ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ

ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ СЕРВИСА (ПВГУС)»

Кафедра **«Высшая математика»**

СОГЛАСОВАНО	УТВЕРЖДАЮ
Протокол УМС №__________	Проректор по УР и КО
от « »_______________2010	_______________ О.Н. Наумова
Проректор по УМР	
________________ С.П. Ермишин	

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов» для студентов технических направлений и специальностей

Составитель: М.С. Спирина

Тольятти 2010

Утверждено на заседании кафедры «Высшая математика»

Протокол № 7 от 22.04.10

Зав. кафедрой «ВМ», к.ф.- м.н., доцент _____________ Т.В. Никитенко

Утверждено Научно-методическим Советом по естественно-научным и математическим дисциплинам

Протокол № ____ от «____» ____________2010

Доцент, к.ф.-м.н _______________________________________ Т.В. Никитенко

Введение

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов» является логическим продолжением пособия «Конспект лекций по курсу «Математическая логика и теория алгоритмов» для студентов технических специальностей и направлений. Составитель: М.С. Спирина. Тольятти, 2010». Пособие призвано осуществить практическую поддержку теоретического курса по этой дисциплине. Пособие содержит типичные задания и наиболее важные задачи, необходимые для приобретения опыта практической деятельности по этой дисциплине. Пособие написано в соответствии с действующей программой по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов», раздел «Общие математические и естественнонаучные дисциплины» для студентов технических специальностей и направлений. Основной задачей изучения этой дисциплины при подготовке студентов технических специальностей и направлений является обеспечение условий для формирования профессиональной компетентности в области информационных систем различного назначения. Благодаря изучению математической логики будущий выпускник будет подготовлен к решению профессиональных задач в проектно-конструкторской и производственно-технологической деятельности.

«Математическая логика и теория алгоритмов» тесно связана с дисциплиной «Дискретная математика» и является ее логическим продолжением. В свою очередь знания математической логики будут востребованы при изучении таких спецдисциплин как «Программирование на языке высокого уровня», «Основы теории управления», «Организация ЭВМ и систем», «Базы данных», «Методы и средства защиты компьютерной информации» и других.

Целью пособия является оказание методической помощи студентам при выполнении практических заданий по этой дисциплине. Поэтому каждое занятие начинается с кратких теоретических сведений, необходимых для выполнения практических заданий. Широко представлена система упражнений: для каждого учебного элемента в пособии имеется практическое задание, а для каждого вида заданий в пособии имеется соответствующий образец решения с подробными комментариями.

«Математическая логика и теория алгоритмов» является глубоко абстрактной и поэтому весьма сложно усваиваемой студентами наукой, по которой недостаточно доступной учебно-методической литературы. В связи с этим издание данного пособия приобретает особую актуальность для студентов заочной формы обучения. Однако структура данного пособия не позволяет включить в него в полном объеме весь теоретический материал, необходимый для осмысленного выполнения практических заданий. Так как в этой дисциплине много новых терминов и математических символов, то для их применения важно знать точное определение понятий и смысл символов. Поэтому для выполнения практических заданий студентам как дневной, так и заочной форм обучения рекомендуется предварительно внимательно ознакомиться с содержанием соответствующих лекций по пособию [14]. Вместе с тем, основные сокращения, символы и обозначения приведены в конце пособия. В пособии принят следующий способ нумерации: номер каждого задания состоит из двух чисел: первое число соответствует номеру занятия, второе – есть порядковый номер конкретного задания на этом занятии.

Содержание

Раздел 1. Построение логических исчислений

Занятие №1. Логика высказываний

Совершенные и минимальные формы. Формула F называется **тавтологией,** если самый правый из столбцов таблицы истинности – столбец значений, содержит единицы (истина), и только единицы. Обозначение **тавтологии**: $\models F$.

Теорема. Критерий тождественно истинной формулы алгебры логики:

Для того чтобы формула логики высказываний была тавтологией, необходимо и достаточно, чтобы в ее КН-форме каждый дизъюнкт содержал слагаемым хотя бы одну переменную вместе с ее отрицанием.

Теорема. Критерий тождественно ложной формулы алгебры логики:

Для того чтобы формула логики высказываний была тождественно ложной, необходимо и достаточно, чтобы в ее ДН-форме каждый конъюнкт содержал сомножителем хотя бы одну переменную вместе с ее отрицанием.

Упражнения

Задание 1.1. Докажите тождества аналитически и проверьте с помощью таблицы истинности:

а) $x \to 1 = 1$; б) $x \mid 0 = 1$; в) $x \downarrow 1 = 0$; г) $x \to x = 1$; д) $x \leftrightarrow \bar{x} = 0$

е) $0 \to x = 1$ ж) $x \leftrightarrow x = 1$; з) $x \mid 1 = \bar{x}$; и) $x \downarrow x = \bar{x}$; к) $x \downarrow 0 = \bar{x}$;

Задание 1.2. Докажите или опровергните:

а) $A \wedge B = 1 \Leftrightarrow A \vee B = 1$;
б) $(AB) \wedge (B \to C) = A \to C$
в) $A \to (A \to B) = 1$;
г) $\bar{x} \to x = x$;
д) $x \downarrow \bar{x} = 0$;
е) $A \to B = 1 \Leftrightarrow A \vee B = 1$;
ж) $A \to B = B \to A$;
з) $A \to (B \to C) \to ((A \to B) \to (A \to C)) = 1$.
и); $\overline{x \mid y} = \bar{x} \downarrow \bar{y}$
к) $\overline{x \downarrow y} = \bar{x} \mid \bar{y}$

Задание 1.3. Задана формула $(x \vee \bar{y}) \oplus x \cdot \bar{z} \cdot (\bar{x} \vee y)$.

а) Выпишите все возможные подформулы этой формулы.
б) Постройте граф-схему этой формулы.
в) Минимизируйте формулу.

Решение: а) Подформулами будут все переменные x, y, z, входящие в данную формулу (это подформулы с нулевым числом логических связок). Подформулы с одной логической связкой: $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Подформулы с двумя логическими связками: $x \vee \bar{y}, x \cdot \bar{z}, \bar{x} \vee y$. Подформула с четырьмя логическими связками: $\bar{z} \cdot (\bar{x} \vee y)$. Пять логических связок у подформулы $x \cdot \bar{z} \cdot (\bar{x} \vee y)$ и т.д.

б) Граф-схема формулы $(x \vee \bar{y}) \oplus x\bar{z}(\bar{x} \vee y)$ имеет вид (рис.1):

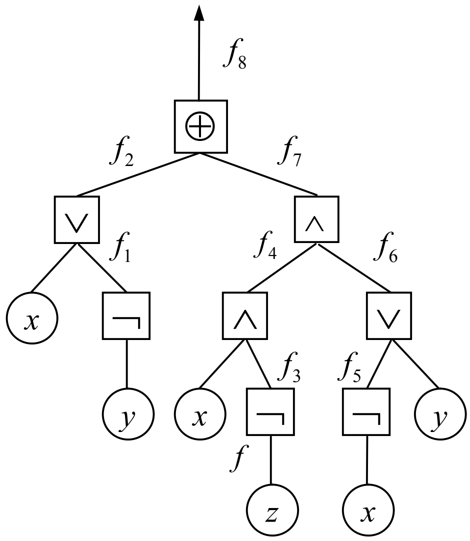


Рис.1 Граф-схема для задания 1.3

в) Минимизируем формулу, используя равносильности алгебры логики:

$$(x \vee \bar{y}) \oplus x\bar{z}(\bar{x} \vee y) =$$

$$(x \vee \bar{y}) \oplus x\bar{z}y = \overline{x \vee \bar{y}} \cdot x\bar{z}y \vee (x \vee \bar{y}) \cdot \overline{x\bar{z}y} =$$

$$= (x \vee \bar{y}) \cdot (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) = x\bar{y} \vee xz \vee \bar{y} = xz \vee \bar{y}.$$

Задание 1.4. Выпишите все возможные подформулы заданных формул. Составив таблицы истинности этих формул, докажите, что они являются тавтологиями:

а) $(((X \wedge Y) \wedge Z) \leftrightarrow (X \wedge (Y \wedge Z))$ (ассоциативность конъюнкции);

б) $(((X \vee Y) \vee Z) \leftrightarrow (X \vee (Y \vee Z))$ (ассоциативность дизъюнкции);

в) $(X \wedge (Y \vee Z)) \leftrightarrow ((X \wedge Z) \vee (X \wedge Z))$ (дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции).

г) $(X \vee (Y \wedge Z)) \leftrightarrow ((X \vee Z) \wedge (X \vee Z))$ (дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции).

д) $X \vee (X \wedge Y) \leftrightarrow X$ (закон поглощения);

е) $X \wedge (X \vee Y) \leftrightarrow X$ (закон поглощения);

ж) $X \vee (\bar{X} \wedge Y) \leftrightarrow X \vee Y$ (закон поглощения);

з) $X \wedge (\bar{X} \vee Y) \leftrightarrow X \wedge Y$ (закон поглощения);

и) $(X \wedge Y) \vee (\bar{X} \wedge Y) \leftrightarrow X$ (закон склеивания);

к) $(X \vee Y) \wedge (\bar{X} \vee Y) \leftrightarrow X$ (закон склеивания).

Задание 1.5. Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений всех предыдущих высказываний:

а) $(A \vee B) \to A = 1,\ A \to B = 1,\ \bar{A} \leftrightarrow \bar{B} = ?;$

Решение: Из первого условия $(A \vee B) \to A = 1$ заключаем, что невозможна ситуация, когда $(A \vee B) = 1$, а $A = 0$, т.е. $A = 0$ и при этом $B = 1$. Второе условие $A \vee B = 1$ исключает ситуацию, при которой $A = 1$ и $B = 0$. Следовательно, высказывания A и B имеют одинаковые значения истинности. Значит, одинаковые значения истинности имеют и их отрицания $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Отсюда высказывание $\bar{A} \to \bar{B}$ будет истинным.

б) $A \leftrightarrow B = 1, (A \to B)(\bar{A} \to \bar{B}) = ?$

Решение: Из условия $A \leftrightarrow B = 1$ следует, что A и B имеют одинаковые значения истинности. Тогда одинаковые значения истинности имеют и их отрицания $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Значит, обе импликации $A \to B$ и $\bar{A} \to \bar{B}$ истинны. Следовательно, истинна и конъюнкция двух последних высказываний.

Задание 1.6. Выполните задание по образцу задания 1.5. Определите логическое значение последнего высказывания, исходя из логических значений всех предыдущих высказываний:

а) $A \to B = 1, A \leftrightarrow B = 0, B \to A =$;
б) $A \to B = 1, (\neg A \wedge B) \to (\neg A \vee B) =$;
в) $A \leftrightarrow B = 0, \neg B \to A =$;
г) $A \wedge B = 0, A \to B = 1, B \to \neg A =$;
д) $A \leftrightarrow B = 0, A \to B = 1, (\neg A \to B) \leftrightarrow A =$;
е) $A \vee B = 1, A \to B = 1, \neg B \to A =$;
ж) $A \wedge B = 0, A \leftrightarrow B = 0, A \to B = 1, A =$;
з) $A \wedge B = 0, A \leftrightarrow B = 0, A \to B = 1, B =$;
и) $A \wedge B = 0, A \vee B = 1, A \to B = 1, B \to A =$;
к) $A \to (B \leftrightarrow A) = 0, A \to B =$;

Задание: **1.7.** Составьте таблицу истинности для формулы $((P \vee \bar{Q}) \to Q)(\bar{P} \vee Q)$ и укажите, является ли она выполнимой, опровержимой, тождественно истинной (тавтологией) или тождественно ложной (противоречием).

Решение: Пользуясь определениями логических связок, составим таблицу истинности данной формулы (логические значения этой формулы записаны в последнем столбце таблицы, где сама формула обозначена $F\,(P, Q)$):

P	Q	$\bar{Q}$	$P \vee \bar{Q}$	$(P \vee \bar{Q}) \to Q$	$\bar{P}$	$\bar{P} \vee Q$	$F\,(P, Q)$
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1

Из построенной таблицы истинности видно, что данная формула выполнима, так как если, например, вместо пропозициональной переменной P вставить в формулу ложное высказывание, а вместо Q – истинное, то вся формула превратится в истинное высказывание. Но эта формула является также и опровержимой, поскольку если, например, вместо пропозициональной переменной P вставить в формулу истинное высказывание, а вместо переменной Q – ложное, то вся формула превратится в ложное высказывание. Следовательно, формула не является ни тавтологией, ни тождественно ложной формулой.

Задание 1.8. Выполните задание по образцу задания 1.7. Составьте таблицы истинности для следующих формул и укажите, какие из формул являются выполнимыми, какие – опровержимыми, какие – тождественно истинными (тавтологиями), какие – тождественно ложными (противоречиями):

а) $(P \to Q) \to ((P \to \bar{Q}) \to \bar{P})$;
б) $((P \to Q) \to P) \to Q$;
в) $(P(Q \vee \bar{P}))((\bar{Q} \to P) \vee Q)$;
г) $((P \cdot \bar{Q}) \to Q) \to (P \to Q)$;
д) $PQ(\bar{P} \vee \bar{Q})$;
е) $(((P \to Q) \to Q) \to Q) \to Q$;
ж) $(((P \vee Q)(Q \vee R)) \vee \bar{R}) \vee Q$;
з) $(P(Q \vee R)) \to ((R \to (P \to Q)) \leftrightarrow (Q \to (R \to P)))$;
и) $\overline{(\bar{R} \to \overline{P \to \overline{Q \to R}}) \to \overline{P \to \bar{Q}}}$;
к) $(((P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow (P \leftrightarrow R)) \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)) \leftrightarrow P$.

Задание 1.9. (1.32) Докажите, что:

а) если $\models \neg F \vee G, \models \neg G \vee \neg H$, то $\models F \to \neg H$;

б) если $\models G \to F, \models (\neg F \wedge H) \leftrightarrow G, \models H$, то $\models \neg G \wedge H$.

Решение. а) Пусть $F(X_1, ..., X_n)$, $G(X_1, ..., X_n)$, $H(X_1, ..., X_n)$ – формулы, о которых идет речь в этой задаче. Предположим, что формула $F \to \neg H$ не является тавтологией.

Это означает, что существуют такие конкретные высказывания $A_1,...,A_n$, что высказывание $F(A_1,...,A_n)$ истинно, а высказывание $\neg H(A_1,...,A_n)$ ложно. Тогда высказывание $\neg F(A_1,...,A_n)$ ложно. Далее, так как формула $\neg F \vee G$ является тавтологией, то высказывание $G(A_1,...,A_n)$ истинно. Но с другой стороны, поскольку $\neg G \vee \neg H$ – тавтология, то высказывание $\neg G(A_1,...,A_n)$ истинно. Получили противоречие. Следовательно, формула $F \to \neg H$ – тавтология.

б) Предположим, что посылка данного утверждения верна, а заключение нет, т.е. формулы $G \to F$, $(\neg F \wedge H) \leftrightarrow G$ и H являются тавтологиями, а формула $\neg G \wedge H$ – нет. Последнее означает: найдутся такие конкретные высказывания $A_1,...,A_n$, что высказывание $\neg G(A_1,...,A_n) \wedge H(A_1,...,A_n)$ будет ложным. Это, в свою очередь, возможно лишь в том случае, когда, по меньшей мере, одно из высказываний $\neg G(A_1,...,A_n)$ или $H(A_1,...,A_n)$ будет ложным. Высказывание $H(A_1,...,A_n)$ ложным быть не может, поскольку это противоречило бы тождественной истинности формулы $H(X_1,...,X_n)$. Следовательно, ложно высказывание $\neg G(A_1,...,A_n)$ и, значит, истинно высказывание $G(A_1,...,A_n)$. В таком случае из истинности высказывания $G(A_1,...,A_n) \to F(A_1,...,A_n)$ вытекает истинность высказывания $F(A_1,...,A_n)$.

Рассмотрим высказывание $(\neg F(A_1, ..., A_n) \wedge H(A_1, ..., A_n)) \leftrightarrow G(A_1, ..., A_n)$, которое истинно, т.к. формула $(\neg F \wedge H) \leftrightarrow G$, по предположению, является тавтологией. Т.к. истинно высказывание $F(A_1, ..., A_n)$, то левая часть рассматриваемой эквивалентности есть ложное высказывание. Значит, ее правая часть, т.е. высказывание $G(A_1, ..., A_n)$, также ложна. Но это противоречит ранее установленной истинности этого высказывания.

Т.о., сделанное допущение приводит к противоречию. Следовательно, допущение неверно, а верно доказываемое утверждение.

Задание 1.10. (1.32) Выполните задание по образцу задания 1.9. Докажите, что:

а) если $\models F \wedge G$, $\models F \leftrightarrow G$, то $\models G \to H$;

б) если $\models F \vee G$, $\models G \to H$, то $\models F \vee H$;

в) если $\models \bar{F} \to G, \models \bar{G} \vee \bar{H}$, то $\models H \to F$;

г) если $\models F \vee G$, $\models F \leftrightarrow G$, то $\models G$;

д) если $\models \bar{G} \cdot \bar{H}$, $\models F \vee G$, то $\models \bar{F} \to H$;

е) если $\models \bar{F} \to G, \models \bar{G} \cdot \bar{H}$, то $\models F \vee H$;

ж)если $\models F$, $\models F \leftrightarrow G$, $\models F \leftrightarrow H$, то $\models G \wedge H$;

з) если $\models F \leftrightarrow G, \models G \leftrightarrow H$, то $\models F \leftrightarrow H$;

и) если $\models F$, $\models G$, $\models H$, то $\models F \to (G \to H)$;

к) если $\models F \wedge G$, $\models G \to \bar{H}$, то $\models F \cdot \bar{H}$.

Задание 1.11. (1.36.) Докажите, что справедливо следующее логическое следование, руководствуясь определением этого понятия:

$P \cdot Q \vee R \models P \vee (Q \to R)$.

Выясните, будут ли верны обратные следования, т.е. будет ли формула, стоящая слева, логическим следствием формулы, стоящей справа.

Решение: Составим таблицу истинности для формул $P \cdot Q \vee R$ и $P \vee (Q \to R)$, участвующих в отношении следования:

P	Q	R	$P \cdot Q$	$P \cdot Q \vee R$	$Q \to R$	$P \vee (Q \to R)$
0	0	0	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0

0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1
				(*)		(**)

Последовательный просмотр по строкам столбцов (*) и (**) показывает, что как только в какой-либо строке столбца (*) появляется 1, так сейчас же в этой строке и в столбце (**) обнаруживается 1. Значит, требуемое логическое следование действительно выполняется.

Обратное же следование неверно, поскольку, например, в первой же строке (т.е. при $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$) формула $P \vee (Q \to R)$ принимает значение 1 (столбец (**)), а формула $P \cdot Q \vee R$ тем не менее принимает значение 0 (столбец (*)).

Задание 1.12. (1.37) Для следующих формул выясните, будет ли какая-либо из них логическим следствием другой:

а) $P \cdot Q \to R$, $(P \vee Q) \to R$;

б) $P \cdot Q \to R$, $P \vee (Q \to R)$.

Решение: а) Составим таблицу истинности данных формул:

P	Q	R	$P \cdot Q$	$P \cdot Q \to R$	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \to R$
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	1	1
				(*)		(**)

Сопоставляя столбцы (*) и (**), видим, что во всякой строке, в которой в столбце (**) стоит 1, в столбце (*) также стоит 1, но не наоборот (например, третья строка). Это означает, что первая данная формула является логическим следствием второй, но вторая, в свою очередь, не является логическим следствием первой.

б) Составим таблицу истинности данных формул:

P	Q	R	$P \cdot Q$	$P \cdot Q \to R$	$Q \to R$	$P \vee (Q \to R)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0

0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1
				(*)		(**)

Сравнивая столбцы значений данных формул, видим, что в третьей строке первая формула принимает значение 1, а вторая – значение 0, в то время как в седьмой строке вторая формула принимает значение 1, а первая – 0. Следовательно, ни одна формула из двух данных не является логическим следствием другой.

Задание 1.13. (1.38.) Пользуясь определением понятия логического следствия, выясните, справедливы ли следующие логические следования:

а) $P \cdot Q,\ \neg R \to \neg Q \models R$;

б) $P \cdot Q \to R,\ \neg R \models \neg Q$.

Решение: а) Составим сначала таблицу истинности для всех трех данных формул $P \cdot Q$, $\neg R \to \neg Q$ и R, участвующих в рассматриваемом отношении:

P	Q	R	$P \cdot Q$	$\neg R$	$\neg Q$	$\neg R \to \neg Q$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	1
		(***)	(*)			(**)

Отметим столбцы таблицы, отвечающие данным формулам $P \cdot Q$, $\neg R \to \neg Q$, R, символами (*), (**), (***) соответственно. Чтобы проверить выполнимость определения логического следования для данных формул, нужно найти все те строки таблицы, в которых в обоих столбцах (*) и (**) стоят единицы, и убедиться, что в каждой из этих строк в столбце (***) также стоит единица. Значит, доказываемое логическое следование справедливо (строки, в которых не в обоих столбцах (*) и (**) стоят единицы, автоматически удовлетворяют условию из определения логического следования: для них посылка этого условия, представляющего собой импликацию, ложна, а значит, сама импликация истинна).

б) Составим таблицу истинности для всех трех данных формул:

P	Q	R	$P \cdot Q$	$P \cdot Q \to R$	$\neg R$	$\neg Q$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	1

0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	0

Найдем те строки, в которых обе посылки $(P \cdot Q) \to R$ и $\neg R$ принимают значение 1. Это 1-я, 3-я и 5-я строки. При этом в 1-й и 5-й строках формула $\neg Q$ также принимает значение 1, но в 3-й строке этого не происходит: $\neg Q$ принимает значение 0. Именно здесь «проваливается» определение логического следования, а значит, формула $\neg Q$ не является логическим следствием формул $(P \cdot Q) \to R$ и $\neg R$.

Задание 1.14. (1.40.) Методом от противного выясните, верно ли следующее логическое следование:

$$F \to G,\ K \to \neg H,\ H \vee \neg G \models F \to \neg K.$$

Решение: Допустим, что данное логическое следование не выполняется, т.е. существуют такие конкретные высказывания, которые превращают все формулы-посылки в истинные высказывания, а формулу-заключение $F \to \neg K$ – в ложное. Тогда из $F \to \neg K = 0$ следует, что F = 1 и $\neg K$ = 0, т.е. K = 1. Из $F \to G = 1$ и F = 1 следует, что G =1. Далее, из $H \vee \neg G = 1$ и G = 1 заключаем, что H = 1, т.е. $\neg H = 0$. Наконец из $K \to \neg H = 1$ и $\neg H = 0$ получаем K = 0. Пришли к противоречию. Следовательно, формула $F \to \neg K$ не может превращаться в ложное высказывание, если все формулы $F \to G,\ K \to \neg H,\ H \vee \neg G$ превратились в истинные высказывания. Это означает, что рассматриваемое логическое следование верно.

