

ISSN 0869-2513

ВСЕСОЮЗНАЯ АССОЦИАЦИЯ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ
ЖУРНАЛ

КВАНТОР



В. И. ГОЛУБЕВ
В. И. ТАРАСОВ

**ЭФФЕКТИВНЫЕ
ПУТИ
РЕШЕНИЯ
НЕРАВЕНСТВ**

10



ГОЛУБЕВ В. И.,
ТАРАСОВ В. А.



ЭФФЕКТИВНЫЕ ПУТИ РЕШЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ

ЛЬВОВ
ЖУРНАЛ «КВАНТОР»
1991

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многие школьные учебники по математике и большинство пособий для поступающих не содержат информацию по анализу эффективности решения конкретной задачи тем или иным способом. Поэтому основная масса абитуриентов, доверяясь рекомендациям, изложенным в указанных источниках, беззаботно встает на зачастую единственный известный ей путь решения предложенной задачи.

Естественным следствием подобной ситуации является игнорирование школьником задач, сопряженных с большим объемом (по мнению школьника) работы по преодолению технических трудностей. Многое, вероятно, объясняется отсутствием навыков, но не исключено, что школьник и не предполагает о наличии тех или иных эффективных ходов, тактических тонкостей при реализации выбранной схемы решения, которые давно практикуются многими преподавателями при подготовке абитуриентов в высшие учебные заведения.

Предлагаемое Вашему вниманию пособие, дорогой читатель, как раз раз и раскрывает «секреты» очень эффективного решения целого класса неравенств, регулярно предлагаемых школьникам на вступительных экзаменах практически во все вузы страны.

Конечно, если Вы легко воспринимаете утверждение, что неравенство

$$\frac{((x^2+x+1)^{x+1} - (x^2+x+1)^3)(x^2-7|x|+10)}{1 - \log_2(x^2+3x-18)} < 0$$

в области допустимых значений равносильно неравенству

$$\frac{(x-2)(x^2+x)(x-2)(x+2)(x-5)(x+5)}{(18-3x)(x^2-1)} < 0$$

(именно к такому неравенству можно сразу перейти при овладении материалом этого пособия), то так же легко оцените достоинства и недостатки всего последующего изложения, и авторы будут очень признательны Вам за возможность ознакомиться с Вашими пожеланиями по его улучшению.

Если же приведенное утверждение явилось откровением для Вас, то авторы с удовольствием предлагают Вам внимательно познакомиться и со всеми остальными утверждениями, представленными в этом пособии.

Глава I. ОБЩИЕ СООБРАЖЕНИЯ О ПРЕОБРАЗОВАНИИ НЕРАВЕНСТВ

(Структура ответа. Рациональное неравенство, ему соответствующее. Возможность сведения типовых неравенств к рациональным)

Все неравенства с одной переменной, которые рассматриваются в школе или предлагаются в конкурсных заданиях вступительных экзаменов, имеют одну и ту же структуру ответа — промежуток или объединение промежутков одного из известных видов: $a < x < b$, $a < x \leq b$, $a \leq x < b$, $a \leq x \leq b$, $a < x$, $a \leq x$, $x < b$, $x \leq b$, $x = a$, $-\infty < x < +\infty$, то есть — объединение открытых, полуоткрытых, закрытых интервалов и лучей, изолированных точек и т. д. (Если для тригонометрических неравенств ограничиваться их рассмотрением на соответствующем периоде (а фактически так и решаются тригонометрические неравенства), то, очевидно, ответ также будет представлять собой объединение конечного числа промежутков указанных видов).

Популярными и легко усваиваемыми школьниками неравенствами являются рациональные неравенства (в частности, линейные, квадратные), решение которых методом интервалов подробно рассмотрено в школьных учебниках и многочисленных пособиях для поступающих.

Поэтому естественным можно признать желание свести решение того или иного неравенства повышенной сложности к решению рациональных неравенств. Оказывается, достаточно широкий класс неравенств подобную попытку допускает.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. (МГУ, факультет вычислительной математики и кибернетики, задача № 1 из пяти)

Решить неравенство $(x^2 - 9)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0$.

Это неравенство типично для вступительного экзамена с точки зрения наличия в нем знакопостоянного множителя (в нашем случае — множителя $-\sqrt{x^2 - x - 2}$), который провоцирует провести следующее неверное решение.

Так как произведение двух множителей $(x^2 - 9)$ и $\sqrt{x^2 - x - 2}$ неотрицательно, и второй множитель в силу определения арифметического корня также неотрицателен, то и первый множитель должен быть неотрицательным. Поэтому решения неравенства определяются следу-

ошей системой (второе неравенство задает область определения корня):

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geq 0, & f \leq -3 \text{ или } x \geq 3, \\ x^2 - x - 2 \geq 0, \text{ т. е. } x \leq -1 \text{ или } x \geq 2, \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ или } x \geq 3.$$

Получаемый ответ $x \leq -3$ или $x \geq 3$ не содержит значения $x=2$ и $x=-1$, которые были потеряны в результате неверного решения.

Теперь приведем одно из правильных решений.

Корень из трехчлена в области допустимых значений (т. е. при неотрицательности подкоренного выражения) всегда совпадает по знаку с этим трехчленом, поэтому имеем:

$$\begin{aligned} (x^2 - 9) \sqrt{x^2 - x - 2} &\geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 9)(x^2 - x - 2) \geq 0, \\ x^2 - x - 2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -3 \cup -1 \leq x \leq 2 \cup x \geq 3, \\ x \leq -1 \cup x \geq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \leq -3 \cup x = -1 \cup x = 2 \cup x \geq 3. \end{aligned}$$

Замена множителя $\sqrt{x^2 - x - 2}$ на $(x^2 - x - 2)$ позволила перейти от иррационального неравенства к стандартному рациональному неравенству в области допустимых значений исходного неравенства.

Пример 2. (МГУ, биологический факультет, задача № 4 из пяти)

Решить неравенство

$$4\sqrt{9-x^2}+1+2 < 2\sqrt{9-x^2} \cdot 9.$$

Решение. Преобразуем неравенство к стандартной форме квадратного (относительно $2\sqrt{9-x^2}$) неравенства:

$$4(2\sqrt{9-x^2})^2 - 9 \cdot 2\sqrt{9-x^2} + 2 < 0.$$

Трехчлен $4t^2 - 9t + 2$ раскладывается в произведение $4\left(t - \frac{1}{4}\right)(t - 2)$. Поэтому исходное неравенство равносильно следующему

$$\left(2\sqrt{9-x^2} - \frac{1}{4}\right)(2\sqrt{9-x^2} - 2) < 0, \text{ т. е.}$$

$$(2\sqrt{9-x^2} - 2^{-2})(2\sqrt{9-x^2} - 2^1) < 0.$$

Так как разность $(2^f - 2^g)$ в области допустимых значений имеет тот же знак, что и разность $(f - g)$ показателей

степеней, то при замене множителей вида $(2^i - 2^g)$ на $(f - g)$ получаем равносильное неравенство $(\sqrt{9-x^2} - (-2))(\sqrt{9-x^2} - 1) < 0$, т. е. $\sqrt{9-x^2} - 1 < 0$, так как $\sqrt{9-x^2} + 2 > 0$ как сумма неотрицательного корня и положительной константы.

Разность неотрицательных чисел совпадает по знаку с разностью квадратов этих чисел. Поэтому последнее неравенство равносильно системе (второе неравенство определяет существование корня): $\begin{cases} \sqrt{9-x^2} - 1 < 0, \\ 9-x^2 \geq 0, \end{cases}$ т. е. двойному неравенству $8 < x^2 \leq 9$.

Двойное неравенство $a < f \leq b$ при $a < b$ равносильно неравенству $\frac{f-a}{f-b} \leq 0$. (Убедительно рекомендуем читателю самостоятельно убедиться в этом, решая, например, последнее неравенство относительно f методом интервалов). Поэтому имеем:

$$8 < x^2 \leq 9 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 9}{x^2 - 8} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})} \leq 0$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, получаем ответ:

$$-3 \leq x < -2\sqrt{2}, \quad 2\sqrt{2} < x \leq 3.$$

Обращаем внимание читателя на два обстоятельства. Во-первых, при решении неравенства мы относительно быстро, заменяя некоторые множители, свели задачу к решению стандартных рациональных неравенств. Во-вторых, (см. пример 2) мы продемонстрировали переход от промежутка изменения выражения f к рациональному неравенству, задающему этот промежуток.

Оказывается (покажите самостоятельно), любое объединение конечного числа непересекающихся промежутков перечисленных ранее видов легко задать одним рациональным неравенством, что во многих ситуациях позволяет существенно быстрее двигаться к ответу, а иногда получать более эффективные схемы решения типовых неравенств.

Пример 3. Указать какое-нибудь рациональное неравенство, если оно имеет ответ: $-5 < x \leq 3$, или $x = 4$, или $5 < x$.

Решение. Формируем множители вида $(x-a)$, где a — конец промежутка множества значений переменной x указанного ответа: $(x+5)$, $(x-3)$, $(x-4)$, $(x-5)$. Далее в числитель дроби записываем те множители,

которые соответствуют нестрогим неравенствам, а в знаменатель — строгим неравенствам: $\frac{(x-3)(x-4)(x-4)}{(x+5)(x-5)}$.

Множитель $(x-4)$ мы записали два раза, так как равенство $x=4$ определяет промежуток $a \leq x \leq b$ с совпадающими концами a и b :

$$x=4 \Leftrightarrow 4 \leq x \leq 4.$$

Далее пишем нестрогое неравенство со знаком « \geq », если самый правый промежуток значений x есть луч (как в нашем примере), или со знаком « \leq » в противном случае:

$$\frac{(x-3)(x-4)^2}{(x+5)(x-5)} \geq 0.$$

Полученное неравенство и является искомым.

Наконец, приводим для иллюстрации малоизвестную схему решения иррационального неравенства $\sqrt{f} \leq g$. Традиционные рекомендации состоят в указании следующего преобразования:

$$\sqrt{f} \leq g \Leftrightarrow \begin{cases} g \geq 0, \\ f \leq g^2, \\ f \geq 0. \end{cases}$$

Однако, система двух последних неравенств ($0 \leq f \leq g^2$), как уже знает читатель, равносильна одному неравенству $f(f-g^2) \leq 0$. Поэтому имеем:

$$\sqrt{f} \leq g \Leftrightarrow \begin{cases} g \geq 0, \\ f(f-g^2) \leq 0. \end{cases}$$

Рассмотренные примеры позволяют уже сейчас дать краткое решение неравенства, указанного во введении.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{((x^2+x+1)^{x+1} - (x^2+x+1)^3)(x^2-7|x|+10)}{1-\log_{x^2}(x^2+3x-18)} < 0.$$

Решение. Разность степеней по одному и тому же основанию в области допустимых значений всегда совпадает по знаку с произведением разности показателей на отклонение основания от единицы.

Так как логарифмическая функция является обратной к показательной, то то же самое можно сказать и о разности логарифмов по одному и тому же основанию (обоснование см. главы II—VI).

Поэтому преобразуя данное неравенство к виду

$$\frac{((x^2+x+1)^{x+1} - (x^2+x+1)^3) (|x|-2) (|x|-5)}{\log_{x^2} x^2 - \log_{x^2} (x^2+3x-18)} < 0$$

(мы воспользовались свойством модуля $m^2 = |m|^2$), далее осуществляем указанные замены, а также — замену множителей вида $(|x|-a)$ на $(|x|^2 - a^2)$, т. е. на $(x-a)(x+a)$ (см. пример 2, замена разности $(\sqrt{9-x^2}-1)$ на $((9-x^2)-1)$):

$$\frac{((x+1)-3)(x^2+x+1-1)(x-2)(x+2)(x-5)(x+5)}{(x^2 - (x^2+3x-18))(x^2-1)} < 0.$$

После очевидных упрощений получаем:

$$\frac{(x-2)^2 x (x+1) (x+2) (x-5) (x+5)}{3(6-x)(x-1)(x+1)} < 0.$$

Так как условие существования числителя и знаменателя дроби исходного неравенства сводятся к ограничению: $x^2+3x-18 > 0$, то сразу получаем ответ из системы:

$$\begin{cases} \frac{(x-2)^2 x (x+2) (x-5) (x+5)}{(6-x)(x-1)} < 0, \\ x^2+3x-18 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -6, \\ 3 < x < 5, \\ x > 6. \end{cases}$$

Естественно у читателя может возникнуть вопрос о правомерности замены множителей при решении неравенств примеров 1—4, но именно об этом пойдет речь в последующих главах.

Глава II. МЕТОД ЗАМЕНЫ МНОЖИТЕЛЕЙ

(Основная идея. Перечень некоторых видов заменяемых множителей. Примеры.)

Любое неравенство приводимо к виду

$$(M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_{n_1}) / (M'_1 \cdot M'_2 \cdot \dots \cdot M'_{n_2}) \vee 0 \quad (1)$$

где символ \vee обозначает один из четырех возможных знаков неравенства: $<$, \leq , \geq , $>$.

Очевидно, что замена любого множителя M на совпадающий с ним по знаку в области определения неравенства множитель L (и имеющий в этой же области те же корни, что и заменяемый множитель), приводит к равносильному неравенству в указанной области определения. Этот бесхитростный факт и определяет основную идею метода замены множителей.

Многие известные преобразования неравенств можно

описать в терминах замены соответствующих множителей. Например, деление обеих частей неравенства $c \cdot f(x) > 0$ на положительное число c равносильно замене знакопостоянного множителя c на единицу.

Здесь важно зафиксировать внимание читателя, что замена множителя осуществляется только (!) при условии приведения неравенства к виду (1). То есть, когда требуется сравнить произведение множителей с нулем. Это крайне важное замечание необходимо учесть тем, кто пожелает взять на вооружение метод замены множителей.

Наша цель последующего изложения состоит в указании наиболее типичных замен, практически используемых в решениях неравенств.

Основная часть замен обусловлена двумя следующими утверждениями.

Утверждение 1. Функция $f(x)$ есть строго (!) возрастающая тогда и только тогда, когда для любых двух значений a и b из области определения функции разность $(a-b)$ совпадает по знаку с разностью $(f(a)-f(b))$.

Утверждение 2. Функция $f(x)$ есть строго убывающая тогда и только тогда, когда для любых двух значений a и b из области определения функции разность $(a-b)$ совпадает по знаку с разностью $(f(b)-f(a))$.

Обоснование сформулированных утверждений непосредственно следует из определения строгой монотонной функции.

Замену множителя M на множитель L будем обозначать следующим образом (во втором случае подчеркивается необходимость учета области допустимых значений ОДЗ):

$$M \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} L \text{ или } M \leftrightarrow L.$$

В введенных обозначениях утверждения 1 и 2 примут вид:

$$\text{Утв. 1} (f \uparrow) \Leftrightarrow \left((a-b) \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} (f(a)-f(b)) \right).$$

$$\text{Утв. 2} (f \downarrow) \Leftrightarrow \left((a-b) \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} (f(b)-f(a)) \right).$$

(Направленность стрелок в обе стороны означает возможность обратной замены множителя L на M , что равносильно замене M на L для обратной функции).

Например, если неравенство рассматривается на промежутке $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то возможны замены:

$$(\operatorname{tg} x - 1) \leftrightarrow (x - \frac{\pi}{4}) \text{ и } (\operatorname{ctg} x - 1) \leftrightarrow (\frac{\pi}{4} - x).$$

Также для иллюстрации укажем некоторые виды замен, использованных в рассмотренных примерах 1—4:

1) $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \overset{\text{одз}}{\leftrightarrow} (a - b)$, или, что то же самое при неотрицательности чисел a и b ,

$$(a - b) \leftrightarrow (a^2 - b^2)$$

(См. пример 1: $a = x^2 - x - 2$, $b = 0$; пример 2: $a = 9 - x^2$, $b = 1$ пример 4: $a = |x|$, $b = 2$ и $a = |x|$, $b = 5$);

$$2) (2^a - 2^b) \leftrightarrow (a - b)$$

(См. пример 2: $\sqrt{9 - x^2}$, $b = -2$, и $a = \sqrt{9 - x^2}$, $b = 1$).

Глава III. ЗАМЕНА ЗНАКОПОСТОЯННЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ (Типы знакопостоянных множителей. Варианты замены. Примеры.)

Замена знакопостоянных множителей — это есть один из случаев замены, не вытекающих из утверждений 1 и 2.

Поэтому в принятых ранее обозначениях замены множителей можем записать следующее:

$$(ax^2 + bx + c) \leftrightarrow a \text{ (при } D < 0), \quad (3.1)$$

$$(ax^2 + bx + c) \leftrightarrow c \text{ (при } D < 0), \quad (3.2)$$

или

$$(ax^2 + bx + c) \overset{\begin{cases} D < 0, \\ a > 0. \end{cases}}{\leftrightarrow} 1 \text{ (при } D < 0 \text{ и } a > 0), \quad (3.3)$$

$$(ax^2 + bx + c) \overset{\begin{cases} D < 0, \\ a < 0. \end{cases}}{\leftrightarrow} -1 \text{ (при } D < 0 \text{ и } a < 0), \quad (3.4)$$

Сумма значений показательных функций.

Так как область значений показательной функции $y = a^x$ представляет собой все положительные числа, то любая сумма значений показательных функций является знакопостоянной положительной величиной. Поэтому имеем:

$$a^x \leftrightarrow 1, \quad a^{f(x)} \overset{\text{одз}}{\leftrightarrow} 1, \quad (3.5), (3.6)$$

$$(a^f + a^g + \dots) \overset{\text{одз}}{\leftrightarrow} 1, \quad (3.7)$$

$$(a_1^i + a_2^i + \dots + a_n^i) \overset{\infty}{\leftrightarrow} 1, \quad (3.8)$$

и т. д.

Сумма неотрицательных слагаемых, если ни в одной точке области определения неравенства все слагаемые одновременно (!) не равны нулю.

Очевидно, что при объявленном ограничении на слагаемые, сумма всегда является положительной величиной. Поэтому в силу определения арифметического корня и неотрицательности модуля любого числа получаем право на следующие замены

$$(\sqrt{f} + \sqrt{g}) \overset{\sqrt{f} + \sqrt{g} \neq 0, \text{ ОДЗ}}{\leftrightarrow} 1, \quad (3.9)$$

$$(\sqrt{f} + |g|) \overset{\sqrt{f} + |g| \neq 0, \text{ ОДЗ}}{\leftrightarrow} 1, \quad (3.10)$$

$$(|f| + |g|) \overset{|f| + |g| \neq 0}{\leftrightarrow} 1, \quad (3.11)$$

$$(\sqrt{f} + ax^2 + bx + c) \overset{\begin{cases} D < 0, \\ a > 0, \text{ ОДЗ} \end{cases}}{\leftrightarrow} 1, \quad (3.12)$$

$$(|f| + ax^2 + bx + c) \overset{\begin{cases} D < 0, \\ a > 0. \end{cases}}{\leftrightarrow} 1, \quad (3.13)$$

$$(|f| + g) \overset{g > 0}{\leftrightarrow} 1, \quad (3.14)$$

и т. д.

Пример 5. Найти какое-нибудь рациональное выражение, знаковосовпадающее с данным:

$$\text{а) } 3^x - 12 \cdot 3^{-x} + 1; \quad \text{б) } x^2 - 3|x-1| - 2x - 3;$$

$$\text{в) } x^2 + x - 1 + 2\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x^2-4}.$$

Решение. а) Так как $3^{-x} = 1/3^x$, то имеем $3^x - 12 \cdot 3^{-x} + 1 = \frac{(3^x)^2 + 3^x - 12}{3^x} = \frac{(3^x - 3)(3^x + 4)}{3^x}$. Поэтому в силу (3.5) и (3.7) исходное выражение совпадает по знаку с разностью $(3^x - 3)$, которая в силу утверждения 1 (см. гл. II) совпадает по знаку с разностью $(x - 1)$.

Ответ: $(x - 1)$.

б) Так как по свойству модуля $|x - 1|^2 = (x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, то, выделяя квадрат $(x - 1)^2$, исходное выражение преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} x^2 - 3|x-1| - 2x - 3 &= (x^2 + -2x + 1) - 3|x-1| - 4 = \\ &= |x-1|^2 - 3|x-1| - 4 = (|x-1| - 4)(|x-1| + 1). \end{aligned}$$

Поэтому в силу (3.14) исходное выражение совпадает по знаку с разностью $(|x-1|-4)$, которая (на основании монотонного возрастания функции $y=t^2$ при $t \geq 0$) в силу утверждения 1 совпадает по знаку с разностью $(|x-1|^2-4^2)$. Опять, пользуясь свойством модуля $|m|^2-m^2$, получаем, что исходное выражение совпадает по знаку с разностью $((x-1)^2-4^2)$, которая преобразуется к виду: $(x-5)(x+3)$. Ответ: $(x-5)(x+3)$.

в) Замечая, что выражение (x^2+x-1) равно сумме подкоренных выражений, сразу получаем, что

$$x^2+x-1+2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x^2-4}=(\sqrt{x+3}+\sqrt{x^2-4})^2.$$

И так как подкоренные выражения $(x+3)$ и (x^2-4) ни при каком значении переменной x одновременно в нуль не обращаются, то полученный квадрат разности в области допустимых значений является положительной величиной. Поэтому один из возможных ответов есть 1.

Ответ: 1.

Теперь легко понять решение неравенства следующего примера.

Пример 6. Решить неравенство

$$\frac{(3^x-12\cdot 3^{-x}+1)(x^2-3|x-1|-2x-3)}{x^2+x-1+2\sqrt{x+3}\cdot\sqrt{x^2-4}} > 0.$$

Решение. Первый множитель в числителе в силу примера 5а) совпадает по знаку с $(x-1)$, второй множитель в числителе в силу примера 5б) совпадает по знаку с произведением $(x-5)(x+3)$, а знаменатель в области допустимых значений является положительной величиной. Поэтому неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (x-1)(x-5)(x+3) > 0, \\ x+3 \geq 0, \\ x^2-4 \geq 0, \end{cases}$$

откуда получаем ответ: $-3 < x \leq -2, x > 5$.

Глава IV. ЗАМЕНЫ МНОЖИТЕЛЕЙ С МОДУЛЕМ (Типы множителей. Примеры)

В предыдущей главе мы уже указывали некоторые множители, содержащие модули. Опорная информация, позволяющая указать удобные замены, заключается в двух основных свойствах модуля:

$$|m|^2 = m^2 \text{ и } |m| \geq 0 \text{ для всех } m,$$

а также в монотонном возрастании на множестве неотрицательных чисел функции $y = t^2$.

