

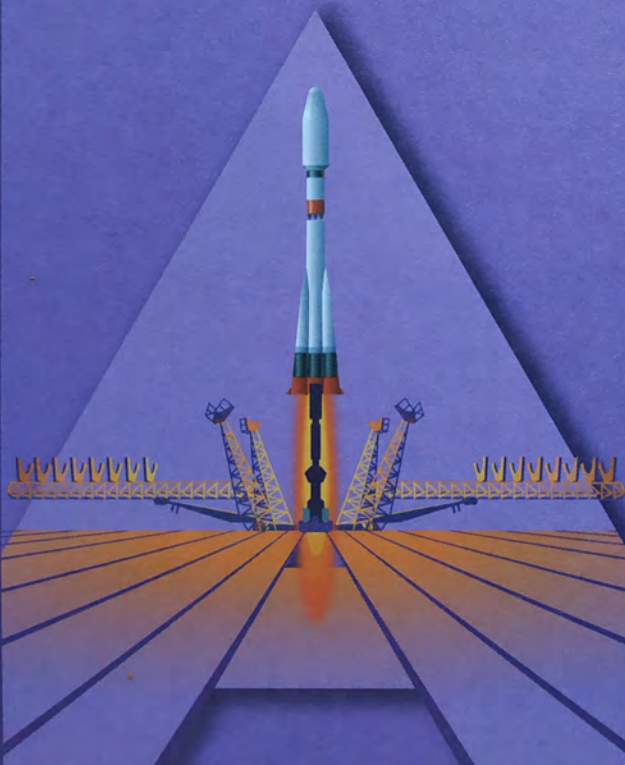
А. Г. Мордкович, П. В. Семенов,  
Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева

# АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

ЧАСТЬ 1

11  
КЛАСС



ИЗДАТЕЛЬСТВО

БИНОМ

А. Г. Мордкович  
П. В. Семенов  
Л. А. Александрова  
Е. Л. Мардахаева

**Математика:  
алгебра и начала  
математического  
анализа, геометрия.  
Алгебра и начала  
математического  
анализа  
Базовый уровень**

**11**

**КЛАСС**

**В двух частях**

**ЧАСТЬ 1**

**2-е издание, стереотипное**



МОСКВА  
БИНОМ. Лаборатория знаний  
2021

УДК 373:512  
ББК 22.14я72  
М79

**Авторы:** заслуженный деятель науки РФ, лауреат премии Президента РФ в области образования, доктор педагогических наук, профессор Московского городского педагогического университета *А. Г. Мордкович*; почётный работник высшего профессионального образования РФ, доктор физико-математических наук, профессор отдела математического образования НИУ ВШЭ *П. В. Семенов*; отличник народного просвещения, учитель математики высшей категории *Л. А. Александрова*; кандидат педагогических наук, доцент, заведующая лабораторией математики издательства «БИНОМ. Лаборатория знаний» *Е. Л. Мардахаева*.

**М79 Мордкович, А. Г.** Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа : базовый уровень : 11 класс. В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова, Е. Л. Мардахаева. — 2-е изд., стер. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2021. — 222, [2] с. : ил.

ISBN 978-5-9963-6378-0 (Ч. 1)

ISBN 978-5-9963-6380-3

Издание написано в соответствии с ФГОС и ПООП СОО. Изложение теоретического материала сопровождается подробным рассмотрением большого числа примеров, практические задания представлены на трёх уровнях сложности. В конце каждой главы представлены основные факты, вопросы и тест для самопроверки, дополнительные задачи и исторические сведения.

УДК 373:512  
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-9963-6378-0 (Ч. 1)  
ISBN 978-5-9963-6380-3

© ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2020  
© Оформление.  
© ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний», 2020  
Все права защищены



## Условные обозначения

**24.13.** Задачи базового уровня сложности

**24.14.** Задачи повышенного уровня сложности

**24.15.** Задачи высокого уровня сложности

**ИКТ** Материал может быть рассмотрен с помощью ИКТ-средств

Упражнения с общим заданием

**10.11**

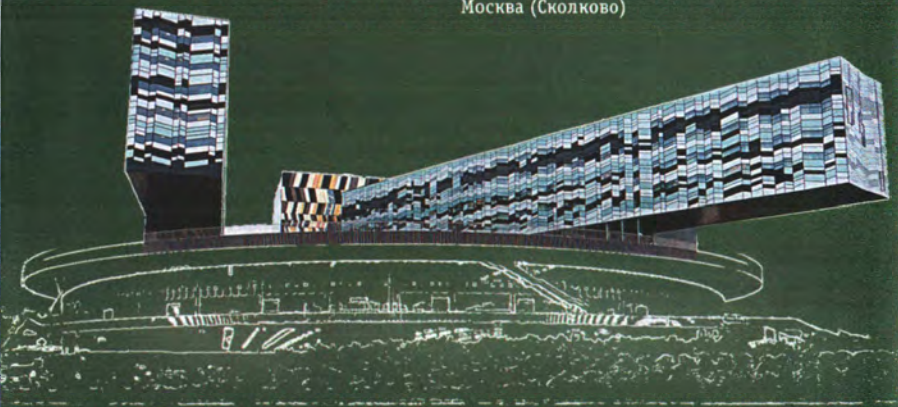
**10.12**

Окончание доказательства теоремы

Окончание решения примера



Московская школа управления  
или Российская бизнес-школа.  
Москва (Сколково)



- § 1. Предел числовой последовательности
- § 2. Арифметические операции над пределами числовых последовательностей
- § 3. Предел функции на бесконечности
- § 4. Предел функции в точке
- § 5. Приращение аргумента. Приращение функции

## Глава 1

# Элементы теории пределов

### § 1. Предел числовой последовательности

Большое значение для теории и практики имеет математическая дисциплина, известная под названием «Математический анализ», в основном занимающаяся изучением числовых функций. При этом, разумеется, изучается поведение каждой конкретной функции в целом, на всей области определения (*глобальный подход*), но большее внимание уделяется *анализу* того, как ведёт себя функция около той или иной точки (*локальный подход*). Математический анализ — составная часть курса высшей математики, изучаемого в высших учебных заведениях, а наша цель — познакомить вас с некоторыми элементами математического анализа, имеющими общекультурное значение. При этом мы не будем стремиться всё строго доказать (в школьном курсе математики сделать это практически невозможно), во многих случаях мы будем полагаться на визуальные представления и интуицию.

Тот *анализ*, о котором мы упомянули выше, связан с понятием предела. В этом параграфе речь пойдёт о том, что такое предел числовой последовательности.

С числовыми последовательностями вы познакомились в курсе алгебры 9-го класса. Напомним, что *числовой последовательностью* называют функцию натурального аргумента, т. е. функцию вида  $y = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{N}$ . Числовую последовательность обозначают или  $y = f(n)$ , или коротко  $(y_n)$ , или подробнее, выписывая несколько членов последовательности:  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$ .

Удобнее всего *аналитическое задание* последовательности, когда указана формула её  $n$ -го члена. Например, формулой  $y_n = n^2 + 1$  задаётся последовательность 2, 5, 10, 17, 26, ..., формулой  $y_n = \frac{1}{n}$  —

последовательность  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ , а формулой  $y_n = a + (n - 1)d$  —

арифметическая прогрессия  $a, a + d, a + 2d, \dots$  со знаменателем  $d$  и первым членом  $a$ .

Последовательность  $(y_n)$  называют *возрастающей*, если каждый её член больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_{n-1} < y_n < y_{n+1} < \dots$$

Последовательность  $(y_n)$  называют *убывающей*, если каждый её член меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > \dots > y_{n-1} > y_n > y_{n+1} > \dots$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином *монотонные последовательности*.

Например,

$3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots, 2n + 1, \dots$  — возрастающая последовательность,

$64, 32, 16, 8, 4, 2, \dots, \frac{64}{2^{n-1}}, \dots$  — убывающая последовательность;

а последовательность  $3, 64, 5, 32, 7, 16, 9, 8, 11, 4, 13, 2, \dots$  не является монотонной, она и не возрастающая, и не убывающая.

Познакомимся ещё с одним свойством числовых последовательностей.

**Определение 1.** Последовательность  $(y_n)$  называют **ограниченной сверху**, если существует число  $M$  такое, что для любого  $n$  выполняется неравенство  $y_n \leq M$ . Число  $M$  называют **верхней границей** последовательности. Последовательность  $(y_n)$  называют **ограниченной снизу**, если существует число  $m$  такое, что для любого  $n$  выполняется неравенство  $y_n \geq m$ . Число  $m$  называют **нижней границей** последовательности. Если последовательность ограничена и снизу, и сверху, то её называют **ограниченной последовательностью**.

Например,

— последовательность  $3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots, 2n + 1, \dots$  ограничена снизу (в качестве нижней границы можно взять число 3, как, впрочем, и любое число, меньшее, чем 3),

— последовательность  $64, 32, 16, 8, 4, 2, \dots, \frac{64}{2^{n-1}}, \dots$  ограничена

сверху (в качестве верхней границы можно взять число 64, как, впрочем, и любое число, большее чем 64).



Обратите внимание: последовательность  $64, 32, 16, 8, 4, 2, \dots, \frac{64}{2^{n-1}}, \dots$  ограничена и снизу, ведь все её члены больше нуля. Это —

ограниченная последовательность. А вот ещё один весьма показательный пример ограниченной последовательности:  $1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$ .

Итак, мы обсудили два достаточно простых свойства числовых последовательностей: монотонность и ограниченность. Более сложным является свойство сходимости, к обсуждению которого мы сейчас приступим. Для этого нам понадобится понятие окрестности точки.

**Определение 2.** Интервал  $(a - r; a + r)$ , где  $r > 0$ , называют **окрестностью точки  $a$** ; число  $r$  называют **радиусом окрестности**.

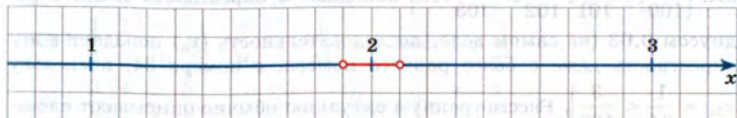
Например, на рисунке 1, *a* изображена окрестность точки 2 радиусом 0,1, а на рисунке 1, *б* — окрестность точки  $-3$  радиусом 1.

Рассмотрим две последовательности:

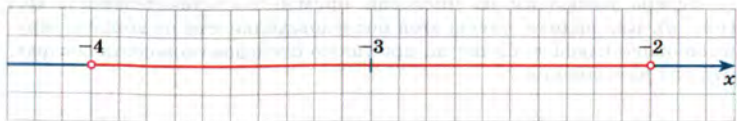
$$(x_n): -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots, (-1)^n \frac{1}{n}, \dots$$

$$(y_n): 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots, n, \dots$$

На рисунке 2 члены последовательности  $(x_n)$  изображены точками на числовой прямой. Обратите внимание: по мере увеличения номера члены последовательности всё ближе и ближе подходят к точке 0. Более точно: какую бы окрестность точки 0 ни выбрали, с некоторого



*a*



*б*

Рис. 1

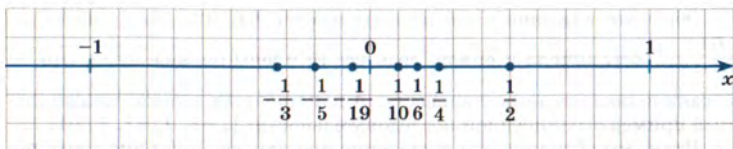


Рис. 2

номера все члены последовательности попадут в выбранную окрестность. Пусть, например, радиус окрестности равен  $0,1$ , т. е. речь идёт об интервале  $(-0,1; 0,1)$ . Все члены последовательности, начиная с одиннадцатого, принадлежат выбранной окрестности:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{11} &\in (-0,1; 0,1), & \frac{1}{12} &\in (-0,1; 0,1), \\ -\frac{1}{13} &\in (-0,1; 0,1), & \frac{1}{14} &\in (-0,1; 0,1), \dots \end{aligned}$$

Другой пример: радиус окрестности равен  $0,03$ , т. е. речь идёт об интервале  $(-0,03; 0,03)$ . Ясно, что  $0,01 < 0,03$ , т. е.  $\frac{1}{100}$  принадлежит

интервалу  $(-0,03; 0,03)$ . Начиная с  $\frac{1}{100}$ , все члены последовательно-

сти  $\left(\frac{1}{100}, -\frac{1}{101}, \frac{1}{102}, -\frac{1}{103}, \dots\right)$  попадают в окрестность точки  $0$  ра-

диусом  $0,03$  (на самом деле, последовательность  $(x_n)$  попадает в эту окрестность даже с более раннего номера, с номера  $34$ , поскольку

$x_{34} = \frac{1}{34} < \frac{3}{100}$ ). Рассмотренную ситуацию обычно описывают слова-

ми так: последовательность  $(x_n)$  *сходится к числу  $0$* .

Теперь изобразим на числовой прямой последовательность  $(y_n)$  (рис. 3). Как видите, члены этой последовательности не концентрируются около какой-либо точки, про такую последовательность говорят, что она *расходится*.

**Определение 3.** Число  $b$  называют **пределом последовательности**  $(x_n)$ , если в любой окрестности точки  $b$  содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера.

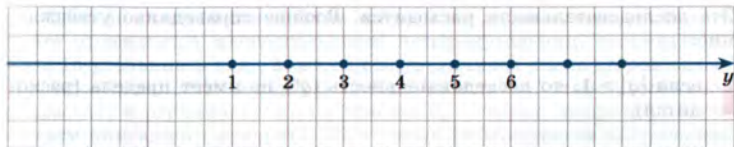


Рис. 3

В этом случае пишут:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$  и говорят: *предел последовательности ( $x_n$ ) равен  $b$* . Правильнее было бы добавлять ещё и слова «при стремлении  $n$  к бесконечности», но их, как правило, опускают, ведь уже записано, что  $n \rightarrow \infty$ . Используют и такую запись:  $x_n \rightarrow b$  и говорят: *последовательность ( $x_n$ ) сходится к  $b$* .

Для рассмотренной выше последовательности ( $x_n$ ) имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0.$$

**Определение 4.** Если последовательность имеет предел, то её называют **сходящейся**; если последовательность не имеет предела, то говорят, что последовательность **расходится**.

Приведём примеры сходящихся последовательностей:

1)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$  Имеет место равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ ;

2)  $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \frac{1}{36}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$  Здесь  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ ;

3)  $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots, \frac{n+1}{n}, \dots$  Здесь  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ ;

4) для стационарной последовательности  $c, c, c, \dots, c, \dots$ , имеет место равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ ;

5)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \left(\frac{1}{2}\right)^n, \dots$  Здесь  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ .

Вообще, если  $|q| < 1$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ .

А что будет с последовательностью ( $q^n$ ), если  $|q| > 1$ ? Пусть, например,  $q = 2$ , т. е. речь идёт о последовательности  $2, 4, 8, 16, \dots$ .



Эта последовательность расходится. Вообще справедливо утверждение:

если  $|q| > 1$ , то последовательность  $(q^n)$  не имеет предела (расходится).

Мы рассмотрели лишь простейшие случаи вычисления пределов, о более сложных случаях поговорим в следующем параграфе.

Сходящиеся последовательности обладают рядом свойств. Мы дадим лишь формулировки этих свойств.

1. Если последовательность сходится, то только к одному пределу.

2. Если последовательность сходится, то она ограничена.

Заметим, что обратное утверждение неверно; например, 1, 2, 3, 1, 2, 3, ..., 1, 2, 3 — ограниченная последовательность, но она не имеет предела (расходится). А вот если последовательность не только ограничена, но и монотонна, то она сходится.

3. Если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится (теорема Вейерштрасса<sup>1</sup>).

Приведём классические примеры из геометрии, в которых используется теорема Вейерштрасса.

1) Возьмём окружность и будем последовательно вписывать в неё правильные многоугольники: четырёхугольник, восьмиугольник, 16-угольник и т. д., каждый раз увеличивая число сторон вдвое. Последовательность площадей этих правильных многоугольников возрастает и ограничена: снизу числом 0, а сверху, например, числом, равным площади описанного около окружности квадрата. По теореме Вейерштрасса построенная последовательность сходится, её предел принимается за площадь  $S$  круга. Именно с помощью таких рассуждений и доказывают формулу площади круга  $S = \pi r^2$  (установлено, что  $\pi r^2$  — предел последовательности площадей вписанных в окружность радиусом  $r$  правильных многоугольников).

<sup>1</sup> Карл Вейерштрасс (1815—1897) — немецкий математик.

2) Снова возьмём окружность и будем последовательно вписывать в неё правильные многоугольники: четырёхугольник, восьмиугольник, 16-угольник и т. д., каждый раз увеличивая число сторон вдвое. Последовательность периметров этих вписанных многоугольников возрастает и ограничена: снизу числом 0, а сверху, например, периметром описанного квадрата. По теореме Вейерштрасса построенная последовательность сходится, её предел принимается за длину  $L$  окружности. Именно с помощью таких рассуждений и доказывают формулу  $L = 2\pi r$ .

## Упражнения

По заданной формуле  $n$ -го члена последовательности вычислите первые пять её членов.

**1.1.** а)  $y_n = 5n - 3$ ; г)  $y_n = 4 - 7n$ ;  
 б)  $x_n = (-1)^n \cdot (n^2 - 2n)$ ; д)  $x_n = (-1)^{n+1} \cdot (n^2 + 3n)$ ;  
 в)  $a_n = \frac{3n - 1}{n^2}$ ; е)  $a_n = \frac{2n - 1}{n}$ .

**1.2.** а)  $y_n = \sin \frac{\pi n}{2}$ ;  
 б)  $x_n = \operatorname{tg} \left( (-1)^{n+1} \frac{\pi n}{4} \right)$ ;  
 в)  $a_n = \frac{1}{n} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{n!}$ ;  
 г)  $y_n = \cos \pi n$ ;  
 д)  $x_n = \operatorname{ctg} \left( (-1)^n \frac{\pi n}{4} \right)$ ;  
 е)  $a_n = \frac{1}{n} + n(n+1)(n+2)$ .

**1.3.** Выпишите первые пять членов последовательности десятичных приближений:

а) числа  $\sqrt{3}$  по недостатку; г) числа  $\sqrt{5}$  по избытку;  
 б) числа  $\pi$  по избытку; д) числа  $e$  по недостатку;  
 в) числа  $\lg 3$  по недостатку; е) числа  $\lg 3$  по избытку.

**1.4.** Составьте одну из возможных формул  $n$ -го члена последовательности:

а) 4, 8, 12, 16, 20, ...;

г) 6, 12, 18, 24, 30, ...;

б) 2, 5, 10, 17, 26, ...;

д) 0, 3, 8, 15, 24, ...;

в)  $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ ;

е)  $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, -\frac{5}{6}, \dots$ .

**1.5.** Является ли последовательность возрастающей:

а)  $y_n = 8 - 4(6 - n)$ ;

г)  $y_n = 4 - 3(n - 2)$ ;

б)  $y_n = -\frac{n}{n+3}$ ;

д)  $y_n = \frac{n-3}{n}$ ;

в)  $a_n = 8 \cdot 0,8^{n+1}$ ;

е)  $x_n = \lg(n+2)$ ?

**1.6.** Является ли последовательность  $(y_n)$  убывающей:

а)  $y_n = \sqrt{6-n}$ ;

г)  $y_n = -\sqrt{n+2}$ ;

б)  $y_n = \frac{n}{n+1}$ ;

д)  $y_n = \frac{n+1}{n}$ ;

в)  $x_n = \log_{0,1}(n+1)$ ;

е)  $a_n = 0,2 \cdot 4^{n-1}$ ?

**1.7.** Является ли последовательность ограниченной сверху:

а)  $y_n = 3 + 2(n+2)$ ;

г)  $y_n = 12(2-n) + 11$ ;

б)  $x_n = 2 \cdot 0,4^{n+1}$ ;

д)  $x_n = 5 \cdot 0,3^n$ ;

в)  $a_n = n(n-7)$ ;

е)  $a_n = n(10-n)$ ?

**1.8.** Является ли последовательность ограниченной снизу:

а)  $y_n = \frac{3}{n-1}$ ;

г)  $y_n = -\frac{4}{n+1}$ ;

б)  $x_n = \sqrt{n-2}$ ;

д)  $x_n = \log_2(n+1)$ ;

в)  $a_n = 4 \cdot 2,2^n$ ;

е)  $a_n = n^2 + 4n - 5$ ?

**1.9.** Дана последовательность  $y_n = \frac{2n+1}{n-1}$ . Укажите верные утвер-

ждения и обоснуйте свой выбор:

1) последовательность ограничена сверху;

2) последовательность является убывающей;

3) последовательность ограничена снизу;

4) последовательность является возрастающей.

**1.10.** Дана последовательность  $y_n = \frac{3n-2}{n+1}$ . Укажите верные утвер-

ждения и обоснуйте свой выбор:

1) последовательность ограничена сверху;

2) последовательность является убывающей;



3) последовательность ограничена снизу;

4) последовательность является возрастающей.

**1.11.** Найдите натуральные решения неравенства:

а)  $\frac{1}{5^n} < c$ , если  $c = 0,01$ ;

г)  $\frac{1}{3^n} < c$ , если  $c = 0,01$ ;

б)  $\frac{1}{2^n} < c$ , если  $c = 0,1$ ;

д)  $\frac{1}{4^n} < c$ , если  $c = 0,1$ ;

в)  $\frac{1}{3^n} < c$ , если  $c = 0,001$ ;

е)  $\frac{1}{5^n} < c$ , если  $c = 0,001$ .

**1.12.** Дана последовательность  $y_n = \frac{1}{n}$ .

а) Постройте график последовательности.

б) Докажите, что последовательность убывает.

в) Докажите, что последовательность ограничена снизу.

г) Найдите  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

**1.13.** Дана последовательность  $y_n = \frac{1}{3^n}$ .

а) Постройте график последовательности.

б) Докажите, что последовательность убывает.

в) Докажите, что последовательность ограничена снизу.

г) Найдите  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

**1.14.** Найдите наименьшее натуральное значение  $n$ , начиная с которого все члены указанной последовательности лежат в указанной окрестности точки 0, и выскажите предположение о том, чему равен предел последовательности:

а)  $y_n = \frac{2}{n}$ ,  $(-0,2; 0,2)$ ;

г)  $y_n = \frac{3}{n}$ ,  $(-0,3; 0,3)$ ;

б)  $y_n = \frac{1}{n+2}$ ,  $(-0,1; 0,1)$ ;

д)  $y_n = \frac{2}{n+2}$ ,  $(-0,5; 0,5)$ ;

в)  $y_n = \frac{2}{n^2+1}$ ,  $(-0,5; 0,5)$ ;

е)  $y_n = \frac{1}{n^2-1}$ ,  $(-0,1; 0,1)$ .

Найдите наименьшее натуральное значение  $n$ , начиная с которого все члены указанной последовательности лежат в интервале  $(-0,01; 0,01)$ , и выскажите предположение о том, чему равен предел последовательности.

**1.15.** а)  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n^2 + 2}$ ;

г)  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{2}{(n+2)^2 + 2}$ ;

б)  $a_n = \frac{5}{2^{n+1}}$ ;

д)  $a_n = \frac{2}{5^n}$ ;

в)  $a_n = (-1)^n \frac{4}{3^n}$ ;

е)  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{6}{10^n}$ .

**1.16.** а)  $b_n = \frac{2}{\sqrt{n} + 2}$ ;

в)  $b_n = \frac{3}{\sqrt{n} + 3}$ ;

б)  $b_n = (-1)^n \frac{2}{\sqrt{n}}$ ;

г)  $b_n = (-1)^{n+1} \frac{3}{\sqrt{n}}$ .

## Упражнения для повторения

**ИКТ 1.17.** Решите уравнение и найдите его корни на указанном отрезке:

а)  $2\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1, x \in \left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ ;

б)  $\sqrt{2}\sin^2\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) = \cos x, x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$ ;

в)  $2\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}, x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$ ;

г)  $2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ .

**1.18.** Постройте и прочитайте график функции:

а)  $y = 0,5x - 3 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ ;

в)  $y = \frac{1}{3}x + 3 - 2\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$ ;

б)  $y = \frac{\sqrt{x}}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x}$ ;

г)  $y = \frac{\sqrt{x+4}}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x}$ .

**1.19.** Решите неравенство:

а)  $(x^2 - 2x - 4)(x - 2)^2 \geq 0$ ;

в)  $(x^2 + 4x - 3)(x - 5)^2 \leq 0$ ;

б)  $\frac{x^2 - 8x + 11}{(x - 5)^2} \leq 0$ ;

г)  $\frac{(x - 4)^2}{x^2 - 6x + 7} \geq 0$ .

**1.20.** Вычислите:

а)  $\frac{\log_5 0,5}{\log_5 32 - \log_5 4}$ ;

в)  $\frac{\log_2 1,5}{\log_8 7,5 + \log_8 0,3}$ ;

б)  $\frac{\log_4 75 - \log_2 5}{\log_4 18 + \log_4 0,5}$ ;

г)  $\frac{\log_4 27 - 2\log_4 3}{\log_4 30 + \log_4 0,3}$ .

## § 2. Арифметические операции над пределами числовых последовательностей

В предыдущем параграфе мы отметили следующие соотношения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \text{ если } |q| < 1.$$

Для вычисления пределов последовательностей в более сложных случаях используются указанные соотношения и следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

**Теорема 1.** Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$ , то

1) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = b + c;$$

2) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = bc;$$

3) предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{b}{c}, \quad c \neq 0;$$

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (kx_n) = kb.$$



**Пример** Вычислить:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3}$ ; б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^4}$ ; в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7}{n} - \frac{2}{n^7} + 3 \right)$ ; г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 5}$ .

**Решение.** а) Имеем:  $\frac{1}{n^3} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ . Применяв правило «предел произведения», получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

б)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 3 \cdot \frac{1}{n^4} \right) = 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \\ &= 3 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Вообще для любого натурального показателя  $m$  и любого коэффициента  $k$  справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n^m} = 0.$$

в) Применяв правило «предел суммы», получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{7}{n} - \frac{2}{n^7} + 3 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^7} + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 0 - 0 + 3 = 3.$$

г) Разделим числитель и знаменатель дроби  $\frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 5}$  почленно на  $n^2$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n - 1}{n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2}{n^2} + \frac{3n}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + \frac{5}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{5}{n^2}}.$$

А теперь смотрите: предел числителя равен 2, предел знаменателя 1, значит, предел дроби равен  $\frac{2}{1}$ , т. е. равен 2.

**Ответ:** а) 0; б) 0; в) 3; г) 2.

**Теорема 2.** Если знаменатель  $q$  геометрической прогрессии  $(b_n)$  удовлетворяет неравенству  $|q| < 1$ , то сумма  $S$  прогрессии вычисляется по формуле  $S = \frac{b_1}{1-q}$ .

Этой формулой мы уже пользовались в курсе алгебры 9-го класса. Но тогда она была получена на основе правдоподобных рассуждений, а теперь мы можем эту формулу доказать.

**Доказательство.** Под суммой  $S$  геометрической прогрессии  $b_1, b_2, b_3, \dots$  понимается  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ , где  $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ . Напомним формулу суммы первых  $n$  членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Пользуясь теоремой 1, вычислим  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ :

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1}{q - 1} \cdot (q^n - 1) = \\ &= \frac{b_1}{q - 1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (q^n - 1) = \frac{b_1}{q - 1} (0 - 1) = \frac{b_1}{1 - q}. \end{aligned}$$

Итак,  $S = \frac{b_1}{1-q}$ , что и требовалось доказать.

## Приложение к § 2

### Задача о непрерывных процентах

В 10-м классе, используя наглядные представления о проведении касательной к графику функции, мы познакомились с числом  $e$  и с экспоненциальной функцией  $y = e^x$ , которые играют важную роль в математике. Познакомим вас с задачей о так называемых *непрерывных процентах*.

Допустим, что банк даёт  $p\%$  годовых, например, в рублях. Это означает, что, положив в банк  $S$  р., через год вы получите сум-

му  $\left(S + \frac{p}{100}S\right)$  р. Обозначим  $x = \frac{p}{100}$ . Итак, было  $S$  р., через год стало  $(1+x)S$  р.

Допустим, что по договору проценты можно получать каждые полгода и переоформлять вклад на тех же условиях. Тогда через первые полгода получится сумма  $\left(1 + \frac{x}{2}\right)S$  р. Если всю сумму перевалить ещё на полгода, то в итоге через год на счёте будет

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(\left(1 + \frac{x}{2}\right)S\right) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 S \text{ р.}$$

Это больше, чем просто за год, так как

$$\left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 = 1 + x + \frac{x^2}{4} > 1 + x.$$

Если проценты можно получать каждые четыре месяца, т. е. три раза за год, то в итоге получится

$$\left(1 + \frac{x}{3}\right)\left(1 + \frac{x}{3}\right)\left(1 + \frac{x}{3}\right)S = \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 S \text{ р.}$$

Это больше, чем при выплатах каждые полгода:

$$\left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 = 1 + 3 \cdot \frac{x}{3} + 3 \cdot \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} > 1 + x + \frac{x^2}{4}.$$

При получении процентов каждый квартал, т. е. 4 раза в год, итоговая сумма снова увеличится. Она станет равной  $\left(1 + \frac{x}{4}\right)^4 S$  р., и можно проверить, что  $\left(1 + \frac{x}{4}\right)^4 > \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3$ . А если представить, что проценты можно получать ежедневно, то за год наберётся сумма  $\left(1 + \frac{x}{365}\right)^{365} S$  р. При этом

$$1 + x < \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 < \left(1 + \frac{x}{3}\right)^3 < \left(1 + \frac{x}{4}\right)^4 < \dots < \left(1 + \frac{x}{365}\right)^{365} < \dots$$

Казалось бы, увеличивая частоту получения процентов, т. е. получая их или каждый час, или каждую минуту и т. п., можно неограниченно увеличивать общий годовой итог  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n S$ . Оказывается, эта неограниченность — иллюзия. На самом деле возрастающая последовательность  $y_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ , где  $x > 0$ , ограничена сверху и, как всякая монотонная ограниченная последовательность, имеет предел (см. свойство 3 в § 1). Интересно, что предел этой последовательности равен как раз значению экспоненциальной функции в точке  $x$ . И это верно для любых, не только положительных значений  $x$ .

**Теорема 3 (второй замечательный предел).** Для любого  $x \in \mathbb{R}$  выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

В частности,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828182845\dots$

Почему предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$  назван *вторым* замечательным пределом? Потому что существует и *первый замечательный предел*, с которым вы познакомитесь в § 4.

## Упражнения

Вычислите  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

2.1. а)  $x_n = \frac{2}{3^n}$ ;

г)  $x_n = \frac{5}{4^n}$ ;

б)  $x_n = \frac{11}{2^n - 1}$ ;

д)  $x_n = \frac{9}{5^n + 1}$ ;

в)  $x_n = 3 \cdot 4^{1-n}$ ;

е)  $x_n = 6 \cdot 3^{-n-1}$ .



**2.2.** а)  $x_n = \frac{5n+2}{n+1}$ ;

г)  $x_n = \frac{2n+1}{n+3}$ ;

б)  $x_n = \frac{8n+5}{n-3}$ ;

д)  $x_n = \frac{7n+4}{n-2}$ ;

в)  $x_n = \frac{3n+1}{2n+3}$ ;

е)  $x_n = \frac{4n-3}{3n+1}$ .

**2.3.** а)  $x_n = \frac{n^2+2}{n^2}$ ;

г)  $x_n = \frac{n^2-11}{n^2}$ ;

б)  $x_n = \frac{4-4n+n^2}{n^2}$ ;

д)  $x_n = \frac{5n-4-2n^2}{n^2}$ ;

в)  $x_n = \frac{2n^3+n^2+1}{n^3}$ ;

е)  $x_n = \frac{4n^3-3n^2+n}{n^3}$ .

**2.4.** а)  $x_n = \frac{(3n+1)(2n-3)}{n^2}$ ;

г)  $x_n = \frac{(2n-5)(4n+3)}{n^2}$ ;

б)  $x_n = \frac{(4n+3)(n-2)}{(n+1)^2}$ ;

д)  $x_n = \frac{(5n-4)(2n-3)}{(n-3)^2}$ ;

в)  $x_n = \frac{(2n+3)(4-n)}{(n-1)^2}$ ;

е)  $x_n = \frac{(4n-1)(2-3n)}{(n-2)^2}$ .

**2.5.** а)  $x_n = \frac{(4n-1)(2n+5)-8n^2-10n}{n-3}$ ;

б)  $x_n = \frac{n^2(2n+5)-n(2n^2+5n)-13}{n(n+1)(n-7)-(n-1)}$ ;

в)  $x_n = \frac{n^3-(n-1)(n^2+1)}{n^2+2n}$ ;

г)  $x_n = \frac{(3n-2)(2n-3)-6n^2+20n}{n+2}$ ;

д)  $x_n = \frac{n(n^2-3)-n(n^2-7)-1}{(n+1)(n+2)+(2n^2+1)}$ ;

е)  $x_n = \frac{(2n-1)(n^2+1)-2n^3}{n^2-3n}$ .

**2.6.** Докажите справедливость равенства:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = -1$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + 2} = 1$ .

**2.7.** Имеет ли последовательность, заданная формулой  $n$ -го члена, предел:

а)  $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}$ ;

в)  $a_n = \frac{(-1)^n}{2n^2}$ ;

б)  $a_n = \frac{5 + (-1)^n}{n^4}$ ;

г)  $a_n = \frac{(-1)^n - 3}{12}$ ?

**2.8.** а) Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 2, а сумма первых трёх членов этой прогрессии 1,75. Чему равен первый член этой прогрессии?

б) Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 0,8, а сумма квадратов первых двух членов этой прогрессии равна  $\frac{5}{16}$ . Чему равен знаменатель этой прогрессии?

**2.9.** Найдите сумму:

а)  $\sin \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{6} + \sin^3 \frac{\pi}{6} + \dots + \sin^n \frac{\pi}{6} + \dots$ ;

б)  $\cos \frac{\pi}{3} - \cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^3 \frac{\pi}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \cos^n \frac{\pi}{3} + \dots$ .

## Упражнения для повторения

**2.10.** Решите неравенство:

а)  $6^x + 6^{x+2} \leq 222$ ;

б)  $3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2x} - 10 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x + 3 < 0$ ;

в)  $5^{2x} < 3^x$ ;

г)  $7^{x+1} - 7^x \geq 294$ ;

д)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} - 26 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^x + 5 > 0$ ;

е)  $4^x > \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$ .

**2.11.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} 4, & \text{если } x \leq -3, \\ x + 2, & \text{если } -3 < x \leq 2, \\ -x^2 + 5, & \text{если } -3 < x \leq 2, \\ \log_2 x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$

- а) Вычислите:  $f(-4)$ ;  $f(-3)$ ;  $f(-2)$ ;  $f(2)$ ;  $f(8)$ ;  
 б) постройте график функции;  
 в) прочитайте график функции;  
 г) найдите значения параметра  $p$ , при которых уравнение  $f(x) = p$  имеет единственный корень.

**2.12.** а) Дано:  $\cos t = -\frac{12}{13}$ ,  $\frac{13\pi}{2} < t < 7\pi$ . Вычислите:  $\cos(-t) - \sin(-t)$ .

б) Дано:  $\sin t = \frac{7}{25}$ ,  $16\pi < t < \frac{33\pi}{2}$ . Вычислите:  $\cos(-t) + \sin(-t)$ .

**2.13.** Решите уравнение:

а)  $\log_3(2 + \log_2(x + 2)) = 0$ ;      в)  $\log_5(\lg(x + 1)) = 0$ ;  
 б)  $\log_{\frac{1}{3}}(1 + \log_2(2^x - 7)) = -1$ ;      г)  $\log_{\frac{1}{4}}(1 + \log_3(3^x - 54)) = -1$ .

### § 3. Предел функции на бесконечности

На рисунке 4 изображён график функции  $y = f(x)$ , прямая  $y = b$  является горизонтальной асимптотой графика функции при  $x \rightarrow +\infty$ . В подобных случаях используют короткую запись:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  (читают: *предел функции  $y = f(x)$  при стремлении  $x$  к плюс бесконечности равен  $b$* ).

На рисунке 5 изображён график показательной функции  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ , у него есть горизонтальная асимптота  $y = 0$  (при  $x \rightarrow +\infty$ ). Это значит, что справедливо соотношение  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ .

На рисунке 6 изображён график функции  $y = f(x)$ , прямая  $y = b$  является горизонтальной асимптотой графика функции при  $x \rightarrow -\infty$ . В подобных случаях используют короткую запись:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  (читают: *предел функции  $y = f(x)$  при стремлении  $x$  к минус бесконечности равен  $b$* ).

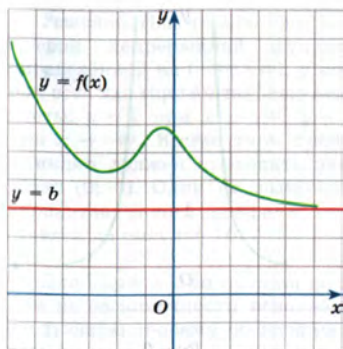


Рис. 4

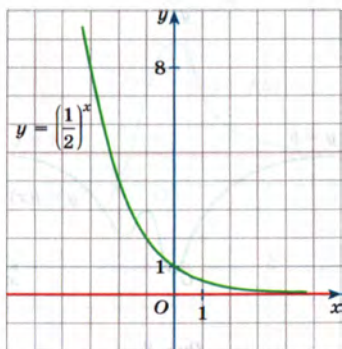


Рис. 5

На рисунке 7 изображён график показательной функции  $y = e^x$  (экспонента). У него есть горизонтальная асимптота  $y = 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Это значит, что справедливо соотношение  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ .

Если для функции  $y = f(x)$  одновременно выполняются соотношения  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  и  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ , то их можно объединить одной запи-

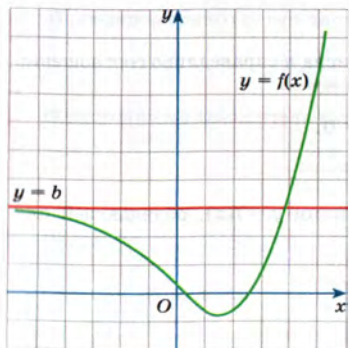


Рис. 6

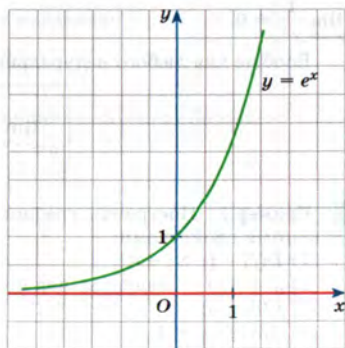


Рис. 7



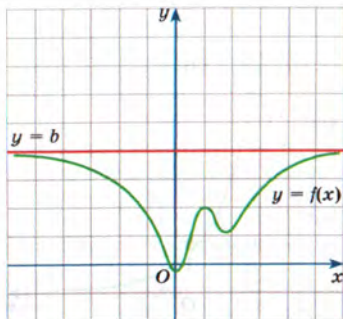


Рис. 8

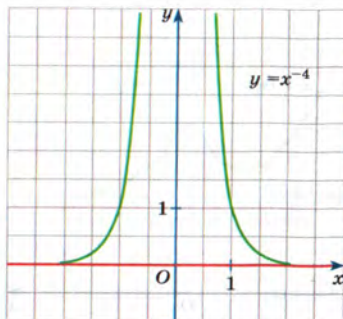


Рис. 9

сью:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$  (читают: *предел функции  $y = f(x)$  при стремлении  $x$  к бесконечности равен  $b$* ). В этом случае у графика функции  $y = f(x)$  имеется горизонтальная асимптота  $y = b$  и при  $x \rightarrow +\infty$ , и при  $x \rightarrow -\infty$  (рис. 8).

На рисунке 9 изображён график степенной функции  $y = x^{-4}$ , у него есть горизонтальная асимптота  $y = 0$  (и при  $x \rightarrow +\infty$ , и при  $x \rightarrow -\infty$ ). Это значит, что справедливо соотношение  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-4} = 0$ , т. е.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4} = 0.$$

Вообще для любого натурального числа  $n$  справедливо соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

**Пример 1** Построить график функции  $y = f(x)$ , обладающей следующими свойствами:

- 1)  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ;
- 2)  $y = f(x)$  — непрерывная функция;
- 3)  $f(0) = 5$ ;
- 4)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ;
- 5)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$ .

**Решение.** Нам нужно построить график непрерывной функции, определённой на  $(-\infty; +\infty)$ , у которой есть две горизонтальные асимптоты:  $y = 1$  при  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y = -3$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Кроме того, график функции должен проходить через точку  $(0; 5)$ . Один из возможных вариантов такого графика представлен на рисунке 10.

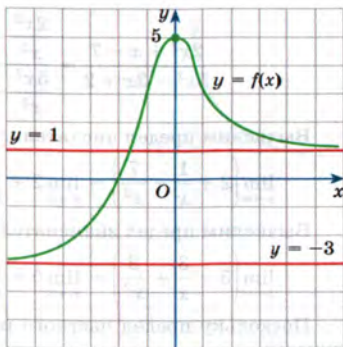


Рис. 10

Для вычисления предела функции на бесконечности используют следующую теорему об арифметических операциях над пределами (приводим её без доказательства).

**Теорема.** Если  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = c$ , то:

а) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = b + c;$$

б) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c;$$

в) предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c} \quad (c \neq 0);$$

г) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} k f(x) = k b.$$

**Пример 2** Вычислить:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 7}{5x^2 - 3x + 2}.$

**Решение.** Выполним некоторые преобразования алгебраической дроби  $\frac{2x^2 + x - 7}{5x^2 - 3x + 2}$ . Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на  $x^2$ :

$$\frac{2x^2 + x - 7}{5x^2 - 3x + 2} = \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{7}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \frac{2 + \frac{1}{x} - \frac{7}{x^2}}{5 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}.$$

Вычислим предел числителя:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 + \frac{1}{x} - \frac{7}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x^2} = 2 + 0 - 0 = 2.$$

Вычислим предел знаменателя:

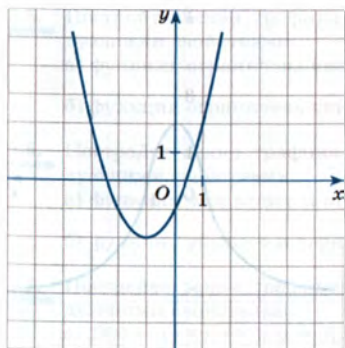
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 5 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2} = 5 - 0 + 0 = 5.$$

Поскольку предел частного равен частному пределов, в итоге получаем:

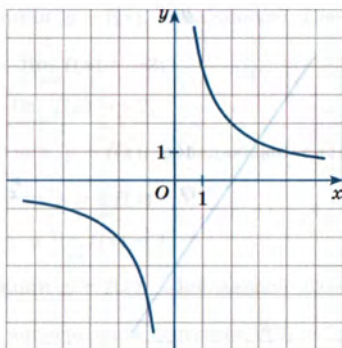
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x - 7}{5x^2 - 3x + 2} = \frac{2}{5}.$$

## Упражнения

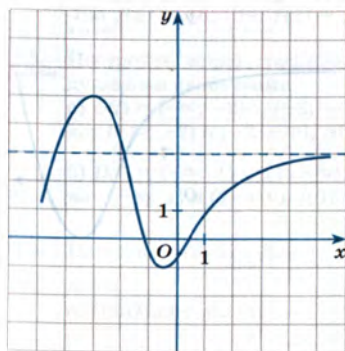
- 3.1.** Имеет ли функция  $y = f(x)$  предел при  $x \rightarrow +\infty$ , при  $x \rightarrow -\infty$  или при  $x \rightarrow \infty$  и чему он равен, если:
- прямая  $y = -5$  является горизонтальной асимптотой графика функции на луче  $[-8; +\infty)$ ;
  - прямая  $y = 4$  является горизонтальной асимптотой графика функции на луче  $(-\infty; -2]$ ;
  - прямая  $x = 2$  является вертикальной асимптотой графика функции, а прямая  $y = 0$  является горизонтальной асимптотой графика функции на луче  $[3; +\infty)$ ;
  - прямая  $y = 5$  является горизонтальной асимптотой графика функции на луче  $(-\infty; 4]$ ;
  - прямая  $y = -4$  является горизонтальной асимптотой графика функции на луче  $[6; +\infty)$ ;
  - прямая  $x = -3$  является вертикальной асимптотой графика функции?
- 3.2.** Распределите функции, графики которых изображены на рисунке 11,  $a > 3$ , на четыре группы:
- не имеют предела ни при  $x \rightarrow +\infty$ , ни при  $x \rightarrow -\infty$ ;
  - имеют предел при  $x \rightarrow +\infty$ ;
  - имеют предел при  $x \rightarrow -\infty$ ;
  - имеют предел при  $x \rightarrow \infty$ .



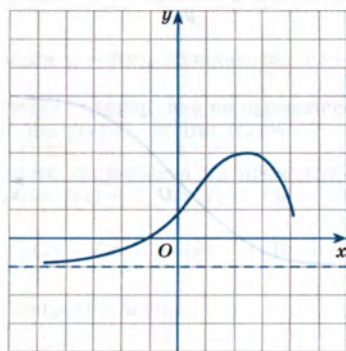
а



б



в



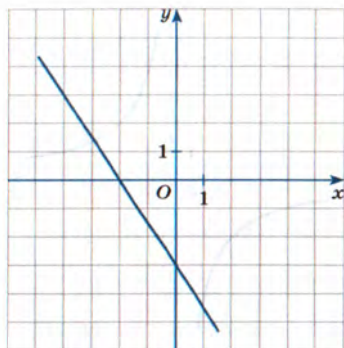
г

Рис. 11 (начало)

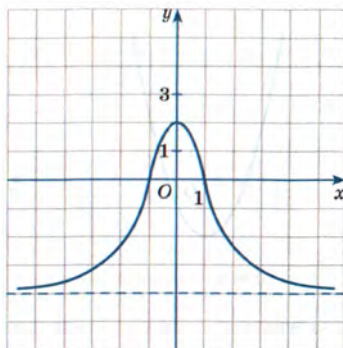
**3.3.** Постройте эскиз графика функции  $y = f(x)$ , обладающей следующими свойствами:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$  и  $f(x) \geq 0$  на  $(-\infty; +\infty)$ ;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$  и  $f(x) < 0$  на  $(-\infty; +\infty)$ .

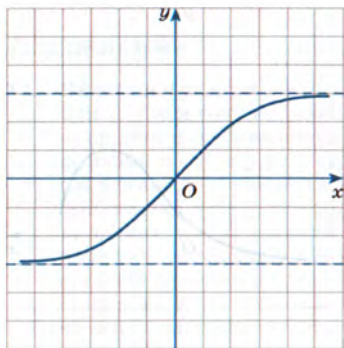




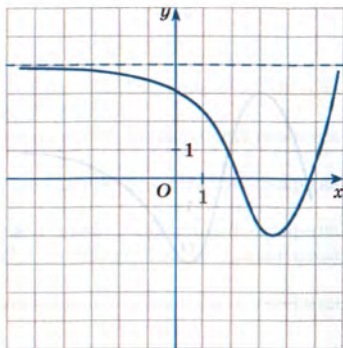
д



е



ж



з

Рис. 11 (окончание)

**3.4.** Постройте эскиз графика функции  $y = f(x)$ , обладающей следующими свойствами:

а) функция убывает и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$ ;

б) функция возрастает и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$ .

**3.5.** Постройте эскиз графика функции  $y = f(x)$ , обладающей следующими свойствами:

а) функция ограничена сверху и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ ;

б) функция ограничена снизу и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ .

**3.6.** Постройте эскиз графика функции  $y = f(x)$ , обладающей следующими свойствами:

а) функция возрастает и ограничена и  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ ;

б) функция убывает и ограничена и  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ .

**3.7.** Постройте эскиз графика функции  $y = f(x)$ , обладающей следующими свойствами:

а)  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ,  $y = f(x)$  — непрерывная функция,  $f(0) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ;

б)  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ,  $y = f(x)$  — непрерывная функция,  $f(0) = -4$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -6$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ .

**3.8.** Постройте эскиз графика функции  $y = f(x)$ , обладающей следующими свойствами:

а)  $D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ , функция непрерывна на промежутках  $(-\infty; -2)$  и  $(-2; +\infty)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ ;

б)  $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ , функция непрерывна на промежутках  $(-\infty; 1)$  и  $(1; +\infty)$ ,  $f(0) = -3$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ .

**3.9.** Известно, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -3$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 2$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 6$ . Вычислите:

а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x))$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(x) - h(x))$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \cdot g(x))$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (3g(x) - f(x))$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) + g(x)}{h(x)}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4f(x)}{h(x) + g(x)}$ .

**3.10.** Постройте график данной функции и установите, имеет ли она предел при  $x \rightarrow +\infty$  или при  $x \rightarrow -\infty$ :

а)  $y = 2^x$ ;

г)  $y = 2^{-x}$ ;

б)  $y = 2^{1-2x}$ ;

д)  $y = 2^{2x-1}$ ;

в)  $y = 2^{2-\frac{1}{2}x}$ ;

е)  $y = 2^{2^{\frac{1}{2}x}-2}$ .

Вычислите.

**3.11.** а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} \right);$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{x^2} + 3 \right) \cdot \left( \frac{2}{x^3} - 3 \right);$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( -\frac{3}{x^4} + 2 \right) \cdot \left( \frac{6}{x^3} - 4 \right);$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right);$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{x^3} - 5 \right) \cdot \left( \frac{7}{x^4} + 1 \right);$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{x^3} - 5 \right) \cdot \left( -3 - \frac{4}{x^2} \right).$

**3.12.** а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+4}{x-1};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x-3}{2x+1};$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+4}{x^2+2};$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-3}{x+2};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x-11}{7x+3};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2-7}{3x^2-2}.$

**3.13.** а)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x+2}{3^x};$

б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot 3^x + 2}{3^{x+1} + 1};$

в)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{6 \cdot 3^x - 1}{3^{x+2}} + \frac{x+4}{x-1} \right);$

г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{3^x + 5};$

д)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 \cdot 3^x + 3}{3^{x+1}};$

е)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3^{x+2} + 2}{3^{x-1}} + \frac{x-2}{x+1} \right).$

**3.14.** а)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 1}{2^x + 1};$

б)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x + 8}{6^x - 2};$

в)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7 + 4 \cdot 9^x + 2 \cdot 3^x);$

г)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x - 3}{2^x + 3};$

д)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7^x + 9}{8^x - 3};$

е)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (10 + 6^{2x+1} + 5 \cdot 6^x).$

**3.15.** а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x^2};$

б)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + \cos x}{x^2 + 2x};$

в)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos^3 x}{4^x + 3x};$

г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x}{x^4};$

д)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 3 \sin 2x}{4x - 3};$

е)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x}{2^x + x}.$

## Упражнения для повторения

### 3.16. Упростите выражение:

- а)  $a^{-2,4} \cdot a^{3,7} \cdot (a^{0,6})^5$ ;
- б)  $b^{-1,9} \cdot b^{-3,2} \cdot (b^{4,2})^3$ ;
- в)  $c^{7,3} \cdot (c^{1,2})^{-5} \cdot (c^{-2,6})^2$ ;
- г)  $a^{4,1} \cdot a^{-2,6} \cdot (a^{1,5})^4$ ;
- д)  $b^{3,1} \cdot b^{-1,3} \cdot (b^{-2,4})^3$ ;
- е)  $c^{9,3} \cdot (c^{-1,4})^3 \cdot (c^{1,6})^{-5}$ .

### 3.17. Вычислите:

- а)  $\cos \frac{21\pi}{4} - \sin \frac{15\pi}{4} - \operatorname{ctg} \frac{33\pi}{4}$ ;
- б)  $\cos \frac{31\pi}{3} - 2\operatorname{tg} \frac{13\pi}{3} + \sin\left(-\frac{26\pi}{3}\right)$ ;
- в)  $\cos \frac{11\pi}{6} + \operatorname{ctg}\left(-\frac{31\pi}{6}\right) - 2\sin\left(-\frac{29\pi}{6}\right)$ ;
- г)  $\sin \frac{31\pi}{4} - \cos \frac{25\pi}{4} + \operatorname{tg} \frac{17\pi}{4}$ ;
- д)  $\sin \frac{37\pi}{3} - 2\operatorname{ctg}\left(-\frac{29\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$ ;
- е)  $\cos \frac{23\pi}{6} - 3\operatorname{tg}\left(-\frac{17\pi}{6}\right) + \sin \frac{35\pi}{6}$ .

### 3.18. Найдите значение выражения:

- а)  $\log_5 25 \cdot (\log_2 39 - \log_2 13 - \log_2 24)$ ;
- б)  $\frac{3}{7}(\log_2 16 + 27^{\log_3 2})^{\log_{12} 49}$ ;
- в)  $\frac{2\log_2^2 5 - \log_2^2 15 - \log_2 5 \cdot \log_2 15}{2\log_2 5 + \log_2 15}$ ;
- г)  $\log_4 0,0625 \cdot (\log_3 21 + \log_3 2 - \log_3 14)$ ;
- д)  $0,7\left(2 + (\sqrt{3})^{\log_3 \frac{1}{16}}\right)^{\log_9 3}$ ;
- е)  $\frac{3\log_3^2 24 - \log_3^2 6 - 2\log_3 24 \cdot \log_3 6}{3\log_3 24 + \log_3 6}$ .



