АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

11

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Профильный уровень

2-е издание

Москва • Просвещение •
2010

УДК 372.8:[512+517]
ББК 74.262.21
А45

Авторы: М. И. Шабунин, М. В. Ткачёва,
Н. Е. Фёдорова, О. Н. Доброва

Алгебра и начала математического анализа. Ди-
А45 дактические материалы. 11 класс : профил. уровень/
[М. И. Шабунин, М. В. Ткачёва, Н. Е. Фёдорова,
О. Н. Доброва].— 2-е изд.— М. : Просвещение, 2010.—
143 с. : ил.— ISBN 978-5-09-023914-1.

Книга содержит материалы к каждой теме курса алгебры и начал математического анализа для 11 класса профильного уровня и дополняет систему упражнений учебника и дидактические материалы тех же авторов, предназначенные для базового уровня. Каждая глава содержит примеры и задачи с подробными решениями, задания для самостоятельной работы, контрольные работы и ответы к заданиям.

УДК 372.8:[512+517]
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-023914-1

Предисловие

Современные стандарты школьного образования выделяют в содержании математического образования старших классов два уровня знаний — *базовый* и *профильный*. Учебник авторов Ю. М. Колягина и др. «Алгебра и начала математического анализа» для 11 класса под редакцией А. Б. Жижченко (М.: Просвещение, 2009) создан для обучения в старшей школе на обоих уровнях.

Дидактические материалы дополняют систему упражнений учебника на обязательном профильном и на продвинутом профильном уровнях. Дополнительные упражнения для базового уровня и обязательного профильного можно найти в пособии «Дидактические материалы по алгебре и началам математического анализа» для 10 класса общеобразовательных учреждений авторов М. И. Шабунина, М. В. Ткачёвой, Н. Е. Фёдоровой, Р. Г. Газаряна (М.: Просвещение, 2008).

Обе книги составляют единый комплект. Они объединены идеей широкого использования при дифференциации обучения — каждое задание снабжено условной балловой оценкой (от 1 до 10 очков), характеризующей его сложность. Используя балловую оценку заданий, учитель может:

— организовать «плавную» дифференциацию обучения математике: в зависимости от качества усвоения темы каждому учащемуся предлагать конкретный балловый диапазон выполняемых заданий, помогая постепенно поднимать уровень своих математических умений;

— предлагать учащимся разнообразные виды самостоятельных и проверочных работ, ориентируя их на соответствие набираемых баллов одной из положительных оценок («3», «4» или «5»).

В обоих пособиях задания обязательного профильного уровня в основном оценены баллами от 5 до 7, а продвинутого профильного — от 8 до 10 баллов.

Каждая глава пособия содержит:

1) дидактические материалы к каждому параграфу учебника Ю. М. Колягина и др.;

2) контрольную работу по тематике главы в двух вариантах.

Каждый параграф пособия включает:

1) примеры типовых задач с подробными решениями;

2) разноуровневые задания для самостоятельной работы (в двух вариантах), снабженные ответами в конце книги.

Несмотря на то что содержание и структура данной книги соответствуют учебнику «Алгебра и начала математического анализа» авторов Ю. М. Колягина и др., ее можно с успехом использовать при работе с другими учебниками.

Глава I

Тригонометрические функции

§ 1. Область определения и множество значений тригонометрических функций

Примеры с решениями

1. Найти область определения функции:

1) $y=\sqrt{3\sin 3x+4\cos 3x}$;
2) $y=\log_{\cos x}\sin x$.

Решение. 1) Выражение $\sqrt{3\sin 3x+4\cos 3x}$ имеет смысл при всех действительных значениях x, при которых $3\sin 3x+4\cos 3x$ неотрицательно. Неравенство $3\sin 3x+4\cos 3x\geqslant 0$ решим, выполнив преобразование левой части с помощью метода вспомогательного угла. Умножим и разделим обе части неравенства на $\sqrt{3^2+4^2}=5$. Получим $5\left(\frac{3}{5}\sin 3x+\frac{4}{5}\cos 3x\right)\geqslant 0$. Так как $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, то существует угол φ, такой, что $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=\frac{4}{5}$. Возьмем в качестве φ число $\arccos\frac{3}{5}=\arccos 0{,}6$ и решим неравенство $5(\sin(\varphi+3x))\geqslant 0$.

$\sin(\varphi+3x)\geqslant 0$, $2\pi n\leqslant\varphi+3x\leqslant\pi+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, откуда

$$\frac{2\pi n}{3}-\frac{\varphi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{\pi(1+2n)}{3}-\frac{\varphi}{3},\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

Следовательно, областью определения функции являются все действительные числа из отрезков

$$\left[\frac{2\pi n}{3}-\frac{1}{3}\arccos 0{,}6;\ \frac{\pi(2n+1)}{3}-\frac{1}{3}\arccos 0{,}6\right],\ n\in\boldsymbol{Z}.$$

2) По определению логарифма выражение $\log_{\cos x}\sin x$ существует при всех действительных значениях x, при которых $\sin x>0$ и $\cos x>0$, $\cos x\neq 1$. Решим систему

$$\begin{cases}\sin x>0,\\ \cos x>0,\\ \cos x\neq 1.\end{cases}$$

Решениями этой системы являются все числа из первой четверти единичной окружности: $2\pi n<x<\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Совокупность этих интервалов и является областью определения функции $y=\log_{\cos x}\sin x$.

2. Найти множество значений функции:

1) $y = 2^{|\cos x|}$;

2) $y = \log_2(\cos x + \sin^2 x)$.

Решение. 1) Выясним, какие значения может принимать y при различных значениях x, т. е. установим, при каких значениях a имеет решение уравнение $2^{|\cos x|} = a$. Прологарифмируем равенство, получим $|\cos x| = \log_2 a$. Так как $|\cos x| \leqslant 1$, то $0 \leqslant \log_2 a \leqslant 1$, откуда $1 \leqslant a \leqslant 2$. Таким образом, множеством значений функции $y = 2^{|\cos x|}$ является отрезок $[1;\ 2]$.

2) Так как $\cos x + \sin^2 x = \cos x + 1 - \cos^2 x = \frac{5}{4} - \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2$, где $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, то $-1 \leqslant \cos x + \sin^2 x \leqslant \frac{5}{4}$.

Функция $y = \log_2 t$ определена при $t > 0$, поэтому x может принимать те значения, при которых $0 < \cos x + \sin^2 x \leqslant \frac{5}{4}$, а множество значений данной функции — промежуток $\left(-\infty;\ \log_2 \frac{5}{4}\right)$.

3. Доказать, что функция $y = \operatorname{ctg} x \sin 2x$ ограничена.

Решение. Для того чтобы доказать, что функция $y = \operatorname{ctg} x \sin 2x$ ограничена, нужно найти такое положительное число C, чтобы для любого значения x из области определения функции выполнялось неравенство $|\operatorname{ctg} x \sin 2x| \leqslant C$. Область определения функции — значения $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

Преобразуем выражение $\operatorname{ctg} x \sin 2x$:

$$\operatorname{ctg} x \sin 2x = \frac{\cos x}{\sin x} \cdot 2 \sin x \cos x = 2\cos^2 x.$$

Так как $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, $0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1$, то для любого x из области определения выполняется неравенство $0 \leqslant 2\cos^2 x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$, следовательно, и функция ограничена на области определения.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{6}$ Найти область определения функции:

1) $y = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 x}$;

2) $y = \sqrt{\operatorname{ctg}^2 x - 3}$;

3) $y = \sqrt{3\sin^2 x - \cos^2 x}$;

4) $y = \sqrt{\sin^2 x - 3\cos^2 x}$;

5) $y = \sqrt{\cos 2x - \sin x}$;

6) $y = \sqrt{3\cos 2x + 7\cos x}$;

7) $y = \sqrt{1 - 4\sin x - 4\cos^2 x}$;

8) $y = \sqrt{2\sin 2x - 2\sin^2 x - 1}$.

2. $\boxed{7}$ Найти область определения функции:

1) $y=\sqrt{\dfrac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}}$; 2) $y=\sqrt{\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x}$;

3) $y=\sqrt{\log_a \sin x}$; 4) $y=\lg\lg\operatorname{tg} x$.

3. $\boxed{7}$ Найти множество значений функции:

1) $y=\cos^2 x-\sin x$;
2) $y=\sin^2 x+3\cos x-4$;
3) $y=1-2|\sin 2x|$;
4) $y=\sin x+|\sin x|$;
5) $y=2\sin 5x+3\cos 5x$;
6) $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x$.

4. $\boxed{7}$ Доказать ограниченность функции:

1) $y=2^{\sin x}$; 2) $y=3^{\cos x}$;

3) $y=\dfrac{2\cos x}{\pi-3\sin x}$; 4) $y=\dfrac{2}{3-\sin x}$.

5. $\boxed{8}$ Доказать, что функция не является ограниченной:

1) $y=\dfrac{\cos x+1}{1-\cos x}$; 2) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$.

6. $\boxed{9}$ Известно, что каждая из функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ является ограниченной. Доказать, что ограниченной является функция:

1) $y=f(x)+\varphi(x)$; 2) $y=f(x)\cdot\varphi(x)$.

§ 2. Четность, нечетность, периодичность тригонометрических функций

Примеры с решениями

1. Найти наименьший положительный период функции

$$y=4\cos x+\cos 2x.$$

Решение. Функция определена на всем множестве действительных чисел $\boldsymbol{R}$. Пусть T — период данной функции, т. е. для всех x из области определения верно равенство

$$4\cos(x+T)+\cos(2(x+T))=4\cos x+\cos 2x.$$

Если $x=0$, то равенство примет вид

$$4\cos T+\cos 2T=5.$$

Так как $\cos T\leqslant 1$, $\cos 2T\leqslant 1$, то $4\cos T+\cos 2T=5$, только в случае, когда $\cos T = 1$ и $\cos 2T = 1$, откуда следует, что $T = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, а наименьшее положительное число $T = 2\pi$. Действительно, $T = 2\pi$ — период данной функции, так как для любого $x \in \boldsymbol{Z}$ числа $x + 2\pi$ и $x - 2\pi$ также принадлежат $\boldsymbol{R}$ и справедливо равенство

$$4\cos(x + 2\pi) + \cos(2(x + 2\pi)) = 4\cos x + \cos 2x.$$

2. Доказать, что функция

$$y = \sqrt{\log_2 \cos \frac{2\pi x}{\sqrt{3}}}$$

периодическая, и найти ее период.

Решение. Найдем область определения данной функции: $\log_2 \cos \frac{2\pi x}{\sqrt{3}} \geqslant 0$, следовательно, $\cos \frac{2\pi x}{\sqrt{3}} \geqslant 1$, поэтому,

так как $\cos t \leqslant 1$, то $\cos \frac{2\pi x}{\sqrt{3}} = 1$ и $\frac{2\pi x}{\sqrt{3}} = 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Областью определения функции являются все действительные числа вида $\sqrt{3}n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Пусть $T = \sqrt{3}$, тогда при любом целом n верны равенства

$$\sqrt{3}n + T = \sqrt{3}n + \sqrt{3} = \sqrt{3}(n + 1);$$
$$\sqrt{3}n - T = \sqrt{3}n - \sqrt{3} = \sqrt{3}(n - 1),$$

следовательно, каждое из этих чисел принадлежит области определения функции.

Таким образом, при любом x из области определения и любом целом n справедливы равенства

$$\cos \frac{2\pi(\sqrt{3}n + \sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \cos 2\pi(n + 1) = 1,$$

$$\cos \frac{2\pi\sqrt{3}n}{\sqrt{3}} = \cos 2\pi n = 1,$$

откуда следует, что $y(x + T) = 0$ и $y(x) = 0$, т. е. данная функция является периодической и один из ее периодов равен $\sqrt{3}$.

3. Доказать, что не является периодической функция:

1) $y = \sin\sqrt{x}$; 2) $y = x \operatorname{ctg} x$.

Решение. 1) Областью определения функции являются все неотрицательные действительные числа. Следовательно, если период $T > 0$, то для $x = 0$ число $x - T$ не принадлежит области определения. Если $T < 0$, то для $x = 0$ число $x + T$ не принадлежит области определения. Таким образом, функция $y = \sin\sqrt{x}$ не является периодической.

2) Областью определения функции $y=x\operatorname{ctg}x$ являются числа $x\neq\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Предположим, что период этой функции — число $T>0$. Тогда для всех x из области определения должны быть верны равенства $(x+T)\operatorname{ctg}(x+T)=$ $=x\operatorname{ctg}x=(x-T)\operatorname{ctg}(x-T)$. Пусть $x=\frac{\pi}{2}$, тогда числа $\frac{\pi}{2}+T$ и $\frac{\pi}{2}-T$ должны принадлежать области определения функции и при этом должно выполняться равенство $\left(\frac{\pi}{2}+T\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=$ $=\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$, откуда $\left(\frac{\pi}{2}+T\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+T\right)=0$.

Если $T+\frac{\pi}{2}=0$, то $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+T\right)$ не существует, т. е. число $T+\frac{\pi}{2}$ не принадлежит области определения. Аналогично и для чисел $\frac{\pi}{2}-T$. Следовательно, функция $y=x\operatorname{ctg}x$ не является периодической.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{5}$ Выяснить, является ли четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной функция:

1) $y=(1+\cos x)\operatorname{ctg}x$; 2) $y=(1+\sin x)\operatorname{tg}x$;
3) $y=\frac{1+\sin x}{\sin x}$; 4) $y=\frac{1+\cos x}{\cos x}$.

2. $\boxed{6}$ Является ли четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной функция:

1) $y=\sin(\cos x)$; 5) $y=\sin\sqrt{x}$;
2) $y=\cos(\sin x)$; 6) $y=\cos\sqrt{x}$;
3) $y=|x|+\cos x$; 7) $y=x^2\cos x$;
4) $y=x^2+\sin x$; 8) $y=x^3\sin x$?

3. $\boxed{7}$ Доказать, что число T является периодом функции:

1) $y=\frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}$, $T=\pi$;
2) $y=\frac{\cos x}{4+\sin^2 x}$, $T=2\pi$.

4. $\boxed{8}$ Найти наименьший положительный период функции:

1) $y=3\sin x+\sin 2x$;
2) $y=2\sin x+\cos x$;
3) $y=\sin^4 x$;
4) $y=|\sin^3 x|$.

5. $\boxed{9}$ Доказать, что функция не является периодической:

1) $y=\cos^2 x$; 4) $y=\cos\sqrt{2}x$;
2) $y=\sin x^2$; 5) $y=x^2\sin^2 x$;
3) $y=\cos\sqrt{x}$; 6) $y=\cos x^2$.

6. $\boxed{9}$ Известно, что числа T_1 и T_2 — периоды некоторой функции. Доказать, что для этой функции периодом будет число:

1) T_1+T_2; 2) T_1-T_2.

7. $\boxed{9}$ Известно, что функция $y=f(x)$ периодическая с периодом T. Доказать, что:

1) период функции $y=af(x)+b$ равен T, $a\neq 0$;

2) период функции $y=f(ax+b)$ равен $\frac{T}{a}$, $a\neq 0$.

8. $\boxed{7}$ Может ли быть периодической функция, множество значений которой промежуток:

1) $[a;\ b]$; 2) $(a;\ \infty)$?

9. $\boxed{7}$ Может ли периодическая функция быть:

1) всюду возрастающей; 2) всюду убывающей?

§ 3. Свойства функции $y=\cos x$ и ее график

Примеры с решениями

1. Доказать, что функция $y=\cos 2x$ возрастает на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — значения аргумента из области определения функции, удовлетворяющие условиям $\frac{3\pi}{2}\leqslant x_1<x_2\leqslant 2\pi$. Чтобы утверждать, что функция возрастает, докажем, что $\cos 2x_2>\cos 2x_1$, или $\cos 2x_2-\cos 2x_1>0$. Преобразуем разность с помощью формул половинного аргумента:

$$2\cos x_2^2-1-2\cos x_1^2+1=2(\cos x_2^2-\cos x_1^2)=$$
$$=2(\cos x_2+\cos x_1)(\cos x_2-\cos x_1).$$

Выражение в первой скобке положительно, так как функция $y=\cos x$ в четвертой четверти принимает положительные значения. Разность во второй скобке положительна, так как функция $y=\cos x$ возрастает на промежутке $\left[\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$. Следовательно,

$$\cos 2x_2-\cos 2x_1>0,\ \cos 2x_2>\cos 2x_1$$

и функция $y=\cos 2x$ возрастает на заданном промежутке.

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\cos 2x-4\cos x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. После преобразований запишем функцию в виде

$$y=2\cos^2 x-1-4\cos x.$$

Пусть $t=\cos x$, тогда $|t|\leqslant 1$, но на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ значения косинуса неотрицательны, т. е. $0\leqslant t\leqslant 1$. Таким образом, $y=f(t)$, т. е.

$$f(t)=2t^2-4t-1,$$

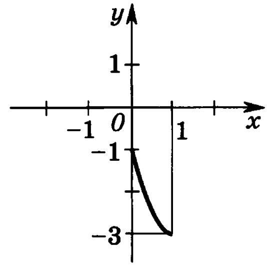


Рис. 1

или $f(t)=2(t-1)^2-3$. На рисунке 1 изображен график функции $y=f(t)$ на отрезке [0; 1], откуда видно, что $-1\leqslant f(t)\leqslant -3$. Итак, наименьшее значение функции y равно -3, наибольшее значение -1.

3. Решить неравенство

$$\sqrt{\cos x-1}\geqslant x^2-9.$$

Решение. Область определения функции $y=\sqrt{\cos x-1}$ — все значения x, для которых $\cos x\geqslant 1$. Так как $|\cos x|\leqslant 1$, то функция определена при всех x, при которых $\cos x=1$, т. е. при $x=2\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$.

Таким образом, графиком функции $y=\sqrt{\cos x-1}$ является множество точек с координатами $(2\pi n;\ 0)$, $n\in \mathbf{Z}$. График функции $y=x^2-9$ — парабола с вершиной в точке $(0;\ -9)$ и точками пересечения с осью Ox $(-3;\ 0)$ и $(3;\ 0)$. Решением неравенства является единственное значение $x=0$ (рис. 2).

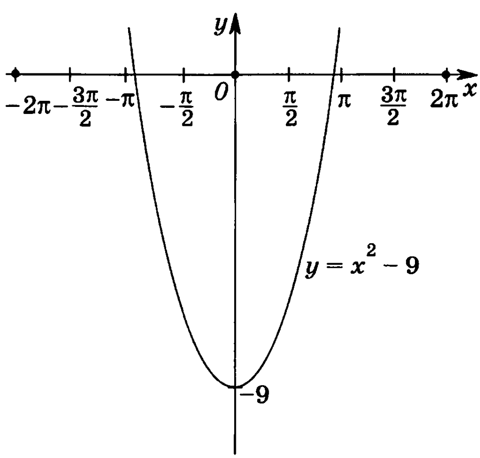


Рис. 2

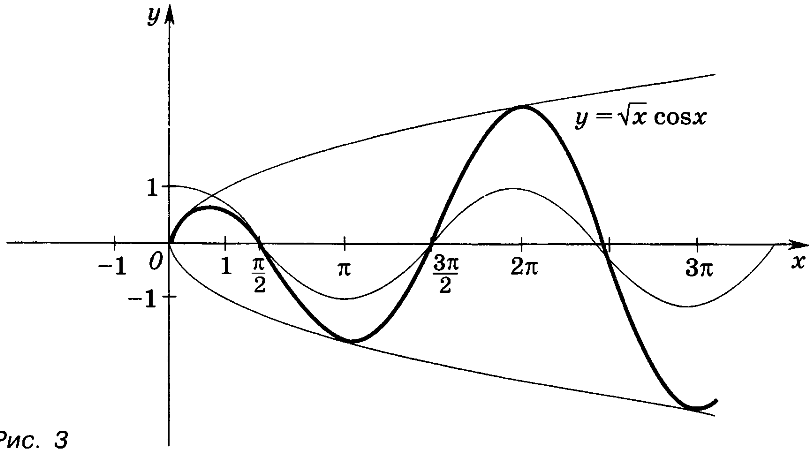


Рис. 3

4. Построить график функции $y=\sqrt{x}\cos x$.

Решение. Область определения функции $x \geqslant 0$. Так как $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$, то при $x \geqslant 0$ верно двойное неравенство $-\sqrt{x} \leqslant \sqrt{x}\cos x \leqslant \sqrt{x}$. Для каждого x из области определения функции можно произвести умножение ординат (соответствующих данному x) графиков функций $y=\sqrt{x}$ и $y=\cos x$. Отсюда видно, что график функции расположен между кривыми $y=\sqrt{x}$ и $y=-\sqrt{x}$, причем при $x=2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, где $\cos x = 1$, точки графика лежат на кривой $y=\sqrt{x}$, а при $x=2\pi(n-1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$,— на кривой $y=-\sqrt{x}$. График функции изображен на рисунке 3.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{6}$ Построить графики функций. С помощью графиков найти область определения, множество значений, наименьший положительный период каждой из функций, а также записать уравнения осей симметрии для каждого графика:

1) $y=\cos 2x$;
2) $y=\cos 0{,}5x$;
3) $y=2\cos x$;
4) $y=0{,}5\cos x$;
5) $y=-\cos x$;
6) $y=-3\cos x$;
7) $y=\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$;
8) $y=\cos\left(0{,}5x-\frac{\pi}{3}\right)$.

2. $\boxed{5}$ Выяснить, возрастает или убывает на отрезке $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ функция:

1) $y=-2\cos x$; 2) $y=0{,}5\cos x$; 3) $y=\cos 0{,}5x$; 4) $y=\cos 2x$.

3. $\boxed{6}$ Доказать, что при всех $x \in \boldsymbol{R}$ возрастает функция:
1) $y=\cos x+2x$; 2) $y=x-\cos x$.

4. $\boxed{7}$ Найти на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; 0\right]$ наибольшее и наименьшее значения функции:
1) $y=\cos 2x-2\cos x$; 2) $y=2\cos x-\cos 2x$.

5. $\boxed{7}$ Решить неравенство:
1) $\sqrt{1+\cos x} \geqslant x^2-4$; 2) $\sqrt{1-\cos x} \leqslant 9-x^2$.

6. $\boxed{7}$ Решить уравнение:
1) $\left(\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{4x^2-7x+3}=0$;
2) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x\right)\sqrt{3x^2-4x+1}=0$.

7. $\boxed{9}$ Построить график функции:
1) $y=2x\cos x$; 2) $y=0{,}5x\cos x$;
3) $y=\sqrt{x}\cos\frac{x}{2}$; 4) $y=\sqrt{x}\cos 2x$.

8. $\boxed{9}$ Выяснить, является ли периодической функция:
1) $y=x^2\cos x$; 2) $y=\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$.

§ 4. Свойства функции $y=\sin x$ и ее график

Примеры с решениями

1. Сколько корней имеет уравнение $x^2=4^{\sin x}$?

Решение. При $x \neq 0$ обе части уравнения положительны, поэтому каждую из них можно прологарифмировать по основанию 2. Получим $2\log_2|x|=\sin x\log_2 4$, откуда $\log_2|x|=\sin x$. Решим полученное уравнение, равносильное исходному, графически. Графики функций

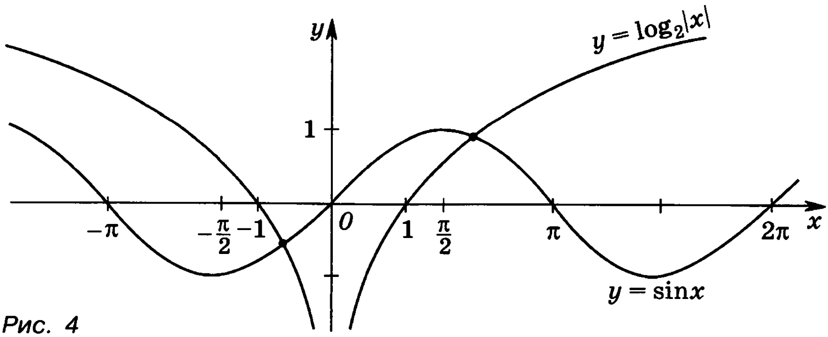


Рис. 4

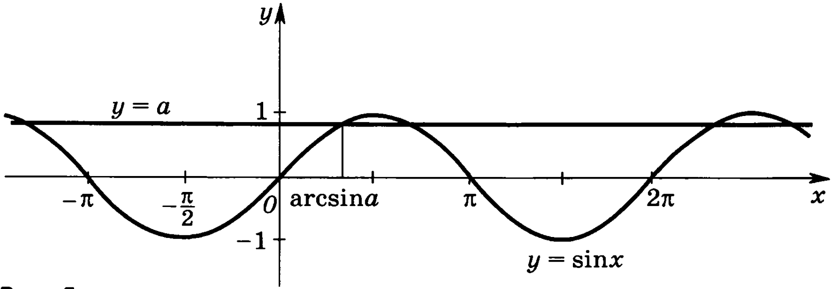


Рис. 5

$y=\log_2|x|$ и $y=\sin x$ пересекаются в двух точках (рис. 4), следовательно, исходное уравнение имеет два корня.

2. Решить неравенство $x^{\sin x-a}>1$, если $0<x<\frac{\pi}{2}$, $a>0$.

Решение. При $0<x<\frac{\pi}{2}$, $a>0$ данное неравенство можно представить в виде

$$(\sin x-a)\lg x>0.$$

1) Если $a\geqslant 1$, то $\sin x-a<0$, тогда $\lg x<0$, откуда $0<x<1$.

2) Если $0<a<1$, то $\sin x-a$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения (рис. 5).

Так как $0<x<\frac{\pi}{2}$, то неравенство $\sin x-a<0$ выполняется при $0<x<\arcsin a$, а неравенство $\sin x-a>0$ выполняется при $\arcsin a<x<\frac{\pi}{2}$. Неравенство $\lg x<0$ выполняется при $0<x<1$, а неравенство $\lg x>0$ выполняется при $1<x<\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{по условию } 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

Таким образом, неравенство $(\sin x-a)\lg x>0$ равносильно совокупности двух систем неравенств

$$\begin{cases}0<x<\arcsin a,\\ 0<x<1,\end{cases}\qquad \begin{cases}\arcsin a<x<\frac{\pi}{2},\\ 1<x<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

В первой системе $0<x<\arcsin a$, если $\arcsin a\leqslant 1$, т. е. $a\leqslant\sin 1$, и $0<x<1$, если $\arcsin a>1$, т. е. $a>\sin 1$. Во второй системе $1<x<\frac{\pi}{2}$, если $\arcsin a\leqslant 1$, т. е. $0<a\leqslant\sin 1$; $\arcsin a<x<\frac{\pi}{2}$, если $\arcsin a>1$, т. е. $a>\sin 1$.

Ответ. $0<x<\arcsin a$, $1<x<\frac{\pi}{2}$ при $a\leqslant\sin 1$;

$0<x<1$, $\arcsin a<x<\frac{\pi}{2}$ при $\sin 1<a<1$, $a\geqslant 1$.

3. Построить график функции $y=\sin x+\sin 2x$.

Решение. Область определения функции — множество $\boldsymbol{R}$. Функция нечетная: область определения симметрична относительно начала координат и для всех $x\in \boldsymbol{R}$ выполняется равенство $\sin x+\sin 2x=-(\sin x+\sin 2x)$. Следовательно, достаточно построить график для $x>0$. Период функции равен 2π. Таким образом, график можно построить сначала на отрезке $[0;\ 2\pi]$.

Найдем нули функции:

$$\sin x+\sin 2x=0,\ 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=0,\ \sin\frac{3x}{2}=0,\ \cos\frac{x}{2}=0,$$

откуда $\frac{3x}{2}=\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z},\ x=\frac{2\pi n}{3},\ n\in \boldsymbol{Z},$ $x=\pi+2\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$

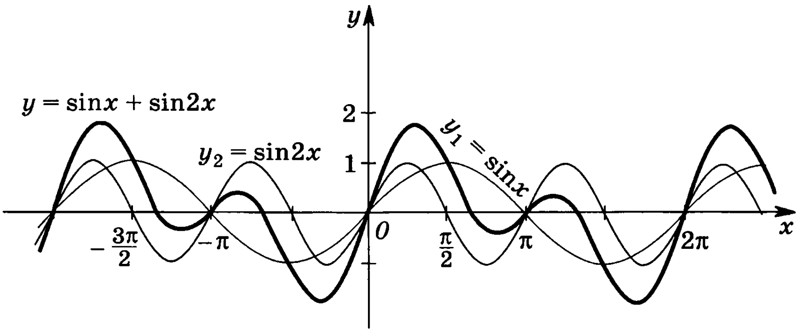


Рис. 6

Далее для построения графика сложим ординаты точек графиков функций $y_1=\sin x$ и $y_2=\sin 2x$ и получим график заданной функции (рис. 6).

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{6}$ Построить графики функций. С помощью графиков указать область определения, множество значений, наименьший положительный период каждой из функций, а также записать уравнения осей симметрии для каждого графика:

1) $y=\sin 2x$;	5) $y=-\sin x$;
2) $y=\sin 0{,}5x$;	6) $y=-2\sin x$;
3) $y=3\sin x$;	7) $y=1-2\sin x$;
4) $y=0{,}5\sin x$;	8) $y=1-0{,}5\sin x$.

2. $\boxed{6}$ Выяснить, сколько корней имеет уравнение:
1) $4x^2=2^{\sin x}$; 2) $(x-1)^2=3^{\sin x}$.

3.$\boxed{7}$ Решить неравенство, если $x>0$:

1) $x^{\lg\sin x}\geqslant 1$; 2) $x^{2\sin x-\cos 2x}<\frac{1}{x}$.

4.$\boxed{7}$ Найти область определения и построить график функции:

1) $y=\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x$; 2) $y=\frac{\cos^2 x}{1-\sin x}$.

5.$\boxed{7}$ Построить график функции:

1) $y=0{,}5\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$; 2) $y=2\sin\left(0{,}5x-\frac{\pi}{4}\right)+1$;

3) $y=\sin 2x+2\sin x$; 4) $y=\sin 2x-\sin x$.

6.$\boxed{8}$ Привести к виду $y=A\sin(ax+\varphi)$, исследовать и построить график функции:

1) $y=3\sin x+4\cos x$;

2) $y=-0{,}5\sin 2x-1{,}2\cos 2x$.

§ 5. Свойства и графики функций $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$

Примеры с решениями

1. Решить неравенство $\sin^2 x\operatorname{tg}\frac{1}{1+x^2}>\sin^2 x$.

Решение. Неравенство будет верным при условии, что $\operatorname{tg}\frac{1}{1+x^2}>1$. Так как неравенства $0<\frac{1}{1+x^2}\leqslant 1$ выполняются при всех действительных значениях $x\neq 0$, то $\operatorname{tg}\frac{1}{1+x^2}>1$, если $\frac{1}{1+x^2}>\frac{\pi}{4}$. Отсюда следует, что $|x|<\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}$. Следовательно, решениями неравенства является объединение интервалов:

$$-\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}<x<0,\ 0<x<\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}.$$

2. Решить неравенство $(x^2-2x)(\operatorname{tg}^2 x+2^{x+1})\leqslant 0$.

Решение. Областью определения данного неравенства являются все действительные числа $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Так как на всей этой области $\operatorname{tg}^2 x\geqslant 0$ и $2^{x+1}>0$, то неравенство $(x^2-2x)(\operatorname{tg}^2 x+2^{x+1})\leqslant 0$ верно при $x^2-2x\leqslant 0$. Отсюда $x(x-2)\leqslant 0$ при всех $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, и $0\leqslant x\leqslant 2$. Иными словами, решением неравенства являются промежутки $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}<x\leqslant 2$.

3. Построить график функции $y=2^{\operatorname{tg} x}$.

Решение. Областью определения функции являются все действительные значения $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; множество значений — все положительные числа. Так как функция $y=\operatorname{tg} x$ периодическая с наименьшим положительным периодом π, то и функция $y=2^{\operatorname{tg} x}$ периодическая с тем же периодом. Поэтому построим график на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а затем продолжим его на всю числовую ось. На этом интервале возрастают и функция $y=\operatorname{tg} x$, и функция $y=2^{t}$, а следовательно, возрастает функция $y=2^{\operatorname{tg} x}$ (по теореме о монотонности сложной функции).

Выберем 3 контрольные точки, например $x=-\frac{\pi}{4}$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ (значения функции соответственно будут равны 0,5; 1; 2) и построим график (рис. 7).

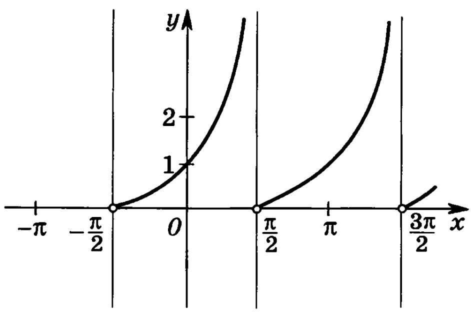


Рис. 7

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{6}$ Построить графики функций. С помощью графиков указать область определения, множество значений, наименьший положительный период каждой из функций:

1) $y=\operatorname{tg} 2x$;	5) $y=-\operatorname{tg} x$;
2) $y=\operatorname{tg} 0{,}5x$;	6) $y=-3\operatorname{tg} x$;
3) $y=2\operatorname{tg} x$;	7) $y=\operatorname{tg}\left(0{,}5x+\frac{\pi}{4}\right)$;
4) $y=0{,}5\operatorname{tg} x$;	8) $y=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$.

2. $\boxed{6}$ Выяснить, является ли четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной функция:

1) $y=\operatorname{tg}\lvert x\rvert$;	2) $y=-\lvert\operatorname{tg} x\rvert$;	3) $y=\lvert\operatorname{ctg} x\rvert$;
4) $y=-\operatorname{ctg}\lvert x\rvert$;	5) $y=\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$;	6) $y=\operatorname{ctg}(x+1)$.

3. $\boxed{7}$ Выяснить, является ли функция четной, нечетной, и построить график функции:

1) $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; 2) $y=\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|$.

4. $\boxed{7}$ Доказать, что функция является периодической. Найти наименьший положительный период функции:

1) $y=\operatorname{tg}x+1$; 2) $y=2\operatorname{ctg}x$;
3) $y=\sin x+\operatorname{tg}x$; 4) $y=\cos 2x+\operatorname{ctg}x$.

5. $\boxed{7}$ Решить неравенство:

1) $\cos^2 x\operatorname{tg}\frac{1}{1+x^2}>\cos^2 x$; 2) $\sin^2 x\operatorname{ctg}\frac{1}{1+x^2}>\sin^2 x$.

6. $\boxed{8}$ Решить неравенство:

1) $(x^2+2x)(\operatorname{tg}^2 x+3^{x-1})\leqslant 0$;
2) $(x^2-3x)(2^{x-1}+\operatorname{ctg}^2 x)\leqslant 0$.

7. $\boxed{8}$ Построить график функции:

1) $y=\operatorname{tg}2x\operatorname{ctg}2x$; 2) $y=\operatorname{tg}(-x)\operatorname{ctg}(-x)$;
3) $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{\operatorname{tg}x}$; 4) $y=5^{\operatorname{ctg}x}$.

8. $\boxed{9}$ Решить неравенство:

1) $\sqrt{\operatorname{tg}x-1}\,(\log_{\operatorname{tg}x}(2+4\cos^2 x)-2)\geqslant 0$;
2) $\sqrt{1-\log_{\operatorname{tg}x}2}\,(1-3\log_{\operatorname{tg}x}2+2(\log_{\operatorname{tg}x}2)^2)\geqslant 0$.

§ 6. Обратные тригонометрические функции

Примеры с решениями

1. Найти область определения функции:

1) $y=\arcsin(2\cos x)$; 2) $y=\arccos(\sqrt{3}\operatorname{tg}x)$.

Решение. 1) Областью определения функции $y=\cos x$ является множество $\boldsymbol{R}$, а множеством значений — отрезок $[-1;\ 1]$. Область определения функции $y=\arcsin x$ — отрезок $[-1;\ 1]$, следовательно, $-1\leqslant 2\cos x\leqslant 1$, откуда $-\frac{1}{2}\leqslant\cos x\leqslant\frac{1}{2}$. Так как $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$, а $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$, то область определения данной функции — отрезок $\left[\frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right]$.

2) По определению функции $y=\arccos t$ аргумент принадлежит отрезку $[-1;\ 1]$, следовательно, $-1\leqslant\sqrt{3}\operatorname{tg}x\leqslant 1$, откуда $-\frac{1}{\sqrt{3}}\leqslant\operatorname{tg}x\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}$, значит, в силу возрастания функции $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\leqslant x\leqslant\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ и, следовательно, $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$.

2. Найти множество значений функции

$$y=\frac{5}{\pi}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-\sin x+\cos x}{2\sqrt{2}}\right).$$

Решение. После преобразования приведем функцию к виду $y=b\arcsin(\sin x)$. Выделив целую часть из дроби, получим $\varphi(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sin x-\cos x)$. Воспользуемся методом вспомогательного угла и представим разность $\sin x-\cos x$ в виде $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, где $\frac{1}{\sqrt{2}}=\arccos\frac{\pi}{4}$, т. е. $\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sin x-\cos x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Так как $\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\leqslant 1$, то $0\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$, т. е. $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$, причем $\varphi(x)$ принимает все значения из отрезка $[0;\ 1]$.

Так как арксинус возрастает при всех действительных значениях x из области определения и $\arcsin 0=0$, $\arcsin 1=$ $=\frac{\pi}{2}$, то $0\leqslant\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-\sin x+\cos x}{2\sqrt{2}}\right)\leqslant\frac{\pi}{2}$, значит,

$$0\leqslant\frac{5}{\pi}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-\sin x+\cos x}{2\sqrt{2}}\right)\leqslant\frac{5}{2},$$

причем функция y принимает все значения из отрезка $\left[0;\ \frac{5}{2}\right]$.

3. Построить график функции $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$.

Решение. Область определения функции $x\neq 0$, множество значений — действительные положительные числа. Функция четная, следовательно, ее график симметричен относительно оси Oy. По теореме о монотонности сложной функции следует, что при возрастании x от 0 до бесконечности значения $\frac{1}{x^2}$ убывают от бесконечности до 0, а значения $\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}$ убывают от $\frac{\pi}{2}$ до 0 (точка $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ графику не принадлежит). Возьмем несколько контрольных точек и построим график функции сначала для положительных чисел, а затем получим график, изображенный на рисунке 8.

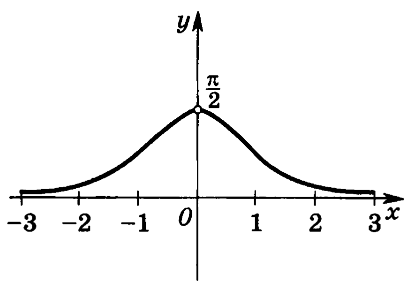


Рис. 8

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{6}$ Найти область определения функции:

   1) $y=\arcsin(2\cos x)$; 2) $y=\arccos(2\sin x)$;

   3) $y=\arcsin(\sqrt{2}\sin x)$; 4) $y=\arccos\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)$;

   5) $y=\arcsin(\operatorname{tg} x)$; 6) $y=\arccos(\operatorname{ctg} x)$.

2. $\boxed{6}$ Найти область определения и множество значений функции:

   1) $y=3\arcsin(x+1)$; 2) $y=3\arcsin(x^2-3)$;

   3) $y=-\arccos(x+2)$; 4) $y=5\arccos(5-x^2)$;

   5) $y=0{,}5\operatorname{arctg}(2x-5)$; 6) $y=3\operatorname{arcctg}(3x+1)$.

3. $\boxed{7}$ Найти множество значений функции:

   1) $y=\arccos|x|$; 2) $y=\pi-|\operatorname{arctg} x|$;

   3) $y=\cos\arcsin x$; 4) $y=\operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2+1}$.

4. $\boxed{7}$ Выяснить, является ли четной, нечетной или не является ни четной, ни нечетной функция:

   1) $y=\arccos|x|$;

   2) $y=|\operatorname{arcctg} x|$;

   3) $y=\arccos(\cos x)$;

   4) $y=\sin(\arcsin x)$.

5. $\boxed{8}$ Найти множество значений функции:

   1) $y=\frac{6}{\pi}\arcsin\left(\frac{3(\sin x+\cos x)-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}\right)$;

   2) $y=\frac{9}{\pi}\arccos\left(\frac{\cos x-\sin x}{2\sqrt{2}}\right)$.