Задание 1.15. Докажите, что формула $P \cdot Q \to ((R \vee Q) \to (Q \cdot \overline{Q}))$ выполнима, не составляя для нее таблицу истинности, а указав какие-нибудь значения входящих в нее пропозициональных переменных, при которых эта формула обращается в истинное высказывание.

Решение: Заключение второй импликации есть тождественно ложная формула. Поэтому если посылка $R \vee Q$ второй импликации превратится при некоторой подстановке в ложное высказывание, то эта импликация станет истинным высказыванием и, следовательно, вся данная импликация превратится в истинное высказывание независимо от того, в какое высказывание обратится посылка $P \cdot Q$ всей данной импликации. Посылка $R \vee Q$ второй импликации обращается в ложное высказывание, когда вместо переменных R и Q подставляются ложные высказывания. Итак, данная формула выполнима, поскольку она обращается в истинное высказывание, если вместо R и Q подставить ложные высказывания, а вместо P – произвольное высказывание (его истинностное значение в данном случае не повлияет на истинностное значение всего высказывания).

Задание 1.16. Выполните задание по образцу задания 1.15. Докажите, что следующие формулы выполнимы, не составляя для них таблиц истинности, а указав какие-нибудь значения входящих в них пропозициональных переменных, при которых эти формулы обращаются в истинные высказывания:

а) $((Q \to \overline{P}) \to P) \to (P \to (\overline{P} \to Q))$;

б) $(P \to Q) \to (Q \to P)$;

в) $((P \to Q) \cdot (Q \to R)) \to (\overline{R} \to \overline{P})$;

г) $\overline{(P \leftrightarrow \overline{Q}) \vee R} \cdot Q$;

д) $(((P \to Q) \to (R \to Q)) \to (R \to P)) \to (P \to Q)$;

е) $\neg(P \to \neg P)$;

ж) $(P \to ((Q \to R) \to R)) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R))$;

з) $(Q \to (P \cdot R)) \cdot \overline{(P \vee R) \to Q}$;

и) $((P \leftrightarrow Q)\cdot(Q \leftrightarrow R)) \rightarrow (P \vee R)$; к) $((P\cdot\bar{Q}) \vee (\bar{P}\cdot Q)) \leftrightarrow (P \leftrightarrow Q)$;

Задание 1.17. Докажите, что формула $(X \vee Y) \rightarrow ((\neg X \wedge Y) \vee (X \wedge \neg Y))$ опровержима, не составляя для нее таблицу истинности, а указав какие-нибудь значения входящих в нее пропозициональных переменных, при которых эта формула обращается в ложное высказывание.

Решение: Импликация ложна лишь в одном случае: когда ее посылка истинна, а следствие ложно. Следствием данной импликации является дизъюнкция, которая ложна тогда и только тогда, когда оба ее слагаемых ложны. Формула обратится в ложное высказывание, если найдутся такие высказывания A и B, что высказывание $A \vee B$ истинно, а оба высказывания $\neg A \wedge B$ и $A \wedge \neg B$ ложны. Если высказывания A и B имеют разные истинностные значения, то высказывания $\neg A \wedge B$ и $A \wedge \neg B$ не могут быть ложны оба. Поэтому A и B либо оба истинны, либо оба ложны. Но если A и B оба ложны, то высказывание $A \vee B$ ложно, что нас не устраивает. Следовательно, A и B должны быть оба истинны. Итак, мы доказали, что данная формула превращается в ложное высказывание в том и только в том одном случае, когда вместо переменных X и Y подставляются истинные высказывания.

Литература: [1], ч.1; [2], гл.1, 5; [3], гл.1, 2; [4], гл.1, 2; [6], гл.1, [7], гл.2, п.2.1, 2.2; [8], гл.4; [9], гл.8; [10], гл.2-11; [13], гл.6, [14].

Занятие №2. Логика предикатов.
Логическое следование.

Логическое следование. Высказывательная форма Φ_2 **следует** из высказывательной формы Φ_1, если импликация $\Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ обращается в истинное высказывание при любых наборах значений переменных, входящих в нее. Формула Φ_2 называется **логическим следствием** формулы Φ_1, если при всякой интерпретации, при которой Φ_1 превращается в тождественно истинный предикат, формула Φ_2 тоже тождественно истинный предикат.

Обозначение **логического следования** $\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2$ или $\Phi_1 \models \Phi_2$.

Две формулы равносильны тогда, и только тогда, когда каждая из них является логическим следствием другой. $\lambda[F]$ – логическое значение формулы F.

Равносильности логики предикатов

1	$\exists x \exists y Q(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x Q(x,y)$	Правила перестановки одноименных кванторов	1′	$\forall x \forall y Q(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x Q(x,y)$
2	$\exists x \forall y Q(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x Q(x,y)$			
3	$\overline{\exists} x F(x) \Leftrightarrow \forall x \overline{F}(x)$	Перенос отрицания с квантора на предикат	3′	$\overline{\forall} x F(x) \Leftrightarrow \exists x \overline{F}(x)$
4	$\overline{\exists} x \overline{F}(x) \Leftrightarrow \forall x F(x)$		4′	$\overline{\forall} x \overline{F}(x) \Leftrightarrow \exists x F(x)$
5	$\exists x(F(x) \vee \Phi(x)) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \exists x F(x) \vee \exists x \Phi(x)$	Правила дистрибутивности кванторов	5′	$\forall x(F(x) \wedge \Phi(x)) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall x F(x) \wedge \forall x \Phi(x)$
6	$\exists x(F(x) \wedge \Phi(x)) \Rightarrow$ $\Rightarrow \exists x F(x) \wedge \exists x \quad x$		6′	$\forall \tilde{o} F(\tilde{o}) \vee \forall \tilde{o} \hat{O}(\tilde{o}) \Rightarrow$ $\Rightarrow \forall \tilde{o}(F(x) \vee \hat{O}(\tilde{o}))$
7	$\exists x(M \wedge F(x)) \Leftrightarrow M \wedge \exists x F(x)$		7′	$\forall x(M \wedge F(x)) \Leftrightarrow M \wedge \forall x F(x$

8	$\exists x(M \vee F(x)) \Rightarrow M \vee \exists x F(x)$		8′	$\forall x(M \vee F(x)) \Rightarrow M \vee \forall x F(x)$
9	$\exists x P(x) \Leftrightarrow \overline{\forall x \overline{P(x)}}$		9′	$\forall x P(x) \Leftrightarrow \overline{\exists x \overline{P(x)}}$

Табл.6.

Нормальные формы логики предикатов.

Приведенной называется формула, содержащая в качестве логических символов только стандартный базис: $\neg(\overline{\ })$, $\wedge$, $\vee$, где символ $\neg$ встречается только перед элементарными (атомарными) подформулами.

Нормальной называется приведенная формула, если она содержит все символы кванторов впереди или не содержит кванторов вообще (т.е. логические символы и символы предикатов стоят в области действия каждого квантора).

Формула A логики предикатов задана в **предваренной (пренексной)** нормальной форме, если она имеет вид $Q_1x_1\ldots\ Q_nx_n\ B(x_{1,\ldots,}\ x_{n,})$, где Q_i – квантор $\forall$ или $\exists$, а формула $B(x_{1,\ldots,}\ x_{n,})$ не содержит кванторов и приведена к КНФ.

Скулемовской называется такая пренексная форма, которая содержит только квантор $\forall$**.**

Доказано, что любую формулу логики предикатов можно привести к предваренной нормальной форме. **Алгоритм**:

1) исключить все вхождения связок $\leftrightarrow, \rightarrow$ с помощью эквивалентных преобразований снятие импликации (13) $a\rightarrow b=\overline{a}\vee b$ и снятие эквиваленции (14) $a\sim b=ab \vee\ \overline{a}\cdot\overline{b}$;
2) перенести все вхождения символа отрицания с квантора на предикат с помощью эквивалентных преобразований 3, 3′, 4, 4′, а также законов де Моргана и др;
3) вынести все кванторы из формул в их начало, за скобки, с помощью эквивалентных преобразований 7, 7′;
4) исключить кванторы существования, а переменные, связанные этими кванторами, заменить скулемовскими формами;
5) в стандартной форме все кванторы общности перенести в начало формулы; область действия каждого из них включить в формулу, т.к. кванторы больше не несут никакой информации, то их опустить;
6) формула привести к КНФ с помощью эквивалентных преобразований;
7) знаки конъюнкции исключить, тогда формулы распадаются на множество дизъюнктов.

Клаузальной нормальной формой (клауза – умозаключение) называется КНФ формулы логики предикатов.

Формула F в логике предикатов называется **выполнимой** (***опровержимой***) на множестве M, если *хотя бы при одной подстановке* вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на этом множестве M, она превращается в выполнимый (опровержимый) предикат.

Формула F в логике предикатов называется **общезначимой** или **тавтологией**, если она *тождественно истинна* в любой интерпретации, т.е. при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на всевозможных множествах. Обозначается **тавтология** символом $\models F$.

Упражнения

Задание 2.1. На множестве M={2, 3, 4, 6, 8}

а) выпишите бинарные отношения, соответствующие предикату P =«$x^2 > 3y$»;

б) составьте таблицу истинности для этого предиката.

Решение:

а) бинарные отношения, соответствующие предикатам P, имеют вид:

$2^2 > 3\cdot 2$, $3^2 > 3\cdot 2$, $4^2 > 3\cdot 2$, $6^2 > 3\cdot 2$,

$2^2>3\cdot3$, $3^2>3\cdot3$, $4^2>3\cdot3$, $6^2>3\cdot3$,
$2^2>3\cdot4$, $3^2>3\cdot4$, $4^2>3\cdot4$, $6^2>3\cdot4$,
$2^2>3\cdot6$, $2^2>3\cdot6$, $2^2>3\cdot6$, $2^2>3\cdot6$.

б) таблицу истинности, соответствующая предикатам *P*, имеет вид:

x y	**2**	**3**	**4**	**6**
2	л	л	л	л
3	и	л	л	л
4	и	и	и	л
6	и	и	и	и

Задание 2. 2. Выполните задание по образцу задания 2.1. На множестве $M=\{1, 3, 5, 7\}$

а) выпишите бинарные отношения, соответствующие заданным предикатам *P*;

б) составьте таблицу истинности для этих предикатов:

а)«$x=y$»; б) «$x>y$»; в) «$x<y$»; г) «$x\le y$»; д) «$x\ge y$»; е) «$x\ne y$»; ж) «*x* и *y* – взаимно простые числа»; з) «*x* делитель *y*»; и) «*x* кратно *y*»; к)«($x–y$) – простое число».

Задание 2.3. Докажите, что заданные пары формул логики предикатов равносильны между собой на одноэлементном множестве. Придумайте словесную интерпретацию этих формул: $\exists x(P(x)\to P(y))$ *и* $\exists x(P(x))\to P(y))$

Решение: Пусть предикаты заданы на одноэлементном множестве $\{a\}$. На этом множестве существуют только два предиката $A_0(x)$ *и* $A_1(x)$, причем $A_1(a)=1$ и $A_0(a)=0$. Задание содержит две переменные: переменная *x* – связанная (предикатом существования), а переменная *y* – свободная. Составим таблицу истинности для этой формулы:

P	y	$\exists x(P(x)\to P(y))$	$\exists xP(x)$	$P(y)$	$\exists xP(x)\to P(y)$
A_0	a	1	0	0	1
A_1	a	1	1	1	1

Подставляя в первую формулу A_0 получаем высказывание $\exists x(A_0(x)\to A_0(y))$. На одноэлементном множестве $\{a\}$ это высказывание истинно, т.к. тождественно истинен предикат $A_0(x)\to A_0(y)$.

Для второй формулы сначала найдем значения высказывания $\exists xP(x)$. В первой строке имеем $\exists xA_0(x)$ – ложное высказывание, во второй $\exists xA_1(x)$ – истинное. Аналогично находим значения $P(y)$ и подставляя их во вторую формулу получаем результат. В результате обе формулы тождественно истинны на одноэлементном множестве $\{a\}$.

Задание 2.4. Докажите, что следующие формулы являются тавтологиями логики предикатов: а) $(\forall x)\big(P(x)\to Q\big)\leftrightarrow\big((\exists x)\big(P(x)\big)\to Q\big)$;

б) $(\forall x)\big(P(x)\big)\to(\forall x)\big(P(x)\vee Q(x)\big)$.

Решение. Доказательство проведем «методом от противного».

а) Отметим, что для предикатной переменной *Q* в формуле $(\forall x)\big(P(x)\to Q\big)\leftrightarrow\big((\exists x)\big(P(x)\big)\to Q\big)$ не указано число переменных, т.к. она может быть не только 0-местной, но и любой *n*-местной. Важно лишь, чтобы в нее не входила предметная переменная *x*. Пусть *Q* есть $Q(y_1,...,y_n)$. Будем считать для краткости, что *Q* есть предикатная переменная $Q(y)$.

Предположим, что данная формула не является тавтологией. Тогда существуют такие конкретные предикаты $A(x)$ и $B(y)$, определенные на множествах M и M_1 соответственно, что предикат (от y) $(\forall x)(A(x)\to B(y))\leftrightarrow(\exists x)(A(x)\to B(y))$ опровержим, т.е. обращается в ложное высказывание при подстановке вместо предметной переменной y некоторого конкретного предмета b из M_1:

$$\lambda\left[(\forall x)(A(x)\to B(b))\leftrightarrow((\exists x)(A(x))\to B(b))\right]=0.$$

Эта эквивалентность ложна, если ее члены принимают разные значения истинности, т.е. могут представиться две возможности: первая – $\lambda\left[(\forall x)(A(x)\to B(b))\right]=1$ (1), $\lambda\left[(\exists x)(A(x))\to B(b)\right]=0$ (2) и вторая – $\lambda\left[(\forall x)(A(x)\to B(b))\right]=0$ (3), $\lambda\left[(\exists x)(A(x))\to B(b)\right]=1$ (4).

Рассмотрим первую возможность. Из (2) по определению импликации имеем $\lambda\left[(\exists x)(A(x))\right]=1$ (5) и $\lambda\left[B(b)\right]=0$ (6). Далее, из (5) по определению квантора существования заключаем, что предикат $A(x)$ выполним, т.е. $\lambda\left[A(a)\right]=1$ (7) для некоторого $a\in M$.

В соотношении (1) по определению квантора общности предикат $A(x)\to B(b)$ – тождественно истинен. В частности, если вместо предметной переменной x подставить $a\in M$, то получим истинное высказывание $\lambda\left[A(a)\to B(b)\right]=1$. Но, учитывая (6) и (7), получаем $\lambda\left[A(a)\to B(b)\right]=\lambda\left[A(a)\right]\to\lambda\left[B(b)\right]=1\to 0=0$ – противоречие.

Рассмотрим вторую возможность, выраженную в соотношениях (3), (4). Из (3), на основании определения квантора общности, следует, что предикат $A(x)\to B(b)$ опровержим, т.е. $\lambda\left[A(a)\to B(b)\right]=0$ для некоторого $a\in M$. Тогда по определению импликации $\lambda\left[A(a)\right]=1,\ \lambda\left[B(b)\right]=0$ (8). Отсюда и из соотношения (4) заключаем, что $\lambda\left[(\exists x)(A(x))\right]=0$. Последнее означает тождественную ложность предиката $A(x)$. В частности, для $a\in M$ имеем $\lambda\left[A(a)\right]=0$, что противоречит первому из соотношений (8).

Итак, в каждом случае приходим к противоречию, доказывающему невозможность сделанного предположения. Следовательно, данная формула – тавтология.

б) Предположим, что формула $(\forall x)(P(x))\to(\forall x)(P(x)\vee Q(x))$ не является тавтологией. Тогда существуют такие предикаты $A(x)$ и $B(x)$, определенные на множестве M, что высказывание $(\forall x)(A(x))\to(\forall x)(A(x)\vee B(x))$ ложно. Импликация ложна, если и только если $\lambda\left[(\forall x)(A(x))\right]=1$ (1) и $\lambda\left[(\forall x)(A(x)\vee B(x))\right]=0$ (2). Из (2) по определению квантора общности следует, что предикат $A(x)\vee B(x)$ опровержим, т.е. найдется такое предмет $a\in M$, для которого $\lambda\left[A(a)\vee B(a)\right]=0$, т.е. $\lambda\left[A(a)\right]=0$ и $\lambda\left[B(a)\right]=0$. Но утверждение $\lambda\left[A(a)\right]=0$ противоречит (1), так как из него по определению квантора общности вытекает, что предикат $A(x)$ тождественно истинный, т.е. ни при каком $a\in M$ не превращается в ложное высказывание. Следовательно, данная формула – тавтология.

Задание 2.5. Выясните, будут ли выполняться в логике предикатов следующие логические следования:

а) $(\forall x)\big(S(x) \to \neg P(x)\big) \models (\exists x)\big(P(x) \wedge \neg S(x)\big)$;

б) $(\forall x)\big(P(x) \leftrightarrow Q(x)\big) \models (\exists x)\big(Q(x) \to P(x)\big)$.

Решение: а) Предположим, что найдутся такие конкретные предикаты $A(x)$ и $B(x)$, заданные над конкретным множеством *M*, что $\lambda\Big[(\forall x)\big(B(x) \to \neg A(x)\big)\Big] = 1$ (1), а $\lambda\Big[(\exists x)\big(A(x) \wedge \neg B(x)\big)\Big] = 0$ (2). Из (1) по определению квантора общности следует, что $\lambda\Big[B(a) \to \neg A(a)\big)\Big] = 1$ (3) для любого предмета $a \in M$. Из (2) по определению квантора существования следует, что $\lambda\Big[A(b) \wedge \neg B(b)\big)\Big] = 0$ (4) для некоторого предмета $b \in M$. Отсюда видно, что если предикаты $A(x)$ и $B(x)$ взять такими, что

$$\lambda\big[B(x)\big] = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = b, \\ 0, & \text{если} \quad x \in M \setminus \{b\} \end{cases}$$

$\big(\lambda\big[A(b)\big] = 0$ и $\lambda\big[A(x)\big]$ произвольно, если $x \neq b\big)$, то противоречия не получится, соотношения (3) и (4) будут выполняться, вместе с ними будут выполняться соотношения (1) и (2), которые и будут говорить о том, что рассматриваемое следование неверно.

б) Допустим, что найдутся такие конкретные предикаты $A(x)$ и $B(x)$, которые заданы над конкретным множеством *M*, что $\lambda\Big[(\forall x)\big(A(x) \leftrightarrow B(x)\big)\Big] = 1$ (1), а $\lambda\Big[(\exists x)\big(A(x) \to B(x)\big)\Big] = 0$ (2). Из (1) по определению квантора общности следует, что $\lambda\Big[A(a) \leftrightarrow B(a)\big)\Big] = 1$ (3) для любого предмета $a \in M$. Из (2) по определению квантора существования следует, что $\lambda\big[A(b) \to B(b)\big] = 0$ (4) для некоторого предмета $b \in M$. Тогда из (4) следует, что $\lambda\big[A(b)\big] = 1$, а $\lambda\big[B(b)\big] = 0$. Два последних соотношения противоречат соотношению (3). Значит, сделанное допущение неверно и рассматриваемое следование справедливо.

Задание 2.6. Выполните задание по образцу задания 2.5. Выясните, будут ли выполняться в логике предикатов следующие логические следования:

а) $Q(y) \to P(x) \models Q(y) \to (\forall x)\big(P(x)\big)$; б) $Q(y) \to (\forall x)\big(P(x)\big) \models Q(y) \to P(x)$;

в) $P(x) \to Q(y) \models (\exists x)\big(P(x)\big) \to Q(y)$; г) $(\exists x)\big(P(x)\big) \to Q(y) \models P(x) \to Q(y)$;

д) $P(x) \to Q(y) \models (\forall x)\big(P(x)\big) \to Q(y)$; е) $(\exists x)\big(S(x) \wedge \neg P(x)\big) \models (\forall x)\big(P(x) \wedge \neg S(x)\big)$;

ж) $(\exists x)\big(P(x,x)\big) \models (\exists x)(\exists y)\big(P(x,y)\big)$; з) $(\forall x)\big(P(x) \leftrightarrow Q(x)\big) \models (\forall x)\big(P(x) \to Q(x)\big)$;

и) $(\forall x)\big(P(x)\big) \to Q(y) \models P(x) \to Q(y)$; к) $(\exists x)\big(S(x) \wedge P(x)\big) \models (\exists x)\big(S(x) \vee P(x)\big)$

Литература: [2], ч.2; [3], гл.IV; [4], гл.2; [6], гл.2; [7], гл.2; [8], гл.4; [9], гл.9; [10], гл.14; [12], гл.2; [14].

Раздел 2. Формальные теории

Занятие № 3. Аксиоматические системы. Формальный вывод

Формальная аксиоматическая теория. Пусть задано множество $f=\langle f_1, f_2, \dots, f_n\rangle \in F^n$ – набор формул и правило вывода R. Если существует $R_l \in R$, такое, что $(\langle f_1, f_2, \dots, f_n\rangle, g) \in R_l$, то g называется **непосредственным следствием** формул $f_1, f_2, \dots, f_n$ (безотносительно одного определенного правила вывода), что обозначается

$$f_1, f_2, \dots, f_n \models g \text{ или } \frac{f_1, f_1, \dots, f_n}{g}.$$

Формула h называется **выводимой** из формул $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}=\Gamma$ или **следствием** формул Γ, если существует кортеж формул, где каждая формула является либо *аксиомой* теории T, либо *исходной формулой*, либо *непосредственно выводимой* (непосредственным следствием) из предыдущих.

Набор $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ называется **гипотезами** или **посылками**, что обозначается: $\Gamma \vdash h$.

Секвенция – есть **вывод** или **доказательство** формулы $f_1, f_2, \dots, f_n \vdash h$, если $\Gamma \models h$, то $\Gamma \vdash h$.

Формула h – **теорема** теории T, если существует вывод, в котором последней формулой является h, т.е., если $\Gamma = \varnothing$ и $\Gamma \vdash h$ и формула является следствием только аксиом.

Вместо записи $\varnothing \vdash h$ обычно используют $\vdash h$.

Формула $f \in F$ формальной теории $T=\langle A, F, P, R\rangle$ называется **общезначимой** (или **тавтологией**), если она выполняется в *любой* интерпретации, и **противоречивой**, если в любой интерпретации ее образ ложен.

Упражнения

Задание 3.1. Зададим формальную аксиоматическую теорию «Алгебру максимумов и минимумов» следующим образом:

1) Выделим **алфавит** A – непустое конечное множество символов (букв) – в нашем случае – арабских цифр от 0 до 9, а также знаков действий, т.е. множество

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \oplus, \otimes, =\}$.