**ИКТ 3.19.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}, & \text{если } x \leq -1, \\ x^2, & \text{если } -1 < x < 2, \\ \frac{8}{x}, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$

- Постройте график функции  $y = f(x)$ ;
- укажите промежутки возрастания и убывания функции;
- укажите промежутки, на которых  $f(x) > 0$ ;
- найдите, при каких значениях параметра  $p$  уравнение  $f(x) = p$  имеет более двух корней.

## § 4. Предел функции в точке

На рисунке 12 изображён график непрерывной функции  $y = f(x)$ . На графике специально отмечена точка  $(a; b)$ , это значит, что  $f(a) = b$ .

Теперь сделаем следующее: воспользуемся тем же графиком, но точку  $(a; b)$  исключим из рассмотрения (рис. 13). Это графическое задание другой функции, она отличается от функции  $y = f(x)$  своей областью определения: первая функция определена в точке  $a$ , а вторая — нет. Поэтому функцию, график которой изображён на рисунке 13, мы обозначили по другому:  $y = g(x)$ .

Воспользуемся графиком функции  $y = g(x)$  и сделаем следующее: «выколотую» точку  $(a; b)$  расположим вне построенной кривой (рис. 14). Это уже третья функция, обозначим её  $y = h(x)$ : от функции  $y = f(x)$  она отличается значением в точке  $a$  ( $f(a) = b$ ,  $h(a) \neq b$ ), а от функции  $y = g(x)$  она отличается тем, что функция  $y = h(x)$  определена в точке  $a$  (хотя и «неудачно»), а функция  $y = g(x)$  не определена в точке  $a$ .

Итак, с помощью вроде бы незначительных манипуляций с одной и той же кривой мы получили три различные функции. Они отличаются друг от друга только своим поведением в точке  $x = a$ . Если же точку  $x = a$  исключить из рассмотрения, то все три функции будут служить геометрической моделью одного и того же процесса. Учитывая это обстоятельство, математики решили во всех трёх случаях использовать родственные соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = b$$

(читают: *предел функции  $y = f(x)$  ( $y = g(x)$ ,  $y = h(x)$  соответственно) при стремлении  $x$  к  $a$  равен  $b$* ).

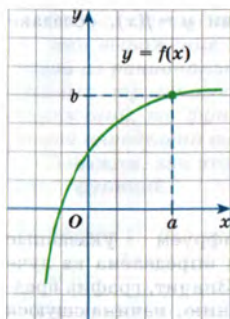


Рис. 12

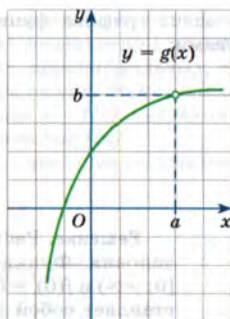


Рис. 13

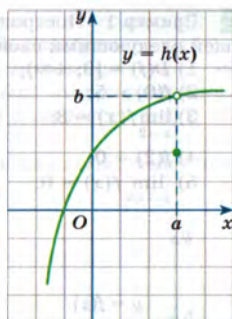


Рис. 14

Равенство  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  означает следующее: если значения аргумента  $x$  приближаются к значению  $x = a$ , то соответствующие значения функции приближаются к предельному значению  $b$ . При этом подчеркнём ещё раз, сама точка  $x = a$  *исключается* из рассмотрения.

Вернёмся снова к рисункам 12—14, на которых изображены графики трёх функций, обладающих одним и тем же свойством: предел функции при  $x \rightarrow a$  равен  $b$ . Какую из рассмотренных трёх функций естественно считать непрерывной в точке  $x = a$ ? Ответ очевиден: непрерывной является первая функция  $y = f(x)$  (рис. 12), которая удовлетворяет условию  $f(a) = b$ .

Понятие непрерывности функции мы использовали, начиная с 7-го класса. Мы говорили, что функция непрерывна, если, опираясь на интуицию, считали, что её график представляет собой сплошную линию. Теперь же мы можем сформулировать строгое определение.

**Определение.** Функцию  $y = f(x)$  называют **непрерывной в точке  $x = a$** , если предел функции  $y = f(x)$  при стремлении  $x$  к  $a$  равен значению функции в точке  $a$ , т. е. если выполняется соотношение

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

**Пример 1** Построить эскиз графика функции  $y = f(x)$ , обладающей следующими свойствами:

- 1)  $D(f) = [0; +\infty)$ ;
- 2)  $f(0) = 5$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ ;
- 4)  $f(2) = 0$ ;
- 5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

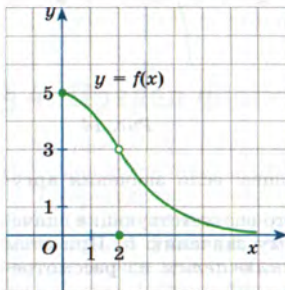


Рис. 15

Учитывая всё вышесказанное, строим возможный график, он представлен на рисунке 15.

Справедлива следующая теорема об арифметических операциях над пределами.

**Теорема.** Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ , то:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b + c$ ;
- 2)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$  (при условии, что  $c \neq 0$ );
- 4)  $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kb$ .

**Решение.** Расшифруем указанные условия. Функция определена на луче  $[0; +\infty)$  и  $f(0) = 5$ . Значит, график представляет собой линию, начинающуюся в точке  $(0; 5)$ . Далее,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ , но  $f(2) = 0$ , т. е.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ . Это значит, что в точке  $x = 2$  функция не является непрерывной,  $(2; 0)$  — изолированная точка графика (как на рис. 14).

И наконец, соотношение  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  означает, что у графика функции имеется горизонтальная асимптота  $y = 0$

В курсе высшей математики доказано следующее утверждение:  
если выражение  $f(x)$  составлено с помощью алгебраических операций из рациональных, иррациональных, тригонометрических, обратных тригонометрических, показательных, логарифмических выражений, то функция  $y = f(x)$  непрерывна в любой точке, в которой определено выражение  $f(x)$ .

Покажем, как это утверждение используется для вычисления пределов функций.

**Пример 2** Вычислить:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 6}{x^3 + 3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos x + \lg x}{2^x + 1}.$$

**Решение.** а) Выражение  $f(x) = \frac{x^2 + x + 6}{x^3 + 3}$  определено в точке  $x = 0$ , значит, функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x = 0$ , а потому  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ . Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x + 6}{x^3 + 3} = \frac{0^2 + 0 + 6}{0^3 + 3} = 2.$$

б) Выражение  $f(x) = \frac{\cos x + \lg x}{2^x + 1}$  определено в точке  $x = 1$ , значит, функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x = 1$ , а потому  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ . Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos x + \lg x}{2^x + 1} = \frac{\cos 1 + \lg 1}{2^1 + 1} = \frac{-1 + 0}{3} = -\frac{1}{3}.$$

**Ответ:** а) 2; б)  $-\frac{1}{3}$ .

В примерах 2а и 2б вычисление пределов было весьма простым: достаточно было найти значение функции, предел которой вычисляется, в точке, к которой стремится аргумент  $x$ . К сожалению, этот приём срабатывает не всегда.

**Пример 3** Вычислить: а)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{5x - 15}$ .

**Решение.** а) Если подставить значение  $x = -2$  в заданное выражение, то и в числителе, и в знаменателе получится 0 (в таких случаях в



математике принято говорить «имеется неопределённость вида  $\frac{0}{0}$  (ноль на ноль)». Про значение функции в точке  $-2$  ничего сказать нельзя (его просто нет). Что делать? Находящуюся под знаком предела алгебраическую дробь можно сократить:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{x - 2}{x - 1}.$$

Значит, функции  $y = \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$  и  $y = \frac{x - 2}{x - 1}$  совпадают при условии  $x \neq -2$ . Но напомним ещё раз: при вычислении предела функции при  $x \rightarrow -2$  саму точку  $x = -2$  исключают из рассмотрения. Значит,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x - 2}{x - 1} = \frac{-2 - 2}{-2 - 1} = \frac{4}{3}.$$

б) Если подставить значение  $x = 3$  в заданное выражение, то и в числителе, и в знаменателе получится 0; как видите, опять имеется неопределённость вида  $\frac{0}{0}$ . Чтобы избавиться от неопределённости, по-

ступим так: домножим и числитель, и знаменатель дроби  $\frac{\sqrt{x+1}-2}{5x-15}$  на выражение, сопряжённое числителю, т. е. на  $\sqrt{x+1}+2$ . Что это даст? Смотрите:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1}-2}{5x-15} &= \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(5x-15)(\sqrt{x+1}+2)} = \\ &= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 2^2}{5(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{x+1-4}{5(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \\ &= \frac{x-3}{5(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{5(\sqrt{x+1}+2)}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{5x-15} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{5(\sqrt{x+1}+2)}.$$

Выражение  $f(x) = \frac{1}{5(\sqrt{x+1}+2)}$  определено в точке  $x=3$ , а значит, функция  $y=f(x)$  непрерывна в этой точке, т. е.  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{5(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{5(\sqrt{3+1}+2)} = \frac{1}{20}.$$

Ответ: а)  $\frac{4}{3}$ ; б)  $\frac{1}{20}$ .

Наше знакомство с понятием предела, как вы, наверное, заметили, зачастую опирается на интуицию и наглядные представления. Тем не менее и на этом уровне можно получать важные результаты, полезные в приложениях. Рассмотрим один из таких результатов.

Возьмём числовую окружность, выберем достаточно малое положительное значение  $t$ , отметим на окружности точку  $M(t)$  и её ординату, т. е.  $\sin t$ ; значит,  $t$  — это длина дуги  $AM$ ,  $\sin t$  — это длина перпендикуляра  $MP$  (рис. 16).

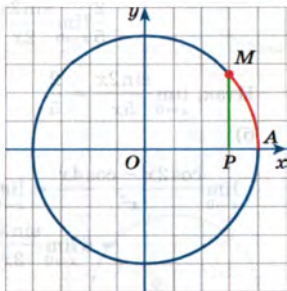


Рис. 16

Для достаточно малых значений  $t$  длина дуги  $AM$  примерно равна длине отрезка  $MP$ , т. е. выполняется приближённое равенство  $\sin t \approx t$ , и, следовательно,  $\frac{\sin t}{t} \approx 1$ . Чем меньше  $t$ , тем точнее это приближённое равенство. Если  $t$  — достаточно малое по модулю отрицательное число, то также  $\frac{\sin t}{t} \approx 1$ . Естественнo предположить, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1.$$

В курсе высшей математики доказано, что это предположение верно. Равенство  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  называют в математике так: *первый замечательный предел* (а о втором замечательном пределе  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$  мы говорили в приложении к § 2).

**Пример 4** Вычислить:

а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2}$ .

**Решение.** а) Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}.$$

Положим  $t = 2x$  и заметим, что если  $x \rightarrow 0$ , то и  $t \rightarrow 0$ . Значит,

$$\frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = \frac{2}{5} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

Итак,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$ .

б)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 3x \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 6 \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{\sin x}{x} \right) = \\ &= 6 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 6 \cdot 1 \cdot 1 = 6. \end{aligned}$$

**Ответ:** а)  $\frac{2}{5}$ ; б) 6.

## Упражнения

**4.1.** Распределите функции, графики которых изображены на рисунке 17,  $a$ — $e$ , на две группы: те, которые имеют предел при  $x \rightarrow -2$ , и те, которые не имеют предела при  $x \rightarrow -2$ . Укажите, чему равен предел функции при  $x \rightarrow -2$ , в тех случаях, когда этот предел существует.

Постройте эскиз графика функции  $y = f(x)$ , обладающей указанными свойствами.

**4.2.** а)  $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 1$ ;

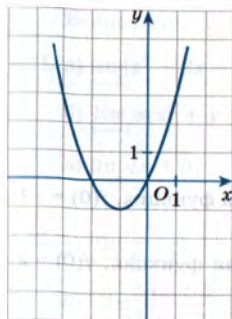
г)  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -7$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -4$ ;

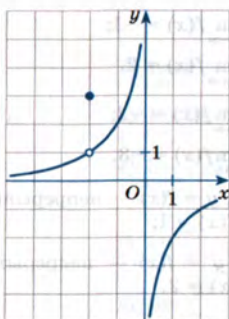
д)  $\lim_{x \rightarrow -5} f(x) = 2$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow -6} f(x) = -4,5$ ;

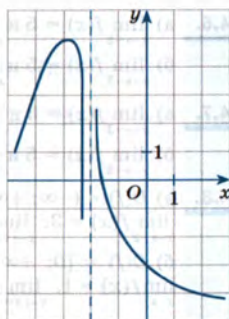
е)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 2,5$ .



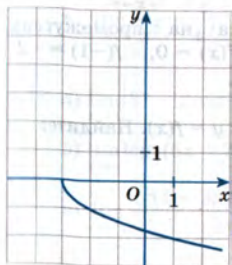
а



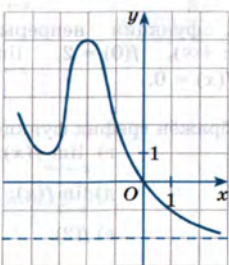
б



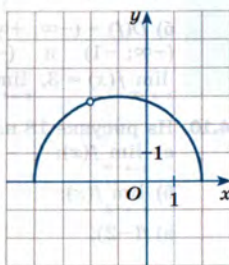
в



г



д



е

Рис. 17

- 4.3.** а)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  и  $f(1) = 2$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$  и  $f(1)$  не существует.
- 4.4.** а)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$  и  $f(x) > 0$  на  $(-\infty; +\infty)$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -3$  и  $f(x) < 0$  на  $(-\infty; +\infty)$ .
- 4.5.** а)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$  и  $f(0) > -2$ ;  
 б)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$  и  $f(0) < 0$ .



4.6. а)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 5$  и  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 5$  и  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

4.7. а)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 5$  и  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 5$  и  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = -3$ .

4.8. а)  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ,  $y = f(x)$  — непрерывная функция,  $f(0) = -1$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ;

б)  $D(f) = [0; +\infty)$ ,  $y = f(x)$  — непрерывная функция,  $f(0) = 2$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ .

4.9. а)  $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ , функция непрерывна на промежутках  $(-\infty; -1)$  и  $(-1; +\infty)$ ,  $f(0) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 6$ .

б)  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ , функция непрерывна на промежутках  $(-\infty; -1)$  и  $(-1; +\infty)$ ,  $f(0) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$ ,  $f(-1) = -2$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

4.10. На рисунке 18 изображён график функции  $y = f(x)$ . Найдите:

а)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ ; д)  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ;

в)  $f(-2)$ ; е)  $f(2)$ .

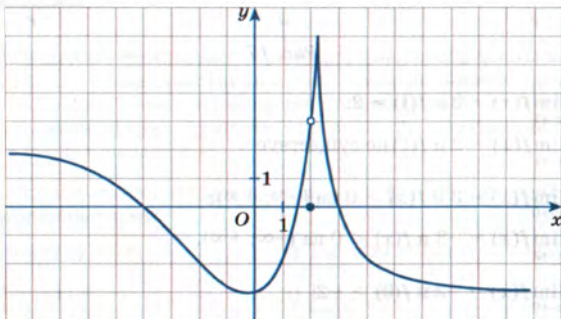


Рис. 18

Вычислите.

4.11. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x - 4)$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 2x - 7)$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow -1} x(x^2 + x - 6)$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow -2} x(x^2 - x + 9)$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x + 6}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{x + 5}$ .

4.12. а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 7}{3 - x}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 1}{x - 2}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow -0,5} \frac{4x + 3}{x + 2}$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{9x + 1}{3x - 5}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 4}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow \sqrt{5}} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - 1}$ .

4.13. а)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( 3^x - 2 \cos \frac{\pi x}{2} \right)$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \log_3(5x + 7)$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\lg(4 - 3x) + \ln(2x + 9)}{2^x - x}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( 2^x + 5 \sin \frac{\pi x}{18} \right)$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\log_4 2x}{x - \log_{\sqrt{3}}(x - 5)}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow -3} (\lg(6x + 118) + \ln(2x + 7))$ .

4.14. а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x - x^2}$ ;

г)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 8x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ ;

д)  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ ;

в)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^3 - 8}$ ;

е)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^3 + 1}$ .

$$4.15. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{2x^2+3x-2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2+5x-2}{3x-1};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2-4x-12}{x-6};$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow 0.5} \frac{2x-1}{2x^2-7x+3};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2-11x+6}{x-3};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+5}{x^2+3x-10}.$$

$$4.16. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{2x-8};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x-1}-1}.$$

$$4.17. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 2x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 7x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x};$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2\sin 4x}.$$

$$4.18. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 2x};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\operatorname{ctg} x}.$$

$$4.19. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\sin 2x \cdot \sin 3x};$$

$$\text{r) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin 5x}{6x^2};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 6x};$$

$$\text{д) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 7x};$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin 5x \cdot \sin 6x}{2x^2};$$

$$\text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 \cdot \cos 2x}{\sin 3x \cdot \sin 4x}.$$

## Упражнения для повторения

4.20. Исследуйте функцию  $y = f(x)$  на чётность, если:

$$\text{a) } f(x) = x^5 - 4x \cdot \cos x;$$

$$\text{r) } f(x) = 6x^4 - x^2 \cdot \cos x;$$

$$\text{б) } f(x) = 2x^2 \cdot \sin 3x;$$

$$\text{д) } f(x) = -\log_2 |x| \cdot \operatorname{tg} x;$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{2^{\cos x}}{x-x^3};$$

$$\text{е) } f(x) = \frac{x^5-4}{\cos 3x}.$$

**4.21.** Докажите, что число  $T$  является периодом функции  $y = f(x)$ , если:

а)  $f(x) = \sin \frac{x}{3}, T = 6\pi$ ; г)  $f(x) = \cos \frac{x}{4}, T = 8\pi$ ;

б)  $f(x) = \cos \frac{2x}{3}, T = -6\pi$ ; д)  $f(x) = \sin \frac{3x}{4}, T = -12\pi$ ;

в)  $f(x) = 2 \operatorname{tg} 2x, T = \frac{3\pi}{2}$ ; е)  $f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 3x, T = \frac{4\pi}{3}$ .

**4.22.** Решите уравнение:

а)  $(\sqrt{50})^x \cdot (\sqrt{2})^x = 0,1$ ;

б)  $3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+7} - 10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{3x+8} = 25$ ;

в)  $(\sqrt{3})^{2x} \cdot (2\sqrt{3})^{2x} = 36$ ;

г)  $5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{5x+3} + 12 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{5x+4} = 42$ .

**ИКТ 4.23.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} x + \pi, & \text{если } x < -\pi, \\ \sin x, & \text{если } -\pi \leq x < \pi, \\ \sqrt{x - \pi}, & \text{если } x \geq \pi. \end{cases}$

а) Постройте график функции  $y = f(x)$ ;

б) укажите промежутки возрастания и убывания функции;

в) укажите промежутки, на которых  $f(x) > 0$ ;

г) найдите, при каких значениях параметра  $p$  уравнение  $f(x) = p$  имеет более двух корней.

## § 5. Приращение аргумента. Приращение функции

В название нашего учебного предмета входит словосочетание «элементы математического анализа». Что же анализируют? Анализируют, в частности, поведение функции  $y = f(x)$  около конкретной точки  $x_0$ , анализируют, как меняется значение функции при изменении



значения аргумента. Для этого используют понятия приращений аргумента и функции.

**Определение 1.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена в точках  $x_0$  и  $x_1$ . Разность  $x_1 - x_0$  называют **приращением аргумента** (при переходе от точки  $x_0$  к точке  $x_1$ ), а разность  $f(x_1) - f(x_0)$  — **приращением функции**.

Приращение аргумента обозначают  $\Delta x$  (читают: *дельта икс*,  $\Delta$  — прописная буква греческого алфавита «дельта»), приращение функции обозначают  $\Delta y$  или  $\Delta f$ .

Итак,  $x_1 - x_0 = \Delta x$ , значит,  $x_1 = x_0 + \Delta x$ .

$f(x_1) - f(x_0) = \Delta y$  (или  $\Delta f$ ), значит,

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Термин «приращение» не следует истолковывать буквально, как «прирост»: и  $\Delta x$ , и  $\Delta y$  могут быть как положительными, так и отрицательными числами.

**Пример** Найти приращение аргумента и приращение функции  $y = f(x)$ , где  $f(x) = x^2$ , при переходе от точки  $x_0 = 2$  к точке:

а)  $x_1 = 2,2$ ; б)  $x_2 = 1,99$ .

**Решение.** а)

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 2,2 - 2 = 0,2;$$

$$\Delta y = f(x_1) - f(x_0) = 2,2^2 - 2^2 = 4,84 - 4 = 0,84.$$

б)

$$\Delta x = x_2 - x_0 = 1,99 - 2 = -0,01;$$

$$\Delta y = f(x_2) - f(x_0) = 1,99^2 - 2^2 = 3,9601 - 4 = -0,0399.$$

**Ответ:** а)  $\Delta x = 0,2$ ,  $\Delta y = 0,84$ ; б)  $\Delta x = -0,01$ ,  $\Delta y = -0,0399$ .

Используя понятия приращений аргумента и функции, можно дать другой вариант определения непрерывности функции в точке, который оказывается полезным для многих приложений. Смотрите: функцию  $y = f(x)$  называют непрерывной в точке  $x = a$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ; другими словами,  $f(x) \rightarrow f(a)$  при  $x \rightarrow a$ , т. е.  $f(x) - f(a) \rightarrow 0$  при  $x - a \rightarrow 0$ . Но  $x - a = \Delta x$  и  $f(x) - f(a) = \Delta y$ . Значит, функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x = a$  в том, и только в том случае, когда в этой точке  $\Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Как видите, теперь у нас есть два варианта определения непрерывности в точке:

функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x = a$ :

1) предел функции в точке равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

2) при стремлении приращения аргумента функции к нулю приращение функции также стремится к нулю:  $\Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Первый вариант чаще используют в теории, второй — в приложениях.

**Определение 2.** Функцию  $y = f(x)$  называют непрерывной на промежутке  $X$ , если она непрерывна в каждой точке промежутка.

Уточним, что означает непрерывность функции в концевой точке промежутка. Например, как понимать непрерывность функции в точках  $a$  и  $b$  отрезка  $[a; b]$ ? Для точки  $a$  определение непрерывности будет выглядеть так:

если  $\Delta x > 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Для точки  $b$  определение непрерывности в терминах приращений будет выглядеть так:

если  $\Delta x < 0$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $\Delta y \rightarrow 0$ .

Например, справедливы следующие утверждения: функция  $y = x^3$  непрерывна на всей числовой прямой; функция  $y = \sqrt{x}$  непрерывна на луче  $[0; +\infty)$ ; функция  $y = \log_a x$  непрерывна на открытом луче  $(0; +\infty)$ .

## Упражнения

**5.1.** Найдите точку  $x_1$ , в которую переходит указанная точка  $x_0$  при указанном приращении  $\Delta x$  аргумента:

а)  $x_0 = 0$ ,  $\Delta x = 0,01$ ;

г)  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0,02$ ;

б)  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = -0,02$ ;

д)  $x_0 = 3$ ,  $\Delta x = -0,01$ ;

в)  $x_0 = -1,21$ ,  $\Delta x = 0,01$ ;

е)  $x_0 = -2,23$ ,  $\Delta x = -0,02$ .

**5.2.** Найдите точку  $x_0$ , которая переходит в указанную точку  $x_1$  при указанном приращении  $\Delta x$  аргумента:

а)  $x_1 = 3,001$ ,  $\Delta x = 0,001$ ;

г)  $x_1 = 4,003$ ,  $\Delta x = 0,003$ ;

б)  $x_1 = 4,998$ ,  $\Delta x = -0,002$ ;

д)  $x_1 = 1,999$ ,  $\Delta x = -0,001$ ;

$$в) x_1 = -3, \Delta x = 0,05x_0;$$

$$е) x_1 = -2, \Delta x = -0,05x_0.$$

- 5.3.** Найдите приращение функции  $y = 3x + 1$  при переходе от точки  $x_0 = 2$  к точке  $x_1$ , если:

$$а) x_1 = 2,1;$$

$$в) x_1 = 2,02;$$

$$д) x_1 = 1,8;$$

$$б) x_1 = 2,2;$$

$$г) x_1 = 2,01;$$

$$е) x_1 = 1,9.$$

- 5.4.** Найдите приращение функции  $y = x^2 - 3x$  при переходе от точки  $x_0 = -1$  к точке  $x_1$ , если:

$$а) x_1 = -1,2;$$

$$в) x_1 = -1,5;$$

$$д) x_1 = -0,8;$$

$$б) x_1 = -1,1;$$

$$г) x_1 = -0,9;$$

$$е) x_1 = -0,5.$$

- 5.5.** Найдите приращение функции  $y = \sqrt{x} + 2$  при переходе от точки  $x_0 = 2$  к точке  $x_1 = x_0 + \Delta x$ , если:

$$а) \Delta x = 0,25;$$

$$в) \Delta x = -0,31;$$

$$д) \Delta x = 0,89;$$

$$б) \Delta x = 0,56;$$

$$г) \Delta x = -0,04;$$

$$е) \Delta x = -0,79.$$

- 5.6.** Найдите приращение функции  $y = \sin x$  при переходе от точки  $x_0 = \pi$  к точке  $x_1 = x_0 + \Delta x$ , если:

$$а) \Delta x = \frac{\pi}{2};$$

$$в) \Delta x = -\frac{\pi}{4};$$

$$д) \Delta x = -\frac{5\pi}{6};$$

$$б) \Delta x = \frac{\pi}{6};$$

$$г) \Delta x = -\frac{\pi}{2};$$

$$е) \Delta x = -\frac{\pi}{3}.$$

- 5.7.** Найдите приращение функции  $y = \log_2 x$  при переходе от точки  $x_0 = 1$  к точке  $x_1 = x_0 + \Delta x$ , если:

$$а) \Delta x = 1;$$

$$в) \Delta x = -0,75;$$

$$д) \Delta x = 7;$$

$$б) \Delta x = 3;$$

$$г) \Delta x = -0,5;$$

$$е) \Delta x = -0,875.$$

- 5.8.** Найдите приращение  $\Delta x$  аргумента при указанных изменениях начальной точки  $x_0$  и точку  $x_1 = x_0 + \Delta x$ :

$$а) x_0 = 2 \text{ увеличивается на } 5\%;$$

$$б) x_0 = 1,1 \text{ уменьшается в } 1,5 \text{ раза};$$

$$в) x_0 = 5 \text{ уменьшается в } 2 \text{ раза};$$

$$г) x_0 = 3 \text{ уменьшается на } 2\%;$$

$$д) x_0 = 2,1 \text{ увеличивается в } 1,5 \text{ раза};$$

$$е) x_0 = 3 \text{ увеличивается в } 3 \text{ раза}.$$

Выразите приращение  $\Delta y$  данной функции  $y = f(x)$  через приращение  $\Delta x$  аргумента при переходе от точки  $x$  к точке  $x + \Delta x$ .

- 5.9.** а)  $f(x) = 4x + 5;$

$$г) f(x) = 3 - 2x;$$

$$б) f(x) = 3 - x^2;$$

$$д) f(x) = 2x^2 + 1;$$

$$b) f(x) = \frac{3}{x};$$

$$e) f(x) = -\frac{2}{x}.$$

**5.10.** а)  $f(x) = 2^{x+1};$

г)  $f(x) = 3^x;$

б)  $f(x) = \lg x;$

д)  $f(x) = \ln x;$

в)  $f(x) = \cos x;$

е)  $f(x) = \sin x.$

**5.11.** а)  $f(x) = kx + b;$

г)  $f(x) = kx;$

б)  $f(x) = ax^2 + bx + c;$

д)  $f(x) = ax^2;$

в)  $f(x) = \log_a x;$

е)  $f(x) = \frac{a}{x}.$

## Упражнения для повторения

**5.12.** Известно, что  $\log_5 2 = a$  и  $\log_5 3 = b$ . Выразите через  $a$  и  $b$ :

а)  $\log_5 24;$

в)  $\log_5 54;$

д)  $\log_5 6,75;$

б)  $\log_5 36;$

г)  $\log_5 72;$

е)  $\log_5 \frac{2}{9}.$

**5.13.** Вычислите:

а)  $\log_3 81 \cdot (\log_6 4 + \log_6 9);$

г)  $\log_2 16 \cdot (\lg 5 + \lg 20);$

б)  $\log_{\frac{1}{5}} 125 \cdot (\lg 300 - \lg 3);$

д)  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} \cdot (\log_{12} 432 - \log_{12} 3);$

в)  $\frac{\log_2 8 - \log_2 343}{\log_{2\sqrt{3}} 12};$

е)  $\frac{\log_{\sqrt{2}} 5\sqrt{2} - \log_{\sqrt{2}} 10}{\log_{3\sqrt{5}} 45}.$

**5.14.** Решите уравнение:

а)  $\sin x \cdot \sqrt{4 - x^2} = 0;$

г)  $\cos x \cdot \sqrt{9 - x^2} = 0;$

б)  $\cos x \cdot \sqrt{4x - 3 - x^2} = 0;$

д)  $\sin x \cdot \sqrt{5x - 2 - 2x^2} = 0;$

в)  $\operatorname{tg} x \cdot \sqrt{9 - 4x^2} = 0;$

е)  $\operatorname{ctg} x \cdot \sqrt{16 - x^2} = 0.$



## Итак, в главе 1

Познакомились с новыми свойствами числовых последовательностей:

- ограниченность снизу;
- ограниченность сверху;
- сходимость;
- расходимость.

Выяснили, что такое:

- окрестность точки;
- предел числовой последовательности;
- предел функции на бесконечности;
- предел функции в точке;
- приращение аргумента;
- приращение функции.

Изучили арифметические операции над пределами числовых последовательностей и над пределами функций.

Узнали, какие два соотношения специально выделяют в курсе высшей математики:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  — первый замечательный предел;
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$  — второй замечательный предел.

Узнали два варианта определения непрерывности функции в точке:

- «на языке пределов»:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ;
- «на языке приращений»:  $\Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

## Вопросы

1. Что такое числовая последовательность?
2. Какую последовательность называют возрастающей; убывающей?
3. Сформулируйте определение ограниченности последовательности сверху (снизу).
4. Приведите примеры последовательностей, которые ограничены только сверху (только снизу).

5. Может ли возрастающая последовательность быть не ограниченной сверху, а убывающая — не ограниченной снизу? Если да, то приведите примеры.
6. Какой числовой промежуток называют окрестностью точки  $a$  радиусом  $r$ ?
7. Дайте определение предела последовательности; сходящейся последовательности.
8. При каких значениях знаменателя  $q$  сходится бесконечная геометрическая прогрессия?
9. Верно ли, что из сходимости последовательности следует её ограниченность? Верно ли обратное, т. е. что из ограниченности последовательности следует её сходимость?
10. Какая связь имеется между пределом функции на бесконечности и наличием у неё горизонтальной асимптоты?
11. Сформулируйте теоремы об арифметических операциях над пределами последовательностей, функций.
12. Что называют приращением аргумента  $x$  при переходе от  $x_0$  к  $x_1$ ?
13. Что называют приращением функции  $y = f(x)$  при переходе аргумента от  $x_0$  к  $x_1$ ?
14. Сформулируйте определение функции, непрерывной в точке  $x = a$ :
  - «на языке пределов»;
  - «на языке приращений».

- Укажите формулу, которая задаёт последовательность  
5, 9, 13, 17, ... .  
а)  $y_n = 4n + 1$                       в)  $y_n = 3n + 2$   
б)  $y_n = 6n - 1$                       г)  $y_n = n + 4$
- Укажите последовательность, которая не является монотонной.  
а)  $x_n = (3 - n)^2$                       в)  $x_n = -0,1^{n-2}$   
б)  $x_n = n^3 + 1$                       г)  $x_n = (-1)^{n+1}$
- Укажите свойство, которое всегда следует из сходимости последовательности.  
а) последовательность убывает  
б) последовательность ограничена сверху и не ограничена снизу  
в) последовательность монотонна  
г) последовательность ограничена

4. Дана последовательность  $y_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ . Укажите верные утверждения.

- а) последовательность сходится
- б) последовательность является убывающей
- в) последовательность ограничена снизу
- г) предел последовательности больше нуля

5. Вычислите  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n-4)(2-5n)}{n^2}$ .

6. Найдите  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \sqrt{5x+6} \cdot \frac{x^2-2x-3}{x+1} \right)$ .

7. Найдите приращение функции  $y = x^2 + 2x - 3$  при переходе от точки  $x = 0$  к точке  $x + \Delta x = 0,1$ .

8. Установите соответствие между пределом и его значением.

A.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x}{-x}$

B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(-x)}{2x}$

B.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{-2x}$

1)  $-0,5$

2)  $-1,5$

3)  $-1$

9. Укажите прямую, которая является горизонтальной асимптотой к

графику функции  $y = \frac{2x-1}{x+2}$ .

а)  $y = 2$

в)  $y = 1$

б)  $y = -2$

г)  $y = -0,5$

10. Укажите функцию, которая является непрерывной в точке  $x = 2$ .

а)  $y = \begin{cases} x^3, & \text{если } x \leq 2, \\ 14 - 2x, & \text{если } x > 2 \end{cases}$

б)  $y = \begin{cases} 3x, & \text{если } x \leq 2, \\ 2x + 3, & \text{если } x > 2 \end{cases}$

в)  $y = \begin{cases} \cos \pi x, & \text{если } x < 2, \\ \sqrt{x-1}, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$

г)  $y = \begin{cases} 2^{x-2}, & \text{если } x \leq 2, \\ \log_2 x, & \text{если } x > 2 \end{cases}$



## Дополнительные задачи

1. Для последовательности  $y_n = -2n^2 + 19n - 42$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , найдите все значения  $n$ , при которых:
- а)  $y_n = 0$ ;                      г)  $y_n > y_{n+1}$ ;
  - б)  $y_n > 0$ ;                      д)  $y_3 < y_n$ ;
  - в)  $y_n < y_{n+1}$ ;                  е)  $y_n$  принимает наибольшее значение.
2. Перечислите все элементы последовательности  $a_n = -3 + 0,1n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , которые принадлежат окрестности точки  $a$  радиусом  $r$ :
- а)  $a = -3$ ,  $r = 0,2$ ;              в)  $a = -3$ ,  $r = 0,5$ ;              д)  $a = 4$ ,  $r = \pi^2$ ;
  - б)  $a = -3$ ,  $r = 0,1$ ;              г)  $a = -2$ ,  $r = 0,2$ ;              е)  $a = \pi$ ,  $r = 0,15$ .
3. Найдите наибольшее значение  $r$ , при котором в окрестности точки  $a$  радиусом  $r$  нет ни одного члена последовательности  $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :
- а)  $a = 3$ ;                      в)  $a = 0$ ;                      д)  $a = 1,12$ ;
  - б)  $a = 2,01$ ;                  г)  $a = 0,99$ ;                  е)  $a = 1$ .
4. Найдите наименьшее значение  $n$ , начиная с которого все члены последовательности  $x_n = \frac{10n + 21}{n + 1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , принадлежат окрестности точки 10 радиусом  $r$ :
- а)  $r = 10$ ;                      в)  $r = 2$ ;                      д)  $r = 0,1$ ;
  - б)  $r = 5$ ;                      г)  $r = 1$ ;                      е)  $r = 0,01$ .
5. В последовательности  $z_n = \frac{an + 3}{(2 + a)n - 3}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , значение коэффициента  $a$  наудачу выбирают из чисел 1, 2, ..., 10. Найдите вероятность того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ :
- а) положителен;                      г) больше 0,5;
  - б) больше 1;                      д) больше 0,7;
  - в) равен 0,5;                      е) меньше 0,8.
6. Для бесконечной геометрической прогрессии, знаменатель которой по модулю меньше единицы, по известным двум из трёх значений  $S$ ,  $b_1$ ,  $q$  вычислите третье:
- а)  $b_1 = 4$ ,  $q = 0,5$ ;                  г)  $S = -3$ ,  $q = -0,3$ ;
  - б)  $b_1 = -6$ ,  $q = -0,2$ ;              д)  $S = \sqrt{2} + 1$ ,  $b_1 = 1$ ;
  - в)  $S = 2$ ,  $q = 0,3$ ;                  е)  $S = 1\,000\,000$ ,  $b_1 = 1000$ .



**7.** В бесконечной геометрической прогрессии первый член наудачу выбирают из чисел 1, 2, 3, 4, 5, а знаменатель — из чисел 0,5 и 0,9. Найдите вероятности событий:

- а) второй член прогрессии меньше 5;
- б) второй член прогрессии меньше 0,5;
- в) третий член прогрессии равен 1;
- г) третий член прогрессии меньше 3;
- д) сумма прогрессии равна 10;
- е) сумма прогрессии больше 20.

При вычислении пределов бывает полезным раскрывать скобки по формулам сокращённого умножения или по формуле бинома Ньютона. При этом нужными для решения оказываются не все числовые коэффициенты, а только один или два из них.

Например:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)^5 - x^4(x+1)}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^5 + 5 \cdot x^4 \cdot 2 + a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_1 x + 32) - (x^5 + x^4)}{x^4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 9 + \frac{a_3 x^3 + a_4 x^2 + a_1 x + 32}{x^4} \right) = 9 + 0 = 9. \end{aligned}$$

**8.** Вычислите пределы функций при  $x \rightarrow \infty$ :

- а)  $\frac{(2x+1)^3 - 8x^3}{x^2}$ ;
- б)  $\frac{24x}{(x+4)^3 - (x^3 + 12x^2)}$ ;
- в)  $\frac{(x+3)^3 - x(x+1)^2}{x^2}$ ;
- г)  $\frac{x^2}{(x+2)^3 - x^2(x+1)}$ ;
- д)  $\frac{x^5 - (x+3)^5}{(x-3)^4}$ ;
- е)  $\frac{x^7 + (1-x)^7}{(x+1)^6}$ .

**9.** Вычислите пределы функций при  $x \rightarrow 0$ :

- а)  $\frac{(1+x)^3 - 1}{x}$ ;
- б)  $\frac{(1-3x)^3 - 1}{x}$ ;
- в)  $\frac{8 - (2-x)^3}{x}$ ;
- г)  $\frac{(1+x)^4 - 1}{x}$ ;
- д)  $\frac{(1-x)^5 - 1}{10x}$ ;
- е)  $\frac{(1+4x)^5 - (1+5x)^4}{x^2 - x^3}$ .

**10. График какой функции окажется выше графика другой функции «на плюс бесконечности», т. е. при всех достаточно больших значениях  $x$ :**

а)  $f(x) = 2x - 1$  или  $g(x) = x + 10$ ;

б)  $f(x) = x^2 - 100$  или  $g(x) = x + 100$ ;

в)  $f(x) = 3x^3 + 2x^2 + x$  или  $g(x) = 4x^4$ ;

г)  $f(x) = 2x^5 - 5x^4 - 7$  или  $g(x) = x^5 + 3x^2$ ;

д)  $f(x) = 5\cos 5x$  или  $g(x) = x - 50$ ;

е)  $f(x) = 2^x$  или  $g(x) = x^{20}$ ?

# Из истории математики

Приближение сложных объектов и ситуаций простыми является одной из фундаментальных математических конструкций. Иррациональные числа приближают рациональными, бесконечные десятичные дроби — конечными, площади криволинейных фигур и объёмы пространственных тел приближают площадями многоугольников и объёмами многогранников, непрерывные процессы — дискретными, вместо перемещения точек и тел с переменной скоростью в первом приближении рассматривают равномерные движения и т. п.

Обычно процесс приближения, или *аппроксимации*<sup>1</sup>, организуют так, чтобы он сходиллся, т. е. чтобы при уменьшении погрешности приближения результат всё ближе и ближе подходил к некоторому окончательному ответу, к своему *пределу*.

Теория пределов последовательностей и функций составляет основу современного математического анализа. Первые строгие, формально-логические определения и доказательства теории пределов появились в первой трети XIX в. Основы этой теории были предложены в работах великого французского математика Огюстена Луи Коши (1789—1857). Именно он стал трактовать (около 1820 г.) бесконечно малые величины как переменные, стремящиеся к нулю, и предложил использовать для этого технику, основанную на понятии окрестностей точек. Немецкий математик Генрих Гейне<sup>2</sup> (1821—1881) предложил некоторый альтернативный подход, основывая теорию пределов функций через пределы последовательностей. Термины «предел по Коши» и «предел по Гейне» и в XXI в. присутствуют в любом курсе математического анализа.

Однако эти теории XIX в. стали не столько началом, сколько итогом долгого исторического процесса развития естествознания. До этого, в конце XVII в. и в XVIII в. в основном исследовали анализ бесконечно малых, или просто бесконечных (см., например, двухтомный трактат «Введение в анализ бесконечных» (1748 г.) Леонарда Эйлера), активно изучали вопросы о разложении в бесконечные ряды и произведения. Скажем, шотландец Джеймс Грегори (1638—1675) систематически работал с бесконечными последовательностями, суммами и произведениями, писал в 1667 г. об операции пре-

<sup>1</sup> От англ. *approximation* — приближение.

<sup>2</sup> Не путать с поэтом Генрихом Гейне.



дельного перехода и о «...сходящейся последовательности многоугольников, окончание которой есть круг...».

До этого базовой техникой исследования сложных фигур и тел был *метод неделимых*, связанный в основном с именами Бонавентуры Кавальери (1598—1647) и Иоганна Кеплера (1571—1630), который в своей «Новой астрономии» использует понятие неделимых при формулировке своих трёх законов движения планет. Принцип Кавальери и его метод неделимых оказали самое серьёзное влияние на математиков XVII в. вплоть до Лейбница и Ньютона, иногда метод называли «царской дорогой» в геометрии. Один из предшественников математического анализа Джон Валлис (1616—1703) разработал алгебраический вариант метода неделимых, который изложил в своей «Арифметике бесконечного» (1656 г.).

Методу неделимых предшествовал *метод исчерпывания*. Сам термин появился в средневековой Европе, но, по существу, оказался переформулировкой и систематическим использованием результатов античных математиков Архимеда (287—212 до н. э.) и Евдокса (408—355 до н. э.), которые никакого специального названия методу не давали, но широко его применяли, неявно основываясь именно на понятии предельного перехода.

Метод Евдокса изложен в X книге «Начал» Евклида и звучит примерно так: «...если от большей из двух величин отнять больше половины, а от того, что останется, — ещё больше половины, то когда-то получится величина меньше меньшей из заданных величин». В современных терминах это можно записать так: если  $0 < y_{n+1} < 0,5y_n$ , то, начиная с некоторого номера, все  $y_n$  будут меньше наперёд заданного положительного числа; кратко,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ . В «Началах» Евклида последовательные приближения многоугольниками по методу Евдокса успешно применялись для теорем о площади круга, объёмах конуса и цилиндра. Развивая метод Евдокса, Архимед получил ряд замечательных фактов: площадь сферы в 4 раза больше площади её большого круга, объём цилиндра, описанного вокруг шара, в 1,5 раза больше объёма шара и т. п.

В свою очередь, в античной философии, предшествующей Евдоксу и Архимеду, уже широко обсуждались рассуждения, основанные на предельном переходе, типичным примером которых является парадокс Зенона (V в. до н. э.) об Ахиллесе, который «никогда» не догонит черепаху.



Новосибирский государственный  
университет (новое здание).  
Новосибирск



- § 6. Определение производной
- § 7. Алгоритм нахождения производной
- § 8. Дифференцируемые функции
- § 9. Уравнение касательной к графику функции
- § 10. Арифметические операции над производными
- § 11. Дифференцирование тригонометрических функций
- § 12. Дифференцирование функций вида  $y = f(kx + m)$
- § 13. Дифференцирование степенных функций
- § 14. Дифференцирование показательных и логарифмических функций

## Глава 2

# Производная

### § 6. Определение производной

Начнём с рассмотрения двух задач, совершенно различных по сюжету: первая задача — физическая, вторая — геометрическая. Как вы увидите, они в процессе решения приведут к одной и той же (новой для вас) математической модели.

**Задача 1 (о скорости движения)** По прямой, на которой заданы начало отсчёта, единица измерения (см) и направление, движется материальная точка. Закон движения задан формулой  $s = s(t)$  ( $t$  — время (с),  $s(t)$  — координата точки на прямой в момент времени  $t$ ). Найти скорость движения тела в момент времени  $t$ .

**Решение.** В момент времени  $t$  материальная точка занимает положение  $M$  (рис. 19):  $OM = s(t)$ .

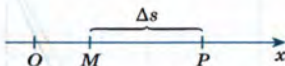


Рис. 19

Дадим аргументу  $t$  приращение  $\Delta t$ . Материальная точка в момент времени  $t + \Delta t$  займёт положение  $P$ :  $OP = s(t + \Delta t)$ . Значит, за  $\Delta t$  секунд движущаяся точка переместилась из точки  $M$  в точку  $P$ . Имеем:  $MP = OP - OM = s(t + \Delta t) - s(t)$ . Итак,  $MP = \Delta s$  (см).

Найдём среднюю скорость  $v_{\text{ср}}$  движения материальной точки за промежуток времени  $[t; t + \Delta t]$ :  $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ . Предел средней скорости

движения за промежуток времени  $[t; t + \Delta t]$  при условии, что  $\Delta t$  выбирается всё меньше и меньше, точнее, при условии, что  $\Delta t \rightarrow 0$ , на-

зывают *мгновенной скоростью движения в момент времени  $t$*  и обозначают  $v(t)$ . Таким образом,

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

**Задача 2 (о касательной к графику функции)** Дан график функции  $y = f(x)$ . На нём выбрана точка  $M(a; f(a))$ , в которой к графику функции можно провести касательную, не параллельную оси ординат (рис. 20). Найти угловой коэффициент касательной.

**Решение.** Дадим аргументу приращение  $\Delta x$  и рассмотрим на графике точку  $P$  с абсциссой  $a + \Delta x$ . Ордината точки  $P$  равна  $f(a + \Delta x)$ . Угловой коэффициент секущей  $MP$ , т. е. тангенс угла между прямой  $MP$  и осью  $Ox$ , можно найти из прямоугольного треугольника  $MPL$ :  $k_{\text{сек}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Если мы теперь устремим  $\Delta x$  к нулю, то точка  $P$  начнёт приближаться по кривой к точке  $M$ . В учебнике для

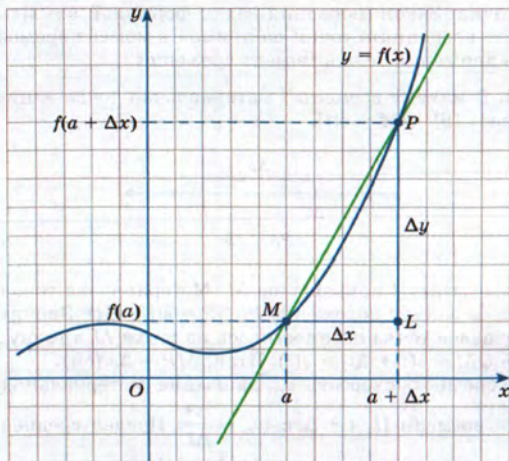


Рис. 20

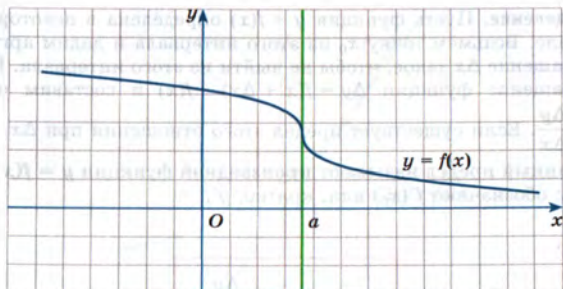


Рис. 21

10-го класса мы говорили о том, что касательная — это предельное положение секущей  $MP$  при приближении точки  $P$  по графику к точке  $M$ . Значит, угловой коэффициент  $k$  касательной вычисляется по формуле  $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_{\text{сек}}$ , а  $k_{\text{сек}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Таким образом, для углового коэффициента касательной мы получаем следующую формулу:

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Эту формулу мы вывели при условии, что касательная не параллельна оси ординат. Если же касательная к графику функции в точке  $a$  параллельна оси ординат (рис. 21), то уравнение такой касательной имеет вид  $x = a$ , об угловом коэффициенте говорить в этом случае некорректно.

Подведём итоги. Две различные задачи привели к одной и той же математической модели — пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю. Многие задачи из различных областей знания приводят в процессе решения к такой же математической модели. Значит, эту математическую модель надо специально изучить: ввести для этой модели название, дать определение и научиться работать с этой математической моделью.



**Определение.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некотором интервале. Возьмём точку  $x_0$  из этого интервала и дадим аргументу приращение  $\Delta x$  такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдём приращение функции  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$  и составим отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Если существует предел этого отношения при  $\Delta x \rightarrow 0$ , то указанный предел называют **производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$** ; обозначают  $f'(x_0)$  или, кратко,  $y'$ .

Итак,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Рассмотренные выше задачи 1 и 2 позволяют истолковать производную с физической и геометрической точек зрения.

*Физический (механический) смысл производной* состоит в следующем. Если  $s = s(t)$  — закон прямолинейного движения, то производная выражает *мгновенную скорость* в момент времени  $t$ :

$$v(t) = s'(t).$$

Вообще, если некоторый реальный процесс протекает по закону  $s = s(t)$ , то производная  $s'(t)$  выражает скорость протекания процесса в момент времени  $t$ . С математической точки зрения производная  $f'(x)$  выражает *скорость изменения функции  $y = f(x)$  в точке  $x$* .

Рассмотрим, в частности, постоянную функцию  $y = C$ . Скорость её изменения равна нулю (ведь значения функции не меняются от точки к точке). Это значит, что

$$(C)' = 0.$$

*Геометрический смысл производной* состоит в следующем. Если к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x = a$  можно провести касательную, непараллельную оси ординат, то  $f'(a)$  выражает угловой коэффициент касательной:

$$k = f'(a).$$

Угловой коэффициент прямой — это тангенс угла между осью абсцисс и прямой. Значит,

$$f'(a) = \operatorname{tg} \alpha \text{ (рис. 22).}$$

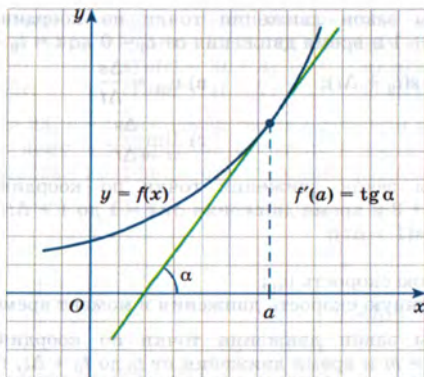


Рис. 22

Рассмотрим, линейную функцию  $y = kx + m$ . Фактически любая прямая является касательной к самой себе, значит, производная этой функции равна  $k$ :

$$(kx + m)' = k.$$

В частности,

$$(x)' = 1.$$

## Упражнения

**6.1.** Движение точки по координатной прямой задаётся уравнением  $s = s(t)$ , где  $t$  — время (в секундах), а  $s(t)$  — отклонение точки от начального положения в момент времени  $t$  (в метрах). Найдите среднюю скорость  $v_{\text{ср}}$  движения точки, если:

- а)  $s(t) = 4t + 3$ ,  $t_1 = 2$  с,  $t_2 = 4$  с;
- б)  $s(t) = t^2 + 2$ ,  $t_1 = 0$  с,  $t_2 = 1$  с;
- в)  $s(t) = t^2 + 4t$ ,  $t_1 = 3$  с,  $t_2 = 3,5$  с;
- г)  $s(t) = 5t + 1$ ,  $t_1 = 5$  с,  $t_2 = 6$  с;
- д)  $s(t) = t^2 + 6$ ,  $t_1 = 2$  с,  $t_2 = 5$  с;
- е)  $s(t) = t^2 + 3t$ ,  $t_1 = 1$  с,  $t_2 = 1,2$  с.

**6.2.** Известны закон движения точки по координатной прямой  $s(t) = 3t + 1$  и время движения от  $t_0 = 0$  до  $t = t_0 + \Delta t$ . Найдите:

а)  $s(t_0)$  и  $s(t_0 + \Delta t)$ ;                      в)  $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ;

б)  $\Delta s$ ;    г)  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ .

**6.3.** Известны закон движения точки по координатной прямой  $s(t) = 2t + 3$  и время движения от  $t = 1$  до  $1 + \Delta t$ . Найдите:

а)  $s(1)$  и  $s(1 + \Delta t)$ ;

б)  $\Delta s$ ;

в) среднюю скорость  $v_{\text{ср}}$ ;

г) мгновенную скорость движения в момент времени  $t = 1$ .

**6.4.** Известны закон движения точки по координатной прямой  $s(t) = kt + m$  и время движения от  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$ , где  $t_0$  — фиксировано. Найдите:

а)  $s(t_0 + \Delta t)$ ;

б)  $\Delta s$ ;

в) среднюю скорость  $v_{\text{ср}}$ ;

г) мгновенную скорость движения в момент времени  $t_0$ .

**6.5.** Известны закон движения точки по координатной прямой  $s(t) = t^2 + 1$  и время движения от  $t = 3$  до  $3 + \Delta t$ . Найдите:

а)  $s(3)$  и  $s(3 + \Delta t)$ ;                      в)  $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ ;

б)  $\Delta s$ ;    г)  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ .

**6.6.** Известны закон движения точки по координатной прямой  $s(t) = t^2 + 2t$  и время движения от  $t = 2$  до  $2 + \Delta t$ . Найдите:

а)  $s(2)$  и  $s(2 + \Delta t)$ ;

б)  $\Delta s$ ;

в) среднюю скорость  $v_{\text{ср}}$ ;

г) мгновенную скорость движения в момент времени  $t = 2$ .