6. $\boxed{8}$ Построить график функции:

   1) $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

   2) $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x^2}$.

7. $\boxed{9}$ Построить графики функций:

   1) $y=2\arcsin(x+1)$ и $y=2\sin(\arcsin(x+1))$;

   2) $y=0{,}5\arccos(2+x)$ и $y=0{,}5\cos(\arccos(2+x))$;

   3) $y=\operatorname{arctg}(x+1)$ и $y=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x+1))$;

   4) $y=\operatorname{arcctg}(x-1)$ и $y=\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}(x-1))$.

Контрольная работа

1. Построить график функции

$$y=\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \qquad \left[y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

и указать промежутки монотонности.

2. Найти множество значений функции

$$y=3\sin^2 x+\cos 2x \qquad [y=\cos 2x+3\cos^2 x].$$

3. Исследовать функцию

$$y=\operatorname{tg}\left|0{,}5x-\frac{\pi}{6}\right| \qquad \left[y=\operatorname{ctg}\left|2x+\frac{\pi}{3}\right|\right]$$

и построить ее график.

4. Решить неравенство

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\sin x\right)\sqrt{4x-x^2+5}\geqslant 0$$
$$[(2\sin 2x-\operatorname{tg} x)\sqrt{2-x-x^2}\leqslant 0].$$

---

5. Найти все решения неравенства

$$\cos x-\sin x-\cos 2x>0$$
$$[\sin x\sin 2x<\sin 3x\sin 4x]$$

на интервале $(0;\ 2\pi)$ $\left[\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Глава II Производная и ее геометрический смысл

§ 1. Предел последовательности

Примеры с решениями

1. Доказать, что последовательность $x_n=\dfrac{(-1)^n n+5}{\sqrt{n^2+2}}$, $n\in N$, ограничена.

Решение. Докажем, что существуют числа c_1 и c_2, такие, что для любого члена последовательности x_n выполняется неравенство $c_1\leqslant x_n\leqslant c_2$, $n\in N$. Поскольку для модуля числителя дроби справедливо неравенство $|(-1)^n n+5|\leqslant|(-1)^n n|+5=n+5$, а для знаменателя неравенство $\sqrt{n^2+2}>n$, то

$$|x_n|=\frac{|(-1)^n n+5|}{\sqrt{n^2+2}}\leqslant\frac{n+5}{n}=1+\frac{5}{n}\leqslant 6,$$

т. е. $|x_n|\leqslant 6$. Следовательно, соотношение $-6\leqslant x_n\leqslant 6$ выполняется для всех членов последовательности, и последовательность ограничена.

2. Доказать, что последовательность:

1) $x_n=n^{\cos\pi n}$, $n\in N$; 2) $x_n=\dfrac{100-n^3}{n^2-10}$

не является ограниченной.

Решение. 1) Покажем, что для любого $C>0$ найдется член последовательности, больший C. Действительно, если $n=2k$, где $k\in N$, то $\cos 2\pi k=1$ и $x_{2k}=2k$. Следовательно, если теперь взять произвольное положительное число C и четное число $2k$, большее C, то справедливо неравенство $x_{2k}=2k>C$, т. е. для любого $C>0$ найдется член последовательности, больший заданного числа C, и последовательность не является ограниченной.

2) Покажем, что для любого $C>0$ найдется x_n, для которого будет выполняться неравенство $|x_n|>C$. Из формулы общего члена имеем

$$|x_n|=\frac{n^3\left|\dfrac{100}{n^3}-1\right|}{n^2\left|1-\dfrac{10}{n^2}\right|}=n\left|\frac{\dfrac{100}{n^3}-1}{1-\dfrac{10}{n^2}}\right|.$$

Если $n \geqslant 6$, то $\frac{100}{n^3} < \frac{1}{2}$ и $1 - \frac{100}{n^3} > \frac{1}{2}$, а $0 < 1 - \frac{10}{n^2} < 1$, поэтому $|x_n| = n\frac{1-\frac{100}{n^3}}{1-\frac{10}{n^2}} > n\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{n}{2}$. Для произвольного положительного числа C возьмем $n > 2C$ (например, $n = [2C] + 1$), тогда $|x_n| > \frac{n}{2} > C$, и, значит, данная последовательность не ограничена.

3. Доказать, что последовательность $x_n = \frac{3^n}{n!}$, $n \in N$, убывает, начиная с некоторого номера.

Решение. Докажем, что каждый предыдущий член последовательности, начиная с некоторого номера, будет больше последующего. Для этого рассмотрим отношение $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3^{n+1}n!}{(n+1)!3^n} = \frac{3}{n+1}$. Если $n \geqslant 3$, то $\frac{3}{n+1} < 1$, и поэтому выполняется неравенство $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ и, значит, $x_{n+1} < x_n$, так как $x_n > 0$. Следовательно, последовательность убывает, начиная с $n = 3$.

4. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n-1} = \frac{5}{3}$. Найти номер N_ε, такой, что при всех $n \geqslant N_\varepsilon$, справедливо неравенство $\left|\frac{5n+2}{3n-1} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon$ для $\varepsilon = 0{,}1$; $\varepsilon = 0{,}01$; $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. По определению предела последовательности число $\frac{5}{3}$ является пределом последовательности, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_ε, такой, что при всех $n \geqslant N_\varepsilon$ выполняется неравенство $\left|\frac{5n+2}{3n-1} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon$. Так как

$$\left|\frac{5n+2}{3n-1} - \frac{5}{3}\right| = \left|\frac{11}{3(3n-1)}\right| = \frac{11}{3(3n-1)},$$

то неравенство $\left|\frac{5n+2}{3n-1} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon$ равносильно неравенству $\frac{11}{3(3n-1)} < \varepsilon$. Полученное неравенство верно для любого $n > \frac{11+3\varepsilon}{9\varepsilon}$. Следовательно, $\left|\frac{5n+2}{3n-1} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon$ при $n > \frac{11+3\varepsilon}{9\varepsilon}$.

Значит, в качестве номера N_ε можно взять целую часть числа $\frac{11+3\varepsilon}{9\varepsilon}$, т. е. $N_\varepsilon = \left[\frac{11+3\varepsilon}{9\varepsilon}\right]$. Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n-1} = \frac{5}{3}$.

Ответим на вторую часть задания, для чего найдем номер N_ε, такой, что при всех $n > N_\varepsilon$ справедливо неравенство $\left|\frac{5n+2}{3n-1} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon$ для $\varepsilon = 0{,}1$. Пусть $\varepsilon = 0{,}1$, тогда $N_\varepsilon = \left[\frac{11+3\cdot 0{,}1}{9\cdot 0{,}1}\right] = \left[\frac{11{,}3}{0{,}9}\right] = 12$, т. е. $N_\varepsilon = 12$. Следовательно, неравенство $\left|\frac{5n+2}{3n-1} - \frac{5}{3}\right| < 0{,}1$ справедливо для всех $n \geqslant 12$. Аналогично можно найти номера N_ε, начиная с которых неравенство $\left|\frac{5n+2}{3n-1} - \frac{5}{3}\right| < \varepsilon$ выполняется для $\varepsilon = 0{,}01$; $\varepsilon = 0{,}001$. Это будут числа 122 и 1222. Заметим, что данная последовательность $x_n = \frac{5n+2}{3n-1}$ имеет предел, что означает, что она сходящаяся.

5. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ при } a > 1.$$

Решение. Введем обозначение $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$. Тогда $\alpha_n > 0$ и $a = (1+\alpha_n)^n$, что по неравенству Бернулли ($(1+\alpha)^n \geqslant 1 + n\alpha$ при $\alpha > -1$, $n \in \mathbf{N}$) не меньше $n\alpha_n$, иными словами, $(1+\alpha_n)^n \geqslant n\alpha_n$, или $a \geqslant n\alpha_n$. Отсюда $0 < \alpha_n \leqslant \frac{a}{n}$ для всех n. Следовательно, по свойству 2 сходящихся последовательностей $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha_n) = 1$.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{5}$ Записать формулу общего члена последовательности, первыми членами которой являются числа:

1) 8; 14; 20; 26; 32; ...;

2) $2;\ \frac{3}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{5}{4};\ \frac{6}{5};\ \ldots;$

3) $-0{,}5;\ 1{,}5;\ -4{,}5;\ 13{,}5;\ -40{,}5;\ \ldots;$

4) $-2;\ -\frac{1}{2};\ -\frac{4}{3};\ -\frac{3}{4};\ -\frac{6}{5};\ \ldots\ .$

2. $\boxed{6}$ Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, заданная формулой общего члена, ограничена, если:

1) $x_n = \frac{2n^2-1}{2+n^2}$; 2) $x_n = \frac{n^2+4n+8}{(n+1)^2}$.

3. $\boxed{7}$ Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, заданная формулой общего члена, не ограничена, если:

1) $x_n = n^2 - n$; 2) $x_n = n + (-1)^n n$;

3) $x_n = (1-n)^{\sin\frac{\pi n}{2}}$; 4) $x_n = n^{\cos 2\pi n}$.

4. $\boxed{6}$ Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, заданная формулой общего члена:

1) $x_n = \frac{n}{5n-4}$, убывающая;

2) $x_n = \frac{n-2}{2n}$, возрастающая;

3) $x_n = \frac{a^n - 1}{n}$ при $a \neq 1$, $a > 0$, возрастающая;

4) $x_n = \frac{n}{2^n}$, убывающая.

5. $\boxed{7}$ Для данной последовательности $\{x_n\}$ найти значения n, при которых $|x_n - b| < 0{,}01$, $|x_n - b| < \varepsilon$, если:

1) $x_n = \frac{3n}{5n+1}$, $b = 0{,}6$;
2) $x_n = \frac{3n+1}{3n-1}$, $b = 1$;

3) $x_n = \frac{4n+3}{4n+1}$, $b = 1$;
4) $x_n = \frac{4n+5}{2n+1}$, $b = 2$.

6. $\boxed{8}$ Найти предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4-n^2}{n+1} + \frac{n^2+1}{n-1}\right)$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2-n^2}{2+n} + \frac{n^2+2}{n-2}\right)$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n} - n\right)$;
4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n - \sqrt{2n+n^2}\right)$.

7. $\boxed{9}$ Найти предел:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-1} - n - 1\right)$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}\right)$.

8. $\boxed{9}$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

1) $x_n = \frac{(-2)^n}{(n+2)!}$;
2) $x_n = \frac{3^{-n}\cdot 10^n}{n!}$.

§ 2. Предел функции

Примеры с решениями

1. С помощью определения предела функции доказать, что

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a.$$

Решение. Докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ (зависящее от ε), такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$. Так как для каждого x справедливо неравенство

$|\sin x| \leqslant |x|$, то, выполнив преобразование с помощью замены разности синусов их произведением, получим

$$|\sin x - \sin a| = 2\left|\cos\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leqslant |x-a|.$$

Таким образом, $|\sin x - \sin a| \leqslant |x-a| < \delta$ для каждого x, удовлетворяющего условию $0 < |x-a| < \delta$. В качестве δ можно взять ε, тогда верным будет соотношение $|\sin x - \sin a| \leqslant |x-a| < \delta < \varepsilon$. Следовательно, доказано, что $\lim\limits_{x \to a} \sin x = \sin a$.

2. Доказать, что функция $y = \frac{|x|}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$.

Решение. Если $x > 0$, то $\frac{|x|}{x} = 1$, откуда следует, что предел функции справа в точке 0 равен 1. Если $x < 0$, то $\frac{|x|}{x} = -1$, и поэтому предел функции в точке 0 слева равен -1. Так как эти пределы не совпадают, то функция $y = \frac{|x|}{x}$ не имеет предела в точке 0.

3. Найти вертикальные асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 4x - 5}.$$

Решение. $x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1)$. Если $x \to -1$ или $x \to 5$, то $x^2 - 4x - 5 \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x \to -1} \frac{2}{x^2 - 4x - 5} = \infty, \quad \lim_{x \to 5} \frac{2}{x^2 - 4x - 5} = \infty.$$

Таким образом, вертикальными асимптотами являются прямые $x = -1$ и $x = 5$.

4. Найти горизонтальную асимптоту графика функции

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-1}.$$

Решение. Разделим на x числитель и знаменатель дроби, задающей функцию. Получим $f(x) = \dfrac{2 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$. Так как при $x \to \infty$ верно, что $\frac{3}{x} \to 0$ и $\frac{1}{x} \to 0$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+3}{x-1} = 2$, и, следовательно, $y = 2$ — горизонтальная асимптота графика функции.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{6}$ Построить график функции $y=f(x)$ и на графике показать, что функция имеет предел при $x \to a$. (Задать значение $\varepsilon > 0$ и построить соответствующую этому значению δ-окрестность точки a.)

   1) $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$, $a=3$;

   2) $y=\begin{cases} -x^2 & \text{при } x \geqslant -1, \\ \dfrac{1}{x} & \text{при } x < -1, \end{cases}$ $a=-1$;

   3) $y=|x-3|$, $a=3$;

   4) $y=|x+1|+2$, $a=-1$.

2. $\boxed{7}$ Доказать, что при $x \to a$ функция $y=f(x)$ не имеет конечного предела, если:

   1) $y=\dfrac{|x+2|}{|x+2|}$, $a=-2$;

   2) $y=\dfrac{2}{x-2}$, $a=2$.

3. $\boxed{7}$ Найти такое значение $\delta > 0$, чтобы из неравенства $0<|x-a|<\delta$ следовало неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$, если:

   1) $f(x)=x^2$, $a=2$, $A=4$, $\varepsilon=0{,}001$;

   2) $f(x)=\sin x$, $a=\frac{\pi}{2}$, $A=1$, $\varepsilon=0{,}01$.

4. $\boxed{8}$ Для каждого числа $\varepsilon > 0$ найти такое число $\delta > 0$, при котором из неравенства $0<|x-a|<\delta$ следует неравенство:

   1) $\left|\dfrac{3x^2-4x+1}{x-1}-2\right|<\varepsilon$, если $a=1$;

   2) $\left|\dfrac{x^3-3x^2}{x-3}-9\right|<\varepsilon$, если $a=3$.

5. $\boxed{8}$ Доказать с помощью определения предела функции справедливость утверждения:

   1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-3)=3$; 2) $\lim\limits_{x\to 1}(7-3x)=4$;

   3) $\lim\limits_{x\to 2}|x-2|=0$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^2}=0$.

6. $\boxed{6}$ Найти вертикальные асимптоты графика функции:

   1) $y=\dfrac{2x+5}{x+2}$; 2) $y=\dfrac{x-7}{3x-2}$;

   3) $y=\dfrac{1}{2x^2+5x-3}$; 4) $y=\dfrac{5}{3x^2+x-2}$.

7. $\boxed{7}$ Найти горизонтальные асимптоты графика функции:

   1) $y=\dfrac{7x-1}{1+3x}$; 2) $y=\dfrac{2-5x}{3x-4}$.

8. $\boxed{7}$ Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{1-x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+3x-1}{x^2-3}$;

5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$; 6) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{x^4+2x^2-1}-\sqrt{x^4-2x^2-1})$;

8) $\lim\limits_{x\to \infty}(\sqrt{4x^4+13x^2-7}-2x^2)$.

§ 3. Непрерывность функции

Примеры с решениями

1. Выяснить, является ли функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-16}{x+4} \text{ при } x\neq -4,\\ 8 \text{ при } x=-4\end{cases}$$

непрерывной в точке $x=-4$.

Решение. Если $x\neq -4$, то $f(x)=x-4$, и поэтому $\lim\limits_{x\to -4} f(x)=-8$. Так как $f(-4)=8$, то $\lim\limits_{x\to -4} f(x)\neq f(-4)$. Следовательно, функция $f(x)$ не является непрерывной в точке $x=-4$, т. е. $x=-4$ — точка разрыва функции $f(x)$.

2. Доказать, что функция

$$f(x)=\sqrt{x}$$

непрерывна в каждой точке $a>0$.

Решение. По определению функция, определенная в окрестности точки a, непрерывна в точке a, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=$ $=f(a)$. В соответствии с определением предела функции в точке нужно доказать, что для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для любого x из области определения, удовлетворяющего условию $|x-a|<\delta$, верно неравенство $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

Преобразуем модуль разности, а затем оценим его:

$$0\leqslant|\sqrt{x}-\sqrt{a}|=\frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\leqslant\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to a}|x-a|=0$ и $\frac{1}{a}$ — величина постоянная, то $\lim\limits_{x\to a}\frac{|x-a|}{\sqrt{a}}=0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to a}\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|=0,$$

и поэтому $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$. Значит, функция $f(x)=\sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке $a>0$.

3. Функция

$$f(x)=\frac{x^3-27}{x-3}$$

не определена в точке $x=3$. Определить ее в точке $x=3$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна при $x=3$.

Решение. Найдем $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3x+9)=27$. Если положить $f(3)=27$, то функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-27}{x-3} \text{ при } x\neq 3,\\ 27 \text{ при } x=3\end{cases}$$

будет непрерывна в точке $x=3$. Таким образом, функция доопределена по непрерывности в точке 3.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{6}$ Построить график функции и выяснить, является ли функция непрерывной в точке $a=1$, если:

1) $y=\begin{cases}3-x^2 \text{ при } x\leqslant 1,\\ x+1 \text{ при } x>1;\end{cases}$

2) $y=\begin{cases}3-x^2 \text{ при } x\leqslant 1,\\ x-1 \text{ при } x>1;\end{cases}$

3) $y=\begin{cases}3-x^2 \text{ при } x<1,\\ 3 \text{ при } x=1,\\ x+1 \text{ при } x>1;\end{cases}$

4) $y=\begin{cases}3-x^2 \text{ при } x<1,\\ 2 \text{ при } x=1,\\ x+1 \text{ при } x>1.\end{cases}$

2. $\boxed{7}$ Выяснить, является ли функция непрерывной в точке a, если:

1) $y=3-x^2,\ a=-2;$ 2) $y=|4-x|,\ a=4;$

3) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1},\ a=1;$ 4) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1},\ a=0;$

5) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x+3},\ x\neq-3,\\ -6,\ x=-3,\end{cases}\quad a=-3;$

6) $y=\begin{cases}\dfrac{x}{x-1},\ x\neq 1,\\ 1,\ x=1,\end{cases}\quad a=1.$

3. $\boxed{8}$ Доказать, что функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке области определения, если:

1) $f(x)=2x-1;$ 2) $f(x)=2-3x;$

3) $f(x)=x^2;$ 4) $f(x)=x^3.$

4. $\boxed{8}$ При каком значении d функция $f(x)$ будет непрерывна в точке a, если:

1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x+5} \text{ при } x<-5,\\ d \text{ при } x\geqslant-5,\end{cases}\quad a=-5;$

2) $f(x)=\begin{cases}0{,}5x+d \text{ при } x\leqslant-2,\\ (x+2)^2 \text{ при } x>-2,\end{cases}\quad a=-2;$

3) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{x+d} \text{ при } x\leqslant 0,\\ 5-x \text{ при } x>0,\end{cases}\quad a=0;$

4) $f(x)=\begin{cases}(x+d)^2 \text{ при } x\leqslant 1,\\ \dfrac{8}{x+d} \text{ при } x>1,\end{cases}\quad a=1?$

5. $\boxed{9}$ Функция $f(x)$ не определена в точке $x=a$. Определить ее в точке $x=a$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в этой точке, если:

1) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1},\ a=-1;$ 2) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1},\ a=1.$

6. $\boxed{8}$ Построить график функции и указать множество точек, в которых функция непрерывна:

1) $f(x)=\begin{cases}x^2+2 \text{ при } x\leqslant 0,\\ x-1 \text{ при } x>0;\end{cases}$ 2) $f(x)=\begin{cases}-x \text{ при } x\leqslant-1,\\ \dfrac{2}{x-1} \text{ при } x>-1.\end{cases}$

§ 4. Определение производной

Примеры с решениями

1. С помощью определения производной найти значение производной функции $f(x)$ в точке x, если:

1) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x=1$; 2) $f(x)=3|x+1|$, $x=-2$.

Решение. 1) Составим разностное отношение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h}$ и найдем его предел при $x=1$ и $h\to 0$: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(1+h)^2}-1}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{-2h-h^2}{h(1+h)^2}=-\lim\limits_{h\to 0}\frac{2+h}{(1+h)^2}=-2.$

2) Составим разностное отношение $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=$ $=\frac{3|(x+h)+1|-3|x+1|}{h}$ и найдем его предел при $x=-2$ и $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{3|-2+h+1|-3|-2+1|}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3|h-1|-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3-3h-3}{h}=-3.$$

2. Найти производную функции $f(x)=x\sqrt{x}$.

Решение. Пусть $x>0$ (в противном случае предел $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ не существует). Выберем h так, чтобы выполнялось неравенство $|h|<x$, составим разностное отношение и найдем его предел:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\sqrt{x+h}-x\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{((x+h)\sqrt{x+h}-x\sqrt{x})((x+h)\sqrt{x+h}+x\sqrt{x})}{h((x+h)\sqrt{x+h}+x\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h((x+h)\sqrt{x+h}+x\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h((x+h)\sqrt{x+h}+x\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+3xh+h^2}{(x+h)\sqrt{x+h}+x\sqrt{x}}=\frac{3x^2}{2x\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

3. Выяснить, имеет ли функция $f(x)=|2x-5|$ производную в точке $x=2{,}5$.

Решение. Составим разностное отношение и найдем его значение при $x=2{,}5$:

$$\frac{|2(x+h)-5|-|2x-5|}{h}=\frac{|5+2h-5|-|5-5|}{h}=\frac{|2h|}{h}=\begin{cases}2 \text{ при } h>0,\\ -2 \text{ при } h<0.\end{cases}$$

Следовательно, разностное отношение не имеет предела при $h\to 0$ и производная в данной точке не существует.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{7}$ С помощью определения производной найти значение производной функции $f(x)$ в точке x, если:
   1) $f(x)=3-4x$, $x=-1$; 2) $f(x)=2+3x$, $x=4$;
   3) $f(x)=5-x^2$, $x=5$; 4) $f(x)=5x+x^2$, $x=-3$;
   5) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x=9$; 6) $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=-8$.
2. $\boxed{8}$ С помощью определения производной найти производную функции:
   1) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{x}$.
3. $\boxed{6}$ Найти скорость материальной точки, движущейся прямолинейно по закону $s(t)$, в момент времени $t=b$, где t измеряется в секундах, а s — в метрах, если:
   1) $s(t)=5t^2-100$, $b=1$; 2) $s(t)=2t+5t^2$, $b=7$;
   3) $s(t)=5t^2-2t$, $b=5$; 4) $s(t)=-5t^2+2t$, $b=2$.
4. $\boxed{8}$ Выяснить, имеет ли функция производную в точке x, если:
   1) $f(x)=|x-1|$, $x=1$; 2) $f(x)=|x+2|$, $x=-2$;
   3) $f(x)=\sqrt{x-1}$, $x=1$; 4) $f(x)=\sqrt{x+2}$, $x=-2$.

§ 5. Правила дифференцирования

Примеры с решениями

1. Найти производную функции:

1) $f(x)=(x^3-2x^2+x-1)^2$; 2) $\varphi(x)=x^3(2-x)^2$.

Решение. 1) Функция $f(x)$ сложная, причем $y=x^3-2x^2+x-1$, а $f(y)=y^2$, следовательно, производная сложной функции находится по формуле $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$. Так как $f'(y)=2y$, а $g'(x)=3x^2-4x+1$ по правилу дифференцирования суммы, то по формуле производной сложной функции находим

$$((x^3-2x^2+x-1)^2)'=2(x^3-2x^2+x-1)(3x^2-4x+1)=$$
$$=6x^5-20x^4+24x^3-18x^2+10x-2.$$

2) Производную функции $\varphi(x)=x^3(2-x)^2$ можно найти двумя путями. Во-первых, можно возвести второй множитель в квадрат, умножить на x^3 и применить правило нахождения производной суммы. Во-вторых, можно применить правило нахождения производной произведения:

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x),$$

где $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$, $g(x)=(2-x)^2$, $g'(x)=2(2-x)(-1)=$ $=2x-4$ (применили формулу производной сложной функции). Получим $\varphi'(x)=3x^2(2-x)^2+x^3(2x-4)=5x^4-16x^3+12x^2$.

2. Найти производную функции, обратной к функции

$$f(x)=\frac{3x-5}{x+3},\ x>-3.$$

Решение. Пусть $x\neq-3$. Найдем функцию $\varphi(x)$, обратную к данной, для чего выразим x через y, тогда

$$x=\varphi(y)=\frac{5+3y}{3-y},$$

откуда $y=f(x)=\frac{3x+5}{3-x}$.

$$\varphi'(x)=\frac{3(3-x)-(3x+5)(-1)}{(3-x)^2}=\frac{14}{(3-x)^2}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{6}$ Материальная точка массой 2 кг движется прямолинейно по закону $s(t)$ (t — время в секундах, s — расстояние в метрах). Найти скорость движения точки в момент времени t, если:

1) $s(t)=t^3-1{,}5t^2+2t-1,\ t=3$;
2) $s(t)=2t^3-2{,}5t^2+3t+1,\ t=1$;
3) $s(t)=(5-t)(2t-6)+50,\ t=4$;
4) $s(t)=(6-t)(2t+3)-18,\ t=2$.

2. $\boxed{6}$ Угол поворота тела вокруг оси изменяется в зависимости от времени по закону $\varphi(t)$ (φ — угол в радианах, t — время в секундах). Найти угловую скорость вращения тела в момент времени t, если:

1) $\varphi(t)=0{,}3t^2-0{,}5t+0{,}2,\ t=10$;
2) $\varphi(t)=0{,}5t^2-0{,}2t,\ t=5$;
3) $\varphi(t)=4t-0{,}3t^2,\ t=2$;
4) $\varphi(t)=1{,}5t^2-0{,}1t,\ t=10$.

3. $\boxed{6}$ Температура тела изменяется в зависимости от времени по закону $T(t)$ (t — время в секундах, T — температура в градусах). Найти скорость изменения температуры в момент времени t, если:

1) $T=0{,}2t^2,\ t=10$; 2) $T=0{,}5t^2-2t,\ t=5$.

4. $\boxed{6}$ Найти производную функции:

1) $2x^3(x-3)$; 2) $(x+4)3x^2$;
3) $(5x+7)0{,}5x^2$; 4) $\frac{1}{3}x^3(4-3x)$.

5.$\boxed{6}$ Выяснить, при каких значениях x производная функции $f(x)$ равна 0, если:

1) $f(x)=\frac{3x+2}{2x-3}$; 2) $f(x)=\frac{7x-5}{3+2x}$;

3) $f(x)=\frac{x^2-5}{x^2+5}$; 4) $f(x)=\frac{x^2+2}{x^2+3}$.

6.$\boxed{7}$ Найти производную функции и значение производной при $x=-1$:

1) $y=(x^2+3x-2)^3$; 2) $y=(x^3-2x^2+3)^2$;

3) $y=\left(\frac{1-3x}{x+5}\right)^2$; 4) $y=\left(\frac{x+2}{1-2x}\right)^2$.

7.$\boxed{8}$ Найти производную функции, обратной к функции:

1) $y=\frac{2+5x}{1-x}$; 2) $y=\frac{5-2x}{x+1}$.

§ 6. Производная степенной функции

Примеры с решениями

1. Найти производную функции

$$f(x)=\sqrt{1+x^2},\ x\in \boldsymbol{R}.$$

Решение. Данная функция является сложной, где $y=1+x^2$, $f(y)=\sqrt{y}$. Поэтому ее производную находим по формуле производной сложной функции:

$$y'=2x,\ (\sqrt{y})'=\left(y^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Таким образом, $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Найти производную функции

$$f(x)=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}.$$

Решение. Найдем производную по формуле производной сложной функции. Пусть $y=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$, тогда $f=y^{12}$ и $f'=12y^{11}\cdot y'$, следовательно,

$$f'=12\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{11}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\right)=$$

$$=12\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{11}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)=\frac{6(x-1)}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{11}.$$

Задания для самостоятельной работы

1.$\boxed{6}$ Сила тока I изменяется в зависимости от времени t по закону $I(t)$, где I — сила тока в амперах, t — время в секундах. Найти скорость изменения силы тока в конце указанной секунды, если:

1) $I=0{,}4t^2+0{,}5t,\ t=8;$ 2) $I=2t^2-5t,\ t=10.$

2.$\boxed{7}$ Найти производную функции:

1) $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x};$ 2) $y=x^3\sqrt[3]{x^2}+x^7\sqrt[3]{x};$

3) $y=x^3-\frac{1}{x^3}+\sqrt[3]{x};$ 4) $y=x^{\frac{3}{2}}+\frac{6}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x};$

5) $y=x^{-\frac{3}{4}}+6x\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}};$ 6) $y=-\frac{2}{x^4}+\sqrt[4]{x}+\frac{4}{x\sqrt[4]{x^3}}.$

3.$\boxed{7}$ Найти значение производной функции при $x=a$:

1) $y=\sqrt{\frac{x}{x+1}},\ a=1;$ 2) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},\ a=2.$

4.$\boxed{8}$ Найти производную функции:

1) $y=\sqrt{2x^2+\sqrt{x^2+1}};$ 2) $y=\sqrt[13]{9+7\sqrt[5]{2x}};$

3) $y=\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}};$ 4) $y=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}.$

§ 7. Производные элементарных функций

Примеры с решениями

1. Высота h снаряда, вылетевшего с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту, изменяется по закону $h=(v_0\sin\alpha)t-\frac{gt^2}{2}$, где t — время, g — ускорение силы тяжести. В какой момент скорость изменения высоты снаряда над горизонтом равна нулю?

Решение. Скорость изменения высоты снаряда над горизонтом находится как производная функции $h(t)$. Найдем $h'(t)=v_0\sin\alpha-gt$, откуда скорость изменения высоты снаряда будет равна нулю при $t=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$.

2. Найти производную функции:

1) $y=3^{\operatorname{tg}^2 x},\ x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z};$

2) $y=\ln\sqrt{\frac{e^x}{1+\sin x}},\ x\neq-\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}.$

Решение. 1) Применим дважды правило дифференцирования сложной функции, получим

$$y' = 3^{\operatorname{tg}^2 x} \ln 3 \cdot (\operatorname{tg}^2 x)' = 3^{\operatorname{tg}^2 x} \ln 3 \cdot 2 \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x)'.$$

Следовательно, производная имеет вид

$$y' = 2 \ln 3 \cdot 3^{\operatorname{tg}^2 x} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

2) С помощью свойств логарифмов упростим формулу, которой задана функция, получим

$$y = \frac{1}{2} \ln e^x - \frac{1}{2} \ln(1 + \sin x), \quad y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \ln(1 + \sin x).$$

Найдем производную с помощью правил нахождения производной и формул производных элементарных функций:

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sin x)'}{1 + \sin x} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\cos x}{1 + \sin x}\right).$$

Полученное выражение можно упростить, выразив синус и косинус через тангенс половинного аргумента:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\right) : \left(1 + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}\right) \cdot \left(\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2}\right) = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right)}{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

3. Найти производную функции $y = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x$, $x > 0$, предварительно выполнив логарифмирование функции.

Решение. Рассмотрим функцию $z = \ln|y|$, т. е. $z = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$ (выражение в скобках строго положительно, по условию $x > 0$). По правилу дифференцирования сложной функции $z' = \frac{1}{y} y'$, откуда $y' = z'y$. Применим свойства логарифмов, получим $z = x(\ln x - \ln(x+1)) = x \ln x - x \ln(x+1)$. По правилам нахождения производных имеем

$$z' = \ln x + 1 - \ln(x+1) - \frac{x}{x+1} = \ln \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+1} + 1.$$

Следовательно, $y' = \left(\frac{x}{x+1}\right)^x \cdot \left(\ln \frac{x}{x+1} - \frac{x}{x+1} + 1\right)$.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{6}$ Найти производную функции:

1) $y = x^2 \sin x$; 2) $y = x^2 \cos x$;

3) $y = \frac{\sin x}{x^2+1}$; 4) $y = \frac{2\cos x}{x^2+4}$;

5) $y = \sin^3 x + \sin 3x$; 6) $y = \cos^4 x + \cos 4x$;

7) $y = \log_2(x^2 - 2x + 1)$; 8) $y = \lg(x^2 - x - 2)$;

9) $y = \ln \sin^2 x$; 10) $y = \lg \cos^2 x$.

2. $\boxed{7}$ Найти производную функции, предварительно применив логарифмирование, считая, что $x > 1$:

1) $y = x^x$; 2) $y = x^{\frac{1}{x}}$;

3) $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$; 4) $y = \left(\frac{x-1}{x}\right)^x$.

3. $\boxed{8}$ Найти производную функции:

1) $y = 2^{\sin x^2}$; 2) $y = 3^{\cos^2 x}$;

3) $y = \log_2 \log_3 \log_5 x$; 4) $y = \ln \ln \ln x^2$;

5) $y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln\left(\frac{\sqrt{2} + x\sqrt{3}}{\sqrt{2} - x\sqrt{3}}\right)^2$; 6) $y = \ln\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$.

4. $\boxed{8}$ Выяснить, при каких значениях x принимает положительные значения производная функции:

1) $y = \sqrt{6+x} + \ln(2-x)$; 2) $y = \sqrt{5+x} - \ln(3-x)$;

3) $y = \sqrt{7+2x} + \ln(4-x)$; 4) $y = \sqrt{x+1} - \ln(2x+3)$.

5. $\boxed{7}$ Тело массой $m = 1{,}5$ движется прямолинейно по закону $s(t) = t^2 + t + 1$. Найти кинетическую энергию тела через 5 с после начала движения (масса m — в килограммах, путь s — в метрах, время t — в секундах).

6. $\boxed{7}$ Радиус шара возрастает равномерно со скоростью 5 см/с. Какова скорость изменения объема шара в момент, когда его радиус становится равным 50 см?

§ 8. Геометрический смысл производной

Примеры с решениями

1. Найти точку графика функции $y = x^2 - 5x + 3$, в которой касательная к этому графику:

1) параллельна прямой $y = 3x - 1$;

2) перпендикулярна к прямой $y = 3x - 1$.

Решение. 1) Две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1=k_2$. Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке x_0 равен

$$y'=(x_0^2-5x_0+3)'=2x_0-5.$$

Эта прямая параллельна прямой $y=3x-1$, если $2x_0-5=3$, т. е. $x_0=4$. Функция $y=x^2-5x+3$ при $x=4$ принимает значение, равное -1, следовательно, искомая точка имеет координаты $(4;\ -1)$.

2) Две прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ ($k_1\neq 0$, $k_2\neq 0$) взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2=-1$. Угловой коэффициент касательной к графику в точке равен

$$y'=(x_0^2-5x_0+3)'=2x_0-5,$$

т. е. $k_1k_2=(2x_0-5)3$, $6x_0-15=-1$, $x_0=\frac{7}{3}$. Значение функции при $x=\frac{7}{3}$ равно $-\frac{29}{9}$, искомая точка имеет координаты $\left(\frac{7}{3};\ -\frac{29}{9}\right)$.

2. Найти угол между графиками функций

$$y=\sqrt{x} \text{ и } y=x^2$$

в точке их пересечения ($x\neq 0$).

Решение. Углом между графиками функций в точке их пересечения называют угол между касательными к их графикам в этой точке. Тангенс угла φ между двумя прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ $\left(k_1\neq k_2,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ находят по формуле $\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|$, если $k_1k_2\neq -1$; если $k_1k_2=-1$, то $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Абсциссы точек пересечения графиков найдем из уравнения $\sqrt{x}=x^2$. При $x\geqslant 0$ можно записать $x=x^4$, откуда $x_1=0$, $x_2=1$. Найдем тангенсы углов наклона касательных к графикам:

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad \frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2};\ (x^2)'=2x,\ 2x_0=2.$$

Найдем по формуле величину тангенса угла между касательными: $\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{\frac{1}{2}-2}{1+\frac{1}{2}\cdot 2}\right|=\frac{3}{4}$. Таким образом, угол между графиками в точке с абсциссой 1 равен $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

Задания для самостоятельной работы

1.$\boxed{6}$ Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=a$, если:

1) $y=1-\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$, $a=0$;

2) $y=1+2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, $a=0$;

3) $y=\sin^3 x$, $a=-\frac{\pi}{4}$;

4) $y=\cos^3 x$, $a=\frac{\pi}{4}$.

2.$\boxed{7}$ Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, параллельной данной прямой:

1) $f(x)=\ln(1-x)$, $y=1-x$;

2) $f(x)=\ln(3x-2)$, $y=3x-1$;

3) $f(x)=\ln(x^2-2x-3)$, $2x+3y=1$;

4) $f(x)=\ln(3-2x-x^2)$, $2x-3y=1$.

3.$\boxed{7}$ Написать уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$, параллельной оси Ox, если:

1) $f(x)=x^4-4x+1$; 2) $f(x)=x^4+32x-3$;

3) $f(x)=\frac{1}{x^2-2x+2}$; 4) $f(x)=\frac{1}{x^2+4x+5}$.

4.$\boxed{8}$ Найти точку графика функции, в которой касательная к этому графику перпендикулярна к данной прямой:

1) $f(x)=x^3-x+1$, $y=2x-1$;

2) $f(x)=\ln x$, $2y+x=-1$.

5.$\boxed{9}$ Найти точки пересечения и выяснить, под каким углом пересекаются графики функций:

1) $f(x)=x^2$ и $g(x)=x^3$;

2) $f(x)=\frac{1}{x}$ и $g(x)=\sqrt{x}$;

3) $f(x)=x^2-4x+4$ и $g(x)=-x^2+6x-4$;

4) $f(x)=4x^2+2x-8$ и $g(x)=x^3-x+10$.

Контрольная работа

1. Найти предел функции:

$$1)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1};\quad 2)\ \lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$$

$$\left[1)\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+5x-6}{x^2-1};\quad 2)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{8+x}-3}{x-1}\right].$$

2. Выяснить, при каком значении a функция

$$f(x)=\begin{cases}1-2x & \text{при } x<1,\\ \frac{a}{x} & \text{при } x\geqslant 1\end{cases}\qquad \left[f(x)=\begin{cases}ax^2 & \text{при } x<2,\\ \frac{8}{x} & \text{при } x\geqslant 2\end{cases}\right]$$

непрерывна в точке $x_0=1$ $[x_0=2]$.

3. Найти производную функции:

$$1)\ y=\frac{\sin x}{1+\cos x};\quad 2)\ y=\ln(\sin 2x)$$

$$\left[1)\ y=\frac{\operatorname{tg} x}{1+x};\quad 2)\ y=\lg(\cos 3x)\right].$$

4. Написать уравнение касательной к графику функции

$$f(x)=\ln(4-x^2)\qquad [f(x)=\ln(9-x^2)],$$

параллельной прямой $3y-2x=1$ $\quad[x-4y=1]$.

---

5. Найти точки пересечения графиков функций

$$f(x)=\sqrt{2}\sin x \ \text{ и } \ g(x)=\sqrt{2}\cos x$$

$$\left[f(x)=x^3 \ \text{ и } \ g(x)=\frac{1}{x^2}\right].$$

Выяснить, под каким углом пересекаются эти графики.

III Применение производной к исследованию функций

§ 1. Возрастание и убывание функции

Примеры с решениями

1. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$, если:

1) $f(x)=x^5-5x^4+5x^3-2$; 2) $f(x)=(x-1)^2(x+2)^3$;

3) $f(x)=\frac{(x-3)^3}{(x-2)^2}$; 4) $f(x)=(x-3)^2e^{|x|}$.

Решение. 1) Так как $f'(x)=5x^4-20x^3+15x^2=5x^2(x^2-4x+3)=5x^2(x-1)(x-3)$, то $f'(x)>0$ при $x>3$, $f'(x)=0$ при $x=0$, $x=1$, $x=3$ и $f'(x)>0$ при $x<1$, $x\neq 0$. По теореме 2 функция $f(x)$ возрастает при $x<0$, $0<x<1$, $x>3$.

При $1<x<3$ выполняется неравенство $f'(x)<0$, и поэтому функция $f(x)$ убывает на интервале (1; 3).

2) $f'(x)=2(x-1)(x+2)^3+3(x-1)^2(x+2)^2=$ $=(x+2)^2(x-1)(5x+1)$, $f'(x)>0$ при $x<-2$, при $-2<x<-\frac{1}{5}$ и при $x>1$. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает при $x<-2$, $-2<x<-\frac{1}{5}$ и $x>1$.

Если $-\frac{1}{5}<x<1$, то $f'(x)<0$, и поэтому функция $f(x)$ убывает на интервале $\left(-\frac{1}{5};\ 1\right)$.