При рассмотрении примеров 4 и 5б) мы уже демонстрировали использование указанных свойств. Поэтому приводим сразу типы замен:

$$(|f| - |g|) \leftrightarrow (f - g)(f + g), \quad (4.1)$$

$$(|f| - g) \stackrel{g \geq 0}{\leftrightarrow} (f - g)(f + g), \quad (4.2)$$

$$(|f| - \sqrt{g}) \stackrel{g \geq 0}{\leftrightarrow} (f^2 - g), \quad (4.3)$$

$$(|f| - \sqrt{|g|}) \leftrightarrow (f^2 - g)(f^2 + g), \quad (4.4)$$

$$(\sqrt{|f|} - \sqrt{|g|}) \leftrightarrow (f - g)(f + g) \quad (4.5)$$

Очевидно, что если множители M и L знакововпадающие, то множители $(-M)$ и $(-L)$ также знакововпадающие. Поэтому наряду с заменами (4.2) — (4.4) можно указать и такие:

$$(g - |f|) \stackrel{g \geq 0}{\leftrightarrow} (g - f)(g + f), \quad (4.2)'$$

$$(\sqrt{g} - |f|) \stackrel{g \geq 0}{\leftrightarrow} (g - f^2), \quad (4.3)'$$

$$(\sqrt{|g|} - |f|) \leftrightarrow (g - f^2)(g + f^2). \quad (4.4)'$$

Удобно указать и некоторые частные случаи приведенных замен (отметим здесь, что (4.3) есть следствие (4.2), (4.4) — следствие (4.1) и (4.2), можно обнаружить и другие взаимосвязи):

$$|f| - (ax^2 + bx + c) \leftrightarrow (f - ax^2 - bx - c)(f + ax^2 + bx + c) \quad (4.6)$$

при $a > 0$ и $D \leq 0$,

$$(ax^2 + bx + c - |f|) \leftrightarrow (ax^2 + bx + c + f)(ax^2 + bx + c - f) \quad (4.6)'$$

при $a > 0$ и $D \leq 0$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\frac{(|x-2| - 4 - x^2)(|x+4| - \sqrt{x^2 - x - 2})}{(|1-x| - 4)(|3+x| - |x-5|)} > 0.$$

Каждый множитель как в числителе, так и в знаменателе есть разность неотрицательных чисел. Поэтому заменяя их на разность квадратов, получим равносильное неравенство в области допустимых значений. Имеем:

$$\frac{(|x-2|-4-x^2)(|x+4|-\sqrt{x^2-x-2})}{(|1-x|-4)(|3+x|-|x-5|)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(|x-2|^2-(4+x^2)^2)(|x+4|^2-(\sqrt{x^2-x-2})^2)}{(|1-x|^2-4^2)(|3+x|^2-|x-5|^2)} > 0, \\ x^2-x-2 \geq 0. \end{cases}$$

Далее, пользуясь указанным свойством модуля: $|m|^2 = m^2$ и раскладывая на множители разности квадратов, получим:

$$\begin{cases} \frac{((x-2)^2-(4+x^2)^2)((x+4)^2-x^2+x+2)}{((1-x)^2-4^2)((3+x)^2-(x-5)^2)} > 0, \\ x \leq -1 \cup x \geq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(-x^2+x-6)(x^2+x+2)(9x+18)}{(-x-3)(5-x)8(2x-2)} > 0, \\ x \leq -1 \cup x \geq 2, \end{cases}$$

(Знакопостоянные множители $(-x^2+x-6)$ и (x^2+x+2) (как трехчлены с отрицательным дискриминантом) можно заменить на единицы со знаком старшего коэффициента, т. е. на (-1) и 1 соответственно; остальные упрощения очевидны).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(-1)1(x+2)}{(x+3)(x-5)(x-1)} > 0, \\ x \leq -1 \cup x \geq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2)}{(x+3)(x-5)(x-1)} < 0, \\ x \leq -1 \cup x \geq 2, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < -2 \cup 1 < x < 5, \\ x \leq -1 \cup x \geq 2, \end{cases} \quad \text{—} \quad \begin{cases} -3 < x < -2, \\ 2 \leq x < 5. \end{cases}$$

Ответ: $-3 < x < -2, 2 \leq x < 5. \quad x \in (-3; -2) \cup [2; 5)$

Пример 8. Решить неравенство

$$\frac{(\sqrt{x+9}-\sqrt{x^2-x+1})(2x^2-x+1-|x+1|)}{|x+5|+x^2-2x^3-1} < 0. \quad (A)$$

Приводим подробную последовательность равносильных преобразований, обоснование которых читатель легко найдет после знакомства с решениями предыдущих примеров.

$$(A) \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x+9}-\sqrt{x^2-x+1})(2x^2-x+1-|x+1|)}{|x+5|-(2x^3-x+1)} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{((\sqrt{x+9})^2 - (\sqrt{x^2-x+1})^2)((2x^2-x+1)^2 - |x+1|^2)}{|x+5|^2 - (2x^2-x+1)^2} < 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{((x+9) - (x^2-x+1))((2x^2-x+1)^2 - (x+1)^2)}{(x+5)^2 - (2x^2-x+1)^2} < 0, \\ x \geq -9, \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(-x^2+2x+8)(2x^2-x+1-x-1)(2x^2-x+1+x+1)}{(x+5-2x^2+x-1)(x+5+2x^2-x+1)} < 0, \\ x \geq -9, \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(-x^2+2x+8)(2x^2-2x)(2x^2+2)}{(-2x^2+2x+4)(2x^2+6)} < 0, \\ x \geq -9, \end{cases} \Leftrightarrow \\
&> \begin{cases} \frac{(-1)(x^2-2x-8)2x(x-1)2(x^2+1)}{(-2)(x^2-x-2)2(x^2+3)} < 0, \\ x \geq -9, \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x-1)(x-4)(x+2)}{(x+1)(x-2)} < 0, \\ x \geq -9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < -1, \\ 0 < x < 1, \\ 2 < x < 4. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ответ: $-2 < x < -1, 0 < x < 1, 2 < x < 4$.

Глава V. ЗАМЕНА МНОЖИТЕЛЕЙ С ИРРАЦИОНАЛЬНЫМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ

(Типы множителей. Решение стандартных иррациональных неравенств. Примеры)

Часть множителей с иррациональными выражениями и их замена были рассмотрены в главах III и IV. Поскольку степенная функция $y = t^n$ при $n > 0$ является строго возрастающей на множестве неотрицательных чисел (а при нечетном натуральном показателе n — на всей числовой оси), то в силу утверждения 1 справедливы замены:

$$(a-b) \leftrightarrow (a^n - b^n), \text{ при } n > 0, a \geq 0 \text{ и } b \geq 0, \quad (5.1)$$

$$(a-b) \leftrightarrow (a^{2k-1} - b^{2k-1}) \text{ при } k \text{ натуральном.} \quad (5.2)$$

Практически задачи конкурсных экзаменов на неравенства содержат корни только второй или третьей степени, при этом подавляющая часть задач содержит корни

только второй степени, работа с которыми и вызывает основные трудности у школьников. Поэтому и мы основное внимание уделяем работе с квадратными корнями, полагая, что этого достаточно для безошибочной ориентации в других случаях.

Объявленные замены (5.1) и (5.2) позволяют легко получить следующие замены (в дополнение к предыдущим)

$$(\sqrt{f}-\sqrt{g}) \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} (f-g), \quad (5.3)$$

$$\sqrt{f} \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} f, (5.4) \text{ и } \sqrt{|f|} \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} f^2 \quad (5.5)$$

$$(\sqrt{|f|}-\sqrt{g}) \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} f^2-g^2 \quad (5.6)$$

$$(\sqrt{g}-\sqrt{|f|}) \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} g^2-f^2 \quad (5.6)'$$

Любопытна замена

$$(\sqrt{f}+\sqrt{g}) \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} (f+g), \quad (5.7)$$

которая перекликается с заменой (3.9). Замена суммы $(\sqrt{f}+\sqrt{g})$ при возможном одновременном равенстве нулю подкоренных выражений на сумму $(f+g)$ позволяет учитывать эту возможность. Напомним, что, если легко установить отсутствие общих корней равенств $f=0$ и $g=0$, то сумма $(\sqrt{f}+\sqrt{g})$ как множитель заменяется на единицу в соответствии с (3.9).

Сумма вида $(\sqrt{f}+g)$ заменяется по правилу:

$$(\sqrt{f}+g) \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} 1 \text{ при } g>0 \quad (5.8)$$

и

$$(\sqrt{f}+g) \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} f-g^2 \text{ при } g\leq 0. \quad (5.9)$$

Замены (5.8) и (5.9) позволяют легко получить известные преобразования стандартных иррациональных неравенств.

$$1) \sqrt{f}<g \Leftrightarrow \sqrt{f}-g<0 \Leftrightarrow \begin{cases} g>0, \\ f-g^2<0, \\ f\geq 0; \end{cases}$$

$$2) \sqrt{f} \leq g \Leftrightarrow \sqrt{f} - g \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g \geq 0, \\ f - g^2 \leq 0, \\ f \geq 0. \end{cases}$$

$$3) \sqrt{f} \geq g \Leftrightarrow \sqrt{f} - g \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g < 0, \\ f \geq 0, \end{cases} \cup \begin{cases} g \geq 0, \\ f - g^2 \geq 0; \end{cases}$$

$$4) \sqrt{f} > g \Leftrightarrow \sqrt{f} - g > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g < 0, \\ f \geq 0, \end{cases} \cup \begin{cases} g \geq 0, \\ f - g^2 > 0. \end{cases}$$

Пример 9. Решите неравенство

$$(\sqrt{x+10}-3x)(|x+14|-2x) < 0.$$

В этом неравенстве уже нельзя множители $\sqrt{x+10}-3x$ и $(|x+14|-2x)$ рассматривать как разности неотрицательных чисел, так как выражения $3x$ и $2x$ в области допустимых значений (т. е. при $x+10 \geq 0$) могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Однако, если область допустимых значений исходного неравенства разбить на два промежутка $-10 \leq x \leq 0$ и $x > 0$ (точка $x=0$ есть точка смены знака выражений $3x$ и $2x$), то легко заметить, что на промежутке $-10 \leq x \leq 0$ мы имеем произведение двух положительных чисел, и поэтому исходное неравенство ложно, а на втором промежутке каждый множитель есть разность двух неотрицательных чисел, а, следовательно, можно воспользоваться методом замены множителей. Итак, имеем:

$$(\sqrt{x+10}-3x)(|x+14|-2x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -10 \leq x \leq 0, \\ (\sqrt{x+10}-3x)(|x+14|-2x) < 0 \text{ (ложно)}, \\ x > 0, \\ (\sqrt{x+10}-3x)(|x+14|-2x) < 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ ((\sqrt{x+10})^2 - (3x)^2)(|x+14|^2 - (2x)^2) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ (x+10-9x^2)((x+14)^2 - (2x)^2) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ -(9x^2 - x - 10)(x + 14 - 2x)(x + 14 + 2x) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ (-9)(x+1)\left(x - \frac{10}{9}\right)(14-x)(3x+14) < 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \left(x - \frac{10}{9}\right)(x-14) < 0 \end{cases}$$

(т. к. при $x > 0$ $(x+1)$ и $(3x+14)$ — положительные числа),

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \frac{10}{9} < x < 14, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{10}{9} < x < 14.$$

Ответ: $\frac{10}{9} < x < 14$.

Ясно, что решение примера 9 наводит на мысль, как действовать в произвольной подобной ситуации: область допустимых значений неравенства разбить на промежутки знакопостоянства выражений, которые необходимо возводить в квадрат, чтобы воспользоваться методом замены множителей; далее на каждом из полученных промежутков решать исходное неравенство и полученные ответы объединить. Для иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пример 10. Решить неравенство

$$\frac{(x + \sqrt{x+18} - 2)(\sqrt{x^2-1} - x)}{|2x-8| + 2x - x^2} > 0.$$

Выделяем на первом этапе в каждом множителе знакопостоянные выражения уже известных видов (корни и модули):

$$\frac{(\sqrt{x+18} - (2-x))(\sqrt{x^2-1} - x)}{(12x-8| - (x^2-2x))} > 0.$$

При этом все множители мы привели к разности, чтобы разобратся со знакопостоянством оставшихся выражений.

Область существования всех множителей определяется системой неравенств для подкоренных выражений: $x+18 \geq 0$ и $x^2-1 \geq 0$. На втором этапе эта область

нулями выражений $(2-x)$, x и (x^2-2x) разбивается на следующие промежутки знакопостоянства этих выражений:

первый промежуток: $-18 \leq x \leq -1$,

второй промежуток: $1 \leq x \leq 2$,

третий промежуток: $x \geq 2$.

При этом на первом промежутке для всех x выполняются неравенства $2-x > 0$, $x < 0$, $x^2-2x > 0$. Поэтому исходное неравенство можно решить методом замены множителей ($\sqrt{x^2-1}-x > 0$) при $-18 \leq x \leq -1$:

$$\left\{ \frac{(\sqrt{x+18} - (2-x))(\sqrt{x^2-1}-x)}{|2x-8| - (x^2-2x)} > 0, \Leftrightarrow \right.$$

$$\left. -18 \leq x \leq -1, \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{(x+18 - (2-x)^2)}{(2x-8)^2 - (x^2-2x)^2} > 0, \Leftrightarrow \right.$$

$$\left. -18 \leq x \leq -1, \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \frac{(x-7)(x+2)}{(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})(x^2-4x+8)} > 0, \Leftrightarrow \right.$$

$$\left. -18 \leq x \leq -1, \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+2\sqrt{2}) > 0, \\ -18 \leq x \leq -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2\sqrt{2} \cup x > -2, \\ -18 \leq x \leq -1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -18 \leq x < -2\sqrt{2} \cup -2 < x \leq -1.$$

Аналогично на втором промежутке $1 \leq x \leq 2$ для всех x выполняются неравенства $2-x \geq 0$, $x > 0$, $x^2-2x \leq 0$, поэтому множители в числителе ($\sqrt{x+18} - (2-x)$) и ($\sqrt{x^2-1}-x$) можно заменить на соответствующие равенности квадратов $((\sqrt{x+18})^2 - (2-x)^2)$ и $((\sqrt{x^2-1})^2 - x^2)$, а знаменатель как положительное число при всех x из промежутка $1 \leq x \leq 2$ заменить на 1. В итоге получаем:

$$\left\{ \frac{(\sqrt{x+18} - (2-x))(\sqrt{x^2-1}-x)}{|2x-8| - (x^2-2x)} > 0, \Leftrightarrow \right.$$

$$\left. 1 \leq x \leq 2, \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ ((x+18) - (2-x)^2)((x^2-1) - x^2) > 0, \Leftrightarrow \right.$$

$$\left. 1 \leq x \leq 2, \right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-x^2+5x+14)(-1) > 0, \\ 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x-14 > 0, \\ 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \cup x > 7, \\ 1 \leq x \leq 2, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \emptyset.$$

т. е. на промежутке $1 \leq x \leq 2$ исходное неравенство не имеет решений.

Наконец, на третьем промежутке ($x \geq 2$) выражение $(2-x)$ неположительно, и, следовательно, множитель $(\sqrt{x+18} - (2-x))$ есть положительное число, а выражения x и (x^2-2x) неотрицательны, поэтому множители $(\sqrt{x^2-1} - x)$ и $(|2x-8| - (x^2-2x))$ можно заменить на разности квадратов $((\sqrt{x^2-1})^2 - x^2)$ и $(|2x-8|^2 - (x^2-2x)^2)$. Имеем:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \frac{(\sqrt{x+18} - (2-x))(\sqrt{x^2-1} - x)}{|2x-8| - (x^2-2x)} > 0, \\ x \geq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x^2-1-x^2)}{|2x-8|^2 - (x^2-2x)^2} > 0, \\ x \geq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-2x)^2 - (2x-8)^2 > 0, \\ x \geq 2, \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-2x - (2x-8))(x^2-2x + 2x-8) > 0, \\ x \geq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-4x+8)(x^2-8) > 0, \\ x \geq 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-8 > 0, \\ x \geq 2, \end{cases} \Leftrightarrow x > 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Т. е. на третьем промежутке исходное неравенство выполняется при $x > 2\sqrt{2}$.

Объединяя ответы для каждого промежутка, получаем ответ задачи: $-18 \leq x < -2\sqrt{2}$, $-2 < x \leq -1$, $x > 2\sqrt{2}$.

Глава VI. ЗАМЕНА МНОЖИТЕЛЕЙ С ПОКАЗАТЕЛЬНЫМИ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ

(Типы множителей. Решение стандартных неравенств и неравенств повышенной сложности. Примеры.)

При овладении материалом предыдущих глав читатель легко самостоятельно может установить, что разность

степеней по одному и тому же основанию всегда по знаку совпадает с произведением разности показателей этих степеней на отклонение основания степени от единицы. Другими словами, выражение вида $(a^f - a^g)$ имеет тот же знак, что и выражение $(f - g)(a - 1)$ при $a > 0$ (если $a = 1$, то оба выражения равны нулю).

Сказанное равносильно тому, что разность логарифмов по одному и тому же основанию всегда по знаку совпадает с произведением разности чисел этих логарифмов на отклонение основания от единицы. Другими словами выражение вида $(\log_a f - \log_a g)$ имеет тот же знак (в области существования логарифмов), что и выражение вида $(f - g)(a - 1)$.

Для обоснования двух сформулированных утверждений достаточно рассмотреть два случая: $0 < a < 1$ и $a > 1$, и воспользоваться монотонностью показательной и логарифмической функций в каждом случае.

Приведенные утверждения позволяют исключительно эффективно решать очень многие неравенства, которые принято относить к разряду задач повышенной сложности.

В частности, легко получить следующие полезные схемы решения неравенств:

$$1) a^f > a^g \Leftrightarrow \begin{cases} (f - g)(a - 1) > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} a^f > b, \\ a > 0, \end{cases} \Leftrightarrow (f - \log_a b)(a - 1) > 0;$$

$$3) \log_a f > \log_a g \Leftrightarrow \begin{cases} (f - g)(a - 1) > 0, \\ f > 0, g > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$4) \log_a f > b \Leftrightarrow \begin{cases} (f - a^b)(a - 1) > 0, \\ f > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$5) \log_a f + \log_a g > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (fg - 1)(a - 1) > 0, \\ f > 0, g > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$6) \log_a f + b > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (fa^b - 1)(a - 1) > 0, \\ f > 0, \\ a > 0; \end{cases}$$

$$7) \frac{a^{f_1} - a^{g_1}}{a^{f_2} - a^{g_2}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f_1 - g_1}{f_2 - g_2} > 0, \\ a > 0, a \neq 1; \end{cases}$$

$$8) \frac{\log_a f_1 - \log_a g_1}{\log_a f_2 - \log_a g_2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f_1 - g_1}{f_2 - g_2} > 0, \\ f_i, g_i > 0, \\ a > 0 \text{ и } a \neq 1, \text{ и т. д.} \end{cases}$$

Строгое обоснование перечисленных схем предлагает-ся провести читателю самостоятельно в качестве полез-ных упражнений.

Укажем основные типы множителей, содержащие по-казательные и логарифмические выражения, и им соот-ветствующие замены.

$$(a^f - a^g) \leftrightarrow (f - g)(a - 1), \quad (6.1)$$

$$(a^f - g) \overset{g > 0}{\leftrightarrow} (f - \log_a g)(a - 1), \quad (6.2)$$

$$(g - a^f) \overset{g > 0}{\leftrightarrow} (\log_a g - f)(a - 1), \quad (6.2)'$$

$$(\log_a f - \log_a g) \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} (f - g)(a - 1), \quad (6.3)$$

$$(\log_a f - g) \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} (f - a^g)(a - 1), \quad (6.4)$$

$$(g - \log_a f) \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} (a^g - f)(a - 1), \quad (6.4)'$$

$$\log_a f \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} (f - 1)(a - 1), \quad (6.5)$$

$$(\log_a f + \log_a g) \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} (fg - 1)(a - 1), \quad (6.6)$$

$$(\log_a f + g) \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} (fa^g - 1)(a - 1), \quad (6.7)$$

$$(k \log_a f - m) \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} (f^k - a^m)(a - 1), \quad (6.8)$$

$$(m - k \log_a f) \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} (a^m - f^k)(a - 1). \quad (6.8)'$$

Естественно, что между многими заменами (6.1) — (6.8)' существуют взаимосвязи, но замены указаны здесь по причине их частого присутствия в решениях конкретных неравенств методом замены множителей (см. главы IX, X и приложение).

Пример 11. Решить неравенство

$$\frac{\log_2(x^2-2x-7)^5 - \log_3(x^2-2x-7)^6}{3x^2-13x+4} \leq 0$$

Мы представим только последовательность равносильных преобразований, указывая иногда над знаком равносильности номера замен.

Решение.

$$\begin{aligned} & \frac{\log_2(x^2-2x-7)^5 - \log_3(x^2-2x-7)^6}{3x^2-13x+4} \leq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{5\log_2(x^2-2x-7) - 8(\log_3 2)\log_2(x^2-2x-7)}{(x-4)\left(x-\frac{1}{3}\right)} \leq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{(5-8\log_3 2)\log_2(x^2-2x-7) \stackrel{(6.5), (6.8)}{\quad}}{(x-4)\left(x-\frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(3^5-2^8)(3-1)((x^2-2x-7)-1)(2-1)}{(x-4)\left(x-\frac{1}{3}\right)} \leq 0, \\ x^2-2x-7 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(243-256) \cdot 2 \cdot (x-4)(x+2)}{(x-4)\left(x-\frac{1}{3}\right)} \leq 0, \\ x < 1-\sqrt{8} \cup x > 1+\sqrt{8}, \end{cases} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+2}{x-1/3} \geq 0, \\ x \neq 4, \\ x < 1-\sqrt{8} \cup x > 1+\sqrt{8}, \end{cases} \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2 \cup x > 1/3, \\ x \neq 4, \\ x < 1 - \sqrt{8} \cup x > 1 + \sqrt{8}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -2, \\ 1 + \sqrt{8} < x < 4, \\ x > 4 \end{cases}$$

Ответ: $x \leq -2, 1 + \sqrt{8} < x < 4, x > 4$.

Пример 12. Решить неравенство

$$\frac{(8-x^3)(2^x-1)(\sqrt{x+20}-\sqrt{2x+30})(|x-2|-4-x^2)\log_3^2 x^2}{(|x|^{2x-1}-|x|^{5-x})(\log_{x+20}(12-|x|)-\log_{x+20}(20-2|x|))} < 0.$$

Решение. Первый множитель в числителе заменяем в силу (5.2) на $(2-x)$, второй в силу (6.2) — на x , третий в силу (5.3) — на $(x+20-(2x+30))$, четвертый в силу (4.6) — на $((x-2)-4-x^2)((x-2)+(4+x^2))$, пятый в силу (5.2) и (6.5) — на $(x^2-1)(5-1)$.