**6.7.** Известны закон движения точки по координатной прямой  $s(t) = t^2$  и время движения от  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$ , где  $t_0$  — фиксировано. Найдите:

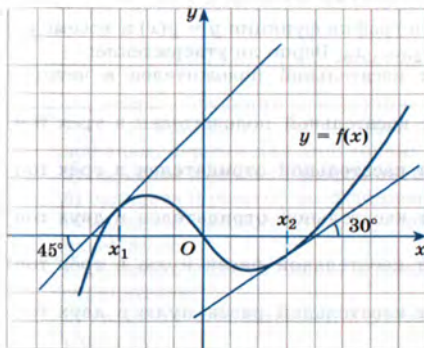
а)  $s(t_0)$  и  $s(t_0 + \Delta t)$ ;

б)  $\Delta s$ ;

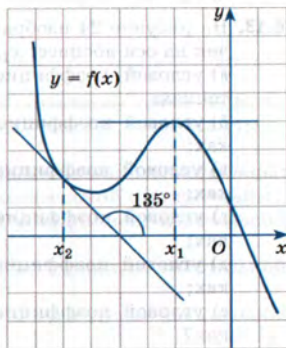
в) среднюю скорость  $v_{\text{ср}}$ ;

г) мгновенную скорость движения в момент времени  $t_0$ .

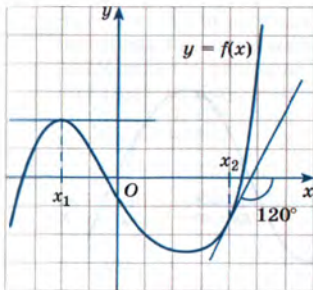
- 6.8.** Известен закон движения точки по прямой  $s = s(t)$ . Найдите мгновенную скорость движения точки в момент времени  $t$ , если:
- а)  $s(t) = t$ ;                      в)  $s(t) = 3t + 4$ ;                      д)  $s(t) = 1$ ;  
 б)  $s(t) = 2,5t$ ;                      г)  $s(t) = 4t - 7$ ;                      е)  $s(t) = t + 10$ .
- 6.9.** На рисунке 23, а—г изображён график функции  $y = f(x)$  и касательные к нему, проведённые в точках с абсциссами  $x_1$  и  $x_2$ . Найдите угловые коэффициенты этих касательных.
- 6.10.** Используя рисунок 23, а—г, найдите значения  $f'(x_1)$  и  $f'(x_2)$ .



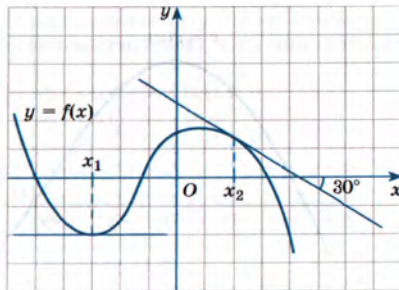
а



б



в



г

Рис. 23



**6.11.** Найдите скорость изменения функции в произвольной точке  $x$ :

а)  $y = x - 4$ ;

г)  $y = 100$ ;

б)  $y = 6 - x$ ;

д)  $y = \frac{2x - 3}{5}$ ;

в)  $y = -6,8x$ ;

е)  $y = 9,1x + 1,9$ .

**6.12.** Найдите скорость изменения функции  $y = x^2$  в точке  $x_0$ , если:

а)  $x_0 = 1$ ;

г)  $x_0 = -4$ ;

б)  $x_0 = -1$ ;

д)  $x_0 = 0,5$ ;

в)  $x_0 = 3$ ;

е)  $x_0 = 0$ .

**6.13.** На рисунке 24 изображён график функции  $y = g(x)$  и восемь точек на оси абсцисс:  $x_1, x_2, \dots, x_8$ . Верно ли утверждение:

а) угловой коэффициент касательной положителен в четырёх точках;

б) угловой коэффициент касательной положителен в трёх точках;

в) угловой коэффициент касательной отрицателен в трёх точках;

г) угловой коэффициент касательной отрицателен в двух точках;

д) угловой коэффициент касательной равен нулю в трёх точках;

е) угловой коэффициент касательной равен нулю в двух точках?

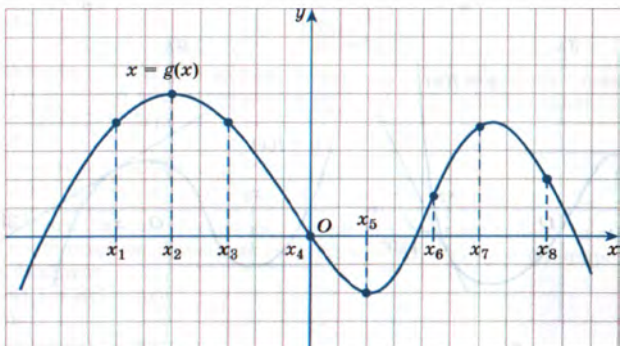


Рис. 24

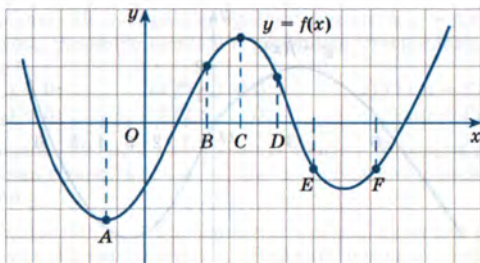


Рис. 25

**6.14.** На графике функции  $y = f(x)$  (рис. 25) отмечены точки  $A, B, C, D, E, F$ . Установите соответствие между каждой точкой и утверждением, верным для этой точки:

- а) ордината и угловой коэффициент касательной положительны;
- б) ордината и угловой коэффициент касательной отрицательны;
- в) ордината положительна, а угловой коэффициент касательной равен нулю;
- г) ордината положительна, а угловой коэффициент касательной отрицателен;
- д) ордината отрицательна, а угловой коэффициент касательной равен нулю;
- е) ордината отрицательна, а угловой коэффициент касательной положителен.

**6.15.** На рисунке 26 изображён график функции  $y = f(x)$ . Приведите примеры таких целых значений аргумента  $x_1$  и  $x_2$ , при которых выполняются условия:

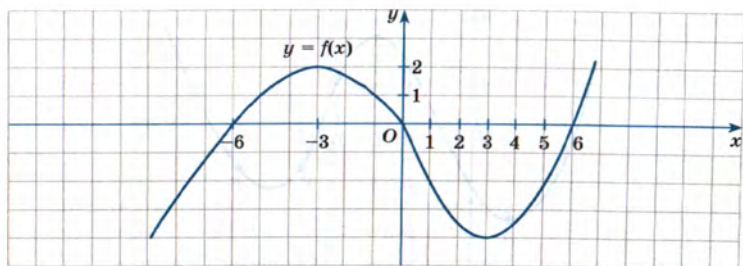
- а)  $f'(x_1) = 0, f'(x_2) > 0$ ;      г)  $f'(x_1) < 0, f'(x_2) = 0$ ;
- б)  $f'(x_1) > 0, f'(x_2) > 0$ ;      д)  $f'(x_1) < 0, f'(x_2) < 0$ ;
- в)  $f'(x_1) < 0, f'(x_2) > 0$ ;      е)  $f'(x_1) > 0, f'(x_2) < 0$ .

**6.16.** На рисунке 27 изображён график функции  $y = f(x)$  и касательные к нему, проведённые в некоторых точках. Пользуясь рисунком, сравните с нулём значения производных в точках касания:

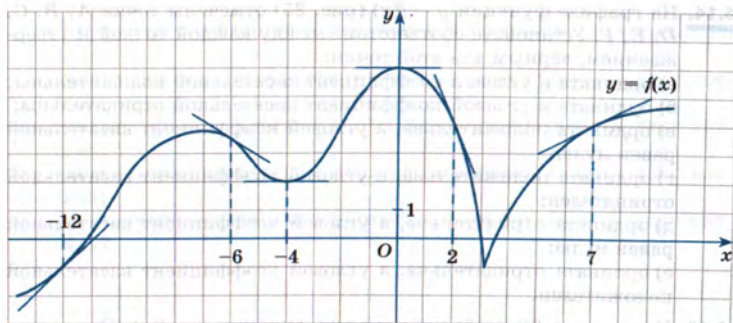
- а)  $f'(-4)$ ;      в)  $f'(-6)$ ;      д)  $f'(2)$ ;
- б)  $f'(0)$ ;      г)  $f'(7)$ ;      е)  $f'(-12)$ .

**6.17.** На рисунке 27 изображён график функции  $y = f(x)$ . Сравните:

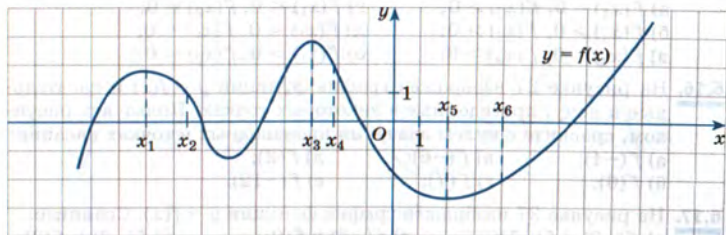
- а)  $f'(-8)$  и  $f'(-1)$ ;      в)  $f'(-3)$  и  $f'(0)$ ;      д)  $f'(-2)$  и  $f'(2)$ ;
- б)  $f'(1)$  и  $f'(5)$ ;      г)  $f'(3)$  и  $f'(-3)$ ;      е)  $f'(-9)$  и  $f'(2)$ .



Puc. 26



Puc. 27



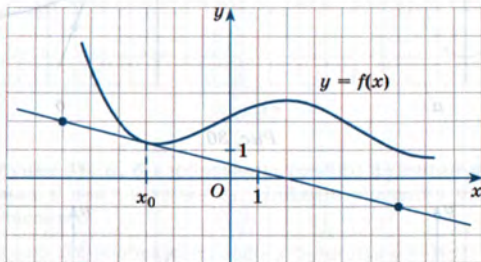
Puc. 28

**6.18.** На рисунке 28 изображён график функции  $y = f(x)$ . Пользуясь рисунком, укажите верные и неверные утверждения, ответ объясните:

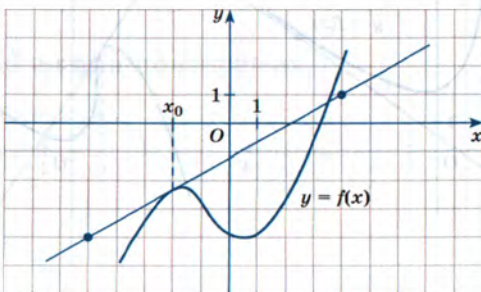
- а)  $f'(x_1) = 0$ ;                      в)  $f'(x_4) < 0$ ;                      д)  $f'(x_3) = f'(x_5)$ ;  
 б)  $f'(x_2) = 0$ ;                      г)  $f'(x_6) > 0$ ;                      е)  $f'(x_6) < f'(x_2)$ .

**6.19.** На рисунке 29, а, б изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке  $x_0$ . Найдите тангенс угла наклона касательной.

**6.20.** На рисунке 30, а, б изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке  $x_0$ . Найдите угловой коэффициент касательной.



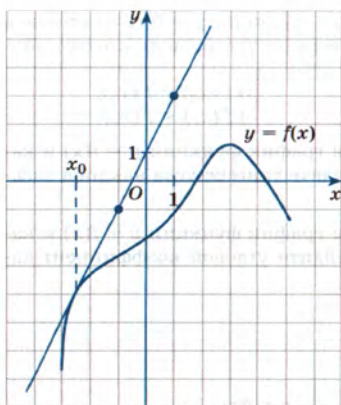
а



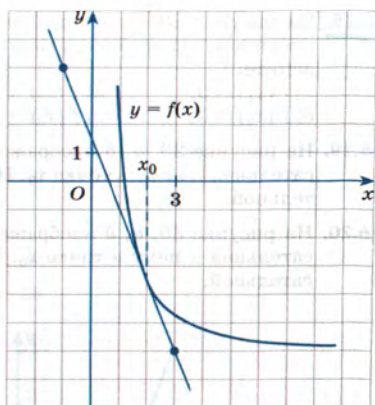
б

Рис. 29



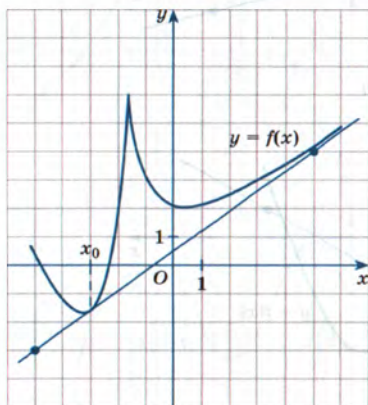


a

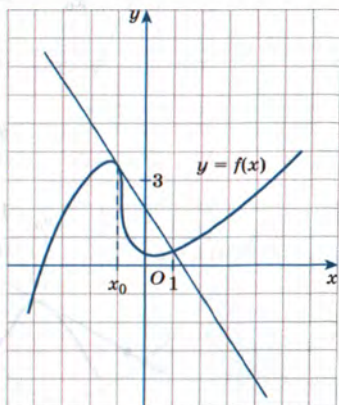


б

Рис. 30



a



б

Рис. 31

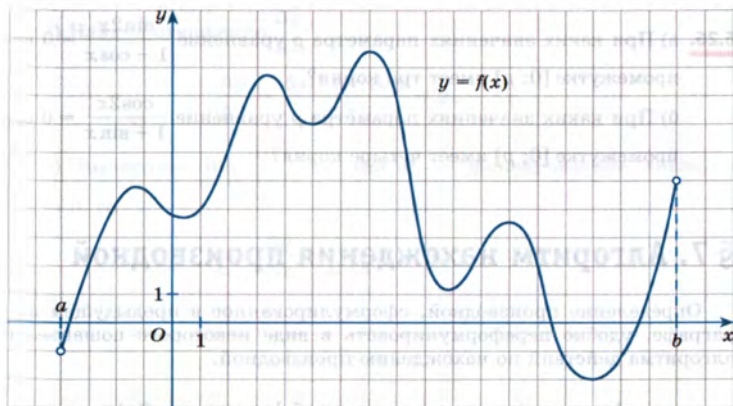


Рис. 32

- 6.21.** На рисунке 31,  $a$ ,  $b$  изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке  $x_0$ . Найдите значение производной в точке касания.
- 6.22.** На рисунке 32 изображён график функции  $y = f(x)$ , заданной на интервале  $(a; b)$ . Установите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = -10$ .

## Упражнения для повторения

Вычислите предел.

**6.23.** а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - 6x}{3x}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ .

**6.24.** а)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2}$ ;

б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x}{x}$ .

- 6.25.** Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии

$$\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \dots$$

- ИКТ 6.26.** а) При каких значениях параметра  $p$  уравнение  $\frac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 0$  на промежутке  $[0; p]$  имеет три корня?
- б) При каких значениях параметра  $p$  уравнение  $\frac{\cos 2x}{1 + \sin x} = 0$  на промежутке  $[0; p]$  имеет четыре корня?

## § 7. Алгоритм нахождения производной

Определение производной, сформулированное в предыдущем параграфе, удобно переформулировать в виде некоторого пошагового алгоритма действий по нахождению производной.

**Алгоритм нахождения производной функции  $y = f(x)$**

1. Зафиксировать значение  $x$ , найти  $f(x)$ .
2. Дать аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , перейти в новую точку  $x + \Delta x$ , найти  $f(x + \Delta x)$ .
3. Найти приращение функции:  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .
4. Составить отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .
5. Вычислить  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

Приведём несколько примеров использования алгоритма нахождения производной.

**Функция  $y = x^2$**

- 1) Зафиксируем  $x$ . Найдём  $f(x) = x^2$ .
- 2) Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , перейдём к  $x + \Delta x$ . Тогда

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^2.$$

- 3) Найдём приращение функции:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x).\end{aligned}$$

4) Найдём отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

5) Вычислим  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Так как  $x$  — фиксированное число, а  $\Delta x \rightarrow 0$ , то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Итак,

$$(x^2)' = 2x.$$

Если  $f(x) = x^2$ , то, в частности,

$$\begin{aligned} f'(0) &= 2 \cdot 0 = 0; \quad f'(1) = 2 \cdot 1 = 2; \\ f'\left(-\frac{1}{3}\right) &= 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}; \quad f'(\sqrt{5}) = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

**Функция  $y = x^3$**

1) Зафиксируем  $x$ . Найдём  $f(x) = x^3$ .

2) Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , перейдём к  $x + \Delta x$ . Тогда

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3.$$

3)  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3$ . Используем формулу  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$  разности кубов для  $a = x + \Delta x$ ,  $b = x$ . Тогда

$$a - b = \Delta x$$

и

$$\Delta y = \Delta x((x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)x + x^2) = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2).$$

4) Найдём отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(3x^2 + 3x + \Delta x + (\Delta x)^2)}{\Delta x} = 3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2.$$



5) Вычислим  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Так как  $x$  — фиксированное число, а  $\Delta x \rightarrow 0$ , то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x(\Delta x) + (\Delta x)^2) = 3x^2 + 3x \cdot 0 + 0^2 = 3x^2.$$

Итак,

$$(x^3)' = 3x^2.$$

Если  $f(x) = x^3$ , то, в частности,

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3; \quad f'\left(-\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}; \quad f'(\sqrt{5}) = 3 \cdot (\sqrt{5})^2 = 15.$$

Функция  $y = \frac{1}{x}$

1) Зафиксируем  $x$  (для определённости полагаем, что  $x > 0$ );

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

2) Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , перейдём к  $x + \Delta x$  ( $x + \Delta x > 0$ ). Тогда

$$f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}.$$

3) Найдём приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

4) Найдём отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}.$$

5) Вычислим  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Так как  $x$  — фиксированное число, а  $\Delta x \rightarrow 0$ , то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

Итак,

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Если  $f(x) = \frac{1}{x}$ , то, в частности,

$$f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1; \quad f'\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = -9; \quad f'(\sqrt{5}) = -\frac{1}{(\sqrt{5})^2} = -\frac{1}{5}.$$

Функция  $y = \sqrt{x}$

1) Зафиксируем  $x > 0$ ;  $f(x) = \sqrt{x}$ .

2) Дадим аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , перейдём к  $x + \Delta x$  ( $x + \Delta x > 0$ ). Тогда

$$f(x + \Delta x) = \sqrt{x + \Delta x}.$$

3) Найдём приращение функции:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}.$$

4) Найдём отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

5) Вычислим  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Как и в предыдущих случаях, учитываем,

что  $x$  — фиксированное число, а  $\Delta x \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Для вычисления этого предела домножим и числитель, и знаменатель дроби  $\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$  на выражение, сопряжённое числителю,

т. е. на  $\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}$  (мы уже применяли этот приём ранее — см. пример 36 из § 4). Получим:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} &= \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{(\sqrt{x + \Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}.\end{aligned}$$

Значит,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Итак,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Если  $f(x) = \sqrt{x}$ , то, в частности,

$$f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}; \quad f'\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{9}}} = \frac{3}{2}; \quad f'(\sqrt{5}) = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{5}}.$$

## Упражнения

Найдите производную функции.

- 7.1.** а)  $y = 0,2x + 8$ ;      в)  $y = -4(3x + 1)$ ;      д)  $y = \frac{6x - 5}{4}$ ;  
б)  $y = -2,7x - 5$ ;      г)  $y = 7(2x + 3)$ ;      е)  $y = \frac{9 - 2x}{3}$ .
- 7.2.** а)  $y = 3(2x - 5) + 4x$ ;      г)  $y = -\frac{1}{3}(3x + 2) - x$ ;  
б)  $y = \frac{1}{2}(x + 4) - (1 - 0,5x)$ ;      д)  $y = 4(x - 3) - (2x + 1)$ ;  
в)  $y = 2(x - 3) + 3(x - 2)$ ;      е)  $y = -5(x + 1) + 6(1 - x)$ .

**7.3.** Используя алгоритм вычисления производной, найдите производную функции:

а)  $y = 2x^2$ ;

в)  $y = -\frac{2}{3}x^2$ ;

б)  $y = x^2 - x$ ;

г)  $y = x^2 + 3x$ .

Найдите значение производной данной функции в точке  $x_0$ .

**7.4.** а)  $y = 7, x_0 = 2$ ;

г)  $y = x, x_0 = -1$ ;

б)  $y = -5x + 2, x_0 = 3$ ;

д)  $y = 4x - 1, x_0 = 0$ ;

в)  $y = \frac{2x-5}{4}, x_0 = -6$ ;

е)  $y = \frac{6-x}{3}, x_0 = 0,3$ .

**7.5.** а)  $y = x^2, x_0 = -5$ ;

г)  $y = x^3, x_0 = 4$ ;

б)  $y = \frac{1}{x}, x_0 = -2$ ;

д)  $y = \frac{1}{x}, x_0 = -3$ ;

в)  $y = \sqrt{x}, x_0 = 9$ ;

е)  $y = \sqrt{x}, x_0 = 25$ .

**7.6.** Найдите скорость изменения данной функции в точке  $x_0$ :

а)  $y = x^3, x_0 = -2$ ;

г)  $y = x^2, x_0 = 0,5$ ;

б)  $y = \sqrt{x}, x_0 = 64$ ;

д)  $y = \sqrt{x}, x_0 = 225$ ;

в)  $y = \frac{1}{x}, x_0 = \frac{1}{7}$ ;

е)  $y = \frac{1}{x}, x_0 = 1,2$ .

**7.7.** Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ :

а)  $y = \frac{1}{x}, x_0 = 2,5$ ;

г)  $y = \frac{1}{x}, x_0 = -0,3$ ;

б)  $y = \sqrt{x}, x_0 = 1,44$ ;

д)  $y = \sqrt{x}, x_0 = \frac{4}{9}$ ;

в)  $y = x^3, x_0 = -\frac{2}{3}$ ;

е)  $y = x^2, x_0 = 0,02$ .



**7.8.** Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ :

а)  $y = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 1$ ;                      г)  $y = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 4$ ;

б)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = -2\frac{1}{4}$ ;                      д)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = 0,12$ ;

в)  $y = x^2$ ,  $x_0 = 0,5$ ;                      е)  $y = x^3$ ,  $x_0 = -1$ .

**7.9.** Найдите угол наклона касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ :

а)  $y = x^3$ ,  $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;                      г)  $y = x^2$ ,  $x_0 = -0,5$ ;

б)  $y = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = \frac{1}{12}$ ;                      д)  $y = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 0,75$ ;

в)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = \sqrt{2}$ ;                      е)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = -\sqrt{3}$ .

**7.10.** Решите уравнение  $f'(x) = a$ , если:

а)  $f(x) = x^2$ ,  $a = -15$ ;                      г)  $f(x) = x^2$ ,  $a = \frac{1}{3}$ ;

б)  $f(x) = x^3$ ,  $a = 12$ ;                      д)  $f(x) = x^3$ ,  $a = 4,5$ ;

в)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 1,5$ ;                      е)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 2$ .

**7.11.** Решите неравенство  $f'(x) > a$ , если:

а)  $f(x) = x^2$ ,  $a = 0,1$ ;                      г)  $f(x) = x^2$ ,  $a = -\frac{2}{7}$ ;

б)  $f(x) = x^3$ ,  $a = 6$ ;                      д)  $f(x) = x^3$ ,  $a = \frac{3}{16}$ ;

в)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = -1,96$ ;                      е)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = -3$ .

**7.12.** Решите неравенство  $f'(x) \leq a$ , если:

а)  $f(x) = x^2$ ,  $a = -1$ ;                      г)  $f(x) = x^2$ ,  $a = 0$ ;

б)  $f(x) = x^3$ ,  $a = 27$ ;                      д)  $f(x) = x^3$ ,  $a = 108$ ;

в)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = -2,25$ ;                      е)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = -0,04$ .

**7.13.** При каких значениях аргумента угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = f(x)$  равен угловому коэффициенту касательной к графику функции  $y = g(x)$ , если:

а)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x^3$ ;                      б)  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ ?

**7.14.** При каких значениях аргумента скорость изменения функции  $y = f(x)$  равна скорости изменения функции  $y = g(x)$ , если:

а)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x^2$ ;      б)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $g(x) = x^3$ ?

**7.15.** Используя алгоритм нахождения производной, докажите, что:

а)  $(ax^2)' = 2ax$ ;      в)  $(ax^2 + c)' = 2ax$ ;  
б)  $(ax^2 + bx)' = 2ax + b$ ;      г)  $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$ .

## Упражнения для повторения

Постройте и прочитайте график функции.

**7.16.** а)  $y = \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2}{x^2 - 3x}$ ;      б)  $y = \frac{(x-3)(x+1)}{x^4 - 2x^3 - 3x^2}$ .

**ИКТ 7.17.** а)  $y = \begin{cases} 2^x, & \text{если } x < 3, \\ 8(x-2)^{-1}, & \text{если } x \geq 3; \end{cases}$       б)  $y = \begin{cases} x^{-2}, & \text{если } x < 0, \\ \ln x, & \text{если } x > 0. \end{cases}$

**7.18.** Решите уравнение:

а)  $\log_2 \sqrt{3x+13} + \log_4(5x-1) = \log_{\sqrt[3]{3}} 3$ ;

б)  $\ln^2 x + \ln(ex) = \ln e^3$ .

## § 8. Дифференцируемые функции

Алгоритм нахождения производной начинается с вычисления разностей  $\Delta x = (x + \Delta x) - x$  и  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ . Слово «разность» на английском языке звучит как *difference*, на итальянском как *differenza*, а на испанском — *diferencia*. Видимо, по этой причине для процедуры нахождения производной функции в истории науки был выбран специальный термин — *дифференцирование функции*. Соответственно, для тех функций, для которых эта процедура даёт конечный ответ, также есть похожий термин.

**Определение.** Если функция  $y = f(x)$  имеет производную в точке  $x_0$ , то функцию  $y = f(x)$  называют дифференцируемой в точке  $x_0$ .

Для дифференцируемой функции есть формула приближённого вычисления её значений.

$$\text{Если функция } y = f(x) \text{ дифференцируема в точке } x_0, \text{ то} \\ f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (1)$$

Смотрите, по определению  $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . От этого точного равенства перейдём к приближённому равенству:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &\approx \frac{\Delta y}{\Delta x}, \\ f'(x_0) &\approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \\ f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &\approx f'(x_0) \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Обозначим  $x_0 + \Delta x$  буквой  $x$ . Тогда  $\Delta x = x - x_0$  и поэтому

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

**Пример** Найти приближённое значение для  $\sqrt{4,5}$ .

**Решение.** Речь идёт о вычислении приближённого значения функции  $y = \sqrt{x}$  в точке  $x = 4,5$ .

Производная функции  $y = \sqrt{x}$  равна  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Воспользуемся формулой (1):

$$\sqrt{x} \approx \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0);$$

$$\sqrt{4,5} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(4,5 - 4);$$

$$\sqrt{4,5} \approx 2 + \frac{0,5}{4} = 2,125.$$

**Ответ:**  $\sqrt{4,5} \approx 2,125$ .

Вычисление на калькуляторе показывает, что  $\sqrt{4,5} = 2,12132\dots$ . Отсюда следует, что формула (1) даёт вполне пригодное для практики приближение.

Работа современных калькуляторов основана именно на подобных (1) приближённых формулах. Исторически, сначала математики создали такие приближённые формулы, затем по ним были составлены таблицы вычислений, а потом эти таблицы были записаны в память калькуляторов и более сложных вычислительных машин.

Выясним, какая взаимосвязь существует между понятиями непрерывности и дифференцируемости функции в точке. Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то выполняется приближённое равенство  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , которое становится всё точнее по мере приближения  $x$  к  $x_0$ . Значит,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = f(x_0).$$

Полученное равенство  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  означает, что функция  $y = f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ .

Итак, если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке, то она и непрерывна в этой точке.

Обратное утверждение неверно. Например, функция  $y = |x - 1|$  непрерывна везде, в частности в точке  $x = 1$  (рис. 33), но касательная к графику функции в «точке стыка» (1; 0) не существует. Если в некоторой точке к графику функции нельзя провести касательную, то в этой точке не существует производная, т. е. функция  $y = |x|$  не дифференцируема в точке  $x = 1$ .

Ещё один пример. На рисунке 34 изображён график функции  $y = \sqrt[3]{x}$ . Эта функция непрерывна на всей числовой прямой, в том числе в точке  $x = 0$ . И касательная к графику функции существует в любой точке, в том числе в точке  $x = 0$ . Но в этой точке касательная совпадает с осью  $Oy$ , т. е. перпендикулярна оси абсцисс, уравнение касательной имеет вид  $x = 0$ . Углового коэффициента у такой прямой нет, значит, не существует и производная в точке  $x = 0$ , т. е. функция  $y = \sqrt[3]{x}$  не дифференцируема в точке  $x = 0$ .

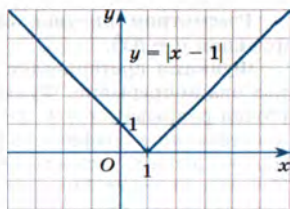


Рис. 33



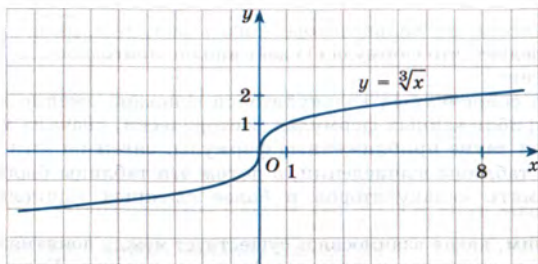


Рис. 34

График функции помогает сделать вывод о её дифференцируемости. Если в точке  $x = a$  можно провести касательную к графику, не параллельную оси ординат, то в этой точке функция дифференцируема. Если в точке  $x = b$  касательная к графику функции не существует или она параллельна оси ординат, то в этой точке функция не дифференцируема.

В математике принята такая терминология: если из условия А следует условие В, то В называют *необходимым условием* для А; если из условия В следует условие А, то В называют *достаточным условием* для А. Проведённые выше рассуждения о связи дифференцируемости и непрерывности мы можем теперь завершить следующим выводом:

непрерывность функции в точке является необходимым, но не достаточным условием для дифференцируемости функции в этой точке.

Рассмотрим рисунок 35, на нём изображён график некоторой функции  $y = f(x)$ .

Функция претерпевает разрыв в точке  $x = -2$ , в остальных точках она непрерывна. Функция не дифференцируема в точках  $x = -2$  (точка разрыва),  $x = 1$  (точка излома графика функции, в которой касательная к графику не существует),  $x = 4$  (в этой точке касательная к графику существует, но она перпендикулярна оси абсцисс). Точки, в которых функция непрерывна, но не дифференцируема, будем называть *критическими точками*. Иными словами, критическая точка функции  $y = f(x)$  — это такая точка  $x$ , в которой функ-

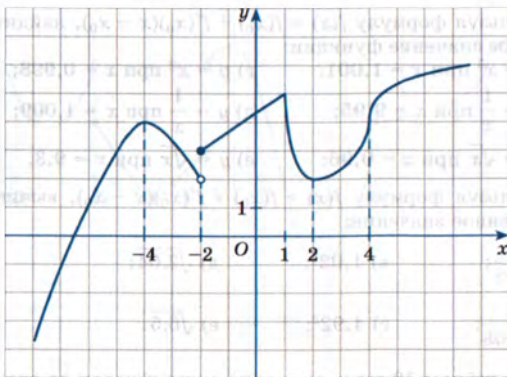


Рис. 35

ция непрерывна, но  $f'(x)$  не существует. На рисунке 35 две критические точки:  $x = 1$  и  $x = 4$ .

Обратите внимание ещё на две точки графика, представленного на рисунке 35. В точках  $x = -4$ ,  $x = 2$  касательная к графику функции параллельна оси абсцисс. Такие точки будем называть *стационарными точками*. Иными словами, стационарная точка функции  $y = f(x)$  — это такая точка  $x$ , в которой  $f'(x) = 0$ .

## Упражнения

**8.1.** Найдите приращение функции  $\Delta y$  и  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , если:

- а)  $y = 0,4x$ ,  $x_0 = -1$ ,  $\Delta x = 0,25$ ;
- б)  $y = x^2$ ,  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0,01$ ;
- в)  $y = \sqrt{x}$ ,  $x_0 = 4$ ,  $\Delta x = 0,41$ ;
- г)  $y = -5x + 6$ ,  $x_0 = 0$ ,  $\Delta x = 0,15$ ;
- д)  $y = x^3$ ,  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = 0,1$ ;
- е)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = 3$ ,  $\Delta x = 0,2$ .

**8.2.** Используя формулу  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , найдите приближённое значение функции:

а)  $y = x^3$  при  $x = 1,001$ ;      г)  $y = x^2$  при  $x = 0,998$ ;

б)  $y = \frac{1}{x}$  при  $x = 9,95$ ;      д)  $y = \frac{1}{x}$  при  $x = 1,009$ ;

в)  $y = \sqrt{x}$  при  $x = 0,96$ ;      е)  $y = \sqrt{x}$  при  $x = 9,3$ .

**8.3.** Используя формулу  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ , вычислите приближённое значение:

а)  $\frac{1}{0,98}$ ;      в)  $1,02^3$ ;      д)  $\sqrt{2,04}$ ;

б)  $\frac{1}{2,008}$ ;      г)  $4,92^2$ ;      е)  $\sqrt{6,5}$ .

**8.4.** Куб с ребром 10 см равномерно отшлифовали со всех сторон, в результате чего каждое ребро уменьшилось на 0,05 см. Вычислите приближённо объём куба после шлифовки.

**8.5.** На рисунке 36 изображён график функции  $y = f(x)$ . Укажите точки, в которых функция не дифференцируема.

**8.6.** На рисунке 37,  $a—г$  изображены графики некоторых функций. Для каждой функции укажите точки, в которых производная равна нулю (стационарные точки), и точки, в которых производная не существует (точки разрыва и критические точки).

**8.7.** На рисунке 38,  $a—г$  изображены графики некоторых функций. Используя рисунок, укажите стационарные и критические точки.

**8.8.** Изобразите схематично график функции, обладающей следующими свойствами:

а) функция непрерывна и дифференцируема на промежутке  $[-7; 5]$  и имеет две стационарные точки при  $x = -3$ ,  $x = 2$ ;

б) функция непрерывна на отрезке  $[-4; 6]$ , но не дифференцируема в точке  $x = 1$ , стационарных и критических точек не имеет;

в) функция определена на промежутке  $(-5; 5)$ , имеет разрыв при  $x = 0$ , имеет критическую точку при  $x = -2$  и стационарную точку при  $x = 3$ ;

г) функция непрерывна на промежутке  $(-6; 3)$ , не дифференцируема при  $x = -1$ , имеет одну критическую точку.

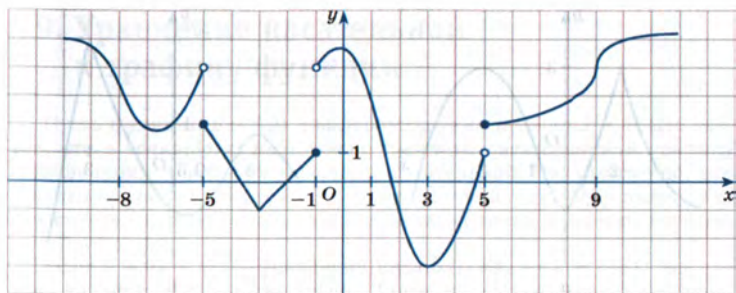
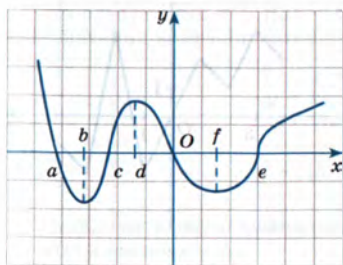
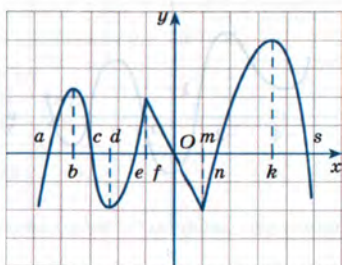


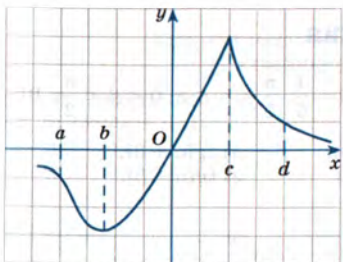
Рис. 36



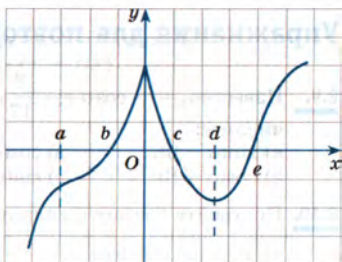
a



б



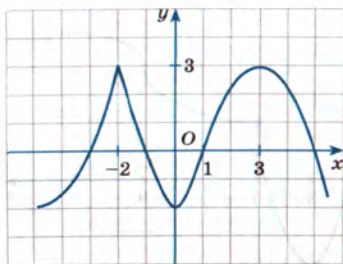
в



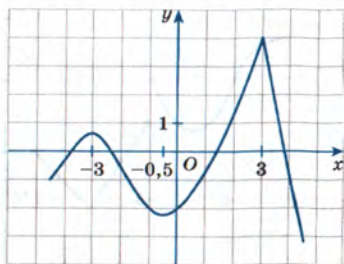
г

Рис. 37

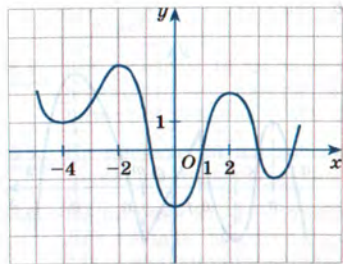




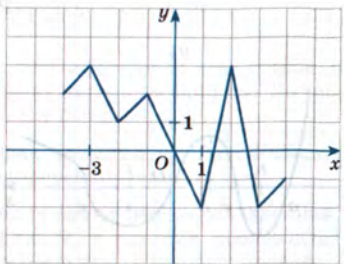
а



б



в



г

Рис. 38

## Упражнения для повторения

**8.9.** Известно, что  $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ ,  $\cos \beta = \frac{4}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ . Вычислите:

а)  $\sin(\alpha - \beta)$ ;

в)  $\cos(\alpha - \beta)$ ;

д)  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ ;

б)  $\cos(\alpha + \beta)$ ;

г)  $\sin(\alpha + \beta)$ ;

е)  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ .

**8.10.** Постройте график функции:

а)  $y = \sin^2 x + 2\cos 2x$ ;

б)  $y = 2\cos^2 \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{2}$ .

**8.11.** Решите уравнение:

а)  $\cos 2x = 1 - 3\sin 2x$ ;

б)  $2\sin 4x + \cos 4x = -1$ .

## § 9. Уравнение касательной к графику функции

Пусть функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x = a$ . Это значит, что в точке  $M(a; f(a))$  можно провести касательную к графику этой функции. Составим уравнение касательной. Это уравнение, как уравнение любой прямой, не параллельной оси  $Oy$ , имеет вид  $y = kx + m$ , поэтому задача состоит в нахождении значений коэффициентов  $k$  и  $m$ .

Если  $y = kx + m$  — уравнение касательной, то  $k = f'(a)$ , так что один коэффициент мы уже знаем. Далее, касательная проходит через точку  $M(a; f(a))$ , а это значит, что, подставив координаты точки  $M$  в уравнение  $y = kx + m$ , мы получим верное равенство  $f(a) = ka + m$ , откуда следует, что  $m = f(a) - ka$ . Остаётся лишь подставить найденные значения коэффициентов  $k$  и  $m$  в уравнение  $y = kx + m$ :

$$\begin{aligned}y &= kx + m; \\y &= kx + (f(a) - ka); \\y &= f(a) + k(x - a); \\y &= f(a) + f'(a)(x - a).\end{aligned}\tag{1}$$

Итак, мы вывели уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$ .

Для процедуры нахождения касательной удобно использовать пошаговый алгоритм.

### Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$

1. Обозначить абсциссу точки касания буквой  $a$ .
2. Вычислить  $f(a)$ .
3. Найти  $f'(x)$  и вычислить  $f'(a)$ .
4. Подставить найденные числа  $a$ ,  $f(a)$ ,  $f'(a)$  в формулу (1).

**Пример 1** Составить уравнение касательной к графику функции  $y = x^3$  в точке  $x = -1$ .

**Решение.**  $f(x) = x^3$ . Воспользуемся алгоритмом.

- 1) Обозначим абсциссу точки касания буквой  $a$ . По условию  $a = -1$ .

2) Вычислим  $f(a)$ , т. е.  $f(-1)$ :  $f(-1) = (-1)^3 = -1$ .

3)  $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$ ;  $f'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3$ .

4) Подставим найденные числа  $a$ ,  $f(a)$ ,  $f'(a)$  в формулу (1):

$$y = -1 + 3(x + 1);$$
$$y = 3x + 2.$$

**Ответ:**  $y = 3x + 2$ .

**Пример 2** К графику функции  $y = \sqrt{x}$  провести касательную так, чтобы она была параллельна прямой  $y = \frac{x}{4} - 1$ .

**Решение.** Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной, учитывая, что в данном примере  $f(x) = \sqrt{x}$ . Но обратите внимание: здесь, в отличие от предыдущего примера, не указана абсцисса  $a$  точки касания.

Начнём рассуждать так. Искомая касательная должна быть параллельна прямой  $y = \frac{x}{4} - 1$ . Две прямые параллельны тогда, и только тогда, когда равны их угловые коэффициенты. Значит, угловой коэффициент искомой касательной должен быть равен угловому коэффициенту заданной прямой:  $k_{\text{кас}} = \frac{1}{4}$ . Однако  $k_{\text{кас}} = f'(a)$ . Таким образом, значение  $a$  мы можем найти из уравнения  $f'(a) = \frac{1}{4}$ .

Имеем:  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ;  $f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ . Интересующее нас уравнение  $f'(a) = \frac{1}{4}$  теперь можно записать так:  $\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{4}$ . Решим это уравнение:

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{4}; \quad 2\sqrt{a} = 4; \quad \sqrt{a} = 2, \quad a = 4.$$

Теперь для составления уравнения искомой касательной можно действовать по алгоритму.

1)  $a = 4$ .

2)  $f(a) = \sqrt{4} = 2$ .

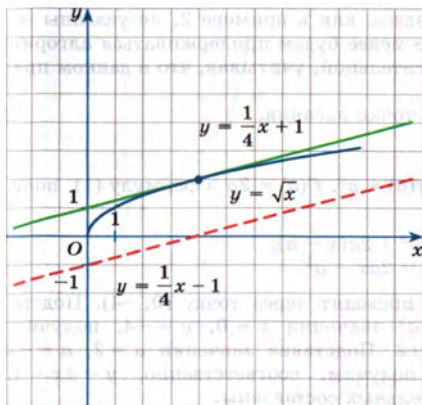


Рис. 39

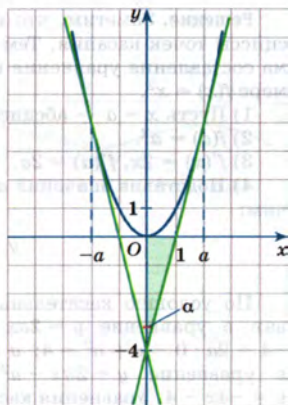


Рис. 40

$$3) f'(a) = \frac{1}{4}.$$

4) Подставив значения  $a = 4$ ,  $f(a) = 2$ ,  $f'(a) = \frac{1}{4}$  в формулу (1), получим:

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4); \quad y = \frac{1}{4}x + 1.$$

На рисунке 39 изображён график функции  $y = \sqrt{x}$ , проведена прямая  $y = \frac{1}{4}x + 1$  — касательная к графику функции  $y = \sqrt{x}$  в точке  $(4; 2)$  и прямая  $y = \frac{x}{4} - 1$  (пунктиром), которой параллельна касательная.

Ответ:  $y = \frac{1}{4}x + 1$ .

**Пример 3\*** Из точки  $(0; -4)$  проведены две касательные к параболе  $y = x^2$  (рис. 40). Найти угол между этими касательными.



**Решение.** Заметим, что и здесь, как в примере 2, не указаны абсциссы точек касания. Тем не менее будем придерживаться алгоритма составления уравнения касательной, учитывая, что в данном примере  $f(x) = x^2$ .

1) Пусть  $x = a$  — абсцисса точки касания.

2)  $f(a) = a^2$ .

3)  $f'(x) = 2x$ ,  $f'(a) = 2a$ .

4) Подставив значения  $a$ ,  $f(a) = a^2$ ,  $f'(a) = 2a$  в формулу (1), получим:

$$\begin{aligned}y &= a^2 + 2a(x - a); \\y &= 2ax - a^2.\end{aligned}$$

По условию касательные проходят через точку  $(0; -4)$ . Подставив в уравнение  $y = 2ax - a^2$  значения  $x = 0$ ,  $y = -4$ , получим:  $-4 = 2a \cdot 0 - a^2$ ;  $a^2 = 4$ ;  $a = \pm 2$ . Подставив значения  $a = 2$ ,  $a = -2$  в уравнение  $y = 2ax - a^2$ , получим, соответственно,  $y = 4x - 4$ ,  $y = -4x - 4$ . Уравнения касательных составлены.

Осталось ответить на вопрос задачи: чему равен угол  $\alpha$  между касательными? Обратите внимание на прямоугольный треугольник, образованный правой касательной и осями координат, с острым углом

$\frac{\alpha}{2}$  между касательной и осью ординат. Катеты этого треугольника равны 4 и 1, а  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$ . Значит,

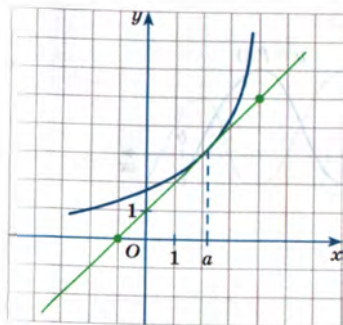
$$\frac{\alpha}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{4}, \alpha = 2\operatorname{arctg} \frac{1}{4}.$$

**Ответ:**  $2\operatorname{arctg} \frac{1}{4}$ .

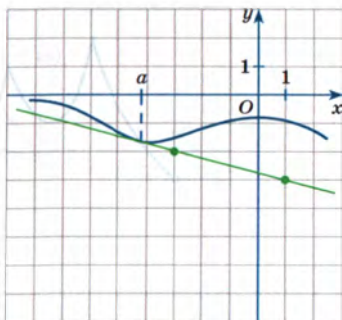
## Упражнения

**9.1.** а) На рисунке 41,  $a$ ,  $b$  изображён график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему, проведённая в точке  $x = a$ . Найдите тангенс угла между касательной и положительным направлением оси абсцисс.

б) На рисунке 42,  $a$ ,  $b$  изображён график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему, проведённая в точке  $x = a$ . Найдите угловой коэффициент касательной.

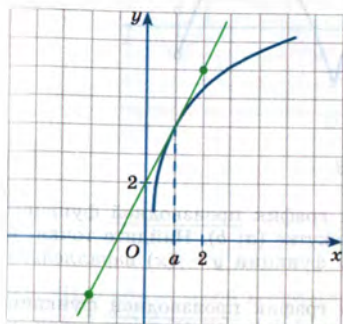


*a*

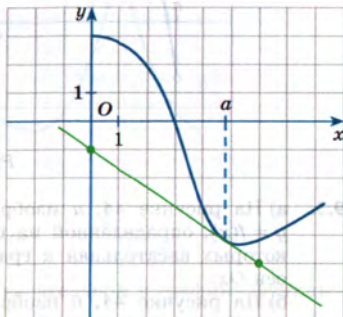


*б*

Рис. 41



*a*



*б*

Рис. 42

- 9.2. а) На рисунке 43, *a* изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(a; b)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 6$ .  
 б) На рисунке 43, *б* изображён график функции  $y = f(x)$ , определённой на интервале  $(a; b)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = -4$ .

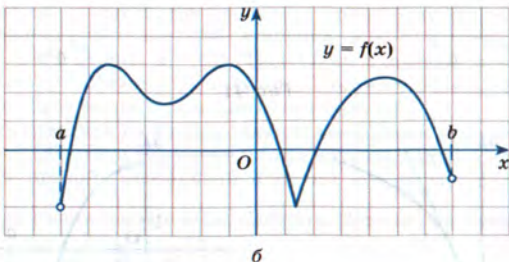
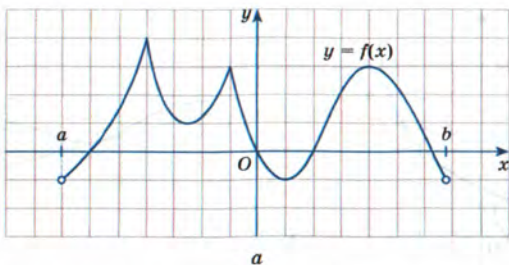
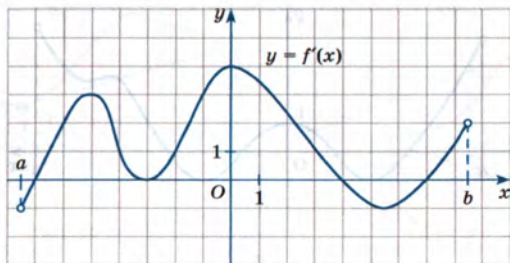
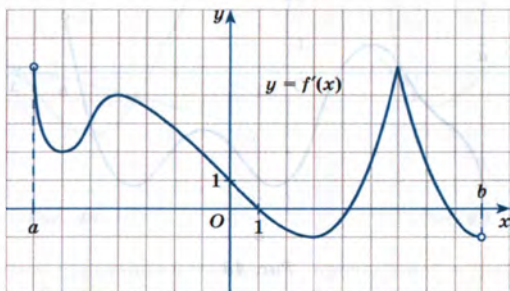


Рис. 43

- 9.3. а) На рисунке 44, а изображён график производной функции  $y = f'(x)$ , определённой на промежутке  $(a; b)$ . Найдите точки, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна оси  $Ox$ .
- б) На рисунке 44, б изображён график производной функции  $y = f'(x)$ , определённой на промежутке  $(a; b)$ . Найдите точки, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 100$ .
- 9.4. а) На рисунке 45, а изображён график производной функции  $y = f'(x)$ , определённой на промежутке  $(a; b)$ . Найдите точки, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = x + 6$ .
- б) На рисунке 45, б изображён график производной функции  $y = f'(x)$ , определённой на промежутке  $(a; b)$ . Найдите точки, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = -2x - 5$ .



a



б

Рис. 44

**9.5.** Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$ , если:

а)  $f(x) = x^2$ ,  $a = 4,5$ ;

г)  $f(x) = x^3$ ,  $a = 1,2$ ;

б)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 6,25$ ;

д)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 0,25$ ;

в)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = \frac{2}{7}$ ;

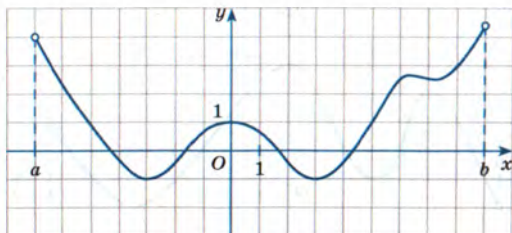
е)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = 0,9$ .

**9.6.** Найдите угол наклона касательной к положительному направлению оси  $Ox$ :

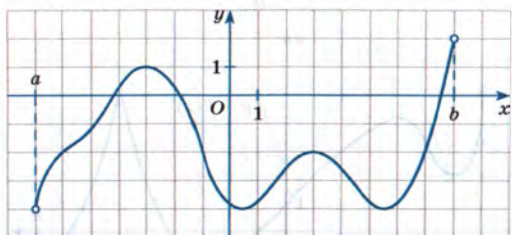
а) проведённой к гиперболы  $y = \frac{1}{x}$  в точке  $a = 1$ ;

б) проведённой к ветви параболы  $y = \sqrt{x}$  в точке  $a = 0,75$ .





*a*



*б*

Рис. 45

**9.7.** Найдите абсциссу  $a$  точки касания прямой и графика данной функции, если известно значение производной в точке касания:

а)  $y = x^3$ ,  $y'(a) = 12$ ;

г)  $y = x^2$ ,  $y'(a) = -6$ ;

б)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y'(a) = -16$ ;

д)  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y'(a) = -0,09$ ;

в)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y'(a) = 3$ ;

е)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y'(a) = 0,1$ .

**9.8.** Составьте уравнение касательной, проведённой к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$ :

а)  $f(x) = x^2$ ,  $a = -3$ ;

г)  $f(x) = x^3$ ,  $a = -2$ ;

б)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 4$ ;

д)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 9$ ;

в)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = -1$ ;

е)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = 2$ .

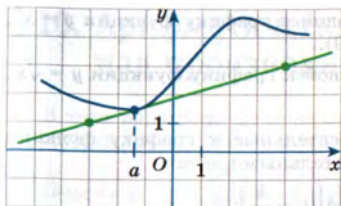


Рис. 46

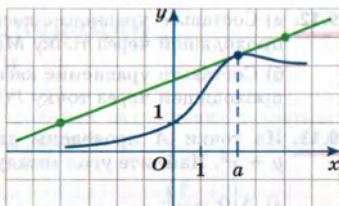


Рис. 47

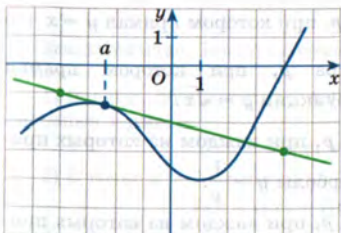


Рис. 48

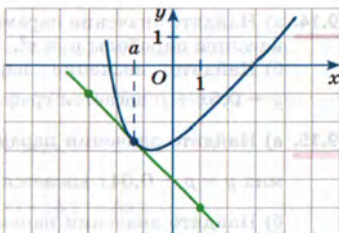


Рис. 49

**9.9.** Составьте уравнение касательной, проведённой к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$  на указанном рисунке:

- а) рис. 46;      б) рис. 47;      в) рис. 48;      г) рис. 49.