3) Если $x\neq 2$, то $f'(x)=\frac{3(x-3)^2(x-2)^2-(x-3)^3\,2(x-2)}{(x-2)^4}=$ $=\frac{5(x-3)^2x}{(x-2)^3}$. При $x<0$, $2<x<3$ и $x>3$ справедливо неравенство $f'(x)>0$, и поэтому функция $f(x)$ возрастает на этих интервалах. Если $0<x<2$, то $f'(x)<0$, и поэтому функция $f(x)$ убывает на интервале (0; 2).

4) Если $x<0$, то $f(x)=(x-3)^2e^{-x}$, $f'(x)=2(x-3)e^{-x}-$ $-(x-3)^2e^{-x}=(x-3)(5-x)e^{-x}$.

Если $x>0$, $f'(x)=2(x-3)e^x+(x-3)^2e^x=(x-3)(x-1)e^x$. Отсюда следует, что $f'(x)<0$ при $x<0$ и при $1<x<3$, а $f'(x)>0$ при $0<x<1$ и при $x>3$.

Поэтому функция $f(x)$ возрастает на промежутках $0<x<1$ и $x>3$ и убывает при $x<0$ и при $1<x<3$.

2. Найти все значения a, при которых функция $f(x)=\frac{x^3}{3}-ax^2+(a+2)x+5$ возрастает на $\boldsymbol{R}$.

Решение. Так как $f'(x)=x^2-2ax+a+2=(x-a)^2+2+a-a^2$, то $f'(x)>0$ при всех $x\in\boldsymbol{R}$, если $a^2-a-2<0$, т. е. при $-1<a<2$.

Если $a=-1$, то $f'(x)=(x+1)^2$; если $a=2$, то $f'(x)=(x-2)^2$. Отсюда следует, что функция $f(x)$ является возрастающей на $\boldsymbol{R}$, если $-1\leqslant a\leqslant 2$.

3. Доказать, что если $x>0$, то выполняется неравенство

$$\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}.$$

Решение. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$. Так как $\varphi'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0$ при $x>0$, то функция $\varphi(x)$ является возрастающей при $x>0$. Функция $\varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[0;\ x]$ для любого $x>0$. Поэтому она возрастает на этом отрезке и $\varphi(x)>\varphi(0)$, где $\varphi(0)=0$. Следовательно, $\varphi(x)>0$ при $x>0$, т. е. выполняется неравенство $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$ при $x>0$.

Задания для самостоятельной работы

Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x)$ (1—7).

1. $\boxed{4}$ 1) $f(x)=x^2e^{-x}$; 2) $f(x)=(x-1)^2e^{2x}$.

2. $\boxed{5}$ 1) $f(x)=3x^5-25x^3+60x+3$;
2) $f(x)=3x^5-50x^3+135x+7$.

3. $\boxed{5}$ 1) $f(x)=\sqrt{2x^3+9x^2}$; 2) $f(x)=x\sqrt{(x+1)^3}$.

4. $\boxed{5}$ 1) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}$; 2) $f(x)=\frac{x^2+3x+2}{x^2-3x+2}$.

5. $\boxed{6}$ 1) $f(x)=\frac{x^4}{x^3-1}$; 2) $f(x)=\frac{x^5}{1-x^4}$.

6. $\boxed{7}$ 1) $f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x-5)^2}$; 2) $f(x)=\frac{(2-x)^3}{(2+x)^2}$.

7. $\boxed{8}$ 1) $f(x)=(x^2-1)e^{|x|}$; 2) $f(x)=(x^2-4)e^{|x|}$.

8. $\boxed{9}$ Найти все значения a, при которых функция $f(x)$ убывает на $\boldsymbol{R}$:

1) $f(x)=-\frac{x^3}{3}+\frac{a}{2}x^2-x+5$;

2) $f(x)=\left(\frac{a}{3}-1\right)x^3+ax^2+2(a-4)x+4$.

9. $\boxed{10}$ Доказать, что при $x>0$ справедливо неравенство:

1) $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$; 2) $e^x > 1 + \ln(1+x)$.

10. $\boxed{10}$ Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то справедливо неравенство:

1) $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$; 2) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$.

§ 2. Экстремумы функции

Примеры с решениями

1. Найти стационарные точки функции:

1) $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x + 3$;

2) $f(x) = \sin 2x - \frac{1}{2}\cos 4x$.

Решение. 1) $f'(x) = 4x^3 - 28x + 24 = 4(x^3 - 7x + 6)$. Стационарные точки функции $f(x)$ — корни уравнения $x^3 - 7x + 6 = 0$. Найдем эти корни, разложив многочлен $x^3 - 7x + 6$ на множители. Имеем $x^3 - 7x + 6 = x^3 - x - 6(x-1) = (x-1)(x^2 + x - 6) = (x-1)(x-2)(x+3)$. Следовательно, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$ — стационарные точки функции $f(x)$.

2) $f'(x) = 2\cos 2x + 2\sin 4x = 2\cos 2x(1 + 2\sin 2x)$. Уравнение $f'(x) = 0$ равносильно совокупности двух уравнений $\cos 2x = 0$ и $\sin 2x = -\frac{1}{2}$, имеющих корни $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ и $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Найденные значения x — стационарные точки функции $f(x)$.

2. Найти точки экстремума функции $f(x)$:

1) $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 4$; 2) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 3$;

3) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}$; 4) $f(x) = |x|(x+2)^3$.

Решение. 1) Так как

$$f'(x) = 3x^2 + 12x - 15 = 3(x+5)(x-1),$$

то $x_1 = -5$ и $x_2 = 1$ — стационарные точки функции $f(x)$. При переходе через точку x_1 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку x_2 — с минуса на плюс. Следовательно, $x_1 = -5$ — точка максимума, а $x_2 = 1$ — точка минимума функции $f(x)$.

2) Уравнение $5x^4 + 20x^3 + 15x^2 = 5x^2(x+3)(x+1) = 0$ имеет корни $x_1 = 0$, $x_2 = -3$, $x_3 = -1$. Точка $x_1 = 0$ не является точкой экстремума, так как функция $f(x)$ возрастает на

промежутках $(-1;\ 0]$ и $[0;\ 1)$. При переходе через точку $x_2=-3$ производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x_3=-1$ — с минуса на плюс. Поэтому $x_2=-3$ — точка максимума, а $x_3=-1$ — точка минимума функции $f(x)$.

3) Функция $f(x)$ дифференцируема при всех $x\in\boldsymbol{R}$, кроме $x=1$, причем

$$f'(x)=\frac{(3x^2+4x)(x-1)^2-(x^3+2x^2)2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{(x+1)x(x-4)}{(x-1)^3},\ x\neq 1.$$

Отсюда следует, что -1, 0, 4 — стационарные точки функции $f(x)$. Методом интервалов находим, что $f'(x)>0$ при $x<-1$, $0<x<1$ и $x>4$, а $f'(x)<0$ при $-1<x<0$ и $1<x<4$. Так как при переходе через точку $x=-1$ производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точки $x=0$ и $x=4$ — с минуса на плюс, то $x=-1$ — точка максимума, а $x=0$ и $x=4$ — точки минимума функции $f(x)$.

4) Функция $f(x)$ дифференцируема при всех $x\in\boldsymbol{R}$, кроме $x=0$, и непрерывна в точке $x=0$. Если $x>0$, то $f(x)=x(x+2)^3$, $f'(x)=(x+2)^3+3x(x+2)^2=4(x+2)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)$; если $x<0$, то $f(x)=-x(x+2)^3$, $f'(x)=-4(x+2)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Отсюда следует, что $f'(x)>0$ при $x>0$, при $x<-2$ и при $-2<x<-\frac{1}{2}$, а $f'(x)<0$ при $-\frac{1}{2}<x<0$.

При переходе через точку $x=-\frac{1}{2}$ производная меняет знак с плюса на минус, а при переходе через точку $x=0$ — с минуса на плюс. Поэтому $x=-\frac{1}{2}$ — точка максимума, а $x=0$ — точка минимума функции $f(x)$. Точка $x=-2$ является стационарной точкой функции $f(x)$, но не является точкой экстремума, так как $f(x)$ — возрастающая функция при $x<-\frac{1}{2}$.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{4}$ Найти стационарные точки функции:

1) $f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x+3$;
2) $f(x)=3x^4+4x^3-24x^2-48x+7$.

Найти точки экстремума функции $f(x)$ **(2—6)**.

2. $\boxed{5}$ 1) $f(x)=3x^5-50x^3+135x+4$;
2) $f(x)=3x^5-25x^3+60x+7$.

3. $\boxed{5}$ 1) $f(x)=x^4-8x^3+22x^2-24x+5$;
2) $f(x)=x^4-4x^3+6x^2-4x+9$.

4.$\boxed{5}$ 1) $f(x)=x^3e^{-4x}$; 2) $f(x)=(x+1)^5e^{-x}$.

5.$\boxed{6}$ 1) $f(x)=\sqrt[3]{(x-2)^2(x-4)^2}$; 2) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)(x+2)^2}$.

6.$\boxed{6}$ 1) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$; 2) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

§ 3. Наибольшее и наименьшее значения функции

Примеры с решениями

1. Найти наибольшее M и наименьшее m значения функции $f(x)$ на множестве E, если:

1) $f(x)=2x^3+3x^2-12x+5$, $E=[-3;\ 4]$;

2) $f(x)=(x+2)^2(x-3)^3$, $E=[-3;\ 1]$;

3) $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$, $E=\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$;

4) $f(x)=|x^2+2x-3|+\frac{3}{2}\ln x$, $E=\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$.

Решение. 1) $f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$. Уравнение $6(x+2)(x-1)=0$ имеет корни $x_1=-2$ и $x_2=1$. Найдем значения функции $f(x)$ в точках -2, 1 и в концах отрезка $[-3;\ 4]$. Тогда M — наибольшее из чисел $f(-3)$, $f(-2)$, $f(1)$ и $f(4)$, а m — наименьшее из этих чисел. Так как $f(-3)=14$, $f(-2)=25$, $f(1)=-2$, $f(4)=133$, то $M=133$, $m=-2$.

2) $f'(x)=2(x+2)(x-3)^3+3(x+2)^2(x-3)^2=5x(x+2)(x-3)^2$. Уравнение $5x(x+2)(x-3)^2=0$ имеет корни $x_1=-2$, $x_2=0$ и $x_3=3$. Точка $x=3$ не является точкой экстремума функции $f(x)$, так как $f'(x)>0$ на интервалах $(0;\ 3)$ и $(3;\ 4)$, а $x=-2$ и $x=0$ — точки экстремума (при переходе через эти точки $f'(x)$ меняет знак). Так как $f(-3)=-216$, $f(-2)=0$, $f(0)=-108$, $f(1)=-72$, то $M=0$, $m=-216$.

3) $f'(x)=\cos x+\cos 2x=2\cos^2 x+\cos x-1=(2\cos x-1)(\cos x+1)$. Уравнение $(2\cos x-1)(\cos x+1)=0$ равносильно совокупности двух уравнений $\cos x=\frac{1}{2}$ и $\cos x=-1$. На отрезке $\left[0;\ \frac{3\pi}{2}\right]$ каждое из этих уравнений имеет единственный корень: $x_1=\frac{\pi}{3}$ — корень первого уравнения и $x_2=\pi$ — корень второго уравнения. Так как $f(0)=f(\pi)=0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=$ $=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1$, то $M=\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $m=-1$.

4) Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $\left[\frac{1}{2};\ 2\right]$ и дифференцируема во всех точках этого отрезка, за исклю-

чением точки $x=1$. Пусть $x \in \left[\frac{1}{2};\ 1\right)$, тогда $f(x)=$ $=(x+3)(1-x)+\frac{3}{2}\ln x=-x^2-2x+3+\frac{3}{2}\ln x$, $f'(x)=-2x-2+$ $+\frac{3}{2x}=-\frac{4x^2+4x-3}{2x}$. Уравнение $f'(x)=0$ имеет на промежутке $\left[\frac{1}{2};\ 1\right)$ единственный корень $x_1=\frac{1}{2}$.

Если $x \in (1;\ 2]$, то $f(x)=x^2+2x-3+\frac{3}{2}\ln x$, $f'(x)=\frac{4x^2+4x+3}{2x}$ и уравнение $f'(x)=0$ не имеет действительных корней. Найдем значения функции $f(x)$ в точках $\frac{1}{2}$, 2, 1. Так как $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\ln 2$, $f(2)=5+\frac{3}{2}\ln 2$, $f(1)=0$ и $f(1)<f\left(\frac{1}{2}\right)$, то $M=5+\frac{3}{2}\ln 2$, $m=0$.

2. Среди всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, найти треугольник с наибольшим периметром.

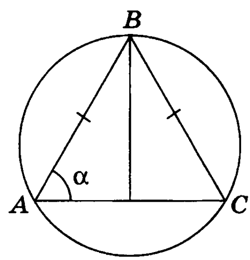


Рис. 9

Решение. Пусть треугольник ABC вписан в круг радиуса R, причем $AB=BC$ (рис. 9). Обозначим $\angle BAC=\alpha$. По теореме синусов $AB=BC=2R\sin\alpha$, $AC=2R\sin(\pi-2\alpha)=2R\sin 2\alpha$.

Пусть $P(\alpha)$ — периметр треугольника ABC, тогда $P(\alpha)=2R(2\sin\alpha+\sin 2\alpha)$, где $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Отсюда находим

$$P'(\alpha)=4R(\cos 2\alpha+\cos\alpha)=4R(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1)=$$
$$=4R(2\cos\alpha-1)(\cos\alpha+1).$$

Уравнение $P'(\alpha)=0$ имеет на интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ единственный корень $\alpha=\frac{\pi}{3}$, причем $P'(\alpha)>0$ при $\alpha\in\left(0;\ \frac{\pi}{3}\right)$ и $P'(\alpha)<0$ при $\alpha\in\left(\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, число $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ является наибольшим значением функции $P(\alpha)$ на интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Но если $\angle BAC=\alpha=\frac{\pi}{3}$, то $\angle BCA=\frac{\pi}{3}$, и, значит, $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$, т. е. $\triangle ABC$ — равносторонний. Итак, среди всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольший периметр имеет равносторонний треугольник.

3. Определить размеры закрытой коробки объема V с квадратным основанием, на изготовление которой расходуется наименьшее количество материала.

Решение. Пусть x — сторона основания коробки, h — высота коробки, S — площадь ее полной поверхности. Тогда $S=2x^2+4xh$, $V=x^2h$, откуда $S(x)=2x^2+\frac{4V}{x}$, и, следовательно, $S'(x)=4\left(x-\frac{V}{x^2}\right)$.

Уравнение $S'(x)=0$ при $x>0$ имеет единственный корень $x_0=\sqrt[3]{V}$, причем при переходе через точку x_0 функция $S'(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, x_0 — точка минимума функции $S(x)$, а число $S(x_0)$ является наименьшим значением этой функции при $x>0$. Из формулы $V=x^2h$ следует, что если $x=\sqrt[3]{V}$, то $h=\sqrt[3]{V}$. Таким образом, высота коробки должна быть равна стороне основания, т. е. коробка должна быть кубом с ребром $\sqrt[3]{V}$.

4. Найти радиус основания цилиндра наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

Решение. Пусть r и h соответственно радиус основания и высота цилиндра, вписанного в шар радиуса R, V — объем цилиндра. Тогда $V=\pi r^2h$, $\left(\frac{h}{2}\right)^2+r^2=R^2$, откуда $V=2\pi r^2\sqrt{R^2-r^2}$, где $0<r<R$.

Обозначим $t=r^2$, тогда $V=2\pi t\sqrt{R^2-t}$, где $0<t<R^2$, откуда $V^2=4\pi^2t^2(R^2-t)$. Так как $V\geqslant 0$, то функция $V(t)$ имеет на интервале $(0;\ R^2)$ те же точки экстремума, что и функция

$$f(t)=\frac{V^2(t)}{4\pi^2},\ \text{т. е.}\ f(t)=t^2(R^2-t).$$

Найдем критические точки функции $f(t)$, решая уравнение $f'(t)=0$, т. е. $2tR^2-3t^2=0$. Это уравнение имеет на интервале $(0;\ R^2)$ единственный корень $t_0=\frac{2R^2}{3}$, причем точка t_0 является точкой максимума функции, а число $f(t_0)$ — наибольшим значением функции $f(t)$ на интервале $(0;\ R^2)$. Следовательно, при $r=\sqrt{t_0}=R\sqrt{\frac{2}{3}}$ функция $V(t)$ принимает наибольшее значение, т. е. радиус основания цилиндра, вписанного в шар радиуса R и имеющего наибольший объем, равен $R\sqrt{\frac{2}{3}}$.

5. Рассматриваются всевозможные параболы, симметричные относительно прямой $x=1$, касающиеся прямой $y=-2x-3$ и такие, что их ветви направлены вниз. Найти уравнение той из этих парабол, которая пересекает ось Oy в точке с наибольшей ординатой.

Решение. Абсцисса вершины каждой из рассматриваемых парабол равна 1, а уравнение параболы запишем в виде

$$y = a(x-1)^2 + b. \qquad (1)$$

Так как парабола (1) касается прямой $y=-2x-3$, то она имеет с этой прямой единственную общую точку, и поэтому уравнение

$$a(x-1)^2 + b = -2x - 3 \qquad (2)$$

имеет единственный корень. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда дискриминант D квадратного уравнения (2) равен нулю, т. е. $(a-1)^2 - a(a+b+3) = 0$, откуда $a = \frac{1}{5+b}$. Заметим, что $b \neq -5$, так как ордината b вершины параболы должна быть меньше ординаты точки пересечения прямых $y=-2x-3$ и $x=1$, равной -5 (рис. 10).

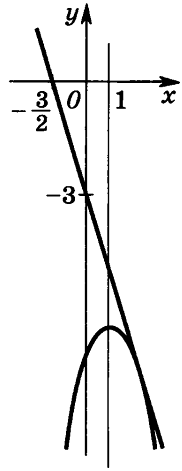


Рис. 10

Так как ордината точки пересечения параболы и оси Oy равна $a+b = b + \frac{1}{5+b}$, то задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $f(b) = b + \frac{1}{5+b}$ при $b < -5$. Критические точки функции $f(b)$ определяются из уравнения $f'(b) = 0$, т. е. $1 - \frac{1}{(5+b)^2} = 0$, которое при $b < -5$ имеет единственный корень $b = -6$, причем $f'(b) > 0$ при $b < -6$ и $f'(b) < 0$ при $-6 < b < -5$. Следовательно, при $b = -6$ функция $f(b)$ принимает наибольшее значение. Поэтому $a = \frac{1}{5+b} = -1$, и искомое уравнение параболы имеет вид $y = -(x-1)^2 - 6$.

Задания для самостоятельной работы

Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на множестве E (1—3).

1. $\boxed{5}$ 1) $f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 7$, $E = [0;\ 2]$;
2) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 8$, $E = [-2;\ 1]$.

2. $\boxed{5}$ 1) $f(x) = 2\sin 2x + \cos 4x$, $E = \left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]$;
2) $f(x) = \sin 2x + 2\cos x$, $E = [0;\ \pi]$.

3. $\boxed{6}$ 1) $f(x) = (x-3)e^{|x+1|}$, $E = [-2;\ 4]$;
2) $f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$, $E = [-1;\ 4]$.

4. $\boxed{5}$ В какой точке нужно провести касательную к графику функции $y=(x-2)^2$, $0\leqslant x\leqslant 2$, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, была наименьшей?

5. $\boxed{6}$ Около цилиндра, радиус основания которого равен R, описан конус наименьшего объема. Плоскости оснований цилиндра и конуса совпадают. Найти радиус основания этого конуса.

6. $\boxed{6}$ Найти высоту и радиус основания цилиндра, имеющего наибольшую площадь боковой поверхности среди всех цилиндров, вписанных в конус, если радиус основания конуса равен R, а его высота равна H.

7. $\boxed{6}$ Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

8. $\boxed{6}$ В конус, радиус основания которого равен R, а высота равна H, вписан цилиндр наибольшего объема. Найти радиус основания и высоту этого цилиндра.

9. $\boxed{6}$ Найти наименьшую площадь боковой поверхности конуса, имеющего объем V.

10. $\boxed{6}$ Найти наибольший объем конуса с образующей l.

§ 4. Производная второго порядка, выпуклость и точки перегиба

Примеры с решениями

1. Найти $f''(x)$, если:

1) $f(x)=\cos^2 2x$; 2) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$;

3) $f(x)=x\ln(x^2+1)$; 4) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$.

Решение. 1) Так как $f(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x$, то $f'(x)=-2\sin 4x$, $f''(x)=-8\cos 4x$.

2) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$; $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x}}+\dfrac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}=\dfrac{2x+1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$, $x\neq 0$.

3) $f'(x)=\ln(x^2+1)+\dfrac{2x^2}{x^2+1}=\ln(x^2+1)+2-\dfrac{2}{x^2+1}$,

$$f''(x)=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2+1)^2}.$$

4) $f'(x)=\dfrac{3x^2}{(x-2)^2}-\dfrac{2x^3}{(x-2)^3}=\dfrac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$, $f''(x)=\dfrac{3x^2-12x}{(x-2)^3}-$

$$-\frac{3x^2(x-6)}{(x-2)^4}=\frac{3x((x-4)(x-2)-x(x-6))}{(x-2)^4}=\frac{24x}{(x-2)^4},\ x\neq 2.$$

2. Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз функции:

1) $f(x)=x^4-6x^2+5x-3$; 2) $f(x)=x^3e^{-4x}$;

3) $f(x)=x+\sin x$; 4) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.

Решение. 1) $f'(x)=4x^3-12x+5$, $f''(x)=12(x^2-1)$. Так как $f''(x)>0$ на промежутках $x<-1$ и $x>1$, а $f''(x)<0$ при $-1<x<1$, то функция $f(x)$ выпукла вниз при $x<-1$ и при $x>1$, а при $-1<x<1$ эта функция выпукла вверх.

2) $f'(x)=3x^2e^{-4x}-4x^3e^{-4x}=(3x^2-4x^3)e^{-4x}$,
$f''(x)=(6x-12x^2)e^{-4x}-4(3x^2-4x^3)e^{-4x}=2x(8x^2-12x+3)e^{-4x}$.
Уравнение $8x^2-12x+3=0$ имеет корни $x_1=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4}$, $x_2=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$, а $f''(x)<0$ при $x<0$ и при $x_1<x<x_2$, $f''(x)>0$ при $0<x<x_1$ и при $x>x_2$. Отсюда следует, что функция $f(x)$ выпукла вверх при $x<0$ и при $x_1<x<x_2$, а при $0<x<x_1$ и при $x>x_2$ эта функция выпукла вниз.

3) $f'(x)=1+\cos x$, $f''(x)=-\sin x$.

На интервалах $(2\pi n;\ 2\pi n+\pi)$, $n\in\mathbf{Z}$, где $f''(x)<0$, функция $f(x)$ выпукла вверх. На интервалах $(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n)$, $n\in\mathbf{Z}$, функция $f(x)$ выпукла вниз.

4) $|x|\neq 2$, $f'(x)=\dfrac{3x^2(x^2-4)-x^3\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\dfrac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}$,

$$f''(x)=\frac{(4x^3-24x)(x^2-4)^2-(x^4-12x^2)\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4}=\frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}.$$

Так как $f''(x)<0$ при $x<-2$ и при $0<x<2$, а $f''(x)>0$ при $-2<x<0$ и при $x>2$, то функция $f(x)$ выпукла вверх на промежутках $(-\infty;\ -2)$ и $(0;\ 2)$ и выпукла вниз на промежутках $(-2;\ 0)$ и $(2;\ +\infty)$.

3. Найти точки перегиба функции:

1) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$; 2) $f(x)=x^2\ln x$;

3) $f(x)=x^3e^{-4x}$; 4) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$.

Решение. 1) Так как $f''(x)=\dfrac{2x+1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$, $x\neq 0$ (пример **1** (2)), то $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку $x_0=-\dfrac{1}{2}$, которая является точкой перегиба функции $f(x)$.

2) $f'(x)=2x\ln x+x$, $f''(x)=2\ln x+3$. Функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку $x_0=e^{-\frac{3}{2}}$ — корень уравнения $2\ln x+3=0$. Поэтому $e^{-\frac{3}{2}}$ — точка перегиба функции $f(x)$.

3) Так как $f''(x)=16x(x-x_1)(x-x_2)e^{-4x}$, где $x_1=\frac{3-\sqrt{3}}{4}$, $x_2=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ (пример 2 (2)), то функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точки 0, $\frac{3-\sqrt{3}}{4}$, $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$, которые являются точками перегиба функции $f(x)$.

4) $f''(x)=\frac{24x}{(x^2-2)^2}$, $x\neq 2$ (пример 1 (4)). Отсюда следует, что функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку $x=0$, которая является точкой перегиба функции $f(x)$.

Задания для самостоятельной работы

Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз функции $f(x)$ (1—4).

1.$\boxed{4}$ 1) $f(x)=x^4-24x^2+3x+5$;
2) $f(x)=x^4-54x^2+4x+3$.

2.$\boxed{5}$ 1) $f(x)=3x^5-40x^3+7x+4$;
2) $f(x)=x^5-30x^3+5x-4$.

3.$\boxed{6}$ 1) $f(x)=e^{-x^2}$; 2) $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{4}}$.

4.$\boxed{6}$ 1) $f(x)=\frac{x^4}{8-x^3}$; 2) $f(x)=\frac{x^4}{(x-2)^3}$.

Найти точки перегиба функции $f(x)$ (5—8).

5.$\boxed{4}$ 1) $f(x)=x^4-6x^2+5x+1$;
2) $f(x)=x^4-12x^3+48x^2+3x$.

6.$\boxed{5}$ 1) $f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2}$; 2) $f(x)=\frac{(1-x)^3}{x^2}$.

7.$\boxed{5}$ 1) $f(x)=\frac{(x-2)^3}{(x-6)^2}$; 2) $f(x)=\frac{(3-x)^3}{(x+1)^2}$.

8.$\boxed{6}$ 1) $f(x)=\frac{x^3+10x}{x^2+1}$; 2) $f(x)=\frac{x^5+3x}{x^4+1}$.

§ 5. Построение графиков функций

Примеры с решениями

1. Найти асимптоты графика функции $y=f(x)$, если:

1) $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$; 2) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$;

3) $f(x)=\frac{x^3}{4(x-2)^2}$; 4) $f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

Решение. 1) Так как $x^2-x-2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$, то $f(x)=$ $=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}$. Покажем, что $f(x)-\left|x-\frac{1}{2}\right|\to 0$ при $x\to\infty$. Воспользуемся равенством

$$f(x)-\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{\left(\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}-\left|x-\frac{1}{2}\right|\right)\left(\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}+\left|x-\frac{1}{2}\right|\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}+\left|x-\frac{1}{2}\right|}=$$

$$=\frac{-\frac{5}{4}}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}+\left|x-\frac{1}{2}\right|}.$$

Если $x\to\infty$, то знаменатель полученной дроби стремится к бесконечности, а дробь стремится к нулю. Следовательно, $f(x)-\left|x-\frac{1}{2}\right|\to 0$ при $x\to\infty$.

Если $x\to+\infty$, то $\left|x-\frac{1}{2}\right|=x-\frac{1}{2}$ и $f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\to 0$ при $x\to+\infty$. Это означает, что прямая $y=x-\frac{1}{2}$ — асимптота графика функции $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$ при $x\to+\infty$.

Если $x\to-\infty$, то $\left|x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}-x$. В этом случае прямая $y=\frac{1}{2}-x$ является асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to-\infty$. Отметим, что график функции $f(x)$ лежит ниже асимптоты.

2) $\frac{x^3}{x^2-4}=\frac{x^3-4x+4x}{x^2-4}=x+\frac{4x}{x^2-4}$, откуда $f(x)=x+\frac{4x}{x^2-4}$. Так как $\frac{4x}{x^2-4}=\frac{\frac{4}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}$, где $\frac{4}{x}\to 0$, $1-\frac{4}{x^2}\to 1$ при $x\to\infty$, то прямая $y=x$ является асимптотой графика функции $y=\frac{x^3}{x^2-4}$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

3) Прямая $y=kx+b$ является асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$ тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$, $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx)=b$.

Так как $\frac{f(x)}{x}=\frac{x^3}{4x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}=\frac{1}{4\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}$, а $\left(1-\frac{2}{x}\right)^2\to 1$ при $x\to\infty$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{4}$, т. е. $k=\frac{1}{4}$. Преобразуем разность

$$f(x)-kx=\frac{x^3}{4(x-2)^2}-\frac{x}{4}=\frac{1}{4}\cdot\frac{x^3-x(x-2)^2}{(x-2)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{4x^2+4}{(x-2)^2}=\frac{1+\frac{1}{x^2}}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^2}.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-\frac{x}{4}\right)=1$, т. е. $b=1$. Итак, прямая $y=\frac{x}{4}+1$ — асимптота графика функции $y=\frac{x^3}{4(x-2)^2}$ при $x\to\infty$. Заметим, что асимптоту можно найти другим способом, представив x^3 в виде многочлена по степеням $x-2$. Тогда $x^3=((x-2)+2)^3=(x-2)^3+6(x-2)^2+12(x-2)+8$, откуда

$$\frac{x^3}{(x-2)^2}=x-2+6+\frac{12x-16}{(x-2)^2}=x+4+\frac{4(3x-4)}{(x-2)^2},$$

$$f(x)=\frac{x}{4}+1+\frac{3x-4}{(x-2)^2}.$$

Отсюда следует, что прямая $y=\frac{x}{4}+1$ является асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$, причем график лежит выше асимптоты при $x>\frac{4}{3}$ и ниже асимптоты при $x<\frac{4}{3}$.

4) $f(x)=\frac{((x+1)-2)^3}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)^3-6(x+1)^2+12(x+1)-8}{(x+1)^2}=$ $=x+1-6+\frac{12x+4}{(x+1)^2}=x-5+\frac{4(3x+1)}{(x+1)^2}$. Асимптотой графика функции $y=\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ является прямая $y=x-5$.

2. Построить график функции $y=f(x)$, если:

1) $f(x)=\frac{x^2-2x+9}{x-2}$; 2) $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$;

3) $f(x)=\frac{(x+1)^3}{x^2}$; 4) $f(x)=\frac{x^3}{4(x-2)^2}$.

Решение. 1) График не пересекает ось Ox, так как $x^2-2x+9=(x-1)^2+8\geqslant 8$ при всех $x\in\boldsymbol{R}$. График пересекает ось Oy в точке $\left(0;\ -\frac{9}{2}\right)$.

Если $x<2$, то $f(x)<0$, а если $x>2$, то $f(x)>0$, т. е. график лежит ниже оси Ox при $x<2$ и выше оси Ox при $x>2$. Прямая $x=2$ является вертикальной асимптотой графика.

Так как $\frac{x^2-2x+9}{x-2}=\frac{(x-2)^2+2(x-2)+9}{x-2}=x-2+2+\frac{9}{x-2}=$ $=x+\frac{9}{x-2}$, то прямая $y=x$ — асимптота графика функции $f(x)=x+\frac{9}{x-2}$ при $x\to\infty$, причем график лежит выше асимптоты при $x>2$ и ниже асимптоты при $x<2$.

Найдем $f'(x)$ и $f''(x)$, если $f(x)=x+\frac{9}{x-2}$. Имеем

$$f'(x)=1-\frac{9}{(x-2)^2}=$$
$$=\frac{x^2-4x-5}{(x-2)^2}=\frac{(x-5)(x+1)}{(x-2)^2},$$
$$f''(x)=\frac{18}{(x-2)^3}.$$

Так как $f'(5)=0$ и $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $x_1=5$, то x_1 — точка минимума функции и $f(5)=8$. Точка $x_2=-1$ — точка максимума функции, и $f(-1)=-\frac{8}{3}$.

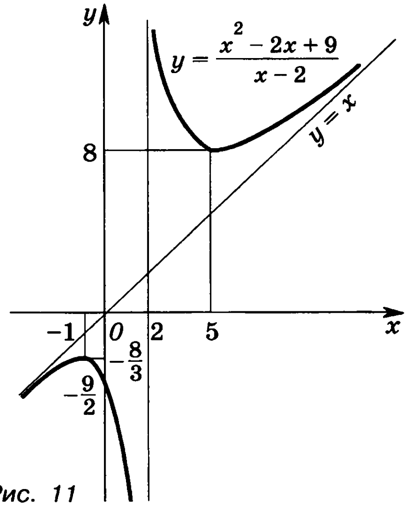


Рис. 11

Если $x<2$, то $f''(x)<0$, а если $x>2$, то $f''(x)>0$.

Поэтому функция $f(x)$ выпукла вверх при $x<2$ и выпукла вниз при $x>2$. График функции $y=\frac{x^2-2x+9}{x-2}$ изображен на рисунке 11.

2) $\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{(x+1)(x-2)}=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}$; функция $f(x)=$ $=\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}}$ определена на множестве E, состоящем из промежутков $(-\infty;\ -1]$ и $[2;\ +\infty)$, и неотрицательна; $f(-1)=f(2)=0$.

Так как парабола $y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$ симметрична относительно прямой $x=\frac{1}{2}$, то график функции $f(x)$ симметричен относительно этой прямой.

Прямая $y=x-\frac{1}{2}$ является асимптотой графика функции $y=f(x)$ при $x\to+\infty$, а прямая $y=\frac{1}{2}-x$ — асимптотой этого графика при $x\to-\infty$ (пример 1 (1)). График функции $y=\sqrt{x^2-x-2}$ изображен на рисунке 12.

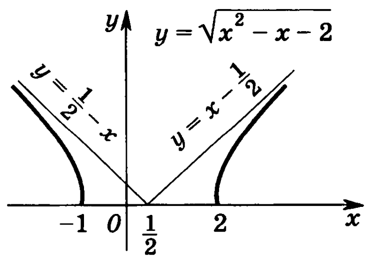


Рис. 12

3) Функция $f(x)$ определена при $x \neq 0$, а прямая $x=0$ — вертикальная асимптота графика этой функции; $f(x)>0$ при $x>-1$, $x \neq 0$ и $f(x)<0$ при $x<-1$, $f(-1)=0$, т. е. график пересекает ось Ox в точке $(-1;\ 0)$.

Так как $\frac{(x+1)^3}{x^2}=\frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2}=x+3+\frac{3x+1}{x^2}$, т. е. $f(x)=$ $=x+3+\frac{3x+1}{x^2}$, то прямая $y=x+3$ — асимптота графика функции $y=f(x)$ при $x \to \infty$, причем график лежит выше асимптоты при $x>-\frac{1}{3}$ и ниже асимптоты при $x<-\frac{1}{3}$; при $x=-\frac{1}{3}$ график пересекает асимптоту.

$$f'(x)=\frac{3(x+1)^2x^2-(x+1)^3 2x}{x^4}=\frac{x(x+1)^2(3x-2x-2)}{x^4}=\frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3},$$

$$f''(x)=\frac{x^3(2(x+1)(x-2)+(x+1)^2)-(x+1)^2(x-2)3x^2}{x^6}=\frac{6(x+1)}{x^4},\ x \neq 0.$$

Так как $f'(2)=0$ и $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $x=2$, то $x=2$ — точка минимума функции $f(x)$, причем $f(2)=\frac{27}{4}$.

Функция $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку $x=-1$. Поэтому точка $x=-1$ — точка перегиба функции $f(x)$ и $f'(-1)=0$.

Если $x<-1$, то $f''(x)<0$, а если $x>-1$, $x \neq 0$, то $f''(x)>0$. Следовательно, функция $f(x)$ выпукла вверх при $x<-1$ и выпукла вниз при $x>-1$, $x \neq 0$. График функции $y=\frac{(x+1)^3}{x^2}$ представлен на рисунке 13.

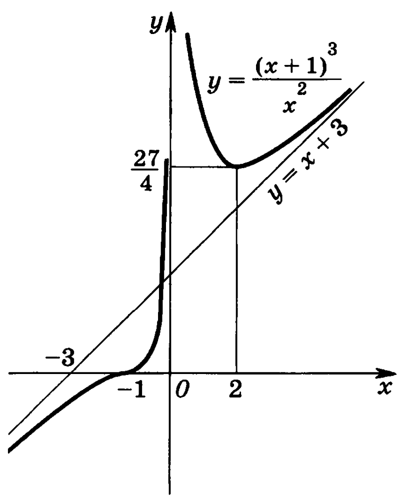


Рис. 13

4) Функция $f(x)$ определена при $x \neq 2$, а прямая $x=2$ — вертикальная асимптота графика функции; $f(x)>0$ при $x>0$, $f(x)<0$ при $x<0$, $f(0)=0$, т. е. график проходит через точку $(0;\ 0)$.

Прямая $y=\frac{x}{4}+1$ — наклонная асимптота графика функции $f(x)$ при $x \to \infty$ (пример 1 (3)), причем при $x>\frac{4}{3}$ график лежит выше асимптоты, а при $x<\frac{4}{3}$ — ниже асимптоты; в точке $\left(\frac{4}{3};\ \frac{4}{3}\right)$ асимптота пересекает график функции. Имеем

$$f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{3x^2(x-2)^2-2x^3(x-2)}{(x-2)^4}=$$
$$=\frac{x^2(x-6)}{4(x-2)^3},$$

откуда следует, что функция $f(x)$ возрастает при $x<2$ и при $x>6$, а при $x\in(2;\ 6)$ убывает. При переходе через точку $x=6$ производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, поэтому $x=6$ — точка минимума функции $f(x)$, $f(6)=\frac{27}{8}$.

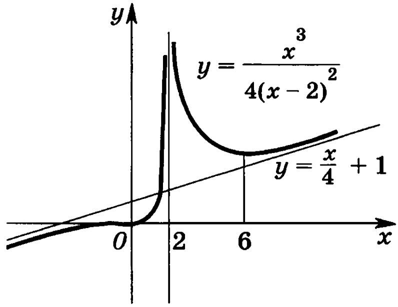


Рис. 14

$$f''(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{(3x^2-12x)(x-2)^3-(x^3-6x^2)3(x-2)^2}{(x-2)^6}=\frac{6x}{(x-2)^4}.$$

Так как $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку $x=0$, то $x=0$ — точка перегиба функции. График функции $f(x)$ изображен на рисунке 14.

Задания для самостоятельной работы

Найти асимптоты графика функции $y=f(x)$ (1—3).

1. $\boxed{4}$ 1) $f(x)=\sqrt{|x^2+x-2|}$;
2) $f(x)=\sqrt{|x^2-2x-3|}$.

2. $\boxed{5}$ 1) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-x+1}$;
2) $f(x)=\frac{x^3-x^2+1}{x^2-1}$.

3. $\boxed{6}$ 1) $f(x)=\frac{(x-2)^3}{3x^2-5}$; 2) $f(x)=\frac{x^5}{1-x^4}$.

Построить график функции $y=f(x)$ (4—7).

4. $\boxed{6}$ 1) $y=\frac{(1-x)^3}{x^2}$; 2) $y=-\frac{(x+1)^3}{x^2}$.

5. $\boxed{6}$ 1) $y=\frac{x^2+x-1}{(x-1)^2}$; 2) $y=\frac{20x^2}{(x-1)^3}$.

6. $\boxed{7}$ 1) $y=\frac{x^3}{x^2-1}$; 2) $y=\frac{3x^4}{x^3-1}$.

7. $\boxed{7}$ 1) $y=\frac{(x-2)^3}{(x-6)^2}$; 2) $y=\frac{(x-1)^3}{(x-2)^2}$.

Контрольная работа

1. Найти интервалы возрастания и убывания функции

$$f(x)=2x^3-3x^2-6x+5 \quad [f(x)=2x^3+3x^2-36x+7].$$

2. Найти точки экстремума функции $f(x)$, а также наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке $[-2;\ 2]$, если

$$f(x)=x^4-2x^2+3 \quad [f(x)=x^4-8x^2+4].$$

3. Найти интервалы выпуклости вверх и выпуклости вниз, а также точки перегиба функции

$$f(x)=x^2e^{-x} \quad [f(x)=x^2e^x].$$

4. Построить график функции

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-3} \quad \left[f(x)=\frac{x^2-x-2}{x+3}\right].$$

---

5. Построить график функции

$$f(x)=\frac{(x-1)^3}{(x-5)^2} \quad \left[f(x)=\frac{(x-2)^3}{(x-3)^2}\right].$$

Глава IV Первообразная и интеграл

§ 1. Первообразная

Если для всех $x \in (a;\ b)$ справедливо равенство

$$F'(x) = f(x),$$

то функцию $F(x)$ называют первообразной для функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$.