Первый множитель в знаменателе в силу (6.1) и (4.2) заменяем на $(3x-6)(x-1)(x+1)$, а второй в силу (6.3) и (4.2) — на $(x-8)(x+8)(x+19)$.

Получаем в области допустимых значений рационального неравенство, равносильное исходному:

$$\frac{(2-x)x(-x-10)(-x^2+x-6)(x^2+x+2)(x-1)(x+1)}{(3x-6)(x-1)(x+1)(x-8)(x+8)(x+19)} < 0.$$

Область существования всех множителей в исходном неравенстве представляет собой два промежутка: $-10 < x < 0$ и $0 < x < 10$. В этой области множители $(-x-10)$ и $(x+19)$ знакпостоянны, и поэтому их заменяем, соответственно на (-1) и 1 .

Знакопостоянны и трехчлены $(-x^2+x-6)$ и (x^2+x+2) , поэтому в силу (3.3) и (3.4) их заменяем также, соответственно на (-1) и 1 :

$$\frac{x(-1)(x-2)(x-1)(x+1)}{3(x-2)(x-1)(x+1)(x-8)(x+8)} < 0.$$

Решая последнее стандартное рациональное неравенство в указанной области существования всех множителей исходного неравенства, получаем ответ:

$$-8 < x < -1, -1 < x < 0, 8 < x < 10.$$

Глава VII. НОВЫЕ «СТАНДАРТНЫЕ» НЕРАВЕНСТВА И СХЕМЫ ИХ РЕШЕНИЯ

(Перечень традиционных типов неравенств повышенной сложности, переводимых в разряд стандартных. Примеры.)

Познакомившись с решениями двенадцати рассмотренных примеров, читатель должен согласиться, что овла-

дев техникой применения метода замены множителей, можно значительно быстрее двигаться к ответу при решении достаточно широкого класса неравенств, предлагаемых в конкурсных заданиях. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, в последней главе широко и подробно рассматриваются решения неравенств из вариантов письменных экзаменов по математике на основных факультетах Московского государственного университета (кстати, пример 11 взят из того же источника). По этой же причине в главе IX специально разбираются неравенства из «Сборника задач по математике для поступающих во втузы» (под редакцией Сканави М. И.), отнесенные к задачам повышенной сложности.

Мы предлагаем к традиционно стандартным неравенствам добавить неравенства, которые приводимы к виду (1) (см. глава II) простейшими преобразованиями и сводимы после этого методом замены получаемых множителей к рациональному неравенству на основании рекомендованных замен.

Так, к стандартным теперь можно отнести неравенства следующих видов:

$$1) (|f_1| - |g_1|) (|f_2| - |g_2|) \dots (|f_n| - |g_n|) < 0,$$

$$2) (\sqrt{f_1} - \sqrt{g_1}) (\sqrt{f_2} - \sqrt{g_2}) \dots (\sqrt{f_n} - \sqrt{g_n}) < 0.$$

$$3) (a_1^{f_1} - a_1^{g_1}) (a_2^{f_2} - a_2^{g_2}) \dots (a_n^{f_n} - a_n^{g_n}) < 0,$$

$$4) (\log_{a_1} f_1 - \log_{a_1} g_1) (\log_{a_2} f_2 - \log_{a_2} g_2) \dots (\log_{a_n} f_n - \log_{a_n} g_n) < 0$$

где все f_k , g_k , a_k — линейные или квадратичные функции или такие, что соответствующие выражения вида $(f_k - g_k)$, $(f_k + g_k)$, $(a_k - 1)$ методом замены приводят, в свою очередь, к рациональному неравенству) естественно относить к стандартным.

Пример 13. Указать рациональное неравенство, равносильное данному в области допустимых значений:

$$\frac{(\log_{x^2} \log_{(x+2)} (x-1) - \log_{x^2} \log_{(x+2)} (8-x))}{|x|^{3^x} - |x|^{9^{-x}}} < 0.$$

На основании (6.1) и (6.3) на первом шаге получаем неравенство:

$$\frac{(\log_{(x+2)} (x-1) - \log_{(x+2)} (8-x)) (x^2 - 1)}{(3^x - 9^{-x}) (|x| - 1)} < 0.$$

Далее, на втором шаге, на основании (6.3), (6.1) и (4.2) имеем искомое неравенство

$$\frac{((x-1)-(8-x))(x+2-1)(x^2-1)}{(x-(-2))(3-1)(x-1)(x+1)} < 0,$$

которое приводится после упрощений к виду:

$$(2x-9)(x+1)x < 0.$$

Ответ: $(2x-9)(x+1)x < 0$.

Комбинируя множители из замен, указанных в тексте книги, можно получить большее количество различных типов неравенств, эффективно сводимых методом замены множителей к простейшему классу рациональных неравенств. Поскольку анализ схем решений всех типов таких неравенств далеко выходит за рамки данной публикации, то мы ограничимся представлением сводной информации по методу замены переменных, оставляя на суд читателя сопоставление этого метода с традиционными.

Глава VIII. СВОДНАЯ ИНФОРМАЦИЯ ПО МЕТОДУ ЗАМЕНЫ МНОЖИТЕЛЕЙ

Хочется предупредить читателя, что предлагаемая сводная информация скорее есть конспект предыдущих результатов по методу замены множителей, а не необходимый материал для запоминания с целью овладения указанным методом. Поэтому Вас не должно пугать обилие перечисляемых замен, большинство которых можно обнаружить непосредственно в момент решения конкретного неравенства.

1. Стандартный вид неравенства, когда применяется метод замены множителей:

$$(M_1 \cdot M_2 \cdot \dots \cdot M_{n_1}) / (M'_1 \cdot M'_2 \cdot \dots \cdot M'_{n_2}) \vee 0,$$

где символ « \vee » обозначает один из четырех возможных знаков неравенства: $<$, \leq , \geq , $>$.

2. Основная идея метода замены множителя состоит в замене любого множителя M на знакововпадающий с ним и имеющий одни и те же корни (в области существования всех множителей) множитель L .

Замечание. Преобразованное таким образом неравенство всегда равносильно исходному в области существования последнего.

Предупреждение. Указанная замена возможна только тогда, когда заменяемый множитель находится в числите-

ле или знаменателе дроби, которая сравнивается с нулем (!).

3. Две основные замены.

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{(a-b) \leftrightarrow (f(a) - f(b))}, \quad (8.1)$$

если $f(x)$ — строго возрастающая функция;

$$\stackrel{\text{ОДЗ}}{(a-b) \leftrightarrow (f(b) - f(a))}, \quad (8.2)$$

если $f(x)$ — строго убывающая функция;

4. Наиболее часто используемые замены (без указания учета области допустимых значений).

а) Замены знакопостоянных множителей:

$$(ax^2 + bx + c) \leftrightarrow a \text{ при } a \neq 0 \text{ и } D < 0, \quad (8.3)$$

$$(ax^2 + bx + c) \leftrightarrow c \text{ при } a \neq 0 \text{ и } D < 0, \quad (8.4)$$

$$(ax^2 + bx + c) \leftrightarrow 1 \text{ при } a > 0 \text{ и } D < 0, \quad (8.5)$$

$$(ax^2 + bx + c) \leftrightarrow (-1) \text{ при } a < 0 \text{ и } D < 0, \quad (8.6)$$

$$(|f| + |g|) \leftrightarrow 1 \text{ при } |f| + |g| \neq 0, \quad (8.7)$$

$$(\sqrt{f} + \sqrt{g}) \leftrightarrow 1 \text{ при } |f| + |g| \neq 0, \quad (8.8)$$

$$(\sqrt{f} + |g|) \leftrightarrow 1 \text{ при } |f| + |g| \neq 0, \quad (8.9)$$

$$(|f| + g) \leftrightarrow 1 \text{ при } g > 0, \quad (8.10)$$

$$(\sqrt{f} + g) \leftrightarrow 1 \text{ при } g > 0, \quad (8.11)$$

$$(|f| + ax^2 + bx + c) \leftrightarrow 1 \text{ при } a > 0 \text{ и } D < 0, \quad (8.12)$$

$$(\sqrt{f} + ax^2 + bx + c) \leftrightarrow 1 \text{ при } a > 0 \text{ и } D < 0, \quad (8.13)$$

$$a^f \leftrightarrow 1, \quad (8.14)$$

$$(a^f + |g|) \leftrightarrow 1, \quad (8.15)$$

$$(a^f + \sqrt{g}) \leftrightarrow 1 \text{ при } g \geq 0, \quad (8.16)$$

$$(a^f + g) \leftrightarrow 1 \text{ при } g \geq 0, \quad (8.17)$$

б) Замена незначкопостоянных множителей с модулем и корнями:

$$(|f| - |g|) \leftrightarrow (f - g)(f + g), \quad (8.18)$$

$$(|f| - g) \leftrightarrow (f - g)(f + g), \text{ при } g \geq 0, \quad (8.19)$$

$$(g - |f|) \leftrightarrow (g - f)(g + f), \text{ при } g \geq 0, \quad (8.19)$$

$$(|f| - (ax^2 + bx + c)) \leftrightarrow (f + ax^2 + bx + c) (f - ax^2 - bx - c) \\ \text{при } a > 0 \text{ и } D < 0, \quad (8.20)$$

$$(ax^2 + bx + c - |f|) \leftrightarrow (ax^2 + bx + c + f) (ax^2 + bx + c - f) \\ \text{при } a > 0 \text{ и } D < 0, \quad (8.20)'$$

$$(|f| - \sqrt{g}) \leftrightarrow f^2 - g, \quad (\sqrt{g} - |f|) \leftrightarrow g - f^2, \quad (8.21), (8.21)'$$

$$(\sqrt{f} - g) \leftrightarrow (f - g^2), \text{ при } g \geq 0, \quad (8.22)$$

$$(g - \sqrt{f}) \leftrightarrow (g^2 - f), \text{ при } g \geq 0, \quad (8.22)'$$

$$(\sqrt{f} - \sqrt{g}) \leftrightarrow (f - g), \quad (8.23)$$

$$(\sqrt{f} - \sqrt{|g|}) \leftrightarrow (f - g) (f + g), \quad (8.24)$$

$$(\sqrt{|g|} - \sqrt{f}) \leftrightarrow (g - f) (g + f), \quad (8.24)'$$

$$(\sqrt{|f|} - g) \leftrightarrow (f - g^2) (f + g^2), \text{ при } g \geq 0, \quad (8.25)$$

$$(g - \sqrt{|f|}) \leftrightarrow (g^2 - f) (g^2 + f), \text{ при } g \geq 0, \quad (8.25)'$$

$$(|f| - \sqrt{|g|}) \leftrightarrow (f^2 - g) (f^2 + g), \quad (8.26)$$

$$(\sqrt{|g|} - |f|) \leftrightarrow (g - f^2) (g + f^2), \quad (8.26)'$$

$$(\sqrt{|f|} - \sqrt{|g|}) \leftrightarrow (f - g) (f + g), \quad (8.27)$$

$$|f| \leftrightarrow f^2, \quad (8.28)$$

$$\sqrt{f} \leftrightarrow f, \quad (8.29)$$

$$\sqrt{|f|} \leftrightarrow f^2. \quad (8.30)$$

в) Замена незнакомостоянных множителей с показательными и логарифмическими выражениями:

$$(a^f - a^g) \leftrightarrow (f - g) (a - 1), \quad (8.31)$$

$$(a^f - g) \leftrightarrow (f - \log_a g) (a - 1), \text{ при } g > 0, \quad (8.32)$$

$$(g - a^f) \leftrightarrow (\log_a g - f) (a - 1), \text{ при } g > 0, \quad (8.32)'$$

$$(a^f - 1) \leftrightarrow f(a - 1), \quad (8.33)$$

$$(1 - a^f) \leftrightarrow f(1 - a), \quad (8.33)'$$

$$\frac{(a^{f_1} - a^{g_1})}{(a^{f_2} - a^{g_2})} \leftrightarrow \frac{(f_1 - g_1)}{(f_2 - g_2)}, \quad (8.34)$$

$$(\log_a f - \log_a g) \leftrightarrow (f - g)(a - 1), \quad (8.35)$$

$$(\log_a f + \log_a g) \leftrightarrow (fg - 1)(a - 1), \quad (8.36)$$

$$(\log_a f - g) \leftrightarrow (f - a^g)(a - 1), \quad (8.37)$$

$$(g - \log_a f) \leftrightarrow (a^g - f)(a - 1), \quad (8.37)'$$

$$(\log_a f + g) \leftrightarrow (f \cdot a^g - 1)(a - 1), \quad (8.38)$$

$$(\log_a f - 1) \leftrightarrow (f - a)(a - 1), \quad (8.39)$$

$$(1 - \log_a f) \leftrightarrow (a - f)(a - 1), \quad (8.39)'$$

$$\log_a f \leftrightarrow (f - 1)(a - 1). \quad (8.40)$$

Глава IX. 30 НЕРАВЕНСТВ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ
(Из группы «В» «Сборника задач по математике для поступающих во втузы» под редакцией М. И. Сканави, М., Высш. шк., 1988)

Приводим относительно подробные решения с применением метода замены множителей. В скобках после порядкового номера указывается номер задачи из указанного сборника.

Решить неравенства (1—30)

$$1. (9.275) \quad \frac{x^2 - 7|x| + 10}{x^2 - 6x + 9} < 0$$

Решение. Так как при всех x для его модуля выполняется равенство $x^2 = |x|^2$, то числитель дроби левой части неравенства как трехчлен относительно $|x|$ раскладываем на множители (знаменатель преобразуется очевидным образом):

$$\frac{(|x| - 2)(|x| - 5)}{(x - 3)^2} < 0.$$

Разность неотрицательных чисел совпадает по знаку с разностью их квадратов, поэтому в соответствии с методом замены множителей полученное неравенство можно переписать в следующей равносильной форме:

$$\frac{(|x|^2 - 2^2)(|x|^2 - 5^2)}{(x - 3)^2} < 0.$$

Пользуясь упомянутым свойством модуля ($|x|^2 = x^2$), приводим, наконец, неравенство к стандартному виду для дальнейшего решения его методом интервалов:

$$\frac{(x-2)(x+2)(x-5)(x+5)}{(x-3)^2} < 0.$$

Полагая, что проблем в решении методом интервалов читатель не имеет, сразу указываем ответ: $-5 < x < -2$, $2 < x < 3$, $3 < x < 5$.

2. (9.263) $(4x^2 + 2x + 1)^{x^2 - x} > 1$.

Решение. Трехчлен $(4x^2 + 2x + 1)$ имеет положительный коэффициент при x^2 и отрицательный дискриминант, и поэтому он больше нуля при всех x . Отсюда следует, что областью допустимых значений неравенства является вся числовая прямая. В соответствии с методом замены множителей выражение вида $(a^f - 1)$ можно заменить на (совпадающее с ним по знаку в области допустимых значений) произведение $f(a - 1)$. Поэтому, перенеся единицу в левую часть, исходное неравенство записывается в следующем равносильном варианте:

$$(x^2 - x)((4x^2 + 2x + 1) - 1) > 0.$$

Раскладывая далее на множители, получаем стандартное неравенство:

$$x^2(x-1)(2x+1) > 0.$$

Откуда имеем ответ: $x < -\frac{1}{2}$, $x > 1$.

3. (9.274). $(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3$

Решение: Если разделить обе части неравенства на положительное при всех x выражение $(x^2 + x + 1)^3$, то полученное неравенство можно решить по точной аналогии с решением предыдущего примера.

Однако известно, что разность $(a^f - a^g)$ в области допустимых значений совпадает по знаку с произведением $(f - g)(a - 1)$. Поэтому после переноса в левую часть $(x^2 + x + 1)^3$ исходное неравенство можно в силу метода замены множителей представить в виде

$$\left(\frac{x+5}{x+2} - 3\right)((x^2 + x + 1) - 1) \geq 0.$$

После очевидных упрощений последнее неравенство приводили к стандартному (для последующего решения методом интервалов) виду:

$$\frac{(-2x-1)x(x+1)}{(x+2)} \geq 0.$$

Откуда получаем ответ: $-2 < x \leq -\frac{1}{2}$; $-0,5 \leq x \leq 0$.

$$4. (9.278) \left(\frac{15}{14}\right)^{|x+7|} < \left(\frac{15}{14}\right)^{|x^2-3x+2|}$$

Решение: Как и при решении предыдущего неравенства после переноса в левую часть получаемую разность степеней заменяем на разность показателей, умноженную на отклонение основания степени от единицы:

$$(|x+7| - |x^2-3x+2|) \left(\frac{15}{14} - 1\right) < 0.$$

Далее разность модулей как разность неотрицательных всюду чисел заменяем на разность их квадратов (положительный множитель $\left(\frac{15}{14} - 1\right)$ «отбрасываем»):

$$|x+7|^2 - |x^2-3x+2|^2 < 0,$$

используя свойство модуля $|a|^2 = a^2$ и раскладывая получаемую разность квадратов на множители, приходим к неравенству:

$$(x^2 - 2x + 9)(x^2 - 4x - 5) > 0,$$

которое равносильно неравенству $x^2 - 4x - 5 > 0$, откуда получаем ответ: $x < -1$; $x > 5$.

$$5. (9.272) |2^{4x^2-1} - 5| \leq 3.$$

Решение. Используя свойство модуля $|a|^2 = a^2$ и право замены разности неотрицательных чисел на разность их квадратов, получаем следующую последовательность равносильных преобразований исходного неравенства.

$$|2^{4x^2-1} - 5| \leq 3 \Leftrightarrow |2^{4x^2-1} - 5|^2 - 3^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(2^{4x^2-1} - 5)^2 - 3^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^{4x^2-1} - 8)(2^{4x^2-1} - 2) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^{4x^2-1} - 2^3)(2^{4x^2-1} - 2^1) \leq 0.$$

Как известно (см. пример 3.) множитель вида $(a^f - a^g)$ можно заменять на произведение $(f - a)(a - 1)$. Поэтому получаем следующее равносильное неравенство

$$((4x^2 - 1) - 3)((4x^2 - 1) - 1) \leq 0,$$

которое после элементарных преобразований принимает вид

$$(x-1)(x+1)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leq 0.$$

Откуда получаем ответ: $-1 \leq x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$.

6. (9.265) $1 < 3^{|x^2-x|} < 9$.

Решение. Естественно, что опираясь на монотонность функции $y = 3^t$, можно перейти сразу к соответствующему неравенству между показателями. Однако, ради демонстрации метода замены множителей мы предлагаем другой путь.

Так при $a < b$ двойное неравенство $a < t < b$ равносильно неравенству $(t-a)(t-b) < 0$, то исходное неравенство можно переписать в виде

$$(3^{|x^2-x|} - 1)(3^{|x^2-x|} - 9) < 0,$$

то есть

$$(3^{|x^2-x|} - 3^0)(3^{|x^2-x|} - 3^2) < 0$$

Множители вида $(a^f - a^g)$ можно заменять на произведение $(f-g)(a-1)$. Поэтому переходим к следующему равносильному неравенству

$$|x^2-x|(|x^2-x|-2) < 0.$$

Множители вида $|f|$, $(|f|-a)$ можно заменить на f^2 и (f^2-a^2) соответственно ($a \geq 0$). Поэтому имеем следующую последовательность равносильных преобразований:

$$|x^2-x|(|x^2-x|-2) < 0 \Leftrightarrow (x^2-x)^2((x^2-x)^2-2^2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)^2(x^2-x+2)$$

$$\bullet (x^2-x-2) < 0 \Leftrightarrow (\text{т. к. } x^2-x+2 > 0 \text{ для всех } x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1)^2(x+1)(x-2) < 0.$$

Откуда получаем ответ: $-1 < x < 0, 0 < x < 1, 1 < x < 2$.

$$7. (9.219) \frac{3^{2|x-1|}+3}{4} < 3^{|x-1|}$$

Решение. Поскольку это неравенство очень похоже на предыдущее, то обойдемся без комментариев, приведя только последовательность равносильных преобразований. Итак, имеем:

$$\frac{3^{2|x-1|}+3}{4} < 3^{|x-1|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^{|x-1|})^2 - 4 \cdot 3^{|x-1|} + 3 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^{|x-1|} - 1)(3^{|x-1|} - 3) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x-1|(|x-1|-1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2((x-1)^2-1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x-2)x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

или $1 < x < 2$.

Ответ: $0 < x < 1$, $1 < x < 2$.

$$8. (9.246) \log_{x^2}(3-2x) > 1.$$

Решение. Как известно, разность $(\log_a f - 1)$ в области допустимых значений, т. е. при $f > 0$, $a > 0$ и $a \neq 1$, совпадает по знаку с произведением $(f-a)(a-1)$. Поэтому после переноса единицы в левую часть неравенство преобразуется к виду

$$((3-2x)-x^2)(x^2-1) > 0$$

при условии $3-2x > 0$ и $x \neq 0$.

То есть для определения x имеем систему

$$\begin{cases} (x-1)^2(x+3)(x+1) < 0 \\ x < 3/2 \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Откуда получаем ответ: $-3 < x < -1$.

$$9. (9.255) \log_x(x^2+3x-3) > 1.$$

Решение. По аналогии с предыдущим примером имеем:

$$\log_x(x^2+3x-3) > 1 \Leftrightarrow \log_x(x^2+3x-3) - 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} ((x^2+3x-3)-x)(x-1) > 0, \\ x^2+3x-3 > 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2(x+3) > 0, \\ \left(x + \frac{3+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{21}-3}{2}\right) > 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1, \\ x - \frac{\sqrt{21}-3}{2} > 0, \Leftrightarrow \frac{\sqrt{21}-3}{2} < x < 1 \text{ или } x > 1. \\ x > 0, \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{21}-3}{2} < x < 1$, $x > 1$.

$$10. (9.300) \log_{x^2-3} 729 > 3.$$

Решение. Так как $729 = 9^3$, то неравенство преобразуется к виду $\log_{x^2-3} 9 > 1$.

Далее, как в примерах 8 и 9, имеем

$$\log_{x^2-3} 9 > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} (9 - (x^2 - 3)) ((x^2 - 3) - 1) > 0, \\ x^2 - 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (12 - x^2) (x^2 - 4) > 0, \\ x^2 > 3, \end{cases} \Leftrightarrow (12 - x^2) (x^2 - 4) > 0, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 2) (x + 2) (x - 2\sqrt{3}) (x + 2\sqrt{3}) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{3} < x < -2 \text{ или } 2 < x < 2\sqrt{3}$$

Ответ: $-2\sqrt{3} < x < -2$, $2 < x < 2\sqrt{3}$.