**9.10.** Найдите абсциссу точки касания, если известно, что касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна указанной прямой:

- а)  $f(x) = x^3$ ,  $y = -2$ ;      г)  $f(x) = x^2$ ,  $y = 1$ ;  
 б)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $y = 5 - x$ ;      д)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $y = 3 - 4x$ ;  
 в)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $y = 0,5x + 1$ ;      е)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $y = x - 3$ .

**9.11.** Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$ , параллельной заданной прямой:

- а)  $f(x) = x^3$ ,  $y = 3x - 5$ ;      г)  $f(x) = x^2$ ,  $y = -2x + 1$ ;  
 б)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $y = 1 - 4x$ ;      д)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $y = -x + 6$ ;  
 в)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $y = x + 1$ ;      е)  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $y = \frac{1}{4}x - 3$ .

**9.12.** а) Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = x^2$ , проходящей через точку  $M(0; -9)$ .

б) Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = \sqrt{x}$ , проходящей через точку  $P(0; 2)$ .

**9.13.** Из точки  $A$  проведены две касательные к графику функции  $y = x^2$ . Найдите угол между касательными, если:

а)  $A\left(0; -\frac{1}{4}\right)$ ;

в)  $A\left(0; -\frac{1}{12}\right)$ ;

б)  $A(0; -9)$ ;

г)  $A(0; -16)$ .

**9.14.** а) Найдите значение параметра  $p$ , при котором прямая  $y = x + p$  касается параболы  $y = x^2$ .

б) Найдите значение параметра  $p$ , при котором прямая  $y = 0,5x + p$  касается графика функции  $y = \sqrt{x}$ .

**9.15.** а) Найдите значения параметра  $p$ , при каждом из которых прямая  $y = p - 0,04x$  касается гиперболы  $y = \frac{1}{x}$ .

б) Найдите значения параметра  $p$ , при каждом из которых прямая  $y = 3x + p$  касается кубической параболы  $y = x^3$ .

## Упражнения для повторения

**9.16.** Упростите выражение:

а) 
$$\frac{\sin\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \frac{\operatorname{tg}(\pi - \alpha)}{\cos(3\pi + \alpha)};$$

б) 
$$\frac{\cos(4\pi - \beta)}{\operatorname{tg}(\pi + \beta)} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2} - \beta\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right)}.$$

Решите уравнение.

**9.17.** а)  $\sin 2x + \sin x = \sin 3x$ ;

б)  $\sin x + \sin 5x = 1 - 2\sin^2 x$ ;

в)  $\cos 3x = \cos 5x + \sin 4x$ ;

г)  $2\cos^2 x - \sin 3x = 1 + \sin 7x$ .

**9.18.** а)  $2\sin 2x + 3\operatorname{tg} x = 5$ ;

б)  $\sqrt{1 - \sin 4x} = \sqrt{6} \cos 2x$ .

## § 10. Арифметические операции над производными

В этом параграфе речь пойдёт о правилах нахождения производной суммы, произведения и частного функций.

**Теорема 1.** Если функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  дифференцируемы в точке  $x$ , то и их сумма дифференцируема в точке  $x$ , причём производная суммы равна сумме производных:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

**Доказательство.** Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Введём обозначение:  $f(x) + g(x) = h(x)$ . Для фиксированного значения  $x$  имеем:

$$h(x) = f(x) + g(x).$$

2) В точке  $x + \Delta x$  имеем:

$$h(x + \Delta x) = f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x).$$

3)

$$\begin{aligned}\Delta y &= h(x + \Delta x) - h(x) = (f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)) - (f(x) + g(x)) = \\ &= (f(x + \Delta x) - f(x)) + (g(x + \Delta x) - g(x)) = \Delta f + \Delta g.\end{aligned}$$

Итак,  $\Delta y = \Delta f + \Delta g$ .

4)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x}.$$

5)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{\Delta g}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f'(x) + g'(x).$$

Итак,

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

Обычно эту теорему формулируют в виде следующего правила: *производная суммы равна сумме производных*. При этом речь может идти о дифференцировании суммы любого числа функций.

**Пример 1** Найти скорость изменения функции  $y = x^2 + \sqrt{x} - 2x + 5$  в точке  $x = 16$ .



**Решение.** Скорость изменения функции в точке  $x = 16$  — это, напомним, значение производной в указанной точке. Имеем:

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 + \sqrt{x} - 2x + 5)' = (x^2)' + (\sqrt{x})' + (-2x + 5)' = \\ &= 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} + (-2) = 2x - 2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}; \\ y'(16) &= 2 \cdot 16 - 2 + \frac{1}{2\sqrt{16}} = 30\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

**Теорема 2.** Если функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  дифференцируемы в точке  $x$ , то и их произведение дифференцируемо в точке  $x$ , причём производная произведения вычисляется по следующему правилу<sup>1</sup>:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

**Доказательство.** Воспользуемся алгоритмом нахождения производной и тем, что равенство  $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta f$  можно записать в виде  $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f$ .

1) Введём обозначение:  $f(x)g(x) = h(x)$ .

2) В точке  $x + \Delta x$  имеем:

$$\begin{aligned} h(x + \Delta x) &= f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) = (f(x) + \Delta f)(g(x) + \Delta g) = \\ &= f(x)g(x) + \Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g. \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \Delta h &= h(x + \Delta x) - h(x) = \\ &= (f(x)g(x) + \Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g) - f(x)g(x) = \\ &= \Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g. \end{aligned}$$

4)

$$\frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{\Delta f g(x) + f(x)\Delta g + \Delta f \Delta g}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \frac{\Delta g}{\Delta x} f(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x.$$

5)

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta f}{\Delta x} g(x) + \frac{\Delta g}{\Delta x} f(x) + \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta g}{\Delta x} \cdot \Delta x \right) = \\ &= f'(x)g(x) + g'(x)f(x) + f'(x)g'(x) \cdot 0 = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Это правило иногда называют правилом Лейбница.

Поскольку  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta x} = h'(x)$ , а  $h(x) = f(x)g(x)$ , то получаем, что

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Обычно эту теорему формулируют в виде следующего правила:

производная произведения двух функций равна сумме двух слагаемых: первое слагаемое есть произведение производной первой функции на вторую функцию, а второе слагаемое есть произведение первой функции на производную второй функции.

**Пример 2** Найти угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = x^3\sqrt{x}$  в точке  $x = 1$ .

**Решение.** Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке  $x = 1$  — это, напомним, значение производной в указанной точке. Имеем:

$$y' = (x^3\sqrt{x})' = (x^3)'\sqrt{x} + x^3(\sqrt{x})' = 3x^2\sqrt{x} + x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$y'(1) = 3 \cdot 1^2 \cdot \sqrt{1} + 1^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1}} = 3,5.$$

Отметим два полезных следствия из доказанных теорем.

**Следствие 1.** Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x$ , то и функция  $y = kf(x)$  дифференцируема в точке  $x$ , причём  $(kf(x))' = kf'(x)$ .

**Доказательство.** Для функции  $y = kf(x)$  воспользуемся правилом дифференцирования произведения и учтём, что производная постоянной функции  $y = k$  равна нулю:

$$(kf(x))' = k'f(x) + kf'(x) = 0 \cdot f(x) + kf'(x) = kf'(x).$$

Обычно доказанное следствие формулируют в виде следующего правила: *постоянный множитель можно вынести за знак производной.*

**Следствие 2.** Если функции  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$ ,  $y = h(x)$  дифференцируемы в точке  $x$ , то и любая их линейная комбинация, т. е. функция  $y = k_1f(x) + k_2g(x) + k_3h(x)$ , дифференцируема в точке  $x$ , причём

$$(k_1f(x) + k_2g(x) + k_3h(x))' = k_1f'(x) + k_2g'(x) + k_3h'(x).$$

Например,

$$\begin{aligned} \left(3x^3 - \frac{2x^2}{3} + \frac{7}{x} - 4\right)' &= 3(x^3)' - \frac{2}{3}(x^2)' + 7\left(\frac{1}{x}\right)' - 4' = \\ &= 3 \cdot 3x^2 - \frac{2}{3} \cdot 2x + 7 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) - 0 = \\ &= 9x^2 - \frac{4x}{3} - \frac{7}{x^2}. \end{aligned}$$

**Теорема 3.** Если функции  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$  дифференцируемы в точке  $x$  и в этой точке  $g(x) \neq 0$ , то и их частное дифференцируемо в точке  $x$ , причём производная частного вычисляется по следующему правилу:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Идея доказательства этой теоремы та же, что была использована при доказательстве теорем 1 и 2, но технически доказательство довольно громоздко, поэтому мы его не приводим.

**Пример 3** Найти производную функции  $y = \frac{x^3}{2x - 5}$  в точке  $x \neq 2,5$ .

**Решение.**

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{x^3}{2x - 5}\right)' = \frac{(x^3)' \cdot (2x - 5) - x^3(2x - 5)'}{(2x - 5)^2} = \\ &= \frac{3x^2 \cdot (2x - 5) - x^3 \cdot 2}{(2x - 5)^2} = \frac{4x^3 - 15x^2}{(2x - 5)^2}. \end{aligned}$$

## Упражнения

Используя правила дифференцирования, найдите производную функции.

**10.1.** а)  $y = x^2 + 4$ ;  
б)  $y = -x^2 - 5x$ ;  
в)  $y = 6x^2 + 2x - 3$ ;

г)  $y = 2x^2 - 9$ ;  
д)  $y = x^2 + 8x$ ;  
е)  $y = -4x^2 - 6x + 1$ .

**10.2.** а)  $y = x^3 - 2x^2 + x$ ;  
б)  $y = -2x^3 + 15x^2$ ;  
в)  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + 4$ ;

г)  $y = -x^3 + 4x^2 - 3$ ;  
д)  $y = 10x^3 - 18x$ ;  
е)  $y = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 1$ .

**10.3.** а)  $y = \sqrt{x} + 3x^2$ ;  
б)  $y = 1\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{x} + 4$ ;  
в)  $y = -2\sqrt{x} - \frac{3}{x} + \frac{x}{3}$ ;

г)  $y = -5x^3 - \sqrt{x}$ ;  
д)  $y = 0,05x^2 + \frac{1}{x} - x$ ;  
е)  $y = \frac{4}{x} - \frac{x}{6} + 10\sqrt{x}$ .

**10.4.** а)  $y = x^3(1 + \sqrt{x})$ ;  
б)  $y = -2x^2(x^3 - 4)$ ;  
в)  $y = 4\sqrt{x} \cdot (1 - 5x^2)$ ;

г)  $y = x^2(\sqrt{x} - 2)$ ;  
д)  $y = 3x^3(x^2 + 5)$ ;  
е)  $y = \left(2 + \frac{1}{6}x^3\right) \cdot 2\sqrt{x}$ .

**10.5.** а)  $y = (x^2 + 2x)(x^2 - 4)$ ;  
б)  $y = (x^3 + 2)(x^2 - x)$ ;  
в)  $y = (2x^2 + 3x - 1)(x^3 - 1)$ ;

г)  $y = (2x^2 - 1)(x^2 + 3x)$ ;  
д)  $y = (x^2 - 3)(x^3 + x)$ ;  
е)  $y = (-5x^2 - x + 4)(x^3 + 2x^2)$ .

**10.6.** а)  $y = \left(\frac{3}{x} + 2x\right) \cdot \sqrt{x}$ ;  
б)  $y = \left(7 - \frac{4}{x}\right)(2x - 5)$ ;  
в)  $y = (x^3 - 2x)\left(\frac{8}{x} + x^2\right)$ ;

г)  $y = \left(-\frac{5}{x} + x^2\right) \cdot \sqrt{x}$ ;  
д)  $y = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{3}\right)(5x - 3)$ ;  
е)  $y = (4x - 5x^2)\left(3x - \frac{6}{x}\right)$ .



**10.7.** а)  $y = \frac{1}{3x+1}$ ;      в)  $y = -\frac{1}{x^3+1}$ ;      д)  $y = \frac{1}{2x^2+x}$ ;  
 б)  $y = -\frac{1}{4x-1}$ ;      г)  $y = \frac{1}{x^2-5}$ ;      е)  $y = \frac{1}{x^2-3x+2}$ .

**10.8.** а)  $y = \frac{2x+1}{x-1}$ ;      в)  $y = -\frac{x^2}{3x-4}$ ;      д)  $y = \frac{4-x^3}{2x-1}$ ;  
 б)  $y = \frac{6-5x}{x+2}$ ;      г)  $y = -\frac{4x+3}{x^3}$ ;      е)  $y = \frac{x^2-7}{5-4x}$ .

**10.9.** а)  $y = \frac{\sqrt{x}}{x+2}$ ;      в)  $y = \frac{x^2+2x}{-4\sqrt{x}}$ ;      д)  $y = \frac{2\sqrt{x}-x}{x^2}$ ;  
 б)  $y = \frac{1-x}{2\sqrt{x}}$ ;      г)  $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2-x}$ ;      е)  $y = \frac{4x^2+x}{\sqrt{x}+1}$ .

**10.10.** а)  $y = \frac{x^2+2x-5}{3x-4}$ ;      г)  $y = \frac{2x^3-x^2+x-3}{3x-1}$ ;  
 б)  $y = \frac{1+3x-x^2}{0,5x+1}$ ;      д)  $y = \frac{x^2-7x+5}{2x^2-1}$ ;  
 в)  $y = \frac{x^3+2x^2-3x+4}{2x+1}$ ;      е)  $y = \frac{x^3+2x^2-3x}{x^2+x}$ .

**10.11.** Найдите значение производной заданной функции в точке  $x_0$ , если:

а)  $y = x^3 - 3x + 5$ ,  $x_0 = -1$ ;

б)  $y = (x^2 - 2)(2x^3 + 1)$ ,  $x_0 = -2$ ;

в)  $y = \frac{x^3+1}{\sqrt{x}}$ ,  $x_0 = 4$ ;

г)  $y = x^3 - 6x^2 + 7$ ,  $x_0 = 2$ ;

д)  $y = (4x^2 + 3)(x^3 - 1)$ ,  $x_0 = 1$ ;

е)  $y = \frac{2\sqrt{x}}{0,5x^2 - 2}$ ,  $x_0 = 1$ .

**10.12.** Найдите скорость изменения заданной функции в указанной точке:

а)  $y = \frac{2}{2x-4}$ ,  $x_0 = 3$ ;

б)  $y = -\frac{3}{5x+1}$ ,  $x_0 = 1$ ;

$$\text{в) } y = x^3 - \frac{4}{\sqrt{x}}, x_0 = 9; \quad \text{д) } y = \frac{8}{\sqrt{x}} + 3x^2, x_0 = 16;$$

$$\text{г) } y = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{3}{x}, x_0 = -2; \quad \text{е) } y = \frac{1}{x^3 - 1} - \frac{2}{x}, x_0 = -1.$$

**10.13.** Материальная точка движется по прямой по закону  $s = s(t)$ . Найдите скорость её движения в момент времени  $t_0$  (в секундах), если:

$$\text{а) } s(t) = t^2 - 20, t = 0,5 \text{ с};$$

$$\text{г) } s(t) = t^2 + 12, t = 1,5 \text{ с};$$

$$\text{б) } s(t) = t^2 + 4t, t = 2 \text{ с};$$

$$\text{д) } s(t) = t^2 - 5t, t = 1 \text{ с};$$

$$\text{в) } s(t) = t^2 - 2t + 3, t = 3 \text{ с};$$

$$\text{е) } s(t) = t^2 + 3t + 2, t = 2,5 \text{ с}.$$

**10.14.** Найдите угловой коэффициент касательной к графику данной функции в точке с абсциссой  $a$ :

$$\text{а) } y = x^2 + 3x - 2, a = 0;$$

$$\text{б) } y = -x^3 + 2x^2 - 4, a = -1;$$

$$\text{в) } y = \frac{1}{3}x^3 - 0,5x^2 + 3x - 1, a = 2;$$

$$\text{г) } y = -x^2 + 4x + 3, a = 1;$$

$$\text{д) } y = x^3 - x^2 + 2, a = -2;$$

$$\text{е) } y = -2x^3 + x^2 - x + 1, a = 1.$$

**10.15.** Найдите тангенс угла наклона касательной, проведённой к графику данной функции в точке  $a$ :

$$\text{а) } y = \sqrt{x}(x + 1), a = 3;$$

$$\text{г) } y = 2\sqrt{x}(x - 2), a = 4;$$

$$\text{б) } y = \frac{4x + 1}{2x - 3}, a = -2;$$

$$\text{д) } y = \frac{6x - 5}{3x + 2}, a = \frac{1}{3};$$

$$\text{в) } y = \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x}, a = -1;$$

$$\text{е) } y = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, a = 1.$$

**10.16.** Найдите угол между осью  $Ox$  и касательной к графику функции  $y = f(x)$ , проведённой в точке с абсциссой  $x = a$ , если:

$$\text{а) } y = x^3 - 5x^2 + 6x - 4, a = 1;$$

$$\text{б) } y = -5x^3 + 4x^2 + x - 10, a = 0.$$

**10.17.** Решите уравнение  $f'(x) = 0$ , если:

$$\text{а) } f(x) = -x^3 + 2x^2 - 1;$$

$$\text{г) } f(x) = x^3 - 12x + 9;$$

$$\text{б) } f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x;$$

$$\text{д) } f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x - 3;$$

$$\text{в) } y = \frac{x^2 + 3x}{2x - 3};$$

$$\text{е) } y = \frac{0,5x^2 - 4x}{x + 4}.$$

**10.18.** Найдите абсциссы точек, в которых угловой коэффициент касательной к графику данной функции равен  $k$ :

а)  $y = x^2 - 3x + 9, k = 1$ ;

б)  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1, k = 0$ ;

в)  $y = \frac{1}{x^3} - \frac{2}{x} - 3, k = -1$ ;

г)  $y = x^2 + 4x - 7, k = 2$ ;

д)  $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 3, k = 3$ ;

е)  $y = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}, k = 0$ .

**10.19.** Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$ , проходящей через точку с абсциссой  $a$ :

а)  $f(x) = x^3 - 6x^2, a = 2$ ;

г)  $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 2, a = 2$ ;

б)  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, a = 1$ ;

д)  $f(x) = x^3 - 3\sqrt{x}, a = 1$ ;

в)  $f(x) = \frac{12}{\sqrt{x}} - x, a = 9$ ;

е)  $f(x) = \frac{1}{x^3} + 6\sqrt{x}, a = 1$ .

**10.20.** Составьте уравнение той касательной к графику функции  $y = g(x)$ , которая параллельна указанной прямой:

а)  $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2, y = 9x - 1$ ;

б)  $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 6x, y = 2 - x$ ;

в)  $g(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}, y = 2x + 1$ ;

г)  $g(x) = -x^3 + 4, y = 5 - 12x$ ;

д)  $g(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 10x - 2, y = x$ ;

е)  $g(x) = \frac{x^2 + 3x - 4}{x + 1}, y = 7x + 3$ .

**10.21.** Составьте уравнения касательных к параболе  $y = x^2 - 3x + 1$  в точках с ординатой, равной 5.

**10.22.** Составьте уравнение каждой из тех касательных к графику функции  $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$ , для которых угол между касательной и осью  $Ox$  равен  $45^\circ$ .

**10.23.** Решите неравенство  $f'(x) > 0$ , если:

а)  $f(x) = x^2 - x^3$ ;

г)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2$ ;

б)  $f(x) = \frac{x^2 + 5}{3x - 2}$ ;

д)  $f(x) = \frac{x^2 + 12}{2x + 1}$ ;

в)  $f(x) = \sqrt{x}(x^2 - 8x)$ ;

е)  $f(x) = \sqrt{x}(6x - x^2)$ .

**10.24.** Решите неравенство  $f'(x) < 0$ , если:

а)  $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 + 6x$ ;

г)  $f(x) = 20x - 0,5x^2 - \frac{1}{3}x^3$ ;

б)  $f(x) = (x^2 - 5)(x - 1)$ ;

д)  $f(x) = (x^2 - 7)(x - 2)$ ;

в)  $f(x) = \frac{x^3}{3x + 1}$ ;

е)  $f(x) = \frac{2x - 1}{2x^3}$ .

**10.25.** а) Найдите значение параметра  $p$ , при котором прямая  $y = p - x$  касается параболы  $y = x^2 - 2x + 4$ .

б) Найдите значение параметра  $p$ , при котором прямая  $y = 2x - p$  касается гиперболы  $y = -\frac{2}{x - 1}$ .

## Упражнения для повторения

**10.26.** Решите уравнение:

а)  $\log_3 x - 2\log_x 3 = -1$ ;

в)  $\log_7 x - 6\log_x 7 = 1$ ;

б)  $\log_5 x + 2\log_x 5 = 3$ ;

г)  $\log_2 x + 9\log_x 2 = 10$ .

**10.27.** Решите неравенство:

а)  $\frac{x^2 + 4x + 4}{3^x - 27} \geq 0$ ;

в)  $\frac{25 - 0,2^x}{4x^2 + 4x + 1} \geq 0$ ;

б)  $\frac{0,2^x - 0,008}{x^2 - 10x + 25} < 0$ ;

г)  $\frac{x^2 + 6x + 9}{2^x - 4} > 0$ .

**10.28.** При каких значениях параметра  $b$  уравнение

$$9^x + 2b \cdot 3^{x+1} + 9 = 0$$

не имеет корней?



## § 11. Дифференцирование тригонометрических функций

При дифференцировании функций следует различать *правила и формулы*. О правилах дифференцирования (производная суммы, произведения, частного, производная линейной комбинации функций) мы говорили в предыдущем параграфе. Знаем мы и формулы дифференцирования конкретных функций — их пока совсем немного: нам известны производные функций  $y = C$ ,  $y = kx + m$ ,  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ ,

$y = \frac{1}{x}$ ,  $y = \sqrt{x}$ . На протяжении всей главы 2 запас формул дифференцирования будет постоянно пополняться. В этом параграфе речь пойдёт об отыскании производных тригонометрических функций.

Выведем формулу дифференцирования функции  $y = \sin x$ . В процессе рассуждений нам понадобится первый замечательный предел

$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  — с этим соотношением мы познакомили вас в § 4. И, как обычно, будем действовать по алгоритму из § 7.

1) Для фиксированного значения  $x$  имеем:  $f(x) = \sin x$ .

2)  $f(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$ .

3)  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x$ . Преобразуем полученное выражение, воспользовавшись формулой «разность синусов»

$$\left( \sin s - \sin t = 2 \sin \frac{s - t}{2} \cos \frac{s + t}{2} \right):$$

$$\begin{aligned} \sin(x + \Delta x) - \sin x &= 2 \sin \frac{(x + \Delta x) - x}{2} \cos \frac{(x + \Delta x) + x}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2} = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right). \end{aligned}$$

$$4) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\frac{\Delta x}{2}}. \text{ В правой части}$$

полученного равенства содержится выражение  $\frac{\Delta x}{2}$ , которое удобно обо-

значить новой буквой, например  $t$ . Тогда получим:  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin t \cos(x + t)}{t}$ .

$$5) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin t \cos(x+t)}{t}.$$

Далее, рассуждаем так:  $\Delta x \rightarrow 0$ , а  $t = \frac{\Delta x}{2}$ , значит,  $t \rightarrow 0$ , и под знаком предела вместо условия  $\Delta x \rightarrow 0$  можно записать  $t \rightarrow 0$ .

Таким образом,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin t \cos(x+t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \cos(x+t).$$

Получили произведение пределов, первый из которых равен 1, второй в силу непрерывности функции  $y = \cos(x+t)$  равен  $\cos x$ , и произведение пределов равно  $\cos x$ :  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x$  — такова производная рассматриваемой функции  $y = \sin x$ .

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

В частности, для функции  $y = \sin x$  значение производной в точке  $x = 0$  равно  $\cos 0$ , т. е. 1. Это значит, что угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = \sin x$  в точке  $x = 0$  равен 1, т. е. касательная образует с положительным направлением оси абсцисс угол  $45^\circ$  (рис. 50). А теперь вспомните: когда в 10-м классе мы строили график функции  $y = \sin x$ , мы обратили внимание на то обстоятельство, что синусоида выходит из начала координат как бы под углом  $45^\circ$ . В то время мы не смогли дать объяснение этому факту, зато теперь дали.

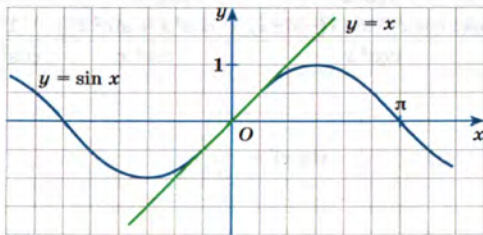


Рис. 50

Используя рассуждения, аналогичные тем, что мы провели при выводе формулы дифференцирования функции  $y = \sin x$ , можно получить формулу дифференцирования функции  $y = \cos x$ :

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

**Пример 1** Доказать, что функция  $y = 2\sin x - 3\cos x$  удовлетворяет уравнению<sup>1</sup>  $2y' - 3y = 13\cos x$ .

**Решение.** Имеем:

$$y' = (2\sin x - 3\cos x)' = 2(\sin x)' - 3(\cos x)' = 2\cos x + 3\sin x.$$

Значит,  $2y' - 3y = 2(2\cos x + 3\sin x) - 3(2\sin x - 3\cos x) = 13\cos x$ . Таким образом, мы доказали, что функция  $y = 2\sin x - 3\cos x$  удовлетворяет уравнению  $2y' - 3y = 13\cos x$ .

**Пример 2** Найти производную функции  $y = \sin 2x$ .

**Решение.** Воспользуемся тем, что  $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ , и правилом дифференцирования произведения:

$$\begin{aligned}(\sin 2x)' &= (2\sin x \cos x)' = 2((\sin x)' \cos x + \sin x (\cos x)') = \\&= 2(\cos x \cos x + \sin x (-\sin x)) = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2\cos 2x.\end{aligned}$$

Выведем формулу дифференцирования функции  $y = \operatorname{tg} x$ . Воспользуемся тем, что  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ , и применим правило дифференцирования частного:

$$\begin{aligned}(\operatorname{tg} x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\&= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.\end{aligned}$$

Итак,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

<sup>1</sup> Уравнения, в состав которых входит аргумент, функция и производная функции, называют *дифференциальными уравнениями*.

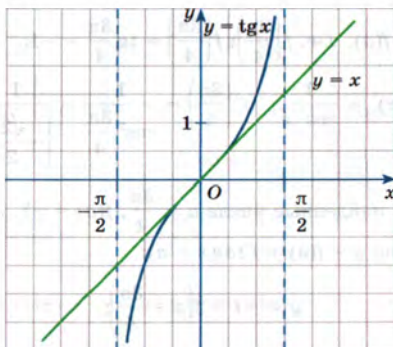


Рис. 51

Аналогично выводится формула дифференцирования функции  $y = \operatorname{ctg} x$ :

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Если  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , то  $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ , в частности  $f'(0) = \cos 0 = 1$ . Это значит, что угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = \operatorname{tg} x$  в точке  $x = 0$  равен 1, а потому эта касательная образует с положительным направлением оси  $Ox$  угол  $45^\circ$ . Это обстоятельство следует учитывать при построении графика функции  $y = \operatorname{tg} x$  (рис. 51).

**Пример 3** Составить уравнение касательной к графику функции  $y = \operatorname{tg} x$  в точке  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

**Решение.** Здесь  $f(x) = \operatorname{tg} x$ . Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной к графику функции (см. § 9).

1) Обозначим абсциссу точки касания буквой  $a$ . По условию  $a = \frac{3\pi}{4}$ .



2) Вычислим  $f(a)$ , т. е.  $f\left(\frac{3\pi}{4}\right); f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = -1$ .

3)  $f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; f'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\cos^2 \frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2$ .

4) Подставим найденные числа  $a = \frac{3\pi}{4}, f(a) = -1, f'(a) = 2$  в уравнение касательной  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ :

$$y = -1 + 2\left(x - \frac{3\pi}{4}\right);$$

$$y = 2x - 1 - \frac{3\pi}{2}.$$

## Упражнения

Найдите производную функции.

11.1. а)  $y = \sin x - 2$ ;      в)  $y = -\sin x + 4x$ ;      д)  $y = 3x - \cos x$ ;  
б)  $y = \cos x + 7$ ;      г)  $y = \operatorname{tg} x + x$ ;      е)  $y = \operatorname{ctg} x - 9$ .

11.2. а)  $y = -\sin x + \frac{1}{x}$ ;      в)  $y = \sin x + x^3$ ;      д)  $y = x^2 + \cos x$ ;

б)  $y = \sqrt{x} - \cos x$ ;      г)  $y = \operatorname{tg} x + \sqrt{x}$ ;      е)  $y = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}$ .

11.3. а)  $y = 2\cos x$ ;      г)  $y = -3\sin x$ ;  
б)  $y = 0,5\sin x - x$ ;      д)  $y = 1,2\cos x + 2x$ ;  
в)  $y = -4\operatorname{tg} x + 1$ ;      е)  $y = 1,5\operatorname{ctg} x + 3$ .

11.4. а)  $y = \sin x + \cos x$ ;      г)  $y = 2\operatorname{tg} x + \cos x$ ;  
б)  $y = 4\operatorname{ctg} x - \cos x$ ;      д)  $y = \sin x - 2\cos x$ ;  
в)  $y = 3\sin x - \operatorname{tg} x$ ;      е)  $y = \sin x - \operatorname{ctg} x$ .

11.5. а)  $y = 2x \cos x$ ;      в)  $y = x^3 \operatorname{ctg} x$ ;      д)  $y = (\operatorname{tg} x + 1)\sin x$ ;  
б)  $y = -x^2 \sin x$ ;      г)  $y = \sqrt{x} \operatorname{tg} x$ ;      е)  $y = (\sin x - 2)\cos x$ .

**11.6.** а)  $y = \frac{3}{\cos x}$ ;      г)  $y = \frac{2}{\sin x}$ ;

б)  $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$ ;      д)  $y = \frac{1}{\cos x - \operatorname{ctg} x}$ ;

в)  $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x - \sin x}$ ;      е)  $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}$ .

**11.7.** а)  $y = \sin x \cos x$ ;      в)  $y = \frac{1}{\sin x \cos x}$ ;      д)  $y = \frac{\cos x}{\operatorname{tg} x}$ ;

б)  $y = \cos x \operatorname{ctg} x$ ;      г)  $y = \sin x \operatorname{tg} x$ ;      е)  $y = \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x}$ .

**11.8.** Найдите значение производной данной функции в точке  $x_0$ :

а)  $y = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{3}$ ;      г)  $y = \cos x, x_0 = -\frac{\pi}{2}$ ;

б)  $y = 2\cos x, x_0 = \frac{5\pi}{6}$ ;      д)  $y = -2\sin x, x_0 = \frac{3\pi}{4}$ ;

в)  $y = 3\operatorname{tg} x, x_0 = \frac{2\pi}{3}$ ;      е)  $y = -\operatorname{ctg} x, x_0 = \frac{\pi}{4}$ .

**11.9.** Найдите угловой коэффициент касательной к графику данной функции в точке  $x_0$ :

а)  $y = \sin x - \cos x, x_0 = -\frac{\pi}{4}$ ;      г)  $y = \sin x + \cos x, x_0 = 0$ ;

б)  $y = 2\sin x - \operatorname{tg} x, x_0 = \frac{\pi}{3}$ ;      д)  $y = 3\operatorname{tg} x - \cos x, x_0 = -\frac{\pi}{6}$ ;

в)  $y = \frac{1}{4}\operatorname{ctg} x + \cos x, x_0 = \frac{5\pi}{6}$ ;      е)  $y = \sin x + \operatorname{ctg} x, x_0 = -\frac{\pi}{2}$ .

**11.10.** Найдите скорость изменения функции в точке  $x_0$ :

а)  $y = 3\sin x - x, x_0 = 0$ ;      г)  $y = 2x - 3\cos x, x_0 = \frac{\pi}{2}$ ;

б)  $y = 2x + \frac{\operatorname{tg} x}{4}, x_0 = \frac{\pi}{4}$ ;      д)  $y = 3\operatorname{ctg} x - 2x, x_0 = -\frac{\pi}{4}$ ;

в)  $y = \frac{x}{\pi}\cos x, x_0 = \frac{\pi}{2}$ ;      е)  $y = \frac{2x}{\pi}\sin x, x_0 = \pi$ .

**11.11.** Найдите тангенс угла между осью  $Ox$  и касательной, проведённой к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$ :

а)  $f(x) = \frac{x^2}{\pi} \sin x, a = \frac{\pi}{2}$ ;

б)  $f(x) = \sqrt{3} \cos x + \frac{x^2}{\pi}, a = \frac{\pi}{3}$ ;

в)  $f(x) = 4 \operatorname{ctg} x + 3x, a = \frac{11\pi}{6}$ ;

г)  $f(x) = x \cos x, a = 3\pi$ ;

д)  $f(x) = \sqrt{2} \sin x - \frac{x^3}{\pi^2}, a = \frac{\pi}{4}$ ;

е)  $f(x) = -3 \operatorname{tg} x + 2x, a = \frac{7\pi}{6}$ .

**11.12.** Найдите абсциссы точек, в которых угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = g(x)$  равен  $k$ :

а)  $g(x) = 3 \sin x - \cos x, k = 0$ ;

б)  $g(x) = -2 \cos x + x, k = 2$ ;

в)  $g(x) = 3,5x + 3 \operatorname{ctg} x, k = -\frac{1}{2}$ ;

г)  $g(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x, k = 0$ ;

д)  $g(x) = \operatorname{tg} x - 3x, k = 1$ ;

е)  $g(x) = \cos x \sin x - 3, k = \frac{1}{2}$ .

**11.13.** Найдите точки, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна данной прямой:

а)  $f(x) = \sin x, y = -x + 4$ ;

б)  $f(x) = -3 \operatorname{ctg} x, y = 4x - 2$ ;

в)  $f(x) = \sqrt{3}x - 2 \cos x, y = 8$ ;

г)  $f(x) = \cos x, y = \frac{1}{2}x - 3$ ;

д)  $f(x) = \operatorname{tg} x, y = x - 2$ ;

е)  $f(x) = x - \sqrt{2} \sin x, y = 1 + 2x$ .

**11.14.** Найдите угол между осью  $Ox$  и касательной, проведённой к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$ :

а)  $y = 2\sin x$ ,  $a = \frac{\pi}{6}$ ;

г)  $y = \frac{2}{3}\cos x$ ,  $a = \frac{\pi}{3}$ ;

б)  $y = \sin x \cos x$ ,  $a = \frac{\pi}{2}$ ;

д)  $y = \operatorname{tg} x - \sqrt{2}\sin x$ ,  $a = \frac{\pi}{4}$ ;

в)  $y = \frac{1}{\cos x}$ ,  $a = \frac{3\pi}{4}$ ;

е)  $y = \frac{3}{\sin x}$ ,  $a = \frac{2\pi}{3}$ .

**11.15.** Решите уравнение  $f'(x) = g'(x)$ , если:

а)  $f(x) = x \sin x$ ,  $g(x) = -\cos x$ ;

б)  $f(x) = \sin x \cos x$ ,  $g(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$ .

**11.16.** а) Докажите, что функция  $y = 4\cos x - 3\sin x$  удовлетворяет уравнению  $4y - 3y' = 25\cos x$ .

б) Докажите, что функция  $y = \frac{1}{\sin x} - \operatorname{ctg} x$  удовлетворяет уравнению  $y = y' \sin x$ .

**11.17.** а) Докажите, что  $(\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)' = \frac{4}{\sin^2 2x}$ .

б) Докажите, что  $\left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{1}{1 + \sin x}$ .

## Упражнения для повторения

**ИКТ 11.18.** Постройте график функции:

а)  $y = 3^{|x|}$ ;

в)  $y = 2^{|x|-2}$ ;

б)  $y = 0,5^{|x+1|}$ ;

г)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|} - 1$ .

**11.19.** Решите уравнение:

а)  $2^{x^2+2x-5} - 2^{8-2x-x^2} = 7$ ;

б)  $8 + 3^{2-x-x^2} = 3^{x^2+x}$ .



**11.20.** Решите неравенство:

$$\log_5(x^2 + 5x) + 2 \geq \log_5(x^2 + 4x - 5) - \log_{0.2} \frac{x}{25}.$$

## § 12. Дифференцирование функций вида $y = f(kx + m)$

В предыдущем параграфе в примере 2 мы получили такую формулу:

$$(\sin 2x)' = 2\cos 2x. \quad (1)$$

Обсудим эту формулу. Мы знаем, что  $(\sin t)' = \cos t$ . Формула (1) показывает, что если вместо  $t$  подставить  $2x$ , то формула дифференцирования «почти» сохраняется, появляется лишь «поправочный» множитель 2.

Рассмотрим ещё один пример. Найдём производную функции  $y = f(t)$ , где  $f(t) = t^3$ ,  $t = \frac{1}{2}x$ . Речь идёт о дифференцировании функции  $y = \left(\frac{1}{2}x\right)^3$ , т. е.  $y = \frac{1}{8}x^3$ . Это нетрудно:

$$y' = \frac{1}{8} \cdot (x^3)' = \frac{1}{8} \cdot (3x^2) = \frac{3}{8}x^2.$$

А теперь смотрите:  $\frac{3}{8}x^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \left(\frac{1}{2}x\right)^2$ . Таким образом, получилось, что

$$\left(\left(\frac{1}{2}x\right)^3\right)' = \frac{1}{2} \cdot 3 \left(\frac{1}{2}x\right)^2. \quad (2)$$

Обсудим эту формулу. Мы знаем, что  $(t^3)' = 3t^2$ . Формула (2) показывает, что если вместо  $t$  подставить  $\frac{1}{2}x$ , то формула дифференцирования «почти» сохраняется, появляется лишь «поправочный» множитель  $\frac{1}{2}$ .

Оказывается, справедлива следующая теорема (мы приводим её без доказательства, ограничимся иллюстрирующими справедливость теоремы формулами (1) и (2)).

**Теорема.** Производная функции  $y = f(kx + m)$  вычисляется по следующему правилу:

$$(f(kx + m))' = kf'(kx + m).$$

Если, в частности,  $k = 1$ , то  $(f(x + m))' = f'(x + m)$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} ((x + 3)^2)' &= 2(x + 3), \\ \left(\frac{1}{x - 2,5}\right)' &= -\frac{1}{(x - 2,5)^2}, \\ \left(\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right)' &= -\frac{1}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \text{ и т. п.} \end{aligned}$$

**Пример** Найти значение производной функции  $y = f(x)$  в указанной точке:

а)  $f(x) = \sqrt{11 - 2x}$ ,  $x = 1$ ; б)  $f(x) = \operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $x = 0$ .

**Решение.** а) Известно, что  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Возьмём эту формулу за основу, но при этом учтём два обстоятельства:

- 1) под знаком квадратного корня напишем не  $x$ , а  $11 - 2x$ ;
- 2) укажем «поправочный» множитель, равный  $(-2)$ , — это коэффициент при  $x$ . Таким образом,

$$(\sqrt{11 - 2x})' = (-2) \cdot \frac{1}{2\sqrt{11 - 2x}} = -\frac{1}{\sqrt{11 - 2x}}.$$

Осталось вычислить  $f'(1)$ . Имеем:

$$f'(1) = -\frac{1}{\sqrt{11 - 2 \cdot 1}} = -\frac{1}{3}.$$

б) Известно, что  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Возьмём эту формулу за основу, но при этом учтём два обстоятельства:

1) под знаками тригонометрических функций напомним не  $x$ , а  $-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}$ ;

2) укажем «поправочный» множитель, равный  $\left(-\frac{1}{2}\right)$ , — это коэффициент при  $x$ . Таким образом,

$$\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)' = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{2\cos^2\left(-\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Осталось вычислить  $f'(0)$ . Имеем:

$$f'(0) = -\frac{1}{2\cos^2\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = -1.$$

Ответ: а)  $-\frac{1}{3}$ ; б)  $-1$ .

## Упражнения

Найдите производную функции.

**12.1.** а)  $y = (4x - 1)^2$ ;      в)  $y = (7 - 0,2x)^3$ ;      д)  $y = \left(-\frac{3}{8}x + 9\right)^2$ ;

б)  $y = (5 - 3x)^2$ ;      г)  $y = (1,5x + 2)^3$ ;      е)  $y = \left(\frac{4}{9}x - \frac{2}{3}\right)^3$ .

**12.2.** а)  $y = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2$ ;      в)  $y = \left(\frac{-x-1}{3}\right)^3$ ;      д)  $y = \left(\frac{2x+1}{15}\right)^3$ ;

б)  $y = \left(\frac{4-x}{3}\right)^2$ ;      г)  $y = \left(\frac{x+3}{6}\right)^3$ ;      е)  $y = \left(\frac{2-5x}{4}\right)^2$ .

$$12.3. \quad \text{a) } y = \frac{1}{3x+2}; \quad \text{r) } y = \frac{1}{\frac{2}{3}x-1};$$

$$\text{б) } y = \frac{1}{7-0,2x}; \quad \text{д) } y = -\frac{\sqrt{3}}{2-x\sqrt{3}};$$

$$\text{в) } y = -\frac{0,25}{-4x-0,5}; \quad \text{е) } y = \frac{10}{-0,3x-8}.$$

$$12.4. \quad \text{a) } y = \sqrt{6x+1};$$

$$\text{в) } y = \sqrt{\frac{11-4x}{3}};$$

$$\text{б) } y = \sqrt{6-5x};$$

$$\text{r) } y = \sqrt{\frac{9+8x}{15}}.$$

$$12.5. \quad \text{a) } y = \cos 3x;$$

$$\text{r) } y = \sin 4x;$$

$$\text{б) } y = \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right);$$

$$\text{д) } y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 1,5x\right);$$

$$\text{в) } y = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{x}{3}\right);$$

$$\text{е) } y = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$12.6. \quad \text{a) } y = \operatorname{tg} 6x; \quad \text{в) } y = \operatorname{ctg} 2x; \quad \text{д) } y = \operatorname{tg} \frac{-x+2\pi}{3};$$

$$\text{б) } y = \operatorname{tg}\left(-\frac{x}{4}\right); \quad \text{r) } y = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 3x\right); \quad \text{е) } y = \operatorname{ctg} \frac{2x+\pi}{12}.$$

**12.7.** Используя формулы тригонометрии, преобразуйте данную функцию и найдите её производную:

$$\text{a) } y = 2\sin 2x \cos 2x;$$

$$\text{r) } y = \cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x;$$

$$\text{б) } y = \sin^2 3x;$$

$$\text{д) } y = 2\cos^2 \frac{x}{4};$$

$$\text{в) } y = \cos^2 x - \sin^2 x;$$

$$\text{е) } y = \sin 3x \cos x - \cos 3x \sin x.$$

**12.8.** Найдите значение производной в точке  $x_0$ :

$$\text{a) } y = \cos 3x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{r) } y = \operatorname{tg} 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{8};$$

$$\text{б) } y = (3-10x)^2, \quad x_0 = 0,1;$$

$$\text{д) } y = (0,5x+3)^3, \quad x_0 = -2;$$

$$\text{в) } y = \sqrt{2x+1}, \quad x_0 = 4;$$

$$\text{е) } y = \sqrt{3-4x}, \quad x_0 = -5,5.$$



**12.9.** Найдите угловой коэффициент касательной к графику данной функции в точке с абсциссой  $a$ :

а)  $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$ ,  $a = \frac{\pi}{12}$ ;

б)  $y = \frac{2}{3}\sqrt{4 - 3x}$ ,  $a = \frac{1}{3}$ ;

в)  $y = \operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $a = \frac{\pi}{2}$ ;

г)  $y = \left(\frac{x}{3} + 1\right)^3 + (3 - 0,5x)^2$ ,  $a = -6$ .

**12.10.** Составьте уравнение касательной, проведённой к графику данной функции в точке с абсциссой  $a$ :

а)  $y = 2\sqrt{3x - 5}$ ,  $a = 2$ ;

б)  $y = \sqrt{3} \cos \frac{x}{3}$ ,  $a = \pi$ ;

в)  $y = \sqrt{7 - 2x}$ ,  $a = 3$ ;

г)  $y = \sqrt{2} \sin 2x$ ,  $a = \frac{\pi}{8}$ .

**12.11.** Составьте уравнение касательной, проведённой к графику функции  $y = g(x)$  параллельно указанной прямой:

а)  $g(x) = (6x - 17)^2$ ,  $y = 12x + 7$ ;

б)  $g(x) = x + \sqrt{2x - 1}$ ,  $y = 2x + 5$ ;

в)  $g(x) = (11 - 5x)^3$ ,  $y = 4 - 15x$ ;

г)  $g(x) = 2x + \sqrt{5 - 4x}$ ,  $y = x$ .

**12.12.** Решите уравнение  $f'(x) = 0$ , если:

а)  $f(x) = \frac{1}{2} \sin 4x + \sin 2x - \frac{2}{3} \sin 3x$ ;

б)  $f(x) = (2x - 5)^3 + (2x - 5)^2 + x$ ;

в)  $f(x) = x^2 \sqrt{3 - 2x}$ ;

г)  $f(x) = 0,2 \cos 5x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{4} \sin 4x$ ;

д)  $f(x) = (1 - 3x)^3 - (1 - 3x)^2 + 3x$ ;

е)  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{4x - 1}}$ .

**12.13.** Составьте уравнение касательной к графику данной функции, проходящей через точку  $B$ :

а)  $y = \sqrt{x+4}$ ,  $B(0; 2,5)$ ;

б)  $y = (2x-1)^2$ ,  $B(0; -3)$ .

**12.14.** Найдите корни уравнения  $f'(x) = 0$ , принадлежащие промежутку  $[1; 5]$ , если функция задана формулой:

а)  $f(x) = 2\cos^2 x + \sin 2x - 2x$ ;

б)  $f(x) = \sin^2 x - \cos 2x + 2$ .

## Упражнения для повторения

**12.15.** Найдите значение выражения:

а)  $\frac{2c^{0,25}}{c^{0,5} - 4} - \frac{1}{c^{0,25} - 2}$  при  $c = 81$ ;

б)  $\frac{p^{\frac{2}{5}} - 2,25}{\frac{1}{p^5} + 1,5}$  при  $p = 32$ .

**12.16.** Решите неравенство:

а)  $\log_{0,5} \frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \leq -1$ ;

б)  $\log_2^2(x-1)^2 + 5\log_{0,5}(x-1) > -1$ .

**12.17.** а) Даны функции  $f(x) = x^{-2}$  и  $g(x) = x^{0,25}$ . Докажите, что  $2(f(x))^{-1} = g(16x^8)$ .

б) Даны функции  $f(x) = x^{-3}$  и  $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ . Докажите, что  $9(f(x))^{-2} = g(27x^9)$ .

**12.18.** Используя монотонность функций, решите уравнение:

а)  $\sqrt{2x-1} = \frac{1}{x-1}$ ;

б)  $2x + 3 + \sqrt[3]{x} = 0$ ;

в)  $\frac{2}{x-1} + 2 = \sqrt{3x}$ ;

г)  $\sqrt[4]{x} + 2x^3 = 3$ .

## § 13. Дифференцирование степенных функций

Продолжим изучение формул дифференцирования. В этом параграфе мы поговорим о том, как находить производные степенных функций  $y = x^n$ . Начнём со случая, когда показатель степени — натуральное число. Кое-что о дифференцировании функций  $y = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , мы уже знаем:  $x' = 1$ ,  $(x^2)' = 2x$ ,  $(x^3)' = 3x^2$ . Пользуясь правилом дифференцирования произведения, найдём производные ещё двух функций:  $y = x^4$ ,  $y = x^5$ .

Имеем:

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 \cdot x' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3;$$

итак,  $(x^4)' = 4x^3$ ;

$$(x^5)' = (x^4 \cdot x)' = (x^4)' \cdot x + x^4 \cdot x' = 4x^3 \cdot x + x^4 \cdot 1 = 5x^4;$$

итак,  $(x^5)' = 5x^4$ .

Рассмотрим пять формул: три формулы, которые мы знали раньше, и две, которые только что получили:

$$\begin{aligned}x' &= 1; \\(x^2)' &= 2x; \\(x^3)' &= 3x^2; \\(x^4)' &= 4x^3; \\(x^5)' &= 5x^4.\end{aligned}$$

Естественно предположить, что для любого натурального показателя  $n$  справедлива формула дифференцирования:

$(x^n)' = nx^{n-1}.$

 (1)

Для доказательства формулы (1) воспользуемся известным вам из курса алгебры 9-го класса *методом математической индукции*.

Мы знаем, что  $x' = 1$ . Эту формулу можно переписать так:

$$(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1}.$$

Значит, формула (1) верна для  $n = 1$ .

Предположим, что формула (1) верна для натурального числа  $n = k$ , т. е. предположим, что верно равенство  $(x^k)' = kx^{k-1}$ . Докажем, что тогда формула (1) верна и для следующего натурального числа  $n = k + 1$ , т. е. докажем, что  $(x^{k+1})' = (k + 1)x^k$ .

В самом деле,

$$\begin{aligned}(x^{k+1})' &= (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = \\ &= (k+1)x^k.\end{aligned}$$

А далее рассуждаем так. Во-первых, мы убедились в том, что формула (1) верна при  $n = 1$ . Во-вторых, мы доказали, что из того, что формула (1) выполняется для  $n = k$ , следует, что она справедлива и для  $n = k + 1$ .

Что это значит? Это значит, что, поскольку формула (1) выполняется при  $n = 1$ , она верна и при  $n = 2$ ; раз формула (1) выполняется при  $n = 2$ , она верна и при  $n = 3$  и т. д. Вывод: формула (1) верна для любого натурального числа  $n$ .

Опираясь на формулу (1), можно найти производную функции  $y = x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Для этого надо переписать выражение  $x^{-n}$  в виде  $\frac{1}{x^n}$  и воспользоваться правилом дифференцирования частного:

$$\begin{aligned}(x^{-n})' &= \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(1)' \cdot x^n - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = \frac{0 \cdot x^n - nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = \\ &= -nx^{-n-1}.\end{aligned}$$

Итак, для любого  $x \neq 0$  справедлива формула

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) можно объединить в одну:

$$(x^m)' = mx^{m-1}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Далее, мы знаем, что  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ . Эту формулу можно записать следующим образом:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Обе формулы (и (3), и (4)) являются частными случаями следующего утверждения.



**Теорема.** Если  $x > 0$  и  $r \neq 0$  — любое действительное число, то производная степенной функции  $y = x^r$  вычисляется по формуле

$$(x^r)' = rx^{r-1}.$$

В некоторых случаях эта теорема справедлива не только при  $x > 0$ . Если, например, показатель степени — натуральное число, то формула  $(x^n)' = nx^{n-1}$  справедлива для любого  $x$ ; если показатель степени — целое отрицательное число, то формула  $(x^m)' = mx^{m-1}$  справедлива для любого  $x \neq 0$ .

**Пример 1** Найти производную функции:

а)  $y = 2x^7 - \frac{3}{x^5}$ ; б)  $y = \sqrt[7]{(3x-1)^2}$ .

**Решение.** а)

$$\begin{aligned} y' &= \left( 2x^7 - \frac{3}{x^5} \right)' = 2(x^7)' - 3(x^{-5})' = 2 \cdot 7x^6 - 3 \cdot (-5x^{-5-1}) = \\ &= 14x^6 + \frac{15}{x^6}; \end{aligned}$$

б)

$$\begin{aligned} y' &= \left( \sqrt[7]{(3x-1)^2} \right)' = \left( (3x-1)^{\frac{2}{7}} \right)' = 3 \cdot \frac{2}{7} (3x-1)^{\frac{2}{7}-1} = \\ &= \frac{6}{7} (3x-1)^{-\frac{5}{7}} = \frac{6}{7\sqrt[7]{(3x-1)^5}}. \end{aligned}$$

**Пример 2** Составить уравнение касательной к графику функции  $y = \sqrt[4]{x} \sin \pi x$  в точке  $x = 1$ .

**Решение.** Здесь  $f(x) = \sqrt[4]{x} \sin \pi x$ . Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной к графику функции (см. § 9).

1) Обозначим абсциссу точки касания буквой  $a$ . По условию  $a = 1$ .

2) Вычислим  $f(a)$ , т. е.  $f(1)$ ;  $f(1) = \sqrt[4]{1} \sin \pi = 1 \cdot 0 = 0$ .

3) Найдём  $f'(x)$  и  $f'(a)$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sqrt[4]{x} \sin \pi x)' = \left(x^{\frac{1}{4}} \cdot \sin \pi x\right)' = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' \sin \pi x + x^{\frac{1}{4}}(\sin \pi x)' = \\ &= \left(\frac{1}{4} x^{\frac{1}{4}-1}\right) \sin \pi x + x^{\frac{1}{4}}(\pi \cos \pi x) = \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} \sin \pi x + \pi x^{\frac{1}{4}} \cos \pi x; \end{aligned}$$

$$f'(1) = \frac{1}{4} \cdot 1^{-\frac{3}{4}} \cdot \sin \pi + \pi \cdot 1^{\frac{1}{4}} \cdot \cos \pi = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 0 + \pi \cdot 1 \cdot (-1) = -\pi.$$

4) Подставим найденные числа  $a = 1$ ,  $f(a) = 0$ ,  $f'(a) = -\pi$  в уравнение касательной  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ :

$$y = 0 - \pi(x - 1); y = -\pi x + \pi.$$

Ответ:  $y = -\pi x + \pi$ .

## Упражнения

Найдите производную данной функции.