В главе II были получены формулы производных степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических функций:

$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1},\ x > 0;$

$(e^x)' = e^x;\ (a^x)' = a^x \ln a,\ a > 0,\ a \neq 1;$

$(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0;$

$(\sin x)' = \cos x;$

$(\cos x)' = -\sin x;$

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x},\ x \neq \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$

$(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1 + x^2},\ x \in \boldsymbol{R};$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}},\ -1 < x < 1.$

Используя эти формулы, получаем следующую таблицу первообразных:

Функция	Первообразные
$x^p,\ p \neq -1$	$\dfrac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$\dfrac{1}{x},\ x \neq 0$	$\ln|x| + C$
e^x	$e^x + C$
$a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$

Функция	Первообразные
$\cos x$	$\sin x + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$	$-\operatorname{ctg} x + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$	$\arcsin x + C$

Примеры с решениями

1. Показать, что функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на всей числовой прямой, если:

1) $F(x) = \frac{1}{3} e^{3x}$, $f(x) = e^{3x}$;

2) $F(x) = \frac{1}{4\ln 3} \cdot 3^{4x}$, $f(x) = 3^{4x}$;

3) $F(x) = \sin^2 x$, $f(x) = \sin 2x$;

4) $F(x) = \sqrt{1+x^2}$, $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

5) $F(x) = -\frac{1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}$, $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$;

6) $F(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

7) $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$, $f(x) = \frac{1}{4+x^2}$;

8) $F(x) = \arcsin\frac{x}{3}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

Решение. 1) Так как $F'(x) = \frac{1}{3} e^{3x} \cdot 3 = e^{3x}$, то функция $\frac{1}{3} e^{3x}$ — первообразная для функции e^{3x}.

2) $F'(x) = \frac{1}{4\ln 3} \cdot 3^{4x} \cdot \ln 3 \cdot 4 = 3^{4x}$.

3) $F'(x) = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$.

4) $F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

5) $F'(x)=\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{3}{2}(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=x\sqrt{4-x^2}$.

6) $F'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right)=\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}=$
$=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

7) $F'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)}=\frac{1}{4+x^2}$.

8) $F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}=\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

2. Для функции $f(x)$ найти такую первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку M_0, если:

1) $f(x)=-\frac{1}{x^3}$, $M_0(-1;\ 1)$;

2) $f(x)=e^{2x}$, $M_0(\ln 2;\ 5)$;

3) $f(x)=\sin 2x$, $M_0\left(\frac{\pi}{2};\ -2\right)$;

4) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $M_0(\sqrt{3};\ 3)$.

Решение. 1) Одной из первообразных для функции $-\frac{1}{x^3}$ является функция $\frac{1}{2x^2}$, так как

$$\left(\frac{1}{2x^2}\right)'=\frac{1}{2}(-2)x^{-3}=-\frac{1}{x^3}.$$

Все первообразные функции $f(x)$ определяются формулой

$$F(x)=\frac{1}{2x^2}+C.$$

Так как $F(-1)=1$, то $\frac{1}{2}+C=1$, $C=\frac{1}{2}$.

$F(x)=\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}$ — искомая первообразная.

2) Так как $\frac{1}{2}e^{2x}$ — одна из первообразных функций e^{2x}, то $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+C$, $F(\ln 2)=\frac{1}{2}e^{2\ln 2}+C=5$, т. е. $\frac{1}{2}e^{\ln 4}+C=5$, $2+C=5$, $C=3$.

$F(x)=\frac{1}{2}e^{2x}+3$ — искомая первообразная.

3) Одной из первообразных для функции $\sin 2x$ является функция $\sin^2 x$ (пример 1 (3)). Поэтому $F(x)=\sin^2 x+C$, где $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+C=-2$, $C=-3$.

$F(x)=\sin^2 x-3$ — искомая первообразная.

4) Так как $\sqrt{1+x^2}$ — первообразная для функции $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (пример 1 (4)), то $F(x)=\sqrt{1+x^2}+C$, $F(\sqrt{3})=2+C=3$, $C=1$.

$F(x)=\sqrt{1+x^2}+1$ — искомая первообразная.

Задания для самостоятельной работы

Показать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ (1—4).

1.$\boxed{4}$ 1) $F(x)=\ln|\sin x|$, $f(x)=\operatorname{ctg} x$;

2) $F(x)=-\ln|\cos x|$, $f(x)=\operatorname{tg} x$.

2.$\boxed{4}$ 1) $F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)$, $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$;

2) $F(x)=\frac{1}{4}\ln(x^4+3)$, $f(x)=\frac{x^3}{x^4+3}$.

3.$\boxed{5}$ 1) $F(x)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|$, $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$;

2) $F(x)=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|$, $f(x)=\frac{1}{x^2-9}$.

4.$\boxed{5}$ 1) $F(x)=\operatorname{arctg}(x-1)$, $f(x)=\frac{1}{x^2-2x+2}$;

2) $F(x)=\operatorname{arctg}(x-2)$, $f(x)=\frac{1}{x^2-4x+5}$.

Для функции $f(x)$ найти такую первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку M_0 (5—8).

5.$\boxed{4}$ 1) $f(x)=4^x$, $M_0\left(\log_4 3;\ \frac{3}{\ln 4}\right)$;

2) $f(x)=5^x$, $M_0\left(\log_5 4;\ \frac{2}{\ln 5}\right)$.

6.$\boxed{4}$ 1) $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$, $M_0\left(\frac{\pi}{4};\ -1\right)$;

2) $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$, $M_0\left(-\frac{\pi}{4};\ 2\right)$.

7.$\boxed{5}$ 1) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $M_0\left(\frac{1}{\sqrt{3}};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

2) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $M_0\left(\sqrt{3};\ \frac{\pi}{6}\right)$.

8.$\boxed{5}$ 1) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $M_0\left(\frac{1}{2};\ \pi\right)$;

2) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $M_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

§ 2. Правила нахождения первообразных

Из правил дифференцирования следует, что если $F(x)$ и $G(x)$ — первообразные соответственно для функций $f(x)$ и $g(x)$ на некотором промежутке, то:

1) $F(x)+G(x)$ — первообразная для функции $f(x)+g(x)$;

2) $aF(x)$ — первообразная для функции $af(x)$ (a — постоянная);

3) $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для функции $f(kx+b)$, где k, b — постоянные, $k\neq 0$.

Используя формулу для производной сложной функции, получим еще одно правило нахождения первообразных.

Пусть функция $t=\varphi(x)$ дифференцируема на промежутке Δ и пусть промежуток Δ_1 — множество значений функции φ на Δ.

Если функция $U(t)$ дифференцируема на Δ_1, причем

$$U'(t)=u(t), \qquad (1)$$

то на промежутке Δ дифференцируема сложная функция $\Phi(x)=U(\varphi(x))$ и

$$\Phi'(x)=(U(\varphi(x)))'=U'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)=u(\varphi(x))\cdot\varphi'(x), \qquad (2)$$

так как $U'(t)=u(t)$ (равенство (1)). Из равенств (1) и (2) следует, что если $U(t)$ — первообразная для функции $u(t)$, то $U(\varphi(x))$ — первообразная для функции $u(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$. Если функция $f(x)$ представляется в виде

$$f(x)=u(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) \qquad (3)$$

и если известна первообразная $U(t)$ для функции $u(t)$, то первообразной для функции $f(x)$ является функция $\Phi(x)=U(\varphi(x))$, получаемая заменой t на $\varphi(x)$ из функции $U(t)$.

Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$. Тогда $(F(kx+b))'=kf(kx+b)$, $k\neq 0$, откуда $\left(\frac{1}{k}F(kx+b)\right)'=f(kx+b)$, т. е. $\frac{1}{k}F(kx+b)$ — первообразная для функции $f(kx+b)$.

Примеры с решениями

1. Найти первообразные $F(x)$ для функции $f(x)$, если:

1) $f(x)=\frac{x+2}{x^2+3}$; 2) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$;

3) $f(x)=x^3\sqrt{x^2+3}$; 4) $f(x)=x\sqrt{R^2-x^2}$, $R>0$;

5) $f(x)=\frac{1}{x^2-x-2}$; 6) $f(x)=\sin^3 x$;

7) $f(x)=\frac{1}{x^2-x+1}$; 8) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$;

9) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$; 10) $f(x)=\frac{x+x^3}{1+x^4}$.

Решение. 1) Пусть $f_1(x)=\frac{x}{x^2+3}$. Чтобы воспользоваться формулой (2), в которой $\varphi(x)=x^2+3$, $\varphi'(x)=2x$, $u(t)=\frac{1}{2t}$, $U(t)=\frac{1}{2}\ln|t|$, запишем $f_1(x)$ в виде $f_1(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+3)'}{x^2+3}$. Тогда если $F_1(x)$ — одна из первообразных для функции $f_1(x)$, то $F_1(x)=\frac{1}{2}\ln|x^2+3|=\frac{1}{2}\ln(x^2+3)$.

Пусть $f_2(x)=\frac{2}{x^2+3}$, тогда

$$f_2(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x^2}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)'}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}.$$

Так как $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg} t$ — одна из первообразных для функции $\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{1+t^2}$, то $F_2(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}$ — одна из первообразных для функции $f_2(x)$. Поэтому

$$F(x)=F_1(x)+F_2(x)+C,$$

$$F(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+3)+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}+C.$$

2) Так как $f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+5)'}{\sqrt{x^2+5}}$, а $\sqrt{t}$ — одна из первообразных для функции $\frac{1}{2\sqrt{t}}$, то

$$F(x)=\sqrt{x^2+5}+C.$$

3) Преобразуем $f(x)$, учитывая, что $(x^2+3)'=2x$. Получим $f(x)=\left((x^2+3)\sqrt{x^2+3}-3\sqrt{x^2+3}\right)\frac{1}{2}(x^2+3)'=$
$=\frac{1}{2}\left((x^2+3)^{\frac{3}{2}}(x^2+3)'-3(x^2+3)^{\frac{1}{2}}(x^2+3)'\right).$

Пользуясь тем, что $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)'=x^{\alpha}$ при $\alpha\neq-1$, и применяя формулу (2) для $\varphi(x)=x^2+3$, получаем

$$F(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+3)^{\frac{5}{2}}}{\frac{3}{2}+1}-3\,\frac{(x^2+3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}+1}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{5}(x^2+3)^{\frac{5}{2}}-(x^2+3)^{\frac{3}{2}}+C.$$

4) $f(x)=-\frac{1}{2}(R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}(R^2-x^2)'$,

$$F(x)=-\frac{1}{2}\,\frac{(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3}(R^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

5) $f(x)=\frac{1}{(x-2)(x+1)}$. Представим $f(x)$ в виде суммы дробей $\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}$. Приведя эти дроби к общему знаменателю, получим $\frac{1}{(x-2)(x+1)}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$. Приравнивая числители дробей, приходим к равенству $1=A(x+1)+$ $+B(x-2)$. Полагая в этом равенстве $x=-1$, а затем $x=2$, находим $B=-\frac{1}{3}$, $A=\frac{1}{3}$. Следовательно, $f(x)=\frac{1}{3(x-2)}-$ $-\frac{1}{3(x+1)}$, откуда $F(x)=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$.

6) $f(x)=(\cos^2 x-1)(\cos x)'$, $F(x)=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$.

З а м е ч а н и е. $F(x)$ можно найти, используя равенство $\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$.

7) Найдем первообразную $\Phi(t)$ функции $\varphi(t)=\frac{1}{t^2+a^2}$, $a\neq 0$, записав $\varphi(t)$ в виде $\varphi(t)=\frac{1}{a}\cdot\frac{\left(\frac{t}{a}\right)'}{1+\left(\frac{t}{a}\right)^2}$.

Тогда $\Phi(t)=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a}$. Чтобы воспользоваться этой формулой, преобразуем $f(x)$. Так как

$$f(x)=\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2},$$

то первообразную для $f(x)$ можно получить из $\Phi(t)$, полагая $t=x-\frac{1}{2}$, $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$F(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{3}}+C,\quad F(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

8) Если $\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}$, где $a>0$, то $\varphi(t)=\frac{1}{a\sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}}=$ $=\frac{\left(\frac{t}{a}\right)'}{\sqrt{1-\left(\frac{t}{a}\right)^2}}$, откуда следует, что одной из первообразных для функции $\varphi(t)$ является функция $\Phi(t)=\arcsin\frac{t}{a}$. Так как $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$, то $F(x)=\arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+C$,

$$F(x)=\arcsin(2x-1)+C.$$

9) $f(x)=\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}-1$, $F(x)=\operatorname{tg}x-x+C$.

10) $f(x)=\frac{x}{1+x^4}+\frac{x^3}{1+x^4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2)'}{1+(x^2)^2}+\frac{1}{4}\,\frac{(1+x^4)'}{1+x^4}$,

$$F(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+\frac{1}{4}\ln(1+x^4)+C.$$

Задания для самостоятельной работы

Найти первообразные для функции $f(x)$ (1—8).

1. $\boxed{3}$ 1) $f(x)=\frac{x^2}{x^3+3}$; 2) $f(x)=\frac{x^3}{x^4+5}$.

2. $\boxed{5}$ 1) $f(x)=x\sqrt{x^2+4}$; 2) $f(x)=x^3\sqrt{x^4+4}$.

3. $\boxed{6}$ 1) $f(x)=\sin^2 x\cdot\cos^3 x$; 2) $f(x)=\cos^2 x\cdot\sin^3 x$.

4. $\boxed{6}$ 1) $f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}$; 2) $f(x)=\frac{1}{x^2-4x-5}$.

5. $\boxed{7}$ 1) $f(x)=\frac{1}{x^2-3x+4}$; 2) $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+5}$.

6. $\boxed{8}$ 1) $f(x)=\cos^4 x$; 2) $f(x)=\sin^4 x$.

7. $\boxed{8}$ 1) $f(x)=\frac{2x-3}{x^2-2x+5}$; 2) $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+2x+5}$.

8. $\boxed{9}$ 1) $f(x)=\frac{1}{4x^2+x^4}$; 2) $f(x)=\frac{1}{9x^2+x^4}$.

§ 3. Площадь криволинейной трапеции. Интеграл и его вычисление

Примеры с решениями

1. Вычислить интеграл:

1) $\int\limits_0^1 (\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})\,dx$;   2) $\int\limits_0^1 \frac{x^2\,dx}{1+x^6}$;

3) $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{dx}{x\ln x}$;   4) $\int\limits_3^4 \frac{x^2+3}{x-2}\,dx$;

5) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx$;   6) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx$;

7) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-2x-8}$;   8) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{4x^2+4x+5}$.

Решение. 1) Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}$. Тогда

$$F(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}.$$

По формуле Ньютона — Лейбница находим

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{3}{5}=\frac{19}{15}.$$

2) Так как $\frac{x^2}{1+x^6}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(x^3)'}{1+(x^3)^2}$, то в качестве первообразной $F(x)$ для функции $f(x)=\frac{x^2}{1+x^6}$ можно взять функцию $F(x)=\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3$. Тогда

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}.$$

3) Пусть $F(x)$ — первообразная для функции $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$. Тогда $f(x)=\frac{(\ln x)'}{\ln x}$, $F(x)=\ln|\ln x|$,

$$\int\limits_{e^2}^{e^3} f(x)\,dx=(\ln|\ln x|)\Big|_{e^2}^{e^3}=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}.$$

4) $\frac{x^2+3}{x-2}=\frac{(x^2-2x)+(2x-4)+7}{x-2}=x+2+\frac{7}{x-2}$. Одной из первообразных для функции $f(x)=\frac{x^2+3}{x-2}$ является функция $F(x)=\frac{x^2}{2}+2x+7\ln|x-2|$. Поэтому $\int\limits_3^4 f(x)\,dx=F(x)\Big|_3^4=\frac{11}{2}+$ $+7\ln 2$.

5) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)'$. Первообразной для функции $f(x)$ является функция $F(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}=$ $=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$. Поэтому $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}4^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{3}$.

6) $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=$ $=\frac{1}{2}\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}=\pi$.

7) $\frac{1}{x^2-2x-8}=\frac{1}{(x-4)(x+2)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+2}\right)$,

$$\int\limits_0^2 f(x)\,dx=\left(\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-4}{x+2}\right|\right)\Big|_0^2=\frac{1}{6}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln 2\right)=-\frac{1}{3}\ln 2.$$

8) $\frac{1}{(2x+1)^2+4}=\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)'}{4\left(1+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)}$, поэтому функция $F(x)=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right)$ является первообразной для функции $f(x)=\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)'}{4\left(1+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right)}$. Тогда

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx=\left(\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)\Big|_0^1=\frac{1}{4}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{4}{7}.$$

2. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной параболой $y=4x-x^2$ и осью Ox.

Решение. Искомую площадь S можно найти по формуле

$$S=\int\limits_0^4(4x-x^2)\,dx=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4=32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить интеграл (1—8).

1.$\boxed{5}$ 1) $\int\limits_0^2 \frac{2x-1}{2x+1}\,dx$; 2) $\int\limits_0^3 \frac{3x-2}{3x+1}\,dx$.

2.$\boxed{6}$ 1) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2+3x-4}$; 2) $\int\limits_2^3 \frac{dx}{x^2-3x-4}$.

3.$\boxed{6}$ 1) $\int\limits_0^1 \frac{x^4\,dx}{1+x^{10}}$; 2) $\int\limits_0^1 \frac{x^3\,dx}{1+x^8}$.

4.$\boxed{6}$ 1) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^3 x\,dx$.

5.$\boxed{7}$ 1) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2-x+1}$; 2) $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{dx}{x^2+x+1}$.

6.$\boxed{7}$ 1) $\int\limits_2^3 \frac{x^2+3}{x+1}\,dx$; 2) $\int\limits_0^2 \frac{x^2+2x}{x+1}\,dx$.

7.$\boxed{7}$ 1) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin^4 x+\cos^2 x)\,dx$; 2) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\cos^4 x+\sin^2 x)\,dx$.

8.$\boxed{8}$ 1) $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{x^2+3}\,dx$; 2) $\int\limits_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$.

§ 4. Вычисление площадей фигур с помощью интегралов

Примеры с решениями

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=6x-x^2-7$ и прямой $y=x-3$ (рис. 15).

Решение. Находим абсциссы точек пересечения параболы и прямой из уравнения $6x-x^2-7=x-3$. Это уравнение имеет корни $x_1=1$, $x_2=4$.

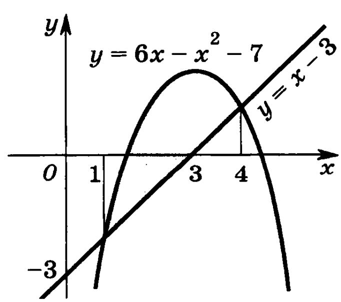


Рис. 15

Искомая площадь равна

$$S=\int_1^4((6x-x^2-7)-(x-3))\,dx=\int_1^4(5x-x^2-4)\,dx=$$

$$=\left(\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3-4x\right)\Big|_1^4=\frac{9}{2}.$$

2. Прямая $y=ax+b$ касается каждой из парабол $y=8-3x-2x^2$ и $y=2+9x-2x^2$. Найти значения a и b, координаты точек касания и площадь фигуры, ограниченной этими параболами и касающейся их прямой (рис. 16).

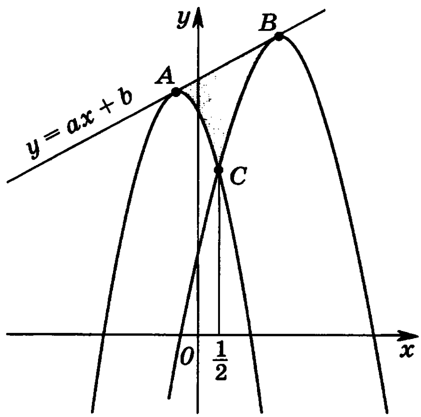


Рис. 16

Решение. Так как прямая $y=ax+b$ должна иметь единственную общую точку с каждой из парабол, то дискриминанты квадратных уравнений

$$8-3x-2x^2=ax+b, \qquad (1)$$
$$2+9x-2x^2=ax+b \qquad (2)$$

должны равняться нулю, т. е.

$$\begin{cases}(a+3)^2-8(b-8)=a^2+6a-8b+73=0,\\(a-9)^2-8(b-2)=a^2-18a-8b+97=0,\end{cases}$$

откуда $a=1$, $b=10$.

При $a=1$, $b=10$ уравнения (1) и (2) принимают вид $(x+1)^2=0$, $(x-2)^2=0$, откуда $x_1=-1$, $x_2=2$, где x_1 и x_2 — абсциссы точек A и B, в которых прямая $y=x+10$ касается парабол.

Из уравнения

$$8-3x-2x^2=2+9x-2x^2$$

находим абсциссу $x_0=\frac{1}{2}$ точки C, в которой пересекаются параболы.

Искомая площадь равна

$$S=\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}(x+10-(8-3x-2x^2))\,dx+\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}(x+10-(2+9x-2x^2))\,dx=$$

$$=2\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}}(x+1)^2\,dx+2\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}(x-2)^2\,dx=\frac{2}{3}\left((x+1)^3\Big|_{-1}^{\frac{1}{2}}+(x-2)^3\Big|_{\frac{1}{2}}^{2}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 2\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{2}.$$

Ответ. $a=1$, $b=10$; $A(-1;\ 9)$ и $B(2;\ 12)$; $S=\frac{9}{2}$.

3. Фигура M на плоскости $(x;\ y)$ ограничена графиками функций $y=4e^{-ax}$ и $y=12-15e^{ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y=-12x+4$. Найти a и площадь фигуры M.

Решение. Точка $A(0;\ 4)$ при любом a является общей точкой прямой $y=-12x+4$ и фигуры M. Поэтому эта прямая должна быть касательной к графику функции $y_1=4e^{-ax}$ в точке $x=0$. Так как $y_1'(0)=-4a$, то $-12=-4a$, откуда $a=3$.

Найдем общие точки кривых $y_1=4e^{-3x}$ и $y_2=12-5e^{3x}$, решив уравнение $\frac{4}{t}=12-5t$, где $t=e^{3x}$. Это уравнение имеет корни $t_1=\frac{2}{5}$, $t_2=2$. Если $t=\frac{2}{5}$, то $e^{3x}=\frac{2}{5}$, откуда $x_1=\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}$, а если $t=2$, то $e^{3x}=2$, откуда $x_2=\frac{1}{3}\ln 2$. Искомая площадь

$$S=\int\limits_{x_1}^{x_2}(y_2-y_1)\,dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}(12-5e^{3x}-4e^{-3x})\,dx=$$

$$=\left(12x-\frac{5}{3}e^{3x}+\frac{4}{3}e^{-3x}\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2}=4\ln 5-\frac{16}{3}.$$

Ответ. $4\ln 5-\frac{16}{3}$.

Задания для самостоятельной работы

1.$\boxed{6}$ 1) Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=4x-x^2-2$ и прямой $y=x-2$.

2) Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=8x-x^2-14$ и прямой $y=x-4$.

2. $\boxed{6}$ 1) Найти площадь фигуры, ограниченной осью ординат, параболой $y=2x-x^2$ и касательной к параболе, проведенной через точку (2; 0).

2) Найти площадь фигуры, ограниченной осью ординат, параболой $y=-2x-x^2$ и касательной к параболе, проведенной через точку (−2; 0).

3. $\boxed{7}$ 1) Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}-3$ и $y=-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x+3$.

2) Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}-3$ и $y=-x^2+\frac{3}{2}x+3$.

4. $\boxed{8}$ 1) Прямая $y=ax+b$ касается каждой из двух парабол $y=x^2+5x+7$ и $y=x^2-x-5$. Найти значения a и b, координаты точки касания и площадь фигуры, ограниченной этими параболами и касающейся их прямой.

2) Прямые $y=2x+2$ и $y=-x+\frac{7}{2}$ касаются параболы $y=ax^2+x+b$. Найти значения a и b, координаты точек касания и площадь фигуры, ограниченной параболой и данными прямыми.

5. $\boxed{8}$ 1) Фигура M на плоскости $(x;\ y)$ ограничена графиками функций $y=3e^{ax}$ и $y=7-2e^{-ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y=9x+3$. Найти a и площадь фигуры M.

2) Фигура M на плоскости $(x;\ y)$ ограничена графиками функций $y=9e^{-ax}$ и $y=15-4e^{ax}$ и имеет единственную общую точку с прямой $y=-18x+9$. Найти a и площадь фигуры M.

§ 5. Применение интегралов для решения физических задач

Примеры с решениями

Нахождение пути по заданной скорости

1. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=2t^2+3t+1$, где t — время в секундах, скорость измеряется в метрах в секунду. Найти путь, пройденный за третью секунду.

Решение. Путь s, пройденный телом за отрезок времени от t_1 до t_2, движущимся прямолинейно со скоростью $v(t)$, вычисляется по формуле $s=\int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$, откуда

$$s=\int_2^3(2t^2+3t+1)\,dt=\left(\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2+t\right)\Bigg|_2^3=21\frac{1}{6}\ \text{м}.$$

2. Найти максимальную высоту, на которую поднимется камень, брошенный от поверхности земли вертикально вверх со скоростью v_0, если не учитывать сопротивление воздуха.

Решение. Скорость камня $v(t)$ определяется формулой $v(t)=v_0-gt$, где g — ускорение силы тяжести. Камень будет лететь вверх до того момента, пока $v(t)\geqslant 0$, т. е. до момента времени $t_1=\frac{v_0}{g}$. Искомый путь

$$s=\int_0^{t_1}v(t)\,dt=\int_0^{\frac{v_0}{g}}(v_0-gt)\,dt=\left(v_0-\frac{gt^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{v_0}{g}}=\frac{v_0^2}{2g}.$$

Вычисление силы давления жидкости

3. Пусть плоская пластинка G, имеющая форму криволинейной трапеции (рис. 17), погружена вертикально в жидкость с плотностью ρ так, что ее боковые стороны параллельны поверхности жидкости и удалены от уровня жидкости на расстояния a и b. Найти силу давления P жидкости на пластинку.

Решение. Из курса физики известно, что если пластинка погружена в жидкость и расположена горизонтально на расстоянии h от поверхности жидкости, то сила давления P на одну из сторон пластинки равна $P=g\rho hS$, где S — площадь пластинки, g — ускорение силы тяжести. Таким образом, сила давления — линейная функция от глубины погружения пластинки. Поэтому естественно разбить пластинку на части прямыми, параллельными поверхности жидкости (оси Oy).

Разобьем отрезок $[a;\,b]$ точками x_i, где $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, на n полосок G_i, $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Площадь полоски G_i, ограниченной прямыми $x=x_{i-1}$ и x_i, приблизительно равна $f(x_i)\Delta x_i$ — площади прямоугольника с основанием $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ и высотой $f(x_i)$. Поэтому сила давления жидкости на полоску G_i приближенно равна $P_i=g\rho x_i f(x_i)\Delta x_i$, а сумма $S=P_1+\ldots+P_n$ приближенно равна силе давления жидкости на пластинку.

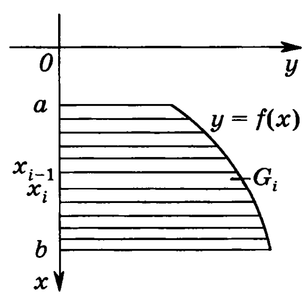


Рис. 17

Если наибольшая из длин отрезков разбиения, т. е. наибольшее из чисел $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, стремится к нулю, а функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то $S \to P$, где

$$P = g\int_a^b \rho x f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Число P, определяемое формулой (1), называют *силой давления жидкости на пластинку G*.

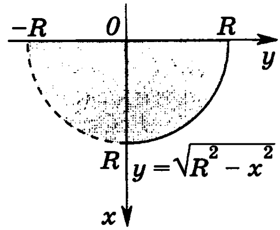


Рис. 18

4. Вычислить силу давления P жидкости с плотностью ρ на вертикальную стенку, имеющую форму полукруга радиуса R и погруженную в жидкость так, что диаметр полукруга расположен на поверхности жидкости.

Решение. Выберем систему координат так, как указано на рисунке 18. Пользуясь формулой (1), где $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $a = 0$, $b = R$, получаем

$$P = 2g\rho\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx.$$

Так как функция $-\frac{1}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$ является первообразной для функции $x\sqrt{R^2 - x^2}$ (§ 2, пример 1 (4)), то

$$P = -\frac{2}{3}g\rho(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R = \frac{2g\rho}{3}R^3.$$

Задания для самостоятельной работы

1.$\boxed{3}$ 1) Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 6t^2 + t$, где t — время в секундах, v — скорость в метрах в секунду. Найти путь, пройденный телом за третью секунду.

2) Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 3t^2 + 2t$, где t — время в секундах, v — скорость в метрах в секунду. Найти путь, пройденный телом за вторую секунду.

2.$\boxed{4}$ 1) Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найти силу давления воды (плотность 1000 кг/м^3), заполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, имеющую размеры 0,5 и 0,4 м ($g \approx 9{,}8$ м/с^2).

2) Аквариум имеет форму прямоугольного параллелепипеда. Найти силу давления воды (плотность 1000 кг/м^3), заполняющей аквариум, на одну из его вертикальных стенок, имеющую размеры 0,4 и 0,7 м ($g \approx 9{,}8$ м/с^2).

§ 6. Простейшие дифференциальные уравнения

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение

$$y' + a(x)y = f(x), \tag{1}$$

где $a(x)$ и $f(x)$ — заданные функции, называют *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*. Если $f(x) = 0$, то это уравнение называют *однородным*.

Пусть $a(x)$ не зависит от x. Тогда однородное уравнение

$$y' + ay = 0 \tag{2}$$

называют *линейным уравнением с постоянными коэффициентами*. Будем искать решение уравнения (2) в виде $y = e^{kx}$. Получим $ke^{kx} + ae^{kx} = 0$, откуда $k = -a$, $y = e^{-ax}$. Уравнению (2) удовлетворяют функции $y = Ce^{-ax}$ при любом C.

Пусть $y_0(x)$ — решение неоднородного уравнения

$$y' + ay = f(x). \tag{3}$$

Такое решение называют *частным решением* уравнения (3). Можно показать, что любое решение уравнения (3) имеет вид

$$y = Ce^{-ax} + y_0(x), \tag{4}$$

где C — постоянная.

Задача нахождения решения уравнения (3), удовлетворяющего условию

$$y(x_0) = y_0, \tag{5}$$

где x_0, y_0 — заданные числа, называется *задачей Коши*, а условие (5) носит название *начального условия*.

Пример с решением

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения:

1) $y' - y = 1$, $y(0) = 1$;

2) $y' + 2y = x$, $y(0) = 2$;

3) $y'+y=\sin x,\ y(0)=-1;$

4) $y'-3y=e^{2x},\ y(0)=2.$

Решение. 1) Однородное уравнение имеет решение вида $y=Ce^{x}$, а в качестве частного решения неоднородного уравнения можно взять $y_0=-1$. Тогда любое решение исходного уравнения имеет вид $y=Ce^{x}-1$. По условию $y(0)=1$, тогда $1=C-1$, откуда $C=2$, а $y=2e^{x}-1$ — решение задачи Коши.

2) Здесь $y=e^{-2x}$ — решение однородного уравнения, а частное решение y_0 неоднородного уравнения будем искать в виде $y_0=ax+b$. Тогда $a+2(ax+b)=x$, откуда $2a=1$, $a+2b=0$, $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{4}$, $y_0=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$. Любое решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y=Ce^{-2x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}.$$

Так как $y(0)=2$, то $2=C-\frac{1}{4}$, $C=\frac{9}{4}$. Поэтому $y=\frac{9}{4}e^{-2x}+\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$ — решение задачи Коши.

3) Частное решение y_0 неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y_0=a\sin x+b\cos x.$$

Тогда $a\cos x-b\sin x+a\sin x+b\cos x=\sin x$. Приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$, получаем $a+b=0$, $a-b=1$, откуда $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$. Поэтому любое решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y=Ce^{-x}+\frac{\sin x-\cos x}{2}.$$

По условию $y(0)=-1$, т. е. $-1=C-\frac{1}{2}$, $C=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{\sin x-\cos x}{2}$ — решение задачи Коши.

4) Частное решение y_0 неоднородного уравнения будем искать в виде $y=ae^{2x}$. Получим $2ae^{2x}-3ae^{2x}=e^{2x}$, откуда $a=-1$, $y=Ce^{3x}-e^{2x}$ — любое решение неоднородного уравнения. Так как $y(0)=2$, то $2=C-1$, $C=3$, $y=3e^{3x}-e^{2x}$ — решение задачи Коши.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

Уравнение вида $y''+a(x)y'+b(x)y=f(x)$ называют *линейным дифференциальным уравнением второго порядка.*

Пусть $a(x)$ и $b(x)$ не зависят от x. Тогда уравнение

$$y''+ay'+by=f(x) \tag{6}$$

называют линейным уравнением с постоянными коэффициентами, а уравнение

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{7}$$

называют линейным однородным уравнением второго порядка (a и b — действительные числа). Будем искать решение уравнения (7) в виде $y = e^{\lambda x}$. Получим $\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0$, откуда

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \tag{8}$$

Квадратное уравнение (8) называют *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (7).

Пусть уравнение (8) имеет два действительных различных корня λ_1 и λ_2, тогда $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ и $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ — решения уравнения (7). Можно показать, что любое решение этого уравнения можно записать в виде

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{9}$$

В случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \alpha$ (уравнение (8) имеет один корень кратности 2), любое решение уравнения (7) имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\alpha x}. \tag{10}$$

Пусть уравнение (8) не имеет действительных корней, тогда это уравнение имеет два комплексно сопряженных корня $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. В этом случае $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ являются решениями уравнения (7), а любое решение этого уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{11}$$

Функции (9) — (11) называют общими решениями уравнения (7) для случаев, когда корни уравнения (8) являются соответственно действительными и различными действительными и равными, комплексно сопряженными. Любое решение неоднородного уравнения (6) можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения (7) и какого-либо (частного) решения неоднородного уравнения (6).

Заметим, что решение уравнения (6) содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2. Для нахождения этих постоянных обычно задают значения $y(x)$ и $y'(x)$ в некоторой точке (начальные условия). Задачу нахождения решения уравнения (7), такого, что

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = z_0, \tag{12}$$

называют *задачей Коши*, а условия (12) — *начальными условиями*.

Пример с решением

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения второго порядка:

1) $y''-y'-2y=2,\ y(0)=1,\ y'(0)=0;$
2) $y''+3y'-4y=4x,\ y(0)=0,\ y'(0)=-1;$
3) $y''+4y'+4y=e^x,\ y(0)=\frac{1}{9},\ y'(0)=0;$
4) $y''+9y=5\sin 2x,\ y(0)=-1,\ y'(0)=2.$

Решение. 1) Характеристическое уравнение $\lambda^2-\lambda-2=0$ имеет корни $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=2$, общее решение однородного уравнения:

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x},$$

а в качестве частного решения исходного уравнения можно взять $y_0=-1$.

Поэтому общее решение данного уравнения: $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}-1$.

Так как $y(0)=1$, $y'(0)=0$, то $1=C_1+C_2-1$, $-C_1+2C_2=0$, откуда $C_1=\frac{4}{3}$, $C_2=\frac{2}{3}$, $y=\frac{4}{3}e^{-x}+\frac{2}{3}e^{2x}-1$ — решение задачи Коши.

2) Характеристическое уравнение $\lambda^2+3\lambda-4=0$ имеет корни $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-4$, частное решение данного уравнения будем искать в виде $y_0=ax+b$. Получим $3a-4(ax+b)=4x$, откуда $a=-1$, $b=-\frac{3}{4}$. Общее решение неоднородного уравнения:

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{-4x}-x-\frac{3}{4}.$$

По условию $y(0)=0$, $y'(0)=-1$. Тогда $C_1+C_2=\frac{3}{4}$, $C_1-4C_2=0$, откуда $C_1=\frac{3}{5}$, $C_2=\frac{3}{20}$, $y=\frac{3}{5}e^{x}+\frac{3}{20}e^{-4x}-x-\frac{3}{4}$ — решение задачи Коши.

3) Характеристическое уравнение $\lambda^2+4\lambda+4=0$ имеет один корень $\lambda=-2$ кратности 2. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x},$$

а в качестве частного решения неоднородного уравнения можно взять $y_0=ae^x$. Получим

$$ae^x+4ae^x+4ae^x=e^x,$$

откуда $a=\frac{1}{9}$. Тогда $y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}+\frac{1}{9}e^x$ — общее решение неоднородного уравнения. Так как $y_0=\frac{1}{9}$, то $C_1+\frac{1}{9}=\frac{1}{9}$, откуда $C_1=0$, $y=C_2xe^{-2x}+\frac{1}{9}e^x$. По условию $y'(0)=0$, тогда $C_2+\frac{1}{9}=0$, $C_2=-\frac{1}{9}$, $y=-\frac{1}{9}xe^{-2x}+\frac{1}{9}e^x$ — решение задачи Коши.

4) Характеристическое уравнение $\lambda^2+9=0$ имеет корни $\lambda_1=3i$, $\lambda_2=-3i$, а общее решение однородного уравнения: $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$. Частное решение однородного уравнения будем искать в виде $y_0=a\sin 2x$. Получим

$$-4a\sin 2x+9a\sin 2x=5\sin 2x,$$

откуда $a=1$, $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x+\sin 2x$ — общее решение неоднородного уравнения. Так как $y(0)=-1$, то $C_1=-1$, тогда

$$y=\cos 3x+C_2\sin 3x+\sin 2x.$$

По условию $y'(0)=2$, т. е. $3C_2+2=2$, откуда $C_2=0$, $y=\cos 3x+\sin 2x$ — решение задачи Коши.

Задания для самостоятельной работы

Решить задачу Коши (1—4).

1. $\boxed{4}$ 1) $y'+y=x$, $y(0)=2$;
   2) $y'+2y=x$, $y(0)=1$.
2. $\boxed{5}$ 1) $y'+y=\cos x$, $y(0)=1$;
   2) $y'-y=\cos x$, $y(0)=-1$.
3. $\boxed{6}$ 1) $y''+y'-2y=2$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$;
   2) $y''+y'-2y=x$, $y(0)=0$, $y'(0)=-\frac{1}{2}$.
4. $\boxed{7}$ 1) $y''+4y=3\cos x$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$;
   2) $y''+4y=3\sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

Контрольная работа

1. Найти такую первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, график которой проходит через точку M_0, если

$$f(x)=\frac{x}{x+1},\ M_0(0;\ 2)$$

$$\left[f(x)=\frac{x}{x+2},\ M_0(-1;\ 2)\right].$$

2. Найти все первообразные для функции $f(x)$, если

$$f(x)=\sin^2 2x \quad [f(x)=\cos^2 2x].$$

3. Вычислить:

$$\int_0^1((x-1)^3+2(x-1)^2)\,dx$$

$$\left[\int_0^2((x-2)^3+3(x-2)^2)\,dx\right].$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами

$$y=4-x^2 \text{ и } y=x^2-4$$

$$[y=9-x^2 \text{ и } y=x^2-9].$$

5. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения:

$$1)\ y'+2y=2;\ y(0)=-1$$

$$[y'-3y=2;\ y(0)=1];$$

$$2)\ y''+4y=x;\ y(0)=0,\ y'(0)=1$$

$$[y''+9y=2x;\ y(0)=0,\ y'(0)=-1].$$

V Комбинаторика

§ 1. Математическая индукция

Пример с решением

Доказать, что при любом натуральном n выполняется равенство

$$\sin\frac{\pi}{6}+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+\ldots+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}(n-1)\right)=2\sin^2\frac{\pi n}{6}. \quad (1)$$

Решение. Докажем равенство методом математической индукции.

1) При $n=1$ равенство (1) верно: $\sin\frac{\pi}{6}=2\sin^2\frac{\pi\cdot 1}{6}$.