Замечание. При переходе к одному неравенству $(12 - x^2) (x^2 - 4) > 0$ мы воспользовались тем, что если $x^2 \leq 3$ (отрицание $x^2 > 3$), то это неравенство всегда ложно, т. е. $(12 - x^2) (x^2 - 4) < 0$.

$$11. (9.270) \log_x \frac{3}{8-2x} \geq -2.$$

Решение. Здесь, как и в предыдущем примере, предварительно преобразуем неравенство на основании логарифмических тождеств:

$$\log_x \frac{3}{8-2x} \geq -2 \Leftrightarrow (-1) \log_x \frac{3}{8-2x} \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x \left(\frac{3}{8-2x} \right)^{-1} \leq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_x \frac{8-2x}{3} \leq 2.$$

Далее действуем по аналогии с решением примеров 8—10:

$$\log_x \frac{8-2x}{3} \leq 2 \Leftrightarrow \log_x \frac{8-2x}{3} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{8-2x}{3} - x^2 \right) (x-1) \leq 0, \\ 8-2x > 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Условие $x \neq 1$ мы обеспечили тем, что $(x-1)$ поставили в знаменатель в первом неравенстве.

После упрощений система приводится к виду

$$\begin{cases} \frac{(x+2)(x-\frac{4}{3})}{(x-1)} \geq 0, \text{ т. е. } \begin{cases} \frac{x-\frac{4}{3}}{x-1} \geq 0, \\ 0 < x < 4, \end{cases} \end{cases}$$

откуда получаем ответ: $0 < x < 1, \frac{4}{3} \leq x < 4$.

12. (9.252) $\log_x(x^3+1) \cdot \log_{x+1}x > 2$

Решение. В силу тождества $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$ исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \log_{x+1}(x^3+1) > 2, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Так как разность $(\log_a f - b)$ совпадает по знаку в области допустимых значений с произведением $(f - a^b)(a - 1)$, то полученную систему можно переписать в виде

$$\begin{cases} ((x^3+1) - (x+1)^2)((x+1) - 1) > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Далее следует очевидная последовательность равносильных преобразований системы:

$$\begin{cases} (x+1)(x^2-2x)x > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow x > 2$$

(множители $(x+1)$ и x положительны в силу второго неравенства системы, поэтому обе части первого неравенства можно разделить на них).

Ответ: $x > 2, x \in (2, +\infty)$

13. (9.301) $\frac{\log_{6-x}(35-x^3)}{\log_{6-x} 5} > 3$.

Решение. Можно воспользоваться формулой перехода к новому основанию и переписать неравенство в виде

$$\log_{(6-x)}(35-x^3) > 3,$$

после чего решать его по аналогии с решением предыдущих примеров.

Можно перенести всё в левую часть неравенства и преобразовать следующим образом

$$\frac{\log_a(35-x^3) - \log_a(5-x)^3}{\log_a(5-x)} > 0.$$

Далее вспомнив, что разность логарифмов по одному и тому же основанию в области допустимых значений совпадает по знаку с произведением разности чисел этих логарифмов и отклонения основания от единицы (т. е. разность вида $(\log_a f - \log_a g)$ можно заменить на $(f-g)(a-1)$), получаем, что исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{((35-x^3) - (5-x)^3)(a-1)}{((5-x)-1)(a-1)} > 0, \\ 35-x^3 > 0, \\ 5-x > 0. \end{cases}$$

То есть имеем

$$\begin{cases} (x-2)(x-3)(x-4) > 0, \\ x < \sqrt[3]{35}, \end{cases}$$

при $a > 0$ и $a \neq 1$.

Откуда при указанных a получаем ответ: $2 < x < 3$ (т. к. $\sqrt[3]{35}$ больше трех и меньше четырех).

$$14. (9.254) \log_3 \log_{0,2} \log_{32} \frac{x-1}{x+5} > 0. \quad (1)$$

Решение: Будем решать методом замены множителей вида $(\log_a f - b)$ на $(f - a^b)(a-1)$. Имеем:

$$(1) \Leftrightarrow (\log_{0,2} \log_{32} \frac{x-1}{x+5} - 1)(3-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \left(\log_{32} \frac{x-1}{x+5} - 0,2 \right) (0,2-1) > 0, \\ \log_{32} \frac{x-1}{x+5} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \log_{32} \frac{x-1}{x+5} < 0,2 \Leftrightarrow \log_{32} \frac{x-1}{x+5} \left(\log_{32} \frac{x-1}{x+5} - 0,2 \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x-1}{x+5} - 1 \right) (32-1) \left(\frac{x-1}{x+5} - 32^{0.2} \right) (32-1) < 0, \\ \frac{x-1}{x+5} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(-6)(-x-11)}{(x+5)^2} < 0, \\ x < -5 \cup x > 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+11 < 0, \\ x < -5 \cup x > 1, \end{cases} \Leftrightarrow x < -11.$$

Ответ: $x < -11$.

15. (9.253) $\log(x+1) < \log_{1/x}(2-x)$.

Решение. Так как сумма вида $\log_a f + \log_a g$ по знаку совпадает в области допустимых значений с произведением $(fg-1)(a-1)$, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} ((x+1)(2-x)-1)(x-1) < 0, \\ x+1 > 0, \\ 2-x > 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

(предварительно мы преобразовали $\log_{1/x}(2-x)$ к виду $(-\log_x(2-x))$),

т. е. системе:

$$\begin{cases} (x^2-x-1)(x-1) > 0, \\ 0 < x < 2. \end{cases}$$

Откуда получаем ответ: $0 < x < 1$, $(1+\sqrt{5})/2 < x < 2$.

16. (9.266) $5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} > 25$.

Решение. Естественно воспользоваться монотонным возрастанием функции $y=5^t$ и перейти к неравенству показателей. Но мы ради популяризации метода замены множителей и приобретения навыков в технике его применения будем по возможности все основные этапы решения неравенства демонстрировать именно методом замены множителей. Это замечание касается и решения других примеров.

Итак, исходное неравенство приводим к виду

$$5^{\log_x \frac{8-12x}{x-6}} - 5^2 > 0.$$

Разность в левой части неравенства имеет вид $a^f - a^g$, которая, как мы уже знаем, совпадает по знаку с произведением $(f-g)(a-1)$. Поэтому полученное неравенство

равносильно следующему $\left(\log_x \frac{8-12x}{x-6} - 2\right)(5-1) > 0$,

т. е. неравенству $\log_x \frac{8-12x}{x-6} - 2 > 0$.

Разность в последнем неравенстве имеет вид $\log_a f - b$, которая в области допустимых значений совпадает по знаку с произведением $(f-a^b)(a-1)$. Поэтому данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \left(\frac{8-12x}{x-6} - x^2\right)(x-1) > 0, \\ \frac{8-12x}{x-6} > 0, \\ x > 0. \end{cases} \quad \text{т. е. системе}$$

$$\begin{cases} \frac{-(x-2)^3(x-1)}{x-6} > 0 \\ \frac{2}{3} < x < 6. \end{cases}$$

Так как в силу двойного неравенства множитель $(x-6)$ в знаменателе дроби всегда меньше нуля, и основание куба совпадает по знаку с кубом, то система преобразуется к виду

$$\begin{cases} (x-2)(x-1) > 0, \\ \frac{2}{3} < x < 6. \end{cases}$$

Откуда получаем ответ: $\frac{2}{3} < x < 1, 2 < x < 6$.

17. (9.237) $\log_x \log_2(4^x - 12) \leq 1$.

Решение. После переноса единицы в левую часть неравенства выражение вида $\log_a f - b$ заменяем на произведение $(f-a^b)(a-1)$ и получаем в области допустимых значений равносильное неравенство.

Поэтому исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} (\log_2(4^x - 12) - x)(x-1) \leq 0, \\ \log_2(4^x - 12) > 0, \\ x > 0, x \neq 1. \end{cases}$$

Преобразуя в первом неравенстве множитель $\log_2(4^x - 12) - x$ и $\log_2(4^x - 12)$ во втором неравенстве

точно по такой же схеме, получаем следующую равносильную предыдущей систему:

$$\begin{cases} ((4^x - 12) - 2^x) (2 - 1) (x - 1) \leq 0, \\ 4^x - 12 > 0, \\ ((4^x - 12) - 2^0) (2 - 1) > 0, \\ x > 0, x \neq 1, \end{cases}$$

которая после очевидных упрощений принимает вид:

$$\begin{cases} (2^x - 4) (2^x + 3) (x - 1) \leq 0, \\ 4^x - 13 > 0, \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

Множители вида $(a^f - a^g)$ заменяются на произведение $(f - g) (a - 1)$, множители вида $(a^f - b)$ при $b > 0$ — на $(f - \log_a b) (a - 1)$, множители вида $(a^f + b)$ при $b > 0$ — на 1.

Поэтому имеем

$$\begin{cases} (x - 2) (x - 1) \leq 0, \\ x - \log_4 13 > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Откуда получаем ответ: $\log_4 13 < x \leq 2$.

$$18. (9.247) \log_3(4^x + 1) + \log_{4^x + 1} 3 > 2,5 \quad (2)$$

Решение. Полагая, что читатель уже ориентируется в заменах при применении метода замены множителей, приведем просто последовательность равносильных преобразований исходного неравенства.

$$(2) \Leftrightarrow \log_3(4^x + 1) + \frac{1}{\log_3(4^x + 1)} - 2,5 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_3^2(4^x + 1) - 2,5 \log_3(4^x + 1) + 1}{\log_3(4^x + 1)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{((4^x + 1) - 3^2) (3 - 1) ((4^x + 1) - 3^2)}{(4^x + 1 - 4^0) (4 - 1)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^{2x} - 2^3) (4^x - \sqrt{3} - 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x - 3) (2 - 1) (x - \log_4(\sqrt{3} - 1)) (4 - 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - \frac{3}{2}) (x - \log_4(\sqrt{3} - 1)) > 0 \Leftrightarrow x < \log_4(\sqrt{3} - 1) \cup x > \frac{3}{2}.$$

Ответ: $x < \log_4(\sqrt{3} - 1)$; $x > 1,5$.

$$19. (9.248) \cdot \log_3(3^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{3}}(3^{x+2} - 9) > -3. \quad (3)$$

Решение. Первоначально преобразуем логарифм $\log_{\frac{1}{3}}(3^{x+2} - 9)$ к виду $-(2 + \log_3(3^x - 9))$. Далее после переноса (-3) в левую часть неравенства полученное выражение раскладываем как трехчлен относительно $\log_3(3^x - 9)$ на множители, затем решаем неравенство методом замены множителей. Итак:

$$(3) \Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) (-2 + \log_3(3^x - 1) + 3) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3^2(3^x - 1) + 2 + \log_3(3^x - 1) - 3 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_3(3^x - 1) + 3) (\log_3(3^x - 1) - 1) < 0 \Leftrightarrow$$

(множитель вида $\log_a f + b$ совпадает в области допустимых значений по знаку с произведением $(fa^b - 1)(a - 1)$).

$$\begin{cases} ((3^x - 1) \cdot 3^3 - 1) (3 - 1) ((3^x - 1) - 3^1) (3 - 1) < 0, \\ 3^x - 1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3^x - \frac{28}{27}) (3^x - 4) < 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \log_3 \frac{28}{27}) (x - \log_3 4) < 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \frac{28}{27} < x < \log_3 4.$$

Ответ: $\log_3 \frac{28}{27} < x < \log_3 4$.

$$20. (9.267) (2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2 \log_2 x - \log_2(x+6)} > 1 \quad (4)$$

Решение. Будем в скобках в виде $(M_1 \Leftrightarrow M_2)$ перед знаком равносильности указывать замену множителя M_1 на M_2 (совпадающего с M_1 по знаку в области допустимых значений), которая используется при переходе к последующему неравенству.

$$(4) \Leftrightarrow (2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2 \log_2 x - \log_2(x+6)} - 1 > 0,$$

$$((a^f - 1) \Leftrightarrow f(a - 1)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 \log_2 x - \log_2(x+6)) (2^x + 3 \cdot 2^{-x} - 1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(\log_2 x^2 - \log_2(x+6))((2^x)^2 - 2^x + 3)}{2^x} > 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

$$((\log_a f - \log_a g) \Leftrightarrow (f - g), 2^x \Leftrightarrow 1, (at^2 + bt + c) \stackrel{D < 0}{\Leftrightarrow} a) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - (x+6))(2-1) \cdot 1 > 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-3) > 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Ответ: $x > 3$.

$$21. (9.269) \quad \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{x+3}} < \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} (x+1)} \quad (5)$$

Решение. Переносим все в левую часть и далее решаем методом замены множителей.

$$(5) \Leftrightarrow \frac{\log_{0,5}(x+1) - \log_{0,5} \sqrt{x+3}}{\log_{0,5} \sqrt{x+3} \cdot \log_{0,5}(x+1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{((x+1) - \sqrt{x+3}) \cdot (0,5 - 1)}{(\sqrt{x+3} - 1)((x+1) - 1)(0,5^2 - 1)} \leq 0, \\ x+1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

(Разности $((x+1) - \sqrt{x+3})$ и $(\sqrt{x+3} - 1)$ как разности положительных чисел можно заменить на разности квадратов).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{((x+1)^2 - (x+3))}{((x+3) - 1)x} \geq 0, \\ x+1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)(x+2)}{(x+2)x} \geq 0, \\ x+1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x} \geq 0, \\ x+1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < 0 \cup x \geq 1.$$

Ответ: $-1 < x < 0, x \geq 1$.

$$22. (9.271) \log_{\frac{1}{2}}(x-3) - \log_{\frac{1}{2}}(x+3) - \log_{\frac{x+3}{x-3}} 2 > 0 \quad (6)$$

Решение. Первый этап — подведение к виду, удобному для применения метода замены множителей.

$$\begin{aligned} (6) &\Leftrightarrow -\log_2(x-3) + \log_2(x+3) - \\ &\quad - \frac{1}{\log_2(x+3) - \log_2(x-3)} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(\log_2(x+3) - \log_2(x-3))^2 - 1}{\log_2(x+3) - \log_2(x-3)} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(\log_2(x+3) - \log_2(x-3) - 1)(\log_2(x+3) - \log_2(x-3) + 1)}{\log_2(x+3) - \log_2(x-3)} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(\log_2(x+3) - \log_2(2(x-3))) (\log_2(2(x+3)) - \log_2(x-3))}{\log_2(x+3) - \log_2(x-3)} > 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

Теперь все множители имеют вид $\log_a f - \log_a g$, и их можно заменить на произведение вида $(f-g)(a-1)$. Это второй этап:

$$\begin{cases} \frac{((x+3)-2(x-3))(2(x+3)-(x-3))}{(x+3)-(x-3)} > 0, \\ x > 3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+9)(x-9) > 0, \\ x > 3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9-x > 0, \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < x < 9.$$

Ответ: $3 < x < 9$.

$$23. (9.249) \log_p \frac{1 + \log_p^2 x}{1 - \log_p x} < 0.$$

Решение. В области допустимых значений неравенство $\log_a f < 0$ равносильно неравенству $(f-1)(a-1) < 0$. Поэтому исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \left(\frac{1 + \log_p^2 x}{1 - \log_p x} - 1 \right) (p-1) < 0, \\ \frac{1 + \log_p^2 x}{1 - \log_p x} > 0, \end{cases}$$

(Условие $p > 0$ не указывается, т. к. в системе параметр

p присутствует в роли основания логарифма, а требование $p \neq 1$ обеспечивается первым неравенством), т. е. после упрощения получаем:

$$\begin{cases} \log_p x (\log_p x + 1) (p - 1) < 0, \\ 1 - \log_p x > 0. \end{cases}$$

В соответствии с методом замены множителей $\log_p x$ заменяем на произведение $(x - 1)$ $(p - 1)$, $(\log_p x + 1)$ — на произведение $(px - 1)$ $(p - 1)$, $(1 - \log_p x)$ — на произведение $(p - x)$ $(p - 1)$ и приходим к следующей равносильной системе:

$$\begin{cases} (x - 1) (px - 1) (p - 1)^3 < 0, \\ (p - x) (p - 1) > 0, \\ x > 0, p > 0. \end{cases} \quad (7)$$

Последняя система с параметром p требует рассмотрения двух случаев: $0 < p < 1$ и $p > 1$ (при остальных значениях параметра p исходное неравенство не имеет смысла и потому не имеет решений).

Случай: $0 < p < 1$. Тогда система преобразуется к виду

$$\begin{cases} (x - 1) (x - \frac{1}{p}) > 0, \\ p - x < 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

т. е. имеем (с учетом того, что $1 < \frac{1}{p}$) :

$$\begin{cases} x < 1 \cup x > \frac{1}{p}, \\ x > p. \end{cases}$$

Откуда при $0 < p < 1$ получаем ответ: $p < x < 1$ или $x > \frac{1}{p}$.

Случай: $p > 1$. Система (7) принимает вид

$$\begin{cases} (x - 1) (x - \frac{1}{p}) < 0, \\ 0 < x < p, \\ p > 1. \end{cases}$$

Поэтому при $p > 1$ получаем ответ: $\frac{1}{p} < x < 1$.

Объединяя ответы обоих случаев, получаем решение исходного неравенства:

$$p < x < 1 \text{ или } x > \frac{1}{p} \text{ при } 0 < p < 1.$$

$\frac{1}{p} < x < 1$ при $p > 1$; нет решений при $p \leq 0$ и $p = 1$.

$$24. (9.283) \log^2 \sqrt{5} - \log_x 5 \sqrt{5} + \frac{5}{4} < 0 \quad (8)$$

Решение. На основании логарифмических тождеств имеем следующую последовательность равносильных преобразований неравенства (8).

$$\begin{aligned} (8) &\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2 \log_x 5} \right)^2 - \frac{3}{2 \log_x 5} + \frac{5}{4} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5 \log_5^2 x - 6 \log_5 x + 1 < 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\log_5 x - 1) (\log_5 x - \frac{1}{5}) < 0, \\ x \neq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Множители вида $\log_a f - b$ при сравнении произведения с нулем можно заменять на совпадающие с ними по знаку произведения вида $(f - a^b)(a - 1)$. Поэтому последняя система преобразуется следующим образом

$$\begin{cases} (x-5)(5-1)(x-5^{\frac{1}{5}})(5-1) < 0, \\ x \neq 1, \end{cases}$$

Откуда получаем ответ: $5\sqrt{5} < x < 5$.

$$25. (9.216) \log_5 x + \log_x \frac{x}{3} < \frac{\log_5 x (2 - \log_5 x)}{\log_5 x} \quad (9)$$

Решение. Первоначально на основании логарифмических тождеств переходим к рациональному неравенству относительно $\log_5 x$:

$$\begin{aligned} (9) &\Leftrightarrow \log_5 x + \left(1 - \frac{\log_5 3}{\log_5 x} \right) < \log_5^2 \left(2 - \frac{\log_5 x}{\log_5 3} \right) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{2 \log_5^2 x + (1 - 2 \log_5 3) \log_5 x - \log_5 3}{\log_5 x} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(\log_5 x + \frac{1}{2}) (\log_5 x - \log_5 3)}{\log_5 x} < 0. \end{aligned}$$

Далее методом замены множителей: $(\log_5 x + \frac{1}{2})$ заменяем на $(x \cdot 5^{\frac{1}{2}} - 1)(5 - 1)$, $(\log_5 x - \log_5 3)$ заменяем на $(x - 3)(5 - 1)$ и $\log_5 x$ заменяем на $(x - 1)(5 - 1)$. После

чего получаем систему, равносильную исходному неравенству:

$$\begin{cases} \frac{(x\sqrt{5}-1)(x-3)}{(x-1)} < 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{\sqrt{5}} \cup 1 < x < 3, \\ x > 0, \end{cases}$$

Откуда имеем ответ: $0 < x < \frac{1}{\sqrt{5}}, 1 < x < 3$.

26. (9.236)

$$\log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \log_{\frac{x+1}{x-1}} 2 > 0. \quad (10)$$

Решение. Данное неравенство решаем по точной аналогии с решением неравенства примера 22. Поэтому приводим только подробную последовательность равносильных преобразований исходного неравенства (10).

$$\begin{aligned} (10) &\Leftrightarrow \log_2(x-1) - \log_2(x+1) + \frac{1}{\log_2(x+1) - \log_2(x-1)} < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1 - (\log_2(x+1) - \log_2(x-1))^2}{\log_2(x+1) - \log_2(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(1 - \log_2(x+1) - \log_2(x-1))(1 + \log_2(x+1) - \log_2(x-1))}{\log_2(x+1) - \log_2(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{(\log_2 2(x-1) - \log_2(x+1))(\log_2 2(x+1) - \log_2(x-1))}{\log_2(x+1) - \log_2(x-1)} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2(x-1) - (x+1))(2(x+1) - (x-1))}{(x+1) - (x-1)} > 0, \\ x > 1, \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+3) > 0, \\ x > 1, \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 0, \\ x > 1, \end{cases} \Leftrightarrow x > 3. \end{aligned}$$

Ответ: $x > 3$.

27. (9.284) $|\log_3 x| < |\log_3 \frac{x}{9}|$.

Решение. После переноса в левую часть полученную разность модулей как разность неотрицательных чисел заменяем на разность квадратов:

$$|\log_3 x| - |\log_3 \frac{x}{9}| < 0 \Leftrightarrow |\log_3 x|^2 - |\log_3 \frac{x}{9}|^2 < 0.$$

Пользуясь свойством модуля $|a|^2 = a^2$, последнее неравенство преобразуем к виду

$$(\log_3 x - \log_3 \frac{x}{9}) (\log_3 x + \log_3 \frac{x}{9}) < 0.$$

Заменяем разность $(\log_3 x - \log_3 \frac{x}{9})$ на $(x - \frac{x}{9})(3-1)$, а сумму $(\log_3 x + \log_3 \frac{x}{9})$ — на $(x \cdot \frac{x}{9} - 1)(3-1)$, и получаем равносильное неравенство в области допустимых значений:

$$(x - \frac{x}{9})(x^2 - 9) \cdot \frac{4}{9} < 0.$$

Откуда для определения x получаем:

$$\begin{cases} x(x-3)(x+3) < 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 < 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 3.$$

Ответ: $0 < x < 3$.

$$28. (9.273) \quad 8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x} + 1} \geq 9^{\sqrt{x}}. \quad (11)$$

Решение. Первоначально преобразуем исходное неравенство к квадратному относительно, например, $3^{\sqrt{x}}$. Затем полученный относительно $3^{\sqrt{x}}$ квадратный трехчлен раскладываем на множители, и далее неравенство решаем методом замены множителей.

$$(11) \Leftrightarrow 8 \cdot 3^{\sqrt{x}} \cdot 3^{\sqrt[4]{x}} + (3^{\sqrt[4]{x}})^2 \cdot 9 + (3^{\sqrt{x}})^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 \cdot (3^{\sqrt[4]{x}})^2 + 8 \cdot 3^{\sqrt{x}} (3^{\sqrt[4]{x}}) - (3^{\sqrt{x}})^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (9 \cdot 3^{\sqrt[4]{x}} - 3^{\sqrt{x}})(3^{\sqrt[4]{x}} + 3^{\sqrt{x}}) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^{2 + \sqrt[4]{x}} - 3^{\sqrt{x}})(3^{\sqrt[4]{x}} + 3^{\sqrt{x}}) \geq 0 \Leftrightarrow$$

Первый множитель заменяем на произведение $(2 + \sqrt[4]{x} - \sqrt{x})(3-1)$, а второй как положительное число — на 1:

$$(2 + \sqrt[4]{x} - \sqrt{x}) \cdot 2 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt[4]{x})^2 - \sqrt{x} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[4]{x+1})(\sqrt[4]{x}-2) \leq 0.$$

Первую скобку заменяем на единицу, а вторую как разность неотрицательных чисел — на разность четвертых степеней и получаем (с учетом ОДЗ):

$$\begin{cases} x^2 \leq 0, \\ x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 16.$$

Откуда имеем ответ: $0 \leq x \leq 16$.