13.1. а)  $y = x^7$ ;      в)  $y = -5x^{10}$ ;      д)  $y = \frac{x^{12}}{6}$ ;

б)  $y = -x^{18}$ ;      г)  $y = 4x^6$ ;      е)  $y = -\frac{3x^8}{12}$ .

13.2. а)  $y = x^4 - 2x^2 + x$ ;      г)  $y = \frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2$ ;

б)  $y = -3x^5 + x^3 - 6x$ ;      д)  $y = -\frac{x^6}{6} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x}{2}$ ;

в)  $y = \frac{2}{3}x^3 - 0,5x^2 - 4$ ;      е)  $y = \frac{x^{12}}{12} - \frac{7x^8}{4} + \frac{x^5}{10} - x^3$ .

13.3. а)  $y = x^{-2}$ ;      в)  $y = -5x^{-4}$ ;      д)  $y = \frac{x^{-5}}{10}$ ;

б)  $y = -x^{-4}$ ;      г)  $y = 3x^{-0,6}$ ;      е)  $y = -\frac{x^{-3}}{6}$ .

- 13.4.** а)  $y = x^{\frac{1}{3}}$ ; в)  $y = x^{-2,5}$ ; д)  $y = \sqrt[4]{x}$ ;  
 б)  $y = x^{1,4}$ ; г)  $y = x^{-\frac{2}{3}}$ ; е)  $y = \sqrt[3]{x^2}$ .
- 13.5.** а)  $y = x^{\sqrt{2}}$ ; в)  $y = x^{-\sqrt{5}}$ ; д)  $y = (3x)^{\sqrt{3}}$ ;  
 б)  $y = x^{\sqrt{3}}$ ; г)  $y = x^{-\sqrt{6}}$ ; е)  $y = (2x)^{\sqrt{2}}$ .
- 13.6.** а)  $y = \frac{1}{x^{2,7}}$ ; в)  $y = -\frac{3}{x^{\frac{2}{3}}}$ ; д)  $y = \frac{\sqrt{5}}{x^{\sqrt{5}}}$ ;  
 б)  $y = -\frac{1}{x^{3,2}}$ ; г)  $y = \frac{2}{x^{\frac{5}{6}}}$ ; е)  $y = \frac{\sqrt{3} + 1}{x^{\sqrt{3}-1}}$ .
- 13.7.** а)  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ; в)  $y = -\frac{4}{\sqrt[4]{x}}$ ; д)  $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$ ;  
 б)  $y = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ ; г)  $y = \frac{3}{\sqrt[6]{x}}$ ; е)  $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ .
- 13.8.** а)  $y = (x^2 + x)(x^3 - 2)$ ; г)  $y = (x^3 + 3x^2)(2x^2 - 1)$ ;  
 б)  $y = (x^5 + x^3)\sqrt{x-1}$ ; д)  $y = \sqrt{x+2}(x^4 - 2x^2)$ ;  
 в)  $y = \frac{x^4 - 2x^2}{4x - 5}$ ; е)  $y = \frac{x^2 - 3x}{2x^3 + 1}$ .
- 13.9.** а)  $y = (4x + 7)^5$ ; г)  $y = (3 - 5x)^{10}$ ;  
 б)  $y = \left(\frac{x}{7} + 9\right)^7$ ; д)  $y = \left(2 - \frac{x}{3}\right)^{15}$ ;  
 в)  $y = \frac{1}{(1 - 4x)^4}$ ; е)  $y = \frac{4}{(2x - 5)^6}$ .
- 13.10.** а)  $y = x^3 + x^{-3} - 3\sqrt{x}$ ; г)  $y = \frac{1}{6x^6} + 2\sqrt[3]{x^{-1}} - \sqrt[3]{3}$ ;  
 б)  $y = x^4 - x^{-4} + 2\sqrt{x}$ ; д)  $y = x^5 - \frac{9}{\sqrt[3]{x}} + x^{-2}$ ;  
 в)  $y = 0,5x^4 - x\sqrt{x} - \sqrt{2}$ ; е)  $y = x^8 - 6x^{\frac{5}{3}}\sqrt{x} - x^{0,7}$ .
- 13.11.** а)  $y = x^2\sqrt[3]{x}$ ; в)  $y = x^3\sqrt[4]{x}$ ; д)  $y = \sqrt{x}(x + \sqrt[3]{x})$ ;  
 б)  $y = \frac{x^3}{\sqrt{x}}$ ; г)  $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x^2}$ ; е)  $y = x^2(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})$ .

**13.12.** Найдите значение производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$ , если:

а)  $f(x) = x^5 - 4x^2 + 3x$ ,  $x_0 = 1$ ;

б)  $f(x) = x^4 - 2\sqrt{x}$ ,  $a = 9$ ;

в)  $f(x) = 0,5(2 - 5x)^{-5}$ ,  $a = 0,2$ ;

г)  $f(x) = -x^4 + 2x^3 - 5$ ,  $x_0 = -1$ ;

д)  $f(x) = \sqrt[3]{6x + 7}$ ,  $a = \frac{1}{6}$ ;

е)  $f(x) = x^{-0,5} + x^{-1,5} + 3x$ ,  $a = 4$ .

**13.13.** Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = g(x)$  в точке с абсциссой  $x = a$ , если:

а)  $g(x) = x^6 - 3x^2 + 4$ ,  $a = -1$ ;

б)  $g(x) = x^{-4} - 6\sqrt{x}$ ,  $a = 1$ ;

в)  $g(x) = 12(2 - x)^{-0,5}$ ,  $a = -2$ ;

г)  $g(x) = x^5 - x^3 - 3x$ ,  $a = 1$ ;

д)  $g(x) = \sqrt[3]{(2x)^2} - 2$ ,  $a = 4$ ;

е)  $g(x) = -32(17 - x)^{-0,75} + 9x$ ,  $a = 16$ .

**13.14.** Найдите угол, который образует с осью  $x$  касательная к графику функции  $y = h(x)$ , проведённая в точке с абсциссой  $x = a$ , если:

а)  $h(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 1$ ,  $a = -1$ ;

б)  $h(x) = \sqrt[3]{(3x + 2)^2}$ ,  $a = 2$ ;

в)  $h(x) = (3x - 1)^{\frac{1}{3}} + 2$ ,  $a = \frac{2}{3}$ ;

г)  $h(x) = -x^5 + 7x^3 - x + 2$ ,  $a = 0$ ;

д)  $h(x) = -3(x - \sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$ ,  $a = \sqrt{2} + 1$ ;

е)  $h(x) = 5\sqrt{(3x - 2)^2} - 5x$ ,  $a = \frac{1}{3}$ .

**13.15.** Составьте уравнение касательной к графику данной функции в точке  $x = a$ :

а)  $y = x^4 - 3x^3 + 2$ ,  $a = 2$ ;

г)  $y = -x^4 + 5x^2 - 4$ ,  $a = 2$ ;

б)  $y = 2x^{\frac{2}{3}} - 3$ ,  $a = 8$ ;

д)  $y = 3 + x^{-\frac{3}{4}}$ ,  $a = 1$ ;

в)  $y = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}}$ ,  $a = 4$ ;

е)  $y = \sqrt[5]{5x + 2}$ ,  $a = 6$ .



**13.16.** Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$ , параллельной указанной прямой:

а)  $f(x) = 8\sqrt[4]{x-4}$ ,  $y = 2x + 3$ ;

б)  $f(x) = (x+2)^{-3}$ ,  $y = 2 - 3x$ .

**13.17.** Решите уравнение  $f'(x) = b$ , если:

а)  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^2 - 5$ ,  $b = 0$ ;      г)  $f(x) = 1\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 8$ ,  $b = 0$ ;

б)  $f(x) = \frac{2}{3}(4-3x)^{\frac{1}{2}}$ ,  $b = -1$ ;      д)  $f(x) = (2x+5)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $b = -8$ ;

в)  $f(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x} - 2x$ ,  $b = 3$ ;      е)  $f(x) = 1,5\sqrt[3]{x^2} - x$ ,  $b = 1$ .

**13.18.** Решите неравенство:

а)  $y' < 0$ , если  $y = -x^4 + x^3 - 4$ ;

б)  $y' > 0$ , если  $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x + 7$ ;

в)  $y' \leq 0$ , если  $y = 0,6x^{\frac{2}{3}} + 1,5x^{\frac{1}{3}} - 1$ ;

г)  $y' > 0$ , если  $y = x^4 + x^3 + 6$ ;

д)  $y' < 0$ , если  $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x - 1$ ;

е)  $y' \geq 0$ , если  $y = \frac{2}{5}x^{1,25} - 1\frac{2}{3}x^{0,75}$ .

**13.19.** Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$ , проведённой из точки  $N(0; 0)$ , если:

а)  $f(x) = -x\sqrt{x} - 4$ ;

б)  $y = \sqrt[3]{x^2} - 3$ .

## Упражнения для повторения

**13.20.** Вычислите:

а)  $2 + \log_{\sqrt{2}}\left(\sin \frac{\pi}{8}\right) + \log_{\sqrt{2}}\left(\cos \frac{\pi}{8}\right)$ ;

$$б) \log_{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{6} \right) + \log_{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} \right);$$

$$в) \log_3 \left( 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \right) - \log_3 \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} \right);$$

$$г) \log_{\sqrt{3}} \left( \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \right) + \log_{\sqrt{3}} \left( \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \right);$$

$$д) \log_{\frac{1}{2}} \left( \cos \frac{\pi}{12} \right) + \log_{\frac{1}{2}} \left( \sin \frac{\pi}{12} \right) - 1;$$

$$е) 1 + \log_2 \left( \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right) - \log_2 \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{8} \right).$$

**13.21.** Решите уравнение:

$$а) \log_4(2^x + 2x - 10) = x - x \log_4 2;$$

$$б) 10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20;$$

$$в) \log_3(5x + 3x - 6) = x \log_3 10 - \log_9 4x;$$

$$г) 5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} = 10.$$

**13.22.** Решите неравенство:

$$а) \frac{2^x - 8}{x^2 - 10x + 25} \geq 0;$$

$$в) \frac{25 - 0,2^x}{x^2 + 6x + 9} \leq 0;$$

$$б) \frac{6}{7^x + 48} > \frac{6}{7^{x+2}};$$

$$г) \frac{8^x + 44}{8^x} < 23.$$

**13.23.** Постройте график функции:

$$а) y = 3 \sin 2x;$$

$$г) y = -2 \cos \frac{x}{2};$$

$$б) y = \operatorname{tg} \left( x - \frac{\pi}{3} \right) + 1;$$

$$д) y = \operatorname{ctg} \left( x + \frac{2\pi}{3} \right) - 2;$$

$$в) y = \left| \cos x - \frac{1}{2} \right|;$$

$$е) y = \left| \sin x + \frac{1}{2} \right|.$$

## § 14. Дифференцирование показательных и логарифмических функций

Среди показательных функций наиболее важной для приложений является функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = e^x$ . Её графиком, напомним, является экспонента, обладающая следующей особенностью: касательная к графику функции  $y = e^x$  в точке  $(0; 1)$  образует с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$  (рис. 52), угловой коэффициент этой касательной равен 1. Это значит, что для функции  $y = e^x$  значение производной в точке  $x = 0$  нам уже известно:  $f'(0) = 1$ .

Введём в рассмотрение функцию  $y = g(x)$ , где  $g(x) = f(x - a)$ , т. е.  $g(x) = e^{x-a}$ . На рисунке 52 изображён график функции  $y = g(x)$ : он получен из графика функции  $y = f(x)$  сдвигом по оси  $Ox$  на  $|a|$  единиц масштаба. Касательная к графику функции  $y = g(x)$  в точке  $x = a$  параллельна касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x = 0$  (см. рис. 52), значит, она образует с осью  $Ox$  угол  $45^\circ$ . Используя геометрический смысл производной, можем записать, что  $g'(a) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$ .

Вернёмся к функции  $y = f(x)$ , где  $f(x) = e^x$ . Имеем:

$$f(x) = e^x = e^a \cdot e^{x-a} = e^a \cdot g(x).$$

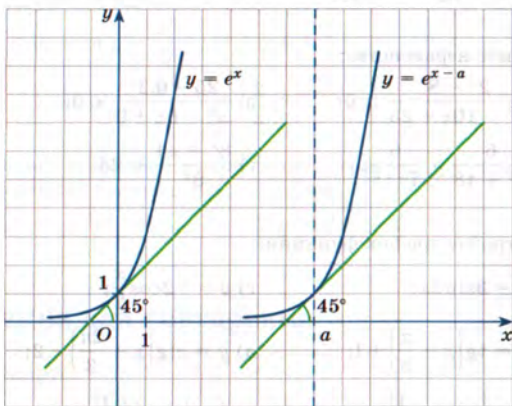


Рис. 52

Значит,  $f'(x) = e^a \cdot g'(x)$ , в частности  $f'(a) = e^a \cdot g'(a)$ . Но  $g'(a) = 1$ , значит,  $f'(a) = e^a$ .

Мы установили, что для любого значения  $a$  справедливо соотношение  $f'(a) = e^a$ . Вместо буквы  $a$  можно, естественно, использовать и букву  $x$ ; тогда получим, что  $f'(x) = e^x$ , т. е.

$$(e^x)' = e^x. \quad (1)$$

Быть может, у вас возник вопрос, почему для вывода формулы дифференцирования функции  $y = e^x$  мы не воспользовались, как в предыдущих параграфах, обычным «пятишаговым» алгоритмом из § 7. Дело в том, что мы не смогли бы вычислить предел на пятом шаге алгоритма (разумеется, в курсе высшей математики с вычислением этого предела проблем нет).

Опираясь на теорему из § 12, получим более общую формулу:

$$(e^{kx})' = k e^{kx}. \quad (2)$$

Формула (2) означает, что функция  $y = e^{kx}$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $y' = ky$ . Это уравнение представляет собой математическую модель многих процессов реальной действительности (радиоактивный распад, динамика вклада в банке и т. д.).

**Пример 1** Найти стационарные и критические точки функции  $y = e^{2x} \sqrt[5]{x}$ .

**Решение.** Напомним, что стационарная точка функции  $y = f(x)$  — это такая точка  $x$ , в которой  $f'(x) = 0$ ; критическая точка функции  $y = f(x)$  — это такая точка  $x$ , в которой функция непрерывна, но  $f'(x)$  не существует (понятия стационарной и критической точек мы ввели в § 8).

Воспользовавшись правилом дифференцирования произведения функций и формулой (2), найдём производную заданной функции:

$$\begin{aligned} y' &= (e^{2x} \sqrt[5]{x})' = (e^{2x})' \sqrt[5]{x} + e^{2x} \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = 2e^{2x} \sqrt[5]{x} + e^{2x} \left(\frac{1}{5} x^{\frac{1}{5}-1}\right) = \\ &= 2e^{2x} \sqrt[5]{x} + \frac{e^{2x}}{5x^{\frac{4}{5}}} = 2e^{2x} \sqrt[5]{x} + \frac{e^{2x}}{5\sqrt[5]{x^4}} = \frac{e^{2x}(10x + 1)}{5\sqrt[5]{x^4}}. \end{aligned}$$



Итак,  $y' = \frac{e^{2x}(10x+1)}{5\sqrt[5]{x^4}}$ . Заданная функция  $y = e^{2x}\sqrt[5]{x}$  непрерывна

в любой точке  $x$  и дифференцируема всюду, кроме точки  $x=0$ ;  $x=0$  — критическая точка заданной функции.

Стационарные точки найдём из уравнения  $y' = 0$ . Имеем:

$$\frac{e^{2x}(10x+1)}{5\sqrt[5]{x^4}} = 0; \quad 10x+1=0; \quad x=-0,1.$$

**Ответ:**  $x=0$  — критическая точка,  $x=-0,1$  — стационарная точка.

Выведем теперь формулу дифференцирования показательной функции с произвольным основанием  $a > 1$ ,  $a \neq 1$ . Для этого нам понадобится так называемое основное логарифмическое тождество ( $a^{\log_a b} = b$ ):

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln a \cdot x}.$$

Для нахождения производной функции  $y = e^{\ln a \cdot x}$  воспользуемся формулой (2):

$$(e^{\ln a \cdot x})' = \ln a \cdot e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot (e^{\ln a})^x = \ln a \cdot a^x.$$

Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (3)$$

**Пример 2** Составить уравнение касательной к графику функции  $y = 3^x$  в точке  $x = -1$ .

**Решение.** Здесь  $f(x) = 3^x$ . Воспользуемся алгоритмом составления уравнения касательной к графику функции (см. § 9).

1) Обозначим абсциссу точки касания буквой  $a$ . По условию  $a = -1$ .

2) Вычислим  $f(a)$ , т. е.  $f(-1)$ ;

$$f(-1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

3) Найдём  $f'(x)$  и  $f'(a)$ :

$$f'(x) = 3^x \ln 3; \quad f'(-1) = \frac{1}{3} \ln 3.$$

4) Подставим найденные числа  $a = -1$ ,  $f(a) = \frac{1}{3}$ ,  $f'(a) = \frac{1}{3} \ln 3$  в уравнение касательной  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \ln 3(x + 1) = \frac{1}{3} \ln 3 \cdot x + \frac{1}{3}(1 + \ln 3) = \\ &= \frac{1}{3} \ln 3 \cdot x + \frac{1}{3}(\ln e + \ln 3) = \frac{1}{3}(x \ln 3 + \ln 3e). \end{aligned}$$

**Ответ:**  $y = \frac{1}{3}(x \ln 3 + \ln 3e)$ .

Теперь поговорим о дифференцировании логарифмических функций. Самый простой вид имеет производная логарифмической функции по основанию  $e$ , т. е. функция  $y = \ln x$  (натуральный логарифм):

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}. \quad (4)$$

Но, как и в случае с функцией  $y = e^x$ , в школьном курсе математики строго доказать эту формулу не удастся. В приложении к настоящему параграфу мы дадим обоснование формулы (4), исходя из геометрических соображений.

**Пример 3** Составить уравнение той касательной к графику функции  $y = \ln x$ , которая параллельна прямой  $y = \frac{1}{e}x + 1$ .

**Решение.** Абсцисса  $x = a$  точки касания здесь не указана. Но поскольку искомая касательная параллельна прямой  $y = \frac{1}{e}x + 1$ , угловой коэффициент касательной равен угловому коэффициенту данной прямой, т. е.  $(\ln x)' = \frac{1}{e}$ . Значит,  $\frac{1}{x} = \frac{1}{e}$ ,  $x = e$ ; такова абсцисса точки касания.

Теперь всё готово для использования алгоритма составления уравнения касательной к графику функции  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \ln x$ .

1)  $a = e$  — абсцисса точки касания.

2) Вычислим  $f(a)$ , т. е.  $f(e)$ ;  $f(e) = \ln e = 1$ .

3)  $f'(a) = \frac{1}{e}$ .

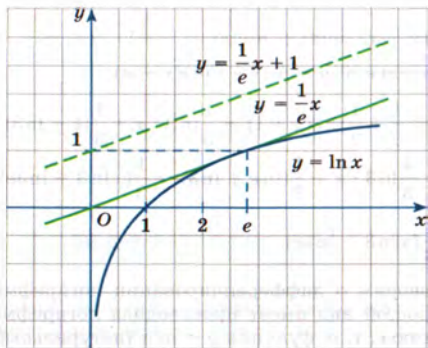


Рис. 53

4) Подставим найденные числа  $a = e$ ,  $f(a) = 1$ ,  $f'(a) = \frac{1}{e}$  в уравнение касательной  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ :

$$y = 1 + \frac{1}{e}(x - e); \quad y = \frac{1}{e}x.$$

На рисунке 53 построены график функции  $y = \ln x$ , прямая  $y = \frac{1}{e}x + 1$  и проведена искомая касательная.

**Ответ:**  $y = \frac{1}{e}x$ .

Завершая параграф, выведем формулу дифференцирования логарифмической функции по произвольному основанию  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Воспользовавшись известной из курса 10-го класса формулой перехода

к новому основанию логарифма  $\left( \log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b} \right)$ , получим

$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ . Далее, имеем:

$$y' = (\log_a x)' = \left( \frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Итак,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \quad (5)$$

## Приложение к § 14

На рисунке 54 изображены графики взаимно обратных функций  $y = f(x)$  и  $y = g(x)$ . Эти графики симметричны относительно прямой  $y = x$ . Предположим, что в точке  $M(x_0; y_0)$ , взятой на графике функции  $y = f(x)$ , существует невертикальная касательная к графику; эта касательная составляет с положительным лучом оси абсцисс угол  $\alpha$ . Тогда  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ .

Возьмём на графике обратной функции  $y = g(x)$  точку  $M'$ , симметричную точке  $M$  относительно прямой  $y = x$ . Точка  $M'$  имеет координаты  $(y_0; x_0)$ , в этой точке к графику функции  $y = g(x)$  тоже можно провести касательную, причём она симметрична касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M$  (ось симметрии — прямая  $y = x$ ). Новая касательная составляет с положительным лучом оси  $Oy$  угол  $\alpha$ ,

а с положительным лучом оси  $Ox$  — угол  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ . Поэтому

$$g'(y_0) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

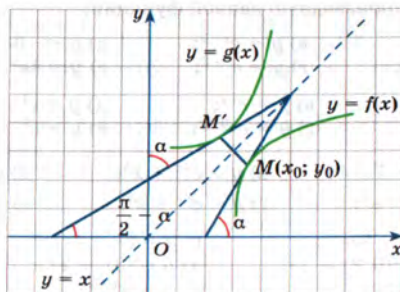


Рис. 54



Таким образом, мы получили следующее правило вычисления производной обратной функции:

производная обратной функции есть величина, обратная производной данной функции.

Строгого доказательства этого утверждения мы здесь не приводим, ограничимся геометрическим истолкованием.

Кратко это правило можно записать так:

$$y'_x = \frac{1}{x'_y}, \text{ если } x'_y \neq 0.$$

Если  $y = \ln x$ , то

$$y'_x = (\ln x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{e^y}.$$

Так как  $y = \ln x$ , то  $e^y = x$ . Следовательно,

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

## Упражнения

Найдите производную данной функции.

**14.1.** а)  $y = e^x$ ;                      в)  $y = e^{x-3}$ ;                      д)  $y = -3e^x$ ;  
б)  $y = -e^x$ ;                      г)  $y = e^{x+2}$ ;                      е)  $y = 4e^x$ .

**14.2.** а)  $y = e^{2x}$ ;                      в)  $y = e^{-x}$ ;                      д)  $y = e^{1-3x}$ ;  
б)  $y = e^{5x}$ ;                      г)  $y = e^{-0,5x}$ ;                      е)  $y = e^{3-x}$ .

**14.3.** а)  $y = e^x - 7x$ ;                      в)  $y = e^{-x} + x^3$ ;                      д)  $y = e^{5x+4} - \sqrt{x}$ ;  
б)  $y = 6x - e^x$ ;                      г)  $y = e^{8x} + x^2$ ;                      е)  $y = e^{5-2x} + \sqrt[3]{x}$ .

**14.4.** а)  $y = (2x - 9)e^{-x}$ ;                      г)  $y = (7 - 4x)e^x$ ;  
б)  $y = e^{x-1}(0,2x + 1)^5$ ;                      д)  $y = (3x + 2)^4 e^{x+6}$ ;  
в)  $y = \frac{e^{2x-1}}{x^3}$ ;                      е)  $y = \frac{e^{4-3x}}{x^4}$ .

14.5. а)  $y = e^x \cos 2x$ ; г)  $y = e^{-x} \sin 3x$ ;

б)  $y = e^{1-6x} \sin \frac{x}{2}$ ; д)  $y = e^{5x+3} \cos \frac{x}{3}$ ;

в)  $y = e^{2,5x} \operatorname{tg}(-0,4x)$ ; е)  $y = e^{2x} \operatorname{ctg} \frac{x}{5}$ .

14.6. а)  $y = 4^x$ ; в)  $y = 0,2^{x-4}$ ; д)  $y = 2^x$ ;

б)  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x}$ ; г)  $y = 1,5^{x+5}$ ; е)  $y = \left(\frac{1}{6}\right)^{-x}$ .

14.7. а)  $y = 3^{2x-1} + x^4$ ; г)  $y = 0,5^{3x+2} - x^3$ ;

б)  $y = -2x \cdot 10^{2x}$ ; д)  $y = 3x \cdot 0,1^{-3x}$ ;

в)  $y = \frac{0,8^x}{4x-3}$ ; е)  $y = \frac{3-5x}{1,2^x}$ .

14.8. Найдите значение производной в точке  $x_0$ :

а)  $y = e^x + x^3, x_0 = 0$ ; г)  $y = e^x - x^4, x_0 = 1$ ;

б)  $y = e^{2x+3} - 5, x_0 = -1$ ; д)  $y = e^{9-3x} + x, x_0 = 3$ ;

в)  $y = e^x \sqrt{x}, x_0 = 1$ ; е)  $y = e^x \sqrt[3]{x}, x_0 = 1$ .

14.9. Найдите скорость изменения функции в точке  $x_0$ :

а)  $y = e^x(x^2 - 1), x_0 = -1$ ; г)  $y = e^{2x}(3 - 5x), x_0 = 0$ ;

б)  $y = \frac{\sqrt{x}}{e^{4x}}, x_0 = 1$ ; д)  $y = \frac{e^{3x-1}}{\sqrt[3]{x}}, x_0 = 1$ ;

в)  $y = 2^x \cdot \sin 2x, x_0 = 0$ ; е)  $y = 3^{-x} \cdot \operatorname{tg} x, x_0 = 0$ .

14.10. Найдите угловой коэффициент касательной к графику заданной функции в точке  $x_0$ :

а)  $y = 0,4e^{0,5x} + 3, x_0 = -2$ ; г)  $y = 20e^{0,1x} - x, x_0 = 10$ ;

б)  $y = 0,5^{2x+1}, x_0 = -0,5$ ; д)  $y = \left(\frac{2}{3}\right)^{3x}, x_0 = -\frac{1}{3}$ ;

в)  $y = \frac{e^{2x}}{x-2}, x_0 = 0$ ; е)  $y = \frac{3x+4}{e^{\frac{x-1}{3}}}, x_0 = 1$ .

**14.11.** Найдите тангенс угла между касательной к графику заданной функции в точке  $x_0$  и осью абсцисс:

а)  $y = 2e^{-x} + 1, x_0 = 0;$

г)  $y = e^x - x^3, x_0 = 1;$

б)  $y = e^{5x-6} + x, x_0 = 1,2;$

д)  $y = e^{5-x} + e, x_0 = 5;$

в)  $y = x \cdot 3^x, x_0 = 0;$

е)  $y = \frac{x-1}{6^{2x}}, x_0 = 1.$

**14.12.** Найдите угол между осью  $Ox$  и касательной, проведённой к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$ :

а)  $f(x) = \frac{1}{6}e^{6x+1}, a = -\frac{1}{6};$

б)  $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{e^{x+\sqrt{3}}}, a = -\sqrt{3};$

в)  $f(x) = x + 0,5\frac{x}{\ln 2}, a = 0;$

г)  $f(x) = -\frac{1}{4}e^{4x-1}, a = 0,25;$

д)  $f(x) = e^{x\sqrt{3}-3}, a = \sqrt{3};$

е)  $f(x) = x + 0,1\frac{x}{\ln 10}, a = 0.$

**14.13.** Составьте уравнение касательной, проведённой к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$ :

а)  $f(x) = e^x, a = -1;$

г)  $f(x) = e^{-x}, a = 0;$

б)  $f(x) = xe^{3x+1}, a = -\frac{1}{3};$

д)  $f(x) = xe^{1-5x}, a = 0,2;$

в)  $y = 2^{x+1}, a = -1;$

е)  $y = 5^{2x-1}, a = 0,5.$

**14.14.** Через какую точку графика функции  $y = e^{3x+4}$  надо провести касательную, чтобы она проходила через начало координат? Составьте уравнение этой касательной.

Найдите производную функции.

**14.15.** а)  $y = \ln x;$

г)  $y = \ln(x+3);$

б)  $y = 2\ln x;$

д)  $y = \ln(2x+1);$

в)  $y = \ln(x-2);$

е)  $y = \ln(1-x).$

**14.16.** а)  $y = x + \ln x;$

г)  $y = x^2 - \ln x;$

б)  $y = x^3 \ln x;$

д)  $y = \sqrt{x} \ln x;$

в)  $y = \frac{\ln x}{\cos x};$

е)  $y = \frac{\sin x}{\ln x}.$

**14.17.** а)  $y = \log_3 x$ ;      в)  $y = \frac{1}{\log_2 x}$ ;      д)  $y = x^3 \lg x$ ;

б)  $y = \log_{0,5} x$ ;      г)  $y = \frac{2}{\log_5 x}$ ;      е)  $y = \frac{x}{\lg x}$ .

**14.18.** а)  $y = \log_2(4x + 1)$ ;      г)  $y = \log_5(3 - 2x)$ ;

б)  $y = \log_{0,2}(4 - 5x)$ ;      д)  $y = \log_{\frac{1}{3}}(3x - 2)$ ;

в)  $y = \lg(-x)$ ;      е)  $y = \log_{0,1}(10x)$ .

**14.19.** Найдите значение производной данной функции в точке  $x_0$ :

а)  $y = x^3 + \ln x$ ,  $x_0 = 1$ ;

б)  $y = \log_3 x + 1$ ,  $x_0 = 3$ ;

в)  $y = x^4 - \ln x$ ,  $x_0 = 1$ ;

г)  $y = \log_{0,5} x + x$ ,  $x_0 = 4$ .

**14.20.** Найдите угловой коэффициент касательной к графику заданной функции в точке  $x_0$ :

а)  $y = \frac{x^2}{\ln x}$ ,  $x_0 = e$ ;

б)  $y = x^3 \ln x$ ,  $x_0 = 1$ ;

в)  $y = (x^2 - 4) \lg(x + 2)$ ,  $x_0 = -1$ ;

г)  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ,  $x_0 = 4$ ;

д)  $y = x \lg x$ ,  $x_0 = 1$ ;

е)  $y = (x^2 - 1) \log_2(x - 1)$ ,  $x_0 = 2$ .

**14.21.** а) Найдите точку графика функции  $y = 2e^{4-0,5x}$ , в которой касательная образует с осью  $x$  угол  $\alpha = 135^\circ$ .

б) Найдите точку графика функции  $y = -\sqrt{3} \ln x$ , в которой касательная образует с осью  $x$  угол  $\alpha = 150^\circ$ .

**14.22.** Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = g(x)$  в точке  $x = a$ :

а)  $g(x) = \log_3 x$ ,  $a = 9$ ;

б)  $g(x) = \sqrt[3]{x} \ln x$ ,  $a = 1$ ;

в)  $g(x) = (x - 2) \log_2 x$ ,  $a = 2$ ;

г)  $g(x) = \lg x$ ,  $a = 1$ ;

д)  $g(x) = x^{-2} \ln x$ ,  $a = 1$ ;

е)  $g(x) = (5x - 1) \log_5 x$ ,  $a = \frac{1}{5}$ .



- 14.23.** а) Касательная к графику функции  $y = 4^x - 4 \cdot 2^x - 14x \ln 2$  параллельна прямой  $y = x \ln 4$ . Найдите абсциссу точки касания.  
 б) Касательная к графику функции  $y = 0,5 \cdot 25^x + 8 \cdot 5^x$  параллельна прямой  $y = 9x \ln 5$ . Составьте уравнение этой касательной.
- 14.24.** Составьте уравнение той касательной к графику функции  $y = f(x)$ , которая проходит через начало координат, если:  
 а)  $f(x) = \ln x + 1$ ;                      б)  $f(x) = \ln^2 x$ .
- 14.25.** а) При каких значениях параметра  $p$  прямая  $y = 2x + 3p - 3$  является касательной к графику функции  $y = \ln(2x - 3)$ ?  
 б) При каких значениях параметра  $a$  прямая  $y = 2x + p + 3$  является касательной к графику функции  $y = \ln(2x + 3)$ ?

## Упражнения для повторения

- 14.26.** Андрей сделал в банке вклад на сумму 250 000 р. при условии, что в конце года сумма вклада увеличивается на  $p\%$  и никакие другие операции с вкладом не производятся. Через год в этом же банке и на таких же условиях сделал точно такой же вклад его приятель Алексей. Ровно через год после этого они оба закрыли свои вклады. При этом выяснилось, что Андрей получил на 33 600 р. больше, чем Алексей. Какой процент годовых начислял этот банк?
- 14.27.** При каких значениях  $k$  прямая  $y = kx$  не имеет общих точек с графиком функции  $y = \frac{2 - |x|}{x^2 - 2|x|}$ ?
- 14.28.** При каких значениях параметра  $p$  имеет решения уравнение:  
 а)  $\frac{1}{2} \sin x \cos x = \frac{3p - 2}{5}$ ;                      б)  $\cos^2 \frac{x}{2} = p^2 - 8$ ?

## Итак, в главе 2

Определили следующие понятия:

- производная;
- дифференцируемость функции в точке;
- стационарная точка функции;
- критическая точка функции.

Выяснили, в чём состоит:

- физический (механический) смысл производной;
- геометрический смысл производной.

Сформулировали алгоритмы:

- нахождения производной;
- составления уравнения касательной к графику функции.

Получили необходимые для вычисления производной:

- правила дифференцирования;
- формулы дифференцирования.

## Вопросы

1. Что такое средняя скорость движения по прямой за данный промежуток времени?
2. Что называют мгновенной скоростью движения в фиксированный момент времени?
3. Сформулируйте определение производной функции в точке.
4. Сформулируйте алгоритм нахождения производной.
5. В чём состоит геометрический смысл производной?
6. В чём состоит физический (механический) смысл производной?
7. Как по графику функции определить наличие её производной в фиксированной точке?
8. Запишите формулы дифференцирования функций:

$$y = C, \quad y = kx + m, \quad y = x^2, \quad y = x^3, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = \sqrt{x}.$$

9. Сформулируйте правило вычисления производной суммы функций.
10. Сформулируйте правило вычисления производной произведения двух функций.

11. Сформулируйте правило вычисления производной частного функций.
12. Сформулируйте правило вычисления производной линейной комбинации функций.
13. В чём состоит правило дифференцирования функции вида  $y = f(kx + m)$ ?
14. Запишите формулы дифференцирования тригонометрических функций:  
 $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ .
15. Запишите формулу дифференцирования степенной функции  $y = x^r$ .
16. Запишите формулы дифференцирования функций  $y = e^x$ ,  $y = a^x$ ,  $y = \ln x$ ,  $y = \log_a x$ .

## Тест

1. Движение точки по координатной прямой задаётся формулой  $s(t) = 2t^2 - 3t + 1$ . Найдите скорость движения точки в момент времени  $t = 2$ .
2. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции  $y = \frac{1}{x^2}$  в точке с абсциссой  $x_0 = -0,5$ .
3. Укажите производную функции  $y = \sqrt{2x}$ .  
 а)  $\frac{1}{\sqrt{x}}$       б)  $\frac{1}{2\sqrt{2x}}$       в)  $\frac{1}{\sqrt{2x}}$       г)  $\frac{2}{\sqrt{x}}$
4. Укажите выражение, равное производной функции  $y = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ .  
 а)  $-\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$       б)  $-\cos x$       в)  $\sin x$       г)  $-\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$
5. На рисунке 55 изображён график дифференцируемой функции  $y = f(x)$ . На графике отмечены точки  $L$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $P$ . Укажите неверное утверждение относительно произведения угловых коэффициентов касательных в этих точках.  
 а)  $k_M \cdot k_N > 0$       в)  $k_M \cdot k_L < 0$   
 б)  $k_N \cdot k_P > 0$       г)  $k_L \cdot k_N \cdot k_P > 0$



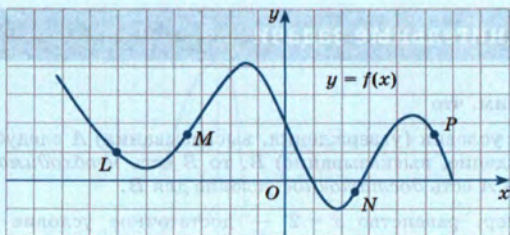


Рис. 55

6. На рисунке 56 изображён график производной функции  $y = f(x)$ . Укажите количество стационарных точек.

7. Найдите тангенс угла между касательной, проведённой к графику функции  $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$  в точке  $x_0 = 1$ , и положительным направлением оси абсцисс.

- а)  $2\frac{1}{3}$       б)  $\frac{2}{3}$       в) 1      г)  $1\frac{2}{3}$

8. Дана функция  $y = 32^x$ . Решите уравнение  $y' = 320 \ln 2$ .

9. Дана функция  $y = \ln(4x - 1)$ . Решите неравенство  $y' < 12$ .

- а)  $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{3}$       в)  $x < \frac{1}{4}, x > \frac{1}{3}$

- б)  $x < \frac{1}{3}, x \neq \frac{1}{4}$       г)  $x > \frac{1}{3}$

10. Составьте уравнение той касательной к графику функции  $y = 4x^4 - \ln x$ , которая параллельна прямой  $y = -1$ .

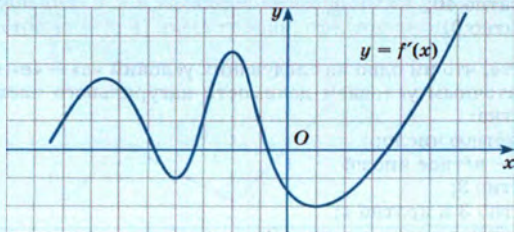


Рис. 56



Напомним, что

Например, равенство  $x = 2$  — достаточное условие равенства  $x^2 = 4$ , так как если  $x = 2$ , то  $x^2 = 4$ .

Другой пример: непрерывность функции в точке — необходимое условие её дифференцируемости в этой точке (см. конец § 8).

- 140

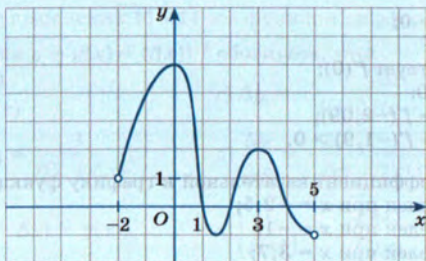


Рис. 57

Какие из условий «а»—«е» на дифференцируемую функцию  $y = f(x)$  в упражнениях 5 и 6 являются необходимыми условиями того, что она на интервале  $(-2; 5)$  имеет график, представленный на рисунке 57?

5. а)  $f(-1) > 0$ ; г)  $f'(2) = 0$ ;  
 б)  $f(1) > 0$ ; д)  $f'(3) = 0$ ;  
 в)  $f'(1) < 0$ ; е)  $f'(-1) \cdot f'(4) < 0$ .
6. Эта функция:
  - а) возрастает на  $(-2; 1]$ ;
  - б) возрастает на  $[2; 3]$ ;
  - в) не монотонна на  $(-2; 5)$ ;
  - г) непрерывна на  $[-1; 1]$ ;
  - д) имеет на  $(-2; -1]$  всюду положительную производную;
  - е) имеет на  $(-2; 5)$  всюду положительную производную.

Какие из условий «а»—«е» на кусочно-линейную функцию  $y = f(x)$  в упражнениях 7 и 8 являются необходимыми условиями того, что она на отрезке  $[-3; 4]$  имеет график, представленный на рисунке 58?

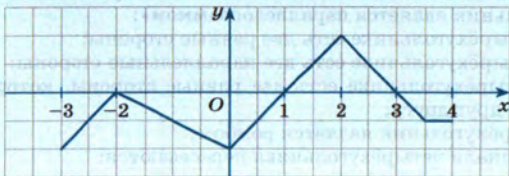


Рис. 58

7. а)  $f'(-1,5) > 0$ ;  
б)  $f'(0) = 0$ ;  
в) не существует  $f'(0)$ ;  
г)  $f'(3,9) = 0$ ;  
д)  $f'(-2,9) = f'(-2,09)$ ;  
е)  $f'(-2,9) + f'(-1,9) > 0$ .
8. Угловый коэффициент касательной к графику функции:  
а) положителен при  $x = -2,5$ ;  
б) положителен при  $x = -1$ ;  
в) положителен при  $x = 3,7$ ;  
г) одинаков при  $x = 0,5$  и  $x = 1,9$ ;  
д) равен нулю при  $x = 3,9$ ;  
е) различен при  $x = 2,5$  и  $x = 3$ .
9. Какие из условий «а»—«е» являются достаточными для справедливости равенства  $f'(1) = 3$ :  
а)  $f(x) = 3 - 0,5(5 - 6x)$ ;  
б)  $f(x) = x^2 + x - 11$ ;  
в)  $f(x) = x^3 - x^2 + x$ ;  
г)  $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}} + 4x\sqrt{x}$ ;  
д)  $f(x) = 3 + \ln x$ ;  
е)  $f(x) = \sin(\pi x)$ ?

В математике часто приходится иметь дело с ситуациями, когда одно условие  $A$  является и достаточным, и необходимым для выполнения другого условия  $B$ . В таких случаях говорят, что условия  $A$  и  $B$  эквивалентны (равносильны), или же что условие  $B$  есть критерий условия  $A$ . Типичные примеры даёт геометрия.

10. Для каждого из условий «а»—«е» выясните, является ли оно достаточным, необходимым, эквивалентным условию  $A$  — «четырёхугольник является параллелограммом»:  
а) в четырёхугольнике есть две равные стороны;  
б) в четырёхугольнике есть две параллельные стороны;  
в) в четырёхугольнике есть две равные стороны, которые параллельны друг другу;  
г) четырёхугольник является ромбом;  
д) диагонали четырёхугольника пересекаются;  
е) диагонали четырёхугольника в точке их пересечения делятся пополам.



В условии упражнений 11—14 все функции дифференцируемы.

**11.** Для функции  $y = y(x) = (f(x))^{-1}$  обоснуйте, что:

а)  $y(x) = \frac{1}{f(x)}$ ;

г)  $\Delta y = -\frac{\Delta f}{f(x)\Delta f(x + \Delta x)}$ ;

б)  $y(x + \Delta x) = \frac{1}{f(x + \Delta x)}$ ;

д)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \frac{1}{f(x) \cdot f(x + \Delta x)}$ ;

в)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y(x + \Delta x) = y(x)$ ;

е)  $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$ .

**12.** Используя теорему о производной частного (см. теорему 3 в § 10) и формулу из упражнения 11 «е», докажите теорему о производной частного.

**13.** Для функции  $y = y(x) = f(kx + m)$  обоснуйте, что:

а)  $y(0) = f(m)$ ,  $y(1) = f(k + m)$ ;

б)  $y(x + \Delta x) = f((kx + m) + k\Delta x)$ ;

в)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y(x + \Delta x) = y(x)$ ;

г)  $\Delta y = f((kx + m) + k\Delta x) - f(kx + m)$ ;

д)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f((kx + m) + k\Delta x) - f(kx + m)}{k\Delta x} \cdot \frac{k\Delta x}{\Delta x}$ ;

е)  $(f(kx + m))' = kf'(kx + m)$ .

**14.** Какие из следующих функций являются решением дифференциального уравнения  $y' = 2y$ , а какие не являются:

а)  $y = 2 + e^x$ ;

в)  $y = e^{2x}$ ;

д)  $y = 2e^{-2x}$ ;

б)  $y = 1 + 2e^x$ ;

г)  $y = -2e^{2x}$ ;

е)  $y = e^x + e^{-x}$ ?



Дальневосточный федеральный  
университет.  
Владивосток



- §15. Исследование функций на монотонность
- §16. Исследование функций на экстремум
- §17. О построении графиков функций
- §18. Нахождение наименьшего и наибольшего значений  
непрерывной функции на промежутке
- §19. Задачи на нахождение наименьших и наибольших  
значений величин

## Глава 3

# Исследование функций с помощью производной

### § 15. Исследование функций на монотонность

На рисунке 59 представлен график некоторой возрастающей дифференцируемой функции  $y = f(x)$  и проведены касательные к графику в точках  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $x = c$ ,  $x = d$ . Первые две (смотрите!) составляют с осью  $Ox$  острый угол, т. е. у обеих прямых угловые коэффициенты положительны. Но мы же знаем, что угловой коэффициент касательной равен значению производной в абсциссе точки касания. Таким образом,  $f'(a) > 0$ ,  $f'(b) > 0$ . А в точках  $x = c$ ,  $x = d$  касательные параллельны оси  $Ox$ , значит,  $f'(c) = 0$ ,  $f'(d) = 0$ . Вообще в любой точке  $x$  из области определения возрастающей дифференцируемой функции выполняется неравенство  $f'(x) \geq 0$ .

На рисунке 60 представлен график некоторой убывающей дифференцируемой функции  $y = f(x)$ . Проведём касательные к графику в точках  $x = a$ ,  $x = b$ . Обратите внимание: обе они составляют с осью  $Ox$  тупой угол, т. е. у обеих прямых угловые коэффициенты отрицательны, а потому  $f'(a) < 0$ ,  $f'(b) < 0$ . А в точке  $x = c$  касательная параллельна оси  $Ox$ , значит,  $f'(c) = 0$ . Вообще в любой точке  $x$  из области определения убывающей дифференцируемой функции выполняется неравенство  $f'(x) \leq 0$ .

Как видите, между характером монотонности функции и знаком её производной есть определённая связь: *если дифференцируемая функция возрастает на промежутке, то её производная во всех точках промежутка неотрицательна; если дифференцируемая функция убывает на промежутке, то её производная во всех точках промежутка неположительна*. При этом во избежание недоразумений берут только открытые промежутки, т. е. интервалы или

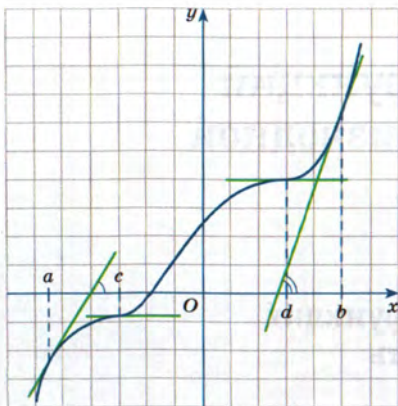


Рис. 59

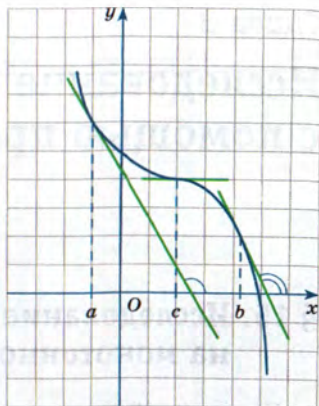


Рис. 60

открытые лучи. Дело в том, что для функции, определённой на отрезке  $[a; b]$ , не очень корректно ставить вопрос о существовании производной в концевой точке (в точке  $x = a$  или в точке  $x = b$ ), поскольку в точке  $x = a$  приращение аргумента может быть только положительным, а в точке  $x = b$  — только отрицательным. Но в определении производной такие ограничения не предусмотрены.

Итак, по характеру монотонности функции можно судить о знаке её производной. Но гораздо важнее то, что верно и обратное: по знаку производной можно судить о характере монотонности функции.

**Теорема 1.** Если во всех точках открытого промежутка  $X$  выполняется неравенство  $f'(x) \geq 0$  (причём равенство  $f'(x) = 0$  либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция  $y = f(x)$  возрастает на промежутке  $X$ .

**Теорема 2.** Если во всех точках открытого промежутка  $X$  выполняется неравенство  $f'(x) \leq 0$  (причём равенство  $f'(x) = 0$  либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция  $y = f(x)$  убывает на промежутке  $X$ .



Эти теоремы доказывают в университетских курсах математического анализа. Мы ограничимся их обоснованием с помощью физической модели «Производная — это скорость».

Предположим, что материальная точка движется по прямой,  $s = s(t)$  — закон её движения. Если  $s'(t) > 0$ , т. е. скорость движения положительна, то точка удаляется от начала отсчёта. Значит, функция  $s = s(t)$  возрастает. Если скорость  $s'(t)$  отрицательна, то точка приближается к началу отсчёта, функция  $s = s(t)$  убывает. Если скорость движения сначала была положительной, затем в какой-то момент времени обратилась в нуль, а потом снова стала положительной, то движущаяся точка в указанный момент времени как бы притормаживает (останавливается), а потом продолжает удаляться от начальной точки. Так что и в этом случае функция  $s = s(t)$  возрастает.

**Пример 1** Доказать, что функция:

а)  $y = x^7 - 7x^4 + 28x - 5$  возрастает на всей числовой прямой;

б)  $y = \frac{\ln x}{x}$  убывает на луче  $[3; +\infty)$ .

**Решение. а)**

$$y' = (x^7 - 7x^4 + 28x - 5)' = 7x^6 - 28x^3 + 28 = 7(x^6 - 4x^3 + 4) = 7(x^3 - 2)^2.$$

Производная  $7(x^3 - 2)^2$  равна нулю только в точке  $\sqrt[3]{2}$ , а в остальных точках числовой прямой она положительна. Значит, производная функции удовлетворяет условиям теоремы 1, а потому сама функция возрастает на всей числовой прямой.

б)

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot x'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Если  $x \in (3; +\infty)$ , то  $x > e$ ,  $\ln x > \ln e$ , т. е.  $\ln x > 1$ ,  $\frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ .

Таким образом, производная  $y'$  на  $(3; +\infty)$  отрицательна. По теореме 2 из этого следует, что сама функция убывает на открытом луче  $(3; +\infty)$ .

Для того чтобы доказать убывание функции на луче  $[3; +\infty)$ , рассуждают так. Функция  $y = \frac{\ln x}{x}$  непрерывна на  $(0; +\infty)$  как частное



непрерывных функций. Значит, она непрерывна и на  $[3; +\infty)$ . После этого используют следующее правило:

если функция возрастает (убывает) на открытом луче  $(a; +\infty)$  и непрерывна на луче  $[a; +\infty)$ , то она также возрастает (убывает) на луче  $[a; +\infty)$ .

Такое же правило верно и для перехода от  $(-\infty; b)$  к  $(-\infty; b]$ , от  $(a; b)$  к  $[a; b]$  и т. д. Кратко: *концевые точки включают в промежуток монотонности непрерывной функции.*

**Пример 2** Исследовать на монотонность функцию  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  и построить её график.

**Решение.** Исследовать функцию на монотонность — это значит выяснить, на каких промежутках области определения функция возрастает, а на каких убывает. Согласно теоремам 1 и 2, это связано со знаком производной. Найдём производную данной функции:

$$y' = (x^3 - 3x^2 + 4)' = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2).$$

Заметим, что  $y' = 0$  при  $x = 0$ ,  $x = 2$ . Область определения данной функции — вся числовая прямая. На рисунке 61 схематически указаны знаки производной на промежутках области определения: на открытом луче  $(-\infty; 0)$  производная положительна, на интервале  $(0; 2)$  — отрицательна, на открытом луче  $(0; +\infty)$  — положительна. Значит, на луче  $(-\infty; 0]$  функция возрастает, на отрезке  $[0; 2]$  убывает, на луче  $[2; +\infty)$  возрастает.



Рис. 61

Чтобы построить график функции  $y = x^3 - 3x^2 + 4$ , составим таблицу значений функции, куда обязательно следует включить значения функции в концевых точках промежутков монотонности ( $x = 0$ ,  $x = 2$ ) и ещё несколько значений:

$x$	-1	0	1	2	3
$y$	0	4	2	0	4

Отметим точки  $(-1; 0)$ ,  $(0; 4)$ ,  $(1; 2)$ ,  $(2; 0)$ ,  $(3; 4)$  на координатной плоскости. Через отмеченные точки проводим линию, учитывая найденные промежутки возрастания и убывания функции и то, что в точках  $x = 0$  и  $x = 2$  производная обращается в нуль, касательная к графику функции в этих точках параллельна оси абсцисс (стационарные точки). График заданной функции изображён на рисунке 62.

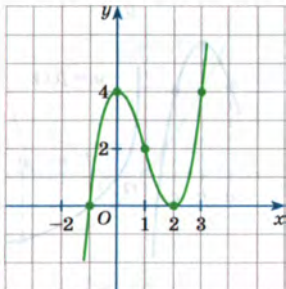


Рис. 62

А что будет, если на всём промежутке производная функции равна нулю?

Здесь уже без всяких дополнительных предположений получается *необходимое и достаточное условие, критерий* постоянства функции.

**Теорема 3.** Пусть  $X$  — открытый промежуток. Тогда:

а) если функция  $y = f(x)$  постоянна на  $X$ , то  $f'(x) = 0$  для всех  $x \in X$ ;

б) если  $f'(x) = 0$  для всех  $x \in X$ , то функция  $y = f(x)$  постоянна на  $X$ .

Утверждение «а» (*необходимое условие* постоянства функции) мы уже обсуждали и доказывали. Кратко,  $(C)' = 0$  ( $C$  от англ. *constant* — постоянный). Аккуратное доказательство утверждения «б» (*достаточное условие* постоянства функции), как и доказательства теорем 1 и 2, приводят в курсе высшей математики. Но физическая модель «Производная — это скорость» делает утверждение «б» практически несомненным. Смотрите: если скорость точки всё время равна нулю, то нет и самого движения, т. е. положение точки неизменно.

## Упражнения

- 15.1. а) На рисунке 63 изображён график дифференцируемой функции  $y = f(x)$ . Среди отмеченных точек  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  и  $g$  укажите те, для которых справедливо неравенство  $f'(x) < 0$ .  
 б) На рисунке 64 изображён график дифференцируемой функции  $y = f(x)$ . Среди отмеченных точек  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  и  $g$  укажите те, для которых справедливо неравенство  $f'(x) > 0$ .

