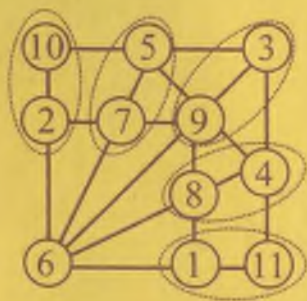


Чулков П.В.

МАТЕМАТИКА

*Задачи на развитие
математического мышления
с решениями и ответами*



5-6
КЛАССЫ

Ф.А. Пчелинцев, П.В. Чулков

Математика

5-6 класс

**Уроки математического
мышления с решениями и ответами**

Москва

Рецензент -
учитель с.ш. №40 ЦАО Москвы
Л.Е. Федулкин.

Пчелинцев Ф.А., Чулков П.В.

Математика. 5-6 класс. Уроки математического мышления
с решениями и ответами. 2 изд. испр. –
М.: «Издат-школа 2000» – 112 с.

Пособие для самообразования. В книге собраны более 300 задач, направленных на развитие логики и математического мышления, доступных для учащихся 5-6 классов. Сборник может быть использован при подготовке к олимпиадам, а также для организации внеклассной и внешкольной работы.

ISBN 5-93291-054-2

ЛР № 066243 от 25.12.1998 г. Подписано в печать 07.04.2000 г.
формат 60 x 90 1/16 тираж 5 000 экз. Заказ № 58
ООО «Издат-школа 2000» 123100, г. Москва, Шмитовский пр., д.2.
Отпечатано в ООО "Фирма Пандора 1" Министерства РФ по делам печати,
телерадиовещанию и средств массовой коммуникации.
107143, г. Москва, Открытое шоссе, д.28

ISBN 5-93291-054-2

© Чулков П.В., Пчелинцев Ф.А.
© ООО «Издат-школа 2000»

Предисловие

В книге собрано более 300 задач, направленных на развитие логики и сообразительности, интуиции, пространственного воображения – всего того, что обычно называется математическим мышлением. Тематика традиционна – это задачи на натуральные числа, дроби и проценты, математические игры, движение, а также логические задачи и многое другое. Наш опыт преподавания в школе подсказывает, что именно при решении таких задач мозг учится работать эффективнее, и удивительнее всего то, что и задачи других типов («обычная математика») начинают «даваться легче». Способности к математике распространены значительно в большей степени, чем обычно думают – во всяком случае большинство школьников может успешно осваивать школьную программу. И решение задач (в том числе и занимательных) должно занять главное, а не второстепенное место в обучении.

На кого рассчитана эта книга? Прежде всего, на учащихся 5–6 классов, тех, кто любит решать нестандартные математические задачи, а также и тех, кто пока не знает, любит ли он это делать, так как ... никогда этого не делал. Мы также надеемся, что и старшеклассники найдут в ней немало интересного. Напомним, что цель изучения математики в школе – не «усвоение» неизвестно откуда взявшихся «правил», а развитие мышления. Такой подход к решению задач может доставить много удовольствия, как школьникам, так и их родителям. А удовольствие, полученное от решения задач, поможет преодолеть неуверенность в своих силах.

О структуре книги. Каждая глава (кроме первой и последней) – это отдельный урок, посвященный одной теме (10 задач), плюс еще 5 задач на повторение тем, предыдущих уроков, за исключением первой главы, носящей фактически вводный характер, и последней, где представлены 90 дополнительных задач. Решения и ответы к задачам расположены не в конце сборника, а в конце каждой главы, что на наш взгляд существенно облегчает пользование книгой.

Список литературы для дальнейшего чтения, представлен в конце книги. При желании этот список можно было бы легко расширить.

В заключение заметим, что большинство задач, представленных в этой книге прожили долгую жизнь, а классика, как известно, обладает способностью не стареть. Надеемся, что и Вы испытаете при их решении несколько приятных минут.

Математики, упомянутые в тексте

Алкуин – уроженец Йорка (Англия), ученый, монах, советник императора франков Карла Великого, предполагаемый автор одного из самых ранних (VIII век) сборников занимательных задач «*Progsitionis ad acuendos juvenes*». («Предложения для изощрения ума юношества»)

Лойд С. – классик жанра занимательной математики, работал в США в конце XIX – начале XX века. Прославился также как составитель шахматных задач.

Дьюдени Г. – талантливый математик – самоучка. Автор сборников занимательных задач, изданных в Англии начала XX века.

Литлвуд Дж. – современный английский математик, автор классических работ по математическому анализу и теории функций.

К. – Ф. Гаусс – величайший немецкий математик XIX века, оставивший глубокий след в алгебре и теории чисел, геометрии, анализе, астрономии и других областях математики и физики.

Л. Эйлер – швейцарский математик, большую часть жизни проработавший в России. Один из крупнейших математиков XVIII века.



Внимательно читайте условие задачи!

Этот совет полезен, если задача кажется слишком простой или, наоборот, слишком сложной. Ключ к разгадке часто скрыт в одном двух словах, на которые Вы просто не обратили внимания...

1. *В детстве* любят загадывать загадки. Вот одна из типичных детских загадок: можете ли Вы с трех раз разбить трехлитровую банку с водой об асфальт?
2. *Сколько лет капитану?* Представьте себе, что Вы капитан парохода. Ранним августовским утром вы отправляетесь в рейс по маршруту *Астрахань–Москва*. В трюме парохода – 200 тонн арбузов, 33 центнера рыбы и 499 центнеров помидоров. Сколько лет капитану?
3. *В зоомагазине.* «Ручаюсь, – сказал продавец, – что этот попугай будет повторять каждое услышанное им слово». Обрадованный покупатель приобрел чудо – птицу, но придя домой, обнаружил, что попугай «нем как рыба». Тем не менее, продавец не лгал. Как это могло быть?
4. *Какое слово* из одиннадцати букв все отличники пишут неправильно?
5. *От старта до финиша* на одинаковых расстояниях друг от друга расставлены флажки. Спортсмен пробегает расстояние от первого флажка до восьмого за 8 секунд. За какое время он добегит до двенадцатого флажка?
6. *Точки на прямой.* Если на прямой через равные промежутки поставить 10 точек, то они займут отрезок длины s , если же 100 точек, то отрезок длины S . Во сколько раз S больше s ? a
7. *Стереометрическая задача.* Сколько граней у шестигранного карандаша?
8. *Исправьте ошибку.* В неверном равенстве $101=10^2-1$ передвиньте одну цифру так, чтобы оно стало верным.
9. *Восхождение гусеницы.* Высота столба 20 метров. Гусеница ползет по нему, при этом за день она поднимается на 5 метров, а за ночь опускается на 4 метра. За какое время она доползет до вершины столба?

- 10. Цирковой номер.** На столе стоят в ряд шесть стаканов: три пустых и три с кофе. Их нужно расположить так, чтобы пустые стаканы чередовались с наполненными. Как это сделать, если брать в руки разрешается только один стакан?



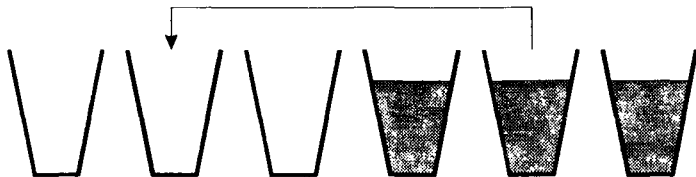
- 11. Полтинник = пятидесяти рублям?** Известно, что равенства можно перемножать. Например: 2 руб. = 200 коп., а 0,25 руб. = 25 коп. Перемножив эти равенства, получим: 0,5 руб. = 5000 коп. В чем же ошибка?
- 12. Путешествие мушкетеров.** Расстояние между Атосом и Арамисом, едущими верхом по дороге, равно 20 лье. За один час Атос проезжает 4 лье, а Арамис – 5 лье. Какое расстояние будет между ними через час?
- 13. Стричь или не стричь?** Математик, оказавшись в небольшом городке, решил подстричься. В городке было лишь две парикмахерских. Заглянув к одному мастеру, он увидел, что в салоне грязно, мастер одет неряшливо, плохо выбрит и небрежно подстрижен. В салоне другого мастера было чисто, а владелец его был безукоризненно одет, чисто выбрит и аккуратно подстрижен. Тем не менее, математик отправился стричься к первому парикмахеру. Почему?
- 14. Из задач Сэма Лойда.** Английский офицер, вернувшийся из Китая, заснул в церкви во время службы. Ему приснилось, что к нему приближается палач, чтобы отрубить голову, и в тот самый момент, когда сабля опускалась на шею несчастного, его жена, желая разбудить заснувшего, слегка дотронулась до его шеи веером. Потрясение было столь велико, что офицер тут же умер. В этой истории что-то неладно. Что же именно?
- 15. Маша + Федя = ?** Для покупки порции мороженого Феде не хватало 7 копеек, а Маше всего лишь копейки. Тем не менее, когда они сложили все имевшиеся у них деньги, то их все равно не хватило на покупку даже одной порции мороженого. Сколько стоила порция мороженого?

- 16. На круговом маршруте** работают два автобуса, при этом интервал движения 21 минута. Каков интервал движения, если на маршруте работают 3 автобуса?
- 17. Экономический прогноз.** Три курицы снесли за три дня три яйца. Сколько яиц снесут двенадцать кур за двенадцать дней?
- 18. Странные дроби.** Может ли дробь, в которой числитель меньше знаменателя, быть равной дроби, в которой числитель больше знаменателя?
- 19. Проблемы роста.** Если человек, стоящий в очереди перед Вами, был выше человека, стоящего после того человека, который стоял перед Вами, то был ли человек стоящий перед Вами выше Вас?
- 20. Вино или вода?** В одном стакане вино, в другом вода. Каплю вина перелили из первого стакана во второй, затем тщательно перемешали и каплю смеси перелили обратно. Чего оказалось больше: вина в стакане с водой или воды в стакане с вином? Как изменится ответ, если такое переливание произвести 10 раз? Если перемешивали не очень тщательно?

Решения и ответы

- 1.** Самая большая проблема – не разбить случайно банку с *первого* раза...
- 2.** Так как капитан теплохода – *Вы*, то...
- 3.** Продавец сказал правду, значит верно то, что попугай повторяет каждое *услышанное* слово. Попугай «нем как рыба» – следовательно, он не слышал ни одного слова. Вывод: либо при нем не было сказано ни одного слова, либо он просто «глух как тетерев».
- 4.** Слово *неправильно* все отличники пишут: *неправильно*.
- 5.** Так как *семь* (а не восемь, как иногда думают) промежутков между флажками спортсменов пробегает за 8 секунд, то 11 промежутков он пробежит за $\frac{8 \cdot 11}{7} = 12 \frac{4}{7}$ секунды.
- 6.** Между десятью точками девять интервалов, а между ста точками – девяносто девять. Следовательно, *S* больше *s* в 11 раз.
- 7.** Важно переспросить: у какого карандаша? Если *карандаш* еще не очинен, то 8, иначе возможны варианты...

8. *Передвинем* цифру 2 немного вниз: $101=102-1$.
9. Обычный ответ: за 20 дней, но... Так как за сутки гусеница поднимается на 1 метр, следовательно, за 15 суток она поднимется на 15 метров, а за *шестнадцатый* день еще на 5 метров и *достигнет* вершины столба...



10. Нужно *взять в руки* стакан с кофе (*один!*) и перелить его в пустой стакан.
11. Умножить 2 руб. на 0,25 руб. нельзя, так как квадратных рублей не бывает (впрочем, как и квадратных копеек).
12. А, собственно, *в каком направлении* ехал каждый из мушкетеров? Об этом в условии задачи ничего *не сказано*. Если навстречу друг другу, то расстояние между ними будет 11 лье. В других случаях (сделайте рисунок!) возможны ответы: 29 лье; 19 лье; 21 лье.
13. Может ли парикмахер постричь себя *сам*? Если нет, то парикмахеры вынуждены стричь друг друга. Первый подстрижен плохо, а второй хорошо. Следовательно, второй парикмахер стрижет плохо, а первый хорошо. Теперь понятно, почему математик выбрал первого парикмахера.
14. Если он умер *во время сна*, то как бы мы *узнали* какой именно сон ему снился?
15. Если бы у Феди была хотя бы копейка, то им с Машей хватило бы на мороженое (Маше не хватало на мороженое всего копеечки!). Следовательно, у Феди денег не было, а мороженое стоило 7 копеек.
16. Так как интервал между автобусами 21 минута, то весь маршрут автобус проходит за 42 минуты. Если автобусов будет 3, то интервалы между ними будут 14 минут.
17. Конечно не 12, как иногда отвечают (инерция мышления!), а 48.
18. Почему нет? Например: $\frac{-1}{2} = \frac{1}{-2}$.

- 19.** Человек, стоящий после того человека, который стоял перед Вами – *это Вы*, следовательно, человек, стоящий в очереди перед Вами, выше Вас.
- 20.** Так как *уровень жидкости в стаканах не изменился*, то вино, которое было перелито в стакан с водой, было в нем *заменено водой*. Следовательно, вина в стакане с водой столько же, сколько воды в стакане с вином. Ответ не изменится, если переливания производить много раз или если перемешивать не очень тщательно. Важно только, чтобы уровень жидкости в каждом стакане после переливаний оставался прежним.

2

Дайте добрый совет!

Условия задач этого раздела в большинстве своем начинаются с вопроса "как?". Как распилить цепочку? Как разделить пирог? Как измерить кирпич? И даже – как пролезть сквозь тетрадь по математике? Но кроме вопроса "как?", следует также подумать и над вопросом "почему?". Почему Вы уверены, что предложенный Вами способ приведет к цели? Без ответа на этот вопрос решение задачи не может считаться полным.

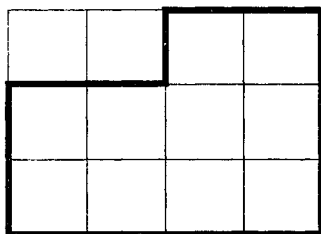
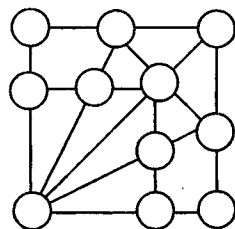
- 1.** *Как распилить цепочку?* В гостиницу приехал путешественник. Денег у него не было, а была лишь золотая цепочка, состоящая из 6 звеньев. За каждый день пребывания в гостинице он должен расплачиваться одним звеном цепочки, но при этом хозяин гостиницы предупредил, что согласен взять не более одного распиленного звена. Подскажите, как путешественнику распилить цепочку, чтобы прожить в гостинице шесть дней и ежедневно расплачиваться с хозяином?
- 2.** *Как остаться у власти?* Король решил уволить в отставку своего премьер-министра, но не хотел его обижать, да и повода не было. Наконец он придумал вот что. Однажды, когда премьер-министр пришел к королю, тот ему сказал: "В портфель я положил два листа бумаги. На одном из них написано *"Останьтесь"*, на другом – *"Уходите"*". Листок, который Вы сейчас не глядя вытяните из портфе-

ля, решит Вашу судьбу". Хитрый премьер-министр догадался, что на обоих листках написано "Уходите". Как ему избежать отставки?

3. *Как измерить диагональ кирпича?* В Вашем распоряжении имеется несколько одинаковых кирпичей и линейка.
4. *Как разделить добычу?* Два разбойника делят добычу. Каждый из них уверен, что он мог бы поделить добычу на две равные части, но второй ему не доверяет. Как разбойникам разделить добычу, чтобы оба остались довольны?
5. *Как обжарить хлеб?* На сковородке помещается два кусочка хлеба. На поджаривание одного кусочка с одной стороны требуется минута. Можно ли поджарить три кусочка хлеба с обеих сторон быстрее, чем за 4 минуты?
6. *Как победить Кощея?* В заповедном и дремучем, страшном Муромском лесу бьют из-под земли источники волшебной воды. Из первых девяти источников воду может взять каждый, но последний источник находится в пещере Кощея Бессмертного, и никто, кроме самого Кощея, не может набрать там воды. На вкус и цвет волшебная вода ничем не отличается от обыкновенной, однако, если человек выпьет из какого-нибудь источника, он умрет (волшебная вода смертельна даже для самого Кощея). Спасти может только одно: если запить эту воду водой из волшебного источника, номер которого больше. Если же выпить воды из десятого источника, то уже ничего не поможет. Иван-царевич вызвал Кощея на поединок. Условия такие: каждый приносит с собой кружку с водой и дает ее выпить своему противнику. Кощей согласился. Он рассуждал так: "Если я дам Ивану-царевичу воды из десятого источника, то он погибнет. Если же его яд я запью той же водой, я спасусь". Как Ивану-царевичу победить в поединке?
7. *Как остаться в живых?* Путешественник попал в плен к кровожадным дикарям. По законам племени, всякого иностранца спрашивают о цели визита. Если он при этом скажет правду – его съедят, а если солжет – утопят в море. Как путешественнику остаться в живых?
8. *Как разделить пирог?* Несколько человек хотят разделить пирог, но при этом они не доверяют друг другу. Помогите им разделить пирог так, чтобы все остались довольны.

- 9.** Как пролезть "сквозь" тетрадь по математике? Можно ли в тетрадном листе прорезать дырку так, чтобы сквозь нее мог пролезть человек?
- 10.** Как отгадать число? Я задумал одно из чисел: 1, 2 или 3. Можете ли Вы угадать какое число я задумал, задав мне всего один вопрос, на который я отвечу (правдиво!) "да", "нет" или "не знаю"?
- 11.** Загадочный символ. Между цифрами 4 и 5 поставьте известный Вам математический символ, чтобы в результате получилось число больше 4, но меньше 5.
- 12.** Сколько же все-таки стоила книга? За книгу заплатили один рубль, и осталось заплатить еще столько, сколько осталось бы заплатить, если бы за нее заплатили столько, сколько осталось заплатить. Сколько заплатили за книгу?
- 13.** Расставьте числа от 1 до 11 в кружках на рисунке так, чтобы сумма трех чисел на каждом из десяти отрезков была одна и та же.

- 14.** Куда пропал доллар? Три человека пообедали, заплатили 30 долларов (по 10 долларов за каждого) и ушли. Через некоторое время повар заметил, что обсчитал их на 5 долларов, и послал поваренка отдать их. Поваренок отдал 3 доллара (по 1 доллару на каждого), а 2 доллара забрал себе. Три раза по 9 долларов и 2 доллара у поваренка, получается 29 долларов. Куда пропал доллар?

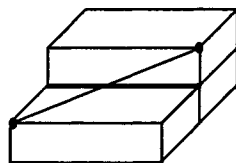


- 15.** Разрежьте фигуру на две равные части:

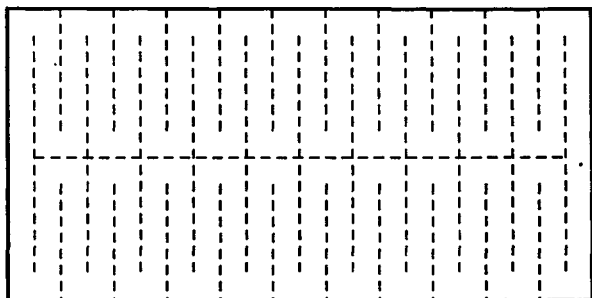
Решения и ответы

- 1.** Путешественнику надо распилить третье кольцо, чтобы у него было три обрывка цепи длиной в 1, 2 и 3 звена. Тогда в первый день он отдаст одно звено, во второй два и одно получит обратно, и так далее.

2. Он должен достать одну бумажку и уничтожить, не читая. После этого достать вторую и сказать: "Раз на этой бумажке написано *"Уходите"*, значит на той, которую я уничтожил было: *"Оставайтесь"*."
3. Линейку надо приложить так, как показано на рисунке.
4. Один из них должен разделить добычу на две, по *его* мнению, равных части, а второй выбрать ту из них, которая, по *его* мнению, больше.
5. Да. Пусть у нас имеется три кусочка хлеба: aA , bB и cC . План «обжаривания» удобно представить в виде схемы: ab ; Ac ; BC . Быстрее поджарить три кусочка хлеба не удастся: у трех кусочков хлеба шесть «сторон», а за минуту обжаривается не более двух «сторон».
6. Иван-царевич должен перед поединком выпить волшебной воды (из любого источника), тогда Кощей, дав ему воды из десятого источника, спасет его от неминуемой смерти. Кощею же он должен дать выпить простой воды (не волшебной!). Кощей, выпив простой воды и запив ее водой из десятого источника, погибнет.
7. Путешественник должен сказать: «Я приехал, чтобы вы меня утопили». Тогда, если они захотят его утопить, то получится, что он сказал правду, а за правду – съедают. Но если они захотят его съесть получится, что он солгал, а за ложь – топят. Неизвестно, правда, будут ли последовательны дикари в своей любви к логике.
8. Пусть требуется разделить пирог на n человек. Тогда первый должен отрезать кусок, который, по его мнению, равен $\frac{1}{n}$. Если второй считает, что кусок больше чем $\frac{1}{n}$, отрезает от него кусок так, чтобы оставшаяся часть, по его мнению, была равна $\frac{1}{n}$. То же делают и все остальные. Кусок берет тот, кто последним отрежет от него что-нибудь. Процедура повторяется до тех пор, пока весь пирог не будет разделен.



9. Смотрите рисунок:

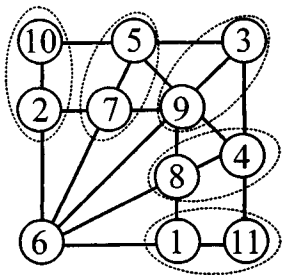


10. Например, такой: "если бы я тоже задумал одно из трех чисел 1, 2 или 3, но не то которое задумал ты, то было бы оно больше твоего числа?"

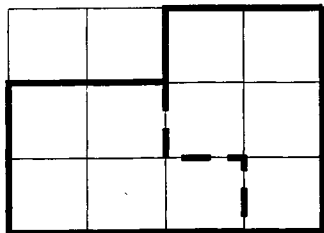
11. Между цифрами нужно поставить запятую: $4 < 4,5 < 5$.

12. Из условия следует, что за книгу осталось заплатить 1 рубль, а книга стоит 2 рубля.

13. Сумма данных чисел равна: $(1+11) + (2+10) + \dots + (5+7) + 6 = 66$. Заметим, что суммы чисел в каждой паре, выделенной на рисунке, должны быть равны, следовательно, в невыделенном кружочке может стоять либо 6, либо 11. Решение, соответствующее 6, приведено на рисунке. Верно ли, что решения, соответствующего 11, не существует?



14. Доллар, собственно говоря, никуда не делся. Произведем расчет. Обед стоил 25 долларов, мальчик оставил себе 2 доллара, поэтому обед клиентам обошелся в 27 долларов. 3 доллара им вернули. Чтобы расчет был правильным, нужно к 27 долларам прибавлять 3 доллара, а не 2. Все сходится.



15. Смотрите рисунок:

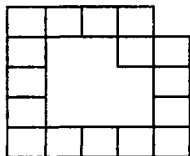
3

Четные и нечетные числа

Большинство задач данного раздела можно решить с помощью свойств, сформулированных еще Евклидом:

Первое число	Второе число	Сумма	Произведение
четно	четно	четна	четно
четно	нечетно	нечетна	четно
нечетно	нечетно	четна	нечетно

- Странный отчет.** Директор школы в своем отчете указал, что в школе 3688 учащихся, причем мальчиков на 373 человека больше, чем девочек. Но умный инспектор РОНО сразу понял, что в отчете допущена ошибка. Как он догадался?
- Прав ли Федя?** Федя утверждает, что может придумать пример на деление с остатком, чтобы делимое, делитель, неполное частное и остаток оканчивались на 9, 7, 3 и 1, а Маша говорит, что он не прав. Кто же из них прав?
- Случай в сберкассе.** Можно ли разменять 25 рублей при помощи десяти купюр достоинством 1, 3 и 5 рублей?
- Дорожная проблема.** Можно ли соединить 13 городов дорогами так, чтобы из каждого города выходило ровно 5 дорог?
- Федя, ты не прав.** Федя написал на доске равенство: $1*2*3*4*5*6*7*8*9=20$ (вместо * на доске в неизвестном порядке написаны знаки + и -). Докажите, что в равенстве допущена ошибка.
- Квадратные плитки.** Можно ли сложить замкнутую цепочку из 1997 квадратных плиток? Пример замкнутой цепочки:
- Точки на прямой.** На прямой расположено несколько точек. Затем между двумя соседними точками поставили еще по точке. И так далее несколько раз, после чего все отмеченные точки подсчитали. Могло ли при этом получиться число 1998?
- Потерянная гиря.** В наборе было 23 гири массой 1 кг, 2 кг, 3 кг, ... 23 кг. Можно ли их разложить на две равные по массе кучки, если гирю в 21 кг потеряли?
- Без сложных вычислений.** Числа a и b — целые. Известно, что $a+b=1998$. Может ли сумма $7a+3b$ равняться 6799?



- 10. Прямая.** Можно ли провести прямую линию так, чтобы она пересекла все стороны (но не вершины!) 2001-угольника?
- 11. Старинная задача.** Сколько километров проедет путешественник за 17 дней, тратя на это по 10 часов в день, если он уже проехал за 29 дней 112 километров, находясь в пути 7 часов каждый день?
- 12. Покупка альбома.** Для покупки альбома Маше не хватило 2 копеек, Коле 34 копеек, а Феде 35 копеек. Когда они сложили свои деньги, их все равно не хватило на покупку альбома. Сколько стоит альбом?
- 13. Есть ли логика?** Найдите закономерность в построении последовательности: 111, 213, 141, 516, 171, 819, 202, 122,...
- 14. Для чего нужны деньги?** Банкир шел по улице маленького провинциального городка, как вдруг увидел на мостовой банкноту в 5 долларов. Он поднял ее, запомнил номер и пошел домой завтракать. За завтраком жена сообщила ему, что мясник прислал счет на 5 долларов. Поскольку других денег у банкира при себе не было, он отдал жене найденную банкноту, чтобы оплатить счет. Мясник отдал эту банкноту фермеру, когда покупал телянку, тот торговцу, торговец, в свою очередь, дал ее прачке, а прачка, вспомнив, что задолжала банку 5 долларов, отнесла ее туда и погасила свой долг. Банкир узнал банкноту, которой к тому времени было оплачено долгов на 25 долларов. Через некоторое время выяснилось, что банкнота фальшивая. Кто и сколько потерял на всех этих операциях?
- 15. Расставьте целые числа** не равные 0 в клетках таблицы 4×4 так, чтобы сумма чисел, стоящих в углах каждого квадрата размером 2×2 , 3×3 , 4×4 , равнялась 0.

Решения и ответы

- 1.** Да, более чем странный отчет. Если девочек в этой школе x , то всего учащихся $2x+373$, что не равно 3688, так как нечетное число не может быть равно четному числу.
- 2.** Пусть a – делимое, b – делитель, c – частное, d – остаток. Тогда $a=b \cdot c+d$. Так как a – число нечетное, а $b \cdot c+d$ – четное, то равенство невозможно.

3. Нельзя. И вовсе не потому, что таких купюр не существует. Сумма четного количества нечетных слагаемых не может быть нечетным числом.
4. Так как из каждого города выходит 5 дорог, то общее количество дорог – 65. Заметим, что при этом каждую дорогу AB мы считаем дважды, как выходящую из городов A и B . Таким образом, общая сумма дорог должна быть четной. Получаем противоречие. Ответ: нельзя.
5. Так как выражение $1*2*3*4*5*6*7*8*9$ содержит нечетное количество нечетных чисел, то результат должен быть нечетным числом, следовательно, это равенство неверно.
6. Предположим, мы расположили цепочку из плиток на бесконечной «шахматной» доске, причем каждая плитка покрывает одну из клеток. Пронумеруем теперь плитки в порядке их следования числами от 1 до 1997. Заметим, что плитки с нечетными номерами должны находиться на полях одинакового цвета. Но это противоречит тому, что плитки с номерами 1 и 1997 должны быть расположены на соседних клетках (так как цепочка замкнутая!) и, следовательно, эти клетки должны быть окрашены в разные цвета. Поэтому замкнутую цепочку составить из 1997 плиток нельзя.
7. Заметим, что если в какой-либо момент времени на прямой n точек, то на следующем шаге число точек становится равно нечетному числу $2n-1$. Поэтому число точек на прямой всегда будет нечетным. Следовательно, число 1998 при подсчете получиться не могло.
8. Заметим, что $(1+23) + (2+22) + \dots + (11+13)+12$ – число четное. Следовательно $(S - 21)$ на две равные по весу кучки не разложишь.
9. Так как a и b имеют одинаковую четность, то $7a$ и $3b$ тоже имеют одинаковую четность, а значит их сумма должна быть четной. Так как 6799 нечетное число, то задача решений не имеет.
10. Предположим, что это возможно, и прямая пересекала все стороны (но не вершины) некоторого 2001-угольника.

