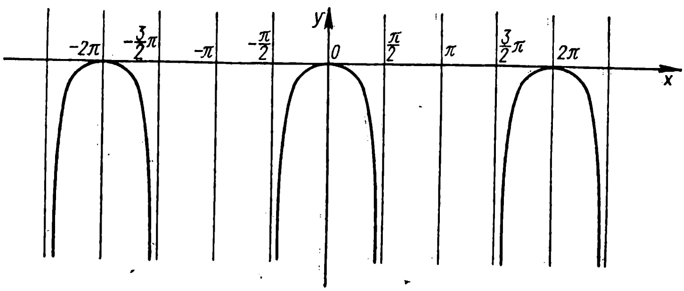


Рис. 158. $y = \ln \cos x$.

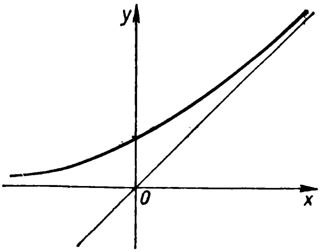


Рис. 159. $y = \ln(1 + e^x)$.

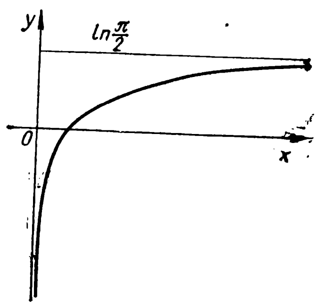


Рис. 160. $y = \ln(\operatorname{arctg} x)$.

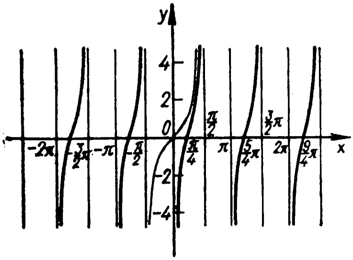


Рис. 161. $y = \lg \operatorname{tg} x$.

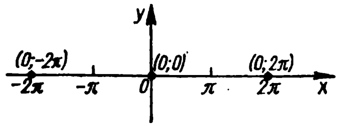


Рис. 162. $y = \sqrt{\lg \cos x}$.

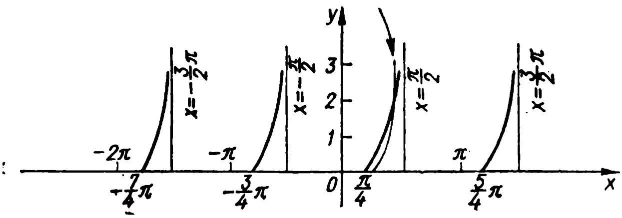


Рис. 163. $y = \sqrt{\lg \operatorname{tg} x}$.

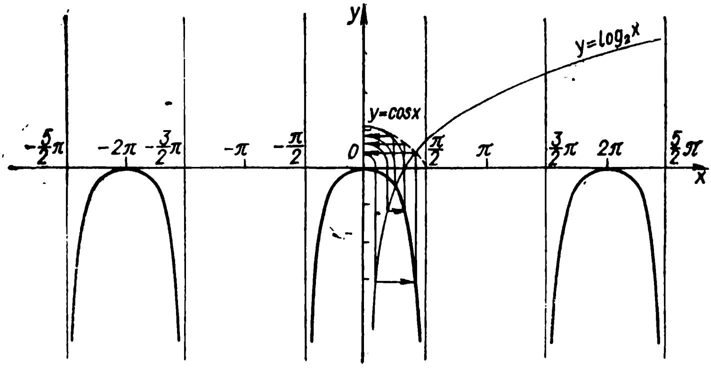


Рис. 164. $y = \log_2 \cos x$.

Примеры построения графиков сложных функций приведены на рис. 167—182.

Пример 8. Построить график функции

$$y = \sin(\sin x).$$

Область определения: $]-\infty;\ \infty[$. Область значений функции: $[-\sin 1;\ \sin 1]$. Функция периодическая с периодом 2π, нечетная.

Функция возрастает и убывает там, где возрастает и убывает функция $\sin x$. Нули функции: $x = k\pi$ $(k \in Z)$.

$$y_{\max} = \sin 1 \text{ при } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

$$y_{\min} = -\sin 1 \text{ при } x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi.$$

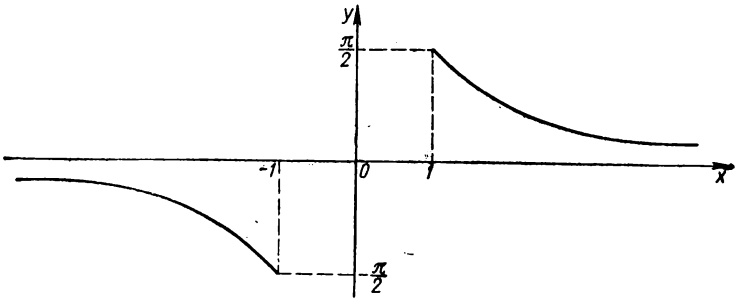


Рис. 165. $y = \arcsin \frac{1}{x}$.

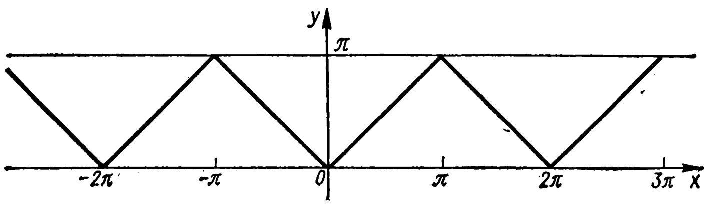


Рис. 166. $y = \arccos(\cos x)$.

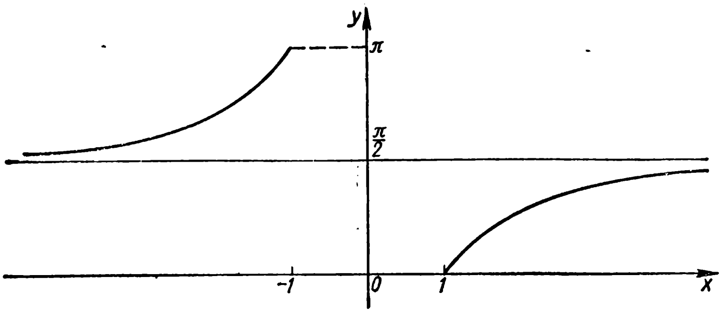


Рис. 167. $y = \arccos \frac{1}{x}$.

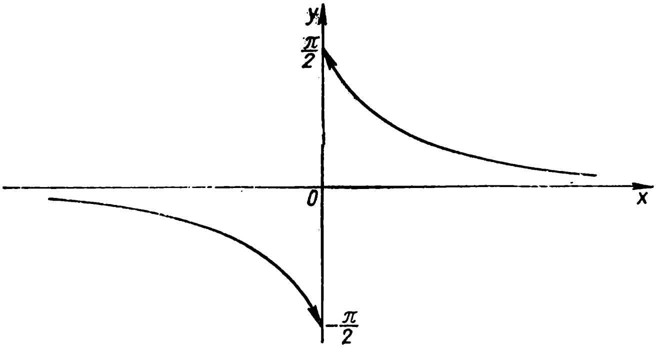


Рис. 168. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

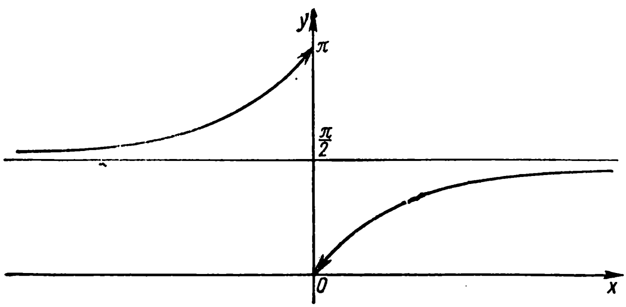


Рис. 169. $y = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$.

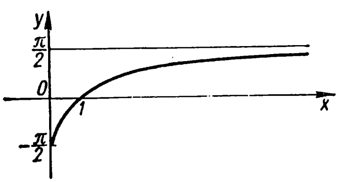


Рис. 170. $y = \operatorname{arctg} (\lg x)$.

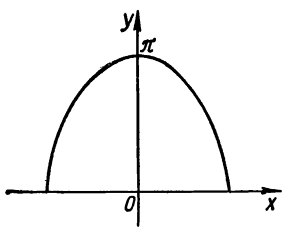


Рис. 171. $y = \arccos x^2$.

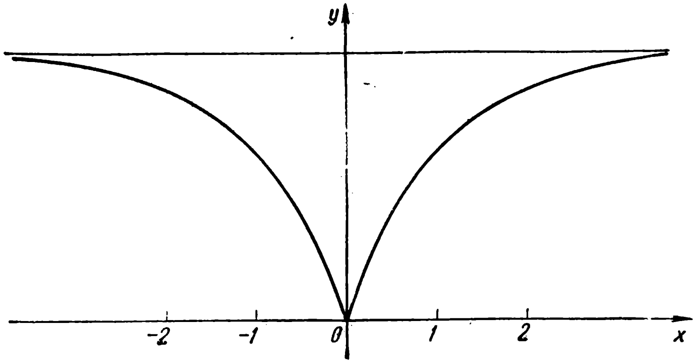


Рис. 172. $y = \arccos \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

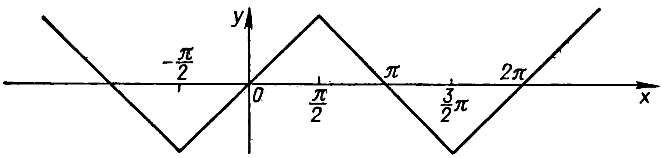


Рис. 173. $y = \arcsin(\sin x)$.

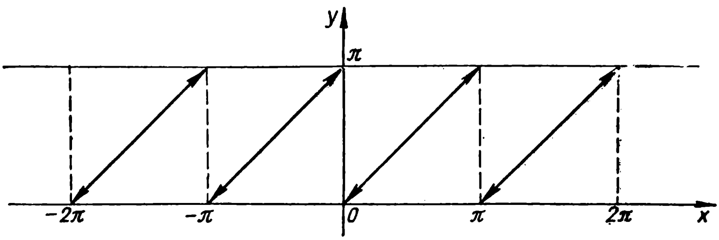


Рис. 174. $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

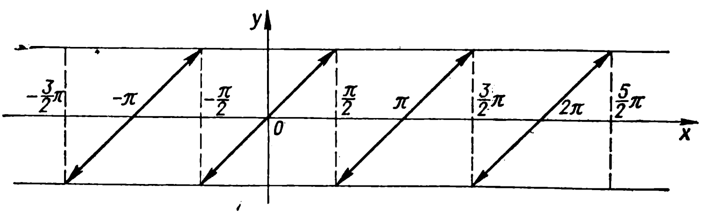


Рис. 175. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

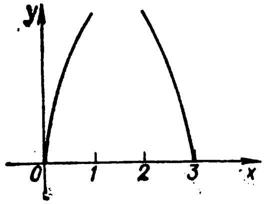


Рис. 176. $y = \arccos(x^2 - 3x + 1)$.

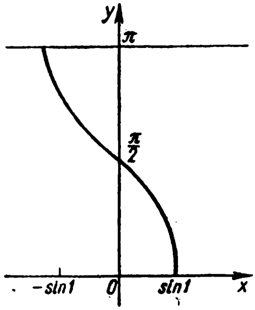


Рис. 177. $y = \arccos(\arcsin x)$.

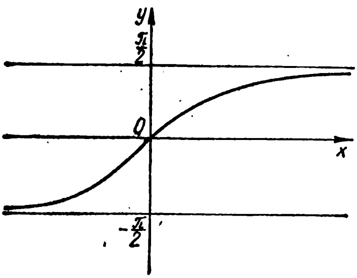


Рис. 178. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{arctg} x)$.

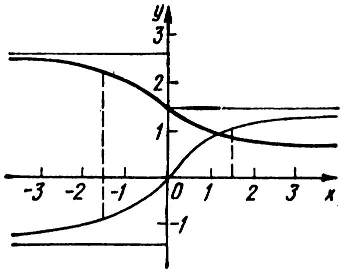


Рис. 179. $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{arctg} x)$.

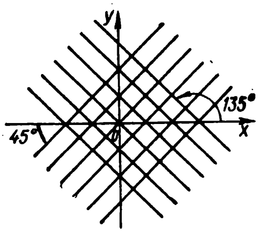


Рис. 180. $y = \operatorname{Arccos}(\cos x)$.

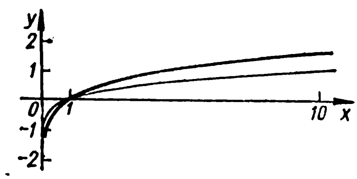


Рис. 181. $y = \arcsin \lg x$.

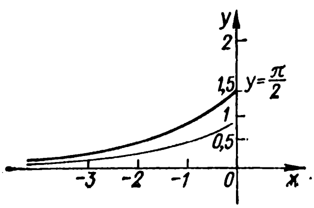


Рис. 182. $y = \arcsin ax$, $a > 1$.

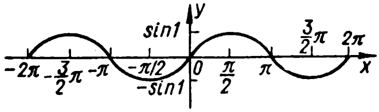


Рис. 183. $y = \sin(\sin x)$.

График функции $y = \sin(\sin x)$ представлен на рис. 183.

Пример 9. Построить график функции

$$y = \sin(\arcsin x).$$

Область определения функции: $[-1;\ 1]$.

В пределах области определения функции

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

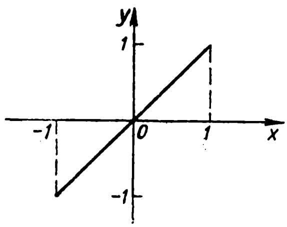


Рис. 184. $y = \sin(\arcsin x)$.

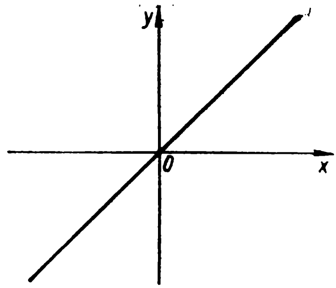


Рис. 185. $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.

График функции $y = \sin(\arcsin x)$ представлен на рис. 184.

Примеры построения графиков сложных функций приведены на рис. 185—187.

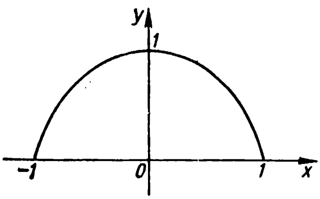


Рис. 186. $y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ и $y = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$.

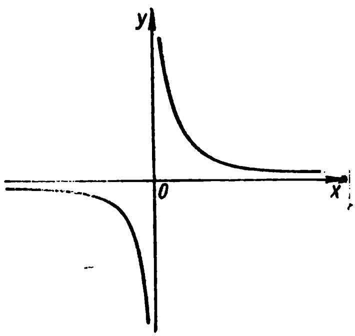


Рис. 187. $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}$ и $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$.

Пример 10. Построить график функции $y = \frac{1}{f(x)}$ по графику функции $y = f(x)$.

Исследование функции $y = \frac{1}{f(x)}$ выполняем по схеме, представленной в § 2 разд. 2, причем существенно используем свойства функции $y = f(x)$.

Функция $y = \frac{1}{f(x)}$ определена для тех значений x, для которых $f(x) \neq 0$. Нули функции $y = f(x)$ — это точки разрыва функции

$y=\dfrac{1}{f(x)}$. Обозначим их через x_1, x_2, ..., x_n. Прямые $x=x_1$, $x=x_2$, ..., $x=x_n$ — вертикальные асимптоты графика функции $y=\dfrac{1}{f(x)}$.

Учитывая область значений функции $y=f(x)$, определяем область значений функции $y=\dfrac{1}{f(x)}$.

Если функция $y=f(x)$ четная, то и функция $y=\dfrac{1}{f(x)}$ четная. Если функция $y=f(x)$ нечетная, то и функция $y=\dfrac{1}{f(x)}$ нечетная.

Если функция $y=f(x)$ периодическая с периодом ω, то и функция $y=\dfrac{1}{f(x)}$ периодическая с периодом ω.

На интервалах возрастания функции $y=f(x)$ функция $y=\dfrac{1}{f(x)}$ убывающая, на интервалах убывания функции $y=f(x)$ функция $y=\dfrac{1}{f(x)}$ возрастающая.

Если функция $y=f(x)$ на некотором интервале выпуклая, то функция $y=\dfrac{1}{f(x)}$ на этом интервале вогнутая.

Наклонные асимптоты графика функции $y=\dfrac{1}{f(x)}$ определяем по формулам § 2 разд. 2.

Замечание. Для построения графика функции $y=\dfrac{1}{f(x)}$ по графику функции $y=f(x)$ можно использовать преобразование инверсии относительно оси абсцисс для графика функции $y=f(x)$.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 11. Построить график функции

$$y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

Выполняем исследование функции $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, используя свойства функции $y=\sqrt[3]{x}$.

Функция $y=\sqrt[3]{x}$ равна нулю только при $x=0$. Следовательно, область определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$: $]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]0;\ +\infty[$. Прямая $x=0$ — вертикальная асимптота графика функции $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

Предельные значения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$: на интервале $]-\infty;\ 0[$ соответственно 0 и $-\infty$; на интервале $]0;\ \infty[$ соответственно $+\infty$ и 0.

Функция $y=\sqrt[3]{x}$ нечетная, следовательно, и функция $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ нечетная, ее график симметричен относительно начала координат.

Поскольку на интервале $]0; +\infty[$ функция $y=\sqrt[3]{x}$ возрастает, то функция $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ на этом интервале убывает. На интервале $]0; \infty[$ функция $y=\sqrt[3]{x}$ выпуклая, а функция $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ на этом интервале вогнутая.

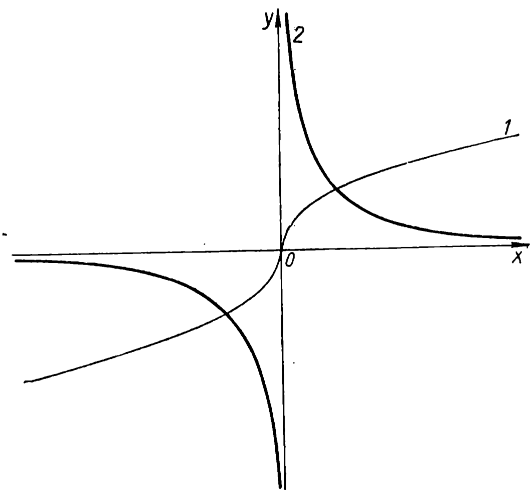


Рис. 188. $y=\sqrt[3]{x}$ *(1)*; $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ *(2)*.

График функции $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ представлен на рис. 188.

Пример 12. Построить график функции

$$y=\sec x.$$

Учитывая, что $\sec x=\frac{1}{\cos x}$, проводим исследование функции $y=\sec x$, существенно используя свойства функции $y=\cos x$.

Поскольку нули функции $y=\cos x$: $x=\frac{\pi}{2}(2n+1)$ $(n\in Z)$, то функция $y=\sec x$ определена при всех x, кроме $x=\frac{\pi}{2}(2n+1)$

$(n \in Z)$. Прямые $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ $(n \in Z)$ являются вертикальными асимптотами графика функции $y = \sec x$.

Нулевых значений функция $y = \sec x$ не принимает, ее график не пересекает ось абсцисс. Область значений функции $y = \cos x$: $[-1; 1]$, следовательно, при всех допустимых значениях x $|\sec x| \geqslant 1$.

Функция $y = \cos x$ четная, следовательно, и функция $y = \sec x$ четная. Функция $y = \cos x$ периодическая с периодом 2π, следовательно, и функция $y = \sec x$ периодическая с периодом 2π.

Поскольку функция $y = \cos x$ на $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ убывает от 1 до 0, то функция $y = \sec x$ на этом интервале возрастает от 1 до $+\infty$.

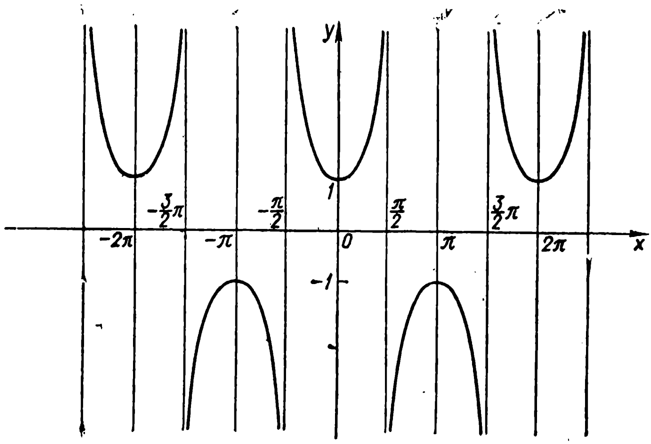


Рис. 189. $y = \sec x$.

На $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ функция $y = \cos x$ убывает от 0 до -1, а функция $y = \sec x$ на $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ возрастает от $-\infty$ до -1. Функция $y = \cos x$ на $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ выпуклая, следовательно, функция $y = \sec x$ на этом интервале вогнутая. На $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ функция $y = \cos x$ вогнутая, следовательно, функция $y = \sec x$ выпуклая на $\left]\frac{\pi}{2}; \pi\right|$.

График функции $y = \sec x$ представлен на рис. 189.

Примеры построения графиков функций $\frac{1}{f(x)}$ приведены на рис. 190—202.

Построение графика функции $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ с помощью циркуля и линейки приведено на рис. 203.

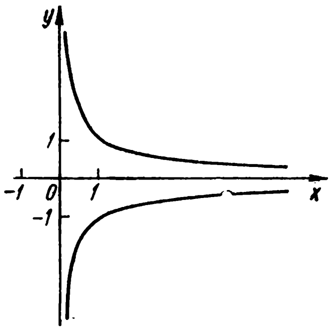


Рис. 190. $|y| = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

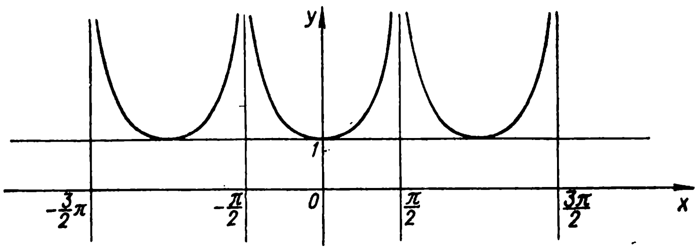


Рис. 191. $y = |\sec|x||$.

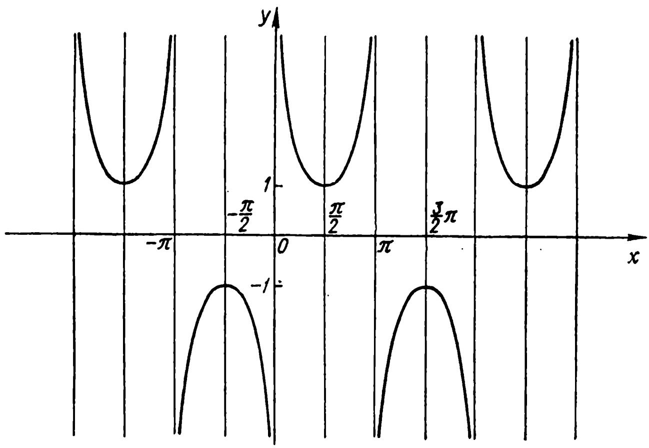


Рис. 192. $y = \operatorname{cosec} x$.

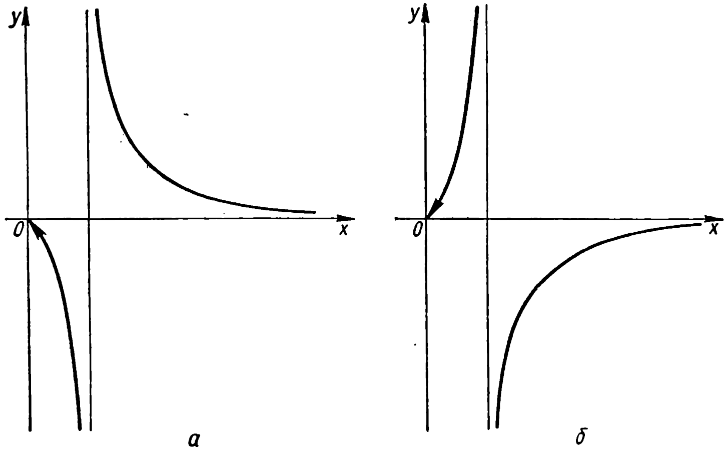


Рис. 193. $y=\dfrac{1}{\log_a x}$: $a > 1$ (а); $a < 1$ (б).

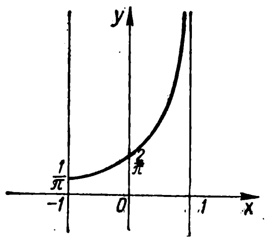


Рис. 194. $y=\dfrac{1}{\arccos x}$.

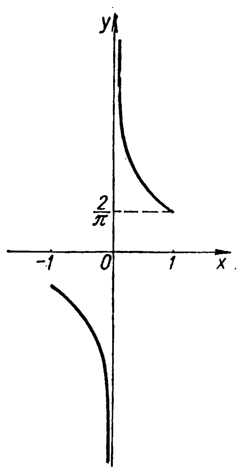


Рис. 195. $y=\dfrac{1}{\arcsin x}$.

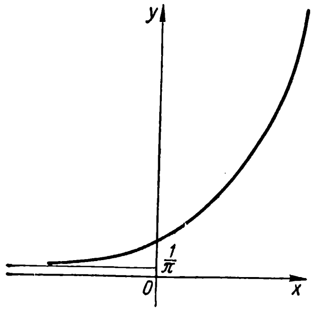


Рис. 196. $y = \frac{1}{\operatorname{arcctg} x}$.

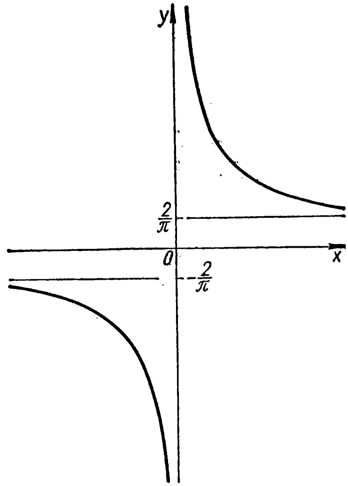


Рис. 197. $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

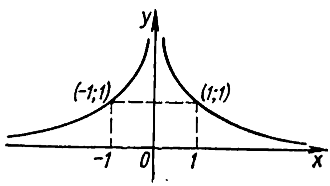


Рис. 198. $y = \frac{1}{|x|}$.

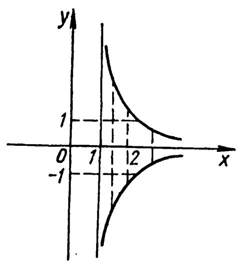


Рис. 199. $|y| = \frac{1}{x-1}$.

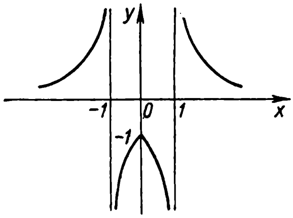


Рис. 200. $y = \frac{1}{|x|-1}$.

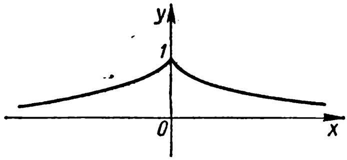


Рис. 201. $y = \frac{1}{|x|+1}$.

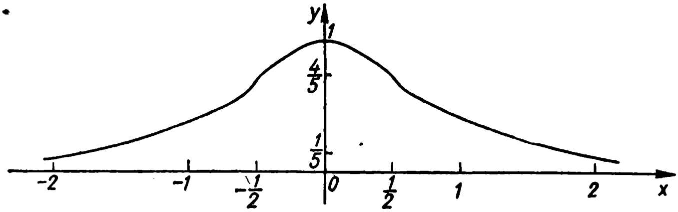


Рис. 202. $y = \frac{1}{1+x^2}$.

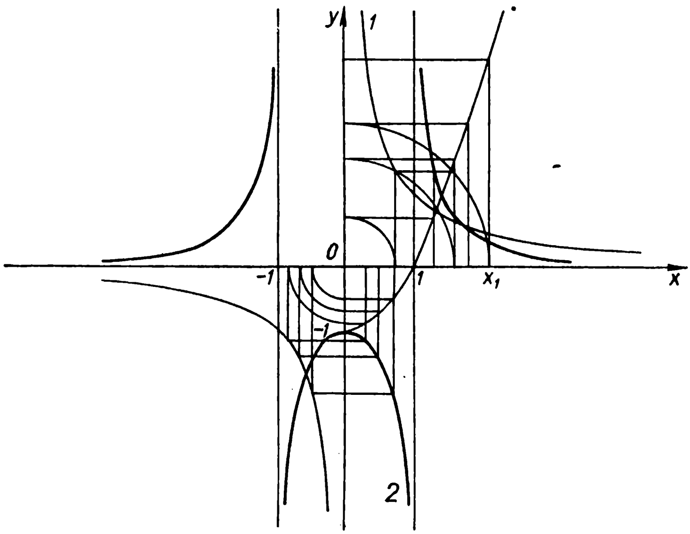


Рис. 203. Построение графика функции $y = \frac{1}{x^2 - 1}$ с помощью циркуля и линейки: $y = \frac{1}{x}$ (1); $y = -x^2 - 1$ (2).

§ 2. Графики алгебраических функций

В этом параграфе рассмотрены графики целых рациональных функций (многочленов), дробно-рациональных, иррациональных и трансцендентных функций. Бесспорно, построение их графиков можно осуществлять общим способом построения графиков сложных функций (см. § 1 разд. 5), выполняя соответствующие действия и преобразования графиков (см. разд. 4). Выделим наиболее важные и распространенные группы этих функций и рассмотрим особенности построения их графиков.

Графики целых рациональных функций

Целая рациональная функция, или многочлен,— это функция вида

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

где n — целое неотрицательное число; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные постоянные числа.

Линейная функция. Простейшей целой рациональной функцией является линейная функция (при $n = 1$). Запишем ее в виде

$$y = ax + b.$$

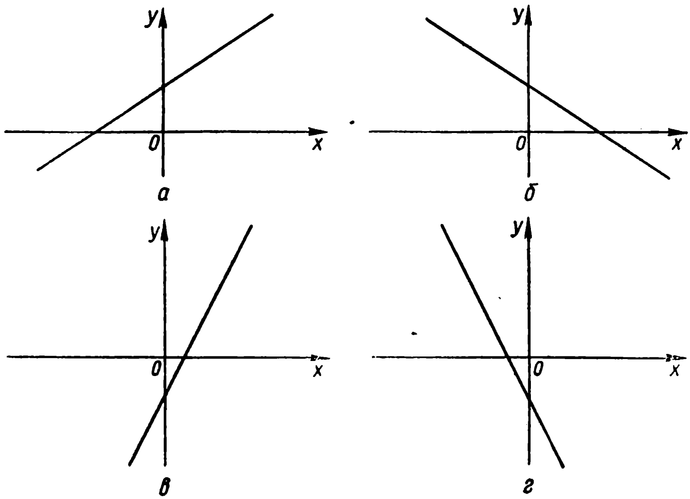


Рис. 204. Линейная функция $y = ax + b$: $a > 0$, $b > 0$ (*а*); $a < 0$, $b > 0$ (*б*); $a > 0$, $b < 0$ (*в*); $a < 0$, $b < 0$ (*г*).

График линейной функции — прямая линия. Функция монотонно возрастает при $a > 0$, монотонно убывает при $a < 0$, постоянна при $a = 0$. Точки пересечения с координатными осями: $\left(-\frac{b}{a};\ 0\right)$ и $(0;\ b)$.

Различные виды графика $y = ax + b$ в зависимости от знаков a и b представлены на рис. 204.

Другие примеры графиков линейных функций приведены на рис. 205, 206.

Квадратная функция (квадратный трехчлен). Общий вид квадратного трехчлена

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c — любые действительные числа.

График квадратного трехчлена — парабола с вертикальной осью симметрии: $x = -\dfrac{b}{2a}$ (рис. 207).

Представим два способа построения графиков квадратного трехчлена: выделение полного квадрата и применение соответствующих преобразований графиков, рассмотренных в разд. 4, для построения графика; построение графика на основе исследования квадратного трехчлена.

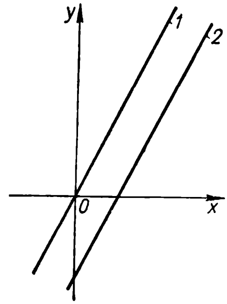


Рис. 205. $y = ax + b$. $b = 0$: $y = 2x$ *(1)*; $b \neq 0$: $y = 2x - 3$ *(2)*.

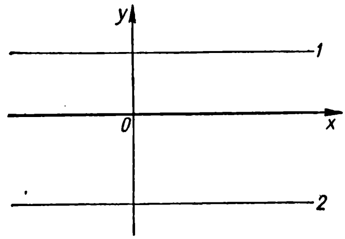


Рис. 206. $y = ax + b$, $a = 0$: $y = 2$ *(1)*; $y = -3$ *(2)*.

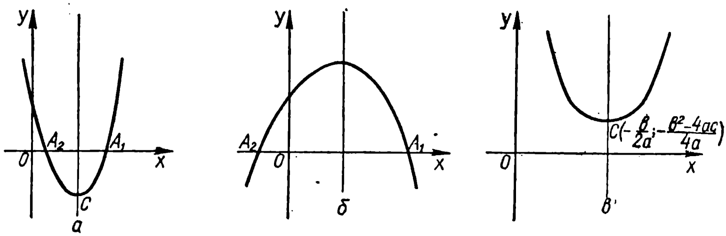


Рис. 207. Квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$: $a > 0$, $b < 0$ *(а)*; $a < 0$, $b > 0$ *(б)*; $y = ax^2 + bx + c$ *(в)*.

П е р в ы й с п о с о б. Будем считать, что $a \neq 0$. Преобразуем правую часть функции:

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Следовательно, $y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$. Отсюда очевидно, что график квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ получим из параболы $y = x^2$ с помощью последовательного выполнения таких преобразований: параллельного переноса вдоль оси абсцисс влево на $\frac{b}{2a}$ единиц масштаба; растяжения (сжатия) по оси ординат в $|a|$ раз; параллельного переноса вдоль оси ординат на $\left|\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right|$ единиц масштаба в направлении, знак которого противоположен знаку $\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

Заметим, что если $a = 1$ $(y = x^2 + px + q)$, то построение графика значительно упрощается (не надо выполнять растяжение графика).

Второй способ. Область определения функции $y = ax^2 + bx + c$: $]-\infty; \infty[$. График функции $y = ax^2 + bx + c$ симметричен относительно прямой $x = -\frac{b}{2a}$. Точка $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ — точка экстремума функции (одновременно и вершина параболы), причем если $a > 0$, то в этой точке минимум; если $a < 0$, то максимум.

При $a > 0$ функция на $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right[$ монотонно убывает, а на $\left]-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$ монотонно возрастает, на $]-\infty; \infty[$ кривая вогнутая. При $a < 0$ функция на $\left]-\infty; -\frac{b}{2a}\right[$ монотонно возрастает, а на $\left]-\frac{b}{2a}; +\infty\right[$ монотонно убывает, на $]-\infty; \infty[$ кривая выпуклая. Точки пересечения с осью абсцисс: $\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; 0\right)$, с осью ординат: $(0; c)$.

Заметим, что значение коэффициента влияет на форму графика функции $y = ax^2 + bx + c$, а именно: ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ тем круче, чем больше $|a|$.

Примеры построения графиков квадратных функций приведены на рис. 208.

Кубическая функция (многочлен третьей степени). Общий вид многочлена третьей степени

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

где $a \neq 0$, b, c, d — любые действительные числа.

а) Если $a = 1$, $b = c = d = 0$, то многочлен имеет вид

$$y = x^3.$$

Эта функция уже изучена нами (см. § 1 разд. 3).

б) Если $a = 1$, $c = k \neq 0$, $b = d = 0$, то функция $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ имеет вид

$$y = x^3 + kx.$$

Область определения функции: $]-\infty; \infty[$. Функция нечетная.

Если $k > 0$, то график функции проходит через точку $(0; 0)$. Поскольку функции $y = x^3$ и $y = kx$ возрастающие (при $k > 0$), то функция $y = x^3 + kx$ возрастающая, экстремума нет.

Функция вогнутая при $x \in]0; \infty[$.

Заметим, что сложение линейной функции с любой функцией не влияет на выпуклость (вогнутость) графика. Точка $(0; 0)$ — точка перегиба графика функции. Очевидно, что график функции $y = x^3 + kx$ (при $k > 0$) круче, чем график функции $y = x^3$ (рис. 209).

Если $k < 0$, то график функции $y = x^3 + kx$ проходит через точки $(0; 0)$, $(\sqrt{-k}; 0)$, $(-\sqrt{-k}; 0)$. Функция при $x \in \left]-\infty; -\sqrt{\frac{-k}{3}}\right[\cup \left[\sqrt{\frac{-k}{3}}; \infty\right[$ возрастает, а при $x \in \left]-\sqrt{\frac{-k}{3}}; \sqrt{\frac{-k}{3}}\right[$ убывает. Функция имеет максимум при $x = -\sqrt{\frac{-k}{3}}$ $\left(y_{\max} = -\frac{2k}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)$ и минимум при $x = \sqrt{\frac{-k}{3}}$ $\left(y_{\min} = \frac{2k}{3}\sqrt{-\frac{k}{3}}\right)$.

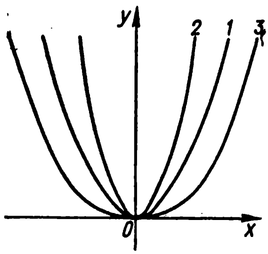


Рис. 208. $y = ax^2$; $a = 1$ (1); $a = 2$ (2); $a = \frac{1}{2}$ (3).

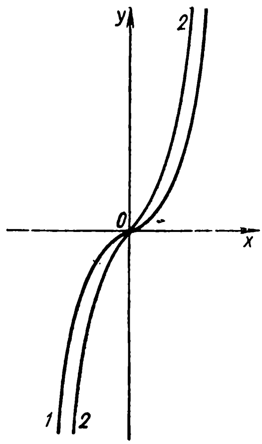


Рис. 209. Кубические функции: $y = x^3$ (1); $y = x^3 + x$ (2).

График функции $y = x^3 + kx$ $(k < 0)$ представлен на рис. 210.

в) График функции

$$y = x^3 + kx + b$$

получим из графика $y = x^3 + kx$ с помощью параллельного переноса вдоль оси ординат на $|b|$ единиц масштаба в направлении, знак которого совпадает со знаком числа b.

г) Для построения графика функции

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d$$

выполняем преобразование параллельного переноса начала координат:

$$x = x' - \frac{b}{3},$$

$$y = y'.$$

После преобразования функция принимает вид

$$y = x'^3 + k_1 x' + b_1.$$

Следовательно, график функции $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ имеет такой же вид, как и график функции $y = x^3 + kx + b$, только центр его симметрии передвинут по оси абсцисс на $-\frac{b}{3}$.

д) Построение графика $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ сводится к построению графика функции вида

$$y = x^3 + kx + b.$$

Действительно, запишем функцию $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ так:

$$y = a\left(x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}\right).$$

Далее, строим график функции $y = x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}$, а растянув последний по оси ординат в a раз, получим искомый график. График функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ называют *кубической параболой.*

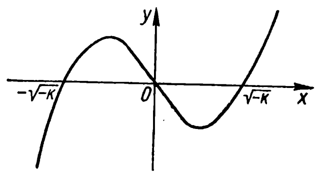


Рис. 210. $y = x^3 + kx$, $k < 0$.

Отметим, что поведение функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ зависит от знаков a и $\Delta = 3ac - b^2$. Если $\Delta \geqslant 0$ (рис. 211), то функция монотонно возрастает при $a > 0$ и монотонно убывает при $a < 0$. Если $\Delta < 0$, то функция имеет один максимум и один минимум:

$$C\left(-\frac{b + \sqrt{-\Delta}}{3a};\ d + \frac{2b^3 - 9abc - (6ac - 2b^2)\sqrt{-\Delta}}{27a^2}\right)$$

и

$$D\left(-\frac{b - \sqrt{-\Delta}}{3a};\ d + \frac{2b^3 - 9abc + (6ac - 2b^2)\sqrt{-\Delta}}{27a^2}\right).$$

Точки пересечения с осью Ox определяются действительными корнями уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Их может быть от одной до

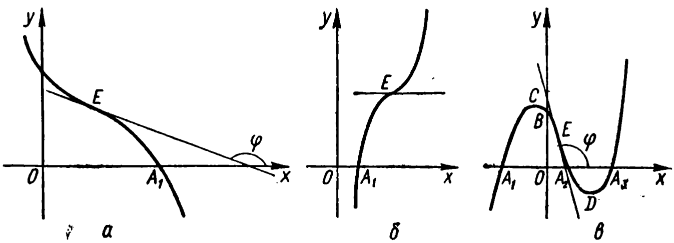


Рис. 211. Кубическая функция $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$: $\Delta > 0$; $a < 0$ *(а)*; $\Delta = 0$, $a > 0$ *(б)*; $\Delta < 0$, $a > 0$ *(в)*.

трех. Точка перегиба (эта точка является одновременно и центром симметрии кривой): $E\left(-\frac{b}{3a};\ \frac{2b^3-9abc}{27a^2}+d\right)$.

Биквадратная функция. Функция вида $y=ax^4+bx^2+c$ $(a\neq 0)$ называется *биквадратной*.

Исследование и построение графика биквадратной функции проводят по общей схеме (см. § 2 разд. 2).

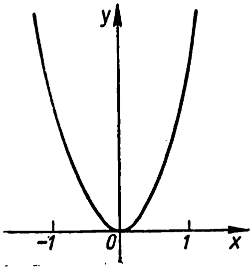


Рис. 212. Биквадратная функция $y=x^4+x^2$.

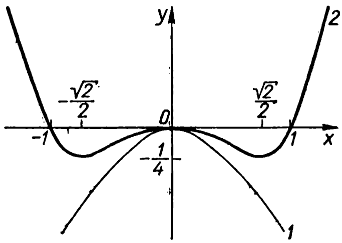


Рис. 213. $y=-x^2$ (1); $y=x^4-x^2$ (2).

Иногда можно строить график биквадратной функции с помощью соответствующих действий и преобразования графиков функций $y=x^4$, $y=x^2$. Действительно, поскольку

$$y=ax^4+bx^2+c=\frac{b^2}{a}\left(\frac{a^2}{b^2}x^4+\frac{a}{b}x^2\right)+c=$$

$$=\frac{b^2}{a}\left(\frac{x^4}{\frac{b^2}{a^2}}+\frac{x^2}{\frac{b}{a}}\right)+c=$$

$$=\frac{b^2}{a}\left[\left(\frac{x}{\sqrt{\left|\frac{b}{a}\right|}}\right)^4\pm\left(\frac{x}{\sqrt{\left|\frac{b}{a}\right|}}\right)^2\right]+c,$$

то очевидно, что график функции $y=ax^4+bx^2+c$ можно получить из графика функции $y=x^4+x^2$ или из графика функции $y=x^4-x^2$ с помощью растяжения по обеим координатным осям и параллельного переноса вдоль оси ординат на $|c|$ единиц масштаба.

График функции $y=x^4+x^2$ является суммой графиков функций $y=x^4$ и $y=x^2$ (рис. 212).

График функции $y=x^4-x^2$ представлен на рис. 213.

Многочлен n-й степени $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$. График — кривая n-го порядка, параболического типа.

а) Если n — нечетное, то y непрерывно меняется при $a_0>0$ от $-\infty$ до $+\infty$, а при $a_0<0$ — от $+\infty$ до $-\infty$. Кривая может пересекать ось абсцисс (или касаться ее) от 1 до n раз. Экстремумов эта функция не имеет или имеет их четное число (от 2 до $n-1$), причем максимумы и минимумы чередуются. Точек перегиба — нечетное число (от 1 до $n-2$).

б) Если n — четное, то y непрерывно меняется при $a_0 > 0$ от $+\infty$ до $+\infty$, а при $a_0 < 0$ от $-\infty$ до $-\infty$. Кривая или не пересекает ось абсцисс или пересекает ее (или касается ее) от 1 до n раз. Функция имеет нечетное число экстремумов (от 1 до $n-1$), причем максимумы и минимумы чередуются. Точек перегиба — четное число (от 0 до $n-2$). Асимптот эти кривые не имеют (рис. 214). Заметим, что исследование и построение графика много-

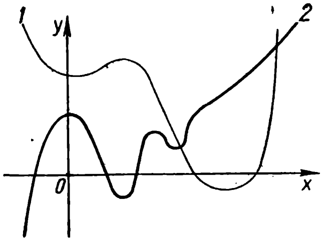


Рис. 214. Многочлен n-й степени: n — четное (*1*); n — нечетное (*2*).

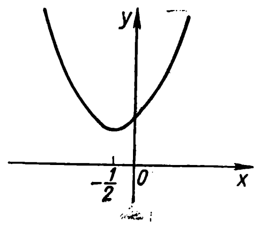


Рис. 215. $y = x^2 + x + 1$.

члена n-й степени целесообразно проводить, пользуясь методами высшей математики.

Пример 1. Построить график функции

$$y = x^2 + x + 1.$$

Преобразуем функцию, выделив полный квадрат:

$$y = x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Строим график функции $y = x^2$, затем выполняем следующие преобразования графика функции $y = x^2$: параллельный перенос вдоль оси абсцисс на $\frac{1}{2}$ единицы масштаба влево (вспомогательную ось ординат переносим параллельно вдоль оси абсцисс на $\frac{1}{2}$ единицы масштаба вправо); параллельный перенос вдоль оси ординат на $\frac{3}{4}$ единицы масштаба вверх $\left(\text{вспомогательную ось абсцисс опускаем вдоль оси ординат на } \frac{3}{4} \text{ единицы масштаба}\right)$.

График функции приведен на рис. 215.

Пример 2. Построить график функции

$$y = -2x^2 - x + 6.$$

Построим график на основе исследования квадратного трехчлена. Область определения функции: $]-\infty; \infty[$. Нули функции: $\frac{3}{2}$, -2. График кривой пересекает ось ординат в точке (0; 6). Вершина параболы: $\left(-\frac{1}{4}; \frac{49}{8}\right)$. Поскольку $a = -2 < 0$, то в точке $\left(-\frac{1}{4}; \frac{49}{8}\right)$ — максимум. Функция на $\left]-\infty; -\frac{1}{4}\right[$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $\frac{49}{8}$, а на $\left]-\frac{1}{4}; +\infty\right[$ монотонно убывает от $\frac{49}{8}$ до $-\infty$. Кривая выпуклая в области определения. Ось симметрии: $x = -\frac{1}{4}$.

График функции представлен на рис. 216.

Пример 3. Построить график функции

$$y = x^3 - 6x^2 + 5x + 4.$$

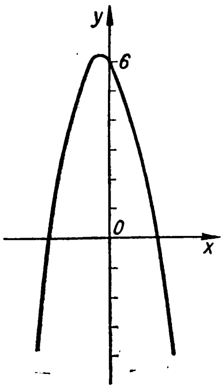


Рис. 216. $y = -2x^2 - x + 6$.

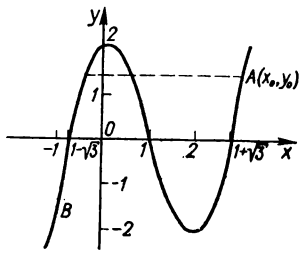


Рис. 217. $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Выполняем преобразование параллельного переноса начала координат:

$$x = x' + 2,$$
$$y = y' - 2.$$

Будем иметь

$$y' = x'^3 - 7x'.$$

Следовательно, построение графика заданной функции свелось к построению графика функции $y' = x'^3 - 7x'$ в системе координат $x'O_1y'$ (см. рис. 210). В данном случае $k = -7 < 0$, следовательно, график функции $y' = x'^3 - 7x'$ проходит через точки $(0; 0)$, $(\sqrt{7}; 0)$; $(-\sqrt{7}; 0)$. Функция при $x' \in \left]-\infty; -\sqrt{\frac{7}{3}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{7}{3}}; \infty\right[$ возрастает, при $x' \in \left]-\sqrt{\frac{7}{3}}; \sqrt{\frac{7}{3}}\right[$ убывает. Функция имеет максимум при $x' = -\sqrt{\frac{7}{3}}$ $\left(y'_{max} = \frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$ и минимум при $x' = \sqrt{\frac{7}{3}}$ $\left(y'_{min} = -\frac{14}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)$.

П р и м е р 4. Построить график функции

$$y = (1 + x)(5 - x).$$

Выполнив умножение в правой части выражения, получим квадратный трехчлен

$$y = -x^2 + 4x + 5.$$

Однако в данном случае нет нужды в этом, проще исследовать функцию в заданном виде. Нули функции: $x_1 = -1$, $x_2 = 5$. Точки пересечения кривой с осью абсцисс: $(-1; 0)$ и $(5; 0)$. Ось параболы:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-1 + 5}{2} = 2.$$

Точка $(2; 9)$ — вершина параболы. Точка пересечения с осью ординат: $x = 0$; $y = 5$.

График функции $y = (1 + x)(5 - x)$ представлен на рис. 218.

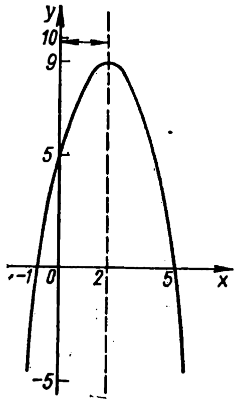


Рис. 218. $y = (1 + x)(5 - x)$.

П р и м е р 5. Построить график функции

$$y = x^4 - 2x^2 + 2.$$

Область определения функции: $]-\infty; \infty[$. Функция четная, ее график симметричен относительно оси ординат. Записав функцию в виде

$$y = x^4 - 2x^2 + 2 = (x^2 - 1)^2 + 1,$$

видим, что при $x = \pm 1$ функция имеет минимум ($y_{\min} = 1$). Поскольку $y = (x^2 - 1)^2 + 1 \geqslant 1$, то график кривой располагается не ниже прямой $y = 1$. Функция имеет максимум при $x = 0$ ($y_{\max} = 2$). При $x \in]-\infty; -1[\cup]0; 1[$ функция убывает, а при $x \in]-1; 0[\cup]1; +\infty[$ возрастает.

График функции $y = x^4 - 2x^2 + 2$ представлен на рис. 219.

Примеры построения графиков многочленов приведены на рис. 220—222.

Функция вида $y = (ax^2 + bx + c)^n$, где n — целое положительное число. Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет равные действительные корни, то функцию $y = (ax^2 + bx + c)^n$ записываем так:

$$y = a^n (x - \alpha)^{2n},$$

где α — корень трехчлена. Построение графика этой функции осуществляем с помощью преобразования графика степенной функции $y = x^{2n}$ (см. § 2 разд. 4).

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет действительные различные корни α и β, то функцию $y = (ax^2 + bx + c)^n$ записываем так:

$$y = a^n (x - \alpha)^n (x - \beta)^n.$$

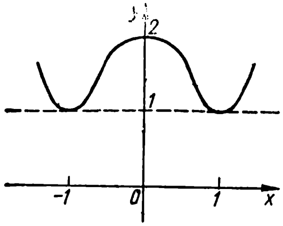


Рис. 219. $y = x^4 - 2x^2 + 2$.

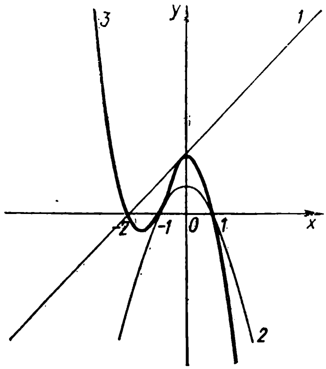


Рис. 220. $y = 2 + x$ (1); $y = 1 - x^2$ (2); $y = (1 - x^2) \times (2 + x)$ (3).

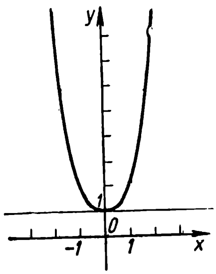


Рис. 221. $y = 1 + |-x^3|$.

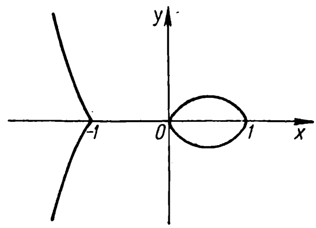


Рис 222. $|y| = x - x^3$.

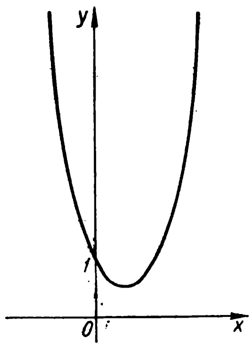


Рис. 223. $y = (x^2 - x + 1)^2$.

Рис. 224. $y = (x^2 - x + 1)^3$.

Построение графика этой функции сводится к построению графиков функций

$$y = a^n (x-\alpha)^n \text{ и } y = (x-\beta)^n$$

и их умножению.

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет комплексные корни, то график функции $y = (ax^2 + bx + c)^n$ строим как график сложной функции (см. § 1 разд. 5).

Примеры построения графиков функций приведены на рис. 223, 224.

Графики дробно-рациональных функций

Дробно-линейная функция — это функция вида

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

где числитель и знаменатель — линейные функции.

Разделив числитель на знаменатель, получим

$$y = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2\left(x + \frac{d}{c}\right)}.$$

Теперь очевидно, что график дробно-линейной функции можно получить из графика функции $y = \frac{1}{x}$ с помощью следующих преобразований: параллельного переноса вдоль оси абсцисс на $\left|\frac{d}{c}\right|$ единиц масштаба в направлении, знак которого противоположен знаку $\frac{d}{c}$; растяжения по оси ординат пропорционально коэффициенту $\frac{bc - ad}{c^2}$; параллельного переноса вдоль оси ординат на $\left|\frac{a}{c}\right|$ единиц масштаба в направлении, знак которого совпадает со знаком $\frac{a}{c}$.

Замечание. График любой дробно-линейной функции можно строить и способом непосредственного исследования функции по схеме § 2 разд. 2.

График дробно-линейной функции — равносторонняя гипербола с асимптотами, параллельными осям координат:

$$x = -\frac{d}{c} \text{ и } y = \frac{a}{c}.$$

Примеры построения графиков дробно-линейных функций приведены на рис. 225, 226.

Дробно-рациональная функция. Рассмотрим дробную рациональную функцию

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m} = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

у которой числитель и знаменатель — многочлены соответственно n-й и m-й степени. Пусть дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ — правильная ($n < m$). Известно, что любую несократимую рациональную дробь можно представить,

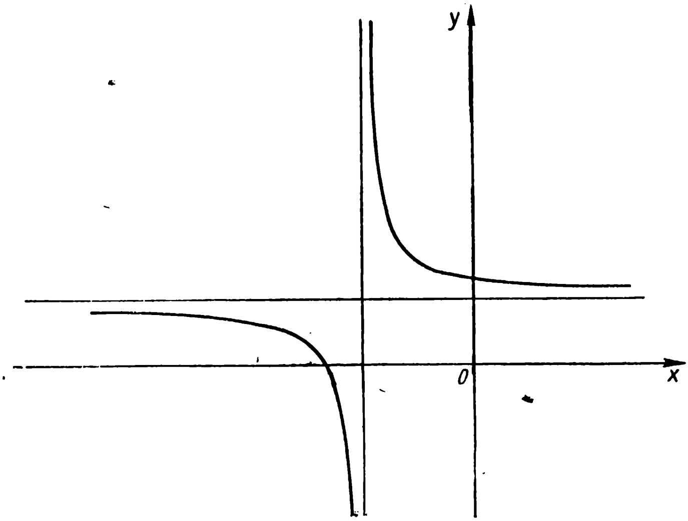


Рис. 225. Дробно-линейная функция $y = \frac{2x+1}{3x+4}$.

и притом единственным образом, в виде суммы конечного числа элементарных дробей, вид которых определяется разложением знаменателя дроби $Q(x)$ в произведение действительных сомножителей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-k_1)^{m_1}} + \frac{A_2}{(x-k_1)^{m_1-1}} + \cdots + \frac{A_{m_1}}{x-k_1} +$$

$$+ \cdots + \frac{L_1}{(x-k_s)^{m_s}} + \frac{L_2}{(x-k_s)^{m_s-1}} + \cdots + \frac{L_{m_s}}{x-k_s} +$$

$$+ \frac{B_1x + C_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{\mu_1}} + \cdots + \frac{B_{\mu_1}x + C_{\mu_1}}{x^2+p_1x+q_1} +$$

$$+ \cdots + \frac{M_1x + N_1}{(x^2+p_tx+q_t)^{\mu_t}} + \cdots + \frac{M_{\mu_t}x + N_{\mu_t}}{x^2+p_tx+q_tx},$$

если

$$Q(x) = a_0 (x - k_1)^{m_1} \dots (x - k_s)^{m_s} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\mu_1} \dots (x^2 + p_t x + q_t)^{\mu_t},$$

где $k_1, \dots, k_s$ — корни многочлена $Q(x)$, имеющие соответственно кратности $m_1, \dots, m_s$, а трехчлены соответствуют парам сопряженных комплексных корней $Q(x)$ кратностей $\mu_1, \dots, \mu_t$. Дроби вида

$$\frac{A}{x-k}, \quad \frac{A}{(x-k)^m}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\mu}$$

называют *элементарными рациональными дробями* соответственно первого, второго, третьего и четвертого типа. Тут A, B, C, k — действительные числа; m и μ — натуральные числа, $m, \mu > 1$; трехчлен с действительными коэффициентами $x^2 + px + q$ имеет мнимые корни.