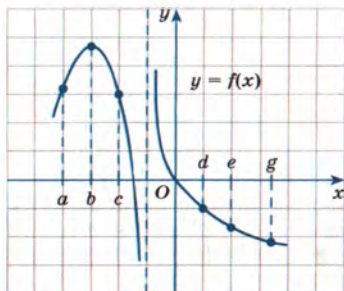


Рис. 63

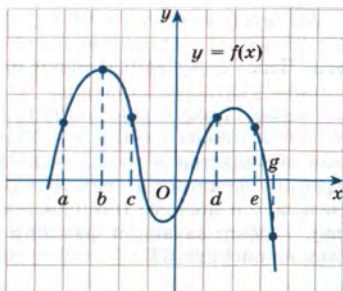


Рис. 64

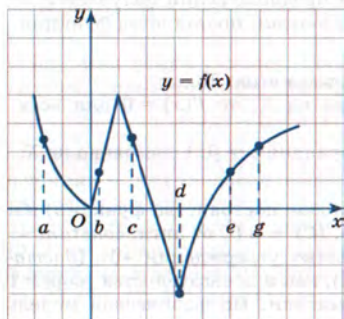


Рис. 65

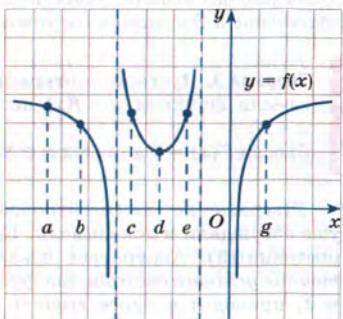


Рис. 66

- 15.2. а) На рисунке 65 изображён график функции  $y = f(x)$ . Распределите неравенства  $f'(a) > 0$ ,  $f'(b) > 0$ ,  $f'(c) < 0$ ,  $f'(d) < 0$ ,  $f'(e) < 0$ ,  $f'(g) < 0$  в две группы: верные и неверные.
- б) На рисунке 66 изображён график функции  $y = f(x)$ . Распределите неравенства  $f'(a) > 0$ ,  $f'(b) > 0$ ,  $f'(c) < 0$ ,  $f'(d) < 0$ ,  $f'(e) < 0$ ,  $f'(g) > 0$  в две группы: верные и неверные.
- 15.3. На рисунке 67 изображён график дифференцируемой функции  $y = f(x)$ . Сравните с нулём значения выражений:
- |                      |                          |                      |
|----------------------|--------------------------|----------------------|
| а) $f'(a) + f'(b)$ ; | в) $f'(b) \cdot f'(d)$ ; | д) $e \cdot f'(e)$ ; |
| б) $f'(a) + f'(c)$ ; | г) $f'(c) \cdot f'(g)$ ; | е) $b \cdot f'(b)$ . |

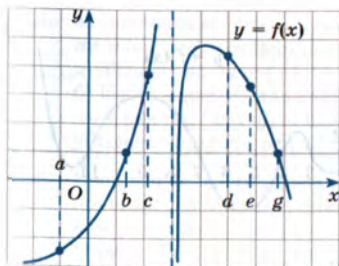


Рис. 67

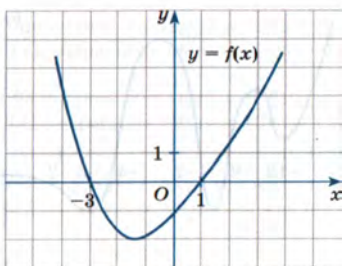


Рис. 68

15.4. На рисунке 68 изображён график производной функции  $y = f(x)$ . Определите, верным или неверным является высказывание:

- а) функция  $y = f(x)$  возрастает на  $(-\infty; -4]$ ;
- б) функция  $y = f(x)$  возрастает на  $[-1; +\infty)$ ;
- в) функция  $y = f(x)$  убывает на  $[-3; 0]$ ;
- г) функция  $y = f(x)$  возрастает на  $[1; +\infty)$ ;
- д) функция  $y = f(x)$  убывает на  $(-\infty; -1]$ ;
- е) функция  $y = f(x)$  убывает на  $[-1; 1]$ .

15.5. На рисунке 69 изображён график производной функции  $y = f(x)$ . Определите, верным или неверным является высказывание:

- а) функция  $y = f(x)$  возрастает на  $[-6; -3]$ ;
- б) функция  $y = f(x)$  убывает на  $[7; +\infty)$ ;
- в) функция  $y = f(x)$  возрастает на  $[-2; 5]$ ;
- г) функция  $y = f(x)$  убывает на  $[-10; -3]$ ;
- д) функция  $y = f(x)$  возрастает на  $(-\infty; -8]$ ;
- е) функция  $y = f(x)$  возрастает на  $(0; 6)$ .

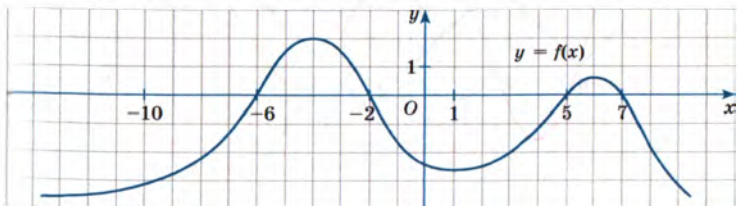


Рис. 69



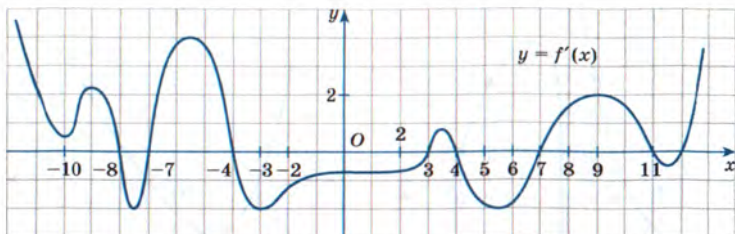


Рис. 70

**15.6.** На рисунке 70 изображён график производной функции  $y = f(x)$ . Укажите, на каком из данных промежутков функция  $y = f(x)$  возрастает, а на каком убывает:

- |                              |                              |
|------------------------------|------------------------------|
| а) $[-10; -8]$ и $[-2; 2]$ ; | г) $[-3; 0]$ и $[9; 11]$ ;   |
| б) $[0; 3]$ и $[8; 9]$ ;     | д) $[-16; -12]$ и $[4; 7]$ ; |
| в) $[-7; -4]$ и $[5; 6]$ ;   | е) $[12; 15]$ и $[-1; 3]$ .  |

**15.7.** На рисунке 71 изображены графики производных функций  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  и  $y = h(x)$ . Опишите характер монотонности (убывает или возрастает) каждой из функций  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  и  $y = h(x)$  на промежутке:

- |                 |                |                 |
|-----------------|----------------|-----------------|
| а) $[-3; -1]$ ; | в) $[0; 2]$ ;  | д) $[3; 5]$ ;   |
| б) $[1; 3]$ ;   | г) $[-2; 0]$ ; | е) $[-6; -3]$ . |

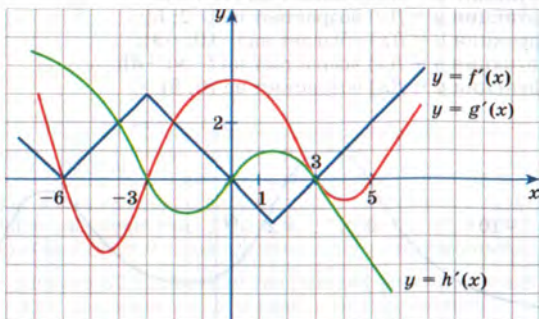


Рис. 71

**15.8.** а) Изобразите эскиз графика производной функции  $y = f(x)$ , если известно, что функция  $y = f(x)$  возрастает на луче  $(-\infty; -1]$  и убывает на луче  $[-1; +\infty)$ .

б) Изобразите эскиз графика производной функции  $y = f(x)$ , если известно, что функция  $y = f(x)$  возрастает на луче  $[3; +\infty)$  и убывает на луче  $(-\infty; 3]$ .

**15.9.** Изобразите эскиз графика функции  $y = f(x)$ , если промежутки постоянства знака производной  $f'(x)$  представлены на указанном рисунке:

а) рис. 72;

в) рис. 74;

д) рис. 76;

б) рис. 73;

г) рис. 75;

е) рис. 77.



Рис. 72

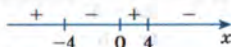


Рис. 73

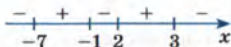


Рис. 74



Рис. 75



Рис. 76

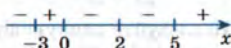


Рис. 77

**15.10.** Докажите, что данная функция возрастает:

а)  $y = \cos 2x + 4x$ ;

в)  $y = \cos 3x + 5x$ ;

б)  $y = 2^x + \sqrt[3]{x}$ ;

г)  $y = 3^x + 2\sqrt[3]{x}$ .

**15.11.** Докажите, что данная функция убывает:

а)  $y = \cos x - 3x$ ;

в)  $y = \sin 2x - 4x$ ;

б)  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_{0,5} x$ ;

г)  $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x + \log_{0,3} x$ .

**15.12.** Докажите, что функция:

а)  $y = -4x^3 - 2x + 7$  убывает на  $(-\infty; +\infty)$ ;

б)  $y = x^3 - x^2 + 5x - 1$  возрастает на  $(-\infty; +\infty)$ ;

в)  $y = -x^5 - 2x^3 - 3x + 6$  убывает на  $(-\infty; +\infty)$ ;

г)  $y = 2x^3 - 7x + 11$  убывает на  $(-\infty; +\infty)$ ;

д)  $y = 2x^3 + 2x^2 + 3x + 7$  возрастает на  $(-\infty; +\infty)$ ;

е)  $y = 2x^5 - x^3 + 4x - 3$  возрастает на  $(-\infty; +\infty)$ .

**15.13.** Докажите, что данная функция монотонна на всей числовой прямой, и укажите характер монотонности:

а)  $y = 8 - 16x - 4x^3$ ;

в)  $y = \log_2 x + \sin x + 2x$ ;

б)  $y = \cos 2x + 4x - 6$ ;

г)  $y = \log_{\frac{1}{3}} x - x^3 - 3x$ .

**15.14.** Докажите, что функция:

а)  $y = \frac{2x-1}{x-3}$  убывает на  $(-\infty; 3)$ ;

б)  $y = \frac{3x-5}{x-1}$  возрастает на  $(1; +\infty)$ ;

в)  $y = \frac{4x-13}{2x-5}$  возрастает на  $(2,5; +\infty)$ ;

г)  $y = \frac{4x-5}{x-2}$  убывает на  $(2; +\infty)$ ;

д)  $y = \frac{6x-5}{3x-1}$  возрастает на  $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$ ;

е)  $y = \frac{6x+13}{2x+3}$  убывает на  $(-\infty; -1,5)$ .

Исследуйте данную функцию на монотонность.

**15.15.** а)  $y = 2x^2 - 8x + 13$ ;

г)  $y = 3x^2 + 6x - 11$ ;

б)  $y = 3x^3 - x^2$ ;

д)  $y = x^3 - 6x^2$ ;

в)  $y = x^4 - 8x^2 + 19$ ;

е)  $y = x^4 - 2x^2 - 5$ .

**15.16.** а)  $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 12x + 2$ ;

г)  $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 18$ ;

б)  $y = x^4 - \frac{8}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 14$ ;

д)  $y = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 - 17$ ;

в)  $y = 5x^5 + 5\frac{1}{3}x^3 - 9x + 25$ ;

е)  $y = \frac{1}{5}x^5 - 3\frac{1}{3}x^3 + 9x - 21$ .

**15.17.** а)  $y = \frac{4}{(x-2)^2}$ ;

в)  $y = \frac{x^3}{x-2}$ ;

д)  $y = \frac{3x}{x^2+2}$ ;

б)  $y = \frac{2x}{x^2+1}$ ;

г)  $y = \frac{3}{(x+1)^2}$ ;

е)  $y = \frac{2x^3}{3x+1}$ .

**15.18.** а)  $y = \sqrt{2x+1}$ ;

в)  $y = \sqrt{3-2x}$ ;

б)  $y = \sqrt{2-x} + 2x$ ;

г)  $y = \sqrt{3-x} + 3x$ .

**15.19.** а)  $y = 2^x + \ln x$ ;  
 б)  $y = 2x^2 - \ln x$ ;

в)  $y = 3^x + x^{17}$ ;  
 г)  $y = x - \ln(x + 1)$ .

**15.20.** а)  $y = \frac{x}{\ln x}$ ;

г)  $y = \frac{\ln x}{x}$ ;

б)  $y = \frac{x^3}{e^x}$ ;

д)  $y = \frac{2^x}{x^2}$ ;

в)  $y = \sqrt{x+6} + \ln(2-x)$ ;

е)  $y = \sqrt{x+3} + \ln(5-x)$ .

**15.21.** а)  $y = \sin x + \cos x + \sqrt{x} + 5x$ ;

б)  $y = \sin 3x - \cos 2x - 2x^{\frac{2}{3}} - 6e^x$ ;

в)  $y = 2\cos x - \sin x - x^{\frac{1}{5}} - 4x$ ;

г)  $y = \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} + \sqrt[4]{x} + 2e^{2x}$ .

**ИКТ 15.22.** При каких значениях параметра  $p$  функция возрастает на всей числовой прямой:

а)  $y = x^3 + px$ ;

в)  $y = px^3 + x$ ;

б)  $y = x^3 + x^2 + px - 8$ ;

г)  $y = \frac{1}{3}x^3 - px^2 + 9x - 10$ ?

**ИКТ 15.23.** При каких значениях параметра  $p$  функция убывает на всей числовой прямой:

а)  $y = 2px - x^3$ ;

в)  $y = -px^3 - (p+1)x$ ;

б)  $y = -x^3 - px^2 - 4x + 8$ ;

г)  $y = -x^3 - 2x^2 - px + 8$ ?

**15.24.** При каких значениях параметра  $p$  функция  $y = x^3 - 3x$  убывает на отрезке:

а)  $[p+1; p+3]$ ;

б)  $\left[p-3; \frac{1}{6}p + \frac{2}{3}\right]$ ?

**15.25.** При каких значениях параметра  $p$  функция  $y = x^3 - 3x$  возрастает на отрезке:

а)  $[p-2,5; p-0,5]$ ;

б)  $\left[p - \frac{1}{2}; 2p+2\right]$ ?

Используя свойство монотонности функции, решите уравнение.

**15.26.** а)  $x^3 + 7 = 17 - x$ ;

г)  $15 - 2x^3 = 4x - 9$ ;

б)  $x^5 + 4x^3 + 5x - 10 = 0$ ;

д)  $x^5 + 6x^3 + 5x - 12 = 0$ ;

в)  $18 - 2x^5 - 6x^3 - 10x = 0$ ;

е)  $10 - x^5 - 2x^3 - 7x = 0$ .



**15.27.** а)  $x^5 + x^3 + 7x - 51 = \sqrt[3]{37 - 5x}$ ;  
 б)  $102 - 2x^5 - 4x^3 - 2x = \sqrt[4]{6 + 5x}$ .

**15.28.** а)  $\sin 3x - 4\cos x - 11x = x^7 - 4$ ;  
 б)  $6\sin \frac{x}{3} + 5\cos 2x + 12x = 5 - x^5$ .

**15.29.** а)  $6\sin \frac{\pi x}{2} + 4\cos \frac{\pi x}{2} + 17x = 32 - 7x^3 - 2x^5$ ;  
 б)  $4\sin \frac{\pi x}{2} - 3\cos \pi x - 20x = x^5 + 5x^3 - 19$ .

## Упражнения для повторения

**15.30.** Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \begin{cases} -\sqrt[3]{x + \pi}, & \text{если } x \leq -\pi, \\ \sin x, & \text{если } -\pi < x < \pi, \\ \sqrt[3]{x - \pi}, & \text{если } x \geq \pi. \end{cases}$

а) Постройте и прочитайте график функции  $y = f(x)$ .

б) При каких значениях параметра  $p$  уравнение  $f(x) = p$  имеет три корня?

**15.31.** Решите уравнение:

а)  $\lg(x + \sqrt{5}) = -\lg(x - \sqrt{5})$ ;

б)  $\log_2(x - 6) + 2\log_2 \sqrt{x - 7} = 1$ ;

в)  $\log_5^2 x + 5 = 12\log_5 \sqrt{x}$ ;

г)  $\lg(x - \sqrt{7}) = -\lg(x + \sqrt{7})$ ;

д)  $\log_5(5 - x) + 2\log_5 \sqrt{9 - x} = 1$ ;

е)  $4\log_3 \sqrt{x} = \log_3^2 x - 3$ .

**15.32.** Решите неравенство:

а)  $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + 4 \leq 0$ ;

б)  $3 \cdot 25^x - 8 \cdot 15^x + 5 \cdot 9^x \geq 0$ ;

в)  $4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2x} - 13 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x + 3 \geq 0$ ;

г)  $4 \cdot 16^x - 11 \cdot 28^x + 7 \cdot 49^x \leq 0$ .

**15.33.** Сравните числа  $a$  и  $b$ , если:

а)  $a = \sin 3 \sin 5$ ,  $b = \sin 4 \sin 6$ ;

б)  $a = \sin 9 \cos 5$ ,  $b = \sin 11 \cos 7$ .

## § 16. Исследование функций на экстремум

Для наглядности дальнейших рассуждений начнём с построения

графика кусочной функции  $y = \begin{cases} -x, & \text{если } -4 \leq x < 0, \\ -(x-1)^2 + 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 3, \\ x-6, & \text{если } 3 < x \leq 8. \end{cases}$

График состоит из двух прямолинейных участков ( $y = -x$ ,  $-4 \leq x < 0$ ;  $y = x - 6$ ,  $3 < x \leq 8$ ) и части параболы ( $y = -(x-1)^2 + 1$ ,  $0 \leq x \leq 3$ ). Начнём с параболы. Её вершина находится в точке  $(1; 1)$ , на концах отрезка  $[0; 3]$  функция  $y = -(x-1)^2 + 1$  принимает значения 0 и  $-3$  соответственно, а в точке  $x = 2$  функция принимает значение 0. Через указанные четыре точки  $((0; 0)$ ,  $(1; 1)$ ,  $(2; 0)$ ,  $(3; -3))$  строим часть параболы (рис. 78). На том же чертеже строим участок прямой  $y = -x$  на полуинтервале  $[-4; 0)$  и участок прямой  $y = x - 6$  на полуинтервале  $(-3; 8]$ . В итоге получаем график заданной кусочной функции (см. рис. 78).

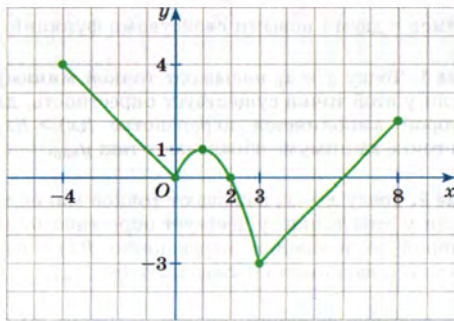


Рис. 78

В учебнике для 10-го класса мы выработали определённый порядок ходов (из восьми пунктов) для чтения графика. Прочитаем построенный график.

- 1) Область определения функции:  $D(f) = [-4; 8]$ .
- 2) Функция общего вида (ни чётная, ни нечётная).
- 3) Функция убывает на  $[-4; 0]$ , возрастает на  $[0; 1]$ , убывает на  $[1; 3]$ , возрастает на  $[3; 8]$ .
- 4) Функция ограничена и снизу, и сверху.
- 5)  $y_{\text{наим}} = -3$ ,  $y_{\text{наиб}} = 4$ .
- 6) Функция непрерывна в своей области определения.
- 7) Область значений функции:  $E(f) = [-3; 4]$ .
- 8) Функция выпукла вверх на отрезке  $[0; 3]$ .

Читать построенные графики мы с вами учились, начиная с 7-го класса, этот процесс постепенно (от класса к классу) «обрастал» всё новыми и новыми свойствами. Вот и теперь мы можем несколько обогатить этот процесс.

9) Функция дифференцируема во всех точках интервала  $(-4; 8)$ , за исключением точек  $x = 0$ ,  $x = 3$ .

Понятие дифференцируемости функции мы обсуждали в § 8. В том же параграфе мы договорились точку, в которой функция непрерывна, но не дифференцируема, называть *критической точкой*, а точку, в которой касательная к графику функции параллельна оси абсцисс (т. е. точку  $x$ , в которой выполняется равенство  $f'(x) = 0$ ), называть *стационарной точкой*. Дополним процесс чтения графика рассматриваемой функции ещё одной позицией.

10)  $x = 0$ ,  $x = 3$  — критические точки,  $x = 1$  — стационарная точка.

Познакомимся с двумя новыми свойствами функций.

**Определение 1.** Точку  $x = x_0$  называют **точкой минимума функции**  $y = f(x)$ , если у этой точки существует окрестность, для всех точек  $x \neq x_0$  которой выполняется неравенство  $f(x) > f(x_0)$ . Значение функции в точке минимума обозначают так:  $y_{\min}$ .

**Определение 2.** Точку  $x = x_0$  называют **точкой максимума функции**  $y = f(x)$ , если у этой точки существует окрестность, для всех точек  $x \neq x_0$  которой выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$ . Значение функции в точке максимума обозначают так:  $y_{\max}$ .

Вернёмся к графику функции, представленному на рисунке 78, и добавим в процесс чтения графика ещё одно свойство.

11) У заданной функции:

$x = 0$  — точка минимума, причём  $y_{\min} = 0$ ;

$x = 1$  — точка максимума, причём  $y_{\max} = 1$ ;

$x = 3$  — точка минимума, причём  $y_{\min} = -3$ .

Точки минимума и максимума функции объединяют общим термином — *точки экстремума* (от лат. *extremum* — крайний). Если  $x = x_0$  является точкой минимума (максимума) функции  $y = f(x)$ , то довольно часто и соответствующую точку  $(x_0; f(x_0))$  графика функции также называют точкой минимума (максимума).

Обратите внимание на различия в обозначениях:  $y_{\text{наиб}}$  — это наибольшее значение функции на всей её области определения или на рассматриваемом промежутке, а  $y_{\text{max}}$  — это значение функции в точке максимума. Для сравнения, чемпион России — это «самый-самый» во всей стране, глобально, а чемпион школы — это «самый-самый» только локально, в пределах одной школы. Как говорят,  $y_{\text{наиб}}$  — глобальное понятие, а  $y_{\text{max}}$  — локальное понятие, оно определяется поведением функции только в некоторой окрестности точки максимума. Например, для функции, график которой представлен на рисунке 78,  $y_{\text{наиб}} = 4$ , а  $y_{\text{max}} = 1$ . Разумеется, аналогичны и различия между  $y_{\text{наим}}$  и  $y_{\min}$ . Например,  $y_{\text{наим}}$  — это всегда одно число, если оно вообще существует, а  $y_{\min}$  может в каждой из точек минимума принимать своё отдельное значение.

Как искать точки экстремума функции? Ответ на этот вопрос дают две теоремы.

**Теорема 1 (необходимое условие экстремума).** Если функция  $y = f(x)$  имеет экстремум в точке  $x_0$ , то в этой точке производная функции либо равна нулю (стационарная точка), либо не существует (критическая точка).

Посмотрите на рисунок 78. У функции, график которой представлен на этом рисунке, две точки минимума (критические точки  $x = 0$ ,  $x = 3$ ) и одна точка максимума (стационарная точка  $x = 1$ ).

Нам довольно часто приходилось строить график квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$ . Начинали мы обычно с отыскания координат вершины параболы, служащей графиком квадратичной функции. Абсциссу  $x_0$  вершины мы находили по формуле  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ , которую приходилось специально запоминать. Но ведь вершина параболы — это точка экстремума, в ней производная квадратичной



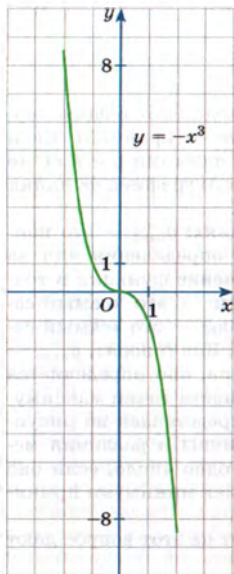


Рис. 79

функции равна нулю. Так что абсциссу вершины параболы можно найти и из условия  $y' = 0$ .

Найдём для примера координаты вершины параболы

$$y = 2x^2 - 5x^2 + 3.$$

Имеем:

$$y' = (2x^2 - 5x^2 + 3)' = 4x - 5; \quad 4x - 5 = 0;$$

$$x_0 = \frac{5}{4}; \quad y_0 = 2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 5 \cdot \frac{5}{4} + 3 = -\frac{1}{8}.$$

Итак, вершиной параболы

$$y = 2x^2 - 5x^2 + 3 \text{ является точка } \left(\frac{5}{4}; -\frac{1}{8}\right).$$

А верна ли теорема, обратная теореме 1, т. е. верно ли, что если  $x = x_0$  — стационарная или критическая точка, то в этой точке функция имеет экстремум? Ответ отрицательный. Смотрите: на рисунке 79 изображён график функции  $y = -x^3$ ; в точке  $x = 0$  производная  $y' = -3x^2$  равна нулю. Точка  $x = 0$  — это стационарная точка, но не точка экстремума. А на рисунке 80

изображён график функции  $y = \sqrt[3]{x}$ ; в точке  $x = 0$  производная функции не существует, это критическая точка, но не точка экстремума.

Как же узнать, есть ли в стационарной или в критической точке экстремум? Для ответа на этот вопрос снова рассмотрим графики функций, представленные на рисунках 78—80.

На рисунке 78 три точки экстремума. Обратите внимание: при переходе через каждую из этих трёх точек изменяется характер монотонности функции. Смотрите:

— в некоторой окрестности точки минимума  $x = 0$  слева от неё функция убывает, а справа возрастает;

— в некоторой окрестности точки максимума  $x = 1$  слева от неё функция возрастает, справа убывает;

— в некоторой окрестности точки минимума  $x = 3$  слева от неё функция убывает, справа возрастает.

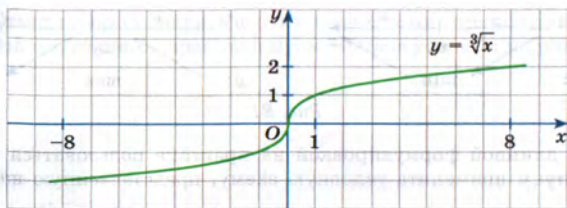


Рис. 80

Если перейти к знакам производной, то:

— в некоторой окрестности точки минимума левее неё  $y' < 0$ , а правее неё  $y' > 0$ ;

— в некоторой окрестности точки максимума левее неё  $y' > 0$ , а правее неё  $y' < 0$ .

Как в таких случаях говорят, *при переходе через точку минимума (максимума) производная меняет свой знак*.

Если же и слева, и справа от стационарной или критической точки производная имеет один и тот же знак, то в этой точке экстремума нет. Именно так обстоит дело с функцией  $y = -x^3$ , график которой изображён на рисунке 79: и слева, и справа от стационарной точки  $x = 0$  функция убывает, производная отрицательна. А для функции  $y = \sqrt[3]{x}$ , график которой изображён на рисунке 80, дело обстоит так: и слева, и справа от критической точки  $x = 0$  функция возрастает, производная положительна.

Наши рассуждения могут служить подтверждением (но, конечно, не доказательством) справедливости следующей теоремы.

**Теорема 2 (достаточное условие экстремума).** Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на промежутке  $X$  и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку  $x = x_0$ . Тогда:

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при  $x < x_0$  выполняется неравенство  $f'(x) < 0$ , а при  $x > x_0$  — неравенство  $f'(x) > 0$ , то  $x = x_0$  — точка минимума функции  $y = f(x)$ ;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при  $x < x_0$  выполняется неравенство  $f'(x) > 0$ , а при  $x > x_0$  — неравенство  $f'(x) < 0$ , то  $x = x_0$  — точка максимума функции  $y = f(x)$ ;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что и слева, и справа от точки  $x_0$  знаки производной одинаковы, то в точке  $x_0$  экстремума нет.

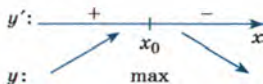
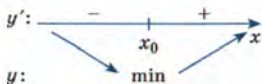


Рис. 81

Этой длинной формулировкой на практике пользоваться неудобно, советуем применять условную схему, представленную на рисунке 81.

Для исследования функции на монотонность и экстремумы полезно использовать следующий алгоритм.

**Алгоритм исследования непрерывной функции  $y = f(x)$  на монотонность и экстремумы**

1. Найти производную  $f'(x)$ .
2. Найти стационарные ( $f'(x) = 0$ ) и критические ( $f'(x)$  не существует) точки функции  $y = f(x)$ .
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной внутри получившихся промежутков.
4. Сделать выводы о монотонности функции и о её точках экстремума.

Заметим, что если заданная функция имеет вид  $y = \frac{p(x)}{q(x)}$ , то полезно сделать добавление к алгоритму: *полюсы функции*, т. е. точки, в которых знаменатель  $q(x)$  обращается в нуль, тоже отмечают на числовой прямой, причём делают это до определения знаков производной. Разумеется, полюсы не могут быть точками экстремума.

**Пример 1** Исследовать на монотонность и экстремумы функцию

$$y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 28.$$

**Решение.** Воспользуемся алгоритмом.

1. Найдём производную заданной функции:

$$\begin{aligned} y' &= (x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 28)' = 4x^3 - 12x^2 - 16x = \\ &= 4x(x^2 - 3x - 4) = 4x(x+1)(x-4). \end{aligned}$$

2. Критических точек у функции нет (производная определена на всей числовой прямой); стационарные точки найдём из уравнения  $4x(x+1)(x-4) = 0$ . Получаем три стационарные точки: 0, -1, 4.

3. Отметим стационарные точки на числовой прямой; знаки производной внутри получившихся промежутков указаны на рисунке 82.



Рис. 82

4. Функция убывает на  $(-\infty; -1]$ , возрастает на  $[-1; 0]$ , убывает на  $[0; 4]$ , возрастает на  $[4; +\infty)$ .

$x = -1$  — точка минимума,  $y_{\min} = 25$ ;

$x = 0$  — точка максимума,  $y_{\max} = 28$ ;

$x = 4$  — точка минимума,  $y_{\min} = -100$ .

**Пример 2** Исследовать на монотонность и экстремумы функцию

$$y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}.$$

**Решение.** 1. Найдём производную заданной функции:

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{x^2 + 3}{x - 1} \right)' = \frac{(x^2 + 3)'(x - 1) - (x^2 + 3)(x - 1)'}{(x - 1)^2} = \\ &= \frac{2x(x - 1) - (x^2 + 3) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} = \frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2}. \end{aligned}$$

2. Производная не существует в точке  $x = 1$ , но эта точка не принадлежит области определения заданной функции, это точка разрыва, значит, критических точек у функции нет.

Стационарные точки найдём из уравнения  $\frac{(x + 1)(x - 3)}{(x - 1)^2} = 0$ . Получаем две стационарные точки:  $-1$  и  $3$ .

3. Отметим стационарные точки и точку разрыва (полюс функции) на числовой прямой; знаки производной на получившихся промежутках указаны на рисунке 83.

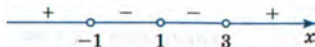


Рис. 83

4. Функция возрастает на  $(-\infty; -1]$ , убывает на  $[-1; 1)$ , убывает на  $(1; 3]$ , возрастает на  $[3; +\infty)$ .

$x = -1$  — точка максимума,  $y_{\max} = -2$ ;  $x = 3$  — точка минимума,  $y_{\min} = 6$ .



**Пример 3** Исследовать на монотонность и экстремум функцию  $y = x^4 - 4\ln x$ .

**Решение.**

1. Найдём производную заданной функции:

$$\begin{aligned} y' &= (x^4 - 4\ln x)' = 4x^3 - 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4x^4 - 4}{x} = \frac{4(x^4 - 1)}{x} = \\ &= \frac{4(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{x} = \frac{4(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{x}. \end{aligned}$$

2. Область определения функции  $y = x^4 - 4\ln x$  — открытый луч  $(0; +\infty)$ ; в этой области производная всюду существует и обращается в нуль только в точке  $x = 1$  — это единственная стационарная точка.

3. Отметим на открытом луче  $(0; +\infty)$  стационарную точку  $x = 1$ ; знаки производной на получившихся промежутках указаны на рисунке 84.



Рис. 84

4. Функция убывает на  $(0; 1]$ , возрастает на  $[1; +\infty)$ .

$x = 1$  — точка минимума,  $y_{\min} = 1$ .

**Пример 4** Исследовать на монотонность и экстремум функцию  $y = \sqrt[3]{x} - \frac{x}{3}$ .

**Решение.**

1. Найдём производную заданной функции:

$$y' = \left( \sqrt[3]{x} - \frac{x}{3} \right)' = \left( x^{\frac{1}{3}} - \frac{x}{3} \right)' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3} = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

2. Функция  $y = \sqrt[3]{x} - \frac{x}{3}$  непрерывна на  $(-\infty; +\infty)$ , а её производная не существует в точке  $x = 0$  — это критическая точка. Стационарные точки найдём из уравнения  $\frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0$ . Имеем:  $1 - \sqrt[3]{x^2} = 0$ ,

$$\sqrt[3]{x^2} = 1, x^2 = 1, x = \pm 1.$$

3. Отметим на числовой прямой точки  $0, 1, -1$ ; знаки производной на получившихся промежутках указаны на рисунке 85.

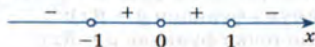


Рис. 85

4. Функция убывает на  $(-\infty; -1]$ , возрастает на  $[-1; 0]$ , возрастает на  $[0; 1]$ , убывает на  $[1; +\infty)$ .

$x = -1$  — точка минимума,  $y_{\min} = -\frac{2}{3}$ ;

$x = 1$  — точка максимума,  $y_{\max} = \frac{2}{3}$ .

## Упражнения

16.1. На рисунке 86 изображён график функции  $y = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Среди отмеченных точек  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$  и  $x_8$  укажите те, для которых справедливо высказывание:

- точка  $x_n$  является стационарной;
- точка  $x_n$  является критической;
- точка  $x_n$  является точкой максимума;
- точка  $x_n$  является точкой минимума.

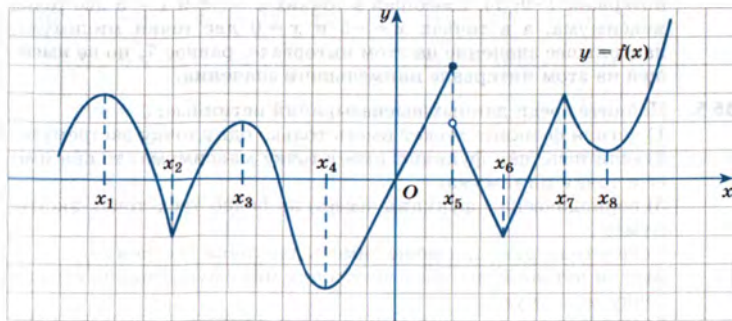


Рис. 86

Дана непрерывная функция  $y = f(x)$ . Используя данные о её производной  $f'(x)$ , приведённые в таблице, укажите:

- а) промежутки возрастания функции  $y = f(x)$ ;
- б) точки максимума функции  $y = f(x)$ ;
- в) стационарные точки функции  $y = f(x)$ ;
- г) промежутки убывания функции  $y = f(x)$ ;
- д) точки минимума функции  $y = f(x)$ ;
- е) критические точки функции  $y = f(x)$ .

**16.2.**

$x$	$(-\infty; -7)$	$-7$	$(-7; -2)$	$-2$	$(-2; 3)$	$3$	$(3; 5)$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$	$0$	$+$	не сущ.	$-$

**16.3.**

$x$	$(-\infty; -4)$	$-4$	$(-4; -1)$	$-1$	$(-1; 1)$	$1$	$(1; 3)$
$f'(x)$	$-$	не сущ.	$+$	$0$	$+$	$0$	$-$

**16.4.** а) Постройте эскиз графика функции, дифференцируемой на интервале  $(-7; 8)$ , имеющей в точке  $x = 1$  максимум, в точках  $x = -4$  и  $x = 6$  две точки минимума и не имеющей на этом интервале ни наибольшего, ни наименьшего значения.

б) Постройте эскиз графика функции, дифференцируемой на интервале  $(-9; 7)$ , имеющей в точках  $x = -8$  и  $x = 3$  две точки максимума, а в точках  $x = -5$  и  $x = 0$  две точки минимума, наибольшее значение на этом интервале, равное 7, но не имеющей на этом интервале наименьшего значения.

**16.5.** Найдите среди данных высказываний истинные:

- 1) чётная функция может иметь только одну точку экстремума;
- 2) если нечётная функция имеет точку максимума, то она имеет и точку минимума;
- 3) периодическая функция имеет не более трёх точек экстремума;
- 4) нечётная функция может иметь две точки экстремума;
- 5) если чётная функция имеет точку минимума, то она имеет и точку максимума;
- 6) монотонная функция может иметь единственную точку экстремума.

Найдите точки экстремума заданной функции и определите их характер.

**16.6.** а)  $y = 3x^2 - 9x + 4$ ;

б)  $y = x^3 + 4x^2 - 3x$ ;

в)  $y = x^4 - 8x^2 + 9$ ;

г)  $y = 7x - 3x^2 - 2$ ;

д)  $y = x^3 + 3x^2 - 24x$ ;

е)  $y = 2x^4 - 8x^2 - 11$ .

**16.7.** а)  $y = x - \frac{4}{x} + 3$ ;

б)  $y = 2x + \frac{8}{x} - 14$ ;

в)  $y = \frac{x^2 + 16}{x}$ ;

г)  $y = x - \frac{1}{x} - 12$ ;

д)  $y = \frac{7}{x} + \frac{x}{7} + 4$ ;

е)  $y = \frac{x^2 + 36}{x}$ .

**16.8.** а)  $y = (x - 4)^4 + 3$ ;

б)  $y = \sqrt{2x - 3} + 2$ ;

в)  $y = x - 2\sqrt{x - 5}$ ;

г)  $y = (5 - x)^4 - 1$ ;

д)  $y = \sqrt{3x - 1} - 2$ ;

е)  $y = x - 4\sqrt{x - 3}$ .

**16.9.** а)  $y = \frac{x^3}{3} - 8x^2 + 15x - 32$ ;

б)  $y = 8x^4 + 4x - 19$ ;

в)  $y = 5x^5 - 3x^3 + 7$ ;

г)  $y = \frac{2x^3}{3} - 5,5x^2 + 14x + 25$ ;

д)  $y = \frac{x^4}{4} - 27x + 11$ ;

е)  $y = 3x^5 - 5x^3 - 6$ .

**16.10.** а)  $y = e^{2x} - 4e^x + 3x - 2$ ;

б)  $y = 4\ln x^3 - 7x + \frac{x^2}{2}$ ;

в)  $y = 5x - 6\ln\sqrt{x} + x^2$ ;

г)  $y = e^{2x} - 7e^x + 5x + 1$ ;

д)  $y = 10\ln\sqrt{x} - 6x + \frac{x^2}{2}$ ;

е)  $y = x - 2\ln x^3 + x^2$ .

**16.11.** Найдите точки экстремума заданной функции на отрезке

$\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  и определите их характер:

а)  $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ;

в)  $y = 0,5\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ;

б)  $y = \cos\frac{2x}{3} + 0,5$ ;

г)  $y = \sin 2x - 1,5$ .



**16.12.** Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы на указанном промежутке:

а)  $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ ;

б)  $y = \sqrt{2} \cos x - x$  на отрезке  $\left[-\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ .

Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы.

**16.13.** а)  $y = |x - 2| - 1$ ;

в)  $y = |x + 1| - 3$ ;

б)  $y = \left|\frac{1}{x} - 1\right|$ ;

г)  $y = \left|2 - \frac{2}{x}\right|$ .

**16.14.** а)  $y = |(x - 4)(2 - x)|$ ;

г)  $y = |(x - 1)(x + 3)|$ ;

б)  $y = |x^3 - 9x|$ ;

д)  $y = |3x - x^3|$ ;

в)  $y = x^2 - 6|x - 1| + 1$ ;

е)  $y = 4|x| - 6 - x^2$ .

**16.15.** а)  $y = x^3 e^x$ ;

г)  $y = x^2 e^x$ ;

б)  $y = x e^{2x - 5}$ ;

д)  $y = x e^{3x + 4}$ ;

в)  $y = \frac{e^{2x}}{x}$ ;

е)  $y = \frac{e^x}{x^2}$ .

**16.16.** а)  $y = x^4 - x^2 - 2 \ln x$ ;

б)  $y = x^4 - 3x^2 + 2 \ln x$ .

**16.17.** При каких значениях параметра  $p$  функция  $y = x^4 e^{-x}$  на интервале  $(p - 1; p + 5)$ :

а) имеет одну точку экстремума;

б) не имеет точек экстремума;

в) убывает;

г) имеет две точки экстремума?

## Упражнения для повторения

**ИКТ 16.18.** Постройте график функции:

а)  $y = \sin 2|x|$ ;

в)  $y = |3 \sin x|$ ;

д)  $y = 3 \sin |x|$ ;

б)  $y = 2 \cos |x|$ ;

г)  $y = \cos \frac{|x|}{2}$ ;

е)  $y = \frac{1}{2} |\cos x|$ .

**16.19.** Вычислите значение выражения при заданном условии:

а)  $\frac{2}{1 + \sin 2t}$ , при  $\operatorname{ctg} t = 2$ ;

б)  $\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t$ , при  $\operatorname{tg} t - \operatorname{ctg} t = 4$ ;

в)  $\sin^3 t + \cos^3 t$ , при  $\sin t + \cos t = 0,9$ ;

г)  $\frac{3}{3 + 2\cos 2t}$ , при  $\operatorname{tg} t = 0,5$ ;

д)  $\operatorname{tg}^2 t + \operatorname{ctg}^2 t$ , при  $\operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t = 5$ ;

е)  $\sin^3 t - \cos^3 t$ , при  $\sin t - \cos t = -0,2$ .

**16.20.** Найдите множество значений функции:

а)  $y = 5\sin^2 x + \cos 2x$ ;

г)  $y = 2\cos 2x - 7\sin^2 x$ ;

б)  $y = 2\cos 2x - 3\cos x$ ;

д)  $y = 3\sin x + 4\cos^2 x$ ;

в)  $y = \sin x + \cos x$ ;

е)  $y = \sin x - \cos x$ .

**16.21.** Решите уравнение:

а)  $x\sqrt[4]{x} = 2 - x\sqrt[6]{x}$ ;

г)  $4\sqrt[4]{x^5} = 5 - x\sqrt[3]{x}$ ;

б)  $0,5\sqrt[3]{x} = (x - 7)^{-0,3}$ ;

д)  $0,5\sqrt[5]{x} = (x - 31)^{-1,3}$ ;

в)  $\frac{1}{\sqrt[5]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{7} + \frac{6}{7}$ ;

е)  $\sqrt[7]{x^5} = \frac{3}{5\sqrt[3]{x^2}} + 0,4$ .

## § 17. О построении графиков функций

Вам знакомы графики основных элементарных функций:

$$y = kx + m, \quad y = ax^2 + bx + c, \quad y = \sqrt{x}, \quad y = \frac{k}{x}, \quad y = |x|,$$

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x, \\ y = x^r \quad (r \in \mathbb{Q}), \quad y = a^x, \quad y = \log_a x.$$

Говорили мы и о том, как строить графики, которые получаются из графиков перечисленных функций с помощью различных преобразований, например  $y = (x - 1)^3 + 2$ ,  $y = \sin 2x$ ,  $y = -3e^x$  и т. п.

Во всех указанных случаях мы с самого начала имели представление о том, как будет выглядеть график предложенной функции. Например,  $y = \sqrt{x}$  — ветвь параболы,  $y = \sin x$  — синусоида,  $y = (x - 1)^3 + 2$  — кубическая парабола, сдвинутая на одну единицу вправо по оси  $Ox$  и на две единицы вверх по оси  $Oy$ ,  $y = -3e^x$  — экс-

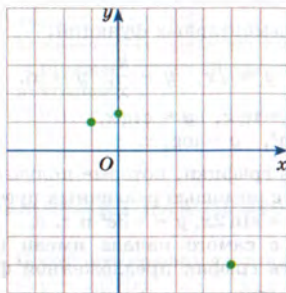
понента, растянутая от оси абсцисс с коэффициентом 3 и затем симметрично отражённая относительно оси абсцисс.

А как быть, если вид графика заранее неизвестен? Тогда приходится строить график по точкам. Но эти точки надо выбирать со смыслом, искать особо важные точки графика, которые определяют его вид. Таковыми являются, например, точки экстремума. Смотрите: в предыдущем параграфе мы для функции  $y = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 28$  в примере 1 нашли три такие точки — точку минимума  $(-1; 25)$ , точку максимума  $(0; 28)$  и точку минимума  $(4; -100)$ . Эти точки отмечены на рисунке 87, а (без соблюдения масштаба). А на рисунке 87, б с помощью этих точек построен очень примерный эскиз, дающий представление о виде графика функции.

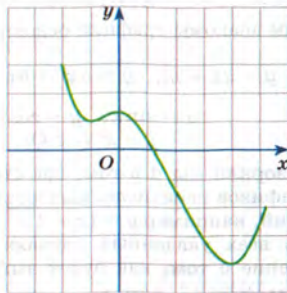
В тех случаях, когда речь идёт о построении графика незнакомого функции, когда предварительного представления об эскизе графика нет, полезно иметь некий план, некую схему исследования свойств функции, которая поможет составить представление о её графике. Когда представление о виде графика сложится, можно приступить к построению графика по точкам.

1) Начинать следует с нахождения области определения функции (если эта область не задана) и с указания её точек разрыва.

2) Далее, полезно исследовать функцию на чётность, поскольку график чётной или нечётной функции обладает симметрией (соответственно относительно оси  $Oy$  или относительно начала координат), и, следовательно, можно сначала построить только ветвь графика при  $x \geq 0$ , а затем дорисовать симметричную ветвь.



а



б

Рис. 87

3) Если  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ , то прямая  $y = b$  является *горизонтальной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$ . Об этом мы говорили в § 3.

4) Если  $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  и при  $x = a$  знаменатель  $q(x)$  обращается в нуль, а числитель отличен от нуля, то  $x = a$  — *вертикальная асимптота* графика функции  $y = f(x)$ .

5) К особо важным точкам относятся:

- стационарные и критические точки;
- точки экстремума;
- точки пересечения графика с осями координат.

При необходимости следует выбрать ещё несколько контрольных точек.

**Пример 1** Построить график функции:

а)  $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ ; б)  $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$ .

**Решение.** а) Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой, не является ни чётной, ни нечётной. Для построения её графика достаточно найти стационарные точки, критические точки, точки экстремума и ещё несколько контрольных точек.

Найдём производную заданной функции:

$$y' = (2x^3 + 3x^2 - 1)' = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1).$$

Критических точек у функции нет (производная определена на всей числовой прямой); стационарные точки найдём из уравнения  $6x(x + 1) = 0$ . Получаем две стационарные точки: 0 и -1.

Отметим стационарные точки на числовой прямой; знаки производной на получившихся промежутках указаны на рисунке 88.



Рис. 88

Функция возрастает на  $(-\infty; -1]$ , убывает на  $[-1; 0]$ , возрастает на  $[0; +\infty)$ .

$x = -1$  — точка максимума,  $y_{\max} = 0$ ;

$x = 0$  — точка минимума,  $y_{\min} = -1$ .

Итак, мы знаем две точки графика:  $(-1; 0)$  и  $(0; -1)$ . Добавим ещё пару контрольных точек. Если  $x = 1$ , то  $y = 4$ ; если  $x = -2$ , то  $y = -5$ .



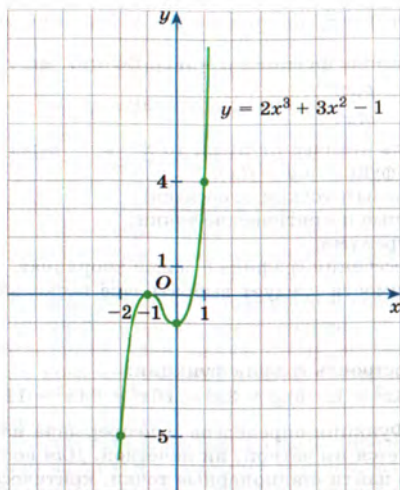


Рис. 89

На рисунке 89 отмечены точки  $(-1; 0)$ ,  $(0; -1)$ ,  $(1; 4)$ ,  $(-2; -5)$  и построен график функции  $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ .

б) Эта функция, как и функция из пункта «а», определена и непрерывна на всей числовой прямой, не является ни чётной, ни нечётной. Для построения её графика достаточно найти стационарные точки, критические точки, точки экстремума и ещё несколько контрольных точек.

Найдём производную заданной функции:

$$\begin{aligned} y' &= (3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11)' = 12x^3 - 48x^2 + 48x = \\ &= 12x(x^2 - 4x + 4) = 12x(x - 2)^2. \end{aligned}$$

Критических точек у функции нет (производная определена на всей числовой прямой); стационарные точки найдём из уравнения  $12x(x - 2)^2 = 0$ . Получаем две стационарные точки: 0 и 2.

Отметим стационарные точки на числовой прямой; знаки производной на получившихся промежутках указаны на рисунке 90.

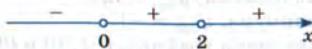


Рис. 90

$x = 0$  — точка минимума,  $y_{\min} = -11$ ;  
 $x = 2$  — стационарная точка, не являющаяся точкой экстремума,  $y = 5$ .

Итак, мы знаем две точки графика функции  $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$ :  $(0; -11)$  и  $(2; 5)$ . Добавим ещё одну точку: если  $x = 1$ , то  $y = 0$ .

На рисунке 91 отмечены точки  $(0; -11)$ ,  $(1; 0)$ ,  $(2; 5)$  и построен график функции  $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 11$ . Обратите внимание на поведение графика в точке  $(2; 5)$ . Мы установили, что  $x = 2$  — стационарная точка, не являющаяся точкой экстремума. В этой точке производная функции обращается в нуль, а это значит, что касательная к графику функции в этой точке параллельна оси абсцисс (касательная проведена на рисунке 91 гунктиром). Подобную точку называют *точкой перегиба*.

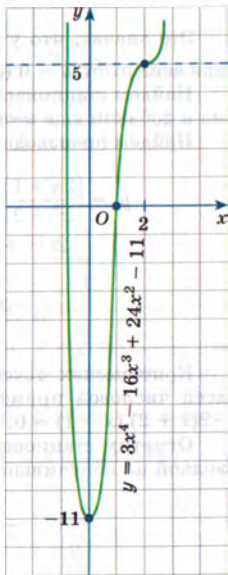


Рис. 91

**Пример 2** Построить график функции:

$$а) y = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}; \quad б) y = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1}.$$

**Решение.** а) Функция  $y = \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$  определена и непрерывна на всей числовой прямой, не является ни чётной, ни нечётной. Вертикальной асимптоты нет (знаменатель дроби  $\frac{2x + 1}{x^2 + 2}$  нигде не обращается в нуль), о горизонтальной асимптоте следует подумать. Чтобы найти горизонтальную асимптоту графика функции, надо вычислить  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x^2 + 2}$ . Пределы такого вида мы находили в § 3. Основной приём — деление и числителя, и знаменателя на переменную в старшей степени. Имеем:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} + \frac{2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{0 + 0}{1 + 0} = 0.$$

Это значит, что у графика функции  $y = \frac{2x+1}{x^2+2}$  есть горизонтальная асимптота  $y = 0$  (ось абсцисс).

Найдём стационарные точки, критические точки, точки экстремума и добавим ещё несколько контрольных точек.

Найдём производную заданной функции:

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{2x+1}{x^2+2} \right)' = \frac{(2x+1)'(x^2+2) - (2x+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} = \\ &= \frac{2(x^2+2) - (2x+1) \cdot 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2+2)^2} = \\ &= \frac{-2(x^2 + x - 2)}{(x^2+2)^2} = \frac{-2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}. \end{aligned}$$

Критических точек у функции нет (производная определена на всей числовой прямой); стационарные точки найдём из уравнения  $-2(x+2)(x-1) = 0$ . Получаем две стационарные точки:  $-2$  и  $1$ .

Отметим стационарные точки на числовой прямой; знаки производной на получившихся промежутках указаны на рисунке 92.

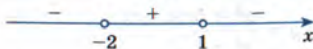


Рис. 92

$x = -2$  — точка минимума,  $y_{\min} = -\frac{1}{2}$ ;

$x = 1$  — точка максимума,  $y_{\max} = 1$ .

Итак, мы знаем две точки графика:  $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$  и  $(1; 1)$ . Добавим ещё несколько контрольных точек. Если  $x = -\frac{1}{2}$ , то  $y = 0$ ; если  $x = 0$ , то  $y = \frac{1}{2}$ ; если  $x = 2$ , то  $y = \frac{5}{6}$ .

На рисунке 93 отмечены точки  $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ ,  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ ,  $(1; 1)$ ,  $\left(2; \frac{5}{6}\right)$  и построен график функции  $y = \frac{2x+1}{x^2+2}$ .

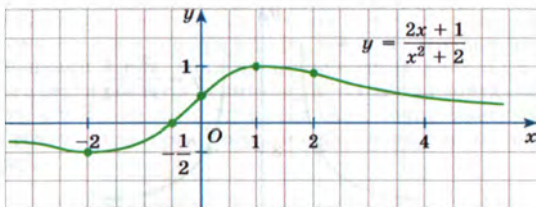


Рис. 93

б) Функция  $y = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1}$  претерпевает разрыв в точках  $x = -1$ ,  $x = 1$  (нули знаменателя); значит, уравнениями  $x = -1$ ,  $x = 1$  задаются две вертикальные асимптоты графика функции. Заметим также, что функция  $y = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1}$  — чётная, её график симметричен относительно оси ординат. Посмотрим, есть ли у графика горизонтальная асимптота:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} + \frac{5}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{5}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1 + 0}{1 + 0} = 1.$$

Значит,  $y = 1$  — горизонтальная асимптота графика функции.

Найдём стационарные точки, критические точки, точки экстремума и добавим ещё несколько контрольных точек.

Найдём производную заданной функции:

$$\begin{aligned} y' &= \left( \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(x^2 + 5)' \cdot (x^2 - 1) - (x^2 + 5) \cdot (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 5) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-12x}{(x^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Производная не существует в точках  $x = \pm 1$ , но это не критические точки, это точки разрыва. Производная обращается в нуль в точке  $x = 0$  — это единственная стационарная точка; слева от неё  $y' > 0$ , справа  $y' < 0$ . Значит,  $x = 0$  — точка максимума, причём  $y_{\max} = -5$ .

Итак, мы знаем, что график симметричен относительно оси ординат, у него есть две вертикальные асимптоты  $x = -1$  и  $x = 1$ , горизон-



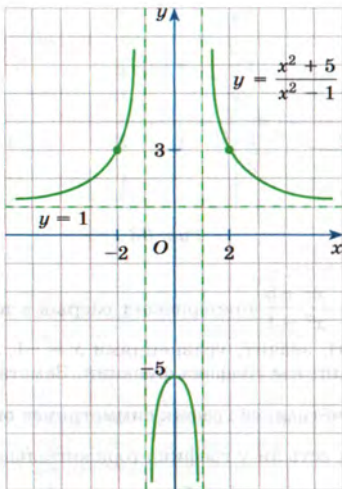


Рис. 94

гальная асимптота  $y = 1$  и есть точка максимума  $(0; -5)$ . Добавим ещё две точки: если  $x = \pm 2$ , то  $y = 3$ . График представлен на рисунке 94.

## Упражнения

Постройте эскиз графика какой-нибудь функции, обладающей указанными свойствами.

- 17.1.** а) Функция определена на всей числовой прямой; имеет одну точку минимума и две точки максимума; принимает только неотрицательные значения; ограничена снизу и не ограничена сверху.  
 б) Функция определена на всей числовой прямой; возрастает на  $(-\infty; -3]$  и на  $[4; +\infty)$ ; убывает на  $[-3; 4]$ ; точка  $x = -3$  является стационарной; точка  $x = 4$  является критической; не ограничена.

**17.2.** а) Функция имеет разрыв в точке  $x = -3$ ; имеет минимум в точке  $x = -5$  и минимум в точке  $x = 0$ ; не ограничена.

б) Функция определена на промежутках  $(-\infty; 1)$  и  $(1; +\infty)$ ; имеет вертикальную асимптоту  $x = 1$  и горизонтальную асимптоту  $y = 2$  при  $x \rightarrow \infty$ ; имеет одну точку максимума и одну точку минимума; ограничена сверху и не ограничена снизу.

**17.3.** а) Функция определена на всей числовой прямой; чётная; при  $x > 0$  имеет одну точку максимума при  $x = 2$  и одну точку минимума при  $x = 4$ ; не ограничена.

б) Функция определена на всей числовой прямой; нечётная; при  $x > 0$  имеет одну точку максимума при  $x = 1$  и одну точку минимума при  $x = 5$ .

Исследуйте функцию и постройте её график.

**17.4.** а)  $y = 5x^2 - 10x + 4$ ;

в)  $y = 3x^2 - 8x + 5$ ;

б)  $y = 2x^3 - 3x^2$ ;

г)  $y = 2x^3 + 3x^2$ .

**17.5.** а)  $y = x^3 + 3x^2 - 4$ ;

г)  $y = x^3 - 3x^2 + 4$ ;

б)  $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ ;

д)  $y = -x^3 - 3x^2 + 4$ ;

в)  $y = x^3 - x^2 - x$ ;

е)  $y = x^3 - 2x^2 + x$ .

**17.6.** а)  $y = x^3 - 4x^2 + 7x - 4$ ;

г)  $y = x^3 - 3x^2 + 8x - 6$ ;

б)  $y = x^2 + 1 - 0,5x^4$ ;

д)  $y = 5x^2 - 4 - 2,5x^4$ ;

в)  $y = 3x^5 - 5x^3$ ;

е)  $y = 5x - x^5$ .

**ИКТ 17.7.** а)  $y = x - \frac{1}{x}$ ;

в)  $y = \frac{x^3}{3 - x^2}$ ;

б)  $y = \frac{1 - x^2}{4 - x^2}$ ;

г)  $y = \frac{x}{1 - x^2}$ .

**ИКТ 17.8.** а)  $y = \sqrt{x} - x$ ;

в)  $y = x - \sqrt{x+1}$ ;

б)  $y = x\sqrt{x+2}$ ;

г)  $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$ .

**ИКТ 17.9.** а)  $y = (x-1)e^{-x}$ ;

в)  $y = xe^x$ ;

б)  $y = x + e^{-x}$ ;

г)  $y = \frac{e^x}{x+1}$ .

**ИКТ 17.10.** а)  $y = x - \ln x$ ;

в)  $y = \frac{x}{\ln x}$ ;

б)  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ;

г)  $y = x(\ln x + 1)$ .

**ИКТ 17.11.** а)  $y = x - \ln x$ ;

б)  $y = 2x + \ln x$ .

**ИКТ 17.12.** При каких значения параметра  $p$ :

а) уравнение  $3x^2 - x^3 = p - 2$  имеет единственный корень;

б) уравнение  $x^4 - 2x^2 = p + 1$  не имеет корней?

## Упражнения для повторения

**17.13.** Решите уравнение:

а)  $\sin x \cdot \ln(9 - x^2) = 0$ ;

б)  $\cos x \cdot \lg(5x - 6 - x^2) = 0$ ;

в)  $\operatorname{ctg} x \cdot \sqrt{16 - x^2} = 0$ ;

г)  $\operatorname{tg} x \cdot \sqrt[4]{9x - 8 - x^2} = 0$ .

**17.14.** Найдите значение выражения:

а)  $\log_{\frac{\sqrt{x}}{y}} y$ , если  $\log_y x = 5$ ;

б)  $\log_{\frac{\sqrt{y}}{x}} \left( \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \right) + \log_{\frac{\sqrt{y}}{x}} \left( \frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right)$ , если  $\log_y x = 6$ ;

в)  $\log_{\sqrt{xy}} \left( \frac{\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}} \right)$ , если  $\log_x y = 3$ ;

г)  $4 \log_{\sqrt{xy}} \left( \frac{\sqrt{x}}{y} \right) + 3 \log_{\sqrt{xy}} y^2$ , если  $\log_x y = 2$ .

**17.15.** Вычислите:

а)  $\sin \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{4} + \sin^3 \frac{\pi}{4} - \dots + (-1)^{n+1} \sin^n \frac{\pi}{4} + \dots$ ;

б)  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{6} + \operatorname{tg}^2 \frac{5\pi}{6} + \operatorname{tg}^3 \frac{5\pi}{6} + \dots + \operatorname{tg}^n \frac{5\pi}{6} + \dots$ ;

$$в) \cos \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{3} + \cos^3 \frac{\pi}{3} + \dots + \cos^n \frac{\pi}{3} + \dots;$$

$$г) \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} + \operatorname{ctg}^2 \frac{2\pi}{3} + \operatorname{ctg}^3 \frac{2\pi}{3} + \dots + \operatorname{ctg}^n \frac{2\pi}{3} + \dots$$

**17.16.** Решите уравнение:

а)  $\|x - 1\| - 3 = 3 - \|x - 1\|;$

б)  $\|2x - 3\| - 5 = \|2x - 3\| - 5.$

## § 18. Нахождение наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на промежутке

Часто бывает необходимо найти наименьшее или наибольшее значение функции на каком-либо промежутке. До сих пор мы, как правило, действовали так: строили график функции и по графику находили наименьшую и наибольшую ординаты точек графика на заданном промежутке. Но уже в предыдущем параграфе вы видели, что если мы о виде графика функции заранее не имеем представления, то построение такого графика — задача довольно трудная. А потому возникает естественный вопрос: можно ли найти наименьшее и наибольшее значения функции на промежутке, не строя графика функции?

Для ответа на поставленный вопрос рассмотрим несколько конкретных ситуаций.

На рисунке 95, а, б построены графики функций  $y = f_1(x)$ ,  $y = f_2(x)$ , непрерывных на отрезке  $[a; b]$ . Наименьшее и наибольшее значения функций достигаются в концевых точках отрезка. Для функции  $y = f_1(x)$  имеем:  $y_{\text{наим}} = f_1(a)$ ,  $y_{\text{наиб}} = f_1(b)$ ; для функции  $y = f_2(x)$  имеем:  $y_{\text{наим}} = f_2(b)$ ,  $y_{\text{наиб}} = f_2(a)$ .

На рисунке 96, а, б построены графики функций  $y = g_1(x)$ ,  $y = g_2(x)$ , непрерывных на отрезке  $[a; b]$ . Функция  $y = g_1(x)$  своего наибольшего значения достигает в концевой точке отрезка  $[a; b]$ , а наименьшего — во внутренней точке отрезка, причём это стационарная точка (точка минимума):  $y_{\text{наим}} = g_1(c)$ ,  $y_{\text{наиб}} = g_1(b)$ . Функция



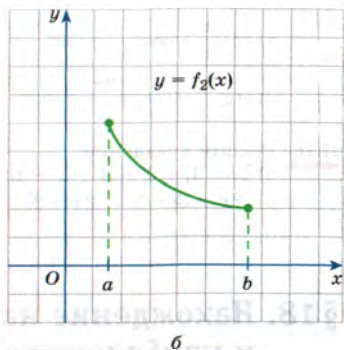
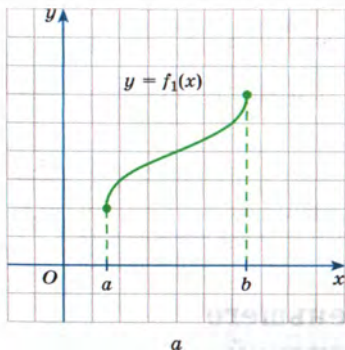


Рис. 95

$y = g_2(x)$  своего наименьшего значения достигает в концевой точке отрезка  $[a; b]$ , а наибольшего — во внутренней точке отрезка, причём это критическая точка (точка максимума):  $y_{\text{наиб}} = g_2(c)$ ,  $y_{\text{наим}} = g_2(a)$ .

На рисунке 97 построен график функции  $y = h(x)$ , непрерывной на отрезке  $[a; b]$ . Эта функция своих наименьшего и наибольшего зна-

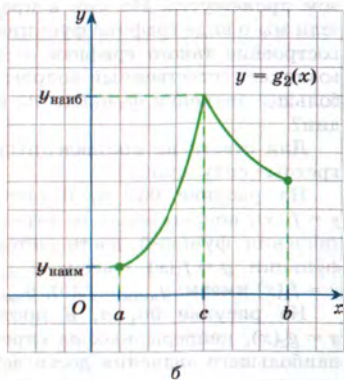
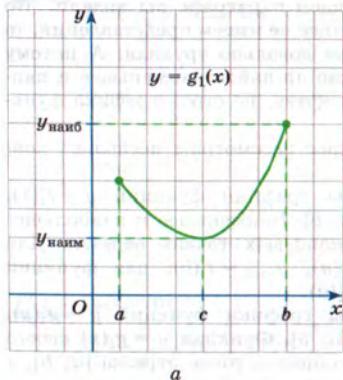


Рис. 96

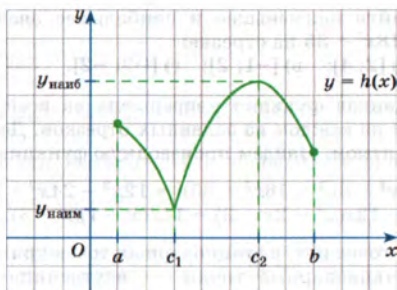


Рис. 97

чений достигает во внутренних точках отрезка, причём  $c_1$  — критическая точка (точка минимума), а  $c_2$  — стационарная точка (точка максимума):  $y_{\text{наим}} = h(c_1)$ ,  $y_{\text{наиб}} = h(c_2)$ .

Вообще справедливы две теоремы.

**Теорема 1.** Непрерывная функция на отрезке достигает своих наименьшего и наибольшего значений.

**Теорема 2.** Своего наименьшего (наибольшего) значения функция, непрерывная на отрезке, достигает либо в концевой точке отрезка, либо в стационарной или критической внутренней точке отрезка.

Основываясь на этих теоремах, формулируем полезный алгоритм.

**Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a; b]$**

1. Найти производную  $f'(x)$ .
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка  $[a; b]$ .
3. Вычислить значения функции  $y = f(x)$  в точках, отобранных на втором шаге, и в точках  $a$  и  $b$ ; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет  $y_{\text{наим}}$ ) и наибольшее (это будет  $y_{\text{наиб}}$ ).

**Пример 1** Найти наименьшее и наибольшее значения функции  $y = 3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 35$  на отрезке:

а)  $[-2; 4]$ ; б)  $[2; 4]$ ; в)  $[-1; 2]$ ; г)  $[-3; -2]$ .

**Решение.** Заданная функция непрерывна на всей числовой прямой, в частности на каждом из заданных отрезков. Действуем в соответствии с алгоритмом. Найдём производную функции:

$$\begin{aligned}y' &= (3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 35)' = 12x^3 - 24x^2 - 36x = \\&= 12x(x^2 - 2x - 3) = 12x(x + 1)(x - 3).\end{aligned}$$

Критических точек нет, а стационарных точек три: 0, -1, 3.

а) Все три стационарные точки — внутренние точки отрезка  $[-2; 4]$ . Составляем таблицу, куда включаем три стационарные точки и две концевые точки отрезка:

$x$	-2	-1	0	3	4
$y$	75	28	35	-100	3

Видим, что  $y_{\text{наим}} = -100$ ,  $y_{\text{наиб}} = 75$ .

б) Из трёх стационарных точек (0, -1, 3) лишь одна ( $x = 3$ ) — внутренняя точка отрезка  $[-2; 4]$ . Составляем таблицу, куда включаем стационарную точку  $x = 3$  и две концевые точки отрезка:

$x$	2	3	4
$y$	-53	-100	3

Видим, что  $y_{\text{наим}} = -100$ ,  $y_{\text{наиб}} = 3$ .

в) Лишь одна стационарная точка  $x = 0$  — внутренняя точка отрезка  $[-1; 2]$ . Составляем таблицу, куда включаем стационарную точку  $x = 0$  и две концевые точки отрезка:

$x$	-1	0	2
$y$	28	35	-53

Видим, что  $y_{\text{наим}} = -53$ ,  $y_{\text{наиб}} = 35$ .

г) Ни одна стационарная точка не принадлежит отрезку  $[-3; -2]$ . Составляем таблицу, куда включаем только концевые точки отрезка:

$x$	-3	-2
$y$	332	75

Видим, что  $y_{\text{наим}} = 75$ ,  $y_{\text{наиб}} = 332$ .

**Пример 2** Найти наименьшее и наибольшее значения функции  $y = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}x$  на отрезке  $[-8; 27]$ .

**Решение.** Заданная функция непрерывна на всей числовой прямой, в частности на заданном отрезке. Действуем в соответствии с алгоритмом. Найдём производную функции:

$$y' = \left( \sqrt[3]{x} - \frac{1}{3}x \right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{3} = \frac{1 - \sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Есть критическая точка:  $x = 0$ ; есть две стационарные точки:  $x = -1$ ,  $x = 1$ .

Эти три точки — внутренние точки отрезка  $[-8; 27]$ . Составляем таблицу, куда включаем критическую точку, две стационарные точки и две концевые точки отрезка:

$x$	-8	-1	0	1	27
$y$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	-6

Видим, что  $y_{\text{наим}} = -6$ ,  $y_{\text{наиб}} = \frac{2}{3}$ .

До сих пор мы говорили о том, как искать наименьшее и наибольшее значения непрерывной функции на отрезке. Если же речь идёт об отыскании наименьшего или наибольшего значения непрерывной функции на незамкнутом промежутке (например, на интервале) или функции, имеющей на заданном промежутке точки разрыва, то, как правило, приходится строить график функции. Но, как говорится, нет правила без исключения. Посмотрите на рисунки 98 и 99. На обоих рисунках представлен график функции, непрерывной на интервале  $(a; b)$ . На рисунке 98 у функции критических точек нет, есть лишь одна стационарная точка, причём точка минимума, и именно в этой



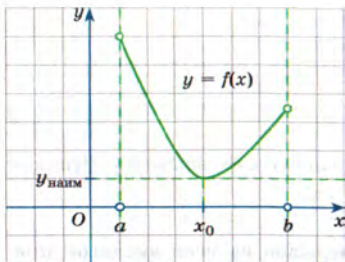


Рис. 98

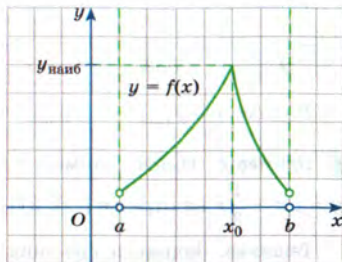


Рис. 99

точке функция достигает наименьшего значения. На рисунке 99 у функции стационарных точек нет, есть лишь одна критическая точка, причём точка максимума, и именно в этой точке функция достигает наибольшего значения. Вообще справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на промежутке  $X$  и имеет внутри промежутка единственную стационарную или критическую точку  $x = x_0$ , то:

- если  $x_0$  — точка минимума, то  $f(x_0)$  — наименьшее значение функции на этом промежутке (см. рис. 98);
- если  $x_0$  — точка максимума, то  $f(x_0)$  — наибольшее значение функции на этом промежутке (см. рис. 99).

**Пример 3** Найти наименьшее и наибольшее значения функции  $y = x - \ln x$ .

**Решение.** Поскольку промежутков, на котором следует найти соответствующие значения функции, не указан, речь идёт об отыскании этих значений на всей области определения функции; в данном случае это открытый луч  $(0; +\infty)$ . Имеем:

$$y' = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$$

Производная не существует в точке  $x = 0$ , но эта точка нас не интересует, она не принадлежит области определения функции. Производная обращается в 0 в точке  $x = 1$ , причём слева от точки  $x = 1$  производная отрицательна, а справа — положительна. Вывод:  $x = 1$  — единственная стационарная точка, а именно точка миниму-

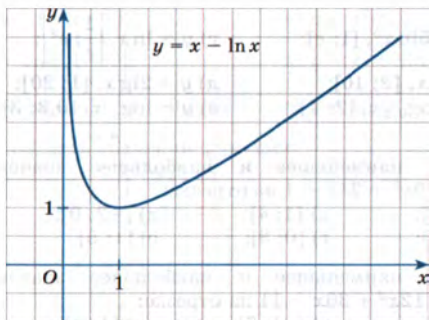


Рис. 100

ма. Значит, согласно теореме 3 в этой точке функция  $y = x - \ln x$  достигает наименьшего значения:  $y_{\text{наим}} = 1 - \ln 1 = 1$ . Наибольшего значения у функции нет. На рисунке 100 представлен график функции  $y = x - \ln x$ .

## Упражнения

Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на указанном отрезке.

18.1. а)  $y = 8x^5$ ,  $[-1; 3]$ ;

г)  $y = 6x^4$ ,  $[-3; 2]$ ;

б)  $y = \sqrt{x} + 1$ ,  $[1; 4]$ ;

д)  $y = \sqrt{-x} + 2$ ,  $[-8; -1]$ ;

в)  $y = -\frac{6}{x}$ ,  $[-6; -1]$ ;

е)  $y = \frac{7}{x}$ ,  $[1; 7]$ .

18.2. а)  $y = 2\cos x$ ,  $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ ;

г)  $y = 3\sin x$ ,  $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ ;

б)  $y = 0,4\sin x$ ,  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ ;

д)  $y = 0,8\cos x$ ,  $\left[-\frac{3\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ ;

в)  $y = 2\tg x$ ,  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$ ;

е)  $y = -3\tg x$ ,  $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$ .

18.3. а)  $y = x^2 - 6x + 11$ ,  $[0; 2]$ ;

г)  $y = x^2 + 8x - 13$ ,  $[-2; 2]$ ;

б)  $y = x^2 + 4x - 15$ ,  $[-4; 1]$ ;

д)  $y = -x^2 - 6x + 7$ ,  $[-4; 0]$ ;

в)  $y = -2x^2 + 8x + 5$ ,  $[-1; 5]$ ;

е)  $y = 3x^2 - 12x - 7$ ,  $[-1; 5]$ .

- 18.4.** а)  $y = 0,5 \ln x^5$ ,  $[1; e]$ ; г)  $y = \ln x$ ,  $\left[\frac{1}{e}; e^2\right]$ ;  
 б)  $y = \lg x$ ,  $[2; 10]$ ; д)  $y = 2 \lg x$ ,  $[1; 20]$ ;  
 в)  $y = 3 \log_{0,2} x$ ,  $[2; 1]$ ; е)  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ ,  $[0,3; 3]$ .

**18.5.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 1$  на отрезке:

- а)  $[-1; 1]$ ; в)  $[1; 4]$ ; д)  $[-2; 0]$ ;  
 б)  $[-1; 5]$ ; г)  $[0; 3]$ ; е)  $[1; 5]$ .

**18.6.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $y = x^3 - 12x^2 + 36x - 11$  на отрезке:

- а)  $[0; 1]$ ; в)  $[-1; 7]$ ; д)  $[1; 4]$ ;  
 б)  $[-1; 3]$ ; г)  $[-2; 0]$ ; е)  $[0; 7]$ .

**18.7.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $y = x^4 - 8x^3 + 10x^2 + 1$  на отрезке:

- а)  $[2; 3]$ ; в)  $[-1; 6]$ ; д)  $[-2; 2]$ ;  
 б)  $[-1; 2]$ ; г)  $[1; 4]$ ; е)  $[0; 6]$ .

**18.8.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = x + \frac{9}{x-2} \text{ на отрезке:}$$

- а)  $[-7; -1]$ ; в)  $[-3; 1]$ ; д)  $[3; 8]$ ;  
 б)  $[3; 5]$ ; г)  $[4; 11]$ ; е)  $[-7; 0]$ .

Найдите наименьшее и наибольшее значения заданной функции на указанном отрезке.

- 18.9.** а)  $y = \frac{x+3}{x-4}$ ,  $[-1; 3]$ ; г)  $y = \frac{x-5}{x+2}$ ,  $[-9; -5]$ ;  
 б)  $y = \frac{3x-5}{x+4}$ ,  $[-11; -7]$ ; д)  $y = \frac{2x-3}{x-5}$ ,  $[6; 10]$ ;  
 в)  $y = \frac{2x^2-3}{x-1}$ ,  $[2; 4]$ ; е)  $y = \frac{2x^2-7}{x+1}$ ,  $[-6; -2]$ .
- 18.10.** а)  $y = \frac{x^2+4x-7}{x^2+4x-5}$ ,  $[-4; -1]$ ;  
 б)  $y = \frac{x^2-8x-11}{x^2-8x}$ ,  $[2; 7]$ .

**18.11.** а)  $y = x^2 e^x, [-4; -1];$

г)  $y = x^2 e^x, [-1; 2];$

б)  $y = x - \ln x, \left[\frac{1}{e}; e\right];$

д)  $y = x - 3 \ln x, [e; e^2];$

в)  $y = x + \ln(-x), [-4; -0,5];$

е)  $y = x + e^{-x}, [-\ln 4; \ln 2].$

**18.12.** Найдите область значений функции:

а)  $y = \sin x + x, x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$

б)  $y = 2 \cos x - x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right];$

в)  $y = \operatorname{tg} x - x, x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right];$

г)  $y = \sin x + x, x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right];$

д)  $y = x - \cos x, x \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right];$

е)  $y = \operatorname{ctg} x + x, x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right].$

**18.13.** На отрезке  $[-3; 0]$  найдите наибольшее значение функции:

а)  $y = 1 - x^2 - 4x;$

г)  $y = 3 - x^2 + 2x;$

б)  $y = 3^{1-x^2-4x};$

д)  $y = 5^{3-x^2+2x};$

в)  $y = \log_5(1 - x^2 - 4x);$

е)  $y = \log_2(3 - x^2 + 2x).$

Найдите наибольшее и наименьшее значения заданной функции на заданном промежутке.

**18.14.** а)  $y = x^3 - 4x^2 + 3, [0,5; +\infty);$

б)  $y = \frac{1}{5}x^5 - 4x^2 + 5, (-\infty; 1];$

в)  $y = x - 4\sqrt{x}, [0; +\infty);$

г)  $y = x^3 - 3x^2 - 2, (-\infty; 0,5];$

д)  $y = \frac{1}{5}x^5 - x^3 + 3, [-1; +\infty);$

е)  $y = 3\sqrt{x} - x, [0; +\infty).$



**18.15.** а)  $y = 0,5x + \frac{2}{x}, (-\infty; 0);$

б)  $y = \frac{4x}{x^2 + 4}, (0; +\infty);$

в)  $y = \frac{4x^2}{x^2 + 4}, (-\infty; 4];$

г)  $y = 2x + \frac{2}{x}, (0; +\infty);$

д)  $y = \frac{4x}{x^2 + 4}, (-\infty; 0);$

е)  $y = \frac{4x^2}{x^2 + 4}, [-4; +\infty).$

**18.16.** Найдите наибольшее значение функции на заданном промежутке:

а)  $y = \sqrt{x^2 + 4x + 11}, x \in [-5; -1];$

б)  $y = \left(\frac{2x}{x+2}\right)^5, x \in (-\infty; -4].$

**ИКТ 18.17.** Найдите наименьшее значение функции на заданном промежутке:

а)  $y = x^2 - 6x + 5 + |3 - 2x|, x \in [0; 4];$

б)  $y = |x^3 - 8| - 4x, x \in [-1; 2];$

в)  $y = x^2 + 6x - 5 + |5 - 3x|, x \in [-4; 1];$

г)  $y = |x^3 + 8| - 12x, x \in [-1; 4].$

**18.18.** Найдите область значений функции:

а)  $y = \frac{x^4}{x^4 + 1};$

в)  $y = \frac{3x}{x^2 + 3};$

б)  $y = \sqrt{2x - 6} - x;$

г)  $y = x - \sqrt{3x - 3}.$

**18.19.** а) При каком значении параметра  $p$  наименьшее значение функции  $y = x\sqrt{x+p}$  равно  $-6\sqrt{3}$ ?

б) При каком значении параметра  $p$  наибольшее значение функции  $y = (p-x)\sqrt{x}$  равно  $10\sqrt{5}$ ?

## Упражнения для повторения

**18.20.** Решите систему уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \log_3 3x + \log_3 \frac{y}{3} = -1, \\ 3y + x - \frac{10}{3} = 0; \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \log_2 2x + \log_2 \frac{y}{2} = \log_4 36, \\ 2x - y + 4 = 0; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} \lg 5x + \lg y = \ln e, \\ 3x - y - 5 = 0; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \lg x + \lg(y + 3) = 2, \\ x - 2y + 4 = 0. \end{cases} \end{array}$$

**18.21.** Решите неравенство:

$$\begin{array}{l} \text{а) } 5^{2x}(5^{2x} + 5^{4-2x} - 130) \geq 0; \\ \text{б) } 6^{4x}(6^{2x+1} + 6^{1-2x} - 37) \leq 0; \\ \text{в) } 7^x(7^{3x+1} + 7^{-3x} - 8) \geq 0; \\ \text{г) } 16^x(2^{3x+1} + 2^{4-3x} - 12) \leq 0. \end{array}$$

**18.22.** Является ли заданная функция периодической:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = x^2 \operatorname{tg} x; & \text{в) } y = \sqrt{\cos x}; \\ \text{б) } y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}; & \text{г) } y = \frac{\cos x}{\sin x - 2} \end{array}$$

**18.23.** Найдите наибольшее целое значение  $x$ , принадлежащее области определения функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = \lg(41 - 3x); & \text{в) } y = \frac{x}{\lg(37 - 4x)}; \\ \text{б) } y = \frac{\sqrt{3x + 21}}{\log_7(5 - x)}; & \text{г) } y = \log_2(x + 3) + \sqrt{10 - 2x}. \end{array}$$

## § 19. Задачи на нахождение наименьших и наибольших значений величин

На практике часто приходится решать так называемые *задачи на оптимизацию* (от лат. *optimus* — лучший). Как правило, это текстовые задачи без какого-либо указания переменных, явных формул для зависимостей между ними и т. п. В сравнительно несложных задачах на оптимизацию речь, как правило, идёт о двух величинах, одна из

которых каким-то образом зависит от другой, причём надо найти такое значение второй величины, при котором первая принимает своё наименьшее или наибольшее (наилучшее в данных условиях) значение.

Решение задач на оптимизацию, как и решение любой текстовой задачи, будем осуществлять в три этапа.

**Первый этап.** Составление математической модели.

**Второй этап.** Работа с составленной математической моделью.

**Третий этап.** Ответ на вопрос задачи.

**На первом этапе,** проанализировав условия задачи, следует выделить *оптимизируемую величину* (О. В.), т. е. величину, о наибольшем или наименьшем значении которой идёт речь, и обозначить её буквой  $y$  (или  $S, V, R, t$  — в зависимости от условия).

Одну из участвующих в задаче неизвестных величин, через которую сравнительно нетрудно выразить О. В., принимаем за *независимую переменную* (Н. П.), обозначаем её буквой  $x$  (или какой-либо иной буквой); устанавливаем *реальные границы* изменения Н. П. (в соответствии с условиями задачи) — множество  $X$  и выражаем  $y$  через  $x$ .

**Математическая модель задачи представляет собой функцию**  $y = f(x)$  с областью определения  $X$ ,  $x$  — Н. П.,  $y$  — О. В.

**На втором этапе** для функции  $y = f(x)$ ,  $x \in X$ , находим  $y_{\text{наим}}$  ( $y_{\text{наиб}}$ ) в зависимости от того, что требуется в условии задачи. При этом используются сведения и факты, полученные в § 18.

**На третьем этапе** ответ, полученный на втором этапе — этапе работы с математической моделью, сверяется с условиями задачи; происходит корректировка результатов исследования модели и первоначального текста.

**Пример 1** При компьютерной вёрстке книги печатный текст площадью  $384 \text{ см}^2$  надо разместить на прямоугольном листе бумаги, соблюдая поля: слева и справа по 2 см, сверху и снизу — по 3 см (рис. 101). Размеры листа бумаги заранее не известны. При каких размерах листа бумаги его площадь окажется наименьшей?

**Решение. Первый этап.** Составление математической модели.

По условию площадь  $S$  прямоугольного листа должна быть наименьшей. Итак, оптимизируемая величина — это  $S$ .

Теперь подумаем, что принять за независимую переменную, через которую сравнительно несложно «добраться» до  $S$ . Обозначим буквой  $x$  (см) сторону  $KN$  внутреннего прямоугольника  $KLMN$ . Тогда

сторона  $AD$  прямоугольника  $ABCD$  будет равна  $(x + 4)$  (см). Зная одну сторону прямоугольника  $KLMN$  и его площадь, найдём вторую сторону:

$$KL = \frac{384}{x} \text{ (см)}. \text{ Но в таком случае}$$

$$AB = \frac{384}{x} + 6 \text{ (см)}.$$

Итак, мы знаем длины двух сторон прямоугольника  $ABCD$ :  $AD = x + 4$ ,

$$KL = \frac{384}{x} + 6. \text{ Площадь прямоуголь-$$

ника  $ABCD$  выражается формулой

$$S = (x + 4) \left( \frac{384}{x} + 6 \right).$$

Поскольку  $x$  — длина отрезка  $KN$ , то  $x > 0$ .

Подводя итоги. Математической моделью задачи является функция  $S = (x + 4) \left( \frac{384}{x} + 6 \right)$ ,  $x \in (0; +\infty)$ . Нас интересует наименьшее значение этой функции.

**Второй этап.** Работа с составленной математической моделью.

Найдём производную функции  $S = (x + 4) \left( \frac{384}{x} + 6 \right)$ . Но сначала есть смысл выполнить некоторые преобразования:

$$S = (x + 4) \left( \frac{384}{x} + 6 \right) = 384 + \frac{1536}{x} + 6x + 24 = 6x + \frac{1536}{x} + 408.$$

$$\begin{aligned} S' &= \left( 6x + \frac{1536}{x} + 408 \right)' = 6 - \frac{1536}{x^2} = \frac{6x^2 - 1536}{x^2} = \\ &= \frac{6(x^2 - 256)}{x^2} = \frac{6(x - 16)(x + 16)}{x^2}. \end{aligned}$$

Производная не существует в точке  $x = 0$  и обращается в нуль в точках  $x = 16$ ,  $x = -16$ . Промежутку  $(0; +\infty)$  из указанных трёх точек принадлежит только точка  $x = 16$ . При переходе через эту точку сле-

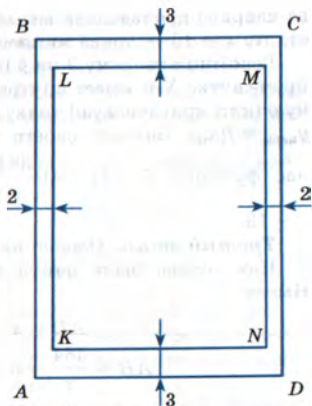


Рис. 101



ва направо производная меняет знак с минуса на плюс, а это означает, что  $x = 16$  — точка минимума функции.

Вспомним теорему 3 из § 18: если функция  $y = f(x)$  непрерывна на промежутке  $X$  и имеет внутри промежутка единственную стационарную (или критическую) точку  $x = x_0$  и если  $x_0$  — точка минимума, то  $y_{\text{наим}} = f(x_0)$ . Значит, своего наименьшего значения интересующая

нас функция  $S = (x + 4)\left(\frac{384}{x} + 6\right)$ ,  $x \in (0; +\infty)$  достигает в точке  $x = 16$ .

**Третий этап. Ответ на вопрос задачи.**

Нам нужно было найти длины сторон прямоугольника  $ABCD$ . Имеем:

$$\begin{aligned} AD &= x + 4 = 16 + 4 = 20; \\ AB &= \frac{384}{x} + 6 = \frac{384}{16} + 6 = 24 + 6 = 30. \end{aligned}$$

**Ответ:** прямоугольный лист бумаги наименьшей площади должен иметь размеры  $20 \times 30$  см.

**Пример 2** Из квадратного листа картона  $18 \times 18$  см требуется сделать коробку наибольшей вместимости. Какого размера квадраты следует для этого вырезать по углам листа картона (рис. 102)?

**Решение. Первый этап. Составление математической модели.**

О наибольшем или наименьшем значении какой величины идёт речь, что является оптимизируемой величиной? Нас интересует наибольшая вместимость той коробки, которая получится после того, как у листа картона будут вырезаны четыре квадрата и выполнены соответствующие сгибы, т. е. речь идёт об объёме  $V$  прямоугольного параллелепипеда. Итак, оптимизируемая величина —  $V$ .

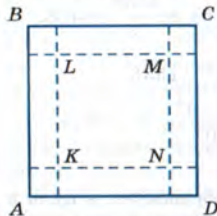


Рис. 102

Обозначим буквой  $x$  (см) сторону каждого из четырёх вырезаемых квадратов. Основанием прямоугольного параллелепипеда является квадрат  $KLMN$ , высота параллелепипеда равна  $x$  (см). Нетрудно найти сторону квадрата  $KLMN$ :  $KN = 18 - 2x$  (см). Таким образом,

$$\begin{aligned} V &= (18 - 2x)^2 \cdot x = x(324 - 72x + 4x^2) = \\ &= 4x^3 - 72x^2 + 324x. \end{aligned}$$

Поскольку  $x$  — длина стороны вырезаемого квадрата, то  $x > 0$ . Далее, по смыслу задачи сторона вырезаемого квадрата должна быть меньше половины стороны картонного квадрата, т. е.  $x < 9$ .

Подводим итоги. Математической моделью задачи является функция  $V = 4x^3 - 72x^2 + 324x$ ,  $x \in (0; 9)$ . Нас интересует наибольшее значение этой функции.

**Второй этап.** Работа с составленной математической моделью.

Найдём производную функции  $V = 4x^3 - 72x^2 + 324x$ :

$$\begin{aligned} V' &= (4x^3 - 72x^2 + 324x)' = 12x^2 - 144x + 324 = \\ &= 12(x^2 - 12x + 27) = 12(x - 3)(x - 9). \end{aligned}$$

Производная обращается в нуль в точках  $x = 3$ ,  $x = 9$ . Интервалу  $(0; 9)$  принадлежит только точка  $x = 3$ . При переходе через эту точку слева направо производная меняет знак с плюса на минус, а это означает, что  $x = 3$  — точка максимума функции.

И снова вспомним теорему 3 из § 18: если функция  $y = f(x)$  непрерывна на промежутке  $X$  и имеет внутри промежутка единственную стационарную (или критическую) точку  $x = x_0$  и если  $x_0$  — точка максимума, то  $y_{\text{наиб}} = f(x_0)$ . Значит, своего наибольшего значения интересующая нас функция  $V = 4x^3 - 72x^2 + 324x$  достигает в точке  $x = 3$ .

**Третий этап.** Ответ на вопрос задачи.

Нас спрашивают, какого размера квадраты следует вырезать по углам листа картона. Ответ уже получен: нужно вырезать четыре квадрата со стороной 3 см.

**Ответ:**  $3 \times 3$  см.

## Упражнения

**19.1.** а) Найдите такое число, что разность между ним и его квадратом является наибольшей.

б) Найдите такое положительное число, что разность между ним и его утроенным кубом является наибольшей.

**19.2.** а) Число 60 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

б) Число 16 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

- 19.3.** а) Число 18 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма удвоенного одного слагаемого и квадрата другого слагаемого была наименьшей.  
 б) Число 6 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы сумма частного от деления первого слагаемого на второе и частного от деления второго слагаемого на первое была наименьшей.
- 19.4.** Найдите значение параметра  $p$ , при котором сумма квадратов корней данного уравнения принимает наименьшее значение:  
 а)  $x^2 + (p - 2)x + p - 3 = 0$ ;  
 б)  $x^2 - (p - 3)x + 2p - 10 = 0$ .
- 19.5.** а) На графике функции  $y = \sqrt{x}$  найдите точку, ближайшую к точке  $M(4, 5; 0)$ .  
 б) На графике функции  $y = x^2$  найдите точку, ближайшую к точке  $K(2; 0, 5)$ .
- 19.6.** а) Периметр прямоугольника равен 36 см. Какими должны быть его стороны, чтобы он имел наибольшую площадь?  
 б) Площадь прямоугольника равна  $16 \text{ см}^2$ . Какими должны быть его стороны, чтобы он имел наименьший периметр?
- 19.7.** Каковы должны быть размеры прямоугольного участка, площадь которого равна  $32 \text{ м}^2$ , чтобы забор, огораживающий его с трёх сторон, имел наименьшую длину?
- 19.8.** Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 15 см. Каковы должны быть катеты, чтобы гипотенуза была наименьшей?
- 19.9.** Прямоугольный участок земли должен иметь площадь  $1200 \text{ м}^2$ , а забор должен огораживать участок с трёх сторон и разделять его посередине, как показано на рисунке 103. Какова наименьшая возможная длина забора?



Рис. 103

- 19.10.** Из прямоугольной трапеции надо вырезать прямоугольник наибольшей площади, у которого один из прямых углов совпадает с прямым углом трапеции. Чему равна эта площадь, если:  
 а) основания трапеции равны 8 см и 24 см, а высота равна 12 см;  
 б) основания трапеции равны 6 см и 8 см, а высота равна 10 см?
- 19.11.** При каких размерах прямоугольный параллелепипед объёмом  $8 \text{ м}^3$  с квадратным основанием имеет наименьшую площадь поверхности?



- 19.12.** В основании пирамиды  $MABCD$ , объём которой равен 9, лежит квадрат  $ABCD$ . Ребро  $MB$  перпендикулярно плоскости основания. Какое наименьшее значение при этих условиях может иметь длина ребра  $MD$ ?
- 19.13.** Апофема правильной четырёхугольной пирамиды равна 8 см. При какой высоте пирамиды её объём будет наибольшим?
- 19.14.** Периметр осевого сечения цилиндра 6 см. Какова должна быть высота цилиндра, чтобы его объём был наибольшим?
- 19.15.** Найдите высоту цилиндра наибольшего объёма, который можно вписать в шар радиусом 10 см.
- 19.16.** Открытый металлический чан имеет форму цилиндра, объём которого равен 8л. Каковы должны быть радиус основания и высота чана, чтобы на его изготовление потребовалось как можно меньше металла?
- 19.17.** Требуется изготовить коническую воронку с образующей 20 см. Какова должна быть высота воронки, чтобы её объём был наибольшим?
- 19.18.** а) От прямоугольника отрезают угловой квадрат, сторона которого составляет четверть меньшей стороны прямоугольника. Площадь полученного шестиугольника должна быть равна 68. Найдите наименьший периметр такого шестиугольника.  
б) От прямоугольника отрезают угловой квадрат, сторона которого на 10 меньше меньшей стороны прямоугольника. Площадь полученного шестиугольника должна быть равна 700. Найдите наименьший периметр такого шестиугольника.
- 19.19.** Металлическая заготовка длиной 1 м имеет форму усечённого конуса, диаметры оснований которого равны 10 см и 5 см. Из неё следует изготовить стержень наибольшего объёма в виде прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Найдите размеры такого стержня.
- 19.20.** По двум прямолинейным тропинкам, пересекающимся в точке  $O$  под углом  $60^\circ$ , одновременно выходят два пешехода по направлению к точке  $O$ . Первый находится от точки  $O$  на расстоянии 4,75 км и идёт со скоростью 3 км/ч, второй находится от точки  $O$  на расстоянии 4 км и идёт со скоростью 2 км/ч. Через какое время расстояние между пешеходами станет наименьшим?



## Упражнения для повторения

**19.21.** Решите систему уравнений:

а) 
$$\begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 972, \\ x - y - 3 = 0; \end{cases}$$

в) 
$$\begin{cases} 5^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^y = 75, \\ 3x - 4y - 10 = 0; \end{cases}$$

б) 
$$\begin{cases} 3^x \cdot 8^y = 72, \\ 3^x - 8^y - 1 = 0; \end{cases}$$

г) 
$$\begin{cases} 3^x \cdot 4^y = 108, \\ 3^y \cdot 4^x = 192. \end{cases}$$

**19.22.** Решите неравенство:

а)  $\log_{\log_3 4}(x - 2) \leq 0;$

в)  $\log_{\log_5 3}(3x - 7) \leq 0;$

б)  $\frac{\log_7(2x - 3,2)}{\log_7 \log_7 1,96} \leq 0;$

г)  $\frac{\log_6(3x + 1)}{\log_6 \log_6 7,2} \leq 0.$

**19.23.** Вычислите:

а) 
$$\frac{3\cos 196^\circ - 12\sin 74^\circ}{\cos 16^\circ};$$

в) 
$$\frac{5\sin 62^\circ - 9\cos 118^\circ}{\cos 28^\circ};$$

б) 
$$\frac{2\sqrt{2}\cos 83^\circ + \sqrt{2}\sin 7^\circ}{\cos 52^\circ + \cos 38^\circ};$$

г) 
$$\frac{2\sqrt{2}\sin 68^\circ + 5\sqrt{2}\cos 22^\circ}{\cos 23^\circ + \cos 67^\circ}.$$

**19.24.** Решите уравнение:

а)  $\sin x - 2\cos 2x + \sin 5x = 0;$

б)  $\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x;$

в)  $\sin x - \cos x = \sqrt{1,5};$

г)  $\cos 5x + \cos x + 2\cos 3x = 0;$

д)  $\cos 9x + \cos 3x = \cos x + \cos 7x;$

е)  $\cos x + \sqrt{3}\sin x - \sqrt{2} = 0.$

## Итак, в главе 3

Узнали, как для функции  $y = f(x)$  по знаку её производной на интервале  $(a; b)$  установить характер монотонности функции.

Сформулировали определения точки минимума и точки максимума (точки экстремума) функции.

Сформулировали алгоритм исследования непрерывной функции на монотонность и экстремумы.

Научились использовать производную для построения графика функции.

Сформулировали алгоритм отыскания наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на отрезке.

Обсудили вопрос о том, как искать наименьшее или наибольшее значение непрерывной функции на незамкнутом промежутке.

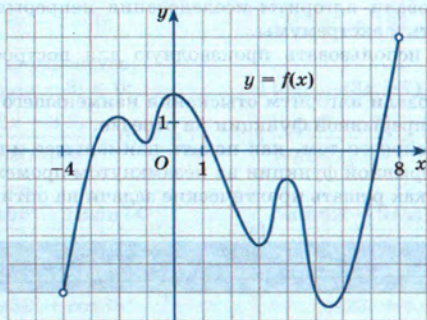
Выяснили, как решать практические задачи на оптимизацию.

### Вопросы

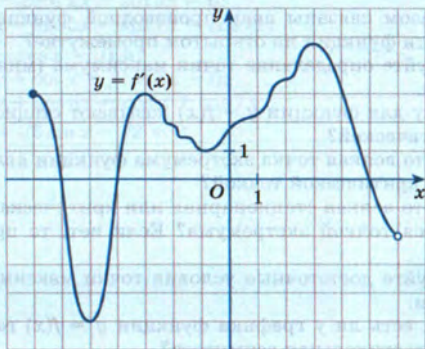
1. Дайте определение функции, возрастающей (убывающей) на промежутке.
2. Каким образом связаны знак производной функции и характер монотонности функции на открытом промежутке?
3. Сформулируйте определение точки максимума (минимума) функции  $y = f(x)$ .
4. Какую точку для функции  $y = f(x)$  называют стационарной, а какую — критической?
5. Верно ли, что всякая точка экстремума функции является стационарной или критической точкой?
6. Верно ли, что всякая стационарная или критическая точка функции является точкой экстремума? Если нет, то приведите пример.
7. Сформулируйте достаточные условия точки максимума (минимума) функции.
8. Как узнать, есть ли у графика функции  $y = f(x)$  горизонтальная асимптота; вертикальная асимптота?

## Тест

1. На рисунке 104, а задан график дифференцируемой функции  $y = f(x)$ . Найдите количество точек, в которых производная функции равна нулю.
2. На рисунке 104, б задан график производной функции  $y = f'(x)$ . Укажите наибольшую из длин промежутков убывания функции.



а



б

Рис. 104



3. Выберите верные утверждения относительно функции  $y = x + \sin x$ .
- Производная функции положительна при всех значениях  $x$ .
  - Производная функции неотрицательна при всех значениях  $x$ .
  - Функция возрастает на всей области определения.
  - Функция возрастает на промежутке  $[0; \pi]$ , убывает на промежутке  $[\pi; 2\pi]$ .
4. На рисунке 105 изображён график производной функции  $y = f'(x)$ . Укажите количество точек максимума функции  $y = f(x)$ .

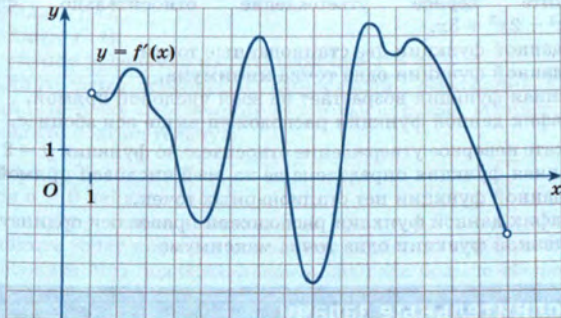


Рис. 105

5. Найдите точку минимума функции  $y = x^2 - 8\ln(x + 3)$ .
6. Учитель предложил учащимся оценить верность следующих трёх утверждений относительно функций, определённых на всей числовой прямой:
- значение функции в точке максимума всегда больше её значения в точке минимума;
  - если  $y = f'(x_0)$  существует и  $f'(x_0) \neq 0$ , то точка  $x_0$  не является точкой максимума;
  - если  $x_0$  — точка максимума функции  $y = f(x)$ , то  $f'(x_0) = 0$ .
- Аня считает, что среди этих утверждений 1 и 2 — верны, а 3 — неверно.  
 Дania считает, что верно только утверждение 2.  
 Саша думает, что верны все три утверждения.  
 Маша полагает, что 1 — неверно, а 2 и 3 — верны.  
 Кто из учащихся прав?
- а) Аня                      б) Дания                      в) Саша                      г) Маша



7. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $y = 1,5\sqrt[3]{x^2} - x$  на отрезке  $[0; 8]$ .
- а)  $y_{\text{наим}} = -2, y_{\text{наиб}} = 0$       в)  $y_{\text{наим}} = 0, y_{\text{наиб}} = 0,5$   
 б)  $y_{\text{наим}} = -2, y_{\text{наиб}} = 0,5$       г)  $y_{\text{наим}} = 0,5, y_{\text{наиб}} = 1$
8. Найдите наибольшее значение функции  $y = \sqrt{27} \cdot \operatorname{tg} 2x$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6}\right]$ .
9. Укажите верное утверждение относительно функции  $y = x^3 - 2x^2 + 3x$ .
- а) У данной функции две стационарные точки.  
 б) У данной функции одна точка минимума.  
 в) Данная функция возрастает на всей числовой прямой.  
 г) График данной функции расположен выше оси абсцисс.
10. Укажите неверное утверждение относительно функции  $y = 2 - x^{-0,5}$ .
- а) Данная функция определена не на всей числовой прямой.  
 б) У данной функции нет стационарных точек.  
 в) График данной функции расположен правее оси ординат.  
 г) У данной функции одна точка максимума.

## Дополнительные задачи

Пусть  $y = f(a) + f'(a)(x - a)$  — уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  при  $x = a$  и пусть  $(b; 0)$  — точка пересечения касательной с осью  $Ox$ . Отрезок оси  $Ox$  между точками  $(b; 0)$  и  $(a; 0)$  называют *подкасательной* при  $x = a$  (рис. 106).

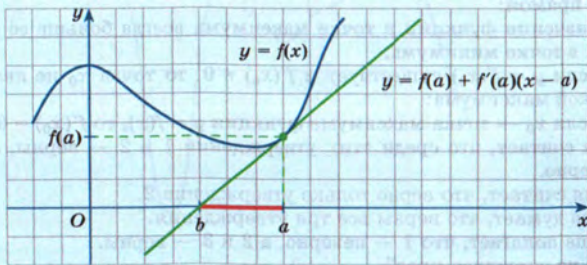


Рис. 106

Дана функция  $y = f(x)$ , где  $f(x) = \sqrt{x}$ .

1. а) Найдите  $f(1)$ ;  
б) найдите  $f'(1)$ ;  
в) составьте уравнение касательной при  $x = 1$ ;  
г) найдите точку пересечения касательной с осью ординат;  
д) найдите точку пересечения касательной с осью абсцисс;  
е) найдите подкасательную.
2. а) Найдите  $f(4)$ ;  
б) найдите  $f'(4)$ ;  
в) составьте уравнение касательной при  $x = 4$ ;  
г) найдите точку пересечения касательной с осью ординат;  
д) найдите точку пересечения касательной с осью абсцисс;  
е) найдите подкасательную.
3. а) Для  $a > 0$  найдите  $f(a)$ ;  
б) для  $a > 0$  найдите  $f'(a)$ ;  
в) составьте уравнение касательной при  $x = a$ ;  
г) найдите точку пересечения касательной с осью абсцисс;  
д) докажите, что подкасательная в два раза больше абсциссы точки касания;  
е) объясните, как построить касательную с помощью циркуля и линейки.

Дана функции  $y = f(x)$ , где  $f(x) = e^x$ .

4. а) Найдите  $f(2)$ ;  
б) найдите  $f'(2)$ ;  
в) составьте уравнение касательной при  $x = 2$ ;  
г) найдите точку пересечения касательной с осью ординат;  
д) найдите точку пересечения касательной с осью абсцисс;  
е) найдите подкасательную.
5. а) Для  $a > 0$  найдите  $f(a)$ ;  
б) для  $a > 0$  найдите  $f'(a)$ ;  
в) составьте уравнение касательной при  $x = a$ ;  
г) найдите точку пересечения касательной с осью абсцисс;  
д) докажите, что подкасательная равна 1, вне зависимости от значения  $a$ ;  
е) объясните, как построить касательную с помощью циркуля и линейки.

