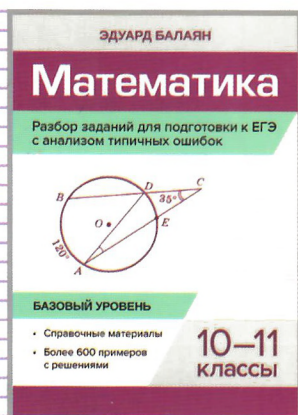


Предлагаемое пособие содержит подробное решение всех заданий ЕГЭ профильного уровня с анализом типичных ошибок, допускаемых школьниками и абитуриентами. Ошибки классифицированы, указаны их причины и приведены правильные решения. Для удобства пользования пособием приводятся краткие справочные материалы по всему курсу математики 7–11 классов. Пособие адресовано старшеклассникам и абитуриентам для эффективной подготовки и успешной сдачи экзамена, а также учителям математики, методистам, слушателям подготовительных отделений вузов и репетиторам.



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
**ФЕНИКС**  
ХОРОШИЕ КНИГИ



ЭДУАРД БАЛАЯН

**Математика**

Разбор заданий для подготовки к ЕГЭ с анализом типичных ошибок

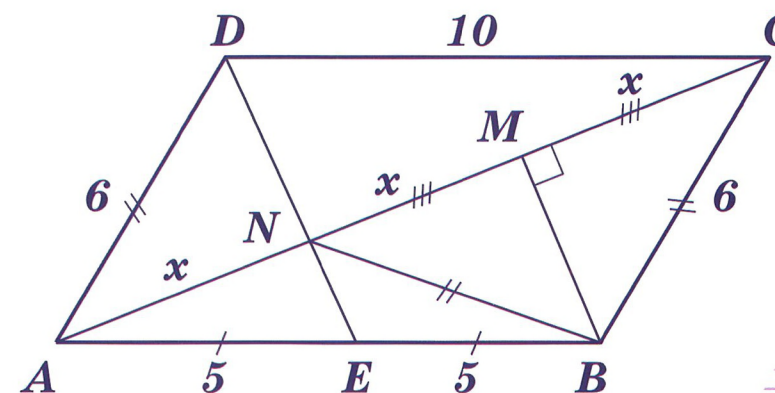
10–11 классы  
Профильный уровень



ЭДУАРД БАЛАЯН

# Математика

Разбор заданий для подготовки к ЕГЭ с анализом типичных ошибок



**ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ**

- Более 600 примеров с решениями
- Справочные материалы

**10–11  
классы**

**Э. Н. Балаян**

# **МАТЕМАТИКА**

**Разбор заданий  
для подготовки к ЕГЭ  
с анализом типичных ошибок**

**10–11 классы**

**Профильный уровень**

- ▶ *Более 600 примеров с решениями*
- ▶ *Справочные материалы*

*Издание второе, дополненное*

Ростов-на-Дону

 **Феникс**  
2024

**УДК 373.167.1:51**

**ББК 22.1я72**

**КТК 444**

**Б20**

**Балаян Э. Н.**

**Б20 Математика. Разбор заданий для подготовки к ЕГЭ с анализом типичных ошибок. 10–11 классы. Профильный уровень / Э. Н. Балаян. — Изд. 2-е, доп. — Ростов н/Д : Феникс, 2024. — 375 с. : ил. — (Большая перемена).**

**ISBN 978-5-222-41408-8**

Предлагаемое пособие содержит подробное решение всех заданий ЕГЭ профильного уровня с анализом типичных ошибок, допускаемых школьниками и абитуриентами. Ошибки классифицированы, указаны их причины и приведены правильные решения.

Для удобства пользования пособием приводятся краткие справочные материалы по всему курсу математики 7–11 классов.

Пособие адресовано старшеклассникам и абитуриентам для эффективной подготовки и успешной сдачи экзамена, а также учителям математики, методистам, слушателям подготовительных отделений вузов и репетиторам.

**УДК 373.167.1:51**

**ББК 22.1я72**

**ISBN 978-5-222-41408-8**

© Балаян Э. Н., 2023

© Оформление ООО «Феникс», 2023



# Предисловие

.....

Пособие состоит из четырех глав, содержащих несколько параграфов, разбитых на пункты, что дает возможность быстро найти нужную информацию.

В главе 1 приводятся решения всех заданий с № 1–18 включительно, причем некоторые задания решены различными способами, что очень важно, если учесть, что 2-я часть текста проверяется экспертной комиссией, которая при начислении баллов учитывает не только правильность приводимого решения, но и его рациональность.

По каждому заданию приводится достаточное количество разнообразных примеров, встречающихся на экзамене.

В главе 2 рассматриваются типичные ошибки школьников и абитуриентов на экзамене, в том числе вычислительные, ошибки в тождественных преобразованиях, при решении различных типов уравнений, неравенств, при исследовании функций, их свойств и построении графиков. Кроме того, ошибки классифицированы, указаны их причины и приведены правильные решения.

В двух последних главах 3 и 4 для удобства пользования пособием приводятся краткие справочные материалы по курсу математики 7–11 классов, а в конце пособия — условные обозначения и необходимые таблицы.

В дополнение к этому пособию и для более основательной и систематической подготовки к ЕГЭ автор настоятельно рекомендует использовать вышедшие в издательстве «Феникс» книги автора: «Репетитор по математике для старшеклассников и поступающих в вузы», «Репетитор по алгебре и началам анализа», «Репетитор по геометрии для 10–11 классов» (профильный уровень).

Экзамен состоит из двух частей: часть 1 с кратким ответом, а часть 2 — с развернутым. Длится он 235 минут. Всего 18 заданий. Максимальное количество первичных баллов — 31.

База, профиль — неважно, к какому именно уровню вы готовитесь. В любом случае надо не только правильно решить каждое задание, но и оформить его соответствующим образом. Нарисовать и описать график, расписать решение уравнения или задачи... И это не все: нужно еще и внести ответы в бланк без ошибок. И все это — за ограниченный промежуток времени!



# Структура КИМ ЕГЭ

.....

## Часть 1:

- Приносит 11 баллов, то есть 35 % всего экзамена
- 11 заданий с кратким ответом

## Часть 2:

- Приносит 20 баллов, то есть 65 % всего экзамена
- 7 заданий с развернутым ответом

В заданиях с кратким ответом нужно лишь записать верное число в бланк. Заданий с развернутым ответом 7, в них надо подробно расписать решение, которое должно соответствовать критериям оценивания.

ЕГЭ — стандартизированный экзамен, поэтому каждое задание всегда соответствует определенной теме.

Часть 1 (с кратким ответом)		
№ задания	Тема задания	Максимальный первичный балл
1	Планиметрия	1
2	Стереометрия	1
3	Вероятность (базовый уровень)	1
4	Вероятность (повышенный уровень)	1
5	Уравнения	1
6	Выражения	1
7	Графики функций (базовый уровень)	1
8	Прикладная задача	1
9	Текстовая задача (движение, производительность, проценты)	1
10	Графики функций (повышенный уровень)	1
11	Анализ функций	1
12	Уравнения	2
13	Стереометрия	3
14	Неравенства	2
15	Экономическая задача	2
16	Планиметрия	3
17	Задание с параметром	4
18	Олимпиадная задача	4

Задания с кратким ответом принесут вам до 11 первичных баллов (ПБ). Самая популярная цель на ЕГЭ по математике — набрать 80 баллов, для этого раньше было необходимо 19 первичных баллов. Ранее многие ученики пользовались рабочей стратегией: решить всю часть с кратким ответом, а также № 12, 14 и 15. Если хорошо разбирались в геометрии, выбирали № 13 и 16 или использовали их как запасные задания. Сейчас стратегия должна быть другой, так как № 13 (стереометрия) стал стоить дороже — 3 балла вместо 2, а № 15 (экономическая задача) подешевел с 3 баллов до 2. Изменилась также шкала перевода баллов, поэтому подумайте, какими заданиями вы сможете набрать необходимое количество первичных баллов:

- ▶ Алгебра и начала анализа — 8 заданий, 13 первичных баллов;
- ▶ Геометрия — 4 задания, 8 первичных баллов;
- ▶ Реальная математика — 6 заданий, 10 первичных баллов.

Какие были внесены изменения в КИМ ЕГЭ 2024 года по сравнению с КИМ ЕГЭ 2023 года?

В первую часть КИМ включено задание по геометрии (задание 2), проверяющее умения определять координаты точки, вектора, производить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами (код 13 по перечню проверяемых требований к предметным результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования; код 7.5 по перечню элементов содержания, проверяемых на ЕГЭ по математике).

Максимальный первичный балл за выполнение экзаменационной работы увеличен с 31 до 32.

## Структура КИМов

На официальном экзамене по математике будет всего 19 заданий, среди которых 7 имеют базовый уровень сложности (задания № 1–4, 6–8), 10 — повышенный (задания № 5, 9–17), а 2 — высокий (задания № 18 и 19).

Контрольно-измерительный материал будет включать в себя две части:

Раздел	Тип ответа	Количество вопросов
I часть	краткий	12 шт.
II часть	развернутый	7 шт.

## Количественное деление заданий КИМа по тематическим блокам:

Раздел	Количество заданий	Максимальный балл
Алгебра и начала математического анализа	12 шт.	21 ПБ
Геометрия	5 шт.	9 ПБ
Вероятность и статистика	2 шт.	2 ПБ
Всего	19 шт.	32 ПБ

На выполнение 19 заданий профильной математики будет отведено 3 ч 55 мин.

## Максимально возможные баллы за каждое задание КИМа

Задание	Максимальный балл	Задание	Максимальный балл
№ 1	1 ПБ	№ 11	1 ПБ
№ 2	1 ПБ	№ 12	1 ПБ
№ 3	1 ПБ	№ 13	2 ПБ
№ 4	1 ПБ	№ 14	3 ПБ
№ 5	1 ПБ	№ 15	2 ПБ
№ 6	1 ПБ	№ 16	2 ПБ
№ 7	1 ПБ	№ 17	3 ПБ
№ 8	1 ПБ	№ 18	4 ПБ
№ 9	1 ПБ	№ 19	4 ПБ
№ 10	1 ПБ		

Перевод ПБ в тестовый результат для ЕГЭ по профильной математике в 2024 будет выполнен по такой таблице соответствия:

Первичный балл	Тестовый балл	Первичный балл	Тестовый балл
1	6	17	76
2	11	18	78
3	17	19	80
4	22	20	82
5	27	21	84
6	34	22	86
7	40	23	88
8	46	24	90
9	52	25	92
10	58	26	94
11	64	27	96
12	66	28	97
13	68	29	98



Первичный балл	Тестовый балл	Первичный балл	Тестовый балл
14	70	30	99
15	72	31	100
16	74	32	100

Обратите внимание! Перевод результата в школьную оценку для экзамена профильного уровня не предусмотрен.

Пороговые значения для профильной математики:

Параметр	Первичные баллы	Тестовые баллы
Минимальный порог	5 ПБ	27 ТБ
Максимальный порог	32 ПБ	100 ТБ
Порог вузов Минобрнауки	7 ПБ	40 ТБ

## РЕШЕНИЕ ВСЕХ ЗАДАНИЙ

### § 1. Задание 1. Планиметрия

Здесь приводятся задачи с решениями на нахождение элементов и углов в прямоугольном, равнобедренном и произвольном треугольниках, а также различных типов четырехугольников, вписанных и описанных многоугольников, на центральные и вписанные углы, на свойства касательных к окружности. Часть задач решена с использованием координатной сетки.

#### 1.1. Прямоугольный треугольник

**Пример 1.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 30$ ,  $AC = 6\sqrt{21}$ . Найдите  $\sin \angle A$ .

*Решение.*

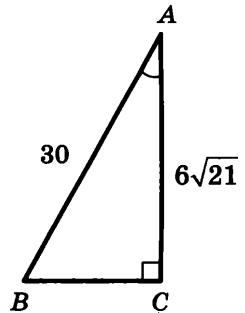
$$\sin \angle A = \frac{BC}{AB}.$$

Катет  $BC$  найдем по теореме Пифагора:

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}, \text{ или } BC = \sqrt{900 - 756} = \sqrt{144} = 12.$$

$$\text{Тогда } \sin \angle A = \frac{12}{30} = 0,4.$$

*Ответ:* 0,4.



**Пример 2.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 25$ ,  $AC = 20$ . Найдите  $\operatorname{tg} \angle A$ .

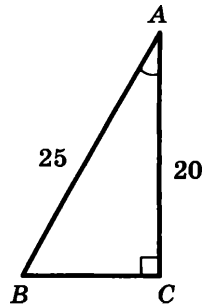
*Решение.*

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC}, \text{ где } BC = \sqrt{AB^2 - AC^2},$$

$$BC = \sqrt{625 - 400} = \sqrt{225} = 15.$$

$$\text{Значит, } \operatorname{tg} \angle A = \frac{15}{20} = 0,75.$$

*Ответ:* 0,75.



**Пример 3.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\cos \angle A = \frac{5}{\sqrt{41}}$ .

Найдите  $\operatorname{tg} \angle A$ .

*Решение.*

Известно, что  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ , тогда  $1 + \operatorname{tg}^2 \angle A = \frac{41}{25}$ ,  $\operatorname{tg}^2 \angle A = \frac{41}{25} - 1$ ,

или  $\operatorname{tg}^2 \angle A = \frac{16}{25}$ , откуда  $\operatorname{tg} \angle A = 0,8$ .

*Ответ:* 0,8.

**Пример 4.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \angle A = \frac{2}{\sqrt{21}}$ . Найдите  $\sin \angle A$ .

*Решение.*

Так как  $\operatorname{tg} \angle A = \frac{2}{\sqrt{21}}$ , то  $\operatorname{ctg} \angle A = \frac{\sqrt{21}}{2}$ .

Известно, что  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ , тогда  $1 + \frac{21}{4} = \frac{1}{\sin^2 \angle A}$ , или

$$\frac{25}{4} = \frac{1}{\sin^2 \angle A}, \text{ откуда } \sin^2 \angle A = \frac{4}{25}.$$

Значит,  $\sin \angle A = \frac{2}{5} = 0,4$  ( $\sin \angle A > 0$ ).

*Ответ:* 0,4.

**Пример 5.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $CD$  — высота,  $AC = 45$ ,  $AD = 9\sqrt{21}$ .

Найдите  $\cos \angle B$ .

*Решение.*

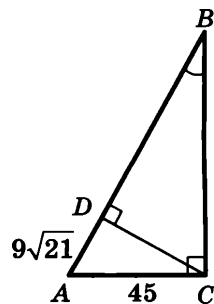
Так как  $\angle A + \angle B = 90^\circ$ , то  $\cos \angle B = \sin \angle A$ .

Но  $\sin \angle A = \frac{DC}{AC}$  (из  $\triangle ADC$ ), где  $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2}$ ,

$$\text{или } DC = \sqrt{2025 - 1701} = \sqrt{324} = 18.$$

$$\text{Тогда } \cos \angle B = \sin \angle A = \frac{18}{45} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

*Ответ:* 0,4.



**Пример 6.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 6\sqrt{65}$ ,  $BC = 42$ . Найдите тангенс внешнего угла при вершине A.



*Решение.*

Пусть  $\angle BAC = \alpha$ ,  $\angle BAD = \beta$  — внешний угол при вершине  $A$ .

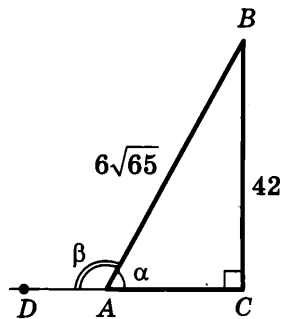
Так как  $\alpha$  и  $\beta$  — смежные углы, то  $\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha$ .

Но  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC}$ , где  $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2}$ , или

$$AC = \sqrt{2340 - 1764} = \sqrt{576} = 24.$$

$$\text{Значит, } \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha = -\frac{42}{24} = -\frac{7}{4} = -1,75.$$

*Ответ:*  $-1,75$ .



**Пример 7.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\cos \angle B = \frac{4}{5}$ . Найдите

косинус внешнего угла при вершине  $A$ .

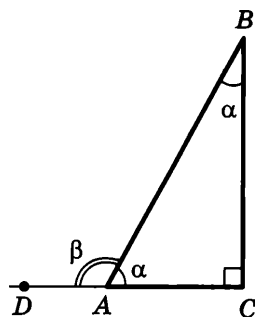
*Решение.*

Пусть  $\angle B = \alpha$ ,  $\angle DAB = \beta$  — внешний угол при вершине  $A$ .

Но  $\beta = 90^\circ + \alpha$ , тогда  $\cos \beta = \cos (90^\circ + \alpha) =$

$$= -\sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{9}{25}} = -\frac{3}{5} = -0,6.$$

*Ответ:*  $-0,6$ .



**Пример 8.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \angle A = \frac{7}{24}$ . Найдите  $\sin \angle A$ .

*Решение.*

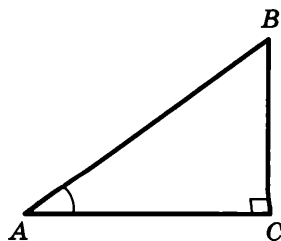
Если  $\operatorname{tg} \angle A = \frac{7}{24}$ , то  $\cos \angle A = \frac{24}{25}$ .

Известно, что  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ , тогда

$$1 + \left(\frac{24}{7}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \angle A}, \text{ или } 1 + \frac{576}{49} = \frac{1}{\sin^2 \angle A},$$

$$\frac{625}{49} = \frac{1}{\sin^2 \angle A}, \sin^2 \angle A = \frac{49}{625}, \text{ откуда } \sin \angle A = \frac{7}{25} = 0,28.$$

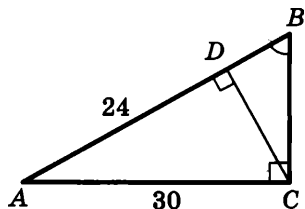
*Ответ:*  $0,28$ .



**Пример 9.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $CD$  — высота,  $AC = 30$ ,  $AD = 24$ . Найдите  $\cos \angle B$ .

*Решение.*

Так как  $\angle A + \angle B = 90^\circ$ , то  $\cos \angle B = \sin \angle A$ .

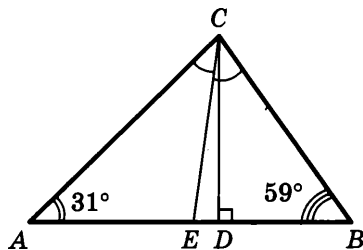


Из  $\triangle ADC$   $\sin \angle A = \frac{DC}{AC}$ , где  $DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{324} = 18$ .

Значит,  $\cos \angle B = \sin \angle A = \frac{18}{30} = 0,6$ .

Ответ: 0,6.

**Пример 10.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 31^\circ$ ,  $\angle B = 59^\circ$ . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины прямого угла.



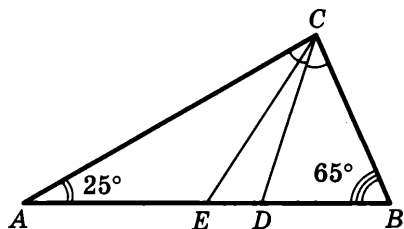
Решение.

Пусть  $\angle DCE = \alpha$  — угол между высотой  $CD$  и биссектрисой  $CE$ . Так как  $CE$  — биссектриса и  $\angle ACB = 90^\circ$ , то  $\angle ACE = 45^\circ$ , тогда внешний  $\angle CED = 31^\circ + 45^\circ = 76^\circ$ .

Значит,  $\angle DCE = 90^\circ - \angle CED = 90^\circ - 76^\circ$ ,  $\alpha = 14^\circ$ .

Ответ: 14.

**Пример 11.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 25^\circ$ ,  $\angle B = 65^\circ$ ,  $CE$  — медиана,  $CD$  — биссектриса. Найдите  $\angle ECD$ .



Решение.

Пусть  $\angle ECD = \alpha$ . Так как  $\angle ACB = 90^\circ$ , то  $\angle BCD = 45^\circ$ .

По условию задачи  $CE$  — медиана, значит, точка  $E$  — центр описанной около  $\triangle ABC$  окружности.

Тогда  $AE = BE = CE$ , т. е.  $\triangle CEB$  — равнобедренный и  $\angle B = \angle ECB = 65^\circ$ .

Следовательно,  $\angle ECD = \alpha = \angle ECB - \angle BCD = 65^\circ - 45^\circ = 20^\circ$ .

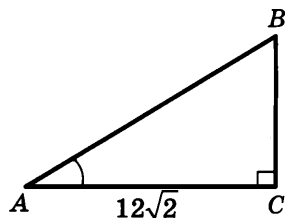
Ответ: 20.

**Пример 12.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin \angle A = \frac{7}{9}$ ,  $AC = 12\sqrt{2}$ . Найдите  $AB$ .

Решение.

Так как  $\sin \angle A = \frac{7}{9}$ , то

$$\cos \angle A = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{32}{81}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$



Но  $\cos \angle A = \frac{AC}{AB}$ , значит,  $\frac{12\sqrt{2}}{AB} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ , откуда  $AB = \frac{12 \cdot 9}{4} = 27$ .

Ответ: 27.

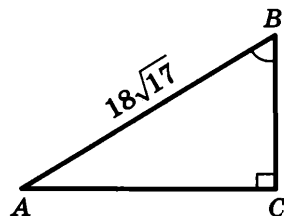
**Пример 13.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\cos \angle B = \frac{8}{9}$ ,

$AB = 18\sqrt{17}$ . Найдите  $AC$ .

Решение.

Так как  $\cos \angle B = \frac{8}{9}$ , то

$$\sin \angle B = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{9}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{64}{81}} = \frac{\sqrt{17}}{9}.$$



По определению  $\sin \angle B = \frac{AC}{AB}$ , откуда  $AC = AB \cdot \sin \angle B =$   
 $= 18\sqrt{17} \cdot \frac{\sqrt{17}}{9} = 34$ .

Ответ: 34.

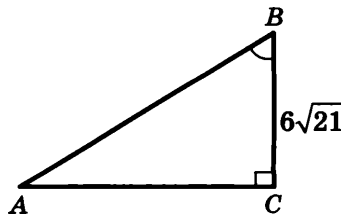
**Пример 14.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\cos \angle A = 0,4$ ,  
 $BC = 6\sqrt{21}$ . Найдите  $AB$ .

Решение.

Если  $\cos \angle A = 0,4$ , то

$$\sin \angle A = \sqrt{1 - 0,4^2} = \sqrt{1 - 0,16} =$$

$$= \sqrt{0,84} = \sqrt{\frac{84}{100}} = \frac{2\sqrt{21}}{10} = \frac{\sqrt{21}}{5}.$$



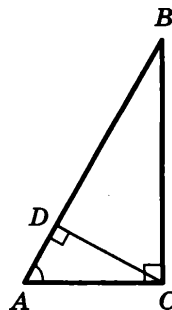
Но  $\sin \angle A = \frac{BC}{AB}$ , значит,  $\frac{6\sqrt{21}}{AB} = \frac{\sqrt{21}}{5}$ , откуда  $AB = 5 \cdot 6 = 30$ .

Ответ: 30.

**Пример 15.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $CD$  — высота,  $AB = 48$ ,  
 $\cos \angle A = \frac{3}{4}$ . Найдите  $AD$ .

Решение.

В  $\triangle ABC$   $\cos \angle A = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{4}$ , откуда  $AC = \frac{3}{4} \cdot AB =$   
 $= \frac{3}{4} \cdot 48 = 3 \cdot 12 = 36$ .





$$\text{Из } \triangle ADC \cos \angle A = \frac{AD}{AC} \Rightarrow AD = AC \cdot \cos \angle A = 36 \cdot \frac{3}{4} = 9 \cdot 3 = 27.$$

Ответ: 27.

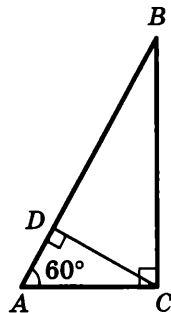
**Пример 16.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $CD$  — высота,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $AB = 36$ . Найдите  $AD$ .

Решение.

$$\text{Так как } \angle A = 60^\circ, \text{ то } \angle B = 30^\circ \Rightarrow AC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18.$$

$$\text{В } \triangle ADC \angle ACD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow AD = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9.$$

Ответ: 9.



**Пример 17.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\sin \angle B = \frac{3}{5}$ ,

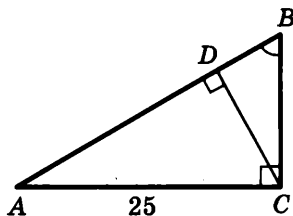
$AC = 25$ ,  $CD$  — высота. Найдите  $AD$ .

Решение.

$$\sin \angle B = \cos \angle A = \frac{AD}{AC} = \frac{AD}{25} \text{ (из } \triangle ADC), \text{ тогда}$$

$$AD = 25 \cdot \sin \angle B = 25 \cdot \frac{3}{5} = 15.$$

Ответ: 15.



**Пример 18.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 20$ . Косинус внешнего угла при вершине  $B$  равен  $-0,8$ . Найдите  $AC$ .

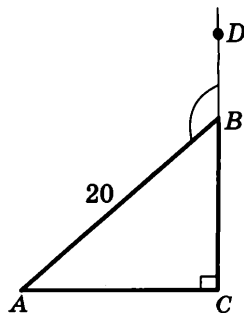
Решение.

Так как  $\angle ABD$  и  $\angle ABC$  — смежные, то  $\cos \angle ABC = -\cos \angle ABD = 0,8$ .

$$\text{Если } \cos \angle ABC = 0,8, \text{ то } \sin \angle ABC = \sqrt{1 - 0,8^2} = \sqrt{0,36} = 0,6.$$

$$\text{Но } \sin \angle ABC = \frac{AC}{AB}, \text{ или } \frac{AC}{20} = 0,6, \text{ откуда } AC = 20 \cdot 0,6 = 12.$$

Ответ: 12.



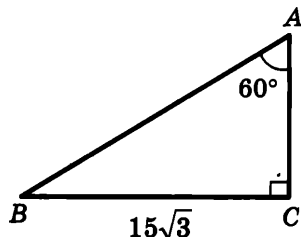
**Пример 19.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 60^\circ$ ,  
 $BC = 15\sqrt{3}$ . Найдите  $AC$ .

*Решение.*

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{AC}{BC}, \text{ откуда } AC = BC \operatorname{ctg} 60^\circ =$$

$$= 15\sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 15.$$

*Ответ:* 15.



## 1.2. Равнобедренный треугольник

**Пример 20.** В  $\triangle ABC$   $AB = BC = 15$ ,  $BD = 9$  — высота, проведенная к основанию  $AC$ . Найдите  $\cos \angle A$ .

*Решение.*

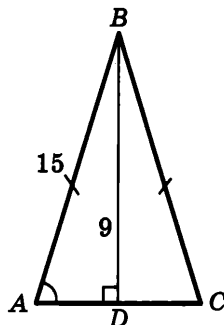
Так как  $\triangle ABC$  — равнобедренный, то высота  $BD$  является медианой, тогда  $AD = DC$ .

Из прямоугольного  $\triangle ABD$  по теореме Пифагора найдем  $AD$ :

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}, \text{ или } AD = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12.$$

$$\text{Значит, } \cos \angle A = \frac{AD}{AB} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

*Ответ:* 0,8.



**Пример 21.** В  $\triangle ABC$   $AC = BC = 5\sqrt{41}$ ,  $AB = 40$ . Найдите  $\operatorname{tg} \angle A$ .

*Решение.*

Проведем высоту  $CD$ . Так как  $\triangle ABC$  — равнобедренный, то высота  $CD$  является и медианой.

$$\text{Тогда } AD = DB = \frac{1}{2}AB = 20.$$

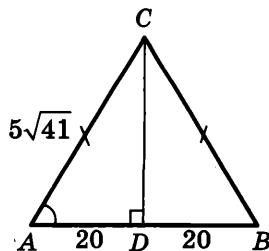
$$\text{Из } \triangle ACD \cos \angle A = \frac{AD}{AC} = \frac{20}{5\sqrt{41}} = \frac{4}{\sqrt{41}}.$$

$$\text{Известно, что } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ значит,}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \angle A = \frac{1}{\cos^2 \angle A}, \text{ или } 1 + \operatorname{tg}^2 \angle A = \frac{41}{16}, \text{ откуда } \operatorname{tg}^2 \angle A = \frac{41}{16} - 1 = \frac{25}{16}.$$

$$\text{Так как } \angle A < 90^\circ, \text{ то } \operatorname{tg} \angle A > 0, \text{ т. е. } \operatorname{tg} \angle A = \frac{5}{4} = 1,25.$$

*Ответ:* 1,25.

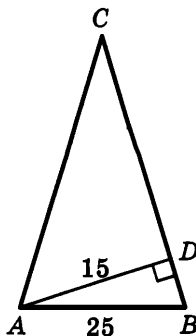


**Пример 22.** В  $\triangle ABC$   $AC = BC$ ,  $AB = 25$ , высота  $AD = 15$ . Найдите  $\sin \angle A$ .

*Решение.*

Так как  $\triangle ABC$  — равнобедренный, то  $\angle A = \angle B$ , тогда  $\sin \angle A = \sin \angle B = \frac{AD}{AB} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5} = 0,6$ .

*Ответ:* 0,6.



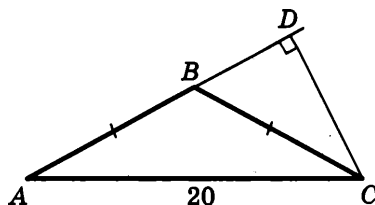
**Пример 23.** В  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $AC = 20$ ,  $CD$  — высота,  $AD = 16$ . Найдите  $\sin \angle ACB$ .

*Решение.*

$\angle ACB = \angle A$  (по свойству равнобедренного треугольника).

Тогда  $\sin \angle ACB = \sin \angle A$ .

Из  $\triangle ADC$   $\sin \angle A = \frac{DC}{AC}$ .



Сторону  $DC$  найдем из  $\triangle ADC$  по теореме Пифагора:

$$DC = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{(20-16)(20+16)} = \sqrt{4 \cdot 36} = 2 \cdot 6 = 12.$$

Значит,  $\sin \angle ACB = \sin \angle A = \frac{12}{20} = 0,6$ .

*Ответ:* 0,6.

**Пример 24.** В  $\triangle ABC$   $AC = BC = 20$ ,  $AB = 24$ . Найдите синус внешнего угла при вершине  $B$ .

*Решение.*

Проведем высоту  $CD$  к основанию  $AB$ .

Так как  $\triangle ABC$  — равнобедренный, то  $CD$  — медиана, тогда  $AD = BD = 12$ .

Пусть  $\angle ABC = \alpha$ ,  $\angle CBE = \beta$ .

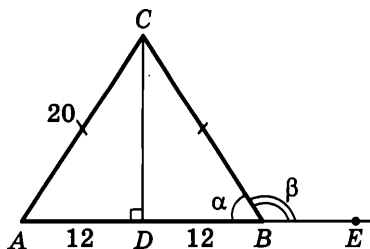
Так как  $\alpha$  и  $\beta$  — смежные углы, то  $\sin \alpha = \sin \beta$ .

Но  $\sin \alpha = \frac{CD}{BC}$ , где  $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2}$ , или

$$CD = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16.$$

Значит,  $\sin \beta = \sin \alpha = \frac{16}{20} = 0,8$ .

*Ответ:* 0,8.





**Пример 25.** В тупоугольном  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $AB = 20$ ,  $CD = 2\sqrt{19}$  — высота. Найдите  $\cos \angle ABC$ .

*Решение.*

Пусть  $\angle ABC = \alpha$ ,  $\angle CBD = \beta$ . Так как  $\alpha$  и  $\beta$  — смежные углы, то  $\cos \alpha = -\cos \beta$ .

Из  $\triangle CDB$   $\cos \beta = \frac{BD}{BC}$ , где  $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2} = \sqrt{20^2 - (2\sqrt{19})^2} = \sqrt{400 - 76} = \sqrt{324} = 18$ .

Тогда  $\cos \alpha = -\cos \beta = -\frac{18}{20} = -0,9$ .

*Ответ:*  $-0,9$ .

**Пример 26.** В  $\triangle ABC$   $AC = BC$ ,  $\angle C = 48^\circ$ . Найдите внешний  $\angle CBD$ .

*Решение.*

Так как  $AC = BC$ , то  $\triangle ABC$  — равнобедренный, тогда  $\angle A = \angle B = \alpha$ .

Получим  $\alpha + \alpha + 48^\circ = 180^\circ$ , или  $2\alpha = 180^\circ - 48^\circ$ ,  $2\alpha = 132^\circ$ , откуда  $\alpha = 66^\circ$ .

Значит,  $\angle CBD = 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 66^\circ = 114^\circ$ .

*Ответ:*  $114$ .

**Пример 27.** Один из углов равнобедренного треугольника равен  $100^\circ$ . Найдите один из других его углов.

*Решение.*

Так как  $\triangle ABC$  — равнобедренный с основанием  $AB$ , то  $\angle A = \angle B < 90^\circ$ .

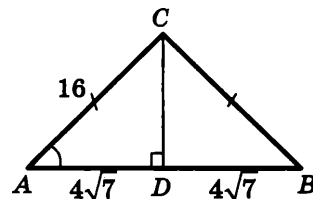
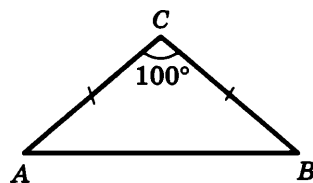
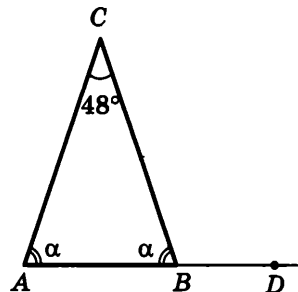
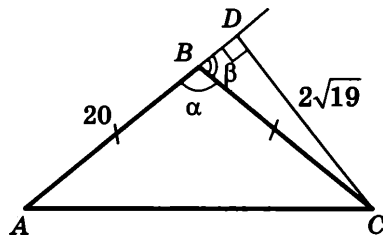
По условию  $\angle C = 100^\circ$ , тогда  $\angle A = \angle B = (180^\circ - 100^\circ) : 2 = 40^\circ$ .

*Ответ:*  $40$ .

**Пример 28.** В  $\triangle ABC$   $AC = BC = 16$ ,  $AB = 8\sqrt{7}$ . Найдите  $\sin \angle A$ .

*Решение.*

Проведем высоту  $CD$ . Тогда  $CD$  — медиана  $\triangle ABC$ , значит,  $AD = BD = 4\sqrt{7}$ .



Из  $\triangle ADC$   $\sin \angle A = \frac{CD}{AC}$ , где  $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2}$ , или

$$CD = \sqrt{16^2 - (4\sqrt{7})^2} = \sqrt{256 - 112} = \sqrt{144} = 12.$$

Значит,  $\sin \angle A = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0,75$ .

Ответ: 0,75.

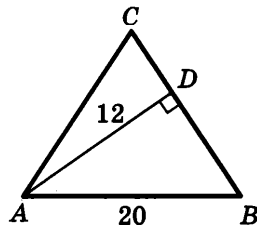
**Пример 29.** В  $\triangle ABC$   $AC = BC$ ,  $AB = 20$ ,  $AD = 12$  — высота. Найдите  $\sin \angle A$ .

Решение.

Так как  $AC = BC$ , то  $\triangle ABC$  — равнобедренный, тогда  $\angle CAB = \angle B$ , значит,  $\sin \angle A = \sin \angle B =$

$$= \frac{AD}{AB} = \frac{12}{20} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.



**Пример 30.** В  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $CD$  — высота,  $AB = 20$ ,  $BD = 16$ . Найдите  $\sin \angle ABC$ .

Решение.

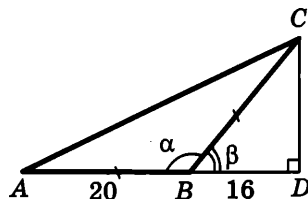
Пусть  $\angle ABC = \alpha$ ,  $\angle CBD = \beta$ .

Так как  $\alpha$  и  $\beta$  — смежные углы, то  $\sin \alpha = \sin \beta$ .

Из  $\triangle BDC$   $\sin \beta = \frac{CD}{BC}$ , где  $CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$ .

Тогда  $\sin \beta = \sin \alpha = \frac{12}{20} = 0,6$ .

Ответ: 0,6.



**Пример 31.** В  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $CD = 32$  — высота,  $AD = 40$ . Найдите  $\operatorname{tg} \angle ACB$ .

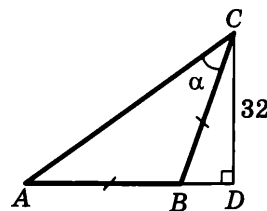
Решение.

По условию  $AB = BC$ , значит,  $\triangle ABC$  — равнобедренный.

Пусть  $\angle ACB = \alpha$ , тогда  $\angle A = \alpha$ .

Из  $\triangle ADC$   $\operatorname{tg} \angle A = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{CD}{AD} = \frac{32}{40} = 0,8$ .

Ответ: 0,8.



**Пример 32.** В  $\triangle ABC$   $AC = BC$ ,  $AB = 16$ ,  $\cos \angle A = \frac{8}{\sqrt{89}}$ .

Найдите высоту  $CD$ .

*Решение.*

Проведем высоту  $CD$ .

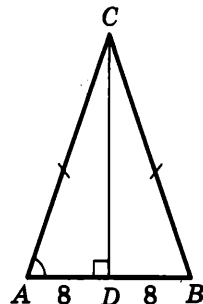
Из  $\triangle ADC$ , где  $AD = DB = 8$ ,  $\operatorname{tg} \angle A = \frac{CD}{AD}$ .

Известно, что  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ , тогда  $1 + \operatorname{tg}^2 \angle A = \frac{89}{64}$ ,

$\operatorname{tg}^2 \angle A = \frac{89}{64} - 1$ , или  $\operatorname{tg}^2 \angle A = \frac{25}{64}$ , откуда

$\operatorname{tg} \angle A = \frac{5}{8}$  ( $\angle A < 90^\circ$ ). Значит,  $\frac{5}{8} = \frac{CD}{8}$ , т. е.  $CD = 5$ .

*Ответ:* 5.

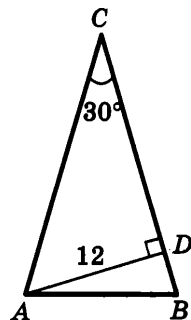


**Пример 33.** В  $\triangle ABC$   $AC = BC$ ,  $AD = 12$  — высота,  $\angle C = 30^\circ$ . Найдите  $AC$ .

*Решение.*

Так как  $AD$  — высота, то  $\triangle ACD$  — прямоугольный, где  $AD = 12$ ,  $\angle C = 30^\circ$ , тогда  $AD = \frac{1}{2}AC \Rightarrow AC = 2AD = 24$  (по свойству катета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ).

*Ответ:* 24.



**Пример 34.** В  $\triangle ABC$   $AC = BC$ ,  $\angle C = 120^\circ$ ,  $AC = 4\sqrt{3}$ . Найдите  $AB$ .

*Решение.*

Пусть  $AB = x$ , тогда по теореме косинусов имеем  $x^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle C$ , или

$$x^2 = (4\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} \cos 120^\circ,$$

$$x^2 = 48 + 48 - 2 \cdot 48 \cdot \cos 120^\circ,$$

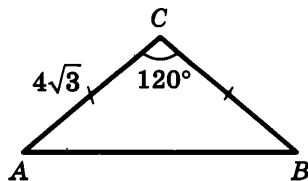
$$x^2 = 96 - 96 \cos 120^\circ = 96(1 - \cos 120^\circ).$$

Но  $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ , тогда  $x^2 = 96 \cdot 2 \sin^2 60^\circ = 96 \cdot 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ ,

$$x^2 = 96 \cdot 2 \cdot \frac{3}{4} = 144, \text{ откуда } x = 12.$$

Значит,  $AB = 12$ .

*Ответ:* 12.



*Замечание.* Задачу можно решить иначе, проведя из вершины  $C$  высоту к основанию  $AB$ , и т. д.

**Пример 35.** В  $\triangle ABC$   $AC = BC$ ,  $AB = 56$ ,

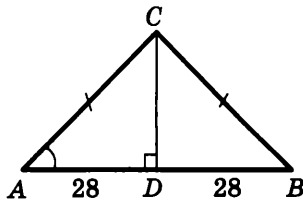
$\operatorname{tg} \angle A = \frac{5}{7}$ . Найдите высоту  $CD$ .

*Решение.*

Так как  $CD$  — высота равнобедренного  $\triangle ABC$ , то  $CD$  является и медианой, т. е.  $AD = DB = 28$ .

Из  $\triangle ADC$   $\operatorname{tg} \angle A = \frac{CD}{AD}$ , откуда  $CD = AD \cdot \operatorname{tg} \angle A = 28 \cdot \frac{5}{7} = 4 \cdot 5 = 20$ .

*Ответ:* 20.



**Пример 36.** В  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $AC = 15$ ,  $\sin \angle C = 0,6$ ,  $CD$  — высота. Найдите  $AD$ .

*Решение.*

Так как  $AB = BC$ , то  $\angle A = \angle C$ , тогда  $\sin \angle C = \sin \angle A$ .

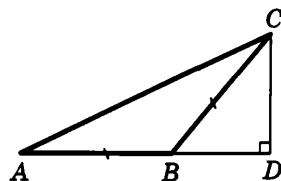
По условию  $CD$  — высота к  $\triangle ABC$ , тогда  $\triangle ADC$  — прямоугольный.

Значит,  $\sin \angle A = \sin \angle C = \frac{CD}{AC}$ , откуда  $CD = AC \cdot \sin \angle C$ , или

$$CD = 15 \cdot 0,6 = 9.$$

Следовательно, по теореме Пифагора  $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2}$ , или  $AD = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144} = 12$ .

*Ответ:* 12.



**Пример 37.** В  $\triangle ABC$   $AC = BC$ ,  $AB = 24$ . Синус внешнего угла при вершине  $B$  равен 0,6. Найдите  $AC$ .

*Решение.*

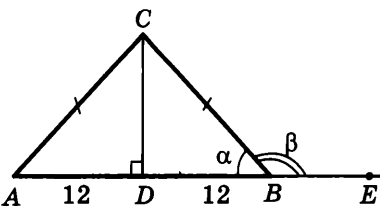
По условию  $AC = BC$ , значит,  $\triangle ABC$  — равнобедренный.

Проведем высоту  $CD$ , тогда  $CD$  является и медианой, т. е.  $AD = BD = 12$ . Пусть  $\angle ABC = \alpha$ ,  $\angle CBE = \beta$ , тогда  $\sin \alpha = \sin \beta = 0,6$ .

Значит,  $\cos \alpha = -\cos \beta = \sqrt{1 - 0,6^2} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8$ .

Из  $\triangle CDB$   $\cos \alpha = \frac{BD}{BC} = \frac{BD}{AC}$ , откуда  $AC = \frac{BD}{\cos \alpha} = \frac{12}{0,8} = \frac{12 \cdot 5}{4} = 3 \cdot 5 = 15$ .

*Ответ:* 15.



**Пример 38.** В  $\triangle ABC$   $AC = BC$ ,  $AB = 24$ ,  $\cos \angle A = 0,8$ . Найдите  $AC$ .

*Решение.*

В равнобедренном  $\triangle ABC$  высота  $CD$  является и медианой, тогда  $AD = BD = 12$ .

Из  $\triangle ACD$  имеем  $\cos \angle A = \frac{AD}{AC}$ , откуда

$$AC = \frac{AD}{\cos \angle A} = \frac{12}{0,8} = \frac{12 \cdot 5}{4} = 3 \cdot 5 = 15.$$

*Ответ:* 15.

**Пример 39.** В  $\triangle ABC$   $AC = BC$ ,  $AB = 15$ ,  $\cos \angle A = 0,6$ . Найдите высоту  $AD$ .

*Решение.*

Если  $\cos \angle A = 0,6$ , то

$$\sin \angle A = \sqrt{1 - 0,6^2} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8.$$

Поскольку  $AC = BC$ , то  $\angle CAB = \angle B$ , тогда  $\sin \angle CAB = \sin \angle B = \frac{AD}{AB}$

(из  $\triangle ADB$ ).

Значит,  $AD = AB \cdot \sin \angle CAB = 15 \cdot 0,8 = 12$ .

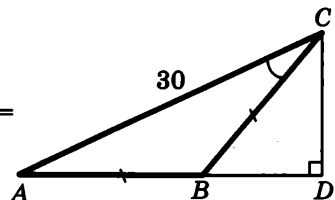
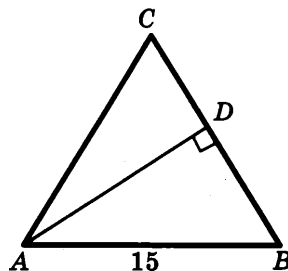
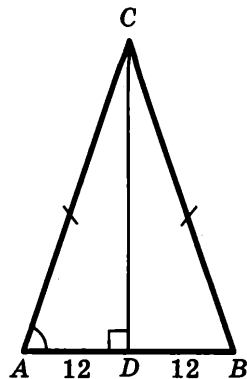
*Ответ:* 12.

**Пример 40.** В  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $AC = 30$ ,  $\cos \angle C = 0,6$ ,  $CD$  — высота. Найдите  $AD$ .