2) Выделим **формулы** – подмножество F выражений этой теории, где $F \subset C$ – это правильно построенные выражения $\forall x (0 \le x \le 1)$. Характеристическое свойство F: «имеют смысл» те, и только те выражения, которые выполняются по следующим правилам:

– сумма двух чисел x_1 и x_2 – обозначается символом $x_1 \oplus x_2$, равна наибольшему из этих чисел, т.е. $x_1 \oplus x_2 = \max [x_1 \text{ и } x_2]$;

– произведение двух чисел x_1 и x_2 – обозначается символом $x_1 \otimes x_2$, равно наименьшему из этих чисел, т.е. $x_1 \otimes x_2 = \min [x_1 \text{ и } x_2]$.

3) Во множестве формул F выделим подмножество $P \subset F$, элементы которого назовем **аксиомами** или **законами** нашей теории:

а) переместительный (коммутативный) относительно обеих операций
$x_1 \oplus x_2 = x_2 \oplus x_1$ и $x_1 \otimes x_2 = x_2 \otimes x_1$;

б) сочетательный (ассоциативный) относительно обеих операций
$(x_1 \oplus x_2) \oplus x_3 = x_1 \oplus (x_2 \oplus x_3)$ и $(x_1 \otimes x_2) \otimes x_3 = x_1 \otimes (x_2 \otimes x_3)$;

в) распределительный (дистрибутивный) $(x_1 \oplus x_2) \otimes x_3 = x_1 \otimes x_3 \oplus x_2 \otimes x_3$;

г) законы идемпотентности $x \oplus x = \max [x \text{ и } x] = x$ и $x \otimes x = \min [x \text{ и } x] = x$;

д) операции с 0: $x \oplus 0 = \max [x, 0] = x$ и $x \otimes 0 = \min [x, 0] = 0$;

е) операции с 1: $x \oplus 1 = \max [x, 1] = 1$ и $x \otimes 1 = \min [x, 1] = x$.

Задание 3.2. 1) Составьте таблицу сложения и таблицу умножения в теории «Алгебра максимумов и минимумов» на конкретном множестве, например, $x \in \{0, 1/3, 1/2, 2/3, 1\}$:

$x_1 \oplus x_2$	0	1/3	1/2	2/3	1
0					
1/3					
1/2					
2/3					
1					

$x_1 \otimes x_2$	0	1/3	1/2	2/3	1
0					
1/3					
1/2					
2/3					
1					

2) Убедимся в справедливости законов а) – е) в этой теории.

В частности, проверим справедливость распределительного закона. С одной стороны $(x_1 \oplus x_2)x_3 = \min\{\max[x_1 \text{ и } x_2], x_3\}$ означает: если хоть одно из чисел x_1 и x_2 больше x_3, то результат равен x_3, и равно большему из этих чисел, если оба они меньше x_3. В тоже время $(x_1 \otimes x_3) \oplus (x_2 \otimes x_3) = \max\{\min[x_1 \text{ и } x_2], x_3\}$ означает: результат равен x_3, если хоть одно из чисел x_1 и x_2 меньше x_3, и равно наименьшему из чисел x_1 и x_2, если оба они больше x_3.

3) Убедитесь в справедливости законов де Моргана в этой теории:

$\overline{x_1 \oplus x_2} = \overline{x_1} \oplus \overline{x_2}$ и $\overline{x_1 \otimes x_2} = \overline{x_1} \otimes \overline{x_2}$;

4) Проверьте справедливость равенств:

max {min [1/2, 1/3], 1/4} = min {max [1/2, 1/4], max [1/3, 1/4]}

min {max [1/2, 1/3], 1/4} = max {min [1/2, 1/4], min [1/3, 1/4]}.

Задание 3.3. Докажите справедливость следующих утверждений в системе аксиом Пеано и проверьте их справедливость на конкретных примерах:

а) $(a+b)+c=a+(b+c)$;

б) $a'+b= a+b'$;

в) если $a+b= a+c$, то $b= c$.

Задание 3.4. Выполните в символах арифметики Пеано (задание 3.4.) примеры и проверьте результат в арабской системе счисления.

а) 4+7	б) 6+3	в) 8+5	г) 9+2	д) 7+8
е) 5+9	ж) 9+3	з) 6+5	и) 8+4	к) 9+6

Задание 3.5. Выполните в символах арифметики Пеано (задание 3.4.) примеры и проверьте результат в арабской системе счисления.

а) 4·7	б) 6·3	в) 8·5	г) 9·2	д) 7·8
е) 5·9	ж) 9·3	з) 6·5	и) 8·4	к) 9·6

Задание 3.6. Введем отношение нестрогого порядка $a \le b$ в системе Пеано, если для $\forall c \in$ □ справедливо $b=a+c$. Докажите справедливость следующих утверждений в системе аксиом Пеано и проверьте их справедливость на конкретных примерах:

а) $a \le a$;

б) $a \le a'$;

в) $a \le 0$ тогда и только тогда, когда $a=0$;

г) если $a \le b$, $b \le c$, то $a \le c$;

д) если $a \le b$ и $b \le a$, то $a= b$;

е) если $a \le b$ и $a \ne b$, то $a \le b'$;

ж) $c+a = c+b$, тогда и только тогда, когда $a \le b$.

Задание 3.7. Введем отношение строгого порядка в системе Пеано: $a<b$, если $a \le b$ и $a \ne b$. Докажите справедливость следующих утверждений в системе аксиом Пеано и проверьте их справедливость на конкретных примерах:

а) любые натуральные числа a и b удовлетворяют по крайней мере одному из этих условий: $a= b$, $a<b$ и $b < a$;

б) любые натуральные числа a и b удовлетворяют одному и только одному из этих условий: $a= b$, $a<b$ и $b < a$;

в) для любых натуральных чисел a и b следующие условия эквивалентны:

1. $a \le b$;
2. $a = b$ или $a < b$;
3. $a < b'$.

Литература: [3], гл.III; гл. IV; [4], гл.5; [7], ч.3; [9], гл.10, 11; [12], гл.1, 2; [13], гл.7; [14].

Занятие №4. Исчисление высказываний

Логическое следование. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ – формулы исчисления высказываний (*ИВ*). Формула B называется **логическим следствием** формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$ тогда, и только тогда, когда истинна конъюнкция формул $A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$, что обозначается

$$A_1, A_2, \ldots, A_n \Rightarrow B.$$

Секвенцией называется формула вида $A \vdash B$, что читается: «B выводимо из A».

Формула A **выводима** из формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если существует последовательность формул, в которой любая формула есть либо *аксиома*, либо принадлежит списку формул $A_1, A_2, \ldots, A_n$, называемых **гипотезами (Г)**, либо получается из предыдущих по правилу вывода *mp*. Обозначение такой секвенции: $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A$.

Секвенция $\Gamma \vdash A$ означает, что формула A **выводима** из Г. Выводимость формулы A из пустого множества аксиом $\varnothing$ равносильна тому, что A – **теорема** *ИВ*, т.е. доказуема. Обозначение такой (пустой) секвенции: $\vdash A$, что читается: «формула A выводима».

Некоторые *теоремы ИВ*:

***T*₁)** $\vdash A \to A$ –рефлексивность импликации;

***T*₂)** $A \vdash B \to A$ – введение импликации;

***T*₃)** $\tilde{A}, A \vdash B \Leftrightarrow \tilde{A} \vdash (A \to B)$ – **теорема о дедукции** – связь между $\vdash$ и $\to$**;**

***T*₄)** $A \vdash B \Leftrightarrow \vdash A \to B$ – **следствие из теоремы дедукции** (при $\Gamma = \varnothing$)

***T*₅)** $(\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, A \vdash \overline{B}) \Rightarrow (\Gamma \to \overline{A})$

***T*₆)** $A \to B, B \to C \vdash A \to C$ – правило транзитивности (гипотетический силлогизм)

***T*₇)** $A \to (B \to C), B \vdash A \to C$ – правило сечения

***T*₈)** $\vdash \overline{\overline{A}} \to A$ удаление и $\boldsymbol{T'_8}$**)** $\vdash A \to \overline{\overline{A}}$ введение двойного отрицания

***T*₉)** $\vdash (\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$ $\boldsymbol{T'_9}$**)** $(\overline{B} \to \overline{A}) \vdash (A \to B)$ противопоставление обратному

***T*₁₀)** $((A \to B) \wedge \overline{B}) \to \overline{A}$ – силлогизм modus tollens

***T*₁₁)** $(A \to B) \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B}) \to \overline{A}$ или $(A \to B) \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B}) \to B$.

Правила выводов:

1. Правило подстановки (*ms*) Если E – выводимая формула, содержащая символ A (т.е. $E(A)$), то выводима формула $E(B)$, полученная из E заменой всех вхождений A на произвольную формулу B: т.е. $\dfrac{E(A)}{E(B)}$.

2. Правило *modus ponens* (*mp*). Если набор формул A,B,C является частным случаем набора формул A, $A \to B$, то формула C является **непосредственно выводимой** из формул A и B. Тогда теорему 2 о введении импликации можно сделать новым правилом вывода: $A \models B \to A$ (читается: «$B \to A$ непосредственно выводима из A»).

Общие правила непосредственной выводимости $\models$ и выводимости $\vdash$.

Правило 1. *Общие свойства символа* $\models$ ($\vdash$):

$\boldsymbol{\Pi^1_a}$ **:** при $n>1$ $A_1, A_2, \ldots, A_n \models A_1$; $A_1, A_2, \ldots, A_n \models A_2$, … , $A_1, A_2, \ldots, A_n \models A_n$ – *из набора формул непосредственно выводима каждая*;

Π_b^1**:** если $A_1,A_2,\ldots,A_n \models C$, то $A_1, A_2,\ldots, A_n, B_1,\ldots,B_m \models C$ – *число гипотез можно увеличить*;

Π_c^1**:** если при $m>0$ и $n>0$ то $A_1,A_2,\ldots,A_m \models B_1,\ldots, A_1,A_2,\ldots,A_m \models B_n$ и $B_1,B_2,\ldots, B_n \models C$, то справедлива *транзитивность непосредственной выводимости*: $A_1,\ldots, A_m \models C$.

Те же свойства справедливы для выводимости $\vdash$.

Правило 2 *введения и удаления логических знаков*:

Пусть A,B,C – произвольные высказывания. Обозначим Φ – конечный список формул, быть может, пустой. Правила введения и удаления логических знаков представим в виде таблицы (табл.7):

Табл.7. Правила введения и удаления логических знаков.

Операция		Правила введения **ПВ***i*	Правила удаления **ПУ***i*
1	$\to$	$(\Phi,A \vdash B)\Leftrightarrow (\Phi \vdash A\to B)$	$A,A\to B \vdash B$
2	$\wedge$	$A,B \vdash A \wedge B$	$A \wedge B \vdash A$, $A \wedge B \vdash B$
3	$\vee$	$A \vdash A \vee B$	Если $\Phi,A \vdash C$ и $\Phi,B \vdash C$, то $\Phi, A \vee B \vdash C$
4	$\neg$	Если $\Phi, A \vdash B$ и $\Phi, A \vdash \overline{B}$, то $\Phi \vdash \overline{A}$	$A , \overline{A} \vdash B$ (слабое удаление)
5	$\equiv$	$A\to B, B\to A \vdash A\equiv B$	$A\equiv B \vdash A\to B$, $A\equiv B \vdash B\to A$

Правило 3 *подстановки вместо элементарных формул* (**П**$_3$):

Пусть B – некоторая формула, в которую входят элементарные формулы $a_1, \ldots, a_n$; B' – формула, полученная из B одновременной подстановкой формул $A_1, \ldots , A_n$ вместо $a_1, \ldots, a_n$. Тогда, если $\vdash B$, то $\vdash B'$.

Правило 4 *о замене* (**П**$_4$):

Пусть C_A – формула, содержащее в качестве своей части формулу A, а C_B – формула, полученная из A заменой A на B. Тогда, если $\vdash C_A$, то $\vdash C_B$.

Логическое следование есть конечная алгоритмическая операция в отличие от логической выводимости.

Множество формул Г называется **противоречивым**, если $\Gamma \vdash B\wedge\overline{B}$. Если Г – противоречивое множество формул, то его обозначают $\Gamma \vdash$.

Теоремами теории T являются тавтологии, т.е. общезначимые формулы, и только они:

$$\vdash A \Leftrightarrow A \text{ – тавтология.}$$

Метод резолюций в исчислении высказываний. Выводимость формулы B из множества посылок $F_1, F_2, \ldots, F_n$ равносильна доказательству теоремы $\vdash (F_1\wedge F_2\wedge\ldots\wedge F_n\to B)$, где $\vdash$ означает «верно, что B выводимо из $F_1\wedge F_2\wedge\ldots\wedge F_n$» . Действительно, $\vdash (F_1\wedge F_2\wedge\ldots\wedge F_n\to B)= \vdash \overline{F_1\wedge F_2\wedge\ldots\wedge F_n}\vee B = \vdash \overline{F_1\wedge F_2\wedge\ldots\wedge F_n\wedge\overline{B}}$, значит, заключение B истинно тогда и только тогда, когда формула ложна, т.е. $\lambda(F_1\wedge F_2\wedge\ldots\wedge F_n\wedge\overline{B}) = 0$

Упражнения

Задание 4.1. Докажите секвенцию «*приведение к абсурду*»: $(\overline{A}\to B)\wedge(\overline{A}\to\overline{B})\vdash A$.

Решение: Докажем секвенцию методом от противного, т.е. сведением к противоречию. Доказательство проведем «пошагово», обосновывая каждый шаг:

1) $(\overline{A}\to B), \overline{A} \vdash B$ – правило вывода *mp*;

2) $(\overline{A}\to B), \overline{A} \vdash \overline{A}$ – Π_a^1 **:** из набора формул непосредственно выводима каждая;

3) $(\overline{A} \to B)$, $\overline{A}$ $\vdash$ $\overline{A} \cdot B$ – **ПВ$_2$**: введение конъюнкции для шага 2);

4) $(\overline{A} \to B)$, $\overline{A}$ $\vdash$ $\overline{\overline{A} \to \overline{B}}$ – введение $\to$ из конъюнкции для шага 3);

5) $(\overline{A} \to B)$, $(\overline{A} \to \overline{B})$ $\vdash A$ – ***L*$_3$:** контрпозиция для шага 4);

6) $(\overline{A} \to B) \wedge (\overline{A} \to \overline{B}) \vdash A$– определение $\vdash$.

Более привычен и понятен иной вид секвенции «*приведение к абсурду*»: если из A следует одновременно B и не-B, то A ложно: $A \to B, A \to \overline{B} \vdash \overline{A}$

Задание 4.2. Выполните задание по образцу заданий 4.1. Докажите справедливость теорем исчисления высказываний:

а) $A \vdash A \vee B$, т.е. к заключению можно добавить другое высказывание с помощью дизъюнкции;

б) A, $B \vdash A \wedge B$, т.е. к заключению можно добавить другое высказывание с помощью конъюнкции;

в) $A \wedge B \vdash A$

г) $A \to C$, $B \to C \vdash (A \vee B) \to C$ – распределительный закон относительно дизъюнкции посылок;

д) $\vdash \overline{A} \to (A \to B)$

е) $\vdash A \vee \overline{A}$ – закон исключенного третьего;

ж) $(\Gamma, A \vdash B$ и $\Gamma, A \vdash \overline{B}) \Rightarrow (\Gamma \to \overline{A})$ – правило введения отрицания;

и) $\vdash \overline{A \wedge \overline{A}}$ – закон противоречия;

к) $A \to B \vdash \overline{B} \to \overline{A}$ – противопоставление обратному.

Задание 4.3. Найдите все не равносильные между собой и не тождественно истинные формулы алгебры высказываний, являющиеся логическими следствиями следующей формулы (посылок) $X \to (Y \vee Z)$ и $Z \to Y$.

Решение: Составляем конъюнкцию посылок и равносильными преобразованиями приводим ее к СКН-форме:

$$(X \to (Y \vee Z))(Z \to Y) \cong (\overline{X} \vee Y \vee Z)(\overline{Z} \vee Y) \cong (\overline{X} \vee Y \vee Z)(0 \vee \overline{Z} \vee Y) \cong$$
$$(\overline{X} \vee Y \vee Z)(X\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \cong (\overline{X} \vee Y \vee Z)(X \vee Y \vee \overline{Z})(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}).$$

Логическими следствиями из данных посылок будут все совершенные дизъюнкты, входящие в полученную СКН-форму, а также всевозможные конъюнкции этих конъюнктивных одночленов по два, по три и т.д. Выписываем получающиеся формулы, придав им более удобную равносильную форму:

$\overline{X} \vee Y \vee Z \cong X \to (Y \vee Z)$ (первая посылка);

$X \vee Y \vee \overline{Z} \cong Z \to (X \vee Z)$;

$\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z} \cong (XZ) \to Y$;

$(X \vee Y \vee Z)(X \vee Y \vee \overline{Z}) \cong (X \leftrightarrow Z) \vee Y$;

$(\overline{X} \vee Y \vee Z)(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \cong (\overline{X} \vee Y) \vee Z\overline{Z} \cong \overline{X} \vee Y \vee 0 \cong \overline{X} \vee Y \cong X \to Y$;

$(X \vee Y \vee \overline{Z})(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \cong Z \to Y$ (вторая посылка);

$(\overline{X} \vee Y \vee Z)(X \vee Y \vee \overline{Z})(\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}) \cong (X \to (Y \vee Z))(Z \to Y) \cong (X \vee Z) \to Y$.

Задание 4.4. (2.34.) Выполнить самостоятельно по образцу задания 4.3. Найдите все не равносильные между собой и не тождественно истинные формулы алгебры высказываний, являющиеся логическими следствиями следующих формул (посылок):

а) $X \to Y$ и X;

б) $X \to Y$ и $\neg Y$;

в) $X \leftrightarrow Y$ и $\neg X$;

г) $X \vee Y$, X и $\neg Y$;

д) $X \to Y$ и $Y \to Z$;

е) $X \leftrightarrow Y$ и $Y \leftrightarrow Z$;

ж) $(X \wedge Y) \to Z$ и $X \vee Y$;

з) $(X \wedge Y) \to Z$ и $Y \to X$;

и) $X \to Y$, $Y \vee Z$ и $(X \wedge Y) \leftrightarrow Z$;

к) $(X \wedge Y) \to \neg Z$, Y и Z.

Задание 4.5. (8.1). Среди следующих формул укажите те, которые являются аксиомами:

а) $\left(F \to \left(\left(F \to F\right) \to F\right)\right) \to \left(\left(F \to \left(F \to F\right)\right) \to \left(F \to F\right)\right)$;

б) $F \to \left(\left(\overline{F} \to G\right) \to F\right)$;

в) $\left(G \to H\right) \to \left(F \to \left(G \to H\right)\right)$;

Решение: а) Аксиома, получающаяся из схемы аксиом (P_2), если в качестве формулы A взять F, в качестве B взять $F \to F$, а в качестве C взять F.

б) Аксиома (P_1), если взять $A \equiv F$, $B \equiv \overline{F} \to G$.

в) Аксиома (P_3), если взять $A \equiv F$, $B \equiv \overline{G}$.

Задание 4.6. (8.1). Выполните задание по образцу задания 4.5. Среди следующих формул укажите те, которые являются аксиомами:

а) $\left(\overline{F} \to G\right) \to \left(\overline{G} \to \overline{\overline{F}}\right)$;

б) $\left(\overline{F} \to \overline{\overline{G}}\right) \to \left(\left(\overline{F} \to \overline{G}\right) \to F\right)$;

в) $\overline{F} \to \left(F \to \overline{F}\right)$;

г) $\left(G \to F\right) \to \left(\left(G \to \overline{F}\right) \to \overline{G}\right)$;

д) $\left(\overline{G} \to \overline{\overline{F}}\right) \to \left(\left(\overline{G} \to \overline{F}\right)\right)$;

е) $\left(F \to G\right) \to \left(H \to \left(G \to F\right)\right)$;

ж) $\left(G \to \left(\overline{F} \to F\right)\right) \to \left(\left(G \to \overline{F}\right) \to \left(G \to F\right)\right)$;

з) $\left(\left(\overline{F} \to G\right) \to \left(F \to G\right)\right) \to \left(\overline{F} \to G\right)$;

и) $\left(\overline{\overline{\overline{F}}} \to \overline{F}\right) \to \left(\left(\overline{\overline{\overline{F}}} \to F\right) \to \overline{\overline{F}}\right)$;

к)
$$\left(F \to \left(\left(H \to F\right) \to \left(G \to \left(H \to F\right)\right)\right)\right) \to \left(\left(F \to \left(H \to F\right)\right) \to \left(F \to \left(G \to \left(H \to F\right)\right)\right)\right).$$

Задание 4.7. (8.3.) Выясните, является ли данная последовательность формул выводом из аксиом. Если является, то обоснуйте каждый шаг построения этой последовательности. Если не является, то докажите это.

а) (1) $G \to \left(F \to G\right)$,

(2) $\left(G \to \left(F \to G\right)\right) \to \left(G \to \left(G \to \left(F \to G\right)\right)\right)$,

(3) $G \to \left(G \to \left(F \to G\right)\right)$.

б) (1) $\left(\overline{G} \to \overline{F}\right) \to \left(\left(\overline{G} \to F\right) \to G\right)$,

(2) $\overline{F} \to \left(\overline{G} \to \overline{F}\right)$,

(3) $\overline{F} \to \left(\left(\overline{G} \to F\right) \to G\right)$.

Решение: а) Данная последовательность формул является выводом. Обоснуем это. Каждая из формул (1), (2) представляет собой аксиому (P_1). Формула (3) получена из (1) и (2) по правилу MP.

б) Данная последовательность формул не является выводом. Покажем это. Хотя формулы (1) и (2) являются аксиомами ((P_2) и (P_1) соответственно), формула (3) не является аксиомой и не может быть получена из (1) и (2) по правилу MP. Следовательно, раз имеется хотя бы один неверный шаг, то последовательность выводом не является.

Задание 4.8. Выполните задание по образцу задания 4.7. (8.3.) Выясните, является ли данная последовательность формул выводом из аксиом. Если является, то обоснуйте каждый шаг построения этой последовательности. Если не является, то докажите это.

а) (1) $F \to (G \to F)$,

(2) $(F \to (G \to F)) \to ((F \to G) \to (F \to F))$,

(3) $(F \to G) \to (F \to F)$.

б) (1) $(F \to F) \to (G \to (F \to F))$,

(2) $F \to F$,

(3) $G \to (F \to F)$.

в) (1) $(H \to F) \to (G \to (H \to F))$,

(2) $((H \to F) \to (G \to (H \to F))) \to (F \to ((H \to F) \to (G \to (H \to F))))$,

(3) $F \to ((H \to F) \to (G \to (H \to F)))$,

(4) $(F \to ((H \to F) \to (G \to (H \to F)))) \to ((F \to (H \to F)) \to (F \to (G \to$

$\to (H \to F))))$,

(5) $(F \to (H \to F)) \to (F \to (G \to (H \to F)))$.