Очевидно, что график дробно-рациональной функции можно получить как сумму графиков элементарных дробей.

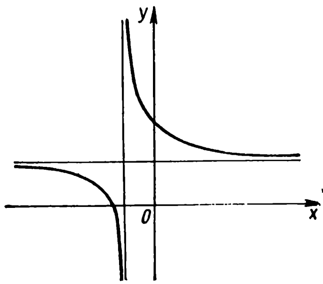


Рис. 226. $y = \frac{3x+4}{2(x+1)}$.

График функции $y = \frac{1}{(x-k)^m}$ $(m = 1, 2, \dots)$ получаем из графика функции $\frac{1}{x^m}$ $(m = 1, 2, \dots)$ с помощью параллельного переноса последнего вдоль оси абсцисс на $|k|$ единиц масштаба вправо.

График функции вида

$$y = \frac{1}{x^2+px+q}$$

легко построить, если в знаменателе выделить полный квадрат

$$y = \frac{1}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}},$$

а затем осуществить соответствующие преобразования графика функции $\frac{1}{x^2}$. Построение графика функции

$$y = \frac{Bx+C}{x^2+px+q}$$

сводится к построению произведения графиков двух функций:

$$y = Bx + C \text{ и } y = \frac{1}{x^2+px+q}.$$

Замечание. Построение графиков функций

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)},\ y=\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^n, \text{ где } ad-bc\neq 0,$$

$$y=\frac{1}{(ax^2+bx+c)^n},\ y=\left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right]^n,$$

где n — натуральное число, можно выполнять по общей схеме исследования функции и построения графика (см. § 2 разд. 2); в некоторых конкретных примерах с успехом можно осуществлять построение

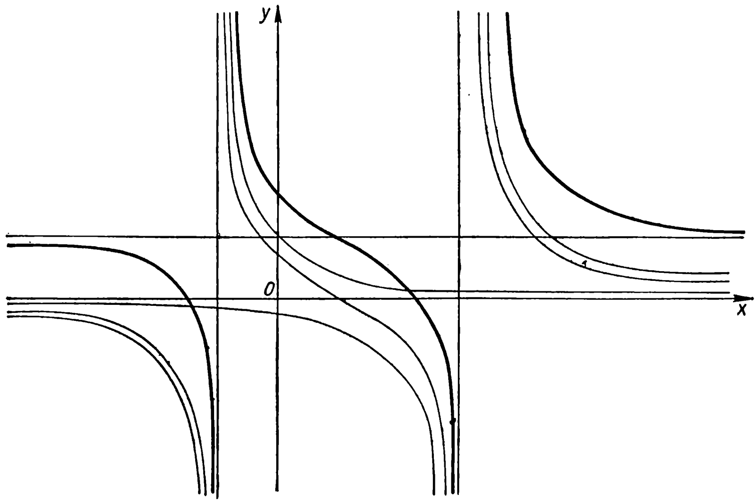


Рис. 227. Дробно-рациональная функция $y=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x-3}$.

графика, выполняя соответствующие преобразования графика (см. разд. 4); наилучший способ дают методы высшей математики (см. ч. II).

Пример 6. Построить график функции

$$y=\frac{x^2-4}{x^2-2x-3}.$$

Выделив целую часть, будем иметь

$$y=1+\frac{2x-1}{x^2-2x-3}.$$

Дробь $\dfrac{2x-1}{x^2-2x-3}$ изобразим в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{2x-1}{x^2-2x-3}=\frac{5}{4}\,\frac{1}{x-3}+\frac{3}{4}\,\frac{1}{x+1}.$$

Строим графики функций

$$y = 1, \ y = \frac{5}{4(x-3)}, \ y = \frac{3}{4(x+1)},$$

после сложения этих графиков получаем график заданной функции (рис. 227).

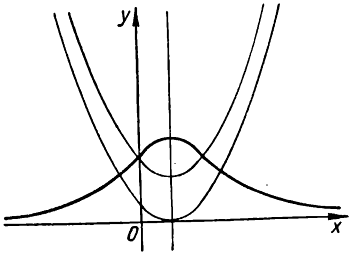


Рис. 228. $y = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$.

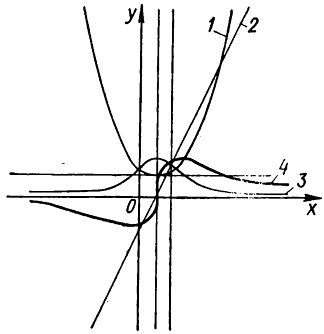


Рис. 229. $y = x^2 - x + 1$ *(1)*; $y = 2x - 1$ *(2)*; $y = \dfrac{1}{x^2 - x + 1}$ *(3)*; $y = \dfrac{2x-1}{x^2 - x + 1}$ *(4)*.

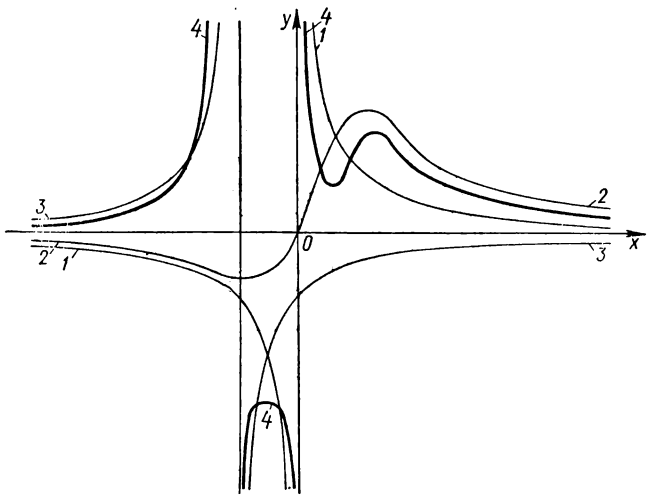


Рис. 230. $y = \dfrac{1}{x}$ *(1)*; $y = \dfrac{2x}{x^2 - x + 1}$ *(2)*; $y = -\dfrac{2}{x+1}$ *(3)*; $y = \dfrac{x^3 + 4x^2 - 2x + 1}{x(x+1)(x^2 - x + 1)}$ *(4)*.

Примеры построения графиков дробно-рациональных функций приведены на рис. 228—238.

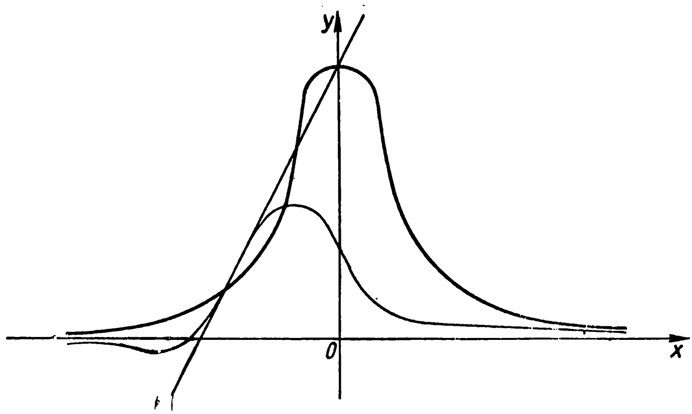


Рис. 231. $y = \frac{2x+3}{1+x+x^2}$.

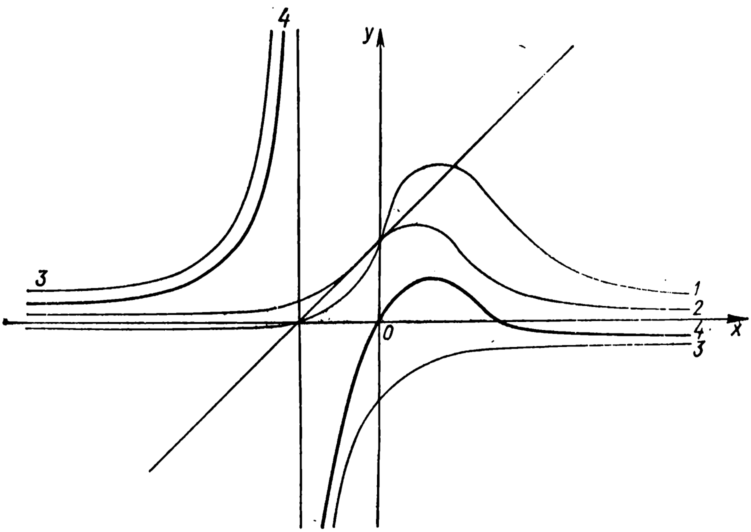


Рис. 232. $y = \frac{1}{x^2-x+1}$ *(1)*; $y = \frac{x+1}{1-x+x^2}$ *(2)*; $y = -\frac{1}{x+1}$ *(3)*; $y = \frac{3x}{1+x^3}$ *(4)*.

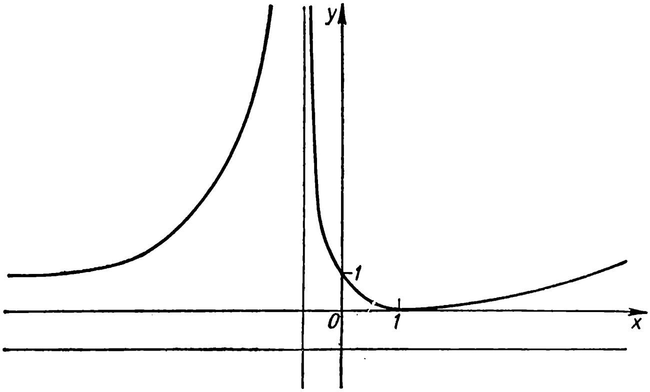


Рис. 233. $y = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{2}{3}}$.

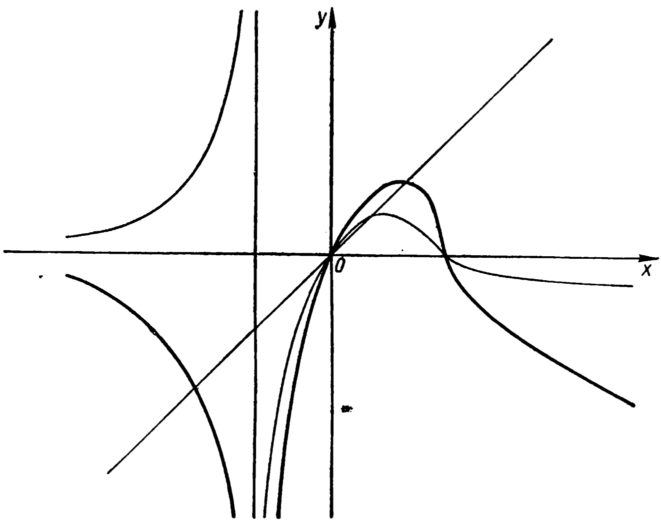
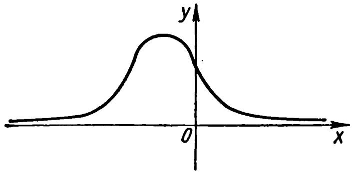


Рис. 234. $y = \frac{3x^2}{1+x^3}$.



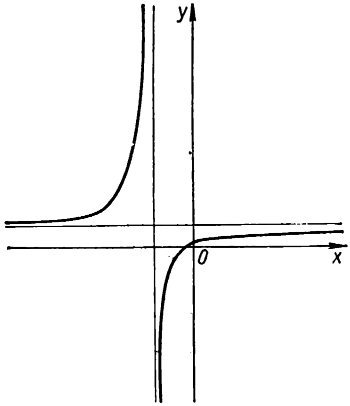
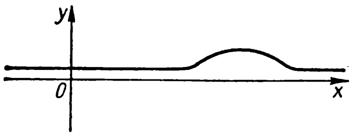


Рис. 235. $y = \frac{1}{(1 + x + x^2)^2}$.

Рис. 236. $y = \left(\frac{2x + 1}{3x + 4}\right)^3$.



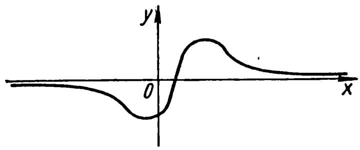


Рис. 237. $y = \frac{1}{(x^2 - 4x + 7)^2}$.

Рис. 238. $y = \left(\frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}\right)^3$.

Графики иррациональных функций

Рассмотрим некоторые простейшие случаи.

Функция вида $y = \pm\sqrt{ax + b}$. График функции $y = \pm\sqrt{ax+b}$ легко получить из графика функции $y = \sqrt{x}$ с помощью соответствующих преобразований (см. разд. 4).

График функции $y = \pm\sqrt{ax + b}$ — парабола, ее ось — ось абсцисс, вершина: $A\left(-\frac{b}{a};\ 0\right)$, параметр: $p = \frac{a}{2}$ (рис. 239).

Функция вида $y = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}$. Исследование и построение графика функции проводим по схеме § 2 разд. 2.

Вид графика функции $y = \pm\sqrt{ax^2 + bx + c}$ (рис. 240) зависит от знаков a и $\delta = 4ac - b^2$. Если $a < 0$, $\delta < 0$, то график — эллипс, если $a > 0$, $\delta \gtrless 0$, то график — гипербола; оси: $y = 0$, $x = -\frac{b}{2a}$; вершины:

$$A\left(-\frac{b + \sqrt{-\delta}}{2a};\ 0\right),\ C\left(-\frac{b - \sqrt{-\delta}}{2a};\ 0\right),$$

$$B\left(-\frac{b}{2a};\ \sqrt{\frac{\delta}{4a}}\right),\ D\left(-\frac{b}{2a};\ -\sqrt{\frac{\delta}{4a}}\right).$$

При $a < 0$ и $\delta > 0$ кривая не существует в области действительных значений x.

Замечание. Графики функций

$$y = (ax^2 + bx + c)^{p/q}, \ y = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{p/q}; \ y = \left[\frac{P(x)}{Q(x)}\right]^{p/q},$$

где p и q — взаимно простые числа, проще строить с помощью методов высшей математики (см. ч. II).

Пример 7. Построить график функции

$$y = \sqrt{x-2} - 1.$$

Строим график функции $y = \sqrt{x}$, затем параллельно переносим график вдоль оси абсцисс на две единицы масштаба вправо и опускаем на одну единицу масштаба (рис. 241).

Пример 8. Построить график функции

$$y = \sqrt{-x^2 + x + 2}.$$

Построим сначала график квадратного трехлена

$$y = -x^2 + x + 2 = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}.$$

Очевидно, что функция $y = \sqrt{-x^2 + x + 2}$ определена на отрезке $[-1; 2]$, причем на $\left[-1; \frac{1}{2}\right]$ она возрастает от 0 до $\frac{3}{2}$, а на $\left[\frac{1}{2}; 2\right[$ убывает от $\frac{3}{2}$ до 0 (рис. 242).

Примеры построения графиков иррациональных функций приведены на рис. 243—247.

Графики трансцендентных функций

Графики простейших трансцендентных функций (показательных, логарифмических, тригонометрических, обратных тригонометрических) рассмотрены в разд. 3 (§ 2—5), более сложных — в этом разделе (§ 1).

Исследование и построение графиков более сложных трансцендентных функций можно производить по схеме § 2 разд. 2, а еще лучше — с помощью методов высшей математики (см. ч. II).

Здесь представлены примеры графиков еще некоторых трансцендентных функций.

$y = \sin^n x$, $y = \cos^n x$, $y = \mathrm{tg}^n x$, $y = \mathrm{ctg}^n x$, где n — целое положительное число (см. рис. 105, 106, рис. 248—250).

$y = \sin^{\pm p/q} x$, $y = \cos^{\pm p/q} x$, $y = \mathrm{tg}^{\pm p/q} x$, $y = \mathrm{ctg}^{\pm p/q} x$, где p и q — взаимно простые числа (рис. 251—263).

Гиперболические функции. Гиперболический синус ($\mathrm{sh}\, x$) определяется формулой

$$y = \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

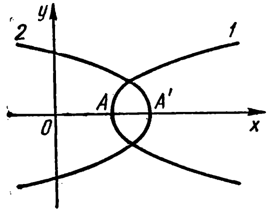


Рис. 239. Иррациональная функция вида $y = \pm\sqrt{ax+b}$: $a > 0$ (*1*); $a < 0$ (*2*).

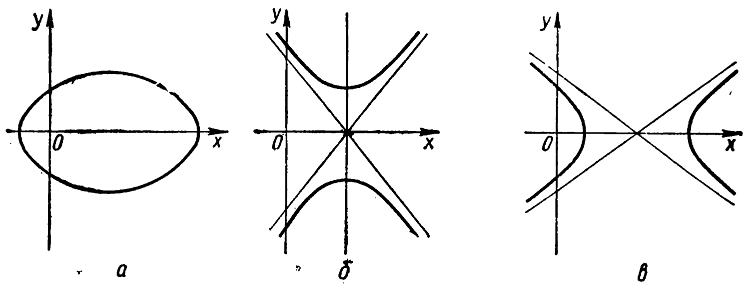


Рис. 240. $y = \pm\sqrt{ax^2+bx+c}$: $a < 0$, $\delta < 0$ (*а*); $a > 0$, $\delta > 0$ (*б*); $a > 0$, $\delta < 0$ (*в*).

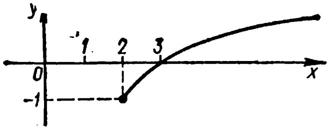


Рис. 241. $y = \sqrt{x-2} - 1$.

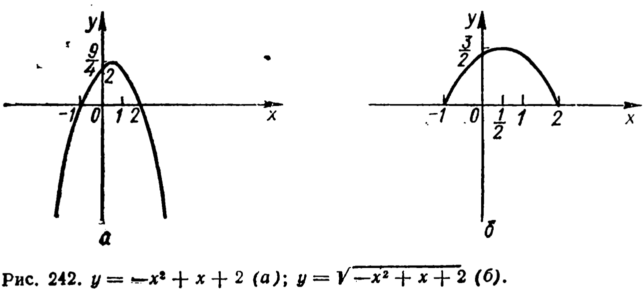


Рис. 242. $y = -x^2 + x + 2$ (*а*); $y = \sqrt{-x^2+x+2}$ (*б*).

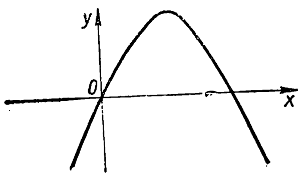


Рис. 243. $y = \sqrt[3]{8x - 2x^2}$.

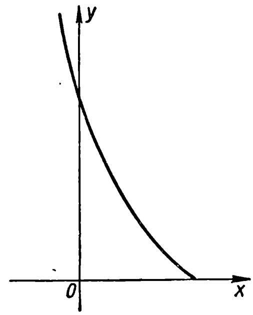


Рис. 244. $y = \sqrt{(2 - x)^3}$.

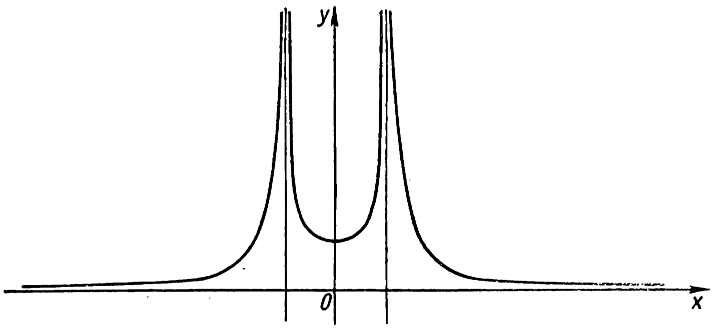


Рис. 245. $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(1 - x^2)^2}}$.

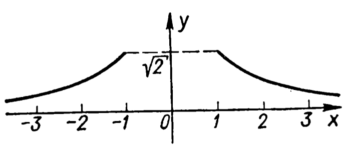


Рис. 246. $y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}$.

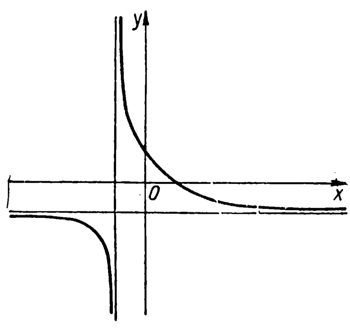


Рис. 247. $y = \sqrt[3]{\dfrac{1 - x}{1 + x}}$.

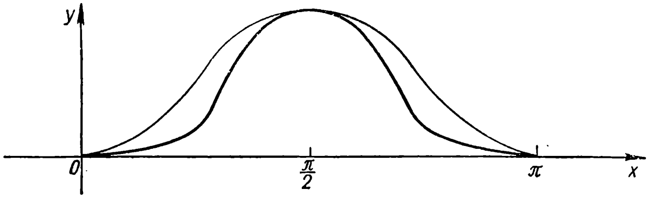


Рис. 248. $y = \sin^4 x$.

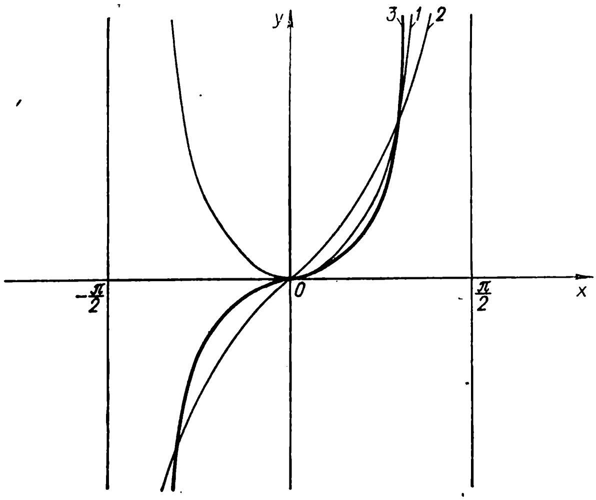


Рис. 249. $y = \mathrm{tg}^2\, x$ (1); $y = \mathrm{tg}\, x$ (2); $y = \mathrm{tg}^3\, x$ (3).

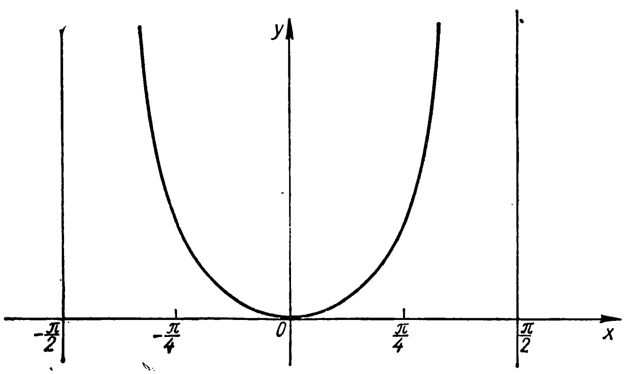


Рис. 250. $y = \mathrm{tg}^4\, x$.

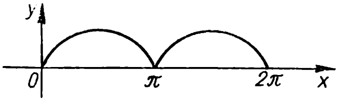


Рис. 251. $y = \sin^{4/3} x$.

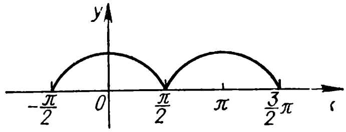


Рис. 252. $y = \cos^{2/3} x$.

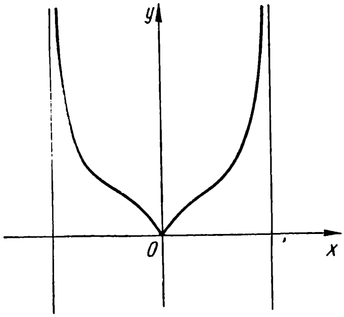


Рис. 253. $y = \mathrm{tg}^{2/3} x$.

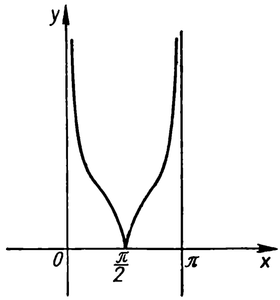


Рис. 254. $y = \mathrm{ctg}^{4/3} x$.

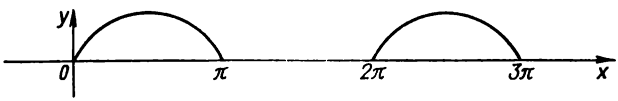


Рис. 255. $y = \sin^{3/4} x$.

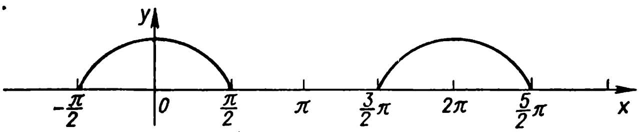


Рис. 256. $y = \cos^{1/2} x$.

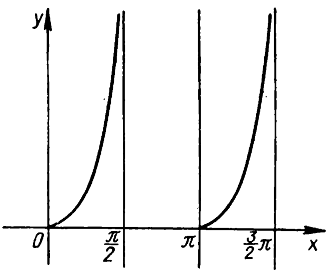


Рис. 257. $y = \mathrm{tg}^{7/6} x$.

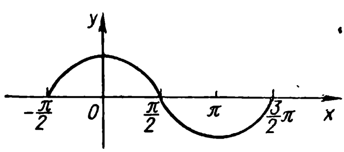


Рис. 258. $y = \cos^{3/5} x$.

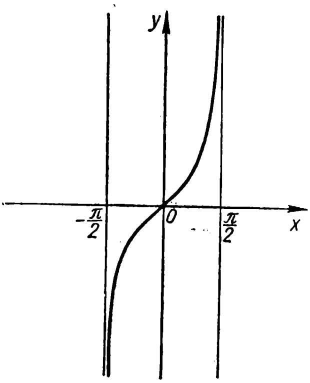


Рис. 259. $y = \operatorname{tg}^{1/3} x$.

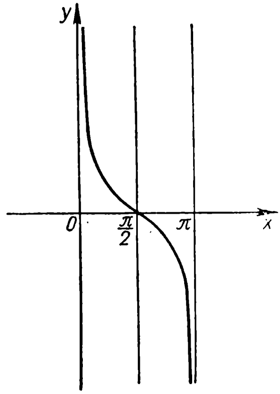


Рис. 260. $y = \operatorname{ctg}^{7/5} x$.

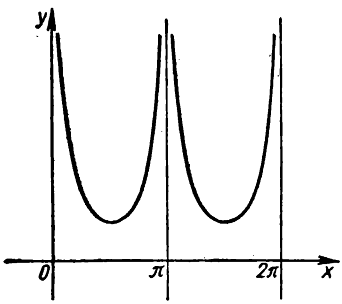


Рис. 261. $y = \sin^{-2/3} x$.

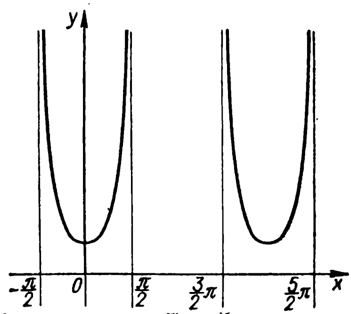


Рис. 262. $y = \cos^{-1/2} x$.

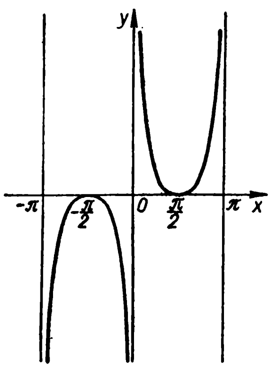


Рис. 263. $y = \operatorname{tg}^{-1/3} x$.

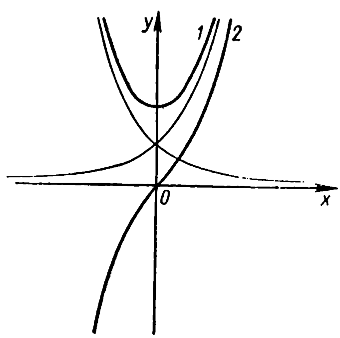


Рис. 264. Гиперболический косинус $y = \operatorname{ch} x$ *(1)*; гиперболический синус $y = \operatorname{sh} x$ *(2)*.

Область определения: $]-\infty;\ \infty[$. Область значений: $]-\infty;\ \infty[$. Функция нечетная. Точка (0; 0) — центр симметрии и одновременно точка перегиба графика функции. Асимптот нет.

График функции $y = \operatorname{sh} x$ строится по графикам функций $y = e^x$ и $y = e^{-x}$ (рис. 264).

Гиперболический косинус ($\operatorname{ch} x$) определяется формулой

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Область определения: $]-\infty;\ \infty[$. Область значений: $[1,\ \infty[$. Функция четная. Минимум в точке (0; 1). Асимптот нет.

График функции $y = \operatorname{ch} x$ представлен на рис. 264.

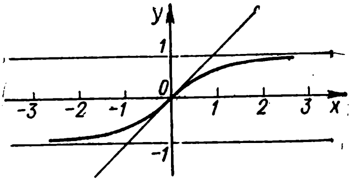


Рис. 265. Гиперболический тангенс $y = \operatorname{th} x$.

Гиперболический тангенс ($\operatorname{th} x$) определяется формулой

$$y = \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Область определения: $]-\infty;\ \infty[$. Область значений: $]-1;\ 1[$. Функция нечетная. Точка (0; 0) — центр симметрии и одновременно точка перегиба графика функции. Горизонтальные асимптоты: $y = \pm 1$.

График функции $y = \operatorname{th} x$ представлен на рис. 265.

Гиперболический котангенс ($\operatorname{cth} x$) определяется формулой

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

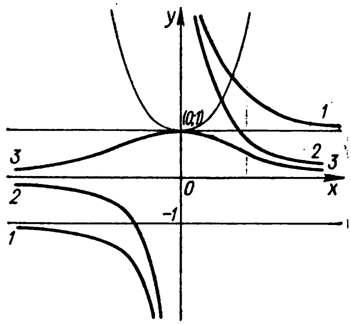


Рис. 266. Гиперболический котангенс $y = \operatorname{cth} x$ *(1)*; гиперболический косеканс $y = \operatorname{csch} x$ *(2)*; гиперболический секанс $y = \operatorname{sch} x$ *(3)*.

Область определения: $]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]0;\ \infty[$. Область значений: $]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]1;\ \infty[$. Функция нечетная. Горизонтальные асимптоты: $y = \pm 1$. Вертикальная асимптота: $x = 0$.

График функции представлен на рис. 266.

Гиперболический секанс ($\operatorname{sch} x$)

$$\operatorname{sch} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}.$$

График функции приведен на рис. 266.

Гиперболический косеканс ($\operatorname{csch} x$)

$$\operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}.$$

График функции приведен на рис. 266.

Обратные гиперболические функции (ареа-функции) — это функции вида

$$\begin{aligned} &y = \operatorname{Arsh} x \text{ (ареа-синус)}, && \text{если } x = \operatorname{sh} y, \\ &y = \operatorname{Arch} x \text{ (ареа-косинус)}, && \text{если } x = \operatorname{ch} y, \\ &y = \operatorname{Arth} x \text{ (ареа-тангенс)}, && \text{если } x = \operatorname{th} y, \\ &y = \operatorname{Arcth} x \text{ (ареа-котангенс)}, && \text{если } x = \operatorname{cth} y. \end{aligned}$$

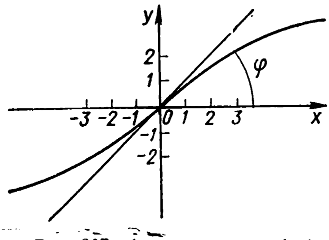


Рис. 267. Ареа-синус $y = \operatorname{Arsh} x$.

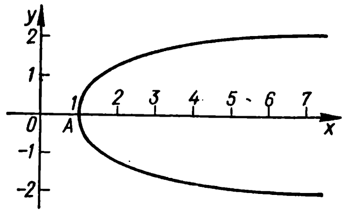


Рис. 268. Ареа-косинус $y = \operatorname{Arch} x$.

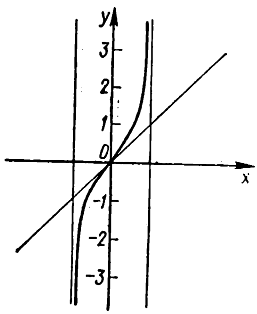


Рис. 269. Ареа-тангенс $y = \operatorname{Arth} x$.

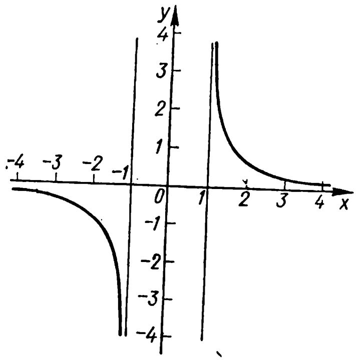


Рис. 270. Ареа-котангенс $y = \operatorname{Arcth} x$

Эти функции можно выразить и через логарифм:

$$\operatorname{Arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right),$$

$$\operatorname{Arch} x = \pm \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geqslant 1,$$

$$\operatorname{Arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

$$\operatorname{Arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1.$$

Графики обратных гиперболических функций можно получить из соответствующих графиков гиперболических функций с помощью симметричного отображения последних относительно биссектрисы $\angle\, xOy$.

А р е а-с и н у с $y = \mathrm{Arsh}\, x$. Область определения: $]-\infty;\ \infty[$. Область значений функции: $]-\infty;\ \infty[$. Функция нечетная. Точка $(0;\ 0)$ — центр симметрии (и одновременно точка перегиба) графика функции. Асимптот график не имеет.

График ареа-синуса представлен на рис. 267.

А р е а-к о с и н у с $y = \mathrm{Arch}\, x$. Область определения: $[1;\ \infty[$. Область значений функции: $]-\infty;\ \infty[$. Кривая симметрична относительно оси абсцисс. В точке $A(1;\ 0)$ кривая касается вертикальной прямой $x = 1$, далее значения функции по абсолютной величине возрастают.

График ареа-косинуса представлен на рис. 268.

А р е а-т а н г е н с $y = \mathrm{Arth}\, x$. Область определения: $]-1;\ 1[$. Область значений функции: $]-\infty;\ \infty[$. Функция нечетная. Точка $(0;\ 0)$ — центр симметрии (и одновременно точка перегиба) графика функции. Вертикальные асимптоты: $x = \pm 1$.

График функции представлен на рис. 269.

А р е а-к о т а н г е н с $y = \mathrm{Arcth}\, x$. Область определения: $]-\infty;\ -1[\cup]1;\ \infty[$. Область значений функции: $]-\infty;\ \infty[$. Функция нечетная. При $x \in]-\infty,\ -1[$ функция монотонно убывает от 0 до $-\infty$, при $x \in]1;\ \infty[$ — убывает от ∞ до 0. Точек перегиба нет. Вертикальные асимптоты: $x = \pm 1$. Горизонтальная асимптота: $y = 0$.

График ареа-котангенса представлен на рис. 270.

РАЗДЕЛ 6

ГРАФИКИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Исследование параметрически заданных функций

Пусть функция задана параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \tag{*}$$

где t — параметр, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$.

В этом случае исследование и построение графика функции проводятся так, как для функции, заданной уравнением

$$y = f(x).$$

Сначала строят графики функций $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ соответственно в системах координат tOx и tOy. Учитывая графическое изображение функций $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$, исследуют функцию $y = y(x)$ по схеме § 2 разд. 2. Отметим некоторые особенности графика функции (*): он симметричен относительно оси ординат, если при замене переменной t на $-t$ не меняется значение y, а x переходит в $-x$; график функции симметричен относительно оси абсцисс, если при замене переменной t на $-t$ не меняется значение x, а y переходит в $-y$; период функции определяется по периодам функций $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$; для нахождения точек пересечения графика функции (*) с осью ординат надо найти те значения t, при которых $x = 0$ (решаем уравнение $\varphi(t) = 0$), и соответствующее значение $y = \psi(t)$; для нахождения точек пересечения графика функции (*) с осью абсцисс надо найти те значения t, при которых $y = 0$ (решаем уравнение

$\psi(t)=0$), и соответствующее значение $x=\varphi(t)$; иногда целесообразно определять точки пересечения графика с биссектрисами координатных углов $y=x$ и $y=-x$, для чего решают соответственно уравнения

$$\psi(t)=\varphi(t) \text{ и } \psi(t)=-\varphi(t),$$

значения функций $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ при найденных t и дадут координаты искомых точек.

§ 2. Примеры построения графиков параметрически заданных функций

Пример 1. Построить график функции

$$x=t^2,$$
$$y=t^3.$$

Покажем на этом примере, как иногда (в простейших случаях) можно строить графики параметрически заданных функций по точкам. Составим таблицу значений:

t	0	1	2	3	-1	-2	-3
x	0	1	4	9	1	4	9
y	0	1	8	27	-1	-8	-27

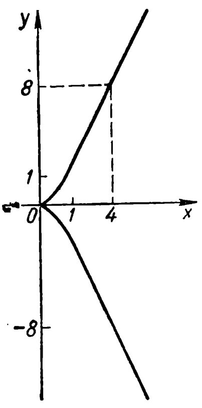


Рис. 271. Параметрически заданная функция $x=t^2$, $y=t^3$.

Построив найденные точки $(x;\ y)$, получим искомую кривую (рис. 271).

Пример 2. Построить график функции

$$x=1-t,$$
$$y=1-t^2.$$

Исследование и построение графика параметрически заданной функции сводим к исследованию и построению графика функции, заданной в явном виде $y=y(x)$.

В системе координат tOx строим график функции $x=1-t$ (рис. 272, *а*), а в системе координат tOy — график функции $y=1-t^2$ (рис. 272, *б*). Теперь проводим исследование функции $y=y(x)$. Область определения (см. рис. 272, *а*): $]-\infty;\ \infty[$. Область значений (см. рис. 272, *б*): $]-\infty;\ 1[$. Поскольку $y(-t)=y(t)$, то $t=0$, т. е. $x=1$, — ось симметрии. Предельные значения функции: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-\infty$.

Точки пересечения с осями координат:

а) с осью ординат. Решаем уравнение $x=0$, т. е. $1-t=0$, откуда $t=1$. Вычисляем значение функции $y=1-t^2$ при $t=1$, получаем $y=0$. Следовательно, график функции $y=y(x)$ пересекает ось ординат в точке $O(0;\ 0)$;

б) с осью абсцисс. Решаем уравнение $y=0$, т. е. $1-t^2=0$, получаем $t=\pm1$, соответственно $x_1=0$, $x_2=2$. Точки пересечения графика функции $y=y(x)$ с осью абсцисс: $O(0;\ 0)$, $C(2;\ 0)$.

Точки пересечения с биссектрисами координатных углов:

а) с биссектрисой $y = x$. Решаем уравнение $1 - t^2 = 1 - t$, откуда $t_1 = 0$, $t_2 = 1$. Следовательно, график функции $y = y(x)$ пересекает биссектрису $y = x$ в точках $D(1;\ 1)$ и $O(0;\ 0)$;

б) с биссектрисой $y = -x$. Решаем уравнение $1 - t^2 = -(1 - t)$, или $t^2 + t - 2 = 0$, откуда $t_1 = -2$, $t_2 = 1$. Следовательно, с биссектрисой $y = -x$ график функции $y = y(x)$ пересекается в точках $O(0;\ 0)$ и $E(3;\ -3)$.

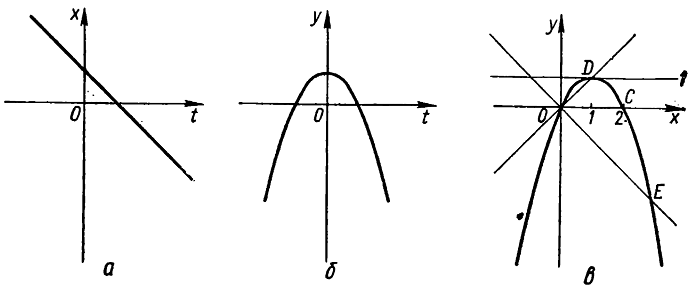


Рис. 272. $x = 1 - t$ (а); $y = 1 - t^2$ (б); $x = 1 - t$, $y = 1 - t^2$ (в).

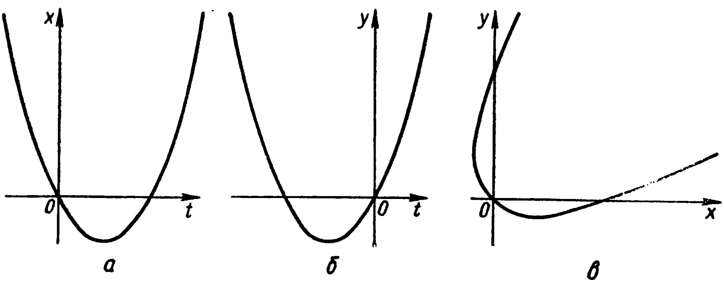


Рис. 273. $x = t^2 - 2t$ (а); $y = t^2 + 2t$ (б); $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$ (в).

График асимптот не имеет.

Теперь выполняем построение графика функции $y = y(x)$: проводим прямую $y = 1$ (график функции $y = y(x)$ располагается ниже этой прямой), далее обозначим точки пересечения графика функции $y = y(x)$ с осями координат и биссектрисами координатных углов: O, C, D, E.

График функции $x = 1 - t$, $y = 1 - t^2$ представлен на рис. 272, в.

Пример 3. Построить график функции

$$x = t^2 - 2t,$$
$$y = t^2 + 2t.$$

В системе координат tOx и tOy строим соответственно графики функций $x = t^2 - 2t$ (рис. 273, а), $y = t^2 + 2t$ (рис. 273, б).

Учитывая графическое изображение функций $x = t^2 - 2t$ и $y = t^2 + 2t$, исследуем функцию $y = y(x)$. Область определения (см. рис. 273, *а*): $]-1;\ \infty[$. Область значений (см. рис. 273, *б*): $]-1;\ \infty[$. Следовательно, график функции $y = y(x)$ расположен выше прямой $y = -1$ и справа от прямой $x = -1$. Предельное значение функции: $\lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$.

Точки пересечения с осями координат:

а) с осью ординат. Решаем уравнение $x \equiv t^2 - 2t = 0$, откуда $t_1 = 0$, $t_2 = 2$. Вычислив соответствующие значения y, получим точки пересечения графика с осью Oy: (0; 0) и (0; 8);

б) с осью абсцисс. Решаем уравнение $y \equiv t^2 + 2t = 0$, откуда $t_1 = 0$, $t_2 = -2$. Вычислив соответствующие значения y, получим точки пересечения графика с осью Ox: (0; 0) и (8; 0).

Точки пересечения с биссектрисами координатных углов:

а) с биссектрисой $y = x$. Решаем уравнение $t^2 + 2t = t^2 - 2t$, откуда $t = 0$. Вычислив значения x и y при $t = 0$, получим точку пересечения графика с биссектрисой $y = x$: (0; 0);

б) с биссектрисой $y = -x$ график пересекается также в точке (0; 0).

Проводим прямые $x = -1$, $y = -1$, $y = x$, $y = -x$. Обозначаем точки (0; 0), (0; 8), (8; 0).

График функции $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$ представлен на рис. 273, *в*.

Пример 4. Построить график функции

$$x = \frac{t^2}{t-1},$$

$$y = \frac{t}{t^2 - 1}.$$

Строим графики функций $x = \dfrac{t^2}{t-1}$ и $y = \dfrac{t}{t^2-1}$ (рис. 274, *а*, *б*).

Исследуем функцию $y = y(x)$. Область определения: $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2};\ 0\right] \cup [4;\ \infty[$. Область значений: $]-\infty;\ \infty[$.

График проходит через точку (0; 0).

Точки пересечения с биссектрисами: с $y = x$ — (0; 0) и (—1; —1); с $y = -x$ — (0; 0).

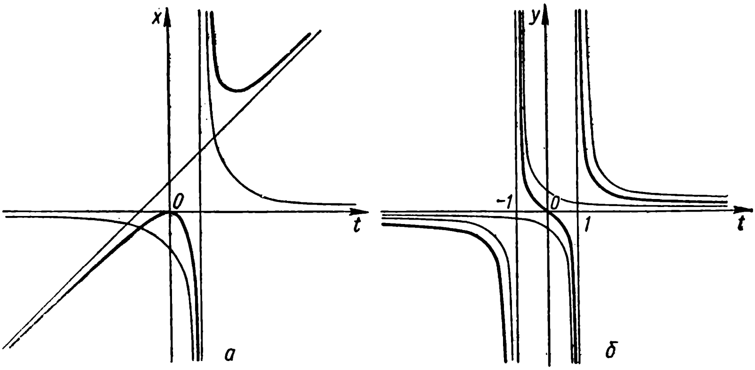
Вертикальная асимптота: $x = -\frac{1}{2}$ $\left(\text{при } t = -1\ x = -\frac{1}{2},\ y = \infty\right)$. Горизонтальная асимптота: $y = 0$. Наклонная асимптота: $y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$.

Действительно,

$$k = \lim_{\substack{x \to \pm\infty \\ (t \to 1)}} \frac{y}{x} = \lim_{t \to 1} \frac{\dfrac{t}{t^2 - 1}}{\dfrac{t^2}{t-1}} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (y - kx) = \lim_{t \to 1} \left[\frac{1}{t^2 - 1} - \frac{1}{2} \frac{t^2}{t - 1} \right] =$$

$$= \lim_{t \to 1} \frac{(1 - t)\,[t\,(1 + t) + t]}{-2\,(1 - t)\,(1 + t)} = -\frac{3}{4}.$$



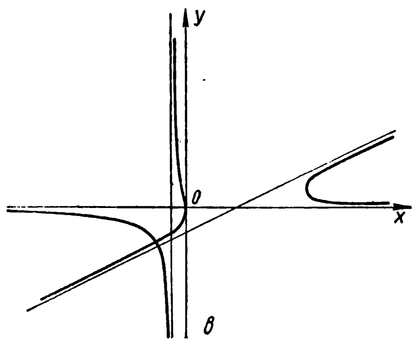


Рис. 274. $x = \frac{t^2}{t - 1}$ (*а*); $y = \frac{t}{t^2 - 1}$ (*б*); $x = \frac{t^2}{t - 1}$, $y = \frac{t}{t^2 - 1}$ (*в*).

График функции $x = \frac{t^2}{t - 1}$, $y = \frac{t}{t^2 - 1}$ представлен на рис. 274, *в*.

Пример 5. Построить график функции

$$x = te^t,$$
$$y = te^{-t}.$$

Строим графики функций $x = te^t$, $y = te^{-t}$.

Исследуем функцию $y = y(x)$. Область определения: $]-e^{-1};\ \infty[$. Область значений функции: $]-\infty;\ e^{-1}[$. Предельное значение функции: $\lim_{x \to \infty} y = 0$.

График проходит через точку (0; 0). График функции симметричен относительно прямой $x + y = 0$.

График представлен на рис. 275.

Пример 6. Построить кардиоиду

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t,$$
$$y = 2a\sin t - a\sin 2t.$$

Строим графики функций $x = 2a\cos t - a\cos 2t$ и $y = 2a\sin t - a\sin 2t$.

Исследуем функцию $y = y(x)$. Область определения функции: $[-3a;\ a]$. Область значений функции: $[-2a;\ 2a]$. График функции симметричен относительно оси абсцисс. Поскольку функции $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$ периодические с периодом 2π, то и функция $y = y(x)$ периодическая с периодом 2π. Предельные значения функции $y = y(x)$ на концах отрезка $[0;\ 2\pi]$ равны нулю.

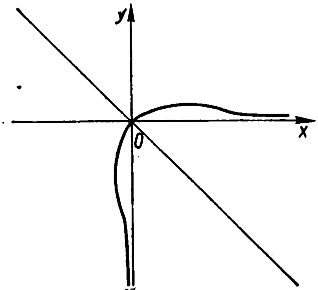


Рис. 275. $x = te^t$, $y = te^{-t}$.

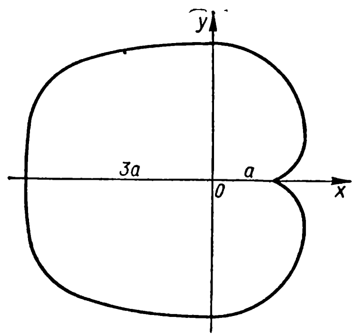


Рис. 276. $x = 2a\cos t - a\cos 2t$, $y = 2a\sin t - a\sin 2t$ (кардиоида).

График представлен на рис. 276.

Пример 7. Построить циклоиду

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t).$$

Строим графики функций $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

Исследуем функцию $y = y(x)$. Область определения: $]-\infty;\ \infty[$. Область значений: $[0;\ 2a]$. Функция периодическая с периодом 2π. График функции симметричен относительно оси ординат.

Точки пересечения с осями координат: с осью абсцисс: $(0;\ 0)$, $(0;\ 2\pi a)$, $(0;\ 4\pi a)$, ... ; с осью ординат: $(0;\ 0)$.

График циклоиды представлен на рис. 277.

Пример 8. Построить астроиду

$$x = a\cos^3 t,$$
$$y = a\sin^3 t.$$

Строим графики функций $x = a\cos^3 t$ (см. рис. 105) и $y = a\sin^3 t$ (см. рис. 106).

Исследуем функцию $y = y(x)$. Область определения функции: $[-a;\ a]$. Область значений функции: $[-a;\ a]$. График функции симметричен относительно координатных осей. Функция периодическая с периодом 2π.

Точки пересечения с осями координат:

с осью абсцисс: $(a;\ 0)$, $(-a;\ 0)$;

с осью ординат: $(0;\ a)$, $(0;\ -a)$.

График астроиды представлен на рис. 278.

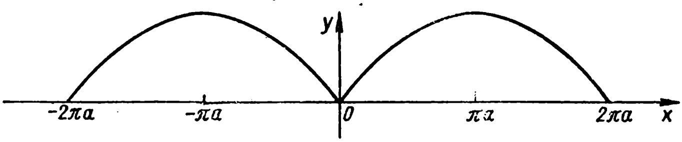


Рис. 277. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ (циклоида).

Пример 9. Построить график функции

$$x = t^3 - 3\pi,$$
$$y = t^3 - 6\,\mathrm{arctg}\, t.$$

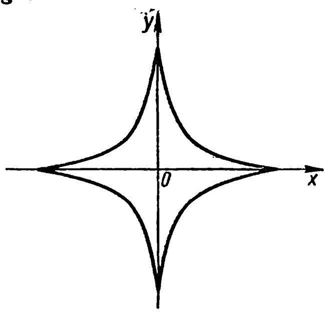


Рис. 278. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (астроида).

Строим графики функций $x = t^3 - 3\pi$ (см. рис. 26) и $y = t^3 - 6\,\mathrm{arctg}\, t$ (рис. 279).

Исследуем функцию $y = y(x)$. Область определения функции: $]-\infty;\ \infty[$. Область значений функции: $]-\infty;\ \infty[$.

Точки пересечения графика функции с осями координат:

с осью абсцисс: точки A, B и C;

с осью ординат: $(0;\ 3\pi - 6\,\mathrm{arctg}\sqrt[3]{3\pi})$.

График функции вертикальных асимптот не имеет, поскольку не существует таких значений t, при которых $x = 0$, $y = \infty$. График функции имеет наклонные асимптоты. Действительно,

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t^3 - 6\,\mathrm{arctg}\, t}{t^3 - 3\pi} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}(y - kx) = \lim_{x\to-\infty}(t^3 - 6\,\mathrm{arctg}\, t - t^3 + 3\pi) = 6\pi.$$

Следовательно, прямая $y = x + 6\pi$ — асимптота. Если $x \to +\infty$ $(t \to +\infty)$, то $k = 1$ и $b = 0$ и вторая асимптота: $y = x$.

График функции $x = t^3 - 3\pi$, $y = t^3 - 6\,\mathrm{arctg}\, t$ представлен на рис. 280.

Пример 10. Построить график функции

$$x = a(\mathrm{sh}\, t - t), \quad y = a(\mathrm{ch}\, t - 1).$$

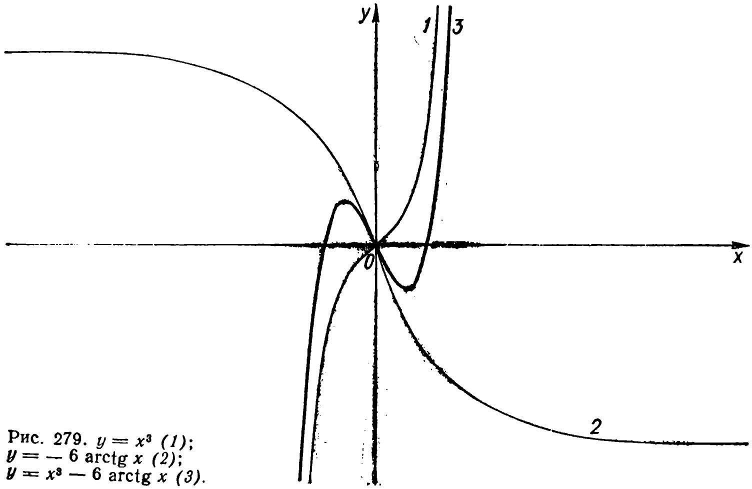


Рис. 279. $y = x^3$ *(1)*;
$y = -6 \operatorname{arctg} x$ *(2)*;
$y = x^3 - 6 \operatorname{arctg} x$ *(3)*.

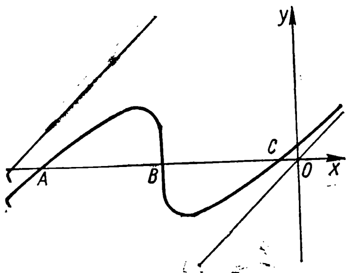


Рис. 280. $x = t^3 - 3\pi$, $y = t^3 - 6 \operatorname{arctg} t$.

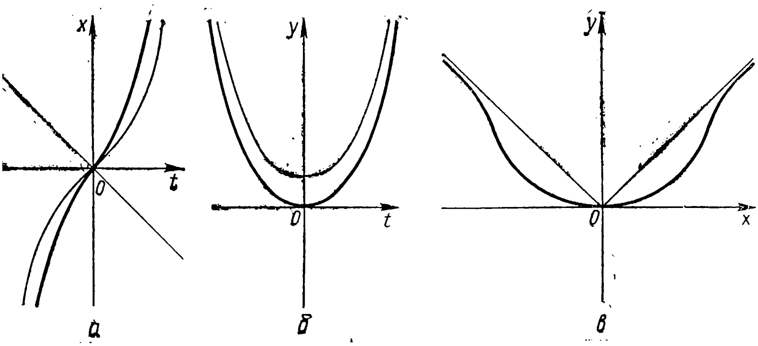


Рис. 281. $y = a(\operatorname{sh} t - t)$ *(а)*; $x = a(\operatorname{ch} t - 1)$ *(б)*; $x = a(\operatorname{sh} t - t)$, $y = a(\operatorname{ch} t - 1)$ *(в)*, $a > 0$.

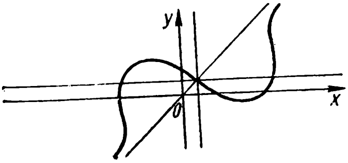


Рис. 282. $x = t^3 + 3t + 1$, $y = t^3 - 3t + 1$.

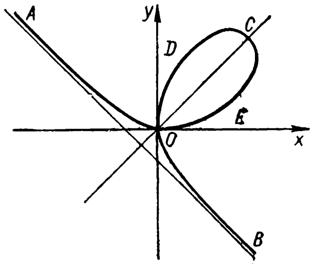


Рис. 283. $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$ (декартов лист).

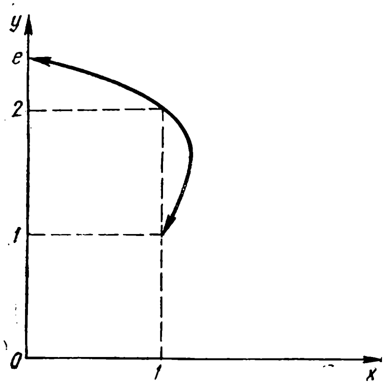


Рис. 284. $x = t^{1+t}$, $y = (t+1)^t$, $t > 0$.

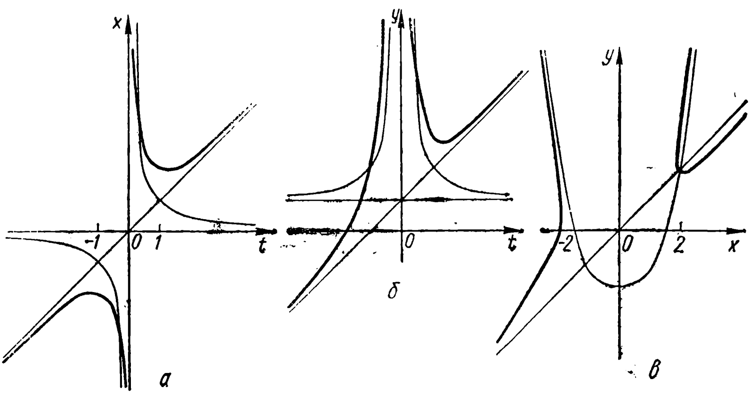


Рис. 285. $x = \frac{t^2+1}{t}$ (*а*); $y = \frac{t^3+1}{t^2}$ (*б*); $x = t + \frac{1}{t}$, $y = t + \frac{1}{t^2}$ (*в*).

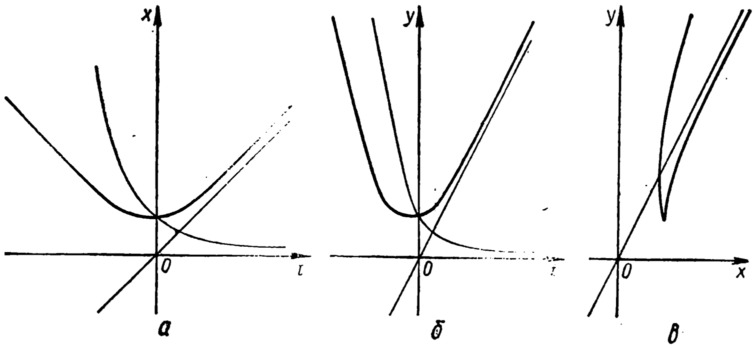


Рис. 286. $x = t + e^{-t}$ (а); $y = 2t + e^{-2t}$ (б); $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$ (в).