2) Докажем, что если равенство (1) верно для некоторого натурального n, то оно верно и для $n+1$, т. е. верно равенство

$$\sin\frac{\pi}{6}+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+\ldots+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}(n-1)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}\right)=$$
$$=2\sin^2\frac{\pi(n+1)}{6}. \quad (2)$$

Прибавляя к обеим частям верного по предположению равенства (1) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}\right)$, получаем верное равенство

$$\sin\frac{\pi}{6}+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+\ldots+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}(n-1)\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}\right)=$$
$$=2\sin^2\frac{\pi n}{6}+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}\right). \quad (3)$$

Преобразуем правую часть равенства (3):

$$2\sin^2\frac{\pi n}{6}+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}\right)=1-\cos\frac{\pi n}{3}+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{3}\right)=$$
$$=1-\cos\frac{\pi n}{3}+\cos\frac{\pi-\pi n}{3}=1+2\sin\frac{\pi n-\pi n+\pi}{6}\cdot\sin\frac{\pi n+\pi n-\pi}{6}=$$
$$=1+\sin\left(\frac{\pi n}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi(n+1)}{3}\right)=1-\cos\frac{\pi(n+1)}{3}=$$
$$=2\sin^2\frac{\pi(n+1)}{6}.$$

Таким образом, из справедливости равенства (3) следует справедливость равенства (2). Следовательно, равенство (1) верно для любого натурального n.

Задания для самостоятельной работы

1.$\boxed{7}$ Используя метод математической индукции, доказать, что все члены последовательности, заданной формулой общего члена a_n, делятся на ее первый член, если:

1) $a_n=4^n+6n-1$;
2) $a_n=7^n+12n-1$;
3) $a_n=7^n+3n-1$;
4) $a_n=6^n+20n-1$;
5) $a_n=5\cdot 3^{2n-2}+2^{4n-3}$;
6) $a_n=6^{n+1}+7^{2n-1}$.

2.$\boxed{8}$ Используя метод математической индукции, доказать, что сумма n первых членов последовательности, заданной формулой общего члена a_n, равна S_n, если:

1) $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$, $S_n=\frac{n}{n+1}$;
2) $a_n=\frac{1}{(n+2)(n+3)}$, $S_n=\frac{n}{3(n+1)}$;
3) $a_n=(2n-1)^2$, $S_n=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$;
4) $a_n=(2n-1)^3$, $S_n=n^2(2n^2-1)$;
5) $a_n=\frac{1}{(n+6)(n+7)}$, $S_n=\frac{n}{7(n+7)}$;
6) $a_n=\frac{1}{(n+7)(n+8)}$, $S_n=\frac{n}{8(n+8)}$;
7) $a_n=(n+2)2^{n-1}$, $S_n=(n+1)2^n-1$;
8) $a_n=(4n+1)5^{n-1}$, $S_n=n5^n$.

3.$\boxed{9}$ Доказать, что при любом натуральном n выполняется равенство:

1) $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\ldots+\sin\frac{\pi n}{3}=2\sin\frac{\pi n}{6}\cdot\sin\frac{\pi(n+1)}{6}$;
2) $\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}+\ldots+\sin\frac{2\pi n}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\pi n}{3}\cdot\sin\frac{\pi(n+1)}{3}$;
3) $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+\ldots+\cos\frac{\pi n}{3}=\sin\frac{\pi(2n+1)}{6}-\frac{1}{2}$;
4) $\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}+\ldots+\cos\frac{2\pi n}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\pi(2n+1)}{3}-\frac{1}{2}$;

5) $\sin\frac{\pi}{6}+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+\ldots+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}(n-1)\right)=2\sin^2\frac{\pi n}{6}$;

6) $\sin(0{,}1\pi)+\sin(0{,}3\pi)+\ldots+\sin(0{,}1\pi(2n-1))=$
$=\frac{\sin^2(0{,}1\pi n)}{\sin(0{,}1\pi)}$.

4.$\boxed{9}$ Доказать, используя метод математической индукции, что при любом натуральном n выполняется неравенство:

1) $\frac{n}{2^n}<1$;
2) $\frac{2^{n+2}}{2n+5}>1$;
3) $8\cdot 2^n\geqslant(n+3)^2$;
4) $9\cdot 3^n\geqslant(n+2)^3$;
5) $3^n+7^n\geqslant 2\cdot 5^n$;
6) $4^n+6^n\geqslant 2\cdot 5^n$;
7) $0{,}3^n+0{,}7^n\leqslant 1$;
8) $1{,}1^n+0{,}9^n\geqslant 2$;
9) $0{,}3^n+0{,}7n\geqslant 1$;
10) $0{,}3n+0{,}7^n\geqslant 1$.

§ 2. Правило произведения. Размещения с повторениями

Примеры с решениями

1. Сколько различных четырехзначных чисел, кратных 5, можно записать с помощью цифр 0, 3, 5?

Решение. Первой цифрой числа может быть либо 3, либо 5 (т. е. первую цифру можно выбрать двумя способами). Второй и третьей цифрой числа может быть любая из трех предложенных. Последняя цифра числа, кратного 5, должна быть либо 0, либо 5. Согласно правилу произведения число различных четырехзначных чисел, удовлетворяющих условию задачи, будет равно $2\cdot 3\cdot 3\cdot 2=36$.

Ответ. 36.

2. Хозяева каждого из 10 домов сельской улицы выбирают одну из четырех красок для окраски забора около своего дома. Сколько существует вариантов окраски заборов на этой улице?

Решение. Присвоим имеющимся краскам номера от 1 до 4. Тогда каждый возможный результат окраски заборов можно представить в виде десятизначного числа, записанного с помощью цифр 1, 2, 3, 4. Всего таких чисел будет $\overline{A}_4^{10}=4^{10}=1048576$ (число размещений с повторениями из 10 элементов, выбираемых из элементов четырех видов).

Ответ. 1048576 вариантов.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{4}$ 1) Пять учащихся рассаживаются на 5 свободных стульях. Сколькими способами они могут занять эти стулья?

   2) Шесть учащихся занимают очередь в школьный буфет. Сколькими способами они могут это сделать?

2. $\boxed{4}$ 1) Сколькими способами три девушки могут выбрать себе партнеров на первый белый танец среди 6 молодых людей, пришедших на дискотеку?

   2) Сколькими способами четверо молодых людей могут выбрать себе партнерш на последний танец школьного вечера среди 5 девушек?

3. $\boxed{5}$ 1) Сколько четных четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6? (Цифры в записи числа могут повторяться.)

   2) Сколько нечетных четырехзначных чисел можно записать с помощью цифр 9, 7, 5, 3, 2, 0? (Цифры в записи числа могут повторяться.)

4. $\boxed{6}$ 1) Сколько существует восьмизначных чисел, у которых все цифры, стоящие на четных местах, нечетные?

   2) Сколько существует девятизначных чисел, у которых все цифры, стоящие на четных местах, четные?

5. $\boxed{6}$ 1) Имеются 6 различных диванов и 3 рулона ткани разных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку этих диванов? (Диван обивается тканью одного цвета.)

   2) Имеются 7 различных стульев и 2 рулона ткани разных цветов. Сколькими способами можно осуществить обивку этих стульев? (Стул обивается тканью одного цвета.)

6. $\boxed{6}$ 1) На складе находятся рулоны восьми различных типов обоев. Нужно произвести оклейку стен в трех комнатах общежития (вся комната оклеивается обоями одного типа). Сколькими способами это можно сделать?

   2) Имеются банки пяти различных оттенков краски. Нужно произвести окраску стен в четырех кухонных помещениях гостиницы (все стены каждой кухни окрашиваются одним оттенком). Сколькими способами это можно сделать?

7. $\boxed{5}$ Решить уравнение: 1) $\overline{A}_3^x = 243$; 2) $\overline{A}_x^4 = 625$.

§ 3. Перестановки

Примеры с решениями

1. Имеется 8 книг, среди которых 3 книги одного автора и 5 книг различных других авторов. Сколькими способами можно поставить все эти книги на полку таким образом, чтобы книги одного автора оказались рядом?

Решение. Первоначально будем считать книги одного автора за одну книгу и будем расставлять на полке полученные шесть «книг». Число способов расстановки в ряд для них равно P_6. Книги одного автора между собой можно переставить P_3 способами. Согласно правилу произведения всего способов расстановки имеющихся восьми книг, удовлетворяющих требованию задачи, будет равно $P_6 \cdot P_3 = 6! \cdot 3! = 720 \cdot 6 = 4320$.

Ответ. 4320 способами.

2. Сколько анаграмм (слов с переставленными буквами, необязательно имеющих смысл) можно составить из слова «антенна»?

Решение. В слове «антенна» буква «а» используется 2 раза, буква «н» — 3 раза, буквы «т» и «е» — по одному разу. Задача сводится к нахождению числа перестановок с повторениями $\overline{P}_{n_1,\, n_2,\, n_3,\, n_4}$ при $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $n_3 = n_4 = 1$ $(n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n = 7$ — число букв в исходном слове):

$$\overline{P}_{2,\,3,\,1,\,1} = \frac{7!}{2!3!1!1!} = 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 420.$$

Ответ. 420 анаграмм.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{4}$ Найти значение выражения:

   1) $\frac{18!}{16!}$; 2) $\frac{20!}{18!}$; 3) $\frac{7! \cdot 3!}{10!}$; 4) $\frac{12!}{10! \cdot 2!}$.

2. $\boxed{5}$ Упростить выражение:

   1) $\frac{P_{n+3}}{(n+1)P_n}$; 2) $\frac{P_{n+4}}{(n+2)P_n}$; 3) $\frac{(n+2)P_{n+1}}{P_{n+4}}$; 4) $\frac{P_{n+5}}{(n+3)P_{n+2}}$.

3. $\boxed{6}$ Решить относительно n уравнение:

   1) $\frac{(n+1)P_{n-2}}{P_{n-3}} = 0$; 2) $\frac{(n+2)P_{n-3}}{P_{n-4}} = 0$;

   3) $\frac{P_{n+1}}{P_{n-1}} = 12$; 4) $\frac{P_n}{P_{n-2}} = 20$.

4.$\boxed{5}$ 1) Сколько различных шестизначных чисел (не содержащих одинаковых цифр) можно записать с помощью цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7 таким образом, чтобы полученное число было кратно 5?

2) Сколько различных четных пятизначных чисел (не содержащих одинаковых цифр) можно записать с помощью цифр 1, 3, 5, 7, 8?

5.$\boxed{6}$ 1) Сколько различных шестизначных чисел (не содержащих одинаковых цифр), кратных 4, можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 5, 7, 9?

2) Сколько различных шестизначных чисел (не содержащих одинаковых цифр), кратных 6, можно записать с помощью цифр 0, 1, 3, 5, 7, 9?

6.$\boxed{5}$ 1) Сколькими способами можно обозначить вершины октаэдра с помощью букв A, B, ..., F?

2) Сколькими способами можно обозначить вершины куба с помощью букв A, B, ..., H?

7.$\boxed{7}$ Имеется 9 книг, среди которых: 1) 5; 2) 6 — книг одного автора, а остальные — книги других разных авторов. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке таким образом, чтобы книги одного автора стояли рядом?

8.$\boxed{8}$ Вычислить:

1) $\overline{P}_{2,\,3,\,1}$; 2) $\overline{P}_{3,\,1,\,2}$; 3) $\overline{P}_{4,\,2,\,3}$; 4) $\overline{P}_{2,\,2,\,5}$.

9.$\boxed{8}$ Найти число анаграмм, которые можно составить из слова:

1) рама; 2) тута; 3) тесть; 4) трава; 5) караван; 6) газета; 7) кукла; 8) бублик; 9) забастовка; 10) трубопровод.

10.$\boxed{9}$ 1) Для четверых детей купили 8 различных игрушек и решили каждому подарить по две из них. Сколькими способами это можно сделать?

2) Для троих детей купили 9 различных игрушек и решили каждому подарить по три из них. Сколькими способами это можно сделать?

§ 4. Размещения без повторений

Примеры с решениями

1. В олимпиаде по математике участвовало 6 юношей и 4 девушки. Сколькими способами могли распределиться места, занятые на олимпиаде девушками, если никакие два участника не набрали одинаковые баллы?

Решение. Всего имеется 10 мест (от одного до десяти), из которых любые четыре в произвольном порядке занимают девушки. Задача сводится к нахождению упорядоченных соединений из четырех элементов, выбираемых из десяти имеющихся. Их число равно

$$A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

2. Четыре брата и их сестра выиграли два билета на места № 1 и № 2 первого ряда кинотеатра на просмотр фестивального фильма. Сколькими способами могут занять эти места молодые люди, если они решили, что их единственная сестра обязательно пойдет на просмотр?

Решение. I способ. Если бы выбор осуществлялся среди всех пятерых молодых людей, то занять указанные места они смогли бы A_5^2 способами. Число этих способов складывается из тех, где присутствовали братья без сестры (их число равно A_4^2), и тех, где присутствовала сестра. Число последних равно $A_5^2 - A_4^2 = 5 \cdot 4 - 4 \cdot 3 = 8$.

II способ. Если сестра занимает место № 1, то на месте № 2 может оказаться любой из четырех братьев. Если сестра занимает место № 2, то занять место № 1 братья могут также четырьмя способами. Таким образом, существует $4 + 4 = 8$ способов занять данные два места с обязательным присутствием на просмотре сестры.

Ответ. 8 способами.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{4}$ Найти значение выражения:

1) $\dfrac{A_{10}^4 - A_9^3}{A_8^2}$; 2) $\dfrac{A_{12}^4 + A_{11}^3}{A_{10}^2}$;

3) $\dfrac{A_{16}^3 \cdot A_{13}^1}{A_{32}^3}$; 4) $\dfrac{A_{15}^2 \cdot A_{13}^3}{A_{14}^5}$.

2. $\boxed{5}$ Решить относительно m уравнение:

1) $2A_m^2 - 5A_{m-2}^2 = 0$; 2) $2A_m^2 - 3A_{m-1}^2 = 0$;

3) $2A_m^2 - 3A_{m-2}^2 = 24$; 4) $5A_{m-2}^2 - 2A_m^2 = 16$.

3. $\boxed{6}$ Решить относительно m неравенство:

1) $A_m^2 - A_{m-1}^2 \leqslant 10$; 2) $A_m^2 - A_{m+1}^2 \geqslant -8$;

3) $A_m^3 - A_{m-1}^3 \leqslant 36$; 4) $A_{m+1}^3 - A_m^3 \leqslant 60$.

4. $\boxed{8}$ Решить относительно m уравнение:

1) $A_m^3 - A_m^2 = 40$; 2) $A_m^3 - A_m^2 = 90$.

5.$\boxed{6}$ 1) На полку ставят 3 различные книги одного автора и 5 других книг различных авторов (все книги различных авторов). Сколькими способами могут занять места на полке книги одного автора?

2) Четыре человека, не глядя, вытаскивают по одному лотерейному билету из пачки, в которой находятся пронумерованные 12 билетов. Сколькими способами могут распределиться номера билетов среди этих четырех человек?

6.$\boxed{7}$ 1) Имеются рулоны ткани шести различных цветов. Сколькими способами можно сшить из горизонтальных полос ткани одинаковой ширины: а) трехцветный флаг; б) трехцветный флаг, у которого одна из полос должна быть имеющегося зеленого цвета?

2) Имеются рулоны ткани семи различных цветов. Сколькими способами можно сшить из горизонтальных полос ткани одинаковой ширины: а) трехцветный флаг; б) трехцветный флаг, у которого одна из полос должна быть имеющегося красного цвета?

7.$\boxed{7}$ В шахматном турнире участвуют: 1) 3 девушки и 17 юношей; 2) 4 девушки и 8 юношей.

Сколькими способами могут распределиться места, занятые в турнире девушками, если никакие 2 участника турнира не набрали одинаковое число очков?

8.$\boxed{7}$ Найти область определения и множество значений функции:

1) $y=A_5^x$; 2) $y=A_4^x$; 3) $y=3P_x+A_6^{2x}$; 4) $y=A_6^{3x}+2P_x$.

§ 5. Сочетания без повторений и бином Ньютона

Примеры с решениями

1. Из имеющихся 5 карандашей и 4 блокнотов выбираются 3 карандаша и 2 блокнота. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Три из пяти карандашей можно выбрать C_5^3 способами, а два из четырех блокнотов — C_4^2 способами. Согласно правилу произведения существует $C_5^3 \cdot C_4^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = 60$ способов выбора карандашей и блокнотов, отвечающих требованию задачи.

2. Найти член разложения $\left(\sqrt[4]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{12}$, содержащий x^{-3}.

Решение. n-й член разложения двенадцатой степени данного в условии бинома (где $0 \leqslant n \leqslant 12$) имеет вид

$$C_{12}^{n}\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{12-n}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{n} \text{ или } C_{12}^{n}x^{3-\frac{n}{4}-\frac{n}{2}}=C_{12}^{n}x^{3-\frac{3}{4}n}.$$

Этот член будет содержать x^{-3} при $3-\frac{3}{4}n=-3$, т. е. при $n=8$. При $n=8$ биномиальный коэффициент $C_{12}^{8}=\frac{12!}{8!4!}=495$.

Ответ. $495x^{-3}$.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{6}$ Найти значение выражения, предварительно упростив его с помощью свойств числа сочетаний:

1) $C_8^2+C_8^3$;　　2) $C_7^3+C_7^4$;
3) $C_6^3+C_6^4+C_7^5$;　　4) $C_8^2+C_8^3+C_9^4$;
5) $C_9^6-C_8^6$;　　6) $C_{10}^8-C_9^8$;
7) $C_{12}^{10}-C_{11}^9$;
8) $C_{11}^9-C_{10}^8$;
9) $C_7^0+C_7^1+C_7^2+C_7^3+C_7^4+C_7^5+C_7^6+C_7^7$;
10) $C_6^6+C_6^5+C_6^4+C_6^3+C_6^2+C_6^1+C_6^0$;
11) $C_5^5+C_5^4+C_5^3$;
12) $C_7^7+C_7^6+C_7^5+C_7^4$;
13) $C_6^1+C_6^2+C_6^3+C_6^4+C_6^5$;
14) $C_8^1+C_8^2+C_8^3+C_8^4+C_8^5+C_8^6+C_8^7$.

2. $\boxed{6}$ Записать разложение бинома:

1) $\left(2a-\frac{1}{2}b\right)^6$;　　2) $\left(3x-\frac{1}{3}y\right)^5$;
3) $\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}\right)^5$;　　4) $\left(a^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{4}}\right)^4$;
5) $\left(\frac{b}{3}-3\right)^7$;　　6) $\left(\frac{x}{4}-4\right)^6$.

3. $\boxed{7}$ Найти член разложения бинома:

1) $(a+\sqrt{a})^{14}$, содержащий a^{10};
2) $(\sqrt[3]{b}+b)^{15}$, содержащий b^7;
3) $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{18}$, содержащий $x^{\frac{7}{2}}$;
4) $\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, содержащий $x^{\frac{5}{3}}$.

4.$\boxed{5}$ 1) Появилась возможность в три из имеющихся восьми подарочных набора доложить по одному флакону духов (все флаконы одинаковые). Сколькими способами это можно сделать?

2) Четыре путевки в дом отдыха нужно распределить между девятью сотрудниками лаборатории так, чтобы у каждого оказалось не более одной путевки. Сколькими способами это можно сделать?

5.$\boxed{5}$ В урне находятся 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно взять из урны: 1) 3 белых и 2 черных шара; 2) 2 белых и 3 черных шара?

6.$\boxed{6}$ Хоккейная команда состоит: 1) из двух вратарей, пяти защитников и семи нападающих; 2) из трех вратарей, шести защитников и шести нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

7.$\boxed{7}$ 1) В три купе вагона поезда садятся 12 пассажиров, по 4 человека в каждое купе. Сколькими способами они это могут сделать?

2) В четыре купе вагона категории СВ садятся 8 пассажиров, по 2 человека в каждое купе. Сколькими способами они это могут сделать?

8.$\boxed{8}$ На плоскости проведено n прямых, среди которых нет ни одной пары параллельных прямых и ни одной тройки прямых, пересекающихся в одной точке. Найти: 1) число точек пересечения этих прямых; 2) число треугольников, образованных этими прямыми.

9.$\boxed{6}$ Указать область определения функции:

1) $y=C_x^5$; 2) $y=C_x^6$; 3) $y=C_{2x}^{x+1}$; 4) $y=C_{3x}^{2x+3}$.

10.$\boxed{7}$ Найти область определения и множество значений функции:

1) $y=C_6^x$; 2) $y=C_5^x$;

3) $y=C_{2x}^3-C_x^2A_3^x$; 4) $y=C_x^3C_4^x+A_{2x}^2$.

11.$\boxed{8}$ Решить уравнение:

1) $3C_4^x-7x=4$; 2) $5C_3^x+2x=11$;

3) $xA_3^xC_x^3-P_x=12$; 4) $P_xC_x^4-\dfrac{A_4^x}{x}=18$.

12.$\boxed{8}$ Решить неравенство:

1) $C_x^4+x>A_x^3$; 2) $A_x^4-4x>C_5^x$;

3) $P_x-20C_6^x\geqslant\dfrac{A_{2x}^{10}}{9!}$; 4) $C_{2x}^8-A_5^x\geqslant xP_x$.

§ 6. Сочетания с повторениями

Пример с решением

Сколько различных подарочных наборов из 12 конфет можно составить, если в наличии имеются конфеты трех видов (конфет каждого вида больше 12)?

Решение. Порядок расположения конфет в наборе не имеет значения, поэтому задача сводится к подсчету числа сочетаний с повторениями из 12 элементов, выбираемых из элементов трех видов:

$$\overline{C}_3^{12} = \frac{(3+12-1)!}{(3-1)!12!} = \frac{14!}{2!\cdot 12!} = 91.$$

Ответ. 91 набор.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{5}$ Вычислить:

   1) $\overline{C}_{10}^2$; 2) $\overline{C}_2^{10}$; 3) $\overline{C}_3^8$; 4) $\overline{C}_8^3$.

2. $\boxed{6}$ Доказать, что:

   1) $\overline{C}_m^n = C_{m+n-1}^n$; 2) $C_{k+p-1}^p = \overline{C}_k^p$.

3. $\boxed{5}$ 1) Шесть яблок выбираются из яблок четырех сортов. Сколькими способами это можно сделать, если яблок каждого сорта больше шести?

   2) Покупаются восемь футболок одного размера, выбираемых из футболок пяти цветов. Сколькими способами это можно сделать, если футболок каждого цвета в магазине больше восьми?

4. $\boxed{6}$ 1) Сколькими способами можно разложить 9 одинаковых конфет по четырем коробкам (в каждой коробке может оказаться от 0 до 9 конфет)?

   2) Сколькими способами можно разложить 10 одинаковых карандашей по трем коробкам (в каждой коробке может оказаться от 0 до 10 карандашей)?

5. $\boxed{7}$ Лифт с четырьмя пассажирами останавливается на: 1) одиннадцати этажах; 2) семи этажах. На каждом этаже могут выйти от 0 до 4 человек. Сколько существует различных способов освобождения лифта от пассажиров, если способы различаются только числом людей, вышедших на конкретном этаже?

Контрольная работа

1. Вычислить $(C_8^7+C_8^8)\cdot\frac{P_6}{A_6^4}$ $\left[\frac{A_5^3}{P_5}(C_9^8+C_9^9)\right]$.

2. Сколько различных четных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 2, 5, 7, 9 при условии, что цифры в числе должны быть разными? [Сколько различных нечетных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 2, 4, 5 при условии, что цифры в числе должны быть разными?]

3. Сколькими способами можно составить букет из двух нарциссов и трех тюльпанов, если в наличии имеются 4 нарцисса и 5 тюльпанов? [Шифр составляется из трех различных букв, выбираемых из первых восьми букв алфавита, и четырех различных цифр, выбираемых из цифр 2, 4, 5, 6, 7, 8. Сколько различных шифров можно составить таким образом?]

4. Записать разложение бинома

$$\left(2x-\frac{1}{2}\right)^6 \quad \left[\left(\frac{a}{3}-3\right)^5\right].$$

---

5. Найти область определения и множество значений функции

$$y=\frac{A_3^x C_{3x}^6}{P_3} \quad \left[y=\frac{C_{2x}^8 A_5^x}{P_5}\right].$$

6. Найти член разложения бинома

$\left(\sqrt[5]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{15}$ $\left[\left(\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{12}\right]$, содержащий $x^{\frac{1}{3}}$ $\left[x^{\frac{6}{5}}\right]$.

Глава VI Элементы теории вероятностей

§ 1. Вероятность события

Пример с решением

В коробке лежат 15 одинаковых на ощупь шаров: 5 белых, 4 красных и 6 черных. Наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность события: 1) A — все три вынутых шара белого цвета; 2) B — все вынутые шары разных цветов; 3) C — среди вынутых 2 красных шара и 1 черный.

Решение. Общее число возможных исходов испытания n равно $C_{15}^3=\frac{A_{15}^3}{P_3}=\frac{15\cdot 14\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3}=455.$

1) Благоприятствующими событию A исходами будут всевозможные тройки белых шаров, выбранных из пяти имеющихся в коробке, т. е. $m=C_5^3=10$. Тогда

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{10}{455}=\frac{2}{91}.$$

2) Любой из пяти белых шаров может появиться с любым из четырех красных, а любая пара «белый и красный шары» может сочетаться с любым из шести черных шаров. Согласно комбинаторному правилу произведения событию B благоприятствуют $m=5\cdot 4\cdot 6=120$ исходов испытания (троек разноцветных шаров). Тогда

$$P(B)=\frac{m}{n}=\frac{120}{455}=\frac{24}{91}.$$

3) Два красных шара из четырех имеющихся можно выбрать $C_4^2=6$ способами. Каждая пара красных шаров может появиться с любым из шести черных шаров. Согласно правилу произведения событию C благоприятствуют $m=6\cdot 6=36$ исходов, поэтому $P(C)=\frac{m}{n}=\frac{36}{455}$.

Ответ. 1) $\frac{9}{21}$; 2) $\frac{24}{91}$; 3) $\frac{36}{455}$.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{4}$ Пусть A и B — некоторые события, которые могут произойти в одном испытании. Записать событие:

1) C_1 — произошло по крайней мере одно из событий A и B;

2) C_2 — произошли оба события (и A, и B);

3) C_3 — произошло событие A, а событие B не наступило;

4) C_4 — произошло событие B, а событие A не наступило;

5) C_5 — не произошло ни одно из двух данных событий;

6) C_6 — произошло одно и только одно из двух данных событий.

2.$\boxed{3}$ (Устно.) Из полного набора домино случайным образом извлекается одна костяшка. Найти вероятность того, что эта костяшка:

1) два—три; 2) ноль—шесть;
3) ноль—ноль; 4) пять—пять.

3.$\boxed{4}$ В ящике находятся 2 белых, 4 красных и 6 черных шаров, одинаковых на ощупь. Наугад вынимается один шар. Найти вероятность того, что этот шар:

1) белый;
2) красный;
3) или красный, или черный;
4) или белый, или черный;
5) не черный;
6) не белый.

4.$\boxed{4}$ Из колоды карт (36 листов) случайным образом извлекается одна карта. Найти вероятность того, что эта карта:

1) семерка треф; 2) шестерка червей;
3) король черной масти; 4) дама красной масти;
5) туз; 6) валет;
7) четное число; 8) нечетное число;
9) или шестерка, или семерка;
10) или восьмерка, или десятка.

5.$\boxed{5}$ Какова вероятность того, что случайным образом открытая страница нового перекидного календаря на март месяц имеет в записи даты цифру: 1) 2; 2) 3; 3) 0; 4) 1?

6.$\boxed{6}$ В партии из 200 деталей: 1) 4 детали бракованные; 2) 5 деталей бракованных. Какова вероятность того, что две случайным образом изъятые из партии детали окажутся бракованными?

7.$\boxed{6}$ В партии из 500 деталей бракованных деталей: 1) 6; 2) 4. Какова вероятность того, что среди двух случайным образом изъятых из партии деталей не будет ни одной бракованной?

8. $\boxed{6}$ Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что: 1) сумма выпавших очков — нечетное число; 2) сумма выпавших очков — четное число; 3) на первой кости выпало меньше 3 очков, а на второй — больше 4; 4) на первой кости выпало больше 4 очков, а на второй — меньше 3; 5) произведение выпавших очков — четное число; 6) произведение выпавших очков — нечетное число; 7) произведение выпавших очков кратно 3; 8) произведение выпавших очков кратно 4; 9) на первой кости число очков меньше, чем на второй; 10) на второй кости число очков не меньше, чем на второй; 11) сумма очков меньше 12; 12) сумма очков не больше 11?

9. $\boxed{6}$ В ящике лежат 7 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают 2 шара. Найти вероятность того, что среди вынутых: 1) оба шара черные; 2) оба шара белые; 3) один шар белый, другой черный; 4) один шар черный, другой белый.

10. $\boxed{7}$ В коробке лежат 6 белых и 4 черных шара. Наугад вынимают 3 шара. Найти вероятность того, что: 1) все 3 шара белые; 2) все 3 шара черные; 3) 2 шара черных и 1 белый; 4) 2 шара белых и 1 черный.

11. $\boxed{7}$ Брошены три игральные кости. Найти вероятность того, что: 1) на каждой из костей появилось четное число очков; 2) на всех костях выпали нечетные числа; 3) сумма очков на всех костях не больше 4; 4) сумма очков на всех костях равна 4; 5) сумма очков на всех костях равна 5; 6) сумма очков на всех костях не больше 5; 7) произведение очков равно 5; 8) произведение очков равно 3.

12. $\boxed{8}$ В лотерее «5 из 36» нужно на карточке с числами от 1 до 36 зачеркнуть любые 5 чисел. При розыгрыше случайным образом выбирают 5 из 36 выигрышных номеров. Найти вероятность того, что игрок, заполнявший одну карточку, угадал: 1) все 5 выигрышных чисел; 2) ровно 4 выигрышных числа; 3) ровно 2 выигрышных числа; 4) ровно 3 выигрышных числа.

13. $\boxed{8}$ В лотерее «6 из 49» нужно на карточке с числами от 1 до 49 зачеркнуть любые 6 чисел. При розыгрыше случайным образом выбирают 6 из 49 выигрышных номеров. Найти вероятность того, что игрок, заполнявший одну карточку, угадал: 1) ровно 5 чисел; 2) все 6 чисел; 3) ровно 3 числа; 4) ровно 4 числа.

§ 2. Сложение вероятностей

Примеры с решениями

1. По мишени стреляют дважды. Вероятность поражения мишени при первом выстреле равна 0,9, а при втором — 0,8. Вероятность поражения мишени и при первом, и при втором выстрелах равна 0,72. Найти вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы одним выстрелом.

Решение. Пусть событие A — поражение мишени при первом выстреле, событие B — поражение мишени при втором выстреле. По условию $P(A)=0{,}9$, $P(B)=0{,}8$, $P(AB)=0{,}72$. Требуется найти вероятность события $A+B$. По теореме о вероятности суммы двух событий имеем $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}9+0{,}8-0{,}72=0{,}98$.

Ответ. 0,98.

2. Из колоды карт (36 листов) наугад извлекают 5 карт. Найти вероятность того, что среди них окажется хотя бы один туз.

Решение. Пусть событие A — среди извлеченных пяти карт присутствует хотя бы один туз. Первоначально найдем вероятность противоположного ему события $\overline{A}$ — среди извлеченных пяти карт нет ни одного туза.

Число всех равновозможных исходов испытания $n=C_{36}^5$. Благоприятствующими событию $\overline{A}$ будут извлеченные пятерки карт, выбранные из 32 карт, среди которых нет тузов. Их число $m=C_{32}^5$. Тогда $P(\overline{A})=\dfrac{C_{32}^5}{C_{36}^5}$, а по теореме о вероятностях противоположных событий

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{32}^5}{C_{36}^5}=1-\frac{32\cdot31\cdot30\cdot29\cdot28}{36\cdot35\cdot34\cdot33\cdot32}=1-\frac{899}{1683}=$$
$$=\frac{784}{1683}.$$

Ответ. $\dfrac{784}{1683}$.

Задания для самостоятельной работы

1.$\boxed{5}$ По мишени стреляют два раза. Событие A — попадание по мишени при первом выстреле, событие B — попадание по мишени при втором выстреле. Найти вероятности событий C — мишень поражена хотя бы одним выстрелом, D — мишень не будет поражена ни одним из выстрелов, если: 1) $P(A)=0{,}9$;

$P(B)=0,7$; $P(AB)=0,63$; 2) $P(A)=0,8$; $P(B)=0,6$; $P(AB)=0,48$.

2. $\boxed{5}$ Из колоды в 36 карт наугад вынимается одна карта. Найти вероятность того, что эта карта: 1) либо дама, либо карта червовой масти; 2) либо карта трефовой масти, либо валет.

3. $\boxed{6}$ Имеются два набора домино: костяшки одного окрашены в черный цвет, а другого — в белый. Все костяшки перемешиваются и, не глядя, берется одна из них. Найти вероятность того, что эта костяшка: 1) либо любая белая, либо имеющая сумму очков, равную 2; 2) либо любая черная, либо имеющая сумму очков, равную 3.

4. $\boxed{7}$ В коробке лежат 4 белых и 6 красных шаров. Какова вероятность того, что среди трех случайным образом вынутых шаров окажется по крайней мере: 1) один белый шар; 2) один красный шар?

5. $\boxed{7}$ В ящике лежат 6 черных и 8 белых шаров. Какова вероятность того, что среди четырех случайным образом вынутых из ящика шаров окажется по крайней мере: 1) один белый шар; 2) один черный шар?

6. $\boxed{7}$ Наугад выбирается: 1) четырехзначное; 2) трехзначное число. Какова вероятность того, что хотя бы две его цифры различны?

§ 3. Условная вероятность. Независимость событий

Примеры с решениями

1. В урне находятся 5 черных и 3 белых шара. Дважды наугад вынимают по одному шару, не возвращая их обратно. Найти вероятность того, что вторым извлечен белый шар при условии, что первым извлечен черный.

Решение. Введем обозначения событий: A — первым вынут черный шар; B — вторым вынут белый шар; AB — последовательно извлечены черный, затем белый шары; B/A — вторым вынут белый шар при условии, что первым был извлечен черный.

I способ. После наступления события A (первым вынут черный шар) в урне осталось 4 черных и 3 белых шара. Появлению вторым белого шара благоприятствуют 3 исхода ($m=3$) из семи возможных ($n=7$), поэтому $P(B/A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{7}$.

II способ. $P(A)=\frac{5}{8}$ (в урне первоначально находилось 8 шаров, среди которых 5 черных). Событию AB благоприятствуют появления всех упорядоченных пар «черный шар, белый шар»; согласно правилу произведения таких исходов испытания $m=5\cdot3=15$. Всего последовательно извлечь два шара из урны можно $n=8\cdot7=56$ способами. Таким образом $P(AB)=\frac{15}{56}$, поэтому

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{15}{56}:\frac{5}{8}=\frac{3}{7}.$$

Ответ. $\frac{3}{7}$.

2. Из урны, в которой находятся 5 черных и 3 белых шара, последовательно наугад вынимают два шара и: 1) оба раза возвращают их обратно; 2) в урну их не возвращают. Выяснить, являются ли независимыми события A — первым вынут черный шар и B — вторым вынут белый шар.

Решение. 1) $P(A)=\frac{5}{8}$, $P(B)=\frac{3}{8}$, $P(AB)=\frac{5\cdot3}{8\cdot8}=\frac{15}{64}$. Так как $P(A)\cdot P(B)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{64}=P(AB)$, то события A и B независимые.

2) $P(A)=\frac{5}{8}$, $P(AB)=\frac{5\cdot3}{A_8^2}=\frac{15}{56}$. Так как в данном случае $B=AB+\bar{A}B$, а события AB и $\bar{A}B$ несовместные, то

$$P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)=\frac{15}{56}+\frac{3\cdot2}{8\cdot7}=\frac{21}{56}=\frac{3}{8}.$$

Так как $P(A)\cdot P(B)=\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{15}{64}\neq\frac{15}{56}=P(AB)$, то события A и B не являются независимыми.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{5}$ Из колоды карт в 36 листов случайным образом извлекаются последовательно две карты и обратно не возвращаются. Найти вероятность того, что: 1) второй была вынута карта красной масти при условии, что первой была шестерка треф; 2) второй была вынута карта черной масти при условии, что первой оказалась дама треф; 3) второй была вынута дама бубей при условии, что первой оказалась карта червовой масти; 4) вторым был вынут король вини при условии, что первой оказалась карта трефовой масти.

2. $\boxed{5}$ Игральная кость бросается дважды. Выяснить, являются ли события A и B независимыми, если: 1) A —

первый раз выпало 4 очка, B — второй раз выпало четное число очков; 2) A — первый раз выпало кратное трем число очков, B — выпало 6 очков.

3. $\boxed{6}$ Из полного набора домино последовательно наугад извлекаются две костяшки и обратно не возвращаются. Выяснить, являются ли независимыми события A и B, если: 1) A — первый вынут дубль, B — второй вынута костяшка «два-три»; 2) A — первой вынута костяшка «пять-шесть», B — второй вынута костяшка не дубль, содержащая три очка.

4. $\boxed{6}$ Среди 100 лотерейных билетов, лежащих в барабане, 5 выигрышных. Брат с сестрой случайным образом вынимают из барабана по одному билету. Найти вероятность того, что: 1) сестре достался выигрышный билет, а брату — невыигрышный; 2) оба вынули выигрышные билеты. (Решить задачу двумя способами.)

§ 4. Вероятность произведения независимых событий

Пример с решением

Система слежения состоит из 3 локаторов, каждый из которых может обнаружить самолет с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что самолет, попавший в зону слежения, будет обнаружен?

Решение. Пусть A, B и C — события, состоящие в обнаружении самолета каждым из имеющихся трех локаторов соответственно. По условию $P(A)=P(B)=P(C)=0{,}9$. Тогда $P(\overline{A})=P(\overline{B})=P(\overline{C})=1-0{,}9=0{,}1$. И пусть событие D — самолет обнаружен.

I способ. Событие D имеет вид $D=ABC+\overline{A}BC+A\overline{B}C+A B\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+A\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}$. Очевидно, что события A, B, C, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ — независимые в совокупности события. Тогда

$$P(D)=P(A)P(B)P(C)+P(\overline{A})P(B)P(C)+P(A)P(\overline{B})P(C)+$$
$$+P(A)P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)+P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+$$
$$+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})=0{,}9^3+3\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9^2+3\cdot 0{,}1^2\cdot 0{,}9=0{,}729+$$
$$+3\cdot 0{,}081+3\cdot 0{,}009=0{,}999.$$

II способ. Самолет обнаружен системой, если его обнаружил хотя бы один локатор (событие D). Противоположным событием будет событие $\overline{D}$ — самолет не обнаружен ни одним из локаторов, т. е. $\overline{D}=\overline{A}\overline{B}\overline{C}$. Так как события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ независимы в совокупности, то $P(\overline{D})=$ $=P(\overline{A})\cdot P(\overline{B})\cdot P(\overline{C})=(0,1)^3=0,001$. Тогда $P(D)=1-P(\overline{D})=$ $=1-0,001=0,999$.

Ответ. 0,999.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{4}$ Из колоды карт в 36 листов дважды случайным образом извлекают по одной карте и каждый раз возвращают обратно. Найти вероятность того, что:
1) первой вынута шестерка треф, а второй вынута карта красной масти; 2) первой вынута карта бубновой масти, а второй вынут червовый валет.

2. $\boxed{5}$ Брошены три игральных кубика. Найти вероятность того, что: 1) на первой кости выпало 5 очков, на второй — четное число очков, на третьей — не больше 2 очков; 2) на первой кости выпало число очков, кратное 3, на второй — 6 очков, на третьей — не меньше 5 очков.

3. $\boxed{6}$ Вероятность попадания в мишень: 1) первым стрелком равна 0,9, вторым — 0,7; 2) первым стрелком равна 0,6, вторым — 0,8. Оба стрелка независимо друг от друга выстрелили по мишени по одному разу. Какова вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы одной пулей?

4. $\boxed{7}$ Вероятность попадания по мишени каждым из трех стрелков равна: 1) 0,7; 2) 0,8. Все трое по одному разу независимо друг от друга стреляют по мишени. Какова вероятность того, что в мишени окажется хотя бы одна пуля?

5. $\boxed{7}$ Некто участвует в трех лотереях, покупая по одному билету в каждой лотерее. В первой лотерее на 100 билетов разыгрывается 2 приза, во второй лотерее на 200 билетов — 1 приз, в третьей лотерее на 250 билетов — 6 призов. Какова вероятность того, что купивший билеты: 1) выиграет приз только во второй лотерее; 2) выиграет призы в первой и третьей лотереях, а во второй не выиграет?

6. $\boxed{7}$ Стрелок делает три выстрела по мишени. Вероятность поразить мишень при любом выстреле у этого стрелка равна 0,95. Найти вероятность того, что мишень будет поражена: 1) вторым и третьим выстрелами; 2) только третьим выстрелом.