*Решение.*

Так как  $AB = BC$ , то  $\angle C = \angle A$  (по свойству равнобедренного треугольника), тогда  $\cos \angle C = \cos \angle A = \frac{AD}{AC}$  (из  $\triangle ADC$ ), откуда  $AD = AC \cdot \cos \angle A = 30 \cdot 0,6 = 18$ .

*Ответ:* 18.

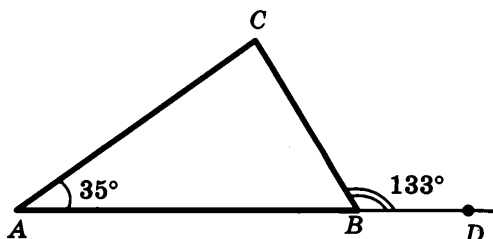


### 1.3. Произвольный треугольник

**Пример 41.** В  $\triangle ABC$   $\angle A = 35^\circ$ , внешний угол при вершине  $B$  равен  $133^\circ$ . Найдите  $\angle C$ .

*Решение.*

По условию задачи  $\angle A = 35^\circ$ ,  $\angle CBD = 133^\circ$  — внешний угол  $\triangle ABC$ .



По теореме о внешнем угле треугольника имеем  $\angle CBD = \angle A + \angle C$ , откуда  $\angle C = \angle CBD - \angle A$ , или  $\angle C = 133^\circ - 35^\circ = 98^\circ$ .

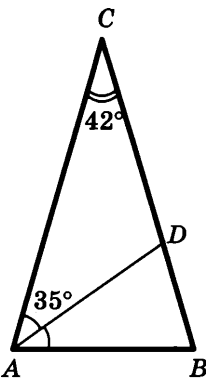
Ответ: 98.

**Пример 42.** В  $\triangle ABC$   $AD$  — биссектриса,  $\angle C = 42^\circ$ ,  $\angle CAD = 35^\circ$ . Найдите  $\angle B$ .

Решение.

Так как  $AD$  — биссектриса, то  $\angle CAB = 35^\circ \cdot 2 = 70^\circ$ , тогда  $\angle B = 180^\circ - (70^\circ + 42^\circ) = 68^\circ$ .

Ответ: 68.



**Пример 43.** В  $\triangle ABC$   $\angle A = 44^\circ$ ,  $BD$  и  $CE$  — высоты, пересекающиеся в точке  $O$ . Найдите  $\angle DOE$ .

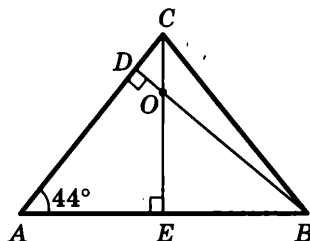
Решение.

Известно, что сумма углов выпуклого четырехугольника равна  $360^\circ$ .

Так как  $CE$  и  $BD$  — высоты  $\triangle ABC$ , то  $\angle ADO = 90^\circ$  и  $\angle AEO = 90^\circ$ .

По условию  $\angle A = 44^\circ$ , значит,  $\angle DOE = 180^\circ - 44^\circ = 136^\circ$ .

Ответ: 136.

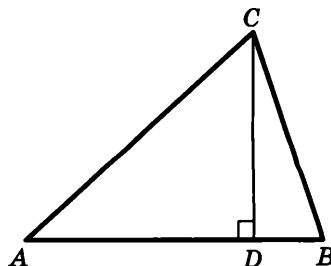


**Пример 44.** В  $\triangle ABC$   $\angle A = 80^\circ$ ,  $\angle B = 40^\circ$ ,  $CD$  — высота. Найдите разность углов  $BCD$  и  $ACD$ . Ответ дайте в градусах.

Решение.

$\angle BCD - \angle ACD = (90^\circ - \angle B) - (90^\circ - \angle A) = \angle A - \angle B = 80^\circ - 40^\circ = 40^\circ$ .

Ответ: 40.



**Пример 45.** В  $\triangle ABC$   $\angle A = 35^\circ$ ,  $\angle B = 62^\circ$ ,  $AD$  и  $BE$  — высоты, проведенные к сторонам  $BC$  и  $AC$  соответственно. Найдите  $\angle AOB$ , где  $O$  — точка пересечения высот  $AD$  и  $BE$ . Ответ дайте в градусах.

Решение.

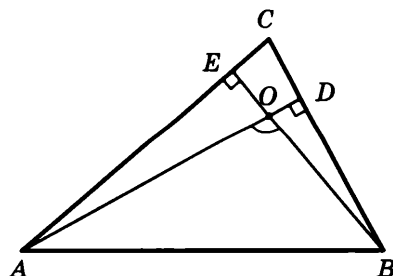
По условию  $AD$  и  $BE$  — высоты, тогда  $\angle CEO = \angle EOD = 90^\circ$ .

Так как сумма углов выпуклого четырехугольника равна  $360^\circ$ , то  $\angle C + \angle EOD = 180^\circ$ .

Но  $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 83^\circ$ , где  $\angle A = 35^\circ$ ,  $\angle B = 62^\circ$ .

Значит,  $\angle AOB = \angle EOD = 180^\circ - 83^\circ = 97^\circ$ .

Ответ: 97.

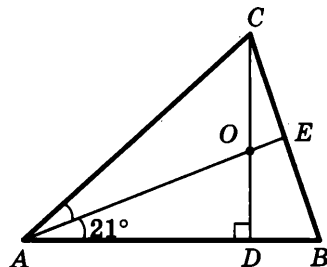


**Пример 46.** В  $\triangle ABC$   $AE$  — биссектриса,  $\angle BAE = 21^\circ$ ,  $CD$  — высота,  $O$  — точка пересечения  $AE$  и  $CD$ . Найдите  $\angle AOC$ . Ответ дайте в градусах.

*Решение.*

$\angle AOC$  — внешний угол  $\triangle AOD$ . Значит,  $\angle AOC = \angle OAD + \angle ADO = 21^\circ + 90^\circ = 111^\circ$ .

*Ответ:* 111.



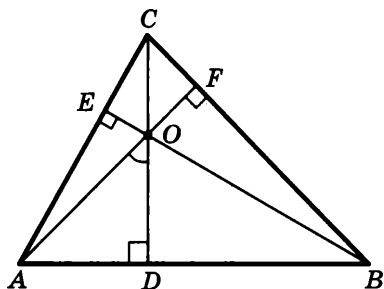
**Пример 47.** В  $\triangle ABC$   $\angle A = 80^\circ$ ,  $\angle B = 40^\circ$ ,  $CD$ ,  $BE$  и  $AF$  — высоты, пересекающиеся в точке  $O$ . Найдите  $\angle AOD$ . Ответ дайте в градусах.

*Решение.*

Сумма углов выпуклого четырехугольника равна  $360^\circ$ . В четырехугольнике  $DOFB$  известно, что  $\angle B = 40^\circ$ ,  $\angle ODB = \angle OFB = 90^\circ$ . Значит,  $\angle B + \angle DOF = 180^\circ$ , откуда  $\angle DOF = 180^\circ - \angle B$ .

Но  $\angle AOD$  и  $\angle DOF$  — смежные, тогда  $\angle AOD = 180^\circ - \angle DOF = 180^\circ - (180^\circ - \angle B) = \angle B = 40^\circ$ .

*Ответ:* 40.

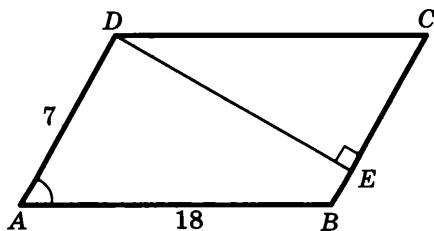


## 1.4. Четырехугольники

**Пример 48.** В параллелограмме  $ABCD$   $AB = 18$ ,  $AD = 7$ ,  $\sin \angle A = 0,8$ . Найдите большую высоту параллелограмма.

*Решение.*

Так как  $BC$  — меньшая сторона параллелограмма, то  $DE$  — большая высота.



Известно, что площадь  $S = ab \cdot \sin \alpha$ , где  $a = AB = 18$ ,  $b = AD = 7$ ,  $\sin \alpha = \sin \angle A = 0,8$ .

Тогда  $S = 18 \cdot 7 \cdot 0,8$ .

С другой стороны,  $S = BC \cdot DE = AD \cdot DE = 7 \cdot DE$ .

Значит,  $7 \cdot DE = 18 \cdot 7 \cdot 0,8$ , откуда  $DE = 18 \cdot 0,8 = 14,4$ .

*Ответ:* 14,4.

**Пример 49.** Основания равнобедренной трапеции равны 28 и 12. Синус острого угла трапеции равен 0,6. Найдите боковую сторону.

*Решение.*

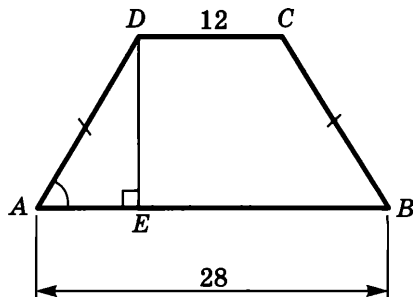
Проведем высоту  $DE$  равнобедренной трапеции  $ABCD$ , где  $AB = 28$ ,  $CD = 12$ ,

тогда  $AE = \frac{1}{2}(AB - DC) = 8$ .

Из  $\triangle ADE$ , где  $\sin \angle A = 0,6 \Rightarrow \cos \angle A = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$ .

Но  $\cos \angle A = \frac{AE}{AD}$ , тогда  $AD = \frac{AE}{\cos \angle A} = \frac{8}{0,8} = 10$ .

*Ответ:* 10.



**Пример 50.** Периметр параллелограмма равен 36. Одна сторона параллелограмма на 2 меньше другой. Найдите большую сторону.

*Решение.*

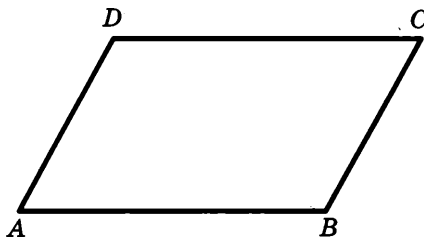
Пусть в параллелограмме  $ABCD$   $AB = x$  — длина большей стороны, тогда  $AD = (x - 2)$  — длина меньшей стороны. Так как по условию задачи периметр  $P = 36$ , то получим уравнение

$$2 \cdot (x + x - 2) = 36, \text{ или}$$

$$2x - 2 = 36 : 2, 2x = 18 + 2,$$

$$2x = 20, x = 10.$$

*Ответ:* 10.



**Пример 51.** В прямоугольнике диагональ делит угол в отношении 1 : 2, меньшая его сторона равна 16. Найдите диагональ прямоугольника.

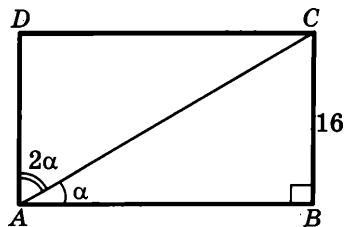
*Решение.*

Пусть в прямоугольнике  $ABCD$   $BC = 16$  — длина меньшей стороны. Пусть  $\angle CAB = \alpha$ , тогда  $\angle DAC = 2\alpha$ .

Так как  $\angle DAB = 90^\circ$ , то получим уравнение  $\alpha + 2\alpha = 90$ ,  $3\alpha = 90$ , откуда  $\alpha = 30^\circ$ .

Из  $\triangle ABC$   $BC = \frac{1}{2}AC$ , т. е.  $AC = 2 \cdot BC = 32$ .

*Ответ:* 32.





**Пример 52.** Основания трапеции равны 8 и 14. Найдите больший из отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей.

*Решение.*

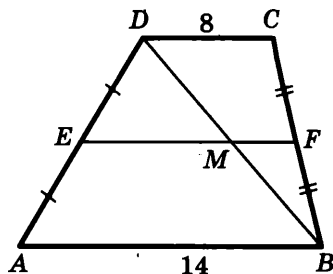
Пусть в трапеции  $ABCD$   $AB$  и  $CD$  — основания,  $BD$  — диагональ,  $EF$  — средняя линия.

Так как  $E$  и  $F$  — середины  $AD$  и  $BC$  соответственно, то точка  $M$  — середина  $BD$  (по теореме Фалеса).

Тогда  $EM$  — средняя линия  $\triangle ABD$  и  $EM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$ , где

$EM > MF$ .

*Ответ:* 7.



**Пример 53.** Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 15. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма.

*Решение.*

Так как  $\triangle ABC$  — равнобедренный, то  $\angle A = \angle B$ . По условию задачи  $DE \parallel AC$  и  $DF \parallel BC$ , значит,  $FDEC$  — параллелограмм.

$\angle A = \angle BDE$  и  $\angle B = \angle ADF$  (как соответственные углы при параллельных прямых и секущей).

Тогда  $\triangle AFD$  — равнобедренный.

Пусть  $AF = FD = x$ ,  $AD = y$ , тогда периметр параллелограмма  $FDCE$  будет равен

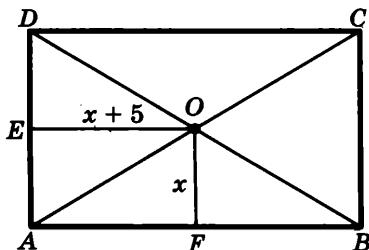
$$P = 2(FD + FC) = 2(x + 15 - x) = 2 \cdot 15 = 30.$$

*Ответ:* 30.

**Пример 54.** В прямоугольнике расстояние от точки пересечения диагоналей до меньшей стороны на 5 см больше, чем расстояние до большей стороны. Периметр прямоугольника равен 80. Найдите меньшую сторону прямоугольника.

*Решение.*

Пусть  $OF = x$  — расстояние от точки пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$  до большей стороны  $AB$  прямоугольника  $ABCD$ . Тогда  $(x + 5)$  — расстояние до меньшей стороны.



Так как  $O$  — середина  $BD$  и  $OF \perp AB$ , то  $F$  — середина  $AB$  (по теореме Фалеса). Значит,  $OF$  — средняя линия  $\triangle DAB$ , тогда  $AD = 2x$  — длина меньшей стороны.

Аналогично  $AB = 2 \cdot OE = 2(x + 5)$ .

По условию задачи  $P = 80$ .

Имеем уравнение  $2 \cdot (AB + AD) = 80$ , или  $AB + AD = 40$ ,

$2(x + 5) + 2x = 40$ ,  $x + 5 + x = 20$ , откуда  $2x = 15$ .

Значит,  $AD = 2x = 15$ .

**Ответ:** 15.

**Пример 55.** Высота равнобедренной трапеции делит большее основание на отрезки длиной 16 и 6. Найдите среднюю линию трапеции.

*Решение.*

Пусть  $l$  — средняя линия трапеции, тогда  $l = \frac{1}{2}(AB + CD)$ , где  $AB$  и

$CD$  — основания трапеции.

По условию  $AE = 16$ ,  $BE = 6$ , тогда  $AB = 16 + 6 = 22$ .

Так как  $AD = BC$ , то  $BE = \frac{1}{2}(AB - CD)$ , или  $6 = \frac{1}{2}(22 - x)$ , или

$12 = 22 - x$ , откуда  $x = 10$ .

Значит,  $l = \frac{1}{2}(22 + 10) = 16$ .

**Ответ:** 16.

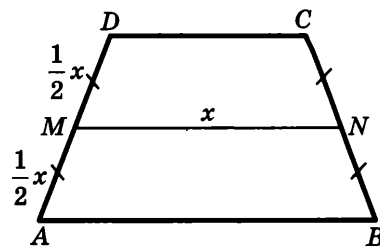
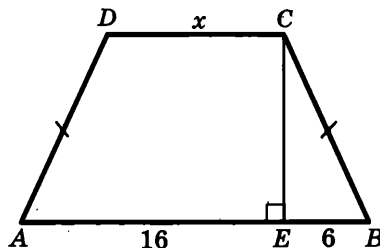
**Пример 56.** Периметр равнобедренной трапеции равен 48, ее средняя линия равна боковой стороне. Найдите боковую сторону трапеции.

*Решение.*

Пусть в трапеции  $ABCD$   $AD = BC$ ,  $MN = AD = x$  — длина средней линии трапеции.

Тогда  $MN = \frac{1}{2}(AB + DC)$ , или  $x = \frac{1}{2}(AB + DC)$ .

По условию задачи периметр трапеции равен 48, т. е.  $2AD + AB + DC = 48$ , или  $2x + (AB + DC) = 48$ , откуда  $AB + DC = 48 - 2x$ .



Так как  $x = \frac{1}{2}(AB + DC)$ , то  $x = \frac{1}{2}(48 - 2x)$ , или  $x = 24 - x$ , или  $2x = 24$ , тогда  $x = AD = 12$ .

*Ответ:* 12.

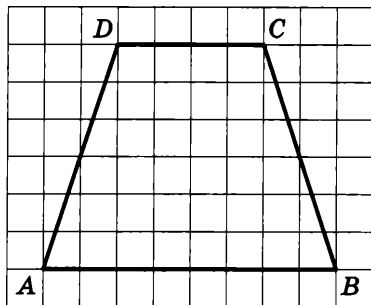
**Пример 57.** Найдите среднюю линию трапеции  $ABCD$ , если стороны квадратных клеток равны 1.

*Решение.*

$AB = 8$ ,  $DC = 4$ , тогда длина средней линии трапеции  $l$  будет равна

$$l = \frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{1}{2} \cdot (8 + 4) = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6.$$

*Ответ:* 6.



## 1.5. Окружность и треугольники

**Пример 58.** Радиус окружности равен 1. Найдите величину острого вписанного угла, опирающегося на хорду, равную  $\sqrt{2}$ .

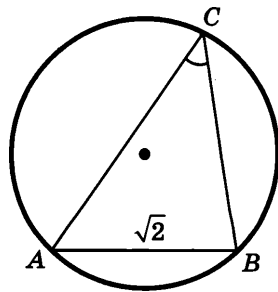
*Решение.*

Пусть  $AB = \sqrt{2}$  — длина хорды,  $\angle C$  — вписанный угол.

По теореме синусов  $\frac{AB}{\sin \angle C} = 2R$ , где  $R = 1$  —

радиус окружности, тогда  $\sin \angle C = \frac{AB}{2R} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , значит,  $\angle C = 45^\circ$ .

*Ответ:* 45.



**Пример 59.** Найдите хорду, на которую опирается угол  $60^\circ$ , вписанный в окружность радиуса  $5\sqrt{3}$ .

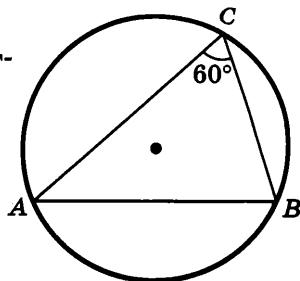
*Решение.*

По теореме синусов  $\frac{AB}{\sin \angle C} = 2R$ ,

$AB = 2R \sin \angle C$ , где  $\angle C = 60^\circ$ ,  $R = 5\sqrt{3}$ .

Значит,  $AB = 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5 \cdot 3 = 15$ .

*Ответ:* 15.

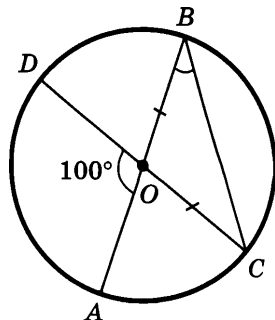


**Пример 60.**  $AB$  и  $CD$  — диаметры окружности с центром  $O$ ,  $\angle AOD = 100^\circ$ . Найдите вписанный  $\angle ABC$ .

*Решение.*

Так как  $AB$  и  $CD$  — диаметры, то  $OC = OB$ .  $\angle AOD = \angle BOC = 100^\circ$  — как вертикальные. В равнобедренном  $\triangle BOC$   $\angle OBC = (180^\circ - \angle BOC) : 2 = 80^\circ : 2 = 40^\circ$ .

*Ответ:* 40.



**Пример 61.** Угол между хордой  $AB$  и касательной  $BC$  к окружности равен  $25^\circ$ . Найдите величину меньшей дуги, стягиваемой хордой  $AB$ .

*Решение.*

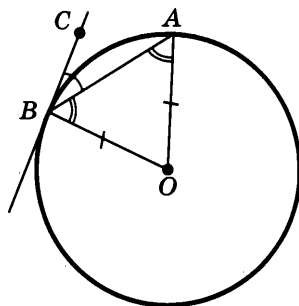
Так как  $BC$  — касательная и  $OB$  — радиус, то  $OB \perp BC$ .

По условию  $\angle ABC = 25^\circ$ , тогда  $\angle ABO = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$ .

В  $\triangle AOB$   $AO = OB$  — как радиусы, тогда  $\angle AOB = 180^\circ - (65^\circ + 65^\circ) = 50^\circ$ .

Так как  $\angle AOB$  — центральный, то  $\cup AB = \angle AOB = 50^\circ$ .

*Ответ:* 50.



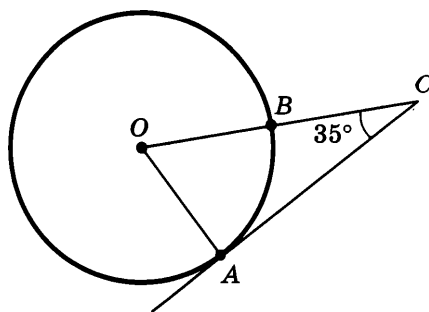
**Пример 62.**  $\angle ACO = 35^\circ$ , где  $O$  — центр окружности. Его сторона  $CA$  касается окружности. Найдите величину меньшей дуги  $AB$  окружности, заключенной внутри этого угла.

*Решение.*

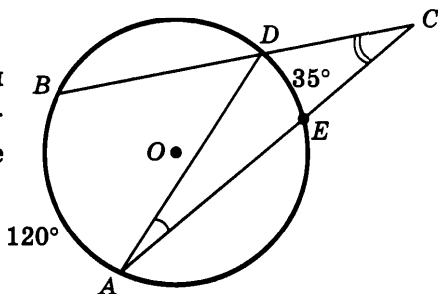
Так как  $AC$  — касательная,  $AO$  — радиус окружности, то  $OA \perp AC$ . В  $\triangle AOC$   $\angle O = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ .

Значит,  $\cup AB = \angle O = 55^\circ$ .

*Ответ:* 55.



**Пример 63.**  $\angle ACB = 35^\circ$ . Градусная величина дуги  $AB$  окружности, не содержащей точек  $D$  и  $E$ , равна  $120^\circ$ . Найдите  $\angle DAE$ .



*Решение.*

Так как  $\angle AOB = 120^\circ$ , то  $\angle ADB = \frac{1}{2} \angle AOB = 60^\circ$ .

Но  $\angle ADB$  — внешний угол  $\triangle ADC$ , тогда  $\angle ADB = \angle DAC + \angle ACD$ , или  $60^\circ = \angle DAC + 35^\circ$ , откуда  $\angle DAC = 60^\circ - 35^\circ = 25^\circ$ .

*Ответ:* 25.

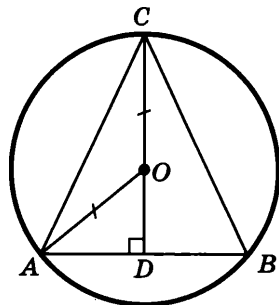
**Пример 64.** Высота правильного треугольника равна 15. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

*Решение.*

Пусть  $OD = r$  — радиус вписанной окружности, тогда  $OC = R$  — радиус описанной окружности. Так как  $O$  — точка пересечения медиан, то  $OC = 2 \cdot OD$ , или  $CD = 3r$ .

По условию задачи  $CD = 15$ , или  $3r = 15$ ,  $r = 5$ , тогда  $OC = 2r = 10$ .

*Ответ:* 10.



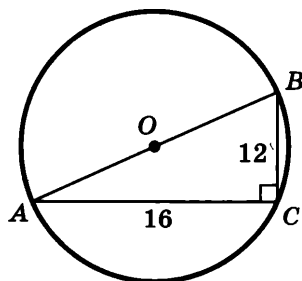
**Пример 65.** В  $\triangle ABC$   $AC = 16$ ,  $BC = 12$ ,  $\angle C = 90^\circ$ . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника.

*Решение.*

Так как  $\angle C = 90^\circ$  и  $\angle ACB$  — вписанный, то  $AB$  — диаметр описанной окружности, тогда  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ ,  $AB = \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20$ .

Но  $AB = 2R = 20$ , откуда  $R = 10$ .

*Ответ:* 10.



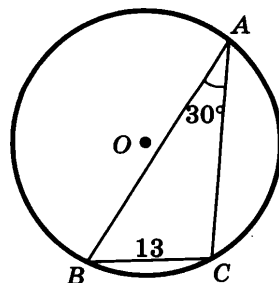
**Пример 66.** В  $\triangle ABC$   $\angle A = 30^\circ$ ,  $BC = 13$ . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

*Решение.*

По теореме синусов  $\frac{BC}{\sin \angle A} = 2R$ , откуда

$$R = \frac{BC}{2 \sin \angle A}, \text{ или } R = \frac{13}{2 \cdot \sin 30^\circ} = 13.$$

*Ответ:* 13.



**Пример 67.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = BC = 14 + 7\sqrt{2}$ . Найдите радиус окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ .

*Решение.*

Пусть  $r$  — радиус вписанной окружности.

Известно, что  $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ , где  $a = BC$ ,

$b = AC$ ,  $c = AB$ .

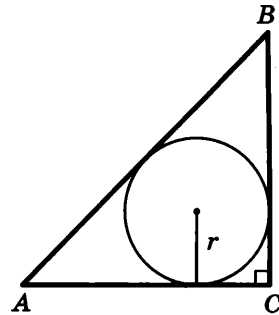
Так как  $AC = BC = 14 + 7\sqrt{2}$ , то

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{2 \cdot AC^2} = AC\sqrt{2}, \text{ или}$$

$$AB = (14 + 7\sqrt{2})\sqrt{2} = 14\sqrt{2} + 14.$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } r &= \frac{1}{2}(14 + 7\sqrt{2} + 14 + 7\sqrt{2} - 14\sqrt{2} - 14) = \frac{1}{2}(14 + 14 - 14) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 14 = 7. \end{aligned}$$

*Ответ:* 7.



## 1.6. Окружность и четырехугольники

**Пример 68.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность,  $\angle ABC = 100^\circ$ ,  $\angle CAD = 40^\circ$ . Найдите  $\angle ABD$ .

*Решение.*

Так как  $\angle ABC = 100^\circ$ , то  $\cup ADC = 200^\circ$ .

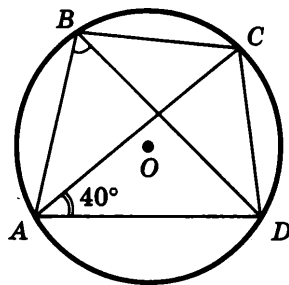
По условию  $\angle CAD = 40^\circ$ , тогда  $\cup CD = 80^\circ$ .

Значит,  $\cup AD = \cup ADC - \cup CD = 200^\circ - 80^\circ = 120^\circ$ .

Заметим, что  $\angle ABD$  — вписанный, тогда

$$\angle ABD = \frac{1}{2} \cup AD = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ.$$

*Ответ:* 60.



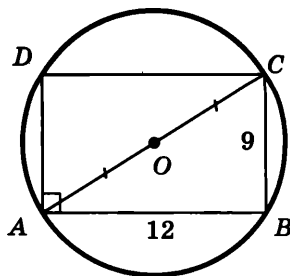
**Пример 69.** Стороны прямоугольника равны 9 и 12. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника.

*Решение.*

Так как  $ABCD$  — прямоугольник и  $\angle ABC$  — вписанный, то  $AC$  — диаметр описанной окружности.

Из  $\triangle ABC$   $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ , или  $AC = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$ .  
 $AC = 2R = 15$ , откуда  $R = 7,5$ .

*Ответ:* 7,5.



**Пример 70.** В трапеции  $ABCD$   $AD = DC = BC$ ,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $AB = 20$ . Найдите радиус окружности, описанной около трапеции.

*Решение.*

Проведем высоту  $DE$  и диагональ  $BD$  трапеции  $ABCD$ .

Пусть  $AB = x$ ,  $DC = AD = BC = y$ .

Так как трапеция равнобедренная, то  $AE = \frac{1}{2}(AB - CD)$ , или

$$AE = \frac{1}{2}(x - y).$$

$$\text{В } \triangle ADE \angle ADE = 30^\circ \Rightarrow AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}y, \text{ значит, } \frac{1}{2}(x - y) = \frac{1}{2}y,$$

откуда  $x = 2y = 20$  (по условию).

Следовательно,  $y = 10$ ,  $AE = 5$ .  $BE = AB - AE = 20 - 5 = 15$ .

$$\text{В } \triangle ADE \quad DE = AD \cdot \sin 60^\circ = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

$$\text{Из } \triangle EDB \quad BD = \sqrt{BE^2 + DE^2} = \sqrt{15^2 + 75} = \sqrt{225 + 75} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}.$$

Так как по условию задачи окружность описана около трапеции, то она описана и около  $\triangle ABD$ .

По теореме синусов имеем  $\frac{BD}{\sin \angle BAD} = 2R$ , или  $\frac{10\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$ , откуда

$$R = \frac{10 \cdot 2}{2} = 10.$$

*Ответ:* 10.

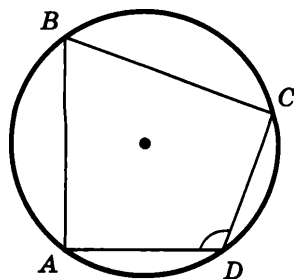
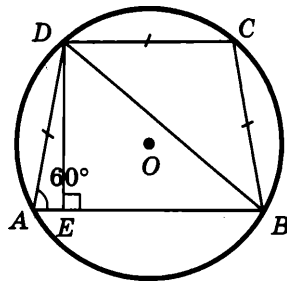
**Пример 71.** В четырехугольнике  $ABCD$   $\angle A : \angle B : \angle C = 2 : 1 : 4$ . Найдите  $\angle D$ , если около данного четырехугольника можно описать окружность.

*Решение.*

Пусть  $\angle A = 2x$ ,  $\angle B = x$ ,  $\angle C = 4x$ . Так как окружность описана около четырехугольника, то  $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$ , или  $2x + 4x = 180^\circ$ ,  $6x = 180^\circ$ ,  $x = 30^\circ$ .

Значит,  $\angle B = x = 30^\circ$ , тогда  $\angle D = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ .

*Ответ:* 150.



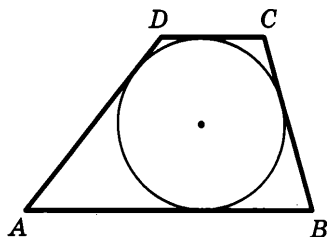
**Пример 72.** Трапеция  $ABCD$  описана около окружности. Основания трапеции  $AB = 20$ ,  $DC = 8$ . Найдите среднюю линию трапеции.

*Решение.*

Пусть  $l$  — средняя линия трапеции, тогда  

$$l = \frac{1}{2}(AB + DC) = 14.$$

*Ответ:* 14.



**Пример 73.** Периметр четырехугольника  $ABCD$ , описанного около окружности, равен 48, две его стороны равны 10 и 12. Найдите большую из оставшихся сторон.

*Решение.*

Пусть  $AB = 10$ ,  $AD = 12$ ,  $BC = y$ ,  $CD = x$ . Пусть  $x > y$ .

По свойству описанного четырехугольника имеем  $y + 12 = 10 + x$ , или  $x - y = 2$ .

По условию периметр  $ABCD$  равен 48, тогда  $x + y + 10 + 12 = 48$ , или  $x + y = 48 - 22 = 26$ .

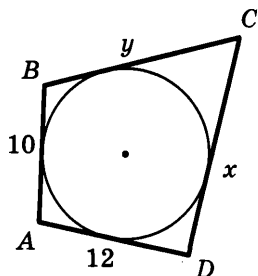
Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 26, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Сложив уравнения системы, имеем  $2x = 26 + 2 = 28$ ,  $x = 14$ , тогда  $y = x - 2 = 12$ .

Так как  $x > y$ , то  $CD = 14$  — длина большей из оставшихся сторон.

*Ответ:* 14.



## § 2. Задание 2. Векторы

В первую часть КИМ включено задание по геометрии (задание 2), проверяющее умения определять координаты точки, вектора, производить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами.



## 2.1. Векторы и операции с ними

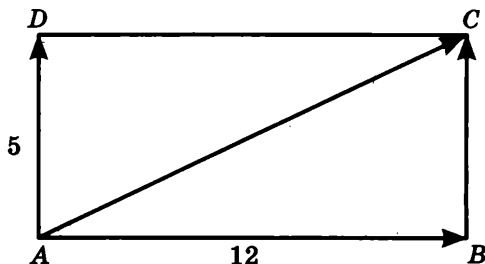
**Пример 1.** Две стороны прямоугольника  $ABCD$  равны 5 и 12. Найдите длину суммы векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AD}$ .

*Решение.*

По правилу параллелограмма  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2}, \text{ или } |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13.$$

*Ответ:* 13.



**Пример 2.** Стороны прямоугольника  $ABCD$  равны 9 и 12. Найдите скалярное произведение векторов  $\overrightarrow{AB}$  и  $\overrightarrow{AD}$ .

*Решение.*

Так как  $ABCD$  — прямоугольник (см. пример 1), то  $\angle DAB = 90^\circ$ , тогда  $\cos \angle DAB = \cos 90^\circ = 0$ .

$$\text{Значит, } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 90^\circ = 9 \cdot 12 \cdot 0 = 0.$$

*Ответ:* 0.

**Пример 3.** Стороны прямоугольника  $ABCD$  равны 9 и 12. Найдите длину суммы векторов  $\overrightarrow{AO}$  и  $\overrightarrow{BO}$ , где  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ .

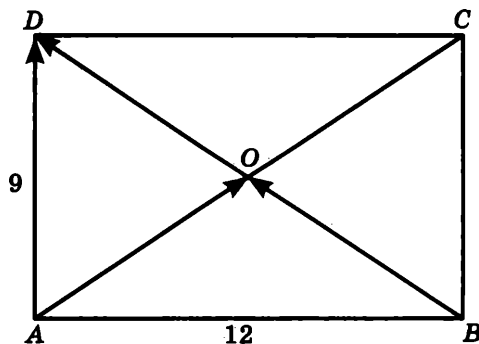
*Решение.*

Так как  $O$  — середина диагоналей  $AC$  и  $BD$ , то  $BO = OD$ , тогда  $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$ .

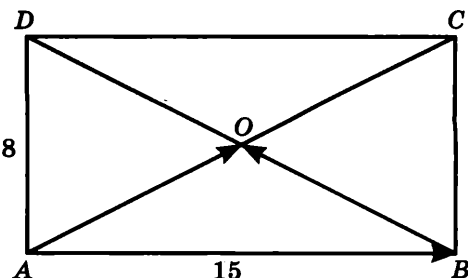
По правилу треугольника имеем

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AD}, \text{ тогда } |\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{AD}| = 9.$$

*Ответ:* 9.



**Пример 4.** Стороны прямоугольника  $ABCD$  равны 8 и 15. Найдите длину разности векторов  $\overrightarrow{AO}$  и  $\overrightarrow{BO}$ , где  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ .



*Решение.*

$$\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} \text{ (по правилу треугольника).}$$

$$\text{Тогда } |\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{AB}| = 15.$$

*Ответ:* 15.

**Пример 5.** Диагонали ромба  $ABCD$  равны 24 и 18. Найти длину вектора  $\overrightarrow{AB}$ .

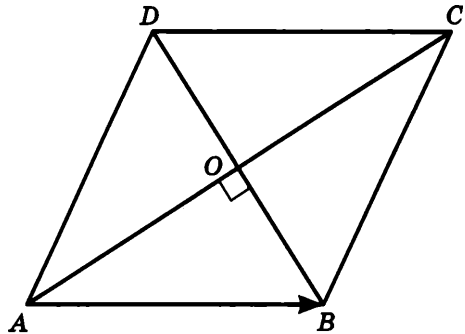
*Решение.*

Так как  $ABCD$  — ромб, то  $AC \perp BD$  (по свойству),  $O$  — середина  $AC$  и  $BD$ . Тогда из прямоугольного  $\triangle AOB$  по теореме Пифагора имеем

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = AB^2 = AO^2 + OB^2, \text{ где } AO = \frac{1}{2}AC = 12 \text{ и } OB = \frac{1}{2}BD = 9.$$

$$\text{Значит, модуль } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15.$$

*Ответ:* 15.



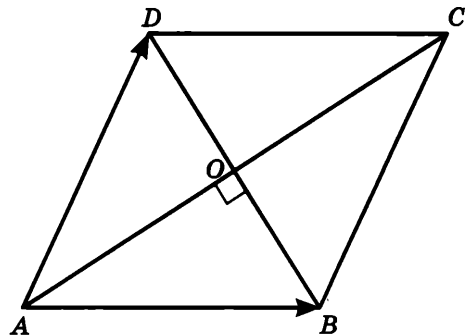
**Пример 6.** Диагонали ромба  $ABCD$  равны 24 и 18. Найдите длину вектора  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ .

*Решение.*

По правилу параллелограмма  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$ .

$$\text{Значит, } |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DB}| = 18.$$

*Ответ:* 18.

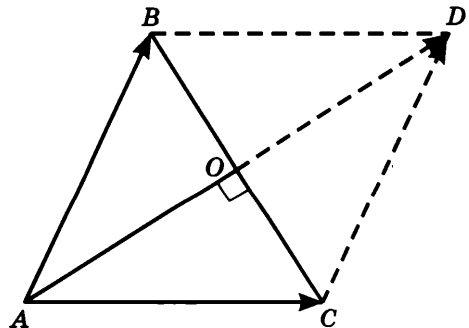


**Пример 7.** Стороны правильного  $\triangle ABC$  равны  $5\sqrt{3}$ . Найдите длину вектора  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

*Решение.*

Достроим  $\triangle ABC$  до ромба  $ABDC$ . Тогда имеем  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ .

Но по правилу треугольника  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ .



Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей, тогда  $AO = \frac{1}{2}AD$ ,

$$OC = \frac{1}{2}BC = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \quad AC = 5\sqrt{3} \text{ (по условию).}$$

Из прямоугольного  $\triangle AOC$  получим

$$AO = \sqrt{AC^2 - OC^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}(5\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2},$$

тогда  $AD = 15$ , т. е.  $|\overline{AB} + \overline{AC}| = |\overline{AD}| = 15$ .

Ответ: 15.

**Пример 8.** Найдите квадрат длины вектора  $\overline{MN}$ .

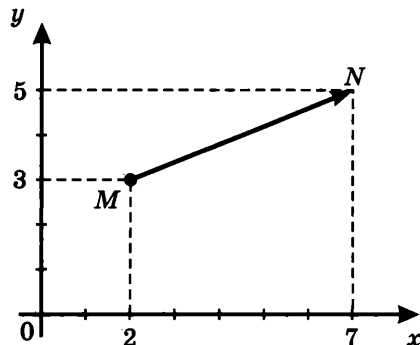
Решение.

$$|\overline{MN}| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}, \text{ или}$$

$$|\overline{MN}| = \sqrt{(7-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29},$$

тогда  $|\overline{MN}|^2 = 29$ .

Ответ: 29.



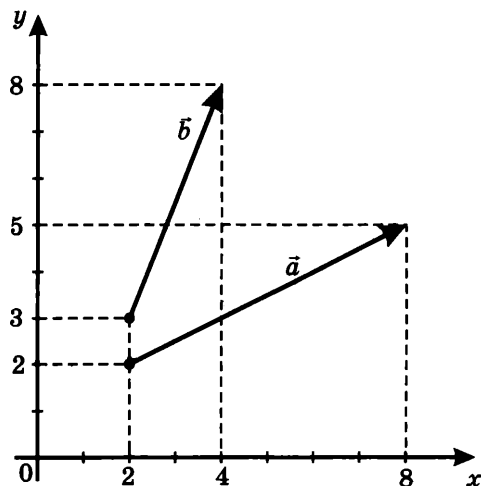
**Пример 9.** Найдите сумму координат вектора  $\vec{a} + \vec{b}$ .

Решение.

Так как координаты суммы векторов равна сумме соответствующих координат, то вектор  $\vec{a} + \vec{b}$  имеет координаты  $(6 + 2, 3 + 5) = (8; 8)$ , где  $\vec{a}(6; 3)$ ,  $\vec{b}(2; 5)$ .

Тогда сумма координат равна  $8 + 8 = 16$ .

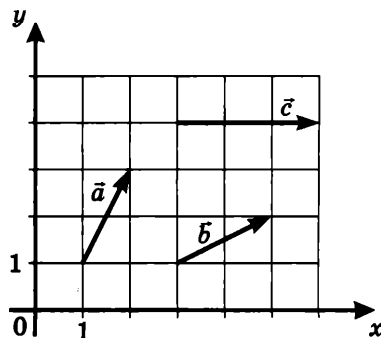
Ответ: 16.



**Пример 10.** На координатной плоскости изображены векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ . Вектор  $\vec{c}$  разложен по двум неколлинеарным векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ :

$$\vec{c} = k\vec{a} + t\vec{b},$$

где  $k$  и  $t$  — коэффициенты разложения. Найдите  $k$ .



*Решение.*

$$\vec{a} = (1; 2), \quad \vec{b} = (2; 1), \quad \vec{c} = (3; 0).$$

$$\text{Тогда получим } \vec{c} = k\vec{a} + m\vec{b} = k(1; 2) + m(2; 1) = (k; 2k) + (2m; m) = (k + 2m; 2k + m).$$

По условию  $\vec{c} = (3; 0)$ , значит,

$$\begin{cases} k + 2m = 3, \\ 2k + m = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} m = -2k, \\ k + 2 \cdot (-2k) = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} m = -2k, \\ -3k = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} k = -1, \\ m = 2. \end{cases}$$

Итак,  $k = -1$ .

*Ответ:*  $-1$ .

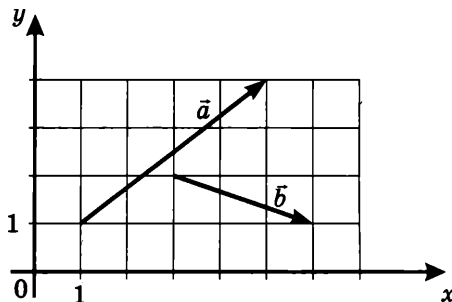
**Пример 11.** На координатной плоскости изображены векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

*Решение.*

Выпишем координаты векторов по рисунку:  $\vec{a} = (4; 3)$ ,  $\vec{b} = (3; -1)$ .

Скалярное произведение векторов равно:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$ , или  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-1) = 9$ .

*Ответ:* 9.



## § 3. Задание 3. Стереометрия

Для успешного решения задач необходимы знания по элементарной стереометрии, умение применять формулы для нахождения площадей, поверхностей и объемов фигур, сравнивать объемы, уметь выполнять действия с координатами и векторами и т. д.

### 3.1. Куб, прямоугольный параллелепипед

**Пример 1.** Площадь поверхности куба равна 54. Найдите ребро куба.

*Решение.*

Пусть  $a$  — ребро куба. Поверхность куба состоит из 6 равных квадратов, тогда  $S = 6a^2$ .

По условию задачи  $S = 54$ .

Значит,  $6a^2 = 54$ ,  $a^2 = 9$ ,  $a = 3$ .

*Ответ:* 3.

**Пример 2.** Площадь полной поверхности куба равна 32. Найдите длину его диагонали.

*Решение.*

Пусть  $a$  — ребро куба,  $d$  — длина его диагонали.

$S = 6a^2 = 32$ , откуда  $a^2 = \frac{16}{3}$ . Так как куб является прямоугольным

параллелепипедом, то по свойству последнего  $d^2 = 3a^2$ .

Значит,  $d^2 = 3 \cdot \frac{16}{3} = 16$ ,  $d = 4$ .

*Ответ:* 4.

**Пример 3.** Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4, 8 и 16. Найдите ребро равновеликого куба.

*Решение.*

Пусть  $a = 4$ ,  $b = 8$ ,  $c = 16$  — измерения прямоугольного параллелепипеда. Равновеликие фигуры имеют одинаковые объемы.

Пусть  $x$  — ребро куба, тогда  $V_{\text{куба}} = V_{\text{пар-да}}$ , или  $x^3 = abc$ , откуда  $x = \sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{4 \cdot 8 \cdot 16} = \sqrt[3]{8 \cdot 64} = \sqrt[3]{8 \cdot 8^2} = \sqrt[3]{8^3} = 8$ .

*Ответ:* 8.

**Пример 4.** Объем куба равен  $192\sqrt{3}$ . Найдите длину его диагонали.

*Решение.*

Пусть  $a$  — ребро куба,  $d$  — длина его диагонали.

По условию  $V = 192\sqrt{3}$ .

Но  $V = a^3$ , значит,

$a^3 = 192\sqrt{3} = 64 \cdot 3\sqrt{3} = 4^3 \cdot (\sqrt{3})^3 = (4\sqrt{3})^3$ , откуда  $a = 4\sqrt{3}$ .

Тогда  $d^2 = 3a^2$ , или  $d = a\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot 3 = 12$ .

*Ответ:* 12.