1 решение. Всякий многоугольник разбивает плоскость на две части. Будем "двигаться" вдоль прямой. В начале "движения" мы находимся вне многоугольника, когда мы пере-

сечем первую сторону, мы окажемся внутри многоугольника, затем снова вне и так далее. Заметим, что пересекая сторону в четный раз, мы оказываемся вне многоугольника, нечетный раз – внутри. Следовательно, после встречи с 2001 стороной мы окажемся внутри 2001-угольника, и прямая пересечет, как минимум, еще одну сторону. Получается, что прямая должна пересечь одну из сторон 2001-угольника два раза, что невозможно, следовательно, наше предположение неверно, и провести прямую так, чтобы она пересекла все стороны 2001-угольника невозможно.

2 решение. Если бы это было возможно, то по разные стороны от этой прямой находилось бы одинаковое количество вершин, то есть у многоугольника должно быть четное количество вершин.

- 11.** Так как путешественник проехал 112 км за 29·7 часов, то за 17·10 часов он проедет $\frac{112 \cdot 17 \cdot 10}{29 \cdot 7} = 93 \frac{23}{29}$ км (из французского учебника XIX века – невелики тогда были скорости).

- 12.** Так как у Коли на одну копейку больше, чем у Феди, то у него есть, как минимум, 1 копейка, и к Машиным деньгам 1 копейка добавляется. Но Маше на альбом не хватило, то есть ей дали меньше, чем 2 копейки, значит у Феди, вообще, нет денег, и ему не хватает полной стоимости альбома. Ответ: *альбом стоит 35 коп.*

- 13.** В последовательности 11, 12, 13, 14... просто иначе поставили запятые...

- 14.** После того, как фермер продал теленка мяснику, все пять участников (банкир, мясник, фермер, торговец и прачка) оказались в одинаковом положении, а именно: каждый из них должен кому-либо 5 долларов, и ему должны точно такую же сумму, так что общий баланс равен нулю. Обращение по кругу фальшивой банкноты фактически эквивалентно тому, как если бы все пять участников собрались вместе и договорились считать долги взаимно погашенными. В этом случае ее действие ничем не отличается от действия настоящей банкноты.

- 15.** Смотрите рисунок:

-1	-1	1	1
1	1	-1	-1
-1	-1	1	1
1	1	-1	-1

4

Было или не было?

В некоторых задачах этого раздела ситуация поначалу может показаться невероятной, но ...

1. *Правдивый Федя* всегда говорит только правду, но однажды, когда ему задали два раза подряд один и тот же вопрос, он дал на него разные ответы. Могло ли такое быть?
2. *Странный вопрос.* Федя всегда говорит правду, а Саша всегда врет. Им задали один и тот же вопрос, а они дали на него одинаковые ответы. Могло ли такое быть?
3. *Диалог в магазине* хозяйственных товаров.
Сколько стоит один? – спросил посетитель.
– 1000 рублей – ответил продавец,
– А двенадцать? – 2000 рублей.
– Хорошо. Дайте мне пятьсот двенадцать.
– С Вас 3000 рублей.

О каком товаре могла идти речь?

4. *Когда родился Федя?* Федя как-то сказал: "Позавчера мне было 10 лет, а в следующем году мне исполнится 13 лет". Могло ли это быть правдой?
5. *Три бегуна* соревновались в беге на 200 метров. По окончании сезона выяснилось, что в большинстве забегов *А* опередил *В*, *В* в большинстве забегов опередил *С*, а *С* в большинстве забегов опередил *А*. Могло ли такое быть?
6. *На крыльце* дома сидят рядом мальчик и девочка. Саша говорит: «Я мальчик». Женя говорит: «Я девочка». Если, по крайней мере, один из детей врет, то кто из них мальчик, а кто девочка?
7. *Черепаший разговор.* Три черепахи ползут по прямой друг за другом. Первая говорит: «Сзади меня ползут две черепахи». Вторая говорит: «Впереди меня ползёт одна черепаха и сзади одна». Третья говорит: «Впереди меня ползёт одна черепаха и сзади одна». Могло ли такое быть?
8. *Проблемы с бензином.* Можно ли разлить 50 литров бензина по трем бакам так, чтобы в первом баке было на 10 литров больше, чем во втором, а после переливания 26 литров из первого бака в третий, в третьем баке стало столько же, сколько и во втором?

- 9. Проблемы с транспортом.** Федя участвует в двух математических кружках, которые расположены в противоположных концах Москвы. Ехать надо по одной и той же линии метро, но в противоположные стороны. Федя садится в первый проходящий поезд независимо от того, с какой стороны тот пришел. К концу года он обнаружил, что в первом кружке бывал вдвое чаще, чем во втором. Как это могло произойти? Заметим, что школьник попадает в метро не всегда в одно и то же время: иногда немного позже, иногда немного раньше. Поезда проходят в каждом направлении через одинаковые интервалы времени.
- 10. Было или не было?** Эту замечательную историю рассказывают про одного из крупнейших немецких философов И. Канта. Как-то вечером он обнаружил, что его настенные часы остановились. Чтобы узнать время, он отправился в гости к одному из своих друзей. Пробыв там некоторое время, он вернулся домой и поставил правильно стрелки часов. Как ему это удалось?
- 11. В Анчурии и Гвайасуэле** денежная единица именуется долларом, и в обеих странах первоначально доллары котировались одинаково. Однажды правительство Гвайасуэлы постановило впредь приравнять анчурийский доллар к девяноста гвайасуэльским центам. На следующий день подобный курс был введен для гвайасуэльского доллара в Анчурии. В Анчурии, вблизи границы живет человек, который приходит в трактир выпить кружку пива за 10 центов. Любитель пива уплачивает анчурийский доллар и получает сдачу гвайасуэльским. Теперь он переходит границу, снова покупает кружку пива, расплачивается гвайасуэльским долларом и получает взамен анчурийский. Вернувшись домой, он оказывается при своих деньгах. Кто же платил за пиво?
- 12. Шифровка.** В предлагаемой шифровке значками зашифрованы цифры и знаки $-$, $+$ и $=$. Каждая строчка шифровки содержит запись одного арифметического примера. Определите какой цифре или знаку соответствует каждый из значков.
- 13. Арабская сказка.** Стая голубей подлетела к высокому дереву.

>ΔθΠV⊕θ<□□V

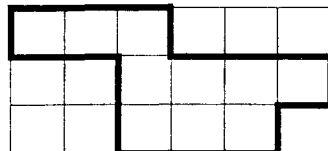
VΛθ∅>VΠ□V□Λ

⊕ΔVθΠ⊕□VV∅⊙

□V⊙⊙<>VΠV∅∅

Часть голубей села на ветвях, а другая расположилась под деревом. «Сидевшие на ветвях говорят расположившимся внизу: Если бы один из вас взлетел к нам, то вас стало бы втрое меньше, чем нас всех вместе, а если бы один из нас слетел к вам, то нас с вами стало бы поровну». Сколько голубей сидело на ветвях и сколько под деревом? (Сказки Тысяча и одной ночи. Ночь 458)

- 14.** Вычеркните из числа 12345678910111213...5960 сто цифр так, чтобы полученное число было наибольшим.



- 15.** Разрежьте фигуру на две равные части:

Решения и ответы

- Например, можно дважды спросить у него: «Сколько сейчас времени?»
- Можно спросить: «Говорите ли Вы правду?» На этот вопрос и правдивый человек и лжец должны ответить «да!».
- Например, цифры для номера дома. Тогда 1 – одна цифра – стоит 1000 рублей, 12 – две цифры – в два раза больше, а 512 – три цифры – в три раза больше.
- Это может быть, если Федя родился 31 декабря, а разговор происходил на следующий день, то есть 1 января.
- Пусть, например, в трех забегах бегуны финишировали в следующей последовательности: *ABC*, *BCA*, *CAB*. Тогда в двух забегах из трех *A* опередил *B*, в двух забегах из трех *B* опередил *C*, а в двух забегах из трех *C* опередил *A*.
- Из того, что один из них врет, следует, что врет и второй. Следовательно, Саша – девочка, а Женя – мальчик.
- Да, если одна из черепашек врет... Кстати, какая?
- Заметим, что в первом и втором баках должно быть не менее 26 литров бензина. Поэтому так разлить 50 литров бензина невозможно.
- Могло быть и хуже, например, если поезда в одном направлении отходят в 10.00; 10.10..., а в обратном в 10.09;

10.19..., то шансы школьника попасть в один из кружков больше аж в 9 раз.

- 10.** Вероятно дело происходило так: Кант завел свои настенные часы и пошел в гости. Узнав там точное время, он возвратился обратно (при этом не забыв учесть время, проведенное в гостях). Дома он по показаниям часов определил, сколько времени он был в пути. Разделил эти данные на два и прибавил к показаниям часов приятеля. Это и будет точное время.
- 11.** Теряется покупательная способность тех денег, которые используются «не в той стране», поэтому за пиво платят те, кто платит «не в той стране», в данном случае так поступает трактирщик, когда дает доллар сдачи.
- 12.** Сначала определим, какой значок соответствует знаку равенства. Заметим, что он не может стоять в начале или конце строки, или встречаться два раза в одной строке. Следовательно это – П. Далее определим + и –. Это \emptyset и $<$. Подставив найденные знаки, получим: $=1$; $V=9$; $\Lambda=2$; $\theta=3$; $\odot=4$; $O=5$; $\Delta=6$; $\oplus=7$; $>=8$, $V=0$.
- 13.** Из условия задачи видно, что голубей, сидящих на ветвях, на два больше, чем сидящих внизу. Далее, из условия следует, что после того, как один из голубей взлетел на ветку, сидящих на ветке стало вдвое больше, чем сидящих на земле. Кроме того, при этом, их стало на 4 больше. Значит, на дереве сидит 7 голубей, а под деревом – 5.
- 14.** Наибольшее возможное число должно начинаться с наибольшего количества девяток. Будем "двигаться" по числу слева направо вычеркивая все цифры, кроме 9. Вычеркнем 27 цифр: $\underbrace{123456789}_{8 \text{ цифр}} \underbrace{10111213141516171819}_{19 \text{ цифр}} \dots 5960$,
затем 19 цифр: $9920212223242526272829 \dots 5960$ и так
далее. Заметим, что до очередной девятки мы «добираемся», вычеркивая 19 цифр. Сделав еще два шага, мы зачеркнем 38 цифр: $999995051525354555657585960$. За
предыдущие шаги мы вычеркнули 84 цифры (нам осталось вычеркнуть еще 16 цифр), следовательно, до очередной девятки мы не «доберемся». Наибольшая цифра, до

которой мы можем «добраться», вычеркнув 15 цифр, – это 7. Далее, вычеркнув 5, мы получим наибольшее возможное число: 99999785960.

15. Смотрите рисунок:



5

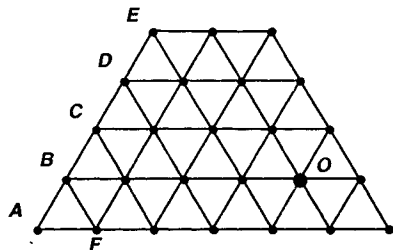
В стране рыцарей и лжецов

В этой удивительной стране живут рыцари, все высказывания которых правдивы, и лжецы каждое высказывание которых – ложь. И еще в этой стране бывают гости, в большинстве своем, – нормальные люди, с которыми особенно трудно: они могут говорить правду, но могут и солгать. Внимательный путешественник, однако, всегда может разобраться кто перед ним...

- 1. На прогулке.** Однажды, прогуливаясь по стране рыцарей и лжецов, я встретил человека, который сказал про себя: «Я – лжец». Кем был тот человек, которого я встретил?
- 2. Кто есть кто?** Перед нами два жителя страны рыцарей и лжецов *А* и *В*. *А* говорит: «Я – лжец, а *В* – не лжец». Кто из островитян *А* и *В* – рыцарь и кто – лжец?
- 3. Необходима экспертиза.** Перед нами три уроженца страны рыцарей и лжецов *А*, *В* и *С*. *А* говорит: «Мы все лжецы». *В* говорит: «Ровно один из нас лжец». Кто *С* – рыцарь или лжец? Можно ли определить, кто *В*?
- 4. В правительстве** страны рыцарей и лжецов 12 министров. Некоторые из них лжецы, а остальные рыцари. Однажды на заседании правительства были высказаны следующие мнения: первый из министров сказал: «Здесь нет ни одного честного человека», второй: «Здесь не более одного честного человека», третий: «Здесь не более двух честных людей», – и так далее до двенадцатого, который сказал: «Здесь не более одиннадцати честных людей». Сколько лжецов входят в правительство страны?

5. *За круглым столом* сидят восемь человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец. На вопрос, кто их соседи, каждый из них ответил: «Мои соседи – лжец и рыцарь». Сколько среди них было лжецов? Как изменился бы ответ, если бы за столом сидело девять человек?
6. *На заседании Государственной думы* в стране рыцарей и лжецов часть присутствующих отстаивала точку зрения, что во фракции лжецов, как и во фракции рыцарей, нечетное число депутатов. Остальные, доказывали, что и в той и в другой фракции – четное число депутатов. Председательствующий, подводя итоги обсуждения, заметил, что всего депутатов 213 человек. Кто он, рыцарь или лжец?
7. *Судебный казус*. В стране рыцарей и лжецов было совершено преступление. К суду были привлечены три жителя страны: *А*, *В* и *С*. На вопрос судьи *А* ответил неразборчиво. Когда судья переспросил двух оставшихся, то *В* сказал, что *А* утверждает, что он рыцарь, а *С* сказал, что *А* назвал себя лжецом. Кем являются *В* и *С*?
8. *Проводник*. В страну рыцарей и лжецов приехал турист. Первый местный житель, которого он встретил, утверждал, что является рыцарем. Турист обрадовался и нанял его себе в проводники. Через некоторое время они встретили еще одного местного жителя. Турист отправил проводника спросить у него рыцарь он или лжец. Проводник вернулся и ответил, что абориген утверждает, что он рыцарь. Кем был проводник, рыцарем или лжецом?
9. *На перепутье*. Путешественник подошёл к развилке дороги и ему пришлось спросить у оказавшегося поблизости местного жителя, какая из двух дорог ведёт в деревню. Путешественнику было неизвестно с кем он разговаривает – с рыцарем или лжецом. Тем не менее, задумавшись на минуту, он задал единственный вопрос, из ответа на который он точно узнал по какой дороге идти. Какой вопрос был задан?
10. *Интересный разговор*. Однажды между четырьмя жителями страны рыцарей и лжецов произошел интересный разговор. *А* сказал: «По крайней мере, один из нас – лжец». *В* сказал: «По крайней мере, двое из нас – лжецы». *С* сказал: «По крайней мере, трое из нас – лжецы». *Д* сказал: «Среди нас нет лжецов». Но среди них все же были лжецы. Кто?

- 11.** В переплетной мастерской. Из книги выпал кусок, первая страница которого имеет номер 328, а номер последней записывается теми же цифрами, но в другом порядке. Сколько страниц в выпавшем куске?
- 12.** Из Виттенберга в Геттинген идут два студента. Первый из них ежедневно проходил по 7 миль. Второй в первый день прошел 1 милю, во второй – 2, в третий – 3 и т. д., проходя каждый день на 1 милю больше, чем в предыдущий. Когда второй догонит первого?
- 13.** Можно ли успеть вовремя. До отправления поезда остается 2 минуты. Путь до вокзала 2 км. Если первый километр бежать со скоростью 30 км/ч, то с какой скоростью нужно пробежать второй километр, чтобы успеть вовремя?
- 14.** Расставьте скобки в равенстве: $1:2:3:4:5:6:7:8:9:10=7$, чтобы оно стало верным?
- 15.** Треугольная сетка. Треугольная сетка сделана из шнура, который может гореть. Огонь распространяется по шнуру с одной и той же скоростью по всем направлениям (каждое звено сгорает ровно за 1 минуту). Какие из отмеченных звеньев (AB, BC, CD, DE или AF) сетки сгорят последними, если поджечь сетку в точке O? За какое время они сгорят?

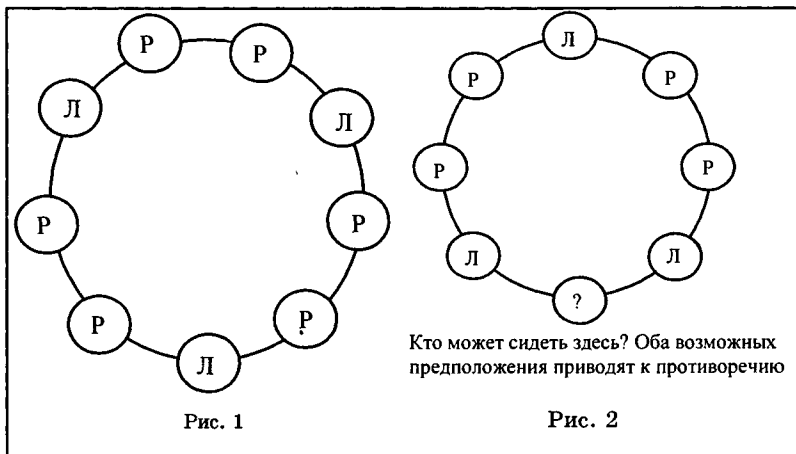


Решения и ответы

- 1.** Сказавший «Я – лжец» не мог быть лжецом, так как лжецы *никогда* не говорят правды. Не мог он быть и рыцарем, так как рыцари *никогда* не лгут. Он, вообще, не был уроженцем страны рыцарей и лжецов.
- 2.** Высказывание A: «Я – лжец, а B – не лжец», верно только в том случае, если верны оба его составляющие. Высказывание «Я – лжец» верным быть не может. Следовательно, A – лжец, и для того чтобы все выражение было ло-

жью, вторая часть высказывания должна быть ложью. Следовательно, *В* тоже лжец.

3. *А* – лжец, так как его высказывание «Мы все лжецы» – правдой быть не может. Из высказывания *В*: «Ровно один из нас лжец», если оно истинно, следует, что *В* и *С* – оба рыцари. Если же оно ложно, то рыцарем является только *С*, так как высказывание *А* – ложно. Таким образом, *А* – лжец, *С* – рыцарь, а кто такой *В* – рыцарь или лжец – определить нельзя.
4. Заметим, что количество верных высказываний должно совпадать с количеством честных людей в правительстве. Далее, если высказывание какого-либо из министров правдиво, то правдивы и высказывания каждого министра, выступившего за ним. При этом единственное высказывание, которое не вызовет противоречия будет: «здесь не более 6 честных людей», так как при этом верными окажутся ровно 6 высказываний. Следовательно, в правительстве ровно 6 лжецов.
5. 1. За столом сидит хотя бы один лжец. Действительно, если бы за столом сидели только рыцари, то высказывание каждого из рыцарей «рядом со мной сидит рыцарь и лжец» было бы ложным, что невозможно. 2. Соседями



лжеца могут быть либо два лжеца, либо два рыцаря. 3. Если у лжеца оба соседа лжецы, то и дальше за столом сидят одни лжецы, иначе высказывание одного из лжецов «рядом со мной сидит рыцарь и лжец» будет правдой, что

невозможно. Таким образом, один из возможных ответов – все лжецы. 4. Если же соседями лжеца являются рыцари, то за каждым рыцарем должен сидеть еще рыцарь, затем лжец, затем снова два рыцаря, затем лжец и так далее. Если за столом 9 человек, то лжецов, – 3 (рис. 1), если 8 человек, то получим противоречие (рис 2)¹.

Ответ: 1. Если за столом 8 человек, то все лжецы. 2. Если за столом 9 человек, то лжецов либо 9, либо 3.

6. Предположим, что среди депутатов есть хотя бы один рыцарь, следовательно, число депутатов Госдумы четно (кстати, почему?). Председательствующий сказал, что число депутатов Госдумы нечетно, значит, он лжец. Если рыцарей среди депутатов нет, то он тем более лжец!

7. Очевидно *А* сказал, что он рыцарь, так как *А* житель страны. Далее, исходя из условия задачи, видно, что *В* – рыцарь, а *С* – лжец.

8. 1. Предположим, что проводник – лжец, тогда: а) если абориген рыцарь, проводник ответит, что он лжец; б) если абориген лжец, то он все равно скажет, что он рыцарь, а проводник ответит, что он лжец. 2. Если проводник – рыцарь, тогда: а) если абориген рыцарь, проводник ответит, что он рыцарь; б) если абориген лжец, то проводник ответит, что он рыцарь. Следовательно, проводник – рыцарь.

9. Вопрос мог быть, например, таким: «Если бы я вас спросил, ведет ли эта дорога в деревню, вы бы сказали «да»?» На этот вопрос и рыцарь, и лжец ответят одинаково: «да», если дорога ведет в деревню, и «нет» в противном случае.

10. Предположим, что *Д* сказал правду, тогда получается, что лгут все кроме него – противоречие. Значит, он лжец. (Это следует и из условия задачи.) Если высказывание *С* истинно, то истинны и высказывания первых двух – противоречие. Следовательно, *С* тоже лжец, а *А* и *В* сказали правду.

11. Поскольку последняя страница должна иметь больший номер другой четности нежели начальная, то ее номер 823. Ответ: выпало 496 страниц.

¹ Обозначение: *р* – рыцарь, *л* – лжец.

- 12.** В первый день второй студент прошел на 6 миль меньше, чем первый, во второй – на 5 и так далее. За седьмой день студенты пройдут одинаковое расстояние. Далее, в восьмой день, второй пройдет на 1 милю больше, в девятый – на 2 и так далее. Встретятся они в конце 13 дня.
- 13.** Если бежать со скоростью 30 км/ч, то первый километр будет пройден за 2 минуты...
- 14.** Ответ: $1:2:3:4:5:(6:7:8:9:10)=7$.
- 15.** Огонь доберется до любой из точек B, C, D, E, F за 4 минуты. Следовательно, последними сгорят отрезки BA и FA , и произойдет это за 5 минут (отрезки ED, DC, CB сгорят за 4,5 минуты, потому что будут гореть с двух концов).
 Ответ: BA и FA за 5 минут.



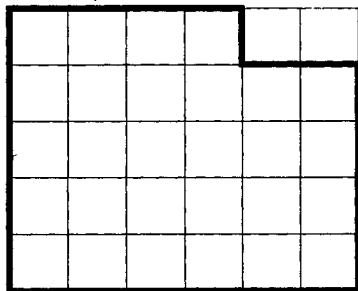
Дроби

Дроби издавна считались одним из самых трудных разделов арифметики: в средневековой Европе выражение «попасть в дроби» означало испытывать трудности, попасть в затруднительное положение. Действия с дробями в учебниках средней школы появились лишь в XVIII веке. А в одном из английских учебников того времени можно прочитать о «крутых и трудных путях дробей, при одном виде которых некоторые учащиеся приходят в такое уныние, что останавливаются и восклицают: «Ради бога не дальше!». К сожалению, обыкновенным дробям в современной школе уделяют недостаточно внимания, а ведь они содержат в себе немало интересного.

- 1. Спящий пассажир.** Когда пассажир проехал половину всего пути, то лег спать и спал до тех пор, пока не осталось ехать половину того пути, что он проехал спящим. Какую часть пути он проехал спящим?
- 2. Утро в магазине.** По какой цене следует продавать смесь двух сортов конфет, если цена первого сорта – 10 рублей за килограмм, второго – 15 рублей за килограмм, а вес конфет первого сорта в три раза больше, чем второго?

3. *Римское право.* Некто, умирая, завещал: «Если у моей жены родится сын, то пусть ему будет дано $\frac{2}{3}$ имения, а жене – остальная часть. Если же родится дочь, то ей $\frac{1}{3}$, а жене $\frac{2}{3}$ ». Родилась двойня – сын и дочь. Как разделить наследство?
4. *Бочки меду.* Три человека хотят поделить между собой семь полных бочек меду, семь бочек, заполненных медом наполовину, и семь пустых, но так, чтобы и мед, и тара были поделены поровну. Как произвести этот раздел, не перекладывая мед из одной бочки в другую?
5. *Какая из дробей больше:* $\frac{199719973}{199719977}$ или $\frac{199819983}{199819987}$?
6. *Что можно купить на рубль?* Девять коробков спичек стоят 9 рублей с копейками, а десять таких же коробков – 11 рублей с копейками. Сколько стоит один коробок?
7. *Физическая проблема.* Объем воды при замерзании увеличивается на 10%. На сколько процентов уменьшается объем льда при таянии?
8. *Сколько стоит платье?* Плата работнику в месяц, то есть за тридцать дней, – десять динаров и платье. Он работал три дня и заработал платье. Какова стоимость платья?
9. *Кофе с молоком.* Сначала отпили $\frac{1}{6}$ чашки черного кофе и долили ее молоком. Потом выпили $\frac{1}{3}$ чашки и снова долили ее молоком. Потом выпили еще полчашки и опять долили ее молоком. Наконец, выпили полную чашку. Чего выпили больше: кофе или молока?
10. *Справедливый раздел.* По завещанию умершего отца три сына должны были поделить между собой 7 лошадей так, чтобы старшему досталась половина, среднему – четвертая часть, а младшему – восьмая. Завещание весьма смутило наследников – ведь для его реализации приходилось резать лошадей на части. Выход из положения подсказал старик сосед. Он присоединил к лошадям еще и своего коня. Далее все пошло просто: первый получил 4 лошади, что составило половину всех лошадей, второй – 2, то есть четвертую часть, а третий – 1, то есть восьмую часть. После чего сосед забрал своего коня обратно. Объясните, как рассуждал сосед, когда делил лошадей.

- 11.** Из «Греческой антологии». Из-под земли бьют четыре источника. Первый заполняет бассейн за один день, второй – за 2 дня, третий – за 3 дня и четвертый – за 4 дня. За какое время наполнят бассейн все четыре источника?
- 12.** Большая стирка. После семи часов стирки длина, ширина и высота куска мыла уменьшились вдвое. На сколько стирок хватит оставшегося мыла?
- 13.** В гостиницу вновь приехал путешественник. В этот раз у него была цепочка из 7 звеньев. За каждый день пребывания в гостинице он должен расплатиться одним звеном цепочки, но при этом хозяин гостиницы предупредил, что согласен взять не более одного распиленного звена. Какие звенья надо распилить, чтобы прожить в гостинице 7 дней и ежедневно расплачиваться с хозяином?
- 14.** Умный киоскер может отсчитать 10 конвертов из пачки в 100 конвертов за 1 секунду. За какое время он отсчитает 40 конвертов? 90 конвертов?
- 15.** Разрежьте фигуру на две равные части:



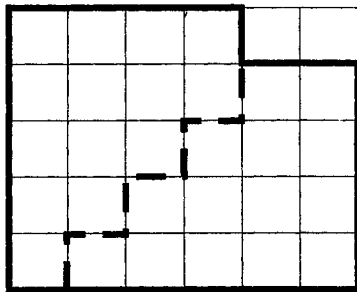
Решения и ответы

- 1.** Пассажир проспал две трети от второй половины пути, то есть одну треть всего пути.
- 2.** Пусть $3x$ кг – конфет первого сорта, тогда их общая стоимость 45х руб., а вес 4х кг. Продавать их следует по цене $\frac{45x}{4x}$ руб., то есть по 11 руб. 25 коп. за 1 кг.
- 3.** Мудрое адвокатское решение таково: так как из завещания следует, что сын должен получить в два раза больше матери, а мать – в два раза больше дочери, то следовательно, сын должен получить $\frac{4}{7}$, мать – $\frac{2}{7}$, а дочь – $\frac{1}{7}$ наследства.