§ 5. Формула Бернулли

Пример с решением

Игральный кубик бросают 4 раза. Какова вероятность того, что пять очков появятся не более двух раз?

Решение. Вероятность появления пяти очков в одном испытании равна $\frac{1}{6}$. В серии из четырех испытаний требуется найти вероятность события D — появления пяти очков не более двух раз. Событие D состоит в сумме трех несовместных событий: A — 5 очков не появились ни разу, B — 5 очков появились один раз и C — 5 очков появились два раза. Используя формулу Бернулли, найдем вероятность события D:

$$P(D)=P(A)+P(B)+P(C)=$$

$$=C_4^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-0}+C_4^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-1}+C_4^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^{4-2}=$$

$$=\left(\frac{5}{6}\right)^4+4\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3+6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2=$$

$$=\frac{625}{1296}+\frac{500}{1296}+\frac{150}{1296}=\frac{1275}{1296}=\frac{425}{432}.$$

Задания для самостоятельной работы

1.$\boxed{5}$ Монету бросают 6 раз. Найти вероятность того, что орел появился при этом ровно:

1) 2 раза; 2) 3 раза; 3) 5 раз; 4) 4 раза.

2.$\boxed{5}$ Игральный кубик бросают 6 раз. Найти вероятность того, что 3 очка при этом появятся ровно:

1) 3 раза; 2) 2 раза.

3.$\boxed{6}$ Игральный кубик бросают 5 раз. Какова вероятность того, что одно очко в этой серии испытаний появится:

1) не менее 2 раз; 2) не более 3 раз?

4.$\boxed{6}$ Вероятность попадания по мишени при каждом выстреле некоторым стрелком равна 0,9. Найти вероятность попадания по мишени в серии из семи выстрелов этим стрелком:

1) по крайней мере 2 раза;
2) по крайней мере 1 раз.

Контрольная работа

1. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что на обеих костях появились одинаковые четные очки [одинаковые очки, кратные трем].
2. Брошены три игральные кости. Найти вероятность того, что хотя бы на одной кости появится число очков, кратное трем [четное число очков].
3. В урне находятся 5 белых и 6 черных шаров. Из нее последовательно извлекают 2 шара и не возвращают обратно. Найти вероятность того, что вторым извлечен белый шар, если известно, что первым также был извлечен белый шар [вторым извлечен черный шар при условии, что первым был извлечен белый шар].

---

4. В урне находятся 12 шаров. Известно, что 8 из них сделаны из меди, а 4 — из стали. При этом случайным образом 3 из них окрасили в белый цвет, 2 из оставшихся — в красный, а остальные — в черный. Какова вероятность того, что наугад вынутый шар окажется медным, но не красным шаром [стальным, но не черным шаром]?
5. Вероятность попадания стрелком по мишени при каждом выстреле равна $\frac{4}{5}$ [0,7]. Какова вероятность того, что в серии из трех [четырех] выстрелов мишень будет поражена не менее чем двумя пулями?

Глава VII Комплексные числа

§ 1. Определение комплексных чисел. Сложение и умножение комплексных чисел

Примеры с решениями

1. Справедливо ли равенство

$$(1+i)^6+(1-i)^6=0?$$

Решение. Введение операции умножения комплексных чисел позволяет выполнять и операцию возведения комплексного числа в натуральную степень $n \geqslant 2$.

Свойства степеней с натуральными показателями сохраняются и для комплексных чисел. Поэтому, используя свойство возведения степени в степень, имеем

$$(1+i)^6=((1+i)^2)^3,$$
$$(1-i)^6=((1-i)^2)^3.$$

Применим формулу квадрата двучлена, что возможно, поскольку умножение комплексных чисел можно выполнять по правилам действий с многочленами, и учтем, что $i^2=-1$.

Запишем

$$(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i,$$
$$(1-i)^2=1-2i+i^2=1-2i-1=-2i.$$

Итак,

$$(1+i)^6=(2i)^3=8\cdot i^3=8\cdot i^2\cdot i=-8i,$$
$$(1-i)^6=(-2i)^3=-8\cdot i^3=-8\cdot i^2\cdot i=8i.$$

Следовательно,

$$(1+i)^6+(1-i)^6=-8i+8i=0.$$

Ответ. Равенство справедливо.

2. При каких действительных значениях x комплексное число

$$z=2x+4i+x^2(1-i)$$

будет чисто мнимым числом?

Решение. Число $z=a+bi$ будет являться чисто мнимым, если $a=0$ при условии, что $b\neq 0$. В данном случае $z=2x+4i+x^2(1-i)=(2x+x^2)+(4-x^2)i$, где $2x+x^2$ — действительная часть, а $4-x^2$ — мнимая. Поэтому $2x+x^2=0$ при условии, что $4-x^2\neq 0$, откуда $2x+x^2=x(2+x)$ и $x(2+x)=0$, что возможно при $x=0$ и $x=-2$. При $x=0$ условие $4-x^2\neq 0$ выполняется, а при $x=-2$ нет, так как $x=-2$ является одним из корней уравнения $4-x^2=0$. Следовательно, число z чисто мнимое только при $x=0$.

Ответ. При $x=0$.

Задания для самостоятельной работы

1.$\boxed{5}$ Справедливо ли равенство:

1) $4+(1+i)^2=0$;
2) $(1-i)^4+4=0$;
3) $16-(1+i)^8=0$;
4) $(1-i)^8-16=0$;
5) $(1+i)^{10}+4\cdot(2i)^3=0$;
6) $0{,}5i\cdot(2i)^6-(1-i)^{10}=0$?

2.$\boxed{5}$ Найти действительные значения x, при которых комплексное число z чисто мнимое, если:

1) $z=9-3xi-x^2+x^2i$;
2) $z=5x-x^2i+x^2$;
3) $z=x^2-3xi+x^2i-9$;
4) $z=25i-5x^2+x^3-x^2i$;
5) $z=x^3-xi+1-x^2i$;
6) $z=8-4i+x^2i+x^3$.

3. При каких действительных значениях x и y выполняется равенство:

$\boxed{5}$ 1) $3(x+iy)=19+6i+5y-4xi$;
$\boxed{5}$ 2) $7(y-xi)=17+2i-2x+4yi$;
$\boxed{6}$ 3) $(x-iy)(2+3i)=1-5i$;
$\boxed{6}$ 4) $(3-2i)(x+iy)=1-5i$;
$\boxed{7}$ 5) $(2x-5i)(x-6i)=2+17y^2i$;
$\boxed{7}$ 6) $(3-yi)(7+2yi)=29+2x^2i$?

4.$\boxed{6}$ Пусть $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Вычислить:

1) $(1+z)(1+z^2)$; 2) $(2-z)(2-z^2)$;
3) $(2+3z)(2+3z^2)$; 4) $(3-2z)(3-2z^2)$;
5) $z^2(3z+1)(z+3)$; 6) $z^2(3z-1)(3-z)$.

§ 2. Комплексно сопряженные числа. Модуль комплексного числа. Операции вычитания и деления

Примеры с решениями

1. Доказать, что число, сопряженное с произведением двух комплексных чисел, равно произведению чисел, сопряженных с каждым из множителей, т. е. верно равенство

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

Решение. Пусть $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. Тогда

$$\overline{z_1} = a - bi,\ \overline{z_2} = c - di,\ z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i,$$
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = (ac - bd) - (ad + bc)i,$$
$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a - bi) \cdot (c - di) = (ac - bd) - adi - bci =$$
$$= (ac - bd) - (ad + bc)i.$$

Таким образом, справедливо равенство

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2},$$

из которого можно получить важные следствия.

1) Если $z_1 = z_2 = z$, то

$$\overline{z^2} = (\overline{z})^2,$$
$$\overline{z^3} = \overline{z^2 \cdot z} = \overline{z^2} \cdot \overline{z} = (\overline{z})^2 \cdot \overline{z} = (\overline{z})^3,$$
$$\overline{z^4} = (\overline{z})^4,\ \ldots,\ \overline{z^n} = (\overline{z})^n.$$

2) Если z_1 и z_2 не равные нулю комплексные числа, то

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|,$$
$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

Доказательство. В пункте 2 (§ 2) учебника доказывалось, что $z \cdot \overline{z} = |z|^2$. Значит,

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2}) = |z_1 \cdot z_2|^2.$$

Так как $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ и операции умножения комплексных чисел обладают переместительными и сочетательными свойствами, как и соответствующие операции с действительными числами, то

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot (\overline{z_1 \cdot z_2}) = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (z_1 \cdot \overline{z_1}) \cdot (z_2 \cdot \overline{z_2}) = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2,$$

т. е. $|z_1 \cdot z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$. Поскольку $|z_1| > 0$ и $|z_2| > 0$ (по условию), то

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Частное комплексных чисел z_1 и z_2 находится по формуле $\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{|z_2|^2}$ (§ 2 учебника). Так как $|z_2|^2$ — число действительное, то в этом равенстве множитель $\frac{1}{|z_2|^2}$ положительный, поэтому

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{1}{|z_2|^2}\cdot|z_1\cdot\overline{z_2}|=\frac{1}{|z_2|^2}\cdot|z_1|\cdot|\overline{z_2}|=\frac{1}{|z_2|^2}\cdot|z_1|\cdot|z_2|=\frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

3) Пусть $z_1=z_2=z$. Тогда из выше доказанного равенства $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$ получим

$$|z\cdot z|=|z|\cdot|z|,\ |z^2|=|z|^2.$$

Увеличивая число множителей, получим

$$|z^3|=|z^2\cdot z|=|z^2|\cdot|z|=|z|^2\cdot|z|=|z|^3,\ |z^4|=|z^3\cdot z|=|z^3|\cdot|z|=|z|^3\cdot|z|=|z|^4$$

и т. д.

В результате можно сделать вывод, что для любого натурального n верно равенство

$$|z^n|=|z|^n.$$

2. Доказать, что для действительных чисел a, b, c и d верно равенство

$$a^2+b^2=(c^2+d^2)^6,$$

если

$$a+bi=(c-di)^6. \qquad (1)$$

Решение. Если два комплексных числа равны между собой, то сопряженные им числа будут равными. Поэтому из равенства

$$a+bi=(c-di)^6$$

следует, что

$$a-bi=\overline{(c-di)^6}.$$

Используя первое следствие из рассмотренного выше примера 1, получим

$$\overline{(c-di)^6}=(\overline{c-di})^6=(c+di)^6,$$

т. е.

$$a-bi=(c+di)^6. \qquad (2)$$

Перемножим сопряженные числа, используя равенства (1) и (2):

$$(a+bi)(a-bi)=(c-di)^6\cdot(c+di)^6,$$

$$a^2+b^2=((c-di)(c+di))^6=(c^2+d^2)^6,$$

что и требовалось доказать.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{4}$ Доказать, что для действительных чисел a, b, c и d выполняется равенство:

1) $a^2+b^2=(c^2+d^2)^2$, если $a+bi=(c+di)^2$;
2) $a^2+b^2=(c^2+d^2)^2$, если $a-bi=(c-di)^2$;
3) $a^2+b^2=(c^2+d^2)^3$, если $a+bi=(c+di)^3$;
4) $a^2+b^2=(c^2+d^2)^3$, если $a-bi=(c-di)^3$;
5) $a^2+b^2=(c^2+d^2)^4$, если $a-bi=(c-di)^4$;
6) $a^2+b^2=(c^2+d^2)^4$, если $a+bi=(c+di)^4$.

2. $\boxed{4}$ Выполнить действия:

1) $\frac{2+i}{2-i}-\frac{5}{3-4i}$; 2) $\frac{3-i}{3+i}-\frac{5}{4+3i}$;

3) $\frac{5-7i}{7+5i}+\frac{2+3i}{3-2i}$; 4) $\frac{9+5i}{5-9i}+\frac{3-7i}{7+3i}$;

5) $\left(\frac{1+3i}{3-i}\right)^3+\frac{2i}{1-i}$; 6) $\left(\frac{3-2i}{2+3i}\right)^3-\frac{2i}{1+i}$.

3. $\boxed{5}$ Вычислить:

1) $\left|\frac{4-3i}{3+4i}\right|$; 2) $\left|\frac{4+3i}{3-4i}\right|$;

3) $\left|\frac{2\sqrt{3}+3i\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2i\sqrt{3}}\right|$; 4) $\left|\frac{3\sqrt{5}+5i\sqrt{3}}{5\sqrt{3}-3i\sqrt{5}}\right|$;

5) $\left|\left(\frac{\sqrt[5]{5}+i}{1-i\sqrt[5]{5}}\right)^5\right|$; 6) $\left|\left(\frac{\sqrt[6]{6}-i}{1+i\sqrt[6]{6}}\right)^6\right|$.

4. $\boxed{6}$ Найти произведение двух сопряженных чисел, если одно из них равно значению следующего выражения:

1) $\frac{\sqrt{7}-3i}{3+i\sqrt{7}}$; 2) $\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{2}}{\sqrt{2}-i\sqrt{3}}$; 3) $(2+i)^2+\frac{3}{i}$;

4) $(2-i)^2-\frac{4}{1-i}$; 5) $(3-i)^3$; 6) $(3+i)^3$.

5. $\boxed{7}$ При каких действительных значениях x и y комплексные числа z_1 и z_2 являются сопряженными, если:

1) $z_1=5xy-3x^2i+4i$; $z_2=7+2x^2i$;
2) $z_1=y^2-3xyi$; $z_2=9+8xi-17i$;
3) $z_1=5-x^2-xyi$; $z_2=(2x)^2-(y-5)i$;
4) $z_1=5-xy-(3x)^2i$; $z_2=y-1+9i$;
5) $z_1=x^2y+2i-yi$; $z_2=6x-y^2i$;
6) $z_1=x^2-xy^2i$; $z_2=x+2-yi$?

6. $\boxed{7}$ Найти модуль комплексного числа z, если:

1) $z=\dfrac{\sin 0{,}1\pi+i\cos 0{,}1\pi}{6-8i}$; 2) $z=\dfrac{\cos 0{,}3\pi-i\sin 0{,}3\pi}{8+6i}$;

3) $z=\dfrac{(4-3i)^3}{(\sin 0{,}2\pi+i\cos 0{,}2\pi)^5}$; 4) $z=\dfrac{(6+8i)^3}{(\cos 0{,}4\pi-i\sin 0{,}4\pi)^4}$;

5) $z=\left(\dfrac{\sin 0{,}7\pi+i\sin 0{,}2\pi}{i-\sqrt{2}}\right)^6$; 6) $z=\left(\dfrac{\cos 0{,}8\pi-i\cos 0{,}3\pi}{i\sqrt{2}+1}\right)^8$.

7. $\boxed{8}$ Решить уравнение:

1) $|z|+2iz=9$; 2) $|z|+2i\bar{z}=6$;

3) $i|z|+\bar{z}=3+i$; 4) $|z|+i\bar{z}=5+4i$;

5) $z|\bar{z}|=3-4i$; 6) $\bar{z}|z|=3+4i$.

§ 3. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Примеры с решениями

1. Доказать, что при любых действительных значениях a и b, не равных одновременно нулю, число $z=\left(\dfrac{a+bi}{b-ai}\right)^5$ в комплексной плоскости находится на окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 1.

Решение. Точки окружности с центром в начале координат находятся на одинаковом от него расстоянии, равном радиусу, который равен $|z|$. Найдем $|z|$, используя полученные при решении примера 1 из § 2 формулы:

$$|z|=\left|\left(\frac{a+bi}{b-ai}\right)^5\right|=\left|\left(\frac{a+bi}{b-ai}\right)\right|^5=\left(\frac{|a+bi|}{|b-ai|}\right)^5=$$

$$=\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{b^2+(-a)^2}}\right)^5=\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^5=(1)^5=1.$$

Равенство $|z|=1$ задает на комплексной плоскости единичную окружность с центром в начале координат.

2. Среди чисел z, удовлетворяющих равенству $|\bar{z}|=\left|z+\dfrac{4}{1-i}\right|$, найти число с наименьшим модулем.

Решение. $\dfrac{4}{1+i}=\dfrac{4(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{4(1-i)}{2}=2(1-i)=2-2i.$

Поскольку $|\bar{z}|=|z|$, равенство, данное в условии, примет вид $|z|=|z+2-2i|$ или $|z-0|=|z-(-2+2i)|$.

Значение выражения $|z-0|$ — это расстояние от точки z на координатной плоскости до начала координат, а $|z-(-2+2i)|$ — расстояние от этой же точки до числа $-2+2i$. Эти расстояния могут быть равными лишь в том случае, когда точка z принадлежит серединному перпендикуляру к отрезку с концами в точках $O(0;\ 0)$ и $A(-2;\ 2)$. Середина этого отрезка находится в точке $C(-1;\ 1)$. Поскольку отрезок OA перпендикулярен к своему серединному перпендикуляру, длина отрезка OC будет наименьшей среди длин отрезков OZ, где Z — точка этого серединного перпендикуляра. Поскольку модуль числа z равен расстоянию на комплексной плоскости от точки Z до начала координат, то наименьшее свое значение он примет, когда точка Z совпадет с точкой $C(-1;\ 1)$, т. е. будет соответствовать числу $z=-1+i$ (рис. 19).

3. Изобразите на комплексной плоскости множество чисел z, для которых выполняется условие $\left|z-\frac{6}{1-i}\right| \leqslant \sqrt{2}$.

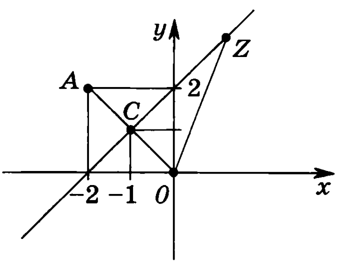


Рис. 19

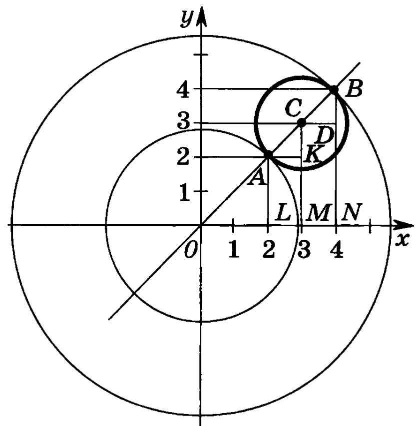


Рис. 20

Среди этих чисел найти число с наименьшим модулем и число с наибольшим модулем.

Решение. $\frac{6}{1-i}=\frac{6\cdot(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{6(1+i)}{2}=3(1+i)=3+3i$.

Условие примет вид

$$|z-(3+3i)| \leqslant \sqrt{2}.$$

Множество таких чисел z на комплексной плоскости представляет собой множество точек, расположенных на и внутри окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $C(3;\ 3)$, что соответствует числу $3+3i$; другими словами — это круг (рис. 20).

Проведем луч из начала координат O через центр окружности C, он пересечет окружность в точках A и B. Луч OC будет являться биссектрисой первого координатного угла плоскости, так как координаты центра $C(3;\ 3)$, а значит, $|OM|=|CM|=3$, $\angle OMC=90°$, $\triangle OMC$ — прямоугольный и равнобедренный, и поэтому $\angle COM=45°$. Дополнительно построим прямоугольные треугольники AKC и CDB (см. рис. 20). Они тоже равнобедренные, так как $\angle CAK=45°$ и $\angle BCD=45°$. Поскольку $|AC|=|CB|=\sqrt{2}$, $|AK|=|AC|\cdot\cos 45°=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$ и $|CD|=|BC|\cdot\cos 45°=$ $=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$, а также $|CK|=1$ и $|BD|=1$.

Отсюда легко найти координаты точек A и B:

$$|OL|=|OM|-|LM|=|OM|-|AK|=3-1=2;$$

$$|AL|=2;\ |ON|=|OM|+|MN|=|OM|+|CD|=3+1=4;$$

$$|BN|=4.$$

Итак, $(2;\ 2)$ — координаты точки A, что соответствует числу $z_1=2+2i$, а $(4;\ 4)$ — координаты точки B, что соответствует числу $z_2=4+4i$. Число z_1 будет иметь наименьший из возможных модулей, а число z_2 — наибольший, поскольку модуль числа равен расстоянию от точки, соответствующей данному числу на координатной плоскости, до начала координат. В этом можно наглядно убедиться, если провести с центром в начале координат две концентрические окружности: одну, проходящую через точку A, другую — через точку B. Все точки, лежащие внутри кольца, образованного этими концентрическими окружностями, будут находиться от начала координат на расстоянии, большем или равном, чем $|OA|$, и меньшем или равном, чем $|OB|$. Построенный нами круг с центром C и радиусом $\sqrt{2}$ ($\sqrt{2}=|CA|=|CB|$) будет расположен внутри этого кольца.

Итак, наименьший модуль имеет число $z_1=2+2i$, а наибольший — число $z_2=4+4i$.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{4}$ Отметить на комплексной плоскости точки A, B, O, соответствующие числам z_1, z_2 и нулю. Определить длины сторон треугольника ABO, если:

1) $z_1=3+4i$, $z_2=\overline{z}_1$;
2) $z_1=4+3i$, $z_2=\overline{z}_1$;
3) $z_1=-3+4i$, $z_2=-\overline{z}_1$;

4) $z_1=-4+3i,\ z_2=-\overline{z}_1$;

5) $z_1=-3-4i,\ z_2=\dfrac{25}{z_1}$;

6) $z_1=-4-3i,\ z_2=\dfrac{25}{z_1}$.

2. $\boxed{5}$ Изобразить на комплексной плоскости множество точек z, если выполняется условие:

1) $|z-3+2i|\leqslant 2$; 2) $|z+1-2i|\leqslant 1$;

3) $|z-3i|\geqslant 2$; 4) $|z-3|\geqslant 2$;

5) $1<|z-2|<2$; 6) $1<|z+i|<3$.

3. $\boxed{6}$ Доказать, что в комплексной плоскости число z лежит на окружности единичного радиуса с центром в начале координат, если:

1) $z=\left(\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}i}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}i}\right)^2$; 2) $z=\left(\dfrac{3\sqrt{5}+5\sqrt{3}i}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}i}\right)^2$;

3) $\overline{z}=\left(\dfrac{\sqrt[3]{3}-i}{1+\sqrt[3]{3}i}\right)^3$; 4) $\overline{z}=\left(\dfrac{\sqrt[3]{2}+3i}{3-\sqrt[3]{2}i}\right)^3$;

5) $iz=\left(\dfrac{\sqrt[5]{5}+i}{1-\sqrt[5]{5}i}\right)^5$; 6) $iz=\left(\dfrac{\sqrt[4]{5}-\sqrt[5]{4}i}{\sqrt[5]{4}+\sqrt[4]{5}i}\right)^6$.

4. $\boxed{7}$ Найти число с наименьшим модулем среди чисел z, удовлетворяющих равенству:

1) $|z|=|z+4i|$;

2) $|z-6i|=|z|$;

3) $|z-2-2i|=|z|$;

4) $|z|=|z+4+4i|$;

5) $|z-1-i|=|z+3+3i|$;

6) $|z+2-2i|=|z-4+4i|$.

5. $\boxed{7}$ Среди чисел z, удовлетворяющих данному условию, найти числа с наименьшим и с наибольшим модулем. Сделать рисунок.

1) $|z-5|\leqslant|4+3i|$;

2) $|z+5|\leqslant|3-4i|$;

3) $\left|z+\dfrac{6}{i}\right|\leqslant|0{,}6-0{,}8i|$;

4) $\left|z-\dfrac{8}{i}\right|\leqslant|0{,}8+0{,}6i|$;

5) $|z-5i|\leqslant\dfrac{(1-i)^3}{1+i}$;

6) $|z+3i|\leqslant\dfrac{(1+i)^3}{1-i}$.

6. $\boxed{8}$ Решить систему уравнений:

1) $\begin{cases} |z-2|=|z+2i|, \\ z\cdot\bar{z}=8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |z+2|=|z-2i|, \\ z\cdot\bar{z}=18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{|z-2i|}{|z-2|}=1, \\ (z-3)(\bar{z}-3)=9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{|z+2|}{|z+2i|}=1, \\ (4+z)(4+\bar{z})=16; \end{cases}$

5) $\begin{cases} z\cdot\bar{z}=(2+i)^2+\dfrac{17}{1+4i}, \\ |\bar{z}|=|z-2i|; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \bar{z}\cdot z=(5-i)^2+\dfrac{101}{1-10i}, \\ |i\bar{z}|=|z+8|. \end{cases}$

§ 4. Тригонометрическая форма комплексного числа

Примеры с решениями

1. Доказать, что для записи в тригонометрической форме числа $\bar{z}$, сопряженного с z, достаточно в тригонометрической форме записи комплексного числа z изменить знак его аргумента на противоположный.

Решение. Пусть число $z=a+bi$ в тригонометрической форме записано следующим образом: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где $r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$. По определению $\bar{z}=a-bi$. Имеем $\bar{z}=r\cos\varphi-(r\sin\varphi)i=r(\cos\varphi-i\sin\varphi)=$ $=r(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))$, так как $\cos(-\varphi)=\cos\varphi$, а $\sin(-\varphi)=$ $=-\sin\varphi$ по свойствам четности функции косинус и нечетности функции синус соответственно. Кроме того, $|\bar{z}|=|z|=2$. Значит, равенство $\bar{z}=r(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))$ представляет собой тригонометрическую форму записи числа $\bar{z}$, что и требовалось доказать.

2. Найти тригонометрическую форму комплексного числа $z=\operatorname{tg}\frac{5}{3}\pi\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+2i\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)$ и тригонометрическую форму сопряженного с ним числа $\bar{z}$.

Решение. Согласно определению тригонометрической формы комплексного числа его требуется записать в следующем виде: $z=|z|\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. В начале, используя формулы приведения, вычислим:

$$\operatorname{tg}\frac{5}{3}\pi=\operatorname{tg}\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3},$$

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Итак, $z=\operatorname{tg}\frac{5}{3}\pi\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+2i\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)=$

$$=-\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+2i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)=$$

$$=\sqrt{3}\left(-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)\right).$$

Используя тригонометрические тождества $-\sin\alpha=\sin(-\alpha)$ и $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, имеем

$$-\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\right)=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right).$$

В результате получаем

$$z=\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)\right). \qquad (*)$$

Пусть $\varphi=\frac{5\pi}{6}-\alpha$, тогда $z=\sqrt{3}(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, причем $|z|=\sqrt{3}$. Значит, равенство (*) представляет собой запись числа z в тригонометрической форме.

По определению числа, сопряженного числу z, имеем

$$\bar{z}=\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)\right).$$

Используя тождества $\cos\alpha=\cos(-\alpha)$ и $-\sin\alpha=\sin(-\alpha)$, получаем

$$\bar{z}=\sqrt{3}\left(\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\alpha-\frac{5\pi}{6}\right)\right), \qquad (**)$$

что представляет собой запись числа $\bar{z}$ в тригонометрической форме, где $|\bar{z}|=\sqrt{3}$, а аргумент равен $\alpha-\frac{5\pi}{6}$. Заметим, что равенство (**) можно было получить из равенства (*), используя утверждение примера 1. Запишем ответ к задаче 2:

$$z=\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)\right),$$

$$\bar{z}=\sqrt{3}\left(\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\alpha-\frac{5\pi}{6}\right)\right).$$

3. Доказать, что если $z=\sin\frac{7}{6}\pi\sin\alpha+i\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\alpha$, то $\bar{z}=\frac{1}{4z}$ при любом действительном значении α.

Решение. В начале, используя формулы приведения, вычислим:

$$\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

Следовательно, $z = -\frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{1}{2}i\cos\alpha$.

Поскольку справедливо равенство $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, то $\bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$. Найдем $|z|^2$:

$$|z|^2 = \left(-\frac{1}{2}\sin\alpha\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\cos\alpha\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2\alpha + \frac{1}{4}\cos^2\alpha =$$
$$= \frac{1}{4}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = \frac{1}{4}.$$

Значит, $\bar{z} = \frac{1}{4z}$, что и требовалось доказать.

4. Построить на комплексной плоскости множество чисел z, для которых выполняется равенство $|z+6| = 3$. Среди этих чисел найти такие, которые имеют наименьший по абсолютной величине аргумент.

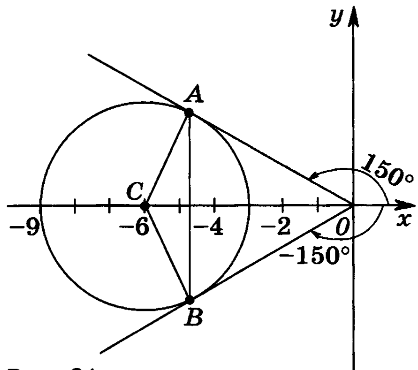


Рис. 21

Решение. Множество чисел z, для которых выполняется равенство $|z+6| = 3$ на комплексной плоскости,— окружность радиуса 3 с центром в точке $C(-6;\ 0)$ (рис. 21). Проведем из начала координат O два луча, касающиеся этой окружности в точках A и B. Угол между положительным направлением оси абсцисс и лучом OA, отсчитываемый против часовой стрелки, положительный, а угол между положительным направлением оси абсцисс и лучом OB, отсчитываемым по часовой стрелке, отрицательный. По абсолютной величине эти углы равны и являются наименьшими среди остальных аргументов точек окружности. Рассмотрим треугольник OAC, в котором $\angle OAC = 90°$, $|OC| = 6$, $|CA| = 3$. В нем $\frac{|CA|}{|OC|} = \sin\angle AOC$, значит, $\sin\angle AOC = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, следовательно, $\angle AOC = 30°$, а угол между положительным направлением оси абсцисс и лучом OA равен 150°. Поскольку окружность, а также точки A и B симметричны относительно оси абсцисс, угол между положительным направлением оси абсцисс и лучом OB по абсолютной величине также будет равен 150°. Все остальные аргументы точек, лежащих на окружности, будут по абсолютной величине больше 150°. Точке A соответствует число

$$z_1 = |OA|(\cos 150° + i\sin 150°).$$

Рассмотрим $\triangle OAC$. В нем $|OA|=|OC|\cdot\cos 30°$, откуда $|OA|=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$, значит,

$$z_1=3\sqrt{3}(\cos 150°+i\sin 150°)=$$
$$=3\sqrt{3}(\cos(180°-30°)+i\sin(180°-30°))=$$
$$=3\sqrt{3}(-\cos 30°+i\sin 30°)=3\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=-4{,}5+\frac{3\sqrt{3}}{2}i.$$

Точке B будет соответствовать число

$$z_2=-4{,}5-\frac{3\sqrt{3}}{2}i,\ z_2=3\sqrt{3}(\cos(-150°)+i\sin(-150°)).$$

Ответ. $z_1=-4{,}5+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=-4{,}5-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$ или

$z_1=3\sqrt{3}(\cos 150°+i\sin 150°)$, $z_2=3\sqrt{3}(\cos(-150°)+i\sin(-150°))$.

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{5}$ Найти все аргументы φ комплексного числа z и указать наименьший по абсолютной величине аргумент (или аргументы); число z записать в тригонометрической форме, если:

1) $z=(1-i)^2$; 2) $z=(1+i)^2$;

3) $z=\frac{i}{(1+i)^2}$; 4) $z=\frac{i}{(1-i)^2}$;

5) $z=\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}+i\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$; 6) $z=\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}-i\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$.

2. $\boxed{6}$ Записать в тригонометрической форме данное число z и сопряженное с ним число $\bar{z}$, если:

1) $z=\cos 0{,}9\pi+i\sin 0{,}1\pi$; 2) $z=\cos 0{,}2\pi+i\sin 0{,}8\pi$;

3) $z=\cos 0{,}2\pi-i\cos 0{,}3\pi$; 4) $z=\sin 0{,}3\pi-i\sin 0{,}2\pi$;

5) $z=\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

6) $z=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+i\cos\left(\frac{7\pi}{4}+\alpha\right)$.

3. $\boxed{7}$ Доказать, что при любом действительном значении α верно равенство:

1) $\bar{z}=\frac{1}{z}$, если $z=\sin\alpha-i\cos\alpha$;

2) $\bar{z}=\frac{1}{z}$, если $z=\cos\alpha-i\sin\alpha$;

3) $\bar{z}=\frac{1}{2z}$, если $z=\sin\frac{3\pi}{4}\sin\alpha+i\cos\frac{3\pi}{4}\cos\alpha$;

4) $\overline{z}=\frac{1}{z}$, если $z=\cos\frac{5\pi}{4}\cos\alpha-i\sin\frac{5\pi}{4}\sin\alpha$;

5) $\overline{z}=\frac{3}{z}$, если $z=\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\cdot\sin\alpha+2i\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\cos\alpha$;

6) $\overline{z}=\frac{3}{z}$, если $z=2\cos\frac{5\pi}{6}\cdot\cos\alpha+i\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}\cdot\sin\alpha$.

4.$\boxed{8}$ На комплексной плоскости изобразить множество чисел z, для которых выполняется данное равенство. Среди этих чисел указать то (или те), которое имеет наименьший по абсолютной величине аргумент. Записать это число в тригонометрической форме, а также в алгебраической форме, если:

1) $|z+1-i|=1$; 2) $|z+1+i|=1$;

3) $|z-2i|=1$; 4) $|z+2i|=1$;

5) $|z+2|=1$; 6) $|z+4|=2$.

§ 5. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Формула Муавра

Задания для самостоятельной работы

1.$\boxed{5}$ Записать в тригонометрической форме число:

1) $z=(\sqrt{3}-i)(\sin\varphi+i\cos\varphi)$;

2) $z=(1+i\sqrt{3})(\cos\varphi-i\sin\varphi)$;

3) $z=\dfrac{1-i}{\sin\varphi+i\cos\varphi}$; 4) $z=\dfrac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{i-1}$;

5) $z=\left(\dfrac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{\cos\varphi-i\sin\varphi}\right)^4$; 6) $z=\left(\dfrac{\sin\varphi-i\cos\varphi}{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}\right)^6$.

2.$\boxed{6}$ Записать в алгебраической форме числовое выражение и найти его значение:

1) $\left(\dfrac{\cos 0{,}3\pi+i\cos 0{,}2\pi}{\sin 0{,}2\pi-i\sin 0{,}3\pi}\right)^5$; 2) $\left(\dfrac{\sin 0{,}3\pi+i\sin 0{,}2\pi}{\cos 0{,}2\pi-i\cos 0{,}3\pi}\right)^5$;

3) $\dfrac{\cos^5 0{,}3\pi}{(1+\cos 0{,}6\pi+i\sin 0{,}6\pi)^5}$;

4) $(i-\operatorname{ctg}1{,}1\pi)^5\cdot(1-\cos 0{,}2\pi+i\sin 0{,}2\pi)^5$;

5) $\left(\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}-i}{i+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{12}}\right)^9$; 6) $\left(\dfrac{1+i\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{1-i\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}\right)^9$.

3.$\boxed{7}$ Отметить на комплексной плоскости точку z с модулем 1. Построить точку w и указать ее модуль и аргумент, приняв аргумент z за φ_0, где $-180° \leqslant \varphi_0 \leqslant 180°$, если:

1) $w = iz$; 2) $w = \frac{z}{i}$; 3) $w = (1+i)z$;

4) $w = (1-i)z$; 5) $w = \frac{\bar{z}}{z}$; 6) $w = \frac{z}{\bar{z}}$.

4. $\boxed{7}$ Построить и описать множество точек комплексной плоскости iz, если для точек z выполняется условие:
1) $|z-3i| = 2$; 2) $|z-3| = 2$; 3) $|z+1-i| = 1$;
4) $|z-1+i| = 1$; 5) $|z-2| \leqslant 2$; 6) $|z+i| \leqslant 1$.

5. $\boxed{8}$ Используя формулу Муавра, выразить через $\sin x$ и $\cos x$:

1) $\sin 3x$; 2) $\cos 3x$; 3) $\cos 4x$; 4) $\sin 4x$.

6. $\boxed{9}$ Используя формулу Муавра, выразить через $\operatorname{tg} x$:

1) $\operatorname{tg} 3x$; 2) $\operatorname{tg} 4x$.

§ 6. Квадратное уравнение с комплексным неизвестным

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{5}$ Решить уравнение:
1) $2z^2 + 4{,}5 = 0$; 2) $5z^2 + 7{,}2 = 0$;
3) $z^2 + 2z + 5 = 0$; 4) $z^2 - 2z + 17 = 0$;
5) $z^2 - 2\sqrt{2}z + 5 = 0$; 6) $z^2 + 2\sqrt{3}z + 5 = 0$.

2. $\boxed{6}$ Составить приведенное квадратное уравнение с действительными коэффициентами, имеющее корень z_1, если:
1) $z_1 = 5 - 0{,}5i$; 2) $z_1 = -4 - 0{,}4i$;
3) $z_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2i}$; 4) $z_1 = \frac{i}{1-\sqrt{2}}$.

3. $\boxed{7}$ Решить на множестве комплексных чисел уравнение:
1) $z^3 + 64 = 0$; 2) $z^3 - 27 = 0$;
3) $9z^4 - 64 = 0$; 4) $81z^4 - 4 = 0$;
5) $z^4 + 6z^2 + 5 = 0$; 6) $z^4 + 7z^2 + 12 = 0$.

4. $\boxed{7}$ Решить уравнение:
1) $z^2 = i$; 2) $z^2 = -i$; 3) $z^2 = 8 + 6i$;
4) $z^2 = -8 - 6i$; 5) $z^4 + 4 = 0$; 6) $z^4 + 1 = 0$.

5. $\boxed{7}$ Разложить на множители, содержащие z лишь в первой степени:
1) $2z^2 + 3$; 2) $3z^2 + 7$; 3) $2z^2 + 5z + 2$;
4) $3z^2 + 7z + 2$; 5) $8z^3 + 1$; 6) $27z^3 + 1$.

§ 7. Извлечение корня из комплексного числа. Алгебраические уравнения

Примеры с решениями

1. Построить на комплексной плоскости множество всех корней уравнения $z^n=(-4+3i)^n$, если:

1) $n=3$; 2) $n=4$; 3) $n=6$.

Записать в тригонометрической форме общую формулу корней этого уравнения.

Решение. Один из корней уравнения $z^n=(-4+3i)^n$ виден сразу: это $z_1=-4+3i$. Остается определить остальные корни.

1) $n=3$, значит, и различных корней уравнения $z^3=(-4+3i)^3$ тоже три, причем отличаться от z_1 они будут только аргументом, а именно

$$\arg z_2=\arg z_1+\frac{2\pi}{3},\quad \arg z_3=\arg z_1-\frac{2\pi}{3}.$$

Модули корней равны между собой:

$$|z_3|=|z_2|=|z_1|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5.$$

Сделаем рисунок (рис. 22). Аргументом z_1 является по определению угол между положительным направлением оси абсцисс и вектором Oz_1, т. е. угол φ_1 на рисунке. $\varphi_1=\arg z_1=\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$. Обозначим через α угол, равный $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, тогда $\operatorname{arctg}\left(-\frac{3}{4}\right)=\pi-\alpha$, т. е.

$$\varphi_1=\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4},\quad \arg z_2=\varphi_1-\frac{2\pi}{3},\quad \arg z_3=\varphi_1+\frac{2\pi}{3}.$$

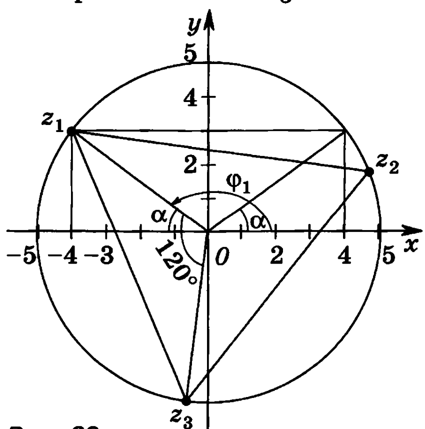


Рис. 22

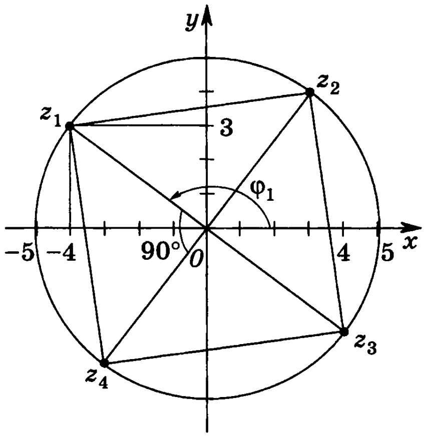


Рис. 23

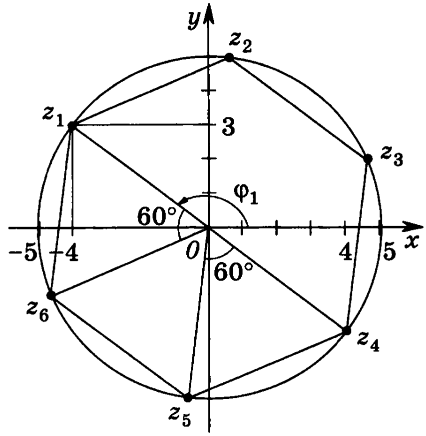


Рис. 24

Поскольку

$$\frac{2\pi}{3} = 120° + 60° + 60°,$$

то построить точки z_2 и z_3 легко: нужно раствором циркуля, равным радиусу окружности, на которой лежит точка $z_1 = -4 + 3i$, т. е. радиусом, равным 5, сделать последовательно две засечки на этой окружности, начиная от z_1 вправо, и получить точку z_2, а затем две засечки от z_1 влево и получить точку z_3.