(6) $F \to (H \to F)$,

(7) $F \to (G \to (H \to F))$.

г) (1) $\overline{G} \to \overline{G}$,

(2) $\left(\overline{G} \to \overline{G}\right) \to \left(\left(\overline{G} \to G\right) \to G\right)$,

(3) $\left(\overline{G} \to G\right) \to G$,

д) (1) $G \to \left(\overline{F} \to G\right)$.

Задание 4.9. (8.4а). Докажите, что формула $F \to F$ является теоремой формализованного исчисления высказываний, построив последовательность формул, являющуюся выводом данной формулы из аксиом:

Решение: Таким выводом является, например, следующая последовательность формул:

(1) $(F \to ((F \to F) \to F)) \to ((F \to (F \to F)) \to (F \to F))$,

(2) $F \to ((F \to F) \to F)$,

(3) $(F \to (F \to F)) \to (F \to F)$,

(4) $F \to (F \to F)$,

(5) $F \to F$.

В самом деле, формула (1) представляет собой аксиому (P_2), в которой в качестве формул A и B взята формула F, а в качестве формулы C – формула $F \to F$. Формула (2) представляет собой аксиому (P_1), в которой в качестве формулы B берется формула $F \to F$. Формула (3) получена из формул (1) и (2) по правилу MP. Формула (4) есть аксиома (P_1). Наконец формула (5) получена из формул (3) и (4) по правилу MP.

Задание 4.10. (8.8.) Выясните, является ли данная последовательность выводом из гипотез. Если да, то укажите, выводом из каких формул и какой формулы является. Если нет, то объясните почему.

а) (1) $G \to H$;

(2) G;

(3) H;

(4) $H \to \left(F \to H\right)$;

(5) $F \to H$.

б) (1) $F \to G$;

(2) $F \to \overline{G}$;

(3) $\left(F \to G\right) \to \left(\left(F \to \overline{G}\right) \to \overline{F}\right)$;

(4) $\left(F \to \overline{G}\right) \to \overline{F}$;

(5) $\overline{F}$.

Решение: а) Гипотезами здесь выступают формулы (1), (2). Формула (3) получена из (2), (1) по правилу MP. Т.о., имеем вывод формулы $A \to B$ из гипотез B, $B \to C$.

б) Формулы (1), (2) не являются аксиомами и потому должны быть приняты за гипотезы. Формула (3) лишь внешне похожа на аксиому (P_3), но не является ею. Формула (4) получена из (1), (3) по правилу MP. Формула (5) получена из (2), (4) по правилу MP. Т.о., данная последовательность является выводом формулы (5) из формул (1), (2), (3), но не является выводом формулы (5) из формул (1), (2).

Задание 4.11. (8.8.) Выполните задание по образцу задания 4.10. Выясните, является ли данная последовательность выводом из гипотез. Если да, то укажите, выводом из каких формул и какой формулы является. Если нет, то объясните почему.

а) (1) G;

(2) $G \to \left(F \to G\right)$;

(3) $F \to G$.

б) (1) $\left(F \to \left(F \to G\right)\right) \to \left(\left(F \to F\right) \to \left(F \to G\right)\right)$;

(2) $F \to \left(F \to G\right)$;

(3) $\left(F \to F\right) \to \left(F \to G\right)$;

(4) $F \to F$;

(5) $F \to G$.

в) (1) $F \to G$;

(2) $\overline{F} \to G$;

(3) $\left(F \to G\right) \to \left(\overline{G} \to \overline{F}\right)$;

(4) $\overline{G} \to \overline{F}$;

(5) $\left(\overline{F} \to G\right) \to \left(\overline{G} \to \overline{\overline{F}}\right)$;

(6) $\overline{G} \to \overline{\overline{F}}$;

(7) $\left(\overline{G} \to \overline{\overline{F}}\right) \to \left(\left(\overline{G} \to \overline{F}\right) \to G\right)$;

(8) $\left(\overline{G} \to \overline{F}\right) \to G$;

(9) G.

г) (1) $F \to (G \to F)$;

(2) $(F \to (G \to F)) \to ((F \to G) \to (F \to F))$;

(3) $(F \to G) \to (F \to F)$;

(4) $F \to G$;

(5) $F \to H$.

д) (1) $\overline{G} \to \overline{F}$;

(2) $\left(\overline{G} \to \overline{F}\right) \to \left(\left(\overline{G} \to F\right) \to G\right)$;

(3) $\left(\overline{G} \to F\right) \to G$;

(4) $F \to \left(\overline{G} \to F\right)$;

(5) $F \to G$.

Задание 4.12. (8.9 и, л). Докажите, что имеют место следующие выводимости, построив соответствующие выводы из гипотез:

а) $F \to G,\ G \to H \vdash F \to H$;

б) $F \to (G \to H),\ G \vdash F \to H$;

Решение.

а) Вывод секвенции $F \to G,\ G \to H \vdash F \to H$ с краткими пояснениями имеет вид:

(1) $F \to G$ (гипотеза);

(2) $G \to H$ (гипотеза);

(3) $(G \to H) \to (F \to (G \to H))$ (P_1);

(4) $F \to (G \to H)$ (MP: (2), (3));

(5) $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$ (P_2);

(6) $(F \to G) \to (F \to H)$ (MP: (4), (5));

(7) $F \to H$ (MP: (1), (6)).

(Обоснование этой выводимости опирается на теорему о дедукции).

б) Приведем вывод секвенции $F \to (G \to H),\ G \vdash F \to H$. Обоснуйте каждый шаг этого вывода:

(1) $F \to (G \to H)$;

(2) $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$;

(3) $(F \to G) \to (F \to H)$;

(4) $G \to (F \to G)$;

(5) G;

(6) $F \to G$;

(7) $F \to H$.

Задание 4.13. (8.9а, щ, в, г, д, е, ж, з, к, м). Выполните задание по образцу задания 4. 12. Докажите, что имеют место следующие выводимости, построив соответствующие выводы из гипотез:

а) $F,\ F\to G\vdash G$;

б) $\overline{F},\ \overline{G}\to F\vdash G$;

в) $G,\ H\vdash F\to G$;

г) $G\vdash H\to(F\to G)$;

д) $G,\ G\to H\vdash F\to H$;

е) $F\to G,\ G\to H,\ F\vdash H$;

ж) $F\to G,\ F\to(G\to H),\ F\vdash H$;

з) $F\to G,\ F\to(G\to H)\vdash F\to H$;

и) $F,\ G,\ F\to(G\to H)\vdash H$;

к) $F\to(G\to H)\vdash G\to(F\to H)$.

Задание 4.14. (8.10.) Докажите, что имеют место теорема $\vdash\overline{\overline{F}}\to F$, обосновав возможность построения соответствующего вывода из гипотез:

Решение: Рассмотрим следующую последовательность формул:

(1) $\left(\overline{F}\to\overline{\overline{F}}\right)\to\left(\left(\overline{F}\to\overline{F}\right)\to F\right)$;

(2) $\overline{F}\to\overline{F}$;

(3) $\left(\overline{F}\to\overline{\overline{F}}\right)\to F$;

(4) $\overline{\overline{F}}\to\left(\overline{F}\to\overline{\overline{F}}\right)$;

(5) $\overline{\overline{F}}\to F$.

Формула (1) есть аксиома (P_3). Формула (2) есть доказанная ранее теорема (**задача 4.9*а***), вывод которой мы можем вставить в данную последовательность формул. Формула (3) может быть выведена из формул (1) и (2) в силу утверждения **задачи 4.12б или 8.9л,** Этот вывод мы также могли поместить в данное доказательство. Формула (4) есть аксиома (P_1). Наконец, формула (5) может быть выведена из формул (4) и (3) на основании задачи **4.12а или 8.9*и*,** и этот вывод также можно включить в рассматриваемое доказательство. Итак, хотя мы и не в полном объеме провели доказательство данной теоремы, но ее выводимость очевидна.

Задание 4.15. (8.10.) Докажите, что имеют место следующие выводимости и теоремы, обосновав возможность построения соответствующих выводов из гипотез:

а) $\overline{F}\vdash(\overline{G}\to F)\to G$

б) $\overline{\overline{F}}\vdash F$;

в) $\vdash F\to\overline{\overline{F}}$;

г) $F\vdash\overline{\overline{F}}$;

д) $\vdash\overline{F}\to\left(\left(\overline{G}\to F\right)\to G\right)$;

е) $F\vee F\vdash F$;

ж) $(F\to G)\to\left(\left(F\to(G\to H)\right)\to(F\to H)\right)$

з) $F\wedge G\vdash G$

и) $F\vdash\left(G\to\overline{F}\right)\to(G\to F)$

Задание 4.16. (8.13а.) Докажите, что во всяком исчислении высказываний, в котором правилом вывода является правило МР и в котором справедлива теорема о дедукции, формула $F\to\left((F\to G)\to G\right)$будет теоремой (выводом из аксиом), каковы бы ни были аксиомы этого исчисления:

Решение: Правило МР состоит в том, что $A,\ A\to B\vdash B$. Применив к этому утверждению дважды теорему о дедукции, получим сначала $F\vdash(F\to G)\to G$, а затем $\vdash F\to\left((F\to G)\to G\right)$.

Задание 4.17. (8.13). Докажите, что во всяком исчислении высказываний, в котором правилом вывода является правило MP и в котором справедлива теорема о дедукции, следующие формулы будут теоремами (выводимы из аксиом), каковы бы ни были аксиомы этого исчисления:

а) $(F \to G) \to \big((F \to (G \to H)) \to (F \to H)\big)$

б) $F \to (G \to G)$;

в) $G \to (F \to F)$;

г) $(F \to G) \to \big((G \to H) \to (F \to H)\big)$;

д) $(F \to G) \to \big((H \to F) \to (H \to G)\big)$;

е) $\big((F \to G) \to F\big) \to \big((F \to G) \to G\big)$;

ж) $\big(F \to (F \to G)\big) \to (F \to G)$;

з) $\big(F \to (G \to H)\big) \to \big(G \to (F \to H)\big)$;

и) $(G \to H) \to \big(G \to (F \to H)\big)$;

к) $F \vdash (F \to G) \to G$.

Задание 4.18. (8.15 а)**.** Используя теорему о дедукции, докажите, что формула $(F \to G) \to (\overline{G} \to \overline{F})$ является теоремой ФИВ:

Решение. Покажем сначала, что $F \to G \vdash \overline{G} \to \overline{F}$, построив для этого соответствующий вывод:

(1) $F \to G$;

(2) $\overline{\overline{F}} \to F$;

(3) $\overline{\overline{F}} \to G$;

(4) $G \to \overline{\overline{G}}$;

(5) $\overline{\overline{F}} \to \overline{\overline{G}}$;

(6) $\left(\overline{\overline{F}} \to \overline{\overline{G}}\right) \to \left(\overline{G} \to \overline{F}\right)$;

(7) $\overline{G} \to \overline{F}$.

Поясним: (1) – гипотеза; (2) есть теорема на основании **задачи 4.15 (8.10*а*)**. Формула (3) может быть выведена из (2), (1) на основании **задачи 4.12а (8.9*и*)** (свойство транзитивности); (4) есть теорема в силу **задачи 4.15 в (8.10*в*).** Формула (5) может быть выведена из (3), (4) на основании задачи **4.12а (**8.9*и*) (6) есть теорема «противопоставление обратному»; наконец, (7) получена из (5), (6) по MP. Итак, формула $\overline{G} \to \overline{F}$ действительно может быть выведена из $F \to G$. Применив к этой выводимости теорему о дедукции, получим требуемую теорему.

Задание 4.19. (8.17а) Используя теорему о дедукции, докажите, что справедлива секвенция $F \wedge G \vdash F$ (при этом необходимые выводы отыщите в предыдущих задачах):

Решение. Докажем секвенцию $F \wedge G \vdash F$. Согласно определению логической связки $\wedge$ требуется доказать следующую выводимость: $\overline{F \to \overline{G}} \vdash F$. Строим вывод:

(1) $\overline{F \to \overline{G}}$;

(2) $\overline{F \to \overline{G}} \to \left(\overline{F} \to \overline{F \to \overline{G}}\right)$;

(3) $\overline{F} \to \overline{F \to \overline{G}}$;

(4) $\left(\overline{F} \to \overline{F \to \overline{G}}\right) \to \left(\left(\overline{F} \to \left(F \to \overline{G}\right)\right) \to F\right)$;

(5) $\left(\overline{F} \to \left(F \to \overline{G}\right)\right) \to F$;

(6) $\overline{F} \to \left(F \to \overline{G}\right)$;

(7) F.

Для пояснения отметим лишь, что формула (6) является теоремой 8°, а следовательно, последовательность (1 – 7) превратится в вывод формулы F из гипотезы $\overline{F \to \overline{G}}$, как только она будет пополнена доказательством формулы (6).

Задание 4.20. (8.17.) Используя теорему о дедукции, докажите, что справедливы следующие выводимости (при этом обоснование возможности соответствующего вывода постройте, опираясь, если это будет необходимо, на ранее доказанные теоремы и выводимости ФИВ):

а) $G \vdash F \vee G$

б) $F \to G \vdash \overline{G} \to \overline{F}$;

в) $F \to G,\ \overline{F} \to G \vdash G$;

г) $F \to G,\ F \to \overline{G} \vdash \overline{F}$;

д) $F,\ G \vdash F \wedge G$;

е) $F \leftrightarrow G \vdash F \to G$;

ж) $F \to G,\ G \to F \vdash F \leftrightarrow G$;

з) $F \vee G,\ F \to H,\ G \to H \vdash H$;

и) $F \to G,\ G \to H \vdash F \to H$;

к) $F \to \left(G \to H\right) \vdash G \to \left(F \to H\right)$.

Задание 4.21. (8.20 г). Докажите, что справедливо производное правило вывода $\dfrac{\Gamma \vdash F \vee G; \Gamma, F \vdash H; \Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash H}$, называемое правилом удаления дизъюнкции (Генцен), где Γ – некоторое множество формул, возможно пустое:

Решение. По теореме о дедукции из условия вытекает, что $\Gamma \vdash F \to H$ и $\Gamma \vdash G \to H$. Далее, **по задаче 4.19з (8.17з),** можно увеличить число гипотез: $F \vee G$, $F \to H$, $G \to H \vdash H$. Т.к. по условию еще $F \vdash F \vee G$, то по свойству выводимости **?,** заключаем, что $\Gamma \vdash H$.

Задание 4.22. (8.20). Докажите, что справедливы следующие производные правила вывода, называемые правилами введения и удаления логических связок (Γ – некоторое множество формул, возможно пустое):

а) удаление импликации ($\to$ – уд):

$$\frac{\Gamma \vdash F;\ \Gamma \vdash F \to G}{\Gamma \vdash G};$$

б) удаление конъюнкции ($\wedge$ – уд):

$$\frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash F};\ \frac{\Gamma \vdash F \wedge G}{\Gamma \vdash G};$$

в) удаление конъюнкции ($\wedge$ – уд):

$$\frac{\Gamma, F, G \vdash H}{\Gamma, F \wedge G \vdash H};$$

г) удаление дизъюнкции (Клини):

$$\frac{\Gamma, F \vdash H; \Gamma, G \wedge H}{\Gamma, F \vee G \vdash H};$$

д) сильное удаление отрицания (сильное $\neg$ – уд):

$$\frac{\Gamma \vdash \overline{\overline{F}}}{\Gamma \vdash F};$$

е) слабое удаление отрицания (слабое $\neg$ – уд):

$$\frac{\Gamma \vdash F; \Gamma \vdash \overline{F}}{\Gamma \vdash G}.$$

ж) введение импликации или расширение ($\to$ – вв):

$$\frac{\Gamma, F \vdash G}{\Gamma \vdash F \to G};$$

з) введение конъюнкции ($\wedge$ – вв):

$$\frac{\Gamma \vdash F, \Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \wedge G};$$

и) введение дизъюнкции ($\vee$ – вв):

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma \vdash F \vee G}; \ \frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash F \vee G}.$$

к) введение отрицания (приведение к абсурду) ($\neg$ – вв):

$$\frac{\Gamma, F \vdash G; \ \Gamma, F \vdash \overline{G}}{\Gamma \vdash \overline{F}}.$$

Задание 4.23 (8.21а, и) Используя производные правила вывода из задач 4.21 и 4.22 (8.19, 8.20), докажите, что справедливы следующие выводимости:

а) $\overline{G},\ \overline{H} \vdash \overline{G \wedge H}$;

б) $G,\ \overline{H} \vdash \overline{G \to H}$;

Решение. а) Обоснуем эту выводимость:

(1) $\overline{G},\ \overline{H},\ G \wedge H \vdash \overline{G}$ (из набора формул выводима каждая);

(2) $\overline{G},\ \overline{H},\ G \wedge H \vdash G$ ($\wedge$ – уд (задача 4.31, б));

(3) $\overline{G},\ \overline{H},\ \vdash \overline{G \wedge H}$ ($\neg$ – вв (задача 4.31, к): (1), (2)).

б) Приводим обоснование этой выводимости:

(1) $G,\ \overline{H},\ G \to H \vdash \overline{H}$ (из набора формул выводима каждая);

(2) $G,\ \overline{H},\ G \to H \vdash H$ ($\to$ – уд (задача 20а));

(3) $G,\ \overline{H} \vdash \overline{G \to H}$ ($\neg$ – вв (задача 4.31 к): (1), (2)).

Задание 4.24 (8.21.) Используя производные правила вывода из задач 4.21-4.23 (8.19, 8.20), докажите, что справедливы следующие выводимости:

а) $\overline{G}, H \vdash \overline{G \cdot H}$ б) $G, \overline{H} \vdash \overline{G \cdot H}$; в) $\overline{G}, H \vdash G \vee H$ г) $G, \overline{H} \vdash G \vee H$ д) $\overline{G}, \overline{H} \vdash G \to H$

е) $\overline{G}, H \vdash G \to H$ ж) $G, H \vdash G \to H$ з) $\overline{G}, \overline{H} \vdash G \leftrightarrow H$ и) $G, \overline{H} \vdash \overline{G \leftrightarrow H}$ к) $G, H \vdash G \leftrightarrow H$

Задание 4. 25. Задача 1. Проверим, правильно ли сделан вывод в умозаключении «Все студенты факультета информатики добросовестны в учебе или талантливы. Если они добросовестны, то систематически готовятся к занятиям. Поэтому, если студенты-информатики не будут готовиться к занятиям, то они должны быть талантливы».

Решение: Введем обозначения:

A: «студенты- информатики талантливы»

B: «студенты- информатики добросовестно относятся к учебе».

C: «систематически готовятся к занятиям»

Тогда данное умозаключение примет вид формулы

$(A \vee B),(B \to C) \Rightarrow (\overline{C} \to A)$ или $\dfrac{((A \vee B),(B \to C))}{\overline{C} \to A}$ или $(A \vee B)(B \to C) \Rightarrow (\overline{C} \to A)$

Составим таблицу истинности для проверки справедливости этого умозаключения:

A	B	C	$A\vee B$	$B\to C$	$(A\vee B)(B\to C)$	$\overline{C}$	$\overline{C}\to A$	$(A\vee B)(B\to C)\to(\overline{C}\to A)$
1	1	1	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1	0	1

Табл.8

Строки последнего столбца дали ответ на вопрос: умозаключение истинно при любых значениях пропозициональных переменных A, B, C.

Формулу можно было упростить, используя тождество $p \to q = \overline{p} \vee q$. Тогда $((A\vee B)(B\to C))\to(\overline{C}\to A)=(A\vee B)(\overline{B}\vee C)\to(\overline{\overline{C}}\vee A)=\overline{(A\vee B)(\overline{B}\vee C)}\vee(C\vee A)=$
$\overline{A\vee B}\vee\overline{\overline{B}\vee C}\vee C\vee A=\overline{A}\cdot\overline{B}\vee B\overline{C}\vee C\vee A=\overline{A}\cdot\overline{B}\vee B\overline{C}\vee C\vee A=\overline{B}\vee B\overline{C}\vee C=$
$\overline{B}\vee\overline{C}\vee C=1$. Значит, вывод верен.

Задание 4.26. Задача 2. Проверить методом резолюций вывод умозаключения: «Если институт приглашает на работу специалиста в области нанотехнологий, то институт считает это направление в науке приоритетным и развертывает работу по внедрению нанотехнологий в электронику или включает этот раздел в учебный процесс. Конкурирующий институт тоже приглашает на работу специалиста в области нанотехнологий. Значит, он развертывает работу по внедрению нанотехнологий в электронику или включает этот раздел в учебный процесс.

Введем обозначения:

A= «Институт приглашает на работу специалиста»,

B= «Институт считает это направление в науке приоритетным»,

C= «Институт развертывает работу по внедрению нанотехнологий в электронике»

D= «Институт включает этот раздел в учебный процесс».

Содержание высказывания может быть записано в формализованной виде с помощью формулы: $((A\to(B\wedge(C\vee D)))\wedge A)\to(C\vee D)$.

Решение: Вывод истинности умозаключения в этой задаче можно проверить

а) с помощью тождественных преобразований по известным законам алгебры логики;

б) применяя метод резолюций, доказать общезначимость формулы.

а) Проверим истинность умозаключения с помощью законов алгебры логики:

$$((A\to(B\wedge(C\vee D)))\wedge A)\to(C\vee D)=\overline{\left(\overline{A}\vee B(C\vee D)\right)A}\vee(C\vee D)=$$
$$=\overline{\left(B(C\vee D)\right)A}\vee(C\vee D)=\overline{B}\vee\overline{CD}\vee\overline{A}\vee C\vee D=\overline{B}\vee\overline{C}\vee\overline{D}\vee\overline{A}\vee C\vee D=1.$$

Полученная единица означает, что мы доказали истинность умозаключения.

б) Проверим истинность умозаключения с помощью **метода резолюций** и докажем общезначимость формулы. Для этого воспользуемся алгоритмом:

1) Сформулируем отрицание заключения: $\overline{C\vee D}$.

2) Приведем все посылки и отрицание заключения к КНФ:

$$((A\to(B\wedge(C\vee D)))\wedge A)\wedge\overline{C\vee D}=(\overline{A}\vee(B\wedge(C\vee D)))\wedge A\wedge(\overline{C}\wedge\overline{D})=$$
$$=B\wedge(C\vee D)\wedge A\wedge(\overline{C}\wedge\overline{D}).$$

3) Составим множество K из всех посылки и отрицание заключения: $K=\{A,B,C\vee D,\overline{C},\overline{D}\}$.