29. (9.262)

$$\log_x \frac{2x}{|x-3|} \leq \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Решение. Мы ранее уже получали, что неравенство $\log_a f - b \leq 0$ в области допустимых значений равносильно неравенству $(f - a^b)(a - 1) \leq 0$. Поэтому неравенство (12) равносильно системе

$$\begin{cases} \left(\frac{2x}{|x-3|} - \sqrt{x^2} \right) (x^2 - 1) \leq 0, \\ x^2 \neq 1, \\ x > 0. \end{cases} \quad \text{т. е. системе}$$

$$\begin{cases} \frac{\frac{2x}{|x-3|} - \sqrt{x^2}}{(x-1)(x+1)} \leq 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Разность в числителе как разность положительных чисел заменяем на разность квадратов этих чисел, и учитывая свойство модуля $|a|^2 = a^2$, получаем $((x+1) > 0$ при $x > 0$):

$$\begin{cases} \frac{4x^2}{(x-3)^2} - x^2 \leq 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4 - (x-3)^2}{(x-3)^2(x-1)} \leq 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(5-x)(x-1)}{(x-3)^2(x-1)} \leq 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5-x \leq 0, \\ x > 0, \\ x \neq 3, \\ x \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 5.$$

$$x \in [5; +\infty)$$

Ответ: $x \geq 5$.

30. (9.268) $\log_{|x-4|} (2x^2 - 9x + 4) > 1 \quad (13)$

Решение. Как и в предыдущем примере имеем:

$$(13) \Leftrightarrow \begin{cases} ((2x^2 - 9x + 4) - |x - 4|) (|x - 4| - 1) > 0, \\ 2x^2 - 9x + 4 > 0, \\ |x - 4| > 0. \end{cases}$$

В первом неравенстве системы разности неотрицательных чисел заменяем на разности их квадратов, и, помня, что $|a|^2 = a^2$, получаем:

$$\begin{cases} ((2x^2 - 9x + 4)^2 - (x - 4)^2) ((x - 4)^2 - 1) > 0, \\ (2x - 1) (x - 4) > 0, \\ x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 4)^2 ((2x - 1)^2 - 1) (x - 5) (x - 3) > 0 \\ (2x - 1) (x - 4) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x - 1) (x - 5) (x - 3) > 0, \\ x < \frac{1}{2} \cup x > 4, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \cup 1 < 3 \cup x > 5, \\ x < \frac{1}{2} \cup x > 4, \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \cup x > 5.$$

Ответ: $x < 0, x > 5$.

Глава X. РЕШЕНИЕ ИЗБРАННЫХ НЕРАВЕНСТВ КОНКУРСНЫХ ЭКЗАМЕНОВ

(Из вариантов вступительных экзаменов по математике в МГУ им. М. В. Ломоносова)

§ 1. Механико-математический факультет 1974 год (задача № 2 из пяти)

1.1. $\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < \log_5(5x^2 - 10x + 10)$.

1.2. $\sqrt{\log_4(2 + 4x - 2x^2)} > \log_2(1 + 2x - x^2)$.

Решение.

1.1. $\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < \log_5(5x^2 - 10x + 10)$.

Естественно при взгляде на неравенство среагировать на то, что $\log_5(5x^2 - 10x + 10) = \log_5 5 \cdot (x^2 - 2x + 2) = 1 + \log_5(x^2 - 2x + 2)$. То есть исходное неравенство имеет вид:

$$\sqrt{1 - t} < 1 + t, \text{ где } t = \log_5(x^2 - 2x + 2).$$

Полученное иррациональное неравенство представляет исключительно богатый материал для демонстрации разнообразных приемов решения. Рассмотрим несколько вариантов.

Вариант 1. Неравенство $\sqrt{1-t} < 1+t$ относится к типу $\sqrt{f} < \varphi$, которое, как известно, равносильно системе неравенств $\varphi > 0$, $f \geq 0$ и $f < \varphi^2$. Поэтому получаем:

$$\sqrt{1-t} < 1+t \Leftrightarrow \begin{cases} 1+t > 0, \\ 1-t \geq 0, \\ 1-t < (1+t)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < t \leq 1, \\ t^2 + 3t > 0, \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t \leq 1.$$

Вариант 2. Если в неравенстве типа $\sqrt{f} < \varphi$ правая часть φ легко выражается через \sqrt{f} , то выгодно ввести вспомогательную неизвестную $p = \sqrt{f}$. В нашем случае, если принять $p = \sqrt{1-t}$, то $t = 1 - p^2$, и неравенство относительно переменной p имеет вид $p < 2 - p^2$, т. е. $p^2 + p - 2 < 0$. Откуда получаем, что $-2 < p < 1$. Так как по определению арифметического корня $p \geq 0$, то окончательно для переменной p получаем двойное неравенство $0 \leq p < 1$, которое после возведения в квадрат всех частей позволяет получить соответствующее двойное неравенство для переменной t : $0 < t \leq 1$.

Вариант 3. Так как левая часть неравенства $\sqrt{1-t} < 1+t$ есть монотонно убывающая функция от t , а правая часть — монотонно возрастающая функция от t , то решениями неравенства являются все значения переменной t из области существования неравенства (определяемой неравенством $1-t \geq 0$), удовлетворяющие условию $t > t_0$, где t_0 — значение переменной t , при котором левая часть неравенств равна правой части. «На глаз» видно, что $\sqrt{1-t} = 1+t$ при $t=0$. Откуда ответ: $0 < t \leq 1$.

Комментарий. Для школьника, претендующего на высокую оценку по математике на вступительных экзаменах в высшие учебные заведения, все приведенные варианты решения иррационального неравенства $\sqrt{1-t} < 1+t$ должны быть знакомы. Первый вариант является основным и приводится во всех пособиях для поступающих в виде схемы:

$$\sqrt{f} < \varphi \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi > 0, \\ f \geq 0, \\ f < \varphi^2. \end{cases}$$

Второй вариант известен как способ рационализации иррациональных уравнений и неравенств. Третий вариант часто предоставляет единственную возможность решения неравенств повышенной трудности.

Решим теперь исходное неравенство с применением метода замены множителей. Имеем

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < \log_5(5x^2 - 10x + 10) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < 1 + \log_5(x^2 - 2x + 2) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} < 1 + (1 - (\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)})^2) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)})^2 + \sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} - 2 < 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow (\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} - 1)(\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} + 2) < 0. \end{aligned}$$

В первых скобках разность неотрицательных чисел заменяем на разность их квадратов, а во вторых скобках множительное в области допустимых значений выражение заменяем на единицу и получаем равносильное неравенство

$$(\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)})^2 - 1 < 0, \text{ т. е. имеем}$$

$$\begin{cases} (1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)) - 1 < 0, \\ 1 - \log_5(x^2 - 2x + 2) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow 0 < \log_5(x^2 - 2x + 2) \leq 1.$$

Далее вспомнив, что неравенство $a < \varphi \leq b$ равносильно неравенству $\frac{\varphi - a}{\varphi - b} \leq 0$ и, что множители вида $\log_a f - c$ совпадают по знаку в области допустимых значений с произведением $(f - a^c)(a - 1)$, получаем

$$\begin{aligned} 0 < \log_5(x^2 - 2x + 2) \leq 1 & \Leftrightarrow \frac{\log_5(x^2 - 2x + 2) - 1}{\log_5(x^2 - 2x + 2)} \leq 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{((x^2 - 2x + 2) - 5)(5 - 1)}{((x^2 - 2x + 2) - 1)(5 - 1)} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 2x + 1} \leq 0 \Leftrightarrow \\ x^2 - 2x + 2 > 0, \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x < 1 \cup 1 < x \leq 3. \end{aligned}$$

Ответ: $-1 \leq x < 1, 1 < x \leq 3$.

Для трех последующих аналогичных неравенств приводим только последовательность равносильных преобразований.

$$1.2. \sqrt{\log_2(2 + 4x - 2x^2)} > \log_2(1 + 2x - x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}(\log_2(1+2x-x^2)+1)} > \log_2(1+2x-x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{\frac{1}{2}(\log_2(1+2x-x^2)+1)}\right)^2 - \sqrt{\frac{1}{2}(\log_2(1+2x-x^2)+1)} -$$

$$-1 < 0.$$

(На первый взгляд последнее преобразование кажется затруднительным. Однако, устно возводя $\sqrt{\frac{1}{2}(\log_2(1+2x-x^2)+1)}$ в квадрат, получили подкоренное выражение $\frac{1}{2}(\log_2(1+2x-x^2)+1)$, которое затем, умножая на два, преобразуем к виду $(\log_2(1+2x-x^2)+1)$, откуда после вычитания единицы приходим к правой части предыдущего неравенства:

$$\log_2(1+2x-x^2) = 2\left(\sqrt{\frac{1}{2}(\log_2(1+2x-x^2)+1)} - 1\right).$$

Теперь левую часть последнего неравенства как трехчлен относительно $\sqrt{\frac{1}{2}(\log_2(1+2x-x^2)+1)}$ раскладываем на множители и получаемое неравенство преобразуем методом замены множителей, т. е. имеем:

$$\left(\sqrt{\frac{1}{2}(\log_2(1+2x-x^2)+1)} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{1}{2}(\log_2(1+2x-x^2)+1)} + \frac{1}{2}\right) <$$

$$< 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}(\log_2(1+2x-x^2)+1)} - 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{\frac{1}{2}(\log_2(1+2x-x^2)+1)}\right)^2 - 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}(\log_2(1+2x-x^2)+1) - 1 < 0, \\ \log_2(1+2x-x^2)+1 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq \log_2(1+2x-x^2) < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq 1+2x-x^2 < 2 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
& \Leftrightarrow \frac{1+2x-x^2-\frac{1}{2}}{1+2x-x^2-2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-4x-1}{x^2-2x+1} \leq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow \frac{\left(x - \left(1 - \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right) \left(x - \left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right)}{(x-1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \leq x < 1 \cup 1 < x \leq 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Ответ: $1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \leq x < 1, 1 < x \leq 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}.$

1975 год (задача № 1 из пяти)

2.1. $98 - 7x^2 + 5x - 48 \geq 49x^2 + 5x - 49.$

2.2. $\log_{\sqrt{3}}(x^2 + 4x + 6) + 6\sqrt{\log_3(x^2 + 4x + 6)} \geq 8.$

Решение.

2.1. $98 - 7x^2 + 5x - 48 \geq 49x^2 + 5x - 49 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (7x^2 + 5x - 49)^2 + 7x^2 + 5x - 49 \cdot 7 - 98 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (7x^2 + 5x - 49 + 14)(7x^2 + 5x - 49 - 7) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x^2 + 5x - 49 - 7 \leq 0 \Leftrightarrow ((x^2 + 5x - 49) - 1)(7 - 1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x - 50 \leq 0 \Leftrightarrow (x + 10)(x - 5) \leq 0 \Leftrightarrow -10 \leq x \leq 5.$$

Ответ: $-10 \leq x \leq 5.$

2.2. $\log_{\sqrt{3}}(x^2 + 4x + 6) + 6\sqrt{\log_3(x^2 + 4x + 6)} \geq 8 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\log_3(x^2 + 4x + 6) + 6\sqrt{\log_3(x^2 + 4x + 6)} \geq 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{\log_3(x^2 + 4x + 6)})^2 + 3\sqrt{\log_3(x^2 + 4x + 6)} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{\log_3(x^2 + 4x + 6)} - 1)(\sqrt{\log_3(x^2 + 4x + 6)} + 4) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_3(x^2 + 4x + 6)} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{\log_3(x^2 + 4x + 6)})^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(x^2 + 4x + 6) - 1 \geq 0, \\ \log_3(x^2 + 4x + 6) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_3(x^2 + 4x + 6) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ((x^2+4x-6)-3)(3-1) \geq 0, \\ x^2+4x+6 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \cup x \geq -1.$$

Ответ: $x \leq -3, x \geq -1$.

1976 год (задача № 2 из пяти)

$$3.1. \frac{7}{9^x-2} \geq \frac{2}{3^x-1}$$

$$3.2. \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^y-1} \leq \frac{2}{\left(\frac{1}{100}\right)^y-10}.$$

Решение.

$$3.1. \frac{7}{9^x-2} \geq \frac{2}{3^x-1} \Leftrightarrow \frac{7(3^x-1)-2(9^x-2)}{(9^x-2)(3^x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cdot 9^x - 7 \cdot 3^x + 3}{(9^x-2)(3^x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(3^x-3)\left(3^x-\frac{1}{2}\right)}{(3^x-\sqrt{2})(3^x-1)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+\log_3 2)}{\left(x-\frac{1}{2}\log_3 2\right)x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_3 2 \leq x < 0 \cup \frac{1}{2}\log_3 2 < x \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\log_3 2 \leq x < 0 \cup \frac{1}{2}\log_3 2 < x \leq 1.$$

Ответ: $-\log_3 2 \leq x < 0, \frac{1}{2}\log_3 2 < x \leq 1$.

$$3.2. \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^y-1} \leq \frac{2}{\left(\frac{1}{100}\right)^y-10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(10^{-2y}-10)-2(10^{-y}-1)}{(10^{-y}-1)(10^{-2y}-10)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(10^{-y})^2-2 \cdot 10^{-y}-8}{(10^{-y}-1)(10^{-2y}-10)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(10^{-y}-4)(10^{-y}+2)}{(10^{-y}-1)(10^{-2y}-10)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(10^{-y}-4)}{(10^{-y}-1)(10^{-2y}-10)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(-y-\lg 4)(10-1)}{(-y)(-2y-1)(10-1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(y+\lg 4)}{y(2y+1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lg 4 \leq y < -\frac{1}{2} \cup y > 0.$$

Ответ: $-\lg 4 \leq y < -\frac{1}{2}, y > 0.$

1981 год (задача № 1 из пяти)

4.1. $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{x-4}}(x-4)-1} \geq 0.$

4.2. $\frac{\log^2_{\sqrt{x-3}}(x-3)}{x^2-4x-5} \geq 0.$

4.3. $\frac{1}{2^x-1} \geq \frac{1}{4^x-3}.$

Решение.

4.1. $\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{x-4}}(x-4)-1} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-5}{((x-4)-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)} \geq 0, \\ x-5 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-5}{x-4-\sqrt{2}} \geq 0, \\ x \geq 5, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 5 \cup x > 4+\sqrt{2}, \\ x \geq 5, \end{cases} \Leftrightarrow x=5 \cup x > 4+\sqrt{2}.$$

Ответ: $x=5, x > 4+\sqrt{2}.$

4.2. $\frac{\log^2_{\sqrt{x-3}}(x-3)}{x^2-4x-5} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(((x-3)-1)(\sqrt{2}-1))^2}{(x+1)(x-5)} \geq 0, \\ x-3 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-4)^2}{x-5} \geq 0, \\ x > 3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \cup x > 5, \\ x > 3, \end{cases} \Leftrightarrow x=4 \cup x > 5.$$

Ответ: $x=4, x > 5.$

4.3. $\frac{1}{2^x-1} \geq \frac{1}{4^x-3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(2^z)^2 - 2^z - 2}{(2^z - 1)(4^z - 3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(2^z - 2)(2^z + 1)}{(2^z - 1)(4^z - 3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2^z - 2}{(2^z - 1)(4^z - 3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{z - 1}{z(z - \log_4 3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < z < \log_4 3 \cup x \geq 1.$$

Ответ: $0 < x < \log_4 3, x \geq 1$.

1983 год (задача № 1 из пяти)

$$5.1. \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}.$$

$$5.2. \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}.$$

Решение.

$$5.1. \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5} \geq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{6+x-x^2} \left(\frac{1}{2x+5} - \frac{1}{x+4} \right) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6+x-x^2}(-x-1)}{(2x+5)(x+4)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(6+x-x^2)(-x-1)}{(2x+5)(x+4)} \geq 0, \\ 6+x-x^2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+2)(x-3)(x+1)}{(2x+5)(x+4)} \geq 0, \\ -2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-3)(x+1) \geq 0, \\ -2 \leq x \leq 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \cup x \geq 3, \\ -2 \leq x \leq 3, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1 \cup x = 3.$$

Ответ: $-2 \leq x \leq -1, x = 3$.

$$5.2. \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{8-2x-x^2} \left(\frac{1}{x+10} - \frac{1}{2x+9} \right) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\sqrt{8-2x-x^2}(x-1)}{(x+10)(2x+9)} \leq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(8-2x-x^2)(x-1)}{(x+10)(2x+9)} \leq 0, \\ 8-2x-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+4)(x-2)(x-1)}{(x+10)(2x+9)} \geq 0, \\ (x+10)(2x+9) \geq 0, \\ -4 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)(x-2)(x-1) \geq 0, \\ -4 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 1 \cup x \geq 2, \\ -4 \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -4 \leq x \leq 1 \cup x = 2.
\end{aligned}$$

Ответ: $-4 \leq x \leq 1, x = 2$.

1986 год (задача № 3 из шести)

$$6.1. \quad \frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \geq 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$$

$$6.2. \quad 3^{\frac{1}{4}\log_3^2 x} \leq \frac{1}{3}x^{\frac{1}{2}\log_2 x}$$

Решение.

$$\begin{aligned}
6.1. \quad &\frac{1}{4}x^{\frac{1}{2}\log_2 x} \geq 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 2^{-2}(2^{\log_2 x})^{\frac{1}{2}\log_2 x} - 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x} \geq 0 \Leftrightarrow 2^{-2+\frac{1}{2}\log_2^2 x} - 2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x} \geq 0. \\
&\Leftrightarrow \left(-2 + \frac{1}{2}\log_2^2 x\right) - \frac{1}{4}\log_2^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \log_2^2 x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (\log_2 x - 2\sqrt{2})(\log_2 x + 2\sqrt{2}) \geq 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2^{2\sqrt{2}})(2^{2\sqrt{2}}x - 1) \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2^{-2\sqrt{2}} \cup x \geq 2^{2\sqrt{2}}, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq 2^{-2\sqrt{2}} \cup x \geq 2^{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $0 < x \leq 2^{-2\sqrt{2}}, x \geq 2^{2\sqrt{2}}.$

$$6.2. \quad 3^{\frac{1}{4}\log_3^2 x} \leq \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}\log_3 x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{4}\log_3^2 x} - 3^{-1} \cdot (3^{\frac{1}{3}\log_3 x})^{\frac{1}{3}\log_3 x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{4}\log_3^2 x} - 3^{-1 + \frac{1}{3}\log_3^2 x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\log_3^2 x - (-1 + \frac{1}{3}\log_3^2 x) \right) (3-1) \leq 0 \Leftrightarrow 12 - \log_3^2 x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\sqrt{3} - \log_3 x)(2\sqrt{3} + \log_3 x) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3^{2\sqrt{3}} - x)(3-1)(3^{2\sqrt{3}} \cdot x - 1)(3-1) \leq 0, \\ x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x - 3^{2\sqrt{3}})(x - 3^{-2\sqrt{3}}) \geq 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3^{-2\sqrt{3}} \cup x \geq 3^{2\sqrt{3}} \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < x \leq 3^{-2\sqrt{3}} \cup x \geq 3^{2\sqrt{3}}.$$

Ответ: $0 < x \leq 3^{-2\sqrt{3}}, x \geq 3^{2\sqrt{3}}.$

1987 год (задача № 2 из шести)

$$7.1. \quad \log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2 + 4x + 11 - 4\sqrt{3}) < 2.$$

$$7.2. \quad \log_{\sqrt{11}-\sqrt{5}}(x^2 + 2x + 16 - 2\sqrt{55}) < 2.$$

Решение.

$$7.1. \quad \log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2 + 4x + 11 - 4\sqrt{3}) < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ((x^2 + 4x + 11 - 4\sqrt{3}) - (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2)((\sqrt{6} - \sqrt{2}) - 1) < 0, \\ x^2 + 4x + 11 - 4\sqrt{3} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 4x + 3)(\sqrt{6} - (\sqrt{2} + 1)) < 0, \\ (x+2)^2 + 7 - 4\sqrt{3} > 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 4x + 3)(6 - (\sqrt{2} + 1)^2) < 0, \\ (x+2)^2 + \sqrt{49} - \sqrt{48} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+1)(3-2\sqrt{2}) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+1)(3^2 - (2\sqrt{2})^2) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x+1) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < -1.$$

Ответ: $-3 < x < -1$.

$$7.2. \log_{\sqrt{11}-\sqrt{5}}(x^2+2x+16-2\sqrt{55}) < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ((x^2+2x+16-2\sqrt{55}) - (\sqrt{11}-\sqrt{5})^2)(\sqrt{11}-\sqrt{5}-1) < 0, \\ x^2+2x+16-2\sqrt{55} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+2x)((\sqrt{11})^2 - (\sqrt{5}+1)^2) < 0, \\ (x+1)^2 + 15 - 2\sqrt{55} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+2)(5-2\sqrt{5}) < 0, \\ (x+1)^2 + \sqrt{225} - \sqrt{220} > 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -x(x+2)(5^2 - (2\sqrt{5})^2) < \Leftrightarrow x(x+2)(25-20) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0.$$

Ответ: $-2 < x < 0$.

1988 год (задача № 2 из шести)

$$8.1. \log_{5x-4x^2} 4^{-x} > 0.$$

$$8.2. \log_{-5x^2-6} 6^x > 0.$$

Решение.

$$8.1. \log_{5x-4x^2} 4^{-x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (4^{-x}-1)((5x-4x^2)-1) > 0, \\ 4^{-x} > 0, \\ 5x-4x^2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-x)(-4x^2+5x-1) > 0, \\ 0 < x < \frac{5}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2-5x+1 > 0, \\ 0 < x < \frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-\frac{1}{4}\right)(x-1) > 0, \\ 0 < x < \frac{5}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{4} \cup x > 1, \\ 0 < x < \frac{5}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{5}{4} \cup 1 < x < \frac{5}{4}.$$

Ответ: $0 < x < \frac{1}{4}, 1 < x < \frac{5}{4}$.