**Пример 5.** Если каждое ребро куба увеличить на 1, то его объем увеличится на 91. Найдите ребро куба.

*Решение.*

Пусть  $a$  — ребро куба,  $V$  — его объем.

Тогда увеличение объема будет равно  $V - V_0 = (a + 1)^3 - a^3 = 91$ , или  $a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - a^3 = 91$ , или  $3a^2 + 3a - 90 = 0$ .

Разделив обе части на 3, получим квадратное уравнение  $a^2 + a - 30 = 0$ , откуда  $a_1 = -6$ ,  $a_2 = 5$ .

Поскольку  $a$  — ребро куба, то  $a > 0$ . Значит,  $a = 5$ .

*Ответ:* 5.

**Пример 6.** Диагональ куба равна 9. Найдите его полную поверхность.

*Решение.*

Пусть  $a$  — ребро куба, тогда его полная поверхность  $S = 6a^2$ .

Если  $d$  — диагональ квадрата, то  $d^2 = 3a^2$ .

По условию  $d = 9$ , тогда  $3a^2 = 9$ ,  $6a^2 = 18$ .

Значит,  $S = 18$ .

*Ответ:* 18.

**Пример 7.** Объем куба равен 125. Найдите площадь его поверхности.

*Решение.*

$V = a^3 = 125$ , откуда  $a = 5$  — ребро куба. Тогда площадь поверхности куба  $S = 6a^2 = 6 \cdot 5^2 = 150$ .

*Ответ:* 150.

**Пример 8.** Во сколько раз увеличится площадь поверхности куба, если его ребро увеличить в 2 раза?

*Решение.*

Пусть  $a$  — ребро куба, тогда площадь его поверхности  $S = 6a^2$ .

Если увеличить ребро куба в 2 раза, то площадь его поверхности увеличится в 4 раза.

*Ответ:* 4.

**Пример 9.** Объем одного куба в 27 раз больше объема другого куба. Во сколько раз площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго куба?

*Решение.*

Пусть  $V_1 = a_1^3$ ,  $V_2 = a_2^3$ , тогда  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} = 27$ , откуда  $\frac{a_1}{a_2} = 3$ .

$S_1 = 6a_1^2$  — площадь поверхности первого куба,  $S_2 = 6a_2^2$  — второго.

Значит,  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{6a_1^2}{6a_2^2} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 = 3^2 = 9$ .

Следовательно, площадь поверхности первого куба больше площади поверхности второго в 9 раз.

*Ответ:* 9.

**Пример 10.** Площадь поверхности куба равна 96. Найдите его объем.

*Решение.*

Пусть  $a$  — ребро куба,  $S$  — площадь его поверхности, тогда  $S = 6a^2 = 96$ ,  $a^2 = 16$ ,  $a = 4$ .

Значит, объем  $V = a^3 = 4^3 = 64$ .

Ответ: 64.

**Пример 11.** Найдите объем куба, если длина его диагонали  $d = 4\sqrt{3}$ .

*Решение.*

Пусть  $a$  — ребро куба, тогда  $d^2 = 3a^2$  (по свойству диагонали прямоугольного параллелепипеда).

Так как  $d = 4\sqrt{3}$ , то получим  $3a^2 = (4\sqrt{3})^2$ , или  $3a^2 = 16 \cdot 3$ , откуда  $a^2 = 16$ ,  $a = 4$ .

Тогда объем куба  $V = a^3 = 4^3 = 64$ .

Ответ: 64.

**Пример 12.** Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребра увеличить в 5 раз?

*Решение.*

Если  $a$  — ребро куба, то объем  $V = a^3$ . При увеличении длин ребер в 5 раз объем куба увеличится в  $5^3 = 125$  раз.

Ответ: 125.

**Пример 13.** В куб вписан шар радиуса 2. Найдите объем куба.

*Решение.*

Если в куб вписан шар, то ребро куба будет равно диаметру вписанного в него шара, а объем куба  $V = a^3 = 4^3 = 64$ .

Ответ: 64.

## 3.2. Призма

**Пример 14.** Основанием прямой треугольной призмы является прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Площадь ее поверхности равна 144. Найдите высоту призмы.

*Решение.*

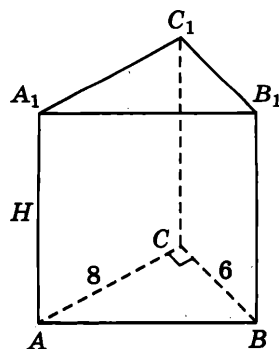
Пусть  $S_n$  — полная поверхность призмы,  $AA_1 = H$  — высота призмы.

Тогда  $S_n = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$ .

Но  $S_{\text{бок.}} = P \cdot H$ , где  $P$  — периметр основания.

Так как  $\triangle ABC$  — прямоугольный, то

$$AB^2 = AC^2 + BC^2, \text{ или } AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10.$$



Значит, периметр основания  $P = 6 + 8 + 10 = 24$ ,  $S_{\text{бок.}} = 24 \cdot H$ ,  
 $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = 24$ .

По условию задачи  $S_n = 144$ , или  $24 \cdot H + 2 \cdot 24 = 144$ , или  $H + 2 = 6$ ,  
откуда  $H = AA_1 = 4$ .

*Ответ:* 4.

**Пример 15.** В правильной треугольной призме сторона основания равна 1, а площадь боковой поверхности равна  $3\sqrt{15}$ . Найдите длину диагонали боковой грани призмы.

*Решение.*

Пусть  $AA_1 = H$  — высота призмы. По условию  $\triangle ABC$  — равносторонний, тогда периметр  $P = 3$ .

Известно, что  $S_{\text{бок.}} = P \cdot H = 3\sqrt{15}$ , или  
 $3H = 3\sqrt{15}$ , откуда  $H = \sqrt{15}$ .

Так как призма — правильная, то  $AA_1 \perp (ABC) \Rightarrow AA_1 \perp AB$ ,  
т. е.  $\triangle A_1AB$  — прямоугольный, тогда  $A_1B^2 = AB^2 + AA_1^2$ , или

$$A_1B = \sqrt{1 + 15} = \sqrt{16} = 4.$$

*Ответ:* 4.

**Пример 16.** В прямой треугольной призме стороны основания равны 12, 13 и 15, а боковая поверхность равна 580. Найдите высоту призмы.

*Решение.*

Пусть  $H = AA_1$  — высота призмы,  $S_{\text{бок.}}$  — боковая поверхность, тогда  $S_{\text{бок.}} = P \cdot H$ , где  $P = AB + AC + BC = 40$ .

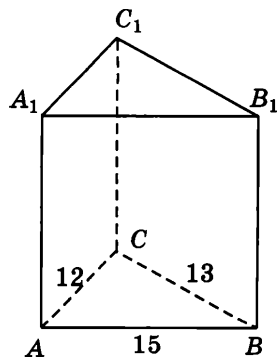
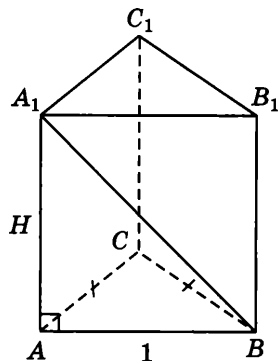
Так как  $S_{\text{бок.}} = 580$ , то  $40 \cdot H = 580$ , откуда  
 $H = 580 : 40 = 14,5$ .

*Ответ:* 14,5.

**Пример 17.** Стороны основания в прямой треугольной призме равны 3, 4 и 5, а высота равна 6. Найдите ее полную поверхность.

*Решение.*

Заметим, что если стороны основания равны 3, 4 и 5, то  $\triangle ABC$  — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора), так как  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .





Тогда  $S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$ , где  $S_{\text{осн.}} = S_{\Delta ABC} =$   
 $= \frac{1}{2} AB \cdot BC = 6,$

$S_{\text{бок.}} = P \cdot H = (3 + 4 + 5) \cdot 6 = 12 \cdot 6 = 72, H = 6.$

Значит,  $S_{\text{полн.}} = 72 + 2 \cdot 6 = 72 + 12 = 84.$

Ответ: 84.

**Пример 18.** Найдите боковую поверхность правильной шестиугольной призмы, наибольшая диагональ которой равна 13, а боковое ребро — 5.

*Решение.*

Поскольку  $BE_1$  — большая диагональ правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , то ее проекция  $BE$  — большая диагональ основания.

Если  $a_6$  — сторона основания, то  $a_6 = 2$  — радиус описанной окружности. Тогда  $BE = 2R$ .

Из  $\Delta BEE_1$ , где  $BE_1 = 13, EE_1 = BB_1 =$   
 $= AA_1 = 5$ , находим  $BE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ , тогда

$AB = a_6 = R = 12 : 2 = 6.$

$S_{\text{бок.}} = P \cdot H$ , где  $P = 6, AB = 36; H = AA_1 = 5.$

Значит,  $S_{\text{бок.}} = 36 \cdot 5 = 180.$

Ответ: 180.

**Пример 19.** Найдите полную поверхность правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ равна  $\sqrt{34}$ , а диагональ боковой грани равна 5.

*Решение.*

$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$

Так как призма правильная, то  $ABCD$  — квадрат.

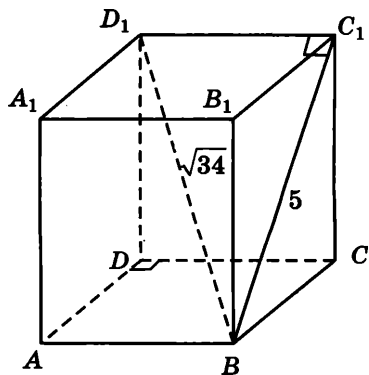
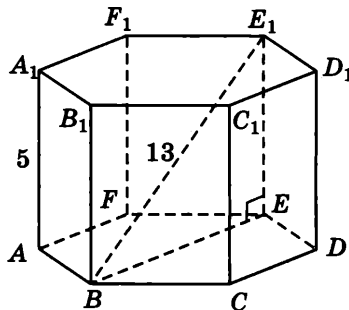
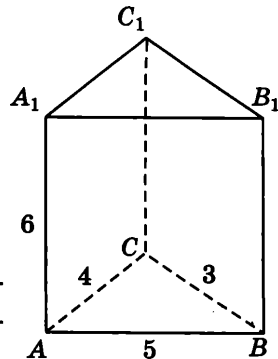
Из  $\Delta D_1 BC_1$ , где  $BD_1 = \sqrt{34}, BC_1 = 5$ ,

найдем  $D_1 C_1 = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - 5^2} = \sqrt{34 - 25} = \sqrt{9} = 3.$

Так как  $D_1 C_1 = AB = 3$ , тогда  $S_{\text{осн.}} = AB^2 = 9, S_{\text{бок.}} = P \cdot H$ ,  
 где  $P = 4AB = 12, H = AA_1$ .

Из  $\Delta BCC_1$ , где  $BC = AB = 3, BC_1 = 5$ , найдем

$CC_1 = AA_1 = H: CC_1 = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$



Тогда  $S_{\text{бок.}} = 12 \cdot 4 = 48$ .

Следовательно,  $S_{\text{полн.}} = 48 + 2 \cdot 9 = 48 + 18 = 66$ .

Ответ: 66.

**Пример 20.** Основанием прямой призмы является равнобедренная трапеция, боковая сторона которой равна 5, а основания равны 7 и 9. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее высота равна 12.

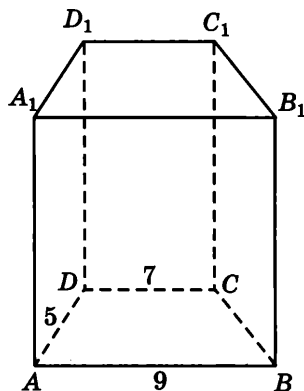
*Решение.*

$S_{\text{бок.}} = P \cdot H$ , где  $P = AB + AD + CD + BC = 9 + 5 + 7 + 5 = 26$  — периметр основания;

$H = AA_1 = 12$  — высота призмы.

Тогда  $S_{\text{бок.}} = 26 \cdot 12 = 312$ .

Ответ: 312.



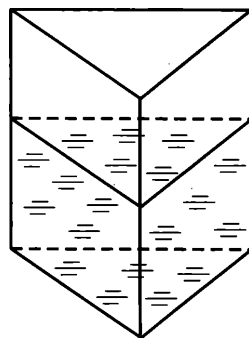
**Пример 21.** В сосуд, имеющий форму правильной треугольной призмы, налили 2000 см<sup>3</sup> воды и погрузили в нее деталь. При этом уровень воды поднялся с отметки 25 см до 28 см. Найдите объем детали. Ответ выразите в см<sup>3</sup>.

*Решение.*

Пусть  $V$  — объем детали. Тогда согласно закону Архимеда объем детали равен объему вытесненной ею жидкости, а объем вытесненной жидкости равен

$$(28 - 25) : 25 = \frac{3}{25} \text{ исходного объема, т. е. } V = \frac{3}{25} \cdot 2000 = 240 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: 240.

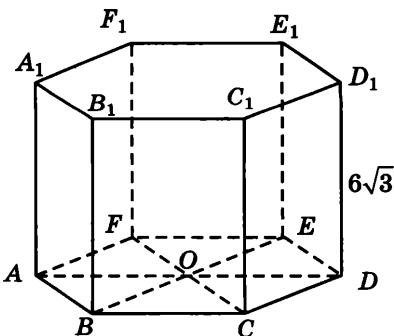


**Пример 22.** Найдите объем правильной шестиугольной призмы, если стороны оснований равны 2, а боковые ребра равны  $6\sqrt{3}$ .

*Решение.*

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot H, \text{ где } H = CC_1 = 6\sqrt{3}.$$

Известно, что  $a_6 = R$ , где  $a_6$  — сторона основания,  $R$  — радиус описанной окружности. Диагонали  $AD$ ,  $BE$  и  $FC$  разбивают правильный шестиугольник  $ABCDEF$  на 6 равных равносторонних треугольников.



Но  $S_{\Delta AOB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ , тогда  $S_{\text{осн.}} = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 2^2 = 6\sqrt{3}$ .

Значит,  $V = 6\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 36 \cdot 3 = 108$ .

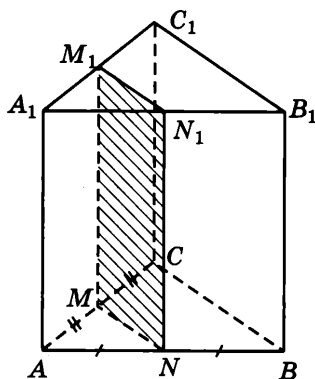
Ответ: 108.

**Пример 23.** Объем треугольной призмы равен 40. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.

*Решение.*

Так как по условию задачи  $MN$  — средняя линия  $\Delta ABC$ , то площадь основания отсеченной части призмы в 4 раза меньше площади основания всей призмы (поскольку основание и высота уменьшаются в 2 раза). Высоты обеих частей равны, тогда  $V = 40 : 4 = 10$ , т. е. уменьшится в 10 раз.

Ответ: 10.



### 3.3. Пирамида

**Пример 24.** Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в 3 раза?

*Решение.*

Каждая грань правильного тетраэдра — правильный треугольник, площадь которого определяется по формуле  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ , где  $a$  — сторона.

Значит, при увеличении длин ребер в 3 раза площадь поверхности увеличится в 9 раз.

Ответ: 9.

**Пример 25.** Во сколько раз увеличится объем правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в 3 раза?

*Решение.*

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H, \text{ где } S_{\text{осн.}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, H = MO.$$

Известно, что в правильном треугольнике  $a = R\sqrt{3}$ ,  $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$ , тогда

$$H = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Значит,  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ .

Итак, объем правильного тетраэдра с ребром  $a$  равен  $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ .

Если все его ребра увеличить в 3 раза, то объем увеличится в  $3^3 = 27$  раз.

Ответ: 27.

**Пример 26.** По стороне основания  $a = 9$  и боковому ребру  $b = 6$  найдите высоту правильной треугольной пирамиды.

*Решение.*

Так как пирамида правильная, то  $\triangle ABC$  — правильный и точка  $O$  — центр описанной и вписанной окружностей.

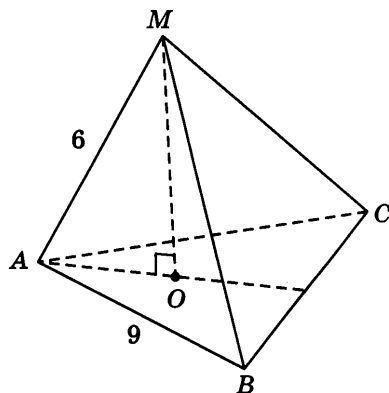
Известно, что  $a = R\sqrt{3}$ , где  $R = AO$ ,

тогда  $AO = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{9}{\sqrt{3}}$ .

$MO$  — высота пирамиды, т. е.  $\triangle AOM$  — прямоугольный,

$$MO = \sqrt{AM^2 - AO^2}, \text{ или } MO = \sqrt{36 - \frac{81}{3}} = \sqrt{36 - 27} = \sqrt{9} = 3.$$

Ответ: 3.



**Пример 27.** Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна  $10\sqrt{3}$ , а боковое ребро образует с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Найдите высоту пирамиды.

*Решение.*

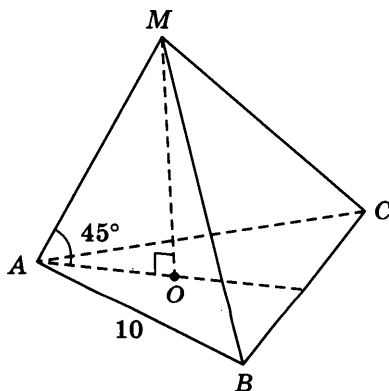
Так как  $MO$  — высота пирамиды, то  $\triangle AOM$  — прямоугольный.

По условию  $\angle MAO = 45^\circ$ , тогда  $\angle AMO = 45^\circ$ , т. е.  $\triangle AOM$  — равнобедренный и прямоугольный,  $AO = MO$ .

Но  $a = R\sqrt{3}$ , где  $a = AB = 10\sqrt{3}$ ,  $R = AO$  — радиус описанной около  $\triangle ABC$  окружности.

Значит,  $R = AO = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ , т. е.  $MO = 10$ .

Ответ: 10.



**Пример 28.** В правильной четырехугольной пирамиде ребро основания равно  $3\sqrt{6}$ . Найдите угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью ее основания, если объем пирамиды равен 54.

*Решение.*

$\angle MAO$  — искомый угол между боковым ребром  $AM$  и плоскостью основания  $ABCD$ .

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H, \text{ где } S_{\text{осн.}} = S_{ABCD} = AB^2 = (3\sqrt{6})^2 = 54, H = MO \text{ — высота пирамиды.}$$

$a_4 = R\sqrt{2}$ , где  $a_4 = AB = 3\sqrt{6}$ ,  $R = AO$  — радиус описанной окружности.

$$\text{Значит, } R = \frac{a_4}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Из прямоугольного } \triangle AOM \text{ имеем } \operatorname{tg} \angle MAO = \frac{MO}{AO} = \frac{MO}{3\sqrt{3}}.$$

По условию задачи  $V = 54$ , или  $\frac{1}{3} \cdot 54 \cdot H = 54$ , откуда  $H = MO = 3$ ,

$$\text{тогда } \operatorname{tg} \angle MAO = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle MAO = 30^\circ.$$

*Ответ:* 30.

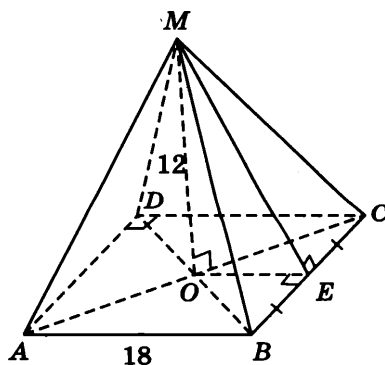
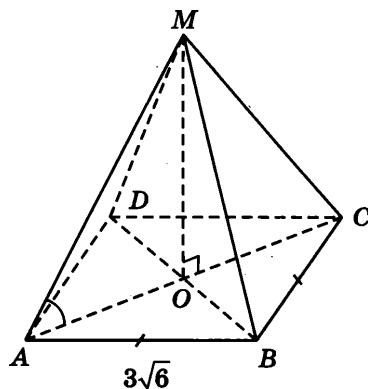
**Пример 29.** Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а сторона основания — 18. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

*Решение.*

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P \cdot h, \text{ где } P = 4AB = 72 \text{ — периметр основания, } h = ME \text{ — апофема (высота боковой грани пирамиды).}$$

Так как  $O$  — середина  $AC$ ,  $E$  — середина  $BC$ , то  $OE$  — средняя линия  $\triangle ABC$ . Тогда  $OE = \frac{1}{2} AB = 9$ .

$MO$  — высота пирамиды, тогда  $MO \perp (ABCD) \Rightarrow MO \perp OE$ , т. е.  $\triangle MOE$  — прямоугольный.



Значит,  $ME = h = \sqrt{MO^2 + OE^2} = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{144 + 81} = 15$ .

Следовательно,  $S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot 72 \cdot 15 = 540$ .

*Ответ:* 540.

**Пример 30.** Во сколько раз увеличится боковая поверхность правильной треугольной пирамиды, если стороны основания увеличить в 2 раза, а апофему — в 3 раза?

*Решение.*

Пусть  $a$  и  $h$  — сторона основания и апофема правильной треугольной пирамиды, тогда  $S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot h$ .

Если стороны основания увеличить в 2 раза, а апофему — в 3 раза, то  $S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (2a) \cdot 3h = \left( \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot h \right) \cdot 6$ , т. е. увеличится в 6 раз.

*Ответ:* 6.

**Пример 31.** Объем правильной четырехугольной пирамиды равен 48, а высота — 4. Найдите боковую поверхность этой пирамиды.

*Решение.*

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H, \text{ где } H = MO = 4, V = 48,$$

тогда  $48 = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot 4$ , или  $\frac{1}{3} S_{\text{осн.}} = 12$ ,

$S_{\text{осн.}} = 36$ , откуда  $AB = 6$  — сторона основания.

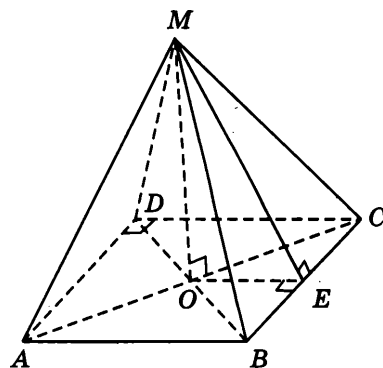
$ME = h$  — апофема пирамиды.

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P \cdot h, \text{ где } P = 4 \cdot AB = 24, OE = \frac{1}{2} AB = 3.$$

Из  $\triangle MOE$   $ME = h = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ .

Тогда  $S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 60$ .

*Ответ:* 60.



**Пример 32.** Определите объем правильной треугольной пирамиды, если высота треугольника в основании пирамиды равна 1, а апофема — 2.

**Решение.**

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H, \text{ где } H = MO — \text{высота}$$

пирамиды.

Пусть  $AB = a$ ,  $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a$ .

По условию  $AD = 1$  — высота  $\triangle ABC$ .

Из  $\triangle ABD$   $AB^2 - BD^2 = AD^2$ , или

$$a^2 - \frac{1}{4}a^2 = 1, \quad \frac{3}{4}a^2 = 1, \quad a^2 = \frac{4}{3}, \quad a = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Значит,  $BC = a = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

В  $\triangle ABC$   $OD = r$  — радиус вписанной окружности. Известно, что в правильном треугольнике  $a = 2r\sqrt{3}$ , откуда  $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} : 2\sqrt{3} = \frac{1}{3}$ .

Из  $\triangle MOD$  находим  $MO = H = \sqrt{MD^2 - OD^2}$ , или  $MO = \sqrt{2^2 - \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{35}}{3}$ .

Значит,  $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{35}}{3} = \frac{\sqrt{35}}{9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{105}}{27}$ .

**Ответ:**  $\frac{\sqrt{105}}{27}$ .

**Пример 33.** Высота правильной треугольной пирамиды равна  $4\sqrt{3}$ , а боковое ребро образует с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Найдите объем пирамиды.

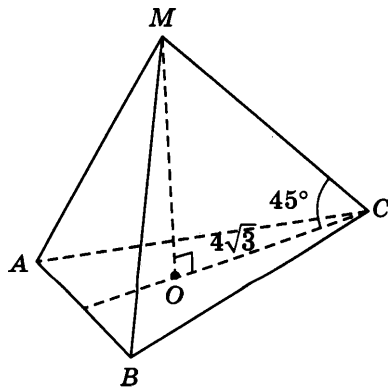
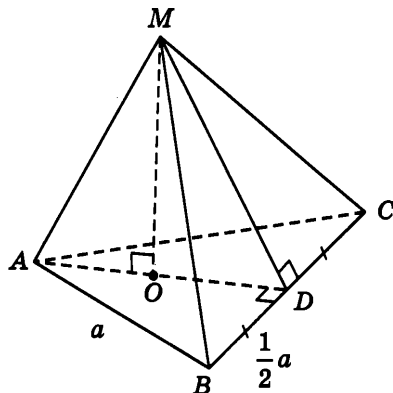
**Решение.**

Пусть  $MO = H = 4\sqrt{3}$  — высота пирамиды  $MAVC$ ,  $MC$  — боковое ребро, тогда  $\angle MCO$  — угол между боковым ребром и плоскостью основания.

По условию  $\angle MCO = 45^\circ$ , тогда  $\angle OMC = 45^\circ$ , т. е.  $OC = OM = 4\sqrt{3}$ .

Но  $OC = R$  — радиус описанной окружности. Так как  $a = R\sqrt{3}$ , где  $a = BC$ , то  $BC = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$ .

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H, \text{ где } S_{\text{осн.}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{12^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}.$$



Значит, объем  $V = \frac{1}{3} \cdot 36\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3} = 12 \cdot 3 \cdot 4 = 144$ .

Ответ: 144.

**Пример 34.** Объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равен 18. Найдите объем треугольной пирамиды  $ABDA_1$ .

Решение.

Объем параллелепипеда  $V = S_{\text{осн.}} \cdot H$ , где  $S_{\text{осн.}}$  — площадь основания,  $H$  — высота.

Объем пирамиды равен  $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot H$ ,

где  $S_{\triangle ABD}$  — площадь  $\triangle ABD$ , где  $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} S_{\text{осн.}}$ .

Значит, объем пирамиды будет в 6 раз меньше объема параллелепипеда, т. е.  $V_{\text{пир.}} = 18 : 6 = 3$ .

Ответ: 3.

**Пример 35.** Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в 5 раз?

Решение.

Известно, что объем пирамиды  $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$ , где  $S_{\text{осн.}}$  — площадь основания,  $H$  — высота пирамиды.

Если высоту пирамиды увеличить в 5 раз, не изменяя площади основания, то и объем пирамиды увеличится в 5 раз.

Ответ: 5.

**Пример 36.** Боковые ребра пирамиды взаимно перпендикулярны, каждое из них равно 6. Найдите объем пирамиды.

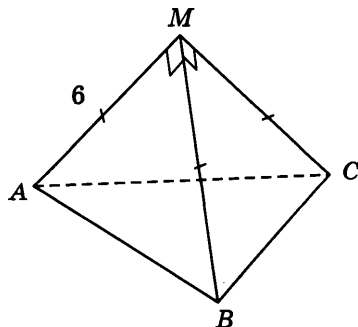
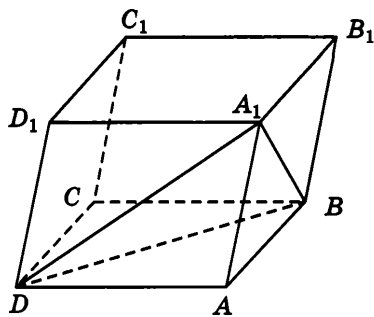
Решение.

Если пирамиду поставить на боковую грань, то грань  $ABM$  будет основанием, тогда боковое ребро  $MC$  будет высотой.

Тогда объем  $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABM} \cdot MC$ , где  $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot MB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$ ,

$MC = 6$ . Значит,  $V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36$ .

Ответ: 36.





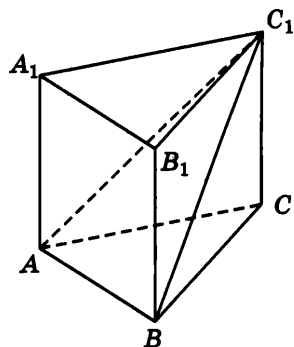
**Пример 37.** От треугольной призмы, объем которой равен 12, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через сторону одного основания и противоположную вершину другого основания. Найдите объем оставшейся части.

*Решение.*

Заметим, что объем призмы больше объема пирамиды с той же площадью основания и высотой в 3 раза. Значит, объем оставшейся части составит

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ исходного. Тогда объем оставшейся части будет равен } 12 \cdot \frac{2}{3} = 8.$$

*Ответ:* 8.



**Пример 38.** От треугольной пирамиды, объем которой равен 20, отсечена треугольная пирамида плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и среднюю линию в основании пирамиды. Найдите объем отсеченной треугольной пирамиды.

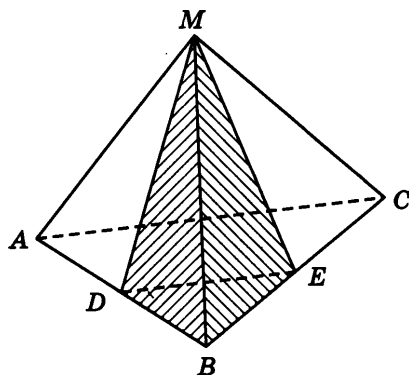
*Решение.*

Известно, что объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H, \text{ где } S_{\text{осн.}} = S_{\triangle ABC}, H — \text{высота пирамиды.}$$

Поскольку высота и сторона треугольника в основании меньше исходных в 2 раза, то площадь основания отсеченной части в 4 раза меньше. Значит, и объем оставшейся части будет в 4 раза меньше и равен  $20 : 4 = 5$ .

*Ответ:* 5.



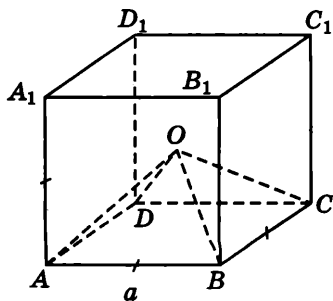
**Пример 39.** Объем куба равен 18. Найдите объем четырехугольной пирамиды, основанием которой является грань куба, а вершиной — центр куба.

*Решение.*

Известно, что объем пирамиды

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H, \text{ где } S_{\text{осн.}} = AB^2 = a^2,$$

$$H = \frac{1}{2} AA_1 = \frac{1}{2} a.$$



Значит,  $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a^3$ . Но  $V_{\text{куба}} = AB^3 = a^3$ , тогда

$$V_{\text{пир.}} = \frac{1}{6}V_{\text{куба}} = \frac{1}{6} \cdot 18 = 3.$$

Ответ: 3.

**Пример 40.** Объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равен 15. Найдите объем треугольной пирамиды  $AD_1 CB_1$ .

*Решение.*

Заметим, что искомый объем равен разности объемов параллелепипеда, измерения которого  $a$ ,  $b$  и  $c$ , и четырех пирамид, основания которых являются гранями исходной треугольной пирамиды, т. е.

$$V_{\text{пир.}} = abc - 4 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} abc \right) \right) = abc - \frac{2}{3} abc = \frac{1}{3} abc = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5.$$

Ответ: 5.

**Пример 41.** В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите  $\angle CAD$ . Ответ укажите в градусах.

*Решение.*

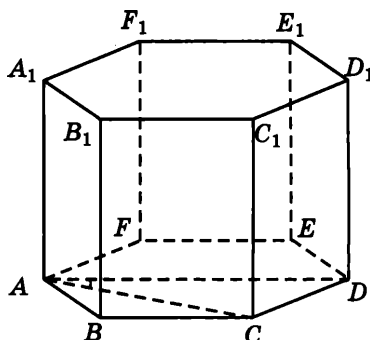
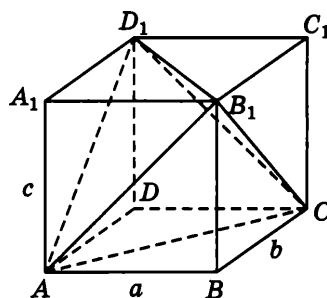
Так как призма правильная, то каждый угол в основании призмы равен  $120^\circ$ , тогда из  $\triangle ABC$  по теореме косинусов имеем

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 120^\circ, AC^2 = 3, AC = \sqrt{3}.$$

Пусть  $\angle CAD = \alpha$ . Из  $\triangle CAD$ , где  $CD = 1$ ,  $AD = 2R = 2$ , по теореме косинусов имеем  $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos \alpha$ , или  $1 = 3 + 4 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 2 \cos \alpha$ , или  $4\sqrt{3} \cos \alpha = 6$ , откуда

$$\cos \alpha = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha = \angle CAD = 30^\circ.$$

Ответ: 30.



### 3.4. Элементы составных многогранников

**Пример 42.** Найдите расстояние между вершинами  $A$  и  $C_2$  многогранника. Все двугранные углы многогранника прямые.

*Решение.*

$AC_2$  можно рассматривать как диагональ прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны соответственно  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2\sqrt{5}$ .

Тогда получим  $d^2 = AC_2^2 = a^2 + b^2 + 2\sqrt{5} + c^2$ , или  $d = \sqrt{4 + 1 + 20} = \sqrt{25} = 5$ .

*Ответ:* 5.

**Пример 43.** Найдите  $\angle ACD_2$  многогранника. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ укажите в градусах.

*Решение.*

Заметим, что  $AD_2 = AC = CD_2$  как диагонали равных прямоугольников.

Значит,  $\triangle ACD_2$  — равносторонний и  $\angle ACD_2 = 60^\circ$ .

*Ответ:* 60.

**Пример 44.** Найдите квадрат расстояния между вершинами  $B$  и  $D_2$  многогранника. Все двугранные углы многогранника прямые.

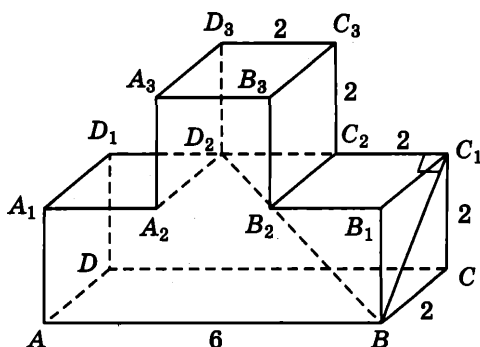
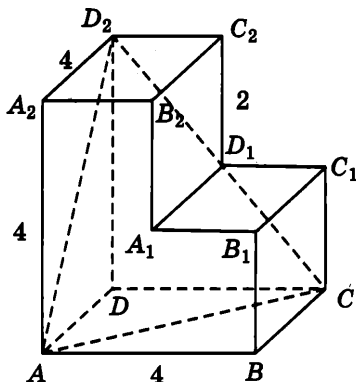
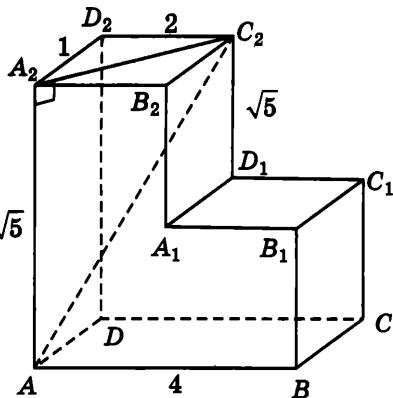
*Решение.*

Соединим точки  $B$  и  $C_1$ . Тогда в прямоугольном  $\triangle BC_1D_2$  по теореме Пифагора имеем  $BD_2^2 = BC_1^2 + C_1D_2^2$ .

Сторону  $BC_1$  найдем из прямоугольного  $\triangle BCC_1$ , где  $BC = CC_1 = 2$ .

Тогда  $BC_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ . Значит,  $BD_2^2 = 8 + (2 + 2)^2 = 8 + 16 = 24$ .

*Ответ:* 24.



### 3.5. Площадь поверхности и объем составного многогранника

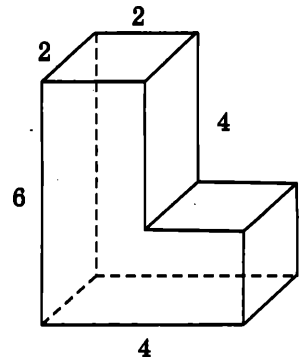
**Пример 45.** Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

*Решение.*

Площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда определяется по формуле  $S = 2(ab + ac + bc)$ , где  $a, b, c$  — измерения параллелепипеда.

Тогда площадь поверхности данного многогранника будет равна разности площади поверхности прямоугольного параллелепипеда с измерениями 4; 6; 2 и двух площадей прямоугольников со сторонами 4 и 2, т. е.  $S = 2(4 \cdot 6 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 2) - 2 \cdot 4 \cdot 2 = 88 - 16 = 72$ .

*Ответ:* 72.

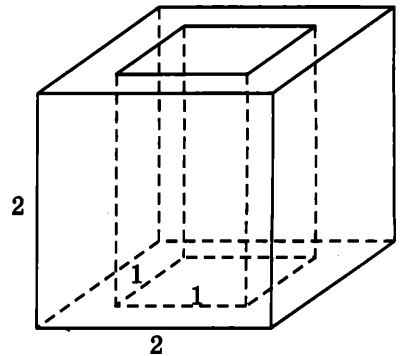


**Пример 46.** Из куба с ребром, равным 2, вырезана правильная четырехугольная призма со стороной основания 1 и боковым ребром 2. Найдите площадь поверхности оставшейся части куба.

*Решение.*

Площадь  $S$  поверхности получившегося многогранника будет равна сумме площадей поверхности куба со стороной 2 и прямоугольного параллелепипеда с измерениями 2; 1; 1 и минус 4 площади основания вырезанной призмы, т. е.  $S = 6 \cdot 4 + 4 \cdot (1 \cdot 2) - 2 \cdot (1 \cdot 1) = 30$ .

*Ответ:* 30.

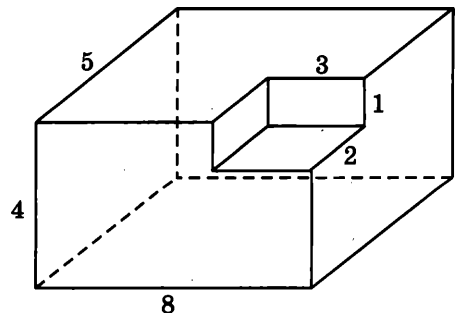


**Пример 47.** Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

*Решение.*

Площадь поверхности данного многогранника равна площади поверхности прямоугольного параллелепипеда с измерениями 4; 5; 8, т. е.  $S = 2 \cdot (5 \cdot 8 + 4 \cdot 8 + 4 \cdot 5) = 2 \cdot (40 + 32 + 20) = 184$ .

*Ответ:* 184.

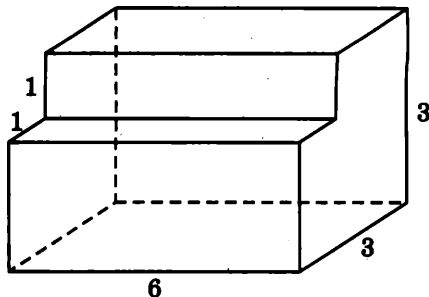


**Пример 48.** Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

*Решение.*

Площадь поверхности  $S$  данного многогранника равна разности площади поверхности прямоугольного параллелепипеда с измерениями 3; 3; 6 и двух площадей квадратов со стороной 1, т. е.  $S = 2 \cdot (3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 3 \cdot 6) - 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \cdot (9 + 18 + 18) - 2 = 90 - 2 = 88$ .

*Ответ:* 88.

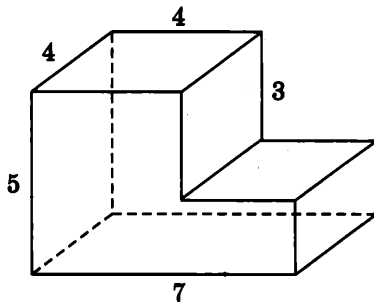


**Пример 49.** Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

*Решение.*

Объем данного многогранника можно рассматривать как сумму объемов двух параллелепипедов с измерениями 5; 4; 4 и 7; 2; 4, т. е.  $V = V_1 + V_2 = 5 \cdot 4 \cdot 4 + 7 \cdot 2 \cdot 4 = 80 + 56 = 136$ .

*Ответ:* 136.



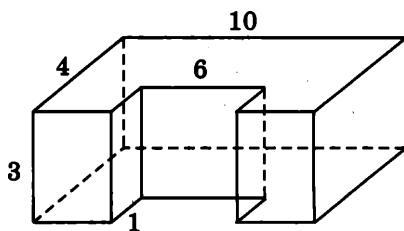
**Пример 50.** Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

*Решение.*

Объем данного многогранника равен разности объемов двух параллелепипедов с измерениями 3; 4; 10 и 1; 3; 6.

$$V = 3 \cdot 4 \cdot 10 - 1 \cdot 3 \cdot 6 = 120 - 18 = 102.$$

*Ответ:* 102.

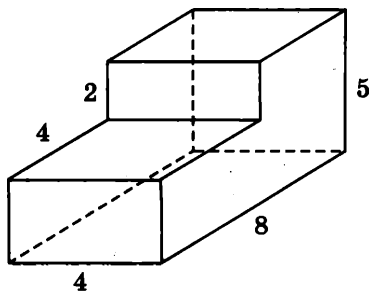


**Пример 51.** Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

*Решение.*

Объем данного многогранника равен сумме объемов двух параллелепипедов с измерениями 4; 8; 5 и 4; 4; 2, т. е.  $V = 4 \cdot 8 \cdot 5 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 160 + 32 = 192$ .

*Ответ:* 192.



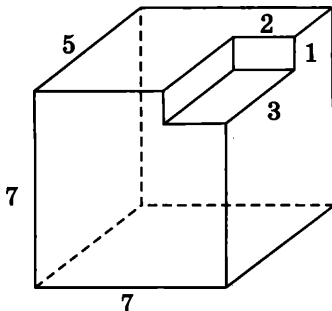
**Пример 52.** Найдите объем многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

*Решение.*

Объем данного многогранника равен разности объемов двух параллелепипедов с измерениями 7; 7; 5 и 1; 2; 3.

$$V = V_1 - V_2 = 7 \cdot 7 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3 = 245 - 6 = 239.$$

*Ответ:* 239.



### 3.6. Цилиндр, конус, шар

**Пример 53.** Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра. Радиус основания цилиндра равен 5. Объем параллелепипеда равен 500. Найдите высоту цилиндра.

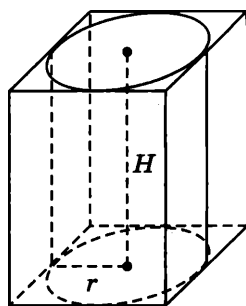
*Решение.*

Пусть  $r = 5$  — радиус цилиндра,  $H$  — высота цилиндра и параллелепипеда. Так как цилиндр вписан в прямоугольный параллелепипед, то основанием параллелепипеда является квадрат со стороной  $a = 2r = 10$ .

По условию задачи  $V_{\text{пар.}} = a \cdot a \cdot H = a^2 H = 500$ .

Так как  $a = 10$ , то  $100 \cdot H = 500$ , откуда  $H = 5$ .

*Ответ:* 5.



**Пример 54.** Площадь осевого сечения цилиндра равна  $\frac{12}{\pi}$ . Найдите площадь его боковой поверхности.

*Решение.*

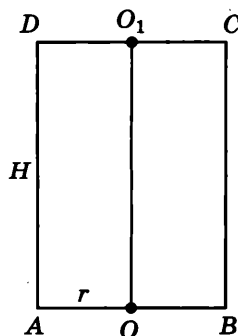
Рассмотрим осевое сечение цилиндра — прямоугольник  $ABCD$ .

Пусть  $AO = r$  — радиус,  $AD = H$  — высота цилиндра.

По условию  $S_{ABCD} = \frac{12}{\pi}$ , или  $2rH = \frac{12}{\pi}$ .

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi rH = 2rH \cdot \pi = \frac{12}{\pi} \cdot \pi = 12.$$

*Ответ:* 12.



**Пример 55.** Осевым сечением цилиндра служит квадрат, площадь которого равна  $\frac{25}{\pi}$ . Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

*Решение.*

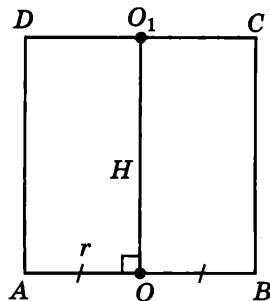
Пусть  $ABCD$  — осевое сечение цилиндра.

По условию  $ABCD$  — квадрат, тогда  $H = 2r$ , где  $H$  — высота,  $r$  — радиус основания цилиндра.

Так как  $AB \cdot AD = \frac{25}{\pi}$ , то  $H^2 = \frac{25}{\pi}$ , откуда  $H = \frac{5}{\sqrt{\pi}}$ ,  $r = \frac{5}{2\sqrt{\pi}}$ .

$$S_{\text{полн.}} = 2\pi r \cdot (H + r) = 2\pi \cdot \frac{5}{2\sqrt{\pi}} \left( \frac{5}{\sqrt{\pi}} + \frac{5}{2\sqrt{\pi}} \right) = \frac{5\pi}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{15}{2\sqrt{\pi}} = \frac{75\pi}{2\pi} = 37,5.$$

*Ответ:* 37,5.