4) Произведем анализ всех возможных пар множества K по методу резолюций. Для этого объединяем в пары дизъюнкты, содержащие контрарные литеры, используя логическую операцию дизъюнкция. При этом получаем новый дизъюнкт, который называют «резольвента»: $C \vee D \vee \overline{D}$. Исключив контрарные литеры, получим резольвенту: $C \vee D \vee \overline{D} = C$.
5) Включим полученную резольвенту во множество K: $K = \{A, B, C, \overline{C}\}$. Перейдем к пункту 4.
6) Т.к. множество K содержит контрарные литеры, то их объединение в дизъюнкцию даст пустую резольвенту, т.е. умозаключение $C \vee D$ – истинно.

Задание 4.27. *Решите задачи,* установив, справедливы ли проведенные рассуждения.

а) (**3.32**.) Я пойду или в кино на новую кинокомедию *(A),* или на занятия по математической логике *(B).* Если я пойду в кино на новую кинокомедию, то я от всей души посмеюсь (*C*). Если я пойду на занятия по математической логике, то испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений *(D).* Следовательно, или я от всей души посмеюсь, или испытаю большое удовольствие от следования по путям логических рассуждений.

Справедливо ли проведенное рассуждение?

Решение: Учитывая символические обозначения высказываний, приведенные в условии, запишем посылки нашего рассуждения: $\mathrm{A} \vee \mathrm{B}, \mathrm{A} \to C, \mathrm{B} \to D$. Покажем, что для формул алгебры высказываний имеет место следующее логическое следование: $X \vee Y, X \to Z, Y \to W |= Z \vee W$, где X, Y, Z, W — пропозициональные переменные. В самом деле, предположим, что это следование неверно, т.е. найдутся такие конкретные высказывания $A_1, A_2, A_3, A_4,$ что

$$\lambda(\mathrm{A}_1 \vee \mathrm{A}_2) = 1, \lambda(\mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_3) = 1, \lambda(\mathrm{A}_2 \to \mathrm{A}_4) = 1, \text{ но } \lambda(\mathrm{A}_3 \vee \mathrm{A}_4) = 0.$$

Тогда из последнего равенства следует, что $\lambda(\mathrm{A}_3) = 0$ и $\lambda(\mathrm{A}_4) = 0$. Далее, из $\lambda(\mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_3) = 1$ и $\lambda(\mathrm{A}_3) = 0$ следует, что $\lambda(\mathrm{A}_1) = 0$, а из $\lambda(\mathrm{A}_2 \to \mathrm{A}_4) = 0$ следует, что $\lambda(\mathrm{A}_2) = 0$. Тогда $\lambda(\mathrm{A}_1 \vee \mathrm{A}_2) = \lambda(\mathrm{A}_1) \vee \lambda(\mathrm{A}_2) = 0 \vee 0 = 0$, что противоречит предположению $\lambda(\mathrm{A}_1 \vee \mathrm{A}_2) = 1$.

Таким образом, проведенное в данной задаче рассуждение справедливо. К такому выводу можно прийти, если в доказанном логическом следствии выполнить подстановку: *X=A, Y= B, Z= C, W= D.*

б) **3.35.** Если я пойду завтра на первое занятие *(A),* то должен буду рано встать *(B),* а если я пойду вечером на дискотеку (*C*), то лягу спать поздно *(D).* Если я лягу спать поздно и встану рано, то буду вынужден довольствоваться пятью часами сна. Следует ли отсюда, что я должен или пропустить завтра занятие, или не ходить вечером на дискотеку

Решение: Посылки запишем в символическом виде:

$(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge (C \to D), (D \wedge B) \to E, \neg E$. Необходимо выяснить, вытекает ли отсюда утверждение $\neg \mathrm{A} \vee \neg C$. Рассмотрим логический способ получения вывода.

Предположим, что высказывание $\neg \mathrm{A} \vee \neg C$ ложно, в то время как все посылки истинны. Тогда $\lambda(\neg \mathrm{A} \vee \neg C) = 0$, т. е. $\lambda(\mathrm{A}) = 1$ и $\lambda(C) = 1$, в то время как $\lambda((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge (C \to D)) = \lambda((D \wedge \mathrm{B}) \to E) = \lambda(\neg E) = 1$. Из этих условий заключаем, что $\lambda(E) = 0$, а $\lambda(D \wedge B) = 0$. Следовательно, $\lambda(D) = 0$ или $\lambda(B) = 0$. Если $\lambda(D) = 0$, то $\lambda(C \to D) = \lambda(C) \to \lambda(D) = 1 \to 0 = 0$ и $\lambda((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge (C \to D)) = 0$, что противоречит предположению. Если же $\lambda(\mathrm{B}) = 0$, то аналогично $\lambda(\mathrm{A} \to \mathrm{B}) = 0$ и $\lambda((\mathrm{A} \to \mathrm{B}) \wedge (C \to D)) = 0$, что снова противоречит предположению. Следовательно, не может быть ложно высказывание $\neg A \vee \neg C$, если все данные посылки истинны. Значит, вывод $\neg A \vee \neg C$ верен.

в) 3.36. Если будет холодно *(A),* то я надену теплое пальто *(B),* если рукав будет починен (*C*). Завтра будет холодно, а рукав не будет починен. Следует ли отсюда, что я не надену теплое пальто?

Решение. Посылки нашего рассуждения символически записываются следующим образом: $A \to (\tilde{N} \to B), A \wedge \neg C$. Спрашивается: следует ли отсюда утверждение $\neg B$? Предположим, что высказывание $\neg B$ ложно, в то время как все посылки являются истинными высказываниями. Тогда $\lambda(\neg B) = 0$, а $\lambda(B) = 1$. Значит, первая посылка $A \to (C \to B)$ действительно истинна, а вторая будет истинной, если A истинно, а C ложно. Таким образом, ситуация, когда посылки все истинны, а высказывание $\neg B$ ложно, вполне возможна. Это означает, что высказывание $\neg B$ не следует из данных посылок.

г) «Если будет идти снег, машину трудно будет вести. Если трудно будет вести машину, то я опоздаю, если не выеду раньше. Идет снег. Вывод: я должен выехать раньше». Проанализируйте умозаключение и найдите пропущенное высказывание (пропущенную посылку).

Решение:

1) Чтобы восстановить в этой цепочке высказываний пропущенное высказывание, введем обозначения:

C – идет снег

T – трудно вести машину

O – опоздаю

P – выехать раньше, тогда $\dfrac{(C \to T), (T \to (\overline{P} \to O)), C}{P}$.

2) Запишем условия задачи с помощью логических операций $(C \to T)(T \to (\overline{P} \to O))C \models P$. В этой цепочке высказываний не хватает одной посылки.
3) Используем и здесь метод от противного. Докажем, что пропущена одна посылка, но при этом возьмем противоположный данному вывод $\overline{P}$. Тогда формула примет вид $(C \to T)(T \to (\overline{P} \to O))C \models \overline{P}$
4) Упростим новую формулу:

$$(C \to T)(T \to (\overline{P} \to O))C\overline{P} = (\overline{C} \vee T)(\overline{T} \vee (P \vee O))C\overline{P} = C\overline{P}T(\overline{T} \vee P \vee O)) = C\overline{P}TO$$

Высказывание будет ложным, если будет ложным каждый из множителей, в частности, должно быть $\lambda(\overline{P}) = 0$, т.е. $\lambda(P)=1$ (выехать раньше). Но вывод будет верным, если действительно пойдет снег. Поэтому выехать раньше достаточно для неопоздания.

5) Для того, чтобы из этой цепочки высказываний сделать правильное и полное умозаключение, возьмем отрицание этого вывода: $\overline{TC\overline{P}O} = \overline{T} \vee \overline{C} \vee P \vee \overline{O}$. Любой член (составляющая) этой дизъюнкции может быть пропущенной посылкой. Соединим его с условием задачи и рассмотрим возможные варианты.

а) Пусть дополнительная посылка – $\overline{T}$, тогда $C \to T$, $T \to (\overline{P} \to O)$, C, $\overline{T}$

но посылки $C \to T$, C, $\overline{T}$ – противоречивы, значит этот вариант неудачный:

б) $\overline{C}$ – аналогичный вывод

в) P – выехал рано, но тогда все остальные посылки излишние, т.к. в этом случае опоздания не будет.

г) $\overline{O}$ – в соединении с первыми посылками появление этой посылки оправдано, т.к. нельзя опаздывать на работу («точность – вежливость королей»). Заметим, что посылку о том, что «опаздывать на работу нельзя» можно было найти и интуитивно.

Задание 4.28. ***Решите задачи:***

а) Андрей, Ваня и Саша собрались в поход. Учитель хорошо знавший этих ребят, высказал следующие предположения:

1)Андрей пойдет в поход только тогда, когда пойдут Ваня и Саша.

2)Андрей и Саша друзья, а это значит, что они пойдут в месте или же оба останутся дома.

3)Чтобы Саша пошёл в поход, необходимо, чтобы пошёл Ваня.

Когда ребята пошли в поход, оказалось, кто учитель немного ошибся: из трех его утверждений истинными оказались только два. Кто из названных ребят пошел в поход?

б) Петя решил поступить в МГУ и послал домой три сообщения:

1) Если я сдам математику, то я и сдам физику я сдам только при условии, что не заволю сочинения.

2) Не может быть, чтобы я завалил сочинение и математику.

3) Достаточное условие завала по физики – это двойка по сочинению.

После сдачи экзаменов оказалось, что из трех Петиных сообщений, только одно было ложным. Как Петя сдал экзамены?

в) У разбойника, посаженного в тюрьму, было три сообщника, от каждого из которых он получил по одному письму.

1) 1-е письмо. Для того чтобы твой побег состоялся, достаточно, чтобы стража была подкуплена только тогда, когда будет окончено рытьё подкопа.

2) 2-е письмо. Если стража будет подкуплена, то достаточно условие твоего побега будет состоять в своевременном рытья подкопа.

3) 3-е письмо. Если рытьё подкопа будет закончено. То необходимо подкупить стражу. Но стражу подкупить не удается. Значит побег невозможен.

Разбойник знал, что только один из его сообщников говорит правду, а остальные всегда врут. Значит из полученных трех сообщений истинно только одно. Какую информацию получил разбойник?

г) Разбойник, посаженный в тюрьму, послал своим сообщникам две записки.

1) Для побега достаточно, чтобы стража бала подкуплена только тогда, когда вам удастся передать мне верёвочную лестницу.

2) Для совершения побега достаточно, чтобы стража была подкуплена и мне была передана верёвочная лестница.

На следующий день разбойник опять послал своим сообщникам две записки. Первая записка была похожа на предыдущие:

1) Если будет подкуплена стража, то для совершения побега достаточно передать мне веревочную лестницу.

Вторая записка была полна пессимизма:

2) Невозможно, чтобы стража была подкуплена, мне была передана лестница и побег состоялся.

На третий день разбойник получил ответ: «Из каждой пары твоих высказываний истинно только одно». Какую информацию получил разбойник?

д) Совершено убийство. Подозреваются Браун, Джон и Смит. Один из них брат убитого, другой – сосед, а третий – случайный знакомый. Каждый из них сделал заявление.

Браун: Если ни я, ни Джон не виновны, то Смит тоже не виновен.

Смит: Чтобы обвинить меня и Брауна, достаточно признать Джона невиновным. Но Джон виновен. Значит, нельзя считать, что ни я, ни Браун невиновны.

Джон: Если меня сочтут виновным, то Смиту удастся оправдаться только тогда, когда оправдается Браун. Но виновен либо Смит, либо Браун. А я невиновен.

Следователь сообщил, что правду сказал только брат убитого, а остальные подозреваемые солгали. Кто убийца? Как фамилия убитого?

е) Коля пригласил свою сестру приехать к нему в гости. После этого он получил от нее три сообщения:

1) Я поеду в гости, если только со мной поедет папа.
2) Чтобы я приехала, необходимо, чтобы меня сопровождала мама.
3) Либо приедем мы с мамой, либо приедет только папа.
4) Когда приехали гости, оказалось, что из трех сообщений истинным было только одно. Кто приехал навестить Колю?

ж) После анализа химических свойств некоторого класса веществ было установлено, что:

1) если вещество обладает свойством А и В, то оно обладает и свойством *C*;
2) если имеют место свойства В и D, то имеет место А или *C*;
3) если имеет место свойство В, но не имеет места А, то имеет место *C* или D;
4) если вещество не обладает свойством *C* и обладает свойством В, то свойство А отсутствует.

Упростите информацию.

з) (3.29). Администрация морского порта издала следующие распоряжения:

1) Если капитан корабля получает специальное указание, он должен покинуть порт на своем корабле.
2) Если капитан не получает специального указания, он не должен покидать порта или впредь лишается возможности захода в этот порт.
3) Капитан или лишается впредь возможности захода в этот порт, или не получает специального указания.

Как можно упростить эту систему распоряжений?

и) 3.30. Командир осажденной крепости послал следующие три сообщения:

1) Если нам удастся получить продовольствие, то нам не будет угрожать смерть от голода.
2) Если нам не удастся получить продовольствие, то нам или будет угрожать смерть от голода, или мы попытаемся прорвать кольцо окружения.
3) Если нам будет угрожать смерть от голода, то мы попытаемся прорвать кольцо окружения.

Покажите, как можно сократить эти сообщения, не меняя их смысла.

к) (3.31). На факультативном занятии по математической логике учитель сообщил школьникам, собирающимся в туристический поход по родному краю, следующие сведения о готовящемся походе:

1) Будут приобретены новые палатки, новые рюкзаки, и школьники пойдут в поход.
2) Палатки и рюкзаки приобретаться не будут, и школьники в поход не пойдут.
3) Будут приобретены новые палатки, рюкзаки приобретаться не будут, школьники пойдут в поход.

Отметив, что, по крайней мере, одно из четырех сообщений абсолютно верно, учитель попросил учеников наилучшим образом упростить всю полученную информацию и представить ее в виде одного простого условия.

Литература: [2], ч.4; [3], гл.I, гл.III; [4], гл.2; [6], гл.5, 6; [8], гл.10, 11; [9], гл.12, 13; [11], гл.1; [12], гл.7; [14].

Занятие № 5. Исчисление предикатов

Язык исчисления предикатов. Формальная теория $S=\langle A,F,P,R\rangle$ называется **исчислением предикатов** (точнее говоря, исчислением предикатов первого порядка), если заданы:

1-2. Алфавит, термы и формулы ИП описаны в лекции 2 (стр. 12).

3. ***Аксиомы***: а) аксиомы исчисления высказываний:

P_1: $(A\to(B\to A))$;

P_2: $((A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$;

P_3: $(\overline{B}\to\overline{A})\to((\overline{B}\to A)\to B))$;

б) кванторные:

P_4 : $\forall x\, A(x)\to A(y)$;

P_5 : $A(x)\to\exists\, yA(y)$

4. ***Правила вывода***: R_1: $\dfrac{A,\, A\to B}{B}$ – *modus ponens*;

R_2: $\dfrac{A\to B(x)}{A\to\forall x\, B(x)}$ – *введение квантора общности*;

R_3: $\dfrac{A(x)\to B}{\exists x\, A(x)\to B}$ – *введение квантора существования*.

Теоремы ИП. К числу основных равносильностей логики предикатов относят:

Т1°. $\overline{\forall x P(x)} \Leftrightarrow \exists x\overline{P(x)}$;

Т2°. $\overline{\exists x P(x)} \Leftrightarrow \forall(x)\overline{P(x)}$;

Т3°. $\forall x P(x) \Leftrightarrow \overline{\exists x\overline{P(x)}}$;

Т4°. $\exists x P(x) \Leftrightarrow \overline{\forall x\overline{P(x)}}$;

Т5°. $\forall x(P(x)\wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x)\wedge\forall xQ(x)$;

Т6°. $\exists x(P(x)\vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x)\vee\exists xQ(x)$.

Для построения **отрицания** высказываний, содержащих квантор $\dfrac{\text{общности }(\forall)}{\text{существования }(\exists)}$, достаточно заменить его квантором $\dfrac{\text{существования }(\exists)}{\text{общности }(\forall)}$ и взять отрицание выражения, на которое этот квантор был «навешан».

Для многоместных кванторов также применяется это правило: осуществляется последовательный перенос отрицания с кванторного слова на предложение, стоящее за квантором, а сам квантор заменяют на двойственный. Например, для формулы $\forall x\forall y\exists z(R(x,y,z))$ построим отрицание:

$$\overline{\forall} x\forall y\exists z(R(x,y,z)) \Leftrightarrow \exists x(\overline{\forall} y\exists z(R(x,y,z)) \Leftrightarrow \exists x\exists y(\overline{\exists} z(R(x,y,z)) \Leftrightarrow \exists x\exists y\forall z(\overline{R}(x,y,z)).$$

Т.к. операции конъюнкции и дизъюнкции двойственны, то для сложных высказываний, состоящих из простых, разделенных операциями конъюнкции и дизъюнкции, **отрицание** строится по следующему правилу. Все кванторы $\exists$ заменяют на $\forall$, и наоборот, все связки *и* ($\wedge$) заменяют на *или* ($\vee$), и наоборот, а затем берут отрицание утверждения.

Метод резолюций в логике предикатов

Метод резолюций есть правило присоединения к рассуждению, в состав которого входит два утверждения $A \Rightarrow B, \quad \neg A \Rightarrow C$ их следствия – утверждения $B \vee C$.

В логике предикатов для применения метода резолюций необходимо убрать все кванторы. Для этого существуют два способа:

1) вынос всех кванторов общности за скобки;

2) приведение к скулемовской форме, т.е. исключение всех кванторов существования.

Отсюда метод резолюций в *логике предикатов* заключается в следующем:

задача – доказать общезначимость формулы. Для этого надо:

1) перейти к формуле $G = \overline{F}$ и взять ее отрицание:

2) исключить в G все кванторы существования;

3) вынести за скобки все кванторы общности, предварительно преобразовав связанные переменные с целью отличия их от свободных переменных и между собой; получим $G = \forall x \forall y ... \forall z \quad H(x, y, ..., z)$;

4) представить $H(x, y, ..., z)$ в виде КНФ и применить к ней метод резолюций для высказываний.

Справедлив *тезис Черча:* «*Любое математическое утверждение может быть записано на языке исчисления предикатов, а любое математическое доказательство можно провести в рамках исчисления предикатов*».

Метод резолюций позволяет доказать тождественную истинность формулы исчисления предикатов с помощью алгоритма.

Пусть А – формула *исчисления* предикатов. Для доказательства ее истинности достаточно доказать невыполнимость ее отрицания $\neg A$ согласно следующему алгоритму:

1) Найдем для $\neg A$ предваренную форму A_1

2) Приведем безкванторную часть формулы A_1 к КНФ без одинаковых сомножителей и без повторяющихся элементарных формул в сомножителях.

3) Приведем полученную формулу к скулемовской форме S (исключив все кванторы существования), т.е. к виду КНФ, в котором все C_i – различные между собой дизъюнкты, не содержащие равных или противоположных литералов.

4) В последовательности $C_1, \ldots, C_r$ ищем такие дизъюнкты, из которых после замены некоторых предметных переменных какими-либо термами получаются дизъюнкты D_1, D_2 с противоположными литералами.

Задание 5.1. Проверьте методами логики предикатов справедливость вывода: «Все металлы (M) – плавятся ($П$). Цинк ($Ц$) – металл. Значит, цинк плавится».

Решение: Формализация в логике предикатов имет вид:

$$\forall x (M(x) \to П(x)) \wedge \forall x (Ц(x) \to M(x)) \vdash \forall x (Ц(x) \to П(x)).$$

Снятие квантора общности приведет формулу к виду: $x(M(x) \to П(x)) \wedge (Ц(x) \to M(x))$. Тогда на основании транзитивности импликации имеем: $(Ц(x) \to M(x)), (M(x) \to П(x)) \models Ц(x) \to П(x)$. Поэтому, вывод $\forall x (Ц(x) \to П(x))$ – обобщение по R_2 – верен.

Задание 5.2. Найдите резольвенту дизъюнктов $C_1 = \overline{P(x)} \vee Q(f(x)) \vee R(y, (g(z))$ и $C_2 = \overline{R(x, y)} \vee T(y) \vee \overline{Q(x)}$.

Решение: 1) Заменим в C_2 предметную переменную x на терм $f(x)$, получим резольвенту $\overline{P(x)} \vee R(y, (g(z)) \vee \overline{R(f(x), y)} \vee T(y)$.

2) Заменим в C_1 y на x , а в C_2 y на $g(z)$ и получим еще одну резольвенту $\overline{P(x)} \vee Q(f(x)) \vee T(g(z)) \vee \overline{Q(x)}$.

Задание 5.3. Для следующих формул логики предикатов найдите эквивалентные им приведенные и предваренные формулы:

а) $\forall x\exists y(p_1(x)\to p_2(y,z))\to\exists x\forall z(p_2(x,z)\wedge p_1(y))$;

б) $\exists xp_1(x)\to\forall x(\forall zp_2(x,z)\to\forall yp_3(y))$;

в) $(\exists xp_1(x,y)\to\forall zp_2(x,z))\to(\exists zp_3(z,x)\to\forall xp_2(x,z))$;

г) $(\forall xp_1(x,y)\to\exists zp_2(y,z))\wedge(\forall xp_3(z,x)\to\forall zp_1(x,z))$;

д) $(\forall x\exists zp_1(x,y,z)\to p_2(x))\vee(\forall xp_3(x,y)\to\overline{p_2(x)})\wedge\overline{p_2(z)}$;

Задание 5.4. Докажите, что следующие формулы являются теоремами формализованного исчисления предикатов, для чего постройте выводы этих формул из аксиом:

а) $(\forall x)(F(x))\to(\exists x)(F(x))$;

б) $(\forall x)(\forall y)(F(x,y))\leftrightarrow(\forall y)(\forall x)(F(x,y))$;

в) $(\exists x)(\exists y)(F(x,y))\leftrightarrow(\exists y)(\exists x)(F(x,y))$;

г) $(\exists x)(\forall y)(F(x,y))\to(\forall y)(\exists x)(F(x,y))$.

Решение. в) Укажем последовательность шагов вывода:

(1) $F(u,v)\to(\exists x)(F(x,y))$ (аксиома (PA2));

(2) $F(u,v)\to(\exists y)(\exists x)(F(x,y))$ (аксиома (PA2));

(3) $(\exists v)(F(u,v))\to(\exists y)(\exists x)(F(x,y))$ ($\exists$-правило: (2));

(4) $(\exists u)(\exists v)(F(u,v))\to(\exists y)(\exists x)(F(x,y))$ ($\exists$-правило: (3));

(5) $(\exists x)(\exists y)(F(x,y))\to(\exists y)(\exists x)(F(x,y))$ (переименование переменных);

(6) $(\exists y)(\exists x)(F(x,y))\to(\exists x)(\exists y)(F(x,y))$ (доказывается аналогично (5));

(7) $(\exists x)(\exists y)(F(x,y))\leftrightarrow(\exists y)(\exists x)(F(x,y))$ (правило $\wedge$-вв: (5), (6)).