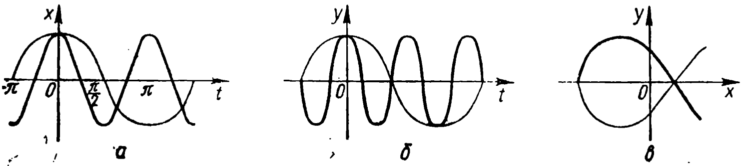


Рис. 287. $x = a \cos 2t$ (а); $y = a \cos 3t$ (б); $x = a \cos 2t$, $y = a \cos 3t$, $a > 0$ (в).

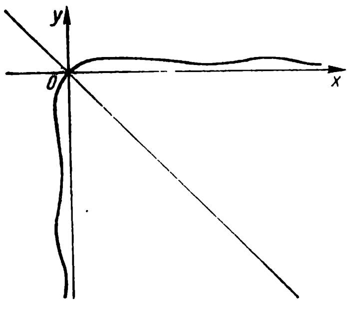


Рис. 288. $x = t \ln t$, $y = \frac{\ln t}{t}$.

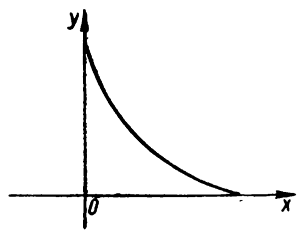


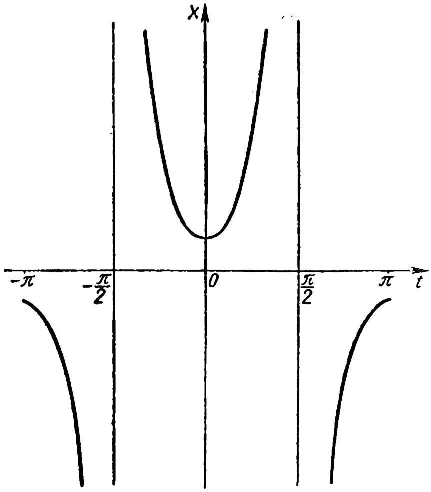
Рис. 289. $x = \cos^4 t$, $y = \sin^4 t$.

Строим графики функций $x = a(\operatorname{sh} t - t)$ (рис. 281, *а*) и $y = a(\operatorname{ch} t - 1)$ (рис. 281, *б*).

Исследуем функцию $y = y(x)$. Область определения: $]-\infty; \infty[$. Область значений: $[0; \infty[$. График функции симметричен относительно оси ординат. График функции проходит через точку $(0; 0)$.

График функции $x = a(\operatorname{sh} t - t)$, $y = a(\operatorname{ch} t - 1)$ представлен на рис. 281, *в*.

Примеры графиков параметрически заданных функций приведены на рис. 282—290.



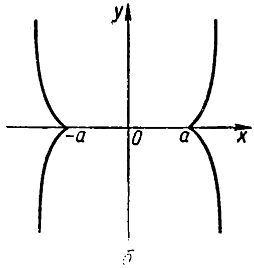


Рис. 290. $x = \frac{a}{\cos^3 t}$ (*а*); $x = \frac{a}{\cos^3 t}$, $y = a\,\mathrm{tg}^3\, t$ (*б*).

РАЗДЕЛ 7

ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

§ 1. Исследование функций в полярной системе координат

Общий вид функции, заданной уравнением в полярных координатах, такой:

$$\rho = f(\varphi),$$

а в неявном виде:

$$F(\rho,\ \varphi) = 0.$$

Функцию $\rho = f(\varphi)$ можно исследовать в полярной системе координат путем сравнения ее с функцией в декартовой системе координат $y = f(x)$, которую получаем из первой, меняя в ней ρ на y, а φ на x. Тогда естественно, что исследование функции $\rho = f(\varphi)$ можно выполнять по схеме исследования функции $y = f(x)$ (см. § 2 разд. 2).

Отметим некоторые особенности графика функции $\rho = f(\varphi)$ (сравнивая его с графиком соответствующей функции $y = f(x)$). Область определения $a \leqslant x \leqslant b$ функции $y = f(x)$ соответствует области определения $a \leqslant \varphi \leqslant b$ функции $\rho = f(\varphi)$. Особым точкам x_1, x_2, ... функции $y = f(x)$ соответствуют особые точки $\varphi_1 = x_1$, $\varphi_2 = x_2$, ... функции $\rho = f(\varphi)$.

Симметрия. а) Пусть $y = f(x)$ — четная функция. Вследствие равенства

$$f(x) = f(-x)$$

имеем, что точкам $A(x;\ y)$ и $B(-x;\ y)$ кривой $y = f(x)$ соответствуют точки $A_1(\rho;\ \varphi)$ и $B_1(\rho;\ \pi - \varphi)$ (рис. 291) кривой $\rho = f(\varphi)$, а точкам $A(x;\ -y)$ и $B(-x;\ -y)$ (рис. 292) — точки $A_1(\rho;\ 2\pi - \varphi)$ и $B_1(\rho;\ \pi + \varphi)$.

б) Пусть $y = f(x)$ — нечетная функция. Тогда точкам $A(x;\ y)$ и $B(-x;\ -y)$, симметричным относительно начала координат в де-

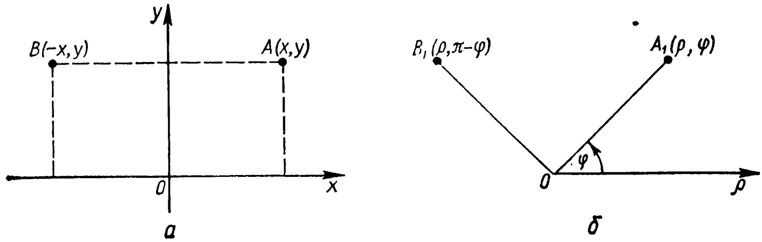


Рис. 291. Координаты точек: в декартовой (а) и полярной (б) системах координат.

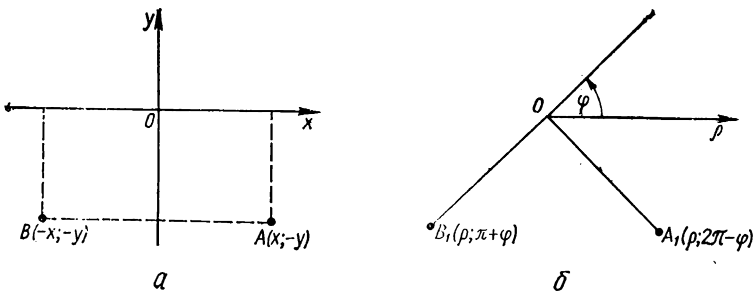


Рис. 292. Координаты точек: в декартовой (а) и полярной (б) системах координат.

картовой системе координат, соответствуют точки $A_1(\rho;\ \varphi)$ и $B_1(\rho;\ \pi + \varphi)$, симметричные относительно полюса в полярной системе координат (рис. 293), а точкам $A(-x;\ y)$ и $B(x;\ -y)$ в декартовой системе координат соответствуют точки $A_1\left(\rho;\ \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$ и $B_1\left(\rho;\ \frac{3}{2}\pi + \varphi\right)$ в полярной системе координат (рис. 294).

в) Если кривая $y = f(x)$ симметрична относительно оси абсцисс при $x > 0$, то точкам $A(x;\ y)$ и $B(x;\ -y)$ этой кривой в декартовой системе координат соответствуют точки $A_1(\rho;\ \varphi)$ и $B_1(\rho;\ 2\pi - \varphi)$ кривой $\rho = f(\varphi)$ в полярной системе координат (рис. 295).

г) Если кривая $y = f(x)$ симметрична относительно оси абсцисс при $x < 0$, то точкам $A(-x;\ y)$ и $B(-x;\ -y)$ этой кривой в декартовой системе координат соответствуют точки $A_1\left(\rho; \frac{\pi}{2}+\varphi\right)$ и $B_1\left(\rho; \frac{3}{2}\pi-\varphi\right)$ (рис. 296).

Период функции $y=f(x)$ такой же, как и период функции $\rho = f(\varphi)$. Отсюда следует, что достаточно построить график функции

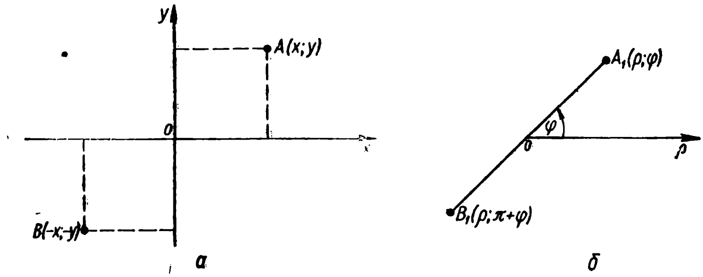


Рис. 293. Координаты точек: в декартовой *(а)* и полярной *(б)* системах координат.

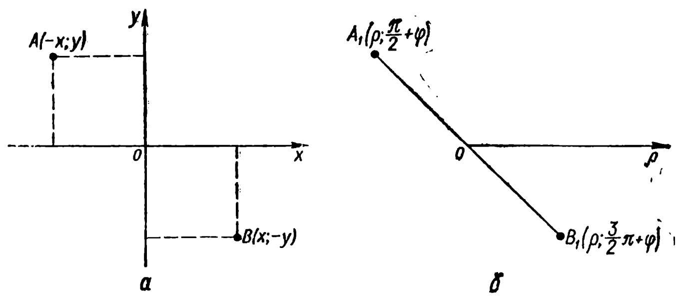


Рис. 294. Координаты точек: в декартовой *(а)* и полярной *(б)* системах координат.

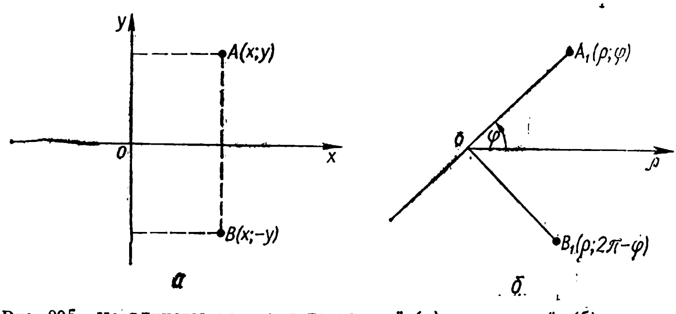


Рис. 295. Координаты точек: в декартовой *(а)* и полярной *(б)* системах координат.

$\rho = f(\varphi)$ в секторе с углом у вершины, равным периоду, а затем с помощью постепенного поворота на углы, кратные периоду, строим искомый график.

Если функция $y = f(x)$ ограничена ($M < f(x) < N$), то, как известно, ее график располагается между прямыми $y = M$ и $y = N$. Для соответствующей функции $\rho = f(\varphi)$ справедливо неравенство $M < f(\varphi) < N$, и график функции $\rho = f(\varphi)$ располагается в кольце, внутренний радиус которого равен M, а внешний — N.

Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум при $x = x_0$, то функция $\rho = f(\varphi)$ имеет экстремум при $\varphi = \varphi_0$. Если функция $y = f(x)$ убывает в некотором промежутке, то в полярной системе координат для функции $\rho = f(\varphi)$ при движении по часовой стрелке значение радиуса уменьшается, а при движении против часовой стрелки — увеличивается.

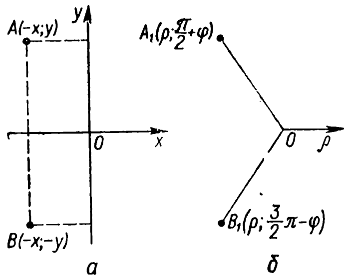


Рис. 296. Координаты точек: в декартовой (*а*) и полярной (*б*) системах координат.

Горизонтальная асимптота $y = c$ кривой $y = f(x)$ в декартовой системе координат переходит в асимптотическую окружность $\rho = c$ в полярной системе координат. В частности, если $c = 0$, то окружность вырождается в точку.

Вертикальная асимптота $x = b$ кривой $y = f(x)$ в декартовой системе координат переходит в общем случае в луч $\varphi = b$ в полярной системе координат. В частности, если $b = 0$, то асимптота $x = 0$ переходит в полярной системе координат в полярную ось; если $b = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, где k — некоторое целое число, то асимптота $x = b$ переходит в вертикальный луч $\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Наклонная асимптота $y = ax + b$ кривой $y = f(x)$ в декартовой системе координат переходит в спираль Архимеда $\rho = a\varphi + b$ в полярной системе координат. В частности, асимптота $y = ax$ кривой $y = f(x)$ переходит в спираль Архимеда $\rho = a\varphi$.

З а м е ч а н и е. Для построения графика функции $\rho = f(\varphi)$ при значениях φ, соответствующих таким значениям x, при которых $f(x) < 0$, достаточно построить график функции $y = |f(x)|$. Затем по этому графику строят кривую в полярной системе координат и поворачивают ее вокруг полюса на угол π. Получают кривую, соответствующую отрицательным значениям функции $\rho = f(\varphi)$. Следовательно, построение кривой $\rho = f(\varphi)$ надо вначале выполнить для φ, соответствующих значениям x, при которых $f(x) > 0$, а затем строить кривую $\rho = f(\varphi)$ для φ, соответствующих значениям x, при которых $f(x) < 0$.

§ 2. Построение графиков функций в полярной системе координат

Построение графика функции

$$\rho = f(\varphi)$$

осуществляют так: а) строят для функции $\rho = f(\varphi)$ соответствующую функцию $y = f(x)$; б) исследуют функцию $\rho = f(\varphi)$, сравнивая ее с соответствующей функцией $y = f(x)$, по схеме § 2 разд. 2, учитывая отмеченные выше особенности графика функции $\rho = f(\varphi)$; в) выполняют построение графика функции $\rho = f(\varphi)$ по графику функции $y = f(x)$.

Примеры построения графиков функций

Пример 1. Построить график функции

$\rho = a\varphi$ (спираль Архимеда), $a > 0$.

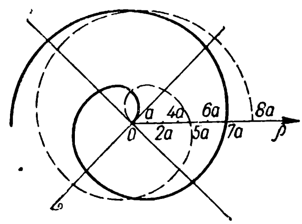


Рис. 297. $\rho = a\varphi$ (спираль Архимеда).

Проиллюстрируем на этом примере, как иногда (в простейших случаях) графики функций, заданных в полярных координатах, строят по точкам.

Составим таблицу значений для $\varphi > 0$, придавая φ значения через промежутки, например $\frac{\pi}{4}$:

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π	$\frac{9}{4}\pi$	$\frac{5}{2}\pi$	$\frac{11}{4}\pi$	3π
ρ	0	$0{,}8a$	$1{,}6a$	$2{,}5a$	$3{,}1a$	$3{,}9a$	$4{,}7a$	$5{,}5a$	$6{,}3a$	$7{,}1a$	$7{,}9a$	$8{,}7a$	$9{,}5a$

Значения ρ в таблице приведены приближенно.

Построив точки в плоскости координат и соединив их плавной линией, получим график функции для $\varphi > 0$. Из уравнения $\rho = a\varphi$ очевидно, что область определения функции: $]-\infty;\ \infty[$. При $0 < \varphi < \infty$ имеем: $0 < \rho < +\infty$. Если $-\infty < \varphi < 0$, то $-\infty < \rho < 0$. Следовательно, спираль Архимеда состоит из двух ветвей, расположенных симметрично относительно прямой, проходящей через полюс перпендикулярно к полярной оси.

График функции $\rho = a\varphi$ представлен на рис. 297. Основной линией изображена ветвь при $\varphi > 0$, вспомогательной — при $\varphi = 0$.

Замечание. Уравнение $\rho = a\varphi + b$ является также спиралью Архимеда. Действительно, если повернем полярную ось на угол $\alpha = -\frac{b}{a}$, то получим уравнение $\rho = a\theta$.

Пример 2. Построить график функции

$\rho = 3\sin 2\varphi$ (четырехлепестковая роза $\rho = a\sin 2\varphi$ при $a = 3$).

Сначала строим график функции $y = 3\sin 2x$ (см. рис. 91), растянутый предварительно по оси ординат в три раза.

Исследуем функцию $\rho = 3\sin 2\varphi$, сравнивая ее с функцией $y = 3\sin 2x$. Функция $y = 3\sin 2x$ определена для $\forall x$, следовательно, функция $\rho = 3\sin 2\varphi$ также определена для $\forall\varphi$. Функция $y = 3\sin 2x$ нечетная, следовательно, кривая $\rho = 3\sin 2\varphi$ симметрична относительно полюса. Поскольку функция $y = 3\sin 2x$ периодическая с периодом π, то и функция $\rho = 3\sin 2\varphi$ периодическая с периодом π. Функция $y = 3\sin 2x$ ограничена ($|3\sin 2x| \leqslant 3$), следовательно, функция $\rho = 3\sin 2\varphi$ также ограничена ($|3\sin 2\varphi| \leqslant 3$). Функция $y = 3\sin 2x$ на $[0; \pi]$ имеет максимум при $x = \frac{\pi}{4}$ ($y_{\max} = 3$) и минимум при $x = \frac{3}{4}\pi$ ($y_{\min} = -3$). Соответственно, функция $\rho = 3\sin 2\varphi$ имеет экстремальные значения при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3}{4}\pi$, эти значения равны 3 и -3.

Функция $y = 3\sin 2x$ при $x \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3}{4}\pi; \pi\right[$ возрастающая, при $x \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3}{4}\pi\right[$ убывающая; соответственно, функция $\rho = 3\sin 2\varphi$ возрастающая при $\varphi \in \left]0; \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{3}{4}\pi; \pi\right[$ и убывающая при $\varphi \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}; \frac{3}{4}\pi\right[$. Кривая $y = 3\sin 2x$ асимптот не имеет, не имеет их и кривая $\rho = 3\sin 2\varphi$. Следовательно, кривая $\rho = 3\sin 2\varphi$ располагается в круге радиусом 3 с центром в полюсе.

Учитывая симметрию кривой $\rho = 3\sin 2\varphi$ относительно полюса и ее периодичность, строим кривую $\rho = 3\sin 2\varphi$ для $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Это построение выполняем так: сначала строим точку экстремума $A_1\left(3; \frac{\pi}{4}\right)$ и точки, для которых $\rho = 0$: $A_2(0; 0)$, $A_3\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; после этого строим точки $B_1\left(\rho; \frac{\pi}{6}\right)$, $B_2\left(\rho; \frac{3}{8}\pi\right)$.

Заметим, что значения ρ для точек B_1 и B_2 получим из графика функции $y = 3\sin 2x$, взяв соответствующую ординату кривой для точек $x = \frac{\pi}{8}$ и $x = \frac{3}{8}\pi$. Аналогично строим точки C_1 и C_2. Проведя через эти точки линию, получим график функции $\rho = 3\sin 2\varphi$ для $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ (рис. 298, *а*). Учитывая симметрию кривой относительно полюса, строим кривую $\rho = 3\sin 2\varphi$ для $-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant 0$ (рис. 298, *б*). Наконец, с помощью поворота на угол π вокруг полюса получаем график функции $\rho = 3\sin 2\varphi$ (рис. 298, *в*).

Пример 3. Построить график функции

$$\rho = a\cos 2\varphi \text{ (четырехлепестковая роза).}$$

Воспользовавшись формулой

$$\cos 2\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\varphi\right),$$

приведем заданную функцию к виду

$$\rho = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\varphi\right).$$

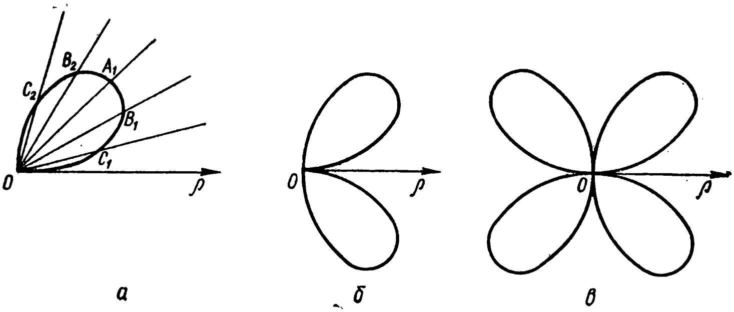


Рис. 298. $\rho = 3 \sin 2\varphi$ (четырехлепестковая роза).

Очевидно, что график функции $\rho = a \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\varphi\right)$ получим из графика функции $\rho = a \sin 2\varphi$ с помощью поворота на угол $\frac{\pi}{4}$ (рис. 299).

Пример 4. Построить график функции

$$\rho = a \operatorname{tg} \varphi.$$

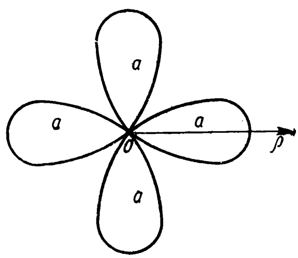


Рис. 299. $\rho = a \cos 2\varphi$ (четырехлепестковая роза).

Строим график функции $y = a \operatorname{tg} x$ (см. рис. 54), растянутый по оси ординат в a раз.

Исследуем функцию $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$. Область определения функции: все значения φ, кроме $\varphi = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, где $n \in Z$. Область значений функции: $]-\infty; \infty[$. Поскольку функция $y = a \operatorname{tg} x$ нечетная, то график функции $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$ симметричен относительно полюса. Функция $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$ периодическая с периодом π.

Учтя симметрию и периодичность функции $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$, достаточно построить график функции для $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right[$. Поскольку функция $y = a \operatorname{tg} x$ возрастающая для $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, то надо учесть, что при построении графика функции $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$ при изменении φ по часовой стрелке значение ρ уменьшается.

График функции $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$ проходит через точку (0; 0).

Вертикальные асимптоты графика функции $y = a \operatorname{tg} x$: $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ $(n \in Z)$; соответственно, асимптоты графика функции $\rho = a \operatorname{tg} \varphi : \varphi = \frac{\pi}{2}(2n+1)$ $(n \in Z)$. Наклонных асимптот график функции $y = a \operatorname{tg} x$ не имеет, следовательно, не имеет их и график функции $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$. С помощью поворота графика функции $\rho = a \operatorname{tg} \varphi \left(\text{для } 0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ на угол π получим график функции $\rho = a \operatorname{tg} \varphi \left(\text{для } \frac{\pi}{2} < \varphi \leqslant \pi\right)$.

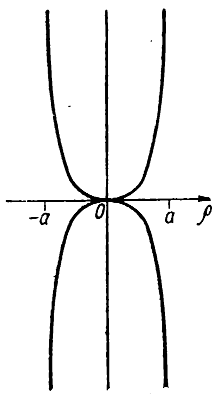


Рис. 300. $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$.

График функции $\rho = a \operatorname{tg} \varphi$ представлен на рис. 300.

Пример 5. Построить график функции $\rho = e^{a\varphi}$, или $\ln \rho = a\varphi$ (логарифмическая спираль), $a > 0$.

Строим график функции $y = e^{ax}$ (рис. 301).

Исследуем функцию $\rho = e^{a\varphi}$. Область определения функции: $]-\infty, \infty[$. Область значений функции: $]0; \infty[$. Функция $y = e^{ax}$ возрастающая на $]-\infty; \infty[$. Тогда при изменении φ от $-\infty$ до $+\infty$ против часовой стрелки значение $\rho = e^{a\varphi}$ увеличивается. Кривая $\ln \rho = a\varphi$ пересекает полярную ось при $\varphi = k\frac{\pi}{2}$ $(k \in Z)$. Поскольку горизонтальной асимптотой кривой $y = e^{ax}$ является прямая $y = 0$, то для функции $\rho = e^{a\varphi}$ соответственно будем иметь асимптотическую точку $\rho = 0$.

График логарифмической спирали $\rho = e^{a\varphi}$ представлен на рис. 302.

Пример 6. Построить график функции

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}, \quad a > 0.$$

Строим график функции $y = \frac{a}{\sqrt{\cos 3x}}$ (рис. 303).

Исследуем функцию $\rho = \frac{a}{\sqrt{\cos 3x}}$. Функция определена для всех $\varphi \neq \frac{\pi}{6}(2n+1)$ $(n \in Z)$. Область значений функции: $[a; \infty[$. Функция периодическая с периодом $\frac{2}{3}\pi$. Минимум $\rho = a$ при $\varphi = 0$, $\varphi = \pm\frac{2}{3}\pi$. Асимптоты функции: $\varphi = \pm\frac{\pi}{6}$, $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pm\frac{5}{6}\pi$, ...

График функции $\rho = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$ представлен на рис. 304.

Примеры построения графиков некоторых функций в полярной системе координат приведены на рис. 305—308.

Пример 7. Построить график функции

$$\rho = b + a\cos\varphi, \quad 0 < a \leqslant b, \quad \rho \geqslant 0.$$

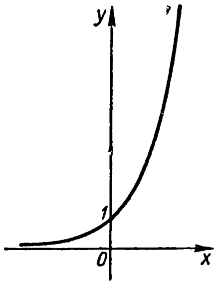


Рис. 301. $y = e^{ax}$, $a > 0$.

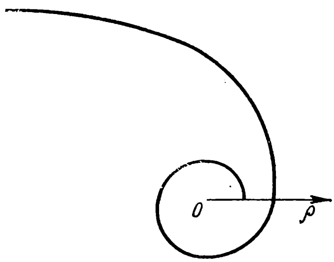


Рис. 302. $\rho = e^{a\varphi}$ (логарифмическая спираль), $a > 0$.

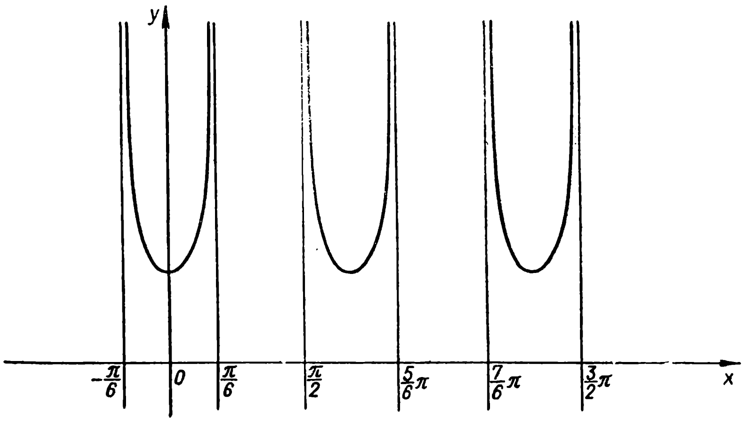


Рис. 303. $y = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3x}}$.

Строим график функции $y = b + a\cos x$ (рис. 309).

Исследуем функцию $\rho = b + a\cos\varphi$. Поскольку область определения функции $y = b + a\cos x$: $]-\infty;\ \infty[$, функция $\rho = b + a\cos\varphi$ определена для $\forall\varphi$. Область значений φ, при которых $\rho \geqslant 0$, определяется неравенством $|\varphi| \leqslant \alpha$, где $\alpha = \arccos\left(-\dfrac{b}{a}\right)$. При $\varphi = \pm\alpha$

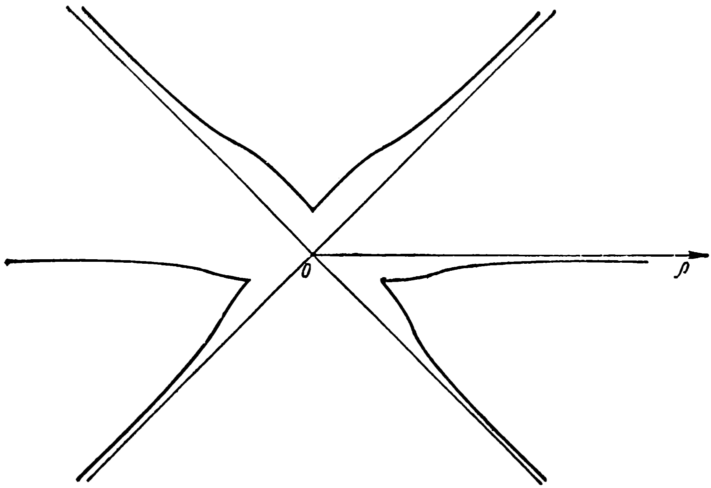


Рис. 304. $\rho = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}}$.

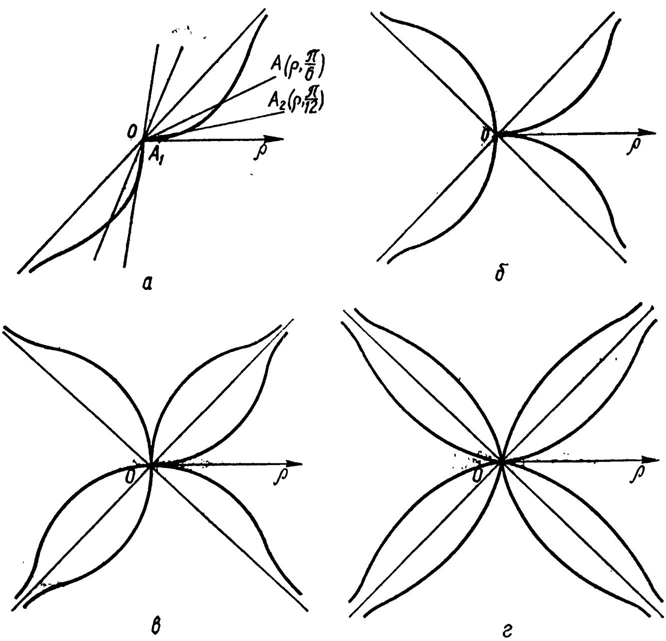


Рис. 305. $\rho = \operatorname{tg} 2\varphi$.

получаем точки пересечения графика функции $\rho = b + a\cos\varphi$ с полярной осью и полупрямой $]-\infty;\ 0\,[$. Поскольку функция $y = b + a\cos x$ для $|x| \leqslant \alpha$ ограничена: $-b \leqslant y \leqslant b + a$, то и функция $\rho = b + a\cos\varphi$ при $|\varphi| \leqslant \alpha$ ограничена: $0 \leqslant \rho \leqslant b + a$.

Функция $y = b + a\cos x$ периодическая с периодом 2π. Функция $\rho = b + a\cos\varphi$ также периодическая с периодом 2π. При построении графика функции $\rho = b + a\cos\varphi$ ее периодичность не используется, потому что нам надо построить график только для $\rho \geqslant 0$. Функция

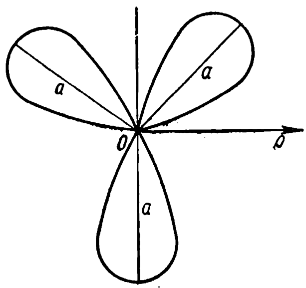


Рис. 306. $\rho = a\sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза).

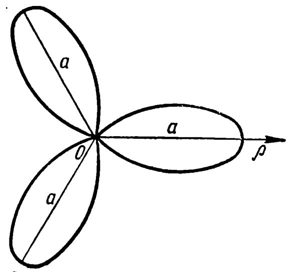


Рис. 307. $\rho = a\cos 3\varphi$ (трехлепестковая роза).

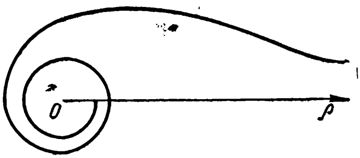


Рис. 308. $\rho = \sqrt{\frac{\pi}{\varphi}}$.

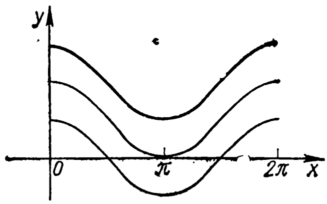


Рис. 309. $y = b + a\cos x$, $a = 2$, $b = 1$.

$y = b + a\cos x$ на отрезке $|x| \leqslant \alpha$ имеет максимум в точке $x = 0$ и $y_{\max} = a + b$. На $]-\alpha;\ 0\,[$ функция y возрастающая, на $]0;\ \alpha[$ — убывающая. Следовательно, функция $\rho = b + a\cos\varphi$ имеет максимум при $\varphi = 0$. На $]-\alpha;\ 0[$ при движении по часовой стрелке значение ρ уменьшается, на $]\,0;\ \alpha\,[$ — увеличивается. Поскольку график функции $y = b + a\cos x$ пересекает ось абсцисс в точках $(-\alpha;\ 0)$ и $(\alpha;\ 0)$, то график функции $\rho = b + a\cos\varphi$ пересекает полярную ось в точках $(-\alpha;\ 0)$ и $(\alpha;\ 0)$. Поскольку график функции $y = b + a\cos x$ пересекает ось ординат в точке $(0;\ a + b)$, то график функции $\rho = b + a\cos\varphi$ пересекает полярную ось в точке $\left(0;\ \arccos\left(-\frac{b}{a}\right)\right)$.

График функции $\rho = b + a\cos\varphi$ представлен на рис. 310.

Пример 8. Построить график функции

$$\rho = a\,(1 + b\cos\varphi)\ \text{(улитка Паскаля)},\quad a > 0,\ b > 1.$$

Строим график функции $y = a\,(1 + b\cos x)$ (рис. 311, a).

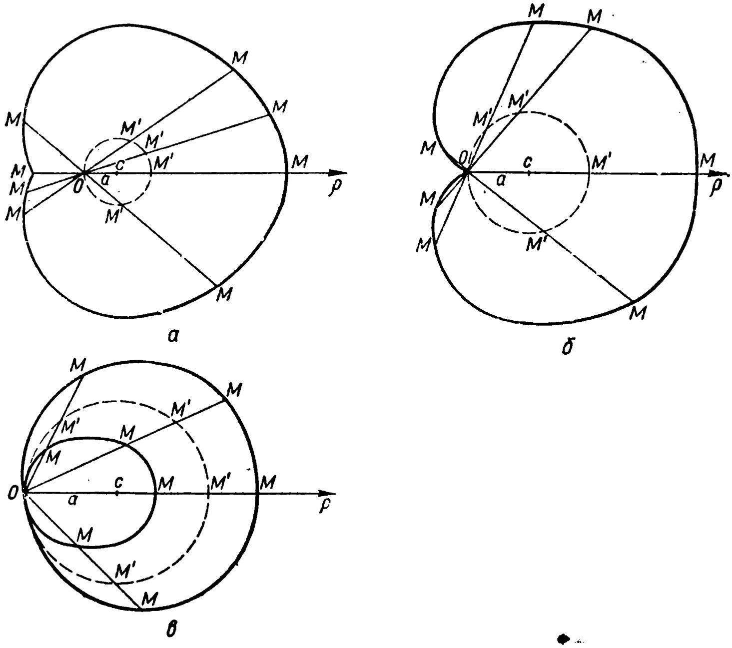


Рис. 310. $\rho = b + a\cos\varphi$; $b > a$ *(а)*; $a = b$ *(б)*; $b < a$ *(в)*.

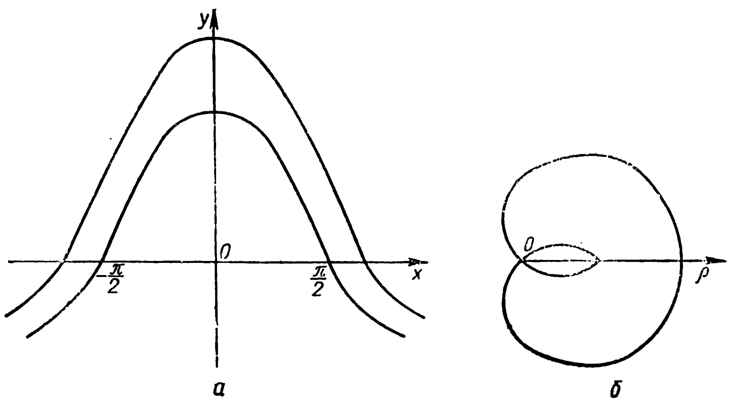


Рис. 311. $y = a(1 + b\cos x)$ *(а)*; $\rho = a(1 + b\cos\varphi)$ **(улитка Паскаля)** *(б)*, $a = 1$, $b = 2$.

Исследуем функцию $\rho = a(1 + b\cos\varphi)$. Функция $\rho = a(1 + b\cos\varphi)$ определена для $\forall\varphi$. График функции $\rho = a(1 + b\cos\varphi)$ симметричен относительно полярной оси.

Функция периодическая с периодом 2π. Основной промежуток: $[-\pi;\ \pi]$, на концах этого промежутка $\rho = a(1 - b)$ и $\rho = a(1 + b)$. Для $\varphi \in [-\pi;\ \pi]$ функция ограничена: $a(1 - b) \leqslant \rho \leqslant a(1 + b)$. Экстремум функции при $\varphi = 0$ ($\rho_{max} = a(1 + b)$), на $[-\pi;\ 0]$ при движении по часовой стрелке ρ уменьшается, а на $[0;\ \pi]$ — увеличивается. График функции $\rho = a(1 + b\cos\varphi)$ пересекает полярную ось в точках $\left(0;\ -\frac{2}{3}\pi\right)$ и $\left(0;\ \frac{2}{3}\pi\right)$.

График функции $\rho = a(1 + b\cos\varphi)$ (при $a = 1$ и $b = 2$) представлен на рис. 311, *б*.

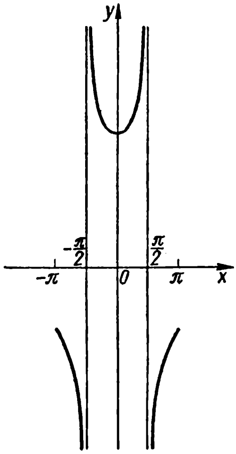


Рис. 312. $y = \dfrac{a}{\cos x} + b$, $a = 3$, $b = 1$.

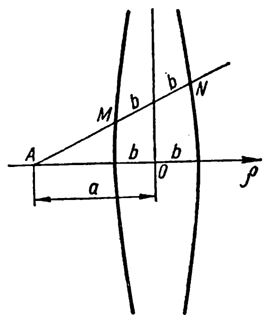


Рис. 313. $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} + b$, $a = 2$, $b = 1$ (конхоида).

Пример 9. Построить график функции

$$\rho = \frac{a}{\cos\varphi} \pm b \text{ (конхоида).}$$

Строим график функции $y = \dfrac{a}{\cos x} + b$ (рис. 312).

Исследуем функцию $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} + b$. Будем рассматривать функцию $y = \dfrac{a}{\cos x} + b$, как и функцию $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} + b$, на $[-\pi;\ \pi]$. Функция $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} + b$ на $[-\pi;\ \pi]$ определена при $-\pi < \varphi < -\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < +\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. Область значений функции $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} + b$: $]-\infty;\ \infty[$. Функция $\rho = \dfrac{a}{\cos\varphi} + b$ имеет наибольшее значение $\rho = b - a$ при $\varphi = -\pi$, затем ρ убывает от $b - a$ до $-\infty$ на $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$; при $\varphi = 0$ $\rho = a + b$, на $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ ρ убывает от $+\infty$ до $a + b$, а на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ ρ возрастает от $a + b$ до $+\infty$, на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ ρ возрастает от $-\infty$ до $b - a$ и при $\varphi = \pi$ имеет наименьшее значение $\rho = b - a$. Асимптоты: $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Заметим, что для различных a и b конхоида имеет различный вид. График конхоиды представлен на рис. 313.

Преобразования графиков в полярной системе координат

В полярной системе координат так же, как и в декартовой, по графику функции $\rho = f(\varphi)$ можно построить график функции

$$\rho = mf(\varphi + a) + b.$$

Это построение сводится к простым геометрическим преобразованиям графика функции $\rho = f(\varphi)$ согласно перечисленным ниже свойствам.

Основные свойства графиков функций в полярной системе координат

1. График функции $\rho = -f(\varphi)$ симметричен графику функции $\rho = f(\varphi)$ относительно полюса.
2. График функции $\rho = f(-\varphi)$ симметричен графику функции $\rho = f(\varphi)$ относительно полярной оси.
3. График функции $\rho = mf(\varphi)$, $m > 0$, — это растянутый или сжатый вдоль полярной оси в m раз график функции $\rho = f(\varphi)$.
4. График функции $\rho = f(\varphi + a)$ — это график, полученный из графика функции $\rho = f(\varphi)$ с помощью поворота последнего на угол a.
5. График функции $\rho = f(\varphi) + b$ — это график функции $\rho = f(\varphi)$, параллельно перенесенный вдоль полярной оси на величину b.

Пример 10. Построить график функции

$$\rho = \frac{a}{\varphi - \frac{\pi}{4}}, \quad a < 0.$$

Сначала строим кривую $\rho = \frac{a}{\varphi}$ (гиперболическую спираль) при $a > 0$ (рис. 314). Полюс является асимптотической точкой кривой, прямая, параллельная полярной оси и отстоящая от нее на расстояние, равное a,— асимптота кривой, причем приближение к асимптоте при возрастании φ происходит против часовой стрелки. При возрастании φ от 0 до ∞ точка спирали пробегает асимптотический участок кривой и, пересекая полярную ось, устремляется к полюсу, делая вокруг него бесчисленное множество витков, расстояние между которыми быстро убывает.

График функции $\rho = \frac{a}{\varphi - \frac{\pi}{4}}$ получим из графика функции $\rho =$

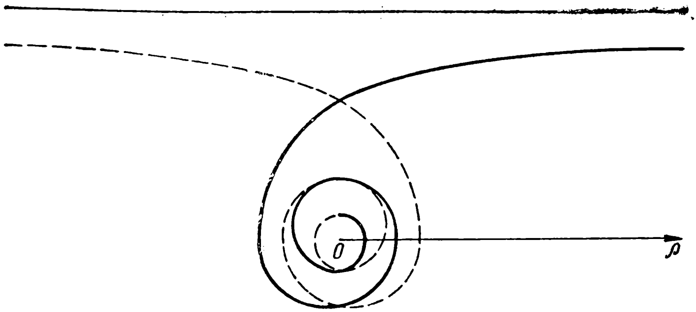


Рис. 314. $\rho = \frac{a}{\varphi}$ (гиперболическая спираль).

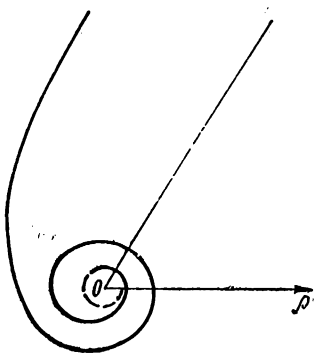


Рис. 315. $\rho = \frac{a}{\varphi - \frac{\pi}{4}}$.

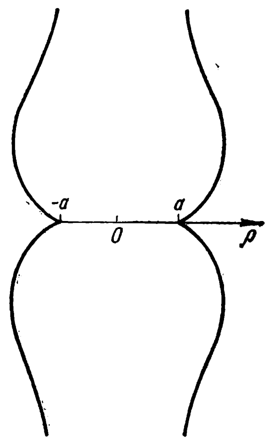


Рис. 316. $\rho = a\,(1 + \operatorname{tg} \varphi)$.

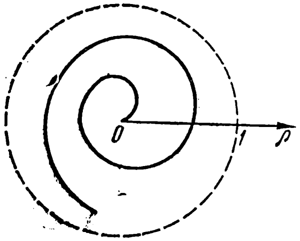


Рис. 317. $\rho = \frac{\varphi}{\varphi + 1}$, $0 \leqslant \varphi < \infty$.

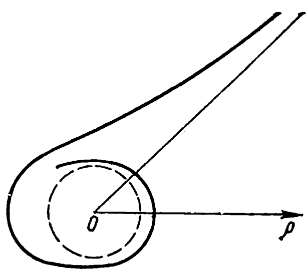


Рис. 318. $\varphi = \frac{\rho}{\rho - 1}$, $\rho > 1$.

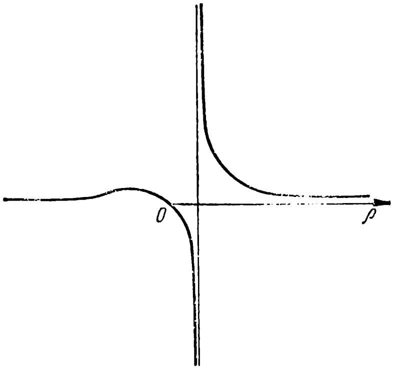


Рис. 319. $\rho = a\dfrac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi - 1}$, $\varphi > 1$, $a > 0$.

$= \dfrac{a}{\varphi}$ с помощью поворота последнего на угол $\dfrac{\pi}{4}$ против часовой стрелки (рис. 315).

Пример 11. Построить график функции

$$\rho = a(1 + \operatorname{tg}\varphi).$$

График функции $\rho = \operatorname{tg}\varphi$ параллельно переносим на единицу вдоль полярной оси. Затем растягиваем (или сжимаем) в a раз график функции $\rho = 1 + \operatorname{tg}\varphi$.

График функции $\rho = a(1 + \operatorname{tg}\varphi)$ представлен на рис. 316.

Примеры построения графиков некоторых функций в полярной системе координат приведены на рис. 317—319.

РАЗДЕЛ 8

ГРАФИКИ НЕЯВНО ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Исследование неявно заданных функций

Рассмотрим функцию, заданную неявно уравнением

$$F(x, y) = 0.$$

В зависимости от того, какой является функция $F(x, y)$ — алгебраической или трансцендентной,— кривые, представленные уравнением $F(x, y) = 0$, делятся на алгебраические и трансцендентные.

Если $F(x, y)$ можно разложить на множители $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$, $\ldots$, $\varphi_n(x, y)$, то данному уравнению соответствует система кривых $\varphi_1(x, y) = 0$, $\varphi_2(x, y) = 0$, $\ldots$, $\varphi_n(x, y) = 0$.

Укажем на некоторые особенности и преобразование графика кривой

$$F(x, y) = 0.$$

Если уравнение кривой $F(x, y) = 0$ не меняется при замене x на $-x$, то кривая симметрична относительно оси ординат.

Если уравнение кривой $F(x, y) = 0$ не меняется при замене y на $-y$, то кривая симметрична относительно оси абсцисс.

Если уравнение кривой $F(x, y) = 0$ не меняется при одновременной замене x на $-x$ и y на $-y$, то кривая симметрична относительно начала координат.

Если уравнение кривой $F(x, y)$ не меняется при замене y на x, а x на y, то кривая симметрична относительно биссектрисы $y = x$.

График кривой $F(x+a, y)=0$ получают из графика кривой $F(x, y)=0$ с помощью параллельного переноса последнего вдоль оси абсцисс на $|a|$ единиц масштаба в направлении, имеющем знак, противоположный знаку a.

График кривой $F(x, y+b)$ получают из графика кривой $F(x, y)=0$ с помощью параллельного переноса последнего вдоль оси ординат на $|b|$ единиц масштаба в направлении, имеющем знак, противоположный знаку b.

График кривой $F\left(\frac{x}{p}, y\right)=0$ получают из графика кривой $F(x, y)=0$ с помощью растяжения (сжатия) последнего в p раз по оси абсцисс.

График кривой $F\left(x, \frac{y}{q}\right)=0$ получают из графика кривой $F(x, y)=0$ с помощью растяжения (сжатия) последнего в q раз по оси ординат.

С помощью указанных преобразований можно получить из графика кривой $F(x, y)=0$ график кривой $F\left(\frac{x}{p}+a, \frac{y}{q}+b\right)=0$.

Точки пересечения кривой $F(x, y)=0$ с осями координат. Точки пересечения с осью абсцисс — это решения системы уравнений

$$\begin{cases} F(x, 0)=0, \\ F(x, y)=0. \end{cases}$$

Точки пересечения с осью ординат — это решения системы уравнений

$$\begin{cases} F(0, y)=0, \\ F(x, y)=0. \end{cases}$$

Заметим, что для более точного построения графика кривой $F(x, y)$ иногда полезно найти отдельные точки этой кривой, не лежащие на координатных осях. Такие дополнительные точки целесообразно искать как точки пересечения кривой с прямыми $y=kx$ при различных значениях k.

Если уравнения кривой $F(x, y)=0$ можно преобразовать к виду

$$\varphi_1(x, y)\varphi_2(x, y)+\psi_1(x, y)\psi_2(x, y)=0,$$

то координаты точек пересечения кривых

$$\begin{cases} \varphi_1=0, \\ \psi_1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_1=0, \\ \psi_2=0; \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_2=0, \\ \psi_1=0; \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi_2=0, \\ \psi_2=0 \end{cases}$$

удовлетворяют уравнению начальной кривой и, следовательно, принадлежат ей.

Асимптоты кривой $F(x, y)=0$. Для нахождения горизонтальных асимптот кривой $F(x, y)=0$ приравнивают нулю коэффициент при высшей степени x, входящей в уравнение; причем если этот коэффициент — постоянная величина, то горизонтальных асимптот нет.

Для нахождения вертикальных асимптот кривой $F(x, y)=0$ приравнивают нулю коэффициент при высшей степени y, входящей в уравнение этой кривой.

Для нахождения наклонных асимптот кривой $F(x, y) = 0$ надо в уравнении кривой заменить y на $kx + b$, приравнять нулю коэффициенты при двух высших степенях x и полученную систему решить относительно k и b.

Пример 1. Кривая $x^2y^2 + y^4 - 16x^2 = 0$ имеет две горизонтальные асимптоты.

Действительно, переписываем уравнение в виде

$$(y^2 - 16)x^2 + y^4 = 0.$$

Приравниваем нулю коэффициент при x^2:

$$y^2 - 16 = 0,$$

откуда $y - 4 = 0$ и $y + 4 = 0$ — горизонтальные асимптоты рассматриваемой кривой.

Пример 2. Кривая $3y^2 - xy^2 - 5x^2y = 0$ имеет одну вертикальную асимптоту.

Действительно, переписываем уравнение в виде

$$(3 - x)y^2 - 5x^2y = 0,$$

откуда $3 - x = 0$ — вертикальная асимптота. Кстати, эта кривая будет иметь и горизонтальную асимптоту $y = 0$.

Пример 3. Кривая $x^3 + y^3 - 3x^2 = 0$ имеет наклонную асимптоту.

Действительно, заменяем в уравнении кривой y на $kx + b$:

$$x^3 + (kx + b)^3 - 3x^2 = 0,$$

$$(1 + k^3)x^3 + 3(bk^2 - 1)x^2 - 3bkx - 3x^2 = 0.$$

Решаем систему

$$\begin{cases} 1 + k^3 = 0, \\ bk^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

откуда $k = -1$, $b = 1$. Следовательно, $y = -x + 1$ — наклонная асимптота рассматриваемой кривой.

§ 2. Построение графиков неявно заданных функций

Будем рассматривать случаи, когда неявно заданные функции приводятся к функциям, заданным в явном виде.

Пример 1. Исследовать и построить график кривой

$$x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0.$$

Для нахождения области определения неявно заданной функции решаем заданное уравнение относительно y. Получаем

$$y = \pm\sqrt{1 + \sqrt{x^4 - x^2 + 1}} \quad \text{и} \quad y = \pm\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1}},$$

т. е. имеем две ветви кривой. В области определения обеих ветвей должно выполняться неравенство

$$x^4 - x^2 + 1 \geqslant 0, \text{ или } (x^2 - 1)^2 + x^2 \geqslant 0,$$

справедливое для $\forall x$. Для точек второй ветви необходимо, чтобы $\sqrt{x^4 - x^2 + 1} \leqslant 1$, или $x^2 - 1 \leqslant 0$, что возможно лишь при условии $|x| \leqslant 1$.

Следовательно, область определения первой ветви: $]-\infty; \infty[$, область определения второй ветви: $[-1; 1]$.

Кривая симметрична относительно осей координат. Горизонтальных и вертикальных асимптот она не имеет, поскольку коэффициенты при высших степенях x и y в уравнении постоянные. Находим наклонные асимптоты. Имеем

$$x^4 - (kx + b)^4 - x^2 + 2(kx + b)^2 = 0.$$

Приравниваем нулю коэффициенты при x^4, x^3 и получаем

$$\begin{cases} k^4 - 1 = 0, \\ 4k^3 b = 0, \end{cases}$$

откуда $k = \pm 1$, $b = 0$.

Следовательно, прямые $y = x$ и $y = -x$ — наклонные асимптоты рассматриваемой кривой.

Рассмотрим несколько дополнительных точек кривой. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + 2y^2 - x^2 - y^4 = 0, \\ y = kx \end{cases}$$

при различных значениях k:

$$x_{1,2} = 0; \quad x^2 = \frac{1 - 2k^2}{1 - k^4}.$$

Эскиз графика представлен на рис. 320.

Пример 2. Построить график функции

$$y^2 = x^3 + 1.$$

Решаем уравнение относительно y:

$$y = \pm\sqrt{x^3 + 1}.$$

Функция определена при $x \geqslant -1$. Кривая симметрична относительно оси абсцисс. Кривая асимптот не имеет.

Для построения графика верхней ветви кривой записываем функцию $y = \sqrt{x^3 + 1}$ с помощью промежуточного аргумента t:

$$y = \sqrt{t}, \quad t = x^3 + 1.$$

По графикам этих функций строим график верхней ветви кривой, а отобразив последнюю относительно оси абсцисс, получим график и нижней ветви кривой (рис. 321).

Пример 3. Построить график функции

$$y^3 = 6x^2 - x^3.$$

Решаем уравнение относительно y:

$$y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}.$$

Область определения функции: $]-\infty; \infty[$. Вертикальных и горизонтальных асимптот нет. Наклонная асимптота: $x+y=2$.

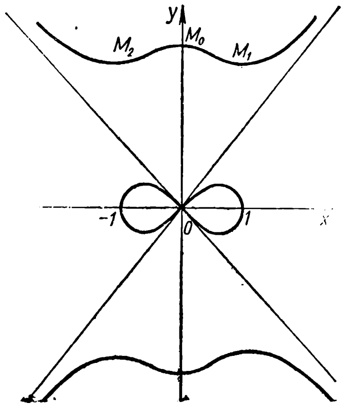


Рис. 320. $x^4+2y^2-x^2-y^4=0$.

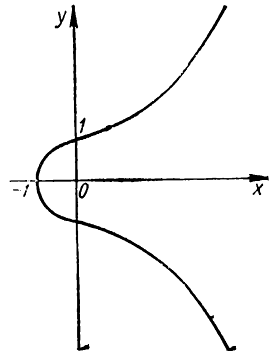


Рис. 321. $y^2=x^3+1$.

Записываем функцию с помощью промежуточного аргумента t:

$$y=\sqrt[3]{t}, \quad t=6x^2-x^3.$$

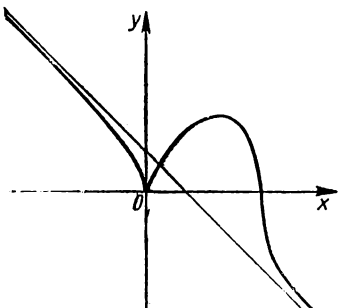


Рис. 322. $y^3=6x^2-x^3$.

По их графикам строим график заданной функции (рис. 322).

Пример 4. Построить график функции

$$x^4+y^4=x^2+y^2.$$

Кривая симметрична относительно осей координат, относительно биссектрис $y=x$ и $y=-x$. Следовательно, можно рассматривать восьмую часть плоскости, т. е. $0\leqslant x\leqslant y$. При этих условиях решаем заданное уравнение относительно y:

$$y=\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}}.$$

Корни взяты со знаком плюс. Очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением $x\leqslant 1$, так как если $x>1$, то $\sqrt{\frac{1}{4}+x^2-x^4}<\frac{1}{2}$, $y<1$, что противоречит условию $x\leqslant y$, или y принимает комплексные значения.

Очевидно,

$$z=\frac{1}{4}+x^2-x^4=\frac{1}{2}-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{1}{2},$$

поэтому $y\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$ достигает наибольшего значения при $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$. В интервале $\left]0;\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ значение выражения $\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2$ убывает от $\frac{1}{4}$ до 0. Функция z убывает от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{4}$, а функция y

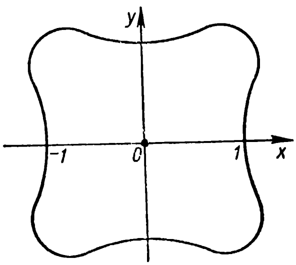


Рис. 323. $x^4+y^4=x^2+y^2$.

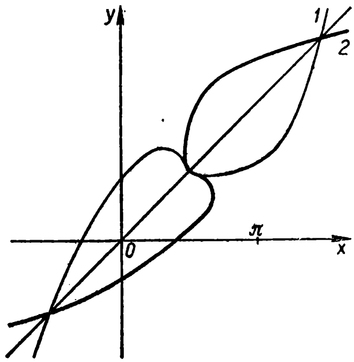


Рис. 324. $y=x+\cos x$ (1); $y+\cos y-x=0$ (2).

возрастает от 1 до $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$. При дальнейшем возрастании x от $\frac{1}{\sqrt{2}}$ до 1 значение $\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2$ возрастает от 0 до $\frac{1}{4}$, поэтому z убывает от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{4}$, а y убывает от $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}$ до 1.

График функции $x^4+y^4=x^2+y^2$ представлен на рис. 323.

Пример 5. Построить график функции

$$y+\cos y-x=0.$$

Заметим, что из этого уравнения нельзя выразить y как явную функцию от x. Но учитывая, что графики функций $F(x, y)=0$ и $F(y, x)=0$ симметричны относительно прямой $y=x$, строим график заданной функции как кривую, симметричную графику кривой $x+\cos x-y=0$. Из последнего уравнения легко выразить y явно через x: $y=x+\cos x$.

График функции $y+\cos y-x=0$ представлен на рис. 324.

Примеры построения графиков неявно заданных функций приведены на рис. 325—345.