**Пример 56.** Длина окружности основания цилиндра равна  $56\pi$ . Найдите объем цилиндра, если его высота равна  $\frac{7}{\pi}$ .

*Решение.*

Пусть  $C$  — длина окружности основания цилиндра,  $H$  — высота,  $r$  — радиус основания.

По условию  $H = \frac{7}{\pi}$ ,  $C = 56\pi$ , или  $2\pi r = 56\pi$ , откуда  $r = 28$ .

Тогда  $V = \pi r^2 H = \pi \cdot 28^2 \cdot \frac{7}{\pi} = 5488$ .

*Ответ:* 5488.

**Пример 57.** В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Боковые ребра равны  $\frac{4}{\pi}$ . Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.

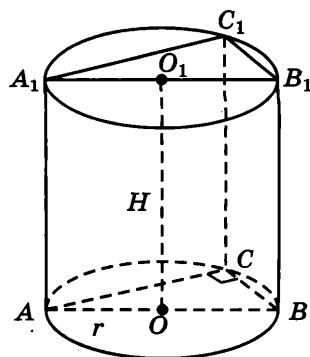
*Решение.*

Так как  $\triangle ABC$  — прямоугольный, то  $\angle ACB$  — вписанный, опирающийся на диаметр  $AB$ .

По условию  $BC = 3$ ,  $AC = 4$ , тогда

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Значит, диаметр окружности  $d = 5$ .



$$V = \pi r^2 H = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot H, \text{ где } H = AA_1 = \frac{4}{\pi}, \text{ тогда } V = \pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot \frac{4}{\pi} = 25.$$

Ответ: 25.

**Пример 58.** Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Найдите объем цилиндра, если объем конуса равен 18.

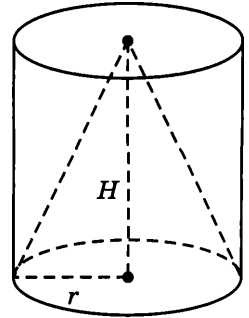
*Решение.*

Цилиндр и конус имеют по условию общее основание и высоту. Но  $V_{\text{цил.}} = \pi r^2 H$ , а объем конуса

$$V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} \pi r^2 H = 18, \text{ откуда } \pi r^2 H = 18 \cdot 3 = 54.$$

Значит,  $V_{\text{цил.}} = 54$ .

Ответ: 54.



**Пример 59.** Найдите объем  $V$  части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .

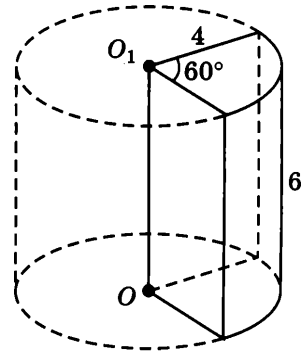
*Решение.*

Объем данной части составляет  $\frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{6}$

части всего цилиндра, значит,

$$V = \frac{1}{6} \pi r^2 H = \frac{1}{6} \pi \cdot 4^2 \cdot 6 = 16\pi. \text{ Тогда } \frac{V}{\pi} = 16.$$

Ответ: 16.

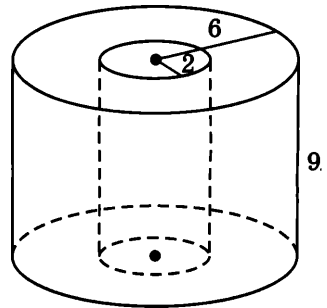


**Пример 60.** Найдите объем  $V$  части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .

*Решение.*

Пусть  $r_1 = 2$ ,  $r_2 = 6$ ,  $H = 9$ .

Объем данной фигуры равен разности объемов цилиндра с радиусом основания 6 и высотой 9 и цилиндра с радиусом основания 2 и той же высотой  $H = 9$ ,





т. е.  $V = V_2 - V_1 = \pi r_2^2 H - \pi r_1^2 H = \pi H(r_2^2 - r_1^2) = \pi \cdot 9 \cdot (6^2 - 2^2) = 288\pi$ ,

тогда  $\frac{V}{\pi} = 288$ .

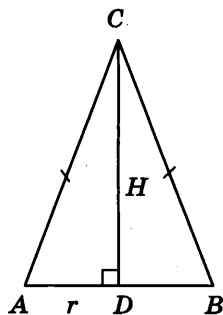
**Ответ:** 288.

**Пример 61.** Высота конуса равна 8, а диаметр основания — 30. Найдите образующую конуса.

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение конуса — равнобедренный  $\triangle ABC$ .

По условию  $CD = H = 8$  — высота конуса,  $AB = d = 30$  — диаметр основания, тогда  $AD = r = 15$  — радиус основания конуса.



Из  $\triangle ADC$   $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2}$ , или  $AC = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$ .

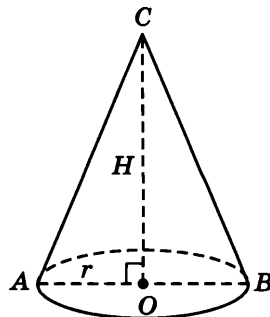
**Ответ:** 17.

**Пример 62.** Найдите площадь боковой поверхности прямого кругового конуса, если образующая его равна 7, а площадь основания равна  $\frac{36}{\pi}$ .

*Решение.*

$S_{\text{бок.}} = \pi r l$ , где  $r = AO$ ,  $l = AC$  — образующая конуса,  $l = 7$ .

По условию  $S_{\text{осн.}} = \frac{36}{\pi}$ , или  $\pi r^2 = \frac{36}{\pi}$ , откуда



$$r^2 = \frac{36}{\pi^2}, \quad r = \frac{6}{\pi}.$$

Тогда  $S_{\text{бок.}} = \pi \cdot \frac{6}{\pi} \cdot 7 = 42$ .

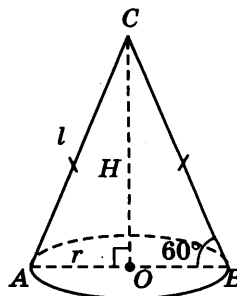
**Ответ:** 42.

**Пример 63.** Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом  $60^\circ$ . Найдите полную поверхность конуса, если образующая равна  $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$ .

*Решение.*

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}$$

$$S_{\text{бок.}} = \pi r l, \quad S_{\text{осн.}} = \pi r^2.$$



Тогда  $S_{\text{полн.}} = \pi r (l + r)$ , где  $l = \frac{6}{\sqrt{\pi}}$ .

Так как  $\angle ABC = 60^\circ$ , то из  $\triangle COB$ , где  $\angle OCB = 30^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow OB = \frac{1}{2}BC$ , или  $r = \frac{1}{2}l = \frac{3}{\sqrt{\pi}}$ .

Значит,  $S_{\text{полн.}} = \pi \cdot \frac{3}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{6}{\sqrt{\pi}} + \frac{3}{\sqrt{\pi}} \right) = \frac{3\pi}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{9}{\sqrt{\pi}} = \frac{27\pi}{\pi} = 27$ .

Ответ: 27.

**Пример 64.** Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности конуса, если его образующую увеличить в 5 раз?

Решение.

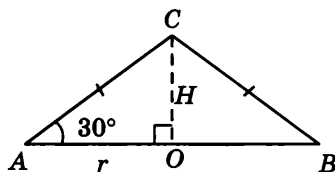
Пусть  $r$  — радиус основания,  $l$  — образующая конуса, тогда  $S_{\text{бок.}} = \pi r l$ .

Если образующую увеличить в 5 раз, то боковая поверхность  $S_{\text{бок.}_1} =$   
 $= \pi r \cdot (5l) = 5\pi r l$ , т. е. увеличится в 5 раз.

Ответ: 5.

**Пример 65.** Образующая конуса  $l = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$  и

составляет с плоскостью основания угол  $30^\circ$ .  
 Найдите объем конуса.



Решение.

Рассмотрим осевое сечение конуса — равнобедренный  $\triangle ABC$ , где  
 $\angle A = 30^\circ$ ,  $AC = l = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}}$ .

Тогда  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$ , где  $r = AO$  — радиус основания,  $H = OC$  — высота  
 конуса.

Из  $\triangle AOC$   $OC = H = \frac{1}{2}l = \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}}$ ;  $r = AO = l \cos 30^\circ = \frac{6}{\sqrt[3]{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}}$ .

Следовательно,  $V = \frac{1}{3} \pi \cdot \left( \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{\pi}} \right)^2 \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{\pi}} = \pi \cdot \frac{9 \cdot 3}{\sqrt[3]{\pi^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} = \frac{27\pi}{\pi} = 27$ .

Ответ: 27.

**Пример 66.** Осевым сечением конуса служит равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь его равна 9. Найдите объем конуса.

В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .

*Решение.*

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 H.$$

По условию задачи  $S_{\triangle ABC} = 9$ , или  $\frac{1}{2} l^2 = 9$ ,

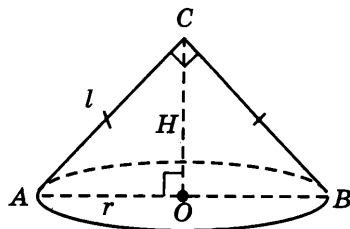
$$l^2 = 18, l = 3\sqrt{2}.$$

Из  $\triangle AOC$  по теореме Пифагора  $AO^2 + CO^2 = AC^2$ .

Так как  $AC = BC$  и  $\angle ACB = 90^\circ$ , то  $CO$  — биссектриса и медиана  $\triangle ABC$ , тогда  $r^2 + H^2 = l^2$ ,  $r = H$ ,  $2H^2 = l^2$ . Но  $l^2 = 18$ , тогда  $2H^2 = 18$ ,  $H^2 = 9$ ,  $H = 3$ , значит,  $H = r = 3$ .

Следовательно,  $V = \frac{1}{3} \pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 9\pi$ ,  $\frac{V}{\pi} = 9$ .

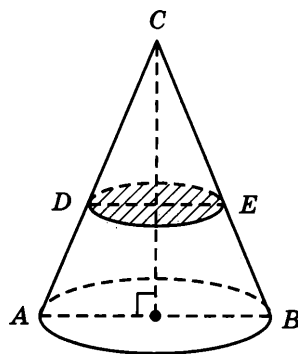
*Ответ:* 9.



**Пример 67.** Объем конуса равен 24. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса.

*Решение.*

Заметим, что конус  $CDE$  подобен конусу  $ABC$  с коэффициентом подобия  $k = \frac{1}{2}$ .



Известно, что объемы подобных тел относятся как куб коэффициента подобия, т. е.  $\frac{V_{CDE}}{V_{ABC}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ .

Значит, объем конуса  $CDE$  в 8 раз меньше объема конуса  $ABC$ , т. е.  $V_{CDE} = 24 : 8 = 3$ .

*Ответ:* 3.

**Пример 68.** Во сколько раз уменьшится объем конуса, если его высоту уменьшить в 5 раз?

*Решение.*

Известно, что объем конуса  $V = \frac{1}{3} \pi r^2 H$ , где  $r$  — радиус основания,

$H$  — высота конуса.

Если высоту уменьшить в 5 раз, то объем конуса также уменьшится в 5 раз.

*Ответ:* 5.

**Пример 69.** Найдите объем  $V$  части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .

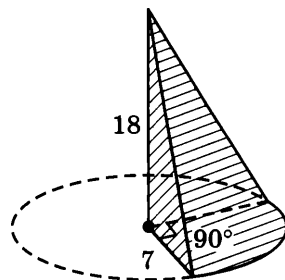
*Решение.*

Объем данной части конуса составляет

$$90^\circ : 360^\circ = \frac{1}{4} \text{ части объема всего конуса.}$$

$$\text{Значит, } V = \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{3} \pi r^2 H \right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot 49 \cdot 18 = 73,5\pi, \text{ тогда } \frac{V}{\pi} = 73,5.$$

*Ответ:* 73,5.



**Пример 70.** Найдите объем  $V$  части конуса, изображенной на рисунке. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .

*Решение.*

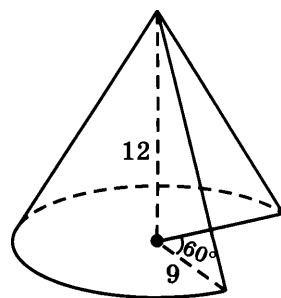
Объем данной части конуса составляет

$$60^\circ : 360^\circ = \frac{1}{6} \text{ части объема всего конуса.}$$

$$\text{Тогда } V = \frac{1}{6} \cdot \left( \frac{1}{3} \pi r^2 H \right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \pi \cdot 9^2 \cdot 12 = 54\pi.$$

$$\text{Значит, } \frac{V}{\pi} = 54.$$

*Ответ:* 54.



**Пример 71.** Найдите диаметр шара, если его объем равен  $\frac{256\pi}{3}$ .

*Решение.*

Известно, что объем шара определяется по формуле

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3, \text{ где } R \text{ — радиус шара.}$$

$$\text{Так как } R = \frac{1}{2}d, \text{ где } d \text{ — диаметр, то } V = \frac{4}{3} \pi \cdot \frac{d^3}{8} = \frac{1}{6} \pi d^3.$$

$$\text{По условию } V = \frac{256\pi}{3}, \text{ тогда получим } \frac{1}{6} \pi d^3 = \frac{256\pi}{3}, \text{ или } d^3 = 2 \cdot 256 = 512 = 8^3.$$

Значит,  $d = 8$ .

*Ответ:* 8.

**Пример 72.** В шаре на расстоянии 4 от центра проведено сечение, площадь которого равна  $9\pi$ . Найдите радиус шара.

*Решение.*

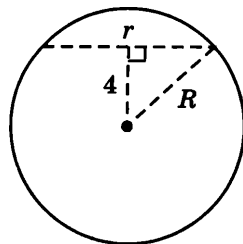
Рассмотрим осевое сечение шара.

Пусть  $r$  — радиус сечения, проведенного на расстоянии 4 от центра,  $R$  — радиус шара.

По условию  $S_{\text{сеч.}} = 9\pi$ . Так как сечение представляет круг радиуса  $r$ , то  $S_{\text{сеч.}} = \pi r^2$ .

Значит,  $\pi r^2 = 9\pi$ ,  $r^2 = 9$ ,  $r = 3$ . Тогда  $R = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ .

*Ответ:* 5.



**Пример 73.** Площадь поверхности шара равна  $17\pi$ . Шар рассечен плоскостью. Длина окружности сечения шара равна  $\pi$ . Найдите расстояние от центра шара до секущей плоскости.

*Решение.*

Пусть  $C$  — длина окружности сечения шара,  $r$  — радиус,  $d$  — искомое расстояние. Известно, что  $C = 2\pi r$ , или  $2\pi r = \pi$ , откуда  $r = \frac{1}{2}$ .

Тогда  $d^2 = R^2 - r^2$ , где  $R$  — радиус шара. Так как площадь поверхности шара  $S = 4\pi R^2$ , а по условию  $S = 17\pi$ , то  $4\pi R^2 = 17\pi$ ,  $R^2 = \frac{17}{4}$ .

Значит,  $d^2 = \frac{17}{4} - \frac{1}{4} = 4$ ,  $d = 2$ .

*Ответ:* 2.

**Пример 74.** Найдите радиус шара, описанного около куба, если площадь поверхности куба равна 288.

*Решение.*

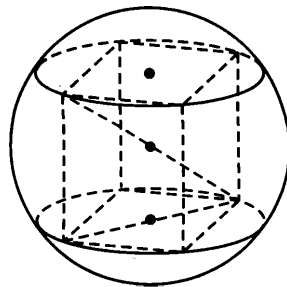
Поверхность куба  $S = 6a^2$ , где  $a$  — ребро куба.

По условию  $S = 288$ , тогда  $6a^2 = 288$ ,  $a^2 = 48$ .

Диаметр  $d$  шара является диагональю куба.

Так как  $d^2 = 3a^2$ , то  $d^2 = 3 \cdot 48 = 144$ ,  $d = 12$ , тогда радиус шара  $R = 12 : 2 = 6$ .

*Ответ:* 6.



**Пример 75.** Высота конуса 8, образующая — 10. Найдите радиус вписанного шара.

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение конуса  $ABC$ .

По условию  $CD = 8$  — высота конуса,  $AC = 10$  — образующая,  $OD = r$  — радиус вписанного шара.

Из  $\triangle ADC$   $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2}$ , или  $AD = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD.$$

С другой стороны,  $S_{\triangle ABC} = p \cdot r$ , где  $p = \frac{1}{2}(AC + BC + AB) = \frac{1}{2}(10 + 10 + 12) = 16$ , тогда получим  $16r = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 \cdot 16$ ,  $16r = 48$ ,  $r = 3$ .

**Ответ:** 3.

**Пример 76.** Высота конуса равна 3, образующая равна 6. Найдите радиус описанного шара.

*Решение.*

Рассмотрим осевое сечение конуса  $ABC$ .

По условию  $CD = 3$  — высота конуса,  $AC = 6$  — образующая.

Пусть  $CO = AO = R$  — радиус описанного шара.

Из  $\triangle ADC$   $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ .

Заметим, что  $CO + OD = CD = 3$ , или  $R + OD = 3$ ,  $OD = 3 - R$ .

Из  $\triangle AOD$   $AO^2 = AD^2 + OD^2$ , или  $R^2 = 27 + (3 - R)^2$ ,  $R^2 = 27 + 9 - 6R + R^2$ ,  $6R = 36$ ,  $R = 6$ .

**Ответ:** 6.

**Пример 77.** Дан шар радиуса  $R = \frac{12}{\sqrt{\pi}}$ . Через

конец радиуса проведена плоскость под углом  $30^\circ$  к нему. Найдите площадь сечения.

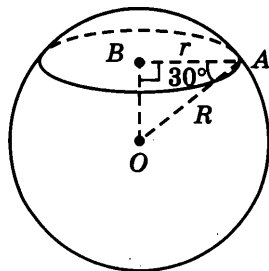
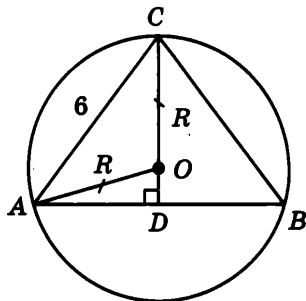
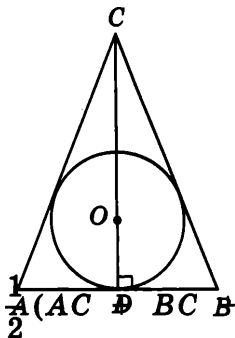
*Решение.*

Пусть  $AB = r$  — радиус сечения,  $AO = R = \frac{12}{\sqrt{\pi}}$  — радиус шара.

Тогда  $S_{\text{сеч.}} = \pi r^2$ .

Так как  $\angle OAB = 30^\circ$ , то  $r = R \cos 30^\circ = \frac{12}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{\frac{3}{\pi}}$ .

Следовательно,  $S_{\text{сеч.}} = \pi \cdot 36 \cdot \frac{3}{\pi} = 108$ .



Ответ: 108.

**Пример 78.** Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус шара увеличить в 4 раза?

*Решение.*

Так как  $S_{\text{шара}} = 4\pi R^2$ , то при увеличении радиуса в 4 раза площадь поверхности увеличится в  $4^2 = 16$  раз.

Ответ: 16.

**Пример 79.** Объем цилиндра равен 22,5. Найдите объем вписанного в этот цилиндр шара.

*Решение.*

Так как шар вписан в цилиндр, то осевое сечение цилиндра — квадрат. Тогда радиус шара равен радиусу основания цилиндра.

По условию  $V_{\text{цил.}} = 22,5$ , или  $\pi R^2 H = 22,5$ , где  $H = 2R$ , тогда  $2\pi R^3 = 22,5$ , откуда  $\pi R^3 = \frac{45}{4}$ .

Но  $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ , тогда  $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{45}{4} = 15$ .

Ответ: 15.

**Пример 80.** Около куба с ребром  $2\sqrt{3}$  описан шар. Найдите объем этого шара  $\frac{V}{\pi}$ .

*Решение.*

Пусть  $a = 2\sqrt{3}$  — ребро куба, тогда диагональ куба  $d = 2R$ , где  $R$  — радиус описанного шара.

Но  $d^2 = 3a^2$ , или  $d = 2R = a\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$ , откуда  $R = 3$ , тогда

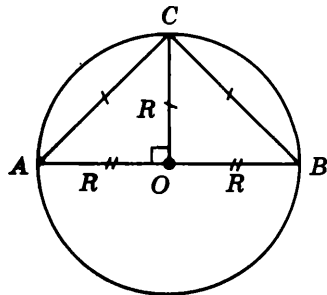
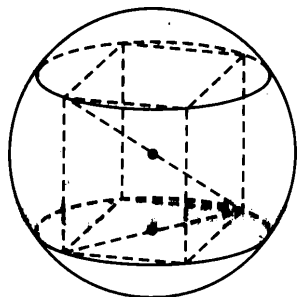
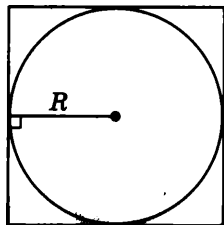
$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ , или  $\frac{V}{\pi} = \frac{4}{3}R^3 = \frac{4}{3} \cdot 3^3 = 36$ .

Ответ: 36.

**Пример 81.** В шар вписан конус так, что его основанием служит большой круг шара. Во сколько раз объем шара больше объема конуса?

*Решение.*

Так как  $AC$  и  $BC$  — образующие конуса, то  $AC = BC$ .



По условию задачи основанием конуса служит больший круг шара, тогда  $AB = 2R$  — диаметр окружности, значит,  $AO = OB = OC = R$  — радиус шара (и конуса).

$$V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad V_{\text{конуса}} = \frac{1}{3}\pi \cdot AO^2 \cdot CO = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2 \cdot R = \frac{1}{3}\pi R^3.$$

Следовательно,  $V_{\text{шара}} : V_{\text{конуса}} = \frac{4}{3}\pi R^3 : \frac{1}{3}\pi R^3 = 4$ , т. е. объем шара больше объема конуса в 4 раза.

*Ответ:* 4.

## § 4. Задание 4. Начала теории вероятностей

Эти задания из теории вероятностей в ЕГЭ подразделяются на несколько видов:

- 1) классическое определение вероятности;
- 2) теоремы о вероятности события.

Надо отметить, что наряду с легкими встречаются довольно сложные задачи.

**Пример 1.** На экзамене 50 вопросов. Володя не выучил 7 из них. Найдите вероятность того, что ему попадет выученный вопрос.

*Решение.*

Володя выучил всего  $50 - 7 = 43$  вопроса, тогда вероятность того, что на экзамене попадет выученный вопрос, равна

$$\frac{43}{50} = \frac{86}{100} = 0,86.$$

*Ответ:* 0,86.

**Пример 2.** Ваня включает телевизор. Телевизор включается на случайном канале. В это время по девяти каналам из 50 показывают новости. Найдите вероятность того, что Ваня попадет на канал, где новости не идут.

*Решение.*

Новости не показывают по  $50 - 9 = 41$  каналу. Тогда вероятность того, что Ваня попадет на канал, где новости не идут, будет равна

$$\frac{41}{50} = 0,82.$$

*Ответ:* 0,82.



**Пример 3.** В ящике 7 желтых, 10 красных и 3 зеленых шара. Из ящика наугад достают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется зеленым?

*Решение.*

Общее число исходов равно числу шаров:  $7 + 10 + 3 = 20$ . Число исходов, благоприятствующих данному событию, равно 3. Значит, искомая вероятность равна  $\frac{3}{20} = 0,15$ .

*Ответ:* 0,15.

**Пример 4.** Из 25 билетов, предлагаемых на экзамене по английскому языку, школьник может ответить только на 20. Какова вероятность того, что школьник не сможет ответить наугад на выбранный билет?

*Решение.*

Поскольку школьник может ответить на 20 билетов, то на  $25 - 20 = 5$  билетов он ответить не может. Вероятность получить один из этих билетов будет равна  $\frac{5}{25} = 0,2$ .

*Ответ:* 0,2.

**Пример 5.** Имеются 40 карточек, на которых записаны числа от 1 до 40 включительно. Из них наугад выбирают одну карточку. Какова вероятность того, что на выбранной карточке будет число 40 или любое четное число?

*Решение.*

Обозначим через  $A$  событие «выбрана карточка с числом 40», через  $B$  — событие «выбрана карточка с четным числом». События  $A$  и  $B$  несовместны.

Вероятность события  $A$  равна  $\frac{1}{40}$ . Карточки с четными номерами составляют половину от общего числа карточек, т. е.  $P(B) = \frac{1}{2}$ .

Следовательно,  $P(A \cup B) = \frac{1}{40} + \frac{1}{2} = \frac{1+20}{40} = \frac{21}{40} = 0,525$ .

*Ответ:* 0,525.

**Пример 6.** На подносе лежат одинаковые на вид пирожки: 5 с мясом, 3 с картошкой и 12 с капустой. Какова вероятность того, что случайно выбранный пирожок будет с мясом или картошкой?

*Решение.*

События выбора пирожка с мясом и с картошкой несовместны. По условию задачи на подносе всего  $5 + 3 + 12 = 20$  пирожков. Вероятность выбора пирожка с мясом равна  $\frac{5}{20}$ , а вероятность выбора пирожка с картошкой равна  $\frac{3}{20}$ .

Значит, вероятность выбора пирожка с мясом или картошкой будет равна  $\frac{5}{20} + \frac{3}{20} = \frac{8}{20} = 0,4$ .

*Ответ:* 0,4.

**Пример 7.** Монету подбрасывают 3 раза подряд. Какова вероятность того, что все 3 раза выпадет орел?

*Решение.*

Пусть  $A_1, A_2, A_3$  — вероятности выпадения орла в каждом из трех подбрасываний. Эти события независимы и  $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{2}$ .

Следовательно,  $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0,125$ .

*Ответ:* 0,125.

**Пример 8.** В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что орел выпадет ровно один раз.

*Решение.*

Обозначим орел буквой  $O$ , решку буквой  $P$ . Тогда возможны следующие исходы:  $OO, PP, OP, PO$ . Значит,  $N = 4$ . Событию  $A = \{\text{выпал ровно один орел}\}$  благоприятствуют события  $OP$  и  $PO$ . Значит,  $N(A) = 2$ .

Следовательно,  $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{2}{4} = 0,5$ .

*Ответ:* 0,5.

**Пример 9.** В случайном эксперименте монету бросили 3 раза. Какова вероятность того, что орел выпал ровно 2 раза?

*Решение.*

Элементарный исход	Число орлов
ООО	3
ОРО	2
ООР	2

Элементарный исход	Число орлов
ОРР	1
РОО	2
РРО	1
РОР	1
РРР	0

Как видно из приведенной таблицы, всего исходов 8, т. е.  $N = 8$ .

Событию  $A = \{\text{орел выпал ровно 2 раза}\}$  благоприятствуют элементарные события РОО, ООР и ОРО (см. таблицу). Значит,  $N(A) = 3$ .

Таким образом,  $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{3}{8} = 0,375$ .

*Ответ:* 0,375.

**Пример 10.** В соревнованиях по легкой атлетике участвуют 3 спортсмена из Голландии, 5 спортсменов из Германии, 8 спортсменов из Кубы и 9 — из США. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется по жребию. Найдите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Кубы.

*Решение.*

Элементарный исход — спортсмен, который выступает последним. Таким может оказаться любой из спортсменов. Всего участвуют  $N = 3 + 5 + 8 + 9 = 25$  спортсменов.

Событию  $A = \{\text{последний из Кубы}\}$  благоприятствуют только 8 исходов (столько, сколько всего участвует кубинских спортсменов).

Следовательно,  $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{8}{25} = 0,32$ .

*Ответ:* 0,32.

**Пример 11.** В чемпионате Европы по боксу участвуют 20 спортсменов: 6 из Германии, 8 из Франции, остальные из Италии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется по жребию. Найдите вероятность того, что боксер, выступающий первым, окажется из Италии.

*Решение.*

$N = 20$ . Чтобы найти число элементарных событий, благоприятствующих событию  $A = \{\text{первым выступает спортсмен из Италии}\}$ , нужно подсчитать число спортсменов из Италии.

$N(A) = 20 - (8 + 6) = 6$ .

Следовательно,  $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{6}{20} = 0,3$ .

*Ответ:* 0,3.

**Пример 12.** Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо (или вовсе не пишет), равна 0,12. Покупатель выбирает в магазине одну такую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.

*Решение.*

Определим событие  $A = \{\text{выбранная ручка пишет хорошо}\}$ . Вероятность противоположного события  $P(\bar{A}) = 0,12$ , тогда  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,12 = 0,88$ .

*Ответ:* 0,88.

**Пример 13.** На итоговой аттестации по геометрии школьнику достается один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Треугольник», равна 0,18. Вероятность того, что это вопрос по теме «Описанная окружность», равна 0,22. Вопросы, относящихся одновременно к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

*Решение.*

Определим события:  $A = \{\text{вопрос на тему «Треугольник»}\}$ ,  $B = \{\text{вопрос на тему «Описанная окружность»}\}$ . Как видно, события  $A$  и  $B$  несовместны, так как по условию в списке нет вопросов, относящихся к этим двум темам одновременно.

Событие  $C = \{\text{вопрос по одной из этих двух тем}\}$  является их объединением, т. е.  $C = A \cup B$ . Применяя формулу сложения вероятностей несовместных событий, имеем

$$P(C) = P(A) + P(B) = 0,18 + 0,22 = 0,4.$$

*Ответ:* 0,4.

## § 5. Задание 5. Вероятность сложных событий

**Пример 1.** Телефон передает SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,88. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.

*Решение.*

Вероятность того, что для передачи сообщения потребуется одна попытка, равна 0,88, а вероятность того, что сообщение отправится со второй попытки, равна  $(1 - 0,88) \cdot 0,88 = 0,12 \cdot 0,88 = 0,1056$ , где 0,12 —

вероятность того, что сообщение не отправится с первой попытки, а 0,88 — вероятность удачной отправки со второй попытки.

Искомая вероятность будет равна  $0,88 + 0,1056 = 0,9856$ .

*Ответ:* 0,9856.

**Пример 2.** Симметричную монету бросают 8 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадает ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадает ровно 4 орла»?

*Решение.*

Количество вариантов, при которых выпадает ровно 5 орлов, равно

$$C_8^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5!}.$$

Количество вариантов, при которых выпадает 4 орла, равно

$$C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!}.$$

Следовательно,  $\frac{P(A)}{P(B)} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5!} : \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4!} \cdot \frac{4!}{8 \cdot 7 \cdot 6} =$

$= 0,8$  (раза).

*Ответ:* 0,8.

**Пример 3.** Вероятность того, что электрический чайник прослужит больше года, равна 0,88. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,8. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

*Решение.*

Пусть событие  $A$  — «прослужит больше 1 года», событие  $B$  — «прослужит больше 2 лет», событие  $C$  — «прослужит  $1 < t < 2$ ».

Тогда  $A = B + C$ .

$P(A) = P(B) + P(C)$ , откуда имеем

$P(C) = P(A) - P(B) = 0,88 - 0,8 = 0,08$ .

*Ответ:* 0,08.

**Пример 4.** На втором этаже университета установлены 2 одинаковых автомата, продающих кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,4. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

*Решение.*

Определим события  $A = \{\text{кофе закончится в I автомате}\}$ ,  $B = \{\text{кофе закончится во II автомате}\}$ . Согласно условию задачи  $P(A) = P(B) = 0,4$  и  $P(A \cap B) = 0,15$ .

Найдем вероятность события по формуле сложения вероятностей  $A \cup B = \{\text{кофе закончится хотя бы в одном из автоматов}\}$ :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,4 + 0,4 - 0,15 = 0,65.$$

Значит, вероятность противоположного события «кофе останется в обоих автоматах» будет равна  $1 - 0,65 = 0,35$ .

*Ответ:* 0,35.

**Пример 5.** Для оплаты коммунальных услуг в магазине установлены два платежных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,06 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

*Решение.*

Вероятность противоположного события  $\bar{A} = \{\text{оба автомата неисправны}\}$ .

Используя формулу умножения вероятностей независимых событий, имеем  $P(\bar{A}) = 0,06 \cdot 0,06 = 0,0036$ .

Значит, вероятность события  $A = \{\text{хотя бы один автомат исправен}\}$  равна  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,0036 = 0,9964$ .

*Ответ:* 0,9964.

**Пример 6.** В ресторане имеется 5 сортов зеленого чая. Для проведения чайной церемонии требуется подать зеленый чай трех различных сортов. Сколькими способами бармен может выполнить заказ?

*Решение.*

Используем формулу  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ , где  $n$  — число объектов, из кото-

рых требуется выбрать ровно  $k$  различных объектов,  $C_n^k$  — число сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ .

Выражение  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  означает произведение всех натуральных чисел от 1 до  $n$  включительно.

$$\text{В нашем случае } n = 5, k = 3. \text{ Тогда } C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = 10.$$

Значит, заказ можно выполнить 10 способами.

*Ответ:* 10.

**Пример 7.** В корзине лежат 8 красных и 6 зеленых шаров. Мальчик достает 2 шара одинакового цвета. Сколькими способами он может это сделать?

*Решение.*

Заметим, что если шары одинакового цвета, то они оба либо красные, либо зеленые, т. е. имеем взаимоисключающие варианты.

В первом случае мальчику предстоит выбрать  $k = 2$  красных шара из  $n = 8$  имеющихся. Тогда число способов это сделать будет равно

$$C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 28.$$

Во втором случае аналогично выбираем  $k = 2$  зеленых шара из  $n = 6$  возможных. Число способов будет равно  $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$ .

Так как варианты с красными и зелеными шарами взаимоисключающие, то по закону сложения имеем  $X = 28 + 15 = 43$ .

*Ответ:* 43.

**Пример 8.** Телефон передает SMS-сообщение. В случае неудачи телефон делает следующую попытку. Вероятность того, что сообщение удастся передать без ошибок в каждой отдельной попытке, равна 0,6. Найдите вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не больше двух попыток.

*Решение.*

Вероятность неудачной отправки будет равна  $1 - 0,6 = 0,4$ , а вероятность того, что для передачи сообщения потребуется не более двух попыток, равна сумме вероятностей того, что сообщение будет передано с первой попытки, и того, что сообщение будет передано со второй попытки.

Следовательно, искомая вероятность равна

$$0,6 + 0,4 \cdot 0,6 = 0,6 \cdot (1 + 0,4) = 0,6 \cdot 1,4 = 0,84.$$

*Ответ:* 0,84.

**Пример 9.** В магазине в одной коробке лежат попеременно ручки с черными, синими или красными чернилами, одинаковые на вид. Покупатель случайным образом выбирает одну ручку. Вероятность того, что она окажется черной, равна 0,34, а того, что она окажется синей, равна 0,47. Найдите вероятность того, что она окажется красной.

*Решение.*

Вероятность того, что ручка черная, синяя или красная, равна 1.

Тогда вероятность того, что ручка окажется красной, равна

$$P = 1 - (0,34 + 0,47) = 1 - 0,81 = 0,19.$$

*Ответ:* 0,19.

## § 6. Задание 6. Простейшие уравнения

Здесь предлагается решить простейшие уравнения базового уровня, которые подразделяются на несколько видов:

- 1) линейные, квадратные, кубические уравнения;
- 2) рациональные уравнения;
- 3) иррациональные уравнения;
- 4) показательные и логарифмические уравнения;
- 5) тригонометрические уравнения.

### 6.1. Линейные уравнения

*Найдите корень уравнения.*

**Пример 1.**  $\frac{4}{5}x = 14\frac{2}{5}$ .

*Решение.*

$$14\frac{2}{5} = \frac{14 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{72}{5}, \text{ тогда получим } \frac{4}{5}x = \frac{72}{5}, \text{ или } 4x = 72, \text{ откуда } x = 72 : 4 = 18.$$

*Ответ:* 18.

**Пример 2.**  $\frac{5}{7}x = -9\frac{2}{7}$ .

*Решение.*

$$9\frac{2}{7} = \frac{9 \cdot 7 + 2}{7} = \frac{65}{7}, \text{ тогда получим } \frac{5}{7}x = -\frac{65}{7}, \text{ или } 5x = -65, \\ x = -\frac{65}{5} = -13.$$

*Ответ:* -13.

**Пример 3.**  $8\frac{3}{4}x = -7$ .

*Решение.*

$$8\frac{3}{4} = \frac{8 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{35}{4}, \text{ тогда получим } \frac{35}{4}x = -7, \text{ откуда } x = -7 : \frac{35}{4}, \\ x = -7 \cdot \frac{4}{35} = -\frac{4}{5} = -0,8.$$

*Ответ:* -0,8.



**Пример 4.**  $18\frac{3}{4}x = -22\frac{1}{2}$ .

*Решение.*

$$18\frac{3}{4} = \frac{18 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{75}{4}, \quad 22\frac{1}{2} = \frac{22 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{45}{2}, \quad \text{тогда } \frac{75}{4}x = -\frac{45}{2}, \quad \text{откуда}$$
$$x = -\frac{45}{2} \cdot \frac{4}{75}, \quad \text{или } x = -\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 5} = -\frac{6}{5} = -1,2.$$

*Ответ:*  $-1,2$ .

## 6.2. Рациональные уравнения

*Найдите корень уравнения.*

**Пример 5.**  $\frac{2x+9}{x-3} = 4$ .

*Решение.*

$$2x + 9 = 4 \cdot (x - 3), \quad \text{или } 2x + 9 = 4x - 12, \quad \text{или } 4x - 2x = 9 + 12,$$
$$2x = 21, \quad \text{откуда } x = 10,5.$$

*Ответ:*  $10,5$ .

**Пример 6.**  $\frac{32-4x}{x+1} = 5$ .

*Решение.*

$$32 - 4x = 5(x + 1), \quad \text{или } 32 - 4x = 5x + 5, \quad 32 - 5 = 5x + 4x, \quad 27 = 9x,$$
$$x = 27 : 9 = 3.$$

*Ответ:*  $3$ .

**Пример 7.**  $\frac{x-10}{x+1} = -2\frac{2}{3}$ .

*Решение.*

$$\frac{x-10}{x+1} = -\frac{8}{3}, \quad \text{или } 3(x-10) = -8(x+1), \quad \text{или } 3x-30 = -8x-8,$$

$$3x + 8x = 30 - 8, \quad 11x = 22, \quad x = 22 : 11 = 2.$$

*Ответ:*  $2$ .

**Пример 8.**  $\frac{2-3x}{2-x} = 2,6$ .

*Решение.*

$$2,6 = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}, \quad \text{тогда получим } \frac{2-3x}{2-x} = \frac{13}{5}, \quad \text{или } 5(2-3x) = 13(2-x),$$
$$\text{или } 10 - 15x = 26 - 13x, \quad \text{или } 10 - 26 = 15x - 13x, \quad 2x = -16, \quad x = -8.$$

*Ответ:*  $-8$ .

**Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.**

**Пример 9.**  $x = \frac{6}{x-1}$ .

*Решение.*

$x(x-1) = 6$ , или  $x^2 - x - 6 = 0$ , откуда по теореме, обратной теореме Виета, имеем  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -2$ .

Тогда  $x = -2$  — меньший корень уравнения.

*Ответ:*  $-2$ .

**Пример 10.**  $x = \frac{-3x+4}{x-3}$ .

*Решение.*

$x(x-3) = -3x+4$ , или  $x^2 - 3x + 3x = 4$ ,  $x^2 = 4$ , откуда  $x_{1,2} = \pm 2$ .

Тогда  $x = -2$  — меньший корень уравнения.

*Ответ:*  $-2$ .

**Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите бо́льший из них.**

**Пример 11.**  $x = \frac{-3x+1}{x-3}$ .

*Решение.*

$x(x-3) = -3x+1$ , или  $x^2 - 3x = -3x+1$ ,  $x^2 = 1$ , откуда  $x_{1,2} = \pm 1$ , тогда  $x = 1$  — бо́льший корень.

*Ответ:*  $1$ .

**Пример 12.**  $x = -\frac{4x+14}{x+5}$ .

*Решение.*

$x(x+5) = -(4x+14)$ , или  $x^2 + 5x + 4x + 14 = 0$ ,  $x^2 + 9x + 14 = 0$ , откуда  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = -7$ .

$x = -2$  — бо́льший корень уравнения.

*Ответ:*  $-2$ .

**Пример 13.**  $x = \frac{6+5x}{1+2x}$ .

*Решение.*

$x(1+2x) = 6+5x$ , или  $x + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ , или  $2x^2 - 4x - 6 = 0$ ,  $x^2 - 2x - 3 = 0$ ,  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -1$ .

Значит,  $x = 3$  — бо́льший корень.

*Ответ:*  $3$ .

### 6.3. Квадратные уравнения

*Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.*

**Пример 14.**  $x^2 - 6x + 5 = 0$ .

*Решение.*

По теореме, обратной теореме Виета, имеем  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 5$ .

$x = 1$  — меньший корень.

*Ответ:* 1.

**Пример 15.**  $5x^2 + 6x - 11 = 0$ .

*Решение.*

Так как  $5 + 6 - 11 = 0$ , то  $x_1 = 1$ , тогда  $x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{11}{5} = -2,2$ .

Значит,  $x = -2,2$  — меньший корень уравнения.

*Ответ:*  $-2,2$ .

*Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, укажите бо́льший из них.*

**Пример 16.**  $x^2 + 14x + 48 = 0$ .

*Решение.*

По теореме, обратной теореме Виета, имеем  $x_1 = -6$ ,  $x_2 = -8$ .

Тогда  $x = -6$  — бо́льший корень уравнения.

*Ответ:*  $-6$ .

**Пример 17.**  $3x^2 + 32x + 80 = 0$ .

*Решение.*

$$D/4 = 16^2 - 3 \cdot 80 = 16 = 4^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm 4}{3}, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = -\frac{20}{3}.$$

$x = -4$  — бо́льший корень уравнения.

*Ответ:*  $-4$ .

**Пример 18.**  $14x^2 - 5x - 1 = 0$ .

*Решение.*

$$D = 25 - 4 \cdot 14 \cdot (-1) = 25 + 56 = 81 = 9^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 9}{28}, \quad x_1 = -\frac{1}{7}, \quad x_2 = \frac{1}{2} = 0,5.$$

$x = 0,5$  — бо́льший корень уравнения.

*Ответ:* 0,5.

## 6.4. Иррациональные уравнения

*Найдите корень уравнения.*

**Пример 19.**  $\sqrt{16+3x}=5$ .

*Решение.*

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$16 + 3x = 25, 3x = 25 - 16, 3x = 9, x = 9 : 3 = 3.$$

*Ответ:* 3.

**Пример 20.**  $\sqrt{-2-9x}=4$ .

*Решение.*

$$-2 - 9x = 16, 9x = -2 - 16, 9x = -18, x = -2.$$

*Ответ:*  $x = -2$ .

**Пример 21.**  $\sqrt{\frac{5}{11x+26}} = \frac{1}{5}$ .

*Решение.*

$$\frac{5}{11x+26} = \frac{1}{25}, \text{ или } 11x + 26 = 125, 11x = 99, x = 9.$$

*Ответ:* 9.

*Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.*

**Пример 22.**  $\sqrt{7x-6}=x$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $x \geq 0$ .

Возведем обе части уравнения в квадрат:  $7x - 6 = x^2$ , или  $x^2 - 7x + 6 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 6$ . Оба корня удовлетворяют ОДЗ, значит, являются корнями исходного уравнения.

Тогда  $x = 1$  — меньший корень уравнения.

*Ответ:* 1.

**Пример 23.**  $\sqrt{42-x}=-x$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $x \leq 0$ .

$42 - x = (-x)^2$ , или  $x^2 + x - 42 = 0$ , откуда  $x_1 = -7$ ,  $x_2 = 6$ . Корень  $x = 6$  не удовлетворяет ОДЗ.

Значит,  $x = -7$  — единственный корень исходного уравнения.

*Ответ:* -7.

**Пример 24.**  $4\sqrt{x+6} = x+1$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $x \geq -1$ .

$16(x+6) = (x+1)^2$ , или  $16x + 96 = x^2 + 2x + 1$ , или  $x^2 - 14x - 95 = 0$ , откуда находим  $x_1 = -19$ ,  $x_2 = 5$ . Так как по ОДЗ  $x \geq -1$ , то  $x = 5$  — единственный корень уравнения.

*Ответ:* 5.

**Пример 25.**  $\sqrt{\frac{6-2x}{5+x}} = \sqrt{2}$ .

*Решение.*

Возведем обе части уравнения в квадрат:  $\frac{6-2x}{5+x} = 2$ , или

$6 - 2x = 2(5 + x)$ ,  $6 - 2x = 10 + 2x$ ,  $6 - 10 = 2x + 2x$ ,  $4x = -4$ ,  $x = -1$ .

*Ответ:* -1.

**Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.**

**Пример 26.**  $\sqrt{x} = x - 2$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $x - 2 \geq 0$ , т. е.  $x \geq 2$ .

$x = (x - 2)^2$ , или  $x^2 - 4x + 4 = x$ , или  $x^2 - 5x + 4 = 0$ , откуда  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 4$ . Так как  $x \geq 2$ , то корень  $x = 1$  не удовлетворяет ОДЗ.