8.2. $\log_{-5x^2-6} 6^x > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (6^x - 1)((-5x^2 - 6x) - 1) > 0, \\ 6^x > 0, \\ -5x^2 - 6x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(-5x^2 - 6x - 1) > 0, \\ -\frac{6}{5} < x < 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 6x + 1 > 0, \\ -\frac{6}{5} < x < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)\left(x+\frac{1}{5}\right) > 0, \\ -\frac{6}{5} < x < 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \cup x < -\frac{1}{5}, \\ -\frac{6}{5} < x < 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{6}{5} < x < -1 \cup -\frac{1}{5} < x < 0.$$

Ответ: $-\frac{6}{5} < x < -1, -\frac{1}{5} < x < 0$.

1989 год (задача № 2 из шести)

$$9.1. \frac{x-1-\sqrt{\frac{1}{2}+x-x^2}}{\lg(4x+1)-\lg 5} \geq 0.$$

$$9.2. \frac{\sqrt{2-x^2}+2x+x-2}{\log_3\left(\frac{5}{2}-x\right)+\log_3 2} \leq 0$$

Решение.

$$9.1. \frac{x-1-\sqrt{\frac{1}{2}+x-x^2}}{\lg(4x+1)-\lg 5} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)-\sqrt{\frac{1}{2}+x-x^2}}{((4x+1)-5)(10-1)} \geq 0, \\ 4x+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-1)-\sqrt{\frac{1}{2}+x-x^2}}{x-1} \geq 0 \\ x > -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < 0, \\ 1/2+x-x^2 \geq 0, \text{ или } \begin{cases} x-1 > 0, \\ (x-1)^2 - (1/2+x-x^2) \geq 0, \\ 1/2+x-x^2 \geq 0 \end{cases} \\ x > -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4} < x < 1, \\ 2x^2-2x-1 \leq 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4x^2-6x+1 \geq 0, \\ 2x^2-2x-1 \leq 0, \\ x > 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x < 1 \text{ или } \begin{cases} 4x^2-6x+1 \geq 0, \\ 1 < x \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4} < x < 1 \cup \frac{3+\sqrt{5}}{4} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

(т. к. $4x^2-6x+1$ при $x=1$ меньше нуля).

Ответ: $-\frac{1}{4} < x < 1, \frac{3+\sqrt{5}}{4} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$

$$9.2. \frac{\sqrt{2-x^2+2x}+x-2}{\log_3\left(\frac{5}{2}-x\right)+\log_3 2} \leq 0, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{-x^2+2x+2}-(2-x)}{((5/2-x)(2-1)(3-1))} \leq 0, \\ \frac{5}{2}-x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{-x^2+2x+2}-(2-x)}{2-x} \leq 0 \\ x < \frac{5}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < 0, \\ x < \frac{5}{2}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2-x > 0, \\ (-x^2+2x+2)-(2-x)^2 \leq 0, \\ -x^2+2x+2 \geq 0, x < 5/2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < \frac{5}{2} \text{ или } \begin{cases} x < 2, \\ x^2-3x+1 \geq 0, \\ x^2-2x-2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < \frac{5}{2} \text{ или } \begin{cases} x^2-3x+1 \geq 0, \\ 1-\sqrt{3} \leq x < 2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 < x < \frac{5}{2} \text{ или } 1-\sqrt{3} \leq x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $2 < x < \frac{5}{2}$, $1-\sqrt{3} \leq x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

1990 год (задача № 3 из шести)

$$10.1 \quad \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{1+x} \leq x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x^2}-(x^2+x+1)}{1+x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{1-x^2})^2-(x^2+x+1)^2}{1+x} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(1-x^2)-(x^2+x+1)^2}{1+x} \leq 0, \\ 1-x^2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(1-x)(x^2+x+1)-(x^2+x+1)^2}{1+x} \leq 0 \\ 1-x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x^2+x+1)((1-x)-(x^2+x+1))}{1+x} \leq 0, \\ x \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$= \begin{cases} \frac{x^2+2x}{x+1} \geq 0, \\ x \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x(x+2)}{x+1} \geq 0, \\ x \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \cup x \geq 0, \\ x \leq 1, \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x < -1 \cup 0 \leq x \leq 1.$$

Ответ: $-2 \leq x < -1, 0 \leq x \leq 1$.

§ 2. Факультет вычислительной математики и кибернетики

1975 год (задача № 1 из пяти)

1.1. $\sqrt{x^2+4x-5}-2x+3 > 0$.

1.2. $\sqrt{x^2+x}-2x+1 > 0$.

Решение.

$$\begin{aligned} 1.1. \quad \sqrt{x^2+4x-5}-2x+3 > 0 &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2+4x-5}-(2x-3) > 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 < 0, \\ x^2+4x-5 \geq 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x-3 \geq 0, \\ (x^2+4x-5)-(2x-3)^2 > 0, \\ x^2+4x-5 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{3}{2}, \\ x \leq -5 \cup x \geq 1, \end{cases} \cup \begin{cases} x \geq \frac{3}{2}, \\ 3x^2-16x+14 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -5 \cup$$

$$\cup 1 \leq x < \frac{3}{2} \cup \frac{3}{2} \leq x < \frac{8+\sqrt{22}}{3} \Leftrightarrow x \leq -5 \cup 1 \leq x < \frac{8+\sqrt{22}}{3}$$

Ответ: $x \leq -5, 1 \leq x < \frac{8+\sqrt{22}}{3}$.

1.2. $\sqrt{x^2+x}-2x+1 > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+x}-(2x-1) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 < 0, \\ x^2+x \geq 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 2x-1 \geq 0, \\ (x^2+x)-(2x-1)^2 > 0, \\ x^2+x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2}, \\ x \leq -1 \cup x \geq 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \geq \frac{1}{2}, \\ 3x^2-5x+1 < 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq -1 \cup 0 \leq x < \frac{1}{2}$$

$$\text{или } \frac{1}{2} \leq x < \frac{5+\sqrt{13}}{6} \Leftrightarrow x \leq -1 \cup 0 \leq x < \frac{5+\sqrt{13}}{6}.$$

Ответ: $x \leq -1, 0 \leq x < \frac{5+\sqrt{13}}{6}$.

1977 год (задача № 1 из пяти)

$$2.1. \quad 2^{2x+1} - 21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0.$$

$$2.2. \quad 3^{4-3x} - 35\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geq 0.$$

Решение.

$$2.1. \quad 2^{2x+1} - 21\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} + 2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 4^x - \frac{21}{8 \cdot 4^x} + 2 \geq 0 \Leftrightarrow 16 \cdot (4^x)^2 + 16 \cdot 4^x - 21 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(4^x + \frac{7}{4}\right) \left(4^x - \frac{3}{4}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 4^x - \frac{3}{4} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \log_4 \frac{3}{4}\right) (4 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq \log_4 \frac{3}{4}.$$

Ответ: $x \geq \log_4 \frac{3}{4}$.

$$2.2. \quad 3^{4-3x} - 35\left(\frac{1}{3}\right)^{2-3x} + 6 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^4}{27^x} - \frac{35}{9} \cdot 27^x + 6 \geq 0 \Leftrightarrow 35(27^x)^2 - 54 \cdot 27^x - 729 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(27^x - \frac{27}{5}\right) \left(27^x + \frac{27}{7}\right) \leq 0 \Leftrightarrow 27^x - \frac{27}{5} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \log_{27} \frac{27}{5}\right) (27 - 1) \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 - \log_{27} 5.$$

Ответ: $x \leq 1 - \log_{27} 5$.

1978 год (задача № 1 из пяти)

$$3.1. \quad (x-3)\sqrt{x^2+x-2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$3.2. \quad (x+2)\sqrt{x^2-2x-3} \geq 0.$$

Решение.

$$3.1. (x-3)\sqrt{x^2+x-2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x^2+x-2) \geq 0, \\ x^2+x-2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2)(x-1) \geq 0, \\ (x+2)(x-1) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \cup x \geq 3, \\ x \leq -2 \cup x \geq 1, \end{cases} \Leftrightarrow x = -2 \cup x = 1 \cup x \geq 3.$$

Ответ: $x = -2, x = 1, x \geq 3$.

$$3.2. (x+2)\sqrt{x^2-2x-3} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x^2-2x-3) \geq 0, \\ x^2-2x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x+1)(x-3) \geq 0, \\ (x+1)(x-3) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq x \leq -1 \cup x \geq 3, \\ x \leq -1 \cup x \geq 3, \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq -1 \cup x \geq 3.$$

Ответ: $-2 \leq x \leq -1, x \geq 3$.

1982 год (задача № 3 из шести)

$$4.1. \frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geq 2.$$

$$4.2. \frac{3(4x^2-3)}{\sqrt{3x^2-3}} \leq 2x+3.$$

Решение.

$$4.1. \frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x} \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2-x}+4x-3-2x}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2-x}-(3-2x)}{x} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x < 0, \\ 2-x \geq 0, \\ x > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 3-2x \geq 0, \\ \frac{(\sqrt{2-x})^2 - (3-2x)^2}{x} \geq 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2}, \\ x \leq 2, \\ x > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leq \frac{3}{2}, \\ \frac{4x^2-11x+7}{x} \leq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} < x \leq 2 \text{ или}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2} \\ \frac{(x-1)(x-7/4)}{x} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} < x \leq 2 \text{ или } \begin{cases} x \leq \frac{3}{2}, \\ x < 0 \cup 1 \leq x \leq \frac{7}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} < x \leq 2 \text{ или } x < 0 \cup 1 \leq x \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x < 0 \cup 1 \leq x \leq 2.$$

Ответ: $x < 0, 1 \leq x \leq 2$.

$$4.2. \frac{3(4x^2-9)}{\sqrt{3x^2-3}} \leq 2x+3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(2x-3)(2x+3) - (2x+3)\sqrt{3x^2-3}}{\sqrt{3x^2-3}} \leq 0,$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x+3)(3(2x-3) - \sqrt{3x^2-3})}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2-1}} \leq 0, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3 < 0, \\ 2x+3 \geq 0, \text{ или } \\ x^2-1 > 0, \end{cases} \begin{cases} 2x-3 \geq 0, \\ (2x+3)(3^2(2x-3)^2 - 3(x^2-1)) \leq 0, \\ x^2-1 > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x < \frac{3}{2}, \\ x < -1 \cup x > 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \leq \frac{3}{2}, \\ 11x^2 - 36x + 28 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} \leq x < -1, \\ 1 < x < \frac{3}{2}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x \geq \frac{3}{2}, \\ \frac{14}{11} \leq x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x < -1 \cup 1 < x \leq 2.$$

Ответ: $-\frac{3}{2} \leq x < -1, 1 < x \leq 2$.

1984 год. (задача № 4 из шести)

$$5.1. \sqrt{7 - \log_2 x^2} + \log_2 x^4 > 4.$$

$$5.2. \quad -3 + \log_2 x^6 < \sqrt{7 + \log_2 x^2}$$

Решение.

$$5.1. \quad \sqrt{7 - \log_2 x^2} + \log_2 x^4 > 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7 - \log_2 x^2} + 2\log_2 x^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7 - \log_2 x^2} - 2(\sqrt{7 - \log_2 x^2})^2 + 10 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{7 - \log_2 x^2})^2 - \sqrt{7 - \log_2 x^2} - 10 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{7 - \log_2 x^2} + 2)(\sqrt{7 - \log_2 x^2} - \frac{5}{2}) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7 - \log_2 x^2} - \frac{5}{2} < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{7 - \log_2 x^2})^2 - \frac{25}{4} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 - \log_2 x^2 - \frac{25}{4} < 0, \\ 7 - \log_2 x^2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < \log_2 x^2 \leq 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 x^2 - 7}{\log_2 x^2 - \frac{3}{4}} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 2^7}{x^2 - 2^{3/4}} \leq 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{(x - 2^{7/2})(x + 2^{7/2})}{(x - 2^{3/8})(x + 2^{3/8})} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2^{7/2} \leq x < -2^{3/8} \cup 2^{3/8} < x \leq 2^{7/2}.$$

Ответ: $-2^{7/2} \leq x < -2^{3/8}, 2^{3/8} < x \leq 2^{7/2}.$

$$5.2. \quad -3 + \log_2 x^6 < \sqrt{7 + \log_2 x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 + 3\log_2 x^2 - \sqrt{7 + \log_2 x^2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(\sqrt{7 + \log_2 x^2})^2 - \sqrt{7 + \log_2 x^2} - 24 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{7 + \log_2 x^2} - 3)(\sqrt{7 + \log_2 x^2} + \frac{8}{3}) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{7 + \log_2 x^2} - 3 < 0 \Leftrightarrow (\sqrt{7 + \log_2 x^2})^2 - 3^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7 + \log_2 x^2 - 9 < 0, \\ 7 + \log_2 x^2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow -7 \leq \log_2 x^2 < 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2 x^2 + 7}{\log_2 x^2 - 2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2^7 x^2 - 1)}{x^2 - 2^2} \leq 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2^7}{x^2 - 2^2} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x - 2^{-7/2})(x + 2^{7/2})}{(x - 2)(x + 2)} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2 < x \leq -2^{-7/2} \cup 2^{-7/2} \leq x < 2.$$

Ответ: $-2 < x \leq -2^{-7/2}$, $2^{-7/2} \leq x < 2$.

1985 год (задача № 4 из шести)

$$6.1. \frac{2\log_{1-3|x|}(42x^2 - 14|x| + 1)}{\log_{1-3|x|}\left(x - \frac{5}{6}\right)^2} \leq 1. \quad (A).$$

$$6.2. \frac{\log_{1-4x^2}(|x| - 4)^2}{\log_{1-4x^2}(10x^2 + 5x + \frac{1}{2})} \leq 2. \quad (B).$$

Решение

6.1. Область существования логарифмов определяется системой:

$$\begin{cases} 42x^2 - 14|x| + 1 > 0, \\ 1 - 3|x| > 0, 1 - 3|x| \neq 1, \\ \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 > 0. \end{cases}$$

в которой первые три соотношения в силу тождества $x^2 = |x|^2$ равносильны требованию

$$0 < |x| < \frac{7 - \sqrt{7}}{42} \cup \frac{7 + \sqrt{7}}{42} < |x| < \frac{1}{3}.$$

Очевидно, что в этом случае $x - \frac{5}{6} < 0$, и, следовательно неравенство $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 < 0$ истинно, а знаменатель исходного неравенства (A) преобразуется следующим образом:

$$\log_{1-3|x|}\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 = 2\log_{1-3|x|}\left|x - \frac{5}{6}\right| = 2\log_{1-3|x|}\left(\frac{5}{6} - x\right).$$

Поэтому в силу логарифмического тождества

$$\frac{\log_a f}{\log_a g} = \log_g f$$

неравенство (A) равносильно системе

$$\begin{cases} \log_{(5/6-x)}(42x^2 - 14|x| + 1) - 1 \leq 0, \\ 0 < |x| < \frac{7-\sqrt{7}}{42} \cup \frac{7+\sqrt{7}}{42} < |x| < \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Так как разность $(\log_g f - 1)$ в области допустимых значений совпадает по знаку с произведением $(f-g)(g-1)$, то последняя система (а, следовательно, и исходное неравенство (A)) принимает вид:

$$\begin{cases} \left((42x^2 - 14|x| + 1) - \left(\frac{5}{6} - x \right) \right) \left(\left(\frac{5}{6} - x \right) - 1 \right) \leq 0, \\ 0 < |x| < \frac{7-\sqrt{7}}{42} \cup \frac{7+\sqrt{7}}{42} < |x| < \frac{1}{3}. \end{cases}$$

то есть:
$$\begin{cases} \left((42x^2 - 14|x| + x + \frac{1}{6}) \left(x + \frac{1}{6} \right) \right) \geq 0, \\ 0 < |x| < \frac{7-\sqrt{7}}{42} \cup \frac{7+\sqrt{7}}{42} < |x| < \frac{1}{3}. \end{cases} \quad (A_1)$$

Условие неравенства единице основания логарифма: $\left(\frac{5}{6} - x \right) \neq 1$ обеспечено вторым соотношением системы, так как

$$\frac{7-\sqrt{7}}{42} < -\frac{1}{6} < \frac{7+\sqrt{7}}{42}.$$

Поэтому система принимает вид (при $x < 0$):

$$\begin{cases} -\frac{15-\sqrt{197}}{84} < x < -\frac{1}{6} \cup -\frac{15+\sqrt{197}}{84} \leq x, \\ -\frac{1}{3} < x < -\frac{7+\sqrt{7}}{42} \cup \frac{7-\sqrt{7}}{42} < x < 0 \end{cases}$$

Далее, сравнивая константы, определяющие концы полученных промежутков переменной x , устанавливаем, что

$$\begin{aligned} -\frac{15-\sqrt{197}}{84} &< -\frac{1}{3} < -\frac{7+\sqrt{7}}{42} < -\frac{1}{6} < \frac{7-\sqrt{7}}{42} < \\ &< \frac{-15+\sqrt{197}}{84} < 0. \end{aligned}$$

Поэтому в случае $x < 0$ получаем первую часть ответа исходного неравенства (А):

$$-\frac{1}{3} < x < -\frac{7+\sqrt{7}}{42} \cup \frac{-15+\sqrt{197}}{84} \leq x < 0.$$

Случай: $x > 0$. Так как теперь $|x| = x$, то неравенства (А₁) переписываются в виде

$$\begin{cases} (42 \cdot 6x^2 - 13 \cdot 6x + 1) \left(x + \frac{1}{6}\right) \geq 0, \\ 0 < x < \frac{7-\sqrt{7}}{42} \cup \frac{7+\sqrt{7}}{42} < x < \frac{1}{3}, \end{cases}$$

то есть в виде:

$$\begin{cases} \left(x - \frac{13-\sqrt{141}}{84}\right) \left(x - \frac{13+\sqrt{141}}{84}\right) \geq 0, \\ 0 < x < \frac{7-\sqrt{7}}{42} \cup \frac{7+\sqrt{7}}{42} < x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

(множитель $\left(x + \frac{1}{6}\right)$ больше нуля).

Устанавливая, как и ранее, что

$$0 < \frac{13-\sqrt{141}}{84} < \frac{7-\sqrt{7}}{42} < \frac{7+\sqrt{7}}{42} < \frac{13+\sqrt{141}}{84} < \frac{1}{3},$$

получаем вторую часть ответа неравенства (А):

$$0 < x \leq \frac{13-\sqrt{141}}{84} \cup \frac{13+\sqrt{141}}{84} \leq x < \frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3} < x < -\frac{7+\sqrt{7}}{42}, \frac{\sqrt{197}-15}{84} \leq x < 0,$

$$0 < x \leq \frac{13-\sqrt{141}}{84}, \frac{13+\sqrt{141}}{84} \leq x < \frac{1}{3}.$$

Комментарий. Рассмотренное неравенство (А) является «рекордным» по технической трудоемкости в практике конкурсных экзаменов по математике на факультет вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета (по мнению авторов), что предопределяет необходимость выбора абитуриентом оптимального (т. е. с наименьшими временными затратами) пути решения этого неравенства.

$$6.2. \quad \frac{\log_{1-4x^2} (|x|-4)^2}{\log_{1-4x^2} \left(10x^2 + 5x + \frac{1}{2}\right)} \leq 2.$$

Так как $1-4x^2$ должно быть больше нуля, то $|x|-4 < 0$. Поэтому $\log_{1-4x^2}(|x|-4)^2 = 2\log_{1-4x^2}(|x|-4) = 2\log_{1-4x^2}(4-|x|)$. Отсюда имеем:

$$(B) \Leftrightarrow \frac{\log_{1-4x^2}(4-|x|)}{\log_{1-4x^2}\left(10x^2+5x+\frac{1}{2}\right)} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_{1-4x^2}(4-|x|) - \log_{1-4x^2}\left(10x^2+5x+\frac{1}{2}\right)}{\log_{1-4x^2}\left(10x^2+5x+\frac{1}{2}\right)} \leq 0$$

Так как разность $(\log_a f - \log_a g)$ совпадает по знаку в области допустимых значений с произведением $(f-g)(a-1)$ (в частности, $\log_a g$ — с произведением $(f-1)(a-1)$), то последнее неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{\left((4-|x|) - \left(10x^2+5x+\frac{1}{2}\right)\right) \left((1-4x^2)-1\right)}{\left(\left(10x^2+5x+\frac{1}{2}\right)-1\right) \left((1-4x^2)-1\right)} \leq 0, \\ 1-4x^2 > 0, \\ 10x^2+5x+\frac{1}{2} > 0, \end{cases}$$

то есть системе:

$$\begin{cases} \frac{(10x^2+5x+|x|-3,5)}{(10x^2+5x-0,5)} \geq 0, \\ 0 < x^2 < 1/4, \\ 20x^2+10x+1 > 0 \end{cases}$$

Далее, как и при решении неравенства (А), рассматривая два случая: $x < 0$ и $x > 0$, решим соответствующие системы:

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} < x < 0, \\ 20x^2+10x+1 > 0, \\ \frac{10x^2+4x-3,5}{10x^2+5x-0,5} \geq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{10x^2+5x-3,5}{10x^2+5x-0,5} \geq 0. \end{cases}$$

Объединяя ответы, получим ответ для неравенства (В):

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{-5-\sqrt{5}}{20}, \frac{-5+\sqrt{5}}{20} < x < 0, 0 < x < \frac{-5+\sqrt{45}}{20},$$

$$\frac{-3+\sqrt{44}}{10} \leq x < \frac{1}{2}.$$

1987 год (задача № 3 из шести)

$$7.1. \log_{(x+1)^2} 8 + 3\log_4(x+1) \geq 9\frac{1}{4}. \quad (A)$$

$$7.2. \frac{1}{2}\log_3(x-2) + \log_{(x-2)^2}\sqrt{3} \geq 1\frac{3}{10}. \quad (B)$$

Решение.