- 4.** *Первое решение:* первый человек (как и второй) должен взять три полных бочки, одну полупустую и три пустых; третий – одну полную, пять полупустых, одну пустую. *Второе решение:* первый человек (как и второй) – две полных бочки, три полупустых и две пустые; третий – три полных, одну полупустую и три пустых.
- 5.** Будем сравнивать не сами числа, а их дополнения до 1.

$$\frac{4}{199819987} < \frac{4}{199719977} \text{ откуда: } \frac{199719973}{199719977} < \frac{199819983}{199819987}.$$
- 6.** Заметим, что коробок спичек стоит больше $\frac{11}{10}$ руб., но меньше $\frac{10}{9}$ руб. То есть больше 1,10 рубля, но меньше 1,111 рубля. Ответ: 1 руб. 11 коп.
- 7.** Если объем воды при замерзании увеличивается на $\frac{1}{10}$ (то есть становится равным $\frac{11}{10}$), то при таянии льда объем уменьшается на $\frac{1}{11}$ (от $\frac{11}{10}$!), то есть на $9\frac{1}{11}\%$.
- 8.** Так как за 30 дней он получит 10 динаров и платье, то за 3 дня он получит динар и $\frac{1}{10}$ платья, следовательно, платье стоит $1\frac{1}{9}$ динара. Можно рассуждать иначе: так как он за три дня заработал платье, то за 27 дней он должен был получить 10 динаров, а за 3 дня соответственно $1\frac{1}{9}$ динара.
- 9.** Кофе выпили одну чашку, а молока сначала долили $\frac{1}{6}$ чашки, затем $\frac{1}{3}$ чашки и, наконец, $\frac{1}{2}$ чашки, то есть тоже одну чашку, а значит, кофе и молока выпили поровну.
- 10.** Обратите внимание на то что $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$, а не 1. Если это завещание выполнить буквально, то старшему сыну достанется 3,5 лошади, среднему – 1,75 лошади, а младшему – 0,875 лошади. При этом 0,875 лошади не достанется никому и сосед, фактически, помог им их разделить. Он исходил из того, что старший сын должен получить в два раза больше среднего и в четыре раза больше младшего – именно так и написано в завещании.

- 11.** Если бы были открыты все четыре источника, то за двенадцать дней они наполнили бы $12+6+4+3=25$ бассейнов, следовательно один бассейн они наполнят за $\frac{12}{25}$ дня.
- 12.** Так как длина, ширина и высота куска мыла уменьшилась вдвое, то его объем уменьшился в 8 раз, то есть за 7 часов, кусок мыла уменьшился на $\frac{7}{8}$ своего объема (за один час на $\frac{1}{8}$ объема). Таким образом, мыла хватит еще на один час большой стирки.
- 13.** Следует распилить третье звено. При этом цепочка распадется на куски, состоящие из одного, двух и четырех звеньев. В первый день он должен отдать одно звено, во второй – два звена, получив при этом в сдачу одно, в третий день вновь одно звено, в четвертый – четыре звена и получить в сдачу обрывки в одно и два звена и далее повторить операции первых трех дней.
- 14.** Ответ: 40 конвертов за 4 секунды, а 90 за... 1 секунду. Почему? Потому, что умный...
- 15.** Смотрите рисунок:



7

Проценты

«Pro centum» – в переводе с латыни обозначает сотую часть числа; изначально появились в Древнем Риме, как термин юридический – именно столько должен был платить должник ростовщику за право пользования его деньгами. Сейчас это понятие применяется не только в банковском деле. Там, где речь идет о статистике, будь то экономика, химия, биология или политология, – везде счет идет на проценты. В педагогике даже термин такой специальный появился – процентомания – это когда учителя ни за что ставят хорошие оценки, чтобы начальство не ругало. Заметим, что сами проценты здесь безусловно не виноваты.

1. *Сравните числа.* Известно, что 2% положительного числа A больше, чем 3% положительного числа B . Верно ли, что 5% числа A больше, чем 7% числа B ?
2. *Петя купил две книги.* Первая из них была на 50% дороже второй. На сколько процентов вторая книга дешевле первой?
3. *В двух бочках* было воды поровну. Количество воды в первой бочке вначале уменьшилось на 10%, а затем увеличилось на 10%. Количество воды во второй бочке, наоборот, вначале увеличилось на 10%, а затем уменьшилось на 10%. В какой бочке стало больше воды?
4. *Где дешевле?* В одном магазине молоко подешевело на 40%, а в другом сначала на 20%, а затем еще на 25%. Где молоко стало стоить дешевле? Первоначальная цена на молоко в каждом из магазинов была одна и та же.
5. *Как изменилась покупательная способность населения?* Товар подешевел на 20%. На сколько процентов больше можно купить товара за те же деньги?
6. *Сушеные грибы.* Влажность свежих грибов – 99%, сушеных – 98%. Как изменился вес грибов после подсушивания?
7. *На конференции.* 85% делегатов конференции знают английский язык, а 75% – испанский. Какая часть делегатов знает оба языка?
8. *На туристском слете* собрались все участники двух туристических походов (некоторые были в двух походах, некоторые только в одном). В первом походе было 60% мужчин, во втором – 75%. Докажите, что на встречу пришло мужчин не меньше, чем женщин.
9. *Морская вода* содержит 5% соли. Сколько килограммов пресной воды надо добавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли составляло 2%?
10. *Вера и Аня* посещают математический кружок, в котором больше 91% мальчиков. Найти наименьшее возможное количество участников кружка.
11. *Кого больше?* Каждый десятый математик – философ. Каждый сотый философ – математик. Кого больше философов или математиков?

- 12. Загадочная надпись.** При раскопках древнего города был найден камень, на котором было выбито:

«В этой надписи использованы цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, причем: цифра 0 использована ... раз; цифра 1 использована ... раз; цифра 2 использована ... раз; цифра 3 использована ... раз; цифра 4 использована ... раз; цифра 5 использована ... раз; цифра 6 использована ... раз; цифра 7 использована ... раз; цифра 8 использована ... раз; цифра 9 использована ... раз»

Можно ли вписать вместо многоточий цифры таким образом, чтобы надпись оказалась верной?

- 13. Аккуратный Петя** пронумеровал все страницы общей тетради числами от 1 до 192. Вася вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них были написаны. Мог ли он получить при этом число 1998?
- 14. Окрашенный куб** с ребром в 10 см распилили на кубики с ребром в 1 см. Сколько среди них окажется кубиков с одной окрашенной гранью? С двумя окрашенными гранями?
- 15. Морской бой.** На доске для игры в «морской бой» расположен четырёхклеточный «корабль» $\square\square\square\square$. Какое наименьшее число «выстрелов» нужно произвести, чтобы наверняка его уничтожить?

Решения и ответы

- 1.** Так как 2% числа A больше, чем 3% числа B , то 4% числа A больше чем 6% числа B , кроме того, 1% числа A больше, чем 1% числа B . "Сложив" два последних утверждения, получим, что 5% числа A больше, чем 7% числа B . Или: $0,02A > 0,03B$, откуда $0,05A > 0,075B > 0,07B$.
- 2.** Вторая книга на треть дешевле первой, то есть на $33\frac{1}{3}\%$.
- 3.** Пусть вначале в каждой из бочек было по x литров воды, тогда в первой бочке после всех изменений, стало $x \cdot 0,9 \cdot 1,1 = 0,99x$ литров воды, а во второй $x \cdot 1,1 \cdot 0,9$ – то есть тоже $0,99x$ литров воды. Ответ: поровну.

4. Пусть вначале молоко стоило x руб. В первом магазине оно стало стоить на 40% дешевле, то есть $0,6x$ руб. Во втором магазине после первого понижения молоко стало стоить $0,8x$, а после второго $0,8x \cdot 0,75 = 0,6x$ руб. Таким образом, молоко в каждом из магазинов вновь стоит одинаково.
5. Товар подешевел на 20%. Следовательно, весь ранее купленный товар можно было бы купить, истратив 80% денег, а на оставшиеся 20% можно купить еще $\frac{1}{4}$ часть товара, что составляет 25%.
6. Пусть вес свежих грибов $100x$ кг, тогда вес сухого вещества в них x кг. После подсушивания, вес сухого вещества не изменился и стал составлять 2% (одну пятидесятую) от веса грибов. Вес сухих грибов – $50x$ кг, а значит уменьшился в два раза.
7. Заметим, что $85\% + 75\% = 160\%$, что на 60% превышает общее число делегатов конференции. За счет кого образовался излишек? За счет тех людей, которые знают оба языка – их мы посчитали дважды. Таким образом, оба языка знают не менее 60% делегатов конференции.
8. Пусть в первый поход ходило a человек, а во второй b человек. Тогда, в первый поход ходило $0,6a$ мужчин и $0,4a$ женщин, а во второй – $0,75b$ мужчин и $0,25b$ женщин. При этом, количество женщин не превышает $0,4a + 0,25b$, а количество мужчин не меньше, чем наибольшее из чисел $0,6a$ и $0,75b$. Пусть $0,6a > 0,75b$. Тогда: $0,6a > 0,4a + 0,25b$ (так как $0,2a > 0,25b$). Случай, когда наибольшее – $0,75b$, разбирается аналогично.
9. В 40 кг морской воды содержится $40 \cdot 0,05 = 2$ (кг) соли, что в новом растворе составляет 2%, следовательно, раствора должно быть $2 : 0,02 = 100$ (кг). Ответ: следует добавить 60 кг пресной воды.
10. Пусть x – число участников кружка, а y – число девочек. Тогда, согласно условиям задачи, $0,09x > y$ или $9x > 100y$, где x и y – натуральные числа. Решая задачу перебором, убедимся, что наименьшее возможное решение при $y = 2$ достигается при $x = 23$. Таким образом, в кружке не менее 23 человек.

11. Пусть x – число математиков, которые одновременно являются философами, тогда математиков – $10x$, а философов – $100x$. Следовательно, философов больше.

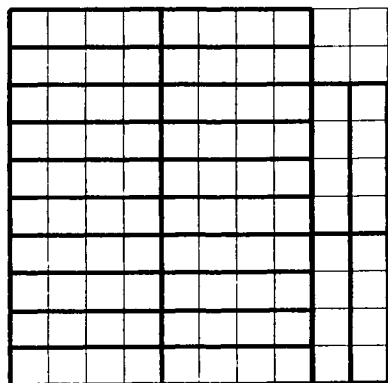
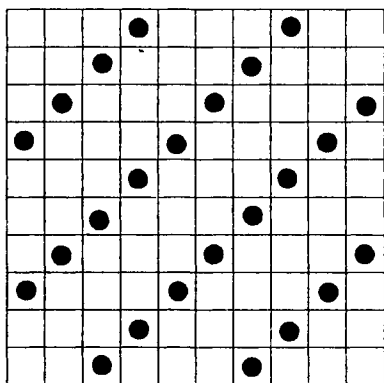
12. Надпись должна выглядеть так:

«В этой надписи использованы цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, причем: цифра 0 использована 2 раз; цифра 1 использована 2 раз; цифра 2 использована 8 раз; цифра 3 использована 4 раз; цифра 4 использована 3 раз; цифра 5 использована 2 раз; цифра 6 использована 2 раз; цифра 7 использована 2 раз; цифра 8 использована 3 раз; цифра 9 использована 2 раз».

13. Поскольку первая страница в вырванном блоке имеет нечетный номер, а последняя четный, то вся сумма должна быть нечетной. Значит, число 1998 получиться не могло.

14. К каждой грани кубика примыкает $8 \times 8 = 64$ кубика, окрашенных только с одной стороны (сделайте рисунок!). Граней – 6, следовательно, с одной стороны окрашено 384 кубика. Рассуждая аналогично, получим, что окрашено с двух сторон 96 кубиков.

15. Заметим, что на доске 10×10 одновременно помещается 24 корабля, поэтому обнаружить корабль меньшим числом выстрелов не удастся. Стреляя так, как показано на первом рисунке, мы обязательно заденем корабль. После этого за 4 выстрела определим в каком «направлении» он расположен и еще за 2 выстрела уничтожаем его.



Чем все это закончится?

Правильно предсказать будущее трудно, но иногда возможно. Например, иногда при изучении того или иного *процесса* можно выделить *инварианты* – величины (или соотношения), которые в ходе данного процесса остаются постоянными.

1. *Топологическая задача.* Две одинаковые змеи начинают заглатывать друг друга с хвоста. Чем это закончится?
2. *Хулиган Вася* порвал свой дневник на 4 части, этого ему показалось мало, поэтому некоторые (может быть и все) из этих частей он тоже порвал на 4 части и так далее. Мама нашла 50 «кусочков» дневника. Все ли куски нашла мама?
3. *В гостях у мумбо – юмбо.* В языке племени *мумбо–юмбо* всего два звука: «ы» и «у». Два слова означают одно и то же, если одно получается из другого при помощи некоторого числа следующих операций: пропуска идущих подряд звуков «*уу*» или «*ууыы*» и добавления в любом месте звуков «*уы*». Означают ли одно и то же слова «*ууу*» и «*ыуы*»?
4. *Еще один цирковой номер.* На столе 6 стаканов. Из них пять стоят правильно, а один перевернут доньшком вверх. Разрешается переворачивать одновременно 4 любых стакана. Можно ли все стаканы поставить правильно?
5. *Очевидное – невероятное.* Биологи открыли удивительную разновидность амёб. Каждая из них ровно через минуту делится на две. Биолог кладет амёбу в пробирку, и ровно через час пробирка оказывается полностью заполненной амёбами. Сколько времени потребуется, чтобы вся пробирка заполнилась амёбами, если в нее положить не одну, а две амёбы?
6. *Кузнечик прыгает по прямой:* первый прыжок на 1 см, второй – на 2 см, третий – на 3 см, и так далее. Может ли он после двадцати пятого прыжка вернуться в ту точку, с которой начал?
7. *На складе было 7 ящиков.* В некоторые из них положили еще по 7 ящиков и так несколько раз. В итоге стало 10 непустых ящиков. Сколько всего стало ящиков?

8. Вопросы оплаты. Ваш нынешний оклад – 20000 рублей в год. Ваш начальник предлагает вам на выбор два варианта, по которым может рассчитываться ваша зарплата. Зарплата будет выдаваться каждые 6 месяцев.

1. Первоначальный годовой оклад будет увеличиваться через каждые 12 месяцев на 1000 рублей.
2. Ваша зарплата будет увеличиваться каждые 6 месяцев на 250 рублей.

Какой вариант Вам выгоднее?

9. Съест или не съест? В колонию, состоящую из 200 бактерий, попадает один вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию, затем делится на два новых вируса, и одновременно каждая из оставшихся бактерий тоже делится на две новые. В следующую минуту возникшие два вируса уничтожают две бактерии, и затем оба вируса и все оставшиеся бактерии снова делятся и так далее. Будет ли эта колония жить бесконечно долго? Если она в конце концов погибнет, то через какое время это произойдет?

10. У числа 1999! вычислили сумму цифр. У полученного числа опять вычислили сумму цифр. И так продолжали до тех пор, пока не получилось однозначное число. Что это было за число?

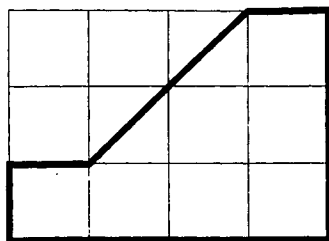
11. Угадайте число. Шестиклассники Петя, Вася, Коля и Антон высказали следующие утверждения. Петя: «Это число простое». Вася: «Это число 9». Коля: «Это число четное». Антон: «Это число 15». Известно, что из утверждений Пети и Васи только одно истинное, так же как и из утверждений Коли и Антона. Какое число задумано?

12. Для нумерации страниц энциклопедии потребовалось 6869 цифр. Сколько в ней страниц?

13. Про кошку. Вокруг Земли, по экватору, натянули ленточку. Затем длину ленточки увеличили на 1 метр и опять равномерно расположили вокруг экватора. Сможет ли кошка пролезть в образовавшийся зазор?

14. Сократите дробь:
$$\frac{37373737}{81818181}$$

- 15. Разрежьте данную фигуру на две равные части:**



Решения и ответы

- Откровенно говоря, решение этой задачи нам неизвестно. Вот решение, предложенное одним шестиклассником. Предположим, что условие задачи выполняется, тогда в какой-то момент времени вторая змея должна оказаться внутри первой, и, из соображений симметрии, первая – внутри второй, что невозможно, следовательно, ... двух одинаковых змей не существует.
- Если рвать дневник на 4 части, то на каждом шаге «кусочков» становится на 3 больше. Так как вначале был всего один дневник, то после n шагов будет $3n+1$ «кусочек». Так как при натуральных n , $3n+1 \neq 50$, то маме не удалось найти всех кусочков дневника.
- Заметим, что при любой из разрешенных операций количество букв «ы» и «у» в слове изменяется на одно и тоже число. Поэтому, из слова «ууу», где букв «у» больше, нельзя получить слова «ыуы», в котором букв «у» меньше. Ответ: нет.
- Первое решение:** Заметим, что число стаканов, стоящих неправильно, всегда остается нечетным, следовательно, оно не может стать равным 0.
Второе решение: поставим в соответствие каждому правильно стоящему стакану число 1, а каждому неправильно стоящему стакану число -1. Будем вычислять произведение чисел, соответствующее тому или другому положению стаканов. Произведение, соответствующее нормальному положению стаканов, равно 1, а начальному положению равно -1. При каждом переворачивании это произведение

«умножается» на $(-1)^4$. Таким образом, из -1 нельзя получить 1.

5. В начале опыта в пробирке одна амеба, через одну минуту уже две, и далее до полного заполнения пробирки проходит 59 минут, что и будет ответом задачи.
6. Пусть кузнечик прыгает по числовой прямой и начинает из точки с координатой 0. Заметим, что после 25 прыжка он окажется в точке с нечетной координатой (среди чисел от 1 до 25 – нечетных – нечетное число). Так как 0 – число четное, то он не может вернуться.
7. Обратите внимание на то, что как бы не докладывали новые ящики, все равно итоговое количество ящиков не изменится. Предположим, что в каждый из данных ящиков мы положили по 7 ящиков, и у нас стало 7 непустых ящиков; итого: $(7 \times 7) + 7 = 56$ ящиков. Далее, в любые 3 из вновь положенных ящиков нам достаточно положить по 7 ящиков и у нас станет 10 непустых ящиков. Ответ: 77 ящиков.
8. Может показаться, что первый вариант выгоднее. Однако:

Полугодие	1 вариант	2 вариант
1-е	10000 руб.	10000 руб.
2-е	10000 руб.	10250 руб.
3-е	10500 руб.	10500 руб.
4-е	10500 руб.	10750 руб.
5-е	11000 руб.	11000 руб.
6-е	11000 руб.	11250 руб.
7-е	11500 руб.	11500 руб.

Из таблицы видно, что второй вариант предпочтительней.

9. Рассмотрим таблицу:

Время (мин.)	Количество вирусов	Количество бактерий
0	1	200
1	2	$2 \cdot 199$
2	2^2	$2^2 \cdot 198$
3	2^3	$2^3 \cdot 197$
...
t	2^t	$2^t(200-t)$
...
200	2^{200}	$2^{200}(200-200)=0$

Следовательно, при $t=200$ количество бактерий обратится в ноль – колония погибнет. Ответ: колония просуществует 200 минут.

10. Число 1999! делится на 9, следовательно, сумма его цифр тоже делится на 9 и так далее. Однозначное число, которое получится в конце процесса, должно делиться на 9, это число – 9.

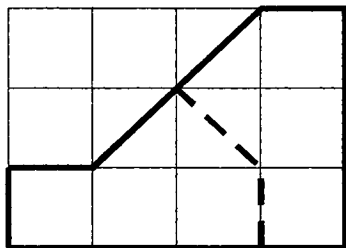
11. Заметим, что если Вася сказал правду, то и Коля, и Антон солгали. Значит, правду сказал Петя. Исходя из этого – Антон солгал. Следовательно, задумано число 2.

12. Заметим, что однозначных чисел – 9, двузначных $99-9=90$, цифр – $90 \times 2 = 180$; трехзначных чисел $999-99=900$; цифр – $900 \times 3 = 2700$. Вычислим количество четырехзначных чисел в нумерации страниц книги: $6869-2700-180-9=3980$, $3980:4=995$. Сложив полученные результаты, получим: $9+90+900+995=1094$ страницы в энциклопедии.

13. Пусть радиус Земли R , а образовавшийся зазор h , тогда $2\pi(R+h)-2\pi R = 1$ и $2\pi h=1$. Следовательно, величина зазора $h=\frac{1}{2\pi} \approx 15$ см – вполне достаточный зазор, чтобы пролезла кошка.

14. Решение: $\frac{37373737}{81818181} = \frac{37 \cdot 1010101}{81 \cdot 1010101} = \frac{37}{81}$.

15. Смотрите рисунок:





Языки Математики

Решение большинства задач данного раздела можно начать словами: на языке алгебры (геометрии, графиков функций)... При этом, приложениями «языка алгебры» являются уравнения и неравенства, словами «языка геометрии» являются геометрические фигуры: прямые, отрезки и треугольники. Если правильно выбрать один из математических языков, то иногда удастся решить задачу, которая ранее казалась неприступной...

1. **Ошибочная запись.** Петя написал на доске пример на умножение двузначных чисел. Затем он стер все цифры и заменил их буквами. Получилось равенство:
 $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{mnpkt}$. Докажите, что он ошибся.
2. **В некотором царстве** доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех его жителей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди жителей царства?
3. **О рыбаке и рыбе.** Когда у рыбака спросили, как велика пойманная им рыба, он сказал: «Я думаю, что хвост ее – 1 кг, голова – столько, сколько хвост и половина туловища, а туловище – сколько голова и хвост вместе». Как велика рыбка?
4. **Сколько лет каждому из нас?** Мне сейчас вдвое больше лет, чем вам было тогда, когда мне было столько лет, сколько вам сейчас. Нам обоим вместе сейчас 35 лет. Сколько лет каждому из нас?
5. **Задача металлурга.** Первый сплав состоит из цинка и меди, входящих в него в отношении 1:2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2:3. Из скольких частей обоих сплавов можно получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17:27?
6. **Стадо слонов.** На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов могло бы выпить его за один день, а стадо из 37 слонов за 5 дней. За сколько дней выпьет озеро 1 слон?
7. **Из Гавра в Нью-Йорк** каждый день в полдень отправляется пароход через Атлантический океан, и в то же самое время пароход той же самой компании отправляется из

Нью-Йорка в Гавр. Путь в том и другом направлении занимает 7 дней. Сколько судов своей компании, идущих в противоположном направлении, встречает пароход на пути из Гавра в Нью-Йорк?

8. Решите геометрически.

Решите уравнение: $|x-1|=3$; $|x-1|+|x-2|=1$.

9. Задача Льва Толстого. Артели косцов надо было скосить два луга – один вдвое больше другого. Половину дня вся артель косила большой луг. После полудня артель разделилась пополам: первая половина осталась на большом лугу и докосила его к вечеру до конца, а вторая половина косила малый луг, на котором к вечеру остался участок, скошенный на другой день одним косцом, проработавшим целый день. Сколько было косцов в артели?

10. Буддийский монах. Монах с 6 утра до 6 вечера поднимался на гору и там ночевал. На следующий день с 6 утра до 2 дня он спустился по той же дороге. Докажите, что в пути было такое место, где он находился в одно и то же время и на подъеме и на спуске (монах часто отдыхал и шел неравномерно).

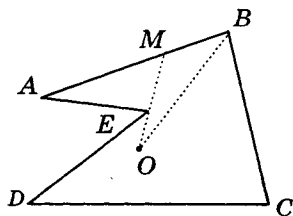
11. Задача о стрелках часов. Через какое время после 12.00 минутная стрелка впервые догонит часовую?

12. Нехитрые манипуляции. С числом, записанным на доске, разрешается производить следующие операции: заменять его удвоенным, или стирать его последнюю цифру. Как с помощью этих операций получить из числа 458 число 14?

13. Задача Г. Дюдени. Если полторы курицы несут полтора яйца за полтора дня, то сколько кур плюс еще полкурицы, несущихся в полтора раза быстрее, снесут десяток яиц с половиной за полторы недели?

14. Трудовые будни. Трое рабочих роют яму. Они работают по очереди, причем каждый работает столько времени, сколько нужно двум другим, чтобы вырыть половину ямы. Работая таким образом, они вырыли яму. Во сколько раз быстрее они закончили бы работу, если бы работали одновременно?

- 15.** Нарисуйте многоугольник и точку внутри него, чтобы ни одна сторона многоугольника не была видна из этой точки полностью (на рисунке из точки O не полностью видна сторона AB).



Решения и ответы

1. Равенство $ab \cdot cd = mnprkt$ получится не может, так как наибольшее возможное произведение двузначных чисел $99 \cdot 99 < 100 \cdot 100 < 10000$.
2. Пусть ΓB – число голубоглазых блондинов, Γ – просто голубоглазых, B – блондинов, B – всех людей. Переведем условие задачи на «язык алгебры»: $\frac{\Gamma B}{\Gamma} > \frac{B}{B}$. Умножив обе части равенства на $\frac{\Gamma}{B}$, получим: $\frac{\Gamma B}{B} > \frac{\Gamma}{B}$. После обратного перевода получим, что доля голубоглазых среди блондинов больше, чем среди всех людей.
3. Пусть $2x$ кг – весит туловище, тогда голова будет весить $x+1$ кг. Из условия, что туловище весит столько же, сколько голова и хвост вместе, получаем уравнение: $2x = x+1+1$. Откуда $x=2$, а вся рыба весит – 8 кг.
4. Пусть $2x$ – мне сейчас, а y – вам сейчас, тогда y – мне тогда, а x – вам тогда. Сколько же лет прошло? Можно считать двумя способами: $2x - y = y - x$. Кроме того известно, что $2x + y = 35$. Далее из первого уравнения получим: $2y = 3x$. С другой стороны, $y = 35 - 2x$. Откуда: $70 - 4x = 3x$ и $x = 10$; $y = 15$. Значит мне сейчас 20 лет, а вам – 15.
5. Запишем условие задачи в виде таблицы:

сплавы:	вес цинка (кг)	вес меди (кг)	возьмем для нового сплава (кг)
1 сплав	x	$2x$	A
2 сплав	$2y$	$3y$	B
новый	$x + 2y$	$2x + 3y$	

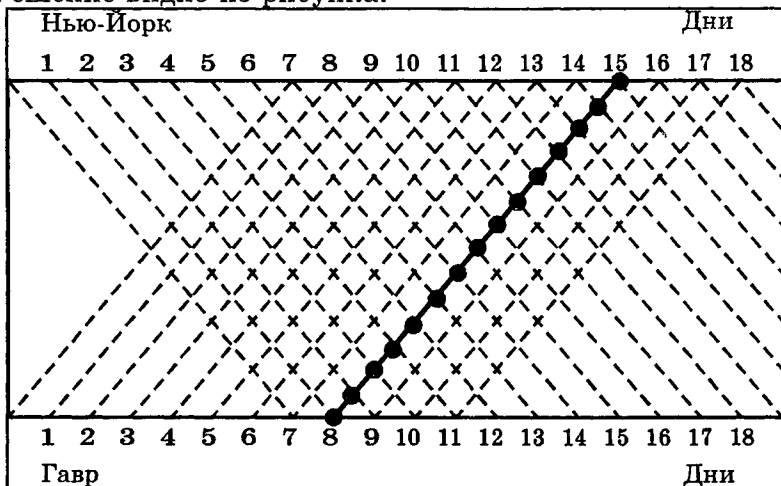
Заметим, что: $\frac{x+2y}{2x+3y} = \frac{17}{27}$, или $27x+54y=34x+51y$, откуда

$$3y=7x. \text{ Так как } 3x=A, 5y=B, \text{ то } \frac{A}{B} = \frac{3x}{5y} = \frac{21x}{35y} = \frac{9y}{35y} = \frac{9}{35}.$$

Сплавы следует взять в соотношении 9:35.