Значит,  $x = 4$  — единственный корень исходного уравнения.

*Ответ:* 4.

**Пример 27.**  $\sqrt{6x+7} = 4x-7$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $4x - 7 \geq 0$ , т. е.  $x \geq \frac{7}{4}$ .

$6x + 7 = (4x - 7)^2$ , или  $6x + 7 = 16x^2 - 56x + 49$ , или

$16x^2 - 62x + 42 = 0$ , или  $8x^2 - 31x + 21 = 0$ ,

$D = 961 - 4 \cdot 8 \cdot 21 = 961 - 672 = 289 = 17^2 > 0$ ,

$x_{1,2} = \frac{31 \pm 17}{16}$ , откуда  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$ .

ОДЗ удовлетворяет корень  $x = 3$ .

*Ответ:* 3.

## 6.5. Показательные уравнения

*Найдите корень уравнения.*

**Пример 28.**  $4^{-9+x} = 16$ .

*Решение.*

Так как  $16 = 4^2$ , то получим  $4^{-9+x} = 4^2$ , или  $-9 + x = 2$ , откуда  $x = 11$ .

*Ответ:* 11.

**Пример 29.**  $3^{7-x} = 27$ .

*Решение.*

$3^{7-x} = 3^3$ , или  $7 - x = 3$ , откуда  $x = 4$ .

*Ответ:* 4.

**Пример 30.**  $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+5} = 16$ .

*Решение.*

Так как  $\frac{1}{4} = 4^{-1}$  и  $16 = 4^2$ , то получим  $(4^{-1})^{x+5} = 4^2$ , или

$-(x + 5) = 2$ ,  $x + 5 = -2$ ,  $x = -7$ .

*Ответ:* -7.

**Пример 31.**  $\left(\frac{1}{16}\right)^{3-x} = 256^{-x}$ .

*Решение.*

$\frac{1}{16} = 16^{-1}$ ,  $256 = 16^2$ .

Получим уравнение  $(16^{-1})^{3-x} = (16^2)^{-x}$ , или  $-(3 - x) = -2x$ ,

$3 - x = 2x$ ,  $3x = 3$ ,  $x = 1$ .

*Ответ:* 1.

**Пример 32.**  $2^{4-x} = 0,4 \cdot 5^{4-x}$ .

*Решение.*

Разделим обе части уравнения на  $5^{4-x} \neq 0$ .

$\left(\frac{2}{5}\right)^{4-x} = \frac{4}{10}$ , или  $\left(\frac{2}{5}\right)^{4-x} = \frac{2}{5}$ , т. е.  $4 - x = 1$ ,  $x = 3$ .

*Ответ:* 3.

**Пример 33.**  $9^{3-x} = \sqrt{3}$ .

*Решение.*

Так как  $9 = 3^2$  и  $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ , то получим уравнение  $(3^2)^{3-x} = 3^{\frac{1}{2}}$ , или  $2(3-x) = \frac{1}{2}$ ,  $3-x = \frac{1}{4}$ ,  $x = 3 - \frac{1}{4} = 2,75$ .

*Ответ:* 2,75.

## 6.6. Логарифмические уравнения

*Найдите корень уравнения.*

**Пример 34.**  $\log_3 (4 + x) = 1$ .

*Решение.*

По определению логарифма получим  $4 + x = 3^1$ ,  $x = 3 - 4 = -1$ .

*Ответ:* -1.

**Пример 35.**  $\log_4 (-2 + x) = 0$ .

*Решение.*

$-2 + x = 4^0 = 1$ ,  $x = 1 + 2 = 3$ .

*Ответ:* 3.

**Пример 36.**  $\log_{\frac{1}{3}} (6 - x) = -1$ .

*Решение.*

$6 - x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ ,  $6 - x = 3$ , откуда  $x = 6 - 3 = 3$ .

*Ответ:* 3.

**Пример 37.**  $\log_6 (5 - x) = 4 \log_6 2$ .

*Решение.*

Так как  $4 \log_6 2 = \log_6 2^4 = \log_6 16$ , то получим  $\log_6 (5 - x) = \log_6 16$ , откуда  $5 - x = 16$ ,  $x = 5 - 16 = -11$ .

*Ответ:* -11.

**Пример 38.**  $\log_{\frac{1}{3}} (2 - x) = -3$ .

*Решение.*

$2 - x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$ , или  $2 - x = 27$ , откуда  $x = 2 - 27 = -25$ .

*Ответ:* -25.

**Пример 39.**  $\log_{x-3} 25 = 2$ .

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-3 > 0, \\ x-3 \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x > 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

По определению логарифма получим  $(x-3)^2 = 25$ , или  $x-3 = \pm 5$ .

Так как  $x > 3$  (по ОДЗ), то  $x-3 = 5$ .  $x = 8$  — корень уравнения.

*Ответ:* 8.

## 6.7. Тригонометрические уравнения

*Найдите корень уравнения. В ответе запишите наименьший положительный корень.*

**Пример 40.**  $\cos \frac{\pi(x+1)}{3} = \frac{1}{2}$ .

*Решение.*

$$\frac{\pi(x+1)}{3} = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\pi(x+1)}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, x+1 = \pm 1 + 6n, \text{ откуда } x_1 = 6n, n \in \mathbb{Z}, x_2 = 6n - 2,$$

$n \in \mathbb{Z}$ .

При  $n = 1$ ,  $x = 4$  — наименьший положительный корень уравнения.

*Ответ:* 4.

**Пример 41.**  $\cos \frac{\pi(4x-5)}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

*Решение.*

$$\frac{\pi(4x-5)}{4} = \pm \arccos \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\pi(4x-5)}{4} = \pm \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) + 2\pi n, \frac{\pi(4x-5)}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$4x - 5 = \pm 3 + 8n, n \in \mathbb{Z}.$$

1)  $4x - 5 = 3 + 8n;$

$$4x = 8 + 8n;$$

$$x = 2 + 2n.$$

2)  $4x - 5 = -3 + 8n;$

$$4x = 2 + 8n;$$

$$x = 0,5 + 2n.$$

При  $n = 0$ ,  $x = 2$ .

При  $n = 0$ ,  $x = 0,5$ .

Значит,  $x = 0,5$  — наименьший положительный корень уравнения.

*Ответ:* 0,5.



**Найдите корень уравнения. В ответе запишите наибольший отрицательный корень уравнения.**

**Пример 42.**  $\cos \frac{\pi(2x+8)}{3} = -1.$

*Решение.*

$$\frac{\pi(2x+8)}{3} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2x + 8 = 3 + 6n, 2x = 6n - 5, \text{ откуда } x = 3n - 2,5, n \in \mathbb{Z}.$$

При  $n = 0$ ,  $x = -2,5$  — наибольший отрицательный корень уравнения.

*Ответ:*  $-2,5$ .

**Пример 43.**  $\sin \frac{\pi(x-1)}{6} = \frac{1}{2}.$

*Решение.*

$$\frac{\pi(x-1)}{6} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x - 1 = (-1)^n + 6n, n \in \mathbb{Z}.$$

1)  $n = 2k$  — четное, тогда  $x - 1 = 1 + 6n$ ,  $x = 2 + 6n$ , откуда  $x = -4$  при  $n = -1$ ;

2)  $n = 2k + 1$  — нечетное, тогда  $x - 1 = -1 + 6(2k + 1)$ , или  $x = 6 + 12k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . При  $k = -1$ ,  $x = -6$ .

Значит,  $x = -4$  — наибольший отрицательный корень.

*Ответ:*  $-4$ .

**Пример 44.**  $\sin \frac{\pi(2x-5)}{4} = -1.$

*Решение.*

$$\frac{\pi(2x-5)}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2x - 5 = -2 + 8n, 2x = 3 + 8n, \text{ откуда } x = 1,5 + 4n, n \in \mathbb{Z}.$$

При  $n = -1$ ,  $x = -2,5$  — наибольший отрицательный корень.

*Ответ:*  $-2,5$ .

**Пример 45.**  $\operatorname{tg} \frac{\pi(x-2)}{4} = -1.$

*Решение.*

$$\frac{\pi(x-2)}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x - 2 = -1 + 4n, x = 1 + 4n, n \in \mathbb{Z}.$$

При  $n = -1$ ,  $x = -3$  — наибольший отрицательный корень.

*Ответ:*  $-3$ .

**Пример 46.**  $\cos^2 \frac{\pi(x+1)}{3} = \frac{1}{2}$ .

*Решение.*

Известно, что  $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$ , тогда получим уравнение

$$\frac{1 + \cos \frac{2\pi(x+1)}{3}}{2} = \frac{1}{2}, \text{ или } \cos \frac{2\pi(x+1)}{3} = 0, \frac{2\pi(x+1)}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4(x+1) = 3 + 6n, \text{ откуда } x = \frac{6n-1}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

При  $n = 0$ ,  $x = -0,25$  — наибольший отрицательный корень уравнения.

*Ответ:*  $-0,25$ .

**Пример 47.**  $\sin^2 \frac{\pi(x-4)}{3} = \frac{1}{2}$ .

*Решение.*

Известно, что  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ , тогда получим уравнение

$$\frac{1 - \cos \frac{2\pi(x-4)}{3}}{2} = \frac{1}{2}, \text{ или } \cos \frac{2\pi(x-4)}{3} = 0, \frac{2\pi(x-4)}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4(x-4) = 3 + 6n, 4x = 19 + 6n, x = \frac{19+6n}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

При  $n = -4$  получим

$$x = \frac{19-24}{4} = -\frac{5}{4} = -1,25 \text{ — наибольший отрицательный корень урав-$$

нения.

*Ответ:*  $-1,25$ .

## § 7. Задание 7. Вычисления и преобразования

Задания этого раздела подразделяются на несколько видов:

- 1) преобразования числовых рациональных выражений;
- 2) преобразования алгебраических выражений и дробей;
- 3) преобразования числовых буквенных иррациональных выражений;
- 4) действия со степенями;
- 5) преобразования логарифмических выражений;
- 6) преобразования числовых буквенных тригонометрических выражений.

## 7.1. Преобразования числовых рациональных выражений

**Пример 1.**  $\left(5\frac{2}{3} + \frac{3}{8}\right) \cdot 120.$

*Решение.*

І способ

$$1) 5\frac{2}{3} + \frac{3}{8} = 5\frac{2 \cdot 8 + 3 \cdot 3}{24} = 5\frac{16 + 9}{24} = 5\frac{25}{24} = 6\frac{1}{24}.$$

$$2) 6\frac{1}{24} \cdot 120 = \left(6 + \frac{1}{24}\right) \cdot 120 = 6 \cdot 120 + \frac{1}{24} \cdot 120 = 720 + 5 = 725.$$

*Ответ:* 725.

ІІ способ

$$\left(5\frac{2}{3} + \frac{3}{8}\right) \cdot 120 = 5\frac{2}{3} \cdot 120 + \frac{3}{8} \cdot 120 = \frac{17}{3} \cdot 120 + 3 \cdot 15 = 17 \cdot 40 + 45 = 680 + 45 = 725.$$

*Ответ:* 725.

**Пример 2.**  $\left(3\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right) \cdot 200.$

*Решение.*

$$\left(3\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right) \cdot 200 = \frac{7}{2} \cdot 200 - \frac{5}{8} \cdot 200 = 7 \cdot 100 - 5 \cdot 25 = 700 - 125 = 575.$$

*Ответ:* 575.

**Пример 3.**  $\left(7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3}\right) \cdot 1,2.$

*Решение.*

І способ

$$1) 7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} = 9\frac{3 + 2}{6} = 9\frac{5}{6}.$$

$$2) 9\frac{5}{6} \cdot 1,2 = \left(9 + \frac{5}{6}\right) \cdot 1,2 = 9 \cdot 1,2 + \frac{5}{6} \cdot 1,2 = 10,8 + 5 \cdot 0,2 = 10,8 + 1 = 11,8.$$

*Ответ:* 11,8.

ІІ способ

$$\left(7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3}\right) \cdot 1,2 = \frac{15}{2} \cdot 1,2 + \frac{7}{3} \cdot 1,2 = 15 \cdot 0,6 + 7 \cdot 0,4 = 9 + 2,8 = 11,8.$$

*Ответ:* 11,8.

**Пример 4.**  $\left(2\frac{5}{7}-3\frac{3}{5}\right) \cdot 21$ .

*Решение.*

І способ

$$\left(2\frac{5}{7}-3\frac{3}{5}\right) \cdot 21 = \left(\frac{19}{7}-\frac{18}{5}\right) \cdot 21 = \frac{19}{7} \cdot 21 - \frac{18}{5} \cdot 21 = 19 \cdot 3 - \frac{36}{10} \cdot 21 = \\ = 57 - 3,6 \cdot 21 = 57 - 75,6 = -18,6.$$

*Ответ:*  $-18,6$ .

ІІ способ

$$1) 2\frac{5}{7}-3\frac{3}{5} = \left(2+\frac{5}{7}\right) - \left(3+\frac{3}{5}\right) = 2-3+\frac{5}{7}-\frac{3}{5} = -1+\frac{25-21}{35} = \\ = \frac{4}{35} - \frac{35}{35} = -\frac{31}{35}.$$

$$2) -\frac{31}{35} \cdot 21 = -\frac{31 \cdot 3}{5} = -\frac{93}{5} = -\frac{186}{10} = -18,6.$$

*Ответ:*  $-18,6$ .

**Пример 5.**  $\left(2\frac{5}{6}-3\frac{1}{5}\right) : \frac{5}{96}$ .

*Решение.*

$$1) 2\frac{5}{6}-3\frac{1}{5} = \frac{17}{6} - \frac{16}{5} = \frac{85-96}{30} = -\frac{11}{30}.$$

$$2) -\frac{11}{30} : \frac{5}{96} = -\frac{11 \cdot 96}{30 \cdot 5} = -\frac{11 \cdot 32}{10 \cdot 5} = -\frac{11 \cdot 16}{25} = -\frac{176}{25} = -7,04.$$

*Ответ:*  $-7,04$ .

## 7.2. Преобразования алгебраических выражений и дробей

**Пример 6.**  $(7x-16)(7x+16)-49x^2-4x+25$  при  $x=80$ .

*Решение.*

$$(7x-16)(7x+16)-49x^2-4x+25 = 49x^2-256-49x^2-4x+25 = \\ = -4x-231.$$

При  $x=80$  получим  $-4 \cdot 80 - 231 = -320 - 231 = -551$ .

*Ответ:*  $-551$ .

**Пример 7.**  $\frac{(13a)^2 - 13a}{13a^2 - a}$ .

*Решение.*

$$\frac{(13a)^2 - 13a}{13a^2 - a} = \frac{13a(13a - 1)}{a(13a - 1)} = 13.$$

*Ответ:* 13.

**Пример 8.**  $\frac{16x^2 - 9}{4x + 3} - 4x$ .

*Решение.*

$$\frac{16x^2 - 9}{4x + 3} - 4x = \frac{(4x - 3)(4x + 3)}{4x + 3} - 4x = 4x - 3 - 4x = -3.$$

*Ответ:* -3.

**Пример 9.** Найдите  $p(x) + p(4 - x)$ , если  $p(x) = \frac{x(4 - x)}{x - 2}$  при  $x \neq 2$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} p(x) + p(4 - x) &= \frac{x(4 - x)}{x - 2} + \frac{(4 - x)(4 - (4 - x))}{(4 - x) - 2} = \frac{x(4 - x)}{x - 2} + \frac{(4 - x) \cdot x}{2 - x} = \\ &= \frac{x(4 - x)}{x - 2} - \frac{x(4 - x)}{x - 2} = 0. \end{aligned}$$

*Ответ:* 0.

**Пример 10.** Найдите значение  $\frac{x}{y}$ , если  $\frac{4x + 5y}{5x + 4y} = 1$ .

*Решение.*

Если  $\frac{4x + 5y}{5x + 4y} = 1$ , то  $4x + 5y = 5x + 4y$ , откуда  $y = x$ , тогда  $\frac{x}{y} = 1$ .

*Ответ:* 1.

**Пример 11.** Найдите значение выражения  $23x - 3y + 20$ , если  $\frac{3x - 8y + 6}{7x - 2y + 6} = 7$ .

*Решение.*

Если  $\frac{3x - 8y + 6}{7x - 2y + 6} = 7$ , то  $3x - 8y + 6 = 7(7x - 2y + 6)$ , или

$$46x - 6y + 36 = 0, \text{ или } 23x - 3y + 18 = 0, \text{ тогда}$$

$$23x - 3y + 20 = (23x - 3y + 18) + 2 = 0 + 2 = 2.$$

*Ответ:* 2.

**Пример 12.**  $\frac{16x^2 + y^2 - (4x - y)^2}{xy}$ .

*Решение.*

$$\frac{16x^2 + y^2 - (16x^2 - 8xy + y^2)}{xy} = \frac{8xy}{xy} = 8.$$

*Ответ:* 8.

**Пример 13.**  $\frac{(x + 6y)^2 - x^2 - 36y^2}{3xy}$ .

*Решение.*

$$\frac{x^2 + 12xy + 36y^2 - x^2 - 36y^2}{3xy} = \frac{12xy}{3xy} = 4.$$

*Ответ:* 4.

**Пример 14.**  $\frac{(5x - 2y)^2 - (5x + 2y)^2}{8xy}$ .

*Решение.*

$$\frac{25x^2 - 20xy + 4y^2 - (25x^2 + 20xy + 4y^2)}{8xy} = \frac{-40xy}{8xy} = -5.$$

*Ответ:* -5.

**Пример 15.** Известно, что  $6x + 2y = 11$ ,  $10z + 4y = 13$ . Найдите значение выражения  $3x + 3y + 5z$ .

*Решение.*

Складывая почленно данные равенства, получим

$$6x + 6y + 10z = 24, \text{ или } 3x + 3y + 5z = 24 : 2 = 12.$$

*Ответ:* 12.

**Пример 16.** Найдите значение выражения  $2x + 3y$ , если  $2x - 7y = 19$ ,  $6x - y = 29$ .

*Решение.*

Вычитая из II равенства I, получим  $6x - y - (2x - 7y) = 10$ , или  $4x + 6y = 10$ , откуда  $2x + 3y = 10 : 2 = 5$ .

*Ответ:* 5.

*Замечание.* Данные равенства можно решить как систему линейных уравнений.

**Пример 17.** Найдите значение выражения  $7p(a) - 63a + 29$ , если  $p(a) = 9a - 4$ .

*Решение.*

$$7p(a) - 63a + 29 = 7(9a - 4) - 63a + 29 = 63a - 28 - 63a + 29 = 1.$$

*Ответ:* 1.

**Пример 18.** Найдите значение выражения  $p(x - 3) - p(x + 3)$ , если  $p(x) = 5x$ .

*Решение.*

$$p(x - 3) - p(x + 3) = 5(x - 3) - 5(x + 3) = 5x - 15 - 5x - 15 = -30.$$

*Ответ:* -30.

### 7.3. Преобразования числовых иррациональных выражений

**Пример 19.**  $\sqrt{113^2 - 112^2}$ .

*Решение.*

$$\sqrt{113^2 - 112^2} = \sqrt{(113 - 112)(113 + 112)} = \sqrt{1 \cdot 225} = 15.$$

*Ответ:* 15.

**Пример 20.**  $\sqrt{962^2 - 720^2}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \sqrt{962^2 - 720^2} &= \sqrt{(962 - 720)(962 + 720)} = \sqrt{242 \cdot 1682} = \sqrt{2 \cdot 121 \cdot 2 \cdot 841} = \\ &= 2 \cdot 11 \cdot 29 = 638. \end{aligned}$$

*Ответ:* 638.

**Пример 21.**  $\sqrt{\frac{26^2 - 10^2}{25}}$ .

*Решение.*

$$\sqrt{\frac{26^2 - 10^2}{25}} = \frac{\sqrt{(26 - 10)(26 + 10)}}{5} = \frac{\sqrt{16 \cdot 36}}{5} = \frac{4 \cdot 6}{5} = \frac{24}{5} = 4,8.$$

*Ответ:* 4,8.

**Пример 22.**  $\frac{(6\sqrt{10})^2}{18}$ .

*Решение.*

$$\frac{(6\sqrt{10})^2}{18} = \frac{36 \cdot 10}{18} = 2 \cdot 10 = 20.$$

*Ответ:* 20.

**Пример 23.**  $\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5}}{\sqrt{5}}.$

*Решение.*

$$\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{5^{\frac{3}{6}}}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{5^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}} = 1.$$

*Ответ:* 1.

**Пример 24.**  $\frac{\sqrt[6]{20} \cdot \sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{5}}.$

*Решение.*

$$\frac{\sqrt[6]{20} \cdot \sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{5}} = \sqrt[6]{\frac{20 \cdot 16}{5}} = \sqrt[6]{4 \cdot 16} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 2^4} = \sqrt[6]{2^6} = 2.$$

*Ответ:* 2.

**Пример 25.**  $\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[6]{36}.$

*Решение.*

$$\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[6]{36} = 36^{\frac{1}{3}} \cdot 36^{\frac{1}{6}} = 36^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 36^{\frac{3}{6}} = 36^{\frac{1}{2}} = (6^2)^{\frac{1}{2}} = 6.$$

*Ответ:* 6.

**Пример 26.**  $13 \cdot \sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[6]{49}.$

*Решение.*

$$13 \cdot \sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[6]{49} = 13 \cdot 49^{\frac{1}{3}} \cdot 49^{\frac{1}{6}} = 13 \cdot 49^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 13 \cdot 49^{\frac{1}{2}} = 13 \cdot (7^2)^{\frac{1}{2}} = 13 \cdot 7 = 91.$$

*Ответ:* 91.

**Пример 27.**  $\frac{\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{4,8}}{\sqrt{0,18}}.$

*Решение.*

$$\frac{\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{4,8}}{\sqrt{0,18}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 48}{18}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 24}{9}} = \frac{24}{3} = 8.$$

*Ответ:* 8.



## 7.4. Преобразования буквенных иррациональных выражений

**Пример 28.**  $a + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$  при  $a \leq 3$ .

*Решение.*

$$a + \sqrt{a^2 - 6a + 9} = a + \sqrt{(a-3)^2} = a + |a-3|.$$

Так как по условию  $a \leq 3$ , то  $|a-3| = 3-a$ , тогда  $a + |a-3| = a + 3 - a = 3$ .

*Ответ:* 3.

**Пример 29.**  $\sqrt{(a-4)^2} + \sqrt{(a-13)^2}$  при  $4 \leq a \leq 13$ .

*Решение.*

Так как  $4 \leq a \leq 13$ , то  $\sqrt{(a-4)^2} + \sqrt{(a-13)^2} =$   
 $= |a-4| + |a-13| = a-4 - (a-13) = a-4-a+13 = 9$ .

*Ответ:* 9.

**Пример 30.**  $\frac{6\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{x}$ .

*Решение.*

$$\frac{6\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{x} = 6 + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} = 6.$$

*Ответ:* 6.

**Пример 31.**  $\frac{3\sqrt{x}}{x} - \frac{8\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} + 11x - 5$  при  $x = 3$ .

*Решение.*

$$\frac{3\sqrt{x}}{x} - \frac{8\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} + 11x - 5 = \frac{3}{\sqrt{x}} - 8 - \frac{3}{\sqrt{x}} + 11x - 5 = 11x - 13.$$

При  $x = 3$  получим  $11 \cdot 3 - 13 = 20$ .

*Ответ:* 20.

**Пример 32.**  $g(7+x) + g(7-x)$ , если  $g(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-14}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} g(7+x) + g(7-x) &= \sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{x+7-14} + \sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{7-x-14} = \\ &= \sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{x-7} - \sqrt[3]{x-7} - \sqrt[3]{x+7} = 0. \end{aligned}$$

*Ответ:* 0.

**Пример 33.**  $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[18]{a}}$  при  $a = 512$ .

*Решение.*

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[18]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{1}{18}}} = a^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{18}} = a^{\frac{6-3-1}{18}} = a^{\frac{2}{18}} = a^{\frac{1}{9}}.$$

При  $a = 512 = 2 \cdot 256 = 2 \cdot 16^2 = 2 \cdot (2^4)^2 = 2 \cdot 2^8 = 2^9$  получим  
 $a^{\frac{1}{9}} = (2^9)^{\frac{1}{9}} = 2.$

*Ответ:* 2.

**Пример 34.**  $\frac{19^4 \sqrt[30]{x} - 11^8 \sqrt[15]{x}}{4^{40} \sqrt[3]{x}}$  при  $x > 0$ .

*Решение.*

$$\frac{19^4 \sqrt[30]{x} - 11^8 \sqrt[15]{x}}{4^{40} \sqrt[3]{x}} = \frac{19^{120} \sqrt{x} - 11^{120} \sqrt{x}}{4^{120} \sqrt{x}} = \frac{8^{120} \sqrt{x}}{4^{120} \sqrt{x}} = 2.$$

*Ответ:* 2.

**Пример 35.**  $\frac{\sqrt{36^8 a}}{\sqrt[8]{\sqrt{a}}}$  при  $a > 0$ .

*Решение.*

$$\frac{\sqrt{36^8 a}}{\sqrt[8]{\sqrt{a}}} = \frac{6^{16} \sqrt{a}}{\sqrt[16]{a}} = 6.$$

*Ответ:* 6.

**Пример 36.**  $\frac{\sqrt{121^9 b}}{2^{18} \sqrt{b}}$  при  $b > 0$ .

*Решение.*

$$\frac{\sqrt{121^9 b}}{2^{18} \sqrt{b}} = \frac{11^{18} \sqrt{b}}{2^{18} \sqrt{b}} = \frac{11}{2} = 5,5.$$

*Ответ:* 5,5.

## 7.5. Вычисление значений степенных выражений

**Пример 37.**  $6^{0,36} \cdot 36^{0,32}$ .

*Решение.*

$$6^{0,36} \cdot 36^{0,32} = 6^{0,36} \cdot (6^2)^{0,32} = 6^{0,36} \cdot 6^{0,64} = 6^{0,36 + 0,64} = 6^1 = 6.$$

*Ответ:* 6.

**Пример 38.**  $8^{\frac{4}{9}} \cdot 64^{\frac{5}{18}}$ .

*Решение.*

$$8^{\frac{4}{9}} \cdot 64^{\frac{5}{18}} = 8^{\frac{4}{9}} \cdot (8^2)^{\frac{5}{18}} = 8^{\frac{4}{9}} \cdot 8^{\frac{5}{9}} = 8^{\frac{4+5}{9}} = 8^1 = 8.$$

*Ответ:* 8.

**Пример 39.**  $\frac{2^{3,5} \cdot 3^{6,5}}{6^{4,5}}$ .

*Решение.*

$$\frac{2^{3,5} \cdot 3^{6,5}}{6^{4,5}} = \frac{2^{3,5} \cdot 3^{6,5}}{2^{4,5} \cdot 3^{4,5}} = \frac{3^{6,5-4,5}}{2^{4,5-3,5}} = \frac{3^2}{2^1} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

*Ответ:* 4,5.

**Пример 40.**  $\left( \frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{3}} \right)^2$ .

*Решение.*

$$\left( \frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{3}} \right)^2 = \left( 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}} \right)^2 = \left( 3^{\frac{4+3-1}{12}} \right)^2 = \left( 3^{\frac{1}{2}} \right)^2 = 3.$$

*Ответ:* 3.

**Пример 41.**  $0,8^{\frac{1}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7}} \cdot 20^{\frac{6}{7}}$ .

*Решение.*

$$0,8^{\frac{1}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7}} \cdot 20^{\frac{6}{7}} = (0,8 \cdot 5^2 \cdot 20^6)^{\frac{1}{7}} = \left( \frac{4}{5} \cdot 5^2 \cdot 20^6 \right)^{\frac{1}{7}} = (20 \cdot 20^6)^{\frac{1}{7}} = (20^7)^{\frac{1}{7}} = 20.$$

*Ответ:* 20.

**Пример 42.**  $2^9 \cdot 25^9 : 50^7$ .

*Решение.*

$$\frac{2^9 \cdot 25^9}{50^7} = \frac{(2 \cdot 25)^9}{50^7} = \frac{50^9}{50^7} = 50^2 = 2500.$$

*Ответ:* 2500.

**Пример 43.**  $2^{10} \cdot 9^{11} : 18^8$ .

*Решение.*

$$\frac{2^{10} \cdot 9^{11}}{18^8} = \frac{2^{10} \cdot 9^{11}}{(2 \cdot 9)^8} = \frac{2^{10} \cdot 9^{11}}{2^8 \cdot 9^8} = 2^2 \cdot 9^3 = 4 \cdot 729 = 2916.$$

*Ответ:* 2916.

**Пример 44.**  $3^9 \cdot 7^{10} : 21^8$ .

*Решение.*

$$\frac{3^9 \cdot 7^{10}}{21^8} = \frac{3^9 \cdot 7^{10}}{3^8 \cdot 7^8} = 3 \cdot 7^2 = 3 \cdot 49 = 147.$$

*Ответ:* 147.

**Пример 45.**  $4^8 \cdot 121^7 : 484^7$ .

*Решение.*

$$\frac{4^8 \cdot 121^7}{484^7} = \frac{4^8 \cdot 1}{4^7} = 4.$$

*Ответ:* 4.

**Пример 46.**  $11^4 \cdot 25^4 : 275^3$ .

*Решение.*

$$\frac{11^4 \cdot 25^4}{275^3} = \frac{(11 \cdot 25)^4}{275^3} = \frac{275^4}{275^3} = 275.$$

*Ответ:* 275.

**Пример 47.**  $5^{\sqrt{5}+6} \cdot 5^{-3-\sqrt{5}}$ .

*Решение.*

$$5^{\sqrt{5}+6} \cdot 5^{-3-\sqrt{5}} = 5^{\sqrt{5}+6-3-\sqrt{5}} = 5^{6-3} = 5^3 = 125.$$

*Ответ:* 125.

**Пример 48.**  $7^{\sqrt{13}+7} \cdot 7^{-4-\sqrt{13}}$ .

*Решение.*

$$7^{\sqrt{13}+7} \cdot 7^{-4-\sqrt{13}} = 7^{\sqrt{13}+7-4-\sqrt{13}} = 7^{7-4} = 7^3 = 343.$$

*Ответ:* 343.

## 7.6. Действия со степенями

**Пример 49.**  $\frac{17(x^6)^5 + 10(x^{10})^3}{(3x^{10})^3}.$

*Решение.*

$$\frac{17(x^6)^5 + 10(x^{10})^3}{(3x^{10})^3} = \frac{17x^{30} + 10x^{30}}{27x^{30}} = \frac{27x^{30}}{27x^{30}} = 1.$$

*Ответ:* 1.

**Пример 50.**  $\frac{a^5b^{-8}}{(4a)^3b^{-3}} \cdot \frac{32}{a^2b^{-5}}.$

*Решение.*

$$\frac{a^5b^{-8}}{(4a)^3b^{-3}} \cdot \frac{32}{a^2b^{-5}} = \frac{32a^5b^{-8}}{64a^3b^{-3} \cdot a^2 \cdot b^{-5}} = \frac{a^5b^{-8}}{2a^5b^{-8}} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

*Ответ:* 0,5.

**Пример 51.**  $\frac{x^5 \cdot x^6}{x^7}$  при  $x = 3$ .

*Решение.*

$$\frac{x^5 \cdot x^6}{x^7} = x^{5+6-7} = x^4 = 3^4 = 81.$$

*Ответ:* 81.

**Пример 52.**  $\frac{x^{-14} \cdot x^{-3}}{x^{-20}}$  при  $x = 4$ .

*Решение.*

$$\frac{x^{-14} \cdot x^{-3}}{x^{-20}} = x^{-14-3+20} = x^3 = 4^3 = 64.$$

*Ответ:* 64.

## 7.7. Преобразования числовых логарифмических выражений

**Пример 53.**  $4^{\log_2 6}.$

*Решение.*

$$4^{\log_2 6} = 4^{\log_{2^2} 6^2} = 4^{\log_4 36} = 36.$$

*Ответ:* 36.

**Пример 54.**  $25^{\log_5 \sqrt{8}}$ .

*Решение.*

$$25^{\log_5 \sqrt{8}} = 25^{\log_{25} 8} = 8.$$

*Ответ:* 8.

**Пример 55.**  $16 \cdot 10^{\lg 2}$ .

*Решение.*

$$16 \cdot 10^{\lg 2} = 16 \cdot 2 = 32.$$

*Ответ:* 32.

**Пример 56.**  $\log_2 0,25$ .

*Решение.*

$$\log_2 0,25 = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2.$$

*Ответ:* -2.

**Пример 57.**  $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5}$ .

*Решение.*

$$\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5} = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^{-1} = -1 \cdot 2 \cdot \log_5 5 = -1 \cdot 2 = -2.$$

*Ответ:* -2.

**Пример 58.**  $\log_5^2 25$ .

*Решение.*

$$\log_5^2 25 = (\log_5 5^2)^2 = (2 \log_5 5)^2 = (2 \cdot 1)^2 = 4.$$

*Ответ:* 4.

**Пример 59.**  $\log_{0,5}^2 16$ .

*Решение.*

$$\log_{0,5}^2 16 = \left( \log_{\frac{1}{2}} 2^4 \right)^2 = (-4)^2 = 16.$$

*Ответ:* 16.

**Пример 60.**  $\log_{\frac{1}{16}}^3 4$ .

*Решение.*

$$\log_{\frac{1}{16}}^3 4 = \left( \log_{4^{-2}} 4 \right)^3 = \left( -\frac{1}{2} \cdot 1 \right)^3 = -\frac{1}{8} = -0,125.$$

*Ответ:* -0,125.

**Пример 61.**  $\sqrt{\log_3 81}$ .

*Решение.*

$$\sqrt{\log_3 81} = \sqrt{\log_3 3^4} = \sqrt{4 \cdot 1} = 2.$$

*Ответ:* 2.

**Пример 62.**  $11^{\log_{\sqrt{11}} 4}$ .

*Решение.*

$$11^{\log_{\sqrt{11}} 4} = 11^{\log_{11} 4^2} = 4^2 = 16.$$

*Ответ:* 16.

**Пример 63.**  $4^{\log_{64} 125}$ .

*Решение.*

$$4^{\log_{64} 125} = 4^{\log_4 5^3} = 4^{\log_4 5} = 5.$$

*Ответ:* 5.

**Пример 64.**  $\log_{\frac{16}{9}} \log_{27} 81$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \log_{\frac{16}{9}} \log_{27} 81 &= \log_{\frac{16}{9}} (\log_3 3^4) = \log_{\frac{16}{9}} \left( \frac{1}{3} \cdot 4 \log_3 3 \right) = \log_{\frac{16}{9}} \frac{4}{3} = \\ &= \log_{\left(\frac{4}{3}\right)^2} \frac{4}{3} = \frac{1}{2} = 0,5. \end{aligned}$$

*Ответ:* 0,5.

**Пример 65.**  $\log_2 \log_{\sqrt{3}} 9$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \log_2 \log_{\sqrt{3}} 9 &= \log_2 \left( \log_{\frac{1}{3^2}} 3^2 \right) = \log_2 (2 \cdot 2 \cdot \log_3 3) = \\ &= \log_2 2^2 = 2. \end{aligned}$$

*Ответ:* 2.

**Пример 66.**  $81^{\frac{1}{\log_4 9}}$ .

*Решение.*

$$81^{\frac{1}{\log_4 9}} = 81^{\log_9 4} = 81^{\log_{81} 16} = 16.$$

*Ответ:* 16.

**Пример 67.**  $25^4^{\frac{1}{\log_5 9}}$ .

*Решение.*

$$25^4^{\frac{1}{\log_5 9}} = 5^{2 \cdot 4^{\frac{1}{\log_5 9}}} = 5^{2^{\frac{1}{\log_5 9}}} = 5^{\frac{1}{2} \cdot 2 \log_5 3} = 5^{\log_5 3} = 3.$$

*Ответ:* 3.

**Пример 68.**  $\frac{\log_6 125}{\log_6 5}$ .

*Решение.*

$$\frac{\log_6 125}{\log_6 5} = \frac{\log_6 5^3}{\log_6 5} = \frac{3 \log_6 5}{\log_6 5} = 3.$$

*Ответ:* 3.

**Пример 69.**  $\frac{2 \log_{0,2} 16}{\log_{0,2} 32}$ .

*Решение.*

$$\frac{2 \log_{0,2} 16}{\log_{0,2} 32} = \frac{2 \log_{0,2} 2^4}{\log_{0,2} 2^5} = \frac{2 \cdot 4 \log_{0,2} 2}{5 \log_{0,2} 2} = \frac{8}{5} = 1,6.$$

*Ответ:* 1,6.

**Пример 70.**  $\log_6 9 \cdot \log_3 36$ .

*Решение.*

$$\log_6 9 \cdot \log_3 36 = \log_6 3^2 \cdot \log_3 6^2 = 2 \log_6 3 \cdot 2 \log_3 6 = 4(\log_6 3 \cdot \log_3 6) = 4 \cdot 1 = 4.$$

*Ответ:* 4.

**Пример 71.**  $(1 - \log_3 18)(1 - \log_6 18)$ .

*Решение.*

$$(1 - \log_3 18)(1 - \log_6 18) = (1 - \log_3 3 - \log_3 6)(1 - \log_6 6 - \log_6 3) = (1 - 1 - \log_3 6)(1 - 1 - \log_6 3) = -\log_3 6 \cdot (-\log_6 3) = \log_3 6 \cdot \log_6 3 = 1.$$

*Ответ:* 1.

**Пример 72.**  $\frac{\log_3 135}{3 + \log_3 5}$ .

*Решение.*

$$\frac{\log_3 135}{3 + \log_3 5} = \frac{\log_3 (27 \cdot 5)}{3 + \log_3 5} = \frac{\log_3 27 + \log_3 5}{3 + \log_3 5} = \frac{\log_3 3^3 + \log_3 5}{3 + \log_3 5} = \frac{3 + \log_3 5}{3 + \log_3 5} = 1.$$

*Ответ:* 1.



**Пример 73.**  $\frac{\log_2 5}{\log_2 7} + \log_7 0,2$ .

*Решение.*

$$\frac{\log_2 5}{\log_2 7} + \log_7 0,2 = \log_7 5 + \log_7 0,2 = \log_7 (5 \cdot 0,2) = \log_7 1 = 0.$$

*Ответ:* 0.

**Пример 74.**  $\log_3 4 - 4 \log_3 2 + \log_3 \frac{4}{9}$ .

*Решение.*

$$\begin{aligned} \log_3 4 - 4 \log_3 2 + \log_3 \frac{4}{9} &= \log_3 4 - \log_3 2^4 + \log_3 \frac{4}{9} = \\ &= \log_3 \left( \frac{4 \cdot 4}{16 \cdot 9} \right) = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2. \end{aligned}$$

*Ответ:* -2.

## 7.8. Вычисление значений тригонометрических выражений

**Пример 75.**  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$  и  $\alpha \in \left( \pi; \frac{3\pi}{2} \right)$ .

*Решение.*

Известно, что  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ , тогда  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}$ , откуда

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{1}{3}.$$

Поскольку  $\alpha$  — угол III четверти, то  $\operatorname{ctg} \alpha > 0$ , значит,  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$  и  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ .

*Ответ:* 3.

*Замечание.* Можно было найти  $\cos \alpha$ , а затем  $\operatorname{tg} \alpha$ .

**Пример 76.**  $6\sqrt{2} \sin \alpha$ , если  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$  и  $\alpha \in \left( \frac{\pi}{2}; \pi \right)$ .

*Решение.*

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

Так как  $\alpha$  — угол II четверти, то  $\sin \alpha > 0$ , тогда

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Значит, } 6\sqrt{2} \sin \alpha = 6\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 8.$$

*Ответ:* 8.

**Пример 77.**  $5 \cos 2\alpha$ , если  $\sin \alpha = -0,4$ .

*Решение.*

$$\text{Известно, что } \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha, \text{ тогда } \cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot (-0,4)^2 = 1 - 2 \cdot 0,16 = 1 - 0,32 = 0,68.$$

$$\text{Значит, } 5 \cos 2\alpha = 5 \cdot 0,68 = 3,4.$$

*Ответ:* 3,4.

**Пример 78.**  $\frac{15 \sin 8\alpha}{2 \cos 4\alpha}$ , если  $\sin 4\alpha = -0,8$ .

*Решение.*

$$\frac{15 \sin 8\alpha}{2 \cos 4\alpha} = \frac{15 \cdot 2 \sin 4\alpha \cos 4\alpha}{2 \cos 4\alpha} = 15 \sin 4\alpha = 15 \cdot (-0,8) = -12.$$

*Ответ:* -12.

**Пример 79.**  $\operatorname{ctg}^2 \alpha$ , если  $17 \sin^2 \alpha + 12 \cos^2 \alpha = 13$ .

*Решение.*

$$\text{Так как } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha, \text{ то данное равенство преобразуется к виду } 17 \sin^2 \alpha + 12(1 - \sin^2 \alpha) = 13, \text{ или } 5 \sin^2 \alpha = 1, \sin^2 \alpha = \frac{1}{5}.$$

$$\text{Известно, что } 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \text{ тогда получим } 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 5, \text{ откуда } \operatorname{ctg}^2 \alpha = 4.$$

*Ответ:* 4.

**Пример 80.**  $\frac{4 \cos \alpha - 7 \sin \alpha}{3 \sin \alpha - 4 \cos \alpha}$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = -2$ .

*Решение.*

I способ

$$\text{Если } \operatorname{tg} \alpha = -2, \text{ то } \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2, \text{ откуда } \sin \alpha = -2 \cos \alpha.$$

$$\text{Тогда получим } \frac{4 \cos \alpha - 7 \cdot (-2 \cos \alpha)}{3 \cdot (-2 \cos \alpha) - 4 \cos \alpha} = \frac{18 \cos \alpha}{-10 \cos \alpha} = -1,8.$$

*Ответ:* -1,8.

## II способ

Разделим числитель и знаменатель дроби на  $\cos \alpha \neq 0$ . Получим

$$\frac{4-7\operatorname{tg} \alpha}{3\operatorname{tg} \alpha-4} = \frac{4-7 \cdot (-2)}{3 \cdot (-2)-4} = \frac{4+14}{-10} = \frac{18}{-10} = -1,8.$$

Ответ:  $-1,8$ .

**Пример 81.**  $\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right)$ , если  $\sin \alpha = 0,6$  и  $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$ .

Решение.

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}-\alpha\right) = \cos \alpha = \pm \sqrt{1-\sin^2 \alpha}.$$

Так как  $\alpha$  — угол III четверти, то  $\cos \alpha < 0$ , тогда

$$\cos \alpha = -\sqrt{1-0,36} = -\sqrt{0,64} = -0,8.$$

Ответ:  $-0,8$ .

**Пример 82.**  $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = 0,4$ .

Решение.

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right) &= \operatorname{tg}\left(4\pi-\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \operatorname{tg}\left(4\pi-\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{0,4} = -\frac{5}{2} = -2,5.\end{aligned}$$

Ответ:  $-2,5$ .

**Пример 83.**  $6 \cos(\alpha-5\pi)-13 \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ , если  $\cos \alpha = -\frac{2}{7}$ .

Решение.

$$\begin{aligned}6 \cos(\alpha-5\pi)-13 \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) &= 6 \cos(5\pi-\alpha)-13 \sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \\ &= -6 \cos \alpha + 13 \cos \alpha = 7 \cos \alpha = 7 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = -2.\end{aligned}$$

Ответ:  $-2$ .

## 7.9. Преобразования числовых тригонометрических выражений

**Пример 84.**  $\frac{4 \sin 21^\circ \cdot \cos 21^\circ}{\sin 42^\circ}$ .

*Решение.*

$$\frac{4\sin 21^\circ \cdot \cos 21^\circ}{\sin 42^\circ} = \frac{2(2\sin 21^\circ \cdot \cos 21^\circ)}{\sin 42^\circ} = \frac{2\sin 42^\circ}{\sin 42^\circ} = 2.$$

*Ответ:* 2.

**Пример 85.**  $\frac{29\sin 106^\circ \cdot \cos 106^\circ}{\sin 212^\circ}.$

*Решение.*

$$\frac{29\sin 106^\circ \cdot \cos 106^\circ}{\sin 212^\circ} = \frac{14,5(2\sin 106^\circ \cdot \cos 106^\circ)}{\sin 212^\circ} = \frac{14,5\sin 212^\circ}{\sin 212^\circ} = 14,5.$$

*Ответ:* 14,5.

**Пример 86.**  $\frac{18\sin 16^\circ \cdot \sin 74^\circ}{\sin 32^\circ}.$

*Решение.*

Так как  $\sin 74^\circ = \sin (90^\circ - 16^\circ) = \cos 16^\circ$ , то получим выражение

$$\frac{18\sin 16^\circ \cdot \cos 16^\circ}{\sin 32^\circ} = \frac{9 \cdot (2\sin 16^\circ \cdot \cos 16^\circ)}{\sin 32^\circ} = \frac{9\sin 32^\circ}{\sin 32^\circ} = 9.$$

*Ответ:* 9.