Точки z_1, z_2, z_3 будут являться вершинами правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 5 с центром в начале координат. Общая формула корней исходного уравнения такова:

$$z = 5\left(\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \frac{2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \frac{2\pi k}{3}\right)\right),$$

где $k \in \boldsymbol{Z}$.

2) $n = 4$, уравнение $z^4 = (-4 + 3i)^4$ имеет 4 корня; обозначим их через z_1, z_2, z_3, z_4, где $z_1 = -4 + 3i$. Их модули будут равны 5, а аргументы будут последовательно отличаться на $\frac{2\pi}{4}$, т. е. на $\frac{\pi}{2}$. Значит, z_1, z_2, z_3, z_4 будут являться вершинами квадрата, вписанного в окружность с центром в начале координат и радиусом 5 (рис. 23). Общая формула корней уравнения будет иметь вид

$$z = 5\left(\cos\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \frac{\pi k}{2}\right) + i\sin\left(\pi - \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \frac{\pi k}{2}\right)\right),$$

где k — любое целое число.

3) В этом случае, когда $n=6$, уравнение $z^6=(-4+3i)^6$ будет иметь 6 корней, и они будут являться вершинами правильного шестиугольника, вписанного в окружность радиуса 5 с центром в начале координат (рис. 24). Аргументы корней будут последовательно отличаться на число $\frac{2\pi}{6}$, или $\frac{\pi}{3}$. Общая формула корней будет иметь вид

$$z=5\left(\cos\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\frac{\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\frac{\pi k}{3}\right)\right),$$

где k — любое целое число.

2. Решить уравнение

$$z^6+\left(\frac{1}{8}-8i\right)z^3-i=0.$$

Решение. Легко заметить, что данное уравнение можно свести к квадратному с помощью замены:

$$z^3=w.$$

Тогда $z^6=w^2$, а исходное уравнение примет вид

$$w^2+\left(\frac{1}{8}-8i\right)w-i=0.$$

Решим это уравнение:

$$w=-\frac{1}{16}+4i\pm\sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^2-2\cdot\frac{1}{16}\cdot 4i+(4i)^2+i},$$

$$w=-\frac{1}{16}+4i\pm\sqrt{\left(\frac{1}{16}\right)^2+\frac{1}{2}i+(4i)^2}.$$

Так как $\left(\frac{1}{16}\right)^2+\frac{1}{2}i+(4i)^2=\left(\frac{1}{16}\right)^2+2\cdot\frac{1}{16}\cdot 4i+(4i)^2=\left(\frac{1}{16}+4i\right)^2$, то

$$w=-\frac{1}{16}+4i\pm\left(\frac{1}{16}+4i\right).$$

Или $w_1=8i$, $w_2=-\frac{1}{8}$.

Произведя обратную замену, получим два уравнения: $z^3=8i$ и $z^3=-\frac{1}{8}$. Решим уравнение

$$z^3=8i. \qquad (1)$$

Представим число $8i$ в тригонометрической форме:

$$8i=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right),$$

$$8i=8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right),$$

где k — целое число.

Извлекая кубический корень из выражений, стоящих в обеих частях уравнения (1) имеем

$$z=\sqrt[3]{8}\cdot\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right),$$

$$z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\cdot k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\cdot k\right)\right),$$

где $k=0$; 1; 2. (Остальные значения корней будут совпадать с этими тремя.)

Вычислим эти корни:

если $k=0$, то $z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+i$;

если $k=1$, то $z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=$
$=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=2\left(-\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}+i$;

если $k=2$, то $z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)\right)=$
$=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{8\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{8\pi}{6}\right)\right)=2\left(\cos\frac{9}{6}\pi+i\sin\frac{9}{6}\pi\right)=$
$=2\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)=2(0+i(-1))=-2i.$

Итак, имеем три корня уравнения $z^3=8i$:

$$\sqrt{3}+i;\ -\sqrt{3}+i;\ -2i.$$

Аналогично решим уравнение $z^3=-\frac{1}{8}$ с помощью следующей замены:

$$-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}(\cos\pi+i\sin\pi)=\frac{1}{8}(\cos(\pi+2\pi k)+i\sin(\pi+2\pi k)).$$

Извлечем кубический корень из выражений, стоящих в левой и правой частях уравнения:

$$z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right),\text{ где } k=0;\ 1;\ 2.$$

Если $k=0$, то $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$;

если $k=1$, то $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)=$
$=\frac{1}{2}(\cos\pi+i\sin\pi)=-\frac{1}{2}$;

если $k=2$, то $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\right.$
$\left.+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i.$

В результате исходное уравнение будет иметь шесть корней:

$$\sqrt{3}+i;\ -\sqrt{3}+i;\ -2i;\ \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i;\ -\frac{1}{2};\ \frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i.$$

Задания для самостоятельной работы

1. $\boxed{7}$ Построить на комплексной плоскости множество всех корней данного уравнения, определить их и записать в тригонометрической форме общую формулу для нахождения этих корней.

1) $z^3=(\sqrt{3}+i)^3$; 2) $z^3=(1+i\sqrt{3})^3$;
3) $z^4=(1-i)^4$; 4) $z^4=(-1+i)^4$;
5) $z^6=(-1+i\sqrt{3})^6$; 6) $z^6=(\sqrt{3}-i)^6$.

2. $\boxed{7}$ Найти все корни уравнения:

1) $iz^2+2=0$; 2) $iz^2-2=0$;
3) $z^3+i=0$; 4) $z^3-i=0$;
5) $4+z^4=0$; 6) $4z^4+1=0$.

3. $\boxed{8}$ Решить уравнение:

1) $z^2+2iz+3=0$;
2) $z^2-2iz+15=0$;
3) $z^4+(1-2i)z^2-2i=0$;
4) $z^4+(9+2i)z^2+18i=0$;
5) $z^6+(8-i)z^3-8i=0$;
6) $z^6-(8-i)z^3-8i=0$.

4. $\boxed{9}$ Записать общую формулу для нахождения всех корней уравнения:

1) $z^5=32\left(\cos\frac{5\pi}{7}+i\sin\frac{5\pi}{7}\right)$;
2) $z^7=128(\cos 0{,}7\pi+i\sin 0{,}7\pi)$;
3) $z^6=-1+i$;
4) $z^6=1-i$;
5) $z^{10}=6+8i$;
6) $z^{10}=8-6i$.

Контрольная работа

1. Записать числовое выражение
$$(1-i)^4-\frac{3-i}{3-4i}\quad\left[\frac{7-5i}{i-3}+(1+i)^6\right]$$
комплексным числом в алгебраической форме.
2. На множестве комплексных чисел решить уравнение:
$$1)\ z^2-4z+13=0;\quad 2)\ z^3+8i=0$$
$$[1)\ z^2-6z+13=0;\quad 2)\ 8i-z^3=0].$$
3. Изобразить на комплексной плоскости множество чисел z, для которых выполняется равенство
$$|iz|=|z+6-6i|\quad [|\overline{z}|=|z-6+6i|].$$
Среди этих чисел указать число с наименьшим модулем.
4. При каких действительных значениях α число
$$z=(\sin\pi\alpha+i\cos\pi\alpha)^{10}\quad [z=(\cos\pi\alpha-i\sin\pi\alpha)^8]$$
является:

1) действительным; 2) чисто мнимым?

Ответы

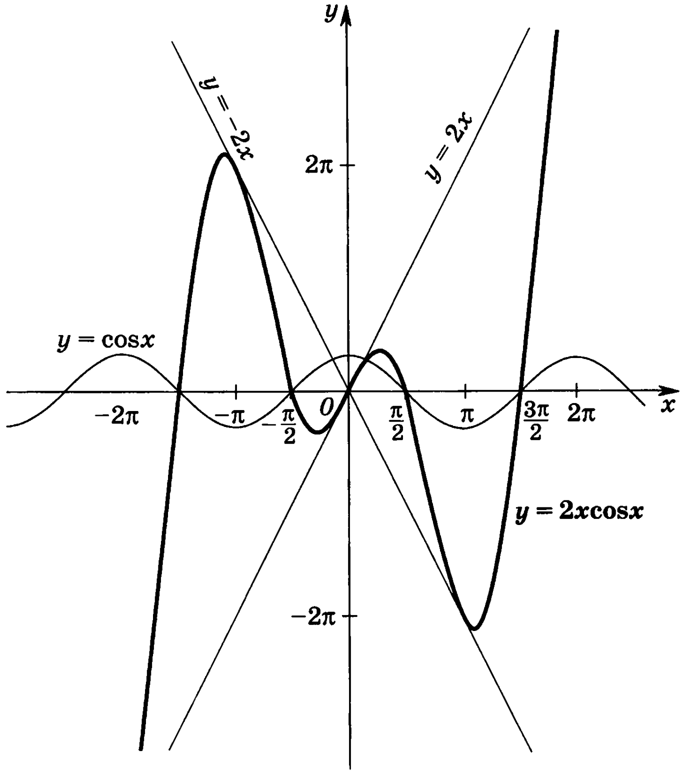
Глава I

§ 1. 1. 1) $-\frac{\pi}{4}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pi n<x\leqslant\frac{\pi}{6}+\pi n$, $\frac{5\pi}{6}+\pi n\leqslant x<\pi(1+n)$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $\frac{\pi}{6}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{3}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 5) $\frac{5\pi}{6}+2\pi n\leqslant x\leqslant\frac{13\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 6) $-\arccos\frac{1}{3}+2\pi n\leqslant x\leqslant\arccos\frac{1}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 7) $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n\leqslant x\leqslant$ $\leqslant-\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 8) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 2. 1) $\frac{\pi}{4}+\pi n<x<$ $<\frac{3\pi}{4}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $\pi n<x\leqslant\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) если $a>1$, то $x=\frac{4n+1}{2}\pi$, $n\in\boldsymbol{Z}$; если $0<a<1$, то $2\pi n<x<2\pi n+2\pi$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $\frac{\pi}{4}+\pi n<$ $<x<\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 3. 1) $-1\leqslant y\leqslant\frac{5}{4}$; 2) $-7\leqslant y\leqslant-1$; 3) $-1\leqslant y\leqslant 1$; 4) $0\leqslant y\leqslant 2$; 5) $-\sqrt{13}\leqslant y\leqslant\sqrt{13}$; 6) $-2\leqslant y\leqslant 2$.

§ 2. 1. 1) Нечетная; 2), 3) ни четная, ни нечетная; 4) четная. 2. 1), 3), 7), 8) Четная; 4) — 6) ни четная, ни нечетная. 4. 1) 2π; 2) 2π; 3) π; 4) 2π. 8. 1) Нет; 2) нет. 9. 1) Нет; 2) нет.

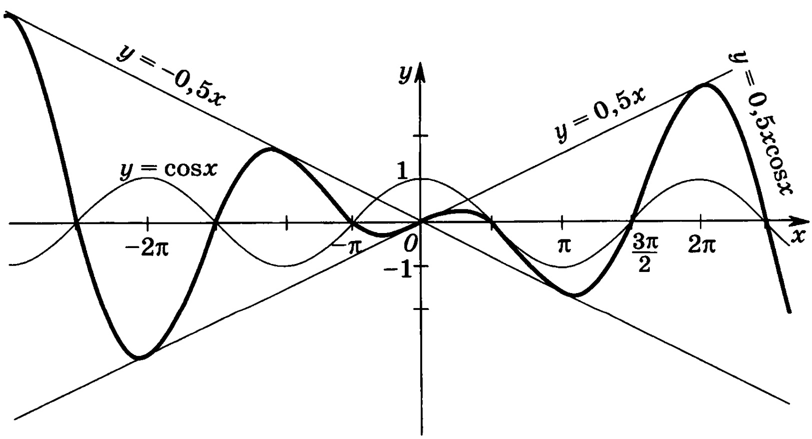
§ 3. 1. 1) $x\in\boldsymbol{R}$; $y\in[-1;\ 1]$, $T=\pi$, $x=\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in[-1;\ 1]$, $T=4\pi$, $x=2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in[-2;\ 2]$, $T=2\pi$, $x=\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $x\in\boldsymbol{R}$; $y\in[-0{,}5;\ 0{,}5]$, $T=2\pi$, $x=\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 5) $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in[-1;\ 1]$, $T=2\pi$, $x=\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 6) $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in[-3;\ 3]$, $T=2\pi$, $x=\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 7) $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in[-1;\ 1]$, $T=\pi$, $x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 8) $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in[-1;\ 1]$, $T=4\pi$, $x=\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. 2. 1), 2) Убывает; 2), 3) возрастает. 4. 1) Наименьшее значение: -1, наибольшее значение: $-\frac{1}{2}$; 2) наименьшее значение: $-2\frac{1}{2}$; наибольшее значение: -1. 5. 1) $x=0$; 2) $x=0$. 6. 1) $x_1=\frac{3}{4}$, $x_2=1$, $x_3=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $x_3\neq\frac{\pi}{4}$; 2) $x_1=\frac{1}{3}$, $x_2=1$, $x_3=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$, $x_3\neq\frac{\pi}{6}$. 7. 1) Рис. 25; 2) рис 26; 3) рис. 27; 4) рис. 28. 8. 1) Нет; 2) нет.

§ 4. 1. 1) $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in[-1;\ 1]$, $T=\pi$, $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in[-1;\ 1]$, $T=4\pi$, $x=\pi+2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in[-3;\ 3]$, $T=2\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 4) $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in[-0{,}5;\ 0{,}5]$, $T=2\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 5) $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in[-1;\ 1]$, $T=2\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 6) $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in[-2;\ 2]$, $T=2\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 7) рис. 29, $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in[-1;\ 3]$, $T=2\pi$, $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$; 8) $x\in\boldsymbol{R}$, $y\in[0;\ 1]$, $T=2\pi$, $x=\pi+\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$.



y
y = −2x
y = 2x
2π
y = cos x
−2π
−π
−π/2
0
π/2
π
3π/2
2π
x
y = 2x cos x
−2π

Рис. 25



y = −0,5x
y
y = 0,5x
y = 0,5x cos x
y = cos x
1
−2π
−π
0
−1
π
3π/2
2π
x

Рис. 26

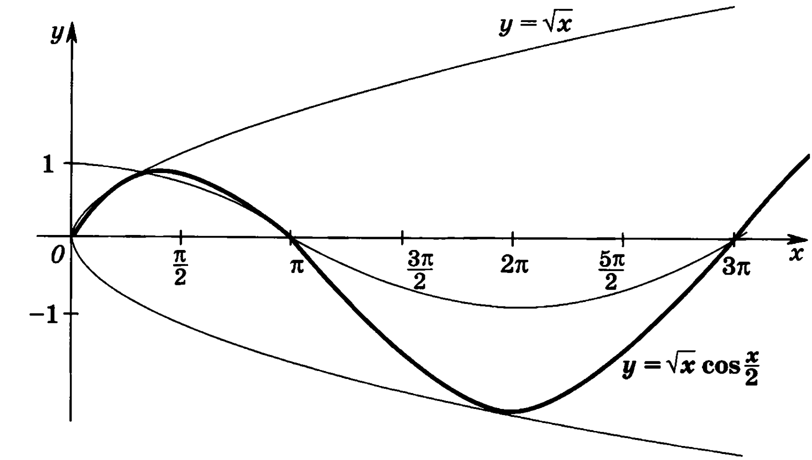


Рис. 27

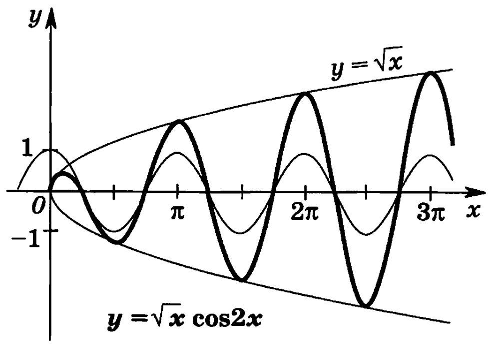


Рис. 28

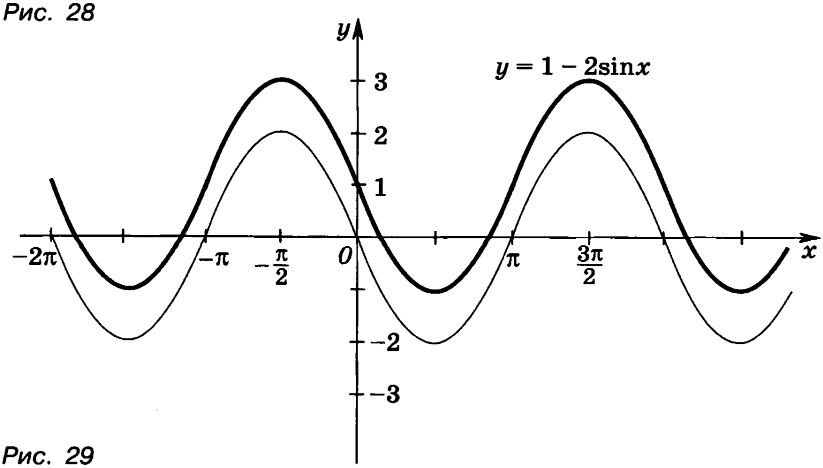


Рис. 29

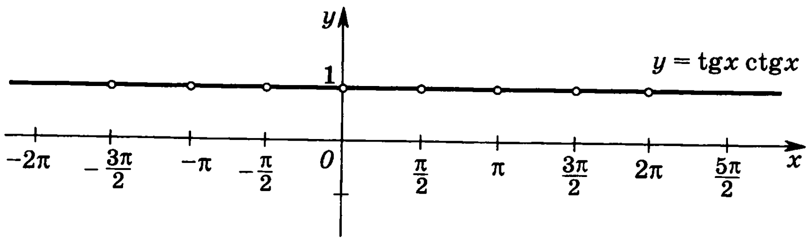


Рис. 30

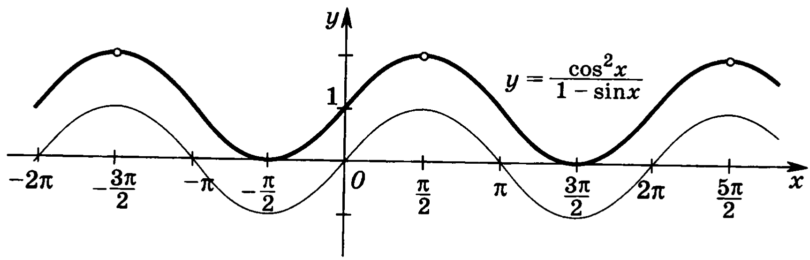


Рис. 31

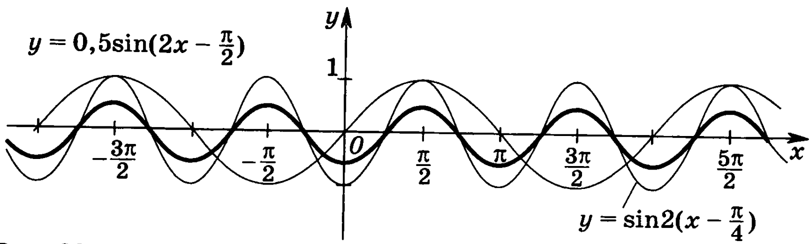


Рис. 32

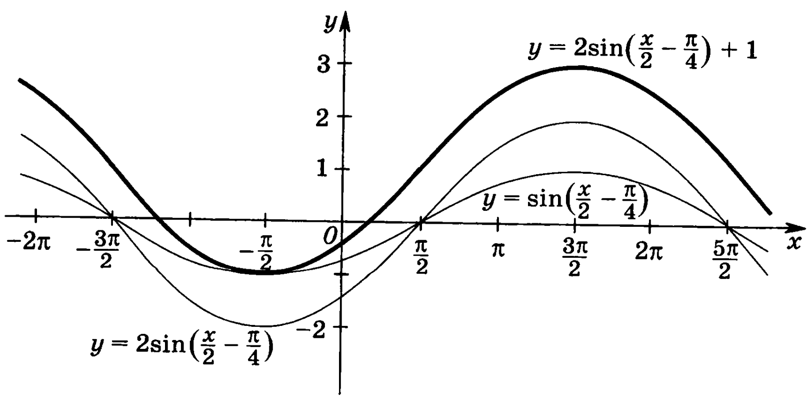


Рис. 33

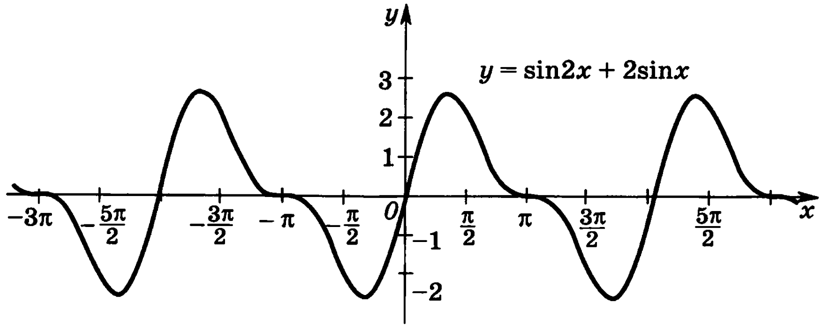


Рис. 34

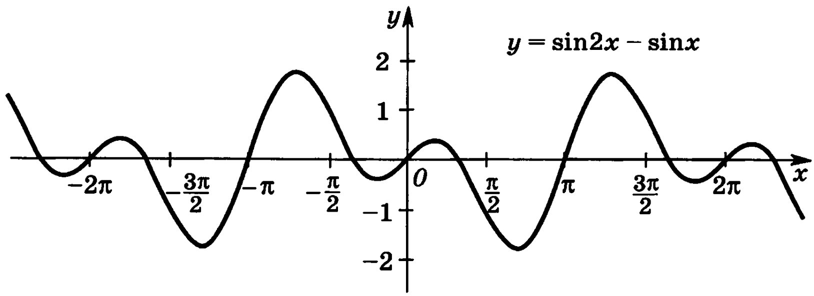


Рис. 35

2. 1), 2) 2 корня. **3.** 1) $0 < x \leqslant 1$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; 2) $0 < x < 1$, $2\pi n - \pi < x < 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{N}$. **4.** 1) Рис. 30; 2) рис. 31. **5.** 1) Рис. 32; 2) рис. 33; 3) рис. 34; 4) рис. 35. **6.** 1) $y = 5\sin\left(x + \arcsin\frac{4}{5}\right)$, рис. 36; 2) $y = 1{,}3\sin\left(x - \arcsin\frac{12}{13}\right)$, рис. 37.

§ 5. 1. 1) $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $y \in \boldsymbol{R}$, $T = \frac{\pi}{2}$; 2) $x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $y \in \boldsymbol{R}$, $T = 2\pi$; 3) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $y \in \boldsymbol{R}$, $T = \pi$; 4) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $y \in \boldsymbol{R}$, $T = \pi$; 5) $x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $y \in \boldsymbol{R}$, $T = \pi$; 6) $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $y \in \boldsymbol{R}$, $T = \pi$; 7) $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $y \in \boldsymbol{R}$, $T = 2\pi$; 8) $x \neq \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$, $y \in \boldsymbol{R}$, $T = \frac{\pi}{2}$. **2.** 1) — 4) Четная; 5), 6) ни четная, ни нечетная. **3.** 1) Четная, рис. 38; 2) четная, рис. 39. **4.** 1) $T = \pi$; 2) $T = \pi$; 3) $T = 2\pi$; 4) $T = \pi$. **5.** 1) $-\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1} < x < 0$, $0 < x < \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$; 2) $x < -\sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$, $x > \sqrt{\frac{4}{\pi} - 1}$. **6.** 1) $-2 \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < x \leqslant 0$; 2) $\operatorname{ctg} x \neq \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$,

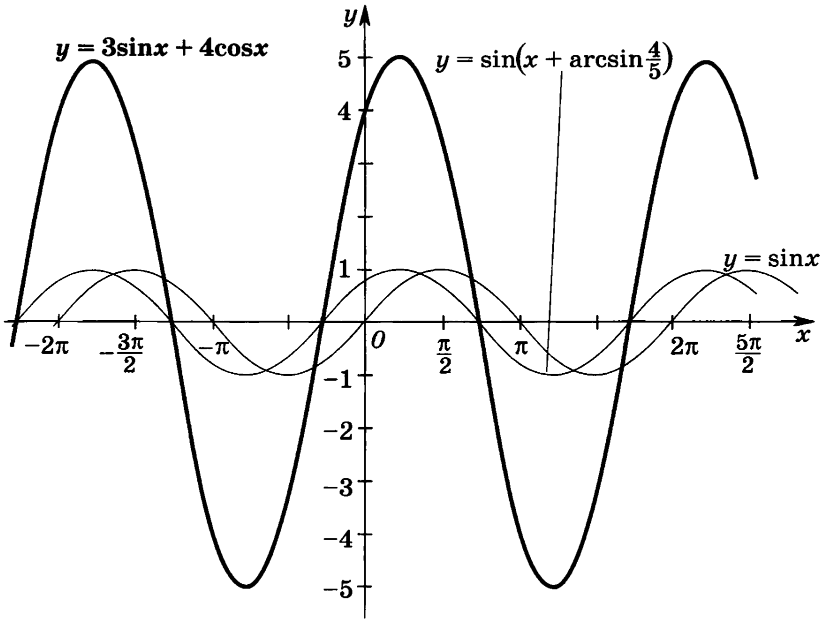


Рис. 36

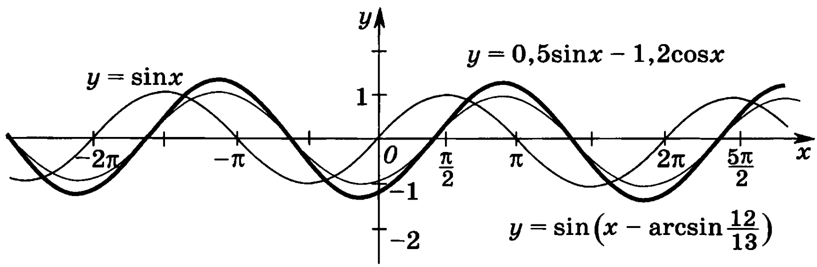


Рис. 37

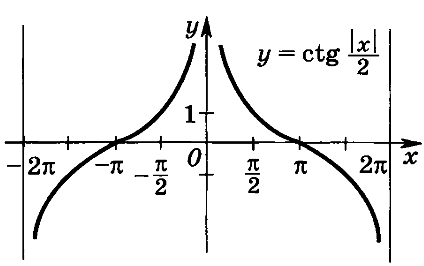


Рис. 38

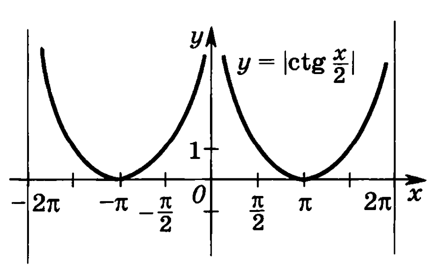


Рис. 39

$0<x\leqslant 3$. **7.** 1) Рис. 40; 3) рис. 41; 4) рис. 42. **8.** 1) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $3\leqslant x<\pi$, $2\pi n<x<2\pi n+\pi$, $k\in \boldsymbol{N}$, $n\in \boldsymbol{N}$; 2) $k\pi<x<k\pi+\frac{\pi}{4}$, $\pi n+\operatorname{arctg}4\leqslant x<$ $<\pi n+\frac{\pi}{2}$, $x=\pi l+\operatorname{arctg}2$, $k\in \boldsymbol{Z}$, $l\in \boldsymbol{Z}$, $n\in \boldsymbol{Z}$.

§ 6. 1. 1) $-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{3}$; 2) $-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{6}$; 3) $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{4}$; 4) $-\arccos\frac{2}{\pi}\leqslant$ $\leqslant x\leqslant \arccos\frac{2}{\pi}$; 5) $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{4}$; 6) $-\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{4}$. **2.** 1) $-2\leqslant x\leqslant 0$; $-\frac{3\pi}{2}\leqslant y\leqslant \frac{3\pi}{2}$; 2) $-2\leqslant x\leqslant -\sqrt{2}$; $\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2$; $-\frac{3\pi}{2}\leqslant y\leqslant \frac{3\pi}{2}$; 3) $-3\leqslant x\leqslant -1$; $-\pi\leqslant y\leqslant 0$; 4) $-\sqrt{6}\leqslant x\leqslant -2$, $2\leqslant x\leqslant \sqrt{6}$; $0\leqslant y\leqslant 5\pi$; 5) $x\in \boldsymbol{R}$; $-\pi\leqslant y\leqslant \pi$;

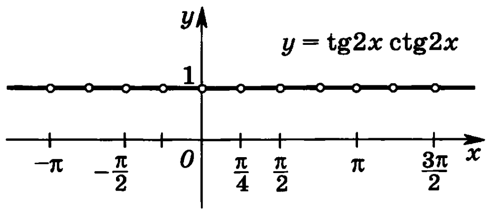


Рис. 40

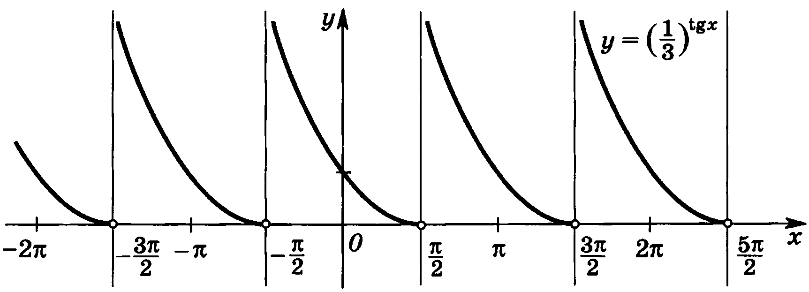


Рис. 41

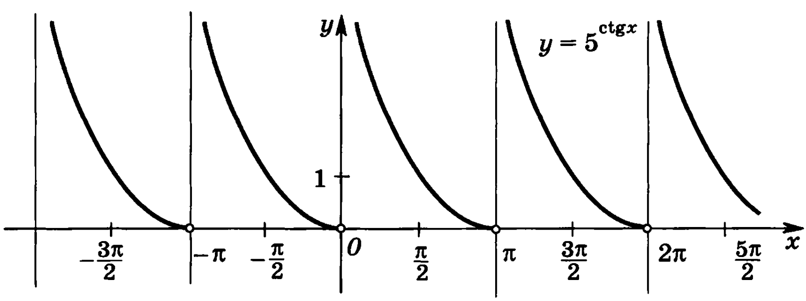


Рис. 42

6) $x \in \boldsymbol{R}$; $0 < y < 3\pi$. **3.** 1) $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2} < y < \pi$; 3) $0 \leqslant y \leqslant 1$; 4) $-\frac{\pi}{4} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{4}$. **4.** 1) — 3) Четная; 4) нечетная. **5.** 1) $-3 \leqslant y \leqslant 1$; 2) $3 \leqslant y \leqslant 6$. **6.** 1) Рис. 43; 2) рис. 44. **7.** 1) Рис. 45 (а, б); 2) рис. 46 (а, б); 3) рис. 47 (а, б); 4) рис. 48 (а, б).

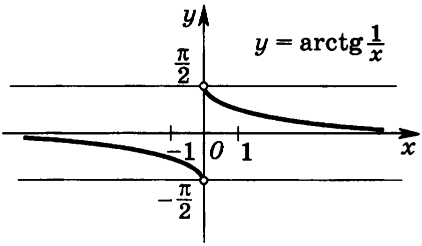


Рис. 43

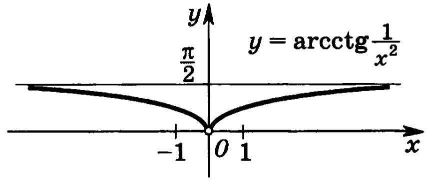
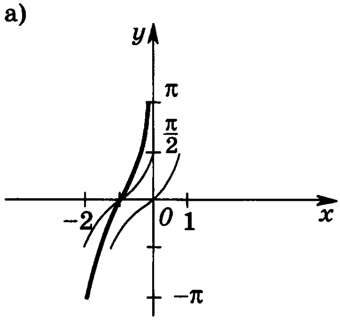


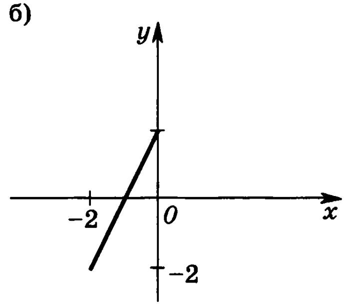
Рис. 44

а)



$y = 2\arcsin(x + 1)$

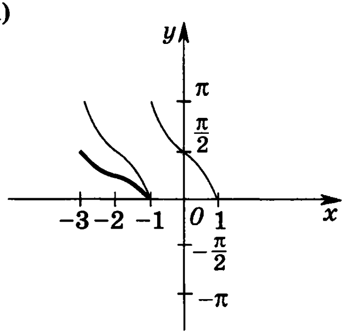
б)



$y = 2\sin(\arcsin(x + 1))$

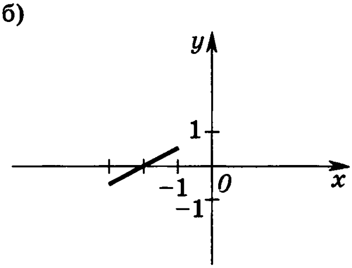
Рис. 45

а)



$y = 0{,}5\arccos(2 + x)$

б)



$y = 0{,}5\cos(\arccos(2 + x))$

Рис. 46

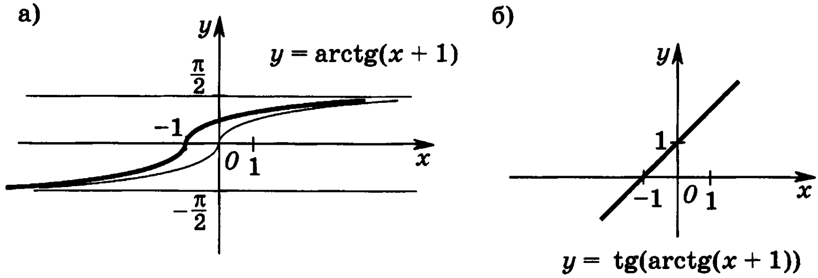


Рис. 47

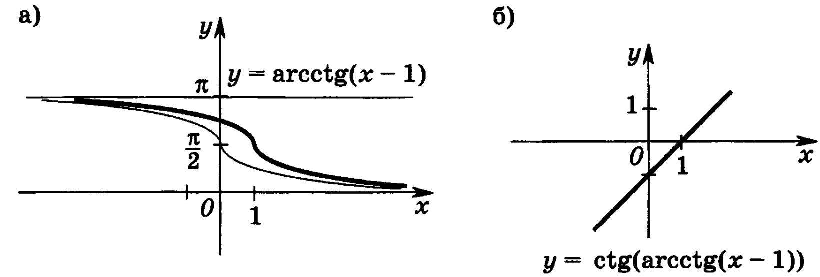


Рис. 48

Глава II

§ 1. 1. 1) $x_n = 2+6n$; 2) $x_n = \frac{n+1}{n}$; 3) $x_n = \frac{(-3)^n}{6}$; 4) $x_n = \frac{(-1)^n - n}{n}$. **5.** 1) $n \geqslant 12$; $N_\varepsilon = \left[\frac{3-5\varepsilon}{25\varepsilon}\right]+1$; 2) $n > 67$; $N_\varepsilon = \left[\frac{2+\varepsilon}{3\varepsilon}\right]+1$; 3) $n \geqslant 50$; $N_\varepsilon = \left[\frac{2-\varepsilon}{4\varepsilon}\right]+1$; 4) $n \geqslant 150$; $N_\varepsilon = \left[\frac{3-\varepsilon}{2\varepsilon}\right]+1$. **6.** 1) 2; 2) 4; 3) $\frac{3}{2}$; 4) -1. **7.** 1) -1; 2) 1. **8.** 1) 0; 2) 0.

§ 2. 3. 1) $\delta \leqslant \sqrt{4{,}001}-2$; 2) $\delta \leqslant \frac{\pi}{2} - \arcsin 0{,}99$. **4.** 1) $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$; 2) $\delta \leqslant \sqrt{9+\varepsilon}-3$. **6.** 1) $x=-2$; 2) $x=\frac{2}{3}$; 3) $x=-3$, $x=\frac{1}{2}$; 4) $x=-1$; $x=\frac{2}{3}$. **7.** 1) $y=\frac{7}{3}$; 2) $y=-\frac{5}{3}$. **8.** 1) -2; 2) $\frac{7}{4}$; 3) 1; 4) 2; 5) $\frac{1}{4}$; 6) $\frac{1}{4}$; 7) 2; 8) $\frac{13}{4}$.

§ 3. 1. 1), 4) Является; 2), 3) не является. **2.** 1), 2), 4), 5) Является; 3), 6) не является. **4.** 1) $d=-10$; 2) $d=1$; 3) $d=-1$. **5.** 1) -2 при $x=-1$; 2) 2 при $x=1$. **6.** 1) $x<0$, $x>0$; 2) $x<-1$, $-1<x<1$, $x>1$.

§ 4. 1. 1) -4; 2) 3; 3) -10; 4) -1; 5) $-\frac{1}{54}$; 6) $\frac{1}{12}$. **2.** 1) $\frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}$; 2) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **3.** 1) 10 м/с; 2) 72 м/с; 3) 48 м/с; 4) 22 м/с. **4.** 1) — 4) Нет.

§ 5. 2. 1) 20 м/с; 2) 4 м/с; 3) 0; 4) 1 м/с. 2. 1) 5,5 рад/с; 2) 4,8 рад/с; 3) 2,8 рад/с; 4) 29,9 рад/с. 3. 1) 4 град/с; 2) 3 град/с. 4. 1) $8x^3-18x^2$; 2) $9x^2+24x$; 3) $7{,}5x^2+7x$; 4) $4x^2-4x^3$. 5. 1) Таких значений нет; 2) таких значений нет; 3) $x=0$; 4) $x=0$. 6. 1) $6x^5+45x^4+84x^3-27x^2-84x+36$; 48; 2) $6x^5-20x^4+16x^3+$ $+18x^2-24x$; 0; 3) $\frac{32(3x-1)}{(x+5)^3}$, -2; 4) $\frac{10(x+2)}{(1-2x)^3}$, $\frac{10}{27}$. 7. 1) $\frac{7}{(x+5)^2}$; 2) $-\frac{7}{(x+2)^2}$.

§ 6. 1. 1) 5,9 А/с; 2) 35 А/с. 2. 1) $\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$; 2) $\frac{11x^2\sqrt[3]{x^2}+22x^6\sqrt[3]{x}}{3}$; 3) $3x^2+\frac{3}{x^4}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 4) $\frac{3\sqrt{x}}{2}-\frac{3}{\sqrt{x^3}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; 5) $-\frac{3}{4\sqrt[4]{x^7}}+8\sqrt[3]{x}-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$; 6) $\frac{8}{x^5}+\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}-\frac{7}{x^2\sqrt[4]{x^3}}$. 2. 1) $\frac{1}{8}\sqrt{2}$; 2) $\frac{1}{5\sqrt{5}}$.