6. Переведем задачу на язык алгебры. Пусть объем озера – V л, слон выпивает в день C л воды, а из ключей в озеро попадает K л в день. Тогда выполняются два равенства: $183C = V + K$ и $37.5C = V + 5K$; откуда: $C=2K$ и $V=365K$. Пусть один слон выпивает озеро за t дней. Тогда: $tC = V + tK$, или $2Kt = 365K + Kt$, откуда $t=365$. Ответ: за 365 дней.

7. Решение видно из рисунка:

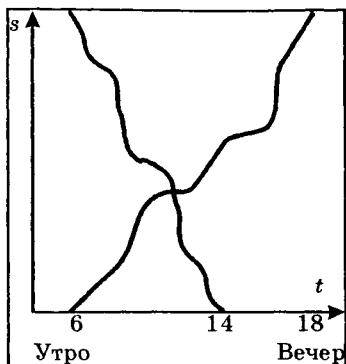


8. Решим задачи, сформулировав их «геометрически»:
- «Найти на числовой оси такую точку x , чтобы расстояние от x до 1, было равно 3».
- Из рисунка (сделайте!) видно, что таких точек две: $x=4$ или $x=-2$.
- «Найти на числовой оси такую точку x , чтобы сумма расстояний от нее до 1 и 2 равнялась 1».
- Из рисунка понятно, что $1 \leq x \leq 2$.
9. Пусть в артели K косцов. Тогда за первую половину дня они скосили поле площадью Ka (a – ширина луга). За вторую половину дня – $0,5Ka$ луга, что в сумме составило

площадь большего луга. Площадь недокошенной части маленького луга равна $0,25Ka$. Следовательно, 1 косец за день скашивает $0,25Ka$. Ответ: 8 человек.

10. Из графика понятно, что такое место обязательно найдется.

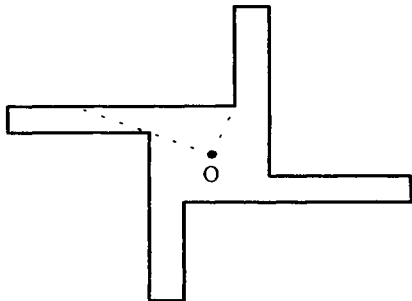
11. В 13.00 минутная стрелка будет отставать от часовой на 5 минутных делений. До "встречи" часовая стрелка пройдет x делений, а минутная — $12x$ делений. Из уравнения $x+5=12x$ получим, что $x=\frac{5}{11}$ минутных делений циферблата. Ответ: 1 час $5\frac{5}{11}$ минуты.



12. Пусть А — удвоение числа, а Б — стирание последней цифры. Тогда:
 $458-B \Rightarrow 45-A \Rightarrow 90-B \Rightarrow 9-A \Rightarrow 18-A \Rightarrow 36-A \Rightarrow 72-B \Rightarrow 7-A \Rightarrow 14$.

13. Если полторы курицы несут полтора яйца за полтора дня, то одна курица за полтора дня снесет одно яйцо. Курица, которая «работает» быстрее в полтора раза, снесет полтора яйца за полтора дня (по одному яйцу в день). Поэтому, эта курица снесет десять с половиной яиц за десять с половиной дней (полторы недели). Ответ: полкурицы.

14. Пусть каждый из них работал соответственно a, b и c часов. Следовательно, работа была закончена за $a+b+c$ часов. Представим себе, что все это время они работают вместе. Сколько всего ям они выкопают? За первые a часов первый рабочий выкопает свою долю от «общей» ямы, а двое других за это время выкопают пол-ямы. За следующие b часов второй сделает свою часть работы, а остальные выкопают еще пол-ямы. Наконец, третий (за c часов) доделает свою часть работы, и остальные выкопают еще пол-ямы. Итого будет выкопано 2,5 ямы. Поэтому, вдвоем они выкопали бы яму в 2,5 раза быстрее.



15. Смотрите рисунок:

10

Как это сделать?

Легко переправиться на другой берег, когда места в лодке хватает всем, легко налить 4 литра молока в четырехлитровую банку или ехать втроем на мотоцикле с коляской. А как быть, если в лодке только два места, банки только трех и пятилитровые, а на мотоцикле можно ехать только вдвоем? Ответ прост: надо немного подумать...

- 1. О волке, козе и капусте.** Через реку надо перевезти троих: волка, козу и кочан капусты. На лодке, кроме перевозчика, может поместиться только один из трех. Как перевезти их, чтобы коза не смогла съесть капусту, а волк не смог съесть козу?
- 2. Фальшивые монеты.** Из девяти монет одна фальшивая: она легче остальных. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить, какая именно?
- 3. Другие весы.** Наука шла вперед. Теперь в распоряжении экспертов – высокоточные электронные весы. Но и задачи теперь более трудные. Вот одна из них: имеется 10 мешков монет, в девяти мешках монеты настоящие (вес одной монеты – 10 г.), в одном – фальшивые (вес одной монеты – 11 г.). Как одним взвешиванием определить в каком мешке фальшивые монеты?
- 4. Разделим поровну.** В восьмилитровом бидоне находится молоко. Как при помощи пятилитрового бидона и трехлитровой банки отмерить 4 литра молока?
- 5. У Змея Горыныча 2000 голов.** Сказочный богатырь одним ударом отрубает 1, 17, 21 или 33 головы, но при этом, соответственно, вырастают 10, 14, 0 или 48 голов. Если все головы отрублены, то новые не отрастают. Сможет ли богатырь победить Змея?
- 6. Как пересечь пустыню?** Путешественник должен пройти по пустыне 80 км. За один день он проходит 20 км и может нести запас пищи и воды на 3 дня. Поэтому он должен делать промежуточные станции с запасами пищи и воды. Может ли он пересечь пустыню за 6 дней?
- 7. Перед уроком.** В школьном кабинете химии имеются три банки с серной кислотой емкостью 1, 2 и 3 литра. Концентрация кислоты в этих банках неизвестна (скорее всего

она различна – но в точности этого никто не знает). Требуется перелить кислоту в три пустые банки такой же емкости, но так, чтобы концентрация кислоты во всех банках была одинакова. Как это сделать?

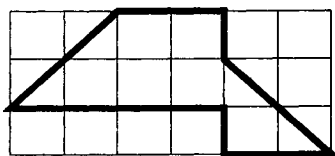
- 8. На монетном дворе.** Известно, что монеты в 1, 2, 3 и 5 копеек весят, соответственно 1, 2, 3 и 5 граммов. Среди четырех монет (по одной каждого достоинства) одна фальшивая – отличается весом от настоящей. Как с помощью взвешиваний на чашечных весах без гирь определить фальшивую монету?
- 9. Возможно ли это?** Могут ли три человека преодолеть расстояние 60 км за 3 часа, если в их распоряжении имеется двухместный мотоцикл? Скорость мотоцикла 50 км/ч, скорость пешехода 5 км/ч.
- 10. Два миллиона точек.** На плоскости отмечены два миллиона точек. Можно ли провести прямую так, чтобы по каждую сторону от нее находилось бы ровно по одному миллиону таких точек?

- 11. Страшное неравенство.** Докажите, что $\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \dots + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2}$.

- 12. Восстановите цифры.** На доске было написано произведение трех последовательных четных чисел. На перемене Вася стер некоторые цифры. В результате на доске осталось 87****8. Помогите Пете найти недостающие цифры в произведении.

- 13. Из пустого в порожнее.** В одном сосуде имеется 2а литров воды, а другой пустой. Из первого сосуда переливают половину имеющейся в нем воды во второй, затем из второго переливают $\frac{1}{3}$ имеющейся в нем воды в первый, затем из первого переливают $\frac{1}{4}$ имеющейся в нем воды во второй и так далее. Сколько литров воды будет в первом сосуде после 1997-го переливания?

- 14. Садовый участок.** Длину прямоугольного участка земли увеличили на 35%, а ширину уменьшили на 14%. На сколько процентов изменилась площадь участка?



- 15. Разрежьте фигуру на две равные части:**

Решения и ответы

1. *Во-первых:* перевезем козу. *Во-вторых:* оставим ее на том берегу, вернемся и перевезем волка. *В-третьих:* поскольку волка вместе с козой оставлять нельзя, вернемся вместе с козой, оставим ее, а на тот берег перевезем капусту. *В-четвертых:* и, наконец, перевезем козу.
2. Разобьем монеты на 3 кучки по 3 монеты. *Первое взвешивание:* положим по 3 монеты на каждую чашку весов. Возможны два случая: 1. Равновесие, тогда на весах только настоящие монеты, а фальшивая среди тех монет, которые не взвешивались; 2. Одна из кучек легче, то в ней фальшивая монета. *Второе взвешивание:* Теперь требуется найти фальшивую среди трех монет, что мы умеем делать.
3. Напишем на каждом мешке номер от 1 до 10 и возьмем из каждого мешка количество монет, совпадающее с его номером, всего 55 монет. Если бы все они были настоящие, то их вес составил бы 550 грамм, но среди них есть фальшивые, и вес будет больше. Если фальшивые монеты в первом мешке, то разница в весе составит 1 грамм, если во втором – 2 грамма и так далее. Определив эту разницу, мы и узнаем в каком мешке фальшивые монеты.
4. Решение удобно записать в виде таблицы:

бидон 8 л	8	3	3	6	6	1	1	4
бидон 5 л	0	5	2	2	0	5	4	4
банка 3 л	0	0	3	0	2	2	3	0

5. Можно предложить такую тактику отрубания голов у Змея: 1. Вначале будем отрубать по 21 голове (94 раза); новых голов не отрастает, и у Змея останется 26 голов. 2. Далее отрубим три раза по 17 голов (напомним, что при этом вырастет по 14 голов) – после чего останется отрубить 17 голов. 3. Последним ударом отрубим 17 голов.
6. Он может пересечь пустыню за 6 дней, если будет действовать так: 1) за первые 2 дня организует станцию в 20 км от начального пункта, где будет запас пищи на 1 день; 2) за следующие 4 дня он преодолеет пустыню так как, когда

он придет на промежуточную станцию, у него будет запас пищи и воды еще на 3 дня пути.

7. Основная проблема в задачах такого типа – как сделать решение понятным? 1. какие именно переливания делались? Это легче всего показать с помощью таблицы:

№ шага	Емкости:					
	1 л.	2 л.	3 л.	1 л.	2 л.	3 л.
0	1 л.	2 л.	3 л.			
1			3 л.			3 л.
2	1 л.		2 л.	1 л.		2 л.
3		2 л.	2 л.			2 л.
4	1 л.	2 л.	1 л.	1 л.		1 л.
5		2 л.	1 л.		2 л.	1 л.
6		2 л.			2 л.	2 л.
7		1 л.			2 л.	3 л.
8				1 л.	2 л.	3 л.

2. почему мы уверены, что во всех банках получен раствор одинаковой концентрации? Действительно, после первого шага мы получили два различных раствора вместо трех, а дальше для создания нового раствора мы берем равные доли каждого из двух имеющихся видов (цветом выделены емкости, где нужная концентрация уже достигнута).

8. Чтобы узнать какая монета фальшивая выполним следующие взвешивания:

1) 1 коп.+2 коп. и 3 коп.; 2) 2 коп.+3 коп. и 5 коп.

Если при первом взвешивании будет равновесие, то бракованная монета – 5 коп., если при втором, то бракованная монета – 1 коп. Если же равновесия не будет, то обе монеты, 1 коп. и 5 коп., – настоящие, а одна из монет, 2 коп. или 3 коп., – бракованная. Кроме того, из второго взвешивания можно будет сделать вывод легче или тяжелее настоящей фальшивая монета. Если при первом взвешивании перевесит та же чашка весов, что и при втором, то фальшивая монета – 2 коп., иначе 3 коп.

9. Да. В течение первого часа двое (*А* и *В*) проезжают 50 км, а третий (*С*) проходит 5 км пешком. Далее *В*, сойдя с мотоцикла, добирается до пункта назначения за 2 часа пешком. В течение второго часа *С* проходит еще 5 км, а *А* возвращается на 40 км и ждет его там. За оставшийся час *А* и *С* на мотоцикле добираются до пункта назначения.

10. Возьмем точку, лежащую справа от данного множества точек, так, чтобы она не лежала ни на одной прямой, которую можно провести через произвольные две точки, принадлежащие данному множеству. Проведем через нее прямую так, чтобы все точки оказались слева от нее. Начнем поворачивать эту прямую по часовой стрелке. Она пройдет последовательно через все точки этого множества и наступит момент, когда слева от прямой будет миллион точек.

11. Чем больше знаменатель, тем меньше дробь. Поэтому:

$$\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002} + \dots + \frac{1}{2000} > \frac{1}{2000} + \frac{1}{2000} + \dots + \frac{1}{2000} = \frac{1}{2}.$$

12. Это числа $442 \cdot 444 \cdot 446 = 87526608$.

13. Будем записывать в таблицу количество воды в сосудах после каждого переливания.

шаги	0	1	2	3	4	5	6	7
1	$2a$	a	$\frac{4}{3}a$	a	$\frac{6}{5}a$	a	$\frac{8}{7}a$	a
2	0	a	$\frac{2}{3}a$	a	$\frac{4}{5}a$	a	$\frac{6}{7}a$	a

Докажем, что если на каком-либо нечетном шаге в сосудах будет одинаковое количество воды, то на следующем нечетном шаге в сосудах также будет одинаковое количество воды. Действительно, разделив воду в одном сосуде на n частей и добавив эту часть в другой сосуд, мы в нем получим $n+1$ такую часть (так как перед этим воды в сосудах было поровну). Следовательно, когда на следующем шаге мы из второго сосуда одну из частей возвращаем обратно, мы просто восстанавливаем предыдущее состояние.

14. Пусть a – длина участка, а b – его ширина. Длина увеличилась в 1,35 раза, а ширина увеличилась в 0,86 раз. Значит площадь увеличилась в 1,161 раза. Выразим в процентах – 116,1%.

15. Смотрите рисунок:



Календарь

Календарь, которым мы пользуемся (он называется григорианским), устроен следующим образом: каждый год состоит из 365 дней, за исключением тех лет, чьи номера делятся на 4. Такие годы называются *високосными* и они содержат на день больше. Но и тут есть исключения. Годы, номера которых делятся на 100, но не делятся на 400, високосными не считаются. Заметим, что обычный год содержит 52 недели и 1 день, а високосный – 52 недели и 2 дня...

1. *Некий древний грек* родился 7 января 40 года до нашей эры, а умер 7 января 40 года нашей эры. Сколько лет он прожил?
2. Какой *сегодня день недели*, если известно, что «когда послезавтра станет вчера, то сегодня будет так же далеко от воскресенья, как тот день, который был сегодня, когда вчера было завтра»?
3. Сколько *пятниц*? Какое наибольшее число пятниц может быть в году?
4. В семье *шестеро детей*. Пятеро из них соответственно на 2, 6, 8, 12 и 14 лет старше младшего, причем возраст каждого ребенка – простое число. Сколько лет младшему?
5. *Может ли* в каком-либо месяце быть 5 понедельников и 5 четвергов?
6. В каком году тринадцатое число никогда не приходится на понедельник?
7. В одном месяце три среды пришлись на четные числа. Какого числа в этом месяце будет второе воскресенье?
8. С *новым годом!* Какой день недели был 1 января, если в январе этого года было четыре пятницы и четыре понедельника?
9. 10 апреля 1998 года – *пятница*. Каким днем недели было 6 июля 1918 года? Будет 6 июня 2018 года?
10. С чего чаще начинается год: с субботы или с воскресенья?
11. *Восток дело тонкое*. По обычаю одной восточной страны жене запрещается оставаться без мужа в обществе мужчин. Однажды трем супружеским парам понадобилось переправиться с северного берега реки на южный. Единст-

венное подручное средство – лодка, вмещающая двух человек. В какой последовательности они должны были переправляться, чтобы соблюсти строгий обычай?

- 12. Кошки–мышки.** Если n кошек за n часов съедят n мышек, то сколько мышек съедят p кошек за p часов?
- 13. В строке 20 чисел.** Известно, что сумма любых трех чисел, стоящих рядом, больше нуля. Можно ли утверждать, что сумма всех 20 чисел больше нуля?
- 14. Поесть или поспать?** Будем считать, что если человек не будет 7 суток есть или 7 суток спать, то умрет. Пусть человек неделю не ел и не спал. Что он должен сделать в первую очередь к концу седьмых суток: поесть или поспать, чтобы остаться в живых?
- 15. На часах 9 часов 15 минут.** Чему равен угол между минутной и часовой стрелками?

Решения и ответы

- 1.** Он жил 79 лет.
- 2.** Ответ: среда. Тогда «послезавтра станет вчера» – пятница, а «тот день, который был сегодня, когда вчера было завтра» – понедельник.
- 3.** Среди любых последовательных семи дней пятница встретится обязательно. Учитывая, что $365=52 \cdot 7 + 1$ получим, что максимальное число пятниц в году – 53.
- 4.** Предположим, что возраст ребенка не превышает 35 лет. Выпишем все простые числа: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31. Понятно, что возраст младшего ребенка – нечетное число. Также не подходят числа 29 и 31. Найдем возраст младшего ребенка. Ему не может быть 1 год, так как $1+8=9$. Его возраст не может оканчиваться на 3, так как $3+2=5$. Осталось 5, 7, 11, 17 и 19. Не 7 лет, так как $7+2=9$. Не 17 лет, ведь $17+8=25$. Не 19 лет: $19+2=21$. И не 11: $11+14=25$. Следовательно, младшему 5 лет.
Ответ: 5, 7, 11, 13, 17 и 19 лет.
- 5.** Пусть в некотором месяце 5 понедельников и 5 четвергов, тогда в этом месяце не менее 32 дней.

- 6.** В любом году хотя бы один понедельник будет тринадцатым числом – убедитесь в этом сами: если 13 марта – вторник, то 13 августа – понедельник; если 13 марта – среда, то 13 мая – понедельник; если 13 марта – четверг, то 13 октября – понедельник; если 13 марта – пятница, то 13 апреля – понедельник; если 13 марта – воскресенье, то 13 июня – понедельник. Как Вы думаете, почему мы начали рассмотрение с 13 марта, а не с 13 января?
- 7.** Если в одном месяце три среды пришлись на четные числа, то первая среда – 2 число, третья – 16, пятая – 30 число (если, например, первая среда – 4, то пятая – 32), тогда второе воскресенье будет 13 числа.
- 8.** Ответ: 1 января был вторник.
- 9.** 10 апреля в 1918 году – суббота, в 2018 году – вторник.
- 10.** Заметим, что если среди подряд идущих 28 лет каждый четвертый год високосный (т.е. нет ни одного года, номер которого делится на 100, но не делится при этом на 400), то эти 28 лет содержат целое число недель, и так как 1 января 1901 года был вторник, то и 1 января 1929 года тоже будет вторник. Можно подсчитать, что в течение этих 28 лет Новый год будет начинаться с суббот и воскресений одинаковое число раз. Заметим, что 400 лет также содержит целое количество недель (так как число ежегодных добавочных дней равно 497: 3 дня теряется за счет «потерянных» високосных лет). Следовательно, период нашего календаря не 28, а 400 лет.

	Дни с которых начинается Новый год с 1901 по 1928 гг.				
Понедельник	1906	1912	1917	1923	
вторник	1901	1907	1918	1924	1929 ²
среда	1902	1908	1913	1919	
четверг	1903	1914	1920	1925	
пятница	1904	1909	1915	1926	
суббота	1910	1916	1921	1927	
воскресенье	1905	1911	1922	1928	

Так же будут распределяться дни недели в 1929 – 1956 гг., в 1957 – 1984 гг. и так далее до 2096 года (так как 2000

² Начало нового периода!

год високосный). Таким образом, 1 января 2097 года будет вторник. Далее, 1 января 2098 года – среда, 2099 года – четверг, 2100 года – пятница, 2101 года – суббота.

Аналогично, в очередные 28-летия (2101–2128, 2129–2156 и 2157–2184) Новый год будет начинаться одинаковое число раз с каждого дня недели, а 1 января 2129, 2157 и 2185 годов будет субботой. Далее:

	Дни с которых начинается Новый год с 2185 по 2200 гг.			
Понедельник		2187		2198
вторник		2188	2193	2199
среда			2194	2200
четверг		2189	2195	2201
пятница		2190	2196	
суббота	2185	2191		
воскресенье	2186	2192	2197	

Аналогично, в течение следующих 84 лет (2201 до 2284) Новый год также будет начинаться одинаковое число раз со всех дней недели, а 1-го января 2185 года будет четверг.

	Дни с которых начинается Новый год с 2285 по 2300 гг.			
Понедельник			2294	2300 – цикл закончился!
вторник		2289	2295	
среда		2290	2296	
четверг	2285	2291		
пятница	2286	2292	2297	
суббота	2287		2298	
воскресенье	2288	2293	2299	

Таким образом, в течение 1901–2096, 2101–2184, 2201–2284 гг. Новый год будет начинаться одинаковое число раз со всех дней недели, остальные же годы из периода 1901–2300 гг. дадут 6 воскресений и 4 субботы. Таким образом, Новый год начинается с воскресенья чаще, чем с субботы.

- 11.** Обозначим пары как *Aa*, *Bb*, *Cc*. Где *A*, *B*, *C* – мужья, а *a*, *b*, *c* – жены. Сначала на другую сторону должны переправиться все жены. Затем с должна переправить лодку на северный берег, где в нее сядут *A* и *B*. После того, как они переправятся, в лодку должна сесть пара *Bb*. На се-

верном берегу B должна выйти из лодки, а B и C – переправятся на южный, после чего A поможет остальным жёнам переправиться туда же.

- 12.** Будем считать, что кошки едят мышек, а не наоборот. Если n кошек за n часов съедят n мышек, то одна кошка за n часов съест 1 мышку, а за 1 час – $\frac{1}{n}$ часть мышки. Следовательно, p кошек за p часов съедят $\frac{p^2}{n}$ мышек.

- 13.** Нет. Например:

-5	-5	11	-5	-5	11	-5	-5	11	-5	-5	11	-5	-5	11	-5	-5	11	-5	-5
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

- 14.** Человек не может есть и спать одновременно, поэтому срок в 7 суток после сна и после еды наступает в разное время: он либо не спал меньше 7 дней, либо не ел меньше 7 дней. Иначе он бы уже умер. В первом случае, он должен поесть, а во втором – поспать.
- 15.** Сделайте рисунок! Минутная стрелка с 9.00 до 9.15 прошла 15 делений, что соответствует $\frac{1}{4}$ части круга, то есть 90° . Часовая стрелка за это же время прошла $\frac{1}{48}$ часть круга, то есть $7^\circ 30'$. Угол между стрелками равен $172^\circ 30'$.

12

Шахматная доска

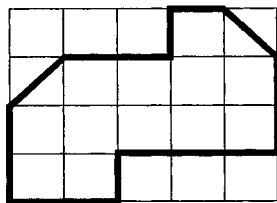
Шахматная доска раскрашена – это подсказывает решения многих задач, но ее можно раскрашивать и иначе. И хотя доска – шахматная, из всех «шахматных» правил Вам понадобится знать только то, как ходят фигуры. Заметим, что задачи на шахматной доске, при всей своей кажущейся несерьезности, привлекали внимание таких первоклассных математиков как К.Гаусс и Л.Эйлер. Уже в наше время выяснилось, что задача о ферзях, например, связана с задачами теории информации (кодирования)...

- 1. Путешествие шахматного коня.** Можно ли ходом коня обойти все клетки шахматной доски, начав с клетки $a1$, закончив в клетке $h8$, и на каждой клетке доски побывать ровно один раз?

2. *Паркет.* У шахматной доски отпилены два поля: левое нижнее и правое верхнее. Можно ли покрыть такую шахматную доску плитками размером 2×1 ?
3. *А если поля разного цвета?* Можно ли покрыть плитками размером 2×1 шахматную доску, если у нее выпилены два поля разного цвета?
4. *Гвозди «общего положения».* Можно ли в центры клеток шахматной доски забить 16 гвоздей так, чтобы никакие три гвоздя не лежали на одной прямой?
5. *Танец жуков.* Представьте себе, что вам удалось поймать 25 жуков и рассадить их по одному на каждой клетке куска шахматной доски размером 5×5 . Предположим теперь, что каждый жук переполз на соседнюю по горизонтали или по вертикали клетку этого куска доски. Останутся ли при этом пустые клетки?
6. *Мыши любят сыр.* Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к следующему кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?
7. *Задача о ферзях.* Можно ли расставить на шахматной доске восемь ферзей так, чтобы они не угрожали друг другу?
8. *Расстановка ладей.* На шахматной доске расставлено восемь ладей так, что они не бьют друг друга (на каждой горизонтали и каждой вертикали стоит по одной ладье). Покажите, что на черных клетках шахматной доски стоит четное количество ладей.
9. *Тетрамино.* Можно ли «шахматную доску» 10×10 покрыть 25 прямоугольными плитками размером 4×1 ?
10. *Шашечная доска.* На каждом из четырех отмеченных полей стоит по шашке. Шашка, как известно, стремится «в дамки». Какая из них может проделать этот путь на пустой доске наибольшим числом способов? Чему равно это число для каждой из шашек?

1	2	3	4				

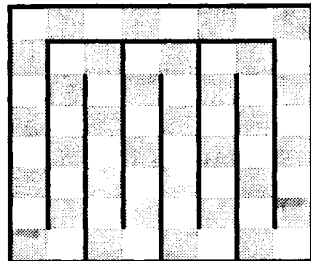
- 11.** Еще одно неверное равенство. В равенстве $101-102=1$ передвиньте одну цифру так, чтобы оно стало верным.
- 12.** Старинная русская задача. Четыре плотника у некого гостя нанялись двора ставить. И говорит первый плотник так: «Только бы де мне одному тот двор ставить, я бы де его поставил один годом». А другой молвил: «Только бы де мне одному тот двор ставить, и я бы де его поставил в два года». А третий молвил: «Только бы де мне одному тот двор ставить, и я бы де его поставил в три года». А четвертый так рек: «Только бы де мне одному тот двор ставить, и я бы де его поставил в четыре года». Ино все те четыре плотника учили тот двор ставить вместе. Ино сколь долго они ставили, сочти мне.
- 13.** В сенате страны рыцарей и лжецов – 100 сенаторов. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Известно, что: 1. По крайней мере, один из сенаторов – рыцарь. 2. Из двух произвольно выбранных сенаторов, по крайней мере, один – лжец. Определите, сколько в сенате рыцарей и сколько лжецов?
- 14.** Диофантово уравнение. Вася сказал, что умеет решать уравнение $19x^2+97x=1997$ в натуральных числах. Докажите, что Вася ошибся.
- 15.** Разрежьте фигуру на две равные части:



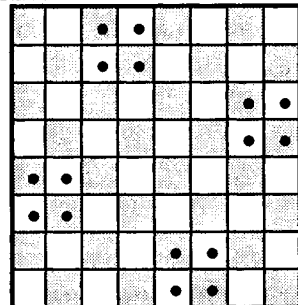
Решения и ответы

- 1.** Для того чтобы обойти все 64 клетки шахматной доски, побывав на каждом поле ровно один раз, конь должен сделать 63 хода. Так как при каждом ходе конь переходит с белого поля на черное или с черного поля на белое, то после ходов с четными номерами конь будет попадать на поля того же цвета, что и исходное, а после ходов с нечетными номерами на поля противоположного цвета. Поэтому конь не может своим шестидесятым третьим ходом попасть в правый верхний угол доски, так как он одного цвета с левым нижним.

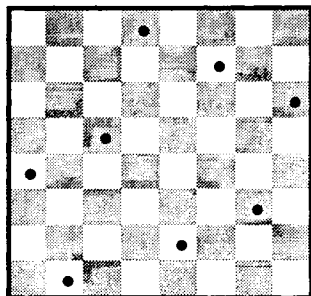
2. Каждая плитка 2×1 покрывает одно белое и одно черное поле шахматной доски. От шахматной доски отпилили два черных поля. Следовательно, белых полей осталось на два больше, чем черных, и покрыть доску плитками 2×1 нельзя.
3. Из рисунка видно, что в каждой «полоске» белые и черные клетки чередуются. Если мы вырежем две, стоящие рядом, то решение очевидно. Если нет, то цепочка разорвется на две части, в каждой из которых будет четное число клеток. Каждую из этих частей можно покрыть плитками 2×1 .



4. Смотрите рисунок. Существуют и другие расположения гвоздей.
5. Так как число клеток доски 5×5 нечетно, то черных и белых клеток не может быть поровну. Предположим, что черных клеток больше. Тогда одна из черных клеток обязательно останется пустой, так как на черные клетки переползают только те жуки, которые сидят на белых клетках.



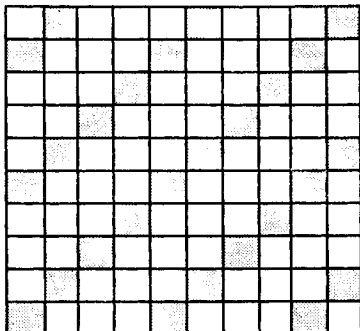
6. Раскрасим все единичные кубики, кроме центрального, в «шахматном» порядке. Так как мышка съедает белые и черные кубики по очереди, то число белых кубиков не может превышать числа черных более, чем на один. Но у нас получилось 14 белых кубиков и 12 черных, следовательно, мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика не может.
7. Существует 92 решения данной задачи. На рисунке приведено одно из них.



8. Введем на шахматной доске систему координат. Левое нижнее поле получит координату (1;1), а правое верхнее – (8,8). Сумма координат любой белой клетки – нечетное число, а сумма координат любой черной клетки – четна. Так как сумма координат всех клеток, на которых стоят фигуры четна (равна удвоенной

сумме: $1+2+\dots+8$), и сумма координат всех черных клеток, на которых стоят фигуры тоже четна, то и сумма координат всех белых клеток, на которых стоят фигуры, тоже четное число. А это может быть только в том случае, если на белых (а значит и на черных) клетках стоит четное число фигур.

- 9.** Закрасим клетки доски так, как показано на рисунке. Заметим, что прямоугольник не может закрыть целиком более одной закрашенной клетки. Всего 26 закрашенных клеток, а прямоугольников – 25. Следовательно, покрыть доску 10×10 прямоугольниками 1×4 невозможно.



- 10.** На каждой клетке шахматной доски напомним число путей с этого поля в «дамки». Понятно, что на каждой клетке самой «верхней» горизонтали доски мы должны написать число 1, а на последующих клетках пишется сумма чисел, стоящих на тех клетках, куда шашка может пойти с данной клетки.

	1		1		1		1
1		2		2		2	
	3		4		4		2
3		7		8		6	
	10		15		14		6
10		25		29		20	
	35		54		49		20
35		89		103		69	

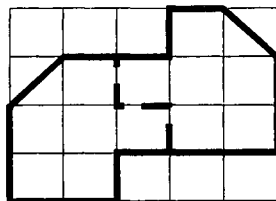
- 11.** Ответ: $101-10^2=1$.

- 12.** За 12 лет первый плотник поставил бы 12 дворов, второй – 6 дворов, третий – 4 двора, а четвертый – 3. Итого – 25 дворов. Следовательно один двор они поставят за $\frac{12}{25}$ года, что составляет 175,2 дня.

- 13.** Только один из сенаторов – рыцарь. То, что хотя бы один рыцарь среди сенаторов имеется, следует из первого утверждения, существование второго рыцаря противоречит второму утверждению.

- 14.** Выражение $19x^2+97x$ четно при любых x , поэтому не может равняться 1997. Следовательно, Вася ошибся.

15. Смотрите рисунок.



13

Натуральные числа

Натуральные числа: 1, 2, 3, ... – что может быть естественней? Но они, тем не менее, составляют основу математической науки. Неслучайно, что с ними связано много интересных и трудных задач. Некоторые из них не решены до сих пор! Удивительно, но формулировки этих задач очень просты. В них речь идет о таких привычных школьникам вещах, как простые и составные числа, разложение на множители и делимость, но решить их не могут целые поколения квалифицированных математиков.

Задачи этого раздела также о натуральных числах, но они проще...

- 1. Научная организация труда.** Имеются бревна двух видов: длиной 6 метров и 7 метров. Их нужно распилить на метровые чурбаки. Какие бревна пилить выгоднее?
- 2. Последнее испытание.** И сказал Кощей Ивану–царевичу: «Жить тебе, Ваня, до завтрашнего утра. Утром явишься предо мною. Задумаю три цифры a , b , c , а ты назовешь мне три числа x , y , z . Выслушаю я тебя и скажу, чему равно выражение $ax+by+cz$. Тогда угадай, какие цифры a , b и c я задумал. Не угадаешь – голова с плеч...» Опечалился Иван–царевич, пошел думу думать. Нужно бы ему помочь. Как?
- 3. Много чисел.** Могут ли 1998 чисел, идущих подряд, быть составными?
- 4. На Диком Западе.** Ковбой Джо зашел в бар. Он купил бутылку виски за 3 доллара, трубку за 6 долларов, три пачки табака и девять коробок непромокаемых спичек. Бармен сказал: «С вас 11 долларов 80 центов за все». Вместо

ответа Джо выхватил револьвер. Почему он решил, что бармен собирается его надуть?

- 5. На мехмат!** Купили несколько одинаковых книг и одинаковых альбомов. За книги заплатили 10 руб. 56 коп. Сколько купили книг, если цена одной книги более, чем на рубль превосходит цену альбома, а книг купили на 6 больше, чем альбомов?
- 6. 175 шалтаев** стоят дороже 125 болтаев, но дешевле 126 болтаев. Докажите, что на покупку 3 шалтаев и 1 болтая 80 копеек не хватит.
- 7. Верна ли теорема:** «Число n^2+n+41 – простое при любом целом n »?
- 8. Один или два?** Возьмем все натуральные числа от 1 до 1000000 и для каждого из них вычислим сумму его цифр. Для всех получившихся чисел снова найдем суммы их цифр. Так будем продолжать до тех пор, пока все получившиеся числа не будут однозначными. Среди миллиона получившихся чисел встретятся 1 и 2. Каких чисел будет больше: 1 или 2?
- 9. Про двузначное число x** сделано 6 утверждений:
- а) x – делится на 3; б) x – делится на 5;
 - в) x – делится на 9; г) x – делится на 15;
 - д) x – делится на 25; е) x – делится на 45.

Найдите все такие x , для которых будут истинны ровно три из этих утверждений.

- 10. Сороконожки и трехголовые драконы.** В некотором стаде сороконожек и трехголовых драконов всего 26 голов и 298 ног. У каждой сороконожки одна голова. Сколько ног у трехголового дракона?

- 11. Еще об электронных весах.** Имеется 11 мешков монет. В десяти мешках монеты настоящие (вес монеты – 10 граммов), а в одном – фальшивые (по 11 граммов). Как одним взвешиванием определить в каком мешке фальшивые монеты?

- 12. Испытание мудрецов.** Некий владыка, желая испытать трех своих мудрецов, сказал им: «Перед Вами пять колпаков: три черных и два белых. Вам наденут по колпаку. Тот из вас, кто первым догадается какого цвета на нем колпак, тот получит награду». Затем мудрецам завязали глаза и

надели им на голову по колпаку. После того как с них сняли повязки, мудрецы долго молчали. Наконец, один из них сказал: «На мне черный колпак!» Как рассуждал этот мудрец?

- 13.** *Сто разных фишек* положены в один ряд. Любые две фишки, стоящие через одну, можно менять местами. Удастся ли переставить все фишки в обратном порядке?
- 14.** *Девятнадцать телефонов.* Можно ли их соединить попарно так, чтобы каждый был соединен ровно с одиннадцатью телефонами?
- 15.** *Звездочки в таблице.* Можно ли расставить 7 звездочек в клетки таблицы 4×4 так, чтобы при вычеркивании любых двух столбцов и любых двух строк в оставшихся клетках всегда была хотя бы одна звездочка?

Решения и ответы

- 1.** Чтобы напилить 42 метровых чурбака из шестиметровых бревен требуется сделать 35 распилов, а из семиметровых — 36. Можно считать, что шестиметровые пилить выгоднее.
- 2.** Можно выбрать $x=100$, $y=10$, $z=1$. Поскольку a , b , c — цифры, то сумма $S=ax+by+cz=100a+10b+c=\overline{abc}$, и Кощей Бессмертный сам назовет нужное число.
- 3.** Да. Числа $1999!+2$; $1999!+3$; ...; $1999!+1999$ — будут составными, так как $1999!+k$ делится на k при $2 \leq k \leq 1999$. Заметим, что n чисел, идущих подряд, могут быть составными при любом натуральном n .
- 4.** Из условия следует, что общая стоимость всей покупки должна делиться на 3, а 11.8 долларов на 3 не делится.
- 5.** Так как каждая книга дороже рубля, то куплено не более 10 книг. Кроме того, понятно, что куплено не менее 7 книг (так как куплено не менее одного альбома). Число 1056 делится на 8 и не делится на 7, 9, 10. Следовательно, купили 8 книг. (МГУ, мехмат, 1968)
- 6.** Докажем, что на покупку 3 шалтаев и 1 болтая 80 копеек не хватит. Пусть один шалтай стоит x копеек, а один болтай y копеек, тогда $126y > 175x > 125y$. Из этого следует, что $y > 25(7x-5y) > 0$ и $y \geq 26$. Далее, $7x \geq 5 \cdot 26 = 130$. Откуда:

- $x \geq 19$. Следовательно, $3x + y \geq 83$, что и требовалось доказать.
- 7.** Теорема неверна, так как $f(41) = 41^2 + 41 + 41 = 41 \cdot 43$ не является простым. Обобщение: заметим, что теорема: число $n^2 + n + a$ – простое при любом целом n , – не будет верна ни для какого целого a .
- 8.** Воспользуемся утверждением: если число при делении на 9 имело остаток d , то сумма его цифр будет иметь тот же остаток. Каких чисел от 1 до 1000000 больше: имеющих при делении на 9 остаток 1, или тех, которые имеют остаток 2? В промежутке от 1 до 999999 тех и других поровну. 1000000 при делении на 9 дает остаток 1. Следовательно, 1 будет больше.
- 9.** Заметим, что x не может делиться только на степень 3, или только на степень 5 – в каждом из этих случаев верны только два утверждения. Следовательно, x делится на 15. Далее, x не делится на 5^2 (или на 3^2) – иначе будут верны, по меньшей мере, 4 утверждения. Поэтому условию задачи удовлетворяют двузначные числа, которые делятся на 15, но при этом не делятся на 25 и 9. Ответ: 15; 30; 60.
- 10.** Заметим: 1. число голов у драконов делится на 3, а число сороконожек не может превышать 7 (иначе ног будет больше, чем 298), следовательно, сороконожек либо 2, либо 5. 2. Если сороконожек 2, то тогда драконов 8, и на каждого из них приходится $\frac{218}{8}$ ног, что невозможно. 3. Если сороконожек 5, то драконов 7 и, таким образом, у дракона 14 ног.
- 11.** Присвоим одному из мешков номер 0, другому номер 1 и т. д. и поступим как в задаче 10.3. При этом, если фальшивые монеты в 0 мешке, общий вес всех взятых монет будет 550г., в остальном решении задач будут совпадать.
- 12.** В этой задаче три варианта распределения колпаков: черный, белый, белый; черный, черный, белый; черный, черный, черный. Первый вариант неинтересен, потому что мудрец, на котором надет черный колпак, рассуждает так: «Я вижу два белых колпака, а их всего два. Значит на мне черный колпак!» Во втором варианте он рассуждает так: «Я вижу белый и черный колпак. Если бы на мне был белый колпак, то мудрец, на котором надет черный

колпак, догадался бы что на нем черный колпак. Однако он молчит, значит, на мне черный колпак». В третьем варианте он рассуждает так: «Я вижу два черных колпака. Если на мне белый колпак, то один из мудрецов, рассуждая (см. второй вариант), догадается, что на нем черный колпак. Однако они молчат, значит, на мне черный колпак!»

- 13.** Назовем номером фишки ее место «в очереди». Заметим тогда, что фишки с нечетными номерами меняются местами только с фишками с нечетными номерами. Следовательно, первая фишка никогда не сможет стать сотой. Поэтому переставить все фишки в обратном порядке нельзя.
- 14.** Если бы каждый из девятнадцати телефонов был соединен ровно с одиннадцатью, то соединений должно быть $19 \cdot 11 = 209$. Но при такой системе подсчета мы каждое соединение считаем дважды, а следовательно, их общее число должно быть четным. Вывод: соединить девятнадцать телефонов так, чтобы каждый из них был соединен ровно с одиннадцатью – невозможно.

- 15.** Смотрите рисунок:

	*	*	
*			
		*	*
	*		*

14

Основы дедуктивного метода

Заметим, что дедуктивный метод можно использовать не только для раскрытия преступлений, как этот делал знаменитый сыщик Шерлок Холмс, но и решая математические задачи... Ведь дедукция – это рассуждение «от общего к частному» – основа всякого математического рассуждения.

- 1. Для тренировки.** Среди четырех утверждений: «число a делится на 2», «число a делится на 4», «число a делится на 12», «число a делится на 24» – три верных, а одно неверное. Какое?
- 2. Кого допросить первым?** Показания трех подозреваемых по делу противоречат друг другу, причем, Смит обвиняет во лжи Брауна, Браун – Джонса, а Джонс говорит, что не

следует верить ни Брауну, ни Смигу. Кого бы Вы, будучи следователем, допросили первым?

3. Кто украл чемодан? Один из четырех гангстеров украл чемодан с деньгами. На допросе Алекс сказал, что чемодан украл Луи, Луи утверждал, что виновник Том, Том заверял следователя, что Луи лжет. Жорж настаивал только на том, что он не виноват. В ходе следствия выяснилось, что только один из гангстеров сказал правду. Кто?

4. Кто участвовал в ограблении? Известно, что из шести гангстеров ровно двое участвовали в ограблении. На вопрос, кто участвовал в ограблении, они дали следующие ответы:

Гарри: Чарли и Джордж.

Джеймс: Дональд и Том.

Дональд: Том и Чарли.

Джордж: Гарри и Чарли.

Чарли: Дональд и Джеймс.

Поймать Тома не удалось. Кто участвовал в ограблении, если известно, что четверо из гангстеров верно назвали одного из участников ограбления, а один назвал неверно оба имени?

5. Дело Брауна, Джонса и Смита. Один из них совершил преступление. В процессе расследования каждый из них сделал по два заявления:

Браун: 1. Я – не преступник. 2. Джонс – тоже.

Джонс: 1. Браун – не преступник. 2. Преступник – Смит.

Смит: 1. Преступник – Браун. 2. Я – не преступник.

В процессе следствия было установлено, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, а третий – один раз солгал и один раз сказал правду. Кто совершил преступление?

6. Из протокола допроса трех известных *А*, *В* и *С* (фамилии гангстеров скрыты в интересах следствия):

А: 1. Я не совершал преступления.

2. В день преступления меня не было в городе.

3. Преступление совершил *С*.

В: 1. Преступник – *С*.

2. Если бы я совершил преступление, я бы не сознался.

3. У меня и так много денег.

С: 1. Я не совершал преступления.

2. Я давно ищу хороший портфель.

3. *А* не было в городе в день преступления.

Известно, что преступление мог совершить только один из них. В ходе следствия выяснилось, что из трех заявлений каждого гангстера два верных, а одно неверное. Кто совершил преступление?

7. Встретились два сыщика. Вот их диалог:

– У тебя два сына?

– Да, маленькие, в школу не ходят.

– Кстати, произведение их лет равно числу голубей возле нас.

– Этих данных недостаточно.

– А старшего я назвал твоим именем.

– Теперь я знаю сколько им лет.

Сколько лет сыновьям?

8. На складе совершено хищение. Следствием установлено:

1) Преступники вывезли награбленное на автомашине;

2) Преступление совершил кто-то из троих: *A*, *B* или *C* (может быть и все трое); 3) *C* никогда не ходит на дело без *A*; 4)

B не умеет водить машину. Виновен ли *A*?

9. Ошибка в отчете. В отчете об изучении иностранных языков студентами полицейской академии говорилось, что из 100 человек 5 изучают английский, немецкий и французский языки, 10 – английский и немецкий, 8 – французский и английский, 20 – немецкий и французский, 30 – английский, 23 – немецкий, 50 – французский. Составителям отчета было указано на ошибки. Почему?

10. Рассеянные свидетели. Браун, Джонс и Смит – свидетели ограбления банка. Браун показал, что преступники скрылись на синем «Бьюике». Джонс утверждал, что это был черный «Крайслер», а Смит, что это был «Форд», но не синий. По рассеянности, каждый из них указал правильно либо только марку, либо только цвет машины. На какой машине уехали преступники?

11. Можно ли выложить в цепь по правилам игры все 28 костей домино так, чтобы на одном конце оказалась «шестерка», а на другом «пятерка»?

12. На озере цветет волшебная лилия. Ежедневно число цветков удваивалось, на двадцатый день все озеро покрылось цветами. На какой день была покрыта цветами половина озера?

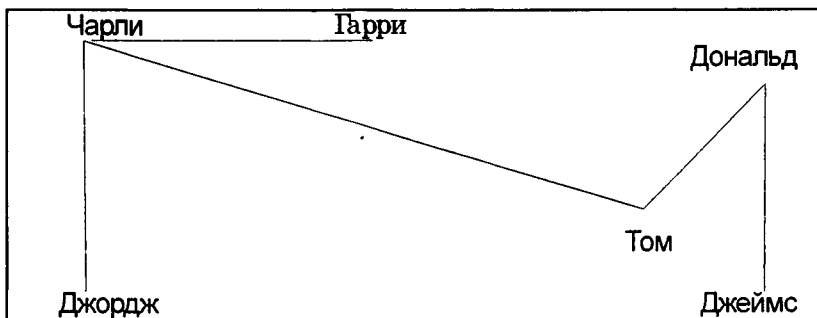
13. Стопка треугольников. В вершинах равностороннего треугольника написаны числа 1, 2, 3. Можно ли сложить не-

сколько таких треугольников в стопку так, чтобы сумма чисел в каждой вершине равнялась 1997?

- 14.** Решите уравнение: $x - (x - (x - \dots - (x - 1) \dots)) = 1$ (в записи содержится 1999 пар скобок).
- 15.** В каждой клетке таблицы 3×3 расставлены числа. Может ли сумма чисел в любом квадрате 2×2 быть отрицательной, а сумма чисел во всей таблице – положительной?

Решения и ответы

- 1.** Заметим, что: «число a делится на 24» \Rightarrow «число a делится на 12» \Rightarrow «число a делится на 4» \Rightarrow «число a делится на 2». Следовательно, неверным может быть только утверждение «число a делится на 24».
- 2.** Кто из подозреваемых мог сказать правду? Это не мог быть Джонс, так как тогда высказывание Смита о том, что Браун лжет будет неверно, а это противоречит высказыванию Джонса. Не мог быть и Браун, так как тогда высказывание Джонса о том, что Смит лжет...
- 3.** Так как из утверждений Луи и Тома одно верно, то Жорж соврал и, следовательно, преступник он. Ответ: правду сказал Том.
- 4.** Каждый отрезок на рисунке – это показания одного из гангстеров. Например: отрезок Чарли–Гарри – это показания Джорджа. У всех отрезков, кроме одного, одна вершина соответствует гангстеру, участвовавшему в ограблении, а вторая – не участвовавшему. В двух точках, которые соответствуют преступникам, должны сходиться ровно четыре отрезка. Ответ: грабители – Чарли и Джеймс.



5. Преступником не может быть Джонс, так как в этом случае ни один из подсудимых не солгал два раза, что противоречит условию задачи. Им не может быть и Смит, так как в этом случае нет подсудимого, солгавшего ровно один раз. Единственно возможный вариант – преступление совершил Браун.
6. *A* – не преступник, ведь иначе два его высказывания ложны, что противоречит условию задачи. *C* тоже не преступник, иначе все три высказывания *A* были бы истинной, что также противоречит условию задачи. Следовательно, преступник *B*.
7. Возрасты сыновей могли быть равны, следовательно, произведение возрастов – полный квадрат. Получив информацию о произведении возрастов, второй сыщик не смог ответить на вопрос, следовательно, произведение раскладывается на множители двумя способами. Ответ: 1 и 4 года.
8. Если *B* виновен, то у него должен быть соучастник, так как он не умеет водить машину. Если *B* не виновен, то кто-то должен был совершить это преступление. Но, так как *C* не ходит на дело без *A*, то *A* – виновен в любом случае.
9. Английский и немецкий языки изучают 10 человек; французский и немецкий – 20. Итого 30 студентов. Но пятерых студентов, изучающих три языка, мы посчитали два раза. Следовательно, студентов, изучающих немецкий и какой-либо другой язык, – 25 человек, что противоречит условию.
10. Автомобиль не мог быть синим, так как иначе в показаниях и Смита, и Джонса должна была бы быть верно указана марка машины, что одновременно невозможно. Значит Браун правильно указал марку машины, а Джонс и Смит верно указали цвет машины. Следовательно, преступники уехали на черном «Бьюике».
11. По правилам игры домино все «шестерки», не считая дубля, в цепи расположены парами, если только они не с краю. Если «шестерка» расположена с краю, то одна «шестерка» останется без пары, а значит, тоже будет с краю. Ответ: нет.

- 12.** Сегодня половина озера покрылась цветами. Через сколько дней покроется все озеро? Завтра! Это будет двадцатый день.
- 13.** Если бы это было возможно, то сумма всех чисел была бы нечетным числом, но это неверно, так как сумма чисел на каждой карточке равна 6.
- 14.** После раскрытия скобок знаки перед всеми x , стоящими рядом, будут различны. Следовательно, после раскрытия скобок уравнение примет вид: $1=1$. Ответ: x – любое число.
- 15.** Смотрите рисунок:

1	1	1
1	-4	1
1	1	1

15

Турниры

Необходимые сведения: в турнирах, проводимых по олимпийской системе, проигравший выбывает. В круговых турнирах, каждый по разу играет со всеми остальными. При этом, у шахматистов за победу дается 1 очко, за ничью – 0,5 очка, за поражение – 0 очков. В других видах спорта может быть и иначе: у хоккеистов, например, за победу дается 2 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков.

- 1. Чемпионат боксеров.** В олимпийском турнире боксеров участвовало 247 человек. Сколько потребовалось матчей, чтобы определить победителя?
- 2. В круговом турнире шахматистов** участвовало 7 человек. Сколько партий они сыграли?
- 3. Сколько шахматистов** играло в круговом турнире, если всего в этом соревновании было сыграно 190 партий?
- 4. Чет или нечет?** Во время шахматного турнира подсчитали сколько игроков сыграло нечетное количество партий. Докажите, что число таких игроков четно.
- 5. В турнире шахматистов** (по круговой системе) участвуют 30 человек. Чтобы выполнить норму 4 разряда требуется набрать 60% очков. Какое наибольшее число шахматистов по итогам турнира может стать разрядниками?

- 6.** На международном турнире по футболу были зафиксированы следующие результаты:

	игры	победы	ничьи	поражения	очки	мячи
Шотландия	3	3	0	0	6	7-1
Уэльс	3	1	1	1	3	3-3
Англия	3	1	1	1	1	2-3
Ирландия	3	0	0	3	0	1-6

Игра Шотландия – Англия закончилась со счетом 3–0. Как закончились остальные матчи? (в этом турнире за победу давалось 2 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0).

- 7.** В шахматном турнире участвовало 8 игроков. Они набрали соответственно 7, 6, 4, 4, 3, 2, 1,5 и 0,5 очков. Сколько очков игроки, занявшие первые четыре места, потеряли во встречах с остальными?
- 8.** Матч хоккеистов «Динамо» – «Спартак» закончился со счетом 8–5. Докажите, что в матче был момент, когда «Динамо» оставалось забить столько шайб, сколько «Спартак» уже забил.
- 9.** Матч гигантов. Кафельников выиграл одну партию у Беккера со счетом 6:3. В пяти геймах победу одерживал теннисист, который подавал. Кто подавал в первом гейме?
- 10.** Три шахматиста *A*, *B* и *C* сыграли матч – турнир (каждый с каждым сыграл одинаковое количество партий). Могло ли так случиться, что по числу очков *A* занял первое место, *C* – последнее, а по числу побед, наоборот: *A* занял последнее место, *C* – первое?
-
- 11.** Домашнее задание. Феде было задано разделить некоторое число на 4 и прибавить к нему 15, а Федя умножил это число на 4 и отнял 15, но ответ, тем не менее, получил верный. Что это было за число?
- 12.** Трудная задача. Учитель задал на уроке сложную задачу. В результате, количество мальчиков, решивших эту задачу, оказалось равно количеству девочек, ее не решивших. Кого в классе больше – решивших задачу или девочек?

№	участники	1	2	3	4	5	6	7
1	Иванов	□□		1				
2	Свирин		□□					
3	Шершнеv	0		□□				
4	Судо				□□			
5	Макаров					□□		
6	Романов						□□	
7	Новиков							□□

Из таблицы становится понятно, что общее число сыгранных партий равно $7+6+5+\dots+1$ – количество клеток, расположенных выше диагонали.

3. Так как $19 \times 20 : 2 = 190$, то, в турнире играло 20 шахматистов.
4. Если сложить количество партий, сыгранных всеми шахматистами, то получится четное число, так как в каждой партии участвуют двое. Следовательно, количество шахматистов, сыгравших нечетное число партий, четно.
5. Всего в турнире играет $30 \cdot 29 : 2 = 435$ партий, и, стало быть, разыгрывается 435 очков. Число участников, ставших разрядниками, не может превышать $435 : 17,5 = 24$ человека. Если 24 участника все партии между собой закончат вничью, а остальные партии выиграют, то они наберут требуемые 17,5 очка. Ответ: 24 человека.

6. Из условия следует, что Англия победила Ирландию и сыграла вничью с Уэльсом. Общий счет в этих двух матчах 2–0, следовательно, результаты матчей Англия–Уэльс и Англия–Ирландия: 0–0 и 2–0, соответственно. Далее, Шотландия пропустила один гол от Ирландии или Уэльса. Ирландия забила 1 гол в ворота Уэльса или Шотландии. Допустим, что в ворота Шотландии. Тогда Уэльс не забил ни одного гола в ворота Шотландии и, следовательно, все 3 в ворота Ирландии.

Так как всего в ворота Ирландии забито 6 голов, то получается, что на долю Шотландии

Шотландия	□□	3–0	2–1	2–0
Англия	0–3	□□	0–0	2–0
Уэльс	1–2	0–0	□□	2–1
Ирландия	0–2	0–2	1–2	□□

приходится только 1 гол, и результат матча между ними – ничья, что противоречит условию. Таким образом, гол в ворота Шотландии забил Уэльс (и 2 в ворота Ирландии). Ирландия свой единственный гол забила в ворота Уэльса. Окончательные результаты турнира видны из таблицы.

7. Из условия задачи следует, что победитель турнира и участник, занявший второе место, в партиях с остальными не потеряли ни одного очка. Далее, участники, разделившие третье и четвертое место, могли набрать против остальных 8 очков, а набрали 7 (одно очко они разыграли в партии между собой). Таким образом, игроки, занявшие первые четыре места, потеряли во встречах с остальными 1 очко.

- 8.** Пусть S – разность между числом шайб, которое «Динамо» осталось забить и числом шайб, уже забитых командой «Спартак». Заметим, что в начале матча это число равнялось 8, а в конце матча – 5, следовательно, в какой-то момент эта разность будет равна 0.
- 9.** Теннисист, подававший в первом гейме, подавал пять раз. Пусть Кафельников выиграл x геймов из этих пяти и y геймов из остальных четырех. Тогда, общее число игр, в которых подающая сторона потерпела поражение, равно: $5 - x + y = 5$ (так как по условию задачи в пяти геймах победу одержал тот, кто подавал). Следовательно, $x = y$, и тот, кто победил в первом гейме, победил в $2x$ геймах. Значит первым подавал Кафельников.
- 10.** Пример турнира:

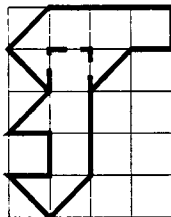
№	Команда	1	2	3	очки	Место
1	<i>A</i>	****	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$101 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$6 \frac{1}{2}$	1
2	<i>B</i>	$\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	****	111000	6	2
3	<i>C</i>	$010 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}$	000111	****	$5 \frac{1}{2}$	3

Шахматист *A*, одержав наименьшее количество побед, занял первое место, а шахматист *C*, одержав наибольшее количество побед, занял последнее место.

- 11.** Решив уравнение: $0,25x + 15 = 4x - 15$, получим ответ: 8.
- 12.** Пусть число мальчиков и девочек, решивших задачу, равно соответственно A и B , тогда число девочек, не решивших ее, также равно A . Следовательно, количество решивших задачу равно количеству девочек.
- 13.1.** Слова: *гулять*, *видит*, *поймать* встречаются в своих строчках по одному разу, поэтому им соответствуют слова: «*му*», «*бу*» и «*гу*». 2. Так как слово *мышь* встречается во всех трех строках, то ему соответствует «*ту*». 3. Так как слово *ночью* встречается в первой и второй строках, то ему соответствует «*ам*». 4. Так как слово *пошла* встречается в первой и третьей строках, то ему соответствует «*ям*». 5. Так как слово *кошка* встречается во второй и третьей строках, то ему соответствует «*ля*». Ответ: фрагмент словаря выглядит так: *гулять* – *му*, *видит* – *бу*, *поймать* – *гу*, *мышь* – *ту*, *ночью* – *ам*, *пошла* – *ям*, *кошка* – *ля*.

- 14.** Если число A – двузначное, а B и C – однозначные, то:
 $A = \overline{xy} = 10x + y; B = C = x + y$. Откуда: $A + B + C = 12x + 3y = 60$ и $4x + y = 20$. Учитывая, что x и y – цифры, находим, что $x = y = 4$, или $x = 5, y = 0$. Если числа A и B – двузначные, а число C – однозначное, то $C = x + y - 9$ и $A + B + C = 12x + 3y = 69$, откуда: $4x + y = 23$ и $x = 4, y = 7$. Ответ: 44, 47, 50.

- 15.** Смотрите рисунок:



16

Как лучше?

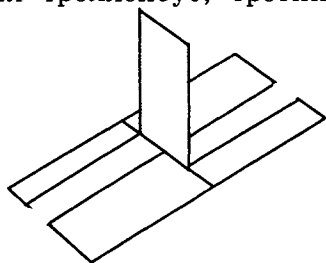
Обычная проблема: как лучше воспользоваться ресурсами, имеющимися в нашем распоряжении... Отвечая на вопросы: как Али-Бабе унести из пещеры побольше золота и алмазов, как водителю грузовика сэкономить на «резине» и другие, – не забудьте объяснить, почему предлагаемое Вами решение наилучшее...

- 1. Копать или не копать? И где копать?** Вдоль прямой дороги стоят шесть домов. Где следует вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до домов была наименьшей?
- 2. Неравенство треугольника.** Пусть четыре дома расположены в вершинах выпуклого четырехугольника. Где следует вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до домов была наименьшей?
- 3. Из 22 спичек** сложите контур прямоугольника с наибольшей возможной площадью. Ломать спички нельзя.
- 4. Линейная функция.** Расстояние между деревнями A и B равно 3 км. В деревне A – 300 школьников, а в деревне B – 200 школьников. Где следует построить школу, чтобы общее расстояние, пройденное школьниками по дороге в школу, было как можно меньше?
- 5. В пещере Али-Бабы** много золота и алмазов. Полный мешок золота весит 200 кг, полный мешок алмазов 40 кг.

- Али–Баба может унести за один раз 100 кг. Килограмм золота стоит 20 динаров, килограмм алмазов – 60 динаров. Сколько денег он может получить за золото и алмазы, унесенные в одном мешке (за один раз)?
- 6. Экономия резины.** Шины на задних колесах грузовика изнашиваются после 15 000 км пробега, а на передних – после 25 000 км. Сколько километров может пройти грузовик без замены шин, если в нужный момент поменять местами передние и задние шины?
- 7. А если домов одиннадцать?** Вдоль прямой улицы стоят одиннадцать домов. Где надо вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до домов была наименьшей?
- 8. Как выгоднее?** Шахматист, чтобы получить приз, должен выиграть две игры подряд. Ему осталось сыграть только три партии с сильным и слабым игроками. В каком порядке ему выгоднее играть: с сильным, слабым, сильным или со слабым, сильным, слабым?
- 9. Сытые щуки.** В пруд выпустили 40 щук. Щука сыта, если она съела трех других щук (сытых или голодных). Какое максимальное число щук может насытиться?
- 10. Перевозка груза.** Несколько ящиков вместе весят 10 тонн, причем, каждый из них весит не более одной тонны. Какое наименьшее количество трехтонок достаточно, чтобы увезти этот груз?
-
- 11. Каких многоугольников больше?** На окружности расположены 1997 белых точек и одна красная. Рассматривают многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше: с красной вершиной или без нее?
- 12. В лесу** проходит прямоугольное шоссе размером (по внутренней кромке) 7 км на 5 км и шириной 200 м. Нарисуйте, где турист может поставить палатку, чтобы палатка находилась не ближе 1 км от шоссе.
- 13. Пример на деление.** Коля написал на доске пример на умножение двузначных чисел. Затем он стер все цифры и заменил их буквами: одинаковые цифры одинаковыми буквами, а разные – разными. Получилось равенство: $\overline{cd} \cdot \overline{ab} = \overline{effe}$. Докажите, что он ошибся.
- 14. Кто на чем ездит домой?** Алеша, Боря и Витя учатся в одном классе. Один ездит домой из школы на автобусе, дру-

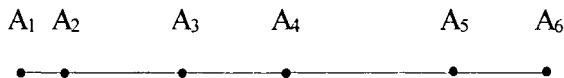
гой – на трамвае, третий – на троллейбусе. Однажды, после уроков, Алеша пошел проводить друга до остановки автобуса. Когда мимо них проходил троллейбус, третий друг крикнул из окна: «Боря, ты забыл в школе тетрадь!» Кто на чем ездит домой?

15. Как из целого прямоугольного листа бумаги сделать фигуру, изображенную на рисунке?

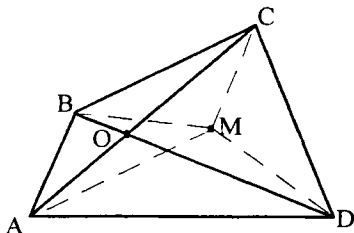


Решения и ответы

- Пусть в точках A_1, A_2, \dots, A_6 расположены дома, а в точке X – колодец. Чтобы сумма $XA_1 + XA_6$ была наименьшей, точка X должна находиться на отрезке A_1A_6 . Аналогично, суммы: $XA_2 + XA_5$ и $XA_3 + XA_4$ будут наименьшими, если X принадлежит соответственно отрезкам A_2A_5 и A_3A_4 . Следовательно, сумма $XA_1 + XA_2 + XA_5 + XA_3 + XA_4 + XA_6$ будет наименьшей, если X принадлежит всем трем отрезкам, то есть X лежит на A_3A_4 . Ответ: колодец следует строить между третьим и четвертым домом.
- Искомая точка – точка пересечения диагоналей; расстояние от любой другой точки M больше (смотрите рисунок).



- Сумма длины и ширины прямоугольника, который можно сложить из 22 спичек равна, 11. Перебором убеждаемся, что наибольшая площадь у прямоугольника 6×5 .
- Понятно, что школу следует строить на отрезке AB , но где именно? Пусть расстояние от деревни A до школы равно x , тогда суммарное расстояние, пройденное всеми школьниками по дороге



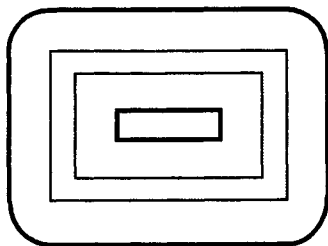
в школу, равно $f(x) = 300x + 200(a - x) = 200a + 100x$, где a — длина отрезка AB . Наименьшее значение $f(x)$ достигает при $x=0$. Поэтому, школу надо строить в деревне A .

5. Вначале заметим, что 5 кг золота имеют тот же объем, что и 1 кг алмазов, но стоят дороже. Докажем, что: 1. Али-Баба может получить за сокровища 3000 динаров. Действительно, в мешок входит 40 кг алмазов. Если мы заменим 15 кг алмазов на 75 кг золота, то объем мешка останется прежним, а стоимость его будет равна 3000 динаров. 2. Докажем теперь, что 3000 динаров — это наибольшая сумма, которую можно выручить за сокровища. Если из мешка, содержащего 25 кг алмазов и 75 кг золота, убрать часть алмазов, то заменить их будет можно таким же количеством золота (чтобы не было превышения в весе), тогда общая стоимость уменьшится, так как алмазы стоят дороже. Если же убрать часть золота, то общая стоимость уменьшится, так как вес взятых вместо него алмазов будет в пять раз меньше (иначе — превышение по объему!). Например, если взять $5x$ кг золота и заменить их на x кг алмазов, то стоимость сокровищ уменьшится на $40x$ динаров. Ответ: 3000 динаров.
6. Рассмотрим, что происходит с одной парой шин. За каждый километр пробега передняя шина изнашивается на $\frac{1}{25000}$, а задняя на $\frac{1}{15000}$. Максимальный пробег автомобиля с данным набором шин может быть найден из уравнения: $x(\frac{1}{25000} + \frac{1}{15000}) = 2$. Ответ: 18750 км.
7. Рассуждая аналогично задаче 1, получим, что колодец следует строить рядом с шестым домом, считая от начала улицы.
8. Поскольку шансов обыграть сильного шахматиста у него меньше, выгодно сыграть с сильным шахматистом два раза. А выиграть у сильного ему необходимо!
9. Кормить щук будем в три этапа. Вначале накормим 9 щук, после чего останется 9 сытых и 4 голодных щуки. Затем, девятью сытыми щуками накормим трех голодных и тремя «новыми» сытыми щуками накормим последнюю голодную щуку. Итого, 13 щук успели насытятся. Заметим, что так как с появлением каждой новой сытой щуки

общее количество уменьшается на 3, больше 13 щук нам не накопить.

- 10.** Покажем, что а) четырех трехтонок может не хватить, б) пяти трехтонок хватит всегда. Заметим, что в любой момент погрузки существует машина, на которой находится менее 2 тонн груза (иначе общий вес груза был бы больше 10 тонн). Будем, поэтому, грузить машины ящиками по очереди до «упора», то есть пока это возможно.
- 11.** Каждому чисто «белому» многоугольнику можно однозначно сопоставить «красный» многоугольник: пятиугольнику – шестиугольник, 56-угольнику – 57-угольник и так далее. Однако, при этом, красные треугольники остаются лишними – им сопоставлять нечего. Следовательно, многоугольников с красной вершиной больше.

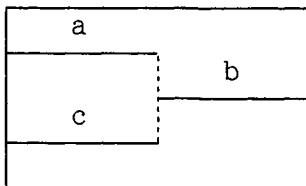
- 12.** Решение (смотрите рисунок): турист может поставить палатку вне фигуры, а также внутри прямоугольника.



- 13.** Число $\overline{effe} = 1000e + 100f + 10f + e = 1001e + 110f$ – делится на 11 (так как $1001 = 11 \times 91$). Числа же \overline{ab} и \overline{cd} на 11 не делятся. Следовательно, ученик ошибся.

- 14.** Алеша не может ездить ни на автобусе, ни на троллейбусе, следовательно, он ездит на трамвае. Боря не ездит на троллейбусе, значит, он ездит на автобусе. Вите остается только троллейбус.

- 15.** Фигуру на рисунке можно получить, если прямоугольный лист бумаги разрезать по отрезкам a , b и c и согнуть по пунктирной линии:

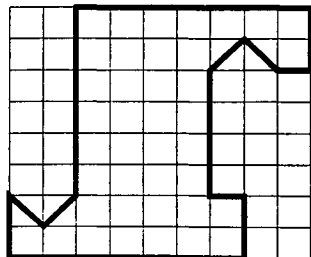


Движение

Движение – снова всего. Самое простое движение – равномерное прямолинейное, то есть движение по прямой с постоянной скоростью. Напомним, что при таком движении S – путь, пройденный телом за время t , можно найти по формуле: $S=vt$, где v – скорость.

1. *Из задач Алкуина.* За сколько прыжков гончая настигнет зайца, если первоначально их разделяет расстояние 150 футов, заяц с каждым прыжком удаляется от собаки на 7 футов, а собака бежит быстрее зайца и с каждым прыжком приближается к нему на 9 футов?
2. *Что такое средняя скорость?* Машина из пункта А в пункт В едет со скоростью 40 км/ч, а обратно со скоростью 60 км/ч. Какова средняя скорость автомобиля?
3. *От Нижнего Новгорода до Астрахани* пароход идет 5 суток, а обратно – 7 суток. Сколько времени будут плыть плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?
4. *Дело в шляпе.* Гребец, проплывая под мостом, потерял шляпу. Через 15 минут он заметил пропажу и поймал шляпу в километре от моста. Какова скорость течения реки?
5. *На сколько увеличить скорость?* Автомобиль едет со скоростью 60 км/час. На сколько он должен увеличить скорость, чтобы проезжать один километр пути на минуту быстрее?
6. *Два пешехода* движутся по прямой дороге навстречу друг другу со скоростью 5 км/ч. Первоначальное расстояние между ними – 10 километров. Муха, которая летает со скоростью 14 км/ч, взлетает с первого пешехода, летит по прямой ко второму, садится на него и, не теряя ни секунды, летит обратно к первому пешеходу, потом снова ко второму и так далее. Какое расстояние пролетит муха к тому моменту, когда пешеходы встретятся?
7. *Поезд и столб.* Поезд длиной 18м проезжает мимо столба за 9 секунд. Сколько времени ему понадобится, чтобы проехать мост длиной 36 м?

- 8. Задача Л.Кэрлла.** Курьеры из мест *A* и *B* двигаются каждый равномерно, но с разными скоростями, друг другу навстречу. После встречи, для прибытия к месту назначения, одному нужно было еще 16, другому – еще 9 часов. Сколько времени требуется тому и другому для прохождения всего пути от *A* до *B*?
- 9. Петя и хулиган.** Петя ехал по эскалатору. Когда он находился на середине эскалатора, мимо него пробежал хулиган, сорвал с него шапку и бросил ее на встречный эскалатор. Петя хочет как можно быстрее получить свою шапку обратно. Куда ему бежать: вниз по эскалатору или вверх?
- 10. Сделайте рисунок!** Два парома отходят одновременно от противоположных берегов реки и пересекают ее перпендикулярно берегам. Скорости у паромов постоянны. Паромы встречаются друг с другом на расстоянии 720 м от ближайшего берега. Достигнув берега, они сразу отправляются обратно. На обратном пути они встречаются в 400 м от другого берега. Какова ширина реки?
- 11. Поход за молоком.** Антон пошел в молочный магазин. Денег у него не было, но были пустые бутылки – шесть литровых (стоимостью 20 коп) и шесть пол-литровых (стоимостью 15 коп). В магазине было разливное молоко по 22 коп. литр. Какое наибольшее количество молока он мог принести домой? Другой посуды, кроме пустых бутылок, у него нет.
- 12. Сколько деталей** должен сделать рабочий, чтобы перевыполнить план в 40 деталей не менее, чем на 47%?
- 13. Пешка и конь.** Поставим на шахматную доску пешку. Может ли конь, помещенный на одну из свободных клеток, обойти все остальные клетки и вернуться на исходную, побывав на каждом свободном поле только один раз?
- 14. Задача Дж. Литлвуда.** Три дамы *A*, *B* и *C* сидят в купе железнодорожного вагона с испачканными в саже лицами и смеются. Вдруг одна из них перестает смеяться. Почему?
- 15. Разрежьте фигуру** на две равные части:

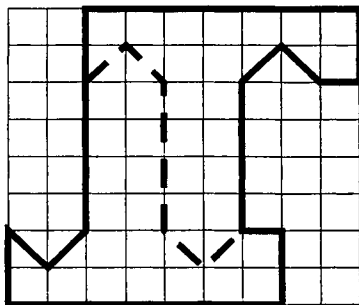


Решения и ответы

1. За каждый прыжок гончая приближается к зайцу на 2 фута. Следовательно, она его догонит за 75 прыжков.
2. Если расстояние от A до B равно n , то средняя скорость на пути $2AB$ равна $V_{\text{ср}} = 2n : (\frac{n}{40} + \frac{n}{60}) = \frac{240n}{5n} = 48$ км/ч.
3. Когда теплоход идет от Нижнего Новгорода до Астрахани (по течению), то за сутки он проходит $\frac{1}{5}$ часть пути, а когда обратно — $\frac{1}{7}$ часть пути. Поэтому $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{35}$ — две скорости течения. Откуда $\frac{1}{35}$ часть пути в сутки — скорость течения. Следовательно, плоты будут плыть от Нижнего до Астрахани 35 суток.
4. Гребец заметил пропажу через 15 минут, следовательно, и догонит он ее через 15 минут; следовательно, шляпа за 30 минут проплыла 1 километр, а скорость течения реки 2 км/ч. *(Почему гребец догонит шляпу через 15 минут? Представим себе, что дело происходит в поезде, и шляпа оставлена на полке вагона... . Заметим так же, что неважно плыл ли гребец по течению или против).*
5. За минуту машина проезжает 1 км. Чтобы преодолеть это расстояние на минуту быстрее, она должна проехать его за 0 сек, что невозможно.
6. Если пешеходы идут со скоростью 5 км/ч, то они встретятся через час, за это время муха пролетит $14 \times 1 = 14$ км.
7. Сделайте рисунок! Головной вагон проедет мост за 18 секунд, а последний вагон будет ехать по мосту еще 9 секунд. Ответ: 27 секунд.
8. Пусть t — время, за которое курьеры добрались до места встречи, а v_1 и v_2 — скорости курьеров. Тогда $(v_1 + v_2)t = v_1(16 + t) = v_2(9 + t)$; $16v_1 = v_2t$ и $v_1t = 9v_2$; $\frac{16v_1}{v_1t} = \frac{v_2t}{9v_2}$
или $\frac{16}{t} = \frac{t}{9}$ и $t^2 = 16 \cdot 9$, откуда $t = 4 \cdot 3 = 12$ часам. Следовательно, первый ехал к месту назначения 28 часов, а второй — 21 час.

- 9.** Будем считать, что собственная скорость Пети (v) больше скорости эскалатора. Тогда все зависит от того, может ли Петя успеть наверх быстрее, чем туда доедет шапка.
1. Если да, то ему все равно куда бежать – вниз или вверх. Петя сближается с шапкой со скоростью v , независимо от того движется ли он "навстречу" шапке или догоняет ее.
 2. Если нет, то ему следует спуститься вниз – ведь шапка в какой-то момент остановится, – и поэтому догонять ее «выгоднее».
- 10.** Суммарное расстояние, которое они прошли к моменту первой встречи (720м от одного из берегов) равно ширине реки. Когда они встречаются во второй раз, суммарное расстояние равно утроенной ширине реки, что потребовало в три раза большего времени. К моменту первой встречи один из паромов прошел 720м, к моменту второй встречи – 2160м (в три раза большее расстояние). Но это расстояние на 400м превышает ширину реки. Следовательно, ширина реки – 1760м.
- 11.** Сдав шесть пол-литровых бутылок и одну литровую, Антон получит 1 рубль 10 копеек, что составит стоимость 5 литров молока. Купленные 5 литров молока он может отнести домой в оставшихся литровых. Убедимся, что больше 5 литров ему унести не удастся. Если он сдаст не одну литровую бутылку, а больше, то для того чтобы набрать стоимость хотя бы 5 литров молока, ему потребуется сдать еще не менее 5 пол-литровых бутылок, а емкость оставшихся бутылок не будет превышать 4,5 литров (проверяется перебором).
- 12.** Обратим внимание на то, что 1% от плана в 40 деталей равен 0,4 детали. Далее, 47% – 18,8 детали. Но нельзя сделать 0,8 детали, значит рабочий должен сделать не менее 59 деталей.
- 13.** Обратим внимание на то, что конь при каждом своем ходе меняет цвет клетки, на которой стоит. Так как одна клетка занята пешкой, ему надо сделать 63 хода и оказаться на исходной клетке, что невозможно.
- 14.** Она рассуждает примерно так: «Если я, A , не выгляжу смешной, то B должна рассуждать так: если я, B , не выгляжу смешной, то C не над чем смеяться, но поскольку B так не рассуждает, следовательно я, A , выгляжу смешной».

15. Смотрите рисунок:



18

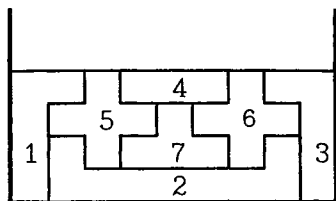
Принцип Дирихле

Принцип Дирихле широко известен в такой, несколько не-серьезной формулировке: «нельзя посадить пять зайцев в четыре клетки так, чтобы в каждой клетке было не более одного зайца». Доказательство очевидно: если в каждой из трех клеток сидит не более одного зайца, то зайцев не может быть больше трех. В задачах данного раздела мы будем применять аналогичные рассуждения, выбирая по ходу дела «зайцев» и сажая их в подходящие «клетки».

1. *Плоскость окрашена в 2 цвета.* Докажите, что найдутся две точки на расстоянии 1 метр друг от друга, окрашенные одинаково.
2. *Шарики.* В ящике лежат 100 черных и 100 белых шаров. Какое наименьшее число шаров надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них наверняка было 2 шара одного цвета? Наверняка было 2 шара белого цвета?
3. *Странно, но факт.* Докажите, что в Вашем классе найдутся 2 человека, у которых одинаковое количество друзей среди одноклассников.
4. *Строим город.* Можно ли увезти из каменоломни пятьдесят камней, веса которых равны 370 кг, 372 кг, ..., 468 кг, на семи трехтонках?
5. *Петины карманы.* Сможет ли Петя разложить 44 монеты по 10 карманам так, чтобы количество монет в каждом кармане было бы различным?

6. *Семь грибников* собрали 100 грибов, причем все грибники собрали разное число грибов. Докажите, что есть трое грибников, которые собрали не меньше 50 грибов.
 7. *На планете Земля* океан занимает больше половины площади поверхности. Докажите, что в мировом океане можно указать две диаметрально противоположные точки.
 8. *Треугольники на плоскости*. На плоскости выбрано 20 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Существует ли треугольник с вершинами в этих точках и хотя бы одним углом меньшим 10° ?
 9. *Числа в таблице*. Можно ли в клетках квадратной таблицы 8×8 расставить числа 1, -1, 0 так, чтобы все суммы – в каждом столбце, строке и на каждой из двух диагоналей – были различны?
 10. *В круге радиуса 1* выбраны 34 точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Доказать, что существует треугольник с вершинами в этих точках и площадью меньше 0,1.
-
11. *Задумано трехзначное число*, у которого с любым из чисел 543, 142 и 562 совпадает один из разрядов, а два других не совпадают. Какое число задумано?
 12. *Дано 1998-значное число*, каждые две соседние цифры которого образуют двузначное число, делящееся на 17 или на 23. Последняя цифра числа – 1. Какова первая?
 13. *Забывтая планета*. На каждой из планет некоторой солнечной системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Докажите, что если число планет нечетно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.
 14. *Нам нужны мальчики!* Правитель некой страны из чисто военных соображений хотел бы, чтобы среди его подданных было больше мальчиков, чем девочек. Под страхом жестокого наказания он повелел, чтобы в каждой семье было не более одной девочки. В результате, у каждой женщины этой страны среди детей последней – и только последней – была девочка, ибо ни одна женщина, родив девочку, не решалась больше иметь детей. Какую же долю составляли мальчики в общей массе детей этой страны, если шансы рождения девочки или мальчика одинаковы?

- 15. Не кантовать!** Детали 1–7 вкладывались в коробку сверху; каждая деталь, при этом, двигалась строго по вертикали. В какой последовательности производилась укладка?

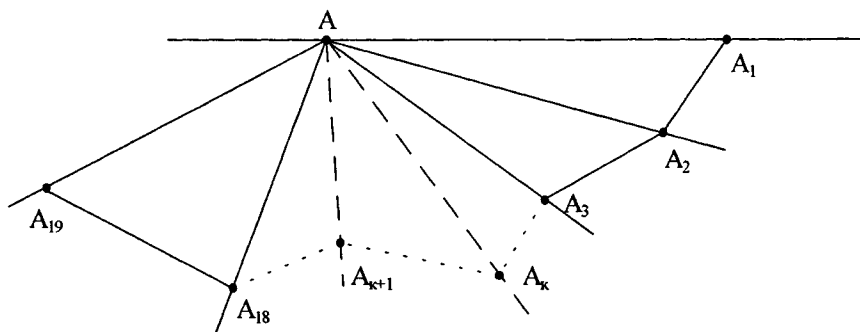


Решения и ответы

1. Рассмотрите равносторонний треугольник (сделайте рисунок!) со стороной 1 метр. Из трех его вершин две окрашены одинаково. Расстояние между ними как раз равно 1 метру.
2. Из трех шаров обязательно найдутся 2 одинакового цвета. Следовательно, достаточно трех шаров. Заметим, что двух шаров недостаточно, так как они могут оказаться разного цвета. Может случиться так, что вначале мы вытянем 100 черных шаров, и лишь затем – 2 белых. Итого: 102 шара.
3. Пусть в Вашем классе учится n человек, тогда у каждого из Ваших одноклассников (считая, естественно, Вас), число друзей может быть равно любому числу от 0 (когда человек ни дружит ни с кем) до $n - 1$ (дружит со всеми), причем заметим, что эти две «крайности» не могут быть реализованы одновременно. Таким образом, учеников n , а количество возможностей $n - 1$. Поэтому, у двух учеников Вашего класса количество друзей одинаково.
4. Так как камней – 50, то, по крайней мере, на одной из машин будет 8 камней. Однако, вес любых 8 камней больше трех тонн.
5. «Упорядочим» Петины карманы по возрастанию. Тогда в самом «маленьком» кармане может не лежать ни одной монеты, в следующем не менее 1 монеты, и так далее. И, наконец, в последнем, десятом, не менее 9 монет. Следовательно, во всех 10 карманах будет лежать не менее $1+2+\dots+9 = 45$ монет. Ответ: не сможет.
6. Пусть семь грибников собрали соответственно a_1, a_2, \dots, a_7 грибов, причем: $a_1 < a_2 < \dots < a_7$. Предположим, что нет таких трех грибников, которые собрали не меньше 50 грибов, тогда $a_5 \leq 15$. Тогда $a_4 \leq 14$; $a_3 \leq 13$; $a_2 \leq 12$; $a_1 \leq 11$. Откуда

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 50$. Следовательно, все семь грибников собрали меньше 100 грибов. Противоречие.

- 7.** Предположим, что каждой точке мирового океана соответствует диаметрально противоположная точка суши, тогда мировой океан и суша центрально симметричны, а площади их равны, что противоречит условию задачи. Следовательно, в мировом океане можно указать две диаметрально противоположные точки.
- 8.** Заметим, что все точки лежат по одну сторону от некоторой прямой AA_1 . Сумма углов $\angle A_1AA_2, \angle A_2AA_3, \dots, \angle A_{18}AA_{19}$ меньше 180° , откуда следует, что каждый из этих 18 углов меньше 10° .