Задание 5.5. Докажите, что следующие формулы являются теоремами формализованного исчисления предикатов, построив их выводы из аксиом:

а) $(\exists x)(F(x))\leftrightarrow\neg(\forall x)(\neg F(x))$;

б) $\neg(\exists x)(F(x))\leftrightarrow(\forall x)(\neg F(x))$.

Решение. а) Вывод состоит из последовательности шагов:

(1) $(\forall x)(\neg F(x))\to\neg F(y)$ (аксиома PA1));

(2) $\neg\neg F(y)\to\neg(\forall x)(\neg F(x))$ (получена из (1) по правилу ФИВ: $P\to Q\vdash\neg Q\to\neg P$);

(3) $F(y)\to\neg\neg F(y)$ (теорема ФИВ);

(4) $F(y)\to\neg(\forall x)(\neg F(x))$ (получена из (3), (2) по правилу силлогизма из ФИВ);

(5) $(\exists y)(F(y))\to\neg(\forall x)(\neg F(x))$ ($\exists$-правило: (4));

(6) $(\exists x)(F(x))\to\neg(\forall x)(\neg F(x))$ (переименование: (5));

(7) $F(y)\to(\exists x)(F(x))$ (аксиома (PA2));

(8) $\neg(\exists x)(F(x)) \to \neg F(y)$ (получена из (7) по правилу контрапозиции из ФИВ);

(9) $\neg(\exists x)(F(x)) \to (\forall y)(\neg F(y))$ ($\forall$ -правило: (8));

(10) $\neg(\exists x)(F(x)) \to (\forall x)(\neg F(x))$ (переименование: (9));

(11) $\neg(\forall x)(\neg F(x)) \to \neg\neg(\exists x)(F(x))$ (получена из (10) по правилу контрапозиции);

(12) $\neg\neg(Ex)(F(x)) \to (\exists x)(F(x))$ (теорема ФИВ: $\neg\neg P \to P$);

(13) $\neg(\forall x)(\neg F(x)) \to (\exists x)(F(x))$ (получена из (11), (12) по правилу ФИВ силлогизма);

(14) $(\exists x)(F(x)) \leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg F(x))$ (правило $\wedge$-вв: (6), (13)).

Задание 5.6. Докажите, что в ФИП справедливы следующие выводимости, построив выводы формул из соответствующих гипотез:

а) $(\forall x)(F(x) \to G(x)) \vdash (\forall x)(F(x)) \to (\forall x)(G(x))$;

б) $F(y) \to G(y) \vdash (\exists x)(F(x)) \to (\exists x)(G(x))$;

в) $(\forall x)(F(x) \to G(x)) \vdash (\exists x)(F(x)) \to (\exists x)(G(x))$;

г) $(\forall x)(G \to F(x)) \vdash G \to (\forall x)(F(x))$;

д) $(\forall x)(F(x) \to G) \vdash (\exists x)(F(x)) \to G$;

е) $(\exists x)(F(x)) \to (\forall x)(G(x)) \vdash F(y) \to G(y)$;

ж) $(\exists x)(F(x)) \to (\forall x)(G(x)) \vdash (\exists x)(F(x) \to G(x))$;

з) $(\exists x)(F(x)) \to (\forall x)(G(x)) \vdash (\forall x)(F(x) \to G(x))$;

и) $(\forall x)(F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash (\exists x)(F(x)) \leftrightarrow (\exists x)(G(x))$;

к) $(\forall x)(F(x) \leftrightarrow G(x)) \vdash (\forall x)(F(x)) \leftrightarrow (\forall x)(G(x))$.

Решение. к) Вывод имеет следующий вид:

(1) $(\forall x)(F(x) \leftrightarrow G(x))$ (гипотеза);

(2) $F(y) \leftrightarrow G(y)$ (правило УКО: (1));

(3) $F(y) \to G(y)$ (правило $\wedge$-уд: (2));

(4) $G(y) \to F(y)$ (правило $\wedge$-уд: (2));

(5) $(\forall x)(F(x)) \to F(y)$ (аксиома (PA1));

(6) $(\forall x)(F(x)) \to G(y)$ (правило силлогизма: (5), (3));

(7) $(\forall x)(F(x)) \to (\forall y)(G(y))$ ($\forall$ -правило: (6));

(8) $(\forall x)(F(x)) \to (\forall x)(G(x))$ (переименование: (7));

(9) $(\forall x)(G(x)) \to G(y)$ (аксиома (PA1));

(10) $(\forall x)(G(x)) \to F(y)$ (правило силлогизма: (6), (4));

(11) $(\forall x)(G(x)) \to (\forall y)(F(y))$ ($\forall$ -правило: (10));

(12) $(\forall x)(G(x)) \to (\forall x)(F(x))$ (переименование: (11));

(13) $\big((\forall x)(F(x)) \to (\forall x)(G(x))\big) \to \big[\big((\forall x)(G(x)) \to (\forall x)(F(x))\big) \to$

$\to\left(\left((\forall x)(F(x))\leftrightarrow(\forall x)(G(x))\right)\right)\Big]$ (теорема ФИВ: $A\to(B\to(A\wedge B))$);

(14) $\left(\left((\forall x)(G(x))\to(\forall x)(F(x))\right)\right)\to\left((\forall x)(F(x))\leftrightarrow(\forall x)(G(x))\right)$ (МР: (8), (13));

(15) $(\forall x)(F(x))\leftrightarrow(\forall x)(G(x))$ (МР: (12), (14)).

Задание 5.7. Если Г, $F(x)\vdash G$, то Г, $(\exists x)(F(x))\vdash G$ при условии, что x не входит свободно ни в формулу G, ни в одну формулу из Г (правило УКС – *удаления квантора существования*).

Решение. Укажем соответствующий вывод:

(1) Г, $F(x)\vdash G$ (условие);

(2) Г $\vdash F(x)\to G$ (теорема о дедукции: (1));

(3) $F(x)\to G\vdash(\exists x)(F(x))\to G$ ($\exists$-правило);

(4) Г $\vdash(\exists x)(F(x))\to G$ (свойство выводимости: (2), (3));

(5) Г, $(\exists x)(F(x))\vdash(\exists x)(F(x))\to G$ (свойство выводимости: (4));

(6) Г, $(\exists x)(F(x))\vdash(\exists x)(F(x))$ (очевидно);

(7) $(\exists x)(F(x))$, $(\exists x)(F(x))\to G\vdash G$ (правило МР);

(8) Г, $(\exists x)(F(x))\vdash G$ (свойство выводимости: (5), (6), (7)).

Задание 5.8. (11.11) Используя теорему о дедукции, докажите, что в ФИП справедливы следующие выводимости:

а) $G\to(\forall x)(F(x))\vdash(\forall x)(G\to F(x))$;

б) $(\exists x)(F(x))\to G\vdash(\forall x)(F(x)\to G)$;

в) $(\exists x)(G\to F(x))\vdash G\to(\exists x)(F(x))$;

г) $(\exists x)(F(x)\to G)\vdash(\forall x)(F(x))\to G$;

д) $G\to(\exists x)(F(x))\vdash(\exists x)(G\to F(x))$;

е) $(\forall x)(F(x))\to G\vdash(\exists x)(F(x)\to G)$.

Решение. а) Заметим, что: $G\to(\forall x)(F(x))$, $G\vdash F(y)$. В самом деле, из формул $G\to(\forall x)(F(x))$, G по правилу МР сначала выводится $(\forall x)(F(x))$. Затем из последней формулы и аксиомы (PA1) по МР выводится формула $F(y)$. Тогда по теореме о дедукции $G\to(\forall x)(F(x))\vdash G\to F(y)$. Из последней формулы по правилу ВКО (задача 11.7, а) выводится формула $(\forall y)(G\to F(y))$, или $(\forall x)(G\to F(x))$. Окончательно, $G\to(\forall x)(F(x))\vdash(\forall x)(G\to F(x))$.

б) Докажем сначала, что

$(\exists x)(F(x))\to G$, $F(y)\vdash G$: (*)

(1) $(\exists x)(F(x))\to G$ (гипотеза);

(2) $F(y)$ (гипотеза);

(3) $F(y)\to(\exists x)(F(x))$ (аксиома (PA2));

(4) $(\exists x)(F(x))$ (MP: (2), (3));

(5) G (MP: (4), (1)).

Из выводимости (*) по теореме о дедукции заключаем, что

$$(\exists x)(F(x)) \to G \vdash F(y) \to G. \ (**)$$

Наконец, из выводимости (**) по правилу ВКО (задача 14.7, а) заключаем, что $(\exists x)(F(x)) \to G \vdash (\forall y)(F(y) \to G)$ или $(\exists x)(F(x)) \to G \vdash (\forall x)(F(x) \to G)$.

Задание 5.9. (11.12) Используя теорему о дедукции, докажите, что в ФИП справедлива теорема: $(\exists x)(F(x) \vee G(x)) \leftrightarrow ((\exists x)(F(x)) \vee (\exists x)(G(x)))$.

Решение. Докажем сначала, что $(\exists x)(F(x) \vee G(x)) \vdash (\exists x)(F(x)) \vee (\exists x)(G(x))$:

(1) $(F(y) \vdash (\exists x)(F(x))$ (правило ВКС);

(2) $(\exists x)(F(x)) \vdash (\exists x)(F(x)) \vee (\exists x)(G(x))$ (правило $\vee$-вв);

(3) $F(y) \vdash (\exists x)(F(x)) \vee (\exists x)(G(x))$ (получена из (1), (2));

(4) $G(y) \vdash (\exists x)(G(x))$ (правило ВКС);

(5) $(\exists x)(G(x)) \vdash (\exists x)(F(x)) \vee (\exists x)(G(x))$ (правило $\vee$-вв);

(6) $G(y) \vdash (\exists x)(F(x)) \vee (\exists x)(G(x))$ (получаем из (4), (5));

(7) $F(y) \vee G(y) \vdash (\exists x)(F(x)) \vee (\exists x)(G(x))$ (правило $\vee$-уд: (3), (6));

(8) $(\exists x)(F(x) \vee G(x)) \vdash (\exists x)(F(x)) \vee (\exists x)(G(x))$ (УКС: (7)).

Следовательно, по теореме о дедукции:

$$\vdash (\exists x)(F(x) \vee G(x)) \to ((\exists x)(F(x) \vee (\exists x)(G(x))). \qquad (*)$$

Теперь докажем, что $(\exists x)(F(x)) \vee (\exists x)(G(x)) \vdash (\exists x)(F(x) \vee (G(x))$:

(1) $F(y) \vdash F(y) \vee G(y)$ (правило $\vee$-вв);

(2) $F(y) \vee G(y) \vdash (\exists x)(F(x) \vee G(x))$ (правило ВКС);

(3) $F(y) \vdash (\exists x)(F(x) \vee G(x))$ (получена из (1), (2));

(4) $G(y) \vdash F(y) \vee G(y)$ (правило $\vee$-вв);

(5) $G(y) \vdash (\exists x)(F(x) \vee G(x))$ (получена из (4), (2));

(6) $(\exists x)(F(x)) \vdash (\exists x)(F(x) \vee G(x))$ (правило УКС: (3));

(7) $(\exists x)(G(x)) \vdash (\exists x)(F(x) \vee G(x))$ (правило УКС: (5));

(8) $(\exists x)(F(x) \vee (\exists x)(G(x)) \vdash (\exists x)(F(x) \vee G(x))$ (правило $\vee$-уд: (6), (7)).

Следовательно, по теореме о дедукции:

$$\vdash ((\exists x)(F(x)) \vee (\exists x)(G(x))) \to (\exists x)(F(x) \vee G(x)). \qquad (**)$$

Из теорем (*) и (**) по правилу $\wedge$-вв получаем требуемую теорему.

Задание 5.10. Используя теорему о дедукции, докажите, что в ФИП справедливы следующие теоремы:

а) $\forall x(G \to F(x)) \leftrightarrow (G \to \forall x(F(x)))$; б) $\forall x(F(x) \to G) \leftrightarrow (\exists x(F(x)) \to G)$;

в) $\exists x\left(G \to F(x)\right) \leftrightarrow \left(G \to \exists x\left(F(x)\right)\right)$;

г) $\exists x\left(F(x) \to G\right) \leftrightarrow \left(\forall x\left(F(x)\right) \to G\right)$;

д) $\forall x\left(F(x) \vee G\right) \leftrightarrow \left(\forall x\left(F(x)\right) \vee G\right)$;

е) $\exists x\left(F(x) \wedge G\right) \leftrightarrow \left(\exists x\left(F(x)\right) \wedge G\right)$;

ж) $\forall x\left(F(x) \cdot G(x)\right) \leftrightarrow \left(\forall x\left(F(x)\right) \cdot \forall x\left(G(x)\right)\right)$;

Литература: [2], ч.4; [3], гл. IV; [4], гл.2; [6], гл.2; [7], гл.7; [8], гл.4; [9], гл.10, 11; [12], гл.2; [13], гл.7; [14].

Раздел 3. Элементы теории алгоритмов

Занятие № 6. Формализация понятия алгоритма. Рекурсивные функции. Машина Тьюринга

1. Рекурсивные и вычислимые функции.

Рекурсией называется процесс последовательного вычисления значений некоторой функции.

Пусть требуется определить значение некоторой функции $f(n)$, где $n \in \mathbb{N}$, чаще всего при $n \geq 0$. Рекурсивное задание функции состоит из двух этапов.

1) Функция $T(n)$ задается непосредственно в виде числовых значений для некоторого множества начальных значений n: $1 \leq n \leq m$.
2) Задается метод или формула, которые позволяют, зная все значения функции $f(n)$ при $n \leq k$ $(k \geq m)$, вычислить ее значения при $n=k+1$, т.е. найти $f(k+1)$. Т.о. получают рекуррентное соотношение, описывающее рекурсивно заданную функцию.

Обычно эти два этапа записывают в виде рекуррентного соотношения с помощью фигурной скобки $\begin{cases} f(0)=1, \\ f(k+1)=h(f(k)), \quad k \geq 1 \end{cases}$

Простейшие (базовые) рекурсивные функции – это три вычислимые функции вида:

а) *ноль-функция*: $O(x)=O$, $\forall x \in \mathbb{N}$;

б) *функция следования* (функция Пеано) или ***S***: $S(x)= x+1$, или $x' = x+1$, $\forall x \in \mathbb{N}$, которая означает переход к следующему элементу заданного множества;

в) функция *тождества, проектирующая функция* или *функция выделения аргумента* J_m^n: $J_m^n(x_1,...,x_n) = x_m$, $1 \leq m \leq n$.

Операция получения новой функции по имеющимся функциям.

а) *Оператор суперпозиции* (*подстановки*). В основе этого оператора лежит способ вычисления, состоящий в том, что если известен способ вычисления $f(x_1...x_m)$ и $g(x_1...x_n)$ (функций, зависящих от своих наборов аргументов), то подстановка каждого набора значений $g_1(x_1...x_n)...g_m(x_1...x_n)$ дает способ вычисления $h=f(g(x))$ как функции от $x_1...x_n$.

б) *Оператор примитивной рекурсии.* Операция получения новой функции из имеющихся двух функций через *рекуррентную* формулу $f(n+1)=h(n,f(n))$ основана на приеме вычисления функции натурального аргумента $f(n+1)$ по известному значению $f(n)$.

Пусть заданы некоторые числовые частичные функции: n-местная функция g и $(n+2)$- местная функция h. Тогда $(n+1)$- местная частичная функция f «конструируется» из функций h и g с помощью *оператора примитивной рекурсии* $f=R(g,h)$по схеме:

$$f(x_1, x_2,\dots,x_n, y)=\begin{cases} f(x_1,...,x_n,0) = g(x_1,...,x_n), \quad k=0; \\ f(x_1,...,x_n,k) = h(x_1,...,x_n,k-1, f(x_1,...,x_n,k-1)), \\ 1 \leq k \leq y, \end{cases}$$

и называется **примитивной рекурсией**.

Примитивно рекурсивными называются функции, полученные из трех базовых функций при помощи двух операций – *суперпозиции* и *примитивной рекурсии*.

в) *Оператор минимизации.* Операция построения новой функции $\mu(x)$, зависящей от n переменных, по известной $f(x_1,...,x_n,y)$ согласно правилу $\mu(x)=\min\limits_{y\in N}\{y\mid f(x,y)=0\}$ называется **минимизацией.**

Функции, полученные из трех базовых функций при помощи применения конечного числа *трех* операций – *суперпозиции, примитивной рекурсии* и *минимизации* – называются **частично рекурсивными.**

Если частично рекурсивная функция определена всюду, то ее называют **общерекурсивной**. Так, *примитивно рекурсивная* функция является *общерекурсивной.*

Всякая *примитивно рекурсивная* функция является *вычислимой*.

Задание 6.1. Пусть необходимо решить уравнение $0{,}8x = 3$ с помощью компьютера, выполняющего все действия, кроме деления. Найдем алгоритм, позволяющий такому компьютеру решить такое и ему подобные уравнения. Т.е. покажем, что данная задача является «вычислимой» или «разрешимой» в предложенной модели вычислений.

Решение:

1) Представим заданное уравнение в виде $x = 0{,}2x + 3$.

2) Зададим значение x_1=1 и рассмотрим последовательность значений x_n, определяемых соотношением:

$$\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_{n+1} = 0,2x_n + 3. \end{cases}$$

Получили рекурсивно заданную последовательность, в которой каждое последующее значение определяется через предыдущее.

3) Обозначим через r_n модуль разности $|x_{n+1} - x_n| = r_n$. Тогда если

x_{n+1} =0.2 x_n+3 и x_{n+2} =0.2 x_{n+1}+3, то $x_{n+2} - x_{n+1}$=0.2 $(x_{n+2}- x_{n+1})$.

4) Отсюда r_{n+1}=0,2· r_n. Можно доказать, что эта последовательность ограниченна и имеет предел.

5) Пусть $z=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(0.2x_n+3)$. Отсюда z=0.2z+3, т.е. значение предела является корнем заданного уравнения.

Т.к. мы смогли найти корень этого уравнения без операции деления, то наш компьютер сможет решать подобные уравнения с помощью такого алгоритма.

Т.е. действительно данная задача является «вычислимой» в предложенной модели вычислений. Полученный метод решения уравнения основан на понятии **рекурсии** (от лат. *recurro* – возвращаюсь).

Задание 6.2. Найдите функции g и h в рекурсивной формуле $f(x+1)=h(x,f(x))$ для одноместной функции $f(x)=\sin \pi x$.

Решение: Алгоритм решения:

1) Найдем функцию $g(x)$, подставив в функцию $f(x)$ значение x=0. Имеем $g(x)= f(0)= sin\pi 0=0$.

2) Подставим в функцию $f(x)$ вместо x значение x+1.

Имеем: $f(x+1)= \sin \pi(x+1)= \sin (\pi x+\pi)= - \sin \pi x$.

3) Выразим функцию $f(x+1)$ через $f(x)$ и x: $f(x+1)= - \sin \pi x= - f(x)$.

4) Найдем функцию $h(x,y)$ из формулы $f(x+1)= h(x, y)$, заменив $f(x)$ *на* y, а затем x на y: $h(x,y)= -y$.

Задание 6.3. Найдите функции g, h и рекурсивные формулы для двухместной функции $f(x,y)=x{\cdot}y$, если рекурсия проводится по переменной x. Докажите, что эта двухместная функция принадлежит классу примитивно рекурсивных функций.

Решение: Алгоритм решения имеет вид:

1) Найдем функцию $g(y)= f(0,y)$ (т.к. рекурсия проводится по переменой x):

$$g(y)= f(0,y)= 0\cdot y=0.$$

2) Подставим в функцию $f(x,y)$ вместо x значение x+1: $f(x+1,y)= (x+1)\cdot y= x\cdot y + y$.

3) Выразим функцию $f(x+1,y)$ через $f(x,y)$, x, y: $f(x+1,y) = f(x,y)+ y$.
4) Найдем функцию $h(y,z)$ из формулы $f(x+1)= h(f(x),x)$, заменив $f(x)$ *на* y:

$$h(x,y,z)= z+ y.$$

5) Запишем рекурсивные формулы, используя соотношения $\begin{cases} f(0,y)=g(y) \\ f(x+1,y)=h(x,y,z)\,|_{z=f(x,y)} \end{cases}$,

учитывая, что рекурсия проводится по переменной x.
Имеем:

$$\begin{cases} 0\cdot y=0 \\ (x+1)y=xy+y \end{cases}$$

6) Докажем, что эта двухместная функция принадлежит классу примитивно рекурсивных функций.

а) Имеем из п.1: $g(y)= 0$, из п.4: $h(x,y,z)= z+ y$.

б) Выразим $g(x)$ через исходные примитивно рекурсивные функции, учитывая, что рекурсия проводится по переменной x: $g(x)=0=0(x)$.

в) Выразим $h(x,y,z)$ через исходные примитивно рекурсивные функции:
$h(x,y,z)= z+ y= I_3^2(x,y,z)+I_3^3(x,y,z)$

г) Т.к. фунцию $f(x,y)=xy$ можно получить из исходных примитивно рекурсивных функций с помощью операторов рекурсии, то она действительно принадлежит классу примитивно рекурсивных функций.

Задание 6.4. Найдите функции g, h и рекурсивные формулы для трехместной функции $f(x,y, z)=x\cdot y+ z$, если рекурсия проводится по переменной y.

Решение: Алгоритм решения:

1) Найдем функцию g: $g(x,z)=f(x,0,z)$ (т.к. рекурсия проводится по переменной y):
$g(x,z)=f(x,0,z)= x\cdot 0+ z= z.$
2) Подставим в функцию $f(x,y,z)$ вместо y значение $y+1$:
$f(x,y+1,z)= x\cdot(y+1)+ z= x\cdot y+ z+ x.$
3) Выразим функцию $f(x,y+1,z)$ *через* $f(x,y, z)$, x,y, z:
$f(x,y+1,z) = (x\cdot y+ z)+ x= f(x,y, z)+ x.$
4) Найдем функцию $h(x,y,z,t)$ из формулы $f(x,y+1,z)= h(x,y, z, f(x,y,z))$, заменив $f(x,y,z)$ *на* t:

$$h(x,y,z,t)= t+ x.$$

5) Запишем рекурсивные формулы, используя соотношения:

$$\begin{cases} f(x,0,z)=g(x,z) \\ f(x,y+1,z)=h(x,y,z,t)\,|_{t=f(x,y,z)} \end{cases}$$

(т.к. рекурсия проводится по переменной y). Имеем:

$$\begin{cases} x\cdot 0+z=z \\ x(y+1)+z=(xy+z)+x \end{cases}$$

Задание 6.5. Найдите функции g и h в рекурсивной формуле для двухместной функции $f(x,y)$, если рекурсия проводится: а) по переменной x; б) по переменной y. Составьте примитивно рекурсивное описание функции $f(x,y)$ и докажите, что эта функция принадлежит классу примитивно рекурсивных функций:

1) $f(x,y)=3xy$; 2) $f(x,y)= 5x +y$; 3) $f(x,y)=xy+y+x$; 4) $f(x,y)=2y+x+1$; 5) $f(x,y)=x^2+4y$;
6) $f(x,y)=(x + y)^2$; 7) $f(x,y)= x^2+y^2$ 8) $f(x,y)=2^{x+y}$; 9) $f(x,y)=2^x+3^y$; 10) $f(x,y)=x^2 - y^2$

Задание 6.6. Найдите функции g и h и рекурсивные формулы для трехместной функции $f(x,y, z)$, если рекурсия проводится

а) по переменной x, где $f(x,y, z)= x\,y^2z$; б) по переменной y, где $f(x,y, z)= x\,y^2z$;
в) по переменной x, где $f(x,y, z)= x^2\,(y+ z)$; г) по переменной y, где $f(x,y, z)= x^2\,(y+ z)$;

д) по переменной z, где $f(x,y,z) = x^2(y+z)$; е) по переменной z, где $f(x,y,z) = xy^2z$;

ж) по переменной y, где $f(x,y,z) = x^2y + y^2z$; з) по переменной z, где $f(x,y,z) = x^2y + y^2z$;

и) по переменной y, где $f(x,y,z) = xy + z^2$ к) по переменной z, где $f(x,y,z) = xy + z^2$

2. Машина Тьюринга. Машина Тьюринга (МТ) – гипотетическая вычислительная машина (автомат), используемая в качестве математической модели для уточнения понятия алгоритма как эффективного процесса вычисления.