**Пример 87.**  $\frac{33\cos 87^\circ \cos 177^\circ}{\sin 354^\circ}.$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{33\cos 87^\circ \cos 177^\circ}{\sin 354^\circ} &= \frac{33\cos 87^\circ \cos 177^\circ}{2\sin 177^\circ \cos 177^\circ} = \frac{33\cos 87^\circ}{2\sin 177^\circ} = \frac{33\cos 87^\circ}{2\sin (90^\circ + 87^\circ)} = \\ &= \frac{33\cos 87^\circ}{2\cos 87^\circ} = \frac{33}{2} = 16,5. \end{aligned}$$

*Ответ:* 16,5.

**Пример 88.**  $\frac{13(\sin^2 13^\circ - \cos^2 13^\circ)}{\cos 26^\circ}.$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{13(\sin^2 13^\circ - \cos^2 13^\circ)}{\cos 26^\circ} &= \frac{-13(\cos^2 13^\circ - \sin^2 13^\circ)}{\cos 26^\circ} = \\ &= \frac{-13\cos (2 \cdot 13^\circ)}{\cos 26^\circ} = \frac{-13\cos 26^\circ}{\cos 26^\circ} = -13. \end{aligned}$$

*Ответ:* -13.

**Пример 89.**  $\frac{2}{\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right)\sin\frac{27\pi}{4}}.$

*Решение.*

Поскольку  $\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right) = \cos\frac{31\pi}{4} = \cos\left(8\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  и

$$\sin\frac{27\pi}{4} = \sin\left(7\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ то получим } \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4.$$

*Ответ:* 4.

**Пример 90.**  $\frac{26 \sin 403^\circ}{\sin 43^\circ}.$

*Решение.*

$$\frac{26 \sin 403^\circ}{\sin 43^\circ} = \frac{26 \sin(360^\circ + 43^\circ)}{\sin 43^\circ} = \frac{26 \sin 43^\circ}{\sin 43^\circ} = 26.$$

*Ответ:* 26.

**Пример 91.**  $23 \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 103^\circ.$

*Решение.*

$$23 \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 103^\circ = 23 \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg}(90^\circ + 13^\circ) = 23 \operatorname{tg} 13^\circ \cdot (-\operatorname{ctg} 13^\circ) = -23 \cdot (\operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{ctg} 13^\circ) = -23 \cdot 1 = -23.$$

*Ответ:* -23.

**Пример 92.**  $\frac{43}{\sin^2 43^\circ + \sin^2 133^\circ}.$

*Решение.*

$$\begin{aligned} \frac{43}{\sin^2 43^\circ + \sin^2 133^\circ} &= \frac{43}{\sin^2 43^\circ + \sin^2(90^\circ + 43^\circ)} = \\ &= \frac{43}{\sin^2 43^\circ + \cos^2 43^\circ} = \frac{43}{1} = 43. \end{aligned}$$

*Ответ:* 43.

**Пример 93.**  $18 \sin 120^\circ \cos 150^\circ.$

*Решение.*

$$\sin 120^\circ = \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{тогда } 18 \sin 120^\circ \cos 150^\circ = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -18 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{27}{2} = -13,5.$$

*Ответ:* -13,5.

## § 8. Задание 8. Производная и первообразная

Задачи из раздела «Производная и первообразная» подразделяются на несколько видов:

- 1) физический смысл производной;
- 2) геометрический смысл производной и касательной;
- 3) применение производной к исследованию функций;
- 4) первообразная.

В целом задание 7 относится к математическому анализу.

### 8.1. Физический и геометрический смысл производной, касательная

**Пример 1.** Прямая  $y = 6x - 5$  параллельна касательной к графику функции  $y = x^2 + 8x - 11$ . Найдите абсциссу точки касания.

*Решение.*

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, т. е.  $f'(x_0) = k$ .

По условию задачи касательная к графику функции параллельна прямой  $y = 6x - 5$ , значит, их угловые коэффициенты равны, т. е.  $k = 6$ .

Найдем производную данной функции  $y' = (x^2 + 8x - 11)' = 2x + 8$ .

Поскольку  $y' = k = 6$ , то получим  $2x + 8 = 6$ ,  $2x = -2$ ,  $x = -1$ .

*Ответ:*  $-1$ .

**Пример 2.** Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции  $y = -\frac{5}{x}$  в точке с абсциссой  $x_0 = -1$ .

*Решение.*

$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $k$  — угловой коэффициент касательной,  $\alpha$  — угол наклона между касательной к графику данной функции в точке  $x_0$  и положительным направлением оси  $Ox$ .

$$\text{Так как } y = -\frac{5}{x}, \text{ то } y'(x) = -5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -5 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{5}{x^2}.$$

$$\text{Тогда } y'(x_0) = y'(-1) = \frac{5}{(-1)^2} = 5. \text{ Итак, } \operatorname{tg} \alpha = 5.$$

*Ответ:*  $5$ .

**Пример 3.** Тело движется прямолинейно по закону  $S(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6$

(расстояние измеряется в метрах). Вычислите скорость движения в момент времени  $t = 2$  с.

*Решение.*

Известно, что скорость движения есть производная пути  $S$  по времени  $t$ , т. е.  $v(t) = S'(t)$ , или  $v(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3t^2 + \frac{3}{2} \cdot 2t - 0 = t^2 + 3t$ .

Тогда  $v(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 = 10$  (м/с).

*Ответ:* 10.

**Пример 4.** Найдите угол между касательной к графику функции  $f(x) = \frac{1}{3}x^3$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$  и осью  $Ox$ .

*Решение.*

$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$ .

Так как  $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ , то  $f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2$ .

Тогда  $f'(x_0) = f'(1) = 1$ . Значит,  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ , откуда  $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$ .

*Ответ:* 45.

**Пример 5.** Через точку графика функции

$y = 14x \cos(x - 2) - 3x^2$  с абсциссой  $x_0 = 2$  проведена касательная. Найдите тангенс угла наклона этой касательной к оси ординат.

*Решение.*

$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона между касательной и положительным направлением оси  $Ox$ .

Следовательно,  $y'(x) = 14(x \cos(x - 2))' - 6x = 14(1 \cdot \cos(x - 2) + x(-\sin(x - 2))) - 6x = 14(\cos(x - 2) - x \sin(x - 2)) - 6x$ .

Тогда  $y'(2) = 14(\cos 0 - 2 \sin 0) - 6 \cdot 2 = 14 \cdot (1 - 0) - 12 = 2$ .

Так как по определению угол с осью ординат  $\beta = 90^\circ - \alpha$ , то  $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$ .

Но  $\operatorname{tg} \alpha = y'(2) = 2$ , тогда  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2} = 0,5$ .

Итак,  $\operatorname{tg} \beta = 0,5$ , где  $\beta$  — искомый угол.

*Ответ:* 0,5.

**Пример 6.** Укажите абсциссу точки графика функции  $f(x) = 7 - 3x - 2x^2$ , в которой коэффициент касательной равен нулю.

*Решение.*

$$f'(x) = (7 - 3x - 2x^2)' = -3 - 4x.$$

Согласно условию  $f'(x) = 0$ , или  $-3 - 4x = 0$ ,  $4x = 3$ , откуда  $x = 0,75$ .

*Ответ:* 0,75.

**Пример 7.** Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = -t^4 + 5t^3 + 6t + 13$  (где  $x$  — расстояние от точки отсчета в метрах,  $t$  — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени  $t = 2$  с.

*Решение.*

$$v(t) = x'(t) = (-t^4 + 5t^3 + 6t + 13)' = -4t^3 + 15t^2 + 6.$$

При  $t = 2$  имеем  $v(2) = -4 \cdot 2^3 + 15 \cdot 2^2 + 6 = -32 + 60 + 6 = 34$  (м/с).

*Ответ:* 34.

**Пример 8.** Прямая  $y = 5x + 2$  является касательной к графику функции  $f(x) = ax^2 + 3x + 4$ . Найдите значение  $a$ .

*Решение.*

Прямая  $y = kx + b$  является касательной к графику функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда выполняются одновременно условия  $f(x_0) = y(x_0)$  и  $f'(x_0) = k$ , где  $k = 5$  — угловой коэффициент прямой  $y = 5x + 2$ .

$$\text{Имеем } \begin{cases} 2ax_0 + 3 = 5, \\ ax_0^2 + 3x_0 + 4 = 5x_0 + 2; \end{cases} \quad \begin{cases} ax_0 = 1, \\ 1 \cdot x_0 + 3x_0 + 4 = 5x_0 + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_0 = 1, \\ x_0 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0,5, \\ x_0 = 2. \end{cases}$$

Итак, искомое значение  $a = 0,5$ .

*Ответ:* 0,5.

**Пример 9.** Прямая  $y = 2x + 7$  является касательной к графику функции  $f(x) = 5x^2 - 8x + c$ . Найдите значение  $c$ .

*Решение.*

Уравнение касательной к графику в точке  $x_0$  имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0), \text{ или}$$

$$y = y_0 + f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0, \text{ где } y = 2x + 7.$$

$$\text{Имеем } f'(x_0) = 10x_0 - 8, f(x_0) = 5x_0^2 - 8x_0 + c.$$

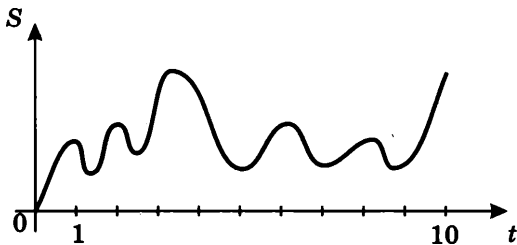
$$\begin{cases} 2 = 10x_0 - 8, \\ 7 = 5x_0^2 - 8x_0 + c - 10x_0^2 + 8x_0; \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_0 = 1, \\ c = 7 + 5x_0^2; \end{cases} \begin{cases} x_0 = 1, \\ c = 7 + 5 = 12. \end{cases}$$

Ответ: 12.

**Пример 10.** Материальная точка  $M$  начинает движение из точки  $A$  и движется по прямой в течение 10 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки  $A$  до точки  $M$  со временем. На оси абсцисс откладывается время  $t$  в секундах, на оси ординат — расстояние  $S$  в метрах. Определите, сколько раз точка  $M$  меняла направление движения.

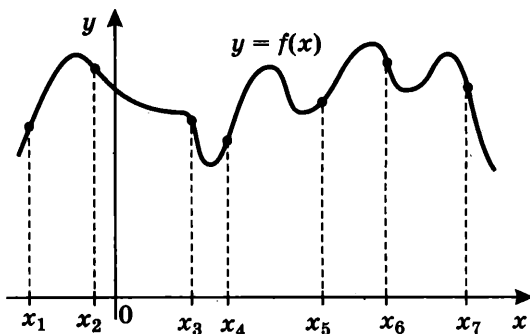


Решение.

Когда точка  $M$  меняет направление движения, мгновенная скорость равна нулю. Но  $v(t) = S'(t)$ . Значение производной равно нулю в точках экстремума функции  $S(t)$ , которых на графике всего 10.

Ответ: 10.

**Пример 11.** На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и 7 точек на оси абсцисс:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$ . В скольких из этих точек производная функции  $f(x)$  положительна?

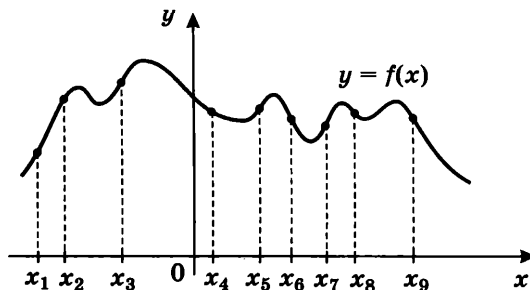


Решение.

Если производная функции  $f'(x) > 0$ , то функция  $f(x)$  возрастает на промежутке. Таких точек всего 3. Это точки  $x_1, x_4, x_5$ .

Ответ: 3.

**Пример 12.** На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и 9 точек на оси абсцисс:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$ . В скольких из этих точек производная функции  $f(x)$  отрицательна?



**Решение.**

Если производная функции отрицательна, т. е.  $f'(x) < 0$ , то функция  $f(x)$  убывает на промежутке. Таких точек всего 4. Это точки  $x_4, x_6, x_8, x_9$ .

**Ответ:** 4.

**Пример 13.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$  и отмечены точки  $-3, -2, -1, 1, 2$ . В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

**Решение.**

Известно, что значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной в точке  $x_0$ , т. е.  $k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона между касательной и положительным направлением оси  $Ox$ . Но  $f'(x_0) > 0$  в точках  $-1$  и  $2$ .

Как видно из рисунка, угол наклона явно больше в точке  $x = -1$ .

**Ответ:**  $-1$ .

**Пример 14.** На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .

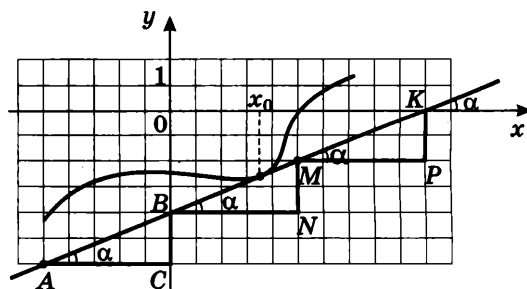
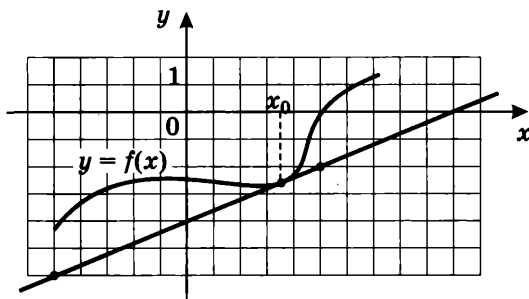
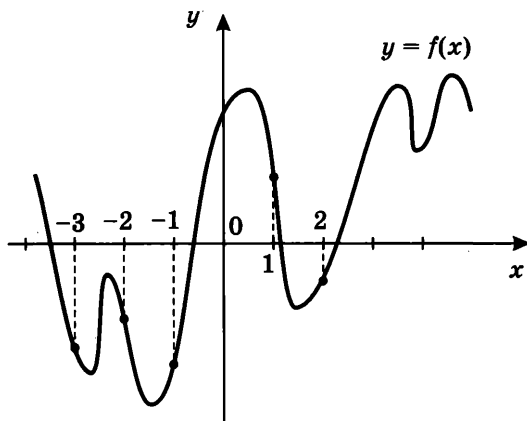
**Решение.**

Известно, что значение производной в точке касания  $x_0$  равно угловому коэффициенту к касательной, который, в свою очередь, равен тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси  $Ox$ .

Построим, например,  $\triangle ABC$ ,

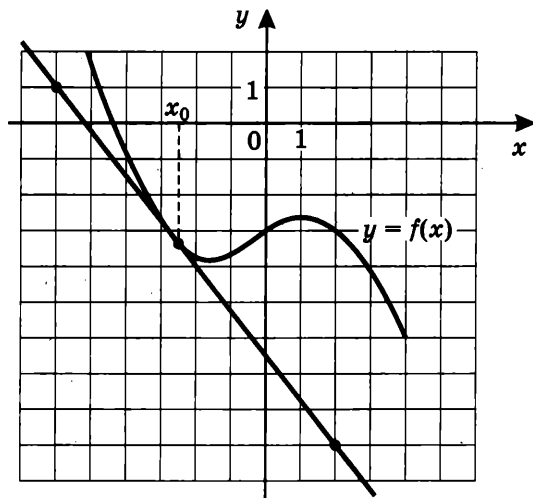
где  $\angle BAC = \alpha$ ,  $BC = 2$ ,  $AC = 5$ , тогда  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5} = 0,4$ .

**Ответ:** 0,4.

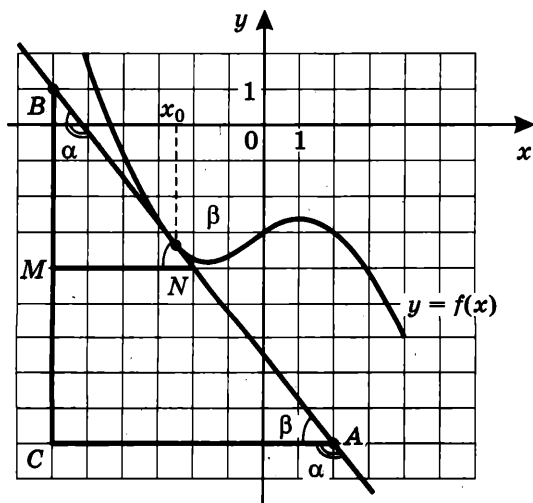


**Замечание.** Таких треугольников можно построить несколько, например,  $\triangle BNM$ ,  $\triangle MPK$  и т. д. Во всех случаях угол  $\alpha$  — величина постоянная.

**Пример 15.** На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



*Решение.*



Пусть  $\alpha$  — угол между касательной и положительным направлением оси  $Ox$ . Заметим, что  $\alpha > 90^\circ$ , тогда  $\operatorname{tg} \alpha < 0$ .

Построим  $\triangle BMN$  или  $\triangle ACB$ . Необходимо, чтобы катеты были целыми числами.

Пусть  $\beta$  — угол, смежный  $\alpha$ .

Из  $\triangle BMN$  (или  $\triangle ACB$ )  $\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{BM}{MN} = -\frac{5}{4} = -1,25$ .

Значит,  $f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha = -1,25$ .

Ответ:  $-1,25$ .

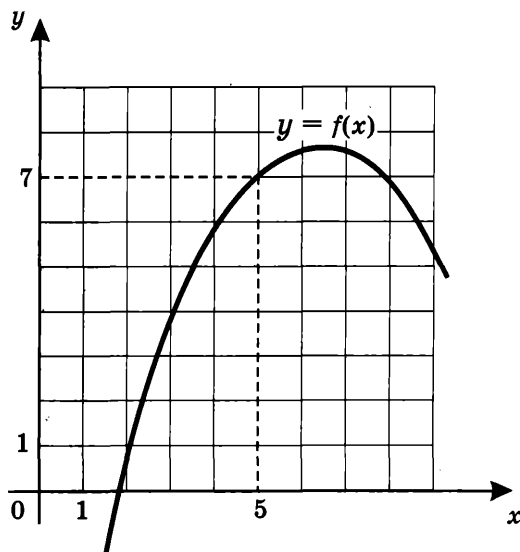
**Пример 16.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 5. Найдите  $f'(5)$ .

*Решение.*

Так как по условию прямая проходит через начало координат, то уравнение прямой имеет вид  $y = kx$ . Эта прямая проходит через точку  $(5; 7)$ , тогда  $k = \frac{y}{x} = \frac{7}{5} = 1,4$ .

Но  $k = f'(x_0) = f'(8) = 1,4$ .

Ответ:  $1,4$ .

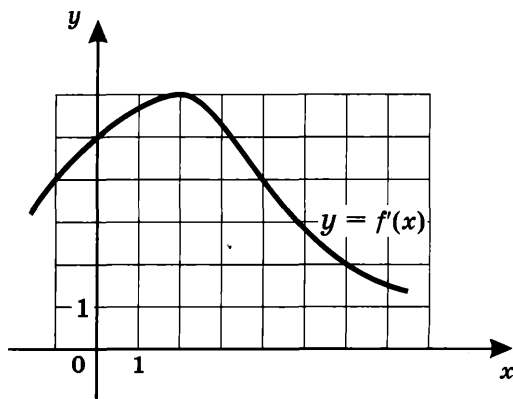


**Пример 17.** На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ . Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 2x - 3$  или совпадает с ней.

*Решение.*

$f'(x_0) = k$ , т. е. значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту. Так как касательная параллельна прямой  $y = 2x - 3$  или совпадает с ней, то  $k = 2$  и  $f'(x_0) = 2$ . Как видно из рисунка, при  $f'(x_0) = 2$ ,  $x_0 = 6$ .

Ответ:  $6$ .

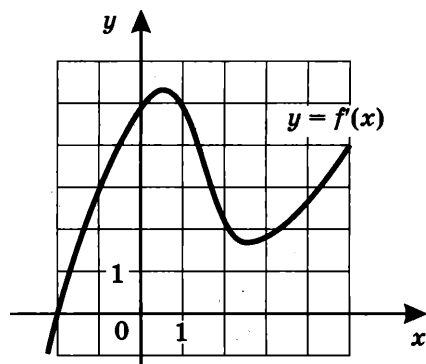


**Пример 18.** На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ . Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику  $y = f(x)$  параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.

*Решение.*

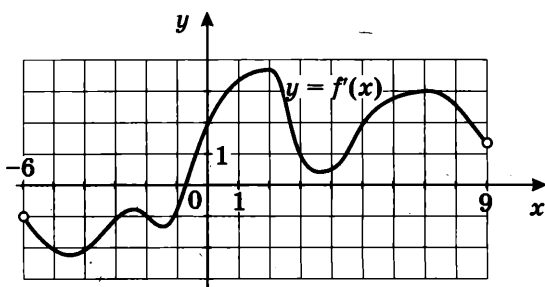
$f'(x_0) = k$ . Поскольку касательная параллельна оси  $Ox$  или совпадает с ней, то она имеет вид  $y = b$  и  $k = 0$ . Но тогда  $f'(x_0) = 0$ . А производная равна нулю в точке, в которой ее график пересекает ось  $Ox$ . Из рисунка видно, что  $x = -2$ .

*Ответ:*  $-2$ .



## 8.2. Применение производной к исследованию функций

**Пример 19.** На рисунке изображен график производной функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-6; 9)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = x - 2$  или совпадает с ней.

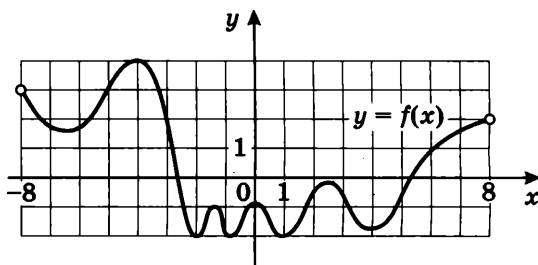


*Решение.*

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, т. е.  $f'(x_0) = k$ . Согласно условию касательная параллельна прямой  $y = x - 2$  или совпадает с ней. Значит, их угловые коэффициенты равны 1. Итак,  $f'(x_0) = 1$ . Геометрически это соответствует количеству точек пересечения графика производной с прямой  $y = 1$ . Таких точек всего 3.

*Ответ:* 3.

**Пример 20.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-8; 8)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой  $y = -13$ .

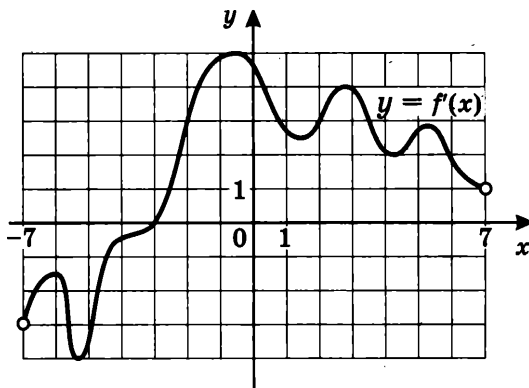


*Решение.*

Согласно условию касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = -13$  или совпадает с ней. Значит, их угловые коэффициенты равны 0. Но угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, т. е.  $k = f'(x_0)$ . Производная  $f'(x) = 0$  в точках максимума и минимума функции. На интервале  $(-8; 8)$  функция имеет 5 минимумов и 4 максимума, т. е. всего 9 экстремумов. Следовательно, касательная к графику функции параллельна прямой  $y = -13$  или совпадает с ней в 9 точках.

*Ответ: 9.*

**Пример 21.** На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ , определенной на интервале  $(-7; 7)$ . В какой точке отрезка  $[-3; 3]$  функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение?

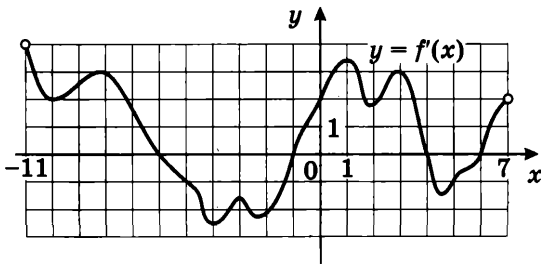


*Решение.*

На отрезке  $[-3; 3]$  производная функции положительна, значит, функция на этом отрезке возрастает и свое наибольшее значение принимает на конце отрезка, т. е. в точке  $x = 3$ .

*Ответ: 3.*

**Пример 22.** На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ , определенной на интервале  $(-11; 7)$ . Найдите количество точек минимума функции  $f(x)$  на отрезке  $[-7; 5]$ .



*Решение.*

В точке минимума производная меняет знак с « $-$ » на « $+$ ». На отрезке  $[-7; 5]$  функция имеет одну точку минимума  $x = -1$ .

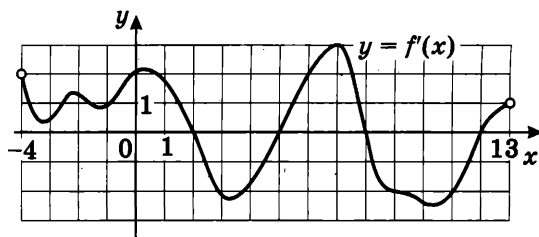
*Ответ: 1.*

**Пример 23.** На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 13)$ . Найдите количество точек максимума функции  $f(x)$  на отрезке  $[-2; 12]$ .

*Решение.*

В точке максимума производная меняет знак с «+» на «-». На отрезке  $[-2; 12]$  таких точек две:  $x = 2$  и  $x = 8$ .

*Ответ: 2.*



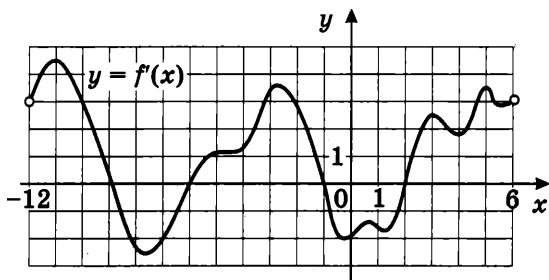
**Пример 24.** На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ , определенной на интервале  $(-12; 6)$ . Найдите количество точек экстремума функции  $f(x)$  на отрезке  $[-10; 4]$ .

*Решение.*

Экстремумы функции — это ее максимумы и минимумы.

Производная меняет знак в точках  $x = -9; -6; -1; 2$ . На отрезке  $[-10; 4]$  таких точек всего 4.

*Ответ: 4.*

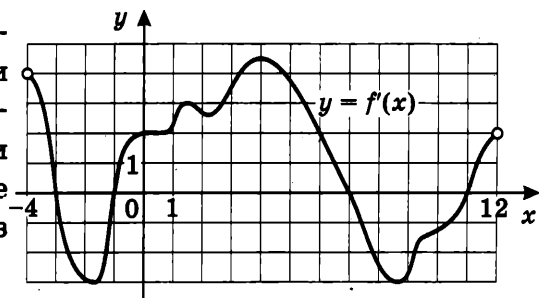


**Пример 25.** На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 12)$ . Найдите промежутки убывания функции  $f(x)$ . В ответе укажите длину наибольшего из них.

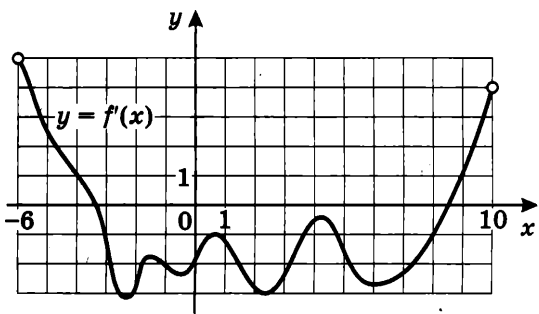
*Решение.*

Промежутки убывания функции  $f(x)$  соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, т. е. интервалам  $(-3; -1)$  длиной 2 и  $(7; 11)$  длиной 4. Длина наибольшего из них равна 4.

*Ответ: 4.*



**Пример 26.** На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-6; 10)$ . Найдите промежутки убывания функции  $f(x)$ . В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



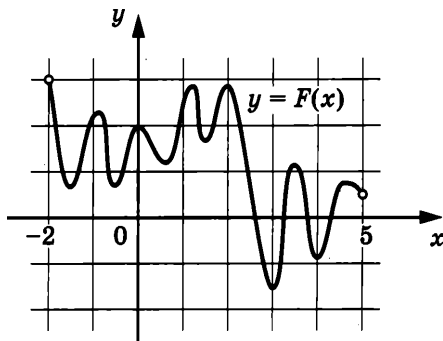
*Решение.*

Промежутки убывания функции  $f(x)$  соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, т. е. интервалу  $(-3, 5; 8, 5)$ . Указанный интервал содержит целые точки:  $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$ . Их сумма равна  $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$ .

*Ответ:* 30.

### 8.3. Первообразная

**Пример 27.** На рисунке изображен график функции  $y = F(x)$  — одной из первообразных функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-2; 5)$ . Найдите количество решений уравнения  $f(x) = 0$  на отрезке  $[-1; 3]$ .

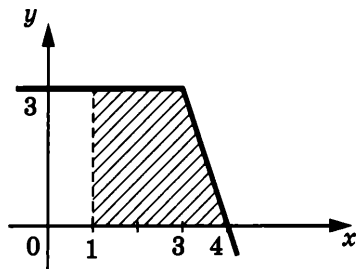


*Решение.*

По определению первообразной на интервале  $(-2; 5)$  справедливо равенство  $f(x) = F'(x)$ . Значит, решениями уравнения  $f(x) = 0$  являются точки экстремумов. Из них на отрезке  $[-1; 3]$  лежат 8 точек, т. е. уравнение  $f(x) = 0$  имеет 8 решений.

*Ответ:* 8.

**Пример 28.** На рисунке изображен график некоторой функции  $y = f(x)$ . Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл  $\int_1^4 f(x) dx$ .



*Решение.*

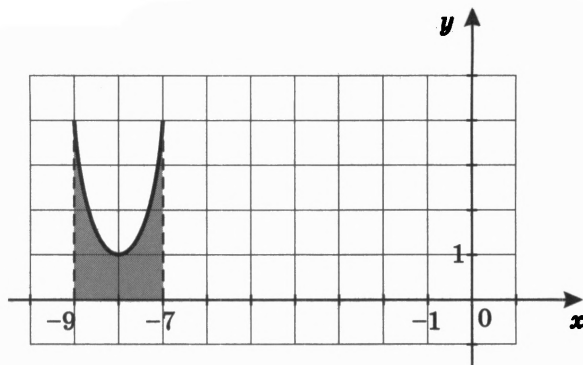
Определенный интеграл от некоторой функции  $f(x)$  представляет собой площадь трапеции с основаниями 3 и 2, высота которой равна 3.

$$\text{Следовательно, } \int_1^4 f(x) dx = S_{\text{трап.}} = \frac{3+2}{2} \cdot 3 = \frac{15}{2} = 7,5.$$

*Ответ:* 7,5.

**Пример 29.** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Функция  $F(x) = x^3 + 24x^2 + 193x - \frac{5}{4}$  — одна из первообразных функции  $y = f(x)$ . Найдите площадь закрашенной фигуры.





**Решение.**

### І способ

Вычисления можно значительно упростить, если заметить, что в данной функции можно выделить полный куб:

$$F(x) = x^3 + 24x^2 + 193x - \frac{5}{4} = (x^3 + 24x^2 + 192x + 512) + x - 512 - \frac{5}{4} = (x + 8)^3 + x - 512 - \frac{5}{4}.$$

$$\text{Тогда } F(-7) - F(-9) = (-7 + 8)^3 + (-7) - ((-9 + 8)^3 + (-9)) = 1 - 7 - (-1 - 9) = -6 + 10 = 4.$$

**Ответ:** 4.

### ІІ способ

$$f(x) = F'(x) = \left( x^3 + 24x^2 + 193x - \frac{5}{4} \right)' = 3x^2 + 48x + 193 = 3(x^2 + 16x + 64) + 1 = 3(x + 8)^2 + 1.$$

$$\text{Тогда } S = \int_{-9}^{-7} (3(x+8)^2 + 1) dx = ((x+8)^3 + x) \Big|_{-9}^{-7} = (-7+8)^3 - 7 - ((-9+8)^3 - 9) = 1 - 7 - (-1 - 9) = -6 + 10 = 4.$$

**Ответ:** 4.

### ІІІ способ

ІІ способ можно еще упростить, если заметить, что график функции  $f(x) = 3(x + 8)^2 + 1$  получен сдвигом графика функции  $y = 3x^2 + 1$  на 8 единиц влево вдоль оси  $Ox$ . Следовательно, искомая площадь фигуры будет равна площади фигуры, ограниченной графиком функции  $y = 3x^2 + 1$  и отрезком  $[-1; 1]$  оси  $Ox$ . Учитывая симметрию графика относительно оси  $Oy$ , имеем

$$S = \int_{-1}^1 (3x^2 + 1) dx = 2 \int_0^1 (3x^2 + 1) dx = 2 \left( 3 \cdot \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = 2(x^3 + x) \Big|_0^1 = 2(1^3 + 1) = 2 \cdot 2 = 4.$$

**Ответ:** 4.

#### IV способ

Этот способ является самым длинным и технически сложным.

$$\begin{aligned} S &= F(-7) - F(-9) = \left( (-7)^3 + 24 \cdot (-7)^2 + 193 \cdot (-7) - \frac{5}{4} \right) - \\ &- \left( (-9)^3 + 24 \cdot (-9)^2 + 193 \cdot (-9) - \frac{5}{4} \right) = (-7)^3 - (-9)^3 - 24((-7)^2 - (-9)^2) + \\ &+ 193 \cdot ((-7) - (-9)) = (9^3 - 7^3) - 24 \cdot (9^2 - 7^2) + 193 \cdot (9 - 7). \end{aligned}$$

Далее — применив формулы  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$  и  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , получим

$$\begin{aligned} S &= (9 - 7)(9^2 + 9 \cdot 7 + 7^2) - 24 \cdot (9 - 7)(9 + 7) + 193 \cdot 2 = 2 \cdot (81 + 63 + \\ &+ 49) - 24 \cdot 2 \cdot 16 + 386 = 386 - 768 + 386 = 772 - 768 = 4. \end{aligned}$$

*Ответ:* 4.

*Замечание 1.* Подавляющая часть абитуриентов и выпускников решают этим способом или находят  $F(-7)$  и  $F(-9)$ , а затем  $F(-7) - F(-9)$ , что еще более усложняет решение.

*Замечание 2.* Наконец, самый простой способ (если ученик не может выполнить задание) можно применить, учитывая масштаб на рисунке и тот факт, что ответом является целое число. На глаз можно определить, что в данном случае  $S = 4$ .

## § 9. Задание 9. Задачи с прикладным содержанием

Задачи, представленные в 8-м задании, носят прикладной характер и связаны с различными областями науки. Формулы для решения задач приводятся в самих заданиях, остается лишь подставить значения и найти результат.

Задания этого раздела подразделяются на несколько видов:

- 1) линейные уравнения и неравенства;
- 2) квадратные и степенные уравнения и неравенства;
- 3) рациональные и иррациональные уравнения и неравенства;
- 4) показательные уравнения и неравенства;
- 5) логарифмические уравнения и неравенства;
- 6) тригонометрические уравнения и неравенства.

**Пример 1.** При температуре  $0^\circ\text{C}$  рельс имеет длину  $l_0 = 10$  м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону  $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$ , где  $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$  — коэффициент теплового расширения,  $t^\circ$  — тем-

пература ( $^{\circ}\text{C}$ ). При какой температуре рельс удлинится на 4 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

*Решение.*

Согласно условию задачи имеем неравенство  $l(t^{\circ}) - l_0 \geq 4$  мм при  $l_0 = 10$  м и  $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C})^{-1}$ .

$$l(t^{\circ}) - l_0 \geq 4 \cdot 10^{-3}, \text{ или } l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ}) - l_0 \geq 4 \cdot 10^{-3},$$

$$l_0 \cdot \alpha \cdot t^{\circ} \geq 4 \cdot 10^{-3}, 10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-5} t^{\circ} \geq 4 \cdot 10^{-3},$$

$$t^{\circ} \geq \frac{4 \cdot 10^{-3}}{1,6 \cdot 10^{-4}}, t^{\circ} \geq \frac{4 \cdot 10}{1,6} = 25 ^{\circ}\text{C}.$$

*Ответ:* 25.

**Пример 2.** Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью  $v_0 = 15$  м/с, начал торможение с постоянным ускорением  $a = 5$  м/с<sup>2</sup>. За  $t$  секунд после начала торможения он прошел путь

$$S = v_0 t - \frac{at^2}{2} \text{ (м)}. \text{ Определите время, прошедшее от момента начала тор-}$$

можения, если известно, что за это время автомобиль проехал 20 м. Ответ выразите в секундах.

*Решение.*

Найдем, за какое время  $t$ , прошедшее от момента начала торможения, автомобиль проедет 20 м:

$$15t - \frac{5}{2}t^2 = 20, \text{ или } 3t - \frac{1}{2}t^2 = 4, \text{ или } t^2 - 6t + 8 = 0, \text{ откуда } t_1 = 2,$$

$$t_2 = 4.$$

Значит, время, прошедшее от момента начала торможения, равно 2 с, т. е. через 2 с автомобиль проедет 20 м.

*Ответ:* 2.

**Пример 3.** По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна  $J = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$ , где  $\mathcal{E}$  — ЭДС источника (в вольтах),  $r = 1$  Ом — его внутреннее сопротивление,  $R$  — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 25 % от силы тока короткого замыкания  $J_{\text{к.з.}} = \frac{\mathcal{E}}{r}$ ? Ответ выразите в омах.

*Решение.*

Согласно условию задачи имеем неравенство  $J \leq 0,25 J_{\text{к.з.}}$  при  $r = 1$ ,

$$\text{или } \frac{\mathcal{E}}{R+1} \leq 0,25 \cdot \frac{\mathcal{E}}{1}, \text{ или } \frac{1}{R+1} \leq \frac{1}{4}, R+1 \geq 4, R \geq 3.$$

Значит, наименьшее сопротивление цепи составит 3 Ома.

Ответ: 3.

**Пример 4.** Камень брошен вниз с высоты 15 м. Высота  $h$ , на которой находится камень во время падения, зависит от времени  $t$ :  $h(t) = 15 - 4t - 4t^2$ . Сколько секунд камень будет падать?

*Решение.*

Камень начнет падать, если высота станет равной нулю,

т. е.  $h(t) = 0$ , или  $15 - 4t - 4t^2 = 0$ ,

$$4t^2 + 4t - 15 = 0,$$

$$D/4 = 4 + 4 \cdot 15 = 64 = 8^2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{4}, \quad t_1 = 1,5, \quad t_2 = -2,5.$$

Поскольку  $t$  — время,  $t > 0$ . Значит,  $t = 1,5$ , т. е. камень будет падать 1,5 с.

Ответ: 1,5.

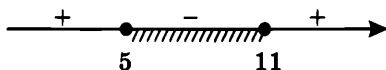
**Пример 5.** Для одного из предприятий монополистов зависимость объема спроса на продукцию  $q$  (единиц в месяц) от ее цены  $p$  (тыс. руб.) задается формулой  $q = 160 - 10p$ . Определите максимальный уровень цены  $p$  (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц  $r = q \cdot p$  составит не менее 550 тыс. руб.

*Решение.*

По условию  $q = 160 - 10p$ ,  $r = q \cdot p$  и  $r \geq 550$  (тыс. руб.), где  $q$  — продукция (единиц в месяц),  $p$  — цена продукции (в тыс. руб.),  $r$  — значение выручки предприятия. Имеем  $q \cdot p \geq 550$ .

Так как  $q = 160 - 10p$ , то получим неравенство  $(160 - 10p) \cdot p \geq 550$ , или  $p^2 - 16p + 55 \leq 0$ .

Решая полученное неравенство методом интервалов, имеем  $p_1 = 5$ ,  $p_2 = 11$ .



Следовательно,  $5 \leq p \leq 11$  и  $p = 11$  — максимальный уровень цены.

Ответ: 11.

**Пример 6.** Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой  $h(t) = -t^2 + 8t$  ( $h$  — высота в метрах,  $t$  — время в секундах, прошедшее от момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте выше 15 м.

*Решение.*

Если камень находился на высоте выше 15 м, то  $h(t) > 15$ .

Получим неравенство  $-t^2 + 8t > 15$ , или  $t^2 - 8t + 15 < 0$ .

Решая полученное неравенство методом интервалов, находим  $3 < t < 5$ .

Следовательно, камень будет находиться на высоте выше 15 м с 3-й по 5-ю секунду, т. е. 2 с.

*Ответ:* 2.

**Пример 7.** Материальная точка движется по координатной прямой по закону  $S(t) = t^3 - 7t^2 + 3t + 1$ . Найдите момент времени, при котором ускорение точки будет равно 4 м/с<sup>2</sup>.

*Решение.*

Известно, что скорость движения есть производная пути  $S$  по времени  $t$ , т. е.  $v(t) = S'(t) = (t^3 - 7t^2 + 3t + 1)' = 3t^2 - 14t + 3$ . Аналогично ускорение  $a(t) = v'(t) = (3t^2 - 14t + 3)' = 6t - 14$ . По условию задачи  $a(t) = 4$ , тогда  $6t - 14 = 4$ ,  $6t = 18$ ,  $t = 3$ .

*Ответ:* 3.

**Пример 8.** После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Ученик измеряет время падения  $t$  небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле  $h = 5t^2$ , где  $h$  — расстояние в метрах,  $t$  — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,8 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

*Решение.*

Пусть  $h_1$  — расстояние до воды до дождя,  $h_2$  — расстояние до воды после дождя. Поскольку после дождя уровень воды в колодце повысится, расстояние до воды уменьшится, время падения уменьшится и станет равным  $t = t_1 - t_2 = 0,8 - 0,2 = 0,6$  с. Тогда уровень воды поднимется на  $h_1 - h_2 = 5(0,8^2 - 0,6^2) = 5 \cdot (0,8 - 0,6) \cdot (0,8 + 0,6) = 5 \cdot 0,2 \cdot 1,4 = 1,4$  м.

*Ответ:* 1,4.

**Пример 9.** В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону  $H(t) = at^2 + bt + H_0$ , где  $H_0 = 9$  м — начальный уровень воды,  $a = \frac{1}{100}$  м/мин<sup>2</sup> и  $b = -\frac{3}{5}$  м/мин — постоянные,  $t$  — время в мину-

тах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

*Решение.*

По условию задачи  $H(t) = 0,01t^2 - 0,6t + 9$ . Вода будет вытекать из бака, пока ее начальный уровень не понизится до нуля. Решим уравнение  $H(t) = 0$ .

$0,01t^2 - 0,6t + 9 = 0$ , или  $t^2 - 60t + 900 = 0$ ,  $(t - 30)^2 = 0$ ,  $t - 30 = 0$ ,  $t = 30$ , т. е. вся вода вытечет из бака через 30 мин.

*Ответ:* 30.

**Пример 10.** Мотоциклист выехал из города со скоростью  $v_0 = 51$  км/ч, выезжает из него и сразу начинает разгоняться с постоянным ускорением  $a = 12$  км/ч<sup>2</sup>. Расстояние от мотоциклиста до города определяется по формуле  $S = v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$ . Определите наибольшее время, в те-

чение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не более чем 27 км от города. Ответ выразите в минутах.

*Решение.*

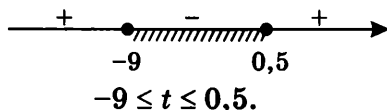
Из условия задачи следует, что  $S \leq 27$ . При этом мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи.

При заданных значениях  $v_0 = 51$  км/ч и  $a = 12$  км/ч<sup>2</sup> имеем

$$51t + \frac{12t^2}{2} \leq 27, \text{ или } 6t^2 + 51t - 27 \leq 0, \text{ или}$$

$$2t^2 + 17t - 9 \leq 0, D = 17^2 + 72 = 361 = 19^2 > 0.$$

$$t_{1,2} = \frac{-17 \pm 19}{4}, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -9.$$



Поскольку  $t \geq 0$ , то  $t \leq 0,5$ . Значит, наибольшее время составит  $0,5$  ч = 30 мин.

*Ответ:* 30.

**Пример 11.** Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой  $f_0 = 390$  Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка  $f(v)$  больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону  $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$ , где  $c$  — ско-

рость звука (м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с ка-

кой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а  $c = 320$  м/с. Ответ выразите в м/с.

*Решение.*

Согласно условию имеем неравенство  $f(v) - f_0 \geq 10$  при  $f_0 = 390$  Гц.

$$f(v) - f_0 \geq 10, \text{ или } \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} - f_0 \geq 10, \text{ или } \frac{390}{1 - \frac{v}{320}} - 390 \geq 10.$$

Разделим обе части неравенства на 10:

$$\frac{39}{1 - \frac{v}{320}} - 39 \geq 1, \quad 1 - \frac{v}{320} \leq \frac{39}{40}, \text{ или } \frac{v}{320} \geq \frac{1}{40}, \quad \frac{v}{8} \geq 1, \text{ т. е. } v \geq 8 \text{ м/с.}$$

*Ответ:* 8.

**Пример 12.** Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется по формуле  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$ , где  $T_1$  — температура нагревателя,  $T_2$  — температура холодильника (в градусах Кельвина).