- 9.** Сумма из восьми слагаемых со значениями $-1, 0$ или 1 , может принимать целые значения от -8 до 8 , всего 17 значений. В таблице же 8 строк, 8 столбцов и 2 диагонали – всего 18 сумм. Таким образом, в таблице найдутся две одинаковые суммы.
- 10.** Проведем прямую линию через две из данных точек так чтобы все остальные прямые оказались по одну сторону от прямой (почему это возможно?). Будем поворачивать прямую вокруг одной из этих точек до встречи с каждой из остальных точек (при этом образуется 33 прямые или 32 угла), после чего последовательно соединим оставшиеся 33 точки. Получится 32 непересекающихся треугольника, суммарная площадь которых не может быть больше площади круга. Но тогда найдется треугольник, площадь которого меньше $0,1$.
- 11.** Если первая цифра искомого числа 5, то либо вторая цифра 4, либо третья 2 (так как требуется совпадение разряда

со вторым числом). И то и другое приводит к противоречию: совпадение либо с первым, либо с третьим будет в двух разрядах, следовательно, первая цифра – не 5. Рассуждая аналогично, убедимся, что вторая цифра искомого числа не 4, а третья – не 2. Остается единственная возможность – искомое число равно 163.

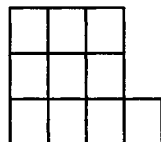
- 12.** Начнем записывать это число с конца. В какой-то момент времени обратим внимание на то, что число имеет вид ...92346...9234692346851. Далее, мы видим, что цифры 92346 – повторяются, значит, отнимем от 1998 количество тех цифр, которые не входят в этот цикл – 3. Разделим полученный результат на 5 (количество цифр в цикле). Это число разделится без остатка. Значит, на первом месте стоит цифра 9.
- 13.** Так как расстояния между планетами различны, то существует две планеты, расстояние между которыми является наименьшим из всех. Астрономы, находящиеся на этих планетах, смотрят «друг на друга». Если астроном с одной из оставшихся планет наблюдает одну из них, то для наблюдения за оставшимися планетами астрономов не хватит(*). Если же нет, то «отбросив» первые две планеты, повторим наши рассуждения заново. Этот процесс не может продолжаться бесконечно. Если он не прервется на одном из «шагов» (в случае *), то останется одна планета, которую наблюдать будет некому.
- 14.** Если считать, что в каждом отдельном случае шансы на рождение мальчика или девочки одинаковы, то данное распоряжение никак не повлияет на демографическую ситуацию в стране.
- 15.** Укладка проводилась так: 2 – 7 – 5 – 6 – 4 – 1 – 3.

19

Немного поиграем

В играх, называемых *математическими*, требуется найти *оптимальную стратегию*: алгоритм, позволяющий одному из игроков добиться наилучшего для себя результата - *победы* или *ничьей*...

1. **Шары и ящики.** Двое играющих поочередно вынимают шары из двух ящиков. В свой ход каждый может брать из любого (только одного) ящика произвольное число шаров. Выигрывает тот, кто берет последний шар. Кто выигрывает при правильной игре, и как следует играть, чтобы выиграть?
2. **Стратегическая игра.** Имеется куча из 31 камня. Двое играющих делают ходы по очереди. Одним ходом разрешается разделить любую из существующих куч на две кучи. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре – первый или второй?
3. **Любит? Или не любит?** Две девочки играют в игру – отрывают лепестки у ромашки. За один ход можно отрывать либо 1 лепесток, либо 2 лепестка расположенных рядом друг с другом. Побеждает та девочка, которая оторвала последний лепесток. Кто выигрывает при правильной игре?
4. **Монеты на столе.** Двое, по очереди, кладут на прямоугольный стол одинаковые монеты так, чтобы они не задевали друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре, и какова должна быть выигрышная стратегия?
5. **Крестики–нолики.** К доске для игры в крестики–нолики добавлена одна клетка (смотрите рисунок). Как нужно играть первому игроку, чтобы наверняка обеспечить себе выигрыш?
6. **Ходом ладьи.** Ладья стоит в правом верхнем углу шахматной доски размером $K \times N$. Два игрока делают ходы по очереди. Одним ходом разрешается двинуть ладью на несколько полей вниз или влево. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто побеждает при правильной игре – первый или второй?



- 7. Равенство или неравенство?** Двое играют в следующую игру. На доске написаны шесть равенств:

$$\begin{cases} * = * \\ * = * + * \\ * = * + * + * \\ * = * + * + * + * \\ * = * + * + * + * + * \\ * = * + * + * + * + * + * \end{cases}$$

По очереди, они записывают вместо звездочек числа. Первый стремиться сделать так, чтобы все равенства были верными, второй стремиться ему помешать. Кто победит при правильной игре?

- 8. Двойные шахматы.** Докажите, что при игре в «двойные шахматы» (ходы делаются по обычным правилам, но каждый игрок делает 2 хода подряд) белые, как минимум, могут не проиграть.
- 9. Минус на плюс.** В строке написано несколько минусов. Двое, по очереди, переправляют один или два соседних минуса на плюс. Выигрывает тот, кто переправит последний минус. Кто выиграет при правильной игре?
- 10. Оттесни шашку.** В крайних клетках полосы 1 на 20 стоят белая и черная шашки. Двое, по очереди, передвигают свою шашку на одну или две клетки вперед или назад, если это возможно (перепрыгивать через шашку нельзя). Проигрывает тот, кто не может двинуть свою шашку. Кто побеждает при правильной игре – первый или второй?
- 11. Делимость на 1998.** Некоторое натуральное число умножили на 2, а затем прибавили к нему 1, затем вновь умножили на 2 и прибавили 1, и так много раз. Могло ли в результате получится число кратное 1998?
- 12. Шоколад по талонам.** Фабрика по производству шоколадных конфет в каждую коробку конфет вкладывает талон. За десять накопленных талонов покупателю выдается бесплатно коробка конфет. Какую часть стоимости коробки стоит один талон?
- 13. Счастливые билеты.** Автобусные билеты имеют номера от 000001 до 999999. Билет называется счастливым, если у него сумма первых трех цифр равна сумме трех послед-

них. Докажите, что сумма номеров всех счастливых билетов делится на 9, 13, 37 и 1001.

- 14.** В царстве царя Гороха прошла молва, что убит, наконец-то, Змей-Горыныч. Царь Горох знал, что это мог сделать один из богатырей русских: Илья Муромец, Добрыня Никитич, или Алеша Попович. И, призвав их на двор свой, стал царь спрашивать. Трижды каждый богатырь речь держал и сказали они так:

Илья Муромец:

- 1) Не я убил Змея Горыныча.
- 2) Я уезжал в заморские страны.
- 3) Змея Горыныча убил Алеша Попович.

Добрыня Никитич:

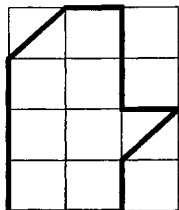
- 1) Змея Горыныча убил Алеша Попович.
- 2) Если бы я убил его, то не сказал бы.
- 3) Много еще нечистой силы осталось.

Алеша Попович:

- 1) Не я убил Змея Горыныча.
- 2) Я давно ищу какой бы подвиг совершить.
- 3) И взаправду уезжал Илья Муромец в заморские страны.

Кто убил Змея, если только два раза сказал каждый богатырь правду, а один раз слукавил?

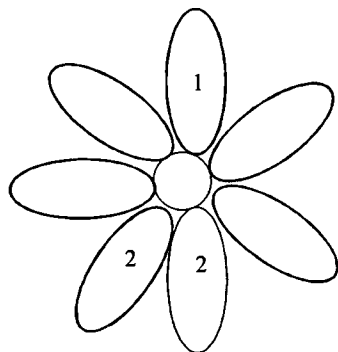
- 15.** Разрежьте фигуру на две равные части:



Решения и ответы

- 1.** Если число шаров в ящиках одинаково, то выигрывает второй: на своем ходу он всегда может взять столько же шаров что и первый, но из другого ящика. 2. Если же число шаров в ящиках неодинаково, то побеждает первый: своим ходом он уравнивает число шаров в ящиках, а далее сводит дело к первому случаю.
- 2.** Результат игры не зависит от того, какие ходы они будут делать, так как игра закончится за 30 ходов. Значит победит второй.

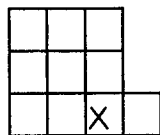
- 3.** При правильной игре выигрывает вторая девочка. При любом первом ходе есть возможность сделать такой второй ход, который разобьет все оставшиеся лепестки на две симметричные части (смотри рисунок). Далее вторая девочка делает ходы симметрично ходам первой.



- 4.** При правильной игре выигрывает первый игрок. Первый ход он делает в точку пересечения диагоналей прямоугольника, а далее, свои ходы делает симметрично второму относительно этой точки.

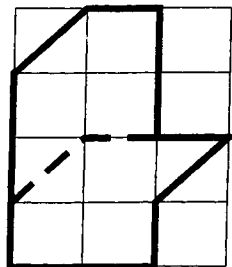
- 5.** Первый игрок выигрывает при ходе:

- 6.** Если $K=N$, то выигрывает второй, потому что при любом ходе первого он может вернуть ладью на диагональ, с которой она начинала свой ход. Если же $K \neq N$, то выигрывает первый, своим ходом ставя ладью в правый верхний угол квадрата, одной из вершин которого является левая нижняя клетка прямоугольника $K \times N$.



- 7.** Цель первого: в каждое из равенств поставить свое число последним. Для этого он придерживается следующего правила: 1) если в каком-либо равенстве осталась одна *, он ставит свое число туда, 2) если нет, он ставит числа в любое из равенств, где осталось нечетное количество *.
- 8.** Для решения задачи надо лишь твердо помнить, как ходит шахматный конь! Заметим, что если сделать в начальной позиции произвольный ход конем, а затем вернуть его обратно, то получится первоначальная позиция, и очередь хода перейдет к черным. Предположим теперь, что белые, при правильной игре черных, проигрывают. Передав очередь хода, белые могут поставить себя в положение черных и выиграть. Противоречие. Следовательно, у черных нет выигрышной стратегии.
- 9.** Первый игрок своим ходом должен разбить минусы на две равные группы. Далее играем аналогично задаче 3.

- 10.** Выигрывает второй. Какой бы ход ни делал первый, второй всегда может пойти так, чтобы количество клеток между ними было кратно 3, сокращая при этом расстояние между шашками. В какой-то момент расстояние между ними станет равно 0, после чего первый будет вынужден отступить. Через несколько шагов он уже не сможет сделать хода.
- 11.** Так как $2n+1$ число нечетное, то, начиная со второй операции, могут получиться только нечетные числа. Следовательно, число, делящееся на 1998, получится не может.
- 12.** Распространенный ответ: талон стоит столько же, сколько $\frac{1}{10}$ часть коробки шоколада. Такой ответ неверен потому, что в "призовой" коробке шоколада тоже находится талон. Таким образом, покупатель получает приз за 9 талонов, а не за 10. Ответ: стоимость талона соответствует $\frac{1}{9}$ стоимости коробки шоколада.
- 13.** Счастливому билету с номером $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ соответствует единственный счастливый билет с номером $b_1b_2b_3b_4b_5b_6$, такой, что $a_1+b_1=9$; $a_2+b_2=9$; ...; $a_6+b_6=9$. Следовательно, сумма всех номеров счастливых билетов делится на 999999, а значит и на 9, 13, 37 и 1001.
- 14.** Рассмотрим случаи: 1) если Змея убил Илья Муромец, то он слukaвил не один раз, а три раза, что противоречит условию, 2) если Змея убил Алеша Попович, то все три высказывания Ильи будут правдой, что тоже противоречит условию. Не противоречит условию только предположение, что Змея убил Добрыня Никитич.
- 15.** Смотрите рисунок:





Еще задачи!

- 1.** Какие часы чаще показывают точное время: те, которые отстают на одну минуту или те, которые стоят?
- 2.** На дереве сидело 40 сорок. Охотник выстрелил и убил 6 сорок. Сколько сорок осталось на дереве?
- 3.** Какое слово зашифровано в числе 222122111121, если каждая буква заменена ее номером в алфавите?
- 4.** Дано 2001 число. Известно, что сумма любых четырех из них положительна. Верно ли, что сумма всех чисел положительна?
- 5.** На доске выписаны подряд 15 чисел. Может ли так оказаться, что сумма любых трех чисел, стоящих рядом, положительна, а сумма любых четырех, стоящих рядом, отрицательна?
- 6.** Известно, что числа $3x+y$ и $4x+y$ положительны. Может ли число $6x+5y$ быть отрицательным?
- 7.** Известно, что числа $x+y$ и $4x+y$ положительны. Может ли число $8x+5y$ быть отрицательным?
- 8.** Верно ли утверждение: «если к отрицательному числу прибавить квадрат этого же числа, то всегда получится положительное число»?
- 9.** Квадрат 5×5 заполнен числами так, что произведение чисел, стоящих в каждой строке, отрицательно. Докажите, что в некотором столбце произведение чисел тоже отрицательно.
- 10.** Представьте число 987654321 в виде суммы двух слагаемых так, чтобы каждое из них состояло из тех же девяти цифр, но записанных в другом порядке.
- 11.** Найдите 1000 натуральных чисел, сумма которых равна их произведению.
- 12.** Из чисел 21, 19, 30, 25, 3, 12, 9, 15, 6, 27 выбрать такие три числа, сумма которых будет равна 50.
- 13.** На складе имеются гвозди в ящиках по 24, 23, 17 и 16 кг. Может ли кладовщик отпустить со склада 100 кг гвоздей, не распечатывая ящики?
- 14.** Могут ли среди десяти идущих подряд билетов найтись два счастливых? Счастливым называется билет, у которого суммы трех первых и трех последних цифр равны.

15. Найдите сумму: $1+2+3+\dots+1999$.

16. Найдите сумму: $1+3+5+\dots+1999$.

17. Чему равно значение суммы: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{1024}$?

18. Используя цифру 4 четыре раза скобки, знаки действий, представить каждое из чисел от 0 до 10.

19. Изменится ли частное и остаток, если делимое и делитель увеличить в три раза?

20. Делится ли число $\underbrace{11\dots11}_{1998 \text{ штук}}$ на 37?

21. Делится ли число $\underbrace{44\dots44}_{1996 \text{ штук}}$ на 8?

22. Можно ли числа 1, 2, 3, ..., 11, 12 расставить в таблицу из 3 строк и 4 столбцов так, чтобы сумма чисел в каждом из четырех столбцов была одна и та же?

23. Можно ли числа 1, 2, 3, ..., 11, 12 расставить в таблицу из 3 строк и 4 столбцов так, чтобы сумма чисел в каждой из трех строк была одна и та же?

24. Существует ли такое целое число, которое при делении на 9 дает остаток 2, а при делении на 6 остаток 1?

25. Найдите число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, а при делении на 5 дает в остатке 4.

26. Про трехзначное число x известно, что если от него отнять 7, то результат разделится на 7, если от него отнять 8, то результат разделится на 8, а если отнять 9, то результат разделится на 9. Что это за число?

27. Существует ли число, которое при зачеркивании первой цифры уменьшается в 58 раз?

28. Барон Мюнхгаузен утверждал, что ему удалось найти такое натуральное число, произведение цифр которого равно 6552. Докажите, что он, как всегда, сказал неправду.

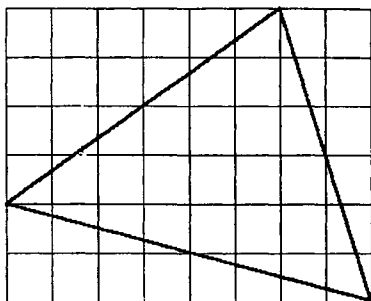
29. Известно, что если сумма цифр числа делится на 3 или на 9, то число делится, соответственно, на 3 или на 9. Верно ли, что если сумма цифр числа делится на 27, то число делится на 27?

30. На какую цифру оканчивается число 3^{100} ?

31. Какой остаток дает число 2^{99} при делении на 7?

32. Делится ли число $10^{1998} + 8$ на 9?

33. Найдите площадь треугольника на рисунке, если площадь каждой клетки 1 см^2 .



34. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью, каждые 15 минут поворачивая под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет только через целое число часов.

35. Сколько диагоналей у тридцатичетырехугольника?

36. Мяч плотно обернут веревочной сеткой, в которой из каждого узла выходят ровно три веревки. Может ли сетка содержать ровно 2001 узелок?

37. В двух шкатулках лежит 70 монет. Известно, что в первой шкатулке $\frac{5}{9}$ от числа всех монет – золотые, а остальные – серебряные, во второй $\frac{7}{17}$ от числа монет – серебряные, а остальные – золотые. Сколько монет лежит в каждой шкатулке?

38. На доске написаны числа: 1; 2; ...1996; 1997. Разрешается стирать два любых числа и записывать вместо них модуль их разности. Докажите, что нельзя добиться того, чтобы на доске остался только 0.

39. Вычислите: $2379 \cdot 23782378 - 2378 \cdot 23792379$.

40. На поляне паслись ослы. К ним подошли несколько ребят.

– Садитесь по одному на осла! – скомандовал старший. И один мальчик остался без осла.

– Садитесь по два на осла, – снова скомандовал старший. И один осел остался без мальчика.

Сколько было мальчиков и сколько было ослов?

41. На скотном дворе гуляли гуси и поросята. Мальчик сосчитал количество голов, их оказалось 30, потом сосчитал сколько всего ног, их оказалось 84. Можете ли вы узнать, сколько гусей и сколько поросят было на скотном дворе?

- 42.** Кирпич весит 2 кг и еще полкирпича. Сколько весит кирпич?
- 43.** Чашка и блюдце стоят 2500 рублей, а 4 чашки и 3 блюдца стоят 8870 рублей. Найти цену чашки и цену блюдца.
- 44.** Четыре карандаша и три тетради стоят 9600 рублей, а два карандаша и две тетради – 5400 рублей. Сколько стоят восемь карандашей и семь тетрадей?
- 45.** Крестьянин купил корову, козу, овцу и свинью, заплатив 1325 рублей. Коза, свинья и овца вместе стоят 425 рублей. Корова, свинья и овца стоят вместе 1225 рублей, а коза и свинья стоят вместе 275 рублей. Найти цену каждого животного.
- 46.** На три склада был доставлен груз. На первый и второй было доставлено 400 т., на второй и третий вместе было доставлено – 300 т., а на первый и третий – 440 т. Сколько тонн груза было доставлено на каждый склад в отдельности?
- 47.** 6 карасей тяжелее 10 лещей, но легче 5 окуней; 10 карасей тяжелее 8 окуней. Что тяжелее: 2 карася или 3 леща?
- 48.** Сколько лет каждому из нас, если мне сейчас вдвое больше лет, чем Вам было тогда, когда мне было столько лет, сколько Вам сейчас, а нам обоим сейчас 63 года.
- 49.** Встретились трое друзей. Первый дал из своих денег двум другим столько, сколько есть у каждого. После него второй дал двум другим столько, сколько каждый из них имеет. Наконец, и третий дал двум другим столько, сколько есть у каждого. После этого у всех троих оказалось по 8 экю. Сколько денег было у каждого в начале?
- 50.** Какова 1997-ая цифра в десятичном разложении дроби $\frac{1}{7} = 0,142857... ?$
- 51.** Малыш съедает банку варенья за шесть минут, а Карлсон – в два раза быстрее. За какое время они съедят это варенье вместе?
- 52.** Один фонтан наполняет бассейн за 2,5 часа, другой за 3,75 часа. За какое время наполнят бассейн оба фонтана?
- 53.** Компания предлагает своим служащим увеличение зарплаты, при условии увеличения производительности труда, на 2% в неделю. Если компания работает 5 дней в неделю, на сколько процентов в день служащие должны

увеличивать производительность труда для достижения желаемой цели?

- 54.** Два работника имели одинаковую заработную плату. Первому работнику ее повысили на 100%, а второму только на 50%. На сколько процентов новая зарплата первого больше зарплаты второго?
- 55.** Было два положительных числа. Одно из них увеличили на 1%, другое на 4%. Могла ли их сумма увеличиться на 3%?
- 56.** Сплавляли 180 г. золота 920 пробы со 100 г. золота 752 пробы. Какой пробы получился сплав?
- 57.** После каждой стирки кусок мыла уменьшается на 20%. После скольких стирок он уменьшится не меньше, чем на треть?
- 58.** Два Муравья отправились в гости к Стрекозе. Один всю дорогу прополз, а второй – одну половину пути ехал на Гусенице, что было в 2 раза медленнее, чем ползти, а вторую половину скакал на Кузнечике, что было в 10 раз быстрее. Какой Муравей первым окажется в гостях, если они вышли одновременно?
- 59.** Расстояние между двумя машинами, едущими по шоссе, равно 200 км. Скорости машин 60 км/ч и 80 км/ч. Какое расстояние будет между ними через час?
- 60.** Из дома в школу Юра вышел на 5 минут позже Лены, но шел при этом в 2 раза быстрее, чем она. Через какое время после своего выхода Юра догонит Лену?
- 61.** Если велосипедист будет ехать со скоростью 10 км/ч, то он опоздает на 1 час. Если же он будет ехать со скоростью 15 км/ч, то он приедет на 1 час раньше. С какой скоростью он должен ехать, чтобы приехать вовремя?
- 62.** Автомобиль едет со скоростью 60 км/час. На сколько он должен увеличить скорость, чтобы проезжать один километр пути на полминуты быстрее?
- 63.** Два поезда движутся друг другу навстречу по параллельным путям – один со скоростью 60 км/ч, а другой со скоростью 80 км/ч. Пассажир, сидящий во втором поезде, заметил, что первый поезд шел мимо него в течение 6 секунд. Какова длина первого поезда?

- 64.** Катер проплывает по течению 90 км за то же самое время, что против течения – 70 км. Какое расстояние за это же время может проплыть плот?
- 65.** По дороге едет телега, в одно из колес вбит гвоздь. Диаметр колес телеги – 1 метр. Каждый раз, когда гвоздь ударяется о дорогу, раздается щелчок. Щелчки повторяются каждую секунду. С какой скоростью едет телега?
- 66.** Из пункта *A* в пункт *B* ползут два жука и возвращаются обратно. Первый жук прополз в обе стороны с одинаковой скоростью. Второй полз в *B* в 1,5 раза быстрее, чем первый, а обратно в 1,5 раза медленней, чем первый. Какой жук вернулся в *A* раньше?
- 67.** Как отмерить 15 минут, имея под рукой 7 и 11-минутные песочные часы?
- 68.** В мешке 24 кг гвоздей. Как, имея только чашечные весы без гирь, отмерить 9 кг гвоздей?
- 69.** Некто имеет 12 пинт вина и хочет отлить половину, но у него нет сосуда в 6 пинт. Зато имеется два сосуда емкостью 5 и 8 пинт. Каким образом ему отмерить ровно 6 пинт вина?
- 70.** На клетчатой доске расставлены шашки, как показано на рисунке. Требуется поменять белые и черные шашки местами, делая ходы по следующим правилам. Любую шашку можно переставлять на соседнее незанятое поле. Если соседнее поле занято шашкой другого цвета, то можно перепрыгивать через эту шашку, если следующее за ней поле свободно. Как это сделать?



- 71.** Один биолог открыл удивительную разновидность амёб. Каждая из них через 1 минуту делилась на две. Биолог кладет амёбу в пробирку, и ровно через час пробирка оказывается заполненной амёбами. Сколько времени потребуется, чтобы вся пробирка заполнилась амёбами, если в нее вначале положить не одну, а две амёбы?
- 72.** В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке – не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. Куда налита каждая жидкость?

- 73.** Милиционер обернулся на звук бьющегося стекла и увидел четырех подростков, убегающих от разбитой витрины. Через 5 минут они были в отделении милиции. Андрей заявил, что стекло разбил Виктор, Виктор же утверждал, что виноват Сергей. Сергей заверял, что Виктор лжет, а Юрий твердил, что это сделал не он. Из дальнейшего разговора выяснилось, что лишь один из ребят говорил правду. Кто разбил стекло?
- 74.** Встретились три друга: Белов, Чернов и Рыжов. Один из них – блондин, другой – брюнет, а третий – рыжий. Брюнет сказал Белову: "Ни у кого из нас цвет волос не соответствует фамилии". Какой цвет волос у каждого из них?
- 75.** Когда Ваню спросили, сколько ему лет, он подумал и сказал: «Я втрое моложе папы, но зато втрое старше Сережи.» Тут подбежал маленький Сережа и сообщил, что папа старше его на 40 лет. Сколько лет Ване?
- 76.** В ящике лежат 100 белых, 100 красных, 100 синих и 100 черных шаров. Какое наименьшее число шаров надо вытащить, не заглядывая в ящик, чтобы среди них было не меньше, чем 3 шара одного цвета?
- 77.** Десять команд участвует в турнире по футболу. Докажите, что при любом расписании игр всегда есть две команды, сыгравшие одинаковое количество матчей.
- 78.** Сколько кругов радиуса 1 надо взять, чтобы покрыть ими квадрат со стороной 2?
- 79.** В магазин привезли 25 ящиков с яблоками трех сортов, причем, в каждом ящике лежат яблоки какого-то одного сорта. Можно ли найти 9 ящиков с яблоками одного сорта?
- 80.** В школе 33 класса, 1150 учеников. Найдется ли в этой школе такой класс, в котором не менее 35 учеников?
- 81.** В коробке лежат карандаши: 7 красных и 5 синих. В темноте берут карандаши. Сколько надо взять карандашей, чтобы среди них было не меньше двух красных и не меньше трех синих?
- 82.** В шахматном турнире участвовали восемь человек, и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

- 83.** В кузове грузовой машины оставили бревно с гвоздем в середине. Бревно при движении свободно каталось и царапало дно. Какая часть кузова может быть испорчена? Размеры кузова: 3×2 м; длина бревна 2 м.
- 84.** Имеется 6 палочек длиной по 1 см, 3 палочки – по 2 см, 6 палочек – по 3 см, 5 палочек – по 4 см. Можно ли из этого набора составить квадрат, используя все палочки, не ломая их и не накладывая одна на другую?
- 85.** У треугольника, длины сторон которого целые числа, длина одной стороны равна 5, а другой – 1. Чему равна длина третьей стороны?
- 86.** Расстояние между точками $AB=30$, $BC=80$, $CD=236$, $DE=86$, $EA=40$. Чему равно расстояние EC ?
- 87.** Докажите, что любую сумму из целого числа рублей, большего семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами в 3 и 5 рублей.
- 88.** Можно ли разрезать шахматную доску на прямоугольники размером 3×1 ?
- 89.** В шеренге 1998 человек. Разрешается переставлять местами любых двух людей, стоящих через одного. Можно ли переставить их по росту?

Решения и ответы

1. Часы, отстающие в сутки на 1 минуту, показывают точное время один раз в 2 года. Часы, которые стоят, показывают точное время дважды в сутки.
2. Все улетели.
3. В зашифрованном слове могут встретиться буквы алфавита с номерами: 2, 22, 21, 1, 11, 12, то есть *б, ф, у, а, й, к*. Перебором находим, что это слово «*фуфайка*».
4. Так как сумма всех чисел положительна, то среди них есть положительное число. Остальные можно разбить на четверки, в каждой из которых, сумма чисел также положительна.
5. Нет. Если сумма любых трех чисел, стоящих подряд, положительна, то и сумма двенадцати чисел, стоящих подряд, положительна (четыре «тройки»). С другой стороны,

если сумма любых четырех чисел, стоящих подряд, отрицательна, то сумма двенадцати чисел, стоящих подряд, должна быть отрицательна. Эти два условия одновременно выполняться не могут.