4. 1) $\frac{1+4\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{2x^2+\sqrt{x^2+1}}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; 2) $\frac{14}{65\sqrt[5]{(2x)^4}\,\sqrt[13]{(9+7\sqrt[5]{2x})^{12}}}$; 3) $\frac{2x^2}{x^6-1}\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$; 4) $\frac{ad-bc}{n(ax+b)(cx+d)}\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

§ 7. 1. 1) $2x\sin x+x^2\cos x$; 2) $2x\cos x-x^2\sin x$; 3) $\frac{x^2\cos x+\cos x-2x\sin x}{(x^2+1)^2}$; 4) $-\frac{2(\sin x+x\cos x)}{(x^2+4)^2}$; 5) $3\sin^2 x\cos x+$ $+3\cos 3x$; 6) $-4\cos^3 x\sin x-4\sin 4x$; 7) $\frac{2x-2}{\ln 2\,(x-1)^2}$; 8) $\frac{2x-1}{\ln 10\,(x^2-x-2)}$. 2. 1) $x^x(1+\ln x)$; 2) $x^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x^2}\right)$; 3) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(\ln\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$; 4) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^x\left(\ln\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)$. 3. 1) $2(\ln 2)x\cos x^2\,2^{\sin x^2}$; 2) $-(\ln 3)\sin 2x\,3^{\cos^2 x}$; 3) $\frac{1}{(\ln 2)x\ln x\ln\log_5 x}$, $x>5$; 4) $\frac{2}{x(\ln x^2)\ln\ln x^2}$, $x>e$; 5) $\frac{2}{2-3x^2}$; 6) $-\frac{1}{\cos x}$. 4. 1) $-6<x<-2$, $x>10$; 2) $-5<x<3$; 3) $-3{,}5<x<4$, $x>9$; 4) $-1<x<\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$, $x>\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$. 5. 90,75 Дж. 6. 0,05 м^3/с.

§ 8. 1. 1) $y=\frac{2+\sqrt{3}}{2}-x$; 2) $y=-\sqrt{2}x+1+\sqrt{2}$; 3) $y=\frac{3\sqrt{2}}{4}x+$ $+\frac{3\sqrt{2}\pi-4\sqrt{2}}{16}$; 4) $y=-\frac{3\sqrt{2}}{4}x+\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3\sqrt{2}\pi}{16}$. 2. 1) $y=-x$; 2) $y=3x-3$; 3) $y=-\frac{2}{3}+\ln 12-2$; 4) $y=\frac{2}{3}x+\ln 3+\frac{4}{3}$. 3. 1) $y=-2$; 2) $y=-51$; 3) $y=1$; 4) $y=1$. 4. 1) $\left(\frac{1}{\sqrt{6}};\ 1-\frac{5}{6\sqrt{6}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};\ 1+\frac{5}{6\sqrt{6}}\right)$; 2) $\left(\frac{1}{2};\ -\ln 2\right)$.

5. 1) (0; 0), $\varphi=0$, (1; 1), $\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{7}\right)$; 2) (1; 1), $\varphi=\operatorname{arctg}3$; 3) (1; 1), (4; 4), $\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{6}{7}\right)$; 4) (3; 34), $\varphi=0$, (−2; 4), $\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{25}{153}\right)$.

Глава III

§ 1. **1.** 1) Возрастает на интервале $0<x<2$; убывает на интервалах $x<0$, $x>2$. 2) Возрастает на интервалах $x<0$, $x>1$; убывает на интервале $0<x<1$. **2.** 1) Возрастает на интервалах $x<-2$, $-1<x<1$, $x>2$; убывает на интервалах $-2<x<-1$, $1<x<2$. 2) Возрастает на интервалах $x<-3$, $-1<x<1$, $x>3$; убывает на интервалах $-3<x<-1$, $1<x<3$. **3.** 1) Возрастает на интервалах $-\frac{9}{2}<x<-3$, $x>0$; убывает на интервале $-3<x<0$. 2) Возрастает на интервале $x>-\frac{2}{5}$; убывает на интервале $-1<x<-\frac{2}{5}$. **4.** 1) Возрастает на интервалах $x<-2$, $-2<x<-\sqrt{2}$, $x>\sqrt{2}$; убывает на интервалах $-\sqrt{2}<x<-1$, $-1<x<\sqrt{2}$. 2) Возрастает на интервалах $-\sqrt{2}<x<1$, $1<x<\sqrt{2}$; убывает на интервалах $x<-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}<x<2$ и $x>2$. **5.** 1) Возрастает на интервалах $x<0$, $x>\sqrt[3]{4}$; убывает на интервалах $0<x<1$, $1<x<\sqrt[3]{4}$. 2) Возрастает на интервалах $-\sqrt[4]{5}<x<1$, $-1<x<1$, $1<x<\sqrt[4]{5}$; убывает на интервалах $x<-\sqrt[4]{5}$, $x>\sqrt[4]{5}$. **6.** 1) Возрастает на интервалах $x<5$, $x>13$; убывает на интервале $5<x<13$. 2) Возрастает на интервале $-10<x<-2$; убывает на интервалах $x<-10$, $x>-2$. **7.** 1) Возрастает на интервалах $1-\sqrt{2}<x<0$, $x>\sqrt{2}-1$; убывает на интервалах $x<1-\sqrt{2}$, $0<x<\sqrt{2}-1$. 2) Возрастает на интервалах $1-\sqrt{5}<x<0$, $x>\sqrt{5}-1$; убывает на интервалах $x<1-\sqrt{5}$, $0<x<\sqrt{5}-1$. **8.** 1) $-2\leqslant a\leqslant 2$; 2) $a\leqslant 2$.

§ 2. **1.** 1) $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_3=2$; 2) $x_1=-2$, $x_2=-1$, $x_3=2$. **2.** 1) −3 и 1 — точки максимума, −1 и 3 — точки минимума; 2) −2 и 1 — точки максимума, −1 и 2 — точки минимума. **3.** 1) $x=2$ — точка максимума, $x=1$ и $x=3$ — точки минимума; 2) $x=1$ — точка минимума. **4.** 1) $x=\frac{3}{4}$ — точка максимума; 2) $x=4$ — точка максимума. **5.** 1) $x=3$ — точка максимума, $x=2$ и $x=4$ — точки минимума; 2) $x=2$ — точка максимума, $x=-\frac{4}{3}$ — точка минимума. **6.** 1) $x=6$ — точка минимума; 2) $x=-2\sqrt{3}$ — точка максимума, $x=2\sqrt{3}$ — точка минимума.

§ 3. **1.** 1) 123 и 7; 2) 19 и 7. **2.** 1) $\frac{3}{2}$ и 1; 2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ и $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **3.** 1) e^5 и e^{-3}; 2) e^4 и 0. **4.** $\left(\frac{4}{3};\ \frac{4}{9}\right)$. **5.** $\frac{3R}{2}$. **6.** $\frac{H}{2}$, $\frac{R}{2}$. **7.** $4R$. **8.** $\frac{2R}{3}$, $\frac{H}{3}$. **9.** $3^{\frac{7}{6}}\left(\frac{\pi V^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$. **10.** $\frac{2\pi l^3\sqrt{3}}{27}$.

§ 4. 1. 1) Выпукла вверх при $x \in (-2;\ 2)$, выпукла вниз при $x < -2$ и при $x > 2$; 2) выпукла вверх при $x \in (-3;\ 3)$, выпукла вниз при $x < -3$ и при $x > 3$. 2. 1) Выпукла вверх при $x < -2$ и при $x \in (0;\ 2)$, выпукла вниз при $x \in (-2;\ 0)$ и при $x > 2$; 2) выпукла вверх при $x < -3$ и при $x \in (0;\ 3)$, выпукла вниз при $x \in (-3;\ 0)$ и при $x > 3$. 3. 1) Выпукла вверх при $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, выпукла вниз при $x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и при $x > \frac{1}{\sqrt{2}}$. 2) Выпукла вверх при $x < -\sqrt{6}$ и при $x \in (0;\ \sqrt{6})$, выпукла вниз при $x \in (-\sqrt{6};\ 0)$ и при $x > \sqrt{6}$. 4. 1) Выпукла вверх при $x < -2\sqrt[3]{2}$ и при $x > 2$, выпукла вниз при $x \in (-2\sqrt[3]{2}; 2)$; 2) выпукла вверх при $x < 2$, выпукла вниз при $x > 2$. 5. 1) $x_1 = -1$, $x_2 = 1$; 2) $x_1 = 2$, $x_2 = 4$. 6. 1) $x = -1$; 2) $x = 1$. 7. 1) $x = 2$; 2) $x = 3$. 8. 1) $x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = \sqrt{3}$; 2) $x_1 = -\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$, $x_2 = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{1}{4}}$.

§ 5. 1. 1) $y = x + \frac{1}{2}$ $(x \to +\infty)$, $y = -x - \frac{1}{2}$ $(x \to -\infty)$; 2) $y = x - 1$ $(x \to +\infty)$, $y = 1 - x$ $(x \to -\infty)$. 2. 1) $y = x + 1$; 2) $x = -1$, $x = 1$, $y = x - 1$. 3. 1) $x = -\sqrt{\frac{5}{3}}$, $x = \sqrt{\frac{5}{3}}$, $y = \frac{x}{3} - 2$; 2) $x = -1$, $x = 1$, $y = -x$. 4. 1) $x = 0$, $y = 3 - x$ — асимптоты, $x = -2$ — точка минимума, $y(-2) = \frac{27}{4}$, $y' = -\frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$, $y'' = \frac{6(1-x)}{x^4}$, $x = 1$ — точка перегиба. 2) $x = 0$, $y = -x - 3$ — асимптоты, $x = 2$ — точка максимума, $y(2) = -\frac{27}{4}$, $y' = -\frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}$, $y'' = \frac{6(x+1)}{x^4}$, $x = -1$ — точка перегиба. 5. 1) Функция определена при $x \neq 1$, $\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2};\ 0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2};\ 0\right)$ и $(0;\ -1)$ — точки пересечения графика с осями координат, $x = 1$ и $y = 1$ — асимптоты, $x = \frac{1}{3}$ — точка минимума, $y\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{4}$, $(0;\ -1)$ — точка перегиба графика функции; 2) функция определена при $x \neq 1$, график пересекает оси координат в точке $(0;\ 0)$; $x = 1$ и $y = 0$ — асимптоты, $x = 0$ — точка максимума, $y(0) = 0$, $x = -2$ — точка минимума, $y(-2) = -\frac{80}{27}$, $x_1 = -2 - \sqrt{3}$ и $x_2 = -2 + \sqrt{3}$ — точки перегиба. 6. 1) Функция нечетная, определена при $x \neq \pm 1$, график пересекает координатные оси в точке $(0;\ 0)$, $x = -1$, $x = 1$, $y = x$ — асимптоты, $x = \sqrt{3}$ — точка минимума, $y(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $x = -\sqrt{3}$ — точка максимума, $y(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $x = 0$ — точка перегиба; 2) функция определена при $x \neq 1$, $(0;\ 0)$ — точка пересечения с координатными осями, $x = 1$ и $y = 3x$ —

асимптоты, $y'=\frac{3x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}$, $y''=\frac{18x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}$, $x=0$ — точка максимума, $y(0)=0$, $x=\sqrt[3]{4}$ — точка минимума, $y(\sqrt[3]{4})=4\sqrt[3]{4}$, $(-\sqrt[3]{2};\ -2\sqrt[3]{2})$ — точка перегиба графика функции. **7.** 1) Функция определена при $x\neq 6$, $(2;\ 0)$ и $\left(0;\ -\frac{2}{9}\right)$ — точки пересечения графика с координатными осями, $x=6$ и $y=x+6$ — асимптоты, $y'=\frac{(x-2)^2(x-14)}{(x-6)^3}$, $y''=\frac{96(x-2)}{(x-6)^4}$, $x=14$ — точка минимума, $y(14)=$ $=27$, $(2;\ 0)$ — точка перегиба графика функции; 2) функция определена при $x\neq 2$, $(1;\ 0)$ и $\left(0;\ -\frac{1}{4}\right)$ — точки пересечения графика с координатными осями, $x=2$ и $y=x+1$ — асимптоты, $x=4$ — точка минимума, $y(4)=\frac{27}{4}$, $(1;\ 0)$ — точка перегиба графика функции.

Глава IV

§ 1. **5.** 1) $F(x)=\frac{1}{\ln 4}(4^x+1)$; 2) $F(x)=\frac{1}{\ln 5}(5^x-2)$. **6.** 1) $F(x)=$ $=\operatorname{tg} x-2$; 2) $F(x)=\operatorname{ctg} x+1$. **7.** 1) $F(x)=\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{3}$; 2) $F(x)=$ $=\operatorname{arctg} x-\frac{\pi}{6}$. **8.** 1) $F(x)=\arcsin x+\frac{5\pi}{6}$; 2) $F(x)=\arcsin x+\frac{\pi}{4}$.

§ 2. **1.** 1) $\frac{1}{3}\ln|x^3+3|+C$; 2) $\frac{1}{4}\ln(x^4+5)+C$. **2.** 1) $\frac{1}{3}(x^2+4)^{\frac{3}{2}}$; 2) $\frac{1}{6}(x^4+2)^{\frac{3}{2}}+C$. **3.** 1) $\frac{\sin^3 x}{3}-\frac{\sin^5 x}{5}+C$; 2) $\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C$. **4.** 1) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+3}\right|+C$; 2) $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C$. **5.** 1) $\frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x-3}{\sqrt{7}}+C$; 2) $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{11}}+C$. **6.** 1) $\frac{3}{8}x+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{32}\sin 4x+C$; 2) $\frac{3}{8}x-$ $-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{32}\sin 4x+C$. **7.** 1) $\ln(x^2-2x+5)-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$; 2) $\ln(x^2+2x+5)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}+C$. **8.** 1) $-\frac{1}{4x}-\frac{1}{8}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C$; 2) $-\frac{1}{9x}-\frac{1}{27}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C$.

§ 3. **1.** 1) $2-\ln 5$; 2) $3-\ln 10$. **2.** 1) $\frac{2}{5}\ln\frac{12}{7}$; 2) $\frac{2}{5}\ln\frac{2}{3}$. **3.** 1) $\frac{\pi}{20}$; 2) $\frac{\pi}{16}$. **4.** 1) $\frac{2}{3}$; 2) $\frac{2}{3}$. **5.** 1) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$; 2) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$. **6.** 1) $\frac{3}{2}+$ $+4\ln 4$; 2) $4-\ln 3$. **7.** 1) $\frac{7\pi}{16}$; 2) $\frac{7\pi}{16}$. **8.** 1) $\frac{1}{5}(6\sqrt{3}-8)$; 2) $\frac{8}{3}$.

§ 4. **1.** 1) $\frac{9}{2}$; 2) $\frac{9}{2}$. **2.** 1) $\frac{8}{3}$; 2) $\frac{8}{3}$. **3.** 1) $\frac{125}{6}$; 2) $\frac{125}{6}$. **4.** 1) $a=-2$,

$b=-\frac{21}{4}$; $\left(-\frac{7}{2};\ \frac{7}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\ -\frac{17}{4}\right)$; $\frac{9}{4}$; 2) $a=-\frac{1}{2}$, $b=\frac{3}{2}$; $(-1;\ 0)$, $\left(2;\ \frac{3}{2}\right)$; $\frac{9}{8}$. **5.** 1) $a=3$, $S=\frac{7\ln 6-10}{3}$; 2) $a=2$, $S=15\ln 2-9$.

§ 5. 1. 1) 40,5 м; 2) 24 м. **2.** 1) $50g\approx 490$ Н; 2) $56g\approx 548{,}8$ Н.

§ 6. 1. 1) $y=3e^{-x}+x-1$; 2) $y=\frac{3}{2}e^{-2x}+\frac{x-1}{2}$. **2.** 1) $y=\frac{1}{2}e^{-x}+\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$; 2) $y=\frac{3}{2}e^{x}+\frac{\sin x-\cos x}{2}$. **3.** 1) $y=\frac{4}{3}e^{x}+\frac{2}{3}e^{-2x}-1$; 2) $y=\frac{1}{6}e^{x}+\frac{1}{12}e^{-2x}-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$. **4.** 1) $y=\sin 2x+\cos x$; 2) $y=\sin 2x+\cos 2x+\sin x$.

Глава V

§ 2. 1. 1) 120; 2) 720. **2.** 1) 120; 2) 120. **3.** 1) 720; 2) 400. **4.** 1) 625; 2) 625. **5.** 1) 729; 2) 128. **6.** 1) 512; 2) 625. **7.** 1) $x=5$; 2) $x=4$.

§ 3. 1. 1) 306; 2) 380; 3) 120; 4) 66. **2.** 1) $(n+2)(n+3)$; 2) $(n+1)(n+3)(n+4)$; 3) $\frac{1}{(n+3)(n+4)}$; 4) $(n+4)(n+5)$. **3.** 1) Нет корней; 2) нет корней; 3) $n=3$; 4) $n=5$. **4.** 1) 120; 2) 24. **5.** 1) 120; 2) 120. **6.** 1) 720; 2) 40 320. **7.** 1) 2880; 2) 4320. **8.** 1) 60; 2) 60; 3) 1260; 4) 756. **9.** 1) 12; 2) 12; 3) 60; 4) 60; 5) 820; 6) 2460; 7) 1260; 8) 360; 9) 604 800; 10) 3 326 400. **10.** 1) 2520; 2) 1680.

§ 4. 1. 1) 81; 2) 143; 3) $\frac{91}{62}$; 4) $\frac{3}{2}$. **2.** 1) $m=6$; 2) $m=6$; 3) $m_1=6$, $m_2=7$; 4) $m=7$. **3.** 1) $m_1=3$, $m_2=4$, $m_3=5$, $m_4=6$; 2) $m_1=3$, $m_2=4$; 3) $m_1=4$, $m_2=5$; 4) $m_1=3$, $m_2=4$, $m_3=5$. **4.** Указание. После разложения левой части уравнения на множители правую часть представить в виде произведения трех «подходящих» чисел. 1) $m=5$; 2) $m=6$. **5.** 1) 336; 2) 11 820. **6.** 1) A_6^3; $A_6^3-A_5^3$; 2) A_7^3; $A_7^3-A_6^3$. **7.** 1) A_{20}^3; 2) A_{12}^4.
8. 1) $x\in\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$, $y\in\{1;\ 5;\ 20;\ 60;\ 120\}$;
2) $x\in\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, $y\in\{1;\ 4;\ 12;\ 24\}$; 3) $x\in\{0;\ 1;\ 2;\ 3\}$, $y\in\{4;\ 33;\ 366;\ 738\}$; 4) $x\in\{0;\ 1;\ 2\}$, $y\in\{3;\ 122;\ 724\}$.

§ 5. 1. 1) 84; 2) 70; 3) 56; 4) 210; 5) 56; 6) 36; 7) 11; 8) 10. **3.** 1) $C_{14}^8a^{10}$; 2) $C_{15}^3b^7$; 3) $-C_{18}^3x^{\frac{7}{2}}$; 4) $C_{16}^4x^{\frac{5}{3}}$. **4.** 1) C_8^3; 2) C_9^4. **5.** 1) $C_{10}^3C_5^2$; 2) $C_{10}^2C_5^3$. **6.** 1) 700; 2) 900. **7.** 1) $C_{12}^4C_8^4$; 2) $C_8^6C_6^2C_4^2$. **8.** 1) C_n^2; 2) C_n^3. **9.** 1) $x\geqslant 5$, $x\in N$; 2) $x\geqslant 6$, $x\in N$; 3) $x\geqslant 1$, $x\in N$; 4) $x\geqslant 3$, $x\in N$. **10.** 1) $x\in\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}$, $y\in\{1;\ 6;\ 15;\ 20\}$; 2) $x\in\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$, $y\in\{1;\ 5;\ 10\}$; 3) $x\in\{2;\ 3\}$, $y\in\{-2;\ 2\}$; 4) $x\in\{3;\ 4\}$, $y\in\{34;\ 60\}$. **11.** 1) $x=2$; 2) $x=3$; 3) $x=3$; 4) $x=4$. **12.** 1) $x=3$; 2) $x_1=4$, $x_2=5$; 3) $x_1=5$, $x_2=6$; 4) $x=4$.

§ 6. 1. 1) 55; 2) 11; 3) 45; 4) 60. **3.** 1) 84; 2) 495. **4.** 1) 220; 2) 66. **5.** 1) 1001; 2) 210.

Глава VI

§ 1. 1. 1) $A+B$; 2) AB; 3) $A\overline{B}$; 4) $\overline{A}B$; 5) $\overline{A}\,\overline{B}$; 6) $A\overline{B}+\overline{A}B$. 3. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{5}{6}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{5}{6}$. 4. 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{36}$; 3) $\frac{1}{18}$; 4) $\frac{1}{18}$; 5) $\frac{1}{9}$; 6) $\frac{1}{9}$; 7) $\frac{1}{3}$; 8) $\frac{2}{9}$; 9) $\frac{2}{9}$; 10) $\frac{2}{9}$. 5. 1) $\frac{13}{31}$; 2) $\frac{5}{31}$; 3) $\frac{3}{31}$; 4) $\frac{14}{31}$. 6. 1) $\frac{C_4^2}{C_{200}^2}$; 2) $\frac{C_5^2}{C_{200}^2}$. 7. 1) $\frac{C_{494}^2}{C_{500}^2}$; 2) $\frac{C_{496}^2}{C_{500}^2}$. 8. 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{9}$; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{1}{4}$; 7) $\frac{5}{9}$; 8) $\frac{5}{12}$; 9) $\frac{5}{12}$; 10) $\frac{7}{12}$; 11) $\frac{35}{36}$; 12) $\frac{35}{36}$. 9. 1) $\frac{1}{15}$; 2) $\frac{7}{15}$; 3) $\frac{7}{15}$; 4) $\frac{7}{15}$. 10. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{30}$; 3) $\frac{C_4^2\cdot 6}{C_{10}^3}$; 4) $\frac{C_6^2\cdot 4}{C_{10}^3}$. 11. 1) $\frac{1}{8}$; 2) $\frac{1}{8}$; 3) $\frac{1}{9}$; 4) $\frac{1}{12}$; 5) $\frac{1}{6}$; 6) $\frac{5}{18}$; 7) $\frac{1}{12}$; 8) $\frac{1}{12}$. 12. 1) $\frac{1}{C_{36}^5}$; 2) $\frac{C_5^4}{C_{36}^5}$; 3) $\frac{C_5^2}{C_{36}^5}$; 4) $\frac{C_5^3}{C_{36}^5}$. 13. 1) $\frac{C_6^5}{C_{49}^6}$; 2) $\frac{1}{C_{49}^6}$; 3) $\frac{C_6^3}{C_{49}^6}$; 4) $\frac{C_6^4}{C_{49}^6}$.

§ 2. 1. 1) $P(C)=0{,}97$; $P(D)=0{,}03$; 2) $P(C)=0{,}92$, $P(D)=0{,}08$. 2. 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{3}$. 3. 1) $\frac{15}{28}$; 2) $\frac{15}{28}$. 4. 1) $\frac{5}{6}$; 2) $\frac{29}{30}$. 5. 1) $\frac{986}{1001}$; 2) $\frac{133}{143}$. 6. 1) 0,496; 2) 0,28.

§ 3. 1. 1) $\frac{18}{35}$; 2) $\frac{17}{35}$; 3) $\frac{1}{35}$; 4) $\frac{1}{35}$. 2. 1) Являются; 2) являются. 3. 1) Не являются; 2) не являются. 4. 1) $\frac{19}{396}$; 2) $\frac{1}{495}$.

§ 4. 1. 1) $\frac{1}{72}$; 2) $\frac{1}{144}$. 2. 1) $\frac{1}{36}$; 2) $\frac{1}{54}$. 3. 1) 0,97; 2) 0,92. 4. 1) 0,973; 2) 0,992. 5. 1) 0,0047824; 2) 0,0004776. 6. 1) 0,045125; 2) 0,002375.

§ 5. 1. 1) $\frac{15}{64}$; 2) $\frac{5}{16}$; 3) $\frac{3}{32}$; 4) $\frac{15}{64}$. 2. 1) $\frac{625}{11664}$; 2) $\frac{3125}{15552}$. 3. 1) $\frac{763}{3888}$; 2) $\frac{3875}{3888}$. 4. 1) 0,0001765; 2) 0,0000064.

Глава VII

§ 1. 1. 1)—6) Да. 2. 1) $x=-3$; 2) $x=-5$; 3) $x=-3$; 4) $x=0$; 5) нет значений; 6) нет значений. 3. 1) При $x=3$, $y=-2$; 2) при $x=-2$, $y=3$; 3) при $x=-1$, $y=1$; 4) при $x=1$, $y=-1$; 5) при $x=-4$, $y=2$ и при $x=-4$, $y=-2$; 6) при $x=1$, $y=-2$ и при $x=-1$, $y=-2$. 4. 1) 1; 2) 5; 3) 7; 4) 19; 5) 7; 6) 13.

§ 2. 2. 1) 0; 2) 0; 3) 0; 4) 0; 5) -1; 6) -1. 3. 1)—6) 1. 4. 1) 1; 2) 1; 3) 10; 4) 37; 5) 1000; 6) 1000. 5. 1) $x=2$, $y=0{,}7$; $x=-2$, $y=-0{,}7$; 2) $x=1$, $y=-3$; $x=-17$, $y=3$; 3) $x=1$, $y=2{,}5$; 4) $x=1$, $y=3$; 5) $x=0$, $y=1$; $x=0$, $y=-2$; $x=6$, $y=1$; $x=-3$, $y=-2$;

6) $x=2,\ y=0;\ x=2,\ y=-0{,}5;\ x=-1,\ y=0;\ x=-1,\ y=1$. **6.** 1) 0,1; 2) 0,1; 3) 125; 4) 1000; 5) $\frac{1}{27}$; 6) $\frac{1}{81}$. **7.** 1) $z=-3i$; 2) $z=2i$; 3) $z=3+4i$; 4) $z=4+0{,}9i$; 5) $z=\frac{3-4i}{\sqrt{5}}$; 6) $z=\frac{3-4i}{\sqrt{5}}$.

§ 3. 1. 1) 5; 5; 8; 2) 5; 5; 6; 3) 5; 5; 6; 4) 5; 5; 8; 5) 5; 5; 8; 6) 5; 5; 6. **2.** 1) Точки комплексной плоскости, лежащие на окружности радиуса 2 с центром (3; −2) и внутри ограниченного ею круга; 2) точки комплексной плоскости, лежащие на окружности радиуса 1 с центром в точке (−1; 2) и внутри ограниченного ею круга; 3) точки комплексной плоскости, лежащие на окружности радиуса 2 с центром в точке (0; 3) и вне ограниченного ею круга; 4) точки комплексной плоскости, лежащие на окружности радиуса 2 с центром в точке (3; 0) и вне ограниченного ею круга; 5) точки комплексной плоскости, лежащие внутри кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями радиусов 1 и 2 с центром в точке (2; 0); 6) точки комплексной плоскости, лежащие внутри кольца, ограниченного двумя концентрическими окружностями с центром (0; 1), радиусы которых 1 и 3. **4.** 1) $-2i$; 2) $3i$; 3) $1+i$; 4) $-2-2i$; 5) $-1-i$; 6) $1-i$. **5.** 1) 10; 2) 0; −10; 3) $5i$; $7i$; 4) $-7i$; $9i$; 5) $3i$; $7i$; 6) $-i$; $-5i$. **6.** 1) $z_1=2-2i,\ z_2=-2+2i$; 2) $z_1=3-3i,\ z_2=-3+3i$; 3) $z_1=3+3i,\ z_2=0$; 4) $z_1=-4-4i,\ z_2=0$; 5) $z_1=\sqrt{3}+i,\ z_2=-\sqrt{3}+i$; 6) $z_1=-4+3i,\ z_2=-4-3i$.

§ 4. 1. 1) $\varphi=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; $\varphi=-\frac{\pi}{2}$; $z=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$; 2) $\varphi=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; $\varphi=\frac{\pi}{2}$; $z=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$; 3) $\varphi=2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; $\varphi=0$; $z=\frac{1}{2}(\cos 0+i\sin 0)$;

4) $\varphi=\pi+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; $\varphi=\pi$ и $\varphi=-\pi$; $z=\frac{1}{2}(\cos\pi+i\sin\pi)$;

5) $\varphi=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; $\varphi=-\frac{\pi}{6}$; $z=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$;

6) $\varphi=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in \boldsymbol{Z}$; $\varphi=-\frac{5\pi}{6}$; $z=2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

2. 1) $z=\cos 0{,}9\pi+i\sin 0{,}9\pi$; $\bar{z}=\cos(-0{,}9\pi)+i\sin(-0{,}9\pi)$;

2) $z=\cos 0{,}2\pi+i\sin 0{,}2\pi$; $\bar{z}=\cos(-0{,}2\pi)+i\sin(-0{,}2\pi)$;

3) $z=\cos(-0{,}2\pi)+i\sin(-0{,}2\pi)$; $\bar{z}=\cos 0{,}2\pi+i\sin 0{,}2\pi$;

4) $z=\cos(-0{,}2\pi)+i\sin(-0{,}2\pi)$; $\bar{z}=\cos 0{,}2\pi+i\sin 0{,}2\pi$;

5) $z=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; $\bar{z}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

6) $z=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$; $\bar{z}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

4. 1) $z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; $z=0+i$, 2) $z=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; $z=0-i$;

3) $z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$;
4) $z=\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$, $z=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i$;
5) $z_1=\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $z_2=\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$; $z_1=-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$; $z_2=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i$; 6) $z_1=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$, $z_2=2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$; $z_1=-3+\sqrt{3}$, $z_2=-3-\sqrt{3}$.

§ 5. 1. 1) $z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)\right)$; 2) $z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)\right)$; 3) $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$; 4) $z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(-\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\varphi-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$; 5) $z=64\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}+4\varphi\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}+4\varphi\right)\right)$; 6) $z=\frac{1}{512}(\cos(6\varphi-\pi)+i\sin(6\varphi-\pi))$. 2. 1) -1; 2) 1; 3) $\frac{i}{32}$; 4) $32i$; 5) i; 6) $-i$. 3. 1) $|\omega|=1$, $\arg\omega=\varphi_0+90°$; 2) $|\omega|=1$, $\arg\omega=\varphi_0-90°$; 3) $|\omega|=1$, $\arg\omega=\varphi_0+90°$; 4) $|\omega|=\sqrt{2}$, $\arg\omega=\varphi_0-45°$; 5) $|\omega|=1$, $\arg\omega=-2\varphi_0$; 6) $|\omega|=1$, $\arg\omega=2\varphi_0$. 4. 1) Окружность с центром $(-3;\ 0)$ и радиусом 2; 2) окружность с центром $(0;\ 3)$ и радиусом 2; 3) окружность с центром $(-1;\ 1)$ и радиусом 1; 4) окружность с центром $(1;\ 1)$ и радиусом 1; 5) круг с центром $(0;\ 2)$ и радиусом 2; 6) круг с центром $(1;\ 0)$ и радиусом 1. 5. 1) $\sin 3x=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$; 2) $\cos 3x=\cos^3 x-3\cos x\cdot\sin^2 x$; 3) $\cos 4x=\cos^4 x-6\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\sin^4 x$; 4) $\sin 4x=4\sin x\cdot\cos^3 x-4\sin^3 x\cdot\cos x$; 6. 1) $\operatorname{tg}3x=\frac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}$; 2) $\operatorname{tg}4x=\frac{4\operatorname{tg}x-4\operatorname{tg}^3 x}{1-6\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg}^4 x}$.

§ 6. 1. 1) $z_1=1{,}5i$, $z_2=-1{,}5i$; 2) $z_1=1{,}2i$, $z_2=-1{,}2i$; 3) $z_1=-1+2i$, $z_2=-1-2i$; 4) $z_1=1+4i$, $z_2=1-4i$; 5) $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{3}$, $z_2=\sqrt{2}-i\sqrt{3}$; 6) $z_1=-\sqrt{3}+i\sqrt{2}$, $z_2=-\sqrt{3}-i\sqrt{2}$. 2. 1) $z^2-10z+25{,}25=0$; 2) $z^2+8z+16{,}16=0$; 3) $z^2+1-0{,}5\sqrt{3}=0$; 4) $z^2+3+2\sqrt{2}=0$. 3. 1) $z_1=-4$, $z_2=2+2i\sqrt{3}$, $z_3=2-2i\sqrt{3}$; 2) $z_1=3$, $z_2=-\frac{3}{2}+\frac{3i\sqrt{3}}{2}$, $z_3=-\frac{3}{2}-\frac{3i\sqrt{3}}{2}$; 3) $z_1=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $z_2=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; $z_3=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i$, $z_4=-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i$; 4) $z_1=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{3}$, $z_3=\frac{\sqrt{2}}{3}i$, $z_4=-\frac{\sqrt{2}}{3}i$; 5) $z_1=i$, $z_2=-i$, $z_3=\sqrt{5}i$, $z_4=-\sqrt{5}i$; 6) $z_1=2i$, $z_2=-2i$, $z_3=\sqrt{3}i$, $z_4=-\sqrt{3}i$. 4. 1) $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$; 2) $z_1=3+i$, $z_2=-3-i$; 3) $z_1=3+i$, $z_2=-3-i$; 4) $z_1=1-3i$, $z_2=-1+3i$; 5) $z_1=1+i$, $z_2=-1-i$, $z_3=1-i$, $z_4=-1+i$; 6) $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_4=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$.

5. 1) $(z\sqrt{2}+i\sqrt{3})(z\sqrt{2}-i\sqrt{3})$; 2) $(z\sqrt{3}+i\sqrt{7})(z\sqrt{3}-i\sqrt{7})$;
3) $(2z+2{,}5+1{,}5i)(z+1{,}25-0{,}75i)$; 4) $(3z+3{,}5+2{,}5i)\left(z+\frac{7}{6}-\frac{5}{6}i\right)$;
5) $(2z+1)\left(2z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(2z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$;
6) $(3z+1)\left(3z-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(3z-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$.

§ 7. 1. 1) $z_1=\sqrt{3}+i$, $z_2=-2i$, $z_3=-\sqrt{3}+i$, $z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right)$, где k — целое число (рис. 49); 2) $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=-2$, $z_3=1-\sqrt{3}i$, $z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}\right)\right)$, где k — целое число (рис. 50); 3) $z_1=1-i$, $z_2=-1-i$, $z_3=1+i$, $z_4=-1+i$; $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)\right)$, где k — целое число (рис. 51); 4) $z_1=-1+i$, $z_2=1+i$, $z_3=1-i$, $z_4=-1-i$; $z=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}\right)\right)$, k — целое число (рис. 52);
5) $z_1=-1+i\sqrt{3}$, $z_2=1+i\sqrt{3}$, $z_3=2$, $z_4=1-i\sqrt{3}$, $z_5=-1-i\sqrt{3}$, $z_6=-2$; $z=2\left(\cos\frac{\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi k}{3}\right)$, где k — целое число (рис. 53);
6) $z_1=\sqrt{3}-i$, $z_2=\sqrt{3}+i$, $z_3=2i$, $z_4=-\sqrt{3}+i$, $z_5=-\sqrt{3}-i$, $z_6=-2i$; $z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}\right)\right)$, где k — целое число (рис. 54).
2. 1) $z_1=1+i$, $z_2=-1-i$; 2) $z_1=1-i$, $z_2=-1+i$; 3) $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $z_2=i$, $z_3=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$; 4) $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_3=-i$;
5) $z_1=1+i$, $z_2=-1+i$; $z_3=-1-i$; $z_4=1-i$; 6) $z_1=0{,}5+0{,}5i$, $z_2=-0{,}5+0{,}5i$, $z_3=-0{,}5-0{,}5i$, $z_4=0{,}5-0{,}5i$. 3. 1) $z_1=i$, $z_2=-3i$;
2) $z_1=5i$, $z_2=-3i$; 3) $z_1=i$, $z_2=-i$, $z_3=1+i$, $z_4=-1-i$; 4) $z_1=3i$, $z_2=-3i$, $z_3=1-i$, $z_4=-1+i$; 5) $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=-2$, $z_3=1-i\sqrt{3}$, $z_4=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_5=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_6=-i$; 6) $z_1=2$, $z_2=-1+i\sqrt{3}$, $z_3=-1-i\sqrt{3}$, $z_4=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$, $z_5=i$, $z_6=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$.
4. 1) $z=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi k}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi k}{5}\right)\right)$, где $k=0$; 1; 2; 3; 4;
2) $z=2\left(\cos\left(0{,}1\pi+\frac{2\pi k}{7}\right)+i\sin\left(0{,}1\pi+\frac{2\pi k}{7}\right)\right)$, где $k=0$; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 3) $z=\sqrt[12]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{3}\right)\right)$, где $k=0$; 1; 2; 3; 4; 5;
4) $z=\sqrt[12]{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi k}{3}\right)\right)$, где $k=0$; 1; 2; 3; 4; 5;

5) $z=\sqrt[10]{10}\left(\cos\left(0{,}1\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+0{,}2\pi k\right)+i\sin\left(0{,}1\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+0{,}2\pi k\right)\right)$,
где $k=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;$

6) $z=\sqrt[10]{10}\left(\cos\left(-0{,}1\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+0{,}2\pi k\right)+i\sin\left(-0{,}1\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+0{,}2\pi k\right)\right)$,
где $k=0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9.$

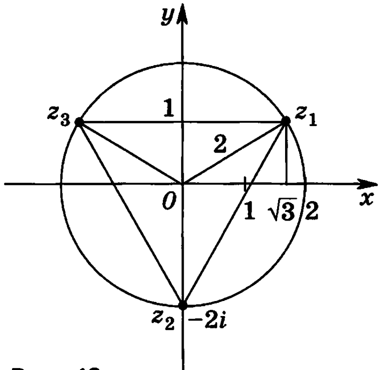


Рис. 49

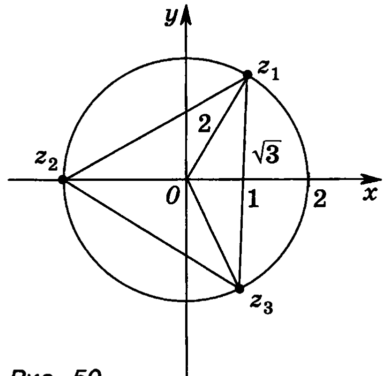


Рис. 50

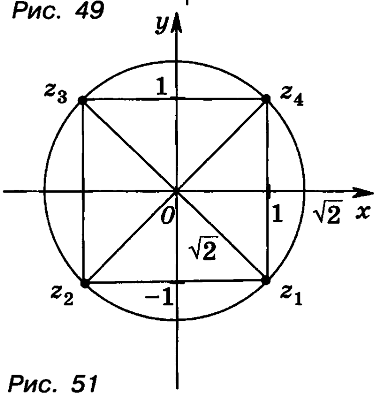


Рис. 51

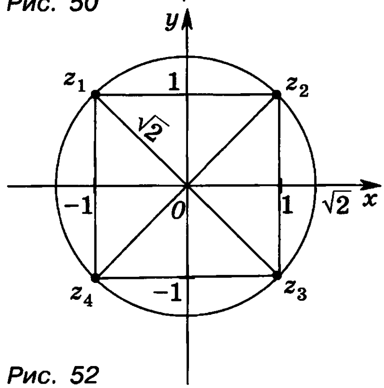


Рис. 52

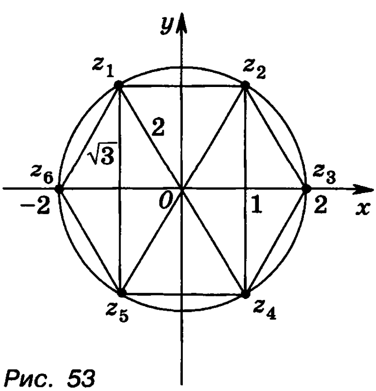


Рис. 53

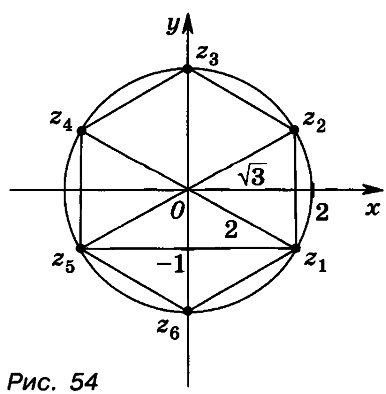


Рис. 54

Содержание

Учебное издание

Шабунин Михаил Иванович
Ткачёва Мария Владимировна
Фёдорова Надежда Евгеньевна
Доброва Ольга Николаевна

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Дидактические материалы

11 класс

Профильный уровень

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художник *Е. В. Соганова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *А. Г. Вьюниковской*
Технические редакторы *Н. Т. Рудникова, С. Н. Терехова*
Корректоры *Н. В. Бурдина, Л. С. Вайтман, О. В. Крупенко*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 23.12.09. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 7,37. Тираж 5000 экз. Заказ № 29391.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, д. 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru