Из наследия
А. А. Зиновьева

А. А. Зиновьев

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ И ТЕОРИЯ ВЫВОДА

URSS

А. А. Зиновьев

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ И ТЕОРИЯ ВЫВОДА

Вступительная статья
академика В. А. Лекторского

Издание второе,
исправленное и дополненное

URSS
МОСКВА

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная работа посвящена проблеме логического следования в современной логике. Поскольку задача работы состоит именно в том, чтобы дать более или менее полное построение одной определенной логической концепции, информация о различного рода логических системах, формализующих логическое следование или затрагивающих (прямо или косвенно) его, будет далеко не исчерпывающей, а критические замечания о них будут иметь весьма односторонний характер.

Обсуждаемая проблема по самому своему существу такова, что всякая попытка ее систематического рассмотрения оказывается связанной с гносеологической оценкой отдельных разделов, направлений и методов логики. К таким оценкам придется прибегать и в данной работе. При этом необходимо иметь в виду, что эти оценки имеют смысл исключительно в плане темы работы, а не сами по себе. Так, вся критика классической логики высказываний дается исключительно с точки зрения проблемы формализации логического следования, как это вообще и делается в многочисленных работах на эту тему. Кроме того, показывая несовпадение классической логики высказываний и общей теории вывода, мы вовсе не исключаем тем самым оценки ее как теории вывода в некотором более узком, специальном смысле слова. Наоборот, лишь на базе общей теории вывода становятся более отчетливыми роль и место классической логики высказываний как теории вывода в системе науки логики вообще.

Проблема логического следования заключается, коротко говоря, в следующем: можно ли классическую логику высказываний непосредственно рассматривать как общую теорию вывода, дающую описание привычно ясных правил вывода; если нет, то можно ли для логического следования построить систему, аналогичную построениям в классической логике высказываний (в частности, воспользоваться аксиоматическим методом в рассмотрении самих правил вывода)? Пожалуй, самой характерной чертой в решении этой проблемы является стремление пойти по пути введения таких ограничений, благодаря которым круг истинных (доказуемых, выводимых и т. п.) формул (высказываний, положений, утверждений) классической логики высказываний сократился бы. Но даже и в этом случае обнаруживается следующее важное обстоятельство: стремление ограничить классическую логику высказываний с целью интерпретировать ее как теорию логического следования ведет к такой существенной перестройке принципов логического исследования, что становится возможным говорить об особом направлении логических исследований. Чтобы подчеркнуть некоторые черты этого направления и охарактеризовать одно из его пониманий, в данной работе нередко придется обращаться к рассмотрению довольно простых вещей, на которые обычно не обращают внимания.

На протяжении всей работы мы часто будем апеллировать к интуитивному пониманию правил вывода, к эмпирическим данным рассуждений и т. п. И эту апелляцию мы считаем не только допустимой, но и совершенно необходимой: логические теории в собственном смысле слова должны служить для цели описания вполне реальных фактов, в данном случае — фактов рассуждений, выводов.

Конечно, само интуитивное понимание — дело довольно неопределенное. В соответствующем месте работы мы дадим на этот счет необходимые разъяснения. Однако в данной работе мы будем иметь дело (каждый раз, когда будем апеллировать к интуиции) с определенными формами вывода. Относительно же тех или иных данных форм вывода всегда можно предположить у читателя некоторую определенность: данная форма вывода ему представляется приемлемой или сомнительной (или даже явно неприемлемой). Например, вывод по схеме первой фигуры силлогизма вряд ли у кого вызовет сомнение, тогда как вывод по схеме «Из высказывания x выводится (следует) то, что x выводится из любого высказывания y» может показаться сомнительным. В логической литературе имеется значительное число работ, которые исходят из такого рода сомнений.

Проблема логического следования является, на наш взгляд, одной из центральных теоретических проблем современной логики. Здесь речь идет именно о проблеме в полном смысле слова: логические системы, по идее дающие адекватное описание интуитивного понимания правил следования, представляют собою эпизодические явления в логике и далеко не свободны от критики именно с точки зрения интуиции. А между тем в нашей философской и логической литературе ей уделяется ничтожно мало внимания. Будем надеяться, что данная работа хотя бы частично восполнит этот пробел.

Имеется одно обстоятельство, ставящее под сомнение правомерность такой постановки проблемы, как это сделано в данной работе: правила вывода суть своего рода конвенции относительно употребления логических знаков. Однако эти конвенции складывались в результате естественноисторического развития познания, под влиянием закономерностей исторического и индивидуального процессов формирования мышления. Так что вопрос об эмпирической основе для логических теорий следования вполне правомерен даже как вопрос о соотношении конвенций, осуществляемых в науке логике, и конвенций, сложившихся стихийно-исторически и нашедших свое выражение в навыках мышления.

Логика как наука, строящая теории и потому использующая абстракции и дедукцию, не дает непосредственно описания интеллектуальной деятельности людей. Логика дает абстрактные модели (знаковые системы), которые могут быть использованы для описания тех или иных сторон мышления с помощью интерпретаций, подобранных в соответствии с эмпирическими сведениями об этих сторонах мышления. Неизбежное следствие этого — лишь частичное и приблизительное совпадение логических систем, интерпретированных некоторым образом, с тем эмпирическим материалом, на который они интерпретируются, а также возникновение различного рода «парадоксальных» ситуаций. На этом основании некоторые склонны думать, будто современная логика вообще не имеет никакого отношения к описанию мышления. Мы считаем это мнение ошибочным. Дело просто в том, что отношение логических систем к интеллектуальной деятельности утратило (если оно вообще когда-либо было таким) тривиальный характер непосредственного совпадения теоретического с эмпирическим и оказалось опосредованным специальными исследованиями В данной работе отношение логических систем к некоторым сторонам интеллектуальной деятельности рассматривается именно в духе отыскания таких промежуточных связующих звеньев.

ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

§ 1. Под классической логикой высказываний мы будем понимать следующее: 1) двузначные функциональные (матричные, истинностные) построения; 2) эквивалентные им аксиоматические построения; 3) вообще формальные системы, эквивалентные классическим аксиоматическим построениям. Для целей данной работы достаточно будет говорить об одном двузначном функциональном построении (см. об этом [5]), поскольку нас будут интересовать вполне определенные функции, не зависящие от того, какие функции выбраны в качестве основных и как они записываются с помощью основных. В книге Новикова [15] функциональное построение называется алгеброй высказываний, а аксиоматическое построение — исчислением высказываний. Примером систем, указанных в третьем пункте, могут служить системы NK и LK Генцена (см. [12], [33], [47]).

Под общей теорией вывода будем понимать теорию, в которой рассматриваются правила вывода, не зависящие от структуры элементарных высказываний, — в которой высказывания берутся так же, как в логике высказываний (т. е. как нечто нерасчленяемое на части, которые сами уже не являются высказываниями), и учитываются лишь их отрицания и соединения посредством знаков «и», «или» и т. п. Другими словами, в общей теории вывода рассматриваются приемлемые утверждения вида «Из x выводится (следует) y», где x и y суть высказывания, в структуре которых учитывается только то, что они могут быть построены из высказываний и знаков «не», «и», «или» и т. п. Более точное определение общей теории вывода будет дано в четвертой главе.

Классическая логика высказываний не является точным выражением общей теории вывода, — факт, в логике достаточно хорошо известный. Во всякой работе, в которой дается систематическое изложение основ современной логики, можно найти оговорки на этот счет (см., например, [32], [15], [21]). Однако эти оговорки обычно никак не влияют на последующее изложение. Классическая логика высказываний до сих пор фактически играет роль общей теории вывода, до сих пор является фундаментом теории вывода и формальной логики вообще. Во всяком случае такое ее понимание является господствующей тенденцией в логике. «Ослабление» классической логики в интуиционистском (конструктивистском) исчислении высказываний за счет исключения принципа *tertium non datur*, как увидим ниже, идет не по линии приближения к общей теории вывода, а совершенно в ином плане, и сказанное выше можно в известной мере отнести также к нему. О фундаменте логики выше говорилось не в том смысле, что изложение логики непременно начинают с логики высказываний (часто этому предпосылают другие разделы; см., например, [21], [25], [30], [39] и т. п.), а в том смысле, что на ней базируется логика предикатов, вероятностная логика, модальная логика и т. д.

Конечно, имеются реальные основания для того, чтобы считать классическую (или интуиционистскую) логику высказываний фундаментом теории вывода. Однако возможно исследовать и несовпадение классической (и интуиционистской) логики высказываний и общей теории вывода, каким бы маловажным оно ни казалось. В этой главе мы рассмотрим те свойства классической логики высказываний, которые исключают безоговорочную оценку ее в качестве общей теории вывода.

Когда хотят подчеркнуть непригодность классической логики высказываний в качестве непосредственной (без ограничений и модификаций) формализации логического следования, обычно указывают на следующее обстоятельство: материальная импликация не является отношением логического следования, так как для нее оказываются верными положения, не соответствующие интуитивному пониманию следования, например, — всякое истинное высказывание материально имплицируется любым высказыванием, всякое ложное высказывание материально имплицирует любое высказывание и т. п. («парадоксы» материальной импликации). Из этого факта исходил Люис, предпринявший первую в современной логике попытку формализации логического следования с учетом именно интуитивного понимания последнего (см. [38], [39]).

Имеются, однако, и другие основания в пользу тезиса о несовпадении классической логики высказываний и общей теории вывода (теории логического следования), исходящей из обычного, привычного и т. п. понимания следования одних высказываний из других. Эти основания не менее важны, чем «парадоксы» материальной импликации. Они касаются не только понятия материальной импликации, но и других понятий классической логики. При разборе их обнаруживается ряд обстоятельств, с которыми приходится считаться при построении общей теории вывода. Рассмотрим некоторые из этих оснований.

§ 2. Обратимся прежде всего к функциональным построениям (к алгебре высказываний). Определения функций, претендующих на роль экспликатов (в смысле [11]) логических знаков обычной речи «не», «и», «или» и т. д., общеизвестны. Но мы их здесь все-таки приведем, к тому же — в такой записи, в которой отчетливее обнаруживается возможность их различных пониманий, существенно важная с точки зрения идеи построения общей теории вывода. Приводимые ниже определения адекватны таблицам истинности и другим формам (см. [3], [5]). Однако в излагаемом ниже виде их логическая природа выступает более явно, что для нас имеет решающее значение здесь. Ограничимся отрицанием и бинарными функциями. В функциональных построениях можно пользоваться различной терминологией. Мы, естественно, будем пользоваться логической терминологией, т. е. будем говорить о высказываниях и их связях, характеризуемых с помощью учета значений истинности высказываний.

Пусть x, y, z, ... суть любые высказывания. Конъюнкция x и y, которую будем обозначать через $x\&y$, определяется так: 1) если x истинно и y истинно, то $x\&y$ истинно; 2) если x истинно и y ложно, то $x\&y$ ложно; если x ложно и y истинно, то $x\&y$ ложно; если x ложно и y ложно, то $x\&y$ ложно. В другой форме второй пункт можно записать так: если ((x истинно и y ложно) или (x ложно и y истинно) или (x ложно и y ложно)), то $x\&y$ ложно. Дизъюнкция (нестрогая, неисключающая) $x \vee y$ определяется так: 1) если x истинно и y истинно, то $x \vee y$ истинно; если x истинно и y ложно, то $x \vee y$ истинно; если x ложно и y истинно, то $x \vee y$ истинно; 2) если x ложно и y ложно, то $x \vee y$ ложно. Первый пункт можно записать в форме: если ((x истинно и y истинно) или (x истинно и y ложно) или (x ложно и y истинно)), то $x \vee y$ истинно. Материальная импликация $x \supset y$ определяется так: 1) если x истинно и y истинно, то $x \supset y$ истинно; если x ложно и y ложно, то $x \supset y$ истинно; если x ложно и y истинно, то $x \supset y$ истинно; 2) если x истинно и y ложно, то $x \supset y$ ложно. Первый пункт можно записать в форме: если ((x истинно и y истинно) или (x ложно и y истинно) или (x ложно и y ложно)), то $x \supset y$ истинно. Отрицание $\sim x$ определяется так: 1) если x истинно, то $\sim x$ ложно; 2) если x ложно, то $\sim x$ истинно. Аналогично можно записать определения строгой дизъюнкции $x \parallel y$, равнозначности $x \approx y$ и других функций.

Приведенные определения соответствуют чтению таблиц истинности слева направо. Их можно дополнить пунктами 3 и 4, соответствующими чтению таблиц справа налево. Например, для $x \& y$ получим: 3) если $x \& y$ истинно, то x истинно и y истинно; 4) если $x \& y$ ложно, то (x истинно и y ложно) или (x ложно и y истинно) или (x ложно и y ложно). Аналогично для прочих функций. Впрочем, если при определении пункты 3 и 4 явно не формулируются, то они так или иначе признаются в качестве верных утверждений, поскольку они выводятся при условии признания (помимо пунктов 1 и 2) только двух значений истинности (а значит только четырех возможных комбинаций значений истинности x и y).

На различие в чтении таблиц истинности слева направо (у нас пункты 1 и 2 определений) и справа налево (пункты 3 и 4) как на нечто существенное с точки зрения проблемы следования обратил внимание Рейхенбах [44]. Для нас, как увидим ниже, оно никакой роли играть не будет.

Приведенные определения (и вообще определения функций логики высказываний табличным, матричным и т. п. способом) можно понимать двояко (по крайней мере). Пусть Fxy есть любая из функций $x \& y$, $x \vee y$, $x \supset y$, $x \parallel y$, $x \approx y$ и т. п. При первом понимании (о котором будет говориться в этом параграфе) Fxy берется как высказывание, значение истинности которого может быть проверено (выяснено, установлено) независимо от x и y: мы можем узнать, истинно или ложно Fxy, не зная значений истинности x и y. Очевидно, здесь имеет место не связь x и y между собой (в некоторое сложное высказывание), как это представляется при взгляде на символы $x\&y$, $x\vee y$ и т. д., а связь x и y с каким-то третьим высказыванием z, верифицируемым (или фальсифицируемым) и без обращения к x и y. Значение истинности Fxy (т. е. z) здесь зависит от значений истинности x и y лишь в следующем плане: выбираем (специально создаем) условия, когда x истинно и y истинно; смотрим, каким при этом будет z (или специально создаем условия такие, чтобы z имело одно из двух значений истинности, нужное нам); и так поступаем для прочих условий (возможностей, комбинаций) — x истинно и y ложно, x ложно и y истинно, x ложно и y ложно; аналогично — в обратном направлении, если это учитывается в самих определениях (берем случай, когда z истинно, и смотрим или создаем условия для x и y и т. д.); по набору значений x, y и z (по комбинации их) устанавливаем тип связи x, y и z. Короче говоря, в силу естественно данных или искусственно созданных взаимоотношений объектов, о которых говорится в x, y и z, мы можем делать выводы, указанные в определениях типов этих взаимоотношений. Надо сказать, что способ обозначения в данном случае скрывает суть дела: в нем скрыто то, что Fxy не есть соединение x и y; здесь Fxy обозначает и z, отличное от x и y, и тип связи x, y и z.

Аналогично обстоит дело с отрицанием. При рассматриваемом первом понимании определения знак $\sim x$ выступает как высказывание, в состав которого не входит x, т. е. как некоторое высказывание y. Зависимость значения истинности y от x здесь понимается так: при истинном x будет ложно y не в силу логических соображений (определение «не»), а в силу естественно данных или искусственно созданных взаимоотношений различных объектов, о которых говорится в x и y; и так для прочих пунктов определения. Заметим кстати, что при таком понимании самотождественная функция приобретает смысл связи двух различных высказываний. И вообще при рассматриваемом понимании только одноаргументные функции суть связи двух высказываний.

Следует обратить внимание на то, что при такой интерпретации Fxy и $\sim x$ учитывается возможность изменения значений истинности x и y (и z). Это соответствует допущению того, что могут меняться свойства (состояния) предметов, о которых говорится в x, y, z. Здесь x и y суть переменные не в том смысле, что на их место можно подставлять любые конкретные высказывания. Здесь x и y суть любые конкретные высказывания с изменяющимся (в зависимости от места и времени) значением истинности. Например; «Контакт a замкнут» превращается из истинного в ложное, если контакт a был замкнут, но теперь разомкнулся.

Приведенная интерпретация определений Fxy и $\sim x$ вполне согласуется с пониманием их как функций истинности x и y. Знаки Fxy и $\sim x$ можно при этом рассматривать как знаки, указывающие также и на то, что значения истинности Fxy и $\sim x$ определенным образом зависят от x и y. Здесь интерпретируются, заметим, не отдельно взятые Fxy и $\sim x$, а сами определения в целом: они берутся как описания некоторых типов связей. Пусть, например, x есть «Контакт a замкнут», y есть «Контакт b замкнут», z есть «Цепь c замкнута». Последовательное соединение a и b в цепи c можно рассматривать как модель $x \& y$, параллельное — как модель для $x \vee y$.

Рассмотренная интерпретация определений Fxy и $\sim x$ не годится в качестве экспликации привычного понимания логических знаков речи «и», «или», «не» и т. п., поскольку «x и y», «x или y», «не — x» и т. п. содержат в качестве частей именно высказывания x и y.

§ 3. При втором понимании определений $\sim x$, $x \& y$, $x \vee y$, $x \supset y$ и т. д. последние выступают как высказывания, в состав которых входят высказывания x и y (в состав $\sim x$ входит x) и которые, следовательно, не поддаются верификации без верификации x и y. Мы будем рассматривать простейший случай, более всего соответствующий смыслу «и», «или», «не» и т. д.: Fxy и $\sim x$ построены только из тех высказываний, которые указаны в самом символе, то есть Fxy построено только из высказываний x и y (и знака F), а $\sim x$ — только из высказывания x (и знака $\sim$). При таком понимании Fxy и $\sim x$ изображают строение высказываний, — единственное, что важно с точки зрения теории вывода.

Второе понимание определений Fxy и $\sim x$ в свою очередь допускает вариации. **Один из его вариантов состоит** в том, что определения выступают как соглашения о замещении одних выражений другими. Например, выражения «$x \& y$ истинно» (a) и «$x \& y$ ложно» (b) рассматриваются как тождественные по смыслу соответственно с выражениями «x истинно и y истинно» (c) и «x истинно и y ложно или x ложно и y истинно или x ложно и y ложно» (d). Если приняты только пункты 1 и 2 (3 и 4), то допускается замена c и d соответственно на a и b (a и b на c и d); если приняты все четыре пункта, то допускается замена в обе стороны. Последнее можно записать посредством знака определения: «$x \& y$ истинно» $= Df.$ «x истинно и y истинно», «$x \& y$ ложно» $= Df.$ «x истинно и y ложно или x ложно и y истинно или x ложно и y ложно». Аналогично для прочих функций. В общем, в рассматриваемом случае определяются не Fxy и $\sim x$ сами по себе, а выражения «Fxy истинно (ложно)» и «$\sim x$ истинно (ложно)».

Этот вариант интерпретации означает определение условий истинности сложных высказываний со знаками $\&$, $\vee$, $\sim$ и т. д., которые можно рассматривать как логические знаки речи соответственно «и», «по крайней мере одно из» (неисключающее «или»), «не» и т. п. Но он имеет одно неудобство: в целом ряде случаев, когда в определяющей части фигурирует слово «или», он не дает возможности определить значение истинности Fxy по данным значениям истинности x и y.

Пусть, например, x истинно и y ложно. По определениям мы можем заменить «y ложно» на «$\sim y$ истинно» и «x истинно и y истинно» на «$x \& y$ истинно». Но мы не можем заменить «x истинно и y ложно» на «$x \& y$ ложно», поскольку по определению последнее выражение замещает «x истинно и y ложно или x ложно и y истинно или x ложно и y ложно». Указанный недостаток устраняется во втором варианте рассматриваемой интерпретации.

Однако этот вариант представляет интерес вот с какой точки зрения. Термины «истинно» и «ложно» из определений можно исключить. Для этого достаточно принять следующее: 1) утверждение «a ложно» тождественно утверждению «не-a истинно»; 2) утверждение высказывания «a истинно» тождественно утверждению высказывания a ($a = Df.$ a истинно; $\sim a = Df.$ a ложно). В таком случае рассматриваемый вариант определений примет такой вид: 1) $\sim x = Df.$ не-x; 2) $x \& y = x$ и y; $\sim (x \& y) = x \& \sim y$ или $\sim x \& y$ или

$\sim x \& \sim y$; 3) $x \vee y = x \& y$ или $\sim x \& y$ или $x \& \sim y$; $\sim(x \vee y) = \sim x \& \sim y$; 4) $x \| y = x \& \sim y$ или $\sim x \& y$; $\sim(x \| y) = x \& y$ или $\sim x \& \sim y$; 5) $x \supset y = x \& y$ или $\sim x \& y$ или $\sim x \& \sim y$; $\sim(x \supset y) = x \& \sim y$; 6) $x \approx y = x \& y$ или $\sim x \& \sim y$; $\sim(x \approx y) = x \& \sim y$ или $\sim x \& y$.

Рассмотрим эти определения сами по себе, а не как сокращенную запись определений с терминами «истинно» и «ложно». Устранение последних из определений ведет к существенным последствиям. Знаки &, $\vee$, $\supset$, $\sim$ и т. д. здесь выступают как определяемые через привычные «и», «или» и «не». Последние фигурируют во всех интерпретациях определений, приведенных в § 2. Но лишь в данном случае знаки &, $\vee$, $\supset$, $\sim$ и т. д. сводятся к ним в полном смысле слова. Если принять, что &, $\|$ и $\sim$ суть соответственно лишь иная запись «и», «или» и «не», то все прочие знаки оказываются определенными через них без использования семантических терминов «истинно» и «ложно». Так, $x \vee y$ оказывается сокращением «x и y или не-x и y или x и не-y», $x \supset y$—сокращением «x и y или не-x и y или не-x и не-y» и т. д.

О сведении знаков $\supset$, $\vee$, $\approx$ и т. д. к &, $\|$ и $\sim$ здесь говорится в ином смысле, чем в случае такого сведения на базе определений с терминами «истинно» и «ложно». Там знаки «и», «или» и «не» могут использоваться в определениях любых функций, принятых за основные, поскольку приходится иметь дело с перечислением каких-то возможностей и с их взаимоисключающим характером (см. [5] и [10] о гипотезах, лежащих в основе функциональных построений). В частности, если за основные приняты $x \& y$ и $\sim x$, то при определении $x \& y$ можно воспользоваться знаком «и» (см. § 2). Там знаки «и», «или» и «не» используются постольку, поскольку мы оперируем обычной речью как средством построения специальной теории. Здесь же эти знаки берутся как предмет рассмотрения, берутся без функционального их определения, прочие знаки вводятся как средства сокращения построенных с их помощью выражений. Там все бинарные, например, функции можно определить независимо друг от друга стандартным способом (например, таблицами); здесь «и», «или» и «не» таблицами не определяются, а прочие знаки независимо от них не могут быть введены.

Если рассматривать приведенные выше определения сами по себе (без терминов «истинно» и «ложно»), то легко решается вопрос «Что значит образовать Fxy из x и y?». В самом деле, согласно определениям мы имеем $x \& y$, если имеем «x и y», имеем $x \vee y$, если имеем «x и y или не-x и y или x и не-y», и т. д. В общем, образовать Fxy — значит построить высказывание со знаками x, y, «и», «или» и «не».

§ 4. Второй вариант рассматриваемой интерпретации определений Fxy и $\sim x$ состоит в том, что знаки F и $\sim$ фактически берутся как первичные, а сами определения выступают как своего рода аксиоматические утверждения относительно значений истинности содержащих эти знаки высказываний. Например, фрагмент определения $x \supset y$ «Если x ложно и y истинно, то $x \supset y$ истинно» есть утверждение, согласно которому мы считаем некоторое данное $x \supset y$ истинным, если известно, что x ложно и y истинно. Этот вариант имеется в виду, в частности, при приведении примеров для $x \supset y$, имеющих целью показать возможность отсутствия смысловой связи между x и y в $x \supset y$ (см., например, [3], [12], [15] и т. п.). В самом деле, пусть x есть «$2 \times 2 = 4$» и y есть «Снег бел»; соединяем x и y знаком $\supset$; согласно определению $x \supset y$ истинно, поскольку истинны x и y.

Устранение семантических терминов «истинно» и «ложно», вполне естественное для первого варианта, исключено для второго. Если эти термины устранить, получим двусмысленные положения «Если x и y, то $x \vee y$», «Если x и не-y, то $x \vee y$», «Если не-x и y, то $x \supset y$» и т. п. А устранение семантических терминов важно не просто ради упрощения, сокращения записи. С точки зрения проблемы логического следования речь может идти о реальных структурах высказываний, а для них как таковых значения истинности входящих в их состав высказываний безразличны. Для первого варианта устранение семантических терминов можно рассматривать именно в таком духе, понимая $x \& y$ как сокращение (или замещение) «x и y», $x \vee y$ — «$x \& y$ или $\sim x \& y$ или $x \& \sim y$» и т. д. Для второго же варианта приведенные выше положения без семантических терминов теряют смысл.

С точки зрения этого варианта любые два высказывания можно объединить любым знаком $\&$, $\vee$, $\supset$ и т. д. Ход рассуждения здесь таков: берем любые x и y (например, «$2 \times 2 = 5$» и «Снег бел»; соединяем их любым знаком F (например, знаком $\supset$); смотрим, каковы значения истинности x и y (в примере первое ложно, второе истинно);

в соответствии с определением Fxy и с данными значениями истинности x и y выясняем значение истинности Fxy (в примере $x \supset y$ истинно). В общем, если x ложно и y истинно, то $x \& y$ ложно, $\sim(x \& y)$ истинно, $x \vee y$ истинно и т. п. Соединение x и y знаком F — дело произвола. Вопрос о том, какую из Fxy образуют x и y в данном случае, не является здесь правомерным.

Но у нас речь идет о соответствии знаков F и логических знаков речи. Мы должны поэтому предположить какие-то сложные высказывания, фактически встречающиеся в обычной и научной речи, свойства которых описывались бы (пусть односторонне) определениями F. При этом мы столкнемся со следующим интересным фактом.

Пусть a есть некоторое высказывание, в состав которого входят x и y. Пусть считается, что свойства a совпадают со свойствами Fxy, указанными в определении последнего. Чтобы это мнение было убедительно, надо установить значение истинности a во всех четырех возможных случаях: 1) x истинно и y истинно; 2) x истинно и y ложно; 3) x ложно и y истинно; 4) x ложно и y ложно. Получается ситуация, сходная с той, с какой мы встречались при рассмотрении первой интерпретации определений F.

Там мы уже говорили о необходимости различать двоякое понимание x и y как переменных: 1) как допущение возможности изменения предметов, о которых говорится в x и y (имеется в виду изменение одних и тех же предметов во времени и различие однородных предметов в пространстве, в общем — смена предмета, к которому относят высказывание); с этой точки зрения высказывания «$2 \times 2 = 4$», «Число 4 четное» и т. п. не являются переменными; 2) как право подставлять на место x и y конкретные высказывания; с этой точки зрения высказывание «Контакт a замкнут» будет постоянным, хотя оно переменно в первом смысле (контакт a может оказаться незамкнутым). В рассматриваемом случае x и y в Fxy должны быть переменными именно в первом смысле. И если при этом мы не находим хотя бы одной возможности из указанных в определении Fxy (или $\sim Fxy$), мы еще не можем сказать, что имеем определенную Fxy (или $\sim Fxy$). Например, если возможно $x \& y$, но другие возможности, а именно — $\sim x \& y$ и $x \& \sim y$ (или одна из них), нам не известны, мы еще не можем сказать, есть это $x \vee y$ или нет.

В известной книге Гильберта и Аккермана [3] приводятся такие примеры для $x \supset y$: 1) если $2 \times 2 = 4$, то снег бел; 2) если $2 \times 2 = 5$, то снег бел; 3) если $2 \times 2 = 5$, то снег черен; 4) если $2 \times 2 = 4$, то снег черен. Первые три рассматриваются как истинные, четвертая — как ложная материальные импликации. Эти примеры вполне правомерны, когда не предполагается никакой аналогии Fxy и структур высказываний обычной речи, точнее — когда $\supset$ просто рассматривается как вновь вводимый знак, который при желании можно использовать наряду с другими логическими знаками речи или независимо от них. Но они неудовлетворительны, если предполагается в речи какая-то логическая форма, аналогичная $x \supset y$: для установления того, что данное соединение x и y обладает свойствами, сходными с $x \supset y$, надо пересмотреть все четыре возможности, фигурирующие в определении $x \supset y$. Возьмем первое высказывание. Высказывания «$2 \times 2 = 4$» и «Снег бел» истинны. Но из этого еще не следует, что они образуют логическую форму, обладающую свойствами $x \supset y$. Для этого надо еще выяснить, как будет обстоять дело в случае ложности «$2 \times 2 = 4$» и истинности «Снег бел», в случае ложности «$2 \times 2 = 4$» и ложности «Снег бел» и т. д. Ясно, что проверить такое невозможно. Аналогично для остальных трех примеров. И различные комбинации этих примеров (по три) не дают форму, сходную с $x \supset y$, так как для последней нужны не «$2 \times 2 = 5$» и «Снег черен», а «$2 \times 2 \neq 4$» и «Снег не бел». Проверка невозможна потому, что высказывания «$2 \times 2 = 4$» и «Снег бел» постоянны в первом из указанных выше смыслов.

Рассмотренное понимание не есть только мыслимая возможность. Намек (по крайней мере) на него можно найти там, где, например, устанавливают сходство $x \supset y$ с некоторыми логическими формами, употребляемыми в науке. Так, в работе [14] имеется такое рассуждение (аналогичное рассуждение имеется в [15]). Материальная импликация $x \supset y$ не вполне согласуется с житейским «Если . . ., то . . .». Но в математике последнее употреблялось именно в смысле $x \supset y$. В самом деле, доказывая теорему «Если x, то y», математик предполагает истинность x и доказывает истинность y (случай a). Он считает теорему верной и в том случае, если доказывается ложность x или истинность y доказывается независимо от x, без предположения истинности x (случаи b и c). Теорему он считает опровергнутой лишь тогда, когда установлена истинность x и ложность y (случай d). Как видим, для иллюстрации совпадения $x \supset y$ с некоторой данной логической формой приходится перебирать все четыре комбинации: пункты a, b и c соответствуют случаям истинности $x \supset y$, пункт d — ложности ее.

В приведенном примере приходится допускать переменные в первом смысле x и y, хотя фактически имеются в виду высказывания с фиксированным значением истинности (теоремы математики не превращаются из истинных в ложные, а ложные допущения не становятся истинными). Этот конфликт может быть устранен одним способом: перечисление всех четырех возможностей есть лишь определение условий истинности и ложности Fxy; достаточно одной комбинации значений истинности x и y, чтобы сделать вывод о значении истинности Fxy. Но в таком случае оказывается предрешенным вопрос о смысле знаков F или об аналогии их и логических знаков речи: эта аналогия не выясняется как нечто эмпирически данное, а постулируется априори.

Но пусть все затруднения, указанные выше, несущественны. Независимо от этого сохраняет силу еще одно важное обстоятельство: соответствие $x \& y$, $x \vee y$, $x \| y$ и т. д., с одной стороны, и «x и y», «по крайней мере одно из x и y», «x или y» и т. д., с другой стороны, одностороннее. Возьмем, например, $x \& y$ и «x и y», где знак & не есть просто замена «и». Всякое ли обозначаемое через $x \& y$ высказывание, которое по определению истинно при истинных x и y и ложно в остальных случаях, есть «x и y»? Мы видели (см. первую интерпретацию определений), что это не всегда так. Но можно условиться, что $x \& y$ построено только из высказываний x и y, соединенных знаком &. В таком случае допустимо сказать лишь следующее: $x \& y$ сходно с «x и y» с точки зрения соотношения значений истинности x, y и $x \& y$ (соответственно «x и y»), если для «x и y» имеют силу положения «Если x истинно и y истинно, то «x и y» истинно», «Если x истинно и y ложно, то «x и y» ложно» и т. д., аналогичные пунктам 1—4 определения $x \& y$. Но почему эти положения должны иметь силу для «x и y»? Очевидно только одно: если мы высказали «x и y», то мы высказали каждое из x и y; если мы утверждаем оба x и y, то мы утверждаем каждое из них, и т. п. Что же касается истинности и ложности «x и y», то здесь требуется договоренность, требуется определить выражения ««x и y» истинно» и ««x и y» ложно» или в явной форме выразить неявное их понимание. Определение $x \& y$ и есть (с этой точки зрения) аналог определения этих выражений, а не «x и y»: «x и y» истинно тогда, когда истинны оба x и y, и ложно в прочих случаях. Подчеркиваем, что последнее не является необходимым для осмысленного оперирования знаком «и». Сходные рассуждения уместны и для других знаков (но не для всех; как увидим ниже, это не годится для $x \supset y$ и «Если x, то y»).

В общем, определения Fxy и $\sim x$ как функций истинности x и y можно рассматривать как определения условий истинности высказываний, содержащих знаки «и», «или», «не» и т. д., а не как экспликацию этих знаков. Последняя может быть осуществлена, по нашему мнению, именно в общей теории вывода, в которой вообще не принимаются во внимание значения истинности высказываний при описании свойств логических знаков.

§ 5. Рассмотрим несколько подробнее материальную импликацию, поскольку она является основным понятием классической логики высказываний, понимаемой как теория вывода. А о том, что она все-таки понимается таким образом, достаточно отчетливо проявляется при изложении логики в многочисленных учебниках и монографиях (типа [32], [21], [15] и т. п.). И какие бы при этом ни делались оговорки насчет материального вывода, вывода в особом смысле слова и т. д., факт остается фактом: именно теория «материального вывода» излагается, а не что-либо иное.

Материальная импликация обладает свойствами, сходными со свойствами условного высказывания и логического следования. Одно из этих свойств состоит в том, что высказывание $((x \supset y) \& x) \supset y$ является тавтологией (всегда истинно). Второе свойство состоит в том, что доказывается положение: если истинны $x \supset y$ и x, то истинно y. Эти свойства $x \supset y$ позволяют принять для нее *modus ponens* «$x \supset y$; x; значит, y» в аксиоматических построениях. Между прочим $((x \supset y) \& x) \supset y$ и «$x \supset y$; x; значит, y» (или $x \supset y,\ x \,/\, y$) различаются как утверждение в исчислении (первое) и утверждение об исчислении. Кроме того, лишь второе дает право отбросить $x \supset y$ и x и остаться с одним y.

Имеются другие функции, обладающие вторым свойством. Но они либо выражаются через $x \supset y$, как $(x \supset y) \& (y \supset x)$ и $(x \supset y) \& (\sim x \supset y)$, либо обладают свойствами, исключающими их аналогию с условным высказыванием и следованием. Так, для $(x \supset y) \& (\sim x \supset y)$ имеют силу следующие положения: если истинно это высказывание, то истинно y (т. е. как и в случае с $x \& y$ не требуется ссылка на x); если истинно это высказывание и истинно $\sim x$, то истинно y (это выглядит как нечто парадоксальное с точки зрения рассматриваемых аналогий). В общем, $x \supset y$ есть единственная среди Fxy, пригодная для таких аналогий.

Для $x \supset y$ имеет силу также положение «Если истинно $x \supset y$ и истинно $\sim y$, то истинно $\sim x$». Это свойство считается также присущим условному высказыванию и логическому следованию (см. , например, [17], [24], [25]).

Имеются различные точки зрения на соотношение $x \supset y$ и условного высказывания. Одни из них фактически сводят условные высказывания к материальной импликации (см. , например, [24], [25]), другие так или иначе различают эти формы (см. , например, [17], [18], [19]), стремясь остаться в рамках интуитивного понимания «Если x, то y». По нашему мнению, вторая тенденция ближе к истине.

Высказывание «Если x, то y» характеризуется (это—определяющий признак) тем, что для него допустим *modus ponens* — «Если x, то y; x; значит, y» (или «Если x, то y; x/y»). Здесь и в дальнейшем мы будем пользоваться строчной записью вывода вместо вертикальной. Слова «если . . . , то . . . » и порядок записи x и y выражают допустимость этого вывода. Другими словами, это свойство описывают также так: утверждая «Если x, то y» и x, мы должны утверждать и y; из «Если x, то y» и x получается (выводится) y; если истинны «Если x, то y» и x, то истинно y, и т. п. Высказывание «Если x, то y» выражает разрешение на переход от x к y, на вывод от истинности x к истинности y. Но оно не есть сам этот переход. Требуется разрешение на переход от x к y и само x, чтобы совершить этот переход актуально.

В качестве свойства «Если x, то y» называют также допустимость вывода «Если x, то y; не-y; значит не-x» (см., например, [17], [24], [25]). Однако включать его в определение нет смысла, поскольку оно производно от закона исключенного третьего и указанного выше (первого) свойства «Если x, то y». Называют также необходимость связи x и y

по смыслу (см., например, [18], [20]). На последнем стоит остановиться подробнее.

Встает, естественно, вопрос: что же такое «связь по смыслу»? В применении к условным высказываниям этот вопрос совпадает с вопросом об их истинности и о том, когда они используются. Ответ на этот вопрос можно получить лишь путем рассмотрения фактических случаев условных высказываний, т. е. чисто эмпирическим путем.

Анализ примеров условных высказываний показывает, что в двух случаях «Если x, то y» считается истинным (в двух случаях считается, что x и y связаны по смыслу). Первый случай: если из x и некоторой совокупности высказываний z логически выводится y, и при этом z истинно (считается истинным) или пусто, то это можно записать в форме «Если x, то y» (см., например, [17]). В общем выражение «Из x и z выводится y; z истинно» можно заменить на «Если x, то y»; выражение «Из x выводится y» можно заменить на «Если x, то y». Так, из высказываний «Все люди смертны» (x) и «Сократ человек» (z) выводится логически «Сократ смертен» (y). Высказывания «Если x и z, то y», «Если x, то y» и «Если z, то y» правомерны, поскольку x и z истинны. Но если a есть «$x \supset y$ истинно», b есть «x истинно» и c есть «y истинно», то высказывания «Если a, то c» и «Если b, то c» не являются правомерными, поскольку a и b не обязательно истинны. Зато правомерно «Если a и b, то c», поскольку прочие условия вывода c из a и b считаются данными (истинны).

Второй случай — высказывания типа «Если x, то y» суть высказывания об эмпирической связи объектов, о которых говорится в x и y. В дальнейшем различие этих случаев будет рассмотрено подробнее. Здесь ограничимся примером и кратким замечанием. Высказывание «Если увеличить температуру данной массы газа, то увеличится ее давление (при прочих постоянных условиях)» было получено опытным путем, в какой-то мере описываемым в бэконовско-миллевской индукции. В этом случае из x и z не выводится y логически; здесь опыт (или наблюдение) поставляет базу для логических рассуждений в виде таких высказываний. Если $x \rightarrow y$ есть высказывание об эмпирической связи объектов, о которых говорится в x и y, то получим такую схему: $x \rightarrow y$ можно заменить на «Если x, то y». Поскольку $x \rightarrow y$ обладает тем свойством, что из $x \rightarrow y$ и x выводится y (см. [6], [8]), то эта замена может быть истолкована двояко: $x \to y$ обладает тем же свойством, что и «Если x, то y» (*modus ponens*); если $x \to y$ предполагается истинным, то вступает в силу соглашение, указанное выше для первого случая.

Обращаем внимание на то, что условное высказывание лишь может быть использовано в указанных случаях, но не обязательно должно быть использовано. Оно не совпадает полностью с отношением логического следования и с фиксированием эмпирической связи, не является родом по отношению к ним как к видам. Дело обстоит совсем иначе и сложнее. Условное высказывание, как мы видели, определяется через отношение следования (вывода), но не предполагает определения последнего в некоторой системе утверждений, представляющей систему правил вывода, высказывания же об эмпирических связях определяются на базе такой теории (см. [6], [7], [8]).

Условное высказывание «Если x, то y» выражает то, что истинность y зависит исключительно от истинности x. И больше ничего оно не выражает. Но это свойство позволяет использовать его именно в тех двух случаях, о которых мы говорили выше. Если кроме этих случаев нет никаких других (определение сводится к разрешению на некоторую подстановку, то есть на вывод), то имеем также и обратное отношение: если «Если x, то y», то либо $x \to y$, либо из x и z выводится y, где z истинно или пусто. Но это, подчеркиваем, не устраняет «Если x, то y» как самостоятельной логической формы. Заметим кстати, что в определении этой формы через понятие вывода не заключается круга: понятие вывода берется как первичное, а само «Если x, то y» выступает как разрешение делать вывод определенного вида.

Вернемся к $x \supset y$. Сравнение определений $x \supset y$ и «Если x, то y» показывает, что $x \supset y$ никак не может быть условным высказыванием, поскольку даже в форме *modus ponens* «$x \supset y$; x; значит, y» $x \supset y$ есть лишь одна из посылок для вывода y. Более того, это положение не дает права признать «Если x, то y», поскольку $x \supset y$ не обязательно истинно. Так что принятие *modus ponens* для $x \supset y$ есть соглашение считать эту форму за «Если x, то y» на основе некоторых сходных свойств.

Очевидно, и условия верификации $x \supset y$ и «Если x, то y» различны: для первой требуется проверка значений истинности высказываний x и y; для второго требуется выяснить, выводится y из x (при некоторых дополнительных данных или только из x) или нет, фиксируется эмпирическая связь (зависимость и т. п.) или нет. Если для первой функциональная (истинностная, матричная) интерпретация необходима как ее определение, то для второй в этом необходимости нет, если вообще усилия на этот счет не ведут к ненужной путанице (ниже мы увидим, что условия истинности $x \rightarrow y$ и высказывания о выводе y из x и z принципиально различны).

Условные высказывания нередко смешивают с логическим следованием (игнорируют то, что они не обязательно выражают логическое следование, а если даже и выражают, то не совпадают с ним). Такое смешение недопустимо не только потому, что определение первых предполагает второе. Имеются другие разграничительные линии, из которых здесь отметим одну. Высказывание «Если x, то y» содержит x и y в качестве частей, как и $x \supset y$. Оно состоит из высказываний x и y, упорядоченных определенным образом. Иначе обстоит дело с высказыванием «Из высказывания x выводится (следует) высказывание y». Последнее не содержит в качестве частей высказывания x и y, оно есть метавысказывание по отношению к ним. Оно состоит из субъектов «высказывание x» и «высказывание y» и предиката «второе выводится из первого». Оно подобно высказываниям типа «Из кирпича строят дома», «Из нефти получается бензин» и т. п. Оно имеет следующее свойство (гносеологической принцип дедукции): если из x выводится y и x истинно, то y истинно. Но это не отменяет указанного выше отличия его от условного высказывания и от $x \supset y$.

Высказывание «Из x выводится y» (будем обозначать через $x \vdash y$) истинно, если на самом деле $x \vdash y$, и ложно, если этого нет. Когда $x \vdash y$ и когда нет, это и рассматривает теория вывода, характеризуя класс правил вывода. Возможность вывода y из x не зависит от того, истинно x или нет. А возможность верифицировать $x \vdash y$ без верификации x и y определяется тем, что $x \vdash y$ содержит не высказывания x и y, а названия или изображения (обозначения, графическое тело и т. п.) этих высказываний. Функциональная интерпретация $x \vdash y$ допустима для определенных целей, о чем речь пойдет в следующих главах. Сказанного достаточно для того, чтобы на вопрос «является отношение $x \supset y$ экспликацией логического следования?» ответить отрицательно. Интерпретация же знака $\supset$ (знака материальной импликации) в качестве знака $\vdash$ (знака логического следования) ведет к известным «парадоксам»: ряд тавтологий, будучи истолкован как правила вывода, не согласуется с интуитивным пониманием следования. В самом деле, тавтологиями являются положения $\sim x \supset (x \supset y)$, $x \supset (y \supset x)$, $x \supset (y \vee \sim y)$, $x \supset \sim (y \& \sim y)$, $((x \supset y) \& \sim (x \supset z)) \supset y$ и т. п. Рассматривая $\supset$ как $\vdash$,получим положения $\sim x \vdash (x \vdash y)$, $x \vdash (y \vdash \vdash x)$, $x \vdash y \vee \sim y$, $x \vdash \sim (y \& \sim y)$ и т. п., которые означают следующее: из $\sim x$ выводится то, что из x выводится любое высказывание (если x ложно, то из него выводится любое высказывание); из x выводится то, что x выводится из любого высказывания (если верно x, то оно выводится из любого высказывания), и т. п. Несовпадение с интуитивным пониманием вывода явное.

Кроме того, при такой интерпретации получаются громоздкие выражения, объединяющие ряд семантических плоскостей. Например, $\sim x \vdash (x \vdash y)$ надо читать так: «Из высказывания $\sim x$ выводится высказывание «Из высказывания x выводится высказывание y»». Еще более громоздкая конструкция получается при чтении таких выражений, как $(x \supset (x \supset y)) \supset \supset (x \supset y)$ и т. п., понимаемых как $(x \vdash (x \vdash y)) \vdash (x \vdash y)$ и т. п.

Сделаем небольшое дополнение к тому, что говорилось в § 4 о примере из [14] (или [15]). Следует различать такие совершенно различные факты: 1) выяснение значений истинности x и y никак не влияет на значение истинности «Если x, то y»; последнее истинно, если соблюдены правила вывода y из x и некоторой совокупности положений, и ложно, если в доказательстве y при условии предположения x допущена ошибка; 2) выяснив, что x ложно (или что y истинно), мы делаем вывод о том, что верно «Если x, то y», поскольку предположили совпадение последнего по условиям истинности с $x \supset y$. Второй пункт не согласуется с употреблением «если . . . , то . . .» в математике и других науках. А перечисленное в пунктах *a*, *b*, *c* и *d* на самом деле согласуется не с $x \supset y$, а именно с «житейским» условным высказыванием. Пункт *a* означает, что из x и z (другие теоремы математики) выводится y, что и записывается в форме «Если x, то y», если z истинно. Для вывода $x \& z \vdash \vdash y$ не обязательна истинность x. Предположение истинности x есть дань гносеологической роли дедукции, описываемой правилом: $x \& z \vdash y$; x истинно и z истинно; значит,

y истинно. Возможно при этом, что x истинно. Тогда при истинном z будет истинно y. Возможно, что x ложно. Но это не отвергает того, что $x \& z \vdash y$ («Если x, то y»). Возможно, наконец, что y выводится из других высказываний независимо от x (имеет место $u \vdash y$). Но это не противоречит $x \& z \vdash y$.

В общем соотношение «Если x, то y» и $x \supset y$ таково: 1) зная, что x ложно (или что y истинно), мы еще не имеем оснований считать «Если x, то y» ложным; но при этом мы еще не имеем оснований считать «Если x, то y» истинным, как в случае с $x \supset y$; 2) мы считаем «Если x, то y» истинным тогда, когда по некоторым правилам вывода получаем y из x и некоторой совокупности истинных высказываний z (когда соблюдены правила рассуждений при доказательстве y на основе допущения x); для признания истинности «Если x, то y» нужно не установление значений истинности x и y, взятых независимо друг от друга, а именно уверенность в в соблюдении правил вывода при доказательстве y; для установления истинности $x \supset y$ не обязательно выводить y из x и некоторой совокупности (возможно, пустой) высказываний, не обязательно доказывать y при условии допущения x; 3) если обнаружена ошибка в доказательстве y (обнаружено, что не соблюдены правила вывода), то мы считаем, что у нас еще нет оснований считать «Если x, то y» истинным; 4) если мы каким-то путем установили, что y ложно и x истинно, то мы считаем «Если x, то y» ложным; но мы считаем так не в силу некоторого определения (как в случае с $x \supset y$), а по иным причинам; а именно — мы заранее предполагаем, что из истинных посылок не выводятся ложные следствия, поскольку сами правила вывода вырабатываются с таким расчетом; 5) если истинно «Если x, то y», то истинна $x \supset y$; но это имеет место лишь постольку, поскольку в случае истинности «Если x, то y» исключается ложность y при истинном x; 6) если ложно «Если x, то y», то не обязательно ложно $x \supset y$, так как возможно, что y нельзя доказать при условии допущения x (из x и некоторой совокупности высказываний z невозможно вывести y); этот пункт можно исключить, если он кому-либо покажется сомнительным, так как и без него напрашивается вполне определенный вывод. Этот вывод состоит в следующем: даже в сфере математики нет полного совпадения «Если x, то y» и $x \supset y$; речь может идти лишь о частичном их сходстве и об использовании $x \supset y$ при описании правил вывода.

Рассматривая «Если x, то y» как «сокращение» того факта, что из x и некоторой совокупности истинных высказываний z выводится y (что y доказывается при условии допущения x), обычно забывают сказать, выводится при этом y из z или нет. По самому смыслу выражения «y доказывается при условии допущения x» предполагается, что y не выводится из z, что для вывода y требуется еще x. Если допустить возможность вывода y из z, то получаются «парадоксальные» результаты: за истинные придется признать «Если x, то y», где x — любое высказывание, а y — истинное; в частности, истинным будет «Если не-y, то y». Но для «Если x, то y», такого не должно быть по смыслу этой формы, тогда как для $x \supset y$ в такого рода случаях ничего «парадоксального» нет.

§ 6. Перейдем к аксиоматическим построениям. О различии функциональных и аксиоматических систем см., например, [3], [15]. Здесь ограничимся лишь следующим замечанием. Об аксиоматических построениях в данном случае речь идет в специальном смысле этого слова: фактически имеются в виду логические системы, которые в работе [12] называются системами гильбертовского типа. В этих системах задаются некоторое множество исходных истинных (правильных, логически истинных) формул, называемых аксиомами, и правила получения из них новых истинных формул (см. [15], [12], [3] и т. д.). Различаются два рода аксиоматических построений: 1) оно строится как метод обзора тавтологий функционального построения (см., например, [3], [5]), определяет класс всегда истинных положений; 2) оно строится безотносительно к функциональному построению, как некоторая формальная система (см., например, [12], [15]). Под аксиоматическими построениями в классической логике высказываний мы имеем в виду построения с определенным содержанием (с исторически определенным содержанием, традицией), а именно — следующие. Эти построения являются дедуктивно полными (см. [3], [5]) относительно функционального построения классической логики высказываний, более того — эквивалентны последнему: в аксиоматических построениях, относимых к классической логике, класс выводимых положений (формул) совпадает с классом тавтологий (всегда истинных формул) классической матричной логики высказываний. Так что указанное выше различие аксиоматических построений в данном случае роли играть не будет, поскольку построения второго рода обладают определенными (исторически обусловленными) свойствами, роднящими их с построениями первого рода: всякому выводимому в них положению соответствует тавтология двузначной матричной логики, и наоборот. Они и строятся с таким расчетом, чтобы не выводились положения, не являющиеся тавтологиями в двузначной функциональной интерпретации их.

Аксиоматические построения классической логики высказываний разнообразны. Они различаются по составу используемых знаков, по составу и форме аксиом (или схем аксиом), по правилам вывода и т. п. Имеются системы только со знаками $\supset$ и $\sim$, со знаками $\vee$ и $\sim$, со знаками $\supset$, $\&$, $\vee$ и $\sim$, вообще без знака $\supset$ и т. п. Варьируются они и по соотношению аксиом и правил вывода (сравни, например, [3] и [33]). Но независимо от этих различий в них во всех содержатся в числе аксиом или выводятся из аксиом положения (формулы, высказывания), которые истолковываются как «парадоксальные» с точки зрения теории вывода. Так, у Фреге, Клини, Лукасевича и других принимается аксиома $x \supset (y \supset x)$ (соответствует тавтологии, о которой говорилось в предшествующем параграфе). В системе Гильберта — Аккермана это положение выводится из аксиом. Выводятся и положения $(x \& \sim x) \supset y$, $(x \supset y) \vee (y \supset x)$, $(x \supset \sim x) \supset \sim x$ и т. п.

Признание такого рода положений в качестве правил вывода привело бы к разрушению дедуктивного познания вообще, если бы такими положениями безоговорочно стали пользоваться на деле. Например, пусть x есть «$2 \times 2 = 5$», $\sim x$ есть «$2 \times 2 \neq 5$». Приняв $\sim x \supset (x \supset y)$ за $\sim x \vdash (x \vdash y)$, мы должны были бы признать, что из высказывания «$2 \times 2 = 5$» выводится любое, в том числе — «великая» теорема Ферма, суждение о существовании бога и т. п. Пусть, например, x есть «Электрон заряжен отрицательно» и y есть «Петр I умер в 1725 г.». Если $(x \supset y) \vee (y \supset x)$ интерпретировать как $(x \vdash y) \vee (y \vdash x)$, то получим следующее: из x явно не выводится y, если они не имеют никаких общих структурных элементов, т. е. $\sim (x \vdash y)$; но $((x \vdash y) \vee (y \vdash x)) \& \sim (x \vdash y) \vdash (y \vdash x)$; значит из y

выводится x, что нелепо с точки зрения интуиции (в данном случае точка зрения интуиции состоит в том, что высказывания без общих структурных элементов не могут находиться в отношении следования.

Сказанное сохраняет силу и в том случае, если в системе вообще не употребляется знак $\supset$: истолкование системы как теории вывода предполагает введение определений, вводящих знак $\supset$. Так, в системе Гильберта — Аккермана знак $\supset$ фактически определяется через $\vee$: $(x \supset y) = Df. (\sim x \vee y)$. Так что лишь при наличии таких определений можно положения типа $x \vee \sim x \vee y$ истолковать как «парадоксальные».

Дело здесь не только в возможности истолкования. Теория вывода должна содержать положения, в которых фигурируют по крайней мере слова «и», «или», «не», «следует» («выводится»), о чем говорит простое наблюдение процессов рассуждений. И если мы хотим аксиоматику, например, только с $\supset$ и $\sim$ истолковать как систему правил вывода, то она либо не будет охватывать «и» и «или», либо последние должны быть введены. В отношении к таким системам они вводятся путем определения их через $\supset$: $(x \vee y) = Df. (\sim x \supset y)$, $(x \,\&\, y) = Df. Df. \sim (x \supset \sim y)$, $(x \mid y) = Df. (x \supset \sim y)$. С другой стороны, при попытках истолкования систем без $\supset$ необходимо введение $\supset$ путем определения через другие знаки (например, система Никода — Лукасевича из одной аксиомы со знаком $\mid$ для истолкования в духе теории вывода нуждается в дополнении определения $\supset$, а также $\&$ и $\vee$, через $\mid$). С точки зрения же эмпирического подхода к следованию понятие «следует» не сводится к «и», «или» и «не» подобно отношению $\supset$, $\vee$, $\&$ и $\sim$, поскольку оно есть предикат метавысказывания $x \vdash y$ по отношению к x и y.

Аксиоматические построения можно рассматривать и независимо от функциональной интерпретации. Оставляя в стороне «парадоксальные» формулы (о них сказано достаточно), обратим внимание на одно важное обстоятельство: системы аксиом можно рассматривать как определение фигурирующих в них логических знаков. Так, аксиомы $x \supset \supset (x \vee y)$ и $y \supset (x \vee y)$ можно рассматривать как определение $x \vee y$, аксиомы $(x \,\&\, y) \supset x$ и $(x \,\&\, y) \supset y$ — как определение $x \,\&\, y$, аксиому $\sim \sim x \supset x$ — как определение $\sim x$

и т. д. (если, конечно, такие аксиомы фигурируют в системе). Такого рода определения можно понимать двояко: 1) как утверждения о том, что формулы с такими-то логическими знаками (имеющие такое-то строение, лучше сказать) суть истинные (логические истинные, правильные и т. п.) формулы; с точки зрения рассматриваемой проблемы мы здесь возвращаемся к функциональной интерпретации; и раз мы решили от нее отвлечься, мы должны это понимание оставить в стороне как не продвигающее нас ни на шаг вперед; 2) как перечень правил оперирования знаками $\&$, $\vee$, $\sim$ и т. д. в процессе рассуждений; при этом определение истинной (правильной и т. п.) формулы выступает как определение класса таких правил, разрешающих от одних формул переходить к другим. Под аксиоматическим определением знаков $\&$, $\vee$, $\sim$ и т. д. мы в дальнейшем будем иметь в виду второе понимание.

Это — шаг в сторону того подхода к этим знакам, какой должен иметь место в общей теории вывода. Но шаг противоречивый в рамках классической логики высказываний, поскольку процесс вывода здесь представлен знаком $\supset$. Стремление (явное или неявное) выйти из затруднения приводит к раздвоению смысла $\supset$: он начинает лишь частично (в роли посредника в выводе) интерпретироваться как знак вывода (см. [12]). Например, $x \supset (y \supset x)$ принимает вид $x \vdash (y \supset x)$.

Аксиоматическое определение знаков $\&$, $\vee$, $\sim$ и т. д. предполагает знак вывода, не сводимый к ним (или «если..., то...» в том смысле, как об этом говорилось выше). Например, $x \& y \vdash x$ и $x \& y \vdash y$ не могут быть определением $x \& y$, если знак $\vdash$ сводится к $\&$; аналогично — для $x \vdash x \vee y$ и $y \vdash x \vee y$. Сведѐние знака вывода к $\vee$ или $\&$ означает круг в определении, если приведенные выражения суть определения. Значит, знак $\vdash$ должен быть взят как первичный. Но если знак $\supset$ интерпретируется так, что «парадоксальные» положения должны быть отброшены, он не должен сводиться к $\&$ и $\vee$ (и соответствующие положения тоже должны быть отброшены) и т. д., т. е. он должен прекратить свое существование как знак материальной импликации. Все построение теряет при этом характер классического.

Аксиомы и выводимые положения сохраняют силу лишь при условии понимания $\supset$ именно как материальной импликации. Но в таком случае аксиомы нельзя понимать как определения знаков $\vee$, &, $\sim$ и т. д., функциональная интерпретация оказывается здесь совершенно необходимой. Она постоянно и предполагается при конструировании системы и при рассмотрении ее свойств.

Дело в том, что определение по самой своей задаче есть метавысказывание по отношению к x, y и знакам $\vee$, &, $\sim$ и т. д. Понимая, например, $x \& y \vdash x$ и $x \& y \vdash y$ как определение знака &, мы в этой записи сокращаем следующее: высказывание, образованное из высказываний x и y путем соединения их знаком & («и»), обладает тем свойством, что из него выводится x (выводится y). В данном случае смысл определения не изменится, если его записать в форме «Если $x \& y$, то x; если $x \& y$, то y». Материальная же импликация $x \supset y$ есть высказывание, образованное из x и y, в примере — из $x \& \bar{y}$ и x (из $x \& y$ и y). Она поэтому не может быть определением знаков, входящих в ее состав.

Отметим, наконец, еще одно соображение. Если к теории вывода применить требование, чтобы ее аксиомы были содержательны (достигается интерпретацией знаков как «и», «или», «не», «выводится») и, вместе с тем, очевидны (по крайней мере частично очевидны), то аксиоматики классической логики оказываются непригодными и с этой точки зрения. Например, $x \supset (y \supset x)$ не обладает никакой очевидностью (если, конечно, не предполагается никакая функциональная интерпретация). В самом деле, почему из x выводится то, что x выводится из любого высказывания (трактовка этого положения в духе «Если x, то x, чтобы ни было» не соответствует интерпретации $\supset$ как знака вывода)? Это относится и к непарадоксальным, но слишком громоздким аксиомам.

Сказанное выше всецело относится к самой материальной импликации: ее можно определить аксиоматически аналогично $x \& y$ и $x \vee y$. В частности, это могут быть такие варианты: 1) $\sim x \vdash (x \supset y)$, $y \vdash (x \supset y)$: 2) $(\sim x \vee y) \vdash (x \supset y)$, $(x \supset y) \vdash (\sim x \vee y)$ и т. п. Здесь точно так же можно пользоваться знаком «если..., то...», помня о его смысле, рассмотренном выше. Эти определения нельзя смешивать с тавтологиями $\sim x \supset (x \supset y)$, $y \supset (x \supset y)$, $(x \& y) \supset (x \supset y)$ и т. п., которые в аксиоматических построениях выводятся из аксиом или являются аксиомами: здесь знак

$\supset$ не может служить средством определения самого себя; здесь именно знак $\vdash$ указывает, от каких формул со знаком $\supset$ можно переходить к другим формулам определенного (сравнительно с ними) вида, от каких формул можно переходить к формулам со знаком $\supset$ и к каким именно. В общем, только при условии частичной интерпретации знака $\supset$ как $\vdash$ можно интерпретировать аксиомы со знаком $\supset$ как определение последнего.

Характерно, что и при таком понимании $x \supset y$ сохраняется «парадоксальность» интерпретации $x \supset y$ как «Если x, то y» (понимаемого как $x \& z \vdash y$, где z истинно, или как $x \vdash y$). Согласно такому пониманию при ложном x (при $\sim x$) без всяких рассуждений должно быть истинным $x \supset \supset y$, интерпретируемое как «Если x, то y». Например, высказывания «$2 \times 2 \neq 4$» достаточно для того, чтобы считать истинным «Если $2 \times 2 \neq 4$, то y», где y — любая теорема математики или вообще любое высказывание (т. е. «Из положения $2 \times 2 \neq 4$ при наличии некоторых истинных высказываний или без них выводится любое высказывание y»). Аналогично — для случая истинности y (например, из «$2 \times \times 2 = 4$» выводится, что если y, то $2 \times 2 = 4$, где y есть любое высказывание).

В аксиоматических построениях для $x \supset y$ принимается *modus ponens* (в числе правил вывода следствий из аксиом), то есть знак $\supset$ прямо рассматривается как знак, во всяком случае аналогичный знаку следования (если не тождественный ему). Здесь все аксиомы (хотят этого или нет) получают оценку правил вывода: если мы имеем истинную формулу (высказывание) x, то при наличии истинного $x \supset \supset y$ (указано в аксиомах) мы делаем вывод об истинности y. А это и есть гносеологическая оценка дедукции: $x \supset y$ дает право на переход от x к y. Но в таком случае и возникает конфликт с перечнем аксиом и выводимых положений, а также с функциональной интерпретацией $x \supset y$. Заметим, между прочим, что конфликт не разрешается тем, что исчисление высказываний объявляется теорией вывода в специальном смысле. Надо еще само исчисление высказываний построить на базе некоторой системы, формализующей следование, чтобы оценить его как раздел теории вывода.

Единственный выход из положения — констатировать, что $x \supset y$ не совпадает ни с «Если x, то y», ни с $x \vdash y$, что если $x \supset y$ и берется как следование или как «если..., то...», то лишь в смысле, строго ограниченном рамками данной системы. Так и поступают фактически (см. [12], [15], [21] и т. п.) в целом ряде работ.

§ 7. Несколько слов о понятии выводимости одних формул из других. Возьмем в качестве примера [15]. В последней выводимость формулы y из формул $x^1,\ldots, x^n$ определяется так: 1) каждая формула x^i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выводима из $x^1,\ldots, x^n$; 2) каждая истинная в исчислении высказываний формула выводима из $x^1,\ldots, x^n$; 3) если формулы x и $x \supset y$ выводимы из $x^1,\ldots, x^n$, то y выводима из $x^1,\ldots, x^n$. Это определение не соответствует интуитивному пониманию следования. Так, согласно этому определению $x \vdash y \vee \sim y$, где x — любая формула (высказывание), а $y \vee \sim y$ истинно в исчислении высказываний.

Понятие о выводимости одних формул из других касается взаимоотношения формул внутри логической системы. Введение его диктуется тем, что упрощается процесс вывода истинных формул из аксиом. Класс истинных формул никак при этом не затрагивается. Задача же заключается в том, чтобы из числа истинных формул исключить такие, которые при интерпретации их как правил вывода кажутся интуитивно неприемлемыми, что связано с перестройкой самой системы аксиом. В такой перестроенной системе, конечно, возможно введение понятия выводимости, аналогичного (по роли) понятиям выводимости в классической логике: 1) оно должно облегчить доказательство истинности формул, не расширяя (вообще не изменяя) класс истинных формул; 2) должен быть найден переход от выражений «из x выводимо y» к положениям о том, что некоторая формула в силу того, что из x выводимо y, истина (т. е. нечто аналогичное теореме дедукции). Понятие же о выводимости одних высказываний из других (безотносительно к той или иной логической системе) определяется тем, что дается некоторая система аксиом, в которой фигурируют формулы типа «из x выводится (выводимо) y».

§ 8. Все сказанное в данной главе относится не только к системам классической логики высказываний, но и к логике высказываний вообще. Последняя помимо классической логики высказываний охватывает многозначные функциональные построения и соответствующие им аксиоматические построения, различного рода «ослабленные» и «ограниченные» (сравнительно с классическими) логические системы (интуиционистская или конструктивистская логика, позитивные системы и т. п.), не претендующие на роль описания свойств логического следования.

Многозначная логика (см. [5], [10], [39]) относится к неклассической логике, поскольку в ней допускается три и более значения истинности высказываний. Поэтому (в силу самой исходной предпосылки о числе значений истинности) многозначные построения суть прежде всего функциональные. Аксиоматические же построения расцениваются как многозначные лишь постольку, поскольку соотнесены с функциональными, выступают как метод обзора тавтологий функциональных построений или интерпретируются в них для тех или иных целей.

Все сказанное в этой главе о классической логике высказываний можно рассматривать как сказанное об n-значной логике высказываний на примере случая, когда $n = 2$. Поскольку речь идет о функциональных построениях, это очевидно: если n больше 2, то все, относящееся к $n = 2$, сохраняется и присоединяются новые затруднения, связанные с истолкованием дополнительных значений истинности. Что же касается аксиоматических построений, то очень несложное рассуждение показывает, что они не составляют исключения.

При любом числе значений истинности и при любой их разбивке на утверждающие и отрицающие (см. об этом [5]) материальная импликация и отрицание должны обладать следующими свойствами: $x \supset y$ имеет утверждающее значение, если x имеет отрицающее или y утверждающее значение; $\sim x$ имеет отрицающее значение, если x имеет утверждающее. Иначе для $x \supset y$ не будет иметь силы *modus ponens*. Но тогда среди аксиом или выводимых положений (если они соответствуют тавтологиям функционального построения, без чего аксиоматическое построение не оценивается как многозначное) будут «парадоксальные» положения типа $x \supset (y \supset x)$, $\sim x \supset (x \supset y)$ и т. п. Так обстоит дело, например, в системе Гейтинга, в которой утверждаются аксиомы интуиционистского исчисления высказываний. В общем, ограничения, накладываемые на класс выводимых формул, в данном случае идут не по линии исключения «парадоксальных» положений, а совсем в ином плане: по линии ограничения правил рассуждений для особых условий (бесконечные множества, взаимные ограничения на измерения величин в физике и т. п.).

Интуиционистская (конструктивистская) логика высказываний является неклассической, поскольку в ней отсутствует (или не выводится) закон исключенного третьего (см. [12], [5]), необходимый для классической логики по самому ее определению. Однако достаточно взглянуть на состав ее аксиом, чтобы обнаружить в их числе «парадоксальные» положения $x \supset (y \supset x)$ и $\sim x \supset (x \supset y)$. Конструктивистская система ограничивает круг правил вывода, если ее истолковать как теорию вывода, но она не дает никаких ограничений насчет положений, не соответствующих интуитивному пониманию вывода, — они в ней выводятся (допускаются). Правда, отсутствие закона исключенного третьего среди выводимых положений конструктивистского исчисления высказываний имеет ряд существенных последствий, в частности — отсутствие эквивалентного функционального построения при конечном числе значений истинности, несводимость $\supset$ к $\vee$ и т. п. (см. [12], [5], [1]). Но эти следствия, если даже они и идут в русле идей формализации следования, лишь случайно совпадают с ними.

Таким образом, содержание данной главы касается не только классической логики. Но, поскольку свойства последней являются решающими в том смысле, что, исходя из их оценки, можно дать аналогичную оценку целому ряду систем иного рода (по крайней мере частично), мы и рассматривали в основном ее.

§ 9. Остановимся кратко на системах генценовского типа (см. [12], [33], [47]). Они представляют интерес как попытка перестроить логику высказываний со стороны формы так, чтобы приблизить ее к фактическим формам вывода.

Генцен в работе [33] полагает, что формализация логических выводов в работах Фреге, Рассела и Гильберта далека от описания фактических форм вывода в математических доказательствах. Генцен строит системы, которые, по его мнению, более точно соответствуют фактическим выводам, содержательному способу доказательства. Это — системы N и системы L (NI и LI для интуиционистской и NK и LK

для классической логики). Охарактеризуем эти системы лишь в той их части, которая охватывает логику высказываний.

Системы N (натуральное исчисление или исчисление натурального вывода) представляют перечень фигур вывода. В системах гильбертовского типа дается перечень аксиом и правил вывода, посредством которых из аксиом выводятся новые положения (приемлемые, истинные и т. п. формулы). Здесь же аксиом нет, даются лишь фигуры вывода, аналогичные правилам вывода в системах гильбертовского типа. Система NI имеет такой вид (x, y, z,... — конечные последовательности формул; следствия будем писать вслед за посылками, разделяя их наклонной чертой): 1) $x, y/x \& y$; 2) $x \& y/x$; $x \& y/y$; 3) $x/x \vee y$; $y/x \vee y$; 4) $x \vee y$, $x \rightarrow z$, $y \rightarrow z/z$; 5) $x \rightarrow y/x \supset y$; 6) $x, x \supset y/y$; 7) $x \rightarrow F/\sim x$; 8) $x, \sim x/F$; 9) F/x. Для получения NK к NI присоединяется фигура 10: $\sim\sim x/x$. Знак F здесь означает ложное высказывание. $x \rightarrow z$ означает, что можно вывести z, признав x; аналогично $y \rightarrow z$, $x \rightarrow y$, $x \rightarrow F$. Фигура 7 означает приведение к абсурду (если из признания x следует F, то $\sim x$). Фигура 8 означает, что x и $\sim x$ образуют противоречие. Фигура 9 означает, что из F следует любое высказывание. В системе N помимо фигуры вывода определяется также фигура доказательства, то есть комбинирование фигур вывода в процессе рассуждений. Правила комбинирования фактически адекватны положениям вроде «Если x/y и y/z, то x/z», «Если x/y и x/z, то $x/y \& z$» и т. п.

Важно обратить внимание на следующее. По содержанию NI и NK эквивалентны соответственно интуиционистскому и классическому исчислению высказываний, так что к ним относится все, сказанное в первой главе. По форме же это — перечень правил вывода. Но это — перечень правил вывода в рамках классического (и интуиционистского) исчисления высказываний, удобное средство вывода приемлемых формул в этих рамках. Кроме того, здесь в одной системе соединяется несколько смыслов следования: 1) $x \supset y$ (например, содержательный смысл пятой фигуры — если y доказывается путем признания x, то из x следует y); 2) $x \rightarrow y$ (y выводится при условии признания x); 3) x/y (смысл девятой фигуры — из F следует любое высказывание).

Системы Генцена LK и LI (исчисление секвенций) изложены также в [12] (система G^1). Дедуктивные правила в системе G^1 применяются к формальным выражениям вида $x^1, \ldots, x^m - y^1, \ldots, y^n$, называемым секвенциями. Здесь $x^1, \ldots, x^m$, $y^1, \ldots, y^n$ суть формулы в смысле систем гильбертовского типа. Система G^1 состоит из схемы аксиом $x \rightarrow x$, логических правил вывода и структурных правил вывода. Последние со схемой аксиом аналогичны определению знака $\vdash$ у Клини в [12] (рассмотрим во второй главе).

Система G^1 эквивалентна классическому исчислению высказываний (если в нем $x \vdash y$, то в $G^1 \vdash (x \rightarrow y)$.), так что с точки зрения содержания рассмотрение G^1 не имеет здесь смысла. Интерпретация G^1 как теории вывода будет означать интерпретацию $\rightarrow$ как $\vdash$ и потребует разъяснения знаков $\supset$, & и $\vee$ в знаках содержательных рассуждений со всеми вытекающими отсюда последствиями (конфликт с интуитивным пониманием содержательного вывода и участвующих в нем логических знаков). Что касается формы записи, то правила G^1 имеют вид «Если из a выводится b, то из c выводится d» (если $\rightarrow$ рассматривать как знак вывода). Такого рода правила не могут быть априори исключены из теории вывода, но в ней прежде всего должно быть отчетливо сформулированы правила типа «Из a выводится $в$». А с этой точки зрения предпочтительнее системы, в которых к минимуму сведены правила вывода из аксиом, а не сами аксиомы (как в G^1).

Помимо того преобразования логики высказываний, которое заключается в замене аксиом (формул систем гильбертовского типа) схемами вывода, аналогичными правилам вывода из аксиом в системах гильбертовского типа, Генцен осуществил своеобразное обобщение логики высказываний. Пусть F есть логическое противоречие, y есть любая формула систем гильбертовского типа, а x может быть пусто. В таком случае схема $x \rightarrow F/x \rightarrow y$ может быть расценена как обобщение схемы F/y (последняя рассматривается как частный случай первой с пустым x). Генценовские схемы обобщают положения логики высказываний в этом духе (в частности, при этом возможно в одной системе охватить классическую и интуиционистскую логику: последняя получается из G^1, если после знака $\rightarrow$ стоит лишь одна формула). Но, очевидно, по самой сути такого обобщения «парадоксальные» формулы не исключаются. В общем рассмотрение систем генценовского типа позволяет сделать следующие выводы: 1) если некоторое формальное построение эквивалентно «парадоксальной» логической системе (подчеркиваем, что мы все время говорим о так называемой парадоксальности, то есть о несоответствии некоторой интерпретации данной логической системы и интуитивного понимания следования), то оно точно так же «парадоксально» (при определенной интерпретации как теории следования); 2) если некоторое положение (некоторая данная формула) расценивается как «парадоксальное», то преобразование его в схему вывода, аналогичную правилам вывода из аксиом, не ликвидирует его «парадоксальности»; 3) обобщение «парадоксальных» положений не устраняет «парадоксальности» системы. Хотя системы генценовского типа и родились из стремления уподобить формальный вывод формул содержательному способу доказательства, но они ограничиваются чисто внешней стороной дела, совершенно не затрагивают класс приемлемых формул.

§ 10. Как мы видели, имеется целый ряд соображений, согласно которым классическая логика высказываний (а также и конструктивистская) не есть точное выражение общей теории вывода. Однако в ней имеются положения (тавтологии в функциональном построении, выводимые положения в аксиоматических построениях, схемы вывода в системах генценовского типа), которые можно интерпретировать как правила вывода. Например — $(x \& y) \supset x$, $(x \vee y) \& \sim x) \supset \supset y$, $(x \vee y) \supset (y \vee x)$ и т. п. можно интерпретировать так: из «x и y» выводится x; если x или y и не-x, то y; из «x или y» выводится «y или x» и т. п. Такого рода правила возражений с точки зрения интуиции не вызывают. Кроме того, «парадоксальные» положения фактически истолковываются так, что они не расцениваются как правила вывода. В частности, никому в голову не приходит класть в основание теорий ложные положения, поскольку из них материально имплицируются любые положения. Наконец, логика высказываний излагается не просто как перечень формул: в ней доказываются определенные положения (теоремы) о получении одних формул из других (например, теорема о дедукции). В этом контексте, т. е. совместно с положениями об исчислении, и с множеством явных оговорок и неявных предположений логика высказываний действительно выступает как уточнение понятия вывода и как общая теория вывода. Однако все это не устраняет изложенных сомнений и не отвергает правомерности попыток построить логическую систему, адекватную интуитивному пониманию следования без оговорок и в самом исходном пункте.

Возникает вопрос: каким путем идти в построении теории, адекватной логическому следованию? Возможны и фактически имеют место два пути. Первый путь характеризуется стремлением выделить в классической логике высказываний класс приемлемых (с точки зрения стоящей задачи) высказываний и исключить неприемлемые («парадоксальные»). Но это нельзя сделать путем перечисления положений и их классификаций. Надо построить такую логическую систему, которая отвечала бы требованиям к логической теории вообще и из самих свойств которой вытекало бы указанное ограничение. Задача оказалась довольно-таки сложной.

Второй путь — исходя из некоторых эмпирических фактов рассуждений, отыскать метод систематического обзора правил рассуждений. Естественный исходный пункт — рассмотрение правил вывода, не зависящих от структуры высказываний и учитывающих свойства фактически употребляющихся логических знаков речи.

Оба этих пути должны, очевидно, дополнять друг друга. В следующих главах мы рассмотрим этот вопрос подробнее, уделяя больше внимания чисто позитивным предложениям.

ПРОБЛЕМА ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ

§ 1. Проблема логического следования рассматривается в двух различных аспектах. В первом аспекте речь идет о смысле выражения $x \vdash y$ самого по себе и об интерпретации знаков, которые считаются знаками следования или превращаются в них благодаря той или иной интерпретации. Во втором аспекте речь идет об определении класса утверждений (высказываний, формул и т. п.), понимаемых как правила вывода, в данном случае — понимаемых как общие правила вывода, не зависящие от смысла и строения элементарных высказываний. Эти различные аспекты проблемы, как увидим в дальнейшем, связаны между собою. Во всяком случае очевидно то, что построение некоторой логической системы как теории вывода предполагает выяснение целого ряда вопросов, касающихся понятия вывода, а интерпретация некоторой формальной системы как теории вывода предполагает выяснение того, соответствует интерпретированная таким образом система интуитивному пониманию вывода или нет, т. е. предполагает опять-таки первый аспект проблемы. Например, мы имеем выражение $x \rightarrow (y \rightarrow x)$. Мы хотим его рассматривать как правило вывода, то есть как $x \vdash (y \vdash x)$. Но даже в области логики произвол допущений ограничен. В самом деле, из всякого ли высказывания выводится то, что оно выводится из любого высказывания? Отвечая «да» или «нет» (а здесь напрашивается отрицательный ответ), мы тем самым примыкаем к определенному пониманию знака $\vdash$ (предиката «выводится»).

§ 2. Как уже говорилось в первой главе, мы понимаем выражение $x \vdash y$ как сокращенную запись высказывания

«Из x выводится y» или, точнее говоря, «Из высказывания x выводится высказывание y». Выражения вроде «Из x следует y», «Из x логически следует y», «Из x по содержанию (по смыслу) следует y», «Из x получается y», «На основе x имеем y», «От x заключаем к y», «Вывод от x к y», «x дает y», «y есть заключение (следствие) из x» и т. п. обычно выступают как синонимы $x \vdash y$. Вместо знака $\vdash$ иногда употребляют другие знаки, но этот знак употребляется именно в таком смысле (см., например, [12], [15] и т. д.).

Очевидно, что $x \vdash y$ не содержит высказываний x и y в качестве своих частей, а знак $\vdash$ не является связкой, соединяющей x и y в некоторое сложное высказывание подобно тому, как это делают &, $\vee$, $\supset$ и т. п. Строение $x \vdash y$ как высказывания о высказываниях x и y характеризуется иначе. Здесь не сами x и y, а их названия «x» и «y» входят в структуру $x \vdash y$. Лишь для упрощения записи мы не пишем «x» $\vdash$ «y». Причем, «x» и «y» входят в структуру $x \vdash y$ в качестве субъектов или знаков предметов, о которых говорится в нем. Подчеркиваем, x и y здесь суть предметы, о которых идет речь в $x \vdash y$. И только потому, что здесь предметы в силу своей знаковой природы совпадают со своими названиями (если не проводить достаточно тонкого анализа), создается иллюзия, будто $x \vdash y$ состоит из x и y. Основной недостаток многих авторов, писавших о логическом следовании в духе приспособления $x \supset y$ или «Если x, то y» для описания его состоит именно в игнорировании этого простого обстоятельства и в стремлении представить отношение логического следования для высказываний x и y как сложное высказывание, образованное из них.

Знак $\vdash$ в $x \vdash y$ является двухместным предикатом, относящимся к «x» и «y». Он означает «из первого (по порядку написания) высказывания выводится второе» (или «из высказывания, стоящего слева от этого знака, выводится высказывание, стоящее справа от него»), и ничего более. Мы пока не касаемся определений $x \vdash y$, указывающих, когда это имеет место, и принадлежащих фактически к числу имплицитных определений (вроде определения в работе [12], о чем будет речь ниже). Такое понимание $\vdash$, если, конечно, на него обратить должное внимание, устраняет (на наш взгляд) массу ненужных наслоений из теории вывода. Оно прежде всего обнаруживает, что при рассмотрении $x \vdash y$ проблема состоит не в анализе этого выражения самого по себе. В этом отношении достаточно сказанного выше, а для пояснения достаточно ограничиться примерами вывода одних высказываний из других и аналогиями с действиями иного рода (см., например, [35], [36]). Проблема состоит в выяснении того, когда из одних высказываний выводятся другие, то есть в установлении перечня правил вывода. При этом мы имеем в виду не просто перечисление каким-то путем замеченных правил вывода, а определение класса правил вывода средствами современной логики — с помощью аксиоматического метода и формализации соответствующей теории.

Легко видеть, что верификация $x \vdash y$ не предполагает верификацию x и y, что значение истинности $x \vdash y$ не зависит от значений истинности x и y. Возьмем, например, высказывание «Высказывание «Москва — маленький город» содержит больше слов, чем высказывание «Снег бел»». Это высказывание можно проверить без проверки высказываний «Москва — маленький город» и «Снег бел» путем пересчета слов. Оно истинно, хотя «Москва — маленький город» ложно. Оно было бы истинным, если бы Москва на самом деле была маленьким городом или если бы на место слова «Москва» мы поставили бы название маленького города. Точно так же — с высказыванием «Снег бел»: высказывание будет истинно, если на место «Снег бел» поставим «Снег черен» или «Бумага бела», и ложно, если на место «Снег бел» поставим любое высказывание, в котором пять или более слов. Нечто аналогичное имеет место для $x \vdash y$. Например, высказывание «Из высказывания «Все люди музыканты» выводится высказывание «Некоторые люди музыканты»» проверяется без проверки высказываний «Все люди музыканты» и «Некоторые люди музыканты» путем отыскания соответствующего правила. Оно истинно, хотя «Все люди музыканты» ложно. Оно истинно, так как соблюдено правило вывода, касающееся употребления кванторов «Все» и «Некоторые».

Одним словом, истинность $x \vdash y$ не есть функция истинности x и y. Так что утверждение Новикова в книге [15] (и аналогичные ему) о том, что «распространенное» понимание следования (о котором идет у нас речь) не может быть определено в двузначной алгебре высказываний, так как оно не может быть сформулировано только в терминах истины и лжи, следует усилить в таком плане: $x + y$ вообще не может быть определено как функция истинности x и y. Имеется один единственный случай, который в отрицательной форме создает видимость того, что $x \vdash y$ как-то истолковывается в качестве функций истинности: это — случай, когда x истинно, а y ложно. В этом случае y не может выводиться из x (неверно, что $x \vdash y$). Но такое суждение допустимо лишь постольку, поскольку предполагается познавательная роль вывода, описываемая положением: если $x \vdash y$ и x истинно, то y истинно. Она важна при отборе правил вывода, но она никак не характеризует сам вывод, фиксируемый в $x \vdash y$. Вопрос об истинности и ложности $x \vdash y$ должен быть решен, повторяем, независимо от проверки x и y. В общем виде он сводится к следующему: «$x \vdash y$» истинно, если $x \vdash y$; а $x \vdash y$ имеет место тогда, когда есть правила, позволяющие вывести y из x; «$x \vdash y$» ложно, если $\sim (x \vdash y)$ (т. е. если из x не выводится y); а $\sim (x \vdash y)$ имеет место тогда, когда таких правил нет. Но что такое «правило вывода»?

§ 3. Раз $x \vdash y$ не есть функция истинности x и y, то исключается понятие «правило вывода», аналогичное понятию «тавтология» (или «общезначимая формула») в алгебре высказываний Здесь надо идти иным путем. Определение правила вывода в рамках общей теории вывода, совпадающее с определением класса общих правил вывода, мы дадим ниже (в третьей главе). Пока же сделаем ряд замечаний предварительного порядка, для понимания которых точное понятие «правило вывода» не требуется.

В работе Лоренцена [35] (см. также [36], [37]) дан пример некоторой произвольной системы, по аналогии с которой можно рассматривать правила вывода. Приведем и мы такого рода пример. Пусть дано множество W знаков α, β и γ. Пусть a — последовательность знаков из W (любая последовательность, например — $\alpha\alpha\alpha$, $\alpha\beta\beta\alpha$, $\alpha\gamma\beta\alpha\beta\beta$ и т. п.). Примем два правила: первое разрешает приписывать к a справа β, если a оканчивается знаком α, и γ, если a оканчивается на β; второе разрешает вычеркивать β, если слева от него стоит α, и вычеркивать γ, если слева от него стоит β. Используя эти правила, мы можем из данных последовательностей знаков получать новые. Например, имея последовательность $\beta\alpha$ и применяя первое правило, получим $\beta\alpha\beta$; применяя к $\beta\alpha\beta$ снова первое правило, получим $\beta\alpha\beta\gamma$; применяя к результату второе правило, получим $\beta\alpha\gamma$ и т. д. Используя знак вывода, сказанное можно кратко записать в форме $\beta\alpha \vdash \beta\alpha\beta$, $\beta\alpha\beta \vdash \beta\alpha\beta\gamma$, $\beta\alpha\beta\gamma \vdash \beta\alpha\gamma$ и т. п. Если еще принять правило транзитивности, получим $\beta\alpha \vdash \beta\alpha\beta\gamma$, $\beta\alpha \vdash \beta\alpha\gamma$ и т. п.

Нечто аналогичное имеет место для правил вывода. Только не всякое формальное построение указанного рода может быть истолковано как теория вывода, как перечень правил вывода. Аксиоматические построения в логике высказываний (классические и конструктивистские) суть формальные системы рассмотренного типа, если знак импликации рассматривать как знак преобразования последовательности знаков слева от него в последовательность знаков справа. Однако, как мы видели в первой главе, есть причины, мешающие безоговорочному признанию их в качестве теорий вывода. При переходе к истолкованию такого рода правил как правил вывода необходимо сделать существенные дополнения относительно множества знаков W, к которым применяются правила, и состава (отбора) правил, применяемых к этим знакам. Критерий отбора правил должен играть решающую роль.

Множество знаков W, к которым применяются правила вывода, составляют высказывания, субъекты, предикаты, кванторы, модальные знаки, знаки «не», «и», «или» и другие логические знаки. Для общей теории вывода множество знаков W ограничивается высказываниями, отрицанием и связками, соединяющими простые высказываниями в сложные. Как следствие конкретного характера знаков W правила вывода (правила оперирования с ними) формулируются не произвольно, что допустимо лишь в качестве иллюстрации общей мысли, а с учетом определенного требования: правила вывода должны быть такими, чтобы выполнялось положение «Если $x \vdash y$ и x истинно, то y истинно» (или «$x \vdash y$, x истинно / y истинно»). Это положение характеризует познавательную роль вывода. Чтобы удовлетворить ему, надо исходить из фактического опыта рассуждений, из интуитивного (привычного) понимания логических знаков «не», «и», «или» и т. п. Правила вывода и должны выступать как правила оперирования ими в рассуждениях. Они в совокупности своей должны дать определение этих знаков. В известной своей части они должны быть достаточно очевидными, чтобы удовлетворить требованиям интуиции. Например, из высказывания, образованного из высказываний x и y путем соединения их союзом «и», выводится каждое из x и y по отдельности. И это очевидное свойство «и». Но если мы говорим, что из x выводится «x или y», где y есть любое высказывание, то это совсем не очевидно: требуется пояснение «или», при котором выясняется, что «или» здесь употребляется в специальном смысле, отличном от привычного смысла его в обычной речи.

Несколько слов об очевидности. Требование очевидности аксиом не является общеобязательным с точки зрения современного понимания аксиоматического метода, — эта истина стала прописной. Но из этого не следует, что требование очевидности аксиом неправомерно во всех случаях. В общей теории вывода, которая по идее должна образовать наиболее простой и фундаментальный раздел теории вывода, это требование вполне правомерно. Собственно говоря, когда ставят вопрос о соответствии (или несоответствии) той или иной логической системы интуитивному пониманию следования, то имеют в виду фактически сопоставление ее с некоторыми очевидными положениями относительно следования. Без этого рушится всякая критика каких бы то ни было логических систем в плане пригодности или непригодности их служить в качестве теории вывода. Без этого теория вывода вообще должна быть признана чисто априорной наукой.

Вывод есть действие. Но высказывания, фиксирующие выводы, принципиально не отличаются от прочих высказываний. Так что нет никаких препятствий к фиксированию ряда правил вывода как аксиом, т. е. в качестве положений, принимаемых без доказательства и служащих базой для вывода других правил. По содержанию это будут, если угодно, схемы вывода. Но по месту и роли в логической системе это будут аксиомы и выводимые из них положения. Лишь в пределах одной логической системы различие аксиом и правил вывода имеет принципиальное значение, да и то в известных пределах (сравни, например, системы Σ Аккермана и П Гильберта-Бернайса [22]). Правила вывода новых утверждений (формул) из аксиом данной логической системы символизируются и по форме в виде схем, что точно так же не является обязательным: их можно записать с помощью «если. . ., то. . .». То обстоятельство, что требуются правила вывода для вывода из аксиом-правил вывода новых положений-правил вывода, здесь не означает никакого «порочного круга»: в аксиоматической системе, понимаемой как теория вывода, правила вывода из аксиом суть вполне конкретные положения, не требующие для своей формулировки никакой предварительной теории вывода.

Правила вывода имеют вид $x \vdash y$, где x и y суть комбинации знаков переменных высказываний и логических знаков. Наличие знаков переменных высказываний в x и y означает, что речь идет о любых высказываниях. Это упрощает запись общих положений. Например, выражение «Из ((x или y) и не-x) выводится y», где x и y суть переменные высказывания, означает: «Из высказывания, построенного путем соединения двух высказываний, из которых одно есть соединение двух различных высказываний знаком «или», а другое есть отрицание одного из этих высказываний (соединенных знаком «или»), выводится другое из высказываний, соединенных знаком «или»». Впрочем, роль переменных достаточно хорошо известна, и $x \vdash y$ на этот счет исключения не составляет. Только напоминаем, что $x \vdash y$ есть «x» $\vdash$ «y», как об этом говорилось в первом параграфе. Здесь «x» и «y» — переменные субъекты, но особого рода. x и y должны удовлетворять некоторым определениям, например — определению формулы в исчислении высказываний.

Процесс вывода совершается так. Пусть имеется высказывание x (оно может быть совокупностью высказываний, объединенных логическими знаками в одно сложное высказывание). Рассматривается его логическое строение (предполагается соответствующий навык). На основе структурных свойств x и правила, учитывающего эти свойства, выводится некоторое высказывание y. Практически это выступает как навык, как привычка оперировать высказываниями. В логике это обобщается, в частности, таким образом: 1) имеем x; отвлекаемся от содержания x, переходим к общему — к формуле x^*, по отношению к которой x можно представить как результат подстановки; 2) из перечня правил вывода отбираем $x^* \vdash y^*$; чем обусловлен отбор именно $x^* \vdash y^*$, если возможны $x^* \vdash y^{**}$, $x^* \vdash y^{***}$ и т. д., зависит от цели и контекста рассуждения; 3) осуществляем подстановку в y^* в зависимости от подстановки, какую осуществляем в x^*, если перевернуть переход от x к x^*; результат подстановки — y. Более кратко это вообще выглядит как подстановка в $x^* \vdash y^*$, что не совсем точно с гносеологической точки зрения и крайне упрощенно. Пусть, например, $(a \vee b)$ & $\sim a \vdash b$ есть $x^* \vdash y^*$; имеем $(x \vee y)$ & $\sim x$, где x и y суть постоянные; по строению $(x \vee y)$ & $\sim x$ видим, что нам требуется правило, где слева от $\vdash$ стоит выражение $(a \vee b)$ & $\sim a$; с точки зрения цели нам нужно $(a \vee b)$ & $\sim a \vdash b$; поскольку знаку b соответствует при выборе правила высказывание y, то оно и ставится на место b справа от $\vdash$. Конечно, эта схема не есть схема вывода с психологической или физиологической точки зрения. Это — чисто логическая абстракция.

Иногда вывод $x \vdash y$ трактуют так: y выводится из x и z, где z — совокупность правил вывода (см., например, [31]). Но это нисколько не разъясняет структуру вывода, поскольку требуется разъяснение схемы «из x и z выводится y» ($x, z \vdash y$). Кроме того, само утверждение $x \vdash y$ верно, если имеется соответствующее z. В таком случае и для $x, z \vdash y$ требуется какое-то z^*, для $x, z, z^* \vdash y$ требуется какое-то z^{**} и т. д. Лучше этот бесцельный бесконечный процесс прервать в самом начале, приняв по определению: $x \vdash y$ тогда и только тогда, если имеется $x^* \vdash y^*$, по отношению к которому $x \vdash y$ можно представить как результат подстановки (это — иное выражение того, о чем говорилось выше: $x \vdash y$, если есть соответствующее правило).

Сказанное касается не только случаев, когда y есть непосредственное следствие x (см. [12]). Дело в том, что любой (из любого числа шагов применения правил вывода) вывод y из x можно представить как непосредственный, как результат однократного применения одного правила. Пусть имеем правила $x^* \vdash y^{*1}$, $y^{*1} \vdash y^{*2}$, $y^{*2} \vdash y^{*3}, \ldots,$ $y^{*(n-1)} \vdash y^{*n}$. Можно применение их представить как серию выводов $x \vdash y^1$, $y^1 \vdash y^2, \ldots, y^{n-1} \vdash y^n$. Но в силу транзитивности следования правилом будет $x^* \vdash y^{*n}$, так что $x \vdash y^n$ можно рассматривать как результат использования одного этого правила. При этом рассуждение, резюмируемое в $x \vdash y^n$, не следует смешивать с рассуждением, в котором привлекаются новые посылки. Впрочем, и в этом случае мы можем все используемые посылки рассматривать как данные в исходном пункте, а ход рассуждений резюмировать в $x, x^1, \ldots, x^m \vdash y^n$.

Однако в последнем случае мы имеем не $x \vdash y$, а «Если x, то y» при том условии, что предполагается истинность $x^1,\ldots, x^a$ (см. первую главу). Так что обобщение $x \vdash y$ на случай применения нескольких правил вывода или неоднократного применения одного и того же правила (из x выводится y, если y может быть получено из x путем конечного числа шагов применения данных правил вывода) требует оговорки: не всегда отношение x и y, фиксируемое в форме «Если x, то y», есть $x \vdash y$.

Несколько слов относительно $\sim (x \vdash y)$. Как уже говорилось, $\sim (x \vdash y)$ означает, что нет соответствующих правил. Можно, однако, указать некоторые общие случаи, когда этих правил нет. Например, если x и y суть атомарные (элементарные, не расчленяемые на другие высказывания) высказывания с различными субъектами и предикатами (не имеющие ничего общего по содержанию; см. [2]), то $\sim (x \vdash y)$.

Трудно назвать родоначальника того понимания $x \vdash y$, какое было приведено выше. Можно указать, в частности, на то, что его фактически придерживался Фреге. А в общем до распространения матричного метода так или иначе синтаксическое (оперативное и т. п.) понимание $x \vdash y$ предполагалось.

§ 4. Говоря об интерпретации логических знаков в связи с проблемой следования, надо различать несколько различных операций. Первая из этих операций означает соглашение считать такой-то знак знаком следования (см., например, [29] об интерпретации $x \supset y$ просто как перевода «На основе x имеем y», что соответствует логическому следованию). В этом случае дана некоторая логическая система, и речь идет об истолковании ее как теории вывода без каких-либо модификаций. Вторая из названных операций означает присоединение к логической системе новых определений и аксиом (см., например, [40]; в этой работе интерпретация $x \supset y$ связана с такой модификацией системы, при которой фактически вводится новое понятие естественной импликации $(x \supset y) = Df.\ ((x \,\&\, z) \rightarrow y)$, где z есть истинное высказывание, а $\rightarrow$ — знак строгой импликации; в книге Гильберта и Аккермана [3] к системе аксиом исчисления высказываний фактически присоединяется определение $(x \supset y) = Df.\ (\sim x \vee y)$).

Третья из указанных операций означает разъяснение знака, который заведомо есть знак следования. В этом случае $x \vdash y$ понимается как «Из x выводится y», «Если x, то y». «Если истинно x, то истинно y», «Из истинности x следует истинность y», «Невозможно, чтобы было x и не-y», «Необходимо не-x или y» и т. п. При таких разъяснениях нередко подменяют следование другими логическими формами. Относительно некоторых из этих толкований мы уже говорили. В частности, нельзя разъяснять $x \vdash y$ через «Если x, то y», потому что само «Если x, то y» нуждается в разъяснении через понятие вывода (см. первую главу) и может выражать не только следование (см. [17], [8],[9]). Заметим кстати, что понимание $x \vdash y$ как «Из x может быть получено (выведено) y» не годится в том плане, в каком оно ориентирует не на то, что из x выводится y (и это — единичный акт), а на возможность повторения, что характерно для многократного использования в познании условного высказывания, не выражающего логического следования. Выражение «Из x выводимо y» имеет смысл точно так же не как указание на возможность повторения операции, а как указание на наличие правил, позволяющих из x получить y.

Понимание $x \vdash y$ как «Из x выводится y» является синтаксическим. Понимание же его как «Если истинно x, то истинно y» является семантическим. Это последнее на наш взгляд не пригодно по следующим причинам: 1) истинность $x \vdash y$ не зависит от истинности x, что должно быть предпосылкой всяких рассуждений о выводе; 2) высказывание «Если истинно x, то истинно y», есть высказывание «Если a, то b», где a есть «x истинно» и b есть «y истинно»; а к «Если a, то b» относится все, что касается отношения условных высказываний и следования; 3) имеет место *modus ponens* «$x \vdash y$; x истинно / y истинно»; предполагая данным $x \vdash y$, можно принять «Если истинно x, то истинно y»; но это не разъяснение $x \vdash y$, поскольку именно $x \vdash y$ здесь предполагается.

Понимание $x \vdash y$ как «Смысл y содержится в смысле x» (см. [2]), «y составляет часть содержания x» (см. [22]) и т. п. выводит в сферу туманных философских рассуждений на тему о том, как понимать «часть содержания», «часть смысла» и т. п., как понимать новизну в выводе. Авторы, предлагающие такое разъяснение $x \vdash y$, в качестве одного из правил вывода приводят, например, такое: $x \vdash x \vee y$. Но в каком смысле $x \vee y$ есть часть содержания x, это весьма далеко от ясности. Впрочем, такое толкование $x \vdash y$ ни к чему не обязывает.

Об использовании модальных понятий в истолковании $x \vdash y$ скажем ниже. В следующем параграфе специально рассмотрим следующую из рассматриваемых операций. Здесь же остановимся кратко на своеобразной позиции Рейхенбаха (см. [44], [45]), которая содержит элементы различных концепций. Рейхенбах различает двоякое чтение таблиц истинности — адъюнктивное (в обе стороны) и конъюнктивное (справа налево). Импликация, по его мнению, употребляется главным образом в конъюнктивном смысле. Отклонение конъюнктивной импликации от адъюнктивной и образует «парадоксы» импликации. Значение конъюнктивных операций включает заявления метаязыка. Истинность x и y не есть доказательство истинности $x \supset y$ в конъюнктивном смысле. Импликация не вывод, а заявление; вывод — действие, а не заявление. Вывод может быть описан правилом, формализуемым в метаязыке символически — посредством схем. В правилах вывода фигурирует конъюнктивная импликация.

Многое здесь, как видим, справедливо. Но важно заметить следующее: Рейхенбах конъюнктивной импликации приписывает свойства логического следования; выражение «Из x следует y» вообще есть метавысказывание по отношению к x и y в отличие от материальной импликации в обоих ее смыслах; вывод — действие, но он описывается в заявлениях; последние по содержанию суть схемы вывода, но формально (в логической системе) могут быть аксиомами; в правилах вывода фигурирует просто предикат «следует», «выводится» и т. п., отличный от любых указанных интерпретаций материальной импликации. Следует отметить также, что у Рейхенбаха встречается понимание $x \supset y$ как «Если истинно x, то должно быть истинно y».

§ 5. Возьмем выражение «Истинность y следует из истинности x». На первый взгляд оно кажется разновидностью семантического истолкования $x \vdash y$. Но на самом деле тут речь идет о вещах более серьезных и тонких.

В работе Витгенштейна [2] говорится следующее: если все основания истинности x суть основания истинности y, то истинность y следует из истинности x (или если основания истинности y содержатся в основаниях истинности x, то y следует из x). Основание истинности — комбинация значений аргументов (переменных высказываний), при которой x (соответственно y) истинно. Вместе с тем у Витгенштейна имеется положение: из x следует y тогда и только тогда, когда $x \supset y$ есть тавтология.

Аналогично у Карнапа (см. [11], [30]). Карнап вводит понятие L-импликации, которое по идее должно эксплицировать понятие логического следования. По Карнапу, x L-имплицирует y, если при истинном x будет истинно y (истинность y есть следствие истинности x). Точнее говоря, x L-имплицирует y, если при всевозможных комбинациях значений переменных имеем: если истинно x, то истинно y. Другими словами: «x L-имплицирует y» означает, что каждое выполнение x есть выполнение y (выполнение x — подстановка значений переменных, при которой x истинно; аналогично для y). Вместе с тем у Карнапа x L-имплицирует y тогда, когда $x \supset y$ есть тавтология (общезначима, L-истинна). Как видим, концепция Витгенштейна — Карнапа есть компромисс двух различных интерпретаций следования: 1) из x следует y, если истинность y есть следствие истинности x; 2) из x следует y, если «x материально имплицирует y» есть тавтология.

В работе Колмогорова [13] выражение $x \vdash y$ (мы употребляем знак $\vdash$, поскольку там имеется в виду следование) понимается так: убедившись в истинности x, мы должны признать истинным и y (что фактически означает следование истинности y из истинности x). У Жегалкина [4] для выражения, соответствующего употребляемому здесь $x \vdash y$, формулируется положение: если из истинности x вытекает истинность y, то $x \vdash y$ истинно. Обращаем внимание на то, что следование истинности y из истинности x здесь есть не определение $x \vdash y$, а определение условий его истинности.

В работе Шрётера [47] вводится понятие выводимости (выражение y выводимо из множества выражений x, если y может быть получено из элементов множества x путем конечного числа шагов применения правил вывода) и различаются неограниченная выводимость и ограниченная. Различение производится с точки зрения интерпретации: y неограниченно выводимо из x, если имеется модель (интерпретация) для x, не удовлетворяющая y (не являющаяся моделью для y); y ограниченно выводимо из x, если каждая модель для x есть модель для y (в этом втором случае

Шрётер говорит о следовании y из x). Здесь в более общей форме говорится о той же интерпретации: дается интерпретация x; интерпретация y выступает как ее следствие; результат сравнивается с определениями.

Приведенных ссылок достаточно, чтобы заметить следующее: 1) речь идет о функциональной интерпретации $x \vdash y$; 2) четвертая из операций, о которых говорилось в предшествующем параграфе, есть функциональная интерпретация, существенно отличающаяся от функциональной интерпретации $x \supset y$ в алгебре высказываний. Здесь $x \vdash y$ есть не просто функция истинности x и y, а своего рода функция функции. Если i, k и l суть значения истинности (они могут быть одинаковыми), а знак «$=$» обозначает, что высказывание слева от него имеет указанное справа значение истинности, то в общем виде ее можно записать так: 1) если (если $x=i$, то $y=k$), то $(x \vdash y)=l$; 2) если $(x \vdash y)=l$, то (если $x=i$, то $y=k$),... (могут фигурировать и другие возможности). Для двузначной логики: если (если истинно x, то истинно y), то истинно $x \vdash y$; если истинно $x \vdash y$, то (если истинно x, то истинно y). При этом, конечно, необходимо дополнение: если $y=k$ для всех комбинаций значений переменных, при которых $x=i$, то $(x \vdash y)=l$; если y истинно при всех комбинациях значений переменных, при которых истинно x, то $x \vdash y$ истинно. В общем, $(x \supset y) = f(x,y)$, а $(x \vdash y) = f^1(y=f^2(x))$.

Пусть, например, $x \vdash (y \supset x)$. Пусть $y \supset x$ ложно только тогда, когда y истинно, а x ложно. Если истинно x, то будет истинным и $y \supset x$. Причем, истинность $y \supset x$ есть следствие того, что x истинно. Приняв определение «$a \vdash b$ истинно тогда и только тогда, когда b истинно всегда, когда истинно a», мы должны будем признать истинным $x \vdash (y \supset x)$.

Хотя эти функциональные интерпретации явно различны, имеет место стремление установить их компромисс, как уже замечено выше. При этом утрачивается особенность функциональной интерпретации $x \vdash y$ (особенность L-импликации). В самом деле, $x \supset y$ есть тавтология, если при любых подстановках значений переменных получается, что $x \supset y$ истинно. Если же интерпретировать $x \vdash y$ функционально, то имеем следующее: $x \vdash y$ истинно, если y истинно при любых подстановках значений переменных, при которых x истинно (если истинно x, то истинно y). Но выражение

«Если истинно x, то истинно y» не тождественно ни одному из выражений «x истинно и y истинно», «x ложно и y истинно», «x ложно и y ложно» и их (попарному или всех трех) соединению знаком «или». Мы ограничиваемся простейшим двузначным случаем, поскольку уже в нем рассматриваемое различие усматривается. Мы имеем в виду прежде всего различие не по результатам, к которым ведут различные интерпретации (с этой точки зрения возможно совпадение), а по способу их осуществления.

Смущает то, что условия ложности $x \supset y$ и $x \vdash y$ (подчеркиваем, что мы здесь берем $x \vdash y$ в смысле L-импликации) сходны: $x \supset y$ не есть тавтология, если возможно (имеется такая подстановка значений переменных), что $x \supset y$ ложно (если возможно, что x истинно и y ложно); $x \vdash y$ не есть L-импликация (x не будет L-имплицировать y), т. е. $x \vdash y$ ложно, если имеется такая подстановка значений переменных, при которой x истинно, а y ложно.

Если даже понимать $x \vdash y$ как L-импликацию, то есть как сокращенную запись выражения «Всегда, когда истинно x, истинно y» (или равносильных ему выражений), мы не будем иметь совпадения $x \vdash y$ и тавтологии $x \supset y$. Верно будет следующее: если $x \vdash y$, то $x \supset y$ тавтология; если $\sim (x \vdash y)$, то $x \supset y$ не есть тавтология; если $x \supset y$ не есть тавтология, то $\sim (x \vdash y)$. Но не будет верно то, что если $x \supset y$ тавтология, то $x \vdash y$. Следовательно, нельзя говорить о совпадении $x \vdash y$ и тавтологии $x \supset y$. Совпадение возможно только при условии следующего дополнения: если нет выполнения x (если x не может быть истинным), то $x \vdash y$ истинно. Но и в этом случае останется некоторый оттенок в содержании $x \vdash y$, позволяющий отличить ее от тавтологии $x \supset y$. Кроме того, указанное совпадение достигается лишь для случая двузначной логики, а не вообще.

Поскольку имеет силу положение «Если $x \vdash y$, то $x \supset y$ есть тавтология» ($x \vdash y$ понимается здесь как L-импликация), то для каждого $x \vdash y$, являющегося правилом вывода, найдется соответствующая ему тавтология $x \supset y$ в классической алгебре высказываний (выводимое, доказуемое и т. п. утверждение в классическом исчислении высказываний). Так что построение логической системы для $x \vdash y$ путем ограничения классической логики высказываний представляется естественным.

Рассматриваемая интерпретация $x \vdash y$ применима не ко всем приемлемым положениям классической логики высказываний.

Возьмем, например, формулу $(x \& \sim x) \supset y$ и будем ее рассматривать как $x \& \sim x \vdash y$. Воспользоваться данной интерпретацией нельзя, так как $x \& \sim x$ всегда ложно, а y может быть ложно или истинно. Чтобы выйти из затруднения, надо либо принять дополнение, указанное выше, и тем самым формально отождествить $\supset$ и $\vdash$, либо ряд тавтологий исключить из числа правил вывода. Но во втором случае наряду с «парадоксальными» положениями (вроде рассмотренного) могут выпасть и «нормальные», например $-x \& \sim x \vdash x$, $x \& \sim x \vdash \sim x \& x$, $x \& \sim x \& y \vdash y$ и другие правомерные с точки зрения интуиции положения. Так что определение $x \vdash y$ через выражение «Каждое выполнение x есть выполнение y» («Все основания истинности x суть основания истинности y», «Каждая модель x есть модель для y», «y истинно при любой комбинации значений истинности переменных высказываний, при которой истинно x» и т. п.) либо означает «$(x \vdash y) = Df.$ ($x \supset y$ тавтология)» и вступает в конфликт с интуицией как допущение «парадоксальных» положений, либо ведет к исключению интуитивно правомерных положений.

Важно отметить, далее, что рассматриваемая функциональная интерпретация $x \vdash y$ не получает должной оценки с точки зрения ее роли. Она расценивается как определение $x \vdash y$ (см. Витгенштейна и Карнапа), что не является приемлемым с точки зрения, излагаемой в данной работе. При такой ее оценке в качестве критерия отбора правил вывода выступает сама эта интерпретация: если для высказываний x и y выполняется, что всякое выполнение x есть выполнение y, то $x \vdash y$.

При оценке такой интерпретации $x \vdash y$ надо различать конкретный вывод с использованием правил вывода и сами правила вывода. Если $x \vdash y$ есть конкретный вывод, то $x \vdash y$ имеет место («$x \vdash y$» истинно) тогда, когда есть соответствующие правила. Здесь функциональная интерпретация помочь не может: можно взять правильный вывод из ложных посылок и правильный вывод из верных посылок, но в котором заключение будет истинно в силу положения «$x \vdash y$, x истинно / y истинно», а не в силу того, что основания истинности x суть основания истинности

y (таковы, например, силлогизмы, непосредственные выводы и т.п.).

Функциональная интерпретация уместна лишь в логике при рассмотрении системы правил вывода (системы аксиом, фиксирующей правила вывода), при исследовании этой системы на непротиворечивость, независимость и т. п. А это совсем иное дело, чем определение следования.

Рассматриваемая интерпретация не есть основание для формулировки и отбора правил вывода в качестве аксиом некоторой логической системы: эти правила должны быть обнаружены в эмпирически данных фактах рассуждений (знаки «не», «и» и «или», которые необходимо учитывать в теории вывода, соответствующей интуиции, обнаруживаются как нечто фактически данное, а не конструируются как плод чистой фантазии). Эта интерпретация лишь может быть использована для того, чтобы убедиться в непротиворечивости, надежности, независимости и т. п. данных правил. Кстати, для этой цели не обязательно использование терминов «истинно» и «ложно» (как и в случае функциональной интерпретации классической логики высказываний, можно просто принять, что аргументы и функции принимают значения из числа данных n значений). Возможно также использование многозначной интерпретации. Лишь как элемент (сторона) сложного познавательного процесса, результатом которого должно быть построение теории следования, эта интерпретация играет позитивную роль.

§ 6. Перейдем к имплицитным определениям следования. По ходу изложения будем делать дополнительные замечания к эксплицитному пониманию следования (без этого, естественно, не обойдешься). Остановимся прежде всего на некоторых логических системах, разбор которых позволит сформулировать целый ряд предварительных соображений относительно общей теории вывода. Напоминаем, что в нашу задачу не входит изложение исторического очерка логических систем, имевших место в логике и прямо или косвенно относящихся к проблеме общей теории вывода (составление такого очерка требует специального кропотливого исследования; польза такой работы для логики вряд ли может вызвать сомнения).

Проблема логического следования в той форме, в какой она трактуется в современной логике, была впервые поставлена Люисом ([38], [39]). Во всяком случае так считает большинство авторов, работающих в этой области. Люис поставил проблему строгой импликации как отношения, формализующего логическое следование. Суть проблемы в понимании Люиса: возможно ли построить в системе логики высказываний (или предикатов, что мы в данной работе оставляем без внимания) импликативное отношение, соответствующее содержательному отношению высказываний, выражаемому обычно словами «логически следует», «вытекает по смыслу», «выводится по содержанию» и т. п.?

При постановке проблемы Люис исходил из очевидного факта, что материальная импликация не является таким отношением, поскольку для нее имеют силу «парадоксальные» положения $x \supset (y \supset x)$, $x \supset (\sim x \supset y)$ и т. д. Отношение материальной импликации может иметь место между высказываниями, не имеющими ничего общего по содержанию, то есть оно является более широким, чем отношение следования по содержанию. Так что строгая импликация должна быть сужением материальной импликации.

Строгая импликация у Люиса эксплицитно определяется так: $(x \rightarrow y) = Df. \sim M(x \& \sim y)$, т. е. x строго имплицирует y тогда и только тогда, когда невозможно, чтобы было x и не-y (когда ложно, что возможно x истинно и y ложно); в другой форме — $(x \rightarrow y) = Df.\ N(\sim x \vee y)$, т. е. x строго имплицирует y тогда и только тогда, когда необходимо не-x или y. Модальные понятия («возможно», «невозможно» и т. д.) считаются первичными. Имплицитно строгая импликация Люиса определяется системой аксиом: 1) $x \& y \rightarrow y \& x$; 2) $x \& y \rightarrow x$; 3) $x \rightarrow x \& x$; 4) $(x \& y) \& z \rightarrow$ $\rightarrow x \& (y \& z)$; 5) $x \rightarrow \sim(\sim x)$; 6) $(x \rightarrow y) \& (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$; 7) $x \& (x \rightarrow y) \rightarrow y$; 8) $M(x \& y) \rightarrow Mx$; 9) $(\exists x, y)(\sim(x \rightarrow y) \&$ $\& \sim(x \rightarrow \sim y))$. Правила вывода: подстановка (включая право на замещение выражений эквивалентными им); правило «$x \rightarrow y$; x; значит, y»; правило «x и y; значит, $x \& y$». Знак $(\exists x, y)$ означает «Существуют x и y такие, что . . .». Приведенная система — одна из возможных. Люис указывает еще ряд систем такого рода (см. [39]), свойства которых исследовались многими авторами (см., например, [41], [42], [48], [26]).

Строгая импликация Люиса действительно уже материальной: в ней исключаются (не являются общезначимыми, не выводятся) «парадоксальные» положения $x \rightarrow (y \rightarrow x)$ и

$x \rightarrow (\sim x \rightarrow y)$. Но в ней выводятся положения $x \rightarrow \sim (y \& \sim y)$ и $(x \& \sim x) \rightarrow y$. Первое из них означает: всякое необходимое высказывание строго имплицируется любым высказыванием. Второе означает: невозможное (или противоречивое) высказывание строго имплицирует любое. Поскольку строгая импликация по идее соответствует логическому следованию (влечению за собой), большинство авторов считает эти и подобные им положения «парадоксальными» (их называют «парадоксами» строгой импликации по аналогии с «парадоксами» материальной импликации). Отсюда делается вывод о том, что строгая импликация является все еще более широкой, чем следование по содержанию. Некоторые авторы отрицают «парадоксальность» таких положений и не различают следование и строгую импликацию как логические формы (см., например, [43]).

Следует обратить внимание на то, что эксплицитное и имплицитное определение $x \rightarrow y$ нельзя рассматривать наряду. Так, $(x \& \sim x) \rightarrow y$ выводится лишь при том условии, что к системе аксиом присоединяется определение $(x \rightarrow y) = = Df. \sim M (x \& \sim y)$; согласно этому определению, аксиоме 2 и правилу подстановки имеем $\sim M (x \& \sim y \& \sim x)$, $\sim M (x \& \sim x \& \sim y)$ и $(x \& \sim x) \rightarrow y$. Аналогично обстоит дело с выводом ряда других положений.

Сам Люис видел различие $x \rightarrow y$ и $x \vdash y$ (см. [43]), считал $x \rightarrow y$ более широким отношением, чем $x \vdash y$. Он предлагал следующее определение $x \vdash y$: x влечет за собой y (из x следует y), если и только если высказывание «z свидетельствует в пользу x» строго имплицирует «z свидетельствует в пользу y» и «z свидетельствует против y» строго имплицирует «z свидетельствует против x» (понятия «свидетельствует в пользу» и «свидетельствует против» — первичные понятия очень широкого содержания; например, экземпляр черной вороны свидетельствует в пользу высказывания «Все вороны черные»).

В работе [43] отрицается различие строгой импликации Люиса и логического следования (влечения за собой) как логических отношений, признается их различие лишь в отношении к полезности: те строгие импликации, которые «парадоксальны», являются бесполезными в отношении вывода. Если x невозможно, мы не можем использовать $x \rightarrow y$ как основание для доказательства y: x не утверждается. Если y необходимо (истинность его устанавливается без эмпирического исследования), то $x \to y$ бесполезна как правило вывода, так как не требуются посылки для утверждения y (y принимается безусловно). С этим можно согласиться в том смысле, что «парадоксы» строгой импликации не есть главное препятствие к истолкованию $x \to y$ как $x \vdash y$. Но имеются другие основания, на которые следует обратить серьезное внимание.

Убеждение, согласно которому выражение «x ... имплицирует y» (на месте многоточия стоит слово «материально», «строго», «натурально» и т. п.) бессмысленно при ложном x и заведомо истинном y (уверенность в истинности y достигается независимо от x), встречается и в других работах, кроме [43]. Можно сослаться еще, например, на [49], где принимается: если x ложно, то «x натурально имплицирует y» бессмысленно. Однако такого рода оговорки ничего не дают для решения проблемы следования: 1) «парадоксальны» не только положения, которые интерпретируются как «Из ложного следует любое высказывание» и «Истинное высказывание следует из любого»; 2) «парадоксальность» имеет место и без употребления терминов «истинно» и «ложно» (например, $x \supset (y \supset x)$ «парадоксально» как «Из x выводится то, что из y выводится x»). В общем, такие оговорки не исключают интуитивно неприемлемых положений (не говоря уже о том, что они не да́ют ничего позитивного).

Строгая импликация Люиса с точки зрения рассматриваемой проблемы интересна как стремление построить логическую систему, отвечающую интуитивному пониманию вывода, в частности — как показ того, что строгая импликация (соответствующая следованию) не есть функция истинности в том смысле, в каком таковой является материальная импликация. Но она имеет целый ряд недостатков помимо «парадоксов». Отметим некоторые из них.

Строгая импликация Люиса сводится к знакам «и» и «не» (или к «или» и «не») и к модальным понятиям, как это видно из определения. Если иметь в виду лишь аксиоматическое определение, то такое сведе́ние предполагается, поскольку без него не выводится целый ряд положений, интерпретируемых как правила вывода (выше мы говорили, что без этого не выводятся $(x \,\&\, \sim x) \to y$, $x \to \sim (y \,\&\, \sim y)$ и т. п. Без такого сведе́ния выпадают положения со знаком «или», необходимые в теории вывода. А такое сведе́ние неправомерно. Знаки «и», «или» и «не» суть знаки иного семантического плана, чем знак следования. Значит и знак строгой импликации, раз он сводится к ним, просто не сопоставим со знаком следования. Модальные же понятия не могут в теории вывода выступать в качестве первичных. Они не очевидны, многозначны (сравни, например, [22], [39], [51] и т. д.). Рассмотрение модальных понятий и правил вывода, в которых они учитываются, само должно предполагать более простые основания, а именно — общую теорию вывода, отвлекающуюся (среди прочих абстракций) и от модальных знаков. Последние сами могут быть определены через понятие вывода. Поэтому позиция, изложенная в [46], [22] и ряде других работ, на наш взгляд ближе к истине. Мы больше не будем возвращаться к определениям следования с помощью модальных понятий, считая этот путь неприемлемым: он не согласуется с требованием изложения науки путем перехода от простого к сложному.

Самое большее, чего можно достигнуть с модальными понятиями в рамках общей теории вывода, рассматривающей (по идее) высказывания без расчленения на части иного рода (не являющиеся высказываниями), это истолкование необходимого высказывания как тавтологии (как логически истинного), а невозможного — как противоречия. В таком случае и получается карнаповское истолкование $x \rightarrow y$ как L-импликации. Возможное высказывание, между прочим, истолковывается как выполнимое (имеется комбинация значений переменных, при которой высказывание истинно).

Знак $\rightarrow$ в системе Люиса, как и в других подобных системах, фактически играет двоякую роль — роль связки и роль посредника в выводе. Это видно из аксиомы 7. Если здесь $\rightarrow$ играет в обоих случаях идентичную роль, то аксиома эта бессмысленна как правило вывода: если $x \rightarrow y$ означает «Из x выводится y», то повторение $x \rightarrow y$ в посылке излишне; или если $x \rightarrow y$, то излишне $(x \& (x \rightarrow y)) \rightarrow y$. Очевидно, аксиома должна иметь вид $(x \& (x \rightarrow y)) \vdash y$, где $x \rightarrow y$ отлично от $x \vdash y$.

Шмидт [46] описывает строгую импликацию Люиса системой, не предполагающей эксплицитного определения $x \rightarrow y$ с помощью модального понятия. Аксиома 8 Люиса здесь исключается и вводятся дополнительные аксиомы $(x \rightarrow y) \rightarrow$ $\rightarrow (\sim y \rightarrow \sim x)$, $(x \& y \rightarrow z) \rightarrow (x \& \sim z \rightarrow \sim y)$, $\sim (\sim x) \rightarrow x$, $(x \rightarrow y \& z) \rightarrow (x \rightarrow y)$. Модальные понятия определяются как производные: Nx (необходимо x) $= Df.$ $(\sim x \rightarrow x)$, Mx (возможно $x) = Df. \sim(x \rightarrow \sim x)$. **Путь этот в принципе приемлем, хотя** сами определения Nx и Mx — **лишь один из** мыслимых вариантов (сравни, например, с [22]). В системе Шмидта (как и у Люиса в случае $(x \rightarrow y) = Df. \sim M(x \& \sim y)$, не дополняемого положением о сведении дизъюнкции к конъюнкции и наоборот) явно недостает знака, соответствующего «или».

§ 7. Одной из самых интересных и поучительных попыток построить логическую систему, которая по идее должна быть формализацией следования, является работа Аккермана [22] (см. также [23]).

Аккерман вводит сильную импликацию (будем обозначать $x \rightarrow y$). Причины введения ее те же, что и причины введения Люисом строгой импликации: исключить «парадоксальные» положения $x \supset (y \supset x)$, $(x \& \sim x) \supset y$, $x \supset (y \supset x \& y)$, $x \supset (y \supset y)$ и т. д. Только Аккерман ставит задачей исключить также и «парадоксы» строгой импликации Люиса, т. е. построить более узкую систему.

В определении $x \rightarrow y$ у Аккермана нет ссылок на истинность и ложность, $x \rightarrow y$ не есть функция истинности x и y. Правда, в дальнейшем Аккерман прибегает к функциональной интерпретации $x \rightarrow y$, но лишь для исследования некоторых свойств системы. Далее, Аккерман не кладет в основу модальный оператор возможности или необходимости. Модальности он вводит как производные, на основе своей системы: $x \rightarrow F$ означает, что x невозможно, противоречиво (F — абсурдно, логически ложно), $\sim x \rightarrow F$ — x необходимо, $\sim (x \rightarrow F)$ — x возможно (т. е. x невозможно, если ведет к противоречию, необходимо, если не-x невозможно, и возможно, если не ведет к противоречию). Смысл $x \rightarrow y$: y составляет часть содержания x.

Ограничения классической логики высказываний Аккерман добивается путем ее модификации. Прежде всего он дает новое построение логики высказываний, по форме напоминающее исчисление секвенций Генцена. Это построение легко превращается в систему сильной импликации.

Обозначения: 1) $\supset$, $\&$, $\vee$, $\sim$ — обычные знаки классической логики; 2) x, y, z, ... — формулы, образованные из знаков переменных высказываний и знаков 1; 3) $\vdash$ — знак вывода. Выражения $x \vdash y$, $(x, y) \vdash z$, $\vdash x$, $(x, y) \vdash$ и $x \vdash$ означают соответственно: от x можно заключить к y («из

x выводится y» в нашей терминологии); вывод от x и y к z; x верно независимо от содержания (из чисто логических соображений); x и y несовместимы; x противоречиво ($\sim x$ верно из чисто логических соображений). Аккерман исходит из основных правил (или схем) вывода. Схема (правило) вывода — формальное образование вида $x \vdash y$, $(x, y) \vdash$ $\vdash z$, $x \vdash$, $(x, y) \vdash$, $\vdash x$. Основные правила вывода: 1) $\vdash (x \supset x)$; 2) $x \& y \vdash x$; 3) $x \& y \vdash y$; 4) $x \vdash x \vee y$; 5) $y \vdash x \vee y$. Из 1—5 выводятся новые схемы вывода по правилам, которые укажем ниже.

Пусть знак $/$ означает: из правил (из одного или двух), указанных слева от этого знака, получается правило справа от него (или если доказуемы правила слева, то доказуемы правила справа). Правила получения из 1—5 новых схем (правил) таковы: I*a*. $x \vdash y / z \supset x \vdash z \supset y$; $(x, y) \vdash z /$ $/ (u \supset x, y) \vdash u \supset z$; $(x, y) \vdash z / (x, u \supset y) \vdash (u \supset z)$; $(x, y) \vdash z / (u \supset x, u \supset y) \vdash u \supset z$. I*b*. $x \vdash y \vee z / (y \supset u,$ $z \supset u) \vdash (x \supset u)$. II. $((x, y) \vdash z)$, $\vdash y / x \vdash z$ (x может быть пусто). III. $x \vdash (y \supset z) / (x, y) \vdash z$ (x может быть пусто). IV. Посылки (знаки слева от $\vdash$) можно менять местами, если их две. V. $x \& y \vdash z / (x, y) \vdash z$ (z может быть пусто). VI*a*. Посылку можно превращать в заключение (знак справа от $\vdash$), а заключение — в посылку, со знаком отрицания; это касается и случаев, когда посылка или заключение отсутствует. VI*b*. Посылка x может быть заменена на $\sim \sim x$, и наоборот.

Система 1—5 и I—VI (система Σ) достаточна для классического исчисления высказываний в следующем смысле: для каждой общезначимой (выводимой) формулы x здесь доказуема $\vdash x$. Аккерман берет систему Гильберта — Бернайса (система П) и доказывает это утверждение. Система Σ без VI достаточна для интуиционистской логики без отрицания.

Обращаем внимание прежде всего на форму системы Σ: по форме — это система, описывающая именно правила вывода. По содержанию же (по составу правил) она содержит такие правила (схемы) вывода, которые не могут быть приняты как всеобщие. Их надо исключить. И Аккерман переходит к системе сильной импликации, модифицируя систему Σ (и эквивалентную ей систему П).

Переход совершается так. Знак $\supset$ заменяется на знак $\rightarrow$ (сильной импликации). Строится система Σ', которая отличается от Σ следующим: вместо 1 вводится схема $\vdash x \to \to x$ и вводится дополнительная шестая схема $(x, y \vee z) \vdash \vdash y \vee (x \& z)$ — дистрибутивный закон, не выводимый в Σ. Чтобы охарактеризовать модификацию I—VI, разъясним дополнительные обозначения: $x^*,\ y \vdash z$ означает $x \vdash (y \to z)$; $x^*,\ y^* \vdash z$ означает $x \vdash (y \to z)$ и $y \vdash (x \to z)$; $x^*,\ y \vdash$ означает $x \vdash \sim y$; $x^*,\ y^* \vdash$ означает $x \vdash \sim y$ и $y \vdash \sim x$. Модификация I—VI такова. I'a. Дополнение к Ia: к каждой посылке без $*$ обязательно приписывается $u \to$, если $u \to$ приписывается к заключению. I'b. Дополнение к Ib: посылки новой схемы не имеют $*$. II'a. $(\vdash x,\ \vdash y,\ (x, y) \vdash \vdash z) \,/\, \vdash z$ (безразлично, имеют x и y знак $*$ или нет). II'b. $y \vdash z,\ \vdash y \,/\, \vdash z$; $(x^*,\ y \vdash z,\ \vdash y) \,/\, x \vdash z$. II'$c$. $(x, y) \vdash,\ \vdash x \,/\, y \vdash$ (x и y с $*$ или без $*$). III'. $x \vdash y \to \to z \,/\, x^*,\ y \vdash z$. IV'. Посылки можно менять местами, если они обе с $*$ или обе без $*$. V'. $x \& y \vdash z \,/\, x,\ y \vdash z$ (z может отсутствовать). VI'a. Схема с двумя посылками без $*$ из превращения исключается. Если посылка с $*$ сохраняет место, она сохраняет $*$ лишь тогда, когда она первая по порядку. VI'b. Если x $(\sim\sim x)$ имеет $*$, то при замене $*$ сохраняется.

Как видим, система Σ является довольно-таки сложной для понимания, так что в качестве некоторой первичной (в рамках теории вывода) системы она служить не может уже в силу своей сложности. Характер модификации I—VI поясним разбором хотя бы одного из I'—VI'. Возьмем I'a. В полном виде его можно записать так: $x \vdash y \,/\, (z \to x) \vdash \vdash (z \to y)$; $(x, y) \vdash z \,/\, (u \to x, u \to y) \vdash (u \to z)$; $x \vdash (y \to z) \,/\, x \vdash ((u \to y) \to (u \to z))$; $x \vdash (y \to z) \,/\, (u \to y) \vdash ((u \to x) \to (u \to z))$; $x \vdash (y \to z) \,/\, (u \to x) \vdash ((u \to y) \to (u \to z))$. Исключаются такие положения: $(x, y) \vdash z \,/\, (u \to x, y) \vdash (u \to z)$; $(x, y) \vdash z \,/\, (x, u \to y) \vdash (u \to z)$; $x \vdash (y \to z) \,/\, (u \to x) \vdash \vdash (y \to (u \to z))$. Как принятие, так и исключение данных положений интуитивно ясны, если их прочитать, допустим, в таком виде: $x \vdash y \,/\, (z \to x) \vdash (z \to y)$ — как «Если из x выводится y, то (если из z выводится x, то из z выводится y)»; $(x, y) \vdash z \,/\, (u \to x, y) \vdash (u \to z)$ — как «Если из x и y выводится z, то (если (из u выводится x) и y, то из u выводится z)»; аналогично — прочие. В приведенных примерах сразу видна приемлемость первого и неприемлемость второго положения (чтобы признать $u \to z$, надо признать, что из u выводятся оба x и y, а не одно).

Как видим, модификация Ia заключается не просто в исключении $(x, y) \vdash z \,/\, (u \supset x, y) \vdash (u \supset z)$ **и** $(x, y) \vdash z \,/\, / \,(x, u \supset y) \vdash (u \supset z)$ как не соответствующих интуитивному пониманию вывода (не выполняются условия для транзитивности), но и в дополнении положений, удовлетворяющих интуиции. В формулировке положений I$'a$ уживаются знаки $\rightarrow$ и $\vdash$, из которых первый должен истолковываться, как второй. Чтобы избежать этого смешения, надо, очевидно, знак $\rightarrow$ рассматривать как знак следования в особом смысле, отличном от $\vdash$. Все это относится и к прочим правилам.

В общем, если знак $\vdash$ первичен, а $\rightarrow$ определяется через него, то $\rightarrow$ определяется в некотором специальном смысле, отличном от $\vdash$. Если же система Σ' есть и определение $\vdash$, то смысл $\rightarrow$ остается совершенно неопределенным. Рассмотрение системы Π', эквивалентной Σ', показывает, что понимание $\rightarrow$ как знака следования в специальном смысле предпочтительнее. Почему здесь нельзя оперировать терминами «у́же» и «шире», станет ясно из дальнейшего.

Система Π' имеет такой вид. Схемы аксиом: 1) $x \rightarrow x$; 2) $(x \rightarrow y) \rightarrow ((y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z))$; 3) $(x \rightarrow y) \rightarrow ((z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y))$; 4) $(x \rightarrow (x \rightarrow y)) \rightarrow (x \rightarrow y)$; 5) $x \,\&\, y \rightarrow x$; 6) $x \,\&\, y \rightarrow y$; 7) $(x \rightarrow y) \,\&\, (x \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow y \,\&\, z)$; 8) $x \rightarrow x \vee y$; 9) $y \rightarrow x \vee y$; 10) $(x \rightarrow z) \,\&\, (y \rightarrow z) \rightarrow (x \vee y \rightarrow z)$; 11) $x \,\&\, (y \vee z) \rightarrow y \vee (x \,\&\, z)$; 12) $(x \rightarrow y) \rightarrow (\sim y \rightarrow \sim x)$; 13) $(x \,\&\sim y) \rightarrow \sim (x \rightarrow y)$; 14) $x \rightarrow \sim\sim x$; 15) $\sim\sim x \rightarrow x$. Правила вывода: a) $x \rightarrow y,\ x \,/\, y$; b) x и $y \,/\, x \,\&\, y$; c) x и $\sim x \vee y \,/\, y$; d) $x \rightarrow (y \rightarrow z)$ и $y \,/\, x \rightarrow z$.

В модальной логике к Σ' добавляется VII$'$: $x \vdash F \,/\, x \vdash$ и $x \vdash \,/\, x \vdash F$ (x — одна или две посылки). К Π' добавляется следующее: 16) $(x \rightarrow F) \rightarrow \sim x$; 17) $x \,\&\sim x \rightarrow F$; e) $x \rightarrow y$, $((x \rightarrow y) \,\&\, z \rightarrow F) \,/\, z \rightarrow F$. Тогда правило d отпадает. Если e) придать вид $x,\ x \,\&\, y \rightarrow F \,/\, y \rightarrow F$, то получим $x,\ x \,\&\sim x \rightarrow F \,/\sim x \rightarrow F$, т. е. что x необходимо, чего не должно быть. Вместо аксиом 2 и 3 можно принять (см. [23]) $(x \rightarrow y) \,\&\, (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$, добавив еще правила вывода $x \rightarrow y \,/\, (z \rightarrow x) \rightarrow (z \rightarrow y)$ и $x \rightarrow y \,/\, (y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)$. Аксиому 4 можно исключить, заменив невыводимой формулой $(x \,\&\, (x \rightarrow y)) \rightarrow y$. В Π' выводятся все общезначимые формулы исчисления высказываний с $\&$, $\vee$ и $\sim$. В логике предикатов дополнительно вводятся аксиомы: 18) $(x) A(x) \rightarrow A(y)$; 19) $A(y) \rightarrow (\mathrm{E}x) A(x)$; 20) $(x)(B \rightarrow A(x)) \rightarrow (B \rightarrow$

$\rightarrow (x) A(x))$; 21) $(x)(A(x) \rightarrow B) \rightarrow ((\mathrm{E}x) A(x) \rightarrow B)$; 22) $(x)(A(x) \vee \vee B) \rightarrow (x) A(x) \vee B$; 23) $B \& (\mathrm{E}x) Ax \rightarrow (\mathrm{E}x)(B \& A(x))$. С помощью сильной импликации можно определить новое понятие импликации, обладающее свойствами строгой импликации Люиса.

Но вернемся к Π'. В отличие от Σ' здесь не происходит объединения в одной системе знаков $\vdash$ и $\rightarrow$. И с этой точки зрения она яснее: здесь $\rightarrow$ можно непосредственно интерпретировать как $\vdash$. Посмотрим, к каким последствиям ведет такая интерпретация. Первые три аксиомы не вызывают сомнения (вторая и третья аксиомы — транзитивность следования). Четвертая аксиома вызывает сомнение. Посылка в ней при интерпретации $\rightarrow$ как $\vdash$ принимает вид $x \vdash (x \vdash y)$; но сконструировать такое x, чтобы из него выводилось высказывание «Из x выводится y», дело довольно трудное, так что эта аксиома не имеет интуитивных оснований. Замена ее на $(x \& (x \vdash y)) \vdash y$ не вносит ясности, как об этом уже говорилось выше. Выход один: в этой аксиоме знак $\rightarrow$ либо вообще не есть $\vdash$, либо частично не сводится к нему: $(x \rightarrow (x \rightarrow y)) \vdash (x \rightarrow y)$, $x \& (x \rightarrow \rightarrow y) \vdash y$, $(x \vdash (x \rightarrow y)) \vdash (x \rightarrow y)$ и т. п. Напоминаем, что аксиомы рассматриваются с точки зрения определенной интерпретации. Можно, конечно, отвергнуть сам этот подход и рассматривать ту или иную аксиому чисто формально. Но в таком случае нужно указать иной путь оценки той или иной системы в качестве подходящей общей теории вывода, нежели сопоставление положений этой системы с эмпирическими фактами рассуждений и рассмотрение их с точки зрения интуитивно, привычно ясных соображений.

В аксиомах 8, 9, 10 и 11 фигурирует знак $\vee$ в смысле неисключающего «или», не совпадающего с употреблением «или» в исключающем смысле. Последнее в системе вообще отсутствует, а в общей теории вывода, соответствующей интуиции, может быть принято как один из основных знаков (например, вывод типа «x или y; x; значит не-y» привычно ясен). Конечно, в системе сильной импликации можно вывести положения, которые истолковываются как положения об употреблении обычного «или». Например, выводится $((x \& \sim y) \vee (\sim x \& y)) \& x \rightarrow \sim y$ с использованием аксиом 16 и 17. А выражение $(x \& \sim y) \vee (\sim x \& y)$ можно взять как исключающее «или» для x и y (как «x или y» в обычном смысле). Но для этого требуется особое определение, допустим — $(x:y) = Df.$ $((x \& \sim y) \vee (\sim x \& y))$. К этому вопросу мы еще вернемся в следующей главе. Здесь скажем следующее: не целесообразнее ли исходить из привычного смысла «или» и идти к $\vee$, а не наоборот? Ведь разъяснение $\vee$ приведет так или иначе к обычному «или» ($x \vee y$ — $x \& y$ или $\sim x \& y$ или $x \& \sim y$) со всеми вытекающими отсюда последствиями. Сохранение $\vee$ в системах, претендующих на роль общей теории вывода, есть, конечно, традиция, идущая от классической логики высказываний: там знак $\vee$ удобен. В общей теории вывода он утрачивает свои удобства. Выше мы приводили пример: чтобы оправдать очевидный вывод $(x:y) \& x \vdash \sim y$, требуется очень сложное рассуждение с использованием знаков, требующих разъяснения через «:».

Тринадцатая аксиома означает сведѐние $\vdash$ (если $\rightarrow$ есть $\vdash$) к $\&$ и $\sim$: $(x \& \sim y) \vdash \sim (x \vdash y)$; используя другие аксиомы и правила вывода, получим $\sim (x \& \sim y) \vdash$ $\vdash \sim (x \vdash y)$, $(x \vdash y) \vdash \sim (x \& \sim y)$, $\sim \sim (x \vdash y) \vdash \sim (x \& \sim y)$, $\sim (x \vdash y) \vdash \sim \sim (x \& \sim y)$, $\sim (x \vdash y) \vdash (x \& \sim y)$. В общем, этого достаточно для установления тождества $x \& \sim y$ и $x \vdash y$. Мы вовсе не отвергаем того, что не может быть ситуации $(x \vdash y) \& (x \& \sim y)$ (или что если $x \& \sim y$, то не может быть $x \vdash y$). Мы лишь полагаем, что правило вывода $(x \& \sim y) \vdash \sim (x \vdash y)$ непригодно, поскольку для него не требуется истинность $x \& \sim y$. Ведь $(x \& \sim y) \vdash \sim (x \vdash y)$ означает: из x и не-y выводится, что из x не выводится y. Пусть x есть $z \& u$, а y есть u. В таком случае получим: из $z \& u$ и не-u выводится, что из $z \& u$ не выводится u. А это неверно, неверно $(z \& u) \& \sim u \vdash \sim (z \& u \vdash u)$.

Одиннадцатая аксиома в форме $x \& (y \vee z) \vdash y \vee (x \& z)$ не имеет интуитивно ясных оснований. Посылку $x \& (y \vee z)$ можно записать в форме «x и (y и z или не-y и z или y и не-z» и, далее, в форме «$x \& y \& z$ или $x \& \sim y \& z$ или $x \& y \& \sim z$»; заключение запишется в форме «$y \& x \& z$ или $\sim y \& x \& z$ или $y \& \sim (x \& z)$». Посылка и заключение различаются третьим членом: в первой $y \& x \& \sim z$, во втором $y \& \sim (x \& z)$. Если даже допустить, что $y \& x \& \sim z \vdash$ $\vdash y \& \sim (x \& z)$, то и при этом переход от $x \& (y \vee z)$ к $y \vee (x \& z)$ не представляется оправданным. Но и само это допущение сомнительно. Его заключение может быть записано в форме «$y \& x \& \sim z$ или $y \& \sim x \& z$ или $y \& \sim x \& \sim z$»; из $y \& x \& \sim z$ выводится $y \& x \& \sim z$ или, упрощая дело, из $x \& \sim z$ выводится $x \& \sim z$; но сомнительно, что из $x \& \sim z$ выводится «$x \& \sim z$ или $\sim x \& z$ или $\sim x \& \sim z$».

Двенадцатая аксиома в рассматриваемой интерпретации имеет вид $(x \vdash y) \vdash (\sim y \vdash \sim x)$. И эта аксиома сомнительна. Сомнительна в том смысле, что в основе ее не лежат никакие интуитивно ясные соображения. В самом деле, почему из высказывания «Из x выводится y» выводится высказывание «Из $\sim y$ выводится $\sim x$»? Имеются соображения для признания этого положения, но они имеют совсем иную природу: если $x \vdash y$ и $\sim y$ истинно, то не представляет труда построить рассуждение, в результате которого получим вывод «$\sim x$ истинно». В самом деле, дано: $x \vdash y$; если $x \vdash y$ и x истинно, то y истинно; x истинно или $\sim x$ истинно; аналогично для y и $\sim y$; $\sim y$ истинно. Рассуждение: пусть x истинно; тогда y истинно; но y не может быть истинно, значит допущение неверно; значит $\sim x$ истинно. Здесь не выявлены все звенья рассуждения, но оно правомерно (если «x или $\sim x$»). Это дает право на утверждение: если $x \vdash y$, то (если $\sim y$, то $\sim x$). И ничего более (см. первую главу о смысле «если . . ., то . . .»). И если не отождествлять «если a, то b» с $a \vdash b$, то право на $(x \vdash y) \vdash (\sim y \vdash \sim x)$ мы здесь не получим. В лучшем случае здесь правомерно $(x \vdash y) \sim y \vdash \sim x$, если все остальные данные рассматривать как логические истины и принять положение «Если $x \& z \vdash y$ и z логически истинно, то $x \vdash y$». Но тогда это не аксиома.

Все сказанное заставляет либо рассматривать систему сильной импликации как специальный случай теории вывода, либо как систему, допускающую лишь частичную интерпретацию $\rightarrow$ как $\vdash$. Она у̀же классической логики высказываний. Но она, можно сказать, смещена относительно общей теории вывода: в ней есть правила, которые по идее не должны быть в последней, и нет таких, которые должны быть. Такая деформация обусловлена, надо думать, тем, что исходной основой построения системы было не желание удовлетворить каким-то интуитивным требованиям и правилам вывода, а желание исключить некоторые положения из классической логики высказываний, кажущиеся парадоксальными. Поэтому сам путь к системе, формализующей следование, оказался чрезвычайно осложненным, а второстепенная задача заслонила главную. Более естественным, на наш взгляд, является путь от общей теории вывода, базирующейся на интуитивной основе, к специальным теориям — к логике высказываний, модальной логике, логике предикатов и т. д. У Аккермана это выполнено лишь частично.

Выводимые в системе Аккермана формулы «*а* сильно имплицирует *в*» таковы, что в *а* и *в* входит по крайней мере одно одинаковое высказывание (аксиомы этим свойством обладают, а правила вывода не позволяют получать из них формулы без этого свойства). Ограничения на отношения множеств вхождений высказываний в посылки и следствия можно использовать при исследовании правил вывода. Так, в результате наблюдения примеров можно принять: чтобы было верно «из *а* следует *в*», в *а* и *в* должно входить хотя бы одно одинаковое высказывание (или в *в* не должны входить термины, отсутствующие в *а*). Возможны различные ограничения. Последние не всегда эффективны (в посылки и следствия силлогизмов входят одинаковые термины, но не высказывания). Сами по себе они еще не дают права по виду формулы судить о ее приемлемости.

§ 8. Безусловный интерес с точки зрения нашей темы представляет позиция Клини, изложенная в [12]. Система постулатов исчисления высказываний расценивается Клини как система дедуктивных правил. Материальная импликация расценивается как отношение, представляющее логическое следование, благодаря двум ее свойствам, выражаемым вторым постулатом (*modus ponens* для материальной импликации) и теоремой о дедукции. Но, подчеркивает Клини, она представляет логическое следование не в каком-либо априорном смысле, а в смысле, определенном для данной формальной системы ее дедуктивными правилами. Таким образом, система постулатов исчисления высказываний (классического и интуиционистского) описывает свойства логического следования не вообще, а в определенном специальном смысле. Только с таким ограничением можно интерпретировать материальную импликацию как следование, если вспомнить ее «парадоксы».

Для обозначения логического следования в том общем смысле, о котором идет речь в данной работе, Клини употребляет знак $\vdash$. Вывод высказывания (формулы, выражения и т. п.) y из высказываний $x^1, \ldots, x^n$ обозначается символом $x^1, \ldots, x^n \vdash y$. Высказывание y считается выводимым из $x^1, \ldots, x^n$, если y есть либо одно из $x^1, \ldots, x^n$, либо аксиома некоторой данной логической системы (здесь имеются в виду постулаты 1 и 3—8 исчисления высказываний), либо непосредственное следствие из $x^1, \ldots, x^n$ (y есть непосредственное следствие x и $x \supset y$, то есть непосредственное следование определено постулатом 2).

Таким образом, определение $\vdash$ связано с конкретной логической системой (или с классом таких систем). Здесь необходимо различать определение $\vdash$ в некоторой системе и ссылку на какую-то логическую систему (или вообще на то, что дана какая-то система). Определение $\vdash$ в логической системе (логическою системой) — перечисление правил вывода (основных, общих, типичных схем вывода). В книге Клини имеется такое определение, перечень свойств $\vdash$, усматриваемых безотносительно к перечню постулатов данной формальной системы. Это — такие свойства: 1) $x \vdash x$; 2) если $x \vdash y$, то $z, x \vdash y$; 3) если $z, z, x \vdash y$, то $z, x \vdash y$; 4) если $x, y, z, u \vdash v$, то $x, z, y, u \vdash v$; 5) если $x \vdash y$ и $y, z \vdash u$, то $x, z \vdash u$ (сравни со структурными правилами Генцена). Конечно, это определение — лишь фрагментарное описание следования. Но здесь важен сам факт его существования. Определение $\vdash$ со ссылкой на данную логическую систему у Клини, как отмечалось выше, связано с этим: y выводится из $x^1, \ldots, x^n$, если y есть аксиома 1 или 3—8; y выводится из x и $x \supset y$, где $\supset$ есть знак данной логической системы.

Указанное обстоятельство очень важно: в общей теории вывода не должно быть ссылок на какие-либо логические системы. Если такие ссылки есть, мы имеем дело уже с частным или специальным случаем теории вывода. Таким по существу является весь аппарат классической логики высказываний (и предикатов), интуиционистской логики и т. д.

Несколько слов о непосредственном следовании. На этом частном вопросе можно наглядно проиллюстрировать сказанное выше. Если данная логическая система есть классическое исчисление высказываний, то из $x \supset y$ и x выводится y который и есть непосредственное следствие $x \supset y$ и x. В определении непосредственного следования без ссылок на данную логическую систему нужен иной подход, если такое определение вообще требуется. В частности, если $x^* \vdash y^*$ есть правило вывода, фиксируемое аксиомой теории вывода, то $x \vdash y$ есть пример непосредственного следования, если $x \vdash y$ можно представить как результат подстановки в $x^* \vdash y^*$. Другими словами, y есть непосредственное следствие x, если выводится из x в результате однократного применения одной аксиомы. Как видим, ориентация логического анализа здесь существенно отличается от таковой в случае с данным $x \supset y$.

Выражение $x^1, \ldots, x^n \vdash y$ есть (по Клини) краткая запись метаутверждения о высказываниях $x^1, \ldots, x^n, y$. Знак $\vdash$ лежит вне любой формулы данной логической системы, в данном случае — вне формул исчисления высказываний. С помощью его осуществляются рассуждения относительно свойств данной логической системы. Он не есть здесь предмет исследования. Задача же состоит в том, чтобы сделать именно его предметом рассмотрения, построить систему, в определении формул которой будет учитываться $\vdash$ (он будет входить в состав формул).

В книге Клини эта задача частично решается: для знака $\vdash$ выводится целый ряд утверждений. Это, например, следующие утверждения: если $x, y \vdash z$, то $x \vdash (y \supset z)$ (теорема о дедукции); $x, x \supset y \vdash y$ (постулат 2); $x, y \vdash x \& y$; $x \& y \vdash x$; $x \& y \vdash y$; $x \vdash x \vee y$; $y \vdash x \vee y$; если $x, y \vdash z$ и $x, u \vdash z$; то $x, y \vee u \vdash z$; если $x, y \vdash z$ и $x, y \vdash \sim z$, то $x \vdash \sim y$; $\sim \sim x \vdash x$ (для классической логики). Но при этом характерно то, что вывод утверждений для $\vdash$ опирается на данное исчисление высказываний, предполагает последнее (вывод утверждений для $\vdash$ предполагает использование постулатов исчисления высказываний и определение $\vdash$, выраженное выше в пунктах 1—5). Тогда как по идее, казалось бы, должно быть иначе: 1) утверждения для $\vdash$ должны выводиться в системе, специально предназначенной для описания его свойств (в отличие от определения, данного Клини, в этой системе должны фигурировать знаки «не», «и» и «или»); 2) надо идти от общей теории вывода к ее специальному случаю (исчисление высказываний должно быть построено на базе системы для $\vdash$). В книге Клини это выполнено лишь как неявно выраженная тенденция, поскольку предполагается определение $\vdash$, но оно не претендует на роль формализации свойств следования.

§ 9. Сделаем еще несколько разрозненных замечаний. Одной из таких ранних систем, претендующих на роль общей теории дедукции и отличных от классического исчисления высказываний, является система Орлова [16]. Рассмотреть ее интересно потому, что в ней отчетливо выражено основное направление поисков и его недостатки с точки зрения методики решения проблемы.

В основе классической математической логики, утверждает Орлов, лежит понятие материального вывода, которое может соединять в одной формуле два высказывания, не имеющие связи по смыслу. Орлов намерен рассматривать смысловые связи высказываний. Понятие следования (как и отрицания) берется без определения, как первичное. Но ему дается пояснение, которое для нас здесь существенно. Выражение $x \rightarrow y$ («Из x следует y») обладает свойствами материальной импликации и еще тем свойством, что x и y связаны по смыслу. Связь по смыслу в $x \rightarrow y$ означает следующее: x предполагает y, x невозможно без y, y есть необходимое условие для x, y есть условие истинности x и т. п. Связь по смыслу в $x \& y \rightarrow z$ означает: имеется связь по смыслу между совместностью $x \& y$ и z, z — условие совместности x и y. Под совместностью x и y имеется в виду следующее: x совместно с y, если из x не следует отрицание y. Короче: $x \& y = Df. \sim (x \rightarrow \sim y)$, $x \mid y = Df. \sim (x \bar{\&} y)$, где $x \& y$ есть совместность, а $x \mid y$ — ее отрицание. О совместности речь идет потому, что для возможности дедуктивного вывода, считает Орлов, требование истинности посылок чрезмерно, не является необходимым. Достаточно более слабого требования — требования совместности посылок, если их более одной.

Приведенные общие соображения по идее должны обосновать исключение ряда аксиом классической логики, а именно — $x \& y \rightarrow x$, $x \rightarrow x \vee y$, $x \rightarrow (y \rightarrow x)$ и т. д. ($x \vee y$ определяется как $\sim x \mid \sim y$, то есть как $\sim (\sim x \& \sim y)$). Цель исключения этих аксиом — исключение «парадоксальных» с точки зрения теории вывода положений. Система Орлова имеет такой вид: 1) $x \rightarrow x$; 2) $\sim \sim x \rightarrow x$; 3) $x \rightarrow x \& x$; 4) $(x \rightarrow y) \rightarrow (\sim y \rightarrow \sim x)$; 5) $(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (y \rightarrow (x \rightarrow z))$; 6) $(y \rightarrow z) \rightarrow ((x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z))$. Правило вывода — $x \rightarrow y$, $x \,/\, y$. Мы ограничились здесь лишь «общей теорией дедукции».

Как видим, здесь следование выступает как частный случай материальной импликации. Выражение «связь по смыслу» не отличается ясностью. Во всяком случае, ссылка на термины «предполагает», «невозможно», «необходимое условие» и т. п. никакой логической ясности не вносит. Знак следования сводится к знаку совместности, и наоборот: $(x \to y) \to \sim (x \& \sim y)$, $x \& y \to \sim (x \to \sim y)$. Знак следования сводится также к знаку $\vee$ (определения $x \& y$ и $x \vee y$ — необходимые элементы системы). Как видим, традиция классической логики высказываний в этой части сохраняется.

Верно, что требование истинности посылок не является необходимым для вывода. Оно необходимо лишь при использовании дедукции по принципу «$x \vdash y$; x истинно $/$ y истинно». Но это обстоятельство не стоит ни в какой связи с отбором правил вывода в качестве аксиом логической системы. И признание в качестве аксиомы, например, $x \& y \vdash x$ не означает требование истинности $x \& y$. Непонятно также то, почему требование совместности должно быть необходимым. Оно имеет смысл лишь в применении к логическим утверждениям, ибо в применении выводов в познании, как только что отмечалось, оно недостаточно для признания истинности заключений. В применении же к логическим утверждениям оно означает требование выполнимости (того, чтобы посылка могла быть истинной). Но принимая аксиому, например, $x \& y \vdash x$, мы допускаем возможность истинности $x \& y$ в общей форме и не вступаем в конфликт с требованием совместности x и y: при проверке системы аксиом на непротиворечивость мы допускаем подстановку «x истинно и y истинно». Если уж при этом не было конфликта с требованием истинности $x \& y$, то почему это должно противоречить требованию совместности? Случай $x \& \sim x \to x$ не должен смущать. Ведь случаи $x \& \sim x \to x \& \sim x$ и $x \& \& \sim x \to \sim x \& x$, удовлетворяющие системе Орлова, содержат несовместные посылки.

Для возможности дедуктивного вывода не является необходимым и требование совместных посылок.

Оперативная (эффективная) логика Лоренцена [35] (см. также [36], [37]) имеет такой вид: 1) $x \to x$; 2) $x \to y$, $y \to z \Rightarrow x \to z$; 3) $x \& y \to x$; 4) $x \& y \to y$; 5) $z \to x$, $z \to y \Rightarrow z \to x \& y$; 6) $x \to x \vee y$; 7) $y \to x \vee y$; 8) $x \to z$, $y \to z \Rightarrow x \vee y \to z$; 9) $(x \& (x \to y)) \to y$; 10) $x \& z \to y \Rightarrow z \to (x \to y)$; 11) $x \& \sim x \to F$; 12) $x \& z \to F \Rightarrow z \to \sim x$. Присоединив к этим аксиомам аксиому $V \to x \vee \sim x$, получим классическую логику. Знаки $\to$ и $\Rightarrow$ различаются тем, что второй есть посредник в выводе, а первый — составная часть высказывания ($x \Rightarrow y$ означает: если x выводится, то и y

выводится). Знаки F и V означают соответственно ложность и истинность. Как видим, и система Лоренцена, несмотря на прямую ее ориентацию дать правила вывода по содержанию, такова, что к ней относится все, сказанное выше об аксиомах 6, 7 и 8 (знак $\vee$ и отсутствие исключающего «или»), об аксиоме 9 (бессмысленна как $x \,\&\, (x \vdash y) \vdash y$), об аксиоме 10 (сведѐние формулы с «и» к формуле без «и»). Добавим здесь еще следующее относительно аксиом 11, 12 и 13. Аксиома 11 означает исключение $x \,\&\, \sim x$ из числа истинных (приемлемых) положений, что имеет смысл $\sim (x \,\&\, \sim x)$ (то есть не может быть, чтобы было x и не-x). Но это не тождественно положению «Из $x \,\&\, \sim x$ выводится ложное». Аналогично — с аксиомой 13: признание $x \vee \sim x$ не тождественно утверждению «Из истины выводится $x \vee \vee \sim x$». Аксиома 12 при интерпретации ее с точки зрения следования имеет смысл «Если из x и z выводится ложное, то из z выводится не-x», не согласующийся с интуицией: из $x \,\&\, z$ может выводиться ложное, если $x \,\&\, z$ ложно, но из этого не усматривается то, что из z выводится не-x. Кроме того, согласно аксиоме 12, интерпретированной посредством $\vdash$, $(x \,\&\, y \,\&\, \sim y \vdash F) \vdash (y \,\&\, \sim y \vdash \sim x)$; поскольку $x \,\&\, y \,\&\, \&\sim y \vdash y \,\&\, \sim y$ и $y \,\&\, \sim y \vdash F$, имеем $y \,\&\, \sim y \vdash \sim x$, т. е. «парадоксальное» положение.

Имеется множество работ, прямо или косвенно касающихся проблемы логического следования. Они представляют интерес с самых различных точек зрения, и обзор их был бы полезен. Но мы не разбираем их здесь потому, что они имеют такие недостатки с точки зрения рассматриваемой проблемы, о которых уже говорилось, или ограничиваются чисто формальной стороной дела. В заключение сделаем лишь одно замечание, связанное с интуиционистской логикой.

Интуиционистское исчисление высказываний выступает как ограничение классического (по Клини — постулат 8^0. $\sim \sim x \supset x$ заменяется на более слабый постулат 8^1. $\sim x \supset \supset (x \supset y)$, означающий «Из противоречия следует все, что угодно»). Как видим, «парадоксальное» положение 8^1 и здесь сохраняется. Более того, даже в «минимальном исчислении» (то есть в исчислении вообще без восьмого постулата) сохраняются «парадоксальные» положения (аксиома 1a, например). Так что с этой точки зрения эти ограничения не ведут к системе, соответствующей интуитивному пониманию следования: они возникли из других оснований, нежели те, которые побудили Льюиса, Аккермана и других авторов строить свои системы.

Однако ограничение классической логики здесь имеет своеобразный характер: оно таково, что исключает сводимость знака $\supset$ к другим логическим знакам (к &, $\vee$ и $\sim$) и, как следствие, исключает сводимость $\supset$ к материальной импликации классической логики. В самом деле, если $x \supset y$ сводится к $\sim x \vee y$, то в интуиционистской системе будут приемлемыми положения $\sim x \vee x$ (закон исключенного третьего), $\sim x \vee x \vee y$ и т. д.

Известны многочисленные разнообразные интерпретации знака $\supset$ в интуиционистской логике или в связи с нею. Многие из них делают это в терминах строгой импликации, стремясь так или иначе ориентироваться на логическое следование. Известны также сомнения в целесообразности интерпретации импликации, адекватной логическому следованию. Все эти работы, на наш взгляд, стоят еще дальше от действительной формализации следования, чем работы Аккермана, которые специально предназначены для этого.

§ 10. Таким образом, имеется множество решений проблемы логического следования. Однако каждое из них охватывает лишь отдельные ее стороны (в особенности — исключение «парадоксов» материальной и строгой импликации), упуская из внимания другие стороны, так что находятся какие-либо интуитивные соображения, которым эти решения не удовлетворяют.

Конечно, не приходится надеяться на абсолютно полное и окончательное решение проблемы следования. Но вряд ли можно сомневаться в том, что будет найдено принципиальное решение, охватывающее наиболее существенные ее стороны. При поисках такого решения надо, разумеется, учесть уроки того, что сделано. Главным, по нашему мнению, здесь является следующее. Решение проблемы логического следования в широком смысле этого слова может быть дано не одной какой-либо логической системой, а лишь совокупностью логических систем, определенным образом связанных в единое целое. В частности, и классическое исчисление высказываний при этом должно быть охвачено, поскольку и в нем рассматривается вывод одних формул (высказываний) из других (при характеристике точки зрения

Клини мы приводили примеры этого). Это ясно в том смысле, что логика предикатов, модальная логика и другие логические дисциплины, учитывающие строение высказываний, должны быть построены и строятся (см. §§ 6 и 7) на базе теории, которая описывает правила вывода при условии отвлечения от структуры элементарных высказываний. Но это далеко еще не ясно для последовательности в рамках этой абстракции.

При построении логических систем, по идее адекватных теорий следования, так или иначе предполагают логику высказываний, ограничивают ее, меняют форму изложения и т. п. Во всяком случае ее предполагают как отправный пункт или как нечто уже данное. Задача же, на наш взгляд, состоит в том, чтобы построить теорию, которая даст первоначальное (не предполагающее других теорий) описание следования и исходя из которой можно будет осуществить переход к различным системам логики высказываний и установить их субординацию. Построить такую теорию — значит решить проблему логического следования в узком смысле этого слова: найти фундамент теории вывода вообще и систематизировать в плане формализации следования логические системы в рамках логики высказываний. Имеющиеся на этот счет наметки (см., например, § 8) надо расширить и сделать предметом специального исследования.

В следующей главе мы изложим позитивные соображения относительно такой логической системы, которую можно будет использовать для решения проблемы следования во втором смысле. Будем называть ее фундаментальной или эмпирической теорией вывода (фундаментальной, поскольку она будет основой той части теории вывода, в которой высказывания берутся без расчленения на субъекты, предикаты, кванторы, модальные знаки и т. д.; эмпирической, поскольку при построении ее будем исходить из эмпирических фактов рассуждений, из интуитивных соображений на этот счет).

Бояться слова «эмпирическая» здесь не следует: эмпирический подход к проблеме ни в какой мере не исключает методы современной логики; тем более он молчаливо предполагался при постановке самой проблемы (без этого нет никаких «парадоксов» материальной и строгой импликации; без этого бессмысленно говорить о том, что знак $\supset$ или какой-либо другой есть знак следования, и т. п.).

Когда ограничивают проблему следования исключением «парадоксов» импликации, то всегда неясными остаются такие вопросы: 1) имеются ли какие-либо гарантии, что исключение одних «парадоксов» означает исключение всех «парадоксов», то есть имеются ли гарантии, что все выводимые в данном «ограниченном» построении положения удовлетворяют интуиции; 2) имеются ли какие-либо гарантии, что исключение «парадоксов» не ведет к исключению положений, удовлетворяющих интуиции. Эмпирический подход, надо думать, может в какой-то мере компенсировать имеющиеся здесь неясности и неопределенности.

ЭМПИРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВЫВОДА

§ 1. Под эмпирической теорией вывода мы понимаем, как говорилось выше, логическую систему (или совокупность логических систем, поскольку здесь допустима множественность решений), которая должна удовлетворять интуитивному пониманию вывода (логического следования), т. е. должна охватывать некоторую совокупность интуитивно приемлемых правил вывода и исключать «парадоксальные» с точки зрения интуиции положения.

Рассмотрим прежде всего логические знаки, которые должны быть в первую очередь учтены в эмпирической теории вывода. Это разумеется, знак $\vdash$. Он будет употребляться в том содержательном смысле, о котором говорилось в предшествующей главе, то есть как сокращение для предиката «из высказывания слева от этого знака выводится высказывание, записываемое справа от него». Высказывания x и y в $x \vdash y$ могут быть как угодно сложными, так что усложнение записи в виде $x^1, \ldots, x^m \vdash y^1, \ldots, y^n$ является излишним. К тому же такая запись нуждается в пояснении. Если при этом запятая означает логические знаки, объединяющие простые высказывания в сложные (а что иное она может означать?!), то «$x^1, \ldots, x^m$» и «$y^1, \ldots, y^n$» суть x и y.

Выражение «Если x, то y», как говорилось в первой главе, сводится к следованию и фиксированию эмпирической связи. Так что предметом нашего рассмотрения оно не будет. Мы будем использовать его как средство нашего языка на тех же основаниях, на каких им пользуются в любой науке. Привычный смысл его, напоминаем, состоит в допустимости вывода «Если x, то y; x/y» или «Если x, то y» $\& x \vdash y$, где & есть «и».

При рассмотрении выражения «если ..., то ...» мы не собираемся охватить всевозможные его употребления в речи. Мы берем его исключительно как показатель права на вывод «Если x, то y; x/y». Право на такого рода вывод дается не обязательно этим выражением. Например, высказывание «Если увеличить температуру данной массы газа, то (при прочих постоянных условиях) увеличится ее давление» можно записать в форме «С увеличением температуры данной массы газа увеличится (при прочих постоянных условиях) ее давление», что не влияет на его логические свойства. Так что уместно сказать следующее: имеются высказывания, в которых можно абстрагировать высказывания x и y и еще нечто такое (обозначим через α), что дает право на вывод «(x, y, α); x/y», где (x, y, α) изображает состав высказывания; это нечто (то есть α) будем записывать посредством «если ..., то ...» и порядка записи x и y. Аналогичные абстракции имеют место и в отношении прочих логических знаков языка.

В теории вывода нельзя ограничиться одним только знаком $\vdash$. При том условии, что этот знак не сводится ни к каким другим логическим знакам (к «не», «и» и т. д.), число утверждений с одним им оказывается весьма ограниченным. Кроме $x \vdash x$ привести другие несомненные примеры оказывается затруднительным. Положения вроде «Если $x \vdash y$ и x истинно, то y истинно», «Если $x \vdash y$ и $y \vdash z$, то $x \vdash z$» и т. п. содержат «и». Положения типа $x \vdash (x \vdash x)$, $x \vdash (y \vdash x)$, $(x \vdash y) \vdash (\sim y \vdash \sim x)$, $(x \vdash (x \vdash y)) \vdash (x \vdash y)$ и т. п. интуитивно не ясны, сомнительны, явно «парадоксальны» или практически бессмысленны в качестве правил вывода. Положения $(x \vdash y) \vdash ((y \vdash z) \vdash (x \vdash z))$, $(x \vdash y) \vdash$ $\vdash ((z \vdash x) \vdash (z \vdash y))$ и т. п. являются довольно сложными, разъяснение их ведет к употреблению других логических знаков (например, приведенные положения разъясняются как «Если $x \vdash y$ и $y \vdash z$, то $x \vdash z$»). Необходимо, очевидно, учесть другие знаки — привычные логические знаки речи «и», «или», «не» и т. д.

Собственно говоря, эмпирическая теория вывода и должна сформулировать правила оперирования последними, дать систему утверждений, определяющую их свойства. Тем самым будет дано определение $\vdash$: знак вывода определяется формально лишь совместно с другими логическими знаками. Здесь возможны различные варианты: 1) знак $\vdash$ первичен, с его помощью дается определение знакам «и», «или» и т.д.; 2) знаки «и», «или» и т. д. первичны, привычно ясны, с их помощью дается определение $\vdash$; 3) разделение, указанное в первом и втором пункте, не производится. Но во всех случаях упомянутые знаки фигурируют совместно. Например, правило вывода «Из (x и y) выводится x» можно рассматривать как фрагмент определения свойств «и» и «Из ... выводится ...».

Главный вопрос — отбор логических знаков (кроме знака вывода). Задача заключается не в том, чтобы отобрать какие-то встречающиеся в рассуждениях знаки, а в том, чтобы отобрать знаки со следующими свойствами: 1) они фактически употребляются в рассуждениях, в выводах, в доказательствах (без них при этом нельзя обойтись, они необходимы); 2) они не сводятся друг к другу, имеют независимые значения; 3) с их помощью можно определить другие логические знаки, встречающиеся в рассуждениях. Поскольку речь идет не о функциональных построениях, которые (кстати сказать) сами невозможны без привычных «и», «или» и «не» и привычных правил оперирования ими, то отбор рассматриваемых знаков есть дело эмпирического исследования. И это дело сделано: такими знаками являются «и», «или» и «не». Будем в дальнейшем употреблять знаки «$\cdot$», «:» и «$\sim$», соответствующие им.

В первой главе мы видели, что с помощью этих знаков определяются все функции двузначного исчисления высказываний. В дальнейшем мы к этому вопросу еще вернемся. А сейчас сделаем несколько общих замечаний. Знак «$\cdot$» сам по себе сомнений не вызывает. Употребление его в качестве первичного при рассмотренных выше предпосылках есть дело вполне естественное. Наблюдая процесс употребления «и» со стороны, можно заметить следующее: если он соединяет высказывания, то он означает, что утверждаются все фигурирующие при этом высказывания или утверждается каждое из них. Но этого можно добиться и без употребления «и», просто перечисляя ряд высказываний (утверждая их в последовательности). Так что под знаком «$\cdot$» мы будем иметь в виду не только фактическое употребление «и», но и все случаи, адекватные ему с точки зрения правил вывода. Знак «$\cdot$» будет не просто замещать «и», но и замещать все адекватные «и» языковые средства. Это будет относиться к «или» и к «не». Таким образом мы уже предполагаем целый ряд абстракций, благодаря которым «и», «или» и «не» выступают уже не просто как языковые средства наряду с другими, но как обозначения классов языковых средств со сходными свойствами, т. е. именно как логические знаки.

В обычной речи «или» употребляется в исключающем смысле (:), в логических системах — в большинстве случаев употребляется неисключающее «или» ($\vee$). Мы предпочитаем первое по следующим причинам. Исключающее «или» нам представляется более простым и привычным по смыслу. Через него естественно определяется $\vee$: для случая двух высказываний $x \vee y = Df. (x \cdot y : \sim x \cdot y : x \cdot \sim y)$. Непосредственно просто формулируются привычные правила вывода $(x:y) \cdot x \vdash \sim y$, $(x:y) \cdot \sim x \vdash y$ и т. д. В формулировке закона исключенного третьего в форме $x : \sim x$ не предполагается никаких дополнительных условий, в форме же $x \vee \sim x$ предполагается исключение $x \cdot \sim x$. Если принять $\vee$ за первичный, то $x : y = Df. (x \vee y) \cdot (\sim x \vee \sim y)$ (или $(\sim x \cdot y) \vee (x \cdot \sim y)$), что далеко от первичной ясности. Для $\vee$ имеет силу $x \vdash x \vee y$, что также требует пояснений.

Знак $\vee$, как уже отмечалось, выбирается потому, что он удобен по целому ряду причин в функциональных построениях и в соответствующих им аксиоматических. По традиции он переходит и в системы иного типа (в частности, в системы сильной импликации). Но что, например, означает $\vee$ в положении $x \vdash x \vee y$? Если интерпретировать $\vee$ как «или» обычной речи, то это положение лишается смысла. Можно интерпретировать так: из x выводится по крайней мере одно из x и y. Но x выводится из x, что очевидно, а относительно y можно сказать лишь то, что оно либо выводится из x, либо нет, либо вопрос о его выводимости неразрешим.

Знак «:» представляется возможным определить так: $(x : y) = Df.$ ((если x, то $\sim y$)$\cdot$(если $\sim x$, то y)$\cdot$(если y, то $\sim x$)$\cdot$(если $\sim y$, то x)). Но имеется ряд соображений против этого. Знак «:» обладает привычной ясностью не в меньшей мере, чем «если ..., то ...». Такие свойства $x : y$, как «Если $x : y$ и x, то $\sim y$» и т. д., ясны и без приведенного определения. Описание свойств $x : y$ положениями вроде $(x : y) \cdot x \vdash \sim y$, $(x : y) \cdot \sim x \vdash y$ и т. д. проще, часть таких положений выводится из других, знак $\vdash$ есть знак эмпирической теории вывода, а «если ..., то ...» — нет. Описание свойства «Если x, то y», далее, положением «Если x, то y; x; значит y» не есть определение значения этого выражения самого по себе. Это — синтаксическое, а не семантическое утверждение. Анализ же значения выражения «Если x, то y» ведет, как говорилось в первой главе, к $x \cdot z \vdash y$, где z пусто или истинно, и к $x \rightarrow y$ [8]. Если бы это выражение сводилось только к $x \cdot z \vdash y$, то данное выше определение $x : y$ приняло бы вид: $(x : y) = Df. (x \cdot a \vdash \sim y) \cdot (\sim x \cdot b \vdash y) \cdot \cdot (y \cdot c \vdash \sim x) \cdot (\sim y \cdot d \vdash x)$, где о каждом из a, b, c и d можно сказать, что оно пусто или истинно, а между собою они могут и не различаться (частично или все). Но для $x : y$ допустимы выводы $(x : y) \cdot x \vdash \sim y$, $(x : y) \cdot \sim x \vdash y$ и т. д., не зависящие от истинности x, $\sim x$ и т. д., тогда как для $x \cdot a \vdash \sim y$ и других случаев определяющей части это исключается: $(x \cdot a \vdash \sim y) \cdot x \vdash \sim y$ лишено смысла; имеет смысл «Если $x \cdot a \vdash \sim y$ и $x \cdot a$ истинно, то y истинно». Наконец, «Если x, то y» может выражать $x \rightarrow y$, определяемое через «:» (см. [6], [8], [9]). Но если даже последнее не предполагать, $x : y$ не обязательно должно означать то, что из x и a выводится $\sim y$ и т. д. Оно означает также и такие случаи, когда объекты, о которых говорится в x и y, исключают друг друга, и это известно из эмпирических наблюдений.

Помимо $\bigvee$ имеется еще знак, сходный с : , а именно — выражение, указывающее на произвол в выборе. Для него (обозначим $\bigwedge$) допустимы выводы «Если $x \bigwedge y \vdash z$ и x истинно, то z истинно; если $x \bigwedge y \vdash z$ и y истинно, то z истинно», а также выводы $(x \bigwedge y) \cdot x \vdash \sim y$ и $(x \bigwedge y) \cdot \cdot \sim x \vdash y$, свойственные : . Знаки : , $\bigvee$ и $\bigwedge$ можно истолковать соответственно так: «одно из того, о чем говорится в данном множестве высказываний» (утверждается одно из перечисляемых высказываний), «по крайней мере одно ...» (одно, а может быть два, ..., а может быть все), «любое одно ...».

Отрицание $\sim x$ означает исключение той возможности, о которой говорится в x, и утверждение одной из других. В простейшем случае отрицание x означает утверждение $\sim x$. В более сложных должно быть дано специальное разъяснение. Так, $\sim (x \cdot y)$ означает отрицание $x \cdot y$ и утверждение одной из других возможностей, а именно $-x \cdot \sim y : : \sim x \cdot y : \sim x \cdot \sim y$; отрицание $x : y$ есть отрицание $x \cdot \sim y : : \sim x \cdot y$ и т. д. В исходном пункте, поскольку предполагается учет лишь двух возможностей (положение вещей либо такое, как об этом говорится в x, либо не такое), должно выполняться правило двойного отрицания (отрицание $\sim x$ есть утверждение x). Другие формы отрицания могут быть введены на этой основе как производные и более специальные (см. [5]). Отрицание с правилом двойного отрицания — дело обычное, примеры же отрицания без этого правила известны лишь немногим специалистам. Так что с гносеологической точки зрения начало с обычным отрицанием вполне законно. Но и формально, как увидим ниже, «неклассические» отрицания определимы на основе системы с обычным («классическим») отрицанием.

Для $x \vdash y$ имеет силу закон исключенного третьего в следующем смысле: $(x \vdash y) : \sim (x \vdash y)$, т. е. либо из x выводится y, либо это неверно. Если не удается выяснить, что именно имеет место — $x \vdash y$ или $\sim (x \vdash y)$, или это в принципе невозможно установить, то указанное положение не отменяется. В таких случаях просто складывается возможность для логического описания более сложной ситуации, что может быть выполнено либо в трехзначной (или вообще в n-значной) системе, либо в аксиоматической системе с дополнительными утверждениями (например, с утверждениями для особой формы отрицания, отличной от $\sim$; см. ниже). Положения $(x \vdash y) : (x \vdash \sim y)$ и $(x \vdash y) : (\sim x \vdash y)$ в качестве общих неверны, так как возможны случаи, когда $\sim (x \vdash y) \cdot \sim (x \vdash \sim y)$, $\sim (x \vdash y) \cdot \sim (\sim x \vdash y)$, $\sim (x \vdash y) \cdot \cdot \sim (x \vdash \sim y) \cdot \sim (\sim x \vdash y)$.

Но вообще-то говоря, знак $\sim$ в связи с формулами типа $x \vdash y$ в логической системе, описывающей свойства $\vdash$, не должен фигурировать. Дело в том, что если выражение $\sim (x \vdash y)$ есть высказывание, где x и y суть постоянные высказывания, то оно означает: нет правила, позволяющего вывести y из x. Если же x и y суть переменные, то $\sim (x \vdash y)$ означает, что $x \vdash y$ не есть правило вывода. Если логическая система дает определение правила вывода, то $\sim (x \vdash y)$ означает, что $x \vdash y$ не выводится в данной системе.

Выражение $x \vdash y$ означает также, что для некоторых целей x может быть заменено на y. Это понимание правомерно потому, что вывод $x \vdash y$ в контексте познавательного процесса и в общей связи с прочими явлениями играет такую роль: вывести из x высказывание y и затем оперировать уже с y, а не с x. Так что правила вывода можно рассматривать как правила замещения одних высказываний другими. С другой стороны, $x = Df.\ y$ можно рассматривать как $(x \vdash y) \cdot (y \vdash x)$ или $(x \vdash y) \cdot (y \vdash x) \cdot (\sim x \vdash \sim y) \cdot (\sim y \vdash \sim x)$ в зависимости от свойств той или иной системы, описывающей свойства $\vdash$ (см. § 4 четвертой главы). Хотя аксиомы в теории вывода и можно рассматривать как соглашения о замене одних высказываний на другие, вопрос о том, насколько эти соглашения описывают фактическое положение с такого рода заменами в рассуждениях, не снимается.

С целью сокращения записи возможно введение знаков «$=$» и «$\equiv$»: $(x = y) = Df.\ (x \vdash y) \cdot (y \vdash x)$; $(x \equiv y) = Df.\ (x = y) \cdot (\sim x = \sim y)$. Содержательный их смысл: высказывания x и y тождественны по содержанию, в них говорится об одном и том же. Поскольку с использованием знаков $\cdot$, $:$ и $\sim$ в их привычном смысле невозможно отыскать примеры, когда $x = y$ не есть $x \equiv y$, то иногда достаточно будет ограничиться знаком «$=$» (тем более в логических системах $(x \vdash y) \cdot \sim y \vdash \sim x$ и $(y \vdash x) \cdot \sim x \vdash \sim y$). Впрочем, некоторые замечания об использовании «$\equiv$» мы сделаем по ходу изложения. Определим также знак «$>$»: $(x > y) = Df.\ x \cdot z \vdash y$, где z есть пустая или логически истинная формула. Определение последней дадим ниже. Здесь же достаточно будет сказать, что логически истинная формула есть формула, истинная из чисто логических оснований. Для оперирования знаком $>$ вполне достаточно также такое его определение: $(x \cdot z \vdash y) \vdash (x > y)$ и $(x \vdash y) \vdash (x > y)$. Если принять, что из z не выводится y (то есть что $z \vdash y$ не есть логически истинная формула), то можно ввести новое отношение $x \gg y$, для которого исключаются «парадоксальные» формулы $x \gg y$, где $*(y)$.

Если формула $x \cdot y \vdash x$ принята в качестве аксиомы или выводится из аксиом, то при логически истинной x получим $y > x$, в частности — $y > (z : \sim z)$. Для $\vdash$ положение $y \vdash x$, где x логически истинно, оценивается как «парадоксальное». По определению знак $>$ шире, чем $\vdash$: все положения для $\vdash$ имеют силу для $>$, но не наоборот. В применении к содержательным рассуждениям выводимость в смысле $\vdash$ и выводимость в смысле $>$ различаются тем, что во втором случае к посылкам присоединяются логически истинные утверждения. В первом случае $A \vdash B$ можно представить как результат подстановки постоянных высказываний на место переменных в $x \vdash y$, которая есть правило вывода (в логической системе — аксиома или выводимое из аксиом положение). Здесь A достаточно для вывода B. Во втором случае имеет место $A \cdot C \vdash B$ (подстановка осуществляется в правило $x \cdot z \vdash y$). Здесь для вывода B помимо A требуется еще C. Поскольку C есть результат подстановки в логически истинное z, то имеем $A > B$. В отличие от «Если x, то y» для $x > y$ требуется наличие не просто истинного z, но логически истинного z. Кроме того, «Если x, то y» может и не выражать $x \cdot z \vdash y$.

Таким образом можно констатировать, что «Если x, то y» выражает самые различные логические отношения. Эта форма выражает допустимость вывода *modus ponens*; с помощью семантических терминов ее можно охарактеризовать как выражение зависимости истинности y от истинности x, так что последней достаточно для первой; здесь возможна истинность «Если a, то b», где a и b не имеют ничего общего по содержанию, то есть не имеют одинаковых субъектов, предикатов и составляющих высказываний (если это — сложные высказывания); например, это имеет место в случае фиксирования эмпирических связей. Затем эта форма выражает $x \cdot z \vdash y$, где z истинно или даже логически истинно (в частности, z есть аксиома некоторой системы). Наконец, эта форма выражает $x \vdash y$; здесь $a \vdash b$ не может быть истинным; здесь требуется наличие сходных элементов в структуре x и y (одинаковые субъекты, предикаты или целые высказывания); специфика $x \vdash y$ с помощью семантических терминов не улавливается.

§ 3. Эмпирический подход к теории вывода выражается не только в отборе знаков для теории из фактов рассуждений в обычной речи, но и в методе отбора формулируемых с их помощью положений для аксиом. Конечно, здесь дело не сводится просто к выбору аксиом из числа некоторых интуитивно приемлемых положений. Но последние должны быть учтены как познавательная предпосылка при построении логической системы. Метод, о котором идет речь, состоит в следующем. Во-первых, рассматриваются всевозможные типы выражений (формул; определение дадим в следующем параграфе) или высказываний, построенных посредством логических знаков $\cdot$, : , $\sim$ и $\vdash$, и интуитивно приемлемые всевозможные следствия из них. Во-вторых, аксиоматическая система строится с таким расчетом, чтобы охватить все эти допустимые выводы (в числе аксиом или выводимых из них положений).

Было бы несправедливо полагать, что такого рода соображения не принимались во внимание при конструировании систем, о которых говорилось в предшествующей главе. Но факт остается фактом: обычно упор делался и делается на исключение из числа выводимых положений известных «парадоксов» импликации, а не на то, насколько полно строящая система соответствует интуитивному пониманию.

Мы здесь не будем давать исчерпывающий перечень типов формул, построенных из знаков высказываний и логических знаков $\cdot$, $:$, $\sim$ и $\vdash$, а также перечень всевозможных следствий из них. Приведем лишь основную часть их, послужившую базой тех логических систем, которые будут охарактеризованы ниже. Кроме того, для описания самого метода исследования проблемы достаточно будет этого.

Если нам известно только то, что x есть высказывание, и мы не рассматриваем его строение, то из x можно вывести только следующие следствия: x, $x \cdot x$, $x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$, $\sim\sim x$, $\sim\sim \ldots \sim\sim x$ ($\sim$ взято четное число раз). Учет строения x не влияет уже на эти положения: $\sim x \vdash \sim x$, $x \cdot y \vdash x \cdot y$ и т. п. К тем формулам, которые мы будем брать в дальнейшем, относится все сказанное о x плюс ряд новых положений. Мы будем указывать лишь последние. Из $\sim x$ выводится (кроме того) $\sim (x \cdot x)$. Из $\sim\sim x$ выводится x. В общем, интуитивно приемлемы $x \cdot y \vdash y \cdot x$, $x \cdot y \vdash x$, $x \cdot y \vdash y$, $x \cdot y \vdash \sim(\sim x \cdot y : x \cdot \sim y : \sim x \cdot \sim y)$, $x \cdot y \cdot z \vdash y \cdot x \cdot z$, $x \cdot y \cdot z \vdash x \cdot y$, $\sim(x \cdot y) \vdash \sim x \cdot y : x \cdot \sim y : \sim x \cdot \sim y$, $\sim(x \cdot y) \cdot x \vdash$ $\vdash \sim y$, $x : y \vdash x \cdot \sim y : \sim x \cdot y$, $(x : y) \cdot z \vdash x \cdot z : y \cdot z$, $(x : y) \cdot x \vdash$ $\vdash \sim y$ и т. п.

Рассмотрев формулы без $\vdash$ и возможные следствия из них, переходим к формулам с $\vdash$. К ним относится все сказанное выше о высказываниях вообще. Например, $(x^1 \vdash y^1) \cdot$ $\cdot (x^2 \vdash y^2) \vdash (x^1 \vdash y^1)$. Только в нашем случае, напомним, не используется отрицание формул типа $x \vdash y$: оно выносится в метаязык ($\sim (x \vdash y)$ понимается как «$x \vdash y$ не есть логически истинная формула») или в интерпретацию ($\sim (x \vdash y)$ понимается как «$x \vdash y$ ложно»). Присоединяются также новые положения, касающиеся новых комбинаций высказываний в посылках. Это, в частности, положения $(x \vdash y) \cdot$

$\cdot (x \vdash z) \vdash (x \vdash y \cdot z)$, $(x \vdash y \cdot z) \vdash (x \vdash y)$, $(x \vdash y) \cdot (y \vdash z) \vdash$ $\vdash (x \vdash z)$, $(x^1 \vdash y^1) \cdot (x^2 \vdash y^2) \vdash (x^1 \cdot x^2 \vdash y^1 \cdot y^2)$, $(x \vdash y) \cdot$ $\cdot \sim y \vdash \sim x$ и т. п. Если высказывания x и y тождественны по смыслу (в них говорится об одном и том же), то $z^1 \vdash z^2$, где z^2 образуется из z^1 путем замены x на y. Вместе с тем, из $x : y \vdash z$ не следует $(x \vdash z) : (y \vdash z)$, и наоборот: первое означает, что из «x или y» выводится z, а второе — что либо из x выводится z, либо из y выводится z; аналогично для $(x \vdash y) : (x \vdash z)$ и $x \vdash y : z$.

Как эмпирически данный факт можно считать также установление возможности вывода одних из приведенных положений из других. Например, поскольку $x \vdash \sim \sim x$ и $\sim \sim x \vdash x$, а следование транзитивно $-(x \vdash \sim \sim x) \cdot$ $\cdot (\sim \sim x \vdash x) \vdash (x \vdash x)$, получаем $x \vdash x$. Из $(x^1 \vdash y^1) \cdot$ $\cdot (x^2 \vdash y^2) \vdash (x^1 \cdot x^2 \vdash y^1 \cdot y^2)$, $x \cdot x \vdash x$ и $x \vdash x \cdot x$ выводится $(x \vdash y) \cdot (x \vdash z) \vdash (x \vdash y \cdot z)$, из $(x \vdash y \cdot z) \vdash (x \vdash y)$ и других положений выводится $x \cdot y \vdash x$ и т. д. Кроме того, выводятся интуитивно не очевидные положения вроде $\sim (x : y) \cdot \sim x \vdash$ $\vdash \sim y$, $\sim (x : y) \cdot x \vdash y$, $((x : y) : z) \cdot \sim y \vdash x : z$ и т. п. Это обстоятельство и создает базу для применения дедукции в решении поставленной задачи. Можно здесь также сослаться на возможность определения с помощью $\cdot$, $:$, $\sim$ и $\vdash$ других логических знаков ($=$, $\equiv$, $>$, $\vee$, $\supset$ и т. п.)

Задача заключается теперь в том, чтобы построить логическую систему, в которой сравнительно небольшого (во всяком случае, конечного) числа положений достаточно для более или менее полного охвата интуитивно приемлемых положений о выводе одних высказываний из других. При этом, разумеется, будут внесены уточнения в самую интуицию; возможны и отступления от последней в том смысле, что будут приняты интуитивно не очевидные аксиомы, дающие возможность вывода очевидных положений; абсолютно полное и абсолютно совершенное описание правил вывода в одной логической системе при этом исключается, — лишь совокупность логических систем в тенденции есть такое описание. Ниже мы изложим несколько вариантов эмпирической теории вывода.

Мы рассматриваем логическую систему, основанную на такой эмпирической базе, лишь как исходный пункт построения общей теории вывода. От того или иного варианта такой системы зависит то, насколько удачно выбран этот исходный пункт, — вопрос, который мы оставляем открытым, сосредоточивая все внимание на главном: на рассмотрении самой возможности эмпирического обоснования теории вывода и систематизации ее в рамках общей теории вывода.

Уточним употребляемые обозначения и термины. Примем обозначения: 1) малые латинские буквы a, b и c с индексами и без индексов суть переменные высказывания; 2) $\cdot$, $:$, $\sim$ и $\vdash$ суть логические знаки; 3) малые латинские буквы x, y и z с индексами и без индексов суть формулы, образованные из переменных высказываний и логических знаков (в частности, это могут быть переменные высказывания); 4) большие латинские буквы A, B, C, ... суть элементарные постоянные высказывания и постоянные высказывания, образованные из элементарных и логических знаков. Различие постоянных и переменных высказываний таково: когда употребляются знаки a, b, c, ..., то речь идет о любых высказываниях, когда употребляются знаки A, B, C, ..., то речь идет о каких-то определенных высказываниях.

Примем следующее определение формулы: 1) переменное высказывание есть формула; 2) если x есть формула, то $\sim x$ есть формула; 3) если x и y суть формулы, то $x \cdot y$, $x : y$ и $x \vdash y$ суть формулы; 4) некоторая последовательность знаков есть формула лишь в силу пунктов 1—3. Под вхождением в формулу будем понимать следующее: формула y есть вхождение в формулу x, если и только если x есть либо y, либо $\sim y$, либо $z \cdot y$, либо $z : y$, либо $y \cdot z$, либо $y : z$, либо $y \cdot z^1 \cdot \ldots \cdot z^n$, либо $z^1 \cdot \ldots \cdot z^n \cdot y$, либо $z^1 \cdot \ldots \cdot y \cdot \ldots \cdot z^n$, либо $y : z^1 : \ldots : z^n$, либо $z^1 : \ldots : z^n : y$, либо $z^1 : \ldots : y : \ldots : z^n$, либо $z \vdash y$, либо $y \vdash z$, либо y есть вхождение в формулу z, которая есть вхождение в x. Обращаем внимание на то, что в формуле $z^1 : z^2 : \ldots : z^n$ вхождениями являются лишь z^1, z^2, ..., z^n, а не $z^1 : z^2$, $z^1 : z^2 : z^n$, $z^2 : z^n$ и другие комбинации z^i попарно, потрое и т. д. (если не расставлены скобки). Отдельные пункты в определении вхождения для некоторых аксиоматических систем излишни. Однако мы их не исключаем, дабы не повторять каждый раз это определение в незначительно измененном виде.

Будем употреблять скобки. Задача скобок — указать границы формул и вхождений в формулы. Расстановка скобок дает некоторое правило однозначной записи и однозначного чтения сложных формул. С целью сокращения числа скобок (для упрощения записи) будем их в ряде случаев опускать. В таких случаях скобки можно восстановить по следующему правилу: 1) группа формул, соединенных знаком «$\cdot$», и только этим знаком, выделяется скобками; при этом в скобки заключаются все формулы, соединенные этим знаком; 2) аналогично для знака «:»; 3) первые выделяются прежде, чем вторые, если встречаются совместно («$\cdot$» связывает сильнее, чем «:»; оба они связывают сильнее, чем $\vdash$). Например, в формуле $x : y \vdash x \cdot \sim y : \sim x \cdot y$ скобки будут расставлены так: первый шаг даст $x : y \vdash (x \cdot \sim y) : (\sim x \cdot y)$, второй шаг даст $(x : y) \vdash (x \cdot \sim y) : (\sim x \cdot y)$, третий шаг даст $(x : y) \vdash ((x \cdot \sim y) : (\sim x \cdot y))$. Согласно сказанному в формуле, например, $x : y \cdot z : \sim y \vdash \sim x$ скобки расставляются только так: $(x : (y \cdot z) : \sim y) \vdash \sim x$; иная расстановка, например — $(x : y \cdot z) : \sim y \vdash \sim x$, $(x : y) \cdot z : \sim y \vdash \sim x$ и т. п., запрещается. Знак $\sim$ будет относиться только к одной ближайшей формуле справа от него, в том числе только к одной формуле в скобках. По определению формулы и согласно этому замечанию вместо $\sim (\sim x)$, $\sim (\sim (\sim x))$ и т. п. можно писать соответственно $\sim \sim x$, $\sim \sim \sim x$ и т. п. Знак «$\cdot$» будем обычно опускать, записывая соединяемые им формулы рядом, без интервала.

§ 4. В работе [6] изложена логическая система, которую мы приведем здесь в значительно измененном виде. Мы приведем ее с целью сформулировать на ее примере ряд общих соображений. Мы рассматриваем эту систему не как необходимый исходный пункт, не как простейший или вообще лучший с какой-то точки зрения вариант логической системы искомого типа, а просто как один из возможных вариантов, с которого можно начать исследование проблемы. Кроме того, допустимо понимание тождества x и y как $x \equiv y$, то есть как $(x \vdash y)(y \vdash x)(\sim x \vdash \sim y)(\sim y \vdash \sim x)$, а излагаемая ниже система (назовем ее S^1) предполагает именно такое понимание.

Система аксиом S^1: 1) $x \equiv xx$; 2) $x \equiv \sim \sim x$; 3) $xy \equiv yx$; 4) $xyz \equiv x(yz)$; 5) $\sim (xy) \equiv \sim xy : x \sim y : \sim x \sim y$; 6) $x : y \equiv y : x$, $x^1 : x^2 : \ldots : x^n \equiv x^2 : x^1 : \ldots : x^n$, $x^1 : \ldots : x^{n-1} : x^n \equiv x^1 : \ldots : x^n : x^{n-1}$, $x^1 : \ldots : x^k : x^{k+1} : \ldots : x^n \equiv x^1 : \ldots : x^{k+1} : x^k : \ldots : x^n$; 7) $x : y \equiv x \sim y : \sim xy$; $x^1 : x^2 : \ldots : x^n \equiv y^1 : y^2 : \ldots : y^n$, где y^1 есть $x^1 \sim x^2 \ldots \sim x^n$ (все x^i, кроме x^1, имеют отрицания) или $y^1 \equiv x^1 \sim x^2 \ldots \sim x^n$, $y^2 \equiv \sim x^1 x^2 \ldots \sim x^n$ (все x^i, кроме x^2, имеют отрицания), $\ldots$, $y^n \equiv \sim x^1 \sim x^2 \ldots x^n$ (все x^i, кроме x^n, имеют отрицания), в каждую из y^1,

$y^2, \ldots, y^n$ входят все $x^1, x^2, \ldots, x^n$; 8) $\sim(x:y) \equiv xy : :\sim x \sim y$, $\sim(x:y:z) \equiv xyz : xy \sim z : \sim xyz : x \sim yz : \sim x \cdot \cdot \sim y \sim z$, $\sim(x^1 : x^1 : \ldots : x^n) = z^1 : \ldots : z^{2^n - n}$, где $z^1, z^2, \ldots \ldots, z^{2^n - n}$ суть формулы, в число которых включается формула $x^1x^2 \ldots x^n$ и все возможные формулы, отличающиеся от нее наличием отрицания по крайней мере перед одной из формул $x^1, x^2, \ldots, x^n$, за исключением формул $y^1, y^2, \ldots, y^n$, указанных в 7 (y^i в число z^i не включаются); 9) $(x:y)z \equiv \equiv xz:yz$, $(x^1:x^2: \ldots :x^n)y \equiv x^1y : x^2y : \ldots : x^ny$; 10) $(x \vdash y) \cdot \cdot (y \vdash z) \vdash (x \vdash z)$; 11) $(x \vdash y)(x \vdash z) \vdash (x \vdash yz)$; 12) $(x \vdash yz) \vdash \vdash (x \vdash y)$; 13) $(x \vdash y) \vdash (xz \vdash y)$; 14) $(x \vdash y^1 : y^2) \sim y^1 \vdash (x \vdash y^2)$, $(x \vdash y^1 : y^2 : \ldots : y^n) \sim y^1 \vdash (x \vdash y^2 : \ldots : y^n)$, $(x \vdash z^1) \sim y^1 \vdash (x \vdash z^2)$, где z^1 есть формула, отличающаяся от $y^1 : y^2 : \ldots : y^n$ наличием скобок (скобки могут быть расставлены как угодно), а z^2 — формула, отличающаяся от z^1 только тем, что в ней нет y^1 (y^1 вычеркнута); 15) $(x \equiv y) \vdash (z^1 \equiv z^2)$, $(z^1 \equiv z^2) \vdash (x \equiv y)$, где z^1 и z^2 суть формулы, различающиеся тем и только тем, что в одной имеется вхождение x, а в другой на этом месте стоит y (одна из z^1 и z^2 образуется из другой путем замены вхождения x на y или y на x); 16) $(x \vdash y \sim y) \vdash \sim x$.

В аксиомах 1—9 знаки $x, y, z, \ldots$ суть переменные высказывания, если явно формулируется правило подстановки. Мы записали эти аксиомы не в знаках $a, b, c, \ldots$ исключительно для единообразия. Но вообще говоря, это роли не играет: по договоренности знаки $x, y, z, \ldots$ можно понимать также и как знаки переменных высказываний.

Примем, далее, следующее определение логически истинной (доказанной, доказуемой, выводимой и т. п.) формулы: 1) аксиомы 1—16 суть логически истинные формулы; 2) если $x \vdash y$ и x логически истинны, то y логически истинна; 3) если x и y логически истинны, то xy логически истинна; 4) если x логически истинна, и переменное высказывание a есть вхождение в x, то формула y, образованная из x в результате подстановки любой формулы z на место всех вхождений a в x есть логически истинная формула; 5) формула является логически истинной только в силу сказанного в пунктах 1—4.

Рассмотрим некоторые свойства S^1. Надо сказать, что это рассмотрение фактически будет означать выяснение возможных модификаций системы, допустимых в рамках некоторых интуитивных предпосылок. Это будет касаться и систем S^2, S^3 и т. д., которые мы расцениваем как варианты, удовлетворяющие одной и той же интуитивной базе.

Пункт 4 можно сформулировать так: пусть x и y различаются тем и только тем, что на всех местах, соответствующих вхождениям переменного высказывания a в x, в формуле y записана формула z; если x логически истинна, то и y логически истинна. В дальнейшем тот факт, что x логически истинна, будем изображать знаком $*(x)$, а не $\vdash(x)$, как обычно делают, поскольку знак $\vdash$ у нас может входить в состав x. Правило подстановки можно сформулировать также следующим образом: если $*(x)$, и y образуется из x путем подстановки z на место всех вхождений a в x, то $*(x \vdash y)$.

Без правила подстановки вообще можно обойтись, поскольку аксиомы записаны посредством знаков x, y, z, ... и фактически суть схемы аксиом (неявно предполагается правило подстановки). Но в ряде случаев мы будем предполагать, что часть аксиом записывается посредством знаков a, b, c, ..., и тогда правило подстановки необходимо. Мы имеем в виду аксиомы 1—9.

Система аксиом S^1 есть система именно аксиом в том смысле, что это есть символическая запись общих утверждений относительно следования, принимаемых без доказательства. Например, $xy \equiv yx$ означает: из высказывания, образованного путем соединения двух высказываний знаком «и», выводится высказывание, отличающееся от него лишь порядком записи составляющих высказываний; аналогично — для отрицания; другими словами, высказывания, соединенные знаком «и», можно менять местами, что не влияет на результат рассуждения. Аналогично обстоит дело с другими аксиомами (о роли символизации нет необходимости говорить, поскольку она здесь принципиально ничем не отличается от других случаев ее использования в науке).

В выражении $x \vdash y$ будем x называть посылкой, а y — заключением. Аксиомы S^1 можно разбить на три группы: 1) посылка и заключение не содержат знака $\vdash$ (1—9); 2) посылка и заключение содержат знак $\vdash$ (10—15); 3) только посылка содержит знак $\vdash$ (16). Последняя аксиома, как увидим, имеет особенность и с точки зрения функциональной ее интерпретации.

Определение логически истинной формулы в S^1 содержит, как видим, правила вывода новых логически истинных формул из аксиом (пункты 2—4). Мы намеренно не употребляем здесь термин «правило вывода», поскольку логически истинные формулы с точки зрения их содержания суть сами правила вывода. Они суть правила вывода в отношении к конкретным или содержательным (с постоянными высказываниями) рассуждениям. Точное определение термина «правило вывода», о котором говорилось во второй главе, может быть теперь дано следующим образом: логически истинная формула в S^1 есть правило вывода. Это определение не абсолютно, поскольку возможны другие системы, описывающие свойства $\vdash$, и не полно, поскольку система S^1 не исчерпывает (это мы покажем ниже) всех правил вывода.

Принятие аксиомы $(x \vdash y)\, x \vdash y$ вместо пункта 2 определения логически истинной формулы было бы нецелесообразно, поскольку само выражение $x \vdash y$ означает, что из x выводится y. Выражение же «Из высказывания «(Из x выводится y) и x» выводится y» лишено смысла. Кроме того, оно не дает права считать y логически истинной, если логически истинны $x \vdash y$ и x. Признание же $(x \vdash y)\, x \vdash y$ в качестве аксиомы наряду с пунктом 2 излишне. В самом деле, пусть $*((x \vdash y)\, x \vdash y)$ и $*((x \vdash y)\, x)$; тогда $*(y)$ согласно пункту 2; но $*((x \vdash y)\, x)$, значит $*(x \vdash y)$ и $*(x)$, значит $*(y)$ и без $*((x \vdash y)\, x \vdash y)$.

Использование формул $*(x)$ в познании, как уже отмечалось, можно представить в виде подстановки постоянных высказываний на место переменных в $*(x)$. Высказывание $A \vdash B$ истинно, если его можно рассматривать как результат такой подстановки в $*(x \vdash y)$. Как видим, отличие истинности высказываний типа $A \vdash B$ от логической истинности формул состоит лишь в том, что осуществляется подстановка постоянных высказываний (в случае же логической истинности подставляются переменные высказывания и образованные из них и логических знаков формулы). Мы не указали в четвертом пункте определения логически истинной формулы подстановку постоянных, поскольку фактически здесь дело не сводится лишь к одной подстановке: здесь еще требуется работа по выявлению структур высказываний, по выяснению точного смысла ряда терминов, по установлению их тождества и различия и т. д. Короче говоря, сопоставление того или иного содержательного рассуждения с логическими схемами подчас представляет весьма сложный творческий процесс даже в том случае, если это рассуждение не включает в себя какие-либо моменты, не охватываемые логическими системами.

В аксиомах 6—9 и 14 приходится давать формулировки для $x^1 : x^2 : \ldots : x^n$, поскольку для «:» нет сочетательного закона, аналогичного аксиоме 4. Это обстоятельство важно иметь в виду во избежание недоразумений при оперировании аксиомой 15. При определении вхождения в формулу все это было уже оговорено (например, вхождениями в формулу $x : y : z$ являются x, y и z, но не $x : y$, $y : z$, $x : z$). Например, если $x^1 : x^2 \equiv y$, то из этого не следует, что $x^1 : x^2 : z \equiv y : z$; из этого следует лишь то, что $(x^1 : x^2) : z \equiv \equiv y : z$. В общем, скобки в таких случаях можно опускать лишь тогда, когда в результате вывода получаются выражения $((x) : \ldots)$, $((\sim x) : \ldots)$, $((xy) : \ldots)$, $((\sim (xy)) : \ldots)$, $(x^1 : \ldots)$. Например, $((x : y) : z) \sim z \vdash ((x : y))$, где вместо $((x : y))$ можно писать $(x : y)$ или вообще без скобок $x : y$.

Без аксиомы 4 можно обойтись, усложнив запись других аксиом. Например, пятую аксиому придется тогда дополнить формулой для $\sim (x^1 x^2 \ldots x^n)$. Аналогично придется усложнить запись 3, 11, 12 и 13 аксиом: $x^1 x^2 \ldots x^n \equiv \equiv x^2 x^1 \ldots x^n$, $x^1 \ldots x^{n-1} x^n \equiv x^1 \ldots x^n x^{n-1}$ и т. д.; $(x \vdash \vdash y^1 \ldots y^n)(x \vdash z) \vdash (x \vdash y^1 \ldots y^n z)$ и т. д.; придется также внести корректив в определение вхождения.

Без аксиомы 15 можно точно так же обойтись, если все аксиомы 1 — 9 сформулировать так: если одна из формул z^1 и z^2 образуется из другой путем замены вхождения x на xx, x на $\sim\sim x$, xy на yx и т. д., то $z^1 \equiv z^2$. Аксиому 15 можно разложить, перечислив все возможные случаи: $(x \equiv y) \vdash (xz \vdash yz)$, $(x \equiv y) \vdash (\sim (xz) \vdash \sim (yz))$, $(x \equiv y) \vdash \vdash (x : z \vdash y : z)$, $(x \equiv y) \vdash (\sim (x : z) \vdash \sim (y : z))$ и т. д. Это удобно с некоторых точек зрения (например, при исследовании свойств системы), но громоздко. Можно принять аксиому $z^1 (x \equiv y) \vdash z^2$ и $x (z^1 \equiv z^2) \vdash y$. В таком случае, если $* (x \equiv y)$, то $z^1 > z^2$ (или $* (x \equiv y) > (z^1 > z^2)$), и если $* (z^1 \equiv \equiv z^2)$, то $x > y$ (или $* (z^1 \equiv z^2) > (x > y)$).

Вместо аксиомы 15 можно принять дополнительный пункт в определении логически истинной формулы (правило 4*): если $* (x \equiv y)$ и одна из z^1 и z^2 образуется из другой путем замены вхождения x на y (или y на x), то $* (z^1 \equiv \equiv z^2)$; аналогично для перехода от $* (z^1 \equiv z^2)$ к $* (x \equiv y)$. Вообще-то говоря, достаточно принять «Если $* (x \equiv y)$, то $* (z^1 \vdash z^2)$», поскольку этого достаточно для того, чтобы вывести правило для $*(z^1 \equiv z^2)$; аналогично достаточно «Если $*(z^1 \equiv z^2)$, то $*(x \vdash y)$» (см. ниже S^2). Если в системе вместо «$\equiv$» фигурирует «$=$» (см. ниже S^3), то соответственно меняется и 4*. Положение «Если $*(z^1 \equiv z^2)$, то $*(x \equiv y)$» в правиле 4* (как и соответствующую часть в аксиоме 15) можно исключить, поскольку практически им не приходится пользоваться при выводе следствий из аксиом. Однако интуитивно оно вполне законно: если два высказывания z^1 и z^2 тождественны по содержанию (говорят об одном и том же), то их части x и y (одно из z^1 и z^2 можно получить из другого, заменив одно из x и y на другое) точно так же тождественны.

Аксиомы 12 и 13 можно заменить на одну аксиому $xy \vdash x$. Замена эта не эквивалентна. Если исключить аксиому 13, то не выводится, например, формула $(x^1 \vdash y^1)(x^2 \vdash y^2) \vdash (x^1x^2 \vdash y^1y^2)$, выводимая при наличии ее. Но при этом выводится $(x^1 \vdash y^1) \cdot (x^2 \vdash y^2) > (x^1x^2 \vdash y^1y^2)$. Так что если для каких-либо целей система без аксиом 12 и 13 (с одной $xy \vdash x$) удобнее, то недостатки ее вполне компенсируются тем, что $*((x \vdash yz) > (x \vdash y))$, $*((x \vdash y) > (xz \vdash y))$.

Аксиому 16 можно заменить двумя аксиомами $\sim(x \sim x)$ и $(x \vdash y) \sim y \vdash \sim x$. Последнюю можно рассматривать как элемент аксиомы 14: $(x \vdash y) \sim y \vdash (x \vdash)$. При этом знак $x \vdash$ истолковывается как $\sim x$. Впрочем, такая замена не будет эквивалентной: в S^1 выводится $\sim(x \sim x)$, но не выводится $(x \vdash y) \sim y \vdash \sim x$; вместо нее выводится $(x \vdash y) \cdot \sim y > \sim x$, что более соответствует структуре косвенного доказательства. Впрочем, это принципиального значения не имеет.

Возможно формулы $\sim(x \sim x)$, $\sim(x \sim xy)$, $(x \vdash y \sim y) \vdash \sim x$ и т. д. вообще исключить из систем S, рассматривая их как результат расширения S при построении особых разделов общей теории вывода. В частности, при переходе к тому разделу общей теории вывода, который изучает формулы без знака $\vdash$, можно в число логически истинных формул включить формулы такого рода как определяющие сам класс формул без $\vdash$.

Аксиома 14 не обладает такой очевидностью, как $(x:y) \cdot \sim x \vdash y$, $(x^1 : x^2 : \ldots : x^n) \sim x^1 \vdash x^2 : \ldots : x^n$. Но она позволяет эти положения вывести; кроме того, она позволяет исключать отрицаемые дизъюнктивные члены, не прибегая к «парадоксальному» положению $x \vdash y$, где $*(y)$. Например, имеем формулу $*((xy : \sim x \sim y)\, x \vdash xy : x \sim x \sim y)$; чтобы исключить $x \sim x \sim y$ без аксиомы 14, пришлось бы принять $x \vdash y$, где $*(y)$, благодаря чему $*((xy : x \sim x \sim y) \vdash \vdash (xy : x \sim x \sim y) \cdot \sim (x \sim x \sim y))$, $*((xy : x \sim x \sim y) \vdash xy)$, $*((xy : \sim x \sim y)\, x \vdash y)$; тогда как благодаря аксиоме 14 имеем $*(((xy : \sim x \sim y)\, x \vdash xy : x \sim x \sim y) \sim (x \sim x \sim y) \vdash \vdash ((xy : \sim x \sim y)\, x \vdash xy))$, $*((xy : \sim x \sim y)\, x \vdash y)$.

Аксиома 12 удобнее, чем $xy \vdash x$ и $xy \vdash y$: она позволяет вывести последние; кроме того, она сокращает выводы. Вместо $(x \vdash yz) \vdash (x \vdash y)$ и $xy \equiv yx$ (так же как и вместо $xy \vdash x$ и $xy \equiv yx$) можно принять $(x \vdash yz) \vdash (x \vdash y)$ и $(x \vdash yz) \vdash (x \vdash z)$ (или $xy \vdash x$ и $xy \vdash y$).

Относительно аксиомы 14 можно высказать более сильное утверждение, а именно — что она вообще сомнительна с точки зрения интуиции. В самом деле, пусть $x \vdash y : z$. Если y заведомо ложно, то правомерно утверждение «Если истинно x, то истинно z», поскольку при истинном x истинно $y : z$, а при ложном y и истинном $y : z$ истинно z. Но это не означает $(x \vdash y : z) \sim y \vdash (x \vdash z)$. Так что ближе к интуиции будет аксиома 14 в таком виде: $(x : y) \sim x \vdash y$, $(x^1 : x^2 : \ldots : x^n) \sim x^1 \vdash (x^2 : \ldots : x^n)$, $z^1 \sim x^1 \vdash z^2$, где z^1 есть формула $x^1 : x^2 : \ldots : x^n$, в которой как-то расставлены скобки, а z^2 образуется из z^1 путем исключения (зачеркивания) x^1; вместо $z^1 \sim x^1 \vdash z^2$ можно принять формулу $(\ldots (x^i : : x^k : \ldots) : \ldots) \sim x^i \vdash (\ldots (x^k : \ldots) : \ldots)$.

Мы не предлагаем ту или иную систему как единственно приемлемую с точки зрения интуиции, как наиболее близкую к последней. Для нас, повторяем, важно констатировать возможность различного рода логических систем, объединяемых их познавательной ролью. И если кому-либо наиболее подходящей покажется логическая система, аксиомы которой содержат лишь один знак $\vdash$ (x и y в $x \vdash y$ не содержат знак $\vdash$), то никаких гносеологических возражений против этого не может быть. В системе такого рода, очевидно, некоторым аксиомам S^1 будут соответствовать более «простые» аксиомы $xy \vdash x$, $(x : y) \sim x \vdash y$ и т. п. или правила вывода «Если $*(x \vdash y)$ и $*(y \vdash z)$, то $*(x \vdash z)$», «Если $*(x \vdash yz)$, то $*(x \vdash y)$» и т. п.

Система S^1, как и вообще любая система такого типа, дает описание не только отдельных шагов рассуждений, но и рассуждений в целом (совокупности таких шагов).

Последнее достигается за счет учета положений «Если $x \vdash y$ и $y \vdash z$, то $x \vdash z$», «Если $x \vdash y$ и $x \vdash z$, то $x \vdash yz$» и т. п. Этот учет осуществляется путем принятия соответствующих аксиом или правил вывода — особых пунктов в определении логически истинной формулы. Мы здесь не рассматриваем вопрос о наиболее удобной графической форме изображения процесса рассуждения. Но можно заметить, что с точки зрения восприятия процесса рассуждения человеком наиболее удобной, пожалуй, является генценовская форма записи (см. [33], [12]).

§ 5. О возможных модификациях S^1 можно говорить много. Мы ограничимся на этот счет тем, что приведем ниже S^2, эквивалентную S^1. Дело в том, что выражение «формула типа $x \equiv y$ не выводится из других аксиом» означает, что не выводится по крайней мере одна из формул вида $x \vdash y$, $y \vdash x$, $\sim x \vdash \sim y$ и $\sim y \vdash \sim x$. Но легко установить, например, что $*(x \vdash x)$, поскольку $*(x \vdash \sim\sim x)$ и $*(\sim\sim x \vdash x)$, $*(x \vdash xx)$, поскольку $*((x \vdash x)(x \vdash x) \vdash (x \vdash xx))$, $*(xy \vdash yx)$, поскольку $*((xy \vdash y)(xy \vdash x) \vdash (xy \vdash yx))$ и т. д. И соответствующие аксиомы остаются аксиомами лишь постольку, поскольку не выводятся $\sim x \vdash \sim(xx)$, $\sim(xy) \vdash \sim(yx)$ и т. п.

Учитывая указанное выше обстоятельство, можно S^1 заменить системой S^2. В последней без изменения остаются аксиомы 4, 9 — 14 и 16. Остальные принимают такой вид (обозначения в аксиомах 7, 8 и 15 те же, что и в S^1): 1) $\sim x \vdash \sim(xx)$; 2) $x \vdash \sim\sim x$, $\sim\sim x \vdash x$; 3) $\sim(xy) \vdash \sim(yx)$; 5) $\sim(xy) \vdash \sim xy : x \sim y : \sim x \sim y$, $\sim xy : x \sim y : \sim x \sim y \vdash \sim(xy)$, $xy \vdash \sim(\sim xy : x \sim y : \sim x \sim y)$; 6) $x : y \vdash y : x$, $x^1 : x^2 : \ldots : x^n \vdash x^2 : x^1 : \ldots : x^n$, $x^1 : \ldots : x^{n-1} : x^n \vdash x^1 : \ldots : x^n : x^{n-1}$, $x^1 : \ldots : x^k : x^{k+1} : \ldots : x^n \vdash x^1 : \ldots : x^{k+1} : x^k : \ldots : x^n$; 7) $\sim(x : y) \vdash \sim(x \sim y : \sim xy)$, $\sim(x^1 : x^2 : \ldots : x^n) \vdash \sim(y^1 : y^2 : \ldots : y^n)$, $x \sim y : \sim xy \vdash x : y$, $y^1 : y^2 : \ldots : y^n \vdash x^1 : x^2 : \ldots : x^n$; 8) $\sim(x : y) \vdash xy : \sim x \sim y$, $\sim(x^1 : x^2 : \ldots : x^n) \vdash z^1 : z^2 : \ldots : z^{2^n - n}$, $xy : \sim x \sim y \vdash \sim(x : y)$, $z^1 : z^2 : \ldots : z^{2^n - n} \vdash \sim(x^1 : x^2 : \ldots : x^n)$, $x : y \vdash \sim(xy : \sim x \sim y)$, $x^1 : x^2 : \ldots : x^n \vdash \sim(z^1 : z^2 : \ldots : z^{2^n - n})$; 15) $(x \equiv y) \vdash (z^1 \vdash z^2)(\sim z^1 \vdash \sim z^2)$, $(z^1 \equiv z^2), \vdash (x \vdash y)(\sim x \vdash \sim y)$.

Доказательство эквивалентности S^1 и S^2 проблемы не представляет, поскольку доказывается, что перечисляемые ниже формулы логически истинны: $x \vdash x$, $xy \vdash x$, $xx \vdash x$, $\sim (xx) \vdash \sim x$, $x \equiv xx$, $x \equiv \sim\sim x$, $yx \vdash xy$, $\sim (yx) \vdash \sim (xy)$, $xy \equiv yx$, $\sim (\sim xy : x \sim y : \sim x \sim y) \vdash xy$, $\sim (xy) \equiv \sim xy : : x \sim y : \sim x \sim y$, $y : x \vdash x : y$, $\sim (x : y) \vdash \sim (y : x)$, $(x : y) \equiv (y : x)$, $x : y \vdash x \sim y : \sim xy$, $\sim (x \sim y : \sim xy) \vdash \sim (x : y)$, $x : y \equiv \equiv x \sim y : \sim xy$, $\sim (xy : \sim x \sim y) \vdash x : y$, $\sim (x : y) \equiv (xy : : \sim x \sim y)$, $(x \equiv y) \vdash (z^2 \vdash z^1)$ и т. д.

Рассмотрение формул, выводимых в S^2 (и S^1), не входит в нашу задачу. Ограничимся здесь тем, что приведем ряд примеров логически истинных (выводимых) формул, важных для общей характеристики системы: $\sim (x \sim x)$, $\sim (x \sim xy)$, $x : \sim x$, $\sim (x : x)$, $\sim (x : x : \ldots : x)$, $xy : \sim xy : x \cdot \sim y : \sim x \sim y$, $(x : y) \sim x \vdash y$, $(x^1 : x^2 : \ldots : x^n) \sim x^1 \vdash x^2 : : \ldots : x^n$, $(x : y)\, x \vdash \sim y$, $\sim (x : y) \sim x \vdash \sim y$, $\sim (x : y : z) \cdot \cdot \sim x \vdash \sim (yz)$, $((x : y) : z) \sim x \vdash y : z$, $(x \vdash (\ldots ((y^1 z : y^2 : \ldots) : : z^{11} : \ldots) : z^{21} : \ldots) \ldots) : z^{n1} : \ldots) \sim y^1 \vdash (x \vdash (\ldots ((y^2 : \ldots) : : z^{11} : \ldots) : z^{21} : \ldots) \quad \ldots) : z^{n1} : \ldots)$, $(x^1 \vdash y^1)(x^2 \vdash y^2) \vdash \vdash (x^1 x^2 \vdash y^1 y^2)$ и т. д.

Еще несколько слов о знаке $>$. Напомним, что $(*(z)) \cdot \cdot (xz \vdash y) \vdash (x > y)$ и $(x \vdash y) \vdash (x > y)$. Из этого определения и аксиом S^1 (S^2) следует, что $*(x > y)$, где $*(y)$. Если $>$ принять как первичный знак, то для него можно построить систему, несколько отличную от S^1 и S^2. В частности, приняв за аксиомы $x > y$, где $*(y)$, и $xy > x$, можно исключить аксиомы 12 и 13, а вместо аксиомы 14 принять аксиому $(x : y) \sim x > y$ и $(x^1 : x^2 : \ldots : x^n) \sim x^1 > x^2 : \ldots : x^n$, более явно описывающую свойство «:».

Данное определение $x > y$ нетождественно с определением естественной импликации в [40]; там вместо $\vdash$ берется знак строгой импликации, а вместо $*(z)$ — истинное высказывание. Определение $x > y$ совпадает скорее с пониманием вывода, при котором считается, что y выводится из x и некоторой совокупности аксиом (см. [31]).

Помимо $x > y$, где $*(y)$, для $>$ имеют силу и другие «парадоксальные» с точки зрения $\vdash$ формулы, например — $(x \vdash \sim x) > \sim x$ и $(x > \sim x) > \sim x$ (правило приведения к абсурду). Для $\vdash$ такое правило неприемлемо как в форме $(x \vdash \sim x) \vdash \sim x$, так и в форме $(x > \sim x) \vdash \sim x$, поскольку оно не имеет интуитивных оснований. Кроме того, посылка $x \vdash \sim x$ невозможна. Посылка $x > \sim x$ возможна, если $*(\sim x)$. Но тогда $\sim x$ независимо от $(x > \sim x) \vdash \sim x$. В S это «правило» не выводится.

Как уже говорилось, тождество x и y можно понимать как $x = y$, т. е. как $(x \vdash y)(y \vdash x)$. Но если для аксиомы 15 в S^1 и S^2 достаточно $x = y$, то вся система упрощается. Сформулируем S^3, которая будет отличаться от S^1 и S^2 (и их возможных модификаций, указанных в предшествующем параграфе) не только по линии упрощения в связи с заменой «$\equiv$» на «$=$», но и по другим признакам.

Аксиомы S^3 : 1) $\sim(x \sim x)$; 2) $x = \sim\sim x$; 3) $\sim(xy) = = \sim xy : x \sim y : \sim x \sim y$, $\sim(x^1x^2 \ldots x^n) = y^1 : y^2 : \ldots : y^{2^n - 1}$, где $y^1, y^2, \ldots, y^{2^n-1}$ суть все возможные формулы, отличающиеся от $x^1x^2 \ldots x^n$ тем и только тем, что содержат отрицания по крайней мере перед одной из $x^1, x^2, \ldots x^n$ (имеют хотя бы одно из вхождений $\sim x^1, \sim x^2, \ldots, \sim x^n$); между собою они различаются числом и распределением отрицаний; 4) $\sim(x : y) = = xy : \sim x \sim y$, $\sim(x^1 : x^2 : \ldots : x^n) = z^1 : z^2 : \ldots : z^{2^n-n}$, где $z^1, z^2, \ldots, z^{2^n-n}$ те же, что и в аксиоме 8 в S^1; 5) $(x : y)z = = xz : yz$, $(x^1 : x^2 : \ldots : x^n)\, y = x^1y : x^2y : \ldots : x^n y$; 6) $(x \vdash y) \cdot \cdot (y \vdash z) \vdash (x \vdash z)$; 7) $(x^1 \vdash y^1)(x^2 \vdash y^2) \vdash (x^1x^2 \vdash y^1y^2)$; 8) $(x \vdash \vdash yz) \vdash (x \vdash y)$, $(x \vdash yz) \vdash (x \vdash z)$; 9) $(x \vdash y) \sim y \vdash \sim x$; 10) $(x \vdash y^1 : y^2) \sim y^1 \vdash (x \vdash y^2)$, $(x \vdash y^1 : y^2 : \ldots : y^n) \sim y^1 \vdash \vdash (x \vdash y^2 : \ldots : y^n)$, $(x \vdash z^1) \sim y^1 \vdash (x \vdash z^2)$, где z^1 и z^2 те же, что и в аксиоме 14 в S^1; 11) $(x = y) \vdash (z^1 \vdash z^2)$, где z^1, z^2, x и y те же, что в аксиоме 15 в S^1. Определение логически истинной формулы такое же, как в S^1. В S^3 выводятся формулы $x \vdash x$, $x = xx$, $xy = yx$, $x : y = y : x$, $x : y = x \sim y : \sim xy$, $(x : y)\, x \vdash \sim y$ и т. д.

Несколько слов о требовании тождества x и y в аксиоме 11 (соответственно в аксиоме 15 в S^1). Возьмем, например, формулу $(x \vdash z) \vdash ((x : y) \vdash (z : y))$. Будем интерпретировать $x \vdash y$ и $x : y$ соответственно так: $x \vdash y$ ложно тогда и только тогда, когда x истинно и y ложно; $x : y$ истинно, если одно и только одно из x и y истинно, и ложно, если оба x и y истинны или ложны. Легко убедиться в том, что при ложном x, истинном z и истинном y приведенная выше формула ложна. Так что требование одного только $x \vdash z$ недостаточно для замены x на z в данных формулах. Рассуждая с точки зрения интерпретации, для такой замены необходима равнозначность формул. Но для равнозначности x и y достаточно $(x \vdash y)(y \vdash x)$. Что касается знака «$\equiv$», введение его диктуется иными соображениями. Возьмем, например, формулу $(x \equiv y) \vdash \vdash (x : z \vdash y : z)$. Пусть $x = y$ достаточно для замены x на y.

Но $x : z = x \sim z : \sim xz$. Имеем: $(x = y) \vdash (x \sim z : \sim xz \vdash$ $\vdash y \sim z : \sim xz)$. Естественно допустить (если не предполагается аксиома 11 в S^3) также $(\sim x = \sim y) \vdash (y \sim z : \sim xz \vdash$ $\vdash y \sim z : \sim yz)$ или в целом $(x = y)\ (\sim x = \sim y) \vdash (x : z \vdash y : z)$.

Обратимся к рассмотрению некоторых свойств систем типа S. При этом подчеркиваем, что нам важны не столько свойства той или иной S, сколько общие соображения, иллюстрируемые на примере разбираемых систем.

§ 6. Рассмотрим прежде всего вопрос о непротиворечивости S^1 (если S^1 непротиворечива, то тем более непротиворечивы S^2 и S^3). Прибегнем для этого к функциональной интерпретации логических знаков. Рассуждения в рамках этой интерпретации будут лишь иным выражением некоторых возможных содержательных рассуждений по поводу непротиворечивости системы, обладающим достоинствами краткости, простоты и убедительности.

Истинность будем обозначать через 1, ложность — через 0, тот факт, что x истинно — через $x = 1$, тот факт, что x ложно — через $x = 0$. Знаки $\cdot$, $:$ и $\sim$ будем интерпретировать так, как в двухзначной логике определяются конъюнкция, строгая дизъюнкция и отрицание: 1) если $x = 1$, то $\sim x = 0$; если $x = 0$, то $\sim x = 1$; если $\sim x = 1$, то $x = 0$; если $\sim x = 0$, то $x = 1$; 2) $(x^1 \cdot \ldots \cdot x^n) = 1$ тогда, и только тогда, когда $x^1 = 1, \ldots, x^n = 1$ (каждая $x^i = 1$); $(x^1 \cdot \ldots \cdot x^n) = 0$, если хотя бы одна из $x^1, \ldots, x^n$ равна 0; 3) $(x^1 : \ldots : x^n) = 1$ тогда и только тогда, когда одна и только одна из $x^1, \ldots, x^n$ равна 1; $(x^1 : \ldots : x^n) = 0$ в остальных случаях.

Знак $\vdash$ можно интерпретировать различно. Приведем несколько вариантов интерпретации, прежде чем использовать тот или иной из них для решения стоящей задачи. Прежде всего при интерпретации $x \vdash y$, т. е. при определении $(x \vdash y) = 1$ и $(x \vdash y) = 0$, можно учитывать или не учитывать соотношения множеств вхождений формул в x и в y. По этой линии возможны, например, такие варианты. Первый вариант: для того, чтобы было $(x \vdash y) = 1$, необходимо наличие по крайней мере одного общего элемента у множеств вхождений переменных высказываний в формулы x и y; если такого общего элемента нет, то $(x \vdash y) = 0$. С этой точки зрения, например, $(a \vdash \sim (b \sim b)) = 0$, $(a \sim$ $\sim a \vdash b) = 0$, $(a \vdash b : \sim b) = 0$, $(a \vdash (b \vdash b)) = 0$ и т. п. Второй вариант: пусть a есть переменное высказывание, входящее в x; будем говорить, что x зависит от a, если $x=1$ только при $a=1$ или только при $a=0$, и что x не зависит от a, если $x=1$ при $a=1$ и при $a=0$; аналогично для y; чтобы было $(x \vdash y)=1$, x и y должны иметь по крайней мере одно одинаковое вхождение a, от которого зависит y; если такого a нет, то $(x \vdash y)=0$. С этой точки зрения, например $(a \vdash a : \sim a)=0$, $(ab \sim b \vdash \sim (b \sim b))=0$ и т. п., поскольку $(a : \sim a)=1$ при $a=1$ и при $a=0$, $\sim (b \sim b)=1$ при $b=1$ и $b=0$ и т. п. Третий вариант: для того, чтобы $(x \vdash y)=1$, в y не должны входить переменные высказывания, не являющиеся вхождениями в x. Четвертый вариант: на соотношения множеств вхождений переменных высказываний в x и в y ограничений не накладывается.

При интерпретации $x \vdash y$, конечно, учет соотношений множеств вхождений формул в x и в y сам по себе недостаточен, если этот учет важен и осуществляется на самом деле. Необходимо еще установить соотношения x и y с точки зрения их истинности и ложности. По этой линии точно так же возможны различные варианты. Первый вариант: для того, чтобы было $(x \vdash y)=1$, необходимо, чтобы каждое выполнение x было выполнением y (чтобы для каждой комбинации значений истинности входящих в x переменных высказываний, при которой $x=1$, было и $y=1$); $(x \vdash y)=0$, если существует выполнение x, не являющееся выполнением y (если $y=0$ хотя бы при одной комбинации значений истинности входящих в x переменных высказываний, при которой $x=1$).

Выражение «Каждое выполнение x есть выполнение y» можно понимать двояко: 1) существует хотя бы одно выполнение и каждое выполнение x есть выполнение y; 2) нет выполнения x, не являющегося выполнением y; при этом охватываются также случаи, когда вообще не существует выполнения x (всегда $x=0$) и когда невозможно $y=0$. Пусть первое понимание относится к первому варианту. Тогда второе понимание даст второй вариант. С точки зрения первого варианта возможны неверифицируемые формулы $a \sim a \vdash a$, $a \sim a \vdash \sim a$, $a \sim ab \vdash b$ и т. п., поскольку требуется возможность $x=1$. С точки зрения второго варианта они истинны.

Второй вариант совпадает с L-импликацией, так что возможно принять: если всегда $(x \supset y)=1$, то $(x \vdash y)=1$. Но это не есть определение $x \vdash y$ и $*(x \vdash y)$: $*(x \vdash y)$ не совпадает с $*(x \supset y)$. Например, $a \sim a \vdash b$ не является логически истинной. Кроме того, всегда можно наложить ограничение на отношение множеств вхождений в x и y из числа тех, например, о которых говорилось выше, так что получим несовпадение с L-импликацией уже в рамках самой интерпретации.

С точки зрения первого варианта, как отмечалось, возможны неверифицируемые формулы. Частично это затруднение можно преодолеть путем перехода не ко второму, а к третьему варианту, который заключается в следующем: вместо требования существования выполнения x рассматривается допущение выполнения для любой формулы x и его последствия для y. Например, чтобы $a \sim a$ равнялось 1, необходимо $a = 1$ и $\sim a = 1$; таким образом, $(a \sim a \vdash a) = 1$, поскольку при этом условии $a = 1$; аналогично $(a \sim a \vdash \sim a) = 1$, $(a \sim ab \vdash b) = 1$ и т. п. Но этот вариант не всегда годится. Например, с его помощью нельзя верифицировать формулу $(x \vdash y \sim y) \vdash \sim x$.

Ограничения на отношения множеств вхождений в посылку и следствие можно использовать для определения «парадоксальных» формул как формул, не удовлетворяющих им, и убедиться в «непарадоксальности» той или иной логической системы относительно таких определений. Но если формула не является «парадоксальной», из этого не следует, что она приемлема. Для последнего необходима еще определенная упорядоченность вхождений переменных высказываний и принятых логических знаков в посылке и следствии. Функциональная (или адекватная ей) интерпретация формул дает здесь известные средства отбора, но и они должны быть дополнены выходом в «предлогическую» (если можно так выразиться) сферу и построением логических систем типа S на этом уровне.

Обращаем внимание на то, что всякая интерпретация $x \vdash y$ есть лишь средство для решения частных вопросов, относящихся к данной системе, а не некоторая исходная и априори данная предпосылка, с которой должно сообразовываться само конструирование системы. Скорее выбор интерпретации должен сообразовываться с характером системы и исследуемым ее свойством, поскольку сама интерпретация понимается лишь как систематизация содержательного рассуждения. Мы будем пользоваться интерпретацией, объединяющей первый вариант по линии учета соотношения множеств вхождений в x и y и второй вариант по линии соотношения значений истинности x и y.

Проверка $x \vdash y$ согласно принятой интерпретации производится так. Рассматриваем строение x и y; если не находим общего вхождения a, то проверка прекращается: $(x \vdash y) = 0$. Если такое вхождение a имеется, то проверка продолжается. Рассматриваем, далее, x. По видимой структуре ее выясняем (в соответствии с интерпретацией знаков), имеется ли выполнение x. Если такого нет, проверка прекращается: $(x \vdash y) = 1$. Если же имеется выполнение x, то определяется класс выполнений (все возможные комбинации значений истинности переменных, при которых $x = 1$). Для каждого выполнения x выясняем, есть ли оно также и выполнение y. Если находится выполнение x, при котором $y = 0$, то $(x \vdash y) = 0$; если такого нет, то $(x \vdash y) = 1$. Например, $(x : y \vdash x \sim y : \sim xy) = 1$, поскольку $(1 : 0 \vdash 1 \sim 0 : \sim 10) = (1 : 0 \vdash 11 : 00) = (1 \vdash 1 : 0) = (1 \vdash 1) = 1$ и $(0 : 1 \vdash 0 \cdot \sim 1 : \sim 01) = (1 \vdash 1) = 1$. Если для всех выполнений x невозможно $y = 0$, то $(x \vdash y) = 1$.

Возьмем следующее положение: если $*(x \supset y)$ и множества вхождений в x и в y имеют по крайней мере один общий элемент, то $*(x \vdash y)$. При этом $*(x \supset y)$ означает (в отношении к логике высказываний, взятой независимо от S), что $x \supset y$ есть тавтология в функциональном построении и выводимая (доказуемая) формула в аксиоматическом построении логики высказываний. Такое положение допустимо. На основе его из $*(x \supset (y \supset x))$ получаем $*(x \vdash (y \supset x))$, из $*(x \supset (\sim x \supset y)) — *(x \vdash (\sim x \supset y))$, из $*(((x \supset y) \sim y) \supset \supset \sim x) — *((x \supset y) \sim y \vdash \sim x)$ и т. п. Явно «парадоксальные» формулы исключаются, поскольку исключаются случаи, когда x и y не имеют одинаковых вхождений, и поскольку знак $\supset$ только в роли посредника в выводе заменяется на $\vdash$ (сколько бы знаков $\supset$ ни содержалось в данной формуле, согласно рассматриваемому положению только один из них заменяется на $\vdash$).

Возникает вопрос: может быть вообще достаточно рассматриваемого положения для определения класса правил вывода? Не говоря уже о том, что при этом так или иначе потребуется содержательная интерпретация ограниченной логики высказываний для изображения ее как теории вывода, и с формальной точки зрения этот путь неприемлем. Дело в том, что при этом не охватываются формулы $(x \vdash y) \cdot \sim y \vdash \sim x$, $(x \vdash y : z) \sim y \vdash (x \vdash z)$, $(x \vdash y) \cdot (y \vdash z) \vdash (x \vdash z)$ и т. п., которые содержат знак $\vdash$ в посылке и в следствии. Это касается любых ограничений на соотношения множеств вхождений в формулы x и y в формуле $x \vdash y$: эти ограничения сами по себе не дают никаких позитивных предложений насчет приемлемых формул указанного типа, которые нельзя получить путем превращения формул $x \supset y$, удовлетворяющих им, в формулы $x \vdash y$.

Если непротиворечивость понимать в обычном смысле как невыводимость в данной системе формулы $\sim xx$, то S^1, S^2 и S^3 явно непротиворечивы. Формула вида $\sim(x \vdash y)\,(x \vdash y)$ в S^1 не может быть получена, поскольку знак $\sim$ в сочетании с $x \vdash y$ вообще не встречается и не может встретиться: просто такого рода формулы в системе не фигурируют. Можно понимать $\sim(x \vdash y)$ как $\sim *(x \vdash y)$ («$x \vdash y$ не есть логически истинная формула»). Это соответствует пониманию «Из A не выводится B» как «Нет правил, позволяющих из A вывести B» или как «Формула $x \vdash y$, соответствующая $A \vdash B$, не является логически истинной». Но и в этом случае независимо от решения проблемы разрешимости формула не может быть логически истинной и не быть ею. Формула же вида $\sim xx$, где x не содержит знака $\vdash$, исключается аксиомой 16. А это — единственная аксиома, позволяющая получать логически истинные формулы без знака $\vdash$, а именно — $\sim(x \sim x)$, $\sim(x \sim xy)$, $x : \sim x$, $\sim(x : x)$, и т. п.

Системы рассматриваемого типа должны быть непротиворечивы в другом смысле. Систему аксиом типа S^1 (S^2 и т. д.) будем считать непротиворечивой, если в ней не выводится (не является логически истинной) формула $x \vdash y \sim y$ при $x = 1$. Это понимание вполне соответствует интуитивным требованиям к правилам вывода: если исходные посылки истинны, то правила вывода не должны вести к заключениям типа $y \sim y$. Интуитивно принимается более общее требование: правила вывода не должны вести от истинных посылок к ложным заключениям. Мы учтем это требование применительно к S^1 (S^2 и другим системам), введя понятие надежности системы: аксиоматическая система надежна, если в ней не выводится формула $x \vdash y$, в которой $y = 0$ при $x = 1$. Так что если показать, что в S^1 не выводятся ложные согласно принятой интерпретации формулы, то это будет означать выяснение надежности системы. А если система надежна, то она непротиворечива.

Легко убедиться в том, что аксиомы 1—9 системы S^1 истинны в определенном выше смысле. Например, для аксиомы 5 имеем $(\sim(10)\vdash\sim 10:1\sim 0:\sim 1\sim 0)=(1\vdash 0:1:0)=$ $=(1\vdash 1)=1$, $(\sim(01)\vdash\sim 01:0\sim 1:\sim 0\sim 1)=(1\vdash 1)=$ $=1$, $(\sim(00)\vdash\sim 00:0\sim 0:\sim 0\sim 0)=(1\vdash 1)=1$ и т. д. для прочих возможностей. Если $(x\equiv y)=1$, то x и y равнозначны, поскольку для истинности $x\equiv y$ требуется истинность всех $x\vdash y$, $y\vdash x$, $\sim x\vdash\sim y$ и $\sim y\vdash\sim x$.

С прочими аксиомами дело обстоит так. Возьмем аксиому 10 (поскольку наличие общего вхождения в посылку и заключение во всех аксиомах очевидно, об этом говорить вообще больше не будем). Для нее имеем: $((1\vdash 1)(1\vdash 1)\vdash$ $\vdash(1\vdash 1))=1$, $((0\vdash y)(y\vdash z)\vdash(0\vdash z))=((0\vdash y)(y\vdash$ $\vdash z)\vdash 1)=1$, $((1\vdash 0)(0\vdash z)\vdash(1\vdash z))=(0\vdash(1\vdash z))=$ $=1$, $((1\vdash 1)(1\vdash 0)\vdash(1\vdash 0))=(0\vdash 0)=1$. Для аксиомы 11 имеем: $((1\vdash 1)(1\vdash 1)\vdash(1\vdash 11))=(1\vdash 1)=1$, $((1\vdash$ $\vdash 0)(1\vdash 1)\vdash(1\vdash 01))=(0\vdash 0)=1$ и т. д. Для аксиомы 12 имеем: $((1\vdash 11)\vdash(1\vdash 1))=1$, $((1\vdash 10)\vdash(1\vdash 0))=$ $=(0\vdash 0)=1$ и т. д. Для аксиомы 13 имеем: $((1\vdash 1)\vdash$ $\vdash(11\vdash 1))=1$, $((1\vdash 1)\vdash(10\vdash 1))=(1\vdash 1)=1$, $((1\vdash$ $\vdash 0)\vdash(1z\vdash 0))=(0\vdash(1z\vdash 0))=1$ и т. д. Для аксиомы 14 имеем: если $y^1=1$, то $\sim y^1=0$ и, следовательно, вся формула равна 0; если $y^1=0$, то $y^1z:y^2$ и y^2, а значит и $x\vdash y^1z:y^2$ и $x\vdash y^2$ равнозначны (аналогично для $y^1z:$ $:y^2:\ldots:y^n$ и $y^2:\ldots:y^n$), и мы получим $(11\vdash 1)=1$ или $(01\vdash 0)=1$. Для аксиомы 15 имеем: если $(x\equiv y)=1$, то x и y равнозначны; равнозначны и z^1 и z^2, поскольку они различаются только вхождениями x и y. Для аксиомы 16 имеем: $((1\vdash 0)\vdash 0)=(0\vdash 0)=1$, $((0\vdash 0)\vdash 1)=(1\vdash 1)=$ $=1$. Аналогично истинны и формулы $(x\vdash y)\sim y\vdash\sim x$ и $(x\vdash y)\vdash(\sim y\vdash\sim x)$, сходные с аксиомой 16.

Итак, все аксиомы истинны в смысле принятой интерпретации. Используя правила 2—4 (пункты 2—4 определения логически истинной формулы), мы не получим из аксиом ложные формулы. Условимся, что если $*(x)$, то $x=1$. Правило 2: $*(x)$, значит $x=1$; $*(x\vdash y)$ и $x=1$, значит $y=1$. Правило 3: если $*(x)$ и $*(y)$, то $x=1$ и $y=1$, значит и $xy=1$. Логически истинные формулы без знака $\vdash$ истинны в силу сказанного для правила 2. Это — формулы $\sim(x\sim x)$ и $\sim(x\sim xy)$. Истинны и выводимые из них формулы $x:\sim x$, $\sim(x:x)$ и т. п. Правило 4 (правило подстановки): пусть a есть переменное высказывание, на место которого в $*(x\vdash y)$ подставляется формула z; если $*(x\vdash y)$, то $(x\vdash$ $\vdash y)=1$ при любых значениях истинности a; значит и новая формула, полученная в результате подстановки z на место a, истинна. Таким образом, аксиомы истинны, и с помощью правил 2—4 из них невозможно вывести формулу $x \vdash y$, для которой имеется выполнение x, не являющееся выполнением y (для которой $y = 0$ при $x = 1$).

К сказанному надо добавить, что в S^1 (S^2) не выводятся формулы $x \vdash y$, в которых множества вхождений в x и y не имеют общего элемента. В отношении аксиом это очевидно. В отношении правил 3 и 4 точно так же. Что касается правила 2, то несложное рассуждение дает тот же результат. Если $*(y)$ не содержит знак $\vdash$, то наше требование выполнено. Если $*(y)$ содержит знак $\vdash$, то x и y различаются как посылка и заключение аксиом 10, 11, 12, 13, 14 и 15. Возьмем аксиому 10. По условию для вывода $*(x \vdash z)$ требуется $*((x \vdash y)(y \vdash z))$. Но в таком случае $(x \vdash y) = 1$ и $(y \vdash z) = 1$, а по определению x, y и z имеют одинаковое вхождение переменного высказывания, поскольку посылки логически истинны в силу прочих аксиом. Аналогично для аксиом 11—15. В аксиоме 14 исключение y^1z не ведет к исключению общего вхождения. Так как $*((x \vdash y^1z : y^2) \sim y^1)$ и $*(((x \vdash y^1z : y^2) \sim y^1) \vdash (x \vdash y^1z : y^2))$, то $*(x \vdash y^1z : y^2)$. Но последнее может иметь место лишь в силу аксиом 5, 6, 7, 8 и 9, исключение одного из дизъюнктивных членов в которых справа от «$\equiv$» не ведет к исключению общего вхождения для формул слева и справа от этого знака. Таким образом, в S^1 не выводится формула $x \vdash y$, в которой множества вхождений переменных высказываний в x и в y не имеют общего элемента. Следовательно, $x \sim x \vdash y$, $x \vdash y : \sim y$ и т. п. здесь не выводятся. Таким образом, в S^1, S^2 и S^3 не выводятся ложные формулы, системы эти надежны и непротиворечивы.

§ 7. Выше говорилось о том, что в качестве условия истинности $x \vdash y$ можно потребовать, чтобы в y не входили переменные высказывания, не входящие в x. Чтобы удовлетворить этому требованию, надо в S^1 исключить аксиомы 11 и 13, заменив их аксиомой $(x^1 \vdash y^1)(x^2 \vdash y^2) \vdash (x^1x^2 \vdash y^1y^2)$; исключить аксиому 15, сформулировав аксиомы 1—9 в такой форме: $z^1 \equiv z^2$, где z^1 и z^2 различаются тем и только тем, что одна образуется из другой путем замены x на xx, x на $\sim\sim x$ и т. д. Но не обязательно перестраивать систему в угоду интерпретации, можно поступить наоборот. Например, рассмотренные системы надежны, если вместо требования наличия общего вхождения в x и y принять такое:

множество вхождений переменных высказываний во все заключения формулы $x \vdash y$ не содержит элементов, не являющихся элементами множества вхождений переменных высказываний во все посылки этой формулы; при этом выражение «все посылки» охватывает все вхождения в x и в y, которые суть вхождения в формулы, в которых они суть посылки (например, посылками в формуле $(x \vdash y) \vdash (xz \vdash y)$ являются x, $x \vdash y$ и xz); аналогично для выражения «все заключения» (например, заключения в формуле $(xz \vdash y) \vdash$ $\vdash (xzu \vdash y)$ суть y, $xzu \vdash y$ и y).

Использованная в предшествующем параграфе интерпретация $\vdash$ лишь утверждает принятые аксиомы и выводимые из них положения исключительно с точки зрения вопроса о надежности (и непротиворечивости) данного аксиоматического построения. Она позволяет исключить формулы, которые от истинных посылок ведут к ложным следствиям. Но она не эквивалентна S^1, S^2 и S^3; с точки зрения этой интерпретации истинны формулы, не выводимые в S и подчас ошибочные с точки зрения интуиции. Приведем несколько примеров. Так, $((xy \vdash z)\ x \vdash (y \vdash z)) = 1$. Вполне правомерно следующее: если $*\ ((xy \vdash z)\ x)$, то если $*\ (y)$, то $*\ (z)$. Но эта формула означает: из высказывания «(Из xy выводится z) и x» выводится «Из y выводится z». Могла быть такая ситуация: z выводится из xy лишь постольку, поскольку она выводится из x. Так, $AB \vdash B$ истинно; но из A не выводится B, если они не имеют ничего общего по содержанию (см. [2]); пусть дело обстоит именно так; B пусть будет истинно; согласно рассматриваемой формуле $(AB \vdash B) \cdot B \vdash (A \vdash B)$; в соответствии с принципами использования дедукции в познании $A \vdash B$ должно быть верно; но мы всегда можем подобрать пример так, что этого не будет. Пример: Из «Москва — город, и Земля — планета» следует «Земля — планета»; последнее верно; но оно не следует из «Москва — город», хотя согласно рассматриваемой формуле так должно быть. Возьмем, далее, формулу $((x \vdash y) : (x \vdash z)) \vdash (x \vdash y : z)$, которая истинна с точки зрения принятой интерпретации. Но по содержанию ее посылка $(x \vdash y) : (x \vdash z)$ означает, что из x выводится y или из x выводится z, тогда как $x \vdash y : z$ означает, что из x выводится «y или z» (что фиксируемые в высказываниях y и z объекты исключают друг друга). В S^1 эта формула не является логически истинной. Точно так же $((x \vdash y) \sim z \vdash (x \vdash y{:}z)) = 1$, $((x \vdash y) \sim z \vdash$

$\vdash((x{:}z)\vdash y))=1$, $((xy\vdash z)\ \ x\vdash(y\vdash z))=1$, $((x\vdash y)\vdash$ $\vdash(x\vdash y:\sim xz))=1$, $((x\vdash y)\vdash(x\vdash y:\sim yz))=1$, $(xyz\vdash$ $\vdash x{:}(y{:}z))=1$, $(xy\vdash(x\vdash y))=1$ и т. д. удовлетворяют данной выше интерпретации, но не выводятся в S^1 и интуитивно неприемлемы. Так что несовпадение классической логики высказываний и теории вывода касается не только известных «парадоксов», но и множества других положений. Кстати сказать, многие из этих положений вполне приемлемы, если их формулировать как высказывания с «если . . . , то . . . » вместо $\vdash$. Например, «Если (если x и y, то z) и x, то (если y, то z)» вполне приемлемо как высказывание о связи объектов, о которых говорится в x, y и z (см. [6], [7], [8]). Это говорит о том, что множество положений классической логики высказываний, если давать им содержательное толкование, содержит положения самого различного познавательного типа в недифференцированной форме.

Само понятие «парадокса» в теории вывода нельзя считать определенным. Понимание некоторой формулы как «парадоксальной» имеет место тогда, когда интерпретация ее как правила вывода не соответствует интуитивному пониманию вывода, следования. Но это не всегда применимо. Не будет общим и определение «парадоксального» (с точки зрения теории вывода) положения как положения (формулы), ложного согласно интерпретации, обосновывающей систему S. Для определения явно «парадоксальных» положений достаточно ограничения на соотношения множеств вхождений в x и в y в формуле $x\vdash y$.

Ответ на вопрос о том, все ли логически истинные формулы S удовлетворяют требованиям интуиции, может быть лишь такой: все зависит от того, насколько эти требования проанализированы при построении S. Логически строгое доказательство здесь невозможно в силу самой эмпирической базы теории.

Пусть α — множество формул, истинных согласно интерпретации, обосновывающей S; β — множество формул, удовлетворяющих интуиции; γ — множество логически истинных формул в S. Отношение этих множеств во всяком случае таково: $\gamma \in \beta$, $\beta \in \alpha$. Вопрос о возможности совпадения γ и β заведомо неразрешим раз и навсегда. Системы, для которых γ совпадает с α, не известны. Кроме того, еще одно обстоятельство нужно учитывать в связи с интерпретацией систем S.

Мы прибегли к функциональной интерпретации в значительной мере с целью, чтобы показать применимость метода интерпретации для исследования свойств логических систем типа S, если они берутся сами по себе. Но вообще-то говоря, это неправомерно, если их рассматривать как исходный пункт в теории вывода: рассуждения в рамках интерпретации сами должны быть обоснованы и т. д. (сама модель, к которой мы прибегаем, строится на базе предпосылок, выражаемых в S). Здесь нужен иной путь, может быть не столь совершенный, но более простой и достаточно убедительный: анализ самих положений системы как определенных совокупностей знаков.

Вернемся к вопросу о непротиворечивости S^1, S^2, S^3 и т. д.

Если ограничиться только вопросом о невыводимости $x \vdash y \sim y$, то достаточно такого рассуждения (аксиомы частично записываем в знаках переменных высказываний). Согласно S^1 из a выводятся только формулы a, aa, $aa \ldots a$, $\sim\sim a$, $\sim\sim \ldots \sim\sim a$ (четное число $\sim$). Правила вывода позволяют вывести из x лишь формулы типа x, xx, $xx \ldots x$, $\sim\sim x$, $\sim\sim \ldots \sim\sim x$. Другие формулы из x не выводятся. Таким образом, непротиворечивость S^1 в рассматриваемом смысле усматривается из внешней графической формы аксиом и из содержания правил вывода. Аналогично — для S^2 и S^3 и других вариантов. Но будет ли непротиворечивая система надежной? Надежность системы — предпосылка отбора аксиом и правил вывода. Интерпретация системы и выражает эту предпосылку в своеобразной форме, хотя с точки зрения хода познания она означает признание ряда положений очевидными.

Точно так же обстоит дело с вопросом о независимости аксиом. Фактически дело обстоит так (с гносеологической точки зрения): интерпретация, позволяющая показать независимость одной аксиомы от других (невыводимость ее из других), подыскивается уже после того, как проделано некоторое предварительное рассуждение, согласно которому данная формула предположительно (более или менее вероятно) считается не выводимой из других. Но что из себя представляет это рассуждение? Очевидно, это есть попытка вывести данную формулу из других аксиом, кончившаяся неудачей. И в такого рода рассуждениях есть своя убедительность.

Возьмем S^4, которая отличается от S^3 тем, что вместо аксиом 1 и 9 взята аксиома $(x \vdash y \sim y) \vdash \sim x$. В аксиомах 3, 4, 5 и 10 возьмем только простейшие случаи (для сложных имеет силу то же самое). Аксиомы разбиваются на три группы, как и аксиомы S^1. Очевидно, эти группы не зависят друг от друга, поскольку посылки аксиом второй и третьей групп не являются логически истинными, и к ним не применимо второе правило (*modus ponens*): нельзя из формул одной группы получить формулы другой группы. Так что можно ограничиться разбором взаимоотношения аксиом внутри групп, предполагая данными другие. Возьмем $x \vdash \vdash \sim\sim x$. Используя аксиомы второй группы, можно получить лишь $*(xx \vdash \sim\sim x \sim\sim x)$ и $*(xx \vdash \sim\sim x)$. Получить прочие аксиомы первой группы невозможно, в том числе — $\sim\sim x \vdash x$. На базе этих двух аксиом выводятся формулы $x \vdash x$, $xx \vdash x$ и т. п. Но не выводятся другие аксиомы первой группы. Независимость $\sim(xy) \vdash \sim xy : x \sim y : : \sim x \sim y$ от первых двух аксиом очевидна: здесь впервые появляется знак отрицания у формулы с «·». Не зависит от указанных трех аксиом $\sim xy : x \sim y : \sim x \sim y \vdash \sim(xy)$; $\sim(x : y) \vdash xy : \sim x \sim y$ не зависит от предшествующих, поскольку впервые определяет отрицание для формулы с «:». Независимость $xy : \sim x \sim y \vdash \sim(x : y)$ усматривается так: единственный путь прийти от $xy : \sim x \sim y$ к $\sim(x : y)$ — попробовать воспользоваться аксиомой $x \vdash \sim\sim x$; $xy : : \sim x \sim y \vdash \sim\sim(xy : \sim x \sim y)$; $\sim(xy : \sim x \sim y) \vdash xy \sim x \sim y : : \sim(xy) \sim (\sim x \sim y)$. Согласно аксиомам второй и третьей групп получаем $\sim(xy : \sim x \sim y) \vdash x \sim y : \sim xy$; дальнейшее движение прекращается, поскольку для перехода от $x \sim y : \sim xy$ к $\sim\sim(x \sim y : \sim xy)$, а от последней — к $\sim(x \sim y \sim xy : \sim(x \sim y) \sim (\sim xy))$ требуется именно рассматриваемая формула, т. е. требуется $(\sim(x : y) \vdash (xy : : \sim x \sim y))(xy : \sim x \sim y \vdash \sim (x : y))$, чтобы получить $\sim\sim(x \sim y : \sim xy) \vdash \sim(x \sim y \sim xy : \sim(x \sim y) \sim (\sim xy))$. Аксиомы $(x : y)z \vdash xz : yz$ и $xz : yz \vdash (x : y)z$ точно так же не зависят от остальных, поскольку остальные не дают права на такие замены формул (на раскрытие скобок и на вынесение за скобку)

Независимость аксиом второй группы друг от друга усматривается из самой их структуры как нечто достаточно очевидное: все они выполняют совершенно различные функции в выводах, и это видно из самой их графической формы. Аксиома $(x \vdash y \sim y) \vdash \sim x$ единственная в третьей группе. Ее независимость несомненна. Впрочем, легко подобрать интерпретации, подтверждающие сказанное. Для этого можно поступить следующим образом: рассматриваем аксиомы, выделяем их особенности сравнительно с другими и применительно к этой особенности подыскиваем интерпретацию, при которой данная группа аксиом или отдельная аксиома ложны, а остальные истинны, и из истинных не выводятся ложные (о роли интерпретации в таких случаях см., например, [12], [15], [3]).

Интерпретация для доказательства независимости $(x \vdash \vdash y \sim y) \vdash \sim x$: для истинности формулы необходимо, чтобы посылка и заключение имели хотя бы одно общее вхождение, чтобы всегда при истинной посылке было истинно заключение и чтобы истинность посылки была возможна. Если этого нет, то формула ложна. Для рассматриваемой аксиомы истинность $x \vdash y \sim y$ исключается, значит она ложна в такой интерпретации. Все прочие аксиомы истинны. Правила вывода не дают возможности вывести из них ложные формулы (обоснование то же, что и в § 6). В дальнейшем мы просто, без дальнейших доказательств укажем интерпретации, позволяющие установить независимость прочих аксиом.

Достаточно потребовать для истинности $x \vdash y$, чтобы всегда при $x = 0$ было $y = 0$, как обнаруживается назависимость первой и второй групп аксиом. Аксиома $(x = y) \vdash (z^1 \vdash z^2)$ единственная, в которой в заключении возможны вхождения переменных высказываний, отсутствующие в посылке. Для доказательства ее независимости достаточно принять ограничение, согласно которому такая формула ложна. Аксиома $x \vdash \sim \sim x$ единственная, в которой заключение имеет два отрицания. Для нее достаточно принять $\sim \sim x = 0$. Аксиома $\sim \sim x \vdash x$ единственная, в которой посылка имеет два отрицания. Для нее достаточно принять $\sim \sim x = 1$. Аксиома $\sim (xy) \vdash \sim xy{:}x \sim y{:} \sim x \sim y$ единственная, в которой в посылке отрицается xy. Для нее достаточно принять $\sim (xy) = 1$. Для аксиомы $\sim xy{:}x \sim y{:} \sim x \sim y \vdash \sim (xy)$ достаточно принять $\sim (xy) = 0$, для $\sim (x{:}y) \vdash xy{:} \sim x \sim y$ — $\sim (x{:}y) = 1$, для $xy{:} \sim x \sim y \vdash \vdash \sim (x{:}y)$ — $\sim (x{:}y) = 0$, для $(x{:}y)\, z \vdash xz{:}yz$ — $(x{:}y)\, z = 1$, для $xz : yz \vdash (x{:}y)\, z$ — $(x{:}y)\, z = 0$, для $(x \vdash y{:}z) \sim y \vdash (x \vdash z)$ — $(x \vdash y{:}z) \sim y = 1$.

Остались $(x \vdash y)(y \vdash z) \vdash (x \vdash z)$, $(x^1 \vdash y^1)(x^2 \vdash y^2) \vdash$

$\vdash (x^1x^2 \vdash y^1y^2)$, $(x \vdash yz) \vdash (x \vdash y)$, $(x \vdash yz) \vdash (x \vdash z)$. Последние берем в форме $(a \vdash bc) \vdash (a \vdash b)$ и $(a \vdash bc) \vdash (a \vdash c)$. Если принять $bc = c$, сохраняя в остальном интерпретацию § 6, то $((a \vdash bc) \vdash (a \vdash b)) = 0$, прочие же аксиомы остаются истинными. Если принять $bc = b$, ложной будет $(a \vdash bc) \vdash$ $\vdash (a \vdash c)$, а остальные истинны. Независимость $(x \vdash y) \cdot$ $(y \vdash z) \vdash (x \vdash z)$ и $(x^1 \vdash y^1)(x^2 \vdash y^2) \vdash (x^1 x^2 \vdash y^1y^2)$ друг от друга можно установить, приняв ограничение: для первой — чтобы множества вхождений переменных высказываний в посылку и в заключение совпадали (первая ложна, поскольку такого совпадения может и не быть), для второй — чтобы множество таких вхождений в заключение было собственным подмножеством множества таких вхождений в посылку (чтобы в посылке имелось вхождение, отсутствующее в заключении).

§ 8. Проблема полноты в отношении к системам рассматриваемого типа есть прежде всего (если можно так выразиться) проблема интуитивной (или эмпирической) полноты: насколько полно система S описывает интуитивно приемлемые правила вывода. Решение ее тривиально: если имеется перечень положений, которые должны быть охвачены, то вывод этих положений или установление невозможности вывода каких-либо из них в S дает решение проблемы; поскольку интуиция не есть нечто стационарное, раз навсегда установленное, всегда и для всех приемлемое, то решение проблемы в смысле строгого доказательства для интуиции вообще, не определенной перечнем приемлемых положений, исключается. В § 3 на эту тему уже говорилось.

Вопрос о полноте S по отношению к той или иной достаточно четко сформулированной интерпретации (например, к интерпретации $\cdot$, $:$, $\sim$ и $\vdash$ как знаков двузначного или, возможно, n-значного функционального построения) ставится в зависимость от самих S. То, что возможны системы дедуктивно полные (полные относительно данной интерпретации), общеизвестно. Но при построении систем типа S главное — избежать «парадоксальных» положений и охватить приемлемые с точки зрения интуиции. При этом приходится иметь дело с вещами строго не определенными и часто неустойчивыми, во всяком случае — допускающими вариации. Так что в общей форме ответ на вопрос в категорической форме невозможен. Да в нем и нет необходимости в силу самих требований к системам типа S. Рассмотренные выше системы не являются полными относительно данных им интерпретаций.

Но раз имеются формулы, которые не выводятся в S, но которые истинны в данной интерпретации S, то система S не является полной и в том смысле, что присоединение к аксиомам S новой аксиомы может не вести к противоречию. Например, присоединение к любой из рассмотренных S в качестве аксиом $x \vdash x \vee y$ и $y \vdash x \vee y$ к противоречию не ведет, если даже они не вводят новый знак $\vee$ ($x \vee y = = Df.\ xy : \sim xy : x \sim y$), а лишь дополняют описание свойств уже употребляемых. И, пожалуй, неполнота систем типа S есть их достоинство, а не недостаток: класс выводимых в них формул всегда можно расширить (в рамках требования непротиворечивости и гносеологического требования надежности, конечно) в соответствии с теми или иными конкретными задачами, для решения которых эти системы привлекаются.

Проблему разрешимости (то есть выяснение того, относительно всякой ли формулы возможно доказать, что она выводима или не выводима в S) мы оставляем здесь открытой. Ограничимся лишь несколькими замечаниями. Формулы типа $\sim (x \vdash y)$ в системах S у нас не фигурируют и, по нашему мнению, не должны фигурировать. Как уже говорилось, $\sim (x \vdash y)$ в рамках логической теории может означать лишь одно: $x \vdash y$ не есть $*(x \vdash y)$, не есть правило вывода. Таким образом, это есть метавысказывание по отношению к $x \vdash y$. Оно сопоставимо лишь с $*(x \vdash y)$ и фактически должно иметь вид $\sim *(x \vdash y)$. Так что в применении к S вопрос «Выводится x в S или нет?» совпадает с вопросом «Является x $*(x)$ или $\sim *(x)$?».

Прежде всего о формулах без знака $\vdash$. Формулы такого рода, которые не являются тавтологиями при интерпретации $\cdot$, $:$ и $\sim$ соответственно как конъюнкции, исключающей дизъюнкции и отрицания двузначного функционального построения, не выводятся в рассмотренных S, поскольку они надежны. Вместе с тем, будет верно и то, что все тавтологии двузначной логики со знаками $\cdot$, $:$ и $\sim$ (и только с этими знаками) выводятся в S. Доказательство просто. Пусть z есть такая тавтология. В S выводится $x : \sim x$. Значит, $*(z : \sim z)$. Если z не содержит знака «$:$», то z

имеет вид $\sim(x \sim x)$ или $\sim(x \sim xy)$, которые логически истинны. Если z содержит «:», то она имеет вид $x^1 : x^2$, $x^1 : x^2 : \ldots : x^n$, $\sim(x^1 : x^2)$ или $\sim(x^1 : x^2 : \ldots : x^n)$. Пусть z есть $x^1 : x^2 : \ldots : x^n$. Если $(x^1 : x^2 : \ldots : x^n) = 1$, то одна и только одна из $x^1, x^2, \ldots, x^n$ равна 1 (истинна). Но тогда $\sim(x^1 : x^2 : \ldots : x^n) = y^1 : y^2 : \ldots : y^{2^n-1}$ (объяснение $y^1, y^2, \ldots$ смотри в § 4). Согласно аксиоме 4 в S^3 каждая из $y^1, y^2, \ldots$ такова, что $*(\sim y^1)$, $*(\sim y^2), \ldots$. Согласно аксиоме 10 в S^3 имеем $(z : \sim z) \vdash z$. Поскольку $*(z : \sim z)$ и $*(z : \sim z \vdash \vdash z)$, получим $*(z)$. Аналогично для случая, когда z есть $\sim(x^1 : x^2 : \ldots : x^n)$. Здесь $\sim z = (x^1 : x^2 : \ldots : x^n) = = (y^1 : y^2 : \ldots : y^n)$ (объяснение $y^1, y^2, \ldots$ смотри в § 4); $(x^1 : x^2 : \ldots : x^n) = 0$ тогда, когда либо все $x^1, x^2, \ldots, x^n$ равны 0, либо хотя бы две из них равны 1; но в таком случае каждая из $y^1, y^2, \ldots, y^n$ будет равна 0 (поскольку в каждую будет входить хотя бы один ложный конъюнктивный член), причем — всегда равна 0; таким образом $*(\sim y^1)$, $*(\sim y^2), \ldots, *(\sim y^n)$; в рассмотренных S при этих данных имеем $*(\sim(x^1 : x^2 : \ldots : x^n))$, то есть $*(z)$. Для случая $x^1 : x^2$ и $\sim(x^1 : x^2)$ доказано, раз доказано для случая n дизъюнктивных членов.

Таким образом, в системах S выводятся все тавтологии с $\cdot$, : и $\sim$. Выводятся не в том смысле, что S есть перечень тавтологий и правил получения из них новых тавтологий. В этом смысле лишь ограниченный класс тавтологий выводится в S. Они логически истинны в S, то есть если x есть тавтология, то доказывается, что в S имеет место $*(x)$ А тот факт, что x есть тавтология, выясняется не всегда путем вывода x из аксиом, а путем интерпретации (подстановки значений истинности на место переменных высказываний и определения значения истинности x как их функции). Ниже (в следующей главе) мы покажем, каким образом классическая логика высказываний может быть охвачена на базе S иным путем. А теперь перейдем к формулам, содержащим $\vdash$. Здесь дело обстоит иначе.

Если принять во внимание интерпретацию $x \vdash y$, то можно указать ряд случаев, когда $\sim *(x \vdash y)$. Это прежде всего следующий случай, на котором остановимся подробнее: если $x \sim y$, то $\sim *(x \vdash y)$. В некоторых системах это положение фиксируется как аксиома (например, у Аккермана). В качестве правила вывода это имело бы вид $x \sim y \vdash \sim(x \vdash y)$. Мы уже неоднократно говорили о неприемлемости такого рода формул. Здесь добавим еще следующее. Убеждение в правильности положения «Если x и не-y, то из x не выводится y» базируется на следующем: если из x выводится y, то при истинности x должно быть истинно y (гносеологическое требование к дедукции). И раз обнаруживается ложность y, то не может из x выводиться y при истинном x. Но все это относится не к природе вывода как особого действия, а к его гносеологической роли. Так что рассматриваемое положение есть положение о формулах системы S, но не формула системы. Правильнее будет его формулировать так: если x истинно и y ложно, то $\sim *(x \vdash y)$.

Другие случаи, когда можно точно сказать, что $\sim *(x \vdash y)$: если x и y не имеют общего вхождения, то $\sim *(x \vdash y)$; если x не содержит $\vdash$, а y содержит этот знак, то $\sim *(x \vdash y)$; если x содержит $\vdash$, а y не содержит, и $x \vdash y$ не есть формула $(x \vdash z \sim z) \vdash \sim x$ (или не есть формула $(x \vdash y) \sim y \vdash \sim x$ в зависимости от S), то $\sim *(x \vdash y)$. В системе, где вместо $(x \vdash y \sim y) \vdash \sim x$ приняты аксиомы $\sim (x \sim x)$, $\sim (x \sim xy)$ и $(x \vdash y) \vdash (\sim y \vdash \sim x)$, доказывается: если x содержит $\vdash$, а y не содержит, то $\sim *(x \vdash y)$.

Выше мы неоднократно говорили, что та или иная формула не выводится в S. На каком основании мы это делали? Возьмем, например, формулу $(x \vdash y) \sim z \vdash (x \vdash y : z)$. Она удовлетворяет рассмотренной в § 6 интерпретации, но не выводится в S^1, S^2, S^3 и их модификациях. Право на это утверждение дается тем обстоятельством, что в S нет аксиомы, разрешающей переходить от формулы $(x \vdash y) \sim z$ к формуле $x \vdash y : z$, — это усматривается из самой графической структуры аксиом. Возьмем, далее, формулу $(xy \vdash z) \vdash (x \vdash (y \vdash z))$, сходную с теоремой о дедукции. Она точно так же удовлетворяет указанной интерпретации, но не может быть принята с точки зрения интуиции (как и приведенная выше формула). Подставим, например, на место z формулу x. Получим $(xy \vdash x) \vdash (x \vdash (y \vdash x))$. Если бы рассматриваемая формула выводилась в S, то выводилась бы и $x \vdash (y \vdash x)$, которая «парадоксальна». Но она не выводится, и право на это утверждение дается опять-таки такого рода соображением: среди аксиом нет таких, которые позволяли бы из посылки с одним знаком $\vdash$ получать заключение с двумя знаками $\vdash$, в общем — получить из посылки такое заключение, в котором число знаков $\vdash$ больше, чем в посылке. Так что по крайней мере в отдельных случаях по виду формулы можно судить о возможности или невозможности ее вывода из аксиом S.

Кроме того, можно воспользоваться положениями об отношении знаков следования и материальной импликации. Но всё это не решает проблемы в целом. Возможно, что она вообще не имеет значения: системы рассматриваемого здесь типа дают лишь отправной пункт к теории вывода, и в силу этого к ним преждевременно подходить с меркой, выработанной для логических систем более высокого уровня (для логических систем, которые по идее должны строиться на их основе).

Надо сказать, что если уже непременно система S должна быть полна относительно некоторой интерпретации или даже равносильна ей, то вполне правомерен следующий путь. Пусть дана S, удовлетворяющая условиям: 1) все $*(x \vdash y)$ при интерпретации их как $x \supset y$ суть тавтологии; при этом в y нет вхождений переменных высказываний, отсутствующих в x; в S логически истинны все тавтологии с логическими знаками, аналогичными знакам классической алгебры высказываний (в данном случае — со знаками $\cdot$, $:$ и $\sim$). Выше мы видели, что такие системы возможны. Примем следующее дополнение к S: если $*(xy : \sim x \sim y : \sim xy)$ и в y нет вхождений переменных высказываний, отсутствующих в x, то $*(x \vdash y)$ (формула $xy : \sim x \sim y : \sim xy$ соответствует $x \supset y$, но мы пишем именно ее, так как знак $\supset$ в рассмотренных S не употребляется). В расширенной таким образом S каждой тавтологии классической алгебры высказываний, имеющей вид $x \supset y$ и удовлетворяющей приведенному ограничению на отношение множеств вхождений переменных высказываний в x и в y, соответствует $*(x \vdash y)$. Если $x \supset y$ не есть тавтология или (не исключающее «или») не удовлетворяет данному ограничению, то $x \vdash y$ не является логически истинной в S. Такая S полна относительной данной интерпретации, более того — равносильна ей. Конечно, в ней фигурирует неформализуемое утверждение о соотношении структур формул (см. дополнение к S). Но оно практически удобно — удобнее и проще других форм интерпретации. Например, если $*((x : y) z \supset xz : y)$, то одного взгляда на эту формулу достаточно, чтобы признать $*((x : y) z \vdash xz : y)$.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ВЫВОДА

§ 1. Согласно определению общей теории вывода, данному в первой главе, в ней должны быть охвачены всевозможные правила вывода, не зависящие от строения элементарных высказываний. Другими словами, для формулировки этих правил не требуется расчленять высказывания на части, которые сами уже не являются высказываниями, — не требуется выделять в высказываниях субъекты, предикаты, кванторы, модальные знаки и т. п. Вряд ли возможно дать исчерпывающую классификацию такого рода правил и полный перечень направлений их систематического изучения. Ниже мы в общей форме охарактеризуем лишь некоторые из этих направлений.

В общей теории вывода, говорилось выше, не принимается во внимание строение элементарных высказываний. Это не следует понимать так, будто строение элементарных высказываний может вообще оставаться неизвестным. От него происходит отвлечение. Но с точки зрения правильности построения логики надо знать, что̀ такое высказывание, прежде чем изучать операции с высказываниями. Понятие же о высказывании должно быть введено путем ряда абстракций, базирующихся на анализе строения эмпирически данных предложений и сравнении их (см. об этом [10]), т. е. путем выявления именно строения элементарных высказываний прежде всего.

Если в общей теории вывода не принимается во внимание строение элементарных высказываний, то почему в ней учитывается отрицание, которое явно есть элемент структуры высказываний («Не все a имеют свойство P», «Предмет a **не имеет свойства** P» и т. п.)? В функциональных построениях логики высказываний на этот счет никаких затруднений нет: если x означает «x истинно (ложно)», то $\sim x$ означает «x ложно (истинно)». В аксиоматических построениях, соотносимых с ними, это оправдание принимается как предпосылка для интерпретации. Но как быть в таком случае с системами типа S?

Можно, конечно, пойти по пути построения систем без отрицания (подобно позитивным системам в логике высказываний; см. [34], [12], [21]). Но в таком случае знаки «$\cdot$» и «$:$» не получат полного описания: выпадают формулы $(x : y) = (x \sim y : \sim xy)$, $(x : y)\, x \vdash \sim y$, $(x \vdash y) \sim y \vdash \sim x$ и т. п. Так что отрицание так или иначе где-то должно быть введено.

Но главное не в этом. Дело в том, что отрицание, фигурирующее в S, и отрицание как часть элементарных высказываний не одно и то же. Первое предполагает существование второго (точнее, вторых), но оно не есть часть элементарных высказываний. Оно внешне по отношению к ним: $\sim x$ означает «Не так, как говорится в x», именно «не - x». Оно может в том или ином случае совпасть с отрицанием принадлежности свойства предмету, с отрицанием квантора, с утверждением принадлежности противоположного свойства предмету и т. п., но оно выступает как нечто общее для них и, вместе с тем, самостоятельное по отношению к ним. Это обстоятельство еще раз подчеркивает, что построение общей теории вывода есть результат высокой степени абстрактности логического исследования, с которой считается именно эмпирический подход, как бы это ни казалось парадоксальным на первый взгляд.

§ 2. Общая теория вывода должна складываться прежде всего из совокупности систем типа S (включая совокупность следствий из каждой S) и из исследований их свойств и взаимоотношений.

Мы говорим о совокупности систем S, а не об одной какой-либо S, по следующей причине (частично об этом уже говорилось выше в несколько иной связи). Система S должна охватывать некоторую данную совокупность интуитивно приемлемых правил вывода: в ней должны быть логически истинны формулы, соответствующие этим правилам вывода. Система S, далее, должна исключать «парадоксальные», с точки зрения интуиции, положения: в ней не должны быть логически истинными формулы, соответствующие этим положениям. Но классы интуитивно приемлемых и интуитивно исключаемых (неприемлемых) положений не могут быть точно определены без построения S. Они не могут быть точно определены без S хотя бы уже потому, что интуиция охватывает всегда лишь конечное множество положений, тогда как число возможных следствий из них в принципе не ограничено. Но попытка определить (охватить в определении) бесконечное множество положений путем ссылки на возможность вывода следствий из некоторого конечного множества положений и означает, если ее выразить явно, построение S. Так что интуиция дает ориентацию для построения S, но не определяет абсолютно все ее свойства. Построение S само есть выявление, уточнение и т. п. интуиции, а это может быть выполнено различно даже в том случае, если указанные выше классы положений заданы. Заданы же они могут быть различно. Отсюда — возможность разнообразных вариаций S. Кроме того, при построении той или иной системы могут связывать ее с определенной интерпретацией. Поскольку интерпретации, как мы видели, допустимы различные, и они могут влиять на характер системы, то последние будут, естественно, различаться.

Возьмем, далее, формулы $(x \vdash y) \vdash (x \vdash y : \sim xz)$, $(x \vdash y) \vdash (x \vdash y : \sim yz)$, $(x \vdash y) \sim z \vdash (x \vdash y : z)$ и т. п. Если не требовать, чтобы в заключении не было вхождений переменных высказываний, отсутствующих в посылке, то лишь анализ их содержания дает основания для исключения их из числа приемлемых (эти формулы непротиворечивы). Анализ их содержания препятствует признанию их общезначимыми правилами вывода. В этом легко убедиться, взяв конкретный пример с постоянными высказываниями на месте переменных. Но это не мешает тому, чтобы признать такого рода формулы логически истинными с точки зрения некоторой системы, удовлетворяющей определенным условиям познания. В рассмотренном случае система будет не просто вариантом в рамках интуитивно несомненных положений, но системой, выходящей за эти рамки и допускаемой для каких-то условий познания (для особого рода высказываний).

Построение систем такого типа и исследование их свойств и отношений составляет второй источник разработки общей теории вывода. По всей вероятности системы люисовского, аккермановского и т. п. типа можно в какой-то мере рассматривать как системы такого типа (с другой стороны, их можно рассматривать как ограничения логики высказываний). Этот вопрос мы здесь оставляем без внимания.

Сделаем несколько дополнительных замечаний о свойствах систем S. Обычно понятие вывода определяется так: формула y выводится (выводима) из формул $x^1, \ldots, x^n$, если ее можно получить посредством некоторых правил (указываются правила), приняв за исходные формулы $x^1, \ldots, x^n$ и аксиомы некоторого построения (указываются также). Такое понимание изложено, например, в [12], [15] и т. д. Мы рассматриваем вывод в общем виде: высказывание B выводится из высказывания A (A и B могут быть сложными совокупностями высказываний, образующими сложные высказывания), если B может быть по каким-то правилам получено из A. В системах S и рассматриваются такие правила. Поскольку сами S являются аксиоматическими, применительно к ним самим приходится говорить о выводе в узком смысле слова (определение логически истинной формулы). Но здесь не это интересно. Важна следующая проблема: почему среди логически истинных формул системы S нет правил (положений), которые обычно указываются в качестве правил вывода в системах (правил вывода в узком смысле слова)? Например, почему в числе логически истинных формул не фигурирует «правило заключения» $x \supset y$, x/y, правило подстановки и т. д.?

Что касается $x \supset y$, x/y, то в S логически истинна формула $(xy : \sim xy : \sim x \sim y)\, x \vdash y$; и если $x \supset y = Df. xy : \sim xy : \sim x \sim y$, то $*((x \supset y)\, x \vdash y)$. Но эта формула не тождественна с положением $x \supset y$, x/y. Последнее выполняет еще одну функцию, которую мы лучше поясним ниже на положении $x \vdash y$, x/y.

Возьмем пункт второй определения логически истинной формулы в S: если $*(x \vdash y)$ и $*(x)$, то $*(y)$. Это положение не включается в число аксиом потому, что оно есть метаположение по отношению к $x \vdash y$, x, y и вообще ко всем аксиомам и выводимым из них положениям. Оно содержит термины (знаки), которые не входят в состав формул S, это — знаки $*$ («логически истинно»). И если мы запишем его в форме $x \vdash y$, x/y (или y запишем под $x \vdash y$ и x, разделив их горизонтальной чертой), мы в другой форме сделаем то же самое: обозначим, что это есть положение иного семантического уровня, чем фигурирующие в нем формулы. Положения $*(x \vdash y)$, $*(x)$, $*(y)$, «Если $*(x \vdash y)$ и $*(x)$, то $*(y)$» и $x \vdash y$, x/y не являются формулами системы S.

Среди правил вывода и не может фигурировать рассматриваемое положение. В познании действительно признается: если $A \vdash B$ и A истинно, то B истинно. Но это не есть правило вывода B из A. Как неоднократно отмечалось, это есть познавательное свойство всех правил вывода, описываемое с помощью семантических понятий. Аналогично обстоит дело с правилом подстановки и правилом «Если $*(x)$ и $*(y)$, то $*(xy)$».

Обозначим через $x(a; z)\, y$ то, что формула y образуется из формулы x путем подстановки z на место всех вхождений a в x. Правила вывода S можно записать в такой форме: 1)$*(x \vdash y) \cdot *(x) \vdash *(y)$; 2)$*(x) \cdot x(a; z)\, y \vdash *(y)$; 3)$*(x) \cdot *(y) \vdash *(xy)$. Поскольку знаки «$\cdot$» и $\vdash$ входят в состав формул $x, y, z, x \vdash y$ и т. д., мы вместо них пользовались обычными «и» и «если ..., то...». Из приведенной записи видно, что устранение знака «$*$», необходимое для превращения этих правил в аксиомы, сделало бы излишним третье из них, ошибочным второе и бессмысленным первое.

Третье правило можно устранить из системы двумя путями: 1) признать «парадоксальную» формулу $x \vdash y$, где $*(y)$, за логически истинную (тогда если $*(y)$, то $x \vdash y$, $x \vdash xy$; если $*(x)$, то $*(xy)$ согласно первому правилу); 2) если для описания рассуждений достаточно знака $>$ и принято для него правило $*(x > y) \cdot *(x) > *(y)$, то третье правило излишне ($xy \vdash xy$; если $*(x)$, то $y > xy$; если $*(y)$, то $*(xy)$); но система с $>$ «парадоксальна», если она берется как самостоятельная система, а не как фрагмент в системе S.

Правило 4* со знаком «$=$» можно записать в такой форме: $*(x = y) \cdot z^1(x; y)\, z^2 \vdash *(z^1 \vdash z^2)$, $*(x = y) \cdot z^2(x; y) z^1 \vdash$ $\vdash *(z^1 \vdash z^2)$, $*(x = y) \cdot z^1(y; x)\, z^2 \vdash *(z^1 \vdash z^2)$, $*(x = y) \cdot$ $\cdot z^2(y; x) z^1 \vdash *(z^1 \vdash z^2)$, где $z^1(x; y)\, z^2$ означает, что z^2 образуется из z^1 путем замены x на y и т. д. для прочих случаев.

Перевод правила подстановки в число аксиом исключен, потому что аксиома должна принять вид (если исключить $*) x \vdash y$, где y образуется из x путем подстановки на место всех вхождений a в x формулы z. Но это неверно: пусть, например, x есть a; в таком случае должно быть верно $a \vdash y$, где z — любая формула; но $(a \vdash y) = 0$ с точки зрения интерпретации и неприемлемо с точки зрения интуиции. Указанное положение приемлемо только в том случае, если $*(x) : *(x) \cdot x(a; z)\, y \vdash *(x \vdash y)$. И тогда легко вывести $*(x) \cdot x(a; z)\, y \vdash *(y)$. Но это — метаутверждение по отношению к формулам системы.

Третий пункт определения логически истинной формулы (здесь — третье правило $*(x) \cdot *(y) \vdash *(xy)$) означает также переход от содержательного «и» к употребляемому в логической системе «$\cdot$». Часто этот переход записывают в форме $x, y \vdash xy$ или $x, y \vdash x \& y$, в которой не ликвидируется его отличие от формул системы.

В общем можно сказать, что для систем S имеется предел в превращениях аксиом и правил вывода друг в друга: аксиомы в принципе все могут быть превращены в схемы вывода, аналогичные правилам вывода в системах с аксиомами, но правила вывода не все могут быть превращены в аксиомы (заменены адекватными аксиомами) по изложенным выше причинам.

Система S (обобщая сказанное в § 2) складывается из объектной и метаобъектной частей (будем так говорить). В первую включаются употребляемые простые символы и конструируемые из них формулы (сложные символы). Во вторую включаются определения значений и роли символов, некоторые правила оперирования ими, определения формулы и логически истинной формулы. Исходные утверждения в S соответственно расчленяются также на две группы: 1) некоторое конечное число логических истинных формул, называемых аксиомами; 2) некоторое конечное число положений, входящих в определение логически истинной формулы и используемых в качестве правил получения новых логически истинных формул из аксиом; эти положения, как уже говорилось, не являются формулами S, они суть положения метаобъектной части S. Очевидно, и следствия из исходных положений разделяются на две группы: 1) логически истинные формулы и 2) метавысказывания о формулах. В метаобъектной части S речь может идти и о формулах, не являющихся логически истинными. Например, $\sim *(a \vdash b)$ истинно как метавысказывание по отношению к $a \vdash b$.

Метаобъектная часть S не может быть исключена без разрушения S. Она может быть выражена неявно. Например, вместо определения логически истинной формулы можно принять просто правила получения новых формул из аксиом. Но так или иначе остается осознание ряда последовательностей знаков как формул, ряда формул как аксиом, а других формул — как следствий из них и т. д., что и фиксируется в метаобъектной части S. Последняя необходима как показатель активности исследователя при конструировании системы и использовании ее.

Вывод следствий в метаобъектной части S совершается на основе привычных правил рассуждений, которые описаны в объектной части S. Например, $*(x) \cdot x(a^1; z^1)\, y^1 \vdash *(y^1), *(y^1) \cdot y^1 (a^2; z^2)\, y^2 \vdash *(y^2), \ldots, *(y^{n-1}) \cdot y^{n-1}(a^n; z^n)\, y^n \vdash *(y^n)$; в общем, $*(x) \cdot x(a^1, \ldots, a^n;\ z^1, \ldots, z^n)\, y^n \vdash *(y^n)$.

При выводе следствий в объектной части S могут быть использованы содержательные рассуждения. Возьмем, например, формулу $x^1 : x^2 : \ldots : x^{2^n}$, в которой x^1 есть формула типа y^1y^2, $y^1y^2y^3$, $y^1y^2y^3y^4$, в общем — $y^1 \cdot \ldots \cdot y^n$, а остальные $x^2, \ldots, x^{2^n}$ суть всевозможные формулы, отличающиеся от x^1 только тем, что по крайней мере перед одной из $y^1, \ldots, y^n$ стоит отрицание. Это — формула $xy : {\sim} xy : x \sim y : \sim x \sim y$, $xyz : xy \sim z : x \sim yz : \sim xyz : x \sim y \sim z : \sim xy \sim z : \sim x \sim yz : \sim x \sim y \sim z$ и т. п. Она логически истинна. Путь доказательства этого положения таков: $*\ ((x^1 : x^2 : \ldots : x^{2^n}) : \sim (x^1 : x^2 : \ldots : x^{2^n}))$; $\sim (x^1 : x^2 : \ldots : x^{2^n}) = z^1 : \ldots : z^m$; $*(\sim z^1), \ldots, *(\sim z^m)$; $*(x^1 : x^2 : \ldots : x^{2^n})$. Возьмем, далее, формулу $u^1 : \ldots : u^s$, которая отличается от $x^1 : x^2 : \ldots : x^{2^n}$ только тем, что в последней расставлены скобки, — $(xy : \sim xy) : x \sim y : \sim x \sim y$, $(xy : \sim xy) : (x \sim y : \sim x \sim y)$ и т. п. Чтобы доказать, что $*(u^1 : \ldots : u^s)$, достаточно доказать, что $*(((u^1 : \ldots : u^s) : \sim (u^1 : \ldots : u^s)) \vdash (u^1 : \ldots : u^s))$. В результате применения аксиом 3, 4 и 5 системы S^3 к $\sim (u^1 : \ldots : u^s)$ получим $\sim (u^1 : \ldots : u^s) = v^1 : \ldots : v^t$. В формуле $v^1 : \ldots : v^t$ как-то расставлены скобки; каждая из $v^1, \ldots, v^t$, кроме одной, имеет вид $x^i x^k w$, где x^i и x^k суть какие-то различные формулы из числа $x^1, \ldots, x^{2^n}$; одна из $v^1, \ldots, v^t$ есть $\sim x^1 \sim \ldots \sim x^{2^n}$ (все $x^1, \ldots, x^{2n}$ имеют отрицания). Но формулы $v^1, \ldots, v^t$ таковы, что $*(\sim v^1), \ldots, *(\sim v^t)$. Так что $*(u^1 : \ldots : u^s)$.

Как бы мы ни детализировали это доказательство (мы его привели сокращенно), в нем всегда останется момент, выражаемый особыми высказываниями о структуре формул. Здесь это связано с переходом от небольшого числа y^i (и соответственно x^i) к любому их числу и любому числу комбинаций с расстановкой скобок (пусть даже к конечному, но любому, а значит — к достаточно большому, чтобы отказаться от пути, уместного для двух, трех и т. д. y^i). В общем, доказательства и процесс вывода следствий из аксиом в S могут опираться на какие-то содержательные допущения относительно рассматриваемых формул.

При выводе следствий из аксиом полезны следующие упрощения: 1) правило подстановки понимать как признание общности аксиом (какие бы формулы мы ни взяли, с ними можно проделывать операции, указанные в аксиомах; последние понимаются как разрешения на переход от формул с такой структурой, как у формул слева от знака вывода, к формулам с такой структурой, как у формул справа от этого знака; 2) там, где требуется воспользоваться правилом $*(x)\cdot *(y) \vdash *(xy)$, можно прибегнуть к помощи знака $>$; 3) вместо $(x \vdash y)(y \vdash z)$ писать $x \vdash y \vdash z$, а вместо $(x \vdash y)(y \vdash z) \vdash (x \vdash z)$ — $(x \vdash y \vdash z) \vdash (x \vdash z)$. Эти упрощения позволяют сделать процесс вывода непрерывным, т. е. представить его в виде одной сложной формулы. Поясним примером. Пусть дана формула $(xy : \sim x \cdot \cdot \sim y)\, x \vdash y$. Она логически истинна. Доказательство этого можно сокращенно представить в виде формулы $((xy : : \sim x \sim y)\, x \vdash ((xy)\, x : (\sim x \sim y)\, x) \vdash (xyx : \sim x \sim yx) \vdash (xy : : x \sim x \sim y) > (xy : x \sim x \sim y) \sim (x \sim x \sim y) \vdash xy \vdash y) \vdash \vdash ((xy : \sim x \sim y)\, x \vdash y)$. Аналогично имеем $((x : x) \vdash (x \sim x : : \sim xx) > (x \sim x : \sim xx) \sim (x \sim x) \vdash x \sim x) \vdash ((x : x) \vdash (x \cdot \cdot \sim x)) \vdash \sim (x : x)$. Каждый шаг в таких формулах, обозначенный знаком $\vdash$ ($>$), осуществляется на основе определенной аксиомы. Для признания конечного результата логически истинным достаточно ко всем звеньям процесса применить правило $*(x \vdash y) \cdot *(x) \vdash *(y)$ и $*(x > y) \cdot *(x) > > *(y)$ (последнее вытекает из определения $>$).

§ 3. Общая теория вывода не сводится к какой-либо одной системе S и к совокупности систем такого рода. Последние образуют лишь исходный и простейший раздел ее. По самому определению в ней в какой-то мере (если не полностью, а это по всей вероятности так) должна быть охвачена проблематика, изучаемая в логике высказываний. Это утверждение нисколько не противоречит первой главе: там говорилось, что логика высказываний не может быть непосредственно (сама по себе, вне контекста теории вывода) принята в качестве фундамента теории вывода.

Обратимся прежде всего к классической логике высказываний. Ее можно истолковывать в самом различном смысле. С точки зрения излагаемой в данной работе концепции она истолковывается как особый раздел общей теории вывода, специальной задачей которого является исследование свойств и взаимоотношений логически истинных формул, не содержащих знака $\vdash$. При этом имеется в виду логическая истинность в данной системе S (например, как она определена в § 4 третьей главы). Формулы без знаков $\vdash$ будем называть формулами логики высказываний. Это суть формулы, построенные из знаков $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$ и логических знаков $\cdot$, : и $\sim$. К последним придется присоединить также знаки, определяемые через них. К определению формулы придется сделать дополнение: если x есть формула логики высказываний и принимается $\alpha = Df. x$, то α есть формула логики высказываний. Например, если принято, что $x \mid y = Df. \sim x \sim y : \sim xy : x \sim y$, то, согласно данному дополнению, $x \mid y$ есть формула логики высказываний.

Разъясним такое понимание классической логики высказываний на конкретном примере, т. е. возьмем одну определенную систему из числа систем S, а именно — S^3, и изложение классической логики высказываний в какой-либо определенной работе (возьмем [15]) и установим их соотношение в интересующем нас плане.

Знаков $\cdot$, : и $\sim$ по самому определению логически истинной формулы без знака $\vdash$ (логически истинной формулы логики высказываний) достаточно для записи всех логически истинных формул такого рода. Введение новых логических знаков выступает лишь как введение удобных сокращений. В какой мере они соответствуют фактически употребляемым в речи знакам, это выясняется чисто опытным путем. Для знака $\vee$, например, находится аналог — это выражение «хотя бы (по крайней мере) одно из. . .». Но вообще-то говоря, теперь можно и не заботиться о том, чтобы каждый вводимый знак непременно имел аналог в речи или чтобы он полностью соответствовал привычным средствам речи: здесь логика сама может поставлять новые точно определенные знаки, которые возможно найдут применение.

Напомним, что в S^3 логически истинной формулой без знака $\vdash$ является аксиома $\sim(x \sim x)$. В других системах она выводится из $(x \vdash y \sim y) \vdash \sim x : * (x \sim x \vdash x \sim x)$, $* ((x \sim x \vdash x \sim x) \vdash \sim (x \sim x))$. Логически истинными будут также $x : \sim x$, $\sim(x \sim xy)$, $\sim(x : x)$, $\sim(x : x : \ldots : x)$, $xy : \sim xy : x \sim y : \sim x \sim y$, $(xy : \sim xy) : x \sim y : \sim x \sim y$, $(xy : \sim xy : x \sim y) : \sim x \sim y$, $(xy : \sim xy) : (x \sim y : \sim x \sim y)$ и т. п.

Определим знаки, которые обычно употребляются в логике высказываний: 1) $x \vee y = xy : \sim xy : x \sim y$; 2) $x \supset y = xy : \sim xy : \sim x \sim y$; 3) $x \approx y = xy : \sim x \sim y$. Определения отрицаний не нужны, поскольку в S^3 выводятся $\sim(x \vee y) = \sim x \sim y$, $\sim(x \supset y) = x \sim y$, $\sim(x \approx y) = x \sim y : \sim xy$. Для $\vee$ можно принять также $x \vee y \vee z = x \vee (y \vee z)$, чтобы охватить и случаи с числом дизъюнктивных членов более двух, или сформулировать определение для n членов: $x^1 \vee x^2 \vee \ldots \vee x^n = y^1 : y^2 : \ldots : y^{2^n-1}$, где y^1 есть $x^1 x^2 \ldots x^n$, а прочие y^i суть всевозможные формулы, отличающиеся от y^1 только тем, что по крайней мере перед одной из $x^1, x^2, \ldots, x^n$ стоит отрицание, и различающиеся между собой числом и распределением отрицаний; формула $\sim x^1 \sim x^2 \ldots \sim x^n$, в которой все x^i имеют отрицания, из числа y^i исключается. Возможны и другие определения ($x \vee y = \sim(\sim x \sim y)$, $x \supset y = \sim x \vee y$, $x \supset y = \sim(x \sim y)$ и т. п.), но это принципиальной роли не играет.

Как бы ни понимали приведенные выше определения (как сокращения или как новые аксиомы дополнительно к аксиомам S, содержащие первичные знаки $\vee$, $\supset$, $\approx$ и т. п. наряду с $\cdot$, $:$, $\sim$), знак «$=$» (как и «$= Df.$») в них дает право на вывод слева направо и в обратном направлении. Имея такого рода определения, легко установить, является некоторая (любая) данная формула логики высказываний логически истинной или нет. Метод для этого чрезвычайно прост (частично о нем говорилось в конце третьей главы). Пусть x есть формула логики высказываний. В S^3 выводится, что $*(x : \sim x)$. Берем $\sim x$ и (на основе определений входящих в x логических знаков и положений S^3) приводим ее к форме $y^1 : y^2$ или $y^1 : y^2 : \ldots : y^n$. Если $*(\sim y^1)$, $*(\sim y^2), \ldots, *(\sim y^n)$, то $*((x : \sim x) \cdot \sim y^1 \sim y^2 \ldots \sim y^n)$, $*((x : \sim x) \sim y^1 \sim y^2 \ldots \sim y^n) \vdash x)$ и $*(x)$. Если же хотя бы для одной y^i нет соответствующей $*(\sim y^i)$, то $\sim *(x)$.

Этим методом можно доказать, что все аксиомы исчисления высказываний, как они сформулированы, например, в [15] (это относится и к [3], [12], [21] и т. д.), суть логически истинные формулы. Система аксиом классического исчисления высказываний, приведенная в [15], такова: 1) $x \supset (y \supset x)$; 2) $(x \supset (y \supset z)) \supset ((x \supset y) \supset (x \supset z))$; 3) $x \& y \supset x$; 4) $x \& y \supset y$; 5) $(x \supset y) \supset ((x \supset z) \supset (x \supset y \& z))$; 6) $x \supset x \vee y$; 7) $y \supset x \vee y$; 8) $(x \supset z) \supset ((y \supset z) \supset (x \vee y \supset z))$; 9) $(x \supset y) \supset (\sim y \supset \sim x)$; 10) $x \supset \sim \sim x$; 11) $\sim \sim x \supset x$. Правила вывода — правило подстановки и правило заключения $x \supset y$, x/y. Возьмем, например, $x \supset (y \supset x)$. Поскольку $*(\sim (x \supset y) = x \sim y)$, $\sim (x \supset (y \supset x)) = x \sim (y \supset x) = xy \sim x$; $*(\sim (x \sim xy))$, $*(((x \supset (y \supset x) : (x \sim xy)) \sim (x \sim xy))$, $*((x \supset (y \supset x))$. Возьмем $x \supset x \vee y$. Поскольку $\sim (x \supset (x \vee y)) = \sim (\sim x \vee x \vee y) = \sim xx \sim y$ и $\sim (\sim xx \sim y)$, получим $*((x \supset x \vee y) : \sim (x \supset x \vee y)) = (x \supset x \vee y) : \sim xx \sim y)$, $*(((x \supset x \vee y) : \sim xx \sim y) \sim (\sim xx \sim y))$, $*(x \supset x \vee y)$. Аналогично для прочих аксиом.

Но этот метод не есть метод конструирования формул, которые заведомо (по самим правилам построения) логически истинны. Чтобы получить такой метод, можно пойти двумя путями: приспособить для этой цели некоторую данную S или сконструировать специальную систему.

Приведем пример для первого пути. В S^3 доказывается ряд простых, но важных формул: $(x \supset y)(y \supset z) \supset (x \supset z)$ (указанным выше методом), $(xy \supset z) \vdash (x \supset (y \supset z))$, $(x \supset y) \vdash (\sim y \supset \sim x)$, $\sim (xy) = \sim x \vee \sim y$, $x \sim y = \sim (x \supset y)$, $x \vee y = y \vee x$, $x \supset y : \sim y$, $x \sim x \supset y$ и т. п. Доказывается также правило: если $*(x \vdash y)$, то $*(x \supset y)$. Теперь легко доказать, что $*(\sim \sim x \supset x)$, $*(x \supset \sim \sim x)$, $*(xy \supset x)$, $*(xy \supset y)$, $*(y \supset x \vee y)$. Поскольку $*((x \supset y) \vdash (\sim y \supset \sim x))$, имеем $*((x \supset y) \supset (\sim y \supset \sim x))$. Поскольку $(x \supset (y \supset z)) \sim (x \supset z) \vdash \sim (x \supset y)$, $(x \supset y)(y \supset z) \supset \supset (x \supset z)$ и $(x \supset y) \supset (\sim y \supset \sim x)$, имеем $*((x \supset (y \supset z)) \supset \supset ((x \supset y) \supset (x \supset z)))$. Аналогично получаем $*((x \supset y) \supset ((x \supset

$\supset z) \supset (x \supset yz))), *((x \supset y) \supset ((z \supset y) \supset (x \vee z \supset y)))$. Таким образом, все аксиомы исчисления высказываний [15] доказаны. Вообще же доказательства утверждений логики высказываний используют в качестве правил все положения S, что упрощает рассуждения по крайней мере во многих случаях. Разработка различных вариантов S может дать удобные и простые методы рассуждений для логики высказываний.

Утверждение «Если $*(x \vdash y)$, то $*(x \supset y)$» (или $*(x \vdash y) \vdash *(x \supset y))$ доказывается так: берем аксиомы S вида $x \vdash y$, меняем в каждой знак $\vdash$ на $\supset$ и доказываем, что $*(((x \supset y) : \sim (x \supset y)) \vdash (x \supset y))$, откуда получаем $*(x \supset y)$. Можно доказать утверждение: если x есть $*(x)$ и y образуется из x путем замены всех знаков $\vdash$ на знаки $\supset$, то $*(y)$: берем аксиомы S, которые выше не были охвачены, и для каждой доказываем это утверждение (эти утверждения приемлемы уже потому, что аксиомы истинны при интерпретации $\vdash$ как $\supset$).

Второй путь состоит в том, что некоторое конечное множество логически истинных формул логики высказываний выбирается в качестве основы, исходя из которой можно по определенным правилам выводить другие логически истинные формулы и вообще исследовать свойства этого класса формул. Пример такой системы—формулы, фигурирующие в [15] в системе аксиом исчисления высказываний, и правила подстановки и заключения. Полученная таким путем система может расцениваться как самостоятельная аксиоматическая система лишь в рамках логики высказываний. Правило заключения «Если $*(x \supset y)$ и $*(x)$, то $*(y)$» легко доказывается в $S^3 : x \supset y = xy : : \sim xy : \sim x \sim y$, $(xy : \sim xy : \sim x \sim y) x \vdash xy \vdash y$; в общем имеем $*((x \supset y) x \vdash y)$ или $*(x \supset y) \cdot *(x) \vdash *(y)$. Правило подстановки сохраняется. Так что в рамках общей теории вывода в целом указанная система есть лишь выводимый фрагмент.

Определения знаков $\vee$, $\supset$ и т. д. в рамках общей теории вывода не являются функциональными, т. е. не дают определений $x \vee y$, $x \supset y$ и т. д. как функций истинности $x, y, \ldots$, хотя они и сходны с ними, если в них элиминировать семантические термины по такой договоренности: запись знака высказывания означает его утверждение или признание истинным, запись знака отрицания перед ним означает признание его ложным. Знаки $\vee$, $\supset$ и т. д. определяются через $\cdot$, $:$ и $\sim$, а последние определяются системой аксиом S. Определение формул $x \vee y$, $x \supset y$ и т. д. как функций истинности есть лишь одна из интерпретаций их, как и в случае с формулами $\sim x$, xy и $x^1 : \ldots : x^n$. Различие состоит лишь в том, что при интерпретации первых достаточно к соответствующим определениям добавить семантические термины «истинно» и «ложно» или другие адекватные им, а при интерпретации вторых приходится вводить новые во всех отношениях определения: «xy истинно» = «x истинно и y истинно», «$x : y$ истинно» = «$x \sim y$ истинно или $\sim xy$ истинно» и т. д.

С точки зрения общей теории вывода, взятой в целом, обычное противопоставление функциональных и аксиоматических построений теряет силу. Функциональные построения сами по себе не образуют какой-либо части теории вывода, поскольку в последней допустимо говорить лишь об истинности и ложности ее собственных положений, а не высказываний, о которых идет речь в этих положениях. Введение новых знаков $\vee$, $\supset$ и т. п. можно представить как расширение S, как присоединение к ней новых аксиом. Построение систем такого типа, как исчисление высказываний в [3], [12] и т. п., можно представить как выработку некоторого (удобного с точки зрения определенных задач) метода в рамках расширенной S.

Выше говорилось, что формула $x \supset x \vee y$ логически истинна. Однако не будет логически истинной формула $x \vdash x \vee y$ и, следовательно, формулы $xy \vdash x \vee y$, $\sim xy \vdash x \vee y$ и $x \sim y \vdash x \vee y$. Так что определение знака $\vee$, данное выше, и определение его $x \vdash x \vee y$ (формула $y \vdash x \vee y$ не требуется, поскольку доказывается $x \vee y = y \vee x$) принципиально различны. Аналогично различаются данное выше определение знака $\supset$ и определение его формулами $\sim x \vdash (x \supset y)$ и $y \vdash (x \supset y)$. Поскольку последние не являются логически истинными, не будут такими и формулы $xy \vdash (x \supset y)$, $\sim xy \vdash (x \supset y)$, $\sim x \sim y \vdash (x \supset y)$. Это, однако, не отвергает правильности положений «Если xy истинно, то $x \supset y$ истинно», «Если $x \sim y$ истинно, то $x \vee y$ истинно» и т. п. для случая, когда $x \vee y$, $x \supset y$ и т. д. определяются как функции истинности x и y.

Вывод новых логически истинных формул на базе логики высказываний не сводится к выводу логически истинных формул без $\vdash$. При условии добавлений к S, образующих логику высказываний, логически истинна, например, формула $(x \vdash y)(x \vdash (y \supset z)) \vdash (x \supset z)$. Так что расширение S за счет положений и определений логики высказываний означает расширение класса логически истинных формул общей теории вывода для данной S.

В первой главе мы говорили о частичной интерпретации знака $\supset$ как $\vdash$. К сказанному там теперь можно добавить следующее. Эта частичная интерпретация лишь случайно может дать формулы, логически истинные в S (например, $xy \vdash x$), поскольку не все формулы, получаемые таким путем из выводимых (доказуемых; соответственно — тавтологий) формул классической логики высказываний, логически истинны в S. Это, например, формулы $x \vdash x \vee y$, $x \vdash (y \supset x)$ и т. п. Так что частичная интерпретация $\supset$ как $\vdash$ сама по себе ничего не дает (не избавляет от «парадоксов», если получение формул с $\supset$ и $\vdash$ не есть следствие построения логики высказываний на базе S).

Перенос знаков «$\cdot$» и «$:$» в логику высказываний из системы S и сведе́ние последней к системе такого типа, как структурные правила вывода в исчислении секвенций Генцена, как определение знака $\vdash$ в книге Клини и т. п., исключается, поскольку в логике высказываний самой по себе невозможно определить вообще какие бы то ни было знаки, не используя знаки «$\cdot$», «$:$», «$\sim$» и «$\vdash$» (аксиоматика исчисления высказываний может быть истолкована как определение знаков &, $\vee$ и т. п. лишь при условии интерпретации $\supset$ как $\vdash$, о чем уже достаточно много говорилось).

§ 4. Сделаем одно важное дополнение к вопросу о несводимости $x \vdash y$ к формуле логики высказываний, не содержащей знака $\vdash$. Собственно говоря, речь идет о формулах $(x \vdash y) \vdash \sim (x \sim y)$, $\sim (x \sim y) \vdash (x \vdash y)$, $x \sim y \vdash \vdash \sim (x \vdash y)$, $\sim (x \vdash y) \vdash x \sim y$. Эти формулы не выводятся в S: в S нет аксиом, позволяющих переходить от формул без знака $\vdash$ к формулам с этим знаком; в S можно переходить от формул со знаком $\vdash$ к формулам без этого знака только для случаев, когда последние суть $\sim (x \sim x)$, $\sim (x \sim xy)$; в S знак $\sim$ в связи с формулой со знаком $\vdash$ не встречается вообще.

Формально (если считать S формальной системой) нет никаких оснований отвергать указанные выше формулы; можно без противоречия расширить S за счет этих формул. Но с содержательной точки зрения мы здесь сталкиваемся со следующими фактами. Если признать логически истинной формулу $\sim(x\sim y)\vdash(x\vdash y)$, то логически истинной будет формула $(x\supset y)\vdash(x\vdash y)$, поскольку по определению $x\supset y$ логически истинна формула $(x\supset y)\vdash\sim(x\sim y)$. Но это означает, что всем логически истинным формулам логики высказываний вида $x\supset y$ будут соответствовать логически истинные формулы $x\vdash y$, и все «парадоксальные» формулы оказываются логически истинными: $(x\sim x\supset y)\vdash\vdash(x\sim x\vdash y)$, а значит и $x\sim x\vdash y$, $x\vdash y\vee\sim y$, $x\vdash\vdash x\vee y$, $x\vdash(y\vdash x)$ и т. д. Формула $\sim(x\vdash y)\vdash x\sim y$ не может быть принята потому, что она неверна в общей форме: если ее принять, то $*(\sim(x\vdash y)\vdash\sim(x\supset y))$, поскольку $x\sim y\vdash\sim(x\supset y)$; но из $x\sim x$, например, не выводится y, тогда как $x\sim x$ материально имплицирует y. Значит, и определение $(x\vdash y)=Df.\sim(x\sim y)$ исключается.

Остаются формулы $(x\vdash y)\vdash\sim(x\sim y)$ и $x\sim y\vdash\vdash\sim(x\vdash y)$. В S доказываются следующие положения, соответствующие им: 1) если $*(x\vdash y)$, то $*(\sim(x\sim y))$; или $*(x\vdash y)>*(\sim(x\sim y))$; или $*((x\vdash y)>\sim(x\sim y))$; 2) если $*(x\sim y)$, то $\sim*(x\vdash y)$; $*(x\sim y)>\sim*(x\vdash y)$; $*((x\sim y)>\sim(x\vdash y))$. Приведем сокращенное доказательство первого положения: $*(x\sim y\vdash x)$; $*(x\sim y\vdash\sim y)$, $*((x\sim y\vdash x)(x\sim y\vdash\sim y))$, $*((x\sim y\vdash x)(x\vdash y))$, где $*(x\vdash y)$ по условию; $*((x\sim y\vdash x)(x\vdash y)\vdash(x\sim y\vdash y))$; $*(x\sim y\vdash y)$; $*((x\sim y\vdash y)(x\sim y\vdash\sim y))$; $*(x\sim y\vdash y\sim y)$; $*(\sim(x\sim y))$. Для доказательства второго положения достаточно следующего. Если допустить, что $*(x\vdash y)$, то, согласно первому положению и условию второго $*(x\sim y)$, получим $*((x\sim y)\cdot\sim(x\sim y))$ и $\sim*(x\vdash y)$. Тот факт, что мы получаем положения, в которых фигурирует $\sim*(x\vdash y)$ и даже $\sim\sim(x\vdash y)$, не должен смущать: эти положения не являются формулами S, они суть следствия метаобъектной части S.

Сделаем также одно замечание об определениях. В логике высказываний приходится иметь дело с определениями, в которых определяющая и определяемая части суть высказывания. Определения эти затем функционируют как логически истинные формулы: на базе S^1 определение вида $x=Df.y$ функционирует как $*((x\vdash y)\cdot(y\vdash x)(\sim x\vdash\vdash\sim y)(\sim y\vdash\sim x))$, на базе S^3 — как $*((x\vdash y)\cdot$

$\cdot (x \vdash y))$. Так что хотя части «Если x, то y» и «Если y, то x» определения $x = Df. y$ дают разрешение на замещение x на y и y на x, однако это замещение лимитировано свойствами S. Например, имея определение «Если x, то y», разрешающее x заменять на y, мы еще не имеем права признать в S^3 $x:z = y:z$, если отсутствует вторая часть — разрешение замещать y на x. Можно ввести определение $x \Rightarrow Df. y$ с таким свойством: если z^2 образуется из z^1 путем подстановки формулы y на место вхождений x в z^1, и $x \Rightarrow Df. y$, то $*(z^1 \vdash z^2)$. Такое определение разрешает замену x на y для любых формул. От $x = Df. y$ оно отличается тем, что оно не дает права на $z^2 \vdash z^1$. Этим определением мы воспользуемся в следующем параграфе. Знак «$Df.$» можно исключить, понимая определение с «$\Rightarrow$» как аксиому или правило вывода, разрешающее определенного рода выводы: $(x = y) \vdash (x \Rightarrow y)$ (или $(x \equiv y) \vdash (x \Rightarrow y)$; в этом случае можно употреблять иной знак; $(x \Rightarrow y) \vdash (z^1 \vdash z^2)$, где x входит в z^1, а z^2 образуется из z^1 путем замены x на y.

§ 5. Следующий источник развития общей теории вывода связан с идеями многозначной логики. На этом вопросе мы здесь остановимся очень кратко, лишь в той мере, в какой это достаточно для иллюстрации самой возможности разработки общей теории вывода в русле идей многозначной логики.

Знаку высказывания x можно поставить в соответствие выражение «x истинно», а $\sim x$ — «x ложно» или наоборот в зависимости от выбора «логических координат». При такой интерпретации формула $x : \sim x$ выражает принцип двузначной логики «Каждое высказывание либо истинно, либо ложно». Но и без этой интерпретации отрицание $\sim$ есть отрицание двузначной логики в том смысле, что $x : : \sim x$ означает учет в познании только двух возможностей (означает, что выбор наш ограничен двумя возможностями), т. е. означает «Либо так, как говорится в x, либо не так, а как-то иначе» (подробнее об этом см. [5] и [10]). Можно сказать, что отрицание $\sim$, как оно определено в S, есть отрицание двухвозможностной или бинарной логики.

Следует сказать, что изложение логических законов без использования семантических терминов «истинно», «ложно» и т. д. более соответствует их физической роли, чем изложение с использованием этих терминов. В логике, взятой в целом, эти термины не могут быть взяты без определения, как это допустимо в отношении отдельных логических систем или даже разделов логики. Где-то они должны быть определены именно как семантические термины (т. е. как термины, обозначающие сопоставление высказываний и каких-то ситуаций), если они, конечно, вводятся в логике. Но уже определение термина «ложно» предполагает данным отрицание как нечто первичное: «x ложно» = «$\sim x$ истинно» («положение вещей не таково, как говорится в x»). Так что желание элиминировать из теории вывода семантическую терминологию имеет вполне резонное основание.

Учет в познании двух возможностей есть лишь простейший случай, фиксирование которого в логике дает лишь исходный пункт к более сложным познавательным ситуациям. На самом деле в познании приходится иметь дело с числом возможностей более двух, так что отрицание каждой из них посредством двузначного $\sim$ оказывается неоднозначным и с какой-то точки зрения неудовлетворительным. Складываются условия для введения форм отрицаний, отличных от $\sim$ в том плане, что они учитывают три и более возможности. Например, для случая трех возможностей уместно такое отрицание (обозначим через $\urcorner$), что будет верна формула $x : \urcorner x : \urcorner\urcorner x$; при этом x, $\urcorner x$ и $\urcorner\urcorner x$ можно интерпретировать соответственно как «x истинно», «x неопределенно» и «x ложно». В общем, рассматриваемое отрицание можно получить так: элементам множества значений истинности ставим в соответствие числа 0, 1, 2, . . . ; выражению «x имеет значение истинности 0» (будем писать $0x$) ставим в соответствие x, выражению «x имеет значение истинности 1» (будем писать $1x$) — $\urcorner x$, выражению $2x$ — $\urcorner\urcorner x$ и т. д.; знак $\urcorner$ рассматриваем как обобщение $\sim$ на любое число возможностей: $(x : \urcorner x)$, $(x : : \urcorner x : \urcorner\urcorner x)$, $(x : \urcorner x : \urcorner\urcorner x : \urcorner\urcorner\urcorner x)$ и т. д. В дальнейшем вместо записи x, $\urcorner x$, $\urcorner\urcorner x, \ldots, \urcorner\urcorner \ldots \urcorner x$ будем употреблять адекватную ей $0x$, $1x$, $2x, \ldots, (n-1)x$: здесь цифры перед x означают, сколько раз записан знак $\urcorner$ перед x.

Пусть i, k, l, n суть целые положительные числа, $k \neq l$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ и $0 \leqslant l \leqslant n-1$. Переход к n-значной логике высказываний связан с тем, что принимается ряд положений дополнительно к S. В нашу задачу не входит построение такой системы. Поэтому мы ограничимся тем, что приведем ряд положений, определяющих свойства $\urcorner i$, не заботясь о том, достаточно их для построения n-значной системы или нет. При переходе к n-значной логике высказываний должны быть приняты по крайней мере следующие положения: 1) $*(0x:1x:\ldots:(n-1)x)$; 2) $*(\sim(kxlx))$, если в S $*((x\vdash y)\sim y\vdash\sim x)$, или $*((x\vdash kyly)\vdash\sim x)$; 3) $*(\sim(ix)=y^1:y^2:\ldots:y^{n-1})$, где ix, y^1, $y^2,\ldots,y^{n-1}$ суть всевозможные формулы $0x$, $1x,\ldots,(n-1)x$ (например, для трехзначной логики $\sim 0x=1x:2x$, $\sim 1x=0x:2x$, $\sim 2x=0x:1x$); $*(ix==\sim y^1\sim y^2\ldots\sim y^{n-1})$ выводится; выводятся также $*(\sim(ix)\sim(kx)=y^1:y^2:\ldots:y^{n-2})$, $*(ix:kx=\sim y^1\ldots\ldots\sim y^{n-2})$ и т. п.; 4) если $*(ix)$, то $*(kx)$, где по крайней мере одно из чисел $0, 1,\ldots, n-1$ не равно k. Положения 1, 2 и 3 соответствуют гипотезам о числе и отношениях значений истинности в функциональных n-значных построениях. Четвертое положение соответствует разбивке множества значений истинности на утверждающие (отмеченные) и неутверждающие (неотмеченные, отрицающие). Положения 1, 2 и 4 определяют (совместно с S, конечно) класс логически истинных формул в n-значной логике высказываний. В определение формулы вводится корректив: если x есть формула, то ix есть формула.

Теперь можно вводить дополнительные знаки, аналогичные знакам $\vee$, $\supset$ и т. д. двузначной логики. Например, для трех возможностей (трехзначной логики) допустимы определения: $x\vee y=xy:\urcorner xy:x\urcorner y:x\urcorner\urcorner y:\urcorner\urcorner xy$, $\urcorner(x\vee y)=\urcorner x\urcorner y:\urcorner x\urcorner\urcorner y:\urcorner\urcorner x\urcorner y$, $\urcorner\urcorner(x\vee y)==\urcorner\urcorner x\urcorner\urcorner y$; $x\supset y=xy:\urcorner xy:\urcorner\urcorner xy:\urcorner\urcorner x\urcorner y::\urcorner x\urcorner y:\urcorner\urcorner x\urcorner\urcorner y$, $\urcorner(x\supset y)=x\urcorner y:\urcorner x\urcorner\urcorner y$, $\urcorner\urcorner(x\supset y)=x\urcorner\urcorner y$.

Важно обратить внимание на следующие два обстоятельства. Первое. В двузначной логике $x\,\&\,y=xy$, где $x\,\&\,y$ интерпретируется как конъюнкция в функциональном построении. В силу совпадения $x\,\&\,y$ и xy нет необходимости вводить особый знак. Для $x:y$ и $x\,\|\,y$ полного совпадения нет, поскольку $x\,\|\,y=x\sim y:\sim xy$, но все же есть частичное совпадение, так что нет необходимости вводить дополнительный знак. В многозначной логике явно обнаруживается различие $x\,\&\,y$ и xy, как и $x\,\|\,y$ и $x:y$. Например, в трехзначной логике возможно такое определение $x\,\&\,y$,

обобщающее двузначную конъюнкцию: $x\&y=xy$, $\urcorner(x\&y) = \urcorner xy : x\urcorner y : \urcorner x\urcorner y$, $\urcorner\urcorner(x\&y) = x\urcorner\urcorner y : \urcorner\urcorner xy : \urcorner\urcorner x\urcorner y : \urcorner\urcorner x\urcorner\urcorner y : \urcorner x\urcorner\urcorner y$. Так что рассматривая $x\&^2 y$ как частный случай $x\&^n y$, мы должны разграничивать $x\&y$ и xy даже в рамках двузначной логики. Второе обстоятельство касается дифференциации функций отрицания.

Отрицание $\sim$ помимо тех свойств, которые выражаются в $*(\sim(x\sim x))$ и $*(x:\sim x)$, имеет еще одно свойство (этим свойства отрицания не исчерпываются; см. [5], [10]), не охватываемое знаком $\urcorner$: оно ставит в соответствие формуле $\sim kx$ формулу lx, т. е. для него имеют силу положения $\sim x \Rightarrow \urcorner x$ и $\sim\urcorner x \Rightarrow x$ (или $\sim 0x \Rightarrow 1x$, $\sim 1x \Rightarrow 0x$). В многозначной логике должно быть введено отрицание, обобщающее $\sim$ только по линии этого свойства. Будем для этой цели употреблять знак $\lrcorner$.

Возможны различные обобщения двузначного отрицания в рассматриваемом плане. Например, для трехзначной логики возможны такие определения: 1) $\lrcorner x \Rightarrow \urcorner\urcorner x$, $\lrcorner\urcorner x \Rightarrow \urcorner\urcorner x$, $\lrcorner\urcorner\urcorner x \Rightarrow x$; 2) $\lrcorner x \Rightarrow \urcorner\urcorner x$, $\lrcorner\urcorner x \Rightarrow \urcorner x$, $\lrcorner\urcorner\urcorner x \Rightarrow x$. Первое соответствует отрицанию в трехзначной логике Гейтинга, второе — Лукасевича. Отрицание Поста для n-значной логики определяется так: $\lrcorner(kx) \Rightarrow (k+1)x$, где $0 \leqslant k \leqslant n-1$ и сложение идет по модулю n.

Расширенная за счет рассмотренных (и подобных им других) дополнительных положений и определений система S позволяет исследовать свойства логически истинных формул многозначной логики высказываний. Роль аксиоматических построений здесь та же, что и в двузначной логике. К ним относится все сказанное в § 1 о двузначных исчислениях высказываний.

Несколько слов об интуиционистском (конструктивистском) исчислении высказываний. Его нельзя рассматривать как результат ослабления S за счет исключения формулы $\sim\sim x \vdash x$ из числа логически истинных, ибо отрицание $\sim$ по самому определению не знает исключений. Оно сохраняет свое значение даже в тех случаях, когда приходится иметь дело с тремя и более возможностями. Пусть, например, мы учитываем такие возможности: высказывание доказуемо (доказывается, что оно верно), высказывание опровержимо (доказывается, что оно ложно) и высказывание неразрешимо (нельзя доказать и нельзя опровергнуть).

В таком случае высказывание «$\sim$ (x доказуемо)» означает «x опровержимо или x неразрешимо», «$\sim$ (x опровержимо)» = = «x доказуемо или x неразрешимо» и «$\sim$ (x неразрешимо)» = = «x доказуемо или x опровержимо». Если x = «x доказуемо», $\urcorner x$ = «x неразрешимо» и $\urcorner\urcorner x$ = «x опровержимо», то $\sim\sim x \vdash \sim(\urcorner x : \urcorner\urcorner x) \vdash \urcorner x \urcorner\urcorner x : \sim\urcorner x \cdot \sim\urcorner\urcorner x \vdash \sim\urcorner x \sim\urcorner\urcorner x \vdash x$, $\sim\sim\urcorner x \vdash \sim(x : \urcorner\urcorner x) \vdash \urcorner x$, $\sim\sim\urcorner\urcorner x \vdash \urcorner\urcorner x$. С этой точки зрения никакого отступления от правил рассуждений, описываемых в S, нет.

В плане темы данной работы подходящим обоснованием ослабления классического исчисления высказываний является обоснование с позиций многозначной логики (начиная с работ Гейтинга). Согласно определению $\lrcorner$ в трехзначной логике Гейтинга выводятся положения $\lrcorner\lrcorner a \vdash a$, $\lrcorner\lrcorner\urcorner a \vdash a$, $\lrcorner\lrcorner\urcorner\urcorner a \vdash \urcorner\urcorner a$. Так что не для всякой формулы x будет иметь силу $\lrcorner\lrcorner x \vdash x : \lrcorner\lrcorner\urcorner a \vdash \lrcorner\urcorner\urcorner a$, поскольку $\lrcorner\urcorner a \Rightarrow \urcorner\urcorner a$ (см. свойство определения со знаком $\Rightarrow$ в предшествующем параграфе); $\lrcorner\urcorner\urcorner a \vdash a$, поскольку $\lrcorner\urcorner\urcorner a \Rightarrow a$; в целом $\lrcorner\lrcorner\urcorner a \vdash a$, а не $\lrcorner\lrcorner\urcorner a \vdash \urcorner a$. Это можно перенести и на трехзначную гейтинговскую импликацию, т. е. в определенной системе определений и положений показать, что $\sim *(\lrcorner\lrcorner x \supset^3 x)$. Но это опять-таки не отменяет того, что $*(\sim\sim x \supset^2 x)$.

Пусть T есть функциональное построение или соответствующее ему аксиоматическое построение логики высказываний. Выражение «$*(x)$ в T» пусть означает, что x есть тавтология или, соответственно, выводимая формула в T. Пусть S^* есть логическая система, в которой к данной S добавлены определения знаков, соответствующих знакам T. Для двузначной логики имеют силу положения: 1) $*((x \supset y)x \vdash y$; если $*(xy \vdash z)$, то $*(x \supset (y \supset z))$ (если $*(xy \vdash z)$, то $*(xy \supset z)$; если $*(xy \supset z)$, то $*(x \supset (y \supset z))$; отсюда получаем приведенное положение; 2) если $*(x)$ в T, то $*(x)$ в S^*, и наоборот; 3) если $*(x \vdash y)$ в S^*, то $*(x \supset y)$ в T. Аналогичные положения имеют силу в n-значной логике в следующем смысле: во всяком n-значном построении (в S^* и в T) имеется такое обобщение двузначного $\supset$, что пункты 1 и 3 выполняются. Для второго пункта никаких оговорок не требуется.

В составе логики высказываний могут быть рассмотрены также различного рода системы, которые можно представить просто как «ослабления» или ограничения классической логики высказываний, т. е. как системы, рассматривающие лишь определенные подмножества логически истинных формул классической логики высказываний. Помимо интуиционистской логики с отрицанием, здесь имеются в виду системы без отрицания, системы аккермановского типа и т. п.

В задачу логики высказываний, как говорилось выше, входит рассмотрение логически истинных формул без знака следования. Можно указать еще на одну ее задачу, а именно — на рассмотрение определенного класса правил вывода. Последний можно охарактеризовать так. В функциональных построениях выявляются равнозначные формулы, так что правомерно следующее положение: если x и y равнозначны, то $*(x \vdash y)$ и $*(y \vdash x)$. В аксиоматических построениях возможно такое определение выводимости, при котором допустимо следующее: если из x выводимо y, то $*(x \vdash y)$. Например, исключив из определения выводимости в работе [15] пункт, согласно которому каждая истинная в исчислении высказываний формула выводима из любой данной совокупности формул (этот пункт допускает «парадоксальные» положения $x \vdash y \vee \sim y$, $x \vdash \sim (y \& \sim y)$, $\sim (x \vee \sim x) \vdash$ $\vdash x \vee \sim x$ и т. п.), получим определение некоторого класса правил вывода.

§ 6. Об эмпирических основаниях теории вывода свидетельствует также то, что ряд формул нуждается в онтологической интерпретации. Это касается прежде всего формул $\sim (x \sim x)$ и $x : \sim x$. На эту тему достаточно много говорилось. Мы ее затронули лишь постольку, поскольку здесь обнаруживается возможность разработки общей теории вывода еще в одном направлении, а именно — в направлении исследования свойств упорядоченных определенных образом формул логики высказываний. Суть этого направления рассмотрена автором в работах [6—9]. Здесь мы остановимся на нем очень кратко и с несколько иной точки зрения, чем в упомянутых работах.

Пока мы остаемся в рамках системы S, то можем просто сказать, что формула $\sim (x \sim x)$ логически истинна (либо как аксиома, либо как следствие из аксиом) в силу определения. Но в основе этого так или иначе лежит убеждение: не может быть, чтобы в абсолютно одних и тех же условиях (в одно и то же время, в одном и том же месте, в одном и том же отношении и т. д.; мы будем употреблять выражение «в одной и той же ситуации») было x и $\sim x$. Формула $x : \sim x$ означает не только исключение совместного (для одной и той же ситуации) утверждения x и $\sim x$, как и $\sim (x \sim x)$, но также означает допущение возможности двух различных ситуаций, для одной из которых утверждается x, а для другой $\sim x$. Обобщения этих положений в многозначной логике рассматривать здесь не будем.

Но события (объекты, предметы и т. д.), о которых говорится в высказываниях, как-то упорядочены в пространстве и времени, а также с точки зрения последовательности наблюдения их (следуют друг за другом, одновременны, вытесняют друг друга, появляются в различное время, наблюдаются в определенной очередности и т. п.). Точно так же упорядочены и различные ситуации. Этот факт можно обобщить, говоря просто о какой-то упорядоченности высказываний, обозначаемой особыми знаками.

Для обозначения того, что данная совокупность высказываний описывает одну ситуацию, подходит знак «$\cdot$», а для обозначения того, что речь идет о различных ситуациях, подходит знак «$:$». В общем, xy означает «x и y в одной и той же ситуации», $x : y$ означает «x в одной и y в другой ситуации». Это исключает противоречия. Системы S охватывают фактически лишь простейший случай познания, когда $xy = yx$ и $x : y = y : x$.

Будем упорядоченность высказываний обозначать индексами 1, 2, I и II. Возьмем, например, высказывание $x1\mathrm{I}y2\mathrm{I} : \sim x1\mathrm{II} \sim y2\mathrm{II}$. Будет ли оно равнозначно высказыванию, отличающемуся от него только иным распределением индексов? Уверенности в этом нет. Возможно, например, следующее: если объект, о котором говорится в x, появляется первым по порядку, то объект, фиксируемый в y, может существовать; но если объект, фиксируемый в y, появляется первым, то это исключает возникновение объекта, фиксируемого в x. В общем $x1y2 \neq x2y1$, $(x)\mathrm{I} \neq (x)\mathrm{II}$, $(x)\mathrm{I} : (y)\mathrm{II} \neq (y)\mathrm{I} : (y)\mathrm{II}$ и т. п. Эти положения ни в какой мере не затрагивают положений $xy = yx$, $x : y = y : x$ и т. п.

Один из путей учета такого рода упорядоченности высказываний и рассмотрен в упоминавшихся выше работах. В частности, там были приняты такие положения. Пусть z есть $x1\mathrm{I}y2\mathrm{I} : \sim x1\mathrm{II} \sim y2\mathrm{II}$. Пусть v отличается от z только иной расстановкой порядковых индексов. В таком случае $\sim *(zy \vdash x)$, $\sim *(z \sim x \vdash \sim y)$, $\sim *(z \sim y \vdash \sim x)$, $\sim *(vx \vdash y)$, $*(zx \vdash y)$. Принято также определение $x \rightarrow y = Df.\ x1Iy2I : \sim x1II \sim y2II$. Очевидно, $*((x \rightarrow y)\, x \vdash y)$. На этом пути возможно, по мнению автора, дать обобщение бэконовско-миллевской индукции и описание происхождения (условий истинности, правил построения и т. п.) высказываний о связях. Так, согласно приведенному определенню $x \rightarrow y$ из x не выводится y (даже не предполагается $x > y$), но $x \rightarrow y$ обладает свойством условного высказывания. Достаточно взять, например, миллевский метод единственного различия, чтобы убедиться в том, что он в какой-то мере описывается приведенными положениями и определением $x \rightarrow y$. Во всяком случае, здесь ясно выступает одно: высказывание «Если x, то y», в котором между x и y нет отношения $\vdash$ и $>$, может быть понято как сокращенное выраженне некоторой совокупности условий познания (если оно само не есть результат вывода); процесс введения $x \rightarrow y$ при соответствующей интерпретации дает частичное описание ее.

Знаки $\vdash$ и $\rightarrow$ имеют сходство, но не совпадают как формально, так и по содержанию. Формальное несовпадение можно проиллюстрировать такими примерами: для $\rightarrow$ выводится формула $(xy \rightarrow z)\, x \vdash (y \rightarrow z)$, тогда как для $\vdash$ формула $(xy \vdash z)\, x \vdash (y \vdash z)$ не является логически истинной; формулы $xy \vdash x$ и $(x^1 \vdash y^1)(x^2 \vdash y^2) \vdash (x^1x^2 \vdash y^1y^2)$ логически истинны, тогда как соответствующие им формулы $xy \rightarrow x$ и $(x^1 \rightarrow y^1)(x^2 \rightarrow y^2) \vdash (x^1x^2 \rightarrow y^1y^2)$ — нет. Содержательное же различие, в частности, таково: в $x \rightarrow y$ из x не выводится y (если это условие не принято, то из x не обязательно выводится y), тогда как $x \vdash y$ означает именно то, что из x выводится y; для описания свойств $\rightarrow$ требуется $\vdash$, но не наоборот. Последнее обстоятельство совершенно отчетливо выступает при описательном определении связи (см. [8]).

Через $\rightarrow$ можно определить функции логики высказываний в смысле первого понимания, указанного в первой главе: 1) самотождественная функция — $(x \rightarrow y)(y \rightarrow x)(\sim x \rightarrow \sim y)(\sim y \rightarrow \sim x)$; 2) отрицание — $(x \rightarrow \sim y)(y \rightarrow \sim x) \cdot (\sim x \rightarrow y)(\sim y \rightarrow x)$; 3) конъюнкция — $(xy \rightarrow z)(z \rightarrow xy) \cdot (\sim (xy) \rightarrow \sim z)(\sim z \rightarrow \sim (xy))$ и т. д. Это можно записать короче, а именно — в форме $x \approxeq y$, $x \approxeq \sim y$, $xy \approxeq z$ и т. д. При этом переход к обычной символике можно осуществить так: 1) если $x \approxeq y$, то y есть x; 2) если $x \approxeq \sim y$, то y есть $\sim x$; 3) если $xy \approxeq z$, то z есть $x \& y$ и т. д.

Ограничения на логически истинные формулы при введении $x \to y$ ничего общего не имеют с формулами $(x \supset y) \cdot \cdot \sim (y \supset x)$, $(x \supset y) \sim (\sim x \supset \sim y)$, $(x \supset y) \sim (y \supset x) \sim (\sim x \supset \sim y) \cdot \cdot \sim (\sim y \supset \sim x)$, $(x \vdash y) \sim (y \vdash x)$, $(x \vdash y) \sim (\sim x \vdash \sim y)$ и т.п. Эти ограничения соответствуют тому, что изменение упорядоченности объектов, о которых говорится в x, y, $\sim x$ и $\sim y$, может изменить положение вещей (изменить значение истинности $xy : \sim x \sim y$). Исключение $(x \to y)\, y \vdash x$, $(x \to y) \cdot \cdot\, x \vdash \sim y$, $(x \to y) \sim y \vdash \sim x$ из числа логически истинных формул означает точно так же учет упорядоченности объектов: если мы берем $(x \to y)\, y$, например, мы тем самым предполагаем в качестве начала порядка не x, а y; аналогично для прочих случаев.

В работах [6], [8] и [9] проблема теории высказываний о связях была поставлена следующим образом: Пусть $x \to y$ обладает следующими (по крайней мере такими) свойствами: 1) из x не выводится y; 2) $(x \to y)\, x \vdash y$; 3) из $x \to y$ не выводится $\sim y \to \sim x$. Надо найти объяснение $x \to y$ с такими свойствами, то есть определить $x \to y$ в некоторой системе таким образом, чтобы эти свойства выводились как производные. Как указывалось в [9], это невозможно сделать на базе классической логики высказываний (добавим, и на базе любой «ослабленной» логики высказываний) самой по себе. Введение упорядоченности высказываний, позволяющее дать определенное решение проблемы, есть не просто формальный прием: это — абстрактное выражение приемов обнаружения связей (см. [8], [7]), своего рода схематическая надстройка над вполне реальными фактами опытного познания. Достаточно взять, напомним, миллевский метод единственного различия, как обнаружится сходство его структуры со структурою определяющей части определения $x \to y$ (мы здесь не говорим ничего о постоянстве условий, поскольку нас интересует не процесс выявления связи предметов в том или ином частном случае, а лишь определение знака $\to$, который при некоторой интерпретации может быть использован для уточнения понятия об эмпирических связях).

Вопрос о свойствах упорядоченных формул логики высказываний (и вопрос о взаимоотношении $x \vdash y$ и $x \to y$, в частности) требует специального исследования, выходящего за рамки задач данной работы. Так что мы здесь ограничимся сказанным. Добавим к этому лишь одно замечание по поводу смысловых связей, поскольку $x \rightarrow y$ можно рассматривать как описание одной из форм таких связей.

§ 7. Как видим, под именем «смысловые связи» объединяются весьма различные логические образования $x \vdash y$ и $x \rightarrow y$ (и производные формы, например — $x > y$). К ним, надо думать, относятся и определения, в которых члены суть высказывания. Но все они имеют общее: они не сводятся к функциональным связям, то есть $x \vdash y$, $x > y$, $x \rightarrow y$, $x = Df. y$ и $x \Rightarrow Df. y$ не являются функциями истинности x и y или по крайней мере не сводятся к этому. Истинность $x \vdash y$ (и $x > y$) зависит от структур x и y и их соотношения, истинность $x \rightarrow y$ зависит от упорядоченности высказываний, определения дают право на замещение, и истинность их зависит от того, насколько при этом соблюдены специальные правила определения (правила введения новых знаков). Так что требование связи x и y по смыслу в $x \vdash y$, в «Если x, то y» и других формах, сходных с $x \supset y$, само по себе лишено какого бы то ни было смысла. Логически правилен, на наш взгляд, иной путь, который изложен в данной работе: если $x \vdash y$, то x и y связаны по смыслу; $x \vdash y$ можно заменить на «Если x, то y»; если $x \rightarrow y$, то x и y связаны по смыслу; $x \rightarrow y$ можно заменить на «Если x, то y»; $xz \vdash y$ можно заменить на «Если x, то y», если z истинно, и т. д. Но в таком случае понятие «связь по смыслу» вообще излишне как неработающее понятие. В общем, при исследовании «Если x, то y», $x \vdash y$, $x > y$, $x \rightarrow y$ и т. д. не следует опираться на понятие связи по смыслу. Надо, наоборот, при выяснении того, что такое связь по смыслу, опираться на эти и другие логические формы, рассматривая их в определенной последовательности и субординации.

Хотя истинность $x \vdash y$ не есть функция истинности x и y, однако она есть функция x и y в следующем смысле: если x и y в $x \vdash y$ суть переменные, то от подстановки на их место различных формул в различных сочетаниях зависит то, получим мы истинное положение или нет. Примером первого может служить $z^1z^2 \vdash z^1$, примером второго — $z^1 \vdash z^1z^2$. Здесь важны не значения истинности x и y, а их структура. Системы S и лимитируют истинность

$x \vdash y$, указывая соотношения структур x и y, необходимые для этого. Так что смысловые связи высказываний в данном случае суть частный случай формальных, не зависимых от содержания высказываний структурных связей.

Последние следует отличать от таких смысловых связей, в которых важно именно содержание высказываний. Например, истинность выражения «В работе [1] утверждается, что x» зависит от того, стоит на месте x действительно имеющееся в [1] утверждение или утверждение, отсутствующее в ней. В этом случае логика бессильна дать какой-либо общий норматив, поскольку при проверке приведенного выражения мы обращаем внимание не на строение x и не на его значение истинности, а лишь на наличие или отсутствие соответствующего утверждения в [1]. Тогда как в случае $A \vdash B$ необходимо именно отвлечение от содержания A и B и выделение их логического строения, чтобы выяснить, имеется соответствующее правило вывода или нет.

После того, как мы изложили определенный взгляд на $x \vdash y$ и $x \to y$, можно вернуться к $x \supset y$. Если $x \supset y$ есть сокращение для $xy : \sim xy : \sim x \sim y$, то имеет место следующее: 1) может быть $x \supset y$, но y может и не выводиться из x; это очевидно даже в том случае, когда следование отождествляется с материальной импликацией, поскольку $x \supset y$ не обязательно логически истинна (тавтология, выводимая формула); если $x \supset y$, то возможно $x \vdash y$; 2) если в $x \supset y$ порядок высказываний безразличен, то невозможно $x \to y$; если порядок в $x \supset y$ задан, и он не совпадает с порядком, указанным в определении $x \to y$, то относительно возможности последней ничего сказать нельзя. В общем, если мы заранее определим связь x и y по смыслу так, что это будут $x \vdash y$ и $x \to y$ и производные от них формы, то x и y в $x \supset y$ могут не иметь связи по смыслу. Заметим кстати, что мы проблемы смысла касались лишь постольку, поскольку это было важно для рассмотрения понятия следования в рамках общей теории вывода, да к тому же еще в очень узком плане — в плане системы правил следования (вывода).

Пусть символы типа $x\alpha$ означают, что высказывание x имеет свойство α (или принадлежит к множеству α); например, x истинно, x доказуемо, x содержится в книге [1], x состоит из пяти слов и т. п. Связи высказываний в общем виде можно охватить такой схемой: 1) если $x\alpha$, то $y\beta$ (α и β могут быть тождественны); если $y\beta$, то $x\alpha$; 2) если $x\alpha$, то $y^1\beta^1, \ldots, y^n\beta^n$; если $y^1\beta^1, \ldots, y^n\beta^n$, то $x\alpha$. Здесь возможны односторонние связи (например, от $y\beta$ к $x\alpha$ нельзя заключать) и различного рода комбинации. Нам важно иное, а именно — характер свойств (множеств) $\alpha, \beta, \beta^1, \ldots, \beta^n$. Это могут быть случайные свойства, не поддающиеся учету в логике (например, принадлежность высказывания к множеству высказываний, содержащихся в некоторой данной работе). Это могут быть значения истинности. Последние в самих высказываниях усмотреть нельзя, выяснение их не есть дело логического исследования. Логика занимается значением истинности только своих собственных утверждений. Логическая семантика исследует проблему значений, в том числе — значений истинности, но она не проверяет высказывания. Наконец, это могут быть структурные свойства высказываний, которые обнаруживаются в самих высказываниях как особых объектах (конечно, при некоторых данных условиях). Это, собственно говоря, и составляет единственный предмет логического исследования высказываний с точки зрения теории вывода. Что касается функциональных построений, то их следует рассматривать либо как самостоятельные, не зависящие от теории вывода построения, которые лишь случайно оказались связанными с терминологией логики, либо как подсобное средство, для исследования структурных связей высказываний (интерпретации для последних). В качестве части теории вывода логика высказываний описывает определенного рода логические структуры и их соотношения с точки зрения рассуждений.

Мы пришли, таким образом, к выводу, который многим покажется, очевидно, неприемлемым, если его взять сам по себе: тот род смысловых связей высказываний, о котором говорилось в данной работе, представляет собою род крайне формальных связей; тогда как функциональные связи высказываний представляют собою лишь содержательную их интерпретацию, далеко не адекватную им и используемую для частных целей логики.

§ 8. Подобно тому как на базе логики высказываний строится логика предикатов, модальная логика и т. п., на базе общей теории вывода должны быть построены разделы теории вывода, в которых учитывают субъектно-предикатную структуру высказываний, кванторы, модальные знаки и т. п. Рассмотрение этого вопроса не входит в задачу данной работы, и мы ограничимся лишь кратким общим замечанием.

Во многих работах по логике (если не в большинстве) явно выступает тенденция рассматривать все логические знаки языка (то есть все элементы структуры высказываний, кроме субъектов и предикатов — кроме дескриптивных терминов) как производные по отношению к знакам тех логических систем, которые можно так или иначе включить в общую теорию вывода в нашем понимании, а именно — к знакам классической логики высказываний, системы строгой импликации, системы сильной импликации и т. д. Во второй главе мы приводили примеры определения модальностей в системе строгой (см. [39]) и сильной (см. [22]) импликации. Широко распространена интерпретация кванторов посредством конъюнкции и дизъюнкции. Эта тенденция вполне правомерна, по нашему мнению, как тенденция к установлению единства теории вывода. Но ее было бы ошибочно толковать как стремление к полному сведéнию различного рода логических знаков к знакам общей теории вывода. Их специфика сохраняется. Это проявляется, в частности, в том, что присоединяются новые аксиомы и правила вывода, определяющие их свойства (например, аксиомы для кванторов и дополнительные правила вывода), или для их определения в данной системе (на основе данной системы) привлекаются термины (знаки вообще), не встречавшиеся в ней (например, для определения модальностей в [22] привлекается знак абсурда или логической ложности).

Отмечая «парадоксальность» ряда формул логики высказываний, обычно не обращают внимания на «парадоксальный» характер логики предикатов. Мы имеем здесь в виду совсем не то обстоятельство, что логика предикатов включает в себя логику высказываний и потому «парадоксальна», а то, что с точки зрения интуиции «парадоксальными» являются сами специфические дополнения к логике высказываний, если эти дополнения соответствующим образом интерпретировать. Это прежде всего аксиомы $(\forall a) P(a) \supset P(b)$ и $P(b) \supset (\exists a) P(a)$. Так что даже в случае замены логики высказываний некоторой «непарадоксальной» системой (вроде

[22]) мы еще не получим тем самым «непарадоксальную» логику предикатов, сохраняя упомянутые аксиомы (как это имеет место, например, в [22]).

«Парадоксальность» $(\forall a) P(a) \vdash P(b)$ обнаруживается при таких условиях: 1) символ $(\forall a) P(a)$ читается как «Все предметы a имеют свойство P» («Все a — P»), где «предмет a» — знак предмета (субъект), а «свойство P» — знак свойства (предикат); 2) a и b суть переменные субъекты (предметные переменные) с неограниченной областью значений или с неопределенными отношениями. В таком случае мы должны будем признать правомерными такие утверждения: из «Все металлы электропроводны» выводится «Резина электропроводна», «Ямб электропроводен» и т. п.; из «Все электроны заряжены отрицательно» выводится «Протон заряжен отрицательно», «Интеграл заряжен отрицательно» и т. п. В общем, из того факта, что все предметы некоторого класса обладают некоторым свойством, не следует, что этим свойством обладает предмет иного класса, не являющийся элементом этого класса. Для исключения таких ситуаций необходимо ограничить область значений переменных a и b или установить их определенное отношение. Например, это может быть отношение более и менее общего термина, легко разъясняемое на примерах, доступное для понимания и не требующее понятия бесконечного. Пусть $b \in a$ означает, что a более общий термин, чем b, или что a и b обозначают одно и то же; $a \in a$. В таком случае $(\forall a) P(a)$ $P(b)$ верно лишь при условии $b \in a$. Так что аксиомы должны принять вид $(\forall a) P(a) \cdot (b \in a) \vdash P(b)$ или «Если $b \in a$, то $(\forall a) P(a) \vdash P(b)$». Это — определение или элемент определения $\forall$. Фактически мы здесь получили известную из традиционной логики аксиому силлогизма «Все a — P, b есть a; значит, b — P». Сказанное относится и к $P(b) \vdash (\exists a) P(a)$, «парадоксальность» которой точно так же устраняется при условии $b \in a$: $P(b) \cdot (b \in a) \vdash (\exists a) P(a)$ или «Если $b \in a$, то $P(b) \vdash (\exists a) P(a)$». Эта формула есть определение или элементы определения $\exists$.

Дополнение, исключающее «парадоксальность» формул $(\forall a) P(a) \vdash P(b)$ и $P(b) \vdash (\exists a) P(a)$, означает, что логика предикатов в качестве части теории вывода, удовлетворяющей некоторым интуитивным предпосылкам, может представлять собой обобщение традиционной силлогистики по линии охвата двух и более местных предикатов, предикатов высших порядков, квантификации предикатов и т. д. При этом ни в какой мере не исключается логика предикатов как надстройка над логикой высказываний, охватывающей формулы без знака $\vdash$. Не исключаются и другие пути разработки логики предикатов в широком смысле слова, т. е. как теории вывода, учитывающей субъектно-предикатное строение высказываний и кванторы.

Мы остановились на логике предикатов не с целью специального рассмотрения ее проблематики в том же направлении, в каком это сделано в системах люисовско-аккермановского типа и у нас в системах типа S по отношению к логике высказываний с отношением $\supset$, а лишь с целью проиллюстрировать самую возможность такого рода рассмотрения.

Не настаивая на том или ином варианте логической системы S и на том или ином способе перехода от нее к системам другого типа (к классическому исчислению высказываний, к интуиционистскому исчислению высказываний, к системам строгой и сильной импликации и т. п.), мы вправе, однако, высказать следующее утверждение на основе изложенного в данной работе: решение проблемы логического следования должно заключаться не в построении одной логической системы, а в отыскании некоторой совокупности логических систем, подобных системам Люиса, Аккермана и рассмотренным в третьей главе данной работы, в качестве исходного пункта и основы для решения проблемы следования и в отыскании, затем, способа обзора и объединения различного рода логических систем уже на этой основе.

В частности, как было показано в четвертой главе, даже в рамках общей теории вывода решение проблемы следования выступает как расширение систем типа S за счет дополнения к ним новых аксиом и определений. Эти дополнения могут идти по самым различным направлениям. Отдельные фрагменты общей теории вывода могут быть превращены в самостоятельные логические системы. В самом исходном пункте задача заключается не просто в модификации классической логики высказываний с целью исключения «парадоксальных» формул («парадоксальных», напоминаем, с точки зрения интерпретации их как правил вывода, и только), а в построении систем типа S, которые не зависят от логики высказываний, не исключают ее и даже могут служить некоторым основанием для ее построения в качестве части теории вывода.

Такой подход к проблеме следования можно обнаружить в качестве более или менее явной тенденции как в работах, в которых отчетливо осознается необходимость в разработке особого рода системы или совокупности систем для первоначального (исходного, фундаментального) описания правил вывода (классической работой в этом плане является книга Люиса и Ленгфорда [39]), так и в работах, в которых таким соображениям не придается важного значения (во второй главе мы рассматривали с этой точки зрения книгу Клини [12]).

§ 9. Одно из различий традиционной, доматематической логики и современной (математической, символической) логики иногда видят в следующем: в старой логике ее понятия и положения непосредственно абстрагировались из обычной речи, в современной же логике сначала строят формальные системы, для которых затем подыскивают значение в обычной речи (см., например, [27]). Применительно к теории вывода это означает: в старой логике понятия, характеризующие выводы, и правила вывода абстрагировались из эмпирических фактов рассуждений, умозаключений, выводов, доказательств; в современной же логике строят формальные системы (примеры их приводились во второй главе) и затем ищут для них интерпретации в упомянутых фактах рассуждений.

Это замечание нуждается в пояснении. Во-первых, указанное выше различие не является абсолютным. Во-вторых, располагающее к дискуссии утверждение, будто в старой логике шли от фактов к теоретическим построениям, в современной логике, наоборот, идут от теорий к фактам, вовсе не означает того, что современная логика вообще развивается в сфере чистой мысли.

Различие традиционной и современной логик можно (не вникая в тонкости) также видеть в следующем: для первой логики было характерно преобладание описательного метода, для второй же логики характерно преобладание метода дедуктивного.

Говоря об описательном методе применительно к правилам вывода, мы имеем в виду то, что эти правила фиксировались просто наряду друг с другом, дедукция в сфере самой логики использовалась лишь спорадически, фрагментарно. Обращаем внимание на то обстоятельство, что дело здесь не в факте абстрагирования правил вывода из эмпирических примеров рассуждений, а в способе этого абстрагирования. Показателем описательного метода традиционной логики является, например, констатация разделительных и условных высказываний наряду друг с другом и изложение некоторых правил вывода как правил оперирования этими высказываниями. В силлогистике использовались элементы доказательства, но лишь в современной логике была осуществлена ее аксиоматизация в строгом смысле этого слова (см. [52], [53]). Силлогистика излагалась прежде всего, хотя фиксирование правил, например, разделительных умозаключений, не требует расчленения высказываний на субъекты и предикаты.

Когда все же пытаются найти примеры аксиоматизации в традиционной логике, то находят, по нашему мнению, лишь зародыши или прообразы ее. Так, в аристотелевской силлогистике еще нельзя видеть пример аксиоматического метода, поскольку явно не сформулированы все исходные положения (постулаты) и правила вывода следствий из них. Аналогично обстоит дело с системой стоиков.

Современная логика точно так же абстрагирует правила вывода из фактических рассуждений, коль скоро она претендует на роль теоретической картины процессов рассуждений. Даже в тех случаях, когда исходят из некоторого формального построения и интерпретируют его как теорию вывода, с необходимостью опираются на понимание вывода и его правил, абстрагированное из примеров вывода. Без этого, повторяем, бессмысленно говорить о каких бы то ни было «парадоксах» материальной импликации, строгой импликации и т. д. Современная логика отличается от старой способом абстрагирования правил вывода. Она стремится не просто описать некоторое множество правил вывода, но описать его определенным образом: выделить некоторое конечное число таких правил, исходя из которых можно было бы чисто логически (без обращения к наблюдениям, без отыскания и сравнения примеров рассуждений) получить новые, заведомо приемлемые правила. Подчеркивание этой стороны дела ведет к обособлению ее от эмпирических основ, к возникновению таких построений, которые никак уже нельзя рассматривать как продукт непосредственной абстракции от эмпирических фактов. Даже в случае интерпретации их как теории вывода (и даже при допущении совпадения их с требованиями интуиции) они дают нечто большее, чем перечень правил вывода, а именно — еще и удобный метод их обзора, оправдания и т. д. Но отрыв от эмпирической базы все же дает себя знать в наличии «парадоксальных» положений, в отсутствии в системе знаков, соответствующих логическим знакам речи, и т. п.

Употребляя термин «эмпирическая теория вывода», мы вовсе не настаивали на возврате к описательному методу старой логики. Мы настаивали лишь на одном: имеет смысл ведущееся исследование проблемы логического следования дополнить специальным рассмотрением самого интуитивного понимания вывода и правил вывода, попробовать в построении теории вывода явно и сознательно исходить из эмпирически данных фактов. Этот подход к проблеме не исключает аксиоматического метода и формализации аксиоматической теории для тех или иных целей. Он лишь придает этим средствам логики целесообразность. Можно сказать, что речь идет о содержательных аксиоматических системах в самом основании теории вывода и о явной формулировке ряда предпосылок для нее.

Если ограничиться только переходом от данной формальной системы к ее интерпретации как теории вывода, то получим следующее: выбор формальной системы для истолкования ее как теории вывода невозможен без интуитивного понимания вывода; произвольно взятая формальная система лишь случайно может совпасть с интуитивным пониманием вывода; можно допустить, что имеется доказательство, согласно которому такого-то рода формальные системы могут быть интерпретированы как теории вывода, но это доказательство невозможно без утверждений относительно теории вывода. В общем, эмпирические, интуитивные, описательные и т. д. соображения, которые обычно остаются за пределами логических построений, фактически не могут быть выброшены из логики в целом как особой области познания. Это мы и стремились показать на примере общей теории вывода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, логические системы в рамках общей теории вывода можно разбить на две группы: 1) логические системы, образующие логику высказываний; 2) логические системы, претендующие на роль непосредственного описания свойств следования (исходящие из интуитивного понимания последнего). Их различие относительно. Так, по крайней мере некоторые системы второго рода можно включить в логику высказываний, взяв их просто как обособившиеся фрагменты классической логики высказываний.

Какими бы ни оказались взаимоотношения этих систем, одно обстоятельство остается неизменным и существенным с гносеологической точки зрения: системы второй группы образуют фундамент теории вывода, поскольку они фактически дают описание тех предпосылок, с которыми явно или неявно (как это и делается в большинстве случаев) сообразуются в теории вывода. Оно сохранит силу даже в том случае, если мы допустим возможность ограничения классической логики высказываний, в результате которого получится система, удовлетворяющая всем требованиям к системам второго рода. Если при построении последних идут именно по пути таких ограничений, то этот путь можно рассматривать как допустимый эвристический прием, но не как гносеологически верное построение теории вывода. Аналогично будет обстоять дело в том случае, когда удастся дать определение выводимости в исчислении высказываний, при котором класс положений о выводимости одних формул из других совпадает с классом интуитивно приемлемых правил вывода. Более детальный анализ отношений логических систем указанных групп выходит за рамки задач данной работы, затрагивающей лишь основы и гносеологические предпосылки теории вывода.

Мы рассмотрели взаимоотношения двух путей исследования правил вывода. Первый связан с функциональной интерпретацией формул теории вывода, второй — с содержательным анализом некоторых интуитивно данных предпосылок.

Понимание формул теории вывода как функций истинности входящих в них переменных высказываний есть важное эвристическое средство в теории вывода. Но оно не есть достаточное во всех отношениях и абсолютно безупречное средство построения логических систем, описывающих правила вывода и соответствующих интуиции. По самой сути дела здесь либо необходимо исходить из некоторой интуитивной основы и строить логическую систему применительно к ней, либо как-то модифицировать имеющиеся логические системы в расчете удовлетворить этой основе (можно сказать, в соответствии с данной гносеологической задачей).

Коротко говоря, интуитивную основу, о которой шла речь, образуют следующие факторы. Это, во-первых, есть отбор конечного множества (естественно, небольшого) логических знаков из числа употребляемых в рассуждениях. Эти знаки должны иметь независимые значения и должны быть достаточными для определения прочих знаков такого же рода. В частности, вместо строгой дизъюнкции можно взять нестрогую, приведя соответствующие соображения в ее пользу. Но в таком случае мы будем исходить уже из иных интуитивных предпосылок. Какой набор знаков предпочтительнее, зависит от того, какие стороны процесса познания приняты во внимание и с какой точки зрения они рассмотрены, т. е. от соображений гносеологического порядка. Интуитивную основу, во-вторых, образует перечисление некоторого конечного множества утверждений, построенных из знаков высказываний и выбранных логических знаков, в качестве приемлемых правил вывода и перечисление некоторого конечного множества утверждений, считаемых неприемлемыми. Очевидно, что возможность различных вариантов интуитивной основы служит одной из причин разнообразия путей формализации логического следования.

Построение логической системы, удовлетворяющей избранной интуитивной основе, есть построение аксиоматической системы или дедуктивной системы иного типа (например, системы генценовского типа), в которой оправдывались бы (выводились бы, считались бы истинными) все интуитивно приемлемые и исключались бы (не выводились) интуитивно не приемлемые утверждения. Заметим, что даже при одной и той же интуитивной основе это может быть выполнено различными путями,— еще один источник разнообразия в формализации следования.

Построение логической системы, удовлетворяющей заданной интуитивной основе, есть своего рода скачок, неизбежный в силу самих методов познания отрыв от эмпирически данного материала, от заданной интуитивной основы. Этот скачок связан с двумя обстоятельствами. Первое обстоятельство — соображения удобства логического исследования. При этом в числе основных знаков и утверждений логической системы могут оказаться такие, которых нет в данной интуитивной основе, но с помощью которых можно получить все элементы последней; эти знаки и утверждения выбираются потому, что базирующаяся на них логическая система удовлетворяет некоторым логическим критериям (например, полна относительно некоторой интерпретации) или может быть исследована с этой точки зрения в духе установившейся в логике традиции.

Второе обстоятельство состоит в следующем. Интуитивная основа есть нечто конечное, тогда как логическая система определяет бесконечное множество выводимых (истинных, приемлемых) утверждений. Отсюда — отсутствие гарантии против того, что среди выводимых утверждений не будет таких, которые сомнительны с точки зрения интуиции. Частичные гарантии дает введение определения «парадоксального» утверждения, которое (определение) обобщает данные утверждения, считаемые неприемлемыми в качестве правил вывода, и построение логической системы с таким расчетом, что оказывается возможным доказательство невыводимости определенных таким образом «парадоксальных» утверждений в даной системе. Но это есть гарантия лишь с точки зрения данного определения, а не вообще гарантия от любых «парадоксов». Аналогично обстоит дело с приемлемыми утверждениями: возможно введение общих определений таких утверждений и решение проблемы полноты логической системы относительно этих определений, а не вообще.

Таким образом, определения интуитивно приемлемых и неприемлемых утверждений по необходимости оказываются односторонними, частичными и относительными, в общем — зависящими от такой неустойчивой вещи, как интуиция. Поэтому тот путь в логике, на котором стараются не логику приспособить к языку, а приспособить язык к логике (логические построения рекомендуются как дополнение к языку или как частичная замена его логического каркаса), представляется более перспективным. Это, конечно, так. Однако и попытки приспособления логики к естественному языку не бесполезны хотя бы как описание естественно-исторической основы логических средств рассуждения.

Литература

1. Биркгоф Г. Теория структур. Перевод с английского. М., 1952.
2. Витгенштейн Л. Логико-философский трактат. Перевод с немецкого. М., 1958.
3. Гильберт Д. и Аккерман В. Основы теоретической логики. Перевод с немецкого. М., 1947. Изд. 2. М.: URSS, 2010.
4. Жегалкин И. И. Арифметизация символической логики. Математический сборник, т. 35, выпуск 3—4. М., 1928.
5. Зиновьев А. А. Философские проблемы многозначной логики. М., 1960.
6. Зиновьев А. А. Дедуктивный метод в исследовании высказываний о связях. Применение логики в науке и технике. М., 1960.
7. Зиновьев А. А. Логическое строение знаний о связях. Сб. «Логические исследования». М., 1959.
8. Зиновьев А. А. К определению понятия связи. «Вопросы философии», 1960, № 8.
9. Зиновьев А. А. К вопросу о методе исследования знаний (высказывания о связях). «Доклады АПН РСФСР», 1960, № 3.
10. Зиновьев А. А. Двузначная и многозначная логика. Философские вопросы современной логики. Печатается.
11. Карнап Р. Значение и необходимость. Перевод с английского. М., 1959. Изд. 2. М.: URSS, 2007.
12. Клини С. К. Введение в математику. Перевод с английского. М., 1957. Изд. 2. М.: URSS, 2009.
13. Колмогоров А. Н. О принципе tertium non datur. Математический сборник, т. 32, выпуск 4, М., 1925.
14. Марков А. А. Логика математическая. БСЭ, т. 25, 1954.
15. Новиков П. С. Элементы математической логики. М., 1959.
16. Орлов И. Е. Исчисление совместности предположений. Математический сборник, т. 35, выпуск 3—4, 1928.
17. Таванец П. В. Вопросы теории суждения. М., 1955.
18. Тарский А. Введение в логику и методологию дедуктивных наук. Перевод с английского. М., 1948.
19. Яновская С. А. Предисловие к русскому переводу книги Карнапа «Значение и необходимость».
20. Яновская С. А. Комментарии к русскому переводу книги Д. Гильберта и В. Аккермана «Основы теоретической логики».
21. Черч А. Введение в математическую логику. Перевод с английского. М., 1960. Изд. 2. М.: URSS, 2009.
22. Ackermann W. Begründung einer strengen Implikation. The Journal of Symbolic logic, v. 21, N 2, 1956.
23. Ackermann W. Über die Beziehung zwischen strikter und strenger Implikation. Dialectica, v. 12, N 47/48, 1958.
24. Ajdukiewicz K. Okres warunkowy a implikacia materialna. Studia Logica, t. IV, 1956.
25. Ajdukiewicz K. Abriss der Logik. Berlin, 1958.
26. Anderson A. R. Improved decision procedures for Lewis's calculus S_4 and Wright's calculus M. The Journal of Symbolic logic, v. 19, N 3, 1954.

27. Bocheński I. M. Formale Logik. München, 1956.
28. Barcan R. C. A functional calculus of first order based on strict implication. The Journal of Symbolic logic, v. 11, N 1, 1946.
29. Bernays P. John Myhill. On the interpretation of the sign «C». The Journal of symbolic logic, v. 20, N 2, 1955.
30. Carnap R. Einführung in die symbolische Logik. Wien, 1954.
31. Curry H. B. The Interpretation of formalized implication. Theoria, v. 25, N 1, 1959.
32. Hermes H. und Scholz H. Mathematische Logik. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, B. I, H. I, T. I, 1952.
33. Gentzen G. Untersuchungen über das logische Schließen. Mathematische Zeitschrift, B. 39, 1934.
34. Iohannson I. Ded Minimalkalkül, ... Compositio Mathematica, Bd. 4, 1936.
35. Lorenzen P. Einführung in die operative Logik und Mathematik. Berlin, 1955.
36. Lorenzen P. Formale Logik. Berlin, 1959.
37. Lorenzen P. Die ontologische und die operative Auffassung der Logik. Proceedings of the XIth international congress of Philosophy, v. V. Amsterdam, 1953.
38. Lewis C. J. A survey of symbolic logic. Berkeley, 1918.
39. Lewis C. J. and Langford C. H. Symbolic logic. New York, 1932.
40. Myhill J. On the interpretation of the sign «$\supset$». The Journal of symbolic logic, v. 18, 1953.
41. McKinsey J. C. C. A solution of the decision problem for the Lewis'systems S_2 and S_4, ... The Journal of Symbolic logic, v. 6, 1941.
42. McKinsey J. C. C. and Tarski A. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. The Journal of Symbolic logic, v. 13, 1948.
43. Pap A. The strict implication, entailment and modal iteration. Philosophical Review, v. 65, N 5, 1955.
44. Reichenbach H. Elements of Symbolic logic. N.— Y., 1947.
45. Reichenbach H. Philosophical Foundations of Quantum Mechanics. Berkeley and Los Angeles, 1946.
46. Schmidt A. Ein aussagenlogischer Zugang zu den Modalitäten der strikten Logik. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Amsterdam, 1954, Bd. 2.
47. Schröter K. Theorie des logischen Schlissens. Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik, Bd. 1, H. 1, 1955; Bd. 4, H. 1, 1958.
48. Simons L. New axiomatizations of S_3 and S_4. The Journal of Symbolic logic, v. 18, 1953.
49. Stenis E. Natural implication and material implication. Theoria, v. 13, 1947.
50. Tarski A. Über den Begriff der logischen Folgerung. Actes du congrés international de philosophie scientifique. Sorbonne, 1935.
51. Wright G. H. A new system of modal logic. Proceedings of the XIth international congress of philosophy, v. V. Amsterdam, 1953.
52. Лукасевич Я. Аристотелевская силлогистика. Издательство иностранной литературы. Москва, 1959.
53. Bocheński I. M. Logisch — Philosophische Studien. Freiburg— München, 1959.

О ЛОГИЧЕСКИХ РАБОТАХ А. А. ЗИНОВЬЕВА

Александр Александрович Зиновьев — большое явление русской культуры второй половины XX века.

Человек ренессансного таланта — философ, социальный теоретик, глубокий исследователь современной цивилизации, писатель, художник, публицист, общественный деятель, — он прожил сложную, драматическую жизнь и остался верным своим убеждениям.

Однако широкая публика не всегда знает, что А. А. Зиновьев начинал свои исследования с логики. Именно эти проблемы были в течение длительного времени в центре его интересов. В этой области им высказано множество идей, некоторые из которых были сразу же подхвачены коллегами в нашей стране и за рубежом, другие первоначально были не поняты, хотя постепенно стали использоваться (нередко без ссылки на автора), третьи все еще ожидают признания.

Я хочу подчеркнуть, что логика была не просто той областью, в которой А. А. Зиновьев начинал свою исследовательскую деятельность и которую он затем оставил ради других занятий. В действительности логика лежит в основе всех его социальных и философско-этических построений. Не случайно одна из его важнейших книг называется «Логическая социология». Но саму логику он понимал по-своему, нередко в противоречии с тем, что считалось общепринятым.

Для А. А. Зиновьева смысл логики не в конструировании формальных исчислений, а в использовании формальных методов для выработки приемов научного познания. Так было начиная с первых его работ, посвященных исследованию логического метода в «Капитале» К. Маркса и кончая работами по логической физике и логической социологии. Именно этот смысл имеют работы А. А. Зиновьева по комплексной логике. В последние годы жизни он разрабатывал программу интеллектологии, которая должна объединить логику, гносеологию и онтологию.

Вклад А. А. Зиновьева в логику значителен и далеко не освоен современными исследователями. Многие поставленные им проблемы не только не исчезли, а стали более острыми. Многие его идеи исключительно актуальны. Я надеюсь, что переиздание основных логических работ Александра Александровича привлечет к ним то внимание, которое они заслуживают.

Академик В. А. Лекторский

СОДЕРЖАНИЕ

ББК 87.4

Зиновьев Александр Александрович

Логика высказываний и теория вывода / Вступ. ст. В. А. Лекторского. Изд. 2-е, испр. и доп. — М.: Издательство ЛКИ, 2010. — 160 с. (Из наследия А. А. Зиновьева.)

Настоящая книга, написанная выдающимся отечественным философом и логиком А. А. Зиновьевым, посвящена проблеме логического следования, которая, по мнению автора, является одной из центральных теоретических проблем современной логики. Проблема логического следования заключается, коротко говоря, в следующем: можно ли классическую логику высказываний непосредственно рассматривать как общую теорию вывода, дающую описание привычно ясных правил вывода; если нет, то можно ли для логического следования построить систему, аналогичную построениям в классической логике высказываний? При исследовании этой проблемы автор апеллирует к интуитивному пониманию правил вывода, к эмпирическим данным рассуждений и т. п.

Рекомендуется философам, логикам, методологам науки, студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

Ответственный редактор
доктор философских наук П. В. Таванец

Издательство ЛКИ. 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.
Формат 60×90/16. Печ. л. 10. Зак. № 3502.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

ISBN 978-5-382-01174-5

Александр Александрович ЗИНОВЬЕВ

(1922–2006)

Всемирно известный логик, социолог, писатель, публицист. Родился в деревне Пахтино Чухломского района Костромской области. Участник Великой Отечественной войны с первого до последнего дня, удостоен боевых наград. В 1951 г. окончил философский факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, затем там же аспирантуру. В 1954 г. защитил кандидатскую диссертацию «Логика “Капитала” Маркса»; через шесть лет — докторскую диссертацию «Философские проблемы многозначной логики». Они снискали автору репутацию яркого, смелого, независимого ученого.

С 1959 по 1976 гг. А. А. Зиновьев — научный сотрудник Института философии АН СССР; одновременно в 1963–1969 гг. — профессор, заведующий кафедрой логики философского факультета МГУ. Разработал оригинальную концепцию логики (комплексная логика). Опубликовал ряд монографий по логике и методологии науки («Философские проблемы многозначной логики», «Логика высказываний и теория вывода», «Основы логической теории научных знаний», «Комплексная логика», «Логика науки», «Логическая физика»). Многие из них переведены на иностранные языки. Получил признание в международном научном сообществе как один из крупнейших логиков XX века.

Параллельно занимался изучением реального коммунизма, построенного в Советском Союзе. Результатом этих исследований стали вышедшие за рубежом социологические романы «Зияющие высоты» (1976) и «Светлое будущее» (1978). Они имели огромный резонанс во всем мире.

После выхода этих книг А. А. Зиновьев был лишен советского гражданства и выслан вместе с семьей из СССР; 21 год жил в Мюнхене. В период вынужденной эмиграции разрабатывал логику и методологию социального познания, создал теорию коммунистического строя, теорию формирующегося на Западе сверхобщества. Он стал первым, кто с научных позиций подверг критике горбачевскую перестройку, точно предсказал ее исход, проанализировал постсоветский этап в новейшей истории России. Удостоен ряда научных наград и званий, включая премию А. де Токвиля — высшую международную премию в области социологии. А. А. Зиновьев — единственный в России обладатель этой премии. Активно занимался публицистической деятельностью. Всего им написано около 50 книг и сотни статей.

В 1999 г. А. А. Зиновьев вернулся в Москву. В последние годы он активно вел научную работу, выпустил ряд книг, в числе которых «Очерки комплексной логики» (URSS, 2000), «Логическая социология» (2002) и «Фактор понимания» (2006), преподавал в вузах, занимался общественной деятельностью. А. А. Зиновьев скончался в 2006 году после тяжелой болезни и был похоронен в Москве на Новодевичьем кладбище.

8782 ID 112284

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

E-mail:
URSS@URSS.ru