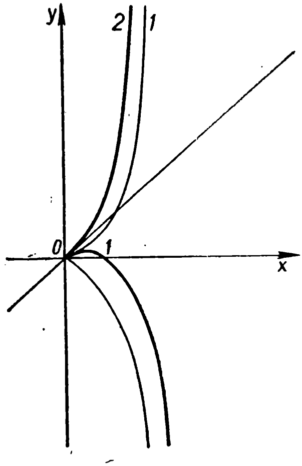


Рис. 325. $y = x^{\frac{5}{2}}$ (1); $(y - x)^2 = x^5$ (2).

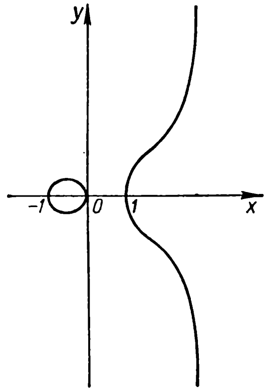


Рис. 326. $y^2 = x^3 - x$.

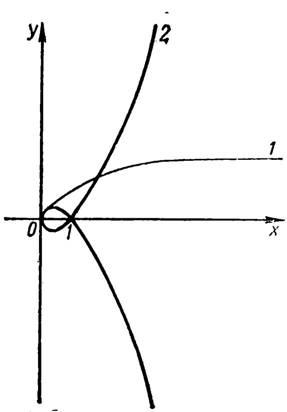


Рис. 327. $y = \sqrt{x}$ (1); $y^2 = x(x - 1)^2$ (2).

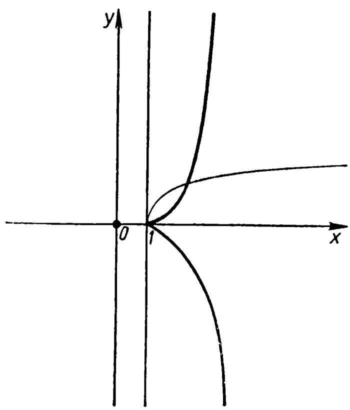


Рис. 328. $y^2 = x^2 (x - 1)$ (O — изолированная точка).

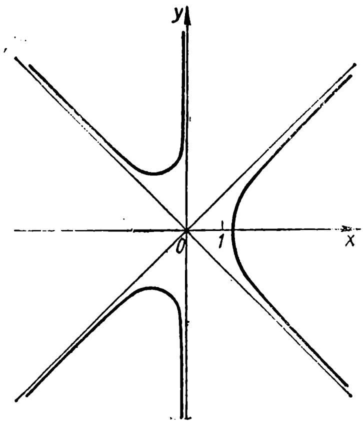


Рис 329. $3xy^2 = x^3 - 2$.

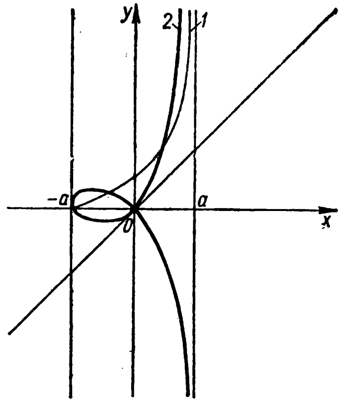


Рис. 330. $y = \frac{a+x}{a-x}$ (1); $y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}$ (2); $a = 2$.

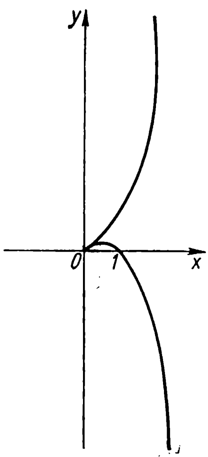


Рис. 331. $(y - x^2)^2 = x^5$.

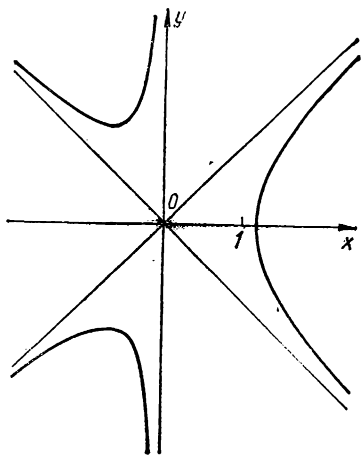


Рис. 332. $3xy^2 = x^3 - 2$.

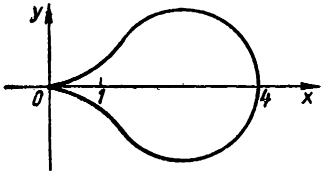


Рис. 333. $9y^2 = 4x^3 - x^4$.

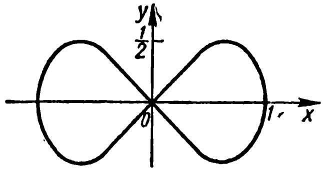


Рис. 334. $y^2 = x^2 - x^4$.

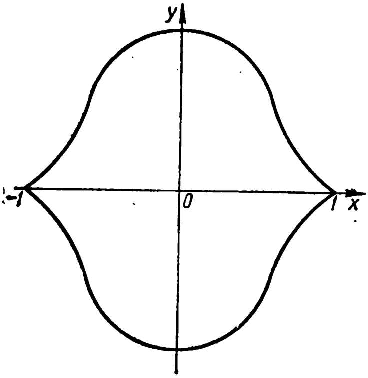


Рис. 335. $y^2 = (1 - x^2)^3$.

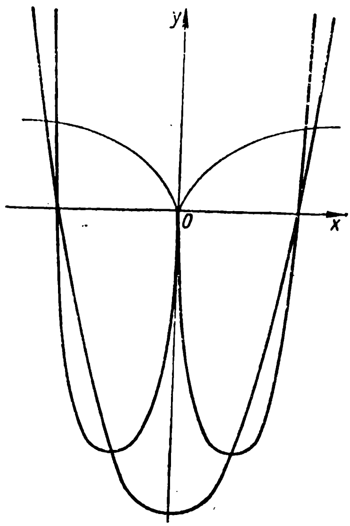


Рис. 336. $y^3 = x^2 (x^2 - 4)^3$.

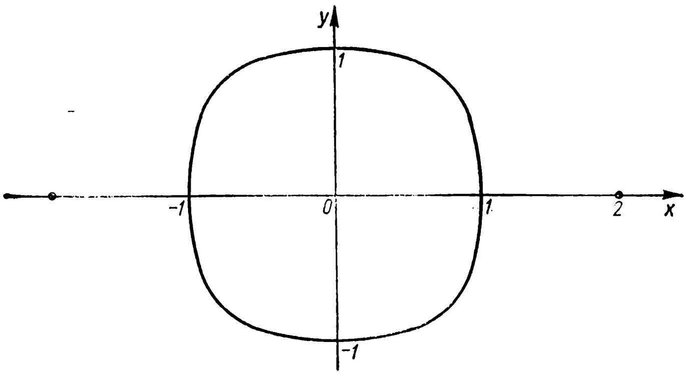


Рис. 337. $16y^2 = (x^2 - 4)^2 (1 - x^2)$.

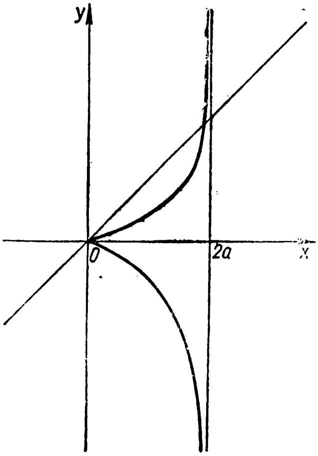


Рис. 338. $y^2 (2a - x) = x^3$, $a > 0$.

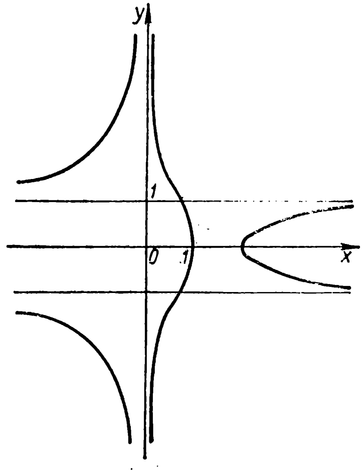


Рис. 339. $x^2y^2 = (x - 1)(x - 2)$.

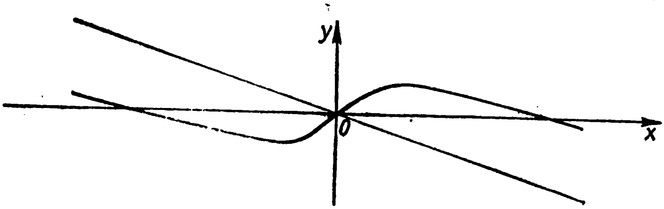


Рис. 340. $x^2y^2 = 4(x - 1)$.

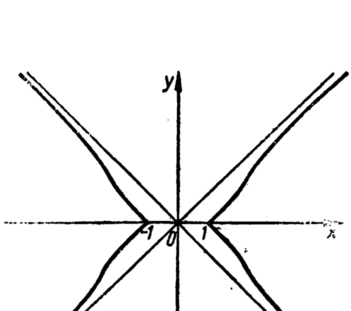


Рис. 341. $y^2x^4 = (x^2 - 1)^3$.

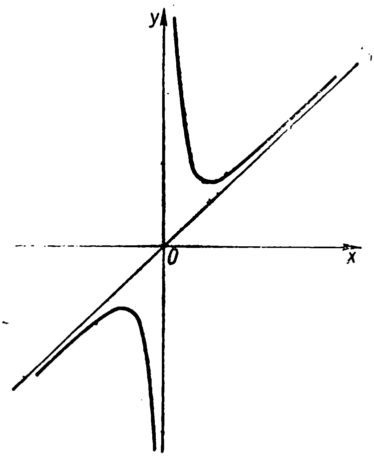


Рис. 342. $x^3 (y-x) = x^3 + 1$.

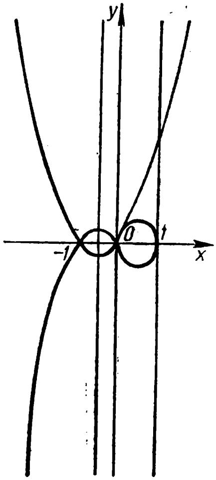


Рис. 343. $y^2 = x^2(x+1)^2(1-x)$.

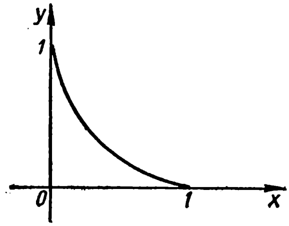


Рис. 344. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$.

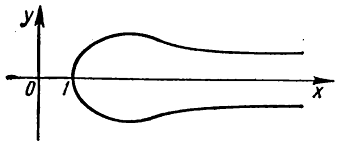


Рис. 345. $x^2y^2 = 4(x-1)$.

§ 3. Исследование кривых, заданных алгебраическим уравнением второй степени

Рассмотрим детальнее кривые, заданные уравнением второй степени.

Общее уравнение второй степени с двумя переменными имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

где A, B, C, D, E и F — заданные, причем по крайней мере один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля. При $A = C$ и $B = 0$ это уравнение определяет окружность. Например, рассмотрим кривую, заданную уравнением

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y + 2 = 0.$$

Запишем данное уравнение в виде

$$(x-2)^2 - 4 + (y+2)^2 - 4 + 2 = 0,$$

или

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 6.$$

Это, а следовательно, и заданное уравнения определяют окружность с центром в точке $(2; -2)$ и радиусом $\sqrt{6}$.

В общем случае с помощью параллельного переноса и поворота координат уравнение (1) можно привести к простейшему виду и получить каноническое уравнение эллипса, гиперболы, параболы или пару уравнений первой степени. Действительно, выполним параллельный перенос координат по формулам

$$x = x' + a, \quad y = y' + b,$$

где x' и y' — переменные координаты новой системы, a и b — координаты начала новой системы. Подставляя значения x и y в уравнение (1), получаем

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2(Aa + Bb + D)x' + 2(Ba + Cb + E)y' + \\ + Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + D = 0. \quad (2)$$

Выберем a и b так, чтобы члены при x' и y' равнялись нулю, т. е.

$$Aa + Bb + D = 0, \quad Ba + Cb + E = 0. \quad (3)$$

Тогда при условии, что детерминант системы (3) $AC - B^2 \neq 0$, уравнение (2) принимает вид

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + (Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + D) = 0. \quad (4)$$

Обозначая

$$Aa^2 + 2Bab + Cb^2 + 2Da + 2Eb + D = k,$$

уравнение (4) перепишем в виде

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy^2 + k = 0. \quad (5)$$

Изучая уравнение (5), следует иметь в виду два случая.

Первый случай: $k = 0$. Уравнение (5) принимает вид

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 = 0. \quad (6)$$

Если $A = C = 0$; $B \neq 0$ (учитывая, что $AC - B^2 \neq 0$), то уравнение (5) будет иметь вид $2Bx'y' = 0$. Отсюда $x' = 0$, $y' = 0$. Следовательно, имеем две прямые (новые оси координат), пересекающиеся в точке (0; 0).

Один из коэффициентов A или C отличен от нуля (например, $A \neq 0$). Умножив уравнение (6) на A, получим

$$A^2x'^2 + 2ABx'y' + ACy'^2 = 0.$$

Это уравнение перепишем так:

$$(Ax' + By')^2 + (AC - B^2)y'^2 = 0. \quad (7)$$

При $AC - B^2 > 0$ уравнение (7) изображает точку (0; 0), при $AC - B^2 < 0$ — две пересекающиеся прямые: $Ax' + By' = \pm\sqrt{AC - B^2}y'$.

Следовательно, при $k = 0$ уравнение (5) вырождается в две прямые или точку *.

Второй случай: $k \neq 0$. Для исследования уравнения (5) выполним поворот осей координат $x'Oy'$ на угол α. Заменив x' и y' в уравнении (5) по формулам

$$x' = \bar{x}' \cos\alpha - \bar{y}' \sin\alpha,$$

$$y' = \bar{x}' \sin\alpha + \bar{y}' \cos\alpha,$$

* Окружность и эллипс могут быть действительными или мнимыми.

получим

$$A_1\bar{x}'^2 + 2B_1\bar{x}' + C_1\bar{y}'^2 + k = 0, \tag{8}$$

где

$$A_1 = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha,$$
$$B_1 = (C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$
$$C_1 = A\sin^2\alpha - 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\cos^2\alpha.$$

Выберем α так, чтобы $B_1 = 0$, т. е.

$$(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0,$$

или

$$\frac{C - A}{2}\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B^*}{A - C}. \tag{9}$$

Рассмотрим кривую, соответствующую уравнению (1) в случае, если $AC - B^2 = 0$.

Пусть A и C одновременно отличны от нуля ($A \neq 0$, $C \neq 0$). Умножим уравнение (1) на A:

$$A^2x^2 + 2ABxy + ACy^2 + 2ADx + 2AEy + AF = 0.$$

Принимая во внимание, что $AC - B^2 = 0$, это уравнение можно записать так:

$$(Ax + By + \lambda)^2 + 2(AD - \lambda A)x + 2(AE - \lambda B)y + $$
$$+ (AF - \lambda^2) = 0, \tag{10}$$

где λ — произвольный параметр.

Выберем новую систему координат так, чтобы прямая $Ax + By + \lambda = 0$ была осью абсцисс, а прямая $2(AD - \lambda A)x + 2(AC - \lambda B)y + AF - \lambda^2 = 0$ — осью ординат. Из условия перпендикулярности этих прямых можем записать

$$2(AD - \lambda A)A + 2(AE - \lambda B)B = 0,$$

откуда

$$\lambda = \frac{A^2D - ABE}{A^2 + B^2}.$$

---

* Условие (9) дает бесконечное множество значений α, но существенно различных поворотов — четыре. Действительно, если α_0 является углом одного из поворотов, то из уравнения (9) следует, что $2\alpha = 2\alpha_0 + \pi k$ (k — целое число). Следовательно, $\alpha = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}k$, т. е. или $\alpha = \alpha_0$, или $\alpha = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$, или $\alpha = \alpha_0 + \pi$, или $\alpha = \alpha_0 + \frac{3}{2}\pi$, все другие значения α дают те же положения новой системы координат. При $A = C$ $\frac{2B}{A - C}$ — неограниченная величина и $2\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$, т. е. $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}$. При $A = C$ и $B = 0$ отношение $\frac{2B}{A - C}$ неопределенное, а уравнение (4) является уравнением окружности.

Подставив λ в уравнение, получим

$$(Ax+By+\lambda)^2+m(Bx-Ay)+n=0, \tag{11}$$

где m и n определяются через коэффициенты уравнения (1).

Первый случай: $m=0$. Уравнение (11) принимает вид

$$(Ax+By+\lambda)^2+n=0. \tag{12}$$

При $n>0$ уравнение (12) изображает мнимое геометрическое место точек, при $n=0$ оно вырождается в прямую $Ax+By+\lambda=0$, а при $n<0$, т. е. $n=-l^2$,— в параллельные прямые $Ax+By+\lambda-l=0$, $Ax+By+\lambda+l=0$.

Второй случай: $m\neq 0$. Пусть $\frac{m}{n}=p$. Тогда уравнение (11) принимает вид

$$(Ax+By+\lambda)^2+m(Bx-Ay+p)=0. \tag{13}$$

Выберем новую систему координат: в качестве оси абсцисс x' примем прямую $Ax+By+\lambda=0$, в качестве оси ординат y' — прямую $Bx-Ay+p=0$. В новой системе координат формулы преобразования будут иметь вид

$$x'=\pm\frac{Bx-Ay+p}{\sqrt{A^2+B^2}},\quad y'=\pm\frac{Ax+By+\lambda}{\sqrt{Ax^2+B^2}},$$

а уравнение (13) —

$$(A^2+B^2)\,y'^2+m(A^2+B^2)^{\frac{1}{2}}x'=0,$$

или

$$y'^2=\pm\frac{m}{\sqrt{A^2+B^2}}x'.$$

Получаем уравнение параболы, в котором знак перед $\sqrt{A^2+B^2}$ берем тождественным знаку m.

Пример 1. Исследовать кривую, заданную уравнением

$$x^2+4y^2-2x+1=0.$$

Вводим новые координаты:

$$x=x'+a,\quad y=y'+b,$$

получаем

$$x'^2+4y'^2+(2a-2)\,x'+8by'+a^2-2a+1=0. \tag{*}$$

Приравнивая нулю коэффициенты при первых степенях x' и y', имеем

$$2a-2=0,\quad b=0,$$

откуда $a=1$, $b=0$. Подставив значения a и b в уравнение (*), получим

$$x'^2+4y'^2=0.$$

Это уравнение изображает точку (0; 0) в системе координат $x'O_1y'$. В системе координат xOy это будет точка (1; 0).

Пример 2. Исследовать кривую, заданную уравнением

$$x^2 - xy + y^2 + 2x - 4y = 0.$$

Выполнив параллельный перенос координат, получим заданное уравнение в виде

$$x'^2 - x'y' + y'^2 - 4 = 0. \qquad (**)$$

По формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2B}{A-C} = \frac{2(-1)}{1-1} = \infty,$$

следовательно,

$$\alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Выполнив преобразование координат в уравнении (**) по формулам

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{x}' - \bar{y}'),$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{x}' + \bar{y}'),$$

получим

$$\frac{1}{2}\bar{x}'^2 + \frac{3}{2}\bar{y}'^2 - 4 = 0, \text{ или } \bar{x}'^2 + 3\bar{y}'^2 = 8.$$

Следовательно, заданное уравнение является уравнением эллипса в системе координат $x'O_1y'$.

Пример 3. Исследовать кривую, заданную уравнением

$$x^2 - 6xy + 9y^2 - 8x + 24y = 0.$$

Для данного уравнения имеем

$$A = 1, \quad B = -3, \quad C = 9, \quad AC - B^2 = 0.$$

Заданное уравнение можно переписать в виде

$$(x - 3y + \lambda)^2 - \lambda^2 - 2\lambda(x - 3y) - 8x + 24y = 0,$$

или

$$(x - 3y + \lambda)^2 - (2\lambda + 8)x + (6\lambda + 24)y - \lambda^2 = 0.$$

Выбирая прямую $x - 3y + \lambda = 0$ в качестве оси абсцисс, а прямую $-(2\lambda + 8)x + (6\lambda + 24)y - \lambda^2 = 0$ в качестве оси ординат, из условия перпендикулярности прямых записываем

$$-(2\lambda + 8) - (6\lambda + 24)3 = 0,$$

откуда $\lambda = -4$. Подставляя значение λ в преобразованное уравнение, получаем

$$(x - 3y - 4)^2 - 16 = 0.$$

Это уравнение вырождается в две прямые:

$$x - 3y - 8 = 0, \quad x - 3y = 0.$$

Пример 4. Исследовать кривую, заданную уравнением

$$x^2-4xy+4y^2-3x+5y-1=0.$$

Для данного уравнения

$$A=1,\quad B=-2,\quad C=4,\quad AC-B^2=0.$$

Запишем это уравнение в виде

$$(x-2y+\lambda)^2-(2\lambda+3)x+(4\lambda+5)y-\lambda^2-1=0.$$

Выбираем оси координат, как указано выше; из условия их перпендикулярности будем иметь

$$-(2\lambda+3)-2(4\lambda+5)=0,$$

откуда $\lambda=-\frac{13}{10}$. Подставив значение λ в преобразованное уравнение, получим

$$\left(x-2y-\frac{13}{10}\right)^2-\frac{2}{10}\left(2x+y-\frac{269}{200}\right)=0.$$

Вводим новую систему координат: в качестве оси абсцисс выбираем прямую $x-2y-\frac{13}{10}=0$, в качестве оси ординат — прямую $2x+y-\frac{269}{200}=0$. В этой системе преобразованное уравнение имеет вид

$$y'^2=\frac{x'}{5}$$

и изображает параболу.

Пример 5. Исследовать кривую, заданную уравнением

$$x^2-xy+y^2=a^2.$$

Заданное уравнение имеет вид (5)

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+\lambda=0,$$

где $A=C=1,\quad 2B=-1,\quad B=-\frac{1}{2},\quad \lambda=-a^2.$

Для того чтобы избавиться от коэффициента при xy, надо выполнить поворот осей координат на угол $\alpha=\frac{\pi}{4}$:

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y'),$$

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y').$$

Получим

$$\frac{1}{2}x'^2+\frac{3}{2}y'^2-a^2=0,$$

$$x'^2+3y'^2=2a^2,$$

Переписав последнее уравнение в виде $\frac{x'^2}{2a^2}+\frac{3y'^2}{2a^2}=1$, видим, что это — уравнение эллипса в системе координат $x'O_1y'$ с полуосями $a\sqrt{2}$ и $\frac{a}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$.

Пример 6. Исследовать кривую, заданную уравнением

$$16x^2-9y^2-64x-54y-161=0.$$

Выполним параллельный перенос координат:

$$x=x'+a,$$
$$y=y'+b,$$

где $(a;\ b)$ — координаты начала новой системы. Они определяются из системы уравнений

$$16a-64=0,$$
$$-9b-27=0.$$

Решив эту систему уравнений, получим $a=4$, $b=-3$. Вычислив значение λ по формуле

$$Aa^2+2Bab+Cb^2+2Da+2Eb+F=\lambda$$

при $A=16$, $B=0$, $C=-9$, $D=-32$, $E=-27$, $F=-161$, $a=4$, $b=-3$, получим $\lambda=-80$.

Заданное уравнение в новой системе координат имеет вид

$$16x'^2-9y'^2-80=0,$$

или

$$\frac{x'^2}{5}-\frac{y'^2}{\frac{80}{9}}=1.$$

Следовательно, заданное уравнение изображает гиперболу с полуосями $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{80}{9}}=\frac{4}{3}\sqrt{5}$ в новой системе координат.

Пример 7. Исследовать кривую, заданную уравнением

$$xy+\sqrt{3}y^2+6x-4\sqrt{3}y+5\sqrt{3}=0.$$

Выполняем параллельный перенос координат. Заданное уравнение будет иметь вид

$$x'y'+\sqrt{3}y'^2+193\sqrt{3}=0\ (a=16\sqrt{3},\quad b=-6).$$

Теперь выполним поворот координат на угол α:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда $2\alpha=30°$, $\alpha=15°$. Заданное уравнение принимает вид

$$C_1y''^2+193\sqrt{3}=0.$$

Коэффициент C_1 находим из равенства

$$A_1 + C_1 = A + C, \quad C_1 = \sqrt{3}.$$

Окончательно будем иметь

$$y''^2 + 193 = 0.$$

Следовательно, заданное уравнение в области действительной переменной смысла не имеет.

Замечание. Об окружности, эллипсе, гиперболе, параболе см. в ч. II.

§ 4. Графики неявных функций, аналитическое выражение которых содержит знак модуля

Пример 1. Построить множество точек

$$|x| + |y| = 1.$$

Функция четная относительно координатных осей. А поэтому достаточно рассмотреть функцию только в I квадранте, т. е. при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$. Поскольку при этом $|x| = x$ и $|y| = y$, заданная функция принимает вид

$$x + y = 1, \quad \text{или} \quad y = 1 - x.$$

Следовательно, строим график прямой $y = 1 - x$. Графику заданной функции принадлежит лишь отрезок прямой $y = 1 - x$, который лежит в I квадранте. Учитывая симметрию графика заданной функции, строим график функции во II—IV квадрантах.

Множество точек $|x| + |y| = 1$ представлено на рис. 346.

Множества точек $|x| - |y| = 1$ и $|y| - |x| = 1$ приведены на рис. 347.

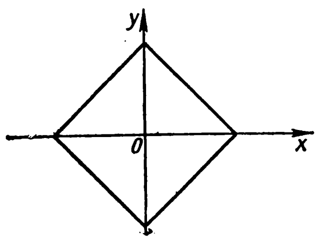


Рис. 346. $|x| + |y| = 1$.

Пример 2. Построить множество точек

$$||x| - |y|| = 1.$$

Данное уравнение эквивалентно двум уравнениям:

$$|x| - |y| = 1 \quad \text{и} \quad |y| - |x| = 1.$$

Следовательно, искомый график является объединением двух графиков, представленных на рис. 347. Он приведен на рис. 348.

Пример 3. Построить множество точек

$$|y - 2| = |x + 1|.$$

Переходим к новой системе координат:

$$y' = y - 2, \quad x' = x + 1.$$

Тогда уравнение принимает вид

$$|y'| = |x'|.$$

Построив график функции $|y'| = |x'|$ в системе координат $x'O_1y'$, где $O_1(-1;\ 2)$, получим график заданной функции в системе координат xOy (рис. 349).

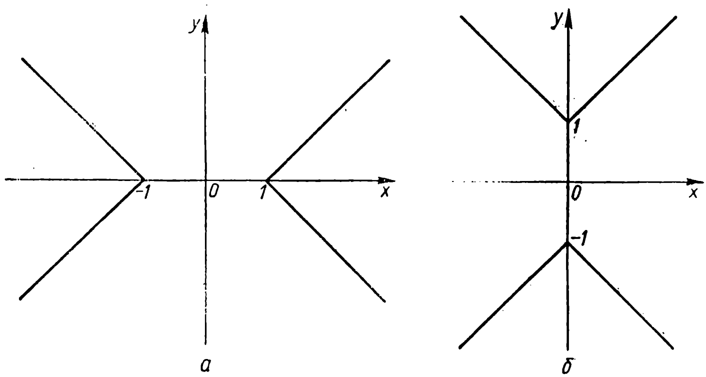


Рис. 347. $|x| - |y| = 1$ *(а)*; $|y| - |x| = 1$ *(б)*.

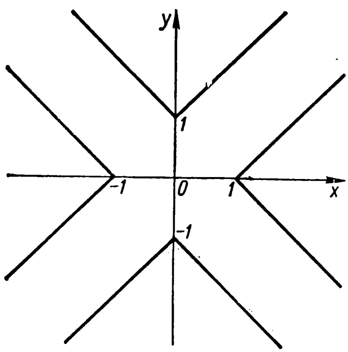


Рис. 348. $||x| - |y|| = 1$.

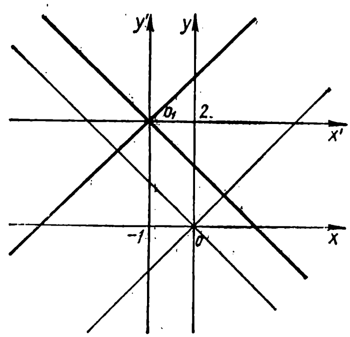


Рис. 349. $|y - 2| = |x + 1|$.

Пример 4. Построить множество точек

$$y + |y| = x + |x|.$$

Уравнение не имеет свойства четности относительно переменных. Рассматриваем это уравнение в каждом квадранте отдельно.

В I квадранте уравнение принимает вид

$$y = x.$$

Следовательно, графиком функции в пределах I квадранта является биссектриса первого координатного угла.

Во II квадранте $|y| = y$, $|x| = -x$. Окончательно: $y = 0$, а это отрицательная полуось абсцисс.

В III квадранте уравнение имеет вид $y - y = x - x$, а это уже тождество, которое означает, что любая точка III квадранта принадлежит множеству точек, удовлетворяющих заданному уравнению.

В IV квадранте уравнение имеет вид $x = 0$, а это отрицательная полуось ординат.

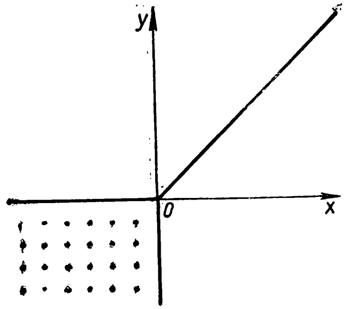


Рис. 350. $y + |y| = x + |x|$.

Множество точек $y + |y| = x + |x|$ представлено на рис. 350.

Примеры построения графиков неявных функций, аналитическое выражение которых содержит знак модуля, приведены на рис. 351—358.

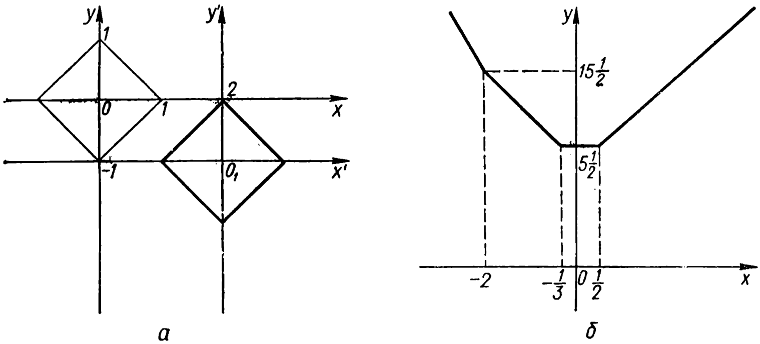


Рис. 351. $|x - 2| + |y + 1| = 1$ (а); $y = |x + 2| + |3x + 1| + \left|x - \frac{1}{2}\right| - 3x + 2$ (б).

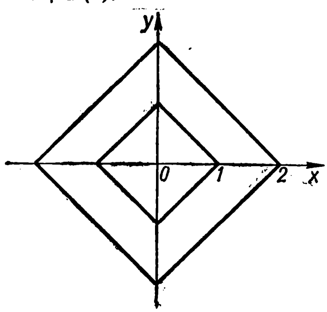


Рис. 352. $\left||x| + |y| - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2}$.

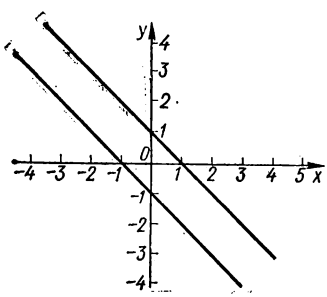


Рис. 353. $|y + x| = 1$.

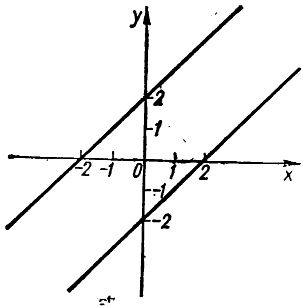


Рис. 354. $|x - y| = 2$.

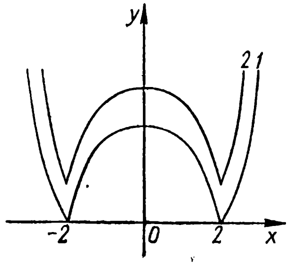


Рис. 355. $y = |x^2 - 4|$ (1); $|y - 1| = 1 + |x^2 - 4|$ (2).

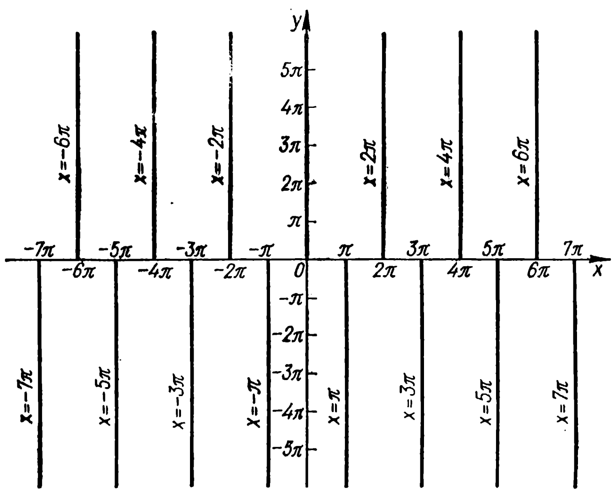


Рис. 356. $y = |y| \cos x$.

§ 5. Примеры построения графиков неявно заданных функций, которые удобно строить в полярной системе координат

Пример 1. Построить график функции

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2.$$

Переходим к полярной системе координат:

$$x = \rho \cos \varphi,$$
$$y = \rho \sin \varphi.$$

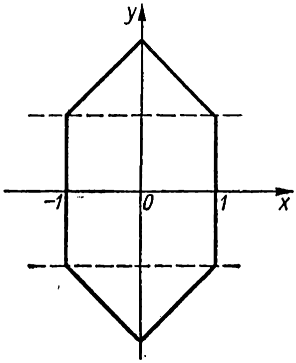


Рис. 357. $|y-1|+|y+1|+$
$+2|x|=4.$

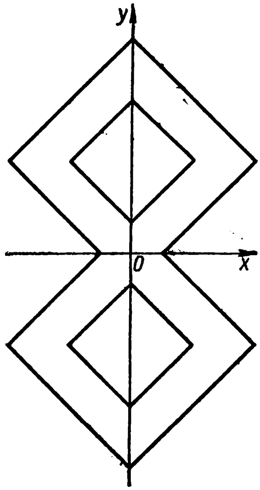


Рис. 358. $||x|+|y-3|-3|=1.$

Уравнение принимает вид $\rho^2 = a^2 \sin^2 2\varphi$, откуда

$$\rho = \pm\, a \sin 2\varphi.$$

Графиком обеих функций является четырехлепестковая роза (см. рис. 298).

Пример 2. Построить график функции

$$(x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 4x^2y^2.$$

График функции симметричен относительно биссектрис $y = x$, $y = -x$, а следовательно, и относительно начала координат.

Переходим к полярной системе координат

$$x = \rho \cos \varphi,$$
$$y = \rho \sin \varphi.$$

Уравнение принимает вид $\rho^2 = \mathrm{tg}^2\, 2\varphi$, откуда $\rho = \pm\, \mathrm{tg}\, 2\varphi$.

График функции и его построение приведены на рис. 305.

Пример 3. Построить график функции

$$(x^2 + y^2)\, x = a^2 y.$$

Перейдя к полярной системе координат, получим такое уравнение:

$$\rho^2 = a^2\, \mathrm{tg}\, \varphi,$$

откуда

$$\rho = \pm\, a \sqrt{\mathrm{tg}\, \varphi}.$$

Графики функции представлены на рис. 359, 360.

Графики функций

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2), \text{ или } \rho = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

(лемниската Бернулли), и $\rho^2 + \varphi^2 = 100$ приведены соответственно на рис. 361, 362.

Замечание. Более полное исследование и построение графика неявно заданной функции целесообразнее проводить, используя производные (см. ч. II). Однако во многих случаях, как мы убедились выше, можно достаточно легко построить график кривой $F(x, y) = 0$, не прибегая к элементам дифференциального исчисления.

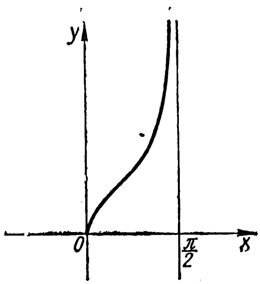


Рис. 359. $y = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

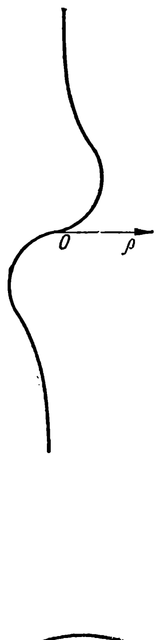


Рис. 360. $\rho = \pm a\sqrt{\operatorname{tg} \varphi}$, $(x^2 + y^2)\,x = a^2 y$.

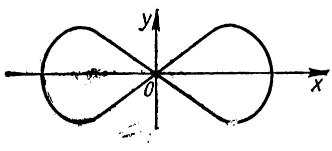


Рис. 361. $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$, или $\rho = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (лемниската Бернулли).

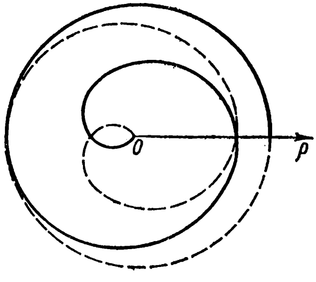


Рис. 362. $\rho^2 + \varphi^2 = 100$.

РАЗДЕЛ 9

ГРАФИКИ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Построение графиков функций, заданных несколькими аналитическими выражениями

В каждом из приведенных ниже примеров будем рассматривать одну функцию, но она для разных промежутков из области ее определения задана разными формулами.

Пример 1. Построить график функции

$$y=\begin{cases} x^2, \text{ если } x\geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x<0. \end{cases}$$

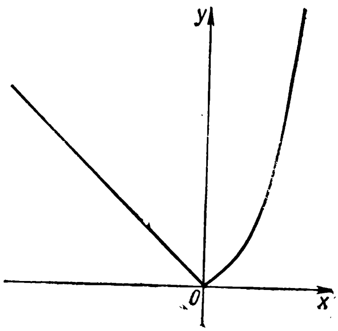


Рис. 363. $y=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0. \end{cases}$

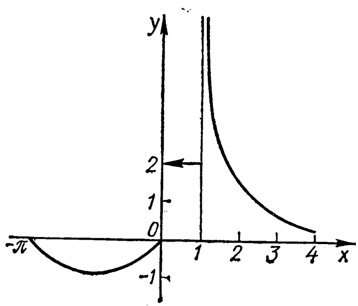


Рис. 364. $y=\begin{cases} \sin x, & -\pi\leqslant x\leqslant 0, \\ 2, & 0<x\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x-1}, & 1<x\leqslant 4. \end{cases}$

Область определения функции: $]-\infty;\ \infty[$.

Если $x\geqslant 0$, то график функции является частью параболы $y=x^2$, при $x<0$ функция изображается лучом прямой $y=-x$. Следовательно, график заданной функции состоит из луча прямой $y=-x$ и части параболы $y=x^2$ (рис. 363).

Пример 2. Построить график функции

$$y=\begin{cases} \sin x, & \text{если } -\pi\leqslant x\leqslant 0, \\ 2, & \text{если } \quad 0<x\leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{если } \quad 1<x\leqslant 4. \end{cases}$$

Область определения функции: $[-\pi;\ 4]$. График функции состоит из части синусоиды $y=\sin x$ на $[\pi;\ 0]$, прямой $y=2$ на $]0;\ 1]$ и части ветви гиперболы $y=\dfrac{1}{x-1}$ на $]1;\ 4]$ (рис. 364).

Пример 3. Построить график функции

$$y=\begin{cases} -2, \text{ если } x>0, \\ \frac{1}{2}, \text{ если } x=0, \\ -x^3, \text{ если } x<0. \end{cases}$$

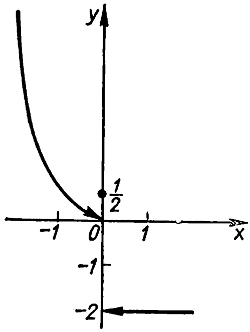


Рис. 365. $y=\begin{cases} -2, & x>0, \\ \frac{1}{2}, & x=0, \\ -x^3, & x<0. \end{cases}$

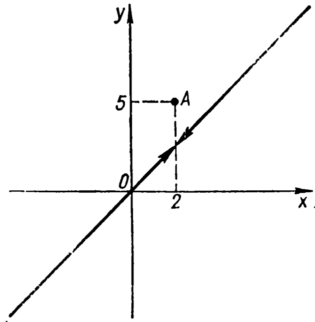


Рис. 366. $y=\begin{cases} x, & x\neq 2, \\ 5, & x=2. \end{cases}$

График функции состоит из части кубической параболы, одной изолированной точки и полупрямой (рис. 365).

Пример 4. Построить график функции

$$y=\begin{cases} x, \text{ если } x\neq 2, \\ 5, \text{ если } x=2. \end{cases}$$

График функции состоит из всех точек прямой $y=x$, кроме точки (2; 2). Точка A (2; 5) — изолированная точка графика функции (рис. 366). Стрелки на графике показывают, что точка (2; 2) не принадлежит графику.

Пример 5. Построить график функции

$$y=\operatorname{sign} x=\begin{cases} 1, \text{ если } x>0, \\ 0, \text{ если } x=0, \\ -1, \text{ если } x<0. \end{cases}$$

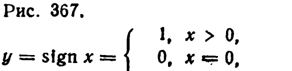


Рис. 367.
$y=\operatorname{sign} x=\begin{cases} 1, & x>0, \\ 0, & x=0, \\ -1, & x<0, \end{cases}$

График функции представлен на рис. 367. Он состоит из двух полупрямых и точки (0; 0). Стрелки на графике показывают, что точки (0; 1) и (0; —1) не принадлежат графику.

Пример 6. Построить график функции

$$y=\operatorname{sign}(\operatorname{tg} x).$$

Область определения функции— все значения x, кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in Z)$. Функция периодическая с периодом $\omega = \pi$. Функция ограничена. Из ограниченности функции следует, что график не имеет вертикальных асимптот; из периодичности функции следует, что он не имеет горизонтальных и наклонных асимптот.

График функции представлен на рис. 368. На рис. 369 приведен график функции $y = \operatorname{sign}(\sin \pi x)$.

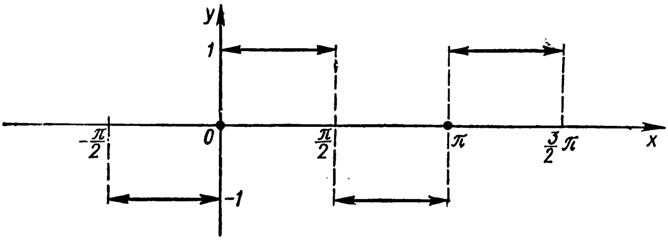


Рис. 368. $y = \operatorname{sign}(\operatorname{tg} x)$.

Замечание. Построение графика функции $y = \operatorname{sign}(f(x))$ по графику функции $y = f(x)$ осуществляется так: строим графики функций $y = +1$ и $y = -1$ соответственно на промежутках, на которых график функции $y = f(x)$ лежит в верхней и нижней полуплоскостях. Точки пересечения графика функции $y = f(x)$ оставляем без изменений.

При построении графика функции $y = f(\operatorname{sign} x)$ учитываем, что

$$f(\operatorname{sign} x) = \begin{cases} f(1) & \text{при } x > 0, \\ f(0) & \text{при } x = 0, \\ f(-1) & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

при этом значения -1, 0, 1 должны входить в область определения функции.

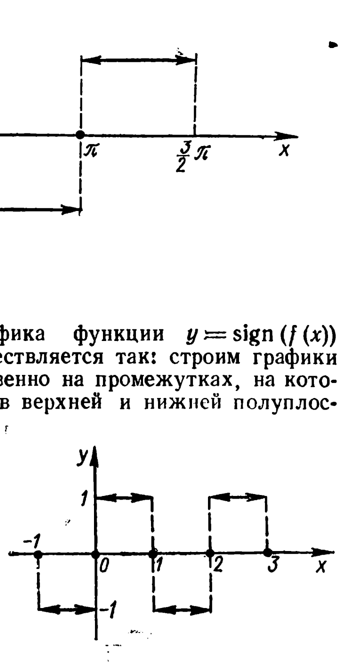


Рис. 369. $y = \operatorname{sign}(\sin \pi x)$.

§ 2. Построение графиков функций, заданных некоторым рекуррентным соотношением

Пример 1. Построить график функции $y = f(x)$, $x \in R$, если

$$f(x+1) = 2f(x) \text{ и } f(x) = x(1-x) \text{ для } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Для натурального n имеем

$$f(x+n) = 2f(x+n-1) = 2^2 f(x+n-2) = \cdots = 2^n f(x),$$

т. е.

$$f(x+n) = 2^n f(x) \text{ для } n \in Z.$$

Поскольку $f(x) = x(1-x)$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$, то, положив $t = x+n$, получим

$$f(t) = 2^n (t-n)(n+1-t), \quad n \leqslant t \leqslant n+1,$$

или

$$f(x) = 2^n (x-n)(n+1-x), \quad n \leqslant x \leqslant n+1, \quad n \in Z.$$

Отсюда имеем

$$f(x) = \begin{cases} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 2^{-1}(x+1)(-x), & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x(1-x), & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2(x-1)(2-x), & 1 \leqslant x \leqslant 2; \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2^2(x-2)(3-x), & 2 \leqslant x \leqslant 3, \\ 2^3(x-3)(4-x), & 3 \leqslant x \leqslant 4, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Теперь строим график функции (рис. 370).

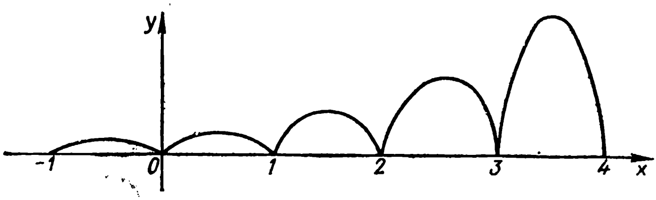


Рис. 370. $y = f(x)$ $(x \in R)$, если $f(x+1) = 2f(x)$ и $f(x) = x(1-x)$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Пример 2. Построить график функции

$$y = f(x), \quad x \in R,$$

если

$$f(x+\pi) = f(x) + \sin x \text{ и } f(x) = 0 \text{ для } 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Имеем

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f(x+\pi) = f(x) + \sin x,$$

$$f(x+2\pi) = f(x+\pi) + \sin(x+\pi) = f(x) + \sin x - \sin x = f(x),$$

$$f(x+3\pi) = f(x+2\pi) + \sin(x+2\pi) = f(x) + \sin x,$$

$$f(x+4\pi) = f(x+3\pi) + \sin(x+3\pi) = f(x) + \sin x - \sin x = f(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f(x+n\pi) = \begin{cases} f(x), & \text{если } n \text{ — четное,} \\ f(x) + \sin x, & \text{если } n \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Заменив в равенстве $f(x) = f(x+\pi) - \sin x$ x на $x - \pi$, получим $f(x-\pi) = f(x) + \sin x$. Далее, рассуждая, как и выше, получаем равенство (*) для целых отрицательных значений n. Пусть $x +$

$+ n\pi = t$. Тогда, если $0 \leqslant x \leqslant \pi$, то $n\pi \leqslant t \leqslant (n+1)\pi$ $(n \in Z)$ и $f(x) = 0$. Следовательно,

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ — четное,} \\ \sin x, & \text{если } n \text{ — нечетное, } n\pi \leqslant t \leqslant \\ & \leqslant (n+1)\pi \ (n \in Z). \end{cases}$$

Теперь строим график функции (рис. 371).

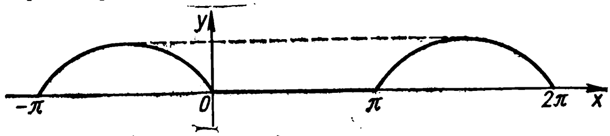


Рис. 371. $y = f(x)$ $(x \in R)$, если $f(x + \pi) = f(x) + \sin x$ и $f(x) = 0$ для $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

§ 3. Построение графиков функций вида $y = [f(x)]$

Пусть график функции $y = f(x)$ построен (рис. 372). Построение графика функции

$$y = [f(x)]$$

выполняют в таком порядке:

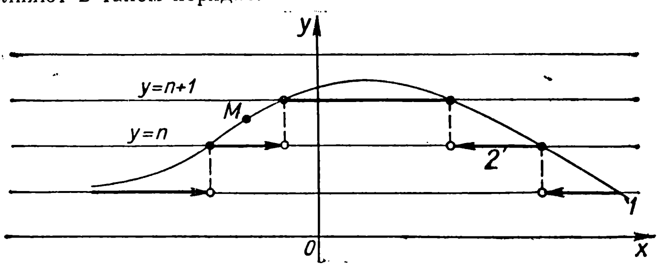


Рис. 372. $y = f(x)$ (1); $y = [f(x)]$ (2).

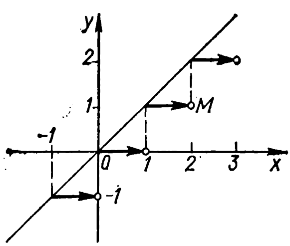


Рис. 373. $y = [x]$.

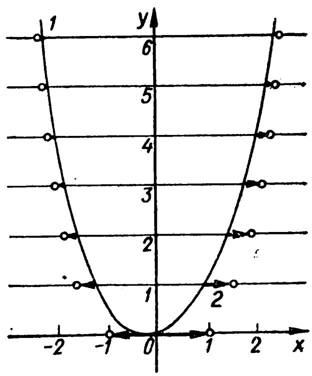


Рис. 374. $y = x^2$ (1); $y = [x^2]$ (2).

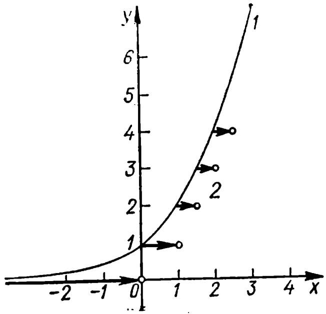


Рис. 375. $y = 2^x$ *(1)*; $y = [2^x]$ *(2)*.

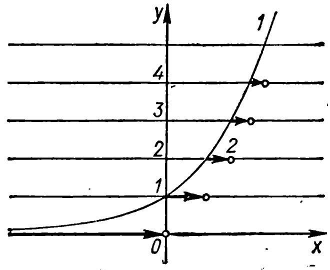


Рис. 376. $y = a^x$ *(1)*; $y = [a^x]$ *(2)*; $a > 1$.

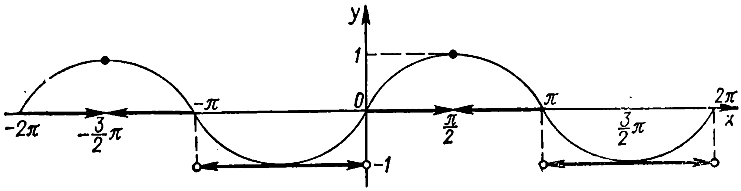


Рис. 377. $y = [\sin x]$.

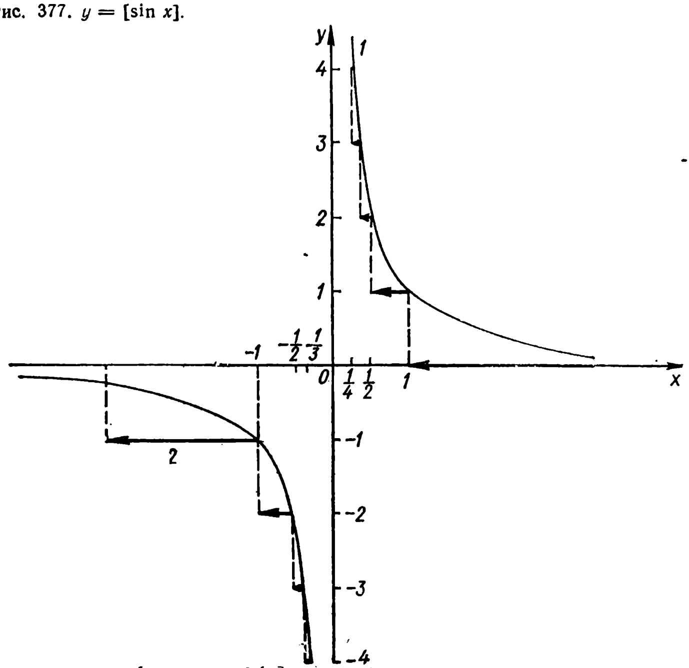


Рис. 378. $y = \frac{1}{x}$ *(1)*; $y = \left[\frac{1}{x}\right]$ *(2)*.

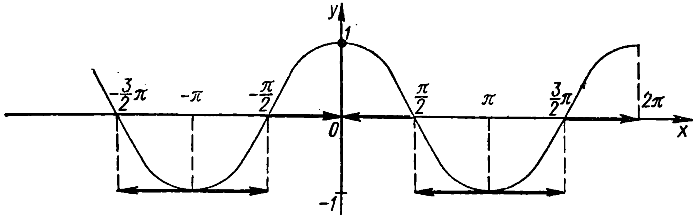


Рис. 379. $y = [\cos x]$.

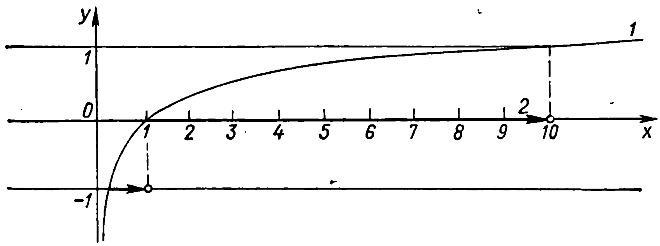


Рис. 380. $y = \lg x$ *(1)*; $y = [\lg x]$ *(2)*.

а) проводят прямые $y = n$ ($n \in Z$) и рассматривают одну из полос, образованных прямыми $y = n$ и $y = n + 1$;

б) точки пересечения прямых $y = n$, $y = n + 1$ с графиком функции $y = f(x)$ будут принадлежать графику функции $y = f[(x)]$, поскольку их ординаты целые числа; другие точки графика $y = [f(x)]$ в рассматриваемой полосе получим как проекцию части графика $y = f(x)$, которая лежит в этой полосе, на прямую $y = n$, поскольку любая точка M этой части графика функции $y = f(x)$ имеет такую ординату y_0, что $n < y_0 < n + 1$, т. е. $[y_0] = n$;

в) в каждой другой полосе, где есть точки графика функции $y = f(x)$, построение проводится аналогично.

Примеры построения графиков функций вида $y = [f(x)]$ представлены на рис. 373—381.

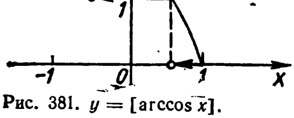


Рис. 381. $y = [\arccos x]$.

§ 4. Построение графиков функций вида $y = f([x])$

Пусть график функции $y = f(x)$ построен (рис. 382). Построение графика функции

$$y = f([x])$$

выполняют в таком порядке:

а) проводят прямые $x = n$ ($n \in Z$) и рассматривают одну из полос, образованную прямыми $x = n$, $x = n + 1$;

б) точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с этими прямыми принадлежат графику функции $y = f([x])$, поскольку их абсциссы — целые числа; другие точки графика функции $y = f([x])$ в рассматриваемой полосе получим как проекцию части графика функции $y = f(x)$, которая находится в этой полосе, на прямую $y = f(n)$, поскольку любая точка N этой части графика имеет такую абсциссу x_0, что

$$n < x_0 < n + 1, \text{ т. е. } [x_0] = n;$$

в) в каждой другой полосе, где есть точки графика функции $y = f(x)$, построение производится аналогично.

Примеры построения графиков функций вида $y = f([x])$ приведены на рис. 383—390.

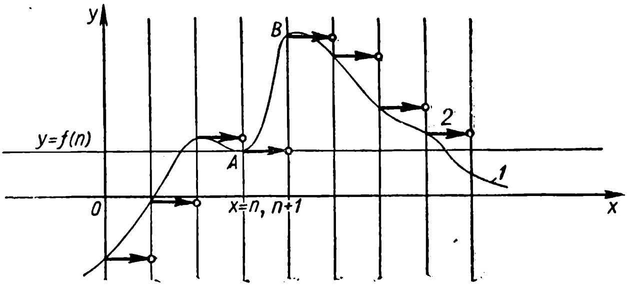


Рис. 382. $y = f(x)$ (1); $y = f([x])$ (2).

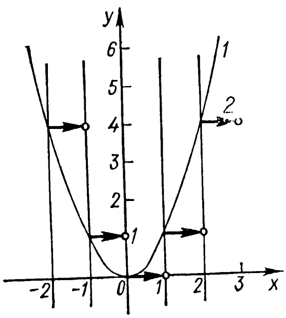


Рис. 383. $y = x^2$ (1); $y = [x]^2$ (2).

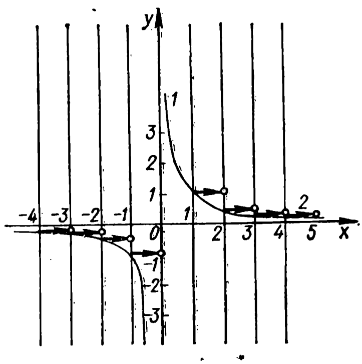


Рис. 384. $y = \frac{1}{x}$ (1); $y = \frac{1}{[x]}$ (2).

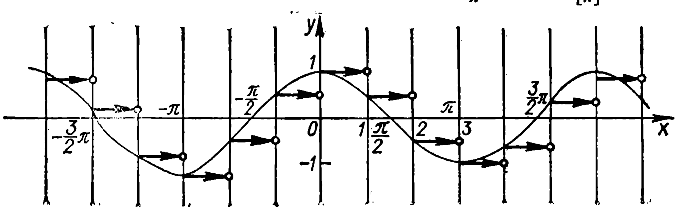


Рис. 385. $y = \cos [x]$.

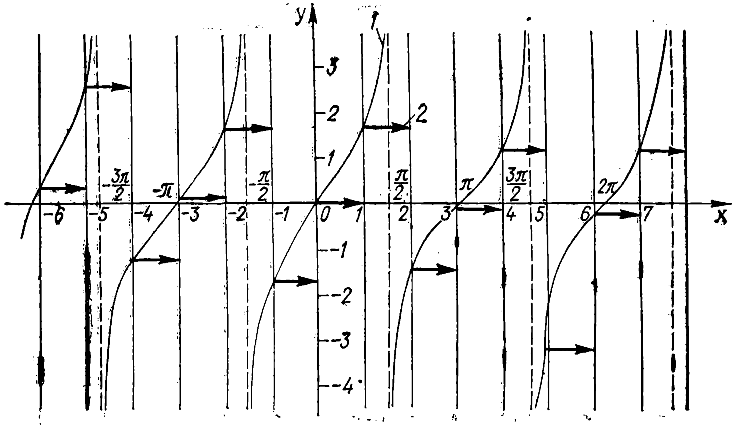


Рис. 386. $y = \operatorname{tg} x$ *(1)*; $y = \operatorname{tg}[x]$ *(2)*.

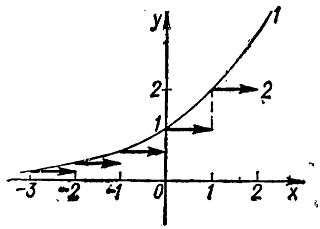


Рис. 387. $y = 2^x$ *(1)*; $y = 2^{[x]}$ *(2)*.

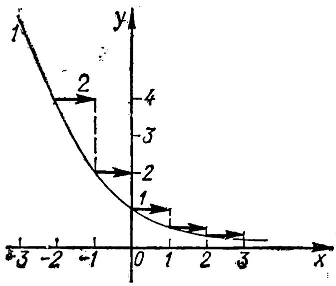


Рис. 388. $y = a^x$ *(1)*; $y = a^{[x]}$ *(2)*; $0 < a < 1$.

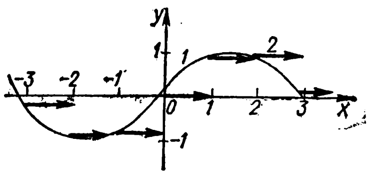


Рис. 389. $y = \sin x$ *(1)*; $y = \sin[x]$ *(2)*.

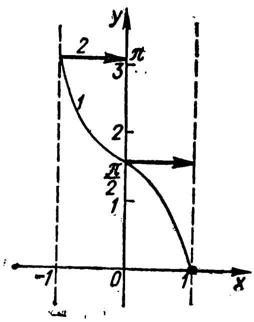


Рис. 390. $y = \arccos x$ *(1)*; $y = \arccos[x]$ *(2)*.

§ 5. Построение графиков функций вида $y = \{f(x)\}$

Поскольку $\{f(x)\} = f(x) - [f(x)]$, то построение графика функции $y = \{f(x)\}$ сводят к построению графика разности графиков функций $y = f(x)$ и $y = [f(x)]$.

Практически построение графика функций $y = \{f(x)\}$ по заданному графику функции $y = f(x)$ выполняют так:

а) проводят прямые $y = n$ $(n \in Z)$;

б) в точках пересечения этих прямых с графиком функции $y = f(x)$ проводят прямые, параллельные оси ординат. Значения функции $y = \{f(x)\}$ попадают в образованные прямоугольники. Части графика функции $y = f(x)$, которые попали в эти прямоугольники и располагаются в верхней полуплоскости, опускают вниз на расстояние n. Части графика, которые попали в прямоугольники и располагаются в нижней полуплоскости, переносят вверх на расстояние $|n| + 1$.

Примеры построения графиков функций вида $y = \{f(x)\}$ приведены на рис. 391—394.

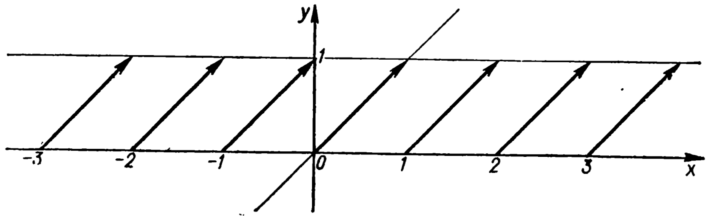


Рис. 391. $y = [x]$.

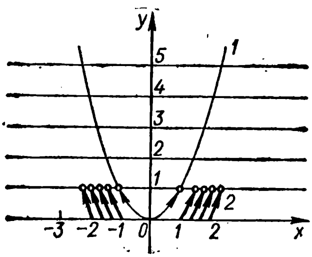


Рис. 392. $y = x^2$ *(1)*; $y = \{x^2\}$ *(2)*.

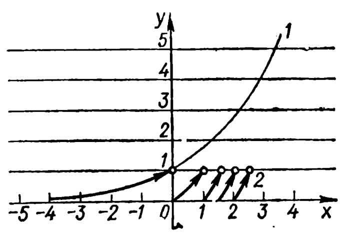


Рис. 393. $y = a^x$ *(1)*; $y = \{a^x\}$ *(2)*; $a = 2$.

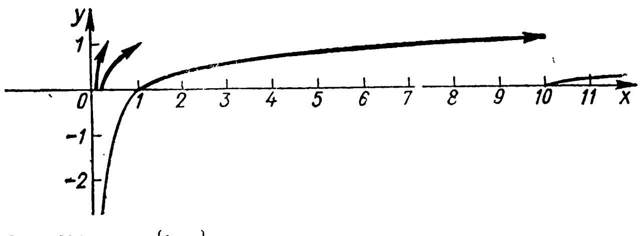


Рис. 394. $y = \{\lg x\}$.

§ 6. Построение графиков функций вида $y = f(\{x\})$

Заметим, что функция $y = f(\{x\})$ периодическая с периодом $\omega = 1$ и на $[0;\ 1]$

$$f(\{x\}) = f(x).$$

Отсюда следует способ построения графика функции $y = f(\{x\})$:

а) строят график функции $f(x)$ на $[0;\ 1[$;

б) продолжают этот график, учитывая свойство периодичности функции $y = f(\{x\})$.

Примеры построения графиков функций вида $y = f(\{x\})$ приведены на рис. 395—399.

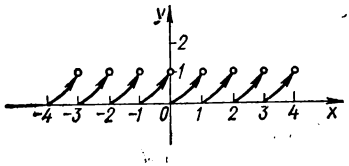


Рис. 395. $y = \{x\}^2$.

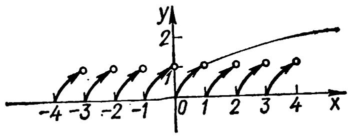


Рис. 396. $y = \sqrt{\{x\}}$.

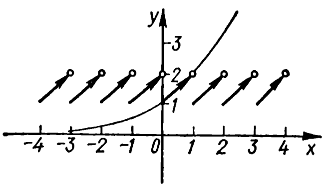


Рис. 397. $y = a^{\{x\}}$, $a = 2$.

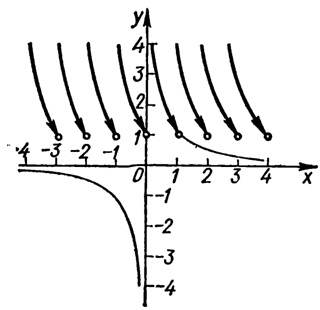


Рис. 398. $y = \dfrac{1}{\{x\}}$.

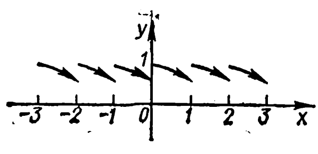


Рис. 399. $y = \cos\{x\}$.

ЧАСТЬ II

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

РАЗДЕЛ I

ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ, ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ПОСТРОЕНИЮ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

§ 1. Производная функции одной переменной. Свойства производной. Производные основных функций

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и пусть x — точка из этой окрестности, причем $x \neq x_0$. Рассмотрим отношение

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0};$$

если существует конечный предел этого отношения при $x \to x_0$, то его называют производной функции $f(x)$ в точке x_0 и записывают

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

или, введя обозначение $\Delta x = x - x_0$,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy в точке x_0 к приращению аргумента Δx, когда последний произвольным образом стремится к нулю.

Обозначения производной:

y', y_x (Лагранж),

$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$ (Лейбниц),

Dy, Df (Коши).

Конкретное значение производной при $x = a$ обозначают $f'(a)$ или $y|_{x'=a}$. В каждой точке x, в которой предел (1) существует, производная $\dfrac{dy}{dx} \equiv f'(x)$ является мерой скорости изменения y относительно x. Операция нахождения производной функции $f(x)$ называется *дифференцированием* этой функции.

Геометрический смысл производной. Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ в точке x является угловым коэффициентом касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x:

$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол между осью Ox и касательной к кривой в данной ее точке, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки (рис. 400).

Если функция

$$y = f(x)$$

имеет производную в точке $x = x_0$, т. е. если существует предел (1), то говорят, что при данном значении $x = x_0$ функция дифференцируема. Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого отрезка $[a;\ b]$ или интервала $]a;\ b[$, то говорят, что она дифференцируема на отрезке $[a;\ b]$ или на интервале $]a;\ b[$.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x = x_0$, то она в этой точке непрерывна.

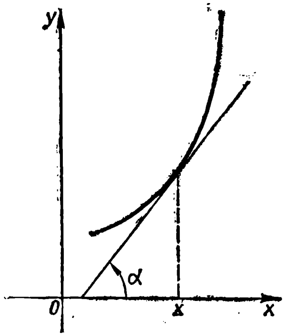


Рис. 400. Геометрический смысл производной функции: $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$.

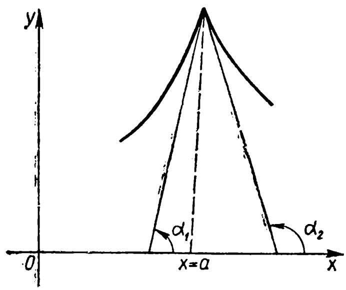


Рис. 401. Геометрический смысл производной функции справа и слева.

Если производная при данном значении $x = x_1$ не существует, то в соответствующей точке графика функции или не существует касательной, или эта касательная образует с осью Ox угол 90°. Например, производная функции $f(x) = \sqrt{x}$ $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ в точке $x = 0$ принимает бесконечное значение, не существует. Не имеет предела (1) функция $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ при $x = 0$.

Если для данного значения $x = a$ предел (1) не существует, но существуют пределы слева и справа, то их называют соответственно производной слева и производной справа.

Геометрический смысл односторонних производных $f'(a - 0) = \operatorname{tg} \alpha_1$, $f'(a + 0) = \operatorname{tg} \alpha_2$ (рис. 401). Кривая имеет излом в точке $x = a$. Например, функция $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$ имеет такие односторонние производные: $f(0 - 0) = -1$, $f'(0 + 0) = 1$.

Правила дифференцирования

1. Производная постоянной равна нулю:

$$c' = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной

$$(cu)' = cu'.$$

3. Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна соответствующей сумме производных этих функций:

$$(u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n)' = u_1' \pm u_2' \pm \cdots \pm u_n'.$$

4. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна сумме произведений производной первой функции на вторую функцию и первой функции на производную второй функции:

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

5. Производная дроби двух дифференцируемых функций равна дроби, знаменателем которой является квадрат знаменателя данной дроби, а числителем — разность между произведением знаменателя на производную числителя и произведением числителя на производную знаменателя:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

6. Если для функции $f(x)$ существует обратная функция и в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет конечную и отличную от нуля производную $f'(x_0)$, то для обратной функции $x = g(y)$ в соответствующей точке $y_0 = f(x_0)$ также существует производная, равная $\frac{1}{f'(x_0)}$, т. е.

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

7. Если функция $u = \varphi(x)$ имеет в некоторой точке x производную $\varphi'(x)$, а функция $y = F(u)$ имеет при соответствующем значении u производную $y_u' = F'(u)$, то сложная функция $y = F[\varphi(x)]$ в данной точке x также имеет производную

$$y_x' = F_u(u)\,\varphi'(x),$$

или

$$y_x' = y_u' u_x',$$

т. е. производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу u на производную промежуточного аргумента по x.

8. Дифференцирование функции, заданной неявно, выполняется по формуле

$$y' = -\frac{F_x'}{F_y'}.$$

9. Дифференцирование функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, выполняется так. Будем считать, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi_1(x)$ и функции $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ дифференцируемы на отрезке $[t_0; t_1]$. Тогда

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

или

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Производные основных функций

$y = c$	$y' = 0$
$y = x^\alpha$	$y' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$
$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{\log_a e}{x} = \dfrac{1}{x \ln a}$
$y = \lg x$	$y' = \dfrac{1}{x} \lg e$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{arcsec} x$	$y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$y = \operatorname{arccosec} x$	$y' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$y = \operatorname{sh} x$	$y' = \operatorname{ch} x$

$$y = \operatorname{ch} x \qquad y' = \operatorname{sh} x$$

$$y = \operatorname{th} x \qquad y' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$y = \operatorname{cth} x \qquad y' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

$$y = \operatorname{Arsh} x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$y = \operatorname{Arch} x \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$y = \operatorname{Arth} x \qquad y' = \frac{1}{1 - x^2}$$

$$y = \operatorname{Arcth} x \qquad y' = -\frac{1}{x^2 - 1}$$

$$y = x^x \qquad y' = x^x (1 + \ln x)$$

Производная производной данной функции $f(x)$ называется производной второго порядка или второй производной.

Производной n-го порядка функции $f(x)$ называют производную производной $(n-1)$-го порядка. Производные высших порядков обозначают так:

$$y'',\ y''',\ y^{(\mathrm{IV})},\ \ldots,\ y^{(n)},\ \ldots,$$

или

$$f''(x),\ f'''(x),\ f^{(\mathrm{IV})}(x),\ \ldots,\ f^{(n)}(x),\ \ldots,$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2},\ \frac{d^3y}{dx^3},\ \frac{d^4y}{dx^4},\ \ldots,\ \frac{d^ny}{dx^n},\ \ldots$$

Чтобы найти производную высшего порядка, надо найти производные всех предыдущих порядков.

Производную n-го порядка произведения двух функций вычисляем по формуле Лейбница:

$$(uv)^{(n)} = uv^{(n)} + \frac{n}{1} u'v^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{2} u''v^{(n-2)} + \ldots +$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} u^{(m)}v^{(n-m)} + \ldots + u^{(n)}v,$$

или

$$(uv)^{(n)} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m u^{(m)} v^{(n-m)}.$$

Производные высших порядков простейших функций

$y = x^m$ $\qquad$ $y^{(n)} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}$.
Если m — целое и $n > m$, то $y^{(n)} = 0$

$y = \ln x$ $\qquad$ $y^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\dfrac{1}{x^n}$

$y = \log_a x$	$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{\ln a} \frac{1}{x^n}$
$y = e^{kx}$	$y^{(n)} = k^n e^{kx}$
$y = a^x$	$y^{(n)} = (\ln a)^n a^x$
$y = a^{kx}$	$y^{(n)} = (k \ln a)^n a^{kx}$
$y = \sin x$	$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$y = \cos x$	$y^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
$y = \sin kx$	$y^{(n)} = k^n \sin\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$
$y = \cos kx$	$y^{(n)} = k^n \cos\left(kx + \frac{n\pi}{2}\right)$
$y = \operatorname{sh} x$	$y^n(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & n \text{ — четное,} \\ \operatorname{ch} x, & n \text{ — нечетное} \end{cases}$
$y = \operatorname{ch} x$	$y^n(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & n \text{ — четное,} \\ \operatorname{sh} x, & n \text{ — нечетное} \end{cases}$

§ 2. Дифференциал функции одной переменной

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некотором промежутке X:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

т. е.

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \alpha \Delta x,$$

или

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + o(\Delta x), \quad f'(x) \neq 0,$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $f'(x)\,\Delta x$ — бесконечно малая первого порядка относительно Δx; $\alpha \Delta x = o(\Delta x)$. Главная часть приращения функции $f'(x)\,\Delta x$, линейная относительно приращения аргумента, называется *дифференциалом* функции и обозначается символом

$$dy = df(x) = f'(x)\,dx,$$

потому что $\Delta x = dx$.

Функция $y = f(x)$ имеет в точке x дифференциал тогда и только тогда, когда она имеет в этой точке (первую) производную. Дифференциал функции характеризуется двумя основными свойствами: он является линейной однородной функцией приращения Δx аргумента, а также отличается от приращения функции на величину, которая при $\Delta x \to 0$ является бесконечно малой величиной порядка более высокого, чем Δx.

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал функции $f(x)$, соответствующий данным значениям x и Δx, равен приращению ординаты касательной к кривой $y = f(x)$ в данной точке x (рис. 402).

Поскольку дифференциал dy отличается от производной y'_x только множителем dx, то по таблице производных для элементарных функций легко составить таблицу дифференциалов для них. Например:

$$y = x^\alpha, \quad dy = \alpha x^{\alpha-1} dx,$$
$$y = a^x, \quad dy = a^x \ln a \, dx$$

и т. д.

Основные свойства дифференциалов:

$$d(cu) = c\,du,$$
$$d(u_1 \pm u_2 \pm \cdots \pm u_n) = du_1 \pm \pm du_2 \pm \cdots \pm du_n,$$
$$d(uv) = v\,du + u\,dv,$$
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.$$

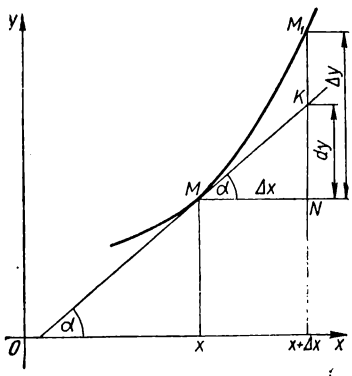


Рис. 402. Геометрический смысл дифференциала функции.

Инвариантность формы дифференциала первого порядка заключается в том, что его форма не зависит от того, является ли аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента.

Дифференциалы используются для приближенных вычислений:

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\,\Delta x,$$

или

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x;$$

для оценки погрешности:

$$\delta y = |\,y'_x\,|\,\delta x,$$

где δx — максимальная абсолютная погрешность величины x: $|\,\Delta x\,| \leqslant \delta x$; δy — максимальная абсолютная погрешность y.

Дифференциалы высших порядков определяются индуктивно. Дифференциалом второго порядка или вторым дифференциалом функции $y = f(x)$ в некоторой точке называется дифференциал в этой точке ее (первого) дифференциала

$$d^2 y = d(dy) = f''(x)(dx)^2 = f''(x)\,dx^2.$$

Дифференциалом n-го порядка функции $y = f(x)$ называется первый дифференциал дифференциала $(n-1)$-го порядка

$$d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x)\,dx^n.$$

Формула Лейбница имеет вид

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-i} u\, d^i v,$$

где

$$d^0u = u, \qquad d^0v = v.$$

Для дифференциалов второго и высших порядков нарушается инвариантность формы.

§ 3. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором промежутке, имеет во внутренней точке $x = c$ этого промежутка наибольшее или наименьшее значение и имеет в точке c конечную производную; тогда эта производная равна нулю: $f'(c) = 0$. Геометрический смысл теоремы. В точках A и B графика функции, удовлетворяющей условию теоремы, касательная параллельна оси Ox (рис. 403).

Теорема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и существует конечная производная $f'(x)$ по крайней мере в открытом промежутке $]a; b[$ и $f(a) = f(b)$; тогда между a и b найдется по крайней мере одна такая точка c $(a < c < b)$, в которой производная функции равна нулю: $f'(c) = 0$. Геометрический смысл теоремы. Если крайние ординаты кривой $y = f(x)$ равны, то на кривой найдется точка, в которой касательная к этой кривой параллельна оси Ox (рис. 404).

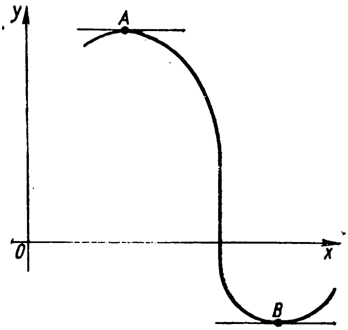


Рис. 403. Геометрический смысл теоремы Ферма.

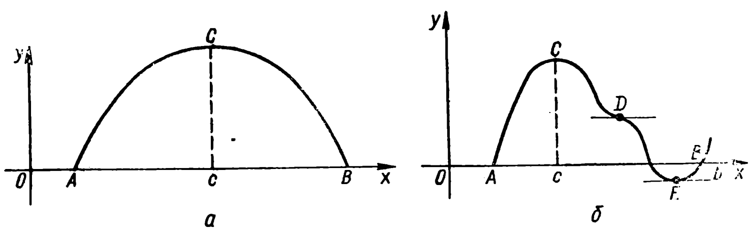


Рис. 404. Геометрический смысл теоремы Ролля.

Теорема Лагранжа (о среднем значении). Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и существует конечная производная $f'(x)$ по крайней мере в открытом промежутке

$]a;\ b[$; тогда внутри $[a;\ b]$ найдется по крайней мере одна такая точка $c\ (a < c < b)$, для которой выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{2}$$

Геометрический смысл теоремы. На дуге AB кривой $y = f(x)$ всегда найдется по крайней мере одна точка C, в которой касательная параллельна хорде AB (рис. 405). Формулу (2) называют *формулой Лагранжа* или формулой конечных приращений. Ее можно переписать в виде

$$\Delta f(x_0) = f'(c)\,\Delta x, \quad \text{где } c = x_0 + \theta\Delta x, \quad 0 < \theta < 1,$$

если применить формулу (2) к $[x_0;\ x_0 + \Delta x]$ при $\Delta x > 0$. Эта формула дает точное выражение приращения функции при любом конечном приращении Δx аргумента.

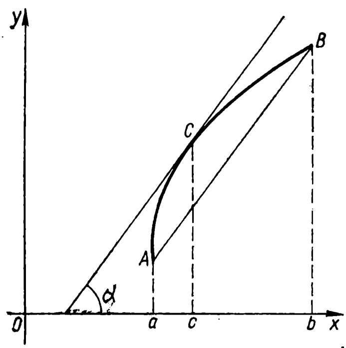


Рис. 405. Геометрический смысл теоремы Лагранжа.

Теорема Коши (обобщенная теорема о среднем значении). Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;\ b]$, дифференцируемы по крайней мере в открытом промежутке $]a;\ b[$, $g'(x) \neq 0$ в $]a;\ b[$, тогда внутри $[a;\ b]$ найдется такая точка c, в которой

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3}$$

Формулу (3) называют *формулой Коши*. Геометрический смысл теоремы. Угловой коэффициент касательной к кривой в точке C, заданной параметрически: $x = g(t)$, $y = f(t)$ (см. рис. 405), где точка A соответствует значению параметра $t = a$, а точка B — значению $t = b$, выражается формулой

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Формула Тейлора. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ непрерывна и имеет непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно; тогда выполняется равенство (*формула Тейлора*)

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots +$$
$$+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}, \quad \xi = a + \theta(b-a),$$
$$0 < \theta < 1. \tag{4}$$

Последнее слагаемое называют *остаточным членом в форме Лагранжа:*

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

Если a — постоянная, а b — переменная величины, то вместо b пишут x:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n +$$
$$+ \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad \xi = a + \theta(x-a), \quad 0 < \theta < 1. \qquad (5)$$

Из выражения (5) при $a = 0$ получают *формулу Маклорена:*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Остаточный член в форме Коши имеет вид

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-a),$$

или (при $\xi = a + \theta(x-a)$, $0 < \theta < 1$)

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1}.$$

Остаточный член в форме Шлемильха — Роша

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!p}(x-\xi)^{n+1-p}(x-a)^p, \quad p > 0.$$

§ 4. Исследование функции с помощью производных

Условие постоянства функции. Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет производную $f'(x)$ по крайней мере в интервале $]a; b[$. Для того чтобы данная функция $f(x)$ была постоянной на отрезке $[a; b]$, необходимо и достаточно выполнение условия $f'(x) = 0$ во всех точках интервала $]a; b[$.

Условие монотонности функции. Теорема 2. Для того чтобы функция $f(x)$, имеющая конечную или бесконечную производную, в каждой точке отрезка $[a; b]$ была возрастающей (убывающей), необходимо и достаточно выполнение условий: $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$; $f'(x) \neq 0$ ни на каком отрезке, входящем в состав отрезка $[a; b]$. Геометрический смысл теоремы. Если на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ возрастает, то касательная к кривой $y = f(x)$ в каждой точке на этом отрезке образует с осью Ox острый угол φ или (в отдельных точках) горизонтальна; тангенс этого угла неотрицателен $(f'(x) = \operatorname{tg}\varphi \geqslant 0)$ (рис. 406); если функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a; b]$, то угол наклона касательной тупой или (в отдельных точках) касательная горизонтальна. Тангенс этого угла неположителен. Следовательно, по знаку производной функции можно определить, возрастает или убывает функция.

Для определения интервалов строгого возрастания (строгого убывания) функции надо решить неравенство

$$f'(x) > 0 \qquad (f'(x) < 0).$$

Кроме того, надо рассмотреть, как размещены в этих интервалах точки, в которых $f(x)$ равна нулю, а именно: не заполняют ли они сплошь какую-нибудь часть интервала, в котором рассматриваем функцию.

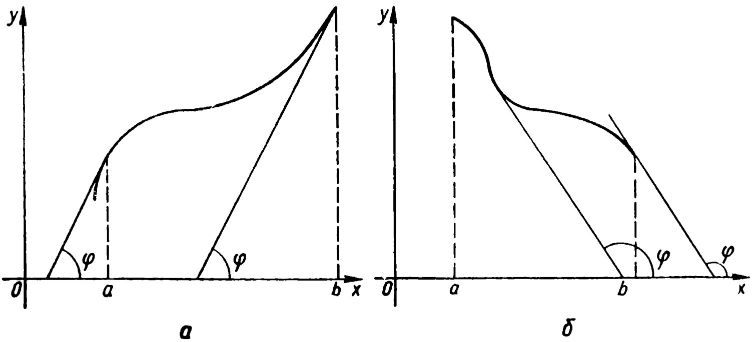


Рис. 406. Функции: возрастающая (*а*); убывающая (*б*).

Пример 1. Определить интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = \frac{3x^2}{4 - x^2}.$$

Прежде всего находим область определения функции. Функция существует при всех значениях x, кроме $x = -2$ и $x = 2$, т. е. область ее определения: $]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; \infty[$. Находим производную функции

$$f'(x) = 3\frac{2x(4 - x^2) + x^2 \cdot 2x}{(4 - x^2)^2} = 3\frac{8x}{(4 - x^2)^2}.$$

Знаменатель последней дроби положителен при всех значениях x (кроме $x = \pm 2$). Дробь положительна при $x > 0$. Данная функция возрастает на $]0; 2[\cup]2; \infty[$. Дробь отрицательна при $x < 0$. Следовательно, данная функция убывает на $]-\infty; -2[\cup]-2; 0[$. Производная равна нулю при $x = 0$. В этой точке функция переходит от убывания к возрастанию.

Пример 2. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x) = 4x^2 + x.$$

Находим производную:

$$f'(x) = 8x + 1.$$

Чтобы найти интервалы возрастания функции, решаем неравенство

$$8x + 1 > 0;$$

получаем

$$x < -\frac{1}{8}.$$

Следовательно, данная функция возрастает в интервале $\left[-\frac{1}{8};\ \infty\right[$. Решив неравенство

$$8x + 1 < 0,$$

$$x < -\frac{1}{8},$$

находим, что данная функция убывает в интервале $\left]-\infty;\ -\frac{1}{8}\right[$.

Максимум и минимум функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$.

Функция $y = f(x)$ имеет *максимум* в точке $x = x_0$, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что при $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ выполняется неравенство

$$f(x) < f(x_0),$$

т. е. значение функции в этой точке больше, чем ее значение во всех других точках, достаточно близких к x_0.

Функция $y = f(x)$ имеет *минимум* в точке $x = x_0$, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что при $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ выполняется неравенство

$$f(x) > f(x_0),$$

т. е. значение функции в этой точке меньше, чем ее значение во всех других точках, достаточно близких к x_0.

Если в некоторой точке функция имеет максимум или минимум, то говорят, что в этой точке функция имеет *экстремум*, а значение функции в этой точке называют *экстремальным*. Функция, определенная на отрезке, может достигать экстремума лишь во внутренних точках этого отрезка; максимум (минимум) не обязательно является наибольшим (наименьшим) значением функции в области определения функции: вне рассматриваемой окрестности точки x_0 функция может принимать бо́льшие (меньшие) значения, чем в этой точке; функция может иметь несколько максимумов и минимумов в области своего определения.

Необходимое условие существования экстремума функции. Если функция $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ имеет экстремум, то ее производная в этой точке или равна нулю, или не существует.

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, но функция при этом сохраняет непрерывность, называются *критическими* точками функции. Следовательно, функция может иметь экстремум только в критической точке, но не всякая критическая точка является точкой экстремума. Например, для функции $y=x^3$ точка $x=0$ является критической, так как производная $y'=3x^2$ равна нулю в этой точке, но ни максимума, ни минимума в этой точке функция не имеет (см. рис. 26). Производная функции $y=\sqrt[3]{x}$ при $x=0$ бесконечна, т. е. точка $x=0$ является критической, но в этой точке функция не имеет экстремума. При $x<0$ $y<0$, при $x>0$ $y>0$, а при $x=0$ $y=0$ (см. рис. 36).

Достаточные условия существования экстремума функции. Если функция $y=f(x)$ непрерывна в интервале $]a;\ b[$, содержащем критическую точку x_0, дифференцируема во всех точках этого интервала, за исключением, может быть, точки x_0, и если производная этой функции $f'(x)$ меняет знак при переходе x через критическую точку x_0, то функция $y=f(x)$ имеет экстремум при $x=x_0$. При этом если знак производной меняется с «+» на «—», то при $x=x_0$ функция имеет максимум, а если знак производной меняется с «—» на «+», то при $x=x_0$ функция имеет минимум. Если же при переходе через критическую точку первая производная функции не меняет знака, то экстремума нет.

Исследование функции на экстремум с помощью первой производной

П р а в и л о д л я и с с л е д о в а н и я ф у н к ц и и н а э к с т р е м у м с п о м о щ ь ю п е р в о й п р о и з в о д н о й:

1) находят первую производную $f'(x)$;

2) находят критические точки функции, для чего решают уравнение $f'(x)=0$;

3) определяют действительные его корни, а также те точки, в которых производная не существует.

Пусть критическими точками являются точки $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, которые находятся в интервале $]a;\ b[$.

Размещают все критические точки в порядке возрастания их абсцисс в интервале $]a;\ b[$:

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b.$$

В каждом из интервалов $]a;\ x_1[$, $]x_1;\ x_2[$, ..., $]x_k;\ x_{k+1}[$, ..., $]x_n;\ b[$ выбирают произвольную точку и устанавливают в этой точке знак первой производной.

Рассматривают знаки $f'(x)$ в двух соседних интервалах, последовательно переходя слева направо от первого интервала до последнего. Если, например, производная $f'(x)$ меняет знак с «—» на «+», то функция имеет минимум в данной критической точке. Если же в двух соседних интервалах производная $f'(x)$ не меняет знака, то экстремума в рассматриваемой критической точке нет.

Вычисляют значения функции в точках, где она достигает экстремума (экстремальные значения функции).

Ход графика функции, имеющей экстремум, в окрестности критической точки показан на рис. 407.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1.$$

Находим производную

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1).$$

Решаем уравнение $f'(x) = 0$, т. е. уравнение

$$6x(x-1) = 0,$$

и получаем критические точки

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

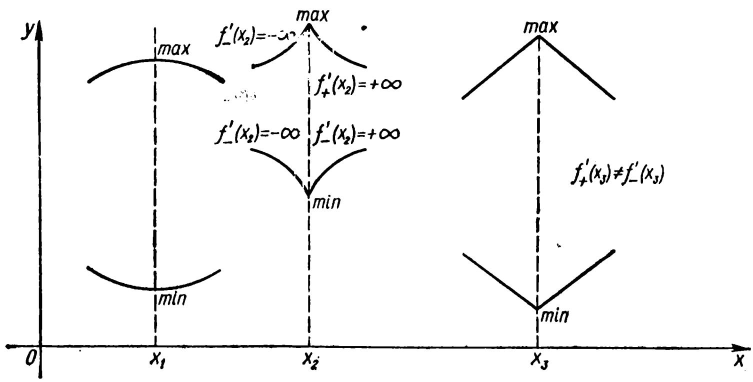


Рис. 407. Экстремум функции.

Исследуем знак производной в окрестности каждой из критических точек. Рассматриваем интервалы $]-\infty;\ 0[$, $]0;\ 1[$, $]1;\ +\infty[$. Выбираем внутри каждого из этих интервалов произвольную точку и определяем в этой точке знак первой производной.

В первом интервале берем точку -1, во втором — точку $\frac{1}{2}$, в третьем — точку 2. Соответственно имеем

$$f'(-1) > 0,$$

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) < 0,$$

$$f'(2) > 0.$$

В критической точке $x = 0$ функция имеет максимум, в критической точке $x = 1$ — минимум.

Вычисляем экстремальные значения функции:

$$f(0) = 1,$$

$$f(1) = 0.$$

Исследование функции на экстремум с помощью второй производной

Если производная функции $y = f(x)$ равна нулю при $x = x_1$, а вторая производная при этом значении аргумента не равна нулю, то функция $y = f(x)$ при $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x) < 0$, и минимум, если $f''(x) > 0$.

Правило для исследования функции на экстремум с помощью второй производной:

1) находят первую производную функции $f(x)$. Решая уравнение $f'(x) = 0$, находят действительные корни, которые и определяют критические точки;

2) находят вторую производную. Исследуют в каждой критической точке знак второй производной. Если в критической точке $x = x_1$ вторая производная $f''(x_1) < 0$, то в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум, если же $f''(x_1) > 0$, то в точке x_1 функция $f(x)$ имеет минимум. Если вторая производная равна нулю или не существует, то исследование функции на экстремум надо производить с помощью первой производной.

Пример 4. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2.$$

Находим первую производную

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

Решаем уравнение $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 6x - 9 = 0,$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 3.$$

Так как производная существует при любом x, критическими будут точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 3$.

Находим вторую производную:

$$f''(x) = 6x - 6.$$

Определяем знак второй производной в каждой критической точке: $f''(-1) < 0$, функция при $x_1 = -1$ имеет максимум; $f''(3) > 0$, функция при $x_2 = 3$ имеет минимум, причем

$$f_{\max} = f(-1) = 7, \qquad f_{\min} = f(3) = -25.$$

Исследование функции на экстремум с помощью формулы Тейлора

Если в некоторой точке $x = x_0$ $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) = 0$, то можно производить исследование функции на экстремум в этой точке с помощью производных высших порядков. При этом используется лемма о сохранении знака: если функция $y = f(x)$ непрерывна и отлична от нуля в точке x_0, то она отлична от нуля и имеет знак, совпадающий со знаком $f(x_0)$, и в некоторой окрестности точки x_0.

Пусть функция $y = f(x)$ при $x = x_0$ имеет производные до n-го порядка включительно и

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \text{ а } f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

и $f^{(n)}(x)$ при $x = x_0$ непрерывна. Тогда при n нечетном функция $y = f(x)$ в точке x_0 не имеет экстремума, а при n четном имеет максимум, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и минимум, если $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Отсюда следует правило для исследования функции на экстремум с помощью производных высших порядков.

Пример 5. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = 5x^4.$$

Находим производные:

$$f'(x) = 20x^3, \quad f''(x) = 60x^2, \quad f'''(x) = 120x, \quad f^{(IV)}(x) = 120.$$

В критической точке $x = 0$ $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, а $f^{(IV)}(0) \neq 0$, причем $f^{(IV)}(0) = 120 > 0$. Следовательно, в точке $x = 0$ функция имеет минимум.

Пример 6. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = 2x^5 + 1.$$

Находим производные:

$$f'(x) = 10x^4, \quad f''(x) = 40x^3, \quad f'''(x) = 120x^2,$$
$$f^{(IV)}(x) = 240x, \quad f^{(V)}(x) = 240 \neq 0.$$

Следовательно, экстремума в точке $x = 0$ функция не имеет.

Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Если функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то на этом отрезке всегда найдутся точки, в которых она принимает наибольшее и наименьшее значения. Эти значения функция принимает или в критических точках, или на концах отрезка $[a; b]$.

Правило. Чтобы определить наибольшее (наименьшее) значение функции на отрезке, надо:

1) определить критические точки функции;

2) вычислить значения функции в критических точках и на концах отрезка;

3) выбрать из полученных значений функции наибольшее (наименьшее) значение функции на отрезке $[a; b]$.

Следует обратить внимание на важный частный случай. Если точка x_1 — единственная точка экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, то $f(x_1)$ — наибольшее значение функции $f(x)$ на этом отрезке, если $f(x_1)$ — максимум, и $f(x_1)$ — наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, если $f(x_1)$ — минимум функции.

Пример 7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1$$

на отрезке $[-1; 2]$.

Находим критические точки, принадлежащие данному отрезку. Первая производная

$$f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2,$$

откуда

$$x^2(x^2-4x+3)=0;$$

корни этого уравнения: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=3$; точка $x=3\notin[-1;2]$.

Значения функции в критических точках $x=0$ и $x=1$ и на концах отрезка $[-1;\ 2]$:

$$f(0)=1,\quad f(1)=2,$$

$$f(-1)=-10,\quad f(2)=-7.$$

Следовательно, на данном отрезке наибольшее значение функции

$$f_{\max}=f(1)=2,$$

наименьшее значение

$$f_{\min}=f(-1)=-10.$$

Выпуклость кривой. Точки перегиба

Пусть $y=f(x)$ — дифференцируемая функция. Кривая $y=f(x)$ называется выпуклой (вогнутой) в точке $x=x_0$, если существует такая окрестность точки $x=x_0$, во всех точках которой кривая $y=f(x)$ расположена под (над) касательной к этой кривой в точке $M(x_0;\ f(x_0))$. Если кривая выпуклая (вогнутая) во всех точках некоторого интервала, то она называется выпуклой (вогнутой) на этом интервале (рис. 408).

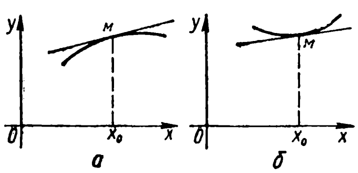


Рис. 408. Кривые: выпуклая *(а)*; вогнутая *(б)*.

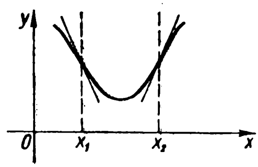


Рис. 409. Точки перегиба кривой.

Достаточные условия, при которых кривая $y=f(x)$ выпуклая или вогнутая. Если во всех точках интервала $]a;\ b[$ $f''(x)<0$ $(f''(x)>0)$, то кривая $y=f(x)$ на этом интервале выпуклая (вогнутая).

Точкой перегиба непрерывной кривой называется точка, при переходе через которую кривая меняет выпуклость на вогнутость или наоборот. В этой точке касательная к кривой пересекает кривую (рис. 409).

Достаточные условия, при которых данная точка кривой является точкой перегиба. Пусть кривая определена уравнением $y=f(x)$. Если $f''(a)=0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через значение $x=a$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x=a$ является точкой перегиба.

Правило для нахождения точек перегиба и исследования графика функции на выпуклость и вогнутость:

1) находят вторую производную $f''(x)$;

2) решают уравнение $f''(x) = 0$, а также определяют те значения x, при которых $f''(x)$ не существует;

3) исследуют знак второй производной $f''(x)$ в окрестности каждого корня уравнения $f''(x)$ и тех точек, в которых $f''(x)$ не существует. Пусть $x = x_1$ является одной из таких точек. Определяют знак $f''(x)$ при $x < x_1$ и при $x > x_1$. Если знак второй производной меняется, то точка $M(x_1; f(x_1))$ является точкой перегиба данной кривой. Если же знак второй производной $f''(x)$ не меняется, то точка $M(x_1; f(x_1))$ не является точкой перегиба. В точках, в которых $f''(x) > 0$, кривая вогнутая, а в точках, в которых $f''(x) < 0$, кривая выпуклая.

Пример 8. Найти точку перегиба и исследовать на выпуклость и вогнутость график кривой, заданной уравнением

$$y = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Находим первую и вторую производные:

$$y' = 2e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-3}, \quad y'' = 2e^{-\frac{1}{x^2}}x^{-4}(2x^{-2} - 3).$$

Вторая производная $y'' = 0$ при $x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x = 0$, но при $x = 0$ функция не определена.

Исследуем знаки второй производной в окрестности корней $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ и $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$: для $x < \sqrt{\frac{2}{3}}$ $y'' > 0$, для $x > \sqrt{\frac{2}{3}}$ $y'' < 0$. Знак второй производной изменился, следовательно, точка $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ является точкой перегиба.

Для $x < -\sqrt{\frac{2}{3}}$ $y'' < 0$, для $x > -\sqrt{\frac{2}{3}}$ $y'' > 0$, следовательно, и точка $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ является точкой перегиба.

На интервалах $\left]-\infty; -\sqrt{\frac{2}{3}}\right[$, $\left]\sqrt{\frac{2}{3}}; \infty\right[$ кривая выпуклая, на интервалах $\left]-\sqrt{\frac{2}{3}}; 0\right[$, $\left]0; \sqrt{\frac{2}{3}}\right[$ кривая вогнутая.

§ 5. Построение графиков функций с помощью производных

Исследование функций с помощью производных и построение их графиков производят по такой схеме.

1. Находят область определения функции (см. § 2 разд. 2 ч. I), устанавливают при этом точки разрыва, их характер и интервалы непрерывности функции.

2. Исследуют функцию на четность или нечетность, на периодичность, определяют точки пересечения кривой с осями координат, интервалы знакопостоянства (см. § 2 разд. 2 ч. I).

3. Находят точки экстремума функции и вычисляют значения функции в этих точках, устанавливают интервалы монотонности функции (см. § 4 разд. 1 ч. II).

4. Находят точки перегиба графика функции и исследуют график функции на выпуклость или вогнутость (см. § 4 разд. 1 ч. II).

5. Находят асимптоты графика функции (см. § 2 разд. 2 ч. I).

6. Строят график функции. Для большей точности эскиза графика можно рекомендовать построить еще и отдельные точки графика, придав конкретные значения независимой переменной и определив соответствующие значения функции.

Желательно выполнять чертеж графика наряду с исследованием функции, иногда удобнее вначале построить на координатной плоскости асимптоты, точки экстремума, точки перегиба графика функции.

Если функция окажется четной (нечетной) или периодической, то следует учесть особенности графиков таких функций.

Пример. Исследовать функцию

$$y=\frac{(x+1)^2}{x-2}$$

и построить ее график.

Область определения функции: $]-\infty;\ 2[\ \cup\ ]2;\ \infty[$. Точка $x=2$ — точка разрыва второго рода. Функция общего вида, непериодическая. Точки пересечения с осями координат: $(-1;\ 0)$, $\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$.

На интервале $]-\infty;\ 2[$ функция отрицательная, на интервале $]2;\ \infty[$ — положительная.

Находим точки экстремума и определяем интервалы монотонности функции.

Первая производная

$$f'(x)=\frac{2(x+1)(x-2)-(x+1)^2}{(x-2)^2}=\frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}.$$

Для нахождения критических точек решаем уравнение $f'(x)=0$, т. е. $(x+1)(x-5)=0$, откуда $x_1=-1$, $x_2=5$ ($x=2$ — точка, в которой производная не существует, но это значение мы не рассматриваем, так как $x=2$ не принадлежит области определения функции). Критические точки $x_1=-1$, $x_2=5$ и точка $x=2$ делят область определения функции на такие интервалы: $]-\infty;\ -1[$, $]-1;\ 2[$, $]2;\ 5[$, $]5;\ \infty[$. В каждом из этих интервалов производная сохраняет соответственно знак «+», «—», «—», «+».

Следовательно, на интервалах $]-\infty;\ -1[\ \cup\ ]5;\ \infty[$ функция возрастает, а на $]-1;\ 2[\ \cup\ ]2;\ 5[$ убывает.

При $x=-1$ функция имеет максимум: $y_{max}=0$. При $x=5$ функция имеет минимум: $y_{min}=12$.

Находим точки перегиба графика кривой и исследуем кривую на выпуклость и вогнутость.

Вторая производная

$$f''(x) = \left[\frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2}\right]' =$$

$$= \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x-5)\,2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{18}{(x-2)^3}.$$

Точек перегиба нет.

Асимптоты. Вертикальные асимптоты найдем, приравнивая знаменатель нулю:

$$x - 2 = 0, \quad x = 2.$$

Вертикальная асимптота одна, ее уравнение

$$x = 2.$$

Для нахождения горизонтальных асимптот определяем

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+1)^2}{x-2} = \pm\infty,$$

а это означает, что горизонтальных асимптот нет.

Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x+1)^2}{x(x-2)} = 1,$$

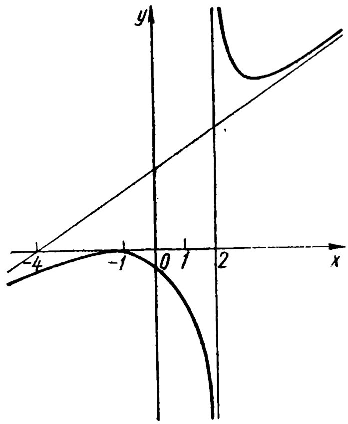


Рис. 410. $y = \frac{(x+1)^2}{x-2}$.

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{(x+1)^2}{x-2} - x\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4x+1}{x-2} = 4.$$

Следовательно, $y = x + 4$ — наклонная асимптота.

Полученные сведения наносим на рисунок и получаем эскиз кривой (рис. 410).

§ 6. Построение графиков функций $f'(x)$ и $f''(x)$ по графику функции $f(x)$

Во многих прикладных науках, например в теории машин и механизмов (при построении плана-диаграммы ускорений по плану скоростей и т. п.), часто возникает необходимость решения задачи

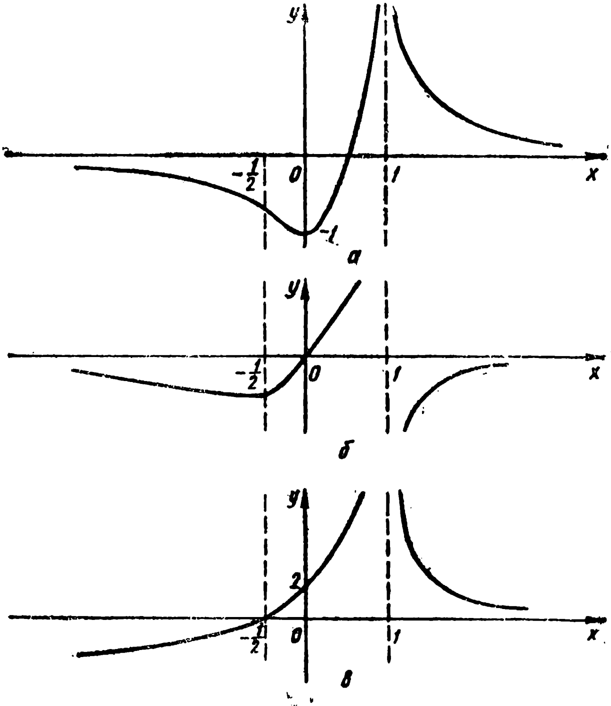


Рис. 411. Построение графиков $f'(x)$ и $f''(x)$ по графику $f(x)$: $y = f(x)$ *(а)*; $y = f'(x)$ *(б)*; $y = f''(x)$ *(в)*.

о построении графиков первой и второй производных функции при наличии графика заданной функции.

Пусть задана некоторая дифференцируемая функция $y = f(x)$. Первая и вторая производные этой функции в свою очередь являются функциями от x. Поэтому графики функций $f'(x)$ и $f''(x)$ можно строить по общим правилам построения графиков функций. Однако если известен график функции $y = f(x)$, то построение графиков функций $f'(x)$ и $f''(x)$ иногда значительно упрощается. При этом необходимо учесть такие замечания:

а) в точках, где функция $f(x)$ имеет экстремум, $f'(x) = 0$;

б) в точках перегиба функции $f(x)$ производная $f'(x)$ имеет экстремум (максимум, если производная при переходе от меньшего значения x к большему через точку перегиба функции $f(x)$ вначале возрастает, а затем убывает, и минимум, если производная изменяется наоборот), при изменении x от меньших значений к большим на интервалах выпуклости заданной функции $f(x)$ производная $f'(x)$ убывает, а на интервалах вогнутости — возрастает;

в) точки перегиба производной $f'(x)$ находим обычным способом. Наклонные асимптоты функции $f(x)$ соответствуют горизонтальным асимптотам производной $f'(x)$.

Замечание. Эти соображения используем и при построении графика второй производной $f''(x)$, причем следует помнить, что роль основного играет график первой производной $f'(x)$.

Пример. Построить график функции

$$y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

и графики ее производных y', y''.

а) $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$. Область определения: $]-\infty;\ 1[\ \cup\ ]1;\ \infty[$. Прямая $x = 1$ — вертикальная асимптота. Точка $(0;\ -1)$ — точка минимума. Точка $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{8}{9}\right)$ — точка перегиба. Кривая проходит через точки $(0;\ -1)$ и $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$. Для $x \in \left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right[$ кривая выпуклая, для $x \in \left]-\frac{1}{2};\ 1\right[\ \cup\ \left]1;\ \infty\right[$ — вогнутая.

б) $y' = \frac{-2x}{(x-1)^3}$. Область определения: $]-\infty;\ 1[\ \cup\ ]1;\ \infty[$. Кривая проходит через точку $(0;\ 0)$. Точка $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{8}{27}\right)$ — точка минимума. Для $x \in\ ]1;\ \infty[$ $y' < 0$, на этом же промежутке кривая выпуклая.

в) $y'' = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$. Кривая проходит через точки $\left(-\frac{1}{2};\ 0\right)$ и $(0;\ 2)$. Для $x \in\ ]-\infty;\ 1[\ \cup\ ]1;\ \infty[$ кривая вогнутая.

Графики функций $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$, $y' = -\frac{2x}{(x-1)^3}$ и $y'' = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}$ приведены на рис. 411.

§ 7. Правило Лопиталя

Иногда при исследовании функции для построения графика приходится иметь дело с неопределенностями вида

$$\frac{0}{0};\ \frac{\infty}{\infty};\ 0\cdot\infty;\ \infty-\infty;\ 0^0;\ 1^\infty;\ \infty^0.$$

Во многих случаях раскрытие неопределенности выполняется с помощью правил Лопиталя.

Неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены в интервале $]a;\ b[$, конечном или бесконечном.

Раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ — это значит найти предел

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

при условии, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}\varphi(x)=0$ и $\varphi(x)\neq 0$ для $\forall x\in]a;$ $c[$, где $a<c<b$, или найти предел

$$\lim_{x\to b-0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

при условии, что $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}\varphi(x)=0$ и $\varphi(x)\neq 0$ для $\forall x\in]c;$ $b[$, где $a<c<b$.

Действительно, имеем «неопределенность», поскольку предел, о котором здесь идет речь, может существовать и может не существовать, а если и существует, то его значение неизвестно.

Теорема 1 (первое правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в интервале $]a;\ b[$.

Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}\varphi(x)=0$, $\varphi'(x)\neq 0$ для $\forall x\in]a;$ $c_1[$, $a<c_1<b$; существует предел $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, конечный или бесконечный, то $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Если $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}\varphi(x)=0$, $\varphi'(x)\neq 0$ для $\forall x\in]c_2;$ $b[$, $a<c_2<b$; существует предел $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, конечный или бесконечный, то $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Следствие. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в интервалах $]x_0-\delta;\ x_0[$ и $]x_0;\ x_0+\delta[$, где $\delta>0$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=0$, $\varphi'(x)\neq 0$ для $\forall x\in]x_0-\delta;$ $x_0[\ \cup\ ]x_0;\ x_0+\delta[$; существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, конечный или бесконечный, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Неопределенность вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Теорема 2 (второе правило Лопиталя). Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в интервале $]a;\ b[$, конечном или бесконечном.

Если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a+0}\varphi(x)=\infty$, $\varphi'(x)\neq 0$ для $\forall x\in]a;$ $c_1[$, $a<c_1<b$; существует предел $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, конечный или бесконечный, то $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Если $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to b-0}\varphi(x)=\infty$, $\varphi'(x)\neq 0$ для $\forall x\in]c_2;\ b[$, $a<c_2<b$; существует предел $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=A$, конечный или бесконечный, то $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Следствие. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в интервалах $]x_0-\delta;\ x_0[$ и $]x_0;\ x_0+\delta[$, где $\delta>0$.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$, $\varphi'(x)\neq 0$ для $\forall x\in]x_0-\delta;\ x_0[\cup]x_0;\ x_0+\delta[$; существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, конечный или бесконечный, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Этими следствиями на практике пользуются чаще всего.

Неопределенность вида $0\cdot\infty$ с помощью преобразования

$$f(x)\cdot\varphi(x)=\frac{f(x)}{1/\varphi(x)}$$

приводится к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.

Неопределенность вида $\infty-\infty$ с помощью преобразования

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{\dfrac{1}{\varphi(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}\cdot\dfrac{1}{\varphi(x)}}$$

приводится к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.

Неопределенности вида 0^0, 1^∞, ∞^0. Использовав равенство

$$f(x)^{\varphi(x)}=e^{\varphi(x)\ln f(x)}$$

и учтя непрерывность показательной функции, будем иметь

$$\lim_{x\to a+0} f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a+0}\varphi(x)\ln f(x)}$$

или

$$\lim_{x\to b-0} f(x)^{\varphi(x)}=e^{\lim\limits_{x\to b-0}\varphi(x)\ln f(x)}.$$

Следовательно, неопределенности этих видов приводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$, которая в свою очередь приводится к неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$.

Пример 1. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{-2\alpha x}}{\ln(1+x)}.$$

Имеем $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(e^{\alpha x}-e^{-2\alpha x})=1-1=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)=\ln 1=0$. В любой окрестности точки $x=0$, не содержащей точки $x=-1$, существуют $f'(x)$, $\varphi'(x)$, причем

$$\varphi'(x)=\frac{1}{1+x}\neq 0\ (x>-1).$$

Существует предел отношения производных

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x}+2\alpha e^{-2\alpha x}}{1/(1+x)}=3\alpha.$$

Правило Лопиталя применимо, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-e^{-2\alpha x}}{\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\alpha e^{\alpha x}+2\alpha e^{-2\alpha x}}{1/(1+x)}=3\alpha.$$

Пример 2. Найти предел

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right).$$

Имеем неопределенность вида $\infty-\infty$. Приведем ее к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, а затем применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}.$$

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

Воспользуемся тождеством

$$(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}=e^{\operatorname{ctg} x\ln\operatorname{tg} x}.$$

Но

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{ctg} x\ln\operatorname{tg} x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x}=0,$$

откуда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = e^0 = 1.$$

Замечание. Если отношение производных $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ опять является неопределенностью, то правило Лопиталя применяют повторно, пока не избавятся от неопределенности или не обнаружат, что нужные пределы не существуют.

§ 8. Приближенное вычисление корней уравнения

Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 0.$$

Если это уравнение — алгебраическое, причем степени не выше четвертой, то вообще существуют формулы для нахождения корней этого уравнения. Для уравнений выше четвертой степени в общем случае таких формул не существует.

Рассмотрим некоторые методы приближенного вычисления корней уравнения

$$f(x) = 0.$$

Метод хорд

Пусть задано уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ — непрерывная дважды дифференцируемая функция на $[a;\ b]$.

Выделим на $[a;\ b]$ отрезок $[x_1;\ x_2]$ такой, что внутри этого отрезка функция монотонна, а на концах его значения функции $f(x)$ имеют разные знаки. Пусть $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$ (рис. 412). Поскольку функция $y = f(x)$ непрерывна на $[x_1;\ x_2]$, то ее график пересечет ось абсцисс в какой-то одной точке между x_1 и x_2.

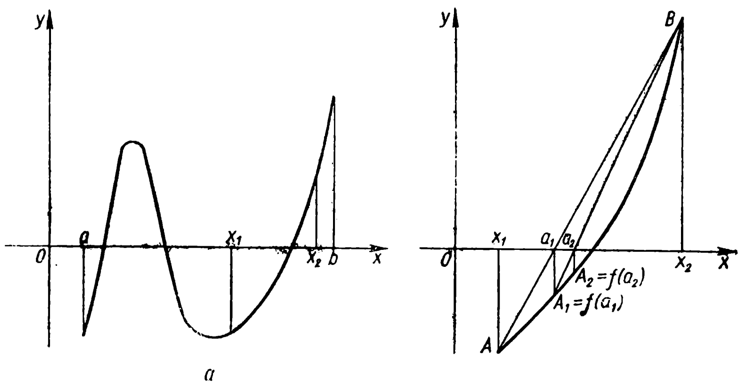


Рис. 412. Метод хорд: $f(x_1) < 0$ (а); $f(x_1) > 0$ (б).

Проведем хорду AB, которая соединит концы кривой $y = f(x)$ с абсциссами x_1 и x_2. Абсцисса a_1 точки пересечения этой хорды с осью абсцисс является приближенным значением корня уравнения $f(x) = 0$:

$$a_1 = \frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}.$$

Для получения более точного значения корня определяем $f(a_1)$. Если $f(a_1) < 0$, то повторяем предыдущий процесс, применяя последнюю формулу к отрезку $[x_1; a_1]$. Повторяя этот процесс построения точек несколько раз, будем, очевидно, получать более точные значения корня a_2, a_3, ...

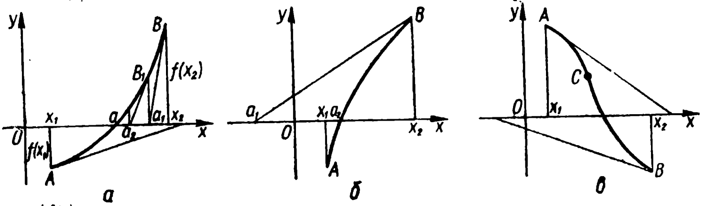


Рис. 413. Метод касательных.

Метод касательных (способ Ньютона)

Пусть опять $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$, причем на $[x_1; x_2]$ первая производная не меняет свой знак. Тогда в интервале $]x_1; x_2[$ есть один корень уравнения $f(x) = 0$. Допустим, что и вторая производная сохраняет свой знак на $[x_1; x_2]$, т. е. кривая или выпуклая, или вогнутая на $[x_1; x_2]$.

Проведем касательную к кривой в точке B (рис. 413, *а*). Абсцисса a_1 точки пересечения касательной с осью абсцисс является приближенным значением корня:

$$a_1 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

Проводя касательную в точке $B_1(a_1; f(a_1))$, аналогично находим более точное значение корня a_2 (рис. 413, *б*). Повторив этот процесс несколько раз, сможем вычислить приближенное значение корня с любой необходимой точностью.

Заметим, что касательную надо проводить в том конце дуги, в котором знаки функции и ее второй производной совпадают. Это замечание справедливо и для случая, когда $f_1(x) < 0$.

Если касательная проведена в левом конце интервала, то для a_1 справедлива такая формула:

$$a_1 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Если внутри интервала $]x_1; x_2[$ есть точка перегиба C, то способ касательных может дать приближенное значение корня, которое лежит вне интервала $]x_1; x_2[$ (рис. 413, *в*).

Заметим, что на практике часто применяют комбинированный метод, который заключается в поочередном применении метода касательных и метода хорд. Применяя на $[x_1; x_2]$ одновременно метод хорд и метод касательных, получаем две точки: a_1 и $\bar{a}_1$, лежащие по разные стороны от искомого корня a, так как $f(a_2)$ и $f(\bar{a}_1)$ имеют разные знаки. Теперь уже на $[a_1; \bar{a}_1]$ применяют метод хорд и метод касательных. Получаем еще два числа: a_2 и $\bar{a}_2$, которые еще ближе к значению корня. Продолжаем этот процесс до тех пор, пока разность между найденными приближенными значениями не станет меньше допустимой.

Пример. Найти действительный корень уравнения

$$f(x) = x^3 + 3x - 2x^2 - 5 = 0$$

с точностью до 10^{-4}.

Сначала убеждаемся, что уравнение имеет лишь один действительный корень. Это следует из того, что производная $f'(x) = 3x^2 + 3 - 4x > 0$. Из условий $f(1) = -3 < 0$ и $f(2) = 1 > 0$ делаем вывод, что данное уравнение имеет единственный положительный корень, который находится в интервале $]1; 2[$.

а) Методом хорд получим

$$a_1 = \frac{1 \cdot 1 - 2 \cdot (-3)}{1 - (-3)} = \frac{7}{4} = 1{,}75.$$

Но $f(a_1) = f(1{,}75) = -0{,}5156 < 0$, а $f(2) = 1 > 0$, следовательно, $1{,}75 < a_2 < 2$.

Применим еще раз метод хорд к отрезку $[1{,}75; 2]$:

$$a_2 = \frac{1{,}75 \cdot 1 - 2 \cdot (-0{,}5156)}{2 - (-0{,}5156)} = 1{,}8350.$$

Проверяем: $f(1{,}8350) = -0{,}05059 < 0$, следовательно, $1{,}835 < a_3 < 2$. Уменьшим интервал. Действительно, $f(1{,}9) = 0{,}339 > 0$, следовательно, $1{,}835 < a_3 < 1{,}9$.

Применим еще раз метод хорд к отрезку $[1{,}835; 1{,}9]$:

$$a_3 = 1{,}8434.$$

Далее, $a_4 = 1{,}8437$, $a_5 = 1{,}8438$; но $f(1{,}8437) < 0$, а $f(1{,}8438) > 0$, следовательно, корень $a_5 \approx 1{,}8438$ и будет искомым приближенным корнем заданного уравнения.

б) Методом касательных результат можно получить быстрее. Применим этот метод.

Поскольку $f(2) = 1 > 0$ и $f''(x) = 6x - 4 > 0$ на $[1; 2]$, а первая производная $f'(x)$ также сохраняет свой знак на $[1; 2]$, то метод касательных можно применить.

Имеем

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3, \quad f'(2) = 7,$$

$$a_1 = 2 - \frac{1}{7} = 1{,}857,$$

$$a_2 = 1{,}857 - \frac{f(1{,}857)}{f'(1{,}857)} = 1{,}857 - \frac{0{,}0779}{5{,}9275} = 1{,}8439,$$

$$a_3 = 1{,}8439 - \frac{f(1{,}8439)}{f'(1{,}8439)} = 1{,}8438.$$

Следовательно, a_3 дает уже нужную точность.

РАЗДЕЛ 2

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ВСЕХ ВИДОВ ФУНКЦИЙ

Исследование функций с помощью производных и построение их графиков будем производить по схеме § 5 разд. 1 ч. II. В отдельных случаях будем производить дополнительные исследования. Заметим, что исследование иногда будет упрощаться, а порядок исследования — нарушаться.

§ 1. Примеры построения графиков функций вида $y=f(x)$ в декартовой системе координат

Пример 1. Построить график целой рациональной функции

$$y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5.$$

Область определения функции: $]-\infty;\ \infty[$. Функция непрерывна при всех $x \in]-\infty;\ \infty[$. Функция четная.

График функции симметричен относительно оси ординат, пересекает ось ординат в точке $(0;\ -5)$, ось абсцисс — в точках $\left(-\sqrt{\sqrt[3]{4}+1};\ 0\right)$ и $\left(\sqrt{\sqrt[3]{4}+1};\ 0\right)$. Интервалы знакопостоянства на $\left]-\infty;\ -\sqrt{\sqrt[3]{4}+1}\right[$, $\left]\sqrt{\sqrt[3]{4}+1};\ \infty\right[$ функция положительна, на $\left]-\sqrt{\sqrt[3]{4}+1};\ \sqrt{\sqrt[3]{4}+1}\right[$ — отрицательна.

Определяем критические точки. Первая производная

$$y' = 6x^5 - 12x^3 + 6x.$$

Решаем уравнение $y' = 0$, т. е. уравнение

$$x(6x^4 - 12x^2 + 6) = 0.$$

Имеем $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. При переходе через точки $x_2 = 1$ и $x_3 = -1$ производная не меняет знака: точки $x_2 = 1$; $x_3 = -1$ не являются точками экстремума данной функции. При переходе через точку $x_1 = 0$ функция меняет знак с «—» на «+», следовательно, в точке $x_1 = 0$ функция достигает минимума $y_{\min} = -5$, причем при $-\infty < x < 0$ функция убывающая, при $0 < x < +\infty$ — возрастающая.

Находим вторую производную

$$y'' = 30x^4 - 36x^2 + 6.$$

Приравниваем ее нулю:

$$y'' = 30x^4 - 36x^2 + 6 = 0,$$

откуда $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $x_4 = 1$. При переходе через эти точки вторая производная меняет знак, следовательно, точками перегиба графика функции являются точки

$$P_1(-1;\ -4),\quad P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};\ -4\frac{64}{125}\right),\quad P_3\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\ -4\frac{64}{125}\right),$$
$$P_4(1;\ -4).$$

График функции выпуклый при $x \in \left]-1;\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right[\cup \left]\frac{1}{\sqrt{5}};\ 1\right[$, вогнутый при $x \in \left]-\infty;\ -1\right[\cup \left]-\frac{1}{\sqrt{5}};\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right[\cup \left]1;\ \infty\right[$.

Асимптот нет.

График функции $y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$ представлен на рис. 414.

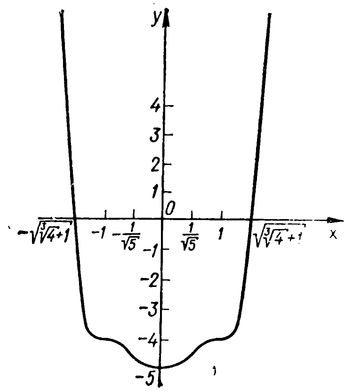


Рис. 414. $y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$.

Пример 2. Построить график функции

$$y = \frac{x-3}{\sqrt{4+x^2}}.$$

Область определения: $]-\infty;\ \infty[$. Функция непрерывна при всех $x \in]-\infty;\ \infty[$. Точки пересечения с осями координат: (3; 0) и (0; —3/2). Первая производная

$$y' = \frac{3x+4}{\sqrt{(4+x^2)^3}}.$$

Определяем критические точки: решаем уравнение $y' = 0$, т. е. $\frac{3x+4}{\sqrt{(4+x^2)^3}} = 0$, откуда $x = -\frac{4}{3}$. При $x < -\frac{4}{3}$ $y' < 0$ (функция убывает), при $x > -\frac{4}{3}$ $y' > 0$ (функция возрастает). Следовательно, при $x = -\frac{4}{3}$ функция имеет минимум $y_{\min} \approx -1{,}8$. Вторая производная

$$y'' = \frac{3\sqrt{(4+x^2)^3} - (3x+4)\frac{3}{2}(4+x^2)^{\frac{1}{2}}2x}{(4+x)^3} =$$
$$= \frac{3(4+x^2) - 3x(3x+4)}{\sqrt{(4+x^2)^5}} = -6\frac{x^2+2x-2}{\sqrt{(4+x^2)^5}} = -6\frac{(x+1)^2-3}{\sqrt{(4+x^2)^5}} =$$
$$= -6\frac{(x+1-\sqrt{3})(x+1+\sqrt{3})}{\sqrt{(4+x^2)^5}},$$
$$y'' = 0,$$
$$x_1 = -(1+\sqrt{3}),\quad x_2 = \sqrt{3}-1.$$

При $x < -(1+\sqrt{3})$ $y'' < 0$, при $-(1+\sqrt{3}) < x < \sqrt{3}-1$ $y'' > 0$, при $x > \sqrt{3}-1$ $y'' < 0$. Следовательно, при $x < -(1+\sqrt{3})$ и $x > \sqrt{3}-1$ график функции выпуклый, при $-(1+\sqrt{3}) < x < \sqrt{3}-1$ — вогнутый. Точки перегиба:

$$P_1(-2{,}73;\ -1{,}7),\quad P_2(0{,}73;\ -1{,}6).$$

Находим асимптоты:

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-3}{\sqrt{4+x^2}} = \pm 1.$$

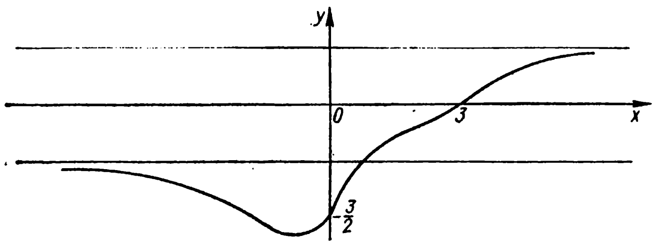


Рис. 415. $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{4+x^2}}$.

Горизонтальные асимптоты: $y = 1$, $y = -1$. Вертикальных и наклонных асимптот нет.

График функции $y = \dfrac{x-3}{\sqrt{4+x^2}}$ представлен на рис. 415.

Пример 3. Построить график функции

$$y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}.$$

Область определения функции: $]-\infty;\ \infty[$. Функция непрерывна при всех $x \in\ ]-\infty;\ +\infty[$. Точка пересечения с осями координат $(0;\ -1)$.

Определяем критические точки. Первая производная

$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}},$$

$$y' = \frac{1}{3}\left[x^{-\frac{2}{3}} - (x+1)^{-\frac{2}{3}}\right] = 0,\ \text{откуда}\ x^2 = (x+1)^2,$$

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Производная не существует в точках $x = -1$, $x = 0$. Следовательно, критическими точками являются точки $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = 0$. Так как $y'\left(-\frac{1}{2} - 0\right) < 0$, а $y'\left(-\frac{1}{2} + 0\right) > 0$, то в точке $x = -\frac{1}{2}$ функция имеет минимум $y_{\min} = -\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \approx -1{,}6$. При переходе через точки $x = 0$, $x = -1$ производная функции не меняет знака:

$$y'(-1-0) < 0, \qquad y'(-1+0) < 0,$$
$$y'(0-0) > 0, \qquad y'(0+0) > 0,$$

в этих точках функция не имеет экстремума.

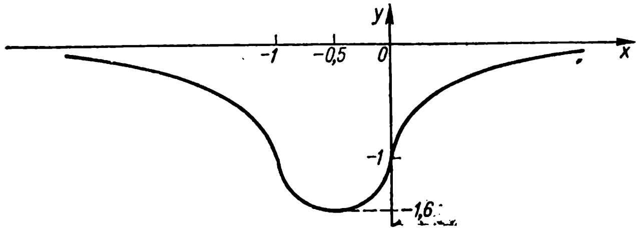


Рис. 416. $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$.

Находим точки перегиба:

$$y'' = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} + \frac{2}{9}(x+1)^{-\frac{5}{3}} = \frac{2}{9}\left[(x+1)^{-\frac{5}{3}} - x^{-\frac{5}{3}}\right].$$

Вторая производная в точках $x = -1$, $x = 0$ не существует. При $-1 < x < 0$ $y'' > 0$ (кривая вогнутая), при $-\infty < x < -1$ и $0 < x < +\infty$ $y'' < 0$ (кривая выпуклая). Следовательно, точками перегиба являются точки $P_1(-1; -1)$, $P_2(0; -1)$.

Определяем асимптоты. Вертикальных асимптот нет.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x+1)} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right)}{x\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x+1)} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-1}{x\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x(x+1)} + \sqrt[3]{(x+1)^2}\right)} = 0,$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}\right) = 0.$$

Наклонных асимптот нет. Прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

График функции $y = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x+1}$ представлен на рис. 416.

Пример 4. Построить график функции

$$y = \frac{|1+x|^{3/2}}{\sqrt{x}}.$$

Функция определена, непрерывна и положительна при всех $x > 0$. Первая производная y' удовлетворяет неравенствам:

$$y' = \frac{1}{2} x^{-3/2} (1+x)^{1/2} (2x-1) \begin{cases} <0, \text{ если } x < \frac{1}{2}, \\ >0, \text{ если } x > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

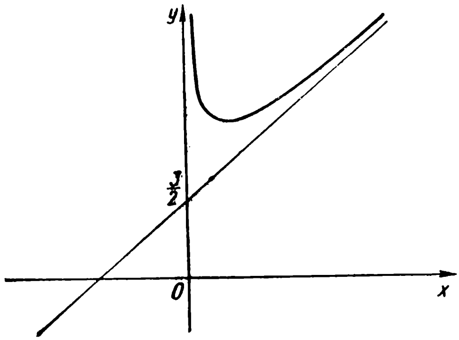


Рис. 417. $y = \frac{|1+x|^{3/2}}{\sqrt{x}}$.

следовательно, функция убывает при $0 < x < \frac{1}{2}$, возрастает при $x > \frac{1}{2}$, а при $x = \frac{1}{2}$ имеет минимум, равный $\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}60$. Поскольку

$$y'' = \frac{3}{4} x^{-5/2} (1+x)^{-1/2} > 0, \; 0 < x < +\infty,$$

то график функции вогнутый.

Из равенства

$$\lim_{x \to +\infty} y = +\infty$$

следует, что $x = 0$ — вертикальная асимптота при $x \to +0$. Имеется наклонная асимптота $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \to +0} \frac{y}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} (y - x) = \frac{3}{2},$$

т. е. $y = x + \frac{3}{2}$ — наклонная асимптота.

График функции $y = \frac{|1 + x|^{3/2}}{\sqrt{x}}$ приведен на рис. 417.

Пример 5. Построить график функции

$$y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

Область определения функции: $]-\infty; 0[\cup]0; \infty[$. Функция непрерывна на каждом из интервалов $]-\infty; 0[$, $]0; \infty[$. Точка $x = 0$ — точка разрыва. С координатными осями график функции не пересекается.

Вертикальная асимптота $x = 0$, так как

$$\lim_{x \to 0+0} x^2 e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Наклонных асимптот нет.

Находим критические точки. Первая производная

$$y' = 2xe^{\frac{1}{x}} - x^2 e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = e^{\frac{1}{x}} (2x - 1).$$

Решаем уравнение $y' = 0$, т. е. $e^{\frac{1}{x}} (2x - 1) = 0$, откуда $x = \frac{1}{2}$ — критическая точка.

При $x > \frac{1}{2}$ $y' > 0$, а при $x < \frac{1}{2}$ $y' < 0$. Следовательно, в точке с абсциссой $x = \frac{1}{2}$ функция достигает минимума $y_{\min} = \frac{e^2}{4} \approx 1{,}87$.

Вторая производная

$$y'' = 2e^{\frac{1}{x}} - \frac{2}{x} e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} = \frac{e^{\frac{1}{x}} (2x^2 - 2x + 1)}{x^2} > 0.$$

Точек перегиба нет. Для $x \in]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ график функции вогнутый.

График функции $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ представлен на рис. 418.

Пример 6. Построить график функции

$$y = \frac{e^x}{16 - x^2}.$$

Область определения функции: $]-\infty; -4[\cup]-4; 4[\cup]4; \infty[$. Функция непрерывна на каждом из интервалов $]-\infty; -4[$, $]-4; 4[$, $]4; \infty[$.

Вертикальные асимптоты: $x = -4$, $x = 4$. Наклонных асимптот нет.

Точка пересечения графика с осями координат $\left(0; \frac{1}{16}\right)$.

Первая производная

$$y' = \frac{e^x(16 - x^2) + e^x 2x}{(16 - x^2)^2} = e^x \frac{16 - x^2 + 2x}{(16 - x^2)^2}.$$

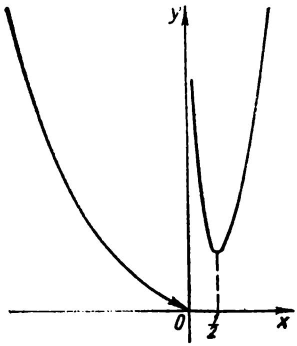


Рис. 418. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Определяем критические точки:

$$y' = 0, \; x^2 - 2x - 16 = 0,$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{17} \approx 1 \pm 4{,}12,$$

$$y'(1 - \sqrt{17} - 0) < 0,$$

$$y'(1 - \sqrt{17} + 0) > 0.$$

В точке с абсциссой $x = 1 - \sqrt{17}$ функция имеет минимум

$$y_{\min} = \frac{e^{-3,12}}{16 - 3{,}12^2} \approx$$

$$\approx \frac{0{,}044}{16 - 9{,}73} = 0{,}006,$$

$$y'(1 + \sqrt{17} - 0) > 0,$$

$$y'(1 + \sqrt{17} + 0) < 0.$$

В точке с абсциссой $x = 1 + \sqrt{17}$ функция имеет максимум

$$y_{\max} = \frac{e^{1+\sqrt{17}}}{16 - (1 + \sqrt{17})^2} \approx \frac{e^{5,12}}{16 - 5{,}12^2} \approx -16{,}4.$$

Вторая производная

$$y'' = \frac{[e^x(16 - x^2 + 2x) + e^x(2 - 2x)](16 - x^2)^2}{(16 - x^2)^4} +$$

$$+ \frac{e^x(16 - x^2 + 2x)\, 2(16 - x^2)\, 2x}{(16 - x^2)^4} = \frac{e^x}{(16 - x^2)^3}[(16 - x^2 + 2x +$$

$$+ 2 - 2x)(16 - x^2) + 4x(16 - x^2 + 2x)].$$

Уравнение $y'' = 0$, т. е. $x^4 - 4x^3 - 26x^2 + 64x + 288 = 0$, действительных корней не имеет. Точек перегиба нет. Для $x \in]-\infty; -4[\cup]4; +\infty[$ график функции выпуклый, а для $x \in]-4; 4[$ — вогнутый.

График функции $y = \frac{e^x}{16 - x^2}$ представлен на рис. 419.

Пример 7. Построить график функции

$$y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$$

Область определения функции: $]-\infty;\ \infty[$. Функция четная, так как $f(-x) = f(x)$, кривая симметрична относительно оси Oy; $f(0) = 0$. Функция непрерывна для $]-\infty;\ \infty[$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$, $y = 1$ — асимптота.

Исследуем монотонность функции, находим точки экстремума:

$$f'(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}} = \frac{xe^{-x^2}}{|x|\sqrt{1+o(1)}},$$

при $x = 0$ производная не существует. Других критических точек нет. При $x < 0$ $f'(x) < 0$, а при $x > 0$ $f'(x) > 0$. Следовательно, при $x = 0$ функция имеет минимум, причем $f_{\min}(0) = 0$.

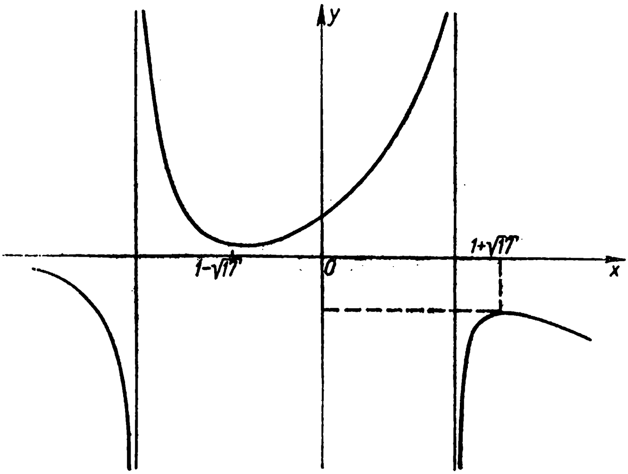


Рис. 419. $y = \dfrac{e^x}{16 - x^2}$.

Функция при $x < 0$ убывает, а при $x > 0$ возрастает:

$$f''(x) = \frac{(x^2-1) + (1+2x^2)\,e^{-x^2}}{(1-e^{-x^2})^{\frac{3}{2}}}.$$

При $x = 0$ $f''(x)$ не существует. При всех x, кроме $x = 0$, $f''(x) < 0$. Кривая выпуклая для $x \in\ ]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]0;\ \infty[$. Точек перегиба нет.

График функции $y = \sqrt{1-e^{-x^2}}$ представлен на рис. 420.

Пример 8. Построить график функции

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Область определения функции: $]-1; 0[\ \cup\ ]0; \infty[$. Функция положительна и непрерывна в этой области. Рассмотрим

$$\lim_{x \to -1+0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = +\infty,$$

следовательно, $x = -1$ — вертикальная асимптота;

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \to +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}\ln(x+1)} = e^0 = 1,$$

следовательно, $y = 1$ — горизонтальная асимптота.

Первая производная

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} \frac{x - (1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}.$$

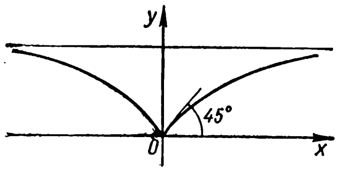


Рис. 420. $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

Здесь $e^{\frac{1}{x}\ln(x+1)} > 0$, $x^2(1+x) > 0$. Покажем, далее, что $\varphi(x) = [x - (1+x)\ln(1+x)] < 0$ при всех x из области определения. Действительно,

$$\varphi'(x) = [x - (1+x)\ln(1+x)]' = 1 - \ln(1+x) - \frac{1+x}{1+x} = -\ln(1+x) > 0 \text{ на }]-1; 0[.$$

Следовательно, на этом интервале $\varphi(x)$ возрастает. Отсюда, поскольку $\varphi(0) = 0$, и следует, что $\varphi(x) < 0$ на $]-1; 0[$. Аналогично, из условий $\varphi'(x) < 0$ на $]0; +\infty[$ и $\varphi(0) = 0$ следует, что $\varphi(x) < 0$ при $x > 0$. Следовательно, $f'(x) < 0$ и функция убывает во всей области определения, экстремума нет.

Исследуем график функции на выпуклость и точки перегиба:

$$f''(x) = \frac{2(1+x)^2\ln(1+x) - (2x + 3x^2)}{x^3(1+x)^2}.$$

Очевидно, что

$$[2(1+x)^2\ln(1+x) - (2x+3x^2)]' = -4\varphi(x).$$

Учитывая, что $\varphi(x) < 0$, имеем

$$\psi(x) = [2(1+x)^2\ln(1+x) - (2x+3x^2)]' > 0.$$

Но $\psi(0) = 0$, тогда $\psi(x) < 0$ на $]-1; 0[$ и $\psi(x) > 0$ при $x > 0$. Следовательно, $f''(x) > 0$ при всех $x \neq 0$. Кривая выпуклая, не имеет точек перегиба.

График функции $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ представлен на рис. 421.

Пример 9. Построить график функции

$$y = \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}.$$

Функция определена и непрерывна для $x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]1; \infty[$. В точках $x = \pm 1$ функция имеет разрыв второго рода, поскольку

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2} = 0, \quad \lim_{x \to -1+0} \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2} = +\infty, \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2} = 0.$$

Функция четная.

График функции симметричен относительно оси ординат.

Так как

$$\lim_{x \to -1+0} y = +\infty,$$

$$\lim_{x \to 1-0} y = +\infty,$$

то $x = -1$, $x = 1$ — вертикальные асимптоты; $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

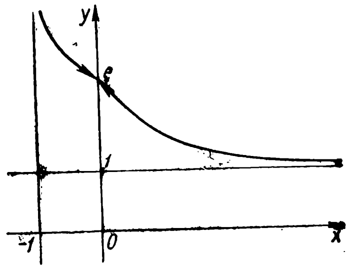


Рис. 421. $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Первая производная

$$y' = 2x^3 e^{\frac{1}{1-x^2}} \frac{3-x^2}{(1+x^2)^2 (1-x^2)^2}.$$

Критические точки: $x = \pm\sqrt{3}$, $x = 0$. Исследуем знак первой производной при переходе через эти точки. При $-\infty < x < -\sqrt{3}$, $0 < x < 1$, $1 < x < \sqrt{3}$ $y' > 0$ — функция возрастает. При $-\sqrt{3} < x < -1$, $-1 < x < 0$, $\sqrt{3} < x < +\infty$ $y' < 0$ — функция убывает.

Так как первая производная меняет знак, то в точке $x = 0$ функция имеет минимум $y_{\min} = e$; в точках $x = \pm\sqrt{3}$ — максимум $y_{\max} = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0{,}15$.

Вторая производная

$$y'' = 2y \frac{2x^6 (3-x^2)^2 + x^2 (1-x^2)(9 + x^2 + 7x^4 - x^6)}{(1-x^2)^4 (1+x^2)^2}.$$

При $|x| < 1$ $y'' > 0$, при $x = \sqrt{1{,}1}$ $y'' > 0$, при $x = \sqrt{3}$ $y'' < 0$, $y''(x) \to +0$ при $x \to +\infty$.

Следовательно, на каждом из интервалов $]1; \sqrt{3}[$, $]\sqrt{3}; +\infty[$, а в силу четности функций и на каждой из интервалов $]-\infty; -\sqrt{3}[$, $]-\sqrt{3}; -1[$ есть по крайней мере по одной точке перегиба.

График функции $y = \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$ представлен на рис. 422.

Пример 10. Построить график функции

$$y = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}.$$

Область определения: $]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$, для $x \in]-\infty; -1] \cup [1; \infty[$ функция непрерывна и положительна. Функция четная.

Так как

$$\lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} = 1,$$

то $y = 1$ — горизонтальная асимптота. Других асимптот нет.

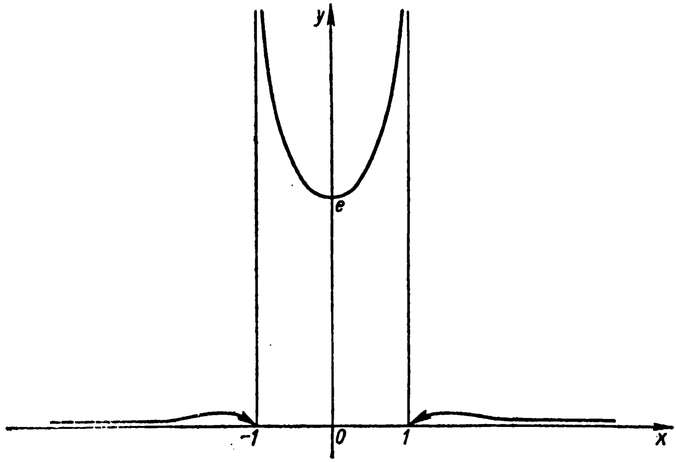


Рис. 422. $y = \frac{e^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$.

Первая производная

$$y' = 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} \ln 2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) =$$

$$= xy \ln 2 \left(\frac{\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}}{x^2-1}\right).$$

Точки $x = \pm 1$ — критические. При $x < -1$ $y' > 0$ — функция возрастает. При $x > 1$ $y' < 0$ — функция убывает.

$$\lim_{x\to 1+0} y = \lim_{x\to 1+0} 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} = 2^{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{x\to -1-0} y = \lim_{x\to -1-0} 2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}} = 2^{\sqrt{2}}.$$

В точке $x = -1$ левосторонний максимум, а в точке $x = 1$ — правосторонний максимум.

Вторая производная

$$y'' = y \ln 2 \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + x^2 \ln 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \right) \right].$$

Очевидно, что

$$\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + x^2 \ln 2 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right)^2 + \right.$$
$$\left. + x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} - \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \right) \right] > \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + \right.$$
$$\left. + \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}} - \frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}} \right],$$

т. е.

$$y'' > y \left[\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \right] \ln 2 > 0$$

в области определения функции. Кривая вогнута. Точек перегиба нет.

График функции $y = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$ представлен на рис. 423.

Пример 11. Построить график функции

$$y = \log_2 (1 - x^2).$$

Функция определена и непрерывна на $]-1; 1[$. Прямые $x = 1$ и $x = -1$ — вертикальные асимптоты. Функция четная, ее график симметричен относительно оси ординат. График функции проходит через точку $(0; 0)$. При $-1 < x < 1$ $y \leqslant 0$.

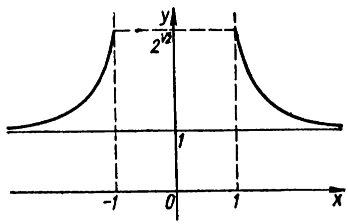


Рис. 423. $y = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$.

Исследуем функцию на экстремум:

$$y' = -\frac{2x}{(1-x^2)\ln 2}.$$

Точки $x = 0, 1, -1$ — критические, но точки ± 1 не принадлежат области определения функции. Исследуем поведение первой производной при переходе лишь через точку $x = 0$. Имеем $y'(0-0) > 0$, $y'(0+0) < 0$; в точке $x = 0$ функция имеет максимум $y_{\max} f(0) = 0$. Для $x \in]-1; 0[$ функция возрастает, для $x \in]0; 1[$ — убывает.

Вторая производная

$$y'' = -\frac{2}{\ln 2} \frac{[(1-x^2) - 2x \cdot x]}{(1-x^2)^2} = -\frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2 \ln 2},$$

$y'' < 0$ для $\forall x \in \,]-1;\, 1[$, точек перегиба нет, график функции выпуклый.

График функции $y = \log_2 (1 - x^2)$ представлен на рис. 424.

Пример 12. Построить график функции

$$y = x + \ln (x^2 - 1).$$

Функция определена и непрерывна на $]-\infty;\, -1[\, \cup\,]1;\, \infty[$. Вертикальные асимптоты: $x = \pm 1$.

Находим точки пересечения с координатными осями:

$$y = 0,\ x + \ln (x^2 - 1) = 0,\ (x^2 - 1) = e^{-x},$$

решаем последнее уравнение графически или с помощью одного из методов приближенных вычислений корней. Получаем $x \approx 1{,}12$. Ось ординат график функции не пересекает.

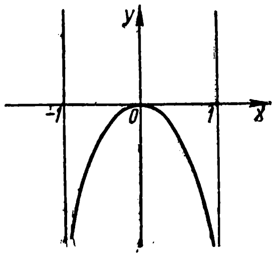


Рис. 424. $y = \log_2 (1 - x^2)$.

Исследуем функцию на экстремум:

$$y' = 1 + \frac{1}{x^2 - 1}\, 2x = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1},$$

$$x^2 - 1 \neq 0,\ x^2 + 2x - 1 = 0,$$

$$x_{1,\,2} = -1 \pm \sqrt{2},$$

$x_1 = -1 + \sqrt{2}$ не входит в область определения функции. Точка $x = -1 - \sqrt{2}$ — критическая; $y'(-1 - \sqrt{2} + 0) < 0$, $y'(-1 - \sqrt{2} - 0) > 0$, в точке $x = -1 - \sqrt{2}$ функция имеет максимум $y_{\max} \approx -0{,}7$. Для $x \in \,]-\infty;\, -1 - \sqrt{2}[$ функция возрастает, для $x \in \,]-1 - \sqrt{2};\, -1[$ — убывает.

Вторая производная

$$y'' = \frac{(2x + 2)(x^2 - 1) - 2x(x^2 - 2x - 1)}{(x^2 - 1)^2} = -2\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0.$$

Функция выпуклая во всей области определения. Точек перегиба нет.

График функции $y = x + \ln (x^2 - 1)$ представлен на рис. 425.

Пример 13. Построить график функции

$$y = \sin x + \sin 2x.$$

Область определения функции: $]-\infty;\, \infty[$. Функция непрерывна при всех $x \in \,]-\infty;\, \infty[$. Функция нечетная. График функции симметричен относительно начала координат.

Функция периодическая с периодом 2π; так как период функции $\sin x$ равен 2π, а период функции $\sin 2x$ равен $\frac{2\pi}{2} = \pi$, то период суммы равен наименьшему кратному периодов слагаемых.

Исследуем функцию на периоде $[0;\, 2\pi]$. Найдем точки пересечения графика с осью Ox:

$$\sin x + 2 \sin x \cdot \cos x = 0,$$
$$\sin x\, (1 + 2 \cos x) = 0,$$

$$\sin x = 0,\ x = \pi n,\ n \in Z,$$

$$1 + 2\cos x = 0,\ \cos x = -\frac{1}{2},\ x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

В промежутке $[0; 2\pi]$ график функции пересекает ось Ox в точках $x = 0$, $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = \pi$, $x = \frac{4}{3}\pi$, $x = 2\pi$.

Первая производная

$$y' = \cos x + 2\cos 2x.$$

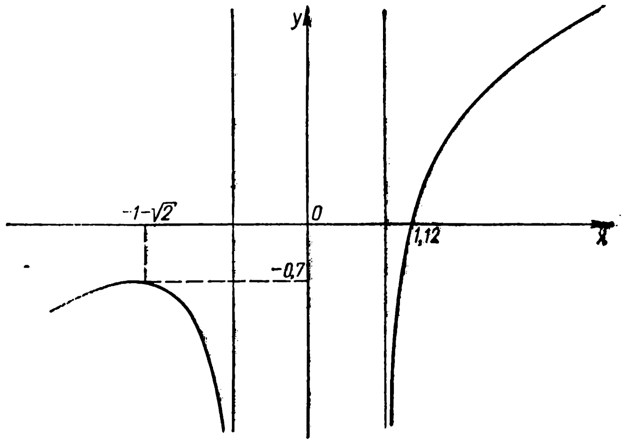


Рис. 425. $y = x + \ln(x^2 - 1)$.

Находим критические точки:

$$y' = \cos x + 2\cos 2x = 0,$$

$$\cos x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = 0,$$

$$4\cos^2 x + \cos x - 2 = 0,$$

$$\cos_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 32}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{8},$$

$$\cos x = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8},\quad \cos x = \frac{-1 - \sqrt{33}}{8},$$

$$x_{1,2} = \pm\arccos\left(\frac{-1 + \sqrt{33}}{8}\right) + 2\pi n \approx \pm\arccos 0{,}6 + 2\pi n,\ n \in Z,$$

$$x_{3,4} = \pm\arccos\left(\frac{-1 - \sqrt{33}}{8}\right) + 2\pi n \approx \pm\arccos(-0{,}8) + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Поскольку вторая производная

$$y'' = -\sin x - 4\sin 2x = -\sin x(1 + 8\cos x)$$

при $x = x_1 = \arccos 0{,}6$, $x = x_3 = 2\pi - \arccos(-0{,}8)$ отрицательна, то при этих значениях x функция достигает максимума: $y_1 \approx 1{,}76$, $y_3 \approx 0{,}45$. Аналогично при $x = x_2 = \arccos(-0{,}8)$, $x = x_4 = 2\pi - \arccos 0{,}6$ $y'' > 0$ — функция достигает минимума: $y_2 \approx -0{,}45$, $y_4 \approx -1{,}76$.

Интервалы выпуклости кривой: $]0;\ \arccos 0{,}6[$, $\left]\arccos 0{,}6;\ \frac{2}{3}\pi\right[$, $]\pi;\ 2\pi - \arccos(-0{,}8)[$, $\left]2\pi - \arccos(-0{,}8;\ \frac{4}{3}\pi\right[$.

Интервалы вогнутости кривой: $\left]\frac{2}{3}\pi;\ \arccos(-0{,}8)\right[$, $\left]\frac{4}{3}\pi;\ 2\pi - \arccos 0{,}6\right[$, $]2\pi - \arccos 0{,}6;\ 2\pi[$. При переходе через точки $x = \frac{2}{3}\pi$, $x = \pi$, $x = \frac{4}{3}\pi$, $x = 2\pi$ вторая производная меняет знак. Следовательно, точки $P_1\left(\frac{2}{3}\pi;\ 0\right)$, $P_2(\pi;\ 0)$, $P_3\left(\frac{4}{3}\pi;\ 0\right)$, $P_4(2\pi;\ 0)$ являются точками перегиба.

График функции $y = \sin x + \sin 2x$ представлен на рис. 426.

Пример 14. Построить график функции

$$y = \operatorname{tg} x + \sin x.$$

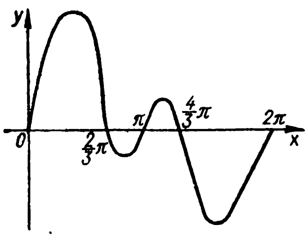


Рис. 426. $y = \sin x + \sin 2x$.

Функция определена и непре рывна для всех значений x, кром $x = \frac{\pi}{2} + n\pi\ (n \in Z)$.

Функция нечетная, периодическая с периодом 2π. Поэтому достаточно построить график на $[0;\ \pi]$.

Прямые $x = \frac{\pi}{2} + n\pi\ (n \in Z)$ — вертикальные асимптоты графика.

Исследуем функцию на экстремум

$$y'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \cos x = \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 x}.$$

При $x = \pi$ производная равна нулю, точка $x = \pi$ — критическая. На интервалах $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right[$, $\left]\frac{\pi}{2};\ \pi\right[$ и $\left]\pi;\ \frac{3}{2}\pi\right[$ $y' > 0$. Следовательно, на отрезке $[0;\ \pi]$ $\left(x \neq \frac{\pi}{2}\right)$ функция не имеет экстремума.

Исследуем график на точки перегиба:

$$y'' = \sin x\left(\frac{2}{\cos^3 x} - 1\right).$$

При $x = 0$ и $x = \pi$ вторая производная равна нулю, причем, как легко убедиться, справа и слева в достаточно малых окрестностях этих точек y'' имеет разные знаки. Следовательно, точки (0; 0) и (π; 0) являются точками перегиба графика функции.

График функции $y = \operatorname{tg} x + \sin x$ представлен на рис. 427.

Пример 15. Построить график функции

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

Область определения функции: $]-\infty; \infty[$. Функция непрерывна на $]-\infty; \infty[$. Функция четная; график ее симметричен относительно оси ординат. Функция периодическая с периодом $\omega = \frac{\pi}{2}$:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x =$$
$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = 1 - \frac{1}{4}(1 - \cos 4x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right),$$

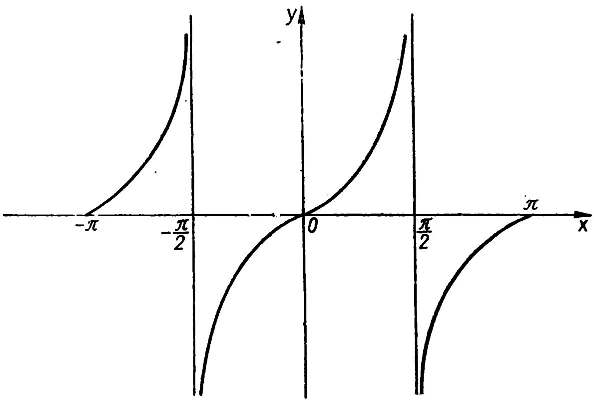


Рис. 427. $y = \operatorname{tg} x + \sin x$.

откуда $\omega = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Поэтому достаточно построить график на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. График функции расположен над осью абсцисс: $y = \sin^4 x + \cos^4 x > 0$ при $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, проходит через точку (0; 1).

Первая производная

$$y' = 4\sin^3 x \cos x - 4\cos^3 x \sin x = -4\sin x \cos x \times$$
$$\times (\cos^2 x - \sin^2 x) = -2\sin 2x \cos 2x = -\sin 4x.$$

Ищем критические точки: $y' = -\sin 4x = 0$, откуда $x = \frac{k\pi}{4}$ ($k \in Z$). Рассмотрим $x = \frac{k\pi}{4}$ при $k = 0, 1, 2$.

Определим характер экстремума с помощью второй производной

$$y'' = -4\cos 4x,$$

$y''(0) = -4 < 0$, при $x = 0$ функция достигает максимума $y_{max} = 1$, $y''\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 > 0$, при $x = \frac{\pi}{4}$ функция достигает минимума $y_{min} = \frac{1}{2}$, $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4 < 0$, при $x = \frac{\pi}{2}$ функция достигает максимума $y_{max} = 1$.

Точки перегиба:

$$y'' = -4\cos 4x = 0, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{8}(2k+1) \ (k \in Z),$$

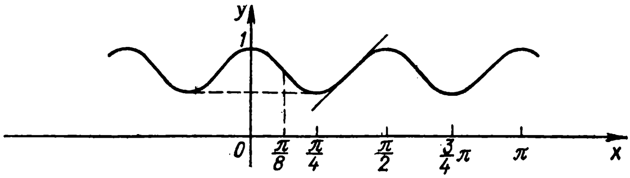


Рис. 428. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

$$y''\left(\frac{\pi}{8} - 0\right) < 0, \quad y''\left(\frac{\pi}{8} + 0\right) > 0,$$

$$y''\left(\frac{3}{8}\pi - 0\right) > 0, \ y''\left(\frac{3}{8}\pi + 0\right) < 0.$$

График функции на $\left]0; \frac{\pi}{8}\right[$ выпуклый, на $\left]\frac{\pi}{8}; \ \frac{3}{8}\pi\right[$ — вогнутый, на $\left]\frac{3}{8}\pi; \frac{\pi}{2}\right[$ — выпуклый.

График функции $y = \sin^4 x + \cos^4 x$ представлен на рис. 428.

Пример 16. Построить график функции

$$y = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Область определения функции: $-1 \leqslant \frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1$, т. е. $x \in]-\infty; \infty[$. Функция четная, ось симметрии графика — ось ординат. Функция непрерывна в области определения. Точки пересечения графика с осями координат: $y = 0$ при $x = \pm 1$, при $x = 0$ $y = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$.

$$f(x) > 0 \text{ при } -1 < x < 1,$$

$$f(x) < 0 \text{ при } x < -1 \text{ и } x > 1.$$

Исследуем наличие асимптот:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $y = -\frac{\pi}{2}$ — горизонтальная асимптота. График функции расположен над асимптотой.

$$f'(x) = -\frac{x}{|x|} \frac{2}{1+x^2}.$$

При $x > 0$ $f'(x) < 0$ — функция монотонно убывает на интервале $]0; \infty[$. При $x < 0$ $f'(x) > 0$ — функция монотонно возрастает на интервале $]-\infty; 0[$.

Производная не существует в точке $x = 0$. Исследуем поведение производной в окрестности этой точки:

$$\lim_{x\to -0}\left(-\frac{x}{|x|}\frac{2}{1+x^2}\right) = -2 \lim_{x\to -0}\frac{x}{|x|} = 2,$$

$$\lim_{x\to +0}\left(-\frac{x}{|x|}\frac{2}{1+x^2}\right) = -2.$$

Следовательно, первая производная в точке $x = 0$ имеет разрыв первого рода, причем при переходе через эту точку производная меняет знак с «+» на «—». Поскольку функция в этой точке непрерывна, то она имеет максимум в этой точке: $y_{\max} = \frac{\pi}{2}$.

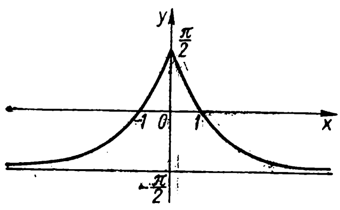


Рис. 429. $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

Вторая производная $y'' = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$ на интервале $]0; +\infty[$, $y'' > 0$ — график функции вогнутый; $y'' = -\frac{4x}{(1+x^2)^2}$ на интервале $]-\infty; 0[$ $y'' > 0$ — график функции также вогнутый. Точек перегиба нет.

График функции $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$ представлен на рис. 429.

Пример 17. Построить график функции

$$y = \operatorname{arctg} \frac{x-3}{x^2+4}.$$

Область определения функции: $]-\infty;\ \infty[$. Функция непрерывна в области определения. Нули функции: $y=0$ при $x=3$, при $x=0$ $y=\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)=\operatorname{arctg}(-0{,}75)\approx-0{,}64$.

Первая производная

$$y'=\frac{1}{1+\left(\frac{x-3}{x^2+4}\right)^2}\frac{x^2+4-(x-3)\,2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-x^2+6x+4}{(x^2+4)^2+(x-3)^2},$$

$$y'=0,\quad x^2-6x-4=0,\quad x_{1,2}=3\pm\sqrt{13},$$

$$x_1=3+\sqrt{13}\approx6{,}7,\quad x_2=3-\sqrt{13}\approx-0{,}7.$$

Исследуем знак $y'(x)$. Знаменатель всегда положителен. Тогда $y'<0$ при $x<3-\sqrt{13}$ — функция убывающая; $y'>0$ при $x>3-\sqrt{13}$ — функция возрастающая. В точке $x=3-\sqrt{13}$ функция имеет минимум; $y'>0$ при $x<3+\sqrt{13}$ — функция возрастающая; $y'<0$ при $x>3+\sqrt{13}$ — функция убывающая. В точке $x=3+\sqrt{13}$ функция имеет максимум.

Вычисляем вторую производную:

$$y''=\frac{(-2x+6)(x^4+9x^2-6x+25)+(x^2-6x-4)(4x^3+18x-6)}{(x^4+9x^2-6x+25)^2}=$$

$$=\frac{2(x^5-9x^4+19x^3-51x^2-61x+87)}{(x^4+9x^2-6x+25)^2},$$

$$y''=0,\ x^5-9x^4+16x^3-51x^2-61x+87=0,$$

$$x_1\approx0{,}5,\quad x_2\approx-1{,}5,\quad x_3\approx9{,}5.$$

а) При переходе через точку $x\approx0{,}5$, $y=-\frac{\pi}{6}$ кривая меняет вогнутость на выпуклость. Точка $\left(0{,}5;\ -\frac{\pi}{6}\right)$ — точка перегиба.

б) При переходе через точку $x\approx-1{,}5$, $y\approx-0{,}2\pi$ кривая меняет выпуклость на вогнутость. Точка $(-1{,}5;\ -0{,}2\pi)$ — точка перегиба.

в) В точке $(9{,}5;\ 0{,}022\pi)$ кривая меняет выпуклость на вогнутость, следовательно, эта точка является точкой перегиба.

Асимптоты.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{x^2+4}=0,$$

следовательно, $y=0$ — горизонтальная асимптота графика функции. Вертикальных и наклонных асимптот нет.

График функции $y=\operatorname{arctg}\frac{x-3}{x^2+4}$ представлен на рис. 430.

Пример 18. Построить график функции

$$y=\ln x-\operatorname{arctg}x.$$

Область определения функции: $]0; \infty[$. Функция непрерывна в области определения. При $x \to +0$ имеем

$$\lim_{x \to +0} (\ln x - \operatorname{arctg} x) = -\infty.$$

Следовательно, кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 0$.

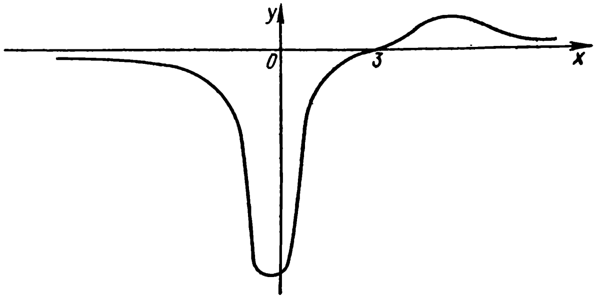


Рис. 430. $y = \operatorname{arctg} \frac{x-3}{x^2+4}$.

Исследуем функцию на экстремум:

$$y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2 - x + 1}{x(1+x^2)}.$$

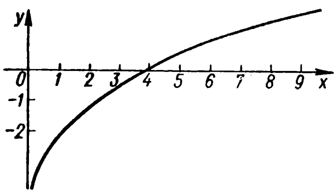


Рис. 431. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$.

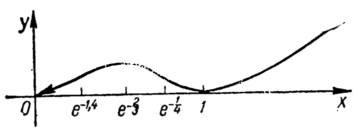


Рис. 432. $y = x^3 \ln x$.

Очевидно, что $y' > 0$ при $x > 0$. Функция возрастает во всей области своего определения. Функция не имеет экстремума.

Точки перегиба.

$$y'' = -\frac{1}{x^2} + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 1}{x^2(1+x^2)^2},$$

но

$$\varphi(x) = -x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 1 = -[(x^2+1)^2 - 2x^3] < 0$$

во всей области определения, т. е. кривая выпуклая на $]0; \infty[$. Точек перегиба нет.

Точки пересечения кривой с осью Ox:

$$\ln x - \operatorname{arctg} x = 0, \quad \ln x = \operatorname{arctg} x,$$

откуда $x \approx 3{,}7$.

График функции $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$ представлен на рис. 431.

Примеры построения графиков функций приведены на рис. 432—441.

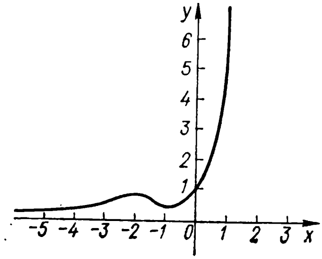


Рис. 433. $y = (1 + x^2)e^x$.

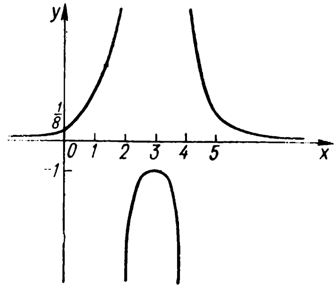


Рис. 434. $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 8}$.

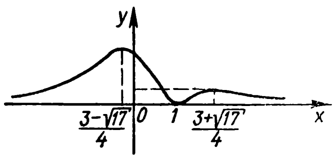


Рис. 435. $y = \dfrac{\sqrt[8]{(x-1)^2}}{x^2 + 1}$.

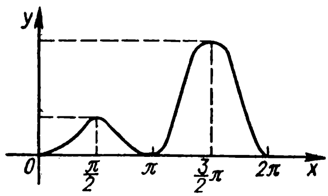


Рис. 436. $y = \dfrac{\sin^2 x}{2 + \sin x}$.

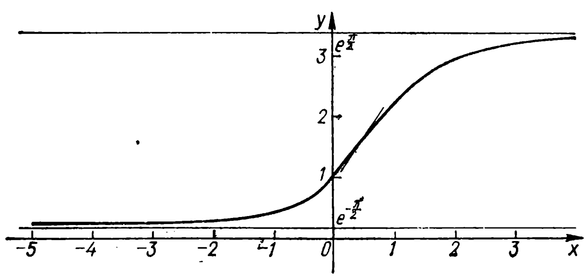


Рис. 437. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

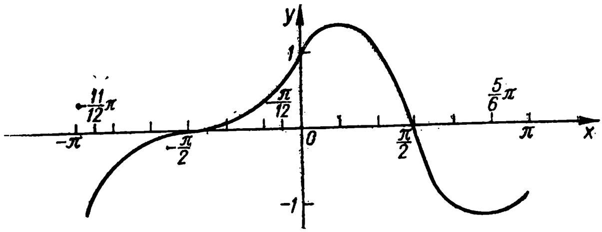


Рис. 438. $y = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$.

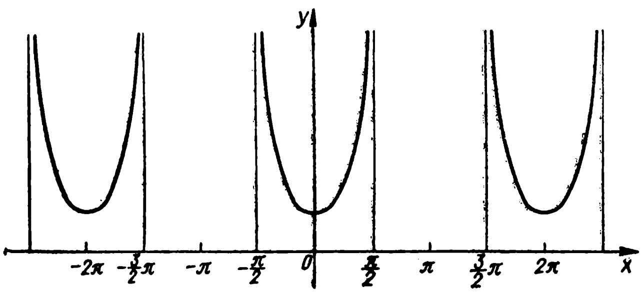


Рис. 439. $y = \cos x - \ln \cos x$.

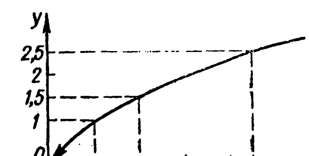


Рис. 440. $y = 2^{\log_3 x}$.

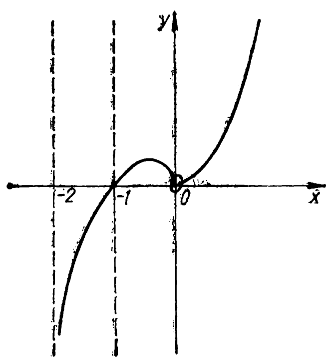


Рис. 441. $y = x^2 \ln(x + 2)$.

§ 2. Построение графиков параметрически заданных функций

В разд. 6 ч. I были рассмотрены исследование и построение графиков функций, заданных параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$

методами элементарной математики. В этом параграфе представлены дополнения к исследованию и построению графиков таких функций.

Исследование параметрически заданных функций с помощью производных

Симметрия. Если $\varphi(t)$ — четная, а $\psi(t)$ — нечетная функции, то кривая симметрична относительно оси абсцисс.

Если $\varphi(t)$ — нечетная, а $\psi(t)$ — четная функции, то кривая симметрична относительно оси ординат.

Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — нечетные функции, то кривая симметрична относительно начала координат.

Заметим, что это достаточные признаки, но не необходимые.

Точки пересечения с осями координат. Из уравнения $\psi(t) = 0$ находим значения t, которые определяют точки пересечения кривой с осью абсцисс.

Из уравнения $\varphi(t) = 0$ находим значения t, которые определяют точки пересечения кривой с осью ординат.

Особые точки. Точка $(x_0;\ y_0)$ кривой

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t)$$

называется *особой*, если при $t = t_0$

$$x_0 = \varphi(t_0), \quad y_0 = \psi(t_0), \quad \varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = 0.$$

Другие точки кривой, в которых хоть одна из производных $\varphi'(t)$ или $\psi'(t)$ не равна нулю, называются *неособыми* точками. В любой неособой точке $(x_0;\ y_0)$ уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = \frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}(x - x_0), \text{ если } \varphi'(t_0) \neq 0,$$
$$x - x_0 = \frac{\varphi'(t_0)}{\psi'(t_0)}(y - y_0), \text{ если } \psi'(t_0) \neq 0.$$

Определение точек кривой, в которых касательные параллельны осям координат.

а) Чтобы касательная к кривой была параллельна оси абсцисс, как известно, должно выполняться условие

$$y'_x = 0,$$

т. е. значения t, соответствующие таким точкам, ищем из уравнения

$$y'_t = 0, \text{ если } x'_t \neq 0.$$

б) Значения t, соответствующие точкам, в которых касательная к кривой параллельна оси ординат, ищем из уравнения

$$x'_t = 0, \text{ если } y'_t \neq 0.$$

Точки перегиба. Значения t, соответствующие точкам перегиба кривой, определяем из уравнения

$$x'_t y''_t - y'_t x''_t = 0, \text{ если } x'_t \neq 0.$$

Определение двойных точек кривой. В двойной точке $(x_1;\ y_1)$ кривой пересекаются две ветви кривой, имеющие различные касательные. Отсюда следует, что должны существовать два различных значения t_1 и t_2 параметра t такие, что

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(t_1) = \varphi(t_2), \\ y_1 = \psi(t_1) = \psi(t_2). \end{cases}$$

Решаем эту систему и проверяем, имеют ли угловые коэффициенты касательных к кривой при найденных значениях параметра t, т. е. дроби $\frac{\psi'(t_1)}{\varphi'(t_1)}$ и $\frac{\psi'(t_2)}{\varphi'(t_2)}$, разные значения. Если да, то кривая имеет двойную точку.

Определение точек возврата. В точке возврата должны выполняться равенства

$$\varphi'(t) = 0 \text{ и } \psi'(t) = 0 \ (x'''_t y''_t - y'''_t x''_t \neq 0),$$

т. е. в этой точке угловой коэффициент касательной неопределенный.