6. Да, если $x=1$, а $y=-1,4$, например.
7. Число $x+y>0$, Следовательно, и $4x+4y>0$. Прибавим $4x+y>0$, получим, что число $8x+5y>0$, следовательно, оно не может быть отрицательным.
8. Утверждение неверно, например: $-0,5+(-0,5)^2 < 0$.
9. Заметим, что произведение всех чисел, стоящих в таблице, отрицательно (в каждой строке произведение – отрицательно). Если бы произведение чисел в каждом из столбцов было бы положительно, то произведение всех чисел в таблице было бы положительно. Противоречие.
10. Например: $123456789 + 864197532 = 987654321$ или $123456798+864197523=987654321$.
11. Искомыми числами могут быть: 998 единиц, 2 и 1000.
12. Сумма чисел 19, 25 и 6 равна 50.
13. Например: 4 ящика – по 17 кг и 2 ящика – по 16 кг.
14. Да, например: 199883 и 199892.
15. Пусть $S=1+2+3+\dots+1999$. Тогда: $S=1999+1998+\dots+3+2+1$ и $2S=(1+1999)+(2+1998)+\dots+(1999+1)=2000 \cdot 1999$. Следовательно: $S=1000 \cdot 1999$. Ответ: 1999000.
16. Пусть $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 1999$. Запишем ее иначе: $S = 1999 + 1997 + \dots + 1$. Тогда $2S=2000 \cdot 1000$. $S= 1000000$.
17. Так как $S=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{1024}=1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+\dots+(\frac{1}{512}-\frac{1}{1024})$, то получим, что $S=2-\frac{1}{1024}$. Ответ: $1\frac{1023}{1024}$.
18. Например, так:

$4+4-4-4=0$	$(4-4)\times 4+4=4$	$4+4+4-4=8$
$4:4+4-4=1$	$(4+4\times 4):4=5$	$4+4+4:4=9$
$4:4+4:4=2$	$4+(4+4):4=6$	$(44-4):4=10$
$(4+4+4):4=3$	$4+4-4:4=7$	
19. Пусть $a=b\cdot c+d$, где a – делимое, b – делитель, c – частное, а d – остаток. Тогда $3a=3b\cdot c+3d$, следовательно, частное не изменится, а остаток увеличится в три раза?

- 20.** Число $\underbrace{11\dots11}_{1998\text{штук}}$ делится на 111, а $111=37\cdot 3$, следовательно,
 $\underbrace{11\dots11}_{1998\text{штук}}$ делится на 37.
- 21.** Число $\underbrace{44\dots44}_{1996\text{штук}} = \underbrace{44\dots44}_{1993\text{штук}}000 + 444$. Первое слагаемое делится на 8, так как 1000 делится на 8, второе слагаемое на 8 не делится. Следовательно, их сумма не делится на 8. Аналогично можно доказать, что число такого вида не делится на 8 ни при каком количестве четверок. Иначе: данное число равно $4\cdot \underbrace{11\dots11}_{1996\text{штук}}$, а следовательно, не делится на 8.
- 22.** Нельзя, так как сумма $1+2+\dots+11+12=(13\times 12):2=13\times 6$ не делится на 4.
- 23.** Можно. Пример:
- 24.** Переведем задачу на «язык алгебры». Фразу «число m при делении на 9 дает остаток 2» можно записать так: $m=9n+2$, где n – натуральное число, а фразу «число m при делении на 6 дает остаток 1» – так: $m=6k+1$, где k – натуральное число. Проверим возможно ли, при этих условиях, равенство: $9n+2=6k+1$? Получим: $9n+1=6k$. Равенство невозможно, так как число справа делится на 3, а число слева на 3 не делится.
- | | | | |
|---|---|---|----|
| 1 | 6 | 7 | 12 |
| 2 | 5 | 8 | 11 |
| 3 | 4 | 9 | 10 |
- 25.** Число большее искомого на 1 будет делиться на 2, 3, 4, 5, то есть на 60. Наименьшее подходящее число – 59.
- 26.** Искомое число делится на 7, 8 и 9. Следовательно, это число 504. Других таких трехзначных чисел нет.
- 27.** Пусть x – зачеркнутая цифра, тогда $x\cdot 10^n + y = 58y$, или $x\cdot 10^n = 57y$. Правая часть этого равенства делится на 19, а левая нет. Противоречие.
- 28.** Чтобы проверить утверждение Мюнхгаузена, разложим число 6552 на простые множители. Получим: $6552=2\times 2\times 2\times 3\times 3\times 7\times 13=2^3\times 3^2\times 7\times 13$. Так как число 13 – простое, то есть его нельзя представить в виде произведения однозначных множителей, и само оно – не цифра, значит Мюнхгаузен врал.

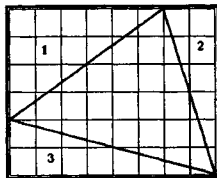
29. Нет, например, число 9918 не делится на 27.

30. Число $3^{100}=81^{25}$, а следовательно, оканчивается на 1.

31. Заметим, что $2^{99}=8^{33}=(7+1)^{33}=(7+1)\dots(7+1)$. Раскроем скобки. Получившиеся слагаемые будут делиться на 7, кроме 1. Таким образом, 2^{99} можно записать в виде: $7x+1$. Ответ: 1.

32. Заметим, что $10^{1998}+8 = 100\dots008$ (всего 1997 нулей). Сумма цифр этого числа делится на 9, следовательно, и само число делится на 9.

33. Площадь всего прямоугольника равна $6\times 8=48\text{см}^2$ (клеток). Чтобы получить площадь треугольника надо из площади прямоугольника вычесть площади трех прямоугольных треугольников. Их площади равны половинам площадей прямоугольников, то есть, площадь первого треугольника будет равна 12 см^2 , площадь второго – 6 см^2 , а третьего – 8 см^2 , тогда площадь искомого треугольника – 22 см^2 .



34. Если a – число 15-минутных участков, на которых улитка ползла «горизонтально», – равно числу участков, на которых она ползла «вертикально». Так как, a четно (подумайте, почему), то общее число 15-минутных участков делится на 4.

35. Каждая вершина многоугольника соединена диагоналями со всеми остальными вершинами, кроме двух, – с ними она соединена стороной. Таким образом, каждая вершина тридцатичетырехугольника соединена диагоналями с 31 вершиной. Учтем, что при такой системе подсчета каждую диагональ мы считаем дважды. Итого: 527 диагоналей.

36. Предположим, что это возможно. Если считать число веревочек, выходящих из каждого узелка, то получится $2001\cdot 3$. Это невозможно, так как при такой системе подсчета, мы каждую веревочку считаем дважды. Следовательно, сетка не может состоять ровно из 2001 узелка.

37. Пусть $9x$ – число монет в первой шкатулке, а $17y$ – во второй, тогда $9x+17y=70$, где x и y – натуральные числа, причем $1\leq y\leq 4$. Перебором находим, что $y=2$, а $x=4$. Ответ: в первой – 36 монет, во второй – 34.

38. Когда мы стираем числа a и b ($a > b$), то сумма чисел на доске уменьшается на $(a+b)-(a-b)=2b$ – четное число. Так как сумма $1+2+\dots+1997 = \frac{(1+1997) \cdot 1997}{2} = 999 \cdot 1997$ – не-

четна, то четное число 0 из него получиться не может.

39. Пусть $a=2378$, тогда искомое выражение равно:
 $(a+1)(10000a+a) - a(10000(a+1) + (a+1)) =$
 $= (a+1) \cdot 10001a - a \cdot 10001 \cdot (a+1) = 0$

40. Ответ: 3 осла и 4 мальчика.

41. Если бы на скотном дворе гуляли одни гуси, то всего было бы 60 ног, «лишние» ноги, а их 24, принадлежат пороссятам – по две на каждого. Следовательно, поросят было 12, а гусей – 18.

42. Из условия следует, что половина кирпича весит 2 кг. Следовательно, целый кирпич весит 4 кг.

43. 4 чашки и 4 блюда стоят 10000 рублей, а 4 чашки и 3 блюда стоят 8870 рублей, следовательно, цена одного блюда: $10000-8870=1130$ руб., цена одной чашки: $2500-1130=1370$ руб.

44. 4 карандаша и 3 тетради стоят 9600 рублей, а 4 карандаша и 4 тетради – 10800 рублей. Следовательно, 8 карандашей и 7 тетрадей стоят 20400 рублей.

45. Все животные вместе стоят 1325 руб., а все, кроме коровы, – 425 руб., следовательно, корова стоит: $1325-425=900$ руб. Коза, свинья и овца стоят 425 руб., а те же, но без овцы стоят 275 руб., значит овца стоит $425-275=150$ руб. Все, без козы, стоят 1225 руб., поэтому коза стоит: $1325-1225=100$ руб., а свинья с козой стоят 275 руб., тогда одна свинья стоит: $275-100=175$ руб.

46. Запишем условие в виде: I склад + II склад = 400 т.; II склад + III склад = 300 т.; I склад + III склад = 440 т.

Тогда, «сложив» эти три условия получим, что удвоенная сумма грузов на трех складах равна 1140 т., а сумма – 570 т. Откуда: на III складе было $570 - 440 = 170$ т. груза, на II складе $570 - 440 = 130$ т., и на I складе $570 - 300 = 270$ т.

47. Так как 6 карасей тяжелее 10 лещей, то понятно, что тем более 6 карасей тяжелее 9 лещей. Следовательно, 2 карася тяжелее 3 лещей. Получается так, что два из трех условий в задаче лишние.

48. Переведа условие задачи на язык алгебры, получим систему:

$$\text{му: } \begin{cases} 2x + y = 63 \\ 2x - y = y - x \end{cases} \cdot \text{От-}$$

	Мне	Вам
Сейчас	$2x$	y
Тогда	y	x

куда $x=18$, $y=27$. Ответ: мне – 36 лет, Вам – 27 лет,

49. Ответ: у них было соответственно 13, 7 и 4 эю.

50. Если мы разделим 1 на 7 «столбиком», то получим, что $\frac{1}{7} = 0,(142857)$. Остаток от деления 1997 на 6 равен 5, Следовательно, на 1997–м месте стоит цифра 5.

51. Вопрос задачи можно сформулировать и так: «За какое время могли бы съесть варенье три Малыша?» (Карлсона, в соответствии с условием задачи, можно приравнять к двум Малышам). Понятно, что три Малыша справятся с вареньем в три раза быстрее, чем один. Ответ: за 2 минуты.

52. Если вместе оба фонтана наполняют бассейн за x часов, то, учитывая, что первый фонтан наполняет за час $\frac{2}{5}$, а

второй $\frac{4}{15}$ бассейна, получим уравнение: $\frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{1}{x}$, откуда $x=1,5$. Ответ: за 1,5 часа.

53. На 2% в день.

54. Пусть первоначально зарплата была равна x , тогда после повышения зарплата первого будет равна $2x$, а второго $1,5x$. Но $0,5x$ составляет треть от $1,5x$. Ответ: $33\frac{1}{3}\%$.

55. Пусть первое число равно $100x$, а второе $100y$. Сформулируем задачу иначе: "может ли при каких-нибудь положительных x и y выполняться равенство: $101x+104y=103(x+y)$? ", откуда следует, что $y=2x$. При $x=1$ и $y=2$ получим числа 100 и 200, которые будут удовлетворять условию задачи.

- 56.** Проба сплава: $p = \frac{a}{b} \cdot 1000$, где a – вес золота в сплаве, а b – вес сплава. То есть: $p = \frac{100 \cdot 0,752 + 180 \cdot 0,920}{280} \cdot 1000 = \frac{100 \cdot 752 + 180 \cdot 920}{280} = 860$.
- 57.** Пусть объем куска мыла – x , тогда после второй стирки его объем станет равен $0,64x$, то есть уменьшится более чем на треть.
- 58.** Пока второй муравей ехал на Гусенице, первый уже добрался до места! (Второй проехал на Гусенице полпути, а первый в это время полз в два раза быстрее, и, следовательно, прополз весь путь).
- 59.** Возможны четыре случая: (сделайте рисунок!)
- 1) Машины едут друг другу навстречу: $200 - (60 + 80) = 60$ км;
 - 2) Машины едут в разные стороны: $200 + (60 + 80) = 340$ км;
 - 3) Вторая догоняет первую: $200 + 60 - 80 = 180$ км;
 - 4) Вторая впереди, первая за ней: $200 + 80 - 60 = 220$ км.
- 60.** Пусть за 5 минут Лена проходит s км. Тогда за следующие 5 минут Юра пройдет $2s$ км, а Лена еще s км, то есть всего $2s$ км. Следовательно, через 5 минут Юра догонит Лену.
- 61.** Если велосипедистов было бы двое, причем скорость первого – 10 км/час, а скорость второго – 15 км/час. Тогда из условия задачи следует, что если бы первый велосипедист выехал на 2 часа раньше второго, то они приехали бы в конечный путь одновременно. При этом за 2 часа первый проехал бы 20 км, и второй смог бы ликвидировать отставание через 4 часа – уже в конечном пункте. Следовательно, весь путь равен 60 км. Вопрос задачи можно переформулировать так: "с какой скоростью должен ехать велосипедист, чтобы проехать весь путь за 5 часов?". Ответ: 12 км/час.
- 62.** За минуту машина проезжает 1 км. Чтобы проезжать это расстояние на полминуты быстрее, она должна преодолеть его за 30 сек. Следовательно, скорость машины надо увеличить на 60 км.
- 63.** Ответ: $233\frac{1}{3}$ метра.
- 64.** Пусть за t часов катер проходит 90 км по течению и 70 км против. Тогда скорость катера по течению – $\frac{90}{t}$ км/час, скорость против течения – $\frac{70}{t}$ км/час. Отсюда уд-

военная скорость течения будет равна $\frac{90}{1} - \frac{70}{1} = \frac{20}{1}$ км/час.

Скорость течения (а значит и плотов) будет равна $\frac{10}{1}$ км/час, и за t часов они проплывут 10 км.

65. За 1 секунду телега проезжает π метров, следовательно, за 1 час – 3,6 π км $\approx 11,3$ км в час.

66. Запишем условие задачи в виде таблицы:

	скорость		путь		время	
	туда	обратно	туда	обратно	туда	обратно
1 жук	v	v	s	s	s/v	s/v
2 жук	$3v/2$	$2v/3$	s	s	$2s/3v$	$3s/2v$

Первый жук затратил на весь путь время $t_1 = \frac{2s}{v} = \frac{12s}{6v}$, а

второй жук затратил время $t_2 = \frac{2s}{3v} + \frac{3s}{2v} = \frac{13s}{6v}$; $t_1 < t_2$, следовательно, первый жук вернулся раньше.

67. Сначала «запустим» и те, и другие часы. Когда в 7 минутных песок иссякнет, в 11 минутных останется песка на 4 минуты. После чего их достаточно просто перевернуть.

68. Основная доступная нам операция – деление некоторого (вообще говоря, произвольного) количества гвоздей на две равные по весу кучи. Результаты взвешиваний будем записывать в таблицу:

	1 куча.	2 куча.	3 куча	4 куча
Вначале:	24 кг			
1-й шаг	12 кг	12 кг		
2-й шаг	12 кг	6 кг	6 кг	
3-й шаг	12 кг	6 кг	3 кг	3 кг

4 шаг: 6 кг + 3 кг. В этой задаче есть некоторая условность: что если количество гвоздей нечетно?

69. Решение видно из таблицы:

шаги:	1	2	3	4	5	6	7	8
12 л	12	4	4	9	9	1	1	6
8 л	0	8	3	3	0	8	6	6
5 л	0	0	5	0	3	3	5	0

70. Пусть буквами б и ч указан цвет передвигаемых шашек, тогда решение можно записать, например, так:
бччбббччччбббббчччччбббббччччбббчб.

71. В начале опыта в пробирке одна амеба, через одну минуту уже две, поэтому 2 амебы заполняют пробирку за 59 минут.

72. «Пронумеруем» сведения:

1) вода и молоко не в бутылке; 2) сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, следовательно, лимонад не в кувшине и квас не в кувшине; 3) в банке – не лимонад и не вода; 4) стакан стоит около банки и сосуда с молоком, а следовательно, молоко не в стакане и не в банке. Результаты запишем в таблицу (*курсив*):

	Бутылка	Стакан	Кувшин	Банка
Молоко	<i>нет (из 1)</i>	<i>нет (из 4)</i>	да (из 5)	<i>нет (из 4)</i>
Лимонад	да (из 6)	<i>нет (из 6)</i>	<i>нет (из 2)</i>	<i>нет (из 3)</i>
Квас		<i>нет (из 6)</i>	<i>нет (из 2)</i>	да (из 6)
Вода	<i>нет(из 1)</i>	да (из 6)	да (из 5)	<i>нет (из 3)</i>

5) Из таблицы видно, что молоко может быть только в кувшине, и, следовательно, в кувшине не вода. Продолжим заполнение таблицы (обычный шрифт). 6) Далее: вода не в кувшине, значит вода может быть только в стакане, следовательно, в стакане не лимонад и не квас, поэтому лимонад – в бутылке, а квас – в банке.

73. Так как правду сказал только один из мальчиков, то это либо – Виктор, либо – Сергей (их высказывания противоречат друг другу и не могут быть одновременно ни правдой, ни ложью). Следовательно, все остальные лгут. Юрий твердил, что это сделал не он. Если это ложь, то виновен Юрий.

74. Белов не блондин, так как у него цвет волос не может соответствовать фамилии, он также не брюнет, так как он сам разговаривал с брюнетом. Следовательно, он рыжий. Чернов не брюнет и не рыжий. Следовательно, он блондин. Остается единственная возможность: Рыжов – брюнет.

75. Папа в 3 раза старше Вани, который, в свою очередь, в 3 раза старше Сережи, следовательно, папа в 9 раз старше Сережи. Следовательно, папа старше Сережи на 8 возрастов Сережи, что составляет 40 лет. Отсюда, возраст Сережи – 5 лет. Ваня втрое старше Сережи, значит ему 15 лет.

- 76.** Ответ: 9 шаров. Если мы вытащим наугад 8 шаров, то среди них может не оказаться трех шаров одного цвета (2 белых+2 красных+2 синих+2 черных). Если добавить еще один шар, то обязательно получится 3 шара одного цвета.
- 77.** Так как в турнире участвует десять команд, то количество игр, сыгранных каждой, может быть равно любому целому числу от 0 до 9. Если бы в какой-либо момент турнира все команды сыграли разное количество игр, то одна из команд не сыграла бы ни одного матча, другая сыграла бы один матч, третья – два и так далее. Последняя команда должна была бы сыграть в этот момент 9 матчей, то есть со всеми участниками турнира. Но это невозможно, так как первая команда не сыграла ни одного матча. Противоречие! Следовательно, предположение, что в какой-то момент турнира у всех команд может быть сыграно разное количество матчей, неверно, и в любой момент турнира найдутся две команды, сыгравшие одинаковое количество матчей.
- 78.** Круг радиуса 1 может закрыть только одну вершину квадрата 2×2 , следовательно, потребуется не менее четырех кругов. Но им (кругом с единичным радиусом) можно полностью покрыть квадрат 1×1 , поэтому четырех кругов достаточно. Ответ: 4 круга.
- 79.** Предположим, что нельзя найти 9 ящиков с яблоками одного сорта. Отсюда следует, что яблок первого сорта имеется не более восьми ящиков, яблок второго и третьего сортов тоже каждого не более восьми ящиков, то есть всего не более 24 ящиков. Но у нас 25 ящиков. Следовательно, исходное предположение было неверно, и можно найти 9 ящиков с яблоками одного сорта.
- 80.** Пусть в каждом из 33 классов школы меньше 35 учеников, тогда всего в этой школе не более, чем $34 \times 33 = 1122$ ученика, что противоречит условию (в школе 1150 учеников). Следовательно, в этой школе найдется класс, в котором не менее 35 учеников.
- 81.** Для того, чтобы наверняка взять не менее двух красных карандашей, нужно взять не менее 7 карандашей, а для того, чтобы наверняка взять не менее 3 синих, требуется взять не менее 10 карандашей. Поэтому для того, чтобы наверняка взять не менее двух красных и не менее 3 синих, требуется взять не менее 10 карандашей.

- 82.** Шахматисты, занявшие последние четыре места в партиях между собой, сыграли 6 очков, то есть вместе набрали не менее 6 очков. Шахматист, занявший второе место, (и набравший не менее 6 очков) не мог набрать 6,5 очков, так как он набрал меньше, чем занявший первое место. Таким образом, он набрал ровно 6 очков. Столько же набрали шахматисты, занявшие последние четыре места вместе. Следовательно, все очки они набрали в партиях между собой. И шахматист, занявший третье место, выиграл у шахматиста, занявшего седьмое место.
- 83.** Не будут повреждены четыре полукруга радиуса 1 с центрами в вершинах прямоугольника. Остальные участки кузова общей площадью $6-\pi$ могут быть испорчены. Они составляют $1-\frac{\pi}{6}$ часть кузова.
- 84.** Сумма длин всех палочек равна 50; у квадрата 4 равных стороны, поэтому периметр квадрата должен делиться на 4. Число 50 на 4 не делится. Следовательно, квадрата из палочек сложить нельзя.
- 85.** В треугольнике длина стороны должна быть меньше суммы двух других, поэтому третья сторона треугольника меньше 6. По той же причине длина третьей стороны треугольника не может быть равна 4 (так как неверно, что $4+1>5$). Следовательно, третья сторона треугольника равна 5.
- 86.** Так как $DE+EA+AB+BC=DC$, то точки E , A и B лежат на отрезке DC в указанном порядке. Поэтому $EC=150$.
- 87.** Пусть $x>7$. Если число x кратно 3, то его можно представить в виде: $x=6+3k$; если x дает при делении на 3 остаток 1, то его можно представить в виде: $x=10+3k$; если x при делении на 3 дает остаток 2, то его можно представить как $x=8+3k$ (k — целое число; $k\geq 0$). Отсюда следует, что любую сумму из целого числа рублей, большего семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами в 3 и 5 рублей.
- 88.** Пусть нам удалось шахматную доску 8×8 разрезать на n прямоугольников размером 3×1 , тогда сумма площадей всех многоугольников $3n=64$, что неверно, так как n — целое число.
- 89.** Заметим, что люди, стоящие на «нечетных» местах, могут перейти только на «нечетные» места, поэтому переставить их по росту удастся не всегда.

Литература

Литература на русском языке, посвященная занимательной математике, обширна. Здесь представлена лишь ее очень небольшая часть.

1. *Баврин И. И., Фрибус Е. А.* Старинные задачи. М., 1994.
2. *Беррондо М.* Занимательные задачи. М., 1983.
3. *Брадис В. М., Минковский В. Л., Харчева А. К.* Ошибки в математических рассуждениях. М., 1959.
4. *Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л.* Заочные математические олимпиады. М., 1986.
5. *Гарднер М.* А ну-ка догадайся!. М., 1984.
6. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. М., 1971.
7. *Гарднер М.* Математические досуги. М., 1972.
8. *Гарднер М.* Математические новеллы. М., 1974.
9. *Гарднер М.* От мозаик Пенроуза к надежным шифрам. М., 1993.
10. *Гик Е.Я.* Занимательные математические игры. М., 1987.
11. *Депман И.Я.* История арифметики. М., 1959.
12. *Депман И.Я.* Рассказы о решении задач. Л., 1964.
13. *Игнатьев Е.И.* В царстве смекалки. М., 1978.
14. *Квант 1970-1998.*
15. *Клименченко Д.В.* Задачи по математике для любознательных. М.1992.
16. *Кордемский Б.А.* Очерки о математических задачах на смекалку. М., 1958.
17. *Леман Й.* Увлекательная математика. М., 1985.
18. *Литцман В.* Веселое и занимательное о числах и фигурах. М., 1963.
19. *Мочалов Л.П.* Головоломки. М., 1980 (2-е изд. М., 1996)
20. *Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С.* Математическая шкатулка: Пособие для учащихся. - 4-е изд., перераб. и доп. - М.:1984.
21. *Пойа Д.* Как решать задачу. М., 1961.
22. *Пойа Д.* Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. М., 1970.
23. *Попов Г. Н.* Сборник исторических задач по элементарной математике. М. - Л., 1938.
24. *Произолов В.В.* Задачи на вырост. М., 1995.
25. *Савин А.* Занимательные математические задачи. М, 1995.
26. *Смаллиан Р.* Алиса в стране смекалки. М., 1987.
27. *Смаллиан Р.* Как же называется эта книга? М., 1981.
28. *Смаллиан Р.* Принцесса или тигр? М., 1985.

Содержание

Предисловие	3
Внимательно читайте условие задачи!	5
Дайте добрый совет!	9
Четные и нечетные числа	14
Было или не было?	18
В стране рыцарей и лжецов	22
Дроби	27
Проценты	31
Чем все это закончится?	36
Языки Математики	41
Как это сделать?	46
Календарь	51
Шахматная доска	55
Натуральные числа	60
Основы дедуктивного метода	64
Турниры	69
Как лучше?	74
Движение	79
Принцип Дирихле	83
Немного поиграем	88
Еще задачи!	93
Литература	111

"ДОМ КНИГИ"



Пчелинц
ев Ф.А.
и др. М
атемати
ка 5...

и приобретения книг обращайтесь в магазины
г.Москвы и Московской области:

Нижегородская ул., д.29-33 тел.278-94-80 (опт)

книги", ул. Б.Дмитровка, 7/5

Мясницкая, д.6

"Московский дом книги", ул. Новый Арбат, д.8

"Молодая Гвардия", ул. Б. Полянка, 28

"Торговый дом Прогресс", Zubовский бульвар, д.18

"Дом книги Медведково", Заревый пр., д.12

"Дом книги в Измайлово", Измайловская пл., д.2

"Дом книги на Преображенке", Преображенский вал, 16-1

"Магазин им. Ивана Федорова", ул. Костякова, д.9

"Мир", Волоколамское шоссе, д.15/22

"Мир школьника", 3-ий Митинский переулок, д.1

"Мир школьника-Отрадное", ул. Хачатуряна, д.20

"Мир школьника-Текстильщики", ул. Шоссейная, стр.1

"Легенда +", Профсоюзная ул, д. 88/20

"Тушино", бульвар Яна Райниса, д.21

"Пресня", ул. Красная Пресня, д.14

"Бибирево", ул. Мурановская, д.12

"Обь-Р", Комсомольский проспект, д.34

"Торговый дом "Альбатрос", 9-ая Парковая ул., д.66-72

"Переделкино", Новопеределкинская ул, д.9

"Книинком", Волгоградский пр-т, д.78 корп.1

"Шаг к пятёрке", ул. Красный Казанец, д.20

"Шаг к пятёрке", ул. Новомарьинская, д.14/15

Книжная ярмарка, с-к "Олимпийский"

г.Зеленоград, "Алекс и К", Панфиловский пр-т, к. 1106-В

г.Железнодорожный, "Книга", ул.Пролетарская, д.8

г.Красногорск, "Любителю книги", ул.Ленина, д.5"Б"

г.Люберцы, "Дом книги", Октябрьский просп, д.151/9

г.Люберцы, Книжная ярмарка,

г.Подольск, "Дом книги", проспект Ленина, д.158

Регионы России

г.Волжский, Волгоградская обл., тел. (8443) 29-79-20

г.Воронеж, тел. (0732) 55-15-39

г.Екатеринбург, тел. (3432) 74-22-57

г.Иваново, ИПК и ППК, тел.: (0932) 38-49-09

г.Новосибирск, "Сибирский дом книги", тел. (3832) 26-62-39

г.Новосибирск, "Топ-книга", тел. (3832) 36-10-28 (опт)

г.Ростов-на-Дону, "Ростпединфо", тел. (863-2) 62-04-26

г.Санкт-Петербург, "Школьная книга", тел. (812) 585-21-72

г.Санкт-Петербург, "Диамант", тел. (812) 327-00-18

г.Сургут, "Родник", тел. (3462) 31-05-02

г.Тула, "Созидание", тел. (0872) 25-56-93

г.Уфа, "Эдвис", тел. (3472) 25-52-01

г.Челябинск, "Урал-Пресс", тел. (3512) 36-79-93