При какой минимальной температуре нагревателя  $T_1$  КПД этого двигателя будет не меньше 20 %, если температура холодильника  $T_2 = 320$  К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

*Решение.*

Имеем неравенство  $\eta \geq 20\%$  при  $T_2 = 320$  К (температура холодильника).

$$\frac{T_1 - 320}{T_1} \cdot 100 \geq 20, \text{ или } \frac{T_1 - 320}{T_1} \geq \frac{1}{5},$$

$$5 \cdot (T_1 - 320) \geq T_1, \quad 4T_1 \geq 320 \cdot 5, \text{ откуда } T_1 \geq 400 \text{ К.}$$

Значит, минимальная температура нагревателя должна быть 400 К.

*Ответ:* 400.

**Пример 13.** Мяч бросили под острым углом  $\alpha$  к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле  $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ . При каком наименьшем значении угла  $\alpha$

(в градусах) время полета будет не меньше 2 с, если мяч бросают с начальной скоростью  $v_0 = 20$  м/с? Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

*Решение.*

Согласно условию задачи имеем неравенство  $t(\alpha) \geq 2$ , если  $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$  при  $v_0 = 20$  м/с и ускорении свободного падения  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

$$\text{Тогда } \frac{2 \cdot 20 \cdot \sin \alpha}{10} \geq 2, \text{ или } 4 \sin \alpha \geq 2, \text{ т. е. } \sin \alpha \geq \frac{1}{2}, \quad 30^\circ \leq \alpha < 90^\circ.$$

Значит, наименьшее значение угла равно  $30^\circ$ .

Ответ: 30.

**Пример 14.** При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон  $pV^k = \text{const}$ , где  $p$  — давление в газе в паскалях,  $V$  — объем газа в  $\text{м}^3$ . В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом ( $k = \frac{5}{2}$ ) из начального состояния, в котором  $\text{const} = 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$ , газ начинают сжимать. Какой наибольший объем  $V$  может занимать газ при давлениях  $p \geq 3,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ? Ответ выразите в  $\text{м}^3$ .

*Решение.*

При  $k = \frac{5}{2}$  и  $\text{const} = 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$  имеем неравенство

$$3,2 \cdot 10^6 \cdot V^{\frac{5}{2}} \leq 10^5, \text{ или } V^{\frac{5}{2}} \leq \frac{1}{32}, \quad V \leq \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5 \cdot 2}{5}} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

**Пример 15.** При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон  $pV^k = 2,56 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot \text{м}^4$ , где  $p$  — давление газа в паскалях,  $V$  — объем газа ( $\text{м}^3$ ),  $k = 4/3$ .

Найдите, какой объем будет занимать газ при давлении  $p = 6,25 \cdot 10^6 \text{ Па}$ .

*Решение.*

Так как  $pV^k = \text{const}$ , а  $p \geq 6,25 \cdot 10^6$ , то получим уравнение

$$6,25 \cdot 10^6 V^{4/3} = 2,56 \cdot 10^6, \text{ или } V^{4/3} = \frac{256}{625} = \frac{16^2}{25^2} = \left(\frac{16}{25}\right)^2 = \left(\frac{4^2}{5^2}\right)^2 = \frac{4^4}{5^4} = \left(\frac{4}{5}\right)^4, \text{ то } V = \left(\frac{4}{5}\right)^{4 \cdot \frac{3}{4}} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0,8^3 = 0,512 (\text{м}^3).$$

Ответ: 0,512.

**Пример 16.** Трактор тащит сани с силой  $F = 100 \text{ кН}$ , направленной под острым углом  $\alpha$  к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной  $S = 50 \text{ м}$  вычисляется по формуле  $A = F \cdot S \cos \alpha$ . При каком максимальном угле  $\alpha$  (в градусах) совершенная работа будет не менее 2500 кДж?

*Решение.*

Согласно условию задачи  $A \geq 2500$  на промежутке  $(0^\circ; 90^\circ)$  при значениях  $F = 100 \text{ кН}$  и длины пути  $S = 50 \text{ м}$ :

$$100 \cdot 50 \cos \alpha \geq 2500, \text{ или } \cos \alpha \geq \frac{1}{2}, \text{ т. е. } 0^\circ < \alpha \leq 60^\circ.$$



Значит, максимальное значение угла  $\alpha = 60^\circ$ .

Ответ: 60.

**Пример 17.** Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью  $v = 2$  м/с под острым углом  $\alpha$  к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью  $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$  (м/с), где  $m = 90$  кг — масса скейтбордиста со скейтом,  $M = 450$  кг — масса платформы. Под каким максимальным углом  $\alpha$  (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до  $\frac{1}{7}$  м/с?

*Решение.*

Имеем неравенство  $u \geq \frac{1}{7}$  на интервале  $(0^\circ; 90^\circ)$  при значениях  $m = 90$  кг и  $M = 540$  кг.

Следовательно,  $\frac{m}{m+M} \cdot v \cos \alpha \geq \frac{1}{7}$ , или

$$\frac{90}{90+540} \cdot 2 \cos \alpha \geq \frac{1}{7}, \quad \frac{90 \cdot 2}{680} \cos \alpha \geq \frac{1}{7}, \quad \cos \alpha \geq \frac{1}{2}, \quad \text{т. е. } 0^\circ < \alpha \leq 60^\circ.$$

Значит, максимальный угол  $\alpha = 60^\circ$ .

Ответ: 60.

**Пример 18.** Емкость высоковольтного конденсатора в телевизоре  $C = 6 \cdot 10^{-6}$  Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением  $R = 5 \cdot 10^6$  Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе  $U_0 = 9$  кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения  $U$  (кВ) за время, определяемое выражением  $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$  (с), где  $\alpha = 0,8$  — постоянная.

Определите (в киловольтах) наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 48 с. Ответ дайте в киловольтах.

*Решение.*

Задача сводится к решению уравнения  $t = 48$  при заданных значениях начального напряжения на конденсаторе  $U_0 = 9$  кВ, сопротивления резистора  $R = 5 \cdot 10^6$  Ом и емкости конденсатора  $C = 6 \cdot 10^{-6}$  Ф.

$$\text{Имеем уравнение } 0,8 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot \log_2 \frac{9}{U} = 48, \quad 4,8 \cdot 5 \log_2 \frac{9}{U} = 48,$$

$$5 \log_2 \frac{9}{U} = 10, \quad \log_2 \frac{9}{U} = 2, \quad \text{откуда } \frac{9}{U} = 2^2 = 4, \quad U = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ (кВ)}.$$

Ответ: 2,25.

**Пример 19.** Для обогрева помещения, температура в котором  $T_{\Pi} = 18^{\circ}\text{C}$ , через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой  $T_{\text{В}} = 72^{\circ}\text{C}$ . Расход проходящей через трубу воды  $m = 1,2 \text{ кг/с}$ . Проходя по трубе расстояние  $x$  (м), вода охлаждается до температуры  $T$  ( $^{\circ}\text{C}$ ), причем  $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{В}} - T_{\Pi}}{T - T_{\Pi}}$  (м), где  $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}}$  — теплоемкость

воды,  $\gamma = 42 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C}}$  — коэффициент теплообмена,  $\alpha = 0,4$  — постоянная.

До какой температуры охладится вода, если длина трубы 96 м?

*Решение.*

Задача сводится к решению уравнения  $\alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{В}} - T_{\Pi}}{T - T_{\Pi}} = 96$  при заданных значениях  $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ ,  $\gamma = 42 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^{\circ}\text{C}}$ ,  $\alpha = 0,4$ ,  $T_{\Pi} = 18^{\circ}\text{C}$ ,  $T_{\text{В}} = 72^{\circ}\text{C}$  и  $m = 1,2 \text{ кг/с}$ :

$$0,4 \cdot \frac{4200 \cdot 1,2}{42} \log_2 \frac{72 - 18}{T - 18} = 96, \text{ или } 4 \cdot 12 \cdot \log_2 \frac{54}{T - 18} = 96, \text{ или } \log_2 \frac{54}{T - 18} = 2, \text{ или } \frac{54}{T - 18} = 4, T - 18 = \frac{54}{4} = 13,5, \text{ откуда } T = 31,5 (^{\circ}\text{C}).$$

*Ответ:* 31,5.

## § 10. Задание 10. Текстовые задачи

Пожалуй, здесь представлены самые сложные задачи части В, причем условия задач весьма разнообразны. Научиться решать такие задачи можно только на практике, причем под руководством опытного учителя.

Здесь представлены задачи на:

- 1) числовые зависимости;
- 2) движение;
- 3) совместную работу;
- 4) сплавы и смеси;
- 5) проценты;
- 6) прогрессию и др.

## 10.1. Задачи на числовые зависимости

**Пример 1.** Найдите двузначное число, если известно, что цифра его единиц на 2 больше цифры десятков и что произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

*Решение.*

Всякое двузначное число можно записать в виде  $\overline{xy}$  или в развернутом виде  $10x + y$ , где  $x$  — цифра десятков,  $y$  — цифра единиц.

Кроме того,  $0 < x \leq 9$ ,  $0 \leq y \leq 9$ .

Если цифра единиц на 2 больше цифры десятков, то получим уравнение  $y - x = 2$ .

Так как по условию задачи произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144, то получим  $(10x + y)(x + y) = 144$ .

Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = 2, \\ (10x + y)(x + y) = 144. \end{cases}$$

Решая эту систему способом подстановки, находим 2 решения:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 4; \end{cases} \begin{cases} x_2 = -3\frac{2}{11}, \\ y_2 = -1\frac{2}{11}. \end{cases}$$

Вторая пара не подходит, так как  $x$  и  $y$  — целые положительные числа. Значит, искомое число 24.

*Ответ:* 24.

## 10.2. Задачи на движение

**Пример 2.** Велосипедист и пешеход отправились из пунктов  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми 12 км, и встретились через 20 мин. Пешеход прибыл в пункт  $A$  на 1 ч 36 мин позже, чем велосипедист прибыл в  $B$ . Найдите скорость пешехода.

*Решение.*

Обозначим через  $x$  (км/ч) скорость пешехода. Тогда 12 км из пункта  $B$  в пункт  $A$  пешеход пройдет за  $12/x$  (ч), а велосипедист это же расстояние из  $A$  в  $B$  преодолееет на 1 ч 36 мин = 1,6 ч быстрее, т. е. за  $\left(\frac{12}{x} - 1,6\right)$  ч

со скоростью 12:  $\left(\frac{12}{x} - 1,6\right) = \frac{12x}{12 - 1,6x} = \frac{3x}{3 - 0,4x}$  км/ч.

Велосипедист и пешеход, двигаясь навстречу друг другу, расстояние 12 км прошли за 20 мин  $= \frac{1}{3}$  ч.

Составим уравнение  $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{3-0,4x} = 12$ , или  $0,4x^2 - 20,4x + 108 = 0$ ,  $x^2 - 51x + 270 = 0$ , откуда  $x_1 = 6$ ,  $x_2 = 45$ .

Значение  $x = 45$  не подходит, так как  $x$  — скорость пешехода.

Ответ: 6.

**Пример 3.** Найдите длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

Решение.

Пусть  $x$  — длина поезда, тогда скорость поезда относительно неподвижного пассажира равна  $\frac{x}{7}$  м/с, а скорость поезда относительно неподвижной платформы равна  $\frac{x+378}{25}$  м/с.

Согласно условию задачи эти скорости равны, т. е. имеем уравнение  $\frac{x}{7} = \frac{x+378}{25}$ , или  $25x - 7x = 378 \cdot 7$ ,  $18x = 378 \cdot 7$ , откуда  $x = 147$ .

Следовательно, длина поезда равна 147 м.

Ответ: 147.

**Пример 4.** Моторная лодка прошла 5 км по течению и 6 км против течения реки, затратив на весь путь 1 ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите скорость лодки по течению.

Решение.

Пусть собственная скорость движения лодки  $x$  (км/ч), где  $x > 0$ .

Составим таблицу.

Величины	Процессы движения		Общие показатели
	по течению	против течения	
$S$ , км	5	6	
$v$ , км/ч	$x + 3$	$x - 3$	
$t$ , ч	$\frac{5}{x+3}$	$\frac{6}{x-3}$	1

$$S = v \cdot t; v_{\text{по теч.}} = v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч. р.}};$$

$$v_{\text{пр. теч.}} = v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч. р.}}$$

Так как на весь путь моторная лодка затратила  $\left(\frac{5}{x+3} + \frac{6}{x-3}\right)$  ч, а по условию на весь путь затрачен 1 ч, то получим уравнение

$$\frac{5}{x+3} + \frac{6}{x-3} = 1.$$

$$\begin{cases} 5(x-3) + 6(x+3) = x^2 - 9, \\ x \neq \pm 3, \end{cases}$$

$5x - 15 + 6x + 18 = x^2 - 9$ , или  $x^2 - 11x - 12 = 0$ , откуда  $x_1 = 12$ ,  $x_2 = -1$  (не подходит, так как  $x > 0$ ).

Если  $x = 12$ , то  $x + 3 = 15$ . Итак, скорость лодки по течению реки 15 км/ч.

*Ответ:* 15.

**Пример 5.** Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 ч 20 мин. Сколько времени понадобится каждому из них, чтобы пройти все расстояние, если первый пешеход пришел в то место, из которого вышел второй, на 5 ч позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый?

*Решение.*

Так как в задаче нет никаких данных о пройденном расстоянии, то удобно все расстояние принять за 1.

Тогда скорость  $v_1 = \frac{1}{x}$ , а  $v_2 = \frac{1}{y}$ , где  $x$  (ч) — время в пути первого пешехода, а  $y$  (ч) — время второго пешехода.

Согласно условию задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 3\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + 3\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y} = 1, \\ x - y = 5, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{10}, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Решая полученную систему способом подстановки, получим  $x = 10$ ,  $y = 5$ .

*Ответ:* 10; 5.

### 10.3. Задачи на совместную работу

**Пример 6.** Две бригады должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы I бригада получила другое задание, поэтому II бригада закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. На сколько дней II бригада убрала бы весь урожай быстрее I, если бы каждая бригада работала отдельно?

*Решение.*

Обозначим весь урожай через 1. Пусть I бригада может убрать весь урожай за  $x$  дней, а II — за  $y$  дней.

Тогда производительность труда I бригады будет  $\frac{1}{x}$ , а II —  $\frac{1}{y}$  — это часть урожая, которую убирает каждая бригада ежедневно.

Согласно условию задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ \frac{8}{12} + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 7 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{28}, \\ y = 21; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 28, \\ y = 21. \end{cases}$$

Итак, I бригада уберет весь урожай за 28 дней, а II — за 21 день, т. е. II бригада весь урожай уберет на 7 дней быстрее I.

*Ответ:* 7.

#### 10.4. Задачи на сплавы и смеси

**Пример 7.** Смешали 30 %-й раствор соляной кислоты с 10 %-м и получили 600 г 15 %-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

*Решение.*

Пусть было взято  $x$  граммов 30 %-го раствора, а 10 %-го —  $y$  граммов, тогда  $x + y = 600$ . Так как первый раствор 30 %-й, то в  $x$  граммах этого раствора содержится  $0,3x$  грамма кислоты. Аналогично в  $y$  граммах 10 %-го раствора содержится  $0,1y$  грамма кислоты. В полученной смеси по условию задачи содержится  $600 \cdot 0,15 = 90$  г кислоты, следовательно, получим уравнение  $0,3x + 0,1y = 90$ , или  $3x + y = 900$ .

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 3x + y = 900. \end{cases}$$

Вычитая из II уравнения I, получим  $2x = 900 - 600$ , откуда  $x = 150$ , тогда  $y = 600 - 150 = 450$ .

*Ответ:* 150; 450.

**Пример 8.** Вычислите массу и пробу сплава серебра с медью, зная, что, сплавив его с 3 кг чистого серебра, получили сплав 900-й пробы (т. е. в сплаве 90 % серебра), а сплавив с 2 кг сплава 900-й пробы, получили сплав 840-й пробы.

*Решение.*

Пусть масса данного сплава  $x$  кг, в нем содержится  $y$  % серебра:  $0,01xy$  кг серебра находится в данном сплаве.  $(x + 3)$  кг — масса нового сплава, в нем содержится  $(0,01xy + 3)$  кг серебра.

Так как новый сплав 900-й пробы, то в нем содержится серебра  $0,9(x + 3)$  кг.

Следовательно, имеем уравнение  $0,01xy + 3 = 0,9(x + 3)$ .

$(x + 2)$  кг — масса III сплава 840-й пробы.

В нем содержится  $0,84(x + 2)$  кг серебра. Но этот сплав состоит из  $x$  кг данного ( $0,01xy$  серебра) и 2 кг 900-й пробы (1,8 кг серебра). Получим второе уравнение:

$$0,01xy + 1,8 = 0,84(x + 2).$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 0,01xy + 3 = 0,9(x + 3), \\ 0,01xy + 1,8 = 0,84(x + 2). \end{cases}$$

Вычитая из I уравнения системы II, получим

$$3 - 1,8 = 0,9(x + 3) - 0,84(x + 2).$$

Упрощая, находим  $x = 3$ . Подставив значение  $x = 3$  в I уравнение системы, находим  $y = 80$ .

Значит, данный сплав массой 3 кг содержит 80 % серебра.

*Ответ:* масса сплава 3 кг 800-й пробы.

**Пример 9.** Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45 % меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому сплаву, чтобы получившийся новый сплав содержал 40 % меди?

*Решение.*

Пусть  $x$  кг — масса олова, которую надо добавить к сплаву. Тогда получится сплав массой  $(12 + x)$  кг, содержащий 40 % меди. Значит, в новом сплаве имеется  $\frac{12+x}{100} \cdot 40$  кг меди. Исходный сплав массой 12 кг

содержал 45 % меди, т. е. в нем было  $\frac{12}{100} \cdot 45$  кг меди.

Так как масса меди и в первоначальном, и в новом сплаве одна и та же, то получим уравнение  $\frac{12+x}{100} \cdot 40 = \frac{12}{100} \cdot 45$ , или  $(12 + x) \cdot 8 = 12 \cdot 9$ , откуда находим  $x = 1,5$ . Следовательно, к исходному сплаву надо добавить 1,5 кг олова.

*Ответ:* 1,5.

## 10.5. Задачи на проценты

**Пример 10.** Если из 225 кг руды получается 34,2 кг меди, то каково процентное содержание меди в руде?

*Решение.*

Если 225 кг руды — 100 %, то 34,2 кг —  $x$  %, откуда  $x = 34,2 \cdot 100 : 225$ , или  $x = 15,2$  %.

*Ответ:* 15,2.

**Пример 11.** Цену товара сперва снизили на 20 %, затем новую цену снизили еще на 15 % и, наконец, после перерасчета произвели снижение ее на 10 %. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

*Решение.*

Пусть  $x$  руб. — первоначальная цена товара, что соответствует 100 %. Тогда после I снижения цена товара будет  $x - 0,2x = 0,8x$  (руб.).

После II снижения  $0,8x - 0,15 \cdot 0,8x = 0,68x$  (руб.), а после III снижения  $0,68x - 0,68x \cdot 0,1 = 0,612x$  (руб.).

Всего цена товара снизилась на  $x - 0,612x = 0,388x$  (руб.).

Итак,  $x$  — 100 %,

$0,388x$  —  $y$ , откуда находим

$y = (0,388x \cdot 100 \%) : x = 38,8$  %.

Таким образом, первоначальную цену товара снизили всего на 38,8 %.

*Ответ:* 38,8.

**Пример 12.** Антикварный магазин, купив два предмета за 225 000 руб., продал их, получив 40 % прибыли. Что стоит магазину каждый предмет, если на первом получено 25 % прибыли, а на втором 50 % ?

*Решение.*

Пусть I предмет куплен за  $x$  руб., тогда II куплен за  $(225\,000 - x)$  руб. При продаже I предмета получено 25 % прибыли. Значит, он продан за  $1,25x$  руб.

Второй предмет, на котором получено 50 % прибыли, продан за  $1,5(225\,000 - x)$  руб. По условию общий % прибыли (по отношению к покупной цене 225 000 руб.) составлял 40 %.

Значит, общая сумма выручки была  $1,40 \cdot 225\,000 = 315\,000$  руб.

Имеем уравнение  $1,25x + 1,5(225\,000 - x) = 315\,000$ .

Умножая обе части уравнения на 4, получим

$5x + 6(225\,000 - x) = 315\,000 \cdot 4$ , или

$6x - 5x = 6 \cdot 225\,000 - 4 \cdot 315\,000$ , откуда  $x = 90\,000$ , тогда

$225\,000 - x = 135\,000$ .



Итак, I предмет куплен за 90 000 руб., II — за 135 000 руб.

Ответ: 90 000; 135 000.

**Пример 13.** Гипотенуза прямоугольного треугольника равна  $3\sqrt{5}$  м. Определите катеты, если известно, что, после того как один из них увеличить на  $133\frac{1}{3}\%$ , а другой — на  $16\frac{2}{3}\%$ , сумма их длин будет равна 14 м.

*Решение.*

Пусть длины катетов (в метрах) —  $x$  и  $y$ . Так как гипотенуза равна  $3\sqrt{5}$  м, то по теореме Пифагора получим уравнение  $x^2 + y^2 = (3\sqrt{5})^2$ , или  $x^2 + y^2 = 45$ .

После увеличения на  $133\frac{1}{3}\%$ , т. е. на  $133\frac{1}{3}:100 = 1\frac{1}{3}$  своей длины, I катет станет равным  $2\frac{1}{3}x$ , а II катет после увеличения на  $16\frac{2}{3}\%$  будет равен  $1\frac{1}{6}y$ . Получим уравнение  $2\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{6}y = 14$ .

В итоге имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ 2\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{6}y = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ \frac{7}{3}x + \frac{7}{6}y = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ 2x + y = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (12 - 2x)^2 = 45, \\ y = 12 - 2x, \end{cases}$$

откуда находим  $x = 3$ ,  $y = 6$ . Значит, катеты равны 3 м и 6 м.

Ответ: 3; 6.

**Пример 14.** При выполнении работы по математике 12 % учеников класса вовсе не решили задачи, 32 % решили с ошибками, остальные 14 человек решили верно. Сколько учеников было в классе?

*Решение.*

Верно решившие 14 человек составляют  $100\% - (12\% + 32\%) = 56\%$  всех учеников класса.

Тогда общее число учеников класса будет равно  $14 \cdot 100 : 56 = 25$  (учеников).

Ответ: 25.

## 10.6. Задачи на разбавление

**Пример 15.** Из бака, наполненного спиртом, вылили часть спирта и долили водой; потом из бака вылили столько же литров смеси; после этого в баке осталось 49 л чистого спирта. Сколько литров спирта вылили в первый раз и сколько во второй, если вместимость бака 64 л?

*Решение.*

Если в первый раз вылили  $x$  л спирта, то осталось  $(64 - x)$  л спирта. Когда долили бак водой, получили 64 л смеси спирта и воды, в которой содержится  $(64 - x)$  л спирта. Затем  $x$  л спирта смеси вылили, значит, вылили и спирт.

$\frac{x(64 - x)}{64}$  — столько литров спирта вылили во второй раз,

$(64 - x) - \frac{x(64 - x)}{64}$  — столько литров осталось в баке.

Так как в баке осталось 49 л спирта, то можно составить уравнение

$$(64 - x) - \frac{x(64 - x)}{64} = 49, \text{ или } 64(64 - x) - x(64 - x) = 64 \cdot 49, \text{ или}$$

$$(64 - x)^2 = 64 \cdot 49, \text{ или } (64 - x) = \pm 56, \text{ откуда } x_1 = 8, \\ x_2 = 120 \text{ (не удовлетворяет условию задачи).}$$

$$\text{Итак, в первый раз вылили 8 л спирта, а во второй — } \frac{8 \cdot (64 - 8)}{64} = \\ = \frac{8 \cdot 56}{64} = 7 \text{ (л) спирта.}$$

*Ответ:* 8; 7.

## 10.7. Задачи на прогрессии

**Пример 16.** Бригада маляров красит забор длиной 280 м, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 80 м забора. Определите, сколько дней бригада красила весь забор.

*Решение.*

Имеем арифметическую прогрессию, где  $S_n = 280$ ,  $a_1 + a_n = 80$ , тогда  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ , или  $\frac{80}{2} \cdot n = 280$ , или  $40n = 280$ , откуда  $n = 7$ , т. е. бригада красила забор в течение 7 дней.

*Ответ:* 7.

**Пример 17.** Игорю надо решить 366 задач. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Игорь решил 7 задач. Определите, сколько задач решил Игорь в последний день, если со всеми задачами он справился за 12 дней.

*Решение.*

В первый день Игорь решил 7 задач, в последний —  $a_{12}$  задач. Всего надо решить  $S_{12} = 366$  задач.

Тогда  $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$ , где  $a_1 = 7$ ,  $n = 12$ .

Следовательно,  $S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = 6 \cdot (a_1 + a_{12})$ , или  $6(7 + a_{12}) = 366$ ,

$7 + a_{12} = 61$ , откуда  $a_{12} = 54$  (задачи).

Ответ: 54.

## § 11. Задание 11. Графики функций

Это задание появилось в вариантах ЕГЭ профильного уровня по теме «Графики функций». По графику функции, который дается в условии, необходимо определить неизвестные параметры в ее формуле. Возможно — найти значение функции в некоторой точке или координаты точки пересечения графиков функций.

### 11.1. Комбинированные задачи

**Пример 1.** На рисунке изображены графики функций  $f(x) = -4x + 9$  и  $g(x) = ax^2 + bx + c$ , которые пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Найдите абсциссу точки  $B$ .

*Решение.*

Из графика видно, что  $g(-1) = -1$ ,  $g(1) = 5$ ,  $g(0) = 1$ . Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} a - b + c = -1, \\ a + b + c = 5, \\ 0 + 0 + c = 1; \end{cases} \begin{cases} c = 1, \\ a - b + 1 = -1, \\ a + b + 1 = 5; \end{cases} \begin{cases} c = 1, \\ a - b = -2, \\ a + b = 4. \end{cases}$$

Складывая два последних уравнения, имеем  $2a = -2 + 4$ ,  $2a = 2$ ,  $a = 1$ , тогда  $b = 4 - 1 = 3$ .

Итак,  $a = 1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 1$ .

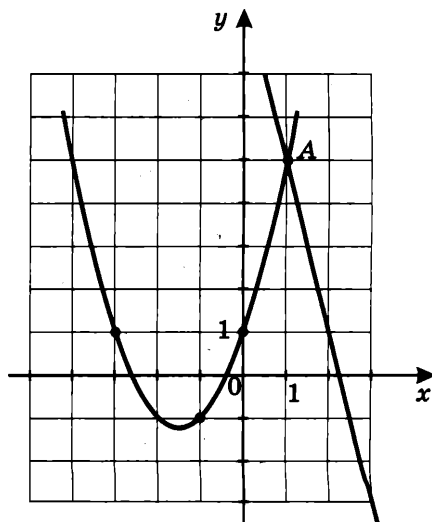
Заметим, что для нахождения значений  $a$ ,  $b$  и  $c$  достаточно взять 3 точки, имеющие целые коэффициенты. Следовательно,  $g(x) = x^2 + 3x + 1$ .

Поскольку прямая и парабола пересекаются в точке  $A(1; 5)$ , то получим уравнение  $x^2 + 3x + 1 = -4x + 9$ , или  $x^2 + 7x - 8 = 0$ .

Так как  $1 + 7 - 8 = 0$ , то  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -8$ .

Таким образом, абсцисса точки  $B$  будет  $x = -8$ .

Ответ: -8.



**Пример 2.** На рисунке изображены графики функций  $f(x) = \frac{k}{x}$  и  $g(x) = ax + b$ , которые пересекаются в точках А и В. Найдите абсциссу точки В.

*Решение.*

Найдем значение  $k$ , учитывая, что гипербола проходит через точку  $A(3; 1)$ . Значит,  $f(x) = y = 1$ ,  $x = 3$ , тогда  $k = xy = 3 \cdot 1 = 3$ .

Следовательно,  $f(x) = \frac{3}{x}$ .

Поскольку  $a = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона прямой к положительному направлению оси  $Ox$ , то  $a = \frac{4}{2} = 2$ . Остается найти значение  $b$ .

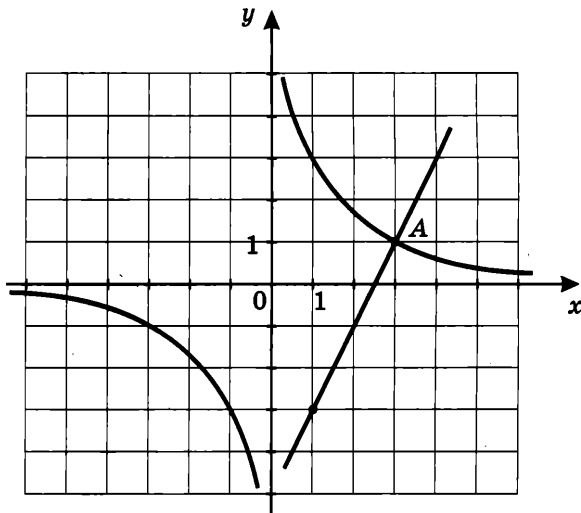
Заметим, что  $g(3) = 1$ , тогда  $2 \cdot 3 + b = 1$ , откуда  $b = 1 - 6 = -5$ .

Значит, прямая имеет вид  $y = 2x - 5$ .

Решая уравнение  $\frac{3}{x} = 2x - 5$ , получим  $2x^2 - 5x - 3 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -0,5$ .

Следовательно,  $x = -0,5$  — абсцисса точки В.

*Ответ:*  $-0,5$ .



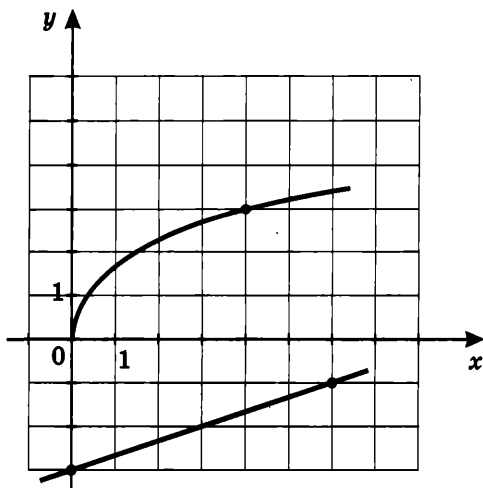
**Пример 3.** На рисунке изображены графики функций  $f(x) = a\sqrt{x}$  и  $g(x) = kx + b$ , которые пересекаются в точке А. Найдите абсциссу точки А.

*Решение.*

На кривой  $f(x) = a\sqrt{x}$  отмечена точка  $(4; 3)$ . Значит,  $a\sqrt{4} = 3$ , или  $2a = 3$ ,  $a = \frac{3}{2} = 1,5$ , т. е.  $f(x) = 1,5\sqrt{x}$ .

Остается найти значения  $k$  и  $b$ , где  $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ . Кроме того,

$g(0) = -3$ , тогда получим  $\frac{1}{3} \cdot 0 + b = -3$ , или  $b = -3$ , следовательно,  $g(x) =$



$= \frac{1}{3}x - 3$ . По условию графики пересекаются в точке А. Имеем уравнение  $1,5\sqrt{x} = \frac{1}{3}x - 3$ , или  $9\sqrt{x} = 2x - 18$ .

Пусть  $\sqrt{x} = t$ , тогда получим  $9t = 2t^2 - 18$ , или  $2t^2 - 9t - 18 = 0$ ,  $D = 81 + 144 = 225 = 15^2 > 0$ ,  $t_{1,2} = \frac{9 \pm 15}{4}$ ,  $t_1 = 6$ ,  $t_2 = -1,5$ .

Так как  $t \geq 0$ , то корень  $t_2 = -1,5$  не подходит.

Если  $t = 6$ , то  $\sqrt{x} = 6$ ,  $x = 36$  — абсцисса точки А.

Ответ: 36.

## 11.2. Гиперболы

**Пример 4.** На рисунке изображен график функции

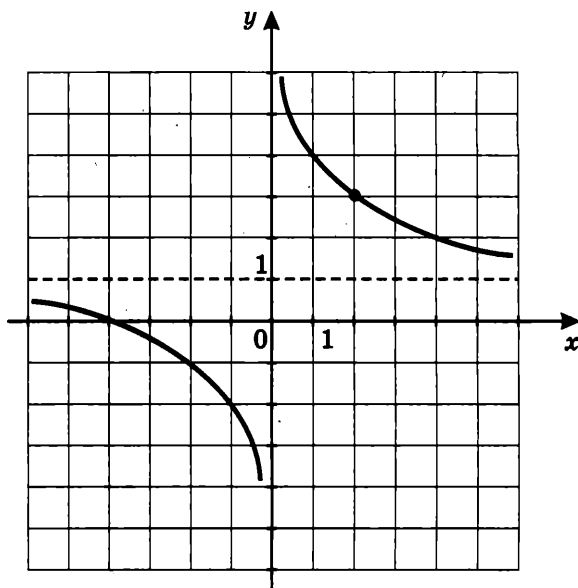
$$f(x) = \frac{k}{x} + a. \text{ Найдите } f(-16).$$

*Решение.*

$y = 1$  — горизонтальная асимптота графика функции, значит,  $a = 1$ . Заметим, что  $f(2) = 3$ . Тогда получим уравнение  $\frac{k}{2} + 1 = 3$ , или  $\frac{k}{2} = 2$ ,  $k = 4$ .

$$\text{Значит, } f(-16) = \frac{4}{-16} + 1 = -1 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} = 0,75.$$

Ответ: 0,75.



**Пример 5.** На рисунке изображен график функции вида  $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$ , где числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые. Найдите  $f(8)$ .

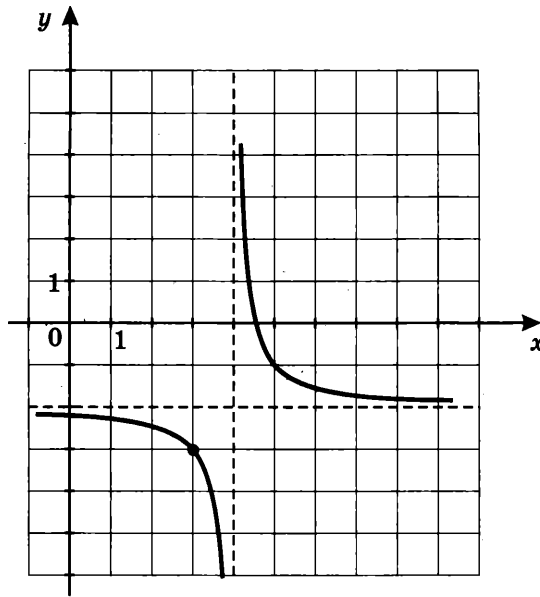
*Решение.*

$y = -2$  — горизонтальная асимптота, значит,  $c = -2$ .

$x = 4$  — вертикальная асимптота, значит,  $b = -4$ .

Точка, выделенная на графике, имеет координаты  $(3; -3)$ , тогда

$$\frac{a}{3-4} - 2 = -3, \text{ или } \frac{a}{-1} = -1, a = 1.$$



Следовательно,  $f(x) = \frac{2}{x-4} - 2$ , значит,  $f(8) = \frac{2}{8-4} - 2 = \frac{2}{4} - 2 = 0,5 - 2 = -1,5$ .

Ответ: -1,5.

**Пример 6.** На рисунке изображен график функции вида  $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые числа. Найдите  $b$ .

Решение.

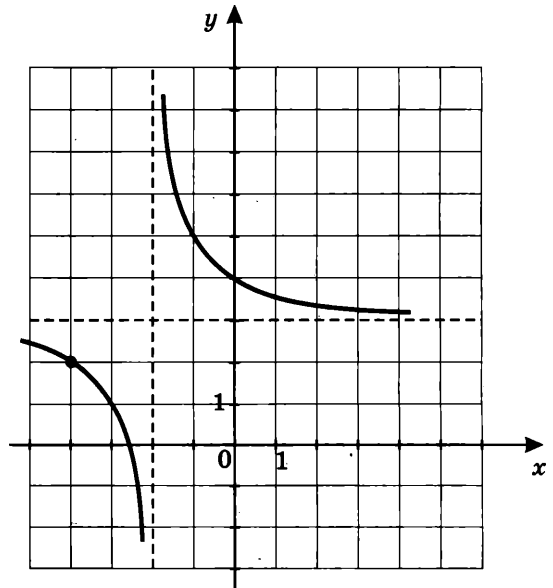
I способ

Преобразуем дробь  $\frac{ax+b}{x+c}$  так, чтобы выделить целую часть:

$$\begin{aligned} \frac{ax+b}{x+c} &= \frac{a(x+c)+b-ac}{x+c} = \\ &= a + \frac{b-ac}{x+c}. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } f(x) = a + \frac{b-ac}{x+c}.$$

Заметим, что  $y = 3$  — горизонтальная асимптота, значит,  $a = 3$ .  
 $x = -2$  — вертикальная асимптота, значит,  $c = 2$ .



Точка, отмеченная на графике, имеет координаты  $(-4; 2)$ .

Тогда получим уравнение  $3 + \frac{b-3 \cdot 2}{-4+2} = 2$ , или  $\frac{b-6}{-2} = -1$ , или  $b - 6 = 2$ ,

откуда  $b = 8$ .

*Ответ:* 8.

### II способ

Относительно системы координат  $XOY$  имеем сдвиги на 3 единицы вверх и на 2 единицы влево, т. е.  $y = \frac{a}{x+2} + 3$ . Если асимптоты  $x = -2$  и  $y = 3$  принять за новую систему координат, то  $a = 2$ .

Получим  $y = \frac{2}{x+2} + 3 = \frac{3x+8}{x+2}$ . Сравнивая дроби  $\frac{ax+b}{x+c}$  и  $\frac{3x+8}{x+2}$ , находим  $a = 3$ ,  $b = 8$ ,  $c = 2$ .

*Ответ:* 8.

## 11.3. Параболы

**Пример 7.** На рисунке изображен график функции вида  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые числа. Найдите абсциссу вершины параболы.

*Решение.*

Абсцисса вершины параболы определяется по формуле  $x_0 = \frac{-b}{2a}$ .

Из рисунка видно, что при  $x = 0$ ,  $f(x) = 8$ ; при  $x = 1$ ,  $f(x) = 3$ ; при  $x = 2$ ,  $f(x) = 0$ .

Следовательно, получим систему уравнений

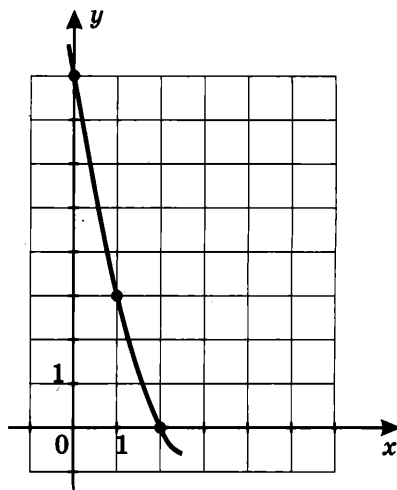
$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 8, \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3, \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} c = 8, \\ a + b + 8 = 3, \\ 4a + 2b + 8 = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} c = 8, \\ a + b = -5, \\ 2a + b = -4. \end{cases}$$

Вычитая из III уравнения II, получим  $2a - a = -4 + 5$ , или  $a = 1$ .

Тогда  $b = -5 - 1 = -6$ .

Значит, абсцисса вершины параболы  $x_0 = \frac{6}{2} = 3$ .

*Ответ:* 3.



**Пример 8.** На рисунке изображен график функции  $f(x) = 2x^2 + bx + c$ . Найдите значение  $f(-7)$ .

*Решение.*

Для нахождения значений  $b$  и  $c$  достаточно использовать координаты двух выделенных точек: при  $x = -4$ ,  $f(x) = 5$ ; при  $x = -1$ ,  $f(x) = 2$ . Получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 2 \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c = 5, \\ 2 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 2; \end{cases}$$

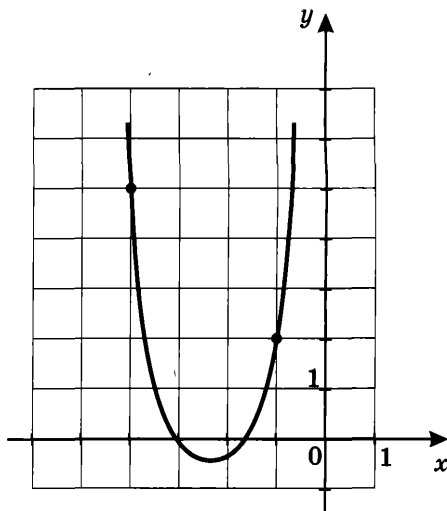
$$\begin{cases} 32 - 4b + c = 5, \\ 2 - b + c = 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32 - 4b + c = 5, \\ 2 - b + c = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} -4b + c = -27, \\ -b + c = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4b + c = -27, \\ c = b; \end{cases} \quad \begin{cases} -4b + b = -27, \\ c = b; \end{cases} \quad \begin{cases} -3b = -27, \\ c = b; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 9, \\ c = 9. \end{cases}$$

Следовательно,  $f(-7) = 2 \cdot (-7)^2 + 9 \cdot (-7) + 9 = 98 - 63 + 9 = 44$ .

*Ответ:* 44.



**Пример 9.** На рисунке изображен график функции вида  $f(x) = \frac{x^2}{a} + bx + c$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые числа. Найдите значение  $f(0)$ .

*Решение.*

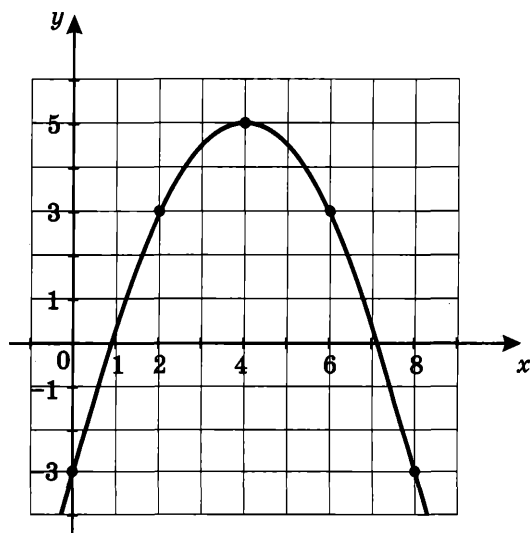
I способ

Так как ветви параболы направлены вниз, то  $a < 0$ .

$(4; 5)$  — координаты вершины параболы, тогда уравнение параболы имеет вид  $y = -\frac{(x-4)^2}{2} + 5$ .

Значит,  $f(0) = -\frac{(-4)^2}{2} + 5 = -8 + 5 = -3$ .

*Ответ:* -3.





## II способ

1) При  $x = 0$ ,  $f(x) = -3$ ; 2) при  $x = 2$ ,  $f(x) = 3$ ; 3)  $x_0 = \frac{-b}{2a} = 4$ ,  $f(x_0) = 5$ .

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{0}{a} + b \cdot 0 + c = -3, \\ \frac{4}{a} + 2b - 3 = 3, \\ \frac{16}{a} + 4b - 3 = 5; \end{cases} \begin{cases} c = -3, \\ \frac{4}{a} + 2b = 6, \\ \frac{16}{a} + 4b = 8; \end{cases} \begin{cases} c = -3, \\ \frac{4}{a} + 2b = 6, \\ \frac{4}{a} + b = 2. \end{cases}$$

Вычтем из II уравнения III:  $2b - b = 4$ ,  $b = 4$ , тогда  $\frac{4}{a} + 2 \cdot 4 = 6$ , или  $\frac{4}{a} = -2$ ,  $a = -2$ .

Следовательно,  $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x - 3$ , тогда  $f(0) = 0 + 4 \cdot 0 - 3 = -3$ .

Ответ:  $-3$ .

## 11.4. Линейные функции

**Пример 10.** На рисунке изображен график функции  $f(x) = kx + b$ . Найдите значение  $x$ , при котором  $f(x) = -7,5$ .

*Решение.*

Координаты выделенных точек  $(3; -3)$  и  $(-1; -2)$ .

Так как  $f(x) = kx + b$ , то координаты точек удовлетворяют уравнению прямой:

$$\begin{cases} 3k + b = 3, \\ -k + b = -2. \end{cases}$$

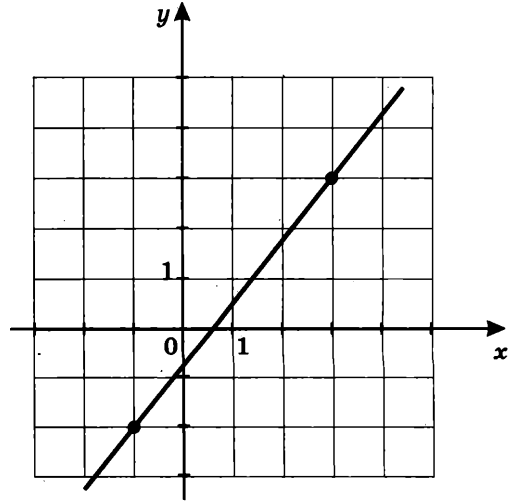
Вычтем из I уравнения II:

$$3k + k = 3 + 2; 4k = 5; k = \frac{5}{4},$$

$$\text{тогда } b = k - 2 = \frac{5}{4} - 2 = -\frac{3}{4}.$$

Следовательно, уравнение прямой примет вид  $y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}$ .

По условию  $f(x) = -7,5$ .