7.1. На основании логарифмических тождеств неравенство (A) преобразуется к виду

$$\frac{3}{2} \frac{1}{\log_2(x+1)} + \frac{3}{2} \log_2(x+1) \geq \frac{37}{4},$$

т. е. к виду

$$\frac{6\log_2^2(x+1) - 37\log_2(x+1) + 6}{\log_2(x+1)} \geq 0.$$

Числитель как трехчлен относительно $\log_2(x+1)$ раскладываем на множители и получаем неравенство, которое далее решаем методом замены множителей:

$$\frac{6\left(\log_2(x+1) - \frac{1}{6}\right)(\log_2(x+1) - 6)}{\log_2(x+1)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{((x+1) - \sqrt[6]{2})(x+1) - 2^6}{(x+1) - 1} \geq 0, \\ x+1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x - (\sqrt[6]{2} - 1))(x - 63)}{x} \geq 0, \\ x > -1, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \sqrt[6]{2} - 1 \cup x \geq 63, \\ x > -1, \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq \sqrt[6]{2} - 1 \cup x \geq 63.$$

Ответ: $0 < x \leq \sqrt[6]{2} - 1, x \geq 63$.

7.2. Неравенство (B) решаем по точной аналогии с

решением неравенства (А). Поэтому приводим только последовательность преобразований.

$$\begin{aligned}
 (B) & \Leftrightarrow \frac{1}{4} \log_3(x-2) + \frac{1}{4} \frac{1}{\log_3(x-2)} \geq \frac{13}{10} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{5 \log_3^2(x-2) - 26 \log_3(x-2) + 5}{\log_3(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \frac{(5 \log_3(x-2) - \frac{1}{5})(\log_3(x-2) - 5)}{\log_3(x-2)} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{((x-2) - \sqrt[5]{3})(x-2) - 3^5}{(x-2) - 1} \geq 0 \\ x-2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x - (2 + \sqrt[5]{3}))(x - 245)}{x - 3} \geq 0, \\ x > 2, \end{cases} \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x \leq 2 + \sqrt[5]{3} \cup x \geq 245, \\ x > 2 \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow 3 < x \leq 2 + \sqrt[5]{3} \cup x \geq 245.
 \end{aligned}$$

Ответ: $3 < x \leq 2 + \sqrt[5]{3}, x \geq 245$.

1988 год (задача № 4 из шести)

8.1. $8^x \geq 6 \cdot 9^{|x-1|}$ (А)

8.2. $25^{x+1} \geq 10 \cdot 32^{|x-1|+1}$ (В)

Решение.

8.1. Естественно перейти к одному основанию:

$$\begin{aligned}
 8^x & \geq 6 \cdot 9^{|x-1|} \Leftrightarrow (3^{\log_3 8})^x - 3^{\log_3 6} \cdot 3^{2|x-1|} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow 3^{x \log_3 8} - 3^{\log_3 6 + 2|x-1|} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow (x \log_3 8 - (\log_3 6 + 2|x-1|)) (3-1) \geq 0 \Leftrightarrow \\
 & \Leftrightarrow ((3 \log_3 2)x - (1 + \log_3 2)) - 2|x-1| \geq 0.
 \end{aligned}$$

Методом замены множителей легко установить, что

$$f - |g| \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f \geq 0, \\ (f-g)(f+g) \geq 0. \end{cases}$$

Поэтому исходное неравенство равносильно системе
 $\begin{cases} (3\log_2 2)x - (1 + \log_2 2) \geq 0, \\ ((3\log_2 2)x - 1 - \log_2 2 - 2(x-1))((3\log_2 2)x - 1 - \log_2 2 + 2(x+1)) \geq 0, \end{cases}$
 т. е. системе

$$\begin{cases} x \geq \frac{a+1}{3a}, \\ ((3a-2)x - a + 1)((3a+2)x - a - 3) \geq 0, \text{ где } a = \log_2 2. \end{cases}$$

Осталось сравнить между собой величину $\frac{a+1}{3a}$ и корни линейных множителей второго неравенства. Так как

$$\frac{a+1}{3a} \cup \frac{a+3}{3a+2} \Leftrightarrow (a+1)(3a+2) \cup 3a(a+3) \Leftrightarrow 1 \cup 2a \Leftrightarrow 3 < 4,$$

$$\text{и } \frac{a+3}{3a+2} \cup \frac{1-a}{2-3a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a+3) \cup (2-3a) \cup (1-a)(3a+2) \Leftrightarrow 1 \cup 2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 < 4,$$

$$\text{то } \frac{a+1}{3a} < \frac{a+3}{3a+2} < \frac{1-a}{2-3a}.$$

Поэтому система, а, следовательно, и исходное неравенство, имеет ответ: $\frac{a+3}{3a+2} \leq x \leq \frac{1-a}{2-3a}$.

$$8.2. \text{ Ответ: } \frac{11-a}{2a+5} \leq x \leq \frac{a-1}{5-2a}, \text{ где } a = \log_2 5.$$

1989 год (задача № 4 из шести)

$$9.1. \quad 1 \geq |\cos x| \sqrt{2x - 3\log_2 \dots} \left(\frac{1 + 2\sqrt{3}|\sin x|}{8(1 - 2\cos^2 x)} \right). \quad (A)$$

$$9.2. \quad 1 \leq |\sin x| \sqrt{1 - 2x\log_2 \dots} \left(\frac{5 + 16x|\cos^2 x|}{8\cos^2 x - 2} \right) \quad (B)$$

Решение.

9.1. В силу основного тригонометрического тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ и свойства модуля $a^2 = |a|^2$ получаем следующее утверждение:

$$\begin{cases} |\cos x| > 0, \\ |\cos x| \neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\sin x| \neq 1 \\ |\sin x| > 0, \end{cases} \Leftrightarrow 0 < |\sin x| < 1.$$

И так как из основного логарифмического тождества следует, что

$$|\cos x|^{\log_{|\cos x|} f(x)} = |\sin x|^{\log_{|\sin x|} f(x)}$$

то неравенство (A) переписывается в виде

$$1 \geq |\sin x|^{\log_{|\sin x|} \left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(2|\sin^2 x|-1)} \right)^{\sqrt{2x-3}}}$$

т. е. неравенство (A) равносильно системе:

$$\begin{cases} 1 \leq \left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(2|\sin^2 x|-1)} \right)^{\sqrt{2x-3}} \\ 0 < |\sin x| < 1. \end{cases}$$

Методом замены множителей мы уже обосновывали тот факт, что неравенство $a^t \geq 1$ в области допустимых значений равносильно неравенству $f(a-1) \geq 0$. Поэтому последняя полученная система неравенств равносильна системе:

$$\begin{cases} \left(\frac{1+2\sqrt{3}|\sin x|}{8(2|\sin^2 x|-1)} - 1 \right)^{\sqrt{2x-3}} \geq 0, \\ 0 < |\sin x| < 1, \\ 2|\sin x|^2 - 1 > 0, \end{cases} \text{ т. е. системе}$$

$$\begin{cases} (16|\sin x|^2 - 2\sqrt{3}|\sin x| - 9)^{\sqrt{2x-3}} \leq 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < |\sin x| < 1. \end{cases}$$

Так как переменная x находится у нас под знаком тригонометрической функции и вне, то далее разумно рассмотреть два случая: $2x-3=0$ и $2x-3>0$, то есть последнюю систему представить в виде совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 2x-3=0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < |\sin x| < 1, \end{cases} \cup$$

$$\cup \begin{cases} 2x-3>0, \\ 16|\sin x|^2 - 2\sqrt{3}|\sin x| - 9 \leq 0, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < |\sin x| < 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $0 < \frac{\pi}{4} < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2}$, поэтому в силу монотонного возрастания функции $y = \sin x$ на промежутке $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ имеем $0 < \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \frac{3}{2} < \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Отсюда следует, что первая система имеет ответ $x = \frac{3}{2}$.

Во второй системе второе неравенство является квадратным относительно $|\sin x|$. Поэтому для нее получаем следующую последовательность равносильных преобразований.

$$\begin{cases} x > 3/2, \\ (2|\sin x| - \sqrt{3})(8|\sin x| + 3\sqrt{3}) \leq 0, \Leftrightarrow \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < |\sin x| < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{3}{2}, \\ \frac{\sqrt{2}}{2} < |\sin x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}, \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2}, \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 < |\sin x|^2 \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2}, \\ 1 < 2\sin^2 x \leq \frac{3}{2}, \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2}, \\ 1 < 1 - \cos 2x \leq \frac{3}{2}, \Leftrightarrow \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2}, \\ -\frac{1}{2} \leq \cos 2x < 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{2}, \\ -\frac{2}{3}\pi + 2\pi k \leq 2x < -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \cup \frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \Leftrightarrow \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + \pi k \leq x < -\frac{\pi}{4} + \pi k \cup \frac{\pi}{4} + \pi k < x \leq \frac{\pi}{3} + \pi k,$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$

Объединяя ответы двух систем, получаем ответ исходного неравенства (А):

$$x = \frac{3}{2}, \quad -\frac{\pi}{3} + \pi k \leq x < -\frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$\frac{\pi}{4} + \pi k < x \leq \frac{\pi}{3} + \pi k, k = 1, 2, 3, \dots$$

9.2. Решается аналогично неравенству 9.1.

Ответ: $x = \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4} + \pi k \leq \frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{2}{3}\pi + \pi k, \frac{3}{4}\pi + \pi k,$
 $k = -1, -2, -3, \dots$

3. Физический факультет 1974 год (задача № 2 из пяти)

1.1. $x^2 - 2|x+1| < 0. \quad (A)$

1.2. $3|x-1| > (x-1)^2 + 2 \quad (B)$

Решение.

1.1. Так как при всех значениях x выражение x^2 и $2|x+1|$ неотрицательны и $|x+1|^2 = (x+1)^2$, то заменяя разность неотрицательных чисел на разность их квадратов, для неравенства (A) получаем следующую последовательность равносильных преобразований

$$\begin{aligned} x^2 - 2|x+1| < 0 &\Leftrightarrow (x^2)^2 - (2|x+1|)^2 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2)^2 - (2(x+1))^2 < 0 \Leftrightarrow (x^2 - 2(x+1))(x^2 + 2(x+1)) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2x - 2)(x^2 + 2x + 2) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ответ: $1 - \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{3}.$

1.2. Неравенство (B) в силу свойства модуля $|a|^2 = a^2$ преобразуется следующим образом.

$$\begin{aligned} 3|x-1| > (x-1)^2 + 2 &\Leftrightarrow |x-1|^2 - 3|x-1| + 2 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (|x-1|^2 - 1^2)(|x-1|^2 - 2^2) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow ((x-1)^2 - 1)((x-1)^2 - 2^2) < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x-2)x(x-3)(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \cup 2 < x < 3. \end{aligned}$$

Ответ: $-1 < x < 0, 2 < x < 3.$

1975 год (задача № 3 из пяти)

2.1. $\frac{2x^2 - 11x + 15}{2^x - 6} < 0. \quad 2.2. \quad \frac{3^x - 2}{5x^2 + 22x - 15} > 0.$

2.2. $(2 - 5^x)(7x^2 - 10x + 3) < 0. \quad 2.4. \quad \frac{3x^2 - x - 14}{5 - 2^x} < 0.$

Решение

$$2.1. \frac{2x^2 - 11x + 15}{2^x - 6} < 0 \Leftrightarrow \frac{2\left(x - \frac{5}{2}\right)(x-3)}{2^x - 2^{\log_2 6}} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)(x-3)}{x - \log_2 6} < 0 \Leftrightarrow x < \frac{5}{2} \cup \log_2 6 < x < 3,$$

$$\text{т. к. } \frac{5}{2} < \log_2 6 < 3 \Leftrightarrow 5 < \log_2 6^2 < 6 \Leftrightarrow 2^5 < 6^2 < 2^6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 32 < 36 < 64, \text{ что истинно.}$$

$$\text{Ответ: } x < \frac{5}{2}, \log_2 6 < x < 3.$$

$$2.2. (2 - 5^x)(7x^2 - 10x + 3) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5^{\log_5 2} - 5^x) \cdot 7\left(x - \frac{3}{7}\right)(x-1) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\log_5 2 - x)\left(x - \frac{3}{7}\right)(x-1) < 0 \Leftrightarrow \frac{3}{7} < x < \log_5 2, x > 1.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3}{7} < x < \log_5 2, x > 1.$$

$$2.3. \frac{3^x - 2}{5x^2 + 22x - 15} > 0 \Leftrightarrow \frac{3^x - 3^{\log_3 2}}{5(x+5)\left(x - \frac{3}{5}\right)} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - \log_3 2)(x+5)\left(x - \frac{3}{5}\right) > 0 \Leftrightarrow -5 < x < \frac{3}{5} \cup x > \log_3 2.$$

$$\text{Ответ: } -5 < x < \frac{3}{5}, x > \log_3 2.$$

$$2.4. \frac{3x^2 - x - 14}{5 - 2^x} < 0 \Leftrightarrow (3x^2 - x - 14)(2^{\log_2 5} - 2^x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x+2)\left(x - \frac{7}{3}\right)(\log_2 5 - x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < \log_2 5 \cup x > \frac{7}{3}.$$

$$\text{Ответ: } -2 < x < \log_2 5, x > \frac{7}{3}.$$

1977 год (задача № 3 из пяти)

$$3.1. \log_7 x - \log_x \frac{1}{7} \geq 2.$$

$$3.2. 2\log_5 \sqrt{x} - 2 \geq \log_x \left(\frac{1}{5}\right).$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 3.1. \quad \log_7 x - \log_x \frac{1}{7} \geq 2 &\Leftrightarrow \log_7 x + \frac{1}{\log_7 x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{(\log_7 x)^2 - 2\log_7 x + 1}{\log_7 x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_7 x - 1)^2}{\log_7 x} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x-7)^2}{x-1} \geq 0, \\ x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.
 \end{aligned}$$

Ответ: $x > 1$.

$$\begin{aligned}
 3.2. \quad 2\log_5 \sqrt{x} - 2 \geq \log_x \frac{1}{5} &\Leftrightarrow \log_5 x + \log_x 5 - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \log_5 x + \frac{1}{\log_5 x} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\log_5 x)^2 - 2\log_5 x + 1}{\log_5 x} \geq 0 \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow \frac{(\log_5 x - 1)^2}{\log_5 x} \geq 0 \Leftrightarrow \log_5 x > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1.
 \end{aligned}$$

Ответ: $x > 1$.

1981 год (задача № 4 из шести)

$$4.1. \quad 5^{\log_3 \left(\frac{2}{x+2} \right)} < 1.$$

$$4.2. \quad \log_{\frac{1}{x-1}} 0,4 > 0.$$

Решение.

$$4.1. \quad 5^{\log_3 \left(\frac{2}{x+2} \right)} < 1 \Leftrightarrow \log_3 \left(\frac{2}{x+2} \right) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{x+2} - 1 < 0, \\ \frac{2}{x+2} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - (x+2) < 0, \\ x+2 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > 0.$$

Ответ: $x > 0$.

$$4.2. \quad \log_{\frac{1}{x-1}} 0,4 > 0 \Leftrightarrow \log_{x-1} (0,4)^{-1} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x-1} \frac{5}{2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{2}-1\right) \left((x-1)-1\right) > 0, \\ x-1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 > 0, \\ x-1 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

Ответ: $x > 2$.

1982 год (задача № 4 из шести)

$$5.1. \quad 5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2}).$$

$$5.2. \quad 7^x - 2^{x+2} < 5(7^{x-1}) - 2^{x-1}.$$

Решение.

$$5.1. \quad 5^x - 3^{x+1} > 2(5^{x-1} - 3^{x-2}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^x - 3 \cdot 3^x - 2 \cdot 5^{x-1} + 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^x \left(1 - \frac{2}{5}\right) - 3^x \left(3 - \frac{2}{9}\right) > 0 \Leftrightarrow 5^x \cdot \frac{3}{5} - 3^x \cdot \frac{25}{9} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x - \left(\frac{5}{3}\right)^3 > 0 \Leftrightarrow (x-3) \left(\frac{5}{3} - 1\right) > 0 \Leftrightarrow x > 3.$$

Ответ: $x > 3$.

$$5.2. \quad 7^x - 2^{x+2} < 5(7^{x-1}) - 2^{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7^x - 2^x \cdot 2^2 - 5 \cdot 7^{x-1} + 2^x \cdot 2^{-1} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7^x \left(1 - \frac{5}{7}\right) - 2^x \left(4 - \frac{1}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow 7^x \cdot \frac{2}{7} - 2^x \cdot \frac{7}{2} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{7}{2}\right)^x - \left(\frac{7}{2}\right)^2 < 0 \Leftrightarrow (x-2) \left(\frac{7}{2} - 1\right) < 0 \Leftrightarrow x < 2.$$

Ответ: $x < 2$.

1984 год (задача № 3 из шести)

$$6.1. \quad 2^{x+3} - x^3 \cdot 2^x \leq 16 - 2x^3.$$

$$6.2. \quad x^4 + 3^{x+4} \geq x^4 \cdot 3^x + 81.$$

Решение.

$$6.1. \quad 2^{x+3} - x^3 \cdot 2^x \leq 16 - 2x^3 \Leftrightarrow 2^x \cdot 2^3 - 2^x \cdot x^3 + 2x^3 - 16 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 2^x(8 - x^3) - 2(8 - x^3) \leq 0 \Leftrightarrow (2^x - 2)(8 - x^3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 2^1) (2^3 - x^2) \leq 0 \Leftrightarrow (x-1) (2-x) \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 \cup x \geq 2.$$

Ответ: $x \leq 1, x \geq 2$.

$$6.2. \quad x^4 + 3^{x+4} \geq x^4 \cdot 3^x + 81 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^4 - x^4 \cdot 3^x) + (3^x \cdot 3^4 - 81) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4(1 - 3^x) - 3^4(1 - 3^x) \geq 0 \Leftrightarrow (x^4 - 3^4)(3^0 - 3^x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3^2)(0 - x) \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3)x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \leq -3 \cup 0 \leq x \leq 3.$$

Ответ: $x \leq -3, 0 \leq x \leq 3$.

Задачи для самостоятельного решения
(с ответами и указаниями)

Решить неравенства.

$$1. \frac{(x^2-7)|x|+10)(2x-10+\sqrt{x^2-4x-5})}{2-\log_{\sqrt{11}-\sqrt{5}}(x^2+2x+16-2\sqrt{55})} \leq 0.$$

Ответ: $-5 \leq x < -2$, $-2 < x \leq -1$, $x \geq 5$.

$$2. \frac{((x^2+x+1)^{\frac{x+8}{x+2}} - (x^2+x+1)^8) \left(\frac{1}{\log_2 \sqrt{x+3}} - \frac{1}{\log_2 (x+1)} \right)}{(1 - \log_x (x^2+3x-3)) \left(2 - \log_{\frac{5-12x}{x-6}} \right)} > 0.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{91}-3}{2} < x < 1$, $1 < x < 2$.

$$3. \frac{\sqrt{1-\log_3(x^2-2x+2)} - \log_3(5x^2-10x+10)}{\left(\frac{2}{3^x-1} - \frac{7}{9^x-2} \right) (49^{x^2+3x-4} + 7^{x^2+3x-4} - 98)} < 0.$$

Ответ: $-\log_3 2 < x < 0$, $\log_3 \sqrt{2} < x < 1$.

$$4. \frac{(\log_{\sqrt{2}}(x^2-2x+8) + 2\sqrt{\log_2(x^2-2x+8)-12})\sqrt{x-5}}{(\log_{\sqrt{2}}(x-4) - 1) \left(\frac{2}{10^{-2x}-10} - \frac{1}{10^{-x}-1} \right)} \geq 0.$$

Ответ: $x = 5$, $x \geq 4 + \sqrt{2}$.

$$5. \frac{\sqrt{\log_3(3x^2-4x+2)} + 1 - \log_3(3x^2-4x+2)}{\sqrt{8+2\sqrt{8-x}} - 4\sqrt{3-x} + 2\sqrt{3-x-5}} > 0.$$

Ответ: $-1 < x \leq \frac{1}{3}$, $1 \leq x < \frac{7}{3}$.

$$6. \frac{\log_2(\sqrt{x^2-4x+3}) - \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-4x} + \sqrt{x+1} + 1} \right) - 1}{\log_{\frac{1}{3}}(\sqrt{9x-x^2}+3) - \log_3 \left(\frac{27}{\sqrt{9x-x^2} + \sqrt{82-x^2} + 2} \right) + 3} < 0.$$

Ответ: $4 \leq x < 9$.

$$7. \left(\left(\log_{x-1} \frac{2(x-2)(x-4)}{x+5} \right) - 1 \right) \times \\ \times \left(\left(\log_{\frac{1}{x}} \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-5)} \right) - 1 \right) \geq 0.$$

Ответ: $-1 < x < 0$, $0 < x \leq 8 - \sqrt{43}$, $1 < x < 2$,
 $5 < x \leq 8 + \sqrt{43}$, $x \in [8 - \sqrt{43}; 2) \cup (5; 8 -$

$$8. (\log_{(3x-1)}(2x) - 1)(\log_x(3-x) - 1) < 0.$$

Ответ: $\frac{2}{3} < x < 1, 1 < x < \frac{3}{2}$.

9.
$$\frac{(4x^2 + 12x + 5) \log_3 \left(x + \frac{4}{5} \right)}{\log \left(x^2 - 2x + \frac{7}{16} \right) \cdot \log_6 \left(x^2 + 2x + \frac{7}{16} \right)} < 0.$$

Ответ: $-\frac{1}{4} < x < -\frac{1}{5}, \frac{1}{4} < x < \frac{9}{4}$.

10.
$$\frac{3^x - 3^{0.5-x} - \sqrt{3} + 1}{2^{x-0.5} + 0.5\sqrt{2} - 1 - 2^{-x}} > 0.$$

Ответ: $x < \frac{1}{6}, x > \frac{1}{2}$.

11.
$$\frac{x^2 + 3|x| - 10}{x^2 - 4|x| - 12} > 0.$$

Ответ: $y < -6, -2 < y < 2, y < 6$.

12.
$$\log_{x-\frac{1}{5}} - \log_{x-\frac{3}{5}} \frac{1}{x-\frac{5}{5}} \left(\log_{x-\frac{1}{5}} 3 - \log_{x-\frac{3}{5}} 3 \right) \geq 0.$$

Ответ: $4 - \sqrt{3} \leq x < 3, x \geq 4 + \sqrt{3}$.

13.
$$\frac{(\log_6(x^2 - 2) - 14)^2 - \log_6(x^2 - 2x - 14)^4}{(2x^2 - 9x - 5)} \times \frac{(\log_7(x^2 - 4x - 4)^8 - \log_2(x^2 - 4x - 4)^3)}{(3 + x - 2x^2)} < 0.$$

Ответ: $x \leq -3, x > 5$.

14.
$$\frac{(\log_{\sqrt{2}}(x - \frac{4}{7}) + 2)(49x^2 - 63x + 20)}{(\log_3|x - \frac{3}{5}| + \frac{1}{3})(\log_{\sqrt{6}}|5x - 3| - 3)} > 0.$$

Ответ: $\frac{4}{7} < x < \frac{3}{5}, \frac{3}{5} < x < \frac{5}{7}, \frac{27}{36} < x < \frac{11}{10}, x > \frac{3}{5} + \sqrt{5}$.