Тезис Тьюринга. Всякий алгоритм может быть реализован машиной Тьюринга.

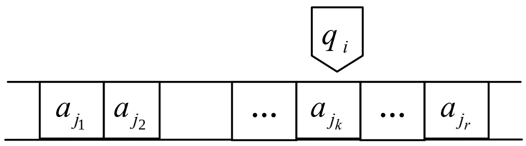


Рис. 2

Задание 6.7. Имеется машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1\}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1\}$ и функциональной схемой (программой).

$A \setminus Q$	q_0	q_1
a_0		$q_0 1 R$
1	$q_2 a_0 L$	$q_1 1 R$

В столбце q_0 ничего не написано, потому что q_0 − заключительное состояние машины, т.е. такое состояние, оказавшись в котором машина останавливается. Функциональную схему или программу кратко можно записать в виде последовательности из двух команд: $q_1 a_0 \to q_0 1$, $q_1 1 \to q_1 1 R$ Определите, в какое слово перерабатывает машина каждое из следующих слов, если она находится в начальном состоянии q_1 и обозревает указанную ячейку:

а) $1a_0 11 a_0 a_0 11$ (обозревается ячейка 4, считая слева);

б) $11a_0 111 a_0 1$ (обозревается ячейка 2);

в) $1a_0 a_0 111$ (обозревается ячейка 3);

г) $1111a_0 11$ (обозревается ячейка 4);

д) $11a_0 1111$ (обозревается ячейка 3);

е) 1111111 (обозревается ячейка 4);

ж) 11111 (обозревается ячейка 5);

з) 111…1 (k единиц, обозревается k-я ячейка).

Изобразите схематически последовательность конфигураций, возникающих на ленте на каждом такте работы машины.

Решение. а) Изобразим схематически начальную конфигурацию (начальное положение машины):

				q_1					
	1	a_0	1	1	a_0	a_0	1	1	

Схема означает, что машина находится в состоянии q_1 и обозревает ячейку, в которой записана буква 1, в соседней слева ячейке записана та же буква, а в соседней справа ячейке записана буква a_0 (т.е. согласно нашему соглашению ничего не записано) и т.д. Ничего не записано и во всех непоказанных ячейках ленты.

На первом такте работы согласно команде $q_1 1 \to q_1 1R$ машина остается в прежнем состоянии 1, в обозреваемую ячейку вписывает букву 1 (т.е. фактически оставляет уже вписанную в эту ячейку букву 1 неизменной) и переходит к обозрению следующей правой ячейки (т.е. ячейки 5). Изобразим схематически положение, в котором оказалась машина:

					q_1				
	1	a_0	1	1	a_0	a_0	1	1	

На втором такте работы согласно команде $q_1 a_0 \to q_0 1$ машина вписывает в обозреваемую ячейку 5 букву 1, продолжает обозревать ту же ячейку и переходит в состояние q_0, т.е. останавливается. Создавшаяся конфигурация имеет вид:

					q_0				
	1	a_0	1	1	1	a_0	1	1	

Таким образом, из данного начального положения слово $1a_0 11a_0 a_0 11$ перерабатывается машиной в слово $1a_0 111a_0 11$.

Задание 6.8. Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1\}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$ и со следующей функциональной схемой (программой):

A \ Q	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7
a_0	$q_4 a_0 R$	$q_6 a_0\ R$	$q_6 a_0\ R$	$q_0 1$	$q_4 a_0\ R$	$q_0 a_0$	$q_6 a_0\ R$
1	$q_2 1\ L$	$q_3 1\ L$	$q_1 1 L$	$q_5 a_0$	$q_5 a_0$	$q_7 a_0$	$q_7 a_0$

Изображая на каждом такте работы машины получающуюся конфигурацию, определите, в какое слово перерабатывает машина слово 111, исходя из начального стандартного положения.

Решение. Выписываем последовательность конфигураций машины при переработке ею слова 111 из начального стандартного положения:

1)

				q_0		
		1	1	1		

2)

			q_2			
		1	1	1		

3)

		q_3				
		1	1	1		

4)

	q_1					
		1	1	1		

5)

		q_4				
		1	1	1		

6)

		q_5				
			1	1		

7)

			q_4			
			1	1		

8)

			q_5			
				1		

9)

				q_4		
				1		

10)

				q_5		

11)

					q_4	

12)

					q_0	
					1	

Итак, слово 111 из начального о положения перерабатывается машиной в слово 1.

Задание 6.9. Дана машина Тьюринга с внешним алфавитом $A = \{a_0, 1\}$, алфавитом внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$ и с функциональной схемой (программой), приведенной в предыдущей задаче. Изображая на каждом такте работы машины получающуюся конфигурацию, определите, в какое слово перерабатывает машина каждое из следующих слов, исходя из начального стандартного положения:

а) 11111; б) 111111; в) 1111; г) 1111111; д) $111a_011$;
е)$1a_0111a_0a_011$; ж) $11a_0a_01111$ з) $11a_0a_011111$ и) $11a_0a_0111111$ к) $11a_0111$

6.10. Машина Тьюринга задается следующей функциональной схемой:

$A \backslash Q$	q_1	q_2	q_3
a_0		$q_3 1П$	$q_1 a_0 Л$
1	$q_2 a_0 Л$	$q_2 1$	$q_3 1П$
*	$q_0 a_0$	$q_2 *$	$q_3 * П$

Определите, в какое слово перерабатывает машина слово 1*11, исходя из начального стандартного состояния.

Решение: Запишем последовательность конфигураций:

$$1*1q_1 1 \Rightarrow 1*q_2 1a_0 \Rightarrow 1q_2*1a_0 \Rightarrow q_2 1*1a_0 \Rightarrow q_2 a_0 1*1a_0 \Rightarrow 1q_3 1*1a_0 \Rightarrow 11q_3*1a_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11*q_3 1a_0 \Rightarrow 11*1q_3 a_0 \Rightarrow 11*q_1 1a_0 \Rightarrow 11q_2*a_0a_0 \Rightarrow 1q_2 1*a_0a_0 \Rightarrow q_2 11*a_0a_0 \Rightarrow q_2 a_0 11*a_0a_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1q_3 11*a_0a_0 \Rightarrow 11q_3 1*a_0a_0 \Rightarrow 111q_3*a_0a_0 \Rightarrow 111*q_3 a_0a_0 \Rightarrow 111q_1*a_0a_0 \Rightarrow 111q_0 a_0a_0a_0.$$

Задание 6.11. Определите, в какое слово перерабатывает машина МТ в предыдущем примере каждое из следующих слов, исходя из начального стандартного состояния.

а) 111*111; б) 1111*11; в) 111*1; г) 11*11; д) 11*111;
е) 11111*; ж) 111*1; з) *1111; и) 111*11; к) 111*111;

Постараемся усмотреть общую закономерность в работе машины. Каждое из заданных слов перерабатывается в слово, состоящее из такого количества единиц, записанных подряд, сколько их было в исходном слове записано вместе по обе стороны от разделительной звездочки. Таким образом, машина фактически осуществляет сложение единиц. Каков же алгоритм этого сложения? Машина стирает первую единицу, обозреваемую в начальном положении q_1, и ее головка движется по ленте влево до первой пустой ячейки, в которую машина помещает единицу. (Машина как бы берет самую правую единицу и переносит ее в левый конец слова.) В нашем случае имеем $1*1q_1 1 \Rightarrow 11*q_1 a_0$, т.е. за один этот цикл машина вернулась в свое исходное положение, но для другого начального слова: 11*1. Затем машина проделывает второй цикл: берет крайнюю правую единицу, относит ее на левый край и возвращается в исходное положение $111q_1*$, при котором теперь в обозреваемой ячейке содержится не 1, а*. Машина стирает ее и останавливается.

Подсчитаем количество шагов (тактов), которое проделывает машина при решении задачи по данному алгоритму. Если слева от звездочки записано *m* единиц, а справа – *n*, то на каждый цикл машина затрачивает $2(m+n+1)$ тактов. Чтобы перенести *n* единиц, нужно проделать *n* циклов и, значит, совершить $2n(m+n+1)$ тактов работы.

Задание 6.12. Постройте таблицу переходов и граф переходов для машины Тьюринга, заданной программой с внешним алфавитом $\{a, b, c, 0\}$ и внутренним алфавитом (множеством состояний) $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$:

$$q_1 a \to q_2 R,\quad q_1 b \to R,\quad q_1 0 \to q_6 L,\quad q_2 a \to q_3 cR,\quad q_2 b \to q_4 cR,\quad q_3 a \to aR,\quad q_3 b \to q_4 aR,$$

$$q_3 0 \to q_5 aL,\quad q_4 a \to q_3 bR,\quad q_4 b \to bR,\quad q_4 0 \to q_5 bL,\quad q_5 b \to L,\quad q_5 c \to q_1 aR,\quad q_6 a \to L,\quad q_6 b \to L,$$

$$q_6 c \to aL,\quad q_6 0 \to q_0 R.$$

Примените МТ к заданной начальной конфигурации, составив протокол применения. Определить заключительную конфигурацию для начального слова:

а) $q_1 abbaaba$; б) $q_1 bbabaab$; в) q_1 *aaababa*; г) q_1 *aaaaa*; д) q_1 *bbbbb*
е) q_1 ***b b a b a*** ж) q_1 ***b a a a b*** з) q_1 ***a a b a b b*** и) q_1 ***a b a a b a*** к) q_1 ***a b b b a a b***.

Задание 6.13. Постройте граф переходов для МТ, заданной таблицей:

	0	**1**	**a**	**b**

q_1	q_3R	R	R	q_5R
q_2	$q_4\mathbf{1}L$			
q_3	q_1	$q_2\mathbf{0}L$	q_1R	q_4L
q_4	L	L	q_0	
q_5	L	L		

Составьте протоколы применения данной МТ к следующим начальным конфигурациям:

а) $q_1\boldsymbol{a}\,1\,0\,0\,1\,0\,\boldsymbol{b}$ б) $q_1\boldsymbol{a}\,1\,0\,0\,1\,1\,\boldsymbol{b}$; в) $q_1\boldsymbol{a}\,1\,1\,0\,0\,0\,\boldsymbol{b}$; г) $q_1\boldsymbol{a}\,1\,0\,0\,0\,1\,\boldsymbol{b}$; д) $q_1\boldsymbol{a}\,1\,1\,0\,0\,1\,\boldsymbol{b}$

е) $q_1\boldsymbol{a}\,0\,1\,0\,0\,1\,\boldsymbol{b}$ ж) $q_1\boldsymbol{a}\,0\,1\,1\,0\,1\,\boldsymbol{b}$ з) $q_1\boldsymbol{a}\,0\,0\,0\,1\,0\,\boldsymbol{b}$ и) $q_1\boldsymbol{a}\,0\,1\,0\,1\,0\,\boldsymbol{b}$ к) $q_1\boldsymbol{a}\,0\,1\,1\,1\,0\,\boldsymbol{b}$

Постройте соответствующий граф переходов для МТ.

Литература: [2], гл.6; [3], гл.V; [4], гл.5; [5], гл.5; [6], гл.4; [7], гл.2, ч.3; [8], ч.8; [9], гл.12; [10], гл.16-18; [12], гл.4; [14].

Раздел 4. Элементы нечеткой логики

Занятие № 7-8. Основы нечеткой логики

Функцией принадлежности множеству E называется отображение $\mu_A : E \to [0;1]$, которое ставит в соответствие каждому элементу из множества E степень принадлежности *ему*:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin E \\ \mu, & x \in E \ \text{ñî ñòåïåíüþ ïðèíàäëåæíîñòè } \mu, \\ 1, & x \in E \end{cases}$$

1. Логические операции над нечеткими множествами.

1) **Включение** $A \subset B$. Пусть A и B – нечеткие подмножества на универсальном множестве E. Множество A содержится в B , если $\forall x \in E \quad \mu_A(x) \le \mu_B(x)$. Говорят: «$A$ содержится в B», или «B **доминирует** над A», или «нечеткое множество A является **нечетким подмножеством** B».

2) **Равенство** $A = B$. Нечеткие множества A и B равны, если $\forall x \in E: \quad \mu_A(x) = \mu_B(x)$.

3) **Дополнение** $A = \overline{B}$ и $B = \overline{A}$. A и B – нечеткие подмножества, заданные на универсальном множестве E. A и B дополняют друг друга, если $\forall x \in E \quad \mu_A(x) = 1 - \mu_B(x)$. В частности, $\overline{\overline{A}}=A$.

4) **Пересечение** двух нечетких множеств (нечеткое «И») $A \bigcap B$ – наибольшее нечеткое подмножество, содержащееся одновременно в A и B, с функцией принадлежности:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\,(\mu_A(x),\ \mu_B(x)).$$

5) **Объединение** двух нечетких множеств (нечеткое «ИЛИ») $A \bigcup B$ – наименьшее нечеткое подмножество, содержащееся как в A, так и B, с функцией принадлежности:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\,(\mu_A(x),\ \mu_B(x)).$$

6) **Разность** $A - B = A \bigcap \overline{B}$, с функцией принадлежности:

$$\mu_{A-B}(x) = \mu_{A\cap \overline{B}}(x) = \min\,(\mu_A(x),\ 1-\mu_B(x)).$$

7) **Дизъюнктивная сумма** $A \oplus B = (A - B) \bigcup (B - A) = (A \bigcap \overline{B}) \bigcup (B \bigcap \overline{A})$ с функцией принадлежности:

$$\mu_{A\oplus B}(x) = \max(\min(\mu_A(x), 1-\mu_B(x)), \min(1-\mu_A), \mu_B(x)) .$$

Упражнения

Задание 7.1. Пусть $E=\{x_1, x_2,\ldots,x_5\}$, $M=[0;\ 1]$. Задайте нечеткое подмножество A аналитически и таблично.

Решение: Зададим нечеткое подмножество A аналитически разными способами:

а) $\mu_{\grave{A}}(\tilde{o}_1) = 0,2$, $\mu_{\grave{A}}(\tilde{o}_2) = 0,4$, $\mu_{\grave{A}}(\tilde{o}_3)=0$, $\mu_{\grave{A}}(\tilde{o}_4) = 0,7$, $\mu_{\grave{A}}(\tilde{o}_5) = 1$;

б) $A=0,2|x_1+0,4|x_2+0|x_3+0,7|x_4+1|x_5$;

в) $A=\{0,2|x_1;0,4|x_2;0|x_3;0,7|x_4;1|x_5\}$;

г) $A=\{(x_1,0.2); (x_2,0.4);(x_3,0);(x_4,0.7);(x_5, 1)\}$;

Зададим нечеткое подмножество A таблично:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0,2	0,4	0	0,7	1

Задание 7.2. Пусть $A=\{x_1/0,3;\ x_2/0,7;\ x_3/0,9\}$ и $B=\{x_1/0,5;\ x_2/0,8;\ x_3/1\}$.

а) Определите, будет ли одно из этих множеств доминировать над другим;

б) произведите логические операции над нечеткими множествами A и B: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $A-B$, $A\oplus B$, если известно, что

Решение: а) Сравним соответствующие элементы множеств A и B: 0,3<0,5; 0,7<0,8; 0,9<1. Отсюда делаем вывод, что множество B доминирует над множеством A.

б) 1) $\overline{A} = \{x_1/0,7;\ x_2/0,3;\ x_3/0,1\}$ и $\overline{B} = \{x_1/0,5;\ x_2/0,2;\ x_3/0\}$;

2) $C = A\bigcup B = \{x_1/0,5;\ x_2/0,8;\ x_3/1\}$;

3) $D = A\bigcap B = \{x_1/0,3;\ x_2/0,7;\ x_3/0,9\}$;

4) $A–B= A\bigcap \overline{B} =\{x_1/0,3;\ x_2/0,7;\ x_3/0,9\} \bigcap \{x_1/0,5;\ x_2/0,2;\ x_3/0\}=\{x_1/0,3;\ x_2/0,2;\ x_3/0\}$,

5)$B–A = B\bigcap \overline{A} =\{x_1/0,5;\ x_2/0,8;\ x_3/1\}\bigcap \{x_1/0,7;\ x_2/0,3;\ x_3/0,1\}=\{x_1/0,5;\ x_2/0,3;\ x_3/0,1\}$;

6) $A\oplus B =\{x_1/0,3;\ x_2/0,2;\ x_3/0\}\cup\{x_1/0,5;\ x_2/0,3;\ x_3/0,1\}= \{x_1/0,5;\ x_2/0,3;\ x_3/0,1\}$,

Множества можно представлять и в других видах. Например, ответы могли быть представлены в виде суммы:

б) 1) $\overline{A} = 0,7/\ x_1+ 0,3/x_2+ 0,1/\ x_3$ и $\overline{B} = 0,5/\ x_1+ 0,2/x_2+ 0/x_3$;

2) $C = A\bigcup B = 0,5/x_1+ 0,8/x_2+1/x_3$;

3) $D = A\bigcap B =0,3/\ x_1+ 0,7/x_2+0,9/x_3$;

4) $A–B= A\bigcap \overline{B} =0,3/x_1+ 0,2/x_2+ 0/x_3$;

5) $B–A = B\bigcap \overline{A} =0,5/x_1+ 0,3/x_2+ 0,1/x_3$;

6) $A\oplus B = 0,5/x_1+0,3\ x_2+ 0,1/x_3$.

Задание 7.3. Выполните задание по образцу задания 7.2. Пусть заданы два нечетких множества A и B на универсальном множестве U.

а) Определите, будет ли одно из этих множеств доминировать над другим;

б) произведите логические операции над нечеткими множествами A и B: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $A-B$, $A\oplus B$, если известно, что

а) $A=0,1/x_1+0,8/x_2+0,9/x_3+0/x_4$ и $B=0,1/x_1+1/x_2+0,7/x_3+0,4/x_4$;

б) $A=0,2/x_1+0,3/x_2+0,8/x_3+0/x_4$ и $B=0,4/x_1+1/x_2+0,9/x_3+0,5/x_4$.

в) $A=0,3/x_1+0/x_2+0,4/x_3+1/x_4$ и $B=0,5/x_1+0,1/x_2+0,7/x_3+0,8/x_4$;

г) $A=0,4/x_1+0,3/x_2+0/x_3+0,4/x_4$ и $B=0,5/x_1+1/x_2+0,7/x_3+0,6/x_4$;

д) $A=0,5/x_1+1/x_2+0,6/x_3+0,2/x_4$ и $B=0,4/x_1+0,1/x_2+0,7/x_3+0,9/x_4$;

е) $A=0,6/x_1+0,3/x_2+0/x_3+0,9/x_4$ и $B=0,5/x_1+1/x_2+0,7/x_3+0,8/x_4$;

ж)$A=0,7/x_1+0,5/x_2+0,4/x_3+0/x_4$ и $B=0,3/x_1+1/x_2+0,2/x_3+0,8/x_4$;

з) $A=0,8/x_1+0,3/x_2+0/x_3+0,4/x_4$ и $B=0,5/x_1+1/x_2+0,7/x_3+0,2/x_4$;

и) A=0,9/x_1+0/x_2+0,2/x_3+0,3/x_4 и B=0,5/x_1+1/x_2+0,7/x_3+0,8/x_4;
к) A=0/x_1+0,3/x_2+0,9/x_3+0,4/x_4 и B=0,5/x_1+1/x_2+0,7/x_3+0,8/x_4.

Задание 7.4. Формализуйте неточное определение понятия «теплая погода».

*Решени*е: В качестве X (область рассуждений) будет выступать шкала температуры в градусах Цельсия. Пусть она изменяется от -10 до 40 градусов. Нечеткое множество для понятия «теплая погода» в зависимости от географического положения объекта наблюдения и времени года может выглядеть по-разному.

В частности, в средних широтах России в апреле соответствующее нечеткое множество может быть представлено следующим образом:

C={0/-10; 0/-5; 0,1/0; 0,3/5; 0,7/10; 1/15; 0,7/20; 0,5/25; 0,2/30; 0/35; 0/40}.

В то же время, например, на юге Греции в апреле соответствующее нечеткое множество может быть представлено следующим образом:

C={0/-10; 0/-5; 0/0; 0,1/5; 0,3/10; 0,5/15; 0,7/20; 1/25; 0,8/30; 0,6/35; 0,3/40}.

В этом и проявляется нечеткость задания соответствующего множества.

Задание 7.5. Пусть задана лингвистическая переменная С = «приращение отпускной цены на товар». Соответствующее терм-множество $T(C)$={CO – отрицательное, CZ – приблизительно равное нулю, CP –положительное}. Эксперт, на основании имеющихся у него представлений об эластичности спроса на этот товар с учетом допустимых ограничений на изменение цены, рынка сбыта и прочих условий определил, что месячное среднеквадратическое отклонение объемов продаж не превышает 12 единиц. Задайте лингвистическую переменную C аналитически, таблично и графически.

Решение: Лингвистической переменной C соответствуют функции принадлежности вида:

$$\mu_{CO}(y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{12}y, & y\in[-12;0];\\ 0; & y\notin[-12;0].\end{cases} \qquad (4)$$

$$\mu_{CZ}(y)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{12}y, & y\in[-12;0];\\ 1-\dfrac{1}{12}y, & y\in[0;12];\\ 0; & y\in(-\infty;-12)\cup(12;\infty).\end{cases} \qquad (5)$$

$$\mu_{CP}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{12}y, & y\in[0;12];\\ 0; & y\notin[0;12].\end{cases} \qquad (6)$$

График лингвистической переменной C представлен на рис.3.