Асимптоты кривой. Кривая имеет вертикальную асимптоту $x = a$, если одновременно выполняются равенства

$$\lim_{t\to t_1} \psi(t) = \infty,$$
$$\lim_{t\to t_1} \varphi(t) = a.$$

Кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = b$, если одновременно выполняются равенства

$$\lim_{t\to t_1} \varphi(t) = \infty,$$
$$\lim_{t\to t_1} \psi(t) = b.$$

Для определения наклонных асимптот $y = kx + b$ надо найти такое значение $t = t_1$ параметра, при котором $x = \infty$ и $y = \infty$. Если такое значение t найдено, то k и b определяем по формулам

$$k = \lim_{t\to t_1} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)},$$

$$b = \lim_{t\to t_1} [\psi(t) - k\varphi(t)],$$

причем пределы, стоящие в правых частях этих формул, существуют.

Примеры построения графиков параметрически заданных функций

Пример 1. Построить график функции

$$x=\frac{t^2}{t^2+1},$$
$$y=\frac{t(1-t^2)}{t^2+1}.$$

Область определения функции: $[0;\ 1\ [$. (Действительно, значение $x=\frac{t^2}{t^2+t}$ при любом t является положительным числом, меньшим единицы, следовательно, кривая расположена между прямыми $x=0$ и $x=1$). Область значений функции: $]-\infty;\ \infty\ [$.

Так как $x(t)$ — четная, а $y(t)$ — нечетная функции, то кривая симметрична относительно оси абсцисс.

Точки пересечения с осями координат. При $t=0$ $x=0$ и $y=0$, следовательно, кривая проходит через точку $(0;\ 0)$, $y=0$ и при $t=1$, следовательно, кривая проходит через точку $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$.

Находим первые производные:

$$x_t'=\frac{2t}{(t^2+1)^2},$$
$$y_t'=\frac{1-4t-t^4}{(t^2+1)^2},\quad y_x'=\frac{1-4t-t^4}{2t}.$$

При $t=\pm\sqrt{-2+\sqrt{5}}$ существуют две точки A и B, в которых касательная параллельна оси абсцисс, причем при $0<x<\frac{1}{2}$, $y>0$ $\frac{d^2y}{dx^2}<0$ — кривая выпуклая, а при $\frac{1}{2}<x<1$, $y>0$ $\frac{d^2y}{dx^2}>0$ — кривая вогнутая.

Проверяем, имеет ли кривая двойную точку:

$$\begin{cases}\dfrac{t_1^2}{t_1^2+1}=\dfrac{t_2^2}{t_2^2+1},\\[2mm] \dfrac{t_1\left(1-t_1^2\right)}{t_1^2+1}=\dfrac{t_2\left(1-t_2^2\right)}{t_2^2+1}.\end{cases}$$

Решив эту систему, находим два разных значения $t_1=1$ и $t_2=-1$, для которых соответствующие значения x одинаковы и соответствующие значения y также одинаковы. Следовательно, точка $\left(\frac{1}{2};\ 0\right)$ — двойная точка кривой. Находим угловые коэффициенты k_1 и k_2 касательных к ветвям кривой, которые пересекаются в этой точке:

$$k_1=\frac{y'(t_1)}{x'(t_1)}=-2,\quad k_2=\frac{y'(t_2)}{x'(t_2)}=2.$$

Асимптоты.

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t^2}{t^2+1} = 1,$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{t(1-t^2)}{t^2+1} = \infty.$$

Кривая имеет вертикальную асимптоту. Наклонных асимптот нет.

График функции представлен на рис. 442.

Пример 2. Построить график функции

$$x = 2t - t^2,$$
$$y = 3t - t^3.$$

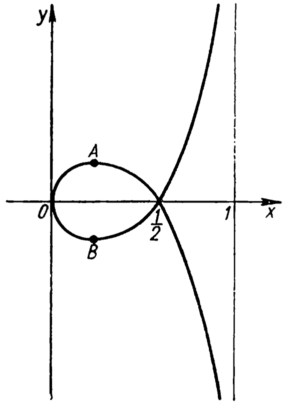


Рис. 442. $x = \frac{t^2}{t^2+1}$, $y = \frac{t(1-t^2)}{t^2+1}$.

Область определения функции: $]-\infty; 1]$. Область значений функции: $]-\infty; \infty[$. Функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывные при $-\infty < t < \infty$.

Находим первую производную:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\frac{1-t^2}{1-t}.$$

При $t_1 = -1$ $(x_1 = -3)$ $\frac{dy}{dx} = 0$, а при $t_2 = 1$ $(x_2 = 1)$ $\lim\limits_{t\to 1} \frac{dy}{dx} = 3$. Следовательно, при $-\infty < x < -3$ $\frac{dy}{dx} < 0$, т. е. функция убывает, а при $-3 < x < 1$ $(-1 < t < 1)$ $\frac{dy}{dx} > 0$ — функция возрастает. При $x = -3$ функция имеет минимум $y_{\min} = -2$, а при $x = 1$ — максимум $y_{\max} = 2$.

Вычисляем вторую производную:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3}{4}\frac{(1-t^2)^2}{(1-t)^3}.$$

При $-\infty < x < 1$ $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ — кривая вогнута. Точка $(1; 2)$ — точка перегиба.

Так как

$$\lim_{t\to\pm\infty} x(t) = -\infty,$$
$$\lim_{t\to\pm\infty} y(t) = \mp\infty,$$
$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty,$$

то асимптот нет.

График функции $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$ представлен на рис. 443.

Пример 3. Построить график функции

$$x = \frac{a}{\cos^3 t},$$

$$y = a \operatorname{tg}^3 t \ (a > 0).$$

Область определения функции: $]-\infty; -a] \cup [a; \infty[$. Область значений функции: $]-\infty; \infty[$. Функция $x(t)$ — четная, $y(t)$ — нечетная, следовательно, график функции $y = y(x)$ симметричен относительно оси абсцисс. Для $0 < t < \frac{\pi}{2}$ график функции $y = y(x)$ симметричен относительно оси ординат.

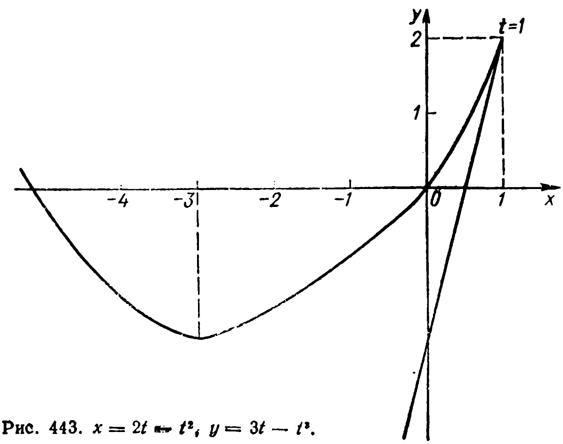


Рис. 443. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

Находим первую производную:

$$\frac{dy}{dx} = \sin t, \quad \frac{dy}{dx} > 0 \text{ при } 0 < t < \frac{\pi}{2}.$$

Функция $y = y(x)$ возрастает при $0 < t < \frac{\pi}{2}$, причем $x \to +\infty$, $y \to +\infty$.

Вторая производная

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{3a} \frac{\cos^5 t}{\sin t},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} > 0 \text{ при } 0 < t < \frac{\pi}{2},$$

следовательно, кривая $y(x)$ вогнута при $0 < t < \frac{\pi}{2}$.

Проверим наличие точек возврата:

$$\begin{cases} x'(t)=0, \\ y'(t)=0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x'(t) \equiv -3a\cos^{-4}\sin t = 0, \\ y'(t) \equiv 3a\,\mathrm{tg}^2\, t\dfrac{1}{\cos^2} = 0, \end{cases}$$

отсюда $t=0,\ \pi$, причем в этих точках $x_t'''y_t'' - y_t'''x_t'' \neq 0$. Следовательно, точки $(a;\ 0)$, $(-a;\ 0)$ — точки возврата.

Асимптоты.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} x(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{a}{\cos^3 t} = +\infty,$$

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0} y(t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0} a\,\mathrm{tg}^3\, t = +\infty.$$

Вертикальных асимптот нет. Проверяем наличие наклонных асимптот:

$$k = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0} \frac{a\,\mathrm{tg}^3\, t}{\dfrac{a}{\cos^3 t}} = 1,$$

$$b = \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0} [\,y(t) - x(t)] = a \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0} \left(\mathrm{tg}^3\, t - \frac{1}{\cos^3 t}\right) = -\infty.$$

Наклонных асимптот нет.

График функции $x = \dfrac{a}{\cos^3 t}$, $y = a\,\mathrm{tg}^3\, t$ $(a > 0)$ см. на рис. 290, *б*.

Пример 4. Построить график функции

$$x = \frac{t^2}{t-1},$$

$$y = \frac{t}{t^2-1}.$$

Область определения функции: $\left]-\infty;\ -\frac{1}{2}\right[\cup \left]-\frac{1}{2};\ 0\right[\cup$ $\cup\ [4;\ \infty[$.

Первая производная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} = -\frac{t^2+1}{t(t-2)(t+1)^2};$$

$y_x' > 0$ при $-\infty < x \leqslant 0$ (при $0 \leqslant t < 1$) — функция возрастает. Если $1 < t \leqslant 2$, то $4 \leqslant x < +\infty$, $\dfrac{2}{3} \leqslant y < +\infty$, $y_x' > 0$ — функция также возрастает. При $2 \leqslant t < +\infty$ $\left(0 < x \leqslant 4,\ 0 < y \leqslant \frac{2}{3}\right) y'_x < 0$ — функция убывающая. При $-\infty < t < -1$ $\left(-\infty < x < -\frac{1}{2},\ -\infty < y < 0\right) y'_x < 0$ — функция убывающая.

Вторая производная

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2(t-1)^3(t^3+3t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^3};$$

$y'' = 0$ при $t_1 \approx -3{,}22$ $(x(t_1) \approx 0{,}17)$, $t_2 = 1$ $(y(t_1) \approx 0{,}37)$. Вторая производная $y''_{xx} > 0$ при $-1 < t < t_1$ и $y''_{xx} < 0$ при $t_1 < t < 0$. Следовательно, точка $P_1(-0{,}17;\ 0{,}37)$ — точка перегиба графика функции $y = y(x)$.

При $0 \leqslant t < 1$ $(-\infty < x \leqslant 0)$ $y''_{xx} > 0$ — кривая вогнутая; при $1 < t \leqslant 2$ $(4 \leqslant x < +\infty)$ $y''_{xx} < 0$ — кривая выпуклая; при $2 \leqslant t < +\infty$ $(0 < x \leqslant 4)$ $y''_{xx} > 0$ — кривая вогнутая.

Так как

$$\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = \pm\infty,$$
$$\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = 0,$$
$$\lim_{t \to -1+0} x(t) = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{t \to -1-0} x(t) = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{t \to -1+0} y(t) = +\infty,$$
$$\lim_{t \to -1-0} y(t) = -\infty,$$

то $y = 0$ — горизонтальная асимптота графика функции $y = y(x)$; $x = \frac{1}{2}$ — вертикальная асимптота графика функции $y = y(x)$.

Проверим, есть ли наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{t \to 1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to 1} \frac{\dfrac{t}{t^2-1}}{\dfrac{t^2}{t-1}} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{t \to 1}\left(\frac{t}{t^2-1} - \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{t-1}\right) = -\frac{3}{4},$$

$y = \frac{x}{2} - \frac{3}{4}$ — наклонная асимптота.

График функции $x = \frac{t^2}{t-1}$, $y = \frac{t}{t^2-1}$ см. на рис. 274, *в*.

Пример 5. Построить график функции

$$x = t + e^{-t},$$
$$y = 2t + e^{-2t}.$$

Область определения функции: $[1;\ \infty[$. Область значений функции: $[1;\ \infty[$.

а) $x'(t) = 1 - e^{-t}$, $x'(t) = 0$ при $t = 0$;

$x''(t) = e^{-t}$, $x''(t) > 0$ при всех t.

б) $y'(t) = 2(1 - e^{-2t})$, $y'(t) = 0$ при $t = 0$;

$y''(t) = 4e^{-2t}$, $y''(t) > 0$ при всех t.

Имеем $x_{\min} = 1$ при $t = 0$, $y_{\min} = 1$ при $t = 0$.

$$\frac{dy}{dx} = 2(1 + e^{-t}).$$

При $-\infty < t < 0$ $(1 < x < +\infty,\ 1 < y < +\infty)$ $y'_x > 0$ — функция $y = y(x)$ возрастающая. При $0 < t < +\infty$ $(1 < x < +\infty,\ 1 < y < +\infty)$ $y'_x > 0$ — функция $y = y(x)$ возрастающая.

Вторая производная

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2(e^{-t} - 1).$$

При $t < 0$ $y''_{xx} > 0$ — кривая вогнутая, при $t > 0$ $y''_{xx} < 0$ — кривая выпуклая. При $t \to +\infty$ прямая $y = 2x$ является наклонной асимптотой графика функции $y = y(x)$.

График функции $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$ см. на рис. 286.

§ 3. Построение графиков неявно заданных функций

В разд. 8 ч. I были рассмотрены исследование и построение графиков функций $F(x, y) = 0$ с помощью методов элементарной математики. В этом параграфе дано некоторое дополнение к исследованию и построению графиков таких функций.

Особые точки кривой $F(x, y) = 0$. Точка $M(x_0;\ y_0)$ кривой $F(x, y) = 0$ называется *особой* точкой, если ее координаты одновременно удовлетворяют таким трем уравнениям:

$$F(x_0,\ y_0) = 0,$$
$$F_x(x_0,\ y_0) = 0,$$
$$F_y(x_0,\ y_0) = 0.$$

Угловой коэффициент касательной к кривой в особой точке $\left(k = -\frac{F'_x}{F'_y}\right)$ неопределенный.

Пусть в особой точке $M(x_0;\ y_0)$ производные второго порядка F_{xx}, F_{xy}, F_{yy} не равны одновременно нулю, тогда точка $M(x_0;\ y_0)$

является двойной точкой кривой, причем форма кривой у ее двойной точки характеризуется значением

$$\Delta = F_{xy}^2(x_0;\ y_0) - F_{xx}(x_0;\ y_0)\,F_{yy}(x_0;\ y_0),$$

а именно: а) при $\Delta > 0$ кривая имеет узловую точку (рис. 444); б) при $\Delta < 0$ $M(x_0;\ y_0)$ — изолированная точка (рис. 445); в) при

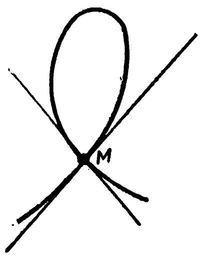


Рис. 444. Особая (узловая) точка M кривой $F(x, y) = 0$.

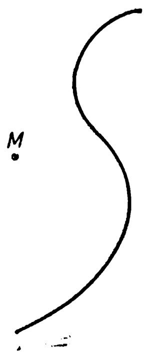


Рис. 445. Особая (изолированная) точка M кривой $F(x, y) = 0$.

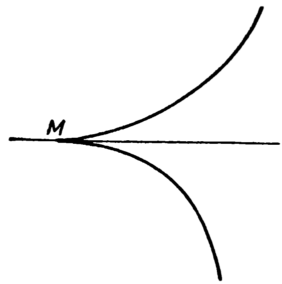


Рис. 446. Точка M — точка возврата первого рода кривой $F(x, y) = 0$.

$\Delta = 0$ точка $M(x_0;\ y_0)$ может быть точкой возврата первого (рис. 446) или второго (рис. 447) рода или изолированной точкой, или точкой самокасания (рис. 448).

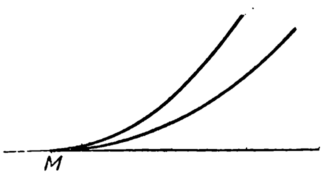


Рис. 447. Точка M — точка возврата второго рода кривой $F(x, y) = 0$.

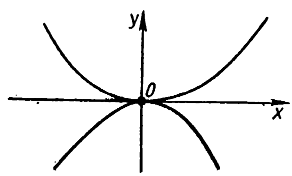


Рис. 448. Точка O — точка самокасания кривой $F(x, y) = 0$.

Наличие двойной точки в начале координат у алгебраической кривой определяют так: в приведенном уравнении такой кривой не должно быть свободного члена и членов с первыми степенями переменных.

Заметим, что уравнение касательных к кривым в особой точке, которая совпадает с точкой (0; 0), можно получить, если приравнять нулю группу членов наиболее низкой степени. Если особая точка не совпадает с началом координат, то уравнение касательных к кривым в этой точке можно получить, если принять особую точку началом новой системы и приравнять (в полученном после преобразований уравнении) нулю группу членов самой низкой степени.

Точки экстремума кривой $F(x, y) = 0$. Для определения критических точек кривой, заданной уравнениями $F(x, y) = 0$, заметим, что угловой коэффициент касательной в произвольной точке такой кривой

$$k = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Чтобы определить на кривой точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс, надо решить систему

$$\begin{cases} F_x(x, y) = 0, \\ F(x, y) = 0. \end{cases}$$

Пусть x_1 и y_1 — корни этой системы, причем $F(x_1, y_1) \neq 0$, тогда точка $M(x_1; y_1)$ является для кривой

точкой максимума $y_{\max}$, если $F_{xx}(x_1, y_1)\, F_y(x_1, y_1) > 0$;

точкой минимума $y_{\min}$, если $F_{xx}(x_1, y_1)\, F_y(x_1, y_1) < 0$.

Чтобы определить на кривой точку, в которой касательная параллельна оси ординат, надо решить систему

$$\begin{cases} F_y(x, y) = 0, \\ F(x, y) = 0. \end{cases}$$

Если x_1 и y_1 — корни этой системы, причем $F_x(x_1, y_1) \neq 0$, то точка M является для кривой

точкой максимума $x_{\max}$, если $F_{yy}(x_1, y_1)\, F_x(x_1, y_1) > 0$;

точкой минимума $x_{\min}$, если $F_{yy}(x_1, y_1)\, F_x(x_1, y_1) < 0$.

Точки перегиба кривой $F(x, y) = 0$. Если уравнение $F(x, y) = 0$ нельзя решить относительно y, то найти точки перегиба кривой в общем виде трудно. Иногда можно использовать такое свойство: точки перегиба алгебраической кривой $F(x, y) = 0$ должны находиться в точках пересечения этой кривой с ее *гессианой*. Так называют вспомогательную кривую, уравнение которой

$$F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 = 0.$$

Замечание. Иногда удобно исследовать и строить график неявно заданной функции, записав уравнение кривой в параметрическом виде.

Пример 1. Построить график кривой

$$x^4 - y^4 - x^2 + 2y^2 = 0.$$

Кривая симметрична относительно координатных осей.

Критические точки:

$$\begin{cases} F_x = 4x^3 - 2x, \\ F_y = -4y^3 + 4y. \end{cases}$$

Координаты точек, в которых касательные параллельны оси абсцисс, найдем, решив систему

$$\begin{cases} F(x,\ y) \equiv x^4 - y^4 - x^2 + 2y^2 = 0, \\ F_x(x,\ y) \equiv 4x^3 - 2x = 0. \end{cases}$$

Имеем $(0;\ \pm\sqrt{2})$, $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ \pm\sqrt{\frac{2\pm\sqrt{3}}{2}}\right)$, $(0;\ 0)$.

$$F_{xx} = 12x^2 - 2,$$
$$F_{yy} = -12y^2 + 4.$$

В точке $M_0(0;\ \sqrt{2})$ будет $y_{\max}$, поскольку $(F_{xx}F_y)_{\substack{x=0\\ y=\sqrt{2}}} > 0$, а в точках $M_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)$ будет $y_{\min}$, поскольку $(F_{xx}F_y)_{\substack{x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\\ y=\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}}} < 0.$

Координаты точек, в которых касательные параллельны оси ординат, найдем, решив систему

$$\begin{cases} F_y \equiv -4y^3 + 4y = 0, \\ F \equiv x^4 - y^4 - x^2 + 2y^2 = 0. \end{cases}$$

Получим $(\pm 1;\ 0)$, $(0;\ 0)$. В точке $A_1(1;\ 0)$ будет $x_{\max}$, поскольку $(F_{yy}F_x)_{\substack{x=1\\ y=0}} > 0$, а в точке $A_2(-1;\ 0)$ будет $x_{\min}$, поскольку $(F_{yy}F_x)_{\substack{x=-1\\ y=0}} < 0$.

Особые точки:

$$\begin{cases} F_x \equiv 4x^3 - 2x = 0, \\ F_y \equiv -4y^3 + 4y = 0, \\ F \equiv x^4 - y^4 - x^2 + 2y^2 = 0. \end{cases}$$

Точка $(0;\ 0)$ — единственная особая точка. Так как $\Delta = F_{xy}^2 - F_{xx} \times F_{yy} > 0$ в этой точке, то точка $(0;\ 0)$ — узловая особая точка;

$$x^2 - 2y^2 = 0,$$

т. е.

$$x - \sqrt{2}y = 0 \text{ и } x + \sqrt{2}y = 0 \text{ — две касательные.}$$

Другие исследования этой кривой см. в разд. 8 ч. I.

График кривой $x^4 - y^4 - x^2 + 2y^2 = 0$ см. на рис. 320.

Пример 2. Построить график кривой

$$x^2y^2 = x^3 - y^3.$$

Запишем уравнение кривой в параметрическом виде. Пусть $y = tx$, тогда $x^2t^2x^2 = x^3 - t^3x^3$, отсюда

$$x = \frac{1}{t^2} - t,$$

$$y = \frac{1}{t} - t^2,$$

причем $t \neq 0$. Функции $x(t) = \frac{1}{t^2} - t$ и $y(t) = \frac{1}{t} - t^2$ определены на $]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]0;\ \infty[$. Функция $y = y(x)$ определена на $]-\infty;\ \infty[$.

Кривая симметрична относительно прямой $x + y = 0$. Действительно, пусть $x - y = m$, $x + y = n$, тогда из уравнения кривой будем иметь $(n^2 - m^2)^2 = 12n^2m + 4m^3$. Из последнего очевидно, что график кривой симметричен относительно оси $n = 0$.

Первая производная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(1 + 2t^3)}{2 + t^3} \quad (t \neq 0).$$

При $t = -\sqrt[3]{2} \approx -1{,}26$ ($x \approx 1{,}89$, $y \approx -2{,}38$) производная $\frac{dy}{dx}$ не существует; $\frac{dy}{dx} = 0$ при $t = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx -0{,}79$ ($x \approx 2{,}38$; $y \approx -1{,}89$); $\frac{dy}{dx} < 0$ при $-\infty < t < -\sqrt[3]{2}$ — функция убывает; $\frac{dy}{dx} > 0$ при $-\sqrt[3]{2} < t < \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ — функция возрастает; $\frac{dy}{dx} < 0$ при $-\sqrt[3]{\frac{1}{2}} < t < 0$ — функция убывает; $\frac{dy}{dx} > 0$ при $0 < t < +\infty$ — функция возрастает.

Вторая производная

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2t^3(t^6 + 7t^3 + 1)}{(2 + t^3)^3} \quad (t \neq 0).$$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ при $t = -\sqrt[3]{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}} \approx -1{,}90$ ($x \approx 2{,}18$; $y \approx -4{,}14$) и при $t = -\sqrt[3]{\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}} \approx -0{,}53$ ($x \approx 4{,}14$; $y \approx -2{,}18$).

$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ при $-\infty < t < -\sqrt[3]{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}}$ — кривая выпуклая;

$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ при $-\sqrt[3]{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}} < t < -\sqrt[3]{2}$ — кривая вогнутая;

$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ при $-\sqrt[3]{\frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}} < t < 0$ — кривая вогнутая;

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \text{ при } -\sqrt[3]{2} < t < -\sqrt[3]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} \text{ — кривая выпуклая;}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0 \text{ при } 0 < t < \infty \text{ — кривая выпуклая.}$$

Точки перегиба: $P_1\,(2{,}18;\ -4{,}14)$, $P_2\,(1{,}89;\ -2{,}38)$, $P_3\,(4{,}14;\ -2{,}18)$.
График кривой представлен на рис. 449.

Пример 3. Построить график кривой

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y - 1 = 0.$$

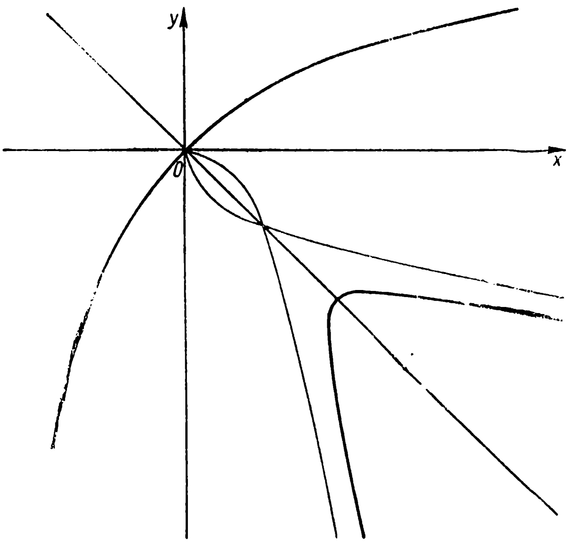


Рис. 449. $x^2y^2 = x^3 - y^3$.

Кривая симметрична относительно координатных осей. При $x>0$, $y>0$ кривая будет иметь уравнение

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} y,$$

откуда $x = \ln\left(\operatorname{ch} y + \sqrt{1+\operatorname{ch}^2 y}\right)$.
Асимптоты:

$$k = \lim_{y\to+\infty} \frac{x(y)}{y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{\ln\left(\operatorname{ch} y + \sqrt{1+\operatorname{ch}^2 y}\right)}{y} = 1,$$

$$b = \lim_{y\to+\infty} [x(y) - y] = \lim_{y\to+\infty} \left[\ln\left(\operatorname{ch} y + \sqrt{1+\operatorname{ch}^2 y}\right) - y\right] = 0,$$

$x = y$ — наклонная асимптота.

Первая производная

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\operatorname{sh} y}{\sqrt{1+\operatorname{ch}^2 y}}.$$

$\frac{dx}{dy}>0$ при $y>0$ — функция возрастает;

$\frac{dx}{dy}<0$ при $y<0$ — функция убывает;

в точке $x=\ln(1+\sqrt{2})$; $y=0$ функция имеет минимум.
Вторая производная

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{2\operatorname{ch} y}{(1+\operatorname{ch}^2 y)^{\frac{3}{2}}}.$$

$\frac{d^2x}{dy^2}>0$ при $y>0$.

График кривой представлен на рис. 450.

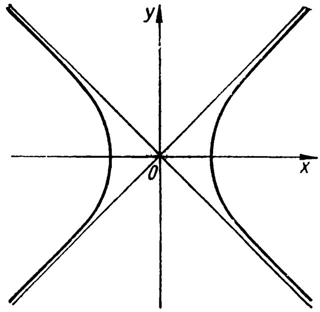


Рис. 450. $\operatorname{ch}^2 x-\operatorname{ch}^2 y-1=0$.

§ 4. Построение графиков функций в полярной системе координат

Исследование и построение графиков функций в полярной системе координат были рассмотрены в разд. 7 ч. I. Здесь представлено некоторое дополнение к исследованию и построению графиков в полярной системе координат с существенным использованием аппарата дифференциального исчисления.

Рассмотрим функцию вида

$$\rho=f(\varphi),\quad -\infty<\varphi<\infty.$$

Условимся отрицательные значения ρ откладывать в направлении $\varphi+\pi$, т. е. в направлении, противоположном направлению, которое определяется углом φ.

Если $\rho=f(\varphi)$ — ограничена, т. е. значение $|\rho|\leqslant a$, то вся кривая находится внутри круга $\rho=a$.

Если $f(-\varphi)=f(\varphi)$, то кривая симметрична относительно полярной оси; если $f(\pi-\varphi)=f(\varphi)$, то кривая симметрична относительно перпендикуляра к полярной оси (в полюсе); если $f(\pi+\varphi)=f(\varphi)$, то кривая симметрична относительно полюса.

Исследование функции $\rho=f(\varphi)$ на экстремум производится обычным способом: если $f'(\varphi)=0$, $\varphi=\varphi_1$, то: $f(\varphi_1)$ является ρ_{max}, если $f'(\varphi)$ при переходе φ через значение φ_1 меняет знак с «+» на «—» или $f''(\varphi_1)<0$; $f(\varphi_1)$ является ρ_{min}, если $f'(\varphi)$ при переходе φ через значение φ_1 меняет знак с «—» на «+» или $f''(\varphi_1)>0$.

Касательные к кривой в точках ρ_{max} и ρ_{min} перпендикулярны к радиусу-вектору точки касания. Для того чтобы найти на кривой $\rho = f(\varphi)$ точки, в которых касательная перпендикулярна к полярной оси, надо в формуле $\operatorname{tg}\mu = \frac{\rho}{\rho'}$ (рис. 451) положить $\mu = k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi$. Значения φ, найденные из этого уравнения, и определяют искомые точки.

Если кривая имеет точки перегиба, то соответствующие значения φ должны быть корнями нечетной кратности уравнения

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho'\rho'' = 0.$$

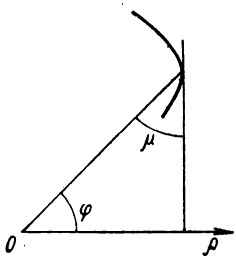


Рис. 451. $\operatorname{tg}\mu = \frac{\rho}{\rho'}$.

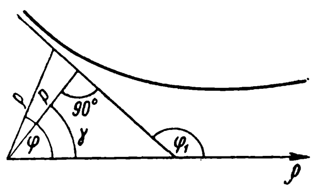


Рис. 452. Асимптота кривой $\rho = \rho(\varphi)$: $\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \gamma)}$.

Уравнение асимптоты в полярной системе координат:

$$\rho = \frac{p}{\cos(\varphi - \gamma)},$$

где γ — угол, образованный перпендикуляром, опущенным на асимптоту из полюса, с полярной осью; p — длина этого перпендикуляра (рис. 452). Для нахождения γ исследуют по уравнению заданной кривой, существует ли такое значение $\varphi = \varphi_1$, для которого соответствующее значение $\rho = \infty$. Если такое значение φ найдено, то кривая имеет бесконечную ветвь. Ищут

$$p = \lim_{\varphi \to \varphi_1} \frac{\rho^2}{|\rho'|}.$$

Если этот предел существует, то бесконечная ветвь имеет асимптоту. Если предел не существует, то бесконечная ветвь кривой не имеет асимптоты (является параболической ветвью кривой). Если $p > 0$, то асимптота находится справа от радиуса-вектора, который простирается в бесконечность, если $p < 0$ — то слева.

Пример 1. Построить график функции

$$\rho = \frac{a}{\cos^2\varphi}.$$

Кривая имеет бесконечные ветви. Кривая симметрична относительно полярной оси и перпендикулярна к ней (в полюсе). Функция периодическая с периодом $\omega = 2\pi$.

Исследуем функцию на экстремум:

$$\rho' = \frac{2a \sin\varphi}{\cos^3\varphi}, \quad \rho' = 0, \quad \sin\varphi = 0,$$

откуда $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$.
Имеем

$$\rho'(0-0) < 0, \ \rho'(0+0) > 0, \text{ при } \varphi = 0 \ \rho_{\min} = a,$$

$$\rho'(\pi-0) < 0, \ \rho'(\pi+0) > 0, \text{ при } \varphi = \pi \ \rho_{\min} = a.$$

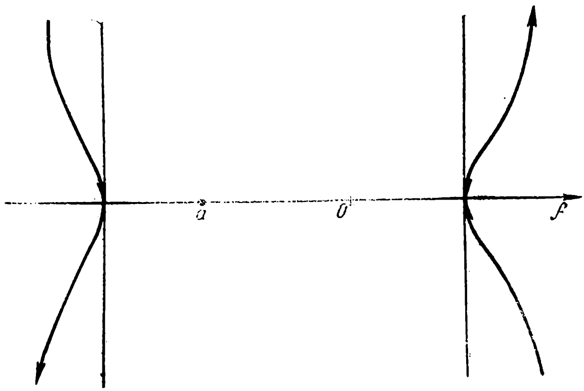


Рис. 453. $\rho = \frac{a}{\cos^2\varphi}$.

Находим точки, в которых касательная к кривой параллельна полярной оси.

В формуле $\operatorname{tg}\mu = \frac{\rho}{\rho'}$ положим $\mu = k\pi - \varphi$, получим

$$\operatorname{tg}(k\pi - \varphi) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\varphi, \text{ откуда } \operatorname{tg}^2\varphi = -\frac{1}{2};$$

последнее уравнение не имеет действительных корней.

Находим точки, в которых касательная к кривой перпендикулярна к полярной оси. В формуле $\operatorname{tg}\mu = \frac{\rho}{\rho'}$ положим $\mu = k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi$, получим уравнение $\operatorname{tg}\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\mu$, откуда $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi$. В точках $(a;\ 0)$ и $(a;\ \pi)$ кривая перпендикулярна к полярной оси.

Для нахождения точек перегиба решаем уравнение

$$\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho'\rho'' = 0, \text{ имеем } \cos\varphi = \pm\sqrt{\frac{2}{3}},$$

т. е. на $[0; 2\pi]$ определены значения φ для четырех точек перегиба.

Асимптоты. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\rho = \infty$, следовательно, возможна асимптота, но

$$p = \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} \frac{a}{\sin 2\varphi} = \infty;$$

следовательно, асимптоты нет.

График функции $\rho = \frac{a}{\cos^2\varphi}$ представлен на рис. 453.

Пример 2. Построить график функции

$$\rho = a\frac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi - 1},\ a > 0,\ \varphi > 1.$$

Функция при $\varphi > 1$ непрерывна.

$$\lim_{\varphi \to 1+0} \rho(\varphi) = +\infty,$$

т. е. $\varphi = 1$ — асимптота.

$$\lim_{\varphi \to +\infty} \rho(\varphi) = 0,$$

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = a\left[\frac{1}{\operatorname{ch}^2\varphi \cdot (\varphi - 1)} - \frac{\operatorname{th}\varphi}{(\varphi - 1)^2}\right],$$

$\frac{d\rho}{d\varphi} < 0$ при $\varphi > 1$ — функция убывающая.

Эскиз графика см. на рис. 319, *б*.

Пример 3. Построить график функции

$$\varphi = \arccos\frac{\rho - 1}{\rho^2}.$$

Область определения функции: $\left|\frac{\rho - 1}{\rho^2}\right| \leqslant 1$, откуда $-\rho^2 \leqslant \rho - 1 \leqslant \rho^2$,

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \leqslant \rho < +\infty.$$

$$\lim_{\rho \to \frac{-1+\sqrt{5}}{2}+0} \varphi(\rho) = \lim_{\rho \to \frac{-1+\sqrt{5}}{2}+0} \arccos\frac{\rho - 1}{\rho^2} = \pi.$$

$$\lim_{\rho \to +\infty} \varphi(\rho) = \lim_{\rho \to +\infty} \arccos\frac{\rho - 1}{\rho^2} = \frac{\pi}{2};\ \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Первая производная

$$\frac{d\varphi}{d\rho}=\frac{\rho-2}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho^2}\right)^2}};$$

$\frac{d\varphi}{d\rho}=0$ при $\rho=2$, причем $\frac{d\varphi}{d\rho}<0$ при $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}<\rho<2$, $\frac{d\varphi}{d\rho}>0$ при $\rho>2$, следовательно, при $\rho=2$ функция имеет минимум $\left(\varphi=\arccos\frac{1}{4}\right)$. В точке $\rho=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ производная не существует, в ней функция равна π (максимальное значение).

Эскиз графика функции показан на рис. 454.

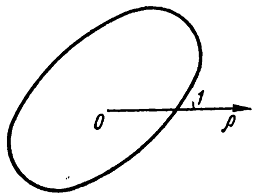


Рис. 454. $\varphi=\arccos\frac{\rho-1}{\rho^2}$.

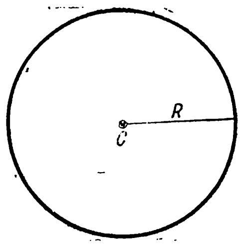


Рис. 455. Окружность.

РАЗДЕЛ 3

НЕКОТОРЫЕ ВАЖНЫЕ КРИВЫЕ

§ 1. Кривые второго порядка *

Окружность с центром в точке C и радиусом R — это геометрическое место точек плоскости, удаленных от точки C на расстояние R. Уравнение окружности:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$$

где $C(a;\ b)$ — центр окружности, R — радиус (рис. 455).

В полярной системе координат уравнение окружности с центром в полюсе имеет вид

$$\rho=R.$$

Эллипс — геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух заданных точек (фокусов) является величиной по-

* Порядок кривой определяется степенью уравнения кривой.

стоянной ($2a$) (рис. 456, *а*), каждое из этих расстояний (фокальный радиус-вектор) равно:

$$r_1 = MF_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = MF_2 = a + \varepsilon x, \quad r_1 + r_2 = 2a.$$

AB — большая ось ($2a$); CD — малая ось ($2b$); A, B, C, D — вершины; O — центр; F_1, F_2 — фокусы (точки, лежащие на большой оси по обе стороны от центра на расстоянии $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ от него); p — фокальный параметр (половина хорды, проведенной через фокус параллельно малой оси), $p = \frac{b^2}{a}$; $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ — эксцентриситет.

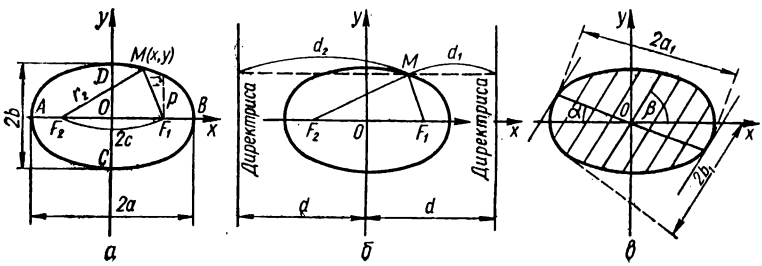


Рис. 456. Эллипс (определение).

Каноническое уравнение эллипса (если оси координат совпадают с осями эллипса):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Параметрическое уравнение эллипса:

$$x = a \cos t,$$
$$y = b \sin t \ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Уравнение эллипса в полярных координатах:

$$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \varphi};$$

если полюс находится в фокусе, то полярная ось направлена от фокуса к ближайшей вершине.

Директрисы — прямые, параллельные малой оси и расположенные на расстоянии $d = \frac{a}{\varepsilon}$ от нее (рис. 456, *б*). Для любой точки $M(x;\ y)$ эллипса

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon.$$

Диаметры — хорды, проходящие через центр эллипса; они делятся в центре пополам. Геометрическое место середин хорд, параллельных одному из диаметров эллипса, является диаметром, сопряженным с заданным (рис. 456, *в*). Если k_1 и k_2 — угловые коэффициенты сопряженных диаметров, то $k_1 k_2 = -\frac{b^2}{a^2}$.

Касательная к эллипсу в точке $M(x_1;\ y_1)$ имеет уравнение

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Прямая $Ax + By + C = 0$ касается эллипса при условии

$$A^2a^2 + B^2b^2 - C^2 = 0.$$

Радиус кривизны в точке $M(x_0;\ y_0)$ (рис. 457)

$$R = a^2b^2\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(r_1r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{p}{\sin^3\varphi},$$

где φ — угол между касательной и радиусом-вектором точки касания.

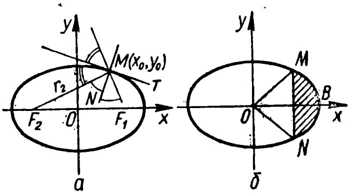


Рис. 457. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Площадь эллипса $S = \pi ab$. Площадь сектора $BOM = \frac{ab}{2}\arccos\frac{x}{a}$.

Площадь сегмента $MBN = ab\arccos\frac{x}{a} - xy$.

Гипербола — геометрическое место точек, для каждой из которых разность расстояний для двух заданных точек (фокусов) является величиной постоянной ($2a$). Точки, для которых $r_1 - r_2 = 2a$, принадлежат одной ветви гиперболы (на рис. 458, *а* — левой); точки, для которых $r_2 - r_1 = 2a$ — второй ее ветви (правой). Каждое из этих расстояний (фокальный радиус-вектор) выражается формулой

$$r_1 = \pm(\varepsilon x - a),\quad r_2 = \pm(\varepsilon x + a),$$

где верхний знак — для точек правой ветви, нижний — для левой; AB — действительная ось ($2a$); A, B — вершины; O — центр; F_1, F_2 — фокусы (точки, лежащие на действительной оси по обе стороны от центра на расстоянии c (большем, чем a) от него); CD — мнимая ось ($2b = 2\sqrt{c^2 - a^2}$); p — фокальный параметр, $p = \frac{b^2}{a}$; $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ — эксцентриситет.

Каноническое уравнение гиперболы (если ось Ox совпадает с действительной осью гиперболы):

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Параметрическое уравнение гиперболы:

$$x = a \operatorname{ch} t,$$
$$y = b \operatorname{sh} t,$$

или

$$x = a \sec t,$$
$$y = b \operatorname{tg} t.$$

Уравнение гиперболы в полярных координатах:

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi};$$

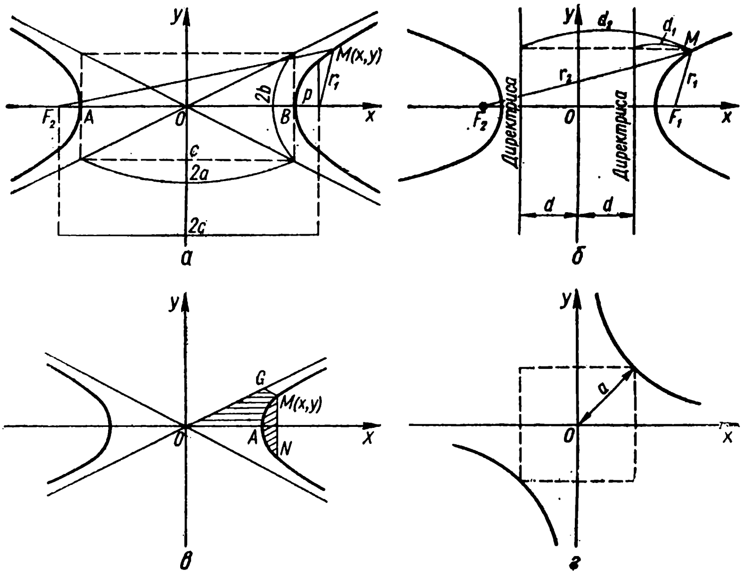


Рис. 458. Гипербола (определение).

если полюс находится в фокусе, то полярная ось направлена от фокуса к ближайшей вершине. Последнее уравнение определяет лишь одну ветвь гиперболы.

Директрисы — прямые, расположенные на расстоянии $d = \frac{a}{\varepsilon}$ от центра и перпендикулярные к действительной оси (рис. 458, *б*).

Касательная к гиперболе в точке $M(x_1;\ y_1)$:

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Прямая $Ax + By + C = 0$ касается гиперболы, если

$$A^2a^2 - B^2b^2 = C^2.$$

Уравнение асимптот: $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Сопряженные гиперболы (рис. 459)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ и } \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

имеют общие асимптоты. Действительная ось каждой из них совпадает с мнимой осью и наоборот.

Диаметры — хорды гиперболы и ее сопряженной, проходящие через общий центр гипербол; они делятся в центре пополам. Два диаметра с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 называются сопряженными, если $k_1 k_2 = \frac{b^2}{a^2}$.

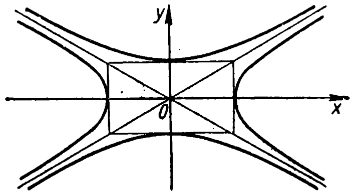


Рис. 459. Сопряженные гиперболы.

Радиус кривизны R гиперболы в точке $M(x_1; y_1)$

$$R = a^2 b^2 \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{(r_1 r_2)^{\frac{3}{2}}}{ab} = \frac{p}{\sin^3 \varphi},$$

где φ — угол между касательной и радиусом-вектором точки касания. В вершинах A и B (см. рис. 458, *а*) $R = p = \frac{b^2}{a}$.

Площадь сегмента AMN (рис. 458, *в*)

$$xy - ab \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = xy - ab \operatorname{Arch} \frac{x}{a}.$$

Равносторонняя гипербола — гипербола, оси которой равны: $a = b$ (рис. 458, *г*). Уравнение равносторонней гиперболы: $x^2 - y^2 = a^2$. Асимптоты такой гиперболы взаимно перпендикулярны. Если осями координат выбрать асимптоты, то уравнение равносторонней гиперболы будет иметь вид $xy = \frac{a^2}{2}$.

Парабола — геометрическое место точек $M(x; y)$, равноудаленных от данной точки (фокуса) и от данной прямой (директрисы):

$$MF = MK = x + \frac{p}{2},$$

MF — фокальный радиус-вектор точек параболы; Ox — ось параболы; O — вершина; F — фокус $\left(\text{точка, лежащая на оси на расстоянии } \frac{p}{2}\right.$ от вершины$\left.\right)$; N_1N_2 — директриса $\left(\text{прямая, проходящая на расстоянии } \frac{p}{2}\right.$ от вершины по другую сторону от фокуса$\left.\right)$; p — фокальный параметр (рис. 460, *а*). Эксцентриситет параболы равен единице.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px,$$

вершина параболы находится в начале координат, ось Ox совпадает с ее осью, парабола повернута вершиной влево.

Уравнение в полярных координатах:

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi},$$

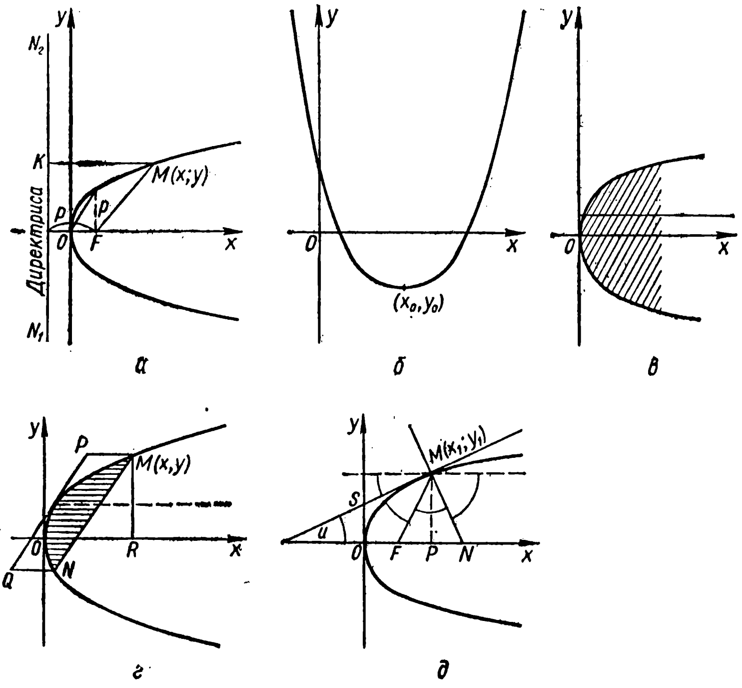


Рис. 460. Парабола.

полюс находится в фокусе, полярная ось направлена от фокуса к вершине.

Уравнение параболы с вертикальной осью (рис. 460, *б*):

$$y = ax^2 + bx + c,$$

при этом параметр параболы $p = \frac{1}{2|a|}$. Если $a > 0$, то парабола повернута вершиной вниз, если $a < 0$, — то вершиной вверх; координаты вершины: $x_0 = -\frac{b}{2a}$, $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Диаметр — прямая, параллельная оси параболы. Диаметр делит пополам хорды, параллельные касательной, проведенной в конце диаметра. Уравнение диаметра:

$$y = \frac{p}{k},$$

где k — угловой коэффициент этих хорд (рис. 460, *в*).

Касательная к параболе (рис. 460, *д*) в точке $M(x_1; y_1)$:

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Прямая $y = kx + b$ касается параболы при условии $p = 2bk$.

Радиус кривизны параболы в точке $M(x_1; y_1)$:

$$R = \frac{(p + 2x_1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}} = \frac{p}{\sin^3 \varphi}.$$

В вершине O радиус кривизны $R = p$.

Площадь сегмента параболы $S_{MON} = \frac{2}{3} S_{PQNM}$ (рис. 460, *г*).

§ 2. Кривые третьего порядка

Декартов лист. Декартовым листом (рис. 461) называется кривая третьего порядка, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Параметрическое уравнение:

$$x = \frac{3at}{1 + t^3},$$

$$y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

В полярной системе координат (O — полюс; Ox — полярная ось) уравнение кривой имеет вид

$$\rho = \frac{3a \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}.$$

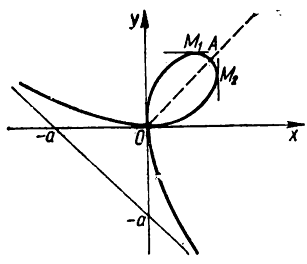


Рис. 461. Декартов лист $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

Кривая симметрична относительно биссектрисы $y = x$. Начало координат (0; 0) — узловая точка с касательными — осями координат. В I квадранте кривая имеет петлю, пересекающуюся с прямой $y = x$ в точке $A\left(\frac{3}{2}a; \frac{3}{2}a\right)$. Точки петли, в которых касательные параллельны координатным осям, имеют координаты

$$M_1(a\sqrt[3]{2};\ a\sqrt[3]{4}) \text{ и } M_2(a\sqrt[3]{4};\ a\sqrt[3]{2}).$$

$OA = \frac{3a}{\sqrt{2}}$. Радиус кривизны в начале координат $R = \frac{3a}{2}$. Асимптота $x + y + a = 0$. Площадь петли $S_1 = \frac{3}{2}a^2$; площадь между кривой и асимптотой $S_2 = \frac{3}{2}a^2$.

Циссоида Диокла. Геометрическое место точек M, для которых $OM = PQ$ (P — произвольная точка начальной окружности с диаметром a) (рис. 462) называется циссоидой Диокла (Диоклеса).

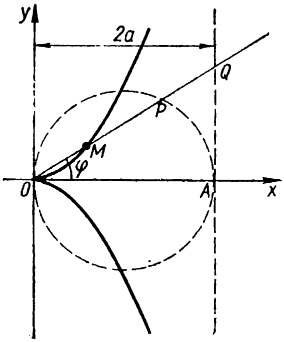


Рис. 462. Циссоида Диокла $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$.

Уравнение кривой в декартовой системе координат:

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}.$$

Уравнение кривой в полярной системе координат (O — полюс; Ox — полярная ось):

$$\rho = \frac{2a \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}.$$

Параметрическое уравнение кривой:

$$x = \frac{a}{t^2 + 1}, \quad y = \frac{a}{t(t^2 + 1)}.$$

Кривая симметрична относительно оси абсцисс. Начало координат — точка возврата первого рода.

Асимптота: $x = 2a$.

Площадь между кривой и асимптотой $S = 3\pi a^2$. Объем тела, полученного вращением полосы между циссоидой и ее асимптотой вокруг асимптоты,

$$V = 2\pi^2 a^3.$$

Если из вершины параболы $y = 2px$ опустить перпендикуляры на касательные к параболе, то геометрическое место оснований этих перпендикуляров является циссоидой:

$$y^2 = -\frac{x^3}{2p + x}.$$

Замечание. Из циссоид — кривых третьего порядка — назовем *трисектрису Лоншама* (рис. 463) — геометрическое место точек P пересечения касательных к окружности радиуса a, проведенных в точках C и B этой окружности, если эти точки являются концами дуг $AB = \omega$ и $AC = \omega$, где ω — любой центральный угол, а точка A — фиксированная.

Полярное уравнение трисектрисы:

$$\rho = \frac{a}{\cos 3\varphi};$$

ее уравнение в декартовой системе координат:

$$\left(x + \frac{a}{3}\right)\left(y^2 - \frac{1}{3}x^2\right) + \frac{4}{9}ax^2 = 0.$$

Заметим, что с помощью преобразования инверсии из трисектрисы можно получить *трехлепестковую розу* $\rho = a\cos 3\varphi$ (см. рис. 307).

Строфоида — это геометрическое место точек M_1 и M_2, которые лежат на произвольных лучах, проходящих через точку A, и для которых $PM_1 = PM_2 = OP$ (P — произвольная точка оси ординат) (рис. 464).

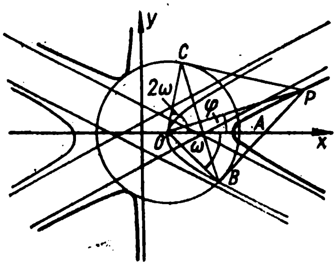


Рис. 463. Трисектриса Лоншама $\rho = \frac{a}{\cos 3\varphi}$.

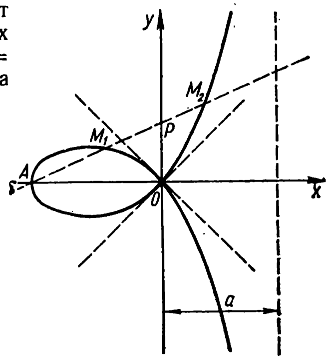


Рис. 464. Строфоида $y^2 = x^2\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$.

Уравнение в декартовой системе координат:

$$y^2 = x^2\left(\frac{a+x}{a-x}\right);$$

в параметрической форме:

$$x = a\frac{t^2-1}{t^2+1},$$

$$y = at\frac{t^2-1}{t^2+1};$$

в полярной системе координат (O — полюс; Ox — полярная ось):

$$\rho = -a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}.$$

Кривая симметрична относительно оси абсцисс. Начало координат (0; 0) — узловая точка (касательные $y = \pm x$). Радиус кривизны в узловой точке $R = a\sqrt{2}$.

Асимптота: $x = a$.

Площадь петли $S_1 = 2a^2 - \frac{\pi a^2}{2}$, площадь между кривой и асимптотой $S_2 = 2a^2 + \frac{\pi a^2}{2}$.

Верзиера Аньези. На отрезке $OC = a$ (рис. 465) как на диаметре построим окружность. Продлим полухорду BD до точки M, определяемой из пропорции

$$BM : BD = OC : OB,$$

геометрическое место точек M является верзиерой.

Уравнение кривой в декартовой системе координат:

$$y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}.$$

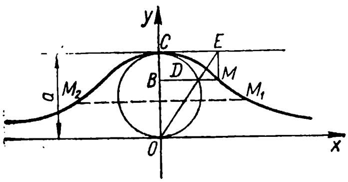


Рис. 465. Верзиера Аньези $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}$.

Параметрическое уравнение кривой:

$$x = t,$$

$$y = \frac{a^3}{t^2 + a^2}.$$

Кривая симметрична относительно оси ординат. Максимум $C(0; a)$, радиус кривизны в нем: $r = \frac{a}{2}$.

Точки перегиба: $M_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{3a}{4}\right)$, $M_2\left(\frac{-a}{\sqrt{3}}; \frac{3a}{4}\right)$, наклон кривой в точке перегиба: $\operatorname{tg}\varphi = \mp\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Площадь между кривой и асимптотой $S = \pi a^2$. Объем тела, образованного вращением верзиеры вокруг асимптоты, равен удвоенному объему V_1 тела вращения начального круга вокруг той же оси:

$$V = \frac{\pi^2 a^3}{2},$$

$$V_1 = \frac{\pi^2 a^3}{4}.$$

Псевдоверзиера — кривая, которую можно получить из верзиеры, удвоив все ординаты последней. Ее уравнение:

$$y = \frac{2a^3}{x^2 + a^2}.$$

Приведем еще некоторые примеры важных кривых третьего порядка.

Офиурида — кривая, определяемая как подера* параболы относительно какой-либо точки, лежащей на касательной в вершине этой параболы (рис. 466); ее уравнение:

$$x(x^2+y^2)=y(cy-bx).$$

Если в уравнении офиуриды принять $b=0$, то получим уравнение циссоиды.

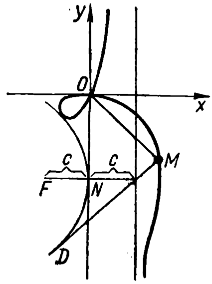


Рис. 466. Офиурида $x(x^2+y^2)=y(cy-bx)$.

Трисектриса Маклорена — кривая, которую определяют как подеру параболы относительно такой точки ее оси, которая удалена от директрисы на расстояние, равное расстоянию директрисы от фокуса (рис. 467); ее уравнение в декартовой системе координат:

$$(x-3a)(x^2+y^2)+4a^3=0,$$

в полярной системе координат:

$$\rho=\frac{a}{\cos\frac{\varphi}{3}}.$$

Из последнего уравнения следует, что трисектрису Маклорена можно получить в результате инверсии розы $\rho=a\cos\frac{\varphi}{3}$ относительно полюса.

Кубика Чирнгаузена — кривая, для которой парабола является подерой (рис. 468). Если уравнение параболы представить в виде $y^2=2px+p^2$, то уравнение кубики Чирнгаузена в декартовой системе координат будет иметь вид

$$2(2p+x)^3=27p(x^2+y^2),$$

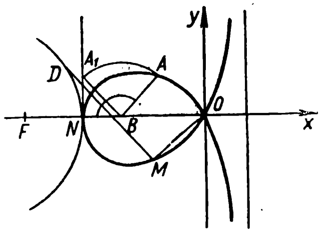


Рис. 467. Трисектриса Маклорена $(x-3a)(x^2+y^2)+4a^3=0$.

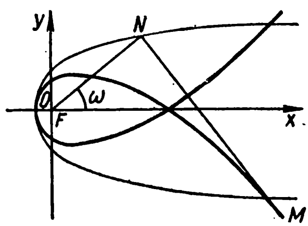


Рис. 468. Кубика Чирнгаузена $2(2p+x)^3=27p(x^2+y^2)$.