15.
$$\frac{(\log_6(x^2 - 4x - 11))^2 - \log_{11}(x^2 - 4x - 11)^3}{(3x^2 - 13x + 4)} \times \frac{(\log_3(x^2 - 2x - 7)^5 - \log_3(x^2 - 2x - 7)^8)}{(2 - 5x - 3x^2)} \leq 0$$

Ответ: $x < -2, x \geq 6$.

16.
$$\frac{\frac{1}{2} \log_{x-1}(x^2 - 8x + 16) + \log_{x-1}(-x^2 + 5x - 4) - 3}{\frac{1}{2} \log_{x+4}(x^2 - 20x + 100) + \log_{x+4}(-x^2 + 6x + 40) - 3} \leq 0.$$

Ответ: $1 < x < 2, 3 < x < 4, x = \frac{5}{2}$.

$$17. \frac{(\sqrt{7 - \log_2 x^2} - 4 + \log_2 x^4)(\log_2 x^8 - 3 - \sqrt{7 + \log_2 x^2})}{2 \cdot 5^{x^2+6x-14} + 25^{x^2+6x-16} - 75} \leq 0.$$

Ответ: $-8 < x \leq -2$, $-2^{3/8} \leq x \leq 2^{-7/2}$, $2^{-7/2} \leq x \leq 2^{3/8}$,
 $x = -2^{7/2}$, $x = 2^{7/2}$.

УКАЗАНИЯ

1. Подкоренное выражение $(x^2 - 4x - 5)$ неотрицательно при $x \leq -1$ или $x \geq 5$. Логарифм существует при всех $x \in R$. Выражение $(2x - 10)$ обращается в нуль при $x = 5$. В первом случае исходное неравенство преобразуется к виду:

$$\frac{(x+2)(x+5)(\sqrt{x^2-4x-5} - (10-2x))}{2 - \log_{\sqrt{11}-\sqrt{5}}(x^2+2x+16-2\sqrt{55})} \leq 0,$$

которое равносильно неравенству

$$\frac{(x+2)(x+5)(\sqrt{x^2-4x-5}^2 - (10-2x)^2)}{((\sqrt{11}-\sqrt{5})^2 - (x^2+2x+16-2\sqrt{55}))(\sqrt{11}-\sqrt{5}-1)} \leq 0,$$

то есть неравенству

$$\frac{(x+2)(x+5)(-3)(x^2-12x+35)}{(-1)x(x+2)((\sqrt{11})^2 - (\sqrt{5}+1)^2)} \leq 0.$$

Учитывая, что $x \leq -1$, последнее неравенство приводим к виду:

$$\frac{(x+2)(x+5)}{(x+2)} \geq 0. \text{ откуда } x \geq -5 \text{ и } x \neq -2.$$

Во втором случае (т. е. при $x \geq 5$) исходное неравенство приводится к виду:

$$\frac{(x-2)(x-5)((\sqrt{x^2-4x-5})^2 + (2x-10)^2)}{x(x+2)} \geq 0.$$

2. После упрощений и замены множителей получаем неравенство

$$\frac{\left(\frac{x+5}{x+2} - 3\right)}{(x - (x^2+3x-3))(x-1)^2 \left(x^2 - \frac{8-12x}{x-6}\right)} \times \\ \times \frac{(x^2+x)((x+1)^2 - (x+3))}{\log_2(x+3) \log_2(x+1)} > 0.$$

В области определения $x > 0$, поэтому

$$\log_2(x+3) > 0 \text{ и } \log_2(x+1) > 0.$$

Кроме того, в области определения:

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 3 > 0, \\ \frac{8 - 12x}{x - 6} > 0, \end{cases} \quad \sim \quad \frac{\sqrt{21} - 3}{2} < x < 6.$$

Поэтому исходное неравенство эквивалентно системе:

$$\begin{cases} \frac{(2x+1)(x^2+x-2)(x-6)}{(x^2+2x-3)(x-1)^2(x^3-6x^2+12x-8)} > 0, \\ 0 < \frac{\sqrt{21}-3}{2} < x < 6, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-1)^2(x-2) < 0, \\ \frac{\sqrt{21}-3}{2} < x < 6, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{21}-3}{2} < x < 1 \cup 1 < x < 2.$$

3. Числитель рассматриваем как квадратный трехчлен относительно выражения $\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)}$. В знаменателе выделяем квадратные трехчлены относительно выражений 3^x и 7^{x^2+5x-9} . Разлагая трехчлены на множители, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{(\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} - 1)(\sqrt{1 - \log_5(x^2 - 2x + 2)} + 2)}{\left(3^x - \frac{1}{2}\right)(3^x - 3)(7^{x^2+5x-49} + 14)} \times \\ & \times \frac{(3^x - 1)(3^x - \sqrt{2})}{(7^{x^2+5x-49} - 7)} < 0. \end{aligned}$$

Применяя метод замены множителей, получаем:

$$\begin{cases} \frac{(1 - \log_5(x^2 - 2x + 2) - 1)x(x - \log_3 \sqrt{2})}{(x - \log_3 1/2)(x - 1)(x^2 + 5x - 49 - 1)} < 0, \Leftrightarrow \\ 1 - \log_5(x^2 - 2x + 2) \geq 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{((x^2 - 2x + 2) - 1)x(x - \log_3 \sqrt{2})}{(x - \log_3 1/2)(x - 1)(x + 10)(x - 5)} > 0, \Leftrightarrow \\ -1 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-1)x(x - \log_3 \sqrt{2})}{x - \log_3 1/2} < 0, \Leftrightarrow -\log_3 2 < x < 0 \cup \log_3 \sqrt{2} < x < 1. \\ -1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

4. Решение аналогично решению неравенства 3. В числителе и знаменателе выделяем и разлагаем на множители трехчлены относительно выражений $\sqrt{\log_2(x^2-2x+8)}$ и 10^{-x} соответственно:

$$\frac{(\sqrt{\log_2(x^2-2x+8)}+3)(\sqrt{\log_2(x^2-2x+8)}-2)\sqrt{x-5}}{(\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1)(10^{-x}-4)(10^{-x}+2)(-1)(-2x-1)(-x)} \geq 0.$$

Заменяем множители (не забывая ОДЗ (1)):

$$\begin{aligned} & \frac{(\log_2(x^2-2x+8)-4)(x-5)}{(x-4-\sqrt{2})(-x-\lg 4)(-2x-1)x} \geq 0, \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x-5 \geq 0, \\ \log_2(x^2-2x+8) \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{(x^2-2x+8-16)(x-5)}{(x-4-\sqrt{2})(x+\lg 4)(2x+1)x} \geq 0, \\ x \geq 5, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{(x-4)(x+2)(x-5)}{(x-4-\sqrt{2})} \geq 0, \\ x \geq 5, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \frac{x-5}{x-4-\sqrt{2}} \geq 0, \\ x \geq 5, \end{cases} \Leftrightarrow x=5 \cup x \geq 4+\sqrt{2}. \end{aligned}$$

5. В числителе выделить и разложить на множители квадратный трехчлен относительно выражения $\sqrt{\log_3(3x^2-4x+2)}$.

В результате числитель имеет вид:

$$-2(\sqrt{\log(3x^2-4x+2)}-1)(\sqrt{\log(3x^2-4x+2)}+0,5).$$

Последний множитель в соответствии с правилом (5.8) заменяем на 1. Так как знаменатель является суммой вида $(\sqrt{f}+g)$, где $f=\sqrt{8+2b-b^2}$, $g=2b-5$ при $b=2^{\sqrt{3-x}}$, то в соответствии с правилами (5.8), (5.9) рассматриваем два случая: (1) $g=2b-5 > 0$ и (2) $g=2b-5 \leq 0$.

Получив решения исходного неравенства в каждом из этих случаев, находим их объединение.

6. Логарифмы в числителе приводим к основанию 2, а в знаменателе — к основанию 3. Получаем:

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(\sqrt{x^2-4x+3}) - \log_2(\sqrt{x^2-4x} + \sqrt{x+1} + 1)}{\log_3(\sqrt{9x-x^2} + \sqrt{82-x^2} + 2) - \log_3(\sqrt{9x-x^2} + 3)} < 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-\sqrt{x+1}}{\sqrt{82-x^2}-1} < 0, \\ x^2-4x \geq 0, \\ 9x-x^2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4-(x+1)}{(82-x^2)-1} < 0, \\ x \leq 0 \cup x \geq 4, 0 \leq x \leq 9, \\ x+1 \geq 0, 82-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [4; 9].$$

Эффективность замены множителей здесь увеличивается из-за наличия подобных членов в выражениях под логарифмами.

7. Замена множителей приводит к следующей эквивалентной исходному неравенству системе:

$$\begin{cases} \left(\frac{2(x-2)(x-4)}{x+5} - (x-1) \right) (x-1-1) \left(\frac{2(x-2)}{(x+1)(x-5)} - \frac{1}{x} \right) \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \geq 0, \\ \frac{2(x-2)(x-4)}{x+5} > 0, \\ \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-5)} > 0, \\ x-1 > 0, x-1 \neq 0, \\ \frac{1}{x} > 0, \frac{1}{x} \neq 1. \end{cases}$$

После упрощений она принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{(x-(8-\sqrt{43}))(x-(8+\sqrt{43}))(x-2)}{x^2(x-5)} \leq 0, \\ -1 < x < 1 \cup 1 < x < 2 \cup x > 5. \end{cases}$$

8. Замена множителей приводит к следующей эквивалентной системе:

$$\begin{cases} (2x-(3x-1))(3x-1-1)(3-x-x)(x-1) < 0, \\ 2x > 0, \\ 3x-1 > 0, \\ 3-x > 0, \\ x > 0, \end{cases}$$

т. е. к системе

$$\begin{cases} (x-1)^2 \left(x - \frac{2}{3} \right) \left(x - \frac{3}{2} \right) < 0, \\ \frac{1}{3} < x < 3, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < x < 1 \cup 1 < x < \frac{3}{2}.$$

9. Разложение на множители и последующая их замена приводят к следующей эквивалентной системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\left(4x + \frac{5}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{4}{5} - 1\right)}{\left(x^2 - 2x - \frac{7}{16} - 1\right)\left(x^2 + 2x + \frac{7}{16} - 1\right)} < 0, \\ x + 4 > 0, \\ x^2 - 2x + \frac{7}{16} > 0, \\ x^2 + 2x + \frac{7}{16} > 0. \end{array} \right.$$

10. После очевидных преобразований выделяем и раскладываем на множители квадратные трехчлены относительно 3^x в числителе и 2^{3x} в знаменателе, далее заменяем множители:

$$\begin{aligned} & \frac{(3^{2x} + 3^x(1 - \sqrt{3}) - \sqrt{3})2^{3x}}{(2^{6x} + 2^{3x}(1 - \sqrt{2}) - \sqrt{2})3^x} > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{(3^x + 1)(3^x - \sqrt{3})2^{3x}}{(2^{3x} + 1)(2^{3x} - \sqrt{2})3^x} > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{3^x - 3^{1/2}}{2^{3x} - 2^{1/2}} > 0 \Leftrightarrow \frac{x - \frac{1}{2}}{3x - \frac{1}{2}} > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{6} \cup x > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

11. Т. к. $y^2 = |y|^2$, то

$$\begin{aligned} & \frac{|y|^2 + 3|y| - 10}{|y|^2 - 4|y| - 12} > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{(|y| + 5)(|y| - 2)}{(|y| - 6)(|y| + 2)} > 0 \Leftrightarrow \frac{|y| - 2}{|y| - 6} > 0 \\ & \Leftrightarrow \frac{y^2 - 2^2}{y^2 - 6^2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(y + 2)(y - 2)}{(y + 6)(y - 6)} > 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow y < -6 \cup -2 < y < 2 \cup y > 6. \end{aligned}$$

12. Переходя к основанию 5 в логарифмах первой скобки и к основанию 3 в логарифмах второй скобки, получаем:

$$\frac{\log_5(x-2) - \log_5 \frac{x-3}{x-5}}{\log_5 \frac{x-3}{x-5} \cdot \log_5(x-2)} \cdot \frac{\log_3 \frac{1}{x} - \log_3 \frac{x-1}{x-2}}{\log_3 \frac{x-1}{x-2} \cdot \log_3 \frac{1}{x}} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\left((x-2) - \frac{x-3}{x-5} \right) \left(\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x-2} \right)}{\left(\frac{x-3}{x-5} - 1 \right) (x-2-1) \left(\frac{x-1}{x-2} - 1 \right) \left(\frac{1}{x} - 1 \right)} \geq 0, \\ x-2 > 0, \\ \frac{x-3}{x-5} > 0, \\ \frac{1}{x} > 0, \\ \frac{x-1}{x-2} > 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x - (4 + \sqrt{3}))(x - (4 - \sqrt{3}))}{x-3} \geq 0, \\ 2 < x < 3 \cup x > 5 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - \sqrt{3} \leq x < 3 \cup x \geq 4 + \sqrt{3}.$$

13. Переходим в логарифмах к основанию 2:

$$\Leftrightarrow \frac{(9-4\log_5) \log_2(x^2-2x-14) \cdot (8-3\log_2 7) \log_2(x^2-4x-4)}{(-1) \log_2 5 \cdot \log_2 7 \cdot (x+1) \left(x + \frac{1}{2}\right) \left(x - \frac{3}{2}\right) (x-5)} \leq 0.$$

Проводим замену всех множителей:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(2^9-5^4)(x^2-2x-14-1)(2^8-7^3)(x^2-4x-4-1)}{(-1)(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})(x-5)} \leq 0, \\ x^2-2x-14 > 0 \\ x^2-4x-4 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

Окончательно получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-5)(x+3)(x-5)(x+1)}{(x+1)(x+\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})(x-5)} \geq 0; \\ x < 1 - \sqrt{15} \cup 1 > 1 + \sqrt{15}, \end{array} \right. \Leftrightarrow x \leq -3 \cup x > 5.$$

14. Освобождаемся от логарифмов с помощью правил замены множителей (8.37) и (8.38), получаем эквивалентную исходную неравенству систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\left(\left(x - \frac{4}{7} \right) (\sqrt{5})^2 - 1 \right) (\sqrt{5} - 1) 49 \left(x - \frac{5}{7} \right) \left(x - \frac{4}{7} \right)}{\left(\left| x - \frac{3}{5} \right| \cdot 8^{1/3} - 1 \right) (8 - 1) (|5x - 3| - (\sqrt{5})^3 (\sqrt{5} - 1))} > 0, \\ x - \frac{4}{7} > 0, x \neq \frac{3}{5}. \end{array} \right.$$

Далее освобождаемся от модулей с помощью правила замены множителей (8.19).

15. Переходим к новым основаниям, после упрощений получаем:

$$\frac{(2\log_5 11 - 3) \log_5 (x^2 - 4x - 11) (5\log_2 3 - 8) \log_2 (x^2 - 2x - 7)}{\log_5 11 \log_2 3 (-3) (x+2) \left(x - \frac{1}{3} \right) (3) \left(x - \frac{1}{3} \right) (x-4)} < 0.$$

Заменяем множители:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(11^2 - 5^3) (x^2 - 4x - 11 - 1) (3^5 - 2^8) (x^2 - 2x - 7 - 1)}{(-1) (x+2) \left(x - \frac{1}{3} \right)^2 (x-4)} < 0, \\ x^2 - 4x - 11 > 0, \\ x^2 - 2x - 7 > 0. \end{array} \right.$$

Окончательно имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-6) (x+2)^2 (x-4)}{(x+2)^2 (x-1/3)^2 (x-4)} \geq 0, \\ x < 2 - \sqrt{15} \cup x > 2 + \sqrt{15}, \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup [6; \infty).$$

16. В области определения имеем:

$$\log_{4-x} (-x^2 + 5x + 4) = \log_{4-x} ((4-x)(x-1)) =$$

$$= 1 + \log_{4-x} (x-1) = 1 + \frac{1}{\log_{x-1} (4-x)},$$

$$\log_{10-x} (-x^2 + 6x + 40) = \log_{10-x} (10-x)(x+4) =$$

$$= 1 + \log_{10-x} (x+4) = 1 + \frac{1}{\log_{x+4} (10-x)}.$$

Поэтому исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} \frac{1 - \log_{x-1}(4-x))^2 \log_{x+4}(10-x)}{(1 - \log_{x+4}(10-x))^2 \log_{x-1}(4-x)} \leq 0, \\ \log_{x+4}(10-x) \neq 0, \end{cases}$$

в которой первое неравенство после замены множителей принимает вид:

$$\frac{((x-1) - (4-x))^2 (x-1-1)^2 ((10-x) - 1) (x+4-1)}{((x+4) - (10-x))^2 (x+4-1)^2 ((4-x) - 1) (x-1-1)} \leq 0.$$

С учетом области определения получаем:

$$\begin{cases} \frac{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 (x-2) (x-9)}{(x-3)^3} \leq 0, \Leftrightarrow \\ 1 < x < 4, \\ x \neq 2, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in (1; 2) \cup (3; 4) \cup x = \frac{5}{2}.$$

17. Выделяем и раскладываем на множители квадратные трехчлены относительно выражений $a = \sqrt{7 - \log_2 x^2}$, $b = \sqrt{7 + \log_2 x^2}$ в числителе и относительно $c = 5^{c^3 + 6x - 15}$ в знаменателе. В результате получим:

$$\frac{-2(a+2) \left(a - \frac{5}{2}\right) 3(b-3) \left(b + \frac{8}{3}\right)}{(c+15)(c-5)} \leq 0.$$

Т. к. $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c > 0$, то $a+2 > 0$, $b + \frac{8}{3} > 0$, $c+15 > 0$.

Поэтому исходное неравенство эквивалентно следующему неравенству:

$$\frac{\left(\sqrt{7 - \log_2 x^2} - \frac{5}{2}\right) (\sqrt{7 + \log_2 x^2} - 3)}{5^{c^3 + 6x - 15} - 5^1} \geq 0.$$

Заменяя множители, освобождаемся от корней (в числителе) и степеней (в знаменателе):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\left(7 - \log_2 x^2 - \frac{25}{3}\right) (7 + \log_2 x^2 - 9)}{x^2 + 6x - 15 - 1} \geq 0, \\ 7 - \log_2 x^2 \geq 0, \\ 7 + \log_2 x^2 \geq 0, \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\left(\frac{3}{4} - \log_2 x^2\right) (\log_2 x^2 - 2)}{(x+8)(x-2)} \geq 0, \\ 2^7 - x^2 \geq 0, \\ 2^7 \cdot x^2 - 1 \geq 0, \\ x \neq 0. \end{array} \right.$$

Вторично заменяя множители, освобождаемся от логарифмов:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(2^{3/4} - x^2) (x^2 - 2^2)}{(x+8) (x-2)} \geq 0, \\ -2^{7/2} \leq x \leq -2^{-7/2} \cup 2^{-7/2} \leq x \leq 2^{7/2}. \end{array} \right.$$

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
Глава I. Общие соображения о преобразовании неравенств. (Структура ответа. Рациональное неравенство, ему соответствующее. Возможность сведения типовых неравенств к рациональным.)	5
Глава II. Метод замены множителей. (Основная идея. Перечень некоторых видов заменяемых множителей. Примеры.)	9
Глава III. Замена знакопостоянных множителей. (Типы знакопостоянных множителей. Варианты замены. Примеры.)	11
Глава IV. Замена множителей с модулем. (Типы множителей. Примеры.)	13
Глава V. Замена множителей с иррациональными выражениями. (Типы множителей. Решение стандартных иррациональных неравенств. Примеры.)	16
Глава VI. Замена множителей с показательными и логарифмическими выражениями (Типы множителей. Решение стандартных неравенств и неравенств повышенной сложности. Примеры.)	21
Глава VII. Новые «стандартные» неравенств и схемы их решения. (Перечень традиционных типов неравенств повышенной сложности, переводимых в разряд стандартных. Примеры.)	25
Глава VIII. Сводная информация по методу замены множителей	27
Глава IX. 30 неравенств повышенной сложности. (Из группы «В» «Сборника задач по математике для поступающих во втузы» под ред. М. И. Сканави, М., Высш. шк., 1988.)	30

Глава X. Решение избранных неравенств конкурсных экзаменов.

(Из вариантов вступительных экзаменов по математике в МГУ им. М. В. Ломоносова.) 49

Приложение. Задачи для самостоятельного решения (с ответами и указаниями.) 82

ГОЛУБЕВ В. И., ТАРАСОВ В. А.

**Эффективные пути решения
неравенств**

Сдано в набор 28.08.91. Подписано к печати 30.12.91. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая с ФПФ. Усл. печ. л. 5,04. Усл. кр.-отт. 5,46. Тираж 30 000 экз. Зак. 1—2973. Цена 2 р. 80 к. (для подписчиков).

Журнал «Квантор». 292310, г. Нестеров, ул. Горького, 8.

Главное предприятие республиканского производственного объединения «Полиграфкнига». 252057, Киев, ул. Довженко, 3.

502

Уважаемый коллега!

Вы приобрели одну из книг первой серии учебно-методической литературы, издаваемой по инициативе Всесоюзной Ассоциации учителей математики фирмой «Квантор».

В 1992 году фирма выпускает вторую серию литературы для учителей математики. Серия содержит комплект дидактических материалов для организации индивидуальной и дифференцированной работы на уроках математики с 5 по 11 классы и методическое руководство по их использованию (15 книг).

Серия подготовлена совместно учителями-членами Ассоциации и сотрудниками лаборатории математического образования НИИ ОСО.

Дидактический материал для каждого класса включает в себя систему самостоятельных работ и набор материалов для контроля. Структура работ, специальная компоновка заданий, широкий диапазон в их уровне дают возможность школьнику работать в индивидуальном, наиболее комфортном для него режиме и достигать оптимальных для каждого результатов.

Контролирующая часть комплекта представляет собой набор тематических зачетов, позволяющих проверить подготовку ученика на образцовом и повышенном уровнях. Каждый зачет прилагается в четырех вариантах. К зачетам прилагаются тесты для самопроверки, которые учащиеся могут использовать при подготовке к зачету. В комплект для 10—11 классов включены пособия, ориентированные на преподавание математики в условиях как трех, так и пяти недельных часов.

Для оформления подписки следует перечислить 48 руб. на р/с фирмы «Квантор» 16102/468646 в Западно-Украинском коммерческом банке МФО 325622 в облуправлении Госбанка г. Львова и выслать заказ с указанием номера серии, Ф. И. О. заказчика, полного почтового адреса, номера и даты квитанции об оплате с указанием суммы перевода по адресу:

290053, г. Львов, а/я 5228, фирма «Квантор».