6. а) Докажите, что для функции  $y = f(x)$ , производная которой ни-  
где не равна нулю, длина подкасательной при  $x = a$  равна  $\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right|$ .
- б) Сравните результат пункта «а» с ответами к упражнениям 3 «д» и 5 «д».
7. Найдите наибольшее значение площади треугольника  $OBC$ , где  $O$  — начало координат,  $B$  — точка на графике функции  $y = \frac{5}{x} + 64x^5e^{6-4x}$ ,  $0,7 \leq x \leq 2$ , а  $C$  — точка на оси  $Ox$ , абсцисса которой равна абсциссе точки  $B$ . Для этого проверьте, что:
- площадь  $S = S(x) = 0,5yx = 2,5 + 32x^6e^{6-4x}$ ;
  - $(e^{6-4x})' = -4e^{6-4x}$ ;
  - $(x^6e^{6-4x})' = 2x^5e^{6-4x}(3 - 2x)$ ;
  - $S'(x) = 0$  на этом отрезке только при  $x = 1,5$ ;
  - знак  $S'(x)$  при переходе через  $x = 1,5$  меняется с «+» на «-»;
  - $S_{\text{наиб}} = S(1,5) = 367$ .
8. Найдите наибольшее значение площади треугольника  $OAB$ , где  $O$  — начало координат,  $A$  — точка на графике функции  $y = \sqrt{2x + \sin 2x - 7\sin x + 11}$ ,  $\frac{\pi}{9} \leq x \leq \frac{4\pi}{7}$ , а  $B$  — точка на оси  $Ox$ , абсцисса которой равна удвоенной ординате точки  $A$ . Для этого проверьте, что:
- площадь  $S = S(x) = y^2 = 2x + \sin 2x - 7\sin x + 11$ ;
  - $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$ ;
  - $S'(x) = \cos x(4\cos x - 7)$ ;
  - $S'(x) = 0$  на этом отрезке только при  $x = 0,5\pi$ ;
  - знак  $S'(x)$  при переходе через  $x = 0,5\pi$  меняется с «-» на «+»;
  - $S_{\text{наим}} = S(0,5\pi) = \pi + 4$ .
9. Найдите наименьшее значение периметра прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и с диагональю  $OM$ , где  $O$  — начало координат, а  $M$  — точка на графике функции  $x = 3 - 4\ln(0,2x - 1)$ ,  $6 \leq x \leq 9,5$ . Для этого проверьте, что:
- периметр  $P = P(x) = 2(x + 3 - 4\ln(0,2x - 1))$ ;
  - $(\ln(0,2x - 1))' = \frac{1}{x - 5}$ ;
  - $P'(x) = 2\left(1 - \frac{4}{x - 5}\right)$ ;



- г)  $P'(x) = 0$  на этом отрезке только при  $x = 9$ ;  
 д) знак  $P'(x)$  при переходе через  $x = 9$  меняется с «-» на «+»;  
 е)  $P_{\text{наим}} = P(9) = 24 - 8 \ln 0,8$ .

10. Точка  $A$  перемещается по оси  $Ox$ , а точка  $B$  перемещается по оси  $Oy$ . Абсцисса точки  $A$  изменяется по закону  $x(t) = t^2 + 2t + 6$ , а ордината точки  $B$  изменяется по закону  $y(t) = t^2 - 10t + 33$ , где  $3,3 \leq t \leq 5,5$ . Найдите наименьшее значение площади треугольника  $ABC$ , где  $C(0; 3)$  — фиксированная точка плоскости. Для этого проверьте, что:

- а)  $x = (t + 1)^2 + 5 \geq 5$ ,  $y = (t - 5)^2 + 8 \geq 8$ ;  
 б) площадь  $S = S(t) = 0,5x(y(t) - 3)$ ;  
 в)  $S = S(t) = 0,5(t^4 - 8t^3 + 16t^2 + 180)$ ;  
 г)  $S'(t) = 2t(t - 2)(t - 4)$ ;  
 д)  $S'(t) = 0$  на этом отрезке только при  $t = 4$ ;  
 е)  $S_{\text{наим}} = S(4) = 90$ .



## Из истории математики

На русском языке термин *производная функции*<sup>1</sup> появился на рубеже XVIII—XIX вв. в работах В. И. Вискватова (1780—1812). Сам термин является дословным переводом французского слова *dérivé* или английского *derivative*. Его предложил в конце XVIII в. крупнейший (наряду с Эйлером) математик XVIII в. Ж. Л. Лагранж (1736—1813) в своём программном трактате «Теория аналитических функций»<sup>2</sup> (1797 г.). Лагранж впервые стал систематически использовать для обозначения функции записи  $y = f(x)$ ,  $f(x)$ ,  $f$ , а для обозначения производных —  $f'(x)$ ,  $f$ .

Программа Лагранжа состояла в максимальной алгебраизации того математического анализа, который сложился после появления работ И. Ньютона (1642—1727) и Г. К. Лейбница (1646—1716). Основное отличие коротко можно описать так. Для Ньютона первично понятие скорости изменения функции (изменяющейся величины, или *флюенты*) и вторично понятие производной (*флюксии*). Лагранж, напротив, полагал, что понятие производной, как более строгое и математически ясное, должно приводить к определению того, что такое скорость (см., например, «...мы отнюдь не обладаем достаточно точным понятием о том, что такое скорость точки в любое мгновение, в случае, когда скорость переменна...»).

В целом отчётливое представление о производных, операциях над ними и их применении при исследовании функций сложилось к концу XVII в. Традиционно этот момент в истории математики связывают с работами Ньютона и Лейбница. Юридически расставить приоритеты и назвать, кто из этих великих математиков первым «открыл» дифференциальное исчисление, — вряд ли разрешимая задача. Большинство работ Ньютона были опубликованы через много лет после их написания, и сведения из них передавались устно или в частной переписке.

Например, основные принципы метода *флюксий*, которому соответствуют шаги 4 и 5 алгоритма из § 7, Ньютон разработал к концу

<sup>1</sup> Если точнее, то *производная функция*, т. е. функция, которая каждому  $x$  ставит в соответствие  $f'(x)$ .

<sup>2</sup> Полное название: «Теория аналитических функций, содержащая начала дифференциального исчисления, освобождённые от какого-либо рассмотрения бесконечно малых или исчезающих пределов или флюксий и сведённые к алгебраическому анализу конечных величин».

1665 г. в рукописи «To resolve problems by motion these following propositions are sufficient»<sup>1</sup>, а книгу «Метод флюксий» написал к 1671 г., которую напечатали только в 1736 г. Источником для исследований Лейбница в 1672—1675 гг. стали задачи, традиционные для того времени, о проведении касательных, применения *метода неделимых* и результатов П. Ферма (1601—1665) об экстремумах многоугольников, использовании *характеристического треугольника Паскаля* и в особенности работы 1673 г. Х. Гюйгенса (1629—1695) о маятниковых часах. В 1677 г. Лейбниц в письме к Ньютону изложил свои результаты. Ньютон по существу не ответил: результаты он получил уже сам, а новый подход и новые обозначения Лейбница его не заинтересовали.

В 1684 г. Лейбниц опубликовал мемуары «Новый метод максимумов и минимумов»<sup>2</sup>, в которых довольно полно, но чрезвычайно лаконично изложил свои методы и, в частности, предложил сам термин *дифференциальное исчисление*. В последующие 20 лет в других работах Лейбница и работах его коллег метод получил самое широкое распространение в континентальной Европе. Примерно с 1699 г. началась долгая и жаркая полемика, доходившая даже до размеров международной распри, между сторонниками Ньютона и сторонниками Лейбница, а потом и между ними самими о приоритетах в создании математического анализа.

Если оставить в стороне эти споры, то содержательную значимость самого математического анализа не оспаривал никто. В начале XVIII в. это была, пожалуй, наиболее динамично развивавшаяся наука, открывшая массу новых связей и в самой математике, и в её приложениях. В 1696 г. сторонник Лейбница Гийом Лопиталь (1661—1704) на основе лекций и записок Иоганна Бернулли (1667—1748) издал первый учебник по математическому анализу «Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий», который переиздавался вплоть до 1781 г. и явился основным текстом для изучения дифференциального исчисления. В нём, в частности, были сформулированы основные приёмы использования производной (тогда — дифференциалов) для исследования функций, похожие на те, которые изложены в § 9 и 10. Примерно к 1730 г. начала математического анализа становятся уже, скорее, учебным материалом для университетов.

<sup>1</sup> «Следующие предложения достаточны для решения задач с помощью движения».

<sup>2</sup> Полное название: «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которого не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления».



Формулы для дифференцирования тригонометрических функций впервые опубликованы в 1722 г. в работах сторонника Ньютона Роджера Коутса<sup>1</sup> (1682—1716).

Заметной вехой в становлении математического анализа стала своеобразная трилогия Л. Эйлера «Введение в анализ бесконечных» (1748 г.), «Дифференциальное исчисление» (1755 г.), «Интегральное исчисление» (1770 г.). Интересно, что в описаниях и обоснованиях Эйлер чаще близок к точке зрения Ньютона, но в обозначениях и символике следует Лейбницу, основываясь на дифференциалах  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , ... и их отношениях. Вот, например, как описывает Эйлер само дифференциальное исчисление: «...метод определения отношения исчезающих приращений, получаемых какими-либо функциями, когда переменному количеству, функциями которого они являются, даётся исчезающее приращение...» Это, по существу, то же определение, что и приведённое в § 7.

После книг Эйлера и Лагранжа стало ясно, что строгое изложение теории производных и методов дифференцирования должно базироваться на строгой математической теории пределов функций. Такая основа была разработана к середине XIX в. в основном в работах О. Коши (1789—1857) и Б. Больцано (1781—1848) и активно развивалась до начала XX в. К. Вейерштрассом (1815—1897) и др.

Изложение основ математического анализа в XX в. не претерпело принципиальных изменений. Пожалуй, новым стало осознание необходимости предварительного знакомства с началами математического анализа уже в старшей школе. Например, это активно обсуждалось на Всероссийских математических съездах (см. <http://old.mathedu.ru>). В нашей стране основы (или начала) математического анализа вошли в содержание действующих школьных учебников по математике старшей школы в 70-х гг. XX в.

---

<sup>1</sup> Иногда пишут *Kotes*.

# Ответы

## Глава 1

**§ 1.** 1.4. г)  $y_n = 6n$ ; д)  $n^2 - 1$ ; е)  $y_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$ . 1.9. 1), 2), 3). 1.10. 1), 3), 4).

1.11. г) 5, 6, 7, ...; д) 2, 3, 4, ...; е) 5, 6, 7, ... . 1.15. г) 13; д) 4; е) 3.

1.16. в)  $297^2 + 1$ ; г) 90 001. 1.17. а)  $x \leq 1 - \sqrt{5}$ ; б)  $4 - \sqrt{5} \leq x < 5$ ;

в)  $-2 - \sqrt{7} \leq x \leq -2 + \sqrt{7}$ ;  $x = 5$ ; г)  $y = 5x - 6\ln\sqrt{x} + x^2$ ;  $x \geq 3 + \sqrt{2}$ ;  $x = 4$ .

1.17. в)  $\pm \frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{11\pi}{6}$ ,  $\frac{13\pi}{6}$ ; г)  $\pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{5\pi}{6}$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ . 1.19. в)  $x = 5$ ;  $-2 - \sqrt{7} \leq x \leq -2 + \sqrt{7}$ ;

г)  $x = 4$ ;  $x < 3 - \sqrt{2}$ ;  $x > 3 + \sqrt{2}$ . 1.20. в) 1,5; г) 0,5.

**§ 2.** 2.2. г) 2; д) 7; е)  $\frac{4}{3}$ . 2.3. г) 1; д) -2; е) 4. 2.4. г) 8; д) 10; е) -12. 2.5. г) 7;

д) 0; е) -4. 2.8. а) 1; б)  $\frac{3}{8}$ . 2.9. а) 1; б)  $\frac{1}{3}$ . 2.10. г)  $x \geq 2$ ; д)  $x > 2$ ;  $x < -2$ ; е)  $x > 0$ .

2.11. а) -4, 0, 5; г) 0, -4. 2.12. а)  $-\frac{7}{13}$ ; б)  $\frac{17}{25}$ . 2.13. в) 9; г) 4.

**§ 3.** 3.11. г) 0; д) -5; е) 15. 3.12. г) 1; д) 2; е) 3. 3.13. г) 1; д)  $-\frac{4}{3}$ ; е) 28.

3.14. г) -1; д) -3; е) 10. 3.15. г), д), е) 0. 3.17. г)  $1 - \sqrt{2}$ ; д)  $\frac{3 - \sqrt{3}}{6}$ ; е)  $-\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$ .

3.18. г) -2; д) 2,1; е)  $\log_3 4$ . 3.19. г)  $0 < p < 1$ .

**§ 4.** 4.14. г) 0,5; д) -4; е)  $\frac{1}{3}$ . 4.15. г) -0,4; д) 7; е)  $-\frac{1}{7}$ . 4.16. а)  $\frac{1}{8}$ ; б) 8.

4.17. г) 0,75; д) 0,5; е) 0,125. 4.18. а) 1; б) 1. 4.19. г)  $\frac{5}{6}$ ; д)  $\frac{2}{7}$ ; е)  $\frac{1}{4}$ . 4.22. в) 1;

г) -0,8. 4.23. г)  $-1 < p < 1$ .

**§ 5.** 5.8. г) -0,06; д) 1,05; е) 24. 5.9. г)  $-2\Delta x$ ; д)  $(2x + \Delta x)\Delta x$ ; е)  $\frac{2\Delta x}{x(x + \Delta x)}$ .

5.10. г)  $3^x(3^{\Delta x} - 1)$ ; д)  $\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$ ; е)  $2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ . 5.11. г)  $k\Delta x$ ;



д)  $a\Delta x(2x + \Delta x)$ ; е)  $-\frac{a\Delta x}{x(x + \Delta x)}$ . 5.12. г)  $3a + 2b$ ; д)  $3b - 2a$ ; е)  $a - 2b$ . 5.13. г) 8;

д) 8; е)  $-0,5$ . 5.14. г)  $\pm 3$ ,  $\pm \frac{\pi}{3}$ ; д)  $0,5$ ,  $2$ ; е)  $\pm 4$ ,  $\pm \frac{\pi}{2}$ .

**Тест** 1. а). 2. а), г). 3. г). 4. а), б), в). 5.  $-15$ . 6.  $-4$ . 7.  $0,21$ . 8. А — 3, Б — 1, В — 2. 9. а). 10. в).

**Дополнительные задачи** 1. а) 6; б) 4; 5; в) 1; 2; 3; 4; г) 5; 6; 7; ...; д) 4; 5; 6; е) 5. 2. а)  $-2,9$ ; б) таких элементов нет; в)  $-2,9$ ; ...;  $-2,6$ ; г)  $-2,1$ ;  $-2$ ;  $-1,9$ ; д)  $3,9$ ; 4;  $4,1$ ; е) 3;  $3,1$ ;  $3,2$ . 3. а) 1; б)  $0,01$ ; в) 1; г)  $0,01$ ; д)  $0,005$ ; е) таких значений  $r$  нет. 4. а) 1; б) 2; в) 5; г) 11; д) 110; е) 1100. 5. а) 1; б) 0; в)  $0,1$ ; г)  $0,8$ ; д)  $0,6$ ; е)  $0,7$ . 6. а)  $S = 8$ ; б)  $S = -5$ ; в)  $b_1 = 1,4$ ; г)  $b_1 = -3,9$ ; д)  $q = 2 - \sqrt{2}$ ; е)  $q = 0,999$ . 7. а) 1; б) 0; в)  $0,1$ ; г)  $0,8$ ; д)  $0,2$ ; е)  $0,3$ . 8. а) 12; б)  $0,5$ ; в) 7; г)  $0,2$ ; д)  $-15$ ; е) 7. 9. а) 3; б)  $-9$ ; в) 12; г) 4; д)  $-0,5$ ; е) 10. 10. а), б), г), е)  $f$  выше  $g$ ; в) и д)  $g$  выше  $f$ .

## Глава 2

**§ 6** 6.6. г) 6. 6.7. г)  $2t_0$ . 6.12. г)  $-8$ ; д) 1; е) 0. 6.21. а)  $0,7$ ; б)  $-1,5$ . 6.23. а)  $-1\frac{1}{3}$ ; б) 4. 6.24. а) 1; б)  $0,5$ . 6.25.  $\frac{4}{3}$ . 6.26. а)  $\frac{3\pi}{2} \leq p < \frac{5\pi}{2}$ ; б)  $\frac{7\pi}{4} \leq p < \frac{9\pi}{4}$ .

**§ 7** 7.3. в)  $y' = -\frac{4}{3}x$ ; г)  $y' = 2x + 3$ . 7.9. г)  $135^\circ$ ; д)  $30^\circ$ ; е)  $\pi - \arctg \frac{1}{3}$ .

7.11. г)  $x > -\frac{1}{7}$ ; д)  $x < -0,25$ ;  $x > 0,25$ ; е)  $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ . 7.12. г)  $x \leq 0$ ;

д)  $-6 \leq x \leq 6$ ; е)  $-5 \leq x < 0$ ,  $0 < x \leq 5$ . 7.13. а)  $x = 0$ ,  $x = -\frac{2}{3}$ ; б)  $\sqrt[3]{\frac{1}{16}}$ .

7.14. а)  $-\sqrt[3]{0,5}$ ; б) таких значений нет. 7.18. а) 1; б)  $e$ ,  $e^{-2}$ .

**§ 8** 8.1. г)  $-0,75$  и  $-5$ ; д)  $1,261$  и  $12$ ; е)  $-\frac{1}{48}$  и  $-\frac{1}{9}$ . 8.2. г)  $0,996$ ; д)  $0,991$ ;

е)  $3,005$ . 8.3. б)  $0,498$ ; г)  $24,2$ ; е)  $2,55$ . 8.4.  $985 \text{ см}^3$ . 8.9. б)  $-\frac{77}{85}$ ; г)  $\frac{36}{85}$ ; е)  $\frac{84}{13}$ .

8.11. а)  $\pi n$ ,  $\arctg 3 + \pi n$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $-\frac{1}{2}\arctg \frac{1}{2} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**§ 9** 9.8. г)  $y = 12x + 16$ ; д)  $y = \frac{1}{6}x + 1,5$ ; е)  $y = 1 - 0,25x$ .

9.9. в)  $y = -0,25x - 2$ ; г)  $y = 4 - x$ . 9.10. г)  $x = 0$ ; д)  $x = \pm 0,5$ ; е)  $x = 0,25$ .

9.11. г)  $y = -2x - 1$ ; д)  $y = -x$ ,  $y = -x \pm 2$ ; е)  $y = \frac{1}{4}x + 1$ . 9.12. а)  $y = 6x - 9$ ,

$y = -6x - 9$ ; б)  $y = \frac{1}{8}x + 2$ . 9.13. в)  $120^\circ$ ; г)  $\pi - 2\arctg 8$ . 9.14. а)  $p = -0,25$ ;

6)  $p = 0,5$ . 9.15. а)  $p = \pm 0,4$ ; б)  $p = \pm 2$ . 9.16. а)  $\operatorname{tg}^2 \alpha$ ; б)  $-\sin \beta$ . 9.17. в)  $\frac{\pi n}{4}$ ,

$\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ ; г)  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $\frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}$ ,  $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{5}$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ . 9.18. а)  $\frac{\pi}{4} + \pi n$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{1}{2} \arctg(1 \pm \sqrt{6}) + \pi n$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ .

§ 10 10.4. г)  $y' = 2,5x\sqrt{x} - 4x$ ; д)  $y' = 15x^4 + 45x^2$ ; е)  $y' = \frac{7x^3 + 12}{6\sqrt{x}}$ .

10.5. г)  $y' = 8x^3 + 18x^2 - 2x - 3$ ; д)  $y' = 5x^4 - 6x^2 - 3$ ;

е)  $y' = -25x^4 - 34x^3 + 8x^2 + 8$ . 10.6. г)  $y' = \frac{5 + 5x^3}{2x\sqrt{x}}$ ; д)  $y' = \frac{5x^2 + 18}{3x^2}$ ;

е)  $y' = -45x^2 + 24x + 30$ . 10.7. б)  $y' = \frac{4}{(4x-1)^2}$ ; г)  $y' = -\frac{2x}{(x^2-5)^2}$ ;

д)  $y' = -\frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^2}$ . 10.8. б)  $y' = -\frac{16}{(x+2)^2}$ ; г)  $y' = \frac{8x+9}{x^4}$ ;

е)  $y' = \frac{10x-28-4x^2}{(5-4x)^2}$ . 10.9. б)  $y' = -\frac{x+1}{4x\sqrt{x}}$ ; г)  $y' = \frac{1-3x}{2x\sqrt{x}(x-1)^2}$ ;

е)  $y' = \frac{6x\sqrt{x} + 8x + 0,5\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x} + 1)^2}$ . 10.10. г)  $y' = \frac{12x^3 - 9x^2 + 2x + 8}{(3x-1)^2}$ ;

д)  $y' = \frac{14x^2 - 22x + 7}{(2x-1)^2}$ ; е)  $y' = \frac{x^2 + 2x + 5}{(x+1)^2}$ ,  $x \neq 0$ . 10.11. г)  $-12$ ; д)  $21$ ; е)  $-1\frac{5}{9}$ .

10.12. б)  $\frac{5}{12}$ ; д)  $95\frac{15}{16}$ ; е)  $1,25$ . 10.15. г)  $5$ ; д)  $3$ ; е)  $0$ . 10.16. а)  $135^\circ$ ; б)  $45^\circ$ .

10.17. г)  $\pm 2$ ; д)  $1$  и  $3$ ,  $2$ ; е)  $-4 \pm 4\sqrt{3}$ . 10.18. г)  $-1$ ; д)  $\frac{6 \pm \sqrt{3}}{3}$ ; е)  $-1$  и  $3$ .

10.19. г)  $y = 16x - 30$ ; д)  $y = 1,5x - 3,5$ ; е)  $y = 7$ . 10.20. г)  $y = 20 - 12x$ ,

$y = -12x - 12$ ; д)  $y = x + 7$ ; е)  $y = 7x + 20$ ,  $y = 7x - 4$ . 10.21.  $y = 5x - 15$ ,

$y = -5x$ . 10.22.  $y = x + 1$ ,  $y = x - 3$ . 10.23. г)  $x < -6$ ,  $x > 0$ ; д)  $x < -4$ ;  $x > 3$ ;

е)  $0 < x < 3,6$ . 10.24. г)  $x < -5$ ;  $x > 4$ ; д)  $-1 < x < \frac{7}{3}$ ; е)  $x > \frac{3}{4}$ . 10.25. а)  $p = 3,75$ ;

б)  $p = 6$ ,  $p = -2$ . 10.26. в)  $\frac{1}{49}$  и  $343$ ; г)  $2$  и  $512$ . 10.27. в)  $-2 \leq x < -0,5$ ,  $x > -0,5$ ;

г)  $x > 2$ . 10.28. При  $b > -1$ .

§ 11 11.6. г)  $-\frac{2\cos x}{\sin^2 x}$ ; д)  $\frac{\sin^3 x - 1}{\sin^2 x(\cos x - \operatorname{ctg} x)^2}$ ; е)  $-\frac{1}{\cos^2 2x}$ . 11.9. г)  $1$ ; д)  $3,5$ ;

е)  $-1$ . 11.10. г)  $5$ ; д)  $-8$ ; е)  $-2$ . 11.11. г)  $-1$ ; д)  $\frac{13}{16}$ ; е)  $-2$ . 11.12. г)  $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$ ,

$n \in \mathbb{Z}$ ; д)  $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; е)  $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 11.14. г)  $150^\circ$ ; д)  $45^\circ$ ;

е)  $\arctg 2$ . 11.15. а)  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $x = \frac{1}{2} \arctg \frac{1}{2} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

11.19. а) 2, -4; б) 1; -2. 11.20.  $x > 1$ .

**§ 12** 12.3. р)  $-\frac{6}{(2x-3)^2}$ ; д)  $\frac{3}{(2-x\sqrt{3})^2}$ ; е)  $\frac{3}{(0,3x+8)^2}$ . 12.4. б)  $-\frac{5}{2\sqrt{6-5x}}$ ;

г)  $\frac{4}{\sqrt{15(9+8x)}}$ ; е)  $\frac{3}{(2-x\sqrt{3})^2}$ . 12.7. г)  $-2\sin 2x$ ; д)  $-\frac{1}{2}\sin \frac{x}{2}$ ; е)  $2\cos 2x$ . 12.8. р) 4;

д) 6; е) -0,4. 12.9. в) -6; г) -5. 12.10. в)  $y = 4 - x$ ; г)  $y = 2x + 1 - \frac{\pi}{4}$ .

12.11. в)  $y = 31 - 15x$ ,  $y = 35 - 15x$ ; г)  $y = x + 2$ . 12.12. г)  $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$ ,

$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; д) 0,  $\frac{4}{9}$ ; е)  $\frac{1}{3}$ . 12.13. а)  $y = \frac{1}{8}x + 2,5$ ; б)  $y = 4x - 3$ ,

$y = -12x - 3$ . 12.14. а)  $\frac{3\pi}{4}$ ,  $\pi$ ; б)  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$ ,  $\frac{3\pi}{2}$ . 12.16. а)  $2 \leq x < 2,75$ ;  $x \geq 4$ ;

б)  $1 < x < \sqrt[4]{2}$ ;  $x > 3$ . 12.18. в) 3; г) 1.

**§ 13** 13.8. р)  $10x^4 + 12x^3 - 3x^2 - 6x$ ; д)  $\frac{x^4 + 16x^3 - 10x^2 - 8x}{2\sqrt{x+2}}$ ;

е)  $\frac{-2x^4 + 12x^3 + 2x - 3}{(2x^3 + 1)^2}$ . 13.9. р)  $-50(3 - 5x)^9$ ; д)  $-5\left(2 - \frac{x}{3}\right)^{14}$ ; е)  $-\frac{48}{(2x-5)^7}$ .

13.4. р)  $-15(3 - 5x)^2$ ; д)  $\left(\frac{x}{7} + 9\right)^6$ ; е)  $\frac{4}{(2x-5)^6}$ . 13.13. р) -1; д)  $\frac{2}{3}$ ; е) 33.

13.14. р)  $135^\circ$ ; е)  $45^\circ$ . 13.15. г)  $y = -12x$ ; д)  $y = -\frac{1}{4}(3x - 19)$ ; е)  $y = \frac{1}{16}(x + 26)$ .

13.16. а)  $y = 2x - 2$ ; б)  $y = -3x - 2$ . 13.17. г) 0, 0,6; д)  $-\frac{19}{8}$ ; е)  $\frac{1}{8}$ .

13.18. г)  $-\frac{3}{4} < x < 0$ ;  $x > 0$ ; д) нет решений; е)  $x \geq 6,25$ . 13.19. а)  $y = -3x$ ;

б)  $y = \pm \frac{2}{9}x$ . 13.20. р) 1; д) 2; е) 0. 13.21. в) 2; г) 5,  $\frac{1}{5}$ . 13.22. в)  $x < -3$ ;

$-3 < x \leq -2$ ; г)  $x > \frac{1}{3}$ .

**§ 14** 14.4. р)  $e^x(3 - 4x)$ ; д)  $e^{x-1}(0,2x+1)^4(0,2x+2)$ ; е)  $-\frac{e^{4-3x}(3x+4)}{x^5}$ .

14.5. р)  $e^{-x}(3\cos 3x - \sin 3x)$ ; д)  $e^{5x+3}\left(5\cos \frac{x}{3} - \frac{1}{3}\sin \frac{x}{3}\right)$ ; е)  $e^{2x}\left(2\operatorname{ctg} \frac{x}{5} - \frac{1}{5\sin^2 \frac{x}{5}}\right)$ .

$$14.7. \text{ r) } -(0,5^{3x+2} \ln 8 + 3x^2); \text{ д) } 3 \cdot 10^{3x}(1 + 3x \ln 10); \text{ e) } -\left(\frac{5}{6}\right)^x (5 + (3 - 5x) \ln 1,2).$$

$$14.8. \text{ r) } e^{-4}; \text{ д) } -2; \text{ e) } \frac{4}{3}e. \quad 14.9. \text{ r) } 1; \text{ д) } \frac{8}{3}e^2; \text{ e) } 1. \quad 14.10. \text{ r) } 2e - 1; \text{ д) } 4,5 \ln \frac{2}{3}; \text{ e) } \frac{2}{3}.$$

$$14.11. \text{ r) } e - 13; \text{ д) } -1; \text{ e) } e - 3. \quad 14.12. \text{ r) } 135^\circ; \text{ д) } 60^\circ; \text{ e) } 0^\circ. \quad 14.13. \text{ r) } y = 1 - x;$$

$$\text{д) } y = 0,2; \text{ e) } y = 2x \ln 5 + (1 - \ln 5). \quad 14.14. y = 3xe^5. \quad 14.17. \text{ б) } -\frac{1}{x \ln 2}; \text{ r) } -\frac{2 \ln 5}{x \ln^2 x};$$

$$\text{e) } \frac{\lg x - (\ln 10)^{-1}}{\lg^2 x}. \quad 14.18. \text{ в) } \frac{2}{(2x - 3) \ln 5}; \text{ r) } -\frac{3}{(3x - 2) \ln 3}. \quad 14.19. \text{ а) } \frac{2 \ln x}{x}; \text{ б) } \frac{3 \ln^2 x}{x};$$

$$\text{в) } \frac{4 \ln^3 x}{x}; \text{ r) } \frac{5 \ln^4 x}{x}. \quad 14.20. \text{ r) } \frac{1}{8}(1 - \ln 2); \text{ д) } \frac{1}{\ln 10}; \text{ e) } \frac{3}{\ln 2}. \quad 14.21. \text{ а) } (8; 2);$$

$$\text{б) } (3; \sqrt{3} \ln 3). \quad 14.22. \text{ r) } y = \frac{x - 1}{\ln 10}; \text{ д) } y = x - 1; \text{ e) } y = 1 - 5x. \quad 14.23. \text{ а) } x = 2;$$

$$\text{б) } y = 9x \ln 5 + 8,5. \quad 14.24. \text{ а) } y = x; \text{ б) } y = \frac{4}{e^2}x. \quad 14.25. \text{ а) } p = \frac{1}{3}, \text{ б) } p = -1.$$

$$14.26. 12\%. \quad 14.27. k = 0; \pm \frac{1}{4}. \quad 14.28. \text{ а) } \frac{1}{4} \leq p \leq \frac{13}{12};$$

$$\text{б) } -3 \leq p \leq -2\sqrt{2}; 2\sqrt{2} \leq p \leq 3.$$

**Тест** 1. 5. 2. 16. 3. в). 4. а). 5. б). 6. 4. 7. а). 8. 1, 2. 9. р). 10.  $y = 0,25 + \ln 2$ .

**Дополнительные задачи** 5. а), в), д), е) Необходимы; б), г) нет. 6. б)—д) Необходимы; а), е) нет. 7. в)—е) Необходимы; а), б) нет. 8. а), г), д) Необходимы; б), в), е) нет. 9. а), б), г) Достаточны; в), д), е) нет. 10. а), б), д) Необходимы, но не достаточны; г) достаточно, но необходимо; в), е) эквивалентны условию А. 14. в), г) Являются решением; а), б), д), е) не являются решением.

### Глава 3

**§ 15** 15.15. г) Убывает на  $(-\infty; -1]$ , возрастает на  $[-1; +\infty)$ ; д) убывает на  $[0; 4]$ , возрастает на  $(-\infty; 0]$ ,  $(4; +\infty)$ ; е) убывает на  $(-\infty; -1]$ ,  $[0; 1]$ , возрастает на  $[-1; 0]$ ,  $[1; +\infty)$ . 15.16. г) Убывает на  $\left[-2; \frac{2}{3}\right]$ , возрастает на  $(-; -2]$  и на

$\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$ ; д) убывает на  $(-\infty; -3]$ ,  $[0; 2]$ , возрастает на  $[-3; 0]$ ,  $[2; +\infty)$ ; е) убывает на  $[-3; -1]$ ,  $[1; 3]$ , возрастает на  $(-\infty; -3]$ ,  $[-1; 1]$ ,  $[3; +\infty)$ . 15.17. г) Возрастает на  $(-\infty; -1)$ , убывает на  $(-1; +\infty)$ ; д) убывает на  $(-\infty; -\sqrt{2}]$ ,  $[\sqrt{2}; +\infty)$ , возрастает на  $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ ; е) убывает на  $(-\infty; -\frac{1}{2}]$ , возрастает на  $[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}]$  и на  $(-\frac{1}{3}; +\infty)$ .



15.18. в) Убывает на  $(-\infty; 1,5]$ ; г) убывает на  $\left[2\frac{35}{36}; 3\right]$ , возрастает на  $\left(-\infty; 2\frac{35}{36}\right]$ .

15.19. в) Возрастает на  $(-\infty; +\infty)$ ; г) убывает на  $(-1; 0]$ , возрастает на  $[0; +\infty)$ .

15.20. г) возрастает на  $(0; e]$ , убывает на  $[e; +\infty)$ ; д) возрастает на  $(-\infty; 0)$  и на  $\left[\frac{2}{\ln 2}; +\infty\right)$ , убывает на  $\left[0; \frac{2}{\ln 2}\right]$ ; е) возрастает на  $[-3; 1]$  убывает на  $[1; 5)$ .

15.21. а), г) Возрастает на  $[0; +\infty)$ ; б), в) убывает на  $[0; +\infty)$ . 15.22. в)  $p \geq 0$ ; г)  $-3 \leq p \leq 3$ . 15.23. в)  $p \geq 0$ ; г)  $p \leq 0$ . 15.24. а)  $-2$ ; б)  $2$ . 15.25. а)  $p < -0,5$ ,  $p \geq 3,5$ ; б)  $p \leq -1,5$ ,  $p \geq 1,5$ . 15.26. а), г)  $2$ ; б), в), д), е)  $1$ . 15.27. а), б)  $2$ .

15.28. а), б)  $0$ . 15.29. а)  $1$ ; б)  $1$ . 15.30. б)  $0$ ,  $1$ . 15.31. г)  $2\sqrt{2}$ ; д)  $4$ ; е)  $\frac{1}{3}$ ,  $27$ .

15.32. в)  $x \geq 1$ ; г)  $-1 \leq x \leq 0$ . 15.33. а)  $a < b$ ; б)  $a > b$ .

**§ 16** 16.6. г)  $x = \frac{7}{6}$  — точка максимума; д)  $x = -4$  — точка максимума,

$x = 2$  — точка минимума; е)  $x = 0$  — точка максимума,  $x = -\sqrt{2}$ ,  $x = \sqrt{2}$  — точки минимума. 16.7. г) Точек экстремума нет; д)  $x = -7$  — точка максимума,  $x = 7$  — точка минимума; е)  $x = -6$  — точка максимума,  $x = 6$  — точка минимума.

16.8. г)  $x = 5$  — точка минимума; д) точек экстремума нет; е)  $x = 7$  — точка минимума. 16.9. г)  $x = 2$  — точка максимума,  $x = 3,5$  — точка минимума;

д)  $x = 3$  — точка минимума; е)  $x = -1$  — точка максимума,  $x = 1$  — точка минимума. 16.10. г)  $x = 0$  — точка максимума,  $x = \ln 2,5$  — точка минимума;

д)  $x = 1$  — точка максимума,  $x = 5$  — точка минимума; е)  $x = 1,5$  — точка минимума. 16.11. в)  $x = \frac{\pi}{3}$ ,  $x = \frac{7\pi}{3}$  — точки максимума,  $x = \frac{4\pi}{3}$  — точка минимума;

г)  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $x = \frac{5\pi}{4}$ ,  $x = \frac{9\pi}{4}$  — точки максимума,  $x = \frac{3\pi}{4}$ ,  $x = \frac{7\pi}{4}$  — точки минимума.

16.12. а)  $x = \frac{5\pi}{4}$  — точка максимума,  $x = \frac{\pi}{4}$  — точка минимума;

функция возрастает на  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$ , убывает на  $\left[-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}\right]$ ,  $\left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$ . б)  $x = -\frac{\pi}{4}$  —

точка максимума,  $x = -\frac{3\pi}{4}$  — точка минимума; функция возрастает на  $\left[-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$ ,

убывает на  $\left[-\frac{5\pi}{4}; -\frac{3\pi}{4}\right]$ ,  $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$ . 16.13. в)  $x = -1$  — точка минимума, функция

убывает на  $(-\infty; -1]$ , возрастает на  $[-1; +\infty)$ ; г)  $x = 1$  — точка минимума, функция убывает на  $(0; 1]$ , возрастает на  $[1; +\infty)$  и на  $(-\infty; 0)$ . 16.14. г)  $x = -1$  — точка максимума,  $x = -3$ ,  $1$  — точки минимума; д)  $x = \pm 1$  — точки максимума,

$x = 0, \pm\sqrt{3}$  — точки минимума; е)  $x = \pm 2$  — точки максимума,  $x = 0$  — точка минимума. 16.15. г)  $x = -2$  — точка максимума,  $x = 0$  — точка минимума;

д)  $x = -\frac{1}{3}$  — точка минимума; е)  $x = 2$  — точка минимума, функция убывает

на  $(0; 2]$ , возрастает на  $[2; +\infty)$  и на  $(-\infty; 0)$ . **16.16.** а)  $x = 1$  — точка минимума, функция убывает на  $(0; 1]$ , возрастает на  $[1; +\infty)$ ; б)  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  — точка максимума,

$x = 1$  — точка минимума, функция убывает на  $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$ , возрастает на  $\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  и на  $[1; +\infty)$ . **16.17.** а)  $-5 < p < -1$ ;  $1 < p < 5$ ; б)  $p < -5$ ;  $p > 5$ ; г)  $-1 < p < 1$ . **16.19.** д) 23; е)  $-0,296$ . **16.20.** г)  $[-9; 2]$ ; д)  $\left[-3; 4\frac{9}{16}\right]$ . **16.21.** г) 1; д) 32; е) 1.

**§ 17** **17.11.** а)  $p < 2$ ,  $p > 6$ ; б)  $p < -1$ . **17.13.** а) 0,  $\pm 2\sqrt{2}$ ; б) нет корней; в)  $\pm \frac{\pi}{2}$ ,  $\pm 4$ ; г) 1, 8,  $\pi$ ,  $2\pi$ . **17.14.** а)  $\frac{2}{3}$ ; б)  $-\frac{2}{11}$ ; в)  $\frac{5}{8}$ ; г) 4. **17.15.** в) 1; г)  $\frac{-\sqrt{3}+1}{2}$ . **17.16.** а)  $-2 \leq x \leq 4$ ; б)  $x \leq -1$ ;  $x \geq 4$ .

**§ 18** **18.5.** г)  $-1$  и  $19$ ; д)  $-93$  и  $-1$ ; е)  $15$  и  $499$ . **18.6.** г)  $-139$  и  $-11$ ; д)  $5$  и  $21$ ; е)  $-11$  и  $21$ . **18.7.** г)  $-95$  и  $4$ ; д)  $-7$  и  $121$ ; е)  $-124$  и  $4$ . **18.8.** г)  $8$  и  $12$ ; д)  $8$  и  $12$ ; е)  $-8$  и  $-4$ . **18.9.** г)  $2$  и  $3\frac{1}{3}$ ; д)  $3,4$  и  $9$ ; е)  $-13$  и  $-1$ . **18.10.** а)  $1\frac{2}{9}$  и  $1\frac{2}{5}$ ; б)  $1\frac{11}{16}$  и  $2\frac{4}{7}$ . **18.11.** г)  $0$  и  $4e^2$ ; д)  $3 - 3\ln 3$  и  $e^2 - 6$ ; е)  $1$  и  $4 - \ln 4$ . **18.12.** г)  $\left[1 + \frac{\pi}{2}; 1 + \frac{5\pi}{2}\right]$ ;

е)  $\left[1 + \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$ . **18.13.** г) 4; д) 625; е) 2. **18.14.** г)  $y_{\text{наиб}} = -2$ ; д)  $y_{\text{наим}} = -\frac{6\sqrt{3}}{5}$ ;

е)  $y_{\text{наиб}} = 2,25$ . **18.15.** г)  $y_{\text{наим}} = 4$ ; д)  $y_{\text{наим}} = -1$ ; е)  $y_{\text{наим}} = 15$ ;  $y_{\text{наиб}} = 19$ . **18.16.** а) 4; б) 4. **18.17.** а)  $-2$ ; б)  $-8$ ; в)  $-2,25$ ; г)  $-8$ . **18.18.** а)  $\{0; 1\}$ ;

б)  $(-\infty; -2,5]$ ; в)  $\left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ ; г)  $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$ . **18.19.** а) 9; б) 15. **18.20.** в)  $(1; 6)$ ;

г)  $(10; 7)$ . **18.21.** в)  $x \leq -\frac{1}{3}$ ;  $x \geq 0$ ; г)  $\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3}$ . **18.22.** а) Нет; б), в), г) да.

**18.23.** в) 8; г) 5.

**§ 19** **19.1.** а) 0,5; б)  $\frac{1}{3}$ . **19.2.** а)  $60 = 30 + 30$ ; б)  $16 = 8 + 8$ .

**19.3.** а)  $18 = 17 + 1$ ; б)  $6 = 3 + 3$ . **19.4.** а) 3; б) 5. **19.5.** а)  $(4; 2)$ ; б)  $(1; 1)$ .

**19.6.** а) Все стороны по 9 см; б) все стороны по 4 см. **19.7.**  $8 \times 4$  м.

**19.8.** По 7,5 см. **19.9.** 120 м. **19.10.** а)  $108 \text{ см}^2$ ; б)  $60 \text{ см}^2$ . **19.11.**  $2 \times 2 \times 2$  м.

**19.12.**  $3\sqrt{3}$ . **19.13.**  $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ . **19.14.** 1. **19.15.**  $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ . **19.16.** Радиус и высота по 2.

**19.17.**  $\frac{20\sqrt{3}}{3}$ . **19.18.** а) 34; б) 120. **19.19.** Сторона основания  $\frac{10\sqrt{2}}{3}$  см, высота

$66\frac{2}{3}$  см. **19.20.** 1,5 ч. **19.21.** в)  $(2; -1)$ ; г)  $(3; 1)$ . **19.22.** в)  $x \geq 2\frac{2}{3}$ ; г)  $-\frac{1}{3} < x \leq 0$ .

19.23. в) 14; г) 7. 19.24. г)  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$ ;  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ;  $n \in \mathbb{Z}$ ; д)  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$ ;  
 $x = \frac{\pi n}{5}$ ; е)  $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi n$ ;  $x = \frac{7\pi}{12} + 2\pi n$ .

**Тест** 1. 6. 2. 2. 3. б), в). 4. 3. 5. 1. 6. б). 7. б). 8. 9. 9. в). 10. г).

**Дополнительные задачи** 1. а) 1; б) 0,5; в)  $y = \frac{x+1}{2}$ ; г) (0; 0,5); д) (-1; 0);

е) 2. 2. а) 2; б) 0,25; в)  $y = \frac{x}{4} + 1$ ; г) (0; 1); д) (-4; 0); е) 8. 3. а)  $\sqrt{a}$ ; б)  $\frac{1}{2\sqrt{a}}$ ;

в)  $y = \frac{x+a}{2\sqrt{a}}$ ; г)  $(-a; 0)$ ; е) прямая, проходящая через точки  $(-a; 0)$  и  $(a; \sqrt{a})$ .

4. а)  $e^2$ ; б)  $e^2$ ; в)  $y = e^2(x-1)$ ; г) (0;  $-e^2$ ); д) (1; 0); е) 1. 5. а)  $e^a$ ; б)  $e^a$ ;

в)  $y = e^a(x-a+1)$ ; г)  $(a-1; 0)$ ; е) прямая через точки  $(a-1; 0)$  и  $(a; e^a)$ .

## Числовые последовательности

Последовательность  $(y_n)$  называют **ограниченной сверху**, если существует число  $M$  такое, что для любого  $n$  выполняется неравенство  $y_n \leq M$ . Число  $M$  называют **верхней границей** последовательности.

Последовательность  $(y_n)$  называют **ограниченной снизу**, если существует число  $m$  такое, что для любого  $n$  выполняется неравенство  $y_n \geq m$ . Число  $m$  называют **нижней границей** последовательности.

Если последовательность ограничена и снизу, и сверху, её называют **ограниченной последовательностью**.

Число  $b$  называют **пределом последовательности  $(x_n)$** , если в любой окрестности точки  $b$  содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера. Если последовательность имеет предел, то её называют **сходящейся**; если последовательность не имеет предела, то говорят, что последовательность **расходится**.

Если  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = c$ , то

1) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = b + c;$$

2) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = bc;$$



3) предел частного равен частному пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{b}{c}, \quad c \neq 0;$$

4) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (kx_n) = kb.$$

## Предел функции

Равенство  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  означает следующее: если значения аргумента  $x$  приближаются к значению  $x = a$ , то соответствующие значения функции приближаются к предельному значению  $b$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Равенство  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$  означает следующее: у графика функции  $y = f(x)$  имеется горизонтальная асимптота  $y = b$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^r} = 0 \quad (r > 0)$$

Если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ , то:

1)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b + c$ ;

2)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = b \cdot c$ ;

3)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$  (при условии, что  $c \neq 0$ );

4)  $\lim_{x \rightarrow a} kf(x) = kb$ .

Функцию  $y = f(x)$  называют непрерывной в точке  $x = a$ , если предел функции  $y = f(x)$  при стремлении  $x$  к  $a$  равен значению функции в точке  $a$ , т. е. если выполняется соотношение

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Если выражение  $f(x)$  составлено с помощью алгебраических операций из рациональных, иррациональных, тригонометрических, обратных тригонометрических, показательных, логарифмических выражений, то функция  $y = f(x)$  непрерывна в любой точке, в которой определено выражение  $f(x)$ .

## Производная

Если функция  $y = f(x)$  определена в точках  $x_0$  и  $x$ , то разность  $x - x_0$  называют **приращением аргумента** и обозначают  $\Delta x$ , а разность  $f(x) - f(x_0)$  называют **приращением функции** и обозначают  $\Delta y$ .

Производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  — это  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ; обозначение:  $f'(x_0)$ .

### Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$

1. Зафиксировать значение  $x$ , найти  $f(x)$ .
2. Дать аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , перейти в новую точку  $x + \Delta x$ , найти  $f(x + \Delta x)$ .
3. Найти приращение функции:  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .
4. Составить отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .
5. Вычислить  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

**Физический смысл производной** состоит в следующем: если  $s = s(t)$  — закон прямолинейного движения, то производная  $s'(t)$  выражает мгновенную скорость в момент времени  $t$  ( $v(t) = s'(t)$ ).

**Геометрический смысл производной** состоит в следующем: если к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x = a$  можно провести касательную, непараллельную оси ординат, то производная  $f'(a)$  выражает угловой коэффициент касательной ( $k_{\text{кас}} = f'(a)$ ).

### Алгоритм составления уравнения касательной к графику функции $y = f(x)$

1. Обозначить абсциссу точки касания буквой  $a$ .
2. Вычислить  $f(a)$ .

3. Найти  $f'(a)$ .

4. Подставить найденные числа  $a$ ,  $f(a)$ ,  $f'(a)$  в формулу

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

### Правила дифференцирования

$$(ay + bz)' = ay' + bz'$$

$$(yz)' = y'z + yz'$$

$$\left(\frac{y}{z}\right)' = \frac{y'z - yz'}{z^2}$$

$$(f(kx + m))' = kf'(kx + m)$$

### Формулы дифференцирования

$$(C)' = 0$$

$$(kx + m)' = k$$

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

### Исследование функций

Если во всех точках открытого промежутка  $X$  выполняется неравенство  $f'(x) \geq 0$  (причём равенство  $f'(x) = 0$  либо не выполняется,



либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция  $y = f(x)$  возрастает на промежутке  $X$ .

Если во всех точках открытого промежутка  $X$  выполняется неравенство  $f'(x) \leq 0$  (причём равенство  $f'(x) = 0$  либо не выполняется, либо выполняется лишь в конечном множестве точек), то функция  $y = f(x)$  убывает на промежутке  $X$ .

Точку  $x_0$  называют **точкой минимума** функции  $y = f(x)$ , если у этой точки существует окрестность, для всех точек  $x \neq x_0$  которой выполняется неравенство  $f(x) > f(x_0)$ . Значение функции в точке минимума обозначают  $y_{\min}$ .

Точку  $x_0$  называют **точкой максимума** функции  $y = f(x)$ , если у этой точки существует окрестность, для всех точек  $x \neq x_0$  которой выполняется неравенство  $f(x) < f(x_0)$ . Значение функции в точке максимума обозначают  $y_{\max}$ .

Если функция  $y = f(x)$  имеет экстремум в точке  $x_0$ , то в этой точке производная функции либо равна нулю (стационарная точка), либо не существует (критическая точка).

Пусть функция  $y = f(x)$  непрерывна на промежутке  $X$  и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку  $x = x_0$ . Тогда:

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при  $x < x_0$  выполняется неравенство  $f'(x) < 0$ , а при  $x > x_0$  — неравенство  $f'(x) > 0$ , то  $x = x_0$  — точка минимума функции  $y = f(x)$ ;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при  $x < x_0$  выполняется неравенство  $f'(x) > 0$ , а при  $x > x_0$  — неравенство  $f'(x) < 0$ , то  $x = x_0$  — точка максимума функции  $y = f(x)$ ;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что и слева, и справа от точки  $x_0$  знаки производной одинаковы, то в точке  $x_0$  экстремума нет.

### **Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы**

1. Найти производную  $f'(x)$ .
2. Найти стационарные ( $f'(x) = 0$ ) и критические ( $f'(x)$  не существует) точки функции  $y = f(x)$ .
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной внутри получившихся промежутков.



4. Сделать выводы о монотонности функции и о её точках экстремума.

Непрерывная функция на отрезке достигает своих наименьшего и наибольшего значений либо в концевой точке отрезка, либо в стационарной или критической внутренней точке отрезка.

Если функция  $y = f(x)$  непрерывна на промежутке  $X$  и имеет внутри промежутка единственную стационарную или критическую точку  $x = x_0$ , то:

— если  $x_0$  — точка минимума, то  $f(x_0)$  — наименьшее значение функции на этом промежутке;

— если  $x_0$  — точка максимума, то  $f(x_0)$  — наибольшее значение функции на этом промежутке.

**Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a; b]$**

1. Найти производную  $f'(x)$ .

2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка  $[a; b]$ .

3. Вычислить значения функции  $y = f(x)$  в точках, отобранных на втором шаге, и в точках  $a$  и  $b$ ; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет  $y_{\text{наим}}$ ) и наибольшее (это будет  $y_{\text{наиб}}$ ).

# Оглавление

<b>Глава 1. Элементы теории пределов</b>	<b>5</b>
§ 1. Предел числовой последовательности	5
§ 2. Арифметические операции над пределами числовых последовательностей	15
§ 3. Предел функции на бесконечности	22
§ 4. Предел функции в точке	32
§ 5. Приращение аргумента. Приращение функции	43
Итак, в главе 1	48
Вопросы	48
Тест	49
Дополнительные задачи	51
Из истории математики	54
<b>Глава 2. Производная</b>	<b>57</b>
§ 6. Определение производной	57
§ 7. Алгоритм нахождения производной	70
§ 8. Дифференцируемые функции	77
§ 9. Уравнение касательной к графику функции	85
§ 10. Арифметические операции над производными	95
§ 11. Дифференцирование тригонометрических функций	104
§ 12. Дифференцирование функций вида $y = f(kx + m)$	112
§ 13. Дифференцирование степенных функций	118
§ 14. Дифференцирование показательных и логарифмических функций	126
Итак, в главе 2	137
Вопросы	137
Тест	138
Дополнительные задачи	140
<b>Глава 3. Исследование функций с помощью производной</b>	<b>145</b>
§ 15. Исследование функций на монотонность	145
§ 16. Исследование функций на экстремум	157
§ 17. О построении графиков функций	169

§ 18. Нахождение наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции на промежутке . . . . .	179
§ 19. Задачи на нахождение наименьших и наибольших значений величин . . . . .	189
Итак, в главе 3 . . . . .	197
Вопросы . . . . .	197
Тест . . . . .	198
Дополнительные задачи . . . . .	200
Из истории математики . . . . .	204
Ответы . . . . .	207
Справочные материалы . . . . .	215

*Учебное издание*

**Мордкович Александр Григорьевич,  
Семенов Павел Владимирович,  
Александрова Лидия Александровна,  
Мардахаева Елена Львовна**

**Математика: алгебра и начала математического анализа,  
геометрия. Алгебра и начала математического анализа**

Базовый уровень

**11 класс**

**В 2 частях**

**Часть 1**

Редактор *С. В. Бахтина*

Художественное оформление *А. А. Павлов*

Внешнее оформление *В. А. Андрианов*

Фотографии: «Фотобанк Лори»

Компьютерная вёрстка *А. А. Павлов*

Корректор *О. Ч. Кохановская*



Подписано в печать 30.06.2020. Формат 70×90/16  
Гарнитура SchoolBookSanPin. Печать цифровая  
Бумага офсетная № 1. Усл. печ. л. 16,38. Тираж 700 экз. Заказ № 61007СМ.

ООО «БИНОМ. Лаборатория знаний»  
127473, Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,  
тел. (495)181-53-44, e-mail: binom@blbz.ru, <http://www.Lbz.ru>

Приобрести книги издательства  
**«БИНОМ. Лаборатория знаний»**  
можно в магазине по адресу:  
Москва, ул. Краснопролетарская, д. 16, стр. 3,  
тел. (495)181-60-77, e-mail: shop@blbz.ru  
Время работы: вторник — суббота с 9 до 19 часов

Заявки на оптовые заказы принимаются  
Коммерческим департаментом издательства:  
тел. (495)181-53-44, доб. 271, 511, e-mail: sales@blbz.ru

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»  
АО «Издательство «Высшая школа». Российская Федерация,  
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.  
Тел.: +7(4812) 31-11-96. Факс: +7(4812) 31-31-70.  
E-mail: spk@smolpk.ru <http://www.smolpk.ru>



**СОСТАВ УМК «МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ.  
АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА»**

**АЛГЕБРА. 7—9 классы.**

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.  
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ. 10—11 классы.**

Примерные рабочие программы.

Авторы: А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.  
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ. 10—11 классы.**

Методические пособия для учителя.

Авторы: А. Г. Мордкович, П. В. Семенов

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.  
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ. 10—11 классы. В двух частях.**

Учебные издания для общеобразовательных организаций.

Авторы: А. Г. Мордкович, П. В. Семенов, Л. А. Александрова,  
Е. Л. Мардахаева

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.  
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ. 10 класс.**

Контрольные работы.

Автор: Е. Л. Мардахаева

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.  
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ. 11 класс.**

Контрольные работы.

Автор: М. В. Шуркова

ISBN 978-5-9963-6378-0