а в полярной системе координат:

$$\rho\cos^3\frac{\pi-\varphi}{3}=\frac{p}{2}.$$

---

* Подерой данной кривой K относительно любой точки плоскости называется новая кривая, которая является геометрическим местом оснований перпендикуляров, опущенных из этой точки на касательные к заданной кривой.

Заметим, что кубика Чирнгаузена является огибающей отраженных от параболы световых лучей, перпендикулярных к ее оси, т. е. катакаустикой параболы.

§ 3. Кривые четвертого и высших порядков

Конхоида Никомеда. Конхоидой данной кривой называется кривая, которую можно получить при увеличении или уменьшении радиуса-вектора каждой точки данной кривой на постоянный отрезок l.

Если уравнение кривой в полярных координатах: $\rho = f(\varphi)$, то уравнение ее конхоиды: $\rho = f(\varphi) \pm l$.

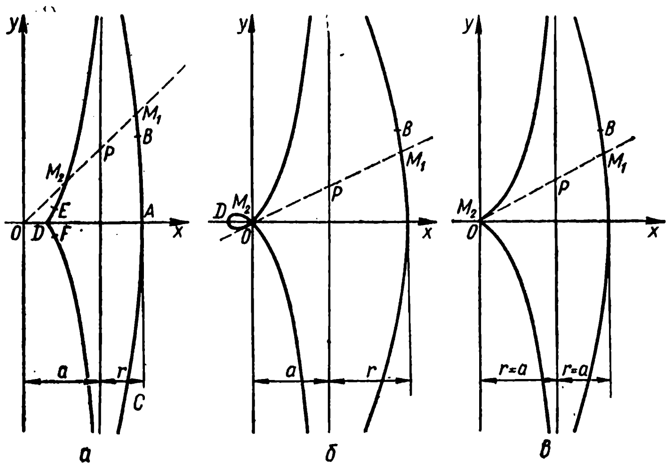


Рис. 469. Конхоида Никомеда $(x - a)^2 (x^2 + y^2) - l^2x^2 = 0$.

Конхоида Никомеда — конхоида прямой линии, т. е. геометрическое место точек M, для которых $OM = OP \pm l$ (внешняя ветвь для «+», внутренняя ветвь для «—») (рис. 469).

Уравнение в декартовой системе координат:

$$(x - a)^2 (x^2 + y^2) - l^2x^2 = 0;$$

в параметрической форме:

$$x = a + l \cos \varphi,$$
$$y = a \operatorname{tg} \varphi + l \sin \varphi;$$

в полярных координатах:

$$\rho = \frac{a}{\cos \varphi} \pm l.$$

Для внешней ветви: асимптота $x = a$, вершина $A(a + l;\ 0)$, точки перегиба B и C. Площадь между ветвью и асимптотой $S = \infty$.

Для внутренней ветви: асимптота $x = a$, вершина $D(a - l;\ 0)$, точка $(0;\ 0)$ — двойная точка, характер которой зависит от величин a и l: а) $l < a$ — изолированная точка (рис. 469, *а*), кривая имеет еще две точки перегиба: E и F; б) при $l > a$ — узловая точка (рис. 469, *б*), кривая имеет максимум и минимум при $x = a - \sqrt[3]{al^2}$; в) при $l = a$ — точка возврата (рис. 469, *в*).

Улитку Паскаля можно определить как конхоиду окружности $OM = OP \pm l$ (полюс лежит на окружности) (рис. 470).

Уравнение кривой в прямоугольной декартовой системе координат:

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = l^2 (x^2 + y^2);$$

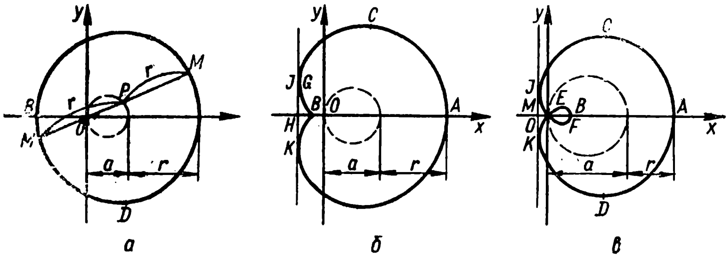


Рис. 470. Улитка Паскаля $(x^2 + y^2 - ax)^2 = l^2 (x^2 + y^2)$.

в параметрической форме:

$$x = a \cos^2 \varphi + l \cos \varphi,$$

$$y = a \sin \varphi \cos \varphi + l \sin \varphi;$$

в полярной системе (O — полюс; Ox — полярная ось):

$$\rho = a \cos \varphi + l$$

(a — диаметр окружности). Вершины A, $B(a \pm l;\ 0)$. Вид кривой зависит от величин a и l.

Кривая имеет четыре экстремума, если $a > l$; два экстремума, если $a \leqslant l$: C, D, $F\left(\cos \varphi = \frac{-l \pm \sqrt{l^2 + 8a^2}}{4a}\right)$. Точки перегиба G, $H\left(\cos \varphi = -\frac{2a^2 + l^2}{3al}\right)$, если $a < l < 2a$. Начало координат — двойная точка: изолированная при $a < l$, узловая при $a > l$, точка возврата при $a = l$.

Площадь, описываемая полярным радиусом улитки при полном обороте,

$$S = \left(\frac{1}{2} a^2 + l^2\right) \pi.$$

При наличии петли имеет место равенство

$$S = S_1 + S_2,$$

где

$$S_1 = \left(\frac{1}{2}a^2 + l^2\right)\varphi_1 + \frac{3}{2}l\sqrt{a^2 - l^2}\left(\varphi_1 = \arccos\left(-\frac{l}{a}\right)\right),$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{2}a^2 + l^2\right)\varphi_2 - \frac{3}{2}l\sqrt{a^2 - l^2}\left(\varphi_2 = \arccos\frac{l}{a}\right),$$

здесь S_1 — площадь, ограниченная внешней петлей; S_2—площадь одной внутренней петли.

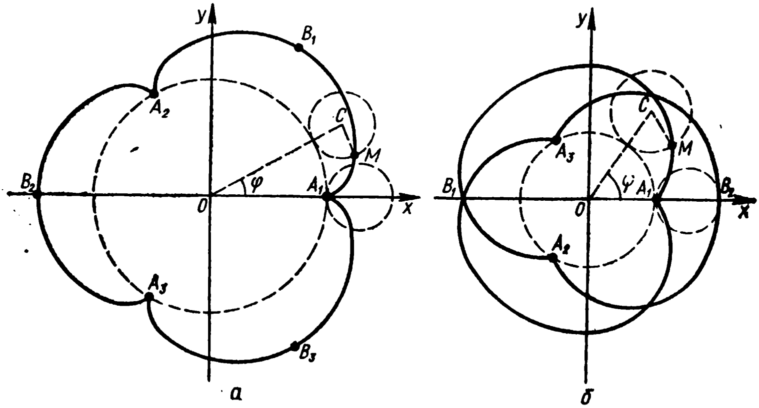


Рис. 471. Эпициклоида $x = (A + a)\cos\varphi - a\cos\left(\frac{A + a}{a}\varphi\right)$, $y = (A + a)\sin\varphi - a\sin\left(\frac{A + a}{a}\varphi\right)$; $m = 3$ *(а)*; $m = \frac{3}{2}$ *(б)*.

Циклоидальные кривые. Пусть некоторая кривая катится без скольжения по другой кривой. При этом любая точка, неизменно связанная с первой кривой, описывает новую линию. Среди кривых, образованных таким способом, выделяют кривые, являющиеся траекториями точки, неизменно связанной с окружностью, которая катится без скольжения по второй окружности. Полученные при этом линии называют циклоидальными. Циклоидальные кривые могут быть как алгебраическими, так и трансцендентными. Рассмотрим некоторые примеры алгебраических циклоидальных кривых.

Эпициклоида — кривая, описываемая точкой окружности, которая катится без скольжения по другой окружности извне (рис. 471).

В параметрической форме уравнение эпициклоиды имеет вид

$$x = (A + a)\cos\varphi - a\cos\left(\frac{A + a}{a}\varphi\right),$$

$$y = (A + a)\sin\varphi - a\sin\left(\frac{A + a}{a}\varphi\right),$$

где A — радиус неподвижной окружности; a — радиус подвижной окружности; $\varphi = \angle COx$.

Вид кривой зависит от отношения $\frac{A}{a} = m$. В частности, при $m = 1$ имеем кардиоиду (см. ниже). При этом m эпициклоида состоит из m ветвей, которые обходят неподвижный круг. Точки возврата: $A_1, A_2, \ldots, A_m \left(\rho = A,\ \varphi = \frac{2k\pi}{m}\ (k = 0, 1, \ldots, m-1)\right)$, вершины: $B_1, B_2, \ldots, B_m \left(\rho = A + 2a,\ \varphi = \frac{2\pi}{m}\left(k + \frac{1}{2}\right)\right)$. При дробном m ветви перекрещиваются, подвижная точка M, описав конечное число ветвей, возвращается в начальное положение. Если m — иррациональное, то число ветвей бесконечно, точка M в начальное положение не возвращается.

Кривая имеет m ветвей, длина одной ветви $L_{A_1B_1A_2} = \frac{8(A+a)}{m}$; если m — целое, то длина всей кривой $L = 8(A + a)$.

Площадь сектора $A_1B_1A_2A_1$

$$S = \pi a^2 \left(\frac{3A + 2a}{A}\right).$$

Радиус кривизны

$$r = \frac{4a(A+a)}{2a+A} \sin\frac{A\varphi}{2a},$$

в вершинах

$$r_{\text{в}} = \frac{4a(A+a)}{2a+A}.$$

Натуральное уравнение обычной эпициклоиды:

$$\frac{r^2}{\tilde{a}^2} + \frac{(S - \tilde{b})^2}{\tilde{b}^2} = 1\ (0 \leqslant S \leqslant 2\tilde{b}),$$

где $\tilde{a} = \frac{4a(A \pm a)}{A \pm 2a}$; $\tilde{b} = \frac{4a(A \pm a)}{A}$; r — радиус кривизны; S — длина дуги, которую отсчитывают от одной из начальных точек.

Последнее уравнение выражает такое кинематическое свойство эпициклоиды: если дуга обычной эпициклоиды перекатывается без скольжения по прямой, то центр кривизны точки касания движется по эллипсу; центр эллипса лежит в той точке прямой, через которую перекатывается вершина эпициклоиды.

Гипоциклоида — кривая, описываемая точкой окружности, которая катится без скольжения по другой окружности внутри нее (рис. 472). Уравнение гипоциклоиды, координаты вершин и точек возврата, формулы длины дуги, площади и радиуса кривизны — те же, что и для эпициклоиды с заменой «+» на «—»; число точек возврата такое же, как и у эпициклоиды.

Удлиненные и укороченные эпи- и гипоциклоиды (их называют также эпи- и гипотрохоидами) (рис. 473, 474) — это кривые, образованные точкой, лежащей снаружи или внутри окружности, которая перекатывается без скольжения по другой окружности снаружи или внутри ее.

Уравнение в параметрической форме имеет вид

$$x = (A + a)\cos\varphi - \lambda a \cos\left(\frac{A + a}{a}\varphi\right),$$

$$y = (A + a)\sin\varphi - \lambda a \sin\left(\frac{A + a}{a}\varphi\right),$$

где A — радиус неподвижной окружности; a — радиус движущейся окружности, причем в случае гипоциклоиды «$+a$» в уравнении заме-

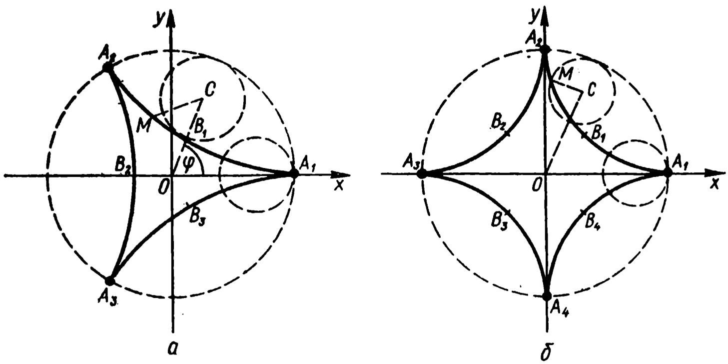


Рис. 472. Гипоциклоида: $m = 3$ *(а)*; $m = 4$ *(б)*.

няется на «$-a$»; $\lambda = CM$ (для удлиненной $\lambda > 1$, для укороченной $\lambda < 1$). При $A = 2a$ (λ — любое число) гипоциклоида превращается в эллипс с полуосями $a(1 + \lambda)$ и $a(1 - \lambda)$. При $A = a$ получаем улитку Паскаля:

$$x = a(2\cos\varphi - \lambda\cos 2\varphi),$$

$$y = a(2\sin\varphi - \lambda\sin 2\varphi).$$

Кардиоида. Кардиоиду можно определить как эпициклоиду, у которой диаметры подвижной и неподвижной окружностей равны ($m = 1$) (рис. 475).

Уравнение кардиоиды в прямоугольной декартовой системе координат:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) = a^2y^2,$$

в параметрической форме:

$$x = a\cos\varphi\,(1 + \cos\varphi),$$

$$y = a\sin\varphi\,(1 + \cos\varphi),$$

в полярных координатах:

$$\rho = a(1 + \cos\varphi).$$

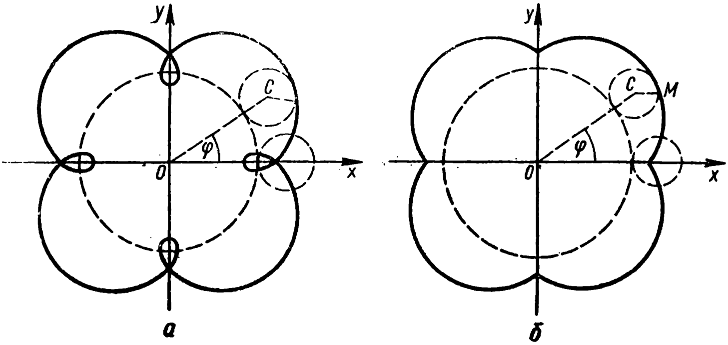


Рис. 473. Эпитрохоида: $\lambda > 1$, $a > 0$ *(а)*; $\lambda < 1$, $a > 0$ *(б)*.

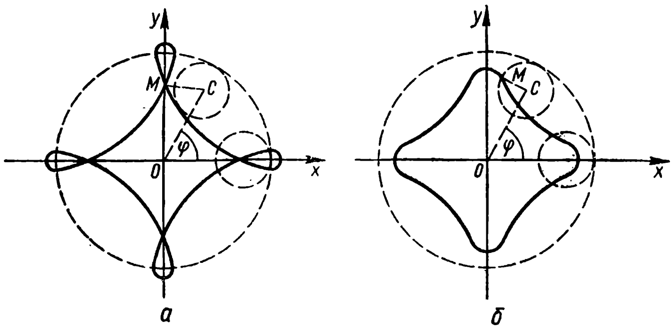


Рис. 474. Гипотрохоида: $\lambda > 1$, $a < 0$ *(а)*; $\lambda < 1$, $a < 0$ *(б)*.

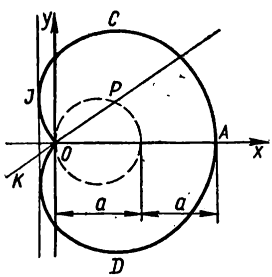


Рис. 475. Кардиоида $x = a \cos \varphi \, (1 + \cos \varphi)$, $y = a \sin \varphi \, (1 + \cos \varphi)$.

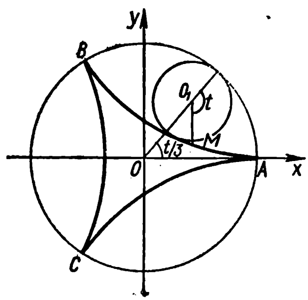


Рис. 476. Кривая Штейнера $x = 2a \cos \dfrac{t}{3} + a \cos \dfrac{2t}{3}$, $y = 2a \sin \dfrac{t}{3} - a \sin \dfrac{2t}{3}$.

Начало координат — точка возврата. Вершина $A(2a;\ 0)$.

Максимум и минимум $\left(\cos\varphi = \frac{1}{2}\right) - C,\ D\left(\frac{3}{4}a;\ \pm\frac{3\sqrt{3}}{4}a\right)$.

Площадь кардиоиды $S = \frac{3}{2}\pi a^2$, длина всей кардиоиды $L = 8a$.

Кривая Штейнера. Кривую Штейнера можно определить как гипоциклоиду, у которой радиус подвижной окружности в три раза меньше радиуса неподвижной окружности, т. е. $m = \frac{1}{3}$ (рис. 476).

Параметрическое уравнение кривой:

$$x = 2a\cos\frac{t}{3} + a\cos\frac{2t}{3},$$

$$y = 2a\sin\frac{t}{3} - a\sin\frac{2t}{3}.$$

В декартовой системе координат уравнение кривой имеет вид

$$(x^2 + y^2)^2 + 8ax(3y^2 - x^2) + 18a^2(x^2 + y^2) - 27a^4 = 0.$$

Отметим интересное свойство касательных к кривой Штейнера: точка пересечения взаимно перпендикулярных касательных к кривой Штейнера лежит на окружности, вписанной в эту кривую.

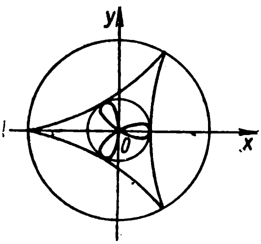


Рис. 477. Подера кривой Штейнера относительно начала координат.

Кривая Штейнера интересна и формами своих подер. Уравнение подеры кривой Штейнера относительно точки $S(b;\ 0)$ имеет вид

$$(x^2 + y^2)^2 + [(a + 3a)y^2 + (b - a)x^2]x = 0,$$

или

$$\rho = 4a\cos^3\varphi - (b + 3a)\cos\varphi,$$

откуда:

а) при $b = 0$ получаем *трехлепестковую розу* — подеру кривой Штейнера относительно начала координат (рис. 477); при $b = a$ имеем

$$\rho = -4a\cos\varphi\sin^2\varphi$$

— *прямой двулистник* — подера кривой Штейнера относительно точки S (рис. 478);

б) при $b = -a$ имеем

$$\rho = 2a\cos\varphi\cos 2\varphi$$

— *прямой трилистник* — подера кривой Штейнера относительно точки S_1 (рис. 479);

в) при $b = -3a$ имеем

$$\rho = 4a\cos^3\varphi$$

— *однолистник* — подера кривой Штейнера относительно точки S_2 (рис. 480).

Астроида — частный случай гипоциклоиды при $m = \frac{1}{4}$ (рис. 481). Уравнение кривой:

$$(x^2 + y^2 - R^2)^3 + 27R^2x^2y = 0.$$

Это алгебраическая кривая 6-го порядка.

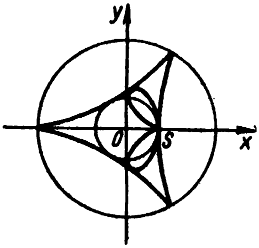


Рис. 478. Прямой двулистник.

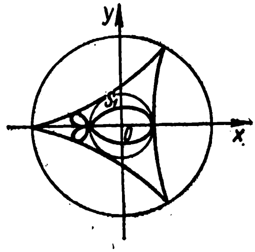


Рис. 479. Прямой трилистник.

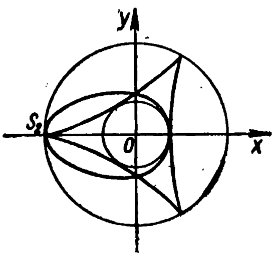


Рис. 480. Однолистник.

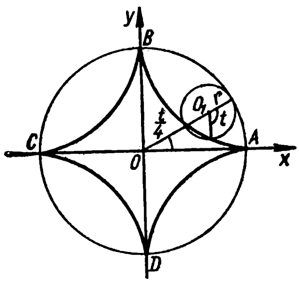


Рис. 481. Астроида (определение).

Параметрическое уравнение:

$$x = R\cos^3\frac{t}{4},$$

$$y = R\sin^3\frac{t}{4}.$$

Исключая t, получаем распространенный вид уравнения астроиды:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}.$$

Кривая Кассини (ее часто называют свалом Кассини, хотя на самом деле она не всегда овальная) — геометрическое место точек

M, для которых произведение $MF_1 \cdot MF_2$ расстояний от концов данного отрезка $F_1F_2 = 2c$ равно квадрату данного отрезка (рис. 482):

$$MF_1 \cdot MF_2 = a^2.$$

Точки F_1, F_2 называются фокусами; прямая F_1F_2 — ось кривой Кассини; середина O отрезка F_1F_2 — центр.

Уравнение кривой в декартовой системе координат:

$$(x^2 + y^2) - 2c^2(x^2 - y^2) = a^4 - c^4$$

(O — начало координат; F_2F_1 — ось абсцисс);

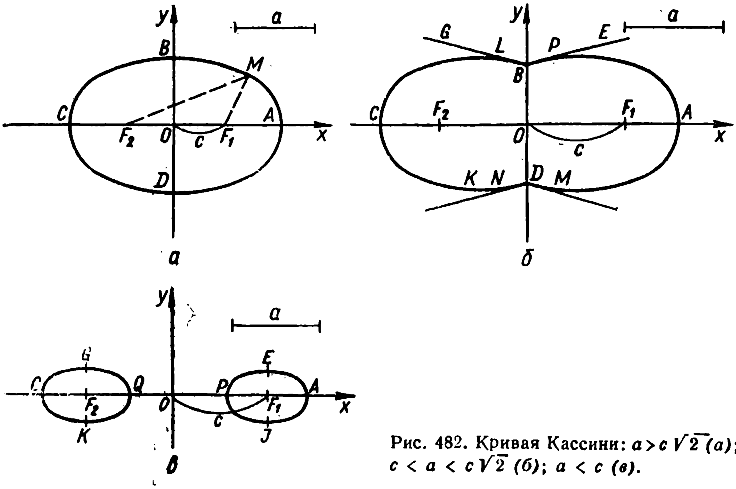


Рис. 482. Кривая Кассини: $a > c\sqrt{2}$ (*а*); $c < a < c\sqrt{2}$ (*б*); $a < c$ (*в*).

в полярной системе (O — полюс; Ox — полярная ось):

$$\rho^4 - 2c^2\rho^2\cos 2\varphi + c^4 - a^4 = 0,$$

или

$$\rho^2 = c^2\cos 2\varphi \pm \sqrt{a^4 - c^4\sin^2 2\varphi},$$

или

$$\rho^2 = c^2\cos 2\varphi \pm \sqrt{c^4\cos^2 2\varphi + (a^4 - c^4)}.$$

Двойной знак берем, если $a < c$. В противном случае берем только знак «+».

Кривая Кассини симметрична относительно Ox и Oy, следовательно, и относительно точки O. Форма кривой зависит от отношения a к c:

а) при $a > c\sqrt{2}$ имеем эллипсоподобный овал (рис. 482, *а*). В данном случае точки пересечения с осью Ox: A, $C\left(\pm\sqrt{a^2 + c^2};\ 0\right)$, точки пересечения с осью Oy: B, $D\left(0;\ \pm\sqrt{a^2 - c^2}\right)$;

б) если $a = c\sqrt{2}$, то также имеем эллипсоподобный овал; в этом случае A, $C(\pm c\sqrt{3};\ 0)$, B, $D(0;\ \pm c)$; в точках B и D кривизна равна нулю;

в) при $c < a < c\sqrt{2}$ имеем овал (рис. 482, *б*), точки пересечения с осями Ox и Oy те же, что и в предыдущем случае; максимумы и минимумы: B, $D(0;\ \pm c)$, E, G, K, $J\left(\pm\sqrt{\dfrac{4c^4-a^4}{2c}};\ \pm\dfrac{a^2}{2c}\right)$; четыре точки перегиба: $P, L, M, N\left(\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(m-n)};\ \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}(m+n)}\right)$, где $n = \dfrac{a^4-c^4}{3c^2}$, $m\sqrt{\dfrac{a^4-c^4}{3}}$; при $a = c$ имеем лемнискату (см. ниже); при $a < c$ имеем два овала (рис. 482, *в*). Точки пересечения с осью Ox: A, $C(\pm\sqrt{a^2+c^2};\ 0)$ и P, $Q(\pm\sqrt{c^2-a^2};\ 0)$; максимумы и минимумы: E, G, K, $J\left(\pm\sqrt{\dfrac{4c^4-a^4}{2c}};\ \pm\dfrac{a^2}{2c}\right)$. Радиус кривизны $R = \dfrac{2a^2\rho^3}{c^4-a^4+3\rho^4}$, где ρ — радиус-вектор.

Лемниската Бернулли. Лемниската — геометрическое место точек, для которых произведение расстояний от концов данного отрезка $F_1F_2 = 2c$ равно c^2, т. е. это частный случай овала Кассини, когда $a = c$ (рис. 483).

Прямая F_1F_2 — ось лемнискаты. Уравнение лемнискаты:

$$(x^2+y^2)^2 = 2c^2(x^2-y^2).$$

Начало координат O — середина отрезка F_1F_2; ось Ox направлена по F_2F_1.

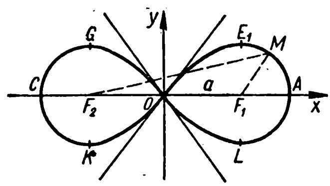


Рис. 483. Лемниската Бернулли.

Уравнение лемнискаты в полярной системе (O — полюс; Ox — полярная ось):

$$\rho^2 = 2c^2\cos 2\varphi,$$

где угол φ изменяется в промежутках $\left]-\dfrac{\pi}{4};\ \dfrac{\pi}{4}\right[$ и $\left]\dfrac{3\pi}{4};\ \dfrac{5\pi}{4}\right[$.

Параметрическое изображение:

$$x = c\sqrt{2}\,\frac{t+t^3}{1+t^4},$$

$$y = c\sqrt{2}\,\frac{t-t^3}{1+t^4}\ (-\infty < t < \infty),$$

t связано с φ соотношением

$$t^2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right).$$

Лемниската имеет две оси симметрии: прямые $F_1F_2\,(Ox)$ и Oy. Точка O — узловая точка с касательными $y = \pm x$, эта же точка — точка перегиба. Точки пересечения кривой с осью Ox: A, $C(\pm a\sqrt{2};\ 0)$, максимумы и минимумы: E, G, K, $L\left(\pm\frac{a\sqrt{3}}{2};\ \pm\frac{a}{2}\right)$, полярный угол в этих точках $\varphi=\pm\frac{\pi}{6}$. Радиус кривизны $R=\frac{2c^2}{3\rho}$.

Площадь каждой петли лемнискаты: $2S\left(\frac{\pi}{4}\right)=c^2$.

Если из центра O равносторонней гиперболы с вершинами A_1, A_2 опустить перпендикуляры на ее касательные, то геометрическое место оснований этих перпендикуляров будет лемнискатой с теми же вершинами.

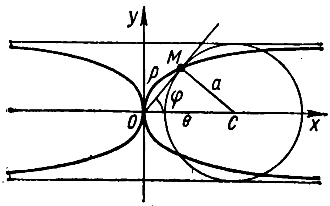


Рис. 484. Каппа $\rho=a\operatorname{ctg}\varphi$.

Приведем еще некоторые примеры важных кривых четвертого и высших порядков.

Каппа — геометрическое место точек касания касательных, проведенных из начала координат к окружности радиусом a, центр которого перемещается по оси абсцисс (рис. 484).

Уравнение каппы в полярной системе координат

$$\rho=a\operatorname{ctg}\varphi,$$

в декартовой системе координат:

$$(x^2+y^2)\,y^2=a^2x^2.$$

Заметим, что каппа входит в семейство кривых, уравнение которых

$$\rho=a\operatorname{ctg}k\varphi$$

и которые называются *узлами.* Все эти кривые имеют в точке (0; 0) узловую точку и асимптоты, параллельные координатным осям. К семейству узлов, в частности, принадлежат строфоида, для которой $k=\frac{1}{2}$, и «ветряная мельница» — кривая, для которой $k=2$ (рис. 485).

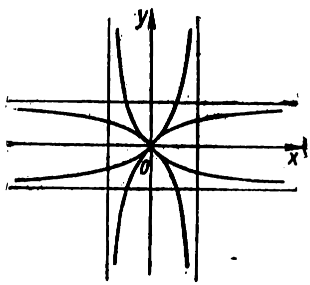


Рис. 485. Кривая «ветряная мельница» $\rho=\operatorname{ctg}2\varphi$.

Синусоидальные спирали — семейство кривых, уравнение которых в полярной системе координат

$$\rho^m=a^m\sin m\varphi \quad \text{или} \quad \rho^m=a^m\cos m\varphi.$$

При рациональном m эти кривые являются алгебраическими кривыми того или другого порядка в зависимости от значения m, в частности: при $m=1$ $\rho^2=a\cos\varphi$ — окружность, при $m=-1$ $\rho=\frac{a}{\cos\varphi}$ — прямая, при $m=2$ $\rho=a^2\cos 2\varphi$ — лемниската Бернулли, при $m=-2$ $\rho^2=\frac{a^2}{\cos 2\varphi}$ — равносторонняя гипербола, при $m=\frac{1}{2}$

$\rho = a\cos^2\frac{\varphi}{2}$ — кардиоида, при $m = -\frac{1}{2}$ $\rho = \frac{2a}{1+\cos\varphi}$ — парабола и т. д.

«Розы», или кривые Гвидо Гранди,— семейство кривых, полярное уравнение которых имеет вид

$$\rho = a\sin k\varphi \text{ или } \rho = a\cos k\varphi,$$

где a и k — постоянные, которые будем считать положительными числами.

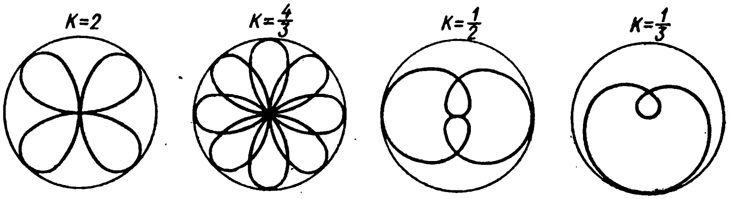


Рис. 486. Кривые Гвидо Гранди («розы»): $\rho = a\sin k\varphi$, $\rho = a\cos k\varphi$.

Если k — целое число, то «роза» состоит из k лепестков при k нечетном и из $2k$ лепестков при k четном; если $k = \frac{m}{n}$ $(n > 1)$ — рациональное число, то «роза» состоит из m лепестков, если m и n — нечетные, и из $2m$ лепестков, если одно из этих чисел — четное, причем следующий лепесток частично покрывает предыдущий (рис. 486). Площадь одного лепестка «розы» находим по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{k}} \rho^2\,d\varphi = \frac{\pi a^2}{4k}.$$

«Колоски» — кривые, уравнение которых имеет вид

$$\rho = \frac{a}{\sin k\varphi} \quad \text{или} \quad \rho = \frac{a}{\cos k\varphi},$$

где k — любое рациональное число.

Эти кривые можно образовать из «роз», если выполнить преобразование инверсии относительно окружности радиусом a.

Если k — целое и нечетное, то кривые $\rho = \frac{a}{\sin k\varphi}$ состоят из k конгруэнтных гиперболических веток; если k — целое и четное, то число ветвей составляет $2k$.

Примеры «колосков»:

$$\rho = \frac{a}{\cos 3\varphi} \text{ — трисектриса Лоншама,}$$

$$\rho = \frac{a}{\cos\frac{\varphi}{3}} \text{ — трисектриса Маклорена.}$$

Кривые Ламе. Уравнение кривых Ламе:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1,$$

где m — любое рациональное число, а постоянные a и b — положительные числа.

Примеры кривых Ламе приведены на рис. 487.

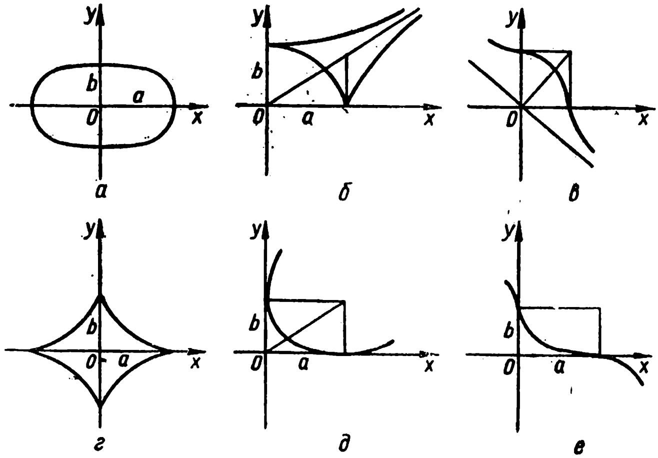


Рис. 487. Кривые Ламе $\left(\frac{x}{a}\right)^m + \left(\frac{y}{b}\right)^m = 1$, $m = \frac{p}{q}$: $\frac{p}{q} > 1$, p — четное, q — нечетное *(а)*; $\frac{p}{q} > 1$, p — нечетное, q — четное *(б)*; $\frac{p}{q} > 1$, p, q — нечетные *(в)*; $\frac{p}{q} < 1$, p — четное, q — нечетное *(г)*; $\frac{p}{q} < 1$, p — нечетное, q — четное *(д)*; $\frac{p}{q} < 1$, p, q — нечетные *(е)*.

Параболические кривые: $y = cx^m$, где $m = \frac{p}{q} > 0$. Пример — парабола Нейля: $y = ax^{3/2}$, $a > 0$ (см. рис. 40).

Гиперболические кривые: $y = ax^{-m}$, $m = \frac{p}{q} > 0$.

§ 4. Трансцендентные кривые

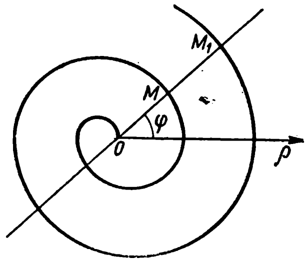
Трансцендентная кривая — это кривая, уравнение которой в декартовой системе координат не является алгебраическим (в других системах координат может быть алгебраическим).

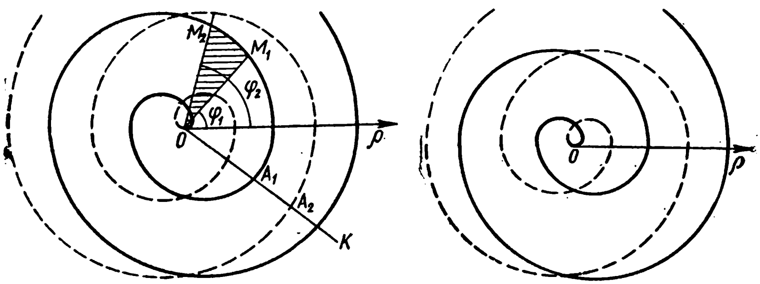
Приведем примеры некоторых важных трансцендентных кривых.

Спираль Архимеда — кривая, которая описывается точкой, движущейся с постоянной скоростью v вдоль луча, который вращается вокруг полюса O с постоянной угловой скоростью ω (рис. 488).

Кинематические понятия, входящие в определение, можно исключить, если заменить их условием, чтобы расстояние $\rho = OM$ было пропорционально углу поворота φ луча, вращающегося вокруг точки O. Повороту луча из любого положения на данный угол соответствует одно и то же приращение расстояния ρ. В частности, полному обороту соответствует одно и то же смещение $MM_1 = a$ (рис. 488, *б*). Отрезок a называется шагом спирали Архимеда.

Данному шагу a соответствуют две спирали Архимеда, которые различаются направлением вращения луча. При вращении против часовой стрелки получаем *правую* спираль (рис. 488, *б*, основная линия), при вращении по часовой стрелке — *левую* (рис. 488, *б*, вспомогательная линия).





а　　　　б

Рис. 488. Спираль Архимеда $\rho = k\varphi$.

Правую и левую спирали одного шага можно рассматривать как две ветви кривой, которую описывает точка M, пробегая весь луч и проходя через точку O.

Полярное уравнение:

$$\rho = k\varphi,$$

где k — параметр спирали Архимеда; $k = \frac{a}{2\pi}$ — смещение точки M вдоль луча при повороте последнего на угол 1 рад.

Положительным значениям φ соответствует правая ветвь; отрицательным значениям — левая.

Площадь S_n, ограниченная n-й ветвью спирали и отрезком OA_n, выражается формулой

$$S_n = \frac{n^3 - (n-1)^3}{3}\pi a^2 = \frac{n^3 - (n-1)^3}{3n^2} S_{n'},$$

где $S_{n'}$ — площадь круга радиусом OA_n.

Площадь n-го кольца спирали Архимеда

$$\tilde{S}_n = S_{n+1} - S_n = 6nS_1,$$

где $S_1 = \frac{1}{3}\pi a^2$ — площадь нулевого кольца.

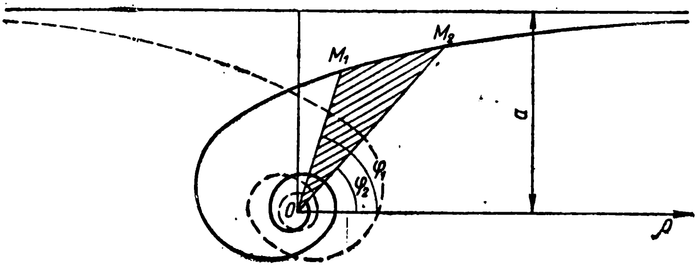


Рис. 489. Гиперболическая спираль $\rho = \frac{a}{\varphi}$.

Длина дуги OM:

$$l = \frac{k}{2}\left[\varphi\sqrt{\varphi^2+1} + \ln\left(\varphi + \sqrt{\varphi^2+1}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\rho\frac{\sqrt{\rho^2+k^2}}{k} + k\ln\frac{\rho+\sqrt{\rho^2+k^2}}{k}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}k\left[\operatorname{tg}\alpha\sec\alpha + \ln(\operatorname{tg}\alpha + \sec\alpha)\right], \quad \frac{2l}{k\varphi^2} \to 0$$

при больших φ, где α — острый угол между касательной MT и полярным радиусом OM. Радиус кривизны

$$R = \frac{(\rho^2+k^2)^{3/2}}{\rho^2+2k^2} = k\frac{(\varphi^2+1)^{3/2}}{\varphi^2+2} = k\frac{(\operatorname{tg}^2\alpha+1)^{3/2}}{\sec^2\alpha+1}.$$

В точке (0; 0) $R_0 = \frac{k}{2}$.

Гиперболическая спираль. В полярных координатах гиперболическая спираль имеет уравнение

$$\rho = \frac{a}{\varphi}.$$

Кривая состоит из двух ветвей, симметрично расположенных относительно перпендикуляра к полярной оси (в полюсе) (рис. 489). Для каждой ветви прямая $y = a$ является асимптотой и начало координат O — асимптотическая точка.

Площадь сектора $M_1OM_2: S = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\varphi_1} - \frac{1}{\varphi_2}\right)$; $\lim\limits_{\varphi_2\to\infty} S = \frac{a^2}{2\varphi}$.

Радиус кривизны $r = \frac{a}{\varphi}\left(\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}\right)^3$.

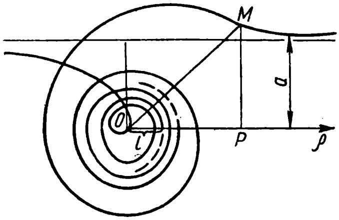


Рис. 490. Конхоида гиперболической спирали $\rho = \frac{a}{\varphi} + l$.

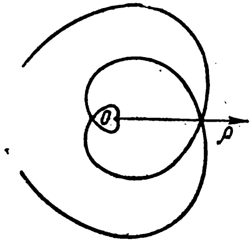


Рис. 491. Спираль Галилея $\rho = a\varphi^2 - l$ при $l = 0$.

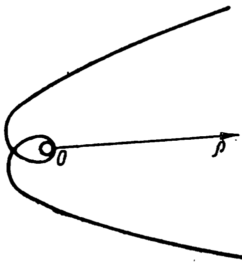


Рис. 492. Спираль $\rho = \frac{a}{\varphi^2}$.

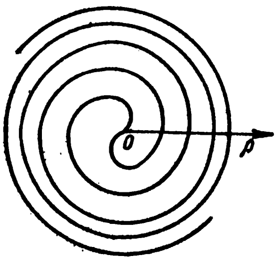


Рис. 493. Спираль Ферма $\rho = a\sqrt{\varphi}$.

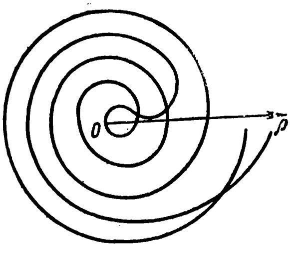


Рис. 494. Параболическая спираль $\rho = a\sqrt{\varphi} + l$.

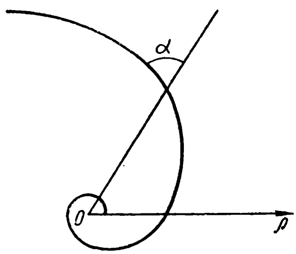


Рис. 495. Логарифмическая спираль $\rho = \rho_0 e^{k\varphi}$.

Сравнивая уравнения спирали Архимеда и гиперболической спирали, замечаем, что каждую из них можно получить из другой с помощью превращения инверсии относительно полюса.

Конхоида гиперболической спирали — обобщенная гиперболическая спираль, уравнение ее:

$$\rho = \frac{a}{\varphi} + l, \quad l > 0 \text{ (рис. 490).}$$

Примеры других спиралей.

Спираль Галилея $\rho = a\varphi^2 - l$, $l \geqslant 0$. При $l=0$ $\rho = a\varphi^2$ (рис. 491).

Спираль $\rho = \frac{a}{\varphi^2}$ (рис. 492).

Спираль Ферма $\rho = a\sqrt{\varphi}$ (рис. 493). Характерная особенность этой спирали: по мере удаления от полюса расстояние между ветвями неограниченно уменьшается, у спирали Архимеда это расстояние остается постоянным, у логарифмической спирали — неограниченно возрастает.

Параболическая спираль $\rho = a\sqrt{\varphi} + l$, $l > 0$ (рис. 494).

Логарифмическая спираль — кривая, которая пересекает все лучи, выходящие из одной точки O, под одним и тем же углом α (рис. 495).

Уравнение кривой в полярных координатах:

$$\rho = \rho_0 e^{k\varphi},$$

где k — параметр $\left(k = \frac{\ln q}{2\pi}\text{; } q \text{ — коэффициент роста}\right)$.

Цепная линия — линия, по которой провисает однородная нерастяжимая нить, закрепленная в двух точках (рис. 496). В зависимости от положения точек, в которых закрепляются концы нити, и от длины нити дуга провисания принимает различный вид. Самая низкая точка цепной линии называется ее вершиной.

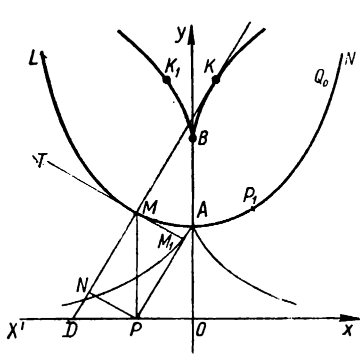


Рис. 496. Цепная линия $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

Если ось ординат направить вертикально вверх, а вершину взять началом координат, то цепная линия изобразится так:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right) - a,$$

где a — параметр цепной линии. Если же начало координат взять в точке O, лежащей ниже вершины цепной линии на расстоянии a, то получим более простое уравнение:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right).$$

Прямая $x'x$ (см. рис. 496), параллельная касательной в вершине и расположенная ниже этой вершины на расстоянии a, называется директрисой цепной линии. Длина s дуги $\overset{\frown}{AM}$ цепной линии равна проекции MM_1 ординаты PM на касательную MT:

$$s = \overset{\frown}{AM} = MM_1 = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right) = a \operatorname{sh} \frac{x}{a}.$$

Справедливо такое соотношение:

$$s^2 + a^2 = y^2,$$

где $y = PM$.

Проекция MN ординаты MP цепной линии на нормаль имеет постоянную длину:

$$MN = OA = a.$$

Радиус кривизны

$$r = MD = \frac{a}{4}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = a\,\mathrm{ch}^2\frac{x}{a}.$$

Натуральное уравнение цепной линии имеет вид

$$r = \frac{s^2}{a} + a.$$

Кинематический смысл: если цепная линия катится без скольжения по прямой, то центр кривизны точки касания описывает параболу.

Площадь криволинейной трапеции $OAMP$ равна площади прямоугольника со сторонами a, s:

$$S = as = a^2\mathrm{sh}\frac{x}{a}.$$

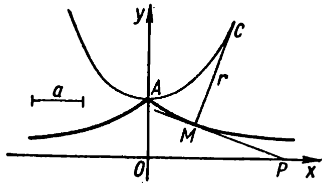


Рис. 497. Трактриса $x = \mathrm{Arch}\,\frac{a}{y} \pm \sqrt{a^2 - y^2}$.

Трактриса — кривая, для которой длина отрезка касательной от точки касания M до точки пересечения с данной прямой P — постоянная величина (рис. 497). Если к одному концу нерастяжимой нити данной длины (a) прикреплена материальная точка (M), а второй конец (P) двигается по прямой (Ox), то эта точка (M) опишет трактрису.

Точка A трактрисы, наиболее удаленная от направляющей, называется вершиной трактрисы.

Уравнение трактрисы:

$$x = a\,\mathrm{Arch}\frac{a}{y} \pm \sqrt{a^2 - y^2} = a\ln\frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \mp \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Параметрическое уравнение:

$$x = a\cos\varphi + a\ln\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad y = a\sin\varphi.$$

Натуральное уравнение:

$$s = a\ln\sqrt{\frac{R^2}{a^2} + 1}.$$

Асимптота кривой — ось абсцисс, точка A (a; 0) — точка возврата (с вертикальной касательной).

Кривая симметрична относительно оси ординат.

Площадь, ограниченная трактрисой и ее асимптотой, определяется по формуле

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} y\,dx = \int_0^{\pi} a\sin\varphi\,\frac{a\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi = \frac{\pi a^2}{2}.$$

Объем тела, полученного вращением трактрисы вокруг ее асимптоты, определяется по формуле

$$V = \pi \int_{-\infty}^{\infty} y^2\,dx = \pi \int_{0}^{\pi} a^2 \sin^2\varphi \frac{a\cos^2\varphi}{\sin\varphi}\,\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3.$$

Площадь поверхности тела вращения, полученного вращением трактрисы относительно ее асимптоты, определяется по формуле

$$P = 4\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} a\sin\varphi \frac{a\cos\varphi}{\sin\varphi}\,d\varphi = 4\pi a^2.$$

Радиус кривизны в произвольной точке трактрисы

$$R = a\operatorname{ctg}\varphi.$$

Циклоида — кривая, которую описывает точка, закрепленная в плоскости круга, когда этот круг катится без скольжения по прямой линии (рис. 498).

Если точка лежит на окружности круга, который катится без скольжения по прямой, то образуется обычная циклоида, или просто циклоида (рис. 498, *а*); если точка находится вне круга, то образованная циклоида называется удлиненной (рис. 498, *б*), а если внутри круга, то укороченной (рис. 498, *в*).

Уравнение циклоиды в параметрической форме:

$$x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t),$$

где a — радиус круга; $t = \angle MC_1B$.

В декартовых координатах уравнение циклоиды:

$$x + \sqrt{y(2a - y)} = a \operatorname{Arccos}\frac{a - y}{a}.$$

Кривая периодическая; период (базис циклоиды) $OO_1 = 2\pi a$. Точки возврата: $O, O_1, O_2, \ldots, (2\pi ka; 0)$; вершины: $A_1, A_2, \ldots, [(2k+1)\pi a; 2a]$. Удлиненные и укороченные циклоиды точек возврата не имеют. Длина $OM: L = 8a\sin^2\frac{t}{4}$; длина одной арки циклоиды $L_{OA_1O_1} = 8a$; площадь одной арки $OA_1O_1O: S = 3\pi a^2$. Радиус кривизны $r = 4a\sin\frac{t}{2}$ в вершинах $r_A = 4a$.

Эволюта циклоиды — такая же циклоида (на рис. 498 изображена вспомогательной линией).

Для удлиненных и укороченных циклоид уравнение в параметрической форме:

$$x = a(t - \lambda\sin t),$$
$$y = a(1 + \lambda\cos t),$$

где a — радиус круга; $t = \angle MC_1B$; $\lambda = C_1M$ (для удлиненной циклоиды $\lambda = 1$, для укороченной $\lambda < 1$).

Кривые периодические: период $OO_1 = 2\pi a$; максимумы: $A_1, A_2, \ldots, [(2k+1)\pi a; (1+\lambda)a]$; минимумы: $B_0, B_1, B_2, \ldots, [2k\pi a; (1-\lambda)a]$. Для удлиненной циклоиды узловые точки $D_0, D_1, D_2, \ldots, \left[2k\pi a;\ a\left(1 - \sqrt{\lambda^2 - t^2}\right)\right]$ где t_0 — наименьший положительный

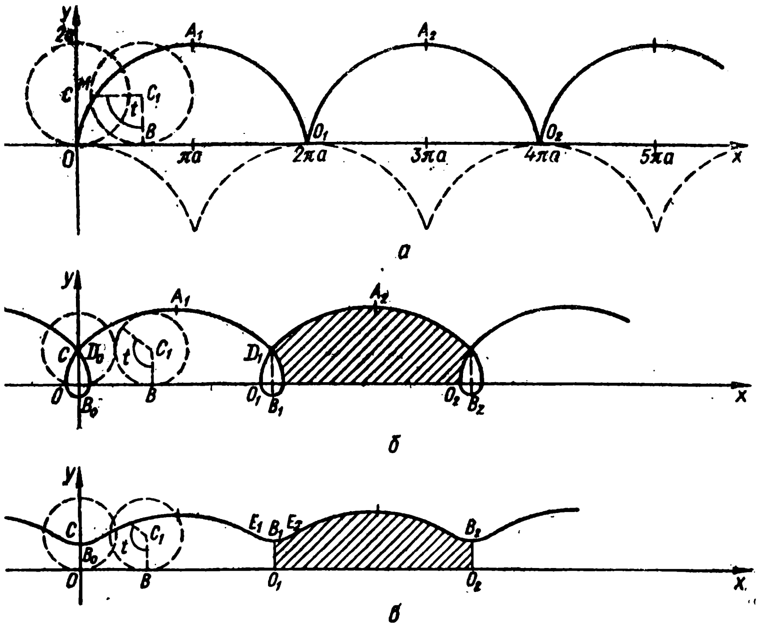


Рис. 498. Циклоида $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1 - \cos t)$.

корень уравнения $t = \lambda \sin t$. Для укороченной циклоиды точки перегиба $E_1, E_2, \ldots,$ $[a\,(\arccos\lambda - \lambda\sqrt{1-\lambda^2});\ a\,(1-\lambda^2)]$. Длина одного цикла $L = a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda\cos t}\,dt.$

Площадь, заштрихованная на рисунке:

$$S = \pi a^2\,(2+\lambda^2).$$

Радиус кривизны $R = a\,\dfrac{(1+\lambda^2-2\lambda\cos t)^{3/2}}{\lambda\,(\cos t-\lambda)}$; в точках максимума $r_A = -a\,\dfrac{(1+\lambda)^2}{\lambda}$, в точках минимума $r_B = a\,\dfrac{(1-\lambda)^2}{\lambda}$.

Натуральное уравнение обычной циклоиды (в пределах одной арки):

$$R^2 + (s-4a)^2 = (4a)^2 \quad (0 < s < 2\pi a),$$

где R — радиус кривизны.

Кинематическое свойство обычной циклоиды. Натуральное уравнение выражает свойство: если обычная циклоида катится (без скольжения) по прямой, то центр кривизны точки касания движется по окружности. Радиус последней в четыре раза больше радиуса начального круга, а центр лежит в той точке прямой, через которую прокатывается вершина циклоиды.

Тавтохронное свойство циклоиды. Материальная точка, движущаяся под действием силы тяготения по обычной циклоиде ADB (рис. 499), достигает самого низкого положения D за

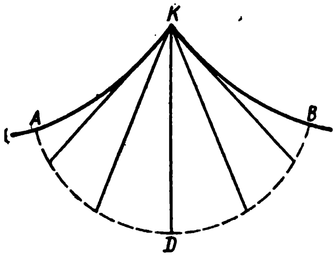


Рис. 499. Тавтохронное свойство циклоиды.

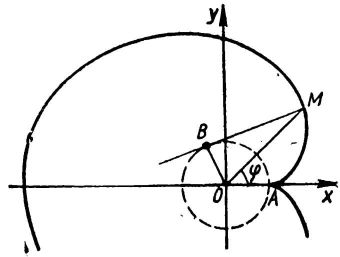


Рис. 500. Эвольвента окружности $x = k(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha)$, $y = k(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$.

промежуток времени $t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$, где a — радиус круга, g — ускорение силы тяготения. Этот промежуток не зависит от начального положения точки. Поэтому период T колебания циклоидального маятника $(T = 4t)$ не зависит от его амплитуды. Нить циклоидального маятника закрепляется в начальной точке K другой циклоиды AKB, которая является эволютой циклоиды ADB.

Брахистохрона точки, которая перемещается под действием силы тяготения в среде, сопротивлением которой можно пренебречь, из данной точки A в расположенную ниже точку B, не расположенную на одной вертикали с A, является обычной циклоидой.

Замечание. Если по прямой линии катится без скольжения эллипс, гипербола или парабола, то полученные при этом кривые называются кривыми Штурма.

Развертка (эвольвента) окружности. Эвольвента окружности — кривая, описываемая концом натянутой нити, которая разматывается с окружности ($\smile{AB} = BM$) (рис. 500). Одна окружность имеет бесконечное число эвольвент (соответствующих различным положениям начальной точки). Основание перпендикуляра, опущенного из центра O на касательную MT эвольвенты, описывает спираль Архимеда.

Полярное уравнение эвольвенты окружности:

$$\varphi = \frac{\sqrt{\rho^2 - k^2}}{k} - \arccos\frac{k}{\varphi},$$

где полюс O — центр данной окружности, полярная ось Ox направлена по начальному радиусу OB, k — радиус окружности.

Уравнение эвольвенты окружности в параметрической форме имеет вид

$$x = k(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha), \quad y = k(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha),$$

где $\alpha = \angle BOx$.

Натуральное уравнение эвольвенты окружности: $R^2 = 2ks$.

Кинематическое свойство. Если дуга эвольвенты окружности перекатывается без скольжения по прямой, то центр кривизны L, соответствующий точке касания, движется по параболе с параметром k.

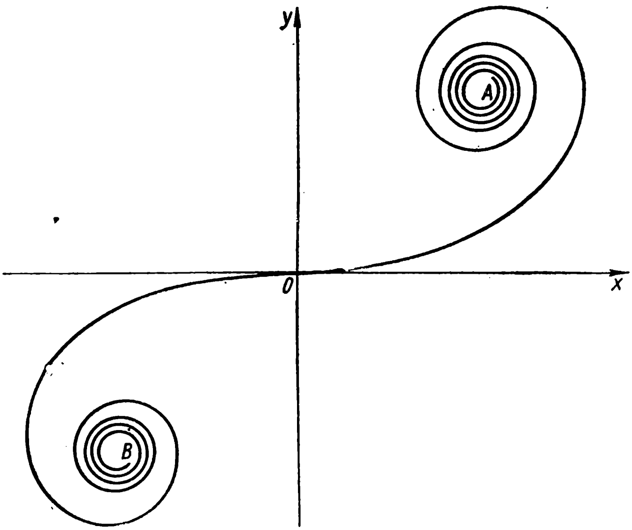


Рис. 501. Клотоида $x = a\sqrt{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt$, $y = a\sqrt{\pi}\int\limits_0^{\pi} \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt$.

Клотоида — кривая, для которой радиус кривизны обратно пропорционален длине дуги:

$$r = \frac{a^2}{s}.$$

Уравнение клотоиды в параметрической форме:

$$x = a\sqrt{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{\pi t^2}{2}\,dt, \quad y = a\sqrt{\pi}\int\limits_0^{t} \sin\frac{\pi t^2}{2}\,dt,$$

где $t = \dfrac{s}{a\sqrt{\pi}}$; $s = \breve{OM}$ (рис. 501). Клотоида симметрична относительно начала координат.

Кривая имеет две асимптотические точки:

$$A\left(\frac{a\sqrt{\pi}}{2};\ \frac{a\sqrt{\pi}}{2}\right),\quad B\left(-\frac{a\sqrt{\pi}}{2};\ \frac{a\sqrt{\pi}}{2}\right).$$

Начало координат — точка перегиба кривой.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ 8

РАЗДЕЛ 9

ЧАСТЬ II

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНОЙ

РАЗДЕЛ 1

НИНА АФАНАСЬЕВНА ВИРЧЕНКО
ИВАН ИВАНОВИЧ ЛЯШКО
КОНСТАНТИН ИВАНОВИЧ ШВЕЦОВ

ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

СПРАВОЧНИК

Редактор *Р. И. Гусячая*
Оформление художника *В. Г. Самсонова*
Художественный редактор *И. П. Антонюк*
Технический редактор *Б. М. Кричевская*
Корректоры *М. Т. Кравчук, Р. С. Коган*

Информ. бланк № 2949.

Сдано в набор 09.10.78. Подп. в печ. 28.02.79. БФ 00577. Формат 84×108/32. Бумага типогр. № 3. Лит. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 16,8. Уч.-изд. л. 17,08. Тираж 90000 экз. Заказ 8-413. Цена 1 руб.

Издательство «Наукова думка». 252601, Киев, ГСП, Репина, 3.

Книжная фабрика им. М. В. Фрунзе Республиканского производственного объединения «Полиграфкнига» Госкомиздата УССР, Харьков, Донец-Захаржевская, 6/8.

1p.