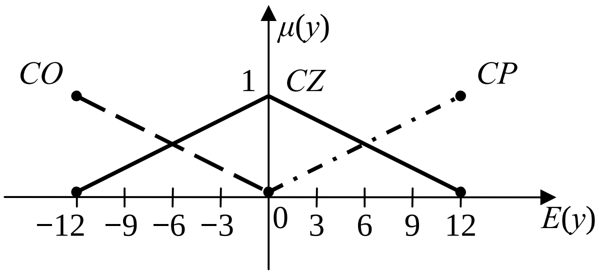


Рис. 3. Функции принадлежности нечетких множеств CZ (сплошная линия), CO (пунктирная линия), CP (точечная линия). При $|E(y)|>12$ $\mu(y)=0$ для всех трех множеств.

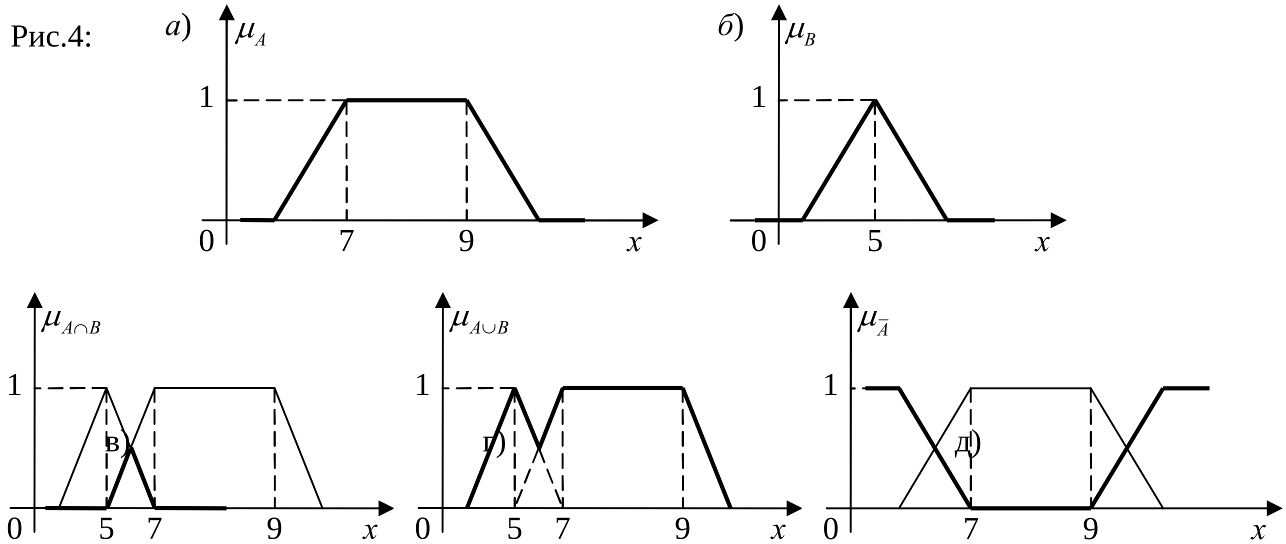
Семантическая интерпретация лингвистической переменной «приращение отпускной цены» представлена в таблице:

	$E(C)$								
	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12
CO	1	0,75	0,5	0,25	0	0	0	0	0
CZ	0	0,25	0,5	0,75	1	0,75	0,5	0,25	0
CP	0	0	0	0	0	0,25	0,5	0,75	1

Задание 7.6.. Пусть заданы графически два нечетких множества A: «от 7 до 9» (рис.4а) и B: «около 5» (рис.4б). Постройте графики функций принадлежности логических операций над этими множествами.

Решение: Отложим на оси абсцисс значения x, а на оси ординат – значения функции принадлежности. Получим графики функций $A \cap B$ (рис. 4в), $A \cup B$ (рис. 4г), $\overline{A}$ (рис. 4д)

Рис.4:



Задание 7.7. **Выполните задание по образцу задания 7.6.** Пусть заданы графически два нечетких множества: A и B. Постройте графики функции принадлежности этих множеств и логических операций над ними:

а) A: «от 3 до 8» и B: «около 5»
б) A: «от 3 до 8» и B: «около 5»
в) A: «от 3 до 10» и B: «около 4»
г) A: «от 2 до 8» и B: «около 7»
д) A: «от 2 до 12» и B: «около 8»
е) A: «от 1 до 8» и B: «около 5»
ж) A: «от 4 до 8» и B: «около 9»
з) A: «от 3 до 9» и B: «около 2»
и) A: «от 3 до 12» и B: «около 7»
к) A: «от 5 до 18» и B: «около 15»

2. Алгебраические операции над нечеткими множествами.

Алгебраическое произведение. Произведение двух нечетких множеств $A{\cdot}B$, заданных на одном и том же базовом множестве E, называется такое нечеткое множество $F = A{\cdot}B$, функция принадлежности которого определяется по правилу

$$\forall x \in E:\ \mu_F(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x).$$

Алгебраическая сумма. Суммой двух нечетких множеств A и B, заданных на одном и том же базовом множестве E, называется нечеткое множество $H = A \hat{+} B$, содержащее множества A и B, причем функция принадлежности определяется по правилу:

$$\forall x \in E:\ \mu_H(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x).$$

Возведение в степень. Пусть задано нечеткое множество A, заданное на базовом

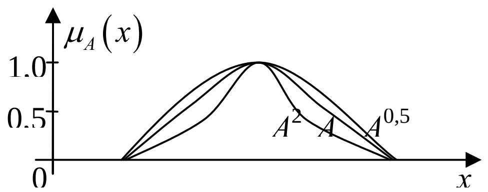


Рис.5. Операции концентрирования A^2 и растяжения $A^{0,5}$ нечеткого

множестве E. Возведением в (неотрицательную) степень «α» нечеткого множества A называется нечеткое множество $K = \left\langle A, [\mu_A(x)]^\alpha \right\rangle$.

Операция концентрирования (уплотнения) есть возведение нечеткого множества в квадрат (Рис.5). Извлечение квадратного корня из нечетного множества, рассматриваемое как возведение в степень 0.5, является операцией **растяжения.**

Декартово (прямое) произведение нечетких множеств. Пусть A_1, A_2,…, A_n – нечеткое подмножества универсальных множеств E_1, E_2,…, E_n соответственно. Декартово (прямое) произведение $A=A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ нечетких множеств является нечетким подмножеством множества $E=E_1\times E_2\times\ldots\times E_n$ с функцией принадлежности $\mu_A(x_1, x_2, ..., x_n) = \min(\mu_{A_1}(x_1), \mu_{A_2}(x_2), ..., \mu_{A_n}(x_n))$.

Упражнения

Задание 7.10. Пусть A=1/0,3+2/0,7 +3/0,9,
B=1/0,8 +2/0,3 +3/1. Найдите алгебраическое произведение, алгебраическую сумму, возведите A в квадрат, извлеките квадратный корень из A.

Решение:

$F = A\cdot B$ = 1/0,24+2/0,21 +3/0,9,

$H = A \hat{+} B$ = 1/0,86+2/0,79 +3/1,

A^2 = 1/0,09+2/0,49 +3/0,8 A,

$A^{0,5}$ = 1/0,55 +2/0,84 +3/0,95.

Задание 7.11. Выполните задание по образцу задания 7.10. Пусть заданы два нечетких множества A и B на универсальном множестве E. Найдите алгебраическое произведение, алгебраическую сумму, возведите A в квадрат, извлеките квадратный корень из A, если:

а) A=0,1/x_1+0,8/x_2+0,9/x_3 и B=0,1/x_1+1/x_2+0,7/x_3;

б) A=0,2/x_1+0,3/x_2++0/x_3 и B=0,4/x_1+1,1/x_2+0,9/x_3;.

в) A=0,3/x_1+0,8/x_2+0,4/x_3 и B=0,5/x_1+0,2/x_2+0,7/x_3;

г) A=0,4/x_1+0,3/x_2+0,2/x_3 и B=0,5/x_1+0,6/x_2+0,4/x_3;

д) A=0,5/x_1+0,1/x_2+0,6/x_3 и B=0,4/x_1+0,1/x_2+0,7/x_3;

е) A=0,6/x_1+0,3/x_2 +0,9/x_3 и B=0,5/x_1+0,9x_2+0,7/x_3;

ж)A=0,7/x_1+0,5/x_2+0,4/x_3 и B=0,3/x_1+0,8/x_2+0,2/x_3;

з) A=0,8/x_1+0,3/x_2+0,5/x_3 и B=0,5/x_1+0,2/x_2+0,7/x_3;

и) A=0,9/x_1+0,3/x_2+0,2/x_3 и B=0,5/x_1+0,1/x_2+0,7/x_3;

к) A=0,4/x_1+0,3/x_2+0,9/x_3 и B=0,5/x_1+0,2/x_2+0,8/x_3.

Задание 7.12. Пусть заданы два множества:

A = {(x_1|0), (x_2|0,1), (x_3|0,3), (x_4|0,7), (x_5|0,8), (x_6|0,9), (x_7|1)}

B = {(x_1|0), (x_2|0), (x_3|0), (x_4|0,6), (x_5|0,8), (x_6|1), (x_7|1)}.

Тогда $e(AB)$ = 0.346, а ближайшим к нечеткому множеству A является четкое множество $A^* = \{x_4, x_5, x_6, x_7\}$.

Задание 7.13. Рассмотрим понятие «РОСТ ЧЕЛОВЕКА». Если рост ниже 150 см, то такого человека считают низкорослым, а выше 180 см – высоким. В зависимости от ситуаций и требований, человека с ростом в промежутке от 150 до 180 см могут считать и высоким, и низким с определенной долей вероятности. Поэтому нет четкой границы при делении людей на высоких и низких. Так, человек с ростом 175 см будет низким в команде волейболистов, но высоким среди акробатов.

Для задания лингвистической переменной «РОСТ ЧЕЛОВЕКА» необходимо рассмотреть возможности формализации ее составляющих:

1) *Универсальное множество* E, содержащее все возможные элементы, исходя из условия. В нашем примере это рост человека, например, в интервале (0;300).

2) *Множество значений* μ, выступающее в качестве меры степени принадлежности некоторого элемента из E нечеткому подмножеству A. Промежуточные значения соответствуют определенной степени вероятности (принадлежности), что этот элемент принадлежит подмножеству.

Так, человек с ростом 175см будет входить в подмножество высоких людей со степенью принадлежности μ_1, а в подмножество низкорослых людей со степенью принадлежности μ_2. Однако человек с ростом 200см будет входить в подмножество высоких людей со степенью принадлежности $\mu_1=1$, а в подмножество низкорослых людей со степенью принадлежности $\mu_2=0$.

3) *Правило*, определяющее состав нечеткого множества, т.е. правило, по которому, каждому элементу из множества E ставится в соответствие элемент из множества B, иначе: определить отображение μ: $E \rightarrow B$.

В отличие от общепринятых, нечеткие множества обладают размытыми границами: их элементы – лингвистические переменные – в служат качественными характеристиками объектов (высокий, умный, новый, большой, сильный и др.)

2. Нечеткие отношения. Пусть $E=E_1\times E_2\times\ldots\times E_n$ – декартово произведение n универсальных множеств $E_1,E_2,\ldots,E_n$ Нечеткое подмножество четкого множества называется n-арным нечетким отношением R_n на P : R_n, где $R \subseteq X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$

Нечеткое отношение как и нечеткое множество можно задать с помощью его функции принадлежности.

1) Пусть $X = Y = (-\infty, \infty)$, т.е. множество всех действительных чисел. Отношение $x >> y$ (x много больше y) можно задать функцией принадлежности:

$$\mu_R = \begin{cases} 0, \ \text{если} \ x \le y, \\ \dfrac{1}{1+(1/(x-y)^2)}, \ \text{если} \ y < x. \end{cases}$$

2) Отношение R, для которого $\mu_R(x,\ y)$ = e $^{-\kappa(x-y)^2}$, при достаточно больших k можно интерпретировать так: «x и y близкие друг к другу числа».

Нечеткие бинарные отношения удобно задавать в виде матрицы.

Над нечеткими отношениями можно определить операции, как и над четкими отношениями.

Объединение $R_1 \bigcup R_2$ и *пересечение* $R_1 \bigcap R_2$ нечетких отношений определяются через задание функции принадлежности по правилам:

$\mu_{R_1 \cup R_2}(x,y) = \mu_{R_1}(x,y) \vee \mu_{R_2}(x,y)$ и $\mu_{R_1 \cap R_2}(x,y) = \mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(x,y)$.

Алгебраическое произведение $R_1{\cdot}R_2$ и *алгебраическая сумма* $R_1 \hat{+} R_2$ двух отношений определяются через задание функции принадлежности по правилам:

$$\mu_{R_1 \cdot R_2}(x,y) = \mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(x,y)$$ и

$$\mu_{R_1 + R_2}(x,y) = \mu_{R_1}(x,y) + \mu_{R_2}(x,y) - \mu_{R_1}(x,y) \cdot \mu_{R_2}(x,y) .$$

Дополнение отношения. Дополнение отношения R обозначается $\overline{R}$ и определяется функцией принадлежности:

$$\mu_{\overline{R}}(x,y) = 1 - \mu_R(x,y).$$

Дизъюнктивная сумма двух отношений. Дизъюнктивная сумма двух отношений R_1 и R_2 обозначается $R_1 \oplus R_2$ и определяется выражением

$$R_1 \oplus R_2 = (R_1 \cap \overline{R_2}) \cup (\overline{R_1} \cap R_2).$$

Композиция (свертка) *двух нечетких отношений*. Пусть заданы нечеткое отношение R_1: $(X \times Y) \rightarrow [0, 1]$ между X и Y, и нечеткое отношение R_2 : $(Y \times Z) \rightarrow [0, 1]$ между Y и Z.

(max-min)-композицией или (max-min)- сверткой называется нечеткое отношение между X и Z, обозначаемое $R_2 \circ R_1$ определенное через R_1 и R_2 выражением

$$\mu_{R_1 \circ R_2}(x,z) = \bigvee_y (\mu_{R_1}(x,y) \wedge \mu_{R_2}(y,z)).$$

Задание 7.14. Пусть R_2 : – нечеткое отношение «X значительно меньше Y», заданное на множествах E_x = (9,18,21) и E_y= (12,23,45) может быть задано матрицей:

$$R_2 = \begin{array}{c} \\ 9 \\ 18 \\ 21 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 12 & 23 & 45 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,7 & 0,9 & 1 \\ 0 & 0,3 & 1 \\ 0 & 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Содержательно это означает, например, следующее: со степенью уверенности лишь 0,7 можно утверждать, что 9 значительно меньше 12; 18 значительно меньше 45 со степенью уверенности 1, а 21 значительно меньше 23 со степенью уверенности 0,1.

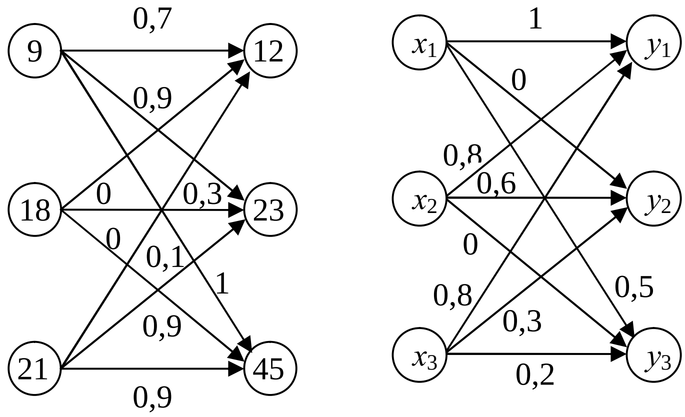


Рис.6 а) б)

Нечеткому бинарному отношению можно поставить в соответствие нечеткий граф.

Задание 7.15. Пусть $X=\{x_1, x_2, x_3\}$ $Y=\{y_1, y_2, y_3\}$. Тогда нечеткий граф, изображенный на рис.6,б, задает некоторое нечеткое отношение $R \subset X \times Y$.

$$R_2 = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0,5 \\ 0,8 & 0,6 & 0 \\ 0,8 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Задание 7.16. Пусть заданы отношения R_1 и R_2 :

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,7	0,4
x_2	1	0,5	0,8

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0,2	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0	0,9
y_3	0,1	1	0,7	0,5

Найдите композицию этих отношений.

Решение: Вначале используем «аналитический» способ композиции отношений R_1 и R_2, когда i-я строка R_1 «умножается» на j-й столбец R_2 с операцией $\wedge$. Полученный результат «свертываем» с использованием операции $\vee$ в $\mu(x_i, y_j)$ и заносим в таблицу.

Тогда имеем:

$R_1 \circ R_2$	z_1	z_2	z_3	z_4
x_1	0,3	0,6	0,4	0,7
x_2	0,9	0,8	0,7	0,5

При этом

$$\mu_{R_1\circ R_2}(x_1,z_1) = (\mu_{R_1}(x_1,y_1)\wedge\mu_{R_2}(y_1,z_1))\vee(\mu_{R_1}(x_1,y_2)\wedge\mu_{R_2}(y_2,z_2))\vee(\mu_{R_1}(x_1,y_3)\wedge\mu_{R_2}(y_3,z_1)) =$$

$$= (0,1\wedge 0,9)\vee(0,7\wedge 0,3)\vee(0,4\wedge 0,1) = 0,1\vee 0,3\vee 0,1 = 0,3;$$

$$\mu_{R_1\circ R_2}(x_1,z_2) = (0,1\wedge 0,2)\vee(0,7\wedge 0,6)\vee(0,4\wedge 1) = 0,1\vee 0,6\vee 0,4 = 0,6;$$

Задание 7.17. Пусть заданы отношения R_1 и R_2. Найдите композицию этих отношений.

а)

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,1	0,7	0,4
x_2	1	0,5	0,8

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0,2	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0	0,9
y_3	0,1	1	0,7	0,5

б)

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,2	0,5	0,4
x_2	0,1	0,7	0,8

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,8	0,2	1	0,2
y_2	0,3	0,4	0	0,9
y_3	0,2	1	0,7	0,5

в)

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,3	0,4	0,9
x_2	0,8	0,5	0,7

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,7	0,8	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0	0,9
y_3	0,1	1	0,7	0,1

г)

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,4	0,7	0,4
x_2	0,9	0,3	0

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0	0,2	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0,9	0,8
y_3	0,1	0	0,7	0,5

д)

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,5	0	0,2
x_2	1	0,9	0,8

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,3	0,2	0,1	0,2
y_2	0,9	0,6	0,7	0,9
y_3	0,1	1	0	0,5

е)

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,6	0,7	0,4
x_2	0,1	0,5	0,8

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0,2	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0,9	0
y_3	0,1	0,1	0,7	0,5

ж)

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,7	0,7	0,3
x_2	0	0,5	0,4

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,3	0,2	1	0,2
y_2	0,4	0,6	0,6	0,9
y_3	0	1	0,7	0,5

з)

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,8	0,7	0,4
x_2	0,5	1	0,8

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	1	0,2	0,6	0,2
y_2	0,3	0	0,8	0,9

y_3	0,7	0,1	0,7	0,5

и)

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	0,9	0,7	0,4
x_2	1	0,5	0,8

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0,2	1	0,2
y_2	0,3	0,6	0,4	0,6
y_3	0,1	1	0	0,5

к)

R_1	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0,7	0,4
x_2	0,8	0,2	0,5

R_2	z_1	z_2	z_3	z_4
y_1	0,9	0,2	1	0,2
y_2	0	0,6	0	0,9
y_3	0,5	0	0,7	0,5

Литература: [5], гл.2; [11], ч.5.

Математические символы и обозначения

$\subset$	включение,
$\in$	принадлежность элемента множеству,
$\notin$	непринадлежность элемента множеству,
$\bigcup$	объединение множеств,
$\bigcap$	пересечение множеств,
$\sum$	суммирование,
$\times$	декартово произведение,
$\forall$	квантор общности,
$\exists$	квантор существования,
E	универсальное множество,
$\bigcup\limits_i A_i$	объединение множеств A_i ,
$\bigcap\limits_i A_i$	пересечение множеств A_i
$\langle\ \rangle$	кортеж,
$A \backslash B$	разность множеств A и B,
$\neg a$, $\bar{a}$	отрицание a,
$\&, \cdot, \wedge$	конъюнкция,
$\vee$	дизъюнкция,
$\veebar, \oplus$	строгая дизъюнкция, сумма по модулю два,
$\prec$	частичный порядок,
$\varnothing$	пустое множество,
$\rightarrow$	импликация,
$\leftrightarrow, \equiv$	эквиваленция,
$\Rightarrow$	логическое следование,
$\Leftrightarrow$	равносильность высказывательных форм,
$\models$	непосредственная выводимость
$\vdash$	выводимость,
B^n	n-ая декартова степень множества B
□	множество натуральных чисел
$\mathbb{N}'$	множество натуральных чисел, дополненное 0.

Математические сокращения:

ДНФ дизъюнктивная нормальная форма,
КНФ конъюнктивная нормальная форма,
СДНФ совершенная дизъюнктивная нормальная форма,
СКНФ совершенная конъюнктивная нормальная форма,

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Галушкина Ю.И., Марьямов А.Н. Конспект лекций по дискретной математике. – М. Айрис-пресс, 2008. – 176с.
2. Ерусалимский Я.М. Дискретная математика: теория, задачи, приложения. – 5-е изд. М.: Вузовская книга, 2002. – 268с.: ил.
3. Игошин В.И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов.: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 304с.
4. Карпов Ю.Г. Теория автоматов. – СПб.: Питер, 2002. – 224 с.: ил.
5. Круглов В.В., Дли М.И. Интеллектуальные информационные системы. – М.: Физматлит, 2002. – 256с.
6. Куликов.В.В. Дискретная математика: учебное пособие. – М.: РИОР, 2007. – 174 с.
7.Лавров И.А. Математическая логика. – М: Издательский центр Академия, 2006. – 240 с.
8. Москинова Г.И. Дискретная математика. Математика для менеджера в примерах и упражнениях.: учебное пособие. – М.: Логос, 2002. – 240с.,ил.
9. Соболева Т.С., Чечкин А.В. Дискретная математика. – М.: Издательский центр Академия, 2006. – 256 с.
10. Просветов Г.И. Дискретная математика: задачи и решения: учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 222с.
11. Спирина М.С. Дискретная математика. Учебно-методическое пособие для проведения практических занятий по математике для студентов специальности 351400. – Тольятти, ТГУС, 2006. – 88 с.
12. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Математическая логика и теория алгоритмов: Учебник. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. – 224с.
13. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики: Учебник. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 280с.
14. Спирина М.С. Конспект лекций по курсу «Математическая логика и теория алгоритмов» для студентов специальности 230100.62 «Информатика и вычислительная техника». – Тольятти, ПВГУС, 2010.