Получим  $\frac{5}{4}x - \frac{3}{4} = -7,5$ , или  $5x - 3 = -30$ , или  $5x = -27$ ,  $x = -5,4$ .

Ответ:  $-5,4$ .

**Пример 11.** На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения.

*Решение.*

Линейная функция имеет вид  $y = kx + b$ .

$y_1 = k_1x + b_1$ ,  $y_2 = k_2x + b_2$ , где  $k_1 = \frac{3}{1} = 3$ ,  $k_2 = -\frac{4}{2} = -2$ .

Значит,  $y_1 = 3x + b_1$ ,  $y_2 = -2x + b_2$ .

(1; 2) — координаты точки прямой, где  $k_1 = 3$ , тогда получим  $2 = 3 \cdot 1 + b_1$ , откуда  $b_1 = -1$ .

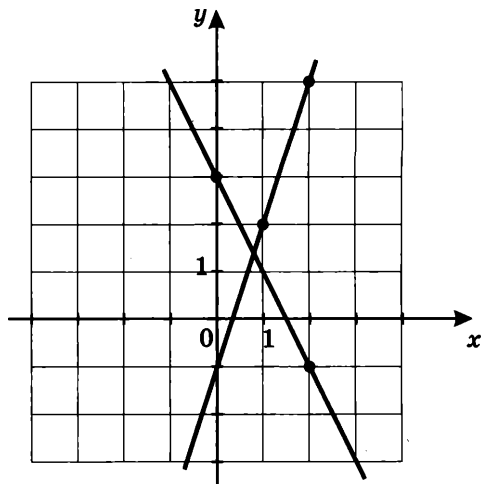
Следовательно,  $y_1 = 3x - 1$ .

Аналогично (0; 3) — координаты второй прямой.

Тогда имеем  $3 = -2 \cdot 0 + b_2$ , т. е.  $b_2 = 3$ . Значит,  $y_2 = -2x + 3$ .

Так как прямые пересекаются, то  $y_1 = y_2$ , т. е.  $3x - 1 = -2x + 3$ , или  $5x = 4$ ,  $x = 0,8$ .

Ответ:  $0,8$ .



## 11.5. Показательные и логарифмические функции

**Пример 12.** На рисунке изображен график функции  $f(x) = \log_a(x + b)$ . Найдите  $f(13)$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $x \in (-3; +\infty)$ .

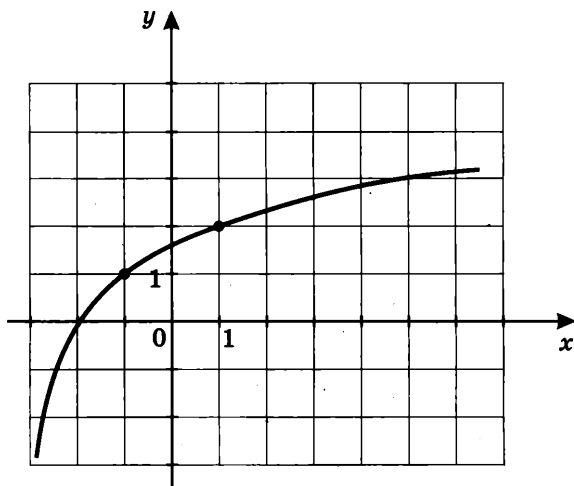
Значит,  $b = 3$ .

Так как график проходит через точку  $(-1; 1)$ , то получим уравнение

$1 = \log_a(-1 + 3)$ , или  $a = 2$ .

Значит,  $f(x) = \log_2(x + 3)$ , тогда  $f(13) = \log_2(13 + 3) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$ .

Ответ:  $4$ .



**Пример 13.** На рисунке изображен график функции  $f(x) = \log_a x + b$ . Найдите значение  $x$ , при котором  $f(x) = 2$ .

*Решение.*

Отметим координаты выделенных точек:  $(1; -4)$  и  $(4; -2)$ .

Получим систему уравнений

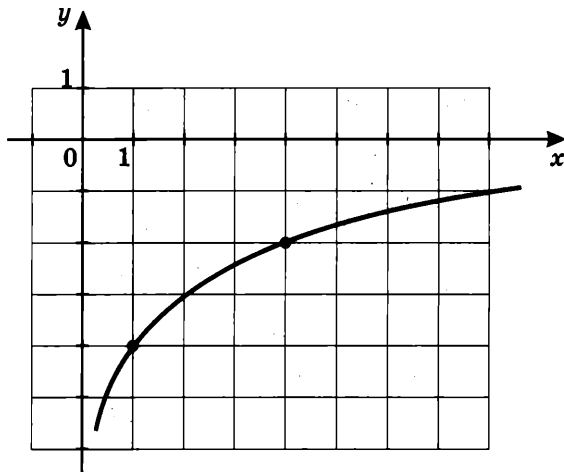
$$\begin{cases} \log_a 1 + b = -4, \\ \log_a 4 + b = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 + b = -4, \\ \log_a 4 + b = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4, \\ \log_a 4 - 4 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -4, \\ \log_a 4 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -4, \\ 2\log_a 2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -4, \\ \log_a 2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -4, \\ a = 2. \end{cases}$$

Значит,  $f(x) = \log_2 x - 4$ . Так как  $f(x) = 2$ , то получим  $\log_2 x - 4 = 2$ ,  $\log_2 x = 6$ ,  $x = 2^6 = 64$ .

*Ответ:* 64.



**Пример 14.** На рисунке изображен график функции  $f(x) = a^{x+b}$ . Найдите  $f(-8)$ .

*Решение.*

Нам надо прежде всего найти значения  $a$  и  $b$ , для чего мы используем координаты выделенных точек  $(-2; 2)$  и  $(2; 8)$ .

Так как  $f(x) = a^{x+b}$ , то получим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a^{-2+b} = 2, \\ a^{2+b} = 8, \end{cases} \text{ где } a > 0, a \neq 1.$$

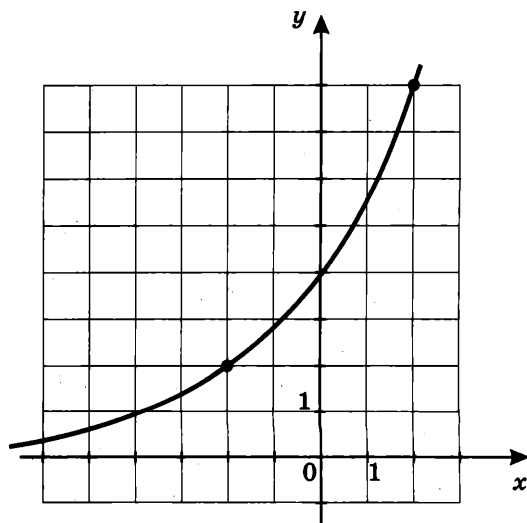
Разделим II уравнение на I:

$$\frac{a^{2+b}}{a^{-2+b}} = \frac{8}{2}, \text{ или } a^{2+b+2-b} = 4, a^4 = 4, a^2 = 2, \text{ откуда } a = \sqrt{2}, \text{ так как } a > 0.$$

Подставим значение  $a = \sqrt{2}$  в одно из уравнений системы, например,

$$\text{в I: } \sqrt{2}^{-2+b} = 2, \text{ или } \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-2+b} = 2^1, \text{ или } \frac{1}{2}(-2+b) = 1, \text{ или } -2+b = 2, \text{ откуда}$$

$$b = 4. \text{ Тогда } f(x) = (\sqrt{2})^{x+4}.$$



Значит,  $f(-8) = (\sqrt{2})^{-8+4} = (\sqrt{2})^{-4} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-4} = 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0,25$ .

Ответ: 0,25.

**Пример 15.** На рисунке изображен график функции  $f(x) = a^x + b$ . Найдите значение  $x$ , при котором  $f(x) = 28$ .

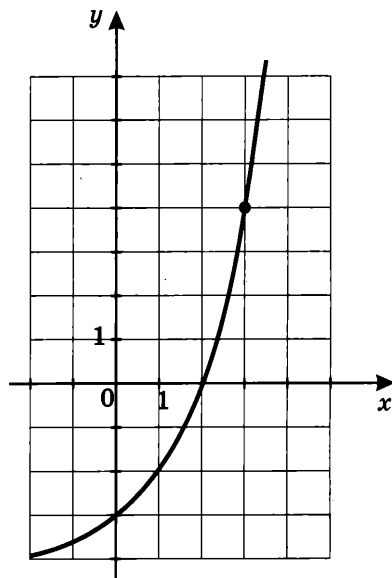
*Решение.*

Так как функция — показательная, то  $E(f) = (b; +\infty)$ .

Из рисунка видно, что  $E(f) = (-4; +\infty)$ , т. е.  $b = -4$ . Кроме того,  $f(3) = 4$ . Тогда получим уравнение  $a^3 - 4 = 4$ ,  $a^3 = 8$ ,  $a = 2$ .

Следовательно,  $f(x) = 2^x - 4$ . Чтобы найти значение  $x$ , остается решить показательное уравнение  $2^x - 4 = 28$ , или  $2^x = 32 = 2^5$ ,  $x = 5$ .

Ответ: 5.



## 11.6. Тригонометрические функции

**Пример 16.** На рисунке изображен график функции  $f(x) = a \sin x + b$ . Найдите  $b$ .

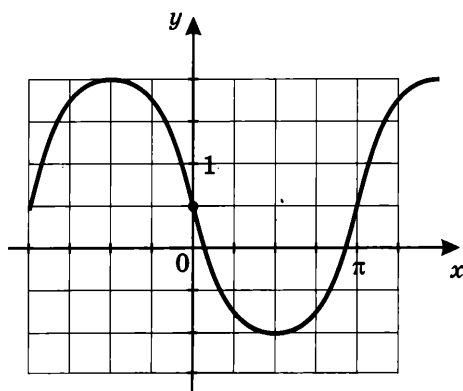
*Решение.*

Координаты выделенной точки  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ .

Тогда получим  $a \cdot \sin 0 + b = \frac{1}{2}$ ,

$0 + b = \frac{1}{2}$ ,  $b = \frac{1}{2} = 0,5$ .

Ответ: 0,5.



**Пример 17.** На рисунке изображен график функции  $f(x) = a \cos x + b$ . Найдите  $a$ .

*Решение.*

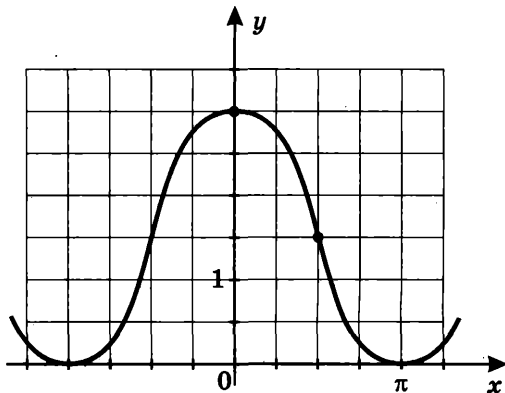
Координаты выделенных точек  $(0; 3)$  и  $\left(\frac{\pi}{2}; 1,5\right)$ .

Тогда получим 
$$\begin{cases} a \cdot \cos 0 + b = 3, \\ a \cdot \cos \frac{\pi}{2} + b = 1,5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b = 3, \\ a \cdot 0 + b = 1,5; \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = 3, \\ b = 1,5, \end{cases} \quad \text{откуда}$$
  
 $a = 1,5.$

Ответ: 1,5.

Замечание. Можно было учесть, что  $f_{\max} = 3$ , тогда  $a = \frac{1}{2}f_{\max} = 1,5.$



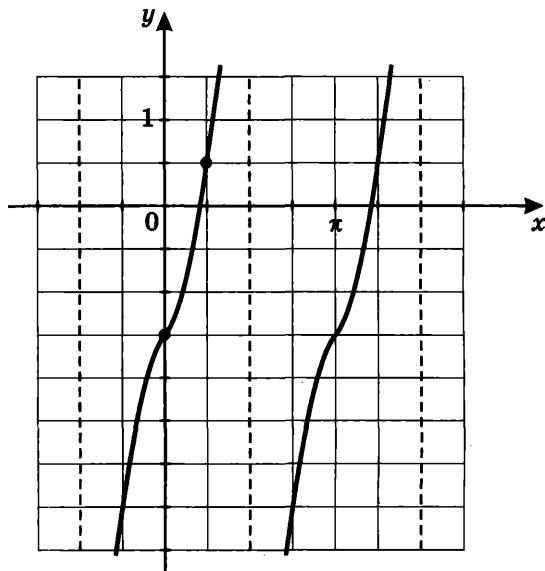
**Пример 18.** На рисунке изображен график функции  $f(x) = a \operatorname{tg} x + b$ . Найдите  $b$ .

Решение.

Из выделенных точек удобно взять точку на оси  $Oy$  с координатами  $(0; -1,5)$ , так как  $\operatorname{tg} 0 = 0$ .

Получим  $a \cdot \operatorname{tg} 0 + b = -1,5$ , откуда  $b = -1,5$ .

Ответ: -1,5.



## 11.7. Кусочно-линейные функции

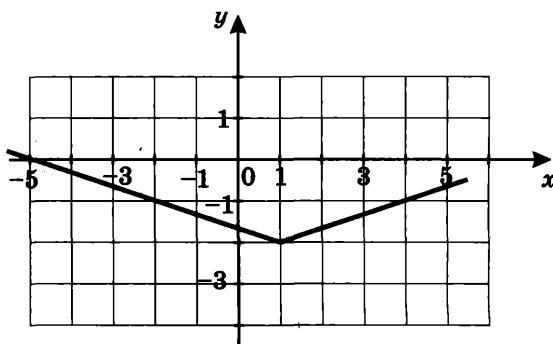
**Пример 19.** На рисунке изображен график функции  $y = k|x + a| + b$ . Найдите  $f(13)$ .

Решение.

Обозначим вершину угла  $A(x_0; y_0)$ .

Коэффициенты  $a$  и  $b$  показывают сдвиги,  $k$  — растяжение графика.

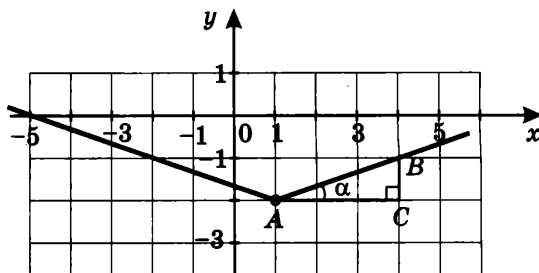
$$f(x) = k|x - x_0| + y_0.$$



Угловой коэффициент  $k$  найдем из прямоугольного  $\triangle ACB$ ,

где  $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$ .

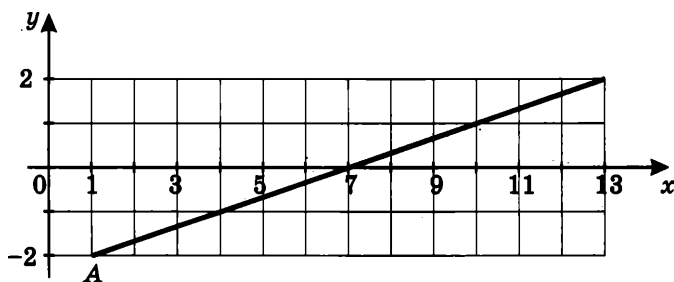
Точка  $A$  имеет координаты  $(1; -2)$ . Тогда  $f(x) = \frac{1}{3}|x - 1| - 2$ .



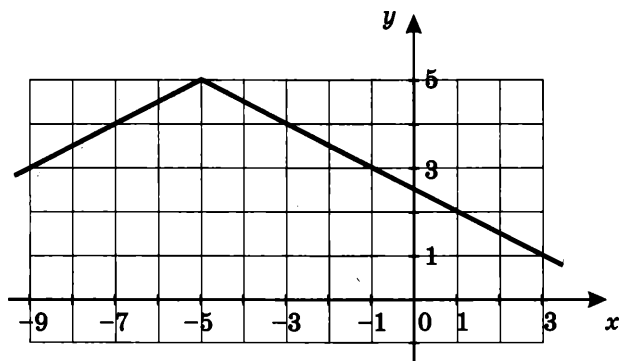
Следовательно,  $f(13) = \frac{1}{3}|13 - 1| - 2 = \frac{1}{3} \cdot 12 - 2 = 4 - 2 = 2$ .

*Ответ:* 2.

*Замечание.* Значение  $f(13) = 2$  видно из приведенного рисунка.

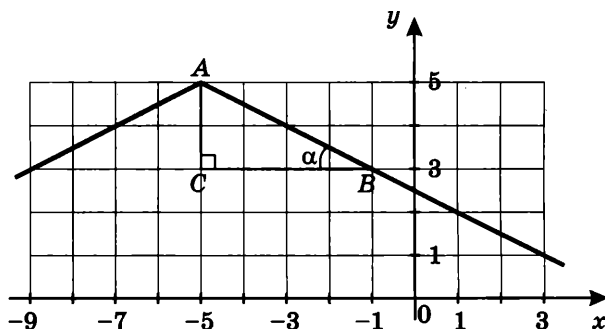


**Пример 20.** На рисунке изображен график функции  $f(x) = k|x + a| + b$ . Найдите  $f(7)$ .



*Решение.*

Запишем данную функцию в виде  $f(x) = k|x - x_0| + y_0$ , где  $(x_0; y_0)$  — координаты вершины угла.



Правая ветвь графика — убывающая функция, тогда  $k = \operatorname{tg} \alpha =$   
 $= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$

$A(-5; 5)$ , следовательно,  $f(x) = -\frac{1}{2}|x + 5| + 5 = -\frac{1}{2} \cdot |7 + 5| + 5 = -6 + 5 =$   
 $= -1.$

*Ответ:*  $-1.$

## § 12. Задание 12. Исследование функций

Здесь встречаются задания следующих видов:

- 1) исследование степенных и иррациональных функций;
- 2) исследование произведений;
- 3) исследование показательных и логарифмических функций;
- 4) исследование тригонометрических функций;
- 5) исследование функций без помощи производной.

Все задачи, которые встречаются на ЕГЭ, делятся на 2 типа:

1. Задачи на нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке. Иногда отрезок не задан, тогда находим на всей числовой прямой.

2. Задачи на нахождение точек экстремума (максимума или минимума) функции.

### 12.1. Степенные функции

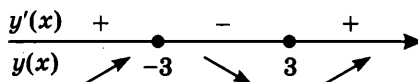
**Пример 1.** Найдите точку максимума функции  $y = x^3 - 27x + 15$ .

*Решение.*

Найдем производную данной функции:  $y' = (x^3 - 27x + 15)' = 3x^2 - 27$ .

Найдем стационарные точки из уравнения  $y' = 0$  или  $3x^2 - 27 = 0$ ,  
 $x^2 = 9$ ,  $x_{1, 2} = \pm 3$ .

На числовой прямой определим знаки производной и изобразим поведение функции:



$x = -3$  — точка максимума функции, так как при переходе через нее производная меняет знак с «+» на «-».

*Ответ:*  $-3.$

**Пример 2.** Найдите наименьшее значение функции  $y = x^3 - 12x$  на отрезке  $[0; 3]$ .

*Решение.*

$$y' = (x^3 - 12x)' = 3x^2 - 12, y' = 0, \text{ или } 3x^2 - 12 = 0, x^2 = 4, x_{1,2} = \pm 2.$$

$$x = -2 \notin [0; 3], x = 2 \in [0; 3].$$

$$y(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = 8 - 24 = -16.$$

$$\text{Найдем значения функции на концах отрезка } [0; 3]: y(0) = 0, \\ y(3) = 3^3 - 12 \cdot 3 = 27 - 36 = -9.$$

$$\text{Значит, } y_{\text{наим.}} = y(2) = -16.$$

*Ответ:*  $-16$ .

## 12.2. Иррациональные функции

**Пример 3.** Найдите точку минимума функции  $y = x^{\frac{3}{2}} - 6x + 1$ .

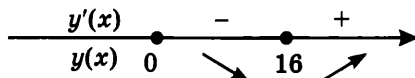
*Решение.*

Найдем производную функции:

$$y' = \left( x^{\frac{3}{2}} - 6x + 1 \right)' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 6 = \frac{3}{2} \sqrt{x} - 6, \text{ где } x \geq 0.$$

$$\text{Найдем нули производной: } y' = 0, \text{ или } \frac{3}{2} \sqrt{x} - 6 = 0, \sqrt{x} = 4, x = 16.$$

Определим знаки производной и поведение функции на числовой прямой:



$x = 16$  — точка минимума функции, так как при переходе через нее производная меняет знак с «-» на «+».

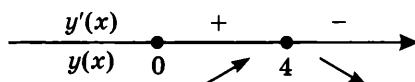
*Ответ:*  $16$ .

**Пример 4.** Найдите точку максимума функции  $y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x + 3$ .

*Решение.*

$$y' = \left( -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x + 3 \right)' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot 1 + 0 = -\sqrt{x} + 2, \text{ где } x \geq 0.$$

$$y' = 0, \text{ или } -\sqrt{x} + 2 = 0, \sqrt{x} = 2, x = 4.$$





В точке максимума производная меняет знак с «+» на «-», значит,  $x = 4$  — точка максимума функции.

**Ответ:** 4.

**Пример 5.** Найдите наименьшее значение функции  $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 3$  на отрезке  $[1; 9]$ .

**Решение.**

$$y' = \left( \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 3 \right)' = \left( \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 3 \right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2 = \sqrt{x} - 2.$$

Заметим, что  $y' \leq 0$  на отрезке  $[1; 9]$ , значит, данная функция убывает, поэтому наименьшее значение функции достигается в точке  $x = 9$ ,

$$\text{т. е. } y_{\text{наим.}} = y(9) = \frac{2}{3} \cdot 9 \cdot 3 - 2 \cdot 9 + 3 = 3.$$

**Ответ:** 3.

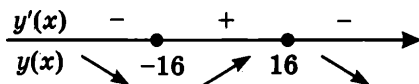
## 12.3. Рациональные функции

**Пример 6.** Найдите точку максимума функции  $y = -\frac{x^2 + 256}{x}$ .

**Решение.**

$$y' = \left( -\frac{x^2 + 256}{x} \right)' = -\left( x + \frac{256}{x} \right)' = -1 + \frac{256}{x^2}.$$

$$y' = 0, \text{ или } -1 + \frac{256}{x^2} = 0, x^2 = 256, x_{1,2} = \pm 16.$$



В точке максимума производная меняет знак с «+» на «-». Значит,  $x = 16$  — точка максимума.

**Ответ:** 16.

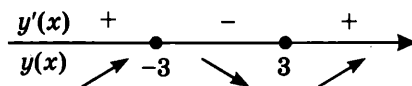
**Пример 7.** Найдите точку минимума функции  $y = -\frac{x}{x^2 + 9}$ .

**Решение.**

$$y' = -\left( \frac{x}{x^2 + 9} \right)' = -\left( \frac{1 \cdot (x^2 + 9) - x(x^2 + 9)'}{(x^2 + 9)^2} \right) = -\frac{x^2 + 9 - x \cdot 2x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{x^2 - 9}{(x^2 + 9)^2}.$$

$$y' = 0, x^2 - 9 = 0, x^2 + 9 > 0 \text{ при всех } x \in R.$$

Тогда  $x^2 = 9$ ,  $x_{1,2} = \pm 3$ .



$x = 3$  — точка минимума функции.

Ответ: 3.

## 12.4. Показательные функции

**Пример 8.** Найдите наибольшее значение функции  $y = (x - 9)e^{(x - 8)}$  на отрезке  $[7; 9]$ .

*Решение.*

$$y' = (x - 9)' \cdot e^{x-8} + (x - 9) \cdot (e^{x-8})' = 1 \cdot e^{x-8} + (x - 9) \cdot e^{x-8} = e^{x-8} \cdot (x - 8).$$

$$y' = 0, \text{ или } e^{x-8} \cdot (x - 8) = 0.$$

Так как  $e^{x-8} > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , то  $x - 8 = 0$ ,  $x = 8 \in [7; 9]$ .

На числовой прямой покажем знаки производной и поведение функции:



$x = 8$  — точка минимума функции, значит, наибольшее значение будет на концах отрезка:

$$y(7) = (7 - 9) e^{7-8} = -\frac{1}{e}, \quad y(9) = (9 - 9) e^{9-8} = 0 \cdot e = 0.$$

Следовательно,  $y_{\text{наиб.}} = y(9) = 0$ .

Ответ: 0.

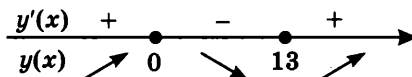
**Пример 9.** Найдите точку максимума функции

$$y = (2x^2 - 30x + 30) e^{x-30}.$$

*Решение.*

$$\begin{aligned} y' &= (2x^2 - 30x + 30)' \cdot e^{x-30} + (2x^2 - 30x + 30) \cdot (e^{x-30})' = \\ &= (4x - 30) e^{x-30} + (2x^2 - 30x + 30) \cdot e^{x-30} = e^{x-30} (4x - 30 + 2x^2 - 30x + 30) = \\ &= e^{x-30} \cdot (2x^2 - 26x) = 2x(x - 13) \cdot e^{x-30}. \end{aligned}$$

$y' = 0$ , или  $2x(x - 13) \cdot e^{x-30} = 0$ . Так как  $e^{x-30} > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , то  $2x(x - 13) = 0$ , откуда  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 13$ .



$x = 0$  — точка максимума функции, так как производная меняет знак с «+» на «-».

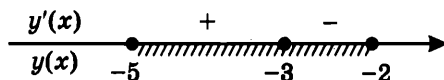
Ответ: 0.

**Пример 10.** Найдите наибольшее значение функции  $y = (x + 5)^2 \cdot e^{-3-x}$  на отрезке  $[-5; -2]$ .

*Решение.*

$$y' = ((x + 5)^2)' \cdot e^{-3-x} + (x + 5)^2 \cdot (e^{-3-x})' = 2(x + 5) \cdot e^{-3-x} + (x + 5)^2 \cdot (-1) \cdot e^{-3-x} = (x + 5) \cdot e^{-3-x} \cdot (2 - x - 5) = -(x + 5)(x + 3) e^{-3-x}.$$

Так как  $e^{-3-x} > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , то  $y' = 0$ , если  $-(x + 5)(x + 3) = 0$ , откуда  $x_1 = -5 \in [-5; -2]$ ,  $x_2 = -3 \in [-5; -2]$ .



$x = -3$  — точка максимума функции, значит, в этой точке функция имеет наибольшее значение, т. е.  $y_{\text{наиб.}} = y(-3) = (-3 + 5)^2 \cdot e^0 = 4$ .

*Ответ:* 4.

## 12.5. Логарифмические функции

**Пример 11.** Найдите наименьшее значение функции  $y = 6x - \ln(x + 4)^6$  на отрезке  $[-3, 5; 0]$ .

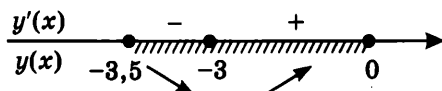
*Решение.*

ОДЗ:  $x \neq -4$ . Найдем производную функции:

$$y' = (6x - \ln(x + 4)^6)' = 6 \cdot 1 - 6 \cdot \frac{(x + 4)'}{x + 4} = 6 - \frac{6}{x + 4}.$$

$$y' = 0, \text{ или } 6 - \frac{6}{x + 4} = 0, \frac{1}{x + 4} = 1, x = -3 \in [-3, 5; 0].$$

Определим знаки производной и поведение функции на данном отрезке:



$x = -3$  — точка минимума функции. Значит, в ней функция имеет наименьшее значение, т. е.  $y_{\text{наим.}} = y(-3) = 6 \cdot (-3) - \ln 1 = -18 - 0 = -18$ .

*Ответ:* -18.

*Замечание.* Решение значительно упростится, если учесть, что  $\ln(x + 4) = 0$ ,  $x + 4 = 1$ ,  $x = -3$  и т. д.

**Пример 12.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2x^2 - 9x + 5 \ln x - 13 \text{ на отрезке } \left[ \frac{1}{10}; \frac{11}{10} \right].$$

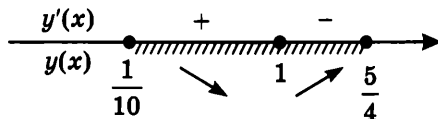
*Решение.*

ОДЗ:  $x > 0$ .

$$y' = (2x^2 - 9x + 5 \ln x - 13)' = 4x - 9 + \frac{5}{x}.$$

Так как  $x > 0$ , то  $y' = 0$ , если  $4x^2 - 9x + 5 = 0$ .

Поскольку  $4 - 9 + 5 = 0$ , то  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{5}{4} \notin \left[ \frac{1}{10}; \frac{11}{10} \right]$ .



$x = 1$  — точка максимума функции, тогда  $y_{\text{наиб.}} = y(1) = 2 - 9 + 0 - 13 = -20$ .

*Ответ:*  $-20$ .

*Замечание.* Аналогично предыдущему примеру имеем  $\ln x = 0$  при  $x = 1$  и т. д.

## 12.6. Тригонометрические функции

**Пример 13.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 24 \cos x + 12\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}\pi + 5 \text{ на отрезке } \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right].$$

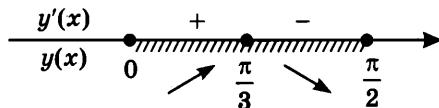
*Решение.*

$$y' = 24(\cos x)' + 12\sqrt{3} \cdot x' - 0 = -24 \sin x + 12\sqrt{3}.$$

$$y' = 0, \text{ или } -24 \sin x + 12\sqrt{3} = 0,$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ откуда } x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

При  $n = 0$  получим  $x = \frac{\pi}{3} \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$  — единственный корень, принадлежащий данному отрезку.



$x = \frac{\pi}{3}$  — точка максимума, значит, в ней функция достигает наибольшего значения:

$$y_{\text{наиб.}} = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 24 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 12\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 4\sqrt{3}\pi + 5 =$$

$$= 24 \cdot \frac{1}{2} + 4\sqrt{3}\pi - 4\sqrt{3}\pi + 5 = 17.$$

Ответ: 17.

**Замечание.** Решение значительно упростится, если учесть, что ответом может быть целое число или конечная десятичная дробь. С учетом этого должно выполняться условие

$$12\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}\pi = 0, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{3}, \text{ и т. д.}$$

**Пример 14.** Найдите наименьшее значение функции  $y = 5 \sin x + \frac{30}{\pi}x + 3$  на отрезке  $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$ .

*Решение.*

$$y' = 5 \cos x + \frac{30}{\pi}, \text{ где } \frac{30}{\pi} \approx 9,6, |\cos x| \leq 1.$$

Значит,  $y' > 0$ , т. е. данная функция является возрастающей, тогда наименьшее значение достигается в начале отрезка, т. е. в точке

$$x = -\frac{5\pi}{6}.$$

Следовательно,

$$y_{\text{наим.}} = y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 5 \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \frac{30}{\pi} \cdot \left(-\frac{5\pi}{6}\right) + 3 = -5 \sin \frac{5\pi}{6} - 25 + 3 =$$

$$= -5 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 22 = -5 \sin \frac{\pi}{6} - 22 = -5 \cdot \frac{1}{2} - 22 = -24,5.$$

Ответ: -24,5.

**Пример 15.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 10 \operatorname{tg} x - 10x + 8 \text{ на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right].$$

*Решение.*

$$y' = (10 \operatorname{tg} x - 10x + 8)' = 10 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 10.$$

$$\text{Но } \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x, \text{ тогда } y' = 10(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 10 = 10 \operatorname{tg}^2 x \geq 0.$$

Значит, данная функция является возрастающей и свое наибольшее значение достигает в конце отрезка, т. е. в точке 0.

$$\text{Следовательно, } y_{\text{наиб.}} = y(0) = 10 \cdot \operatorname{tg} 0 - 10 \cdot 0 + 8 = 8.$$

Ответ: 8.

**Замечание.** Применение формулы  $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$  значительно упрощает решение.

**Пример 16.** Найдите точку максимума функции  $y = (4x - 5) \cos x - 4 \sin x + 7$ , принадлежащую промежутку  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

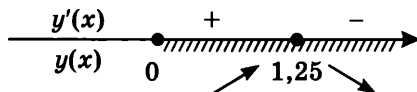
*Решение.*

$$y' = (4x - 5)' \cdot \cos x + (4x - 5) \cdot (\cos x)' - 4(\sin x)' + 0 = \\ = 4 \cos x - (4x - 5) \sin x - 4 \cos x = (5 - 4x) \sin x.$$

$y' = 0$ , если  $5 - 4x = 0$ , или  $\sin x = 0$ .

$$4x = 5, x = 1,25 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Уравнение  $\sin x = 0$ ,  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  не имеет корней, принадлежащих промежутку  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .



$x = 1,25$  — точка максимума функции.

**Ответ:** 1,25.

**Замечание.** Решение значительно сократится, если положить  $4x - 5 = 0$ , т. е.  $x = 1,25$ . Это и будет ответ.

## 12.7. Исследование функций без помощи производной

**Пример 17.** Найдите точку минимума функции  $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$ .

*Решение.*

Заметим, что квадратный трехчлен  $x^2 - 6x + 8$  представляет собой графически параболу, ветви которой направлены вверх, так как  $a = 1 > 0$ , достигает минимума в вершине, абсцисса которой  $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$ .

Поскольку функция  $y = \sqrt{x}$  — возрастающая, то данная функция достигает минимума в той же точке, что и подкоренное выражение.

**Ответ:** 3.

**Пример 18.** Найдите наибольшее значение функции  $y = \sqrt{6 - 5x - x^2}$ .

*Решение.*

Квадратный трехчлен  $6 - 5x - x^2$  представляет собой графически параболу, ветви которой направлены вниз, так как  $a = -1 < 0$  и достигает наибольшего значения в вершине, абсцисса которой  $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{-2} = -2,5$ .

Тогда  $y_0 = 6 - 5 \cdot (-2,5) - (-2,5)^2 = 6 + 12,5 - 6,25 = 12,25$ .

Так как функция  $y = \sqrt{x}$  — возрастающая на  $[0; +\infty)$  и определена в точке 12,25, то для исходной функции  $y_{\text{наиб.}} = \sqrt{12,25} = 3,5$ .

*Ответ:* 3,5.

**Пример 19.** Найдите точку минимума функции

$$y = \log_3 (x^2 - 4x + 7) + 2.$$

*Решение.*

$x^2 - 4x + 7$  — парабола, ветви которой направлены вверх, так как  $a = 1 > 0$ , достигает минимума в точке  $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$ .

Так как функция  $y = \log_3 x$  — возрастающая на  $(0; +\infty)$ , то и исходная функция достигает минимума в точке 2.

*Ответ:* 2.

**Пример 20.** Найдите точку максимума функции  $y = 7^{8x - x^2}$ .

*Решение.*

Поскольку  $7 > 1$ , то функция  $y = 7^x$  — возрастающая, тогда данная функция достигает максимума в той же точке, что и квадратный трехчлен  $8x - x^2$ , представляющий собой графически параболу, ветви которой направлены вниз, так как  $a = -1 < 0$ .

$$x_{\text{max}} = \frac{-b}{2a} = \frac{-8}{-2} = 4.$$

*Ответ:* 4.

**Пример 21.** Найдите наибольшее значение функции

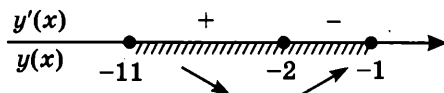
$$y = \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x + 6) \text{ на отрезке } [-11; -1].$$

*Решение.*

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2 \in [-11; -1].$$

$$y_{\text{наиб.}} = y(-2) = \log_{\frac{1}{2}} (4 - 8 + 6) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1.$$

*Ответ:* -1.



## § 13. Задание 13. Уравнения

Здесь предлагается решить различные типы уравнений. При этом решение состоит из двух частей:

- 1) собственно решить уравнение;
- 2) найти корни, принадлежащие отрезку.

Заметим, что корни на отрезке при решении тригонометрических уравнений можно находить по-разному: с помощью двойных неравенств, единичного круга, графически.

Выбор способа остается за учеником и вполне допустим на экзамене.

### 13.1. Тригонометрические уравнения

**Пример 1.** а) Решите уравнение

$$4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 4.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[ \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right].$$

*Решение.*

а) Запишем уравнение в виде

$$4^{\sin^2 x} + 4^{1-\sin^2 x} = 4, \text{ или } 4^{\sin^2 x} + \frac{4}{4^{\sin^2 x}} = 4.$$

Пусть  $4^{\sin^2 x} = t$ , тогда получим уравнение

$$t + \frac{1}{t} = 4, \text{ или } t^2 - 4t + 4 = 0, (t-2)^2 = 0, t-2 = 0, \text{ откуда } t = 2.$$

Учитывая, что  $t = 4^{\sin^2 x}$ , получим  $4^{\sin^2 x} = 2$ , или  $2^{2\sin^2 x} = 2$ ,  
 $2 \sin^2 x = 1$ , или  $1 - 2 \sin^2 x = 0$ .

Так как  $1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x$ , то  $\cos 2x = 0$ ,  $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$ .

б) Корни на отрезке найдем с помощью двойного неравенства:

$$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \leq 2\pi, \text{ или } \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \leq \frac{n}{2} \leq 2 - \frac{1}{4}, \text{ или } \frac{5}{2} \leq n \leq \frac{7}{2},$$

откуда  $n = 3$ , тогда  $x = \frac{7\pi}{4}$ .

*Ответ:* а)  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{7\pi}{4}$ .



**Пример 2.** а) Решите уравнение

$$4 \cos^4 \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = 7 \cos 4x + \sin 2x + 10.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[ -\frac{\pi}{2}; 3\pi \right].$$

*Решение.*

а) Известно, что  $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$ , тогда получим

$$4 \cos^4 \left( \frac{\pi}{4} - x \right) = \left( 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - x \right) \right)^2 = \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - 2x \right) \right)^2 = (1 + \sin 2x)^2.$$

Кроме того,  $\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x$ , и данное уравнение примет вид

$$(1 + \sin 2x)^2 = 7(1 - 2 \sin^2 2x) + \sin 2x + 10, \text{ или}$$

$$1 + 2 \sin 2x + \sin^2 2x = 7 - 14 \sin^2 2x + \sin 2x + 10, \text{ или } 15 \sin^2 2x + \sin 2x - 16 = 0 \text{ — квадратное уравнение относительно } \sin 2x.$$

Пусть  $\sin 2x = t$ , где  $|t| \leq 1$ , тогда получим  $15t^2 + t - 16 = 0$ .

Заметим, что  $15 + 1 - 16 = 0$ , значит,  $t_1 = 1$ , тогда  $t_2 = -\frac{16}{15}$  (не удовлет-

воряет условию  $|t| \leq 1$ ).

Значит,  $t = 1$ , тогда  $\sin 2x = 1$ ,  $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , откуда  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ ,

$n \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{б) } x \in \left[ -\frac{\pi}{2}; 3\pi \right].$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + \pi n \leq 3\pi$ , или  $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \leq n \leq 3 - \frac{1}{4}$ , или  $-\frac{3}{4} \leq n \leq 2\frac{3}{4}$ , откуда  $n = 0$ ; 1; 2.

Если  $n = 0$ , то  $x_1 = \frac{\pi}{4}$ ; если  $n = 1$ , то  $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$ ; если  $n = 2$ ,

$$x_3 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}.$$

Ответ: а)  $\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{4}$ ;  $\frac{5\pi}{4}$ ;  $\frac{9\pi}{4}$ .

**Пример 3.** а) Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$ .

*Решение.*

а) Разделим обе части уравнения на  $\sqrt{2}$ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sin 5x, \text{ или } \cos \frac{\pi}{4}\sin x + \sin \frac{\pi}{4}\cos x = \sin 5x,$$

$$\text{или } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 5x, \sin 5x - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

$$\text{Применив формулу } \sin \alpha - \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$\text{получим } 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = 0, \text{ откуда:}$$

$$1) \sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 0, 2x - \frac{\pi}{8} = \pi n, x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = 0, 3x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$б) x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$1) 0 \leq \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{2} \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{1}{18} \leq \frac{n}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{18}, -\frac{1}{9} \leq n \leq \frac{8}{9}, \text{ откуда } n = 0, x_1 = \frac{\pi}{18};$$

$$2) 0 \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{3} \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{1}{8} \leq \frac{n}{3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{8}, -\frac{3}{8} \leq n \leq \frac{9}{8}, \text{ откуда}$$

$$n = 0, x_2 = \frac{\pi}{8}; n = 1, x_3 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{24}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}; б) \frac{\pi}{18}; \frac{\pi}{8}; \frac{11\pi}{24}.$$

**Пример 4.** а) Решите уравнение

$$2(\sin 2x + \cos 2x) + \sin 4x + 1 = 0.$$

$$б) \text{ Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку } \left[\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right].$$

*Решение.*

а) Пусть  $\sin 2x + \cos 2x = t$ , тогда  $t^2 = 1 + \sin 4x$ , и данное уравнение примет вид  $2t + t^2 = 0$ , или  $t(2 + t) = 0$ , откуда  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = -2$ . Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

1)  $\sin 2x + \cos 2x = 0$  — однородное уравнение I степени. Разделим обе части уравнения на  $\cos 2x \neq 0$ . Деление возможно, ибо в противном случае и  $\sin 2x = 0$ , что невозможно, так как не будет выполняться основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

$$\text{Имеем } \operatorname{tg} 2x + 1 = 0, \operatorname{tg} 2x = -1, 2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \text{ откуда } x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},$$

$$n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin 2x + \cos 2x = -2 \text{ — нет корней, так как } |\sin \alpha + \cos \alpha| = \\ = \sqrt{2} \left| \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}, \text{ так что } |t| \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{б) } \frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \leq 3\pi, \text{ или } \frac{5}{2} + \frac{1}{8} \leq \frac{n}{2} \leq 3 + \frac{1}{8}, \frac{21}{8} \leq \frac{n}{2} \leq \frac{25}{8}, \\ \frac{21}{4} \leq n \leq \frac{25}{4}, \text{ откуда } n = 6 \text{ — единственное целое, тогда} \\ x = -\frac{\pi}{8} + 3\pi = \frac{23\pi}{8}.$$

$$\text{Ответ: а) } x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } \frac{23\pi}{8}.$$

**Пример 5.** а) Решите уравнение

$$\sqrt{3\sin^2 x - 2} = 1 - 3\cos x.$$

$$\text{б) Найдите все корни уравнения на отрезке } \left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right].$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \cos x \leq \frac{1}{3}.$$

а) Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$3\sin^2 x - 2 = 1 - 6\cos x + \cos^2 x, \text{ или}$$

$$3(1 - \cos^2 x) = 3 - 6\cos x + \cos^2 x, \text{ откуда имеем } 2\cos^2 x - \cos x = 0,$$

$$\cos x \cdot (2\cos x - 1) = 0, \cos x = 0 \text{ или } \cos x = \frac{1}{2} \text{ (не удовлетворяет ОДЗ).}$$

$$\text{Если } \cos x = 0, \text{ то } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } -\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq \frac{3\pi}{2},$$

$$-1 - \frac{1}{2} \leq n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}, \text{ или } -1,5 \leq n \leq 1, \text{ откуда } n = -1; 0; 1.$$

$$\text{Если } n = -1, \text{ то } x_1 = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2};$$

$$\text{если } n = 0, x_2 = \frac{\pi}{2}; \text{ если } n = 1, \text{ то } x_3 = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}.$$

**Пример 6. а)** Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x + \sin x}{\sqrt{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}} = 0.$$

б) Найдите все корни уравнения на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ .

*Решение.*

а) ОДЗ:  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$ , или  $2\pi n < x - \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , откуда

$$2\pi n + \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Получим уравнение  $\cos 2x + \sin x = 0$ .

Поскольку  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ , то получим  $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ .

Заметим, что  $2 - 1 - 1 = 0$ , тогда  $\sin x = 1$ ,  $\sin x = -\frac{1}{2}$ .

Учитывая ОДЗ, имеем  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

(серия  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$  не подходит).

б) 1)  $x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2\pi, \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leq 2n \leq 2 - \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{5}{4}, \quad n = 0, n = 1.$$

Если  $n = 0$ , то  $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ; если  $n = 1$ , то  $x_2 = \frac{5\pi}{2}$ .

$$2) -\frac{\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq 2\pi, \text{ или } -\frac{1}{2} - \frac{7}{6} \leq 2n \leq 2 - \frac{7}{6}, \quad -\frac{5}{3} \leq 2n \leq \frac{5}{6},$$

$$-\frac{5}{6} \leq n \leq \frac{5}{12}, \text{ откуда } n = 0, \text{ тогда } x_3 = \frac{7\pi}{6}.$$

Ответ: а)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{2}$ ;  $\frac{5\pi}{2}$ ;  $\frac{7\pi}{6}$ .

**Пример 7. а)** Решите уравнение

$$\log_2 (\cos x + \sin 2x + 8) = 3.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ .

*Решение.*

а) Заметим, что  $\cos x + \sin 2x + 8 > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , так как  $|\cos x| \leq 1$ ,  $|\sin 2x| \leq 1$ .

По определению логарифма имеем  $\cos x + \sin 2x + 8 = 8$ , или  $\cos x + \sin 2x = 0$ .

Так как  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ , то  $\cos x + 2 \sin x \cos x = 0$ , или  $\cos x (1 + 2 \sin x) = 0$ , откуда  $\cos x = 0$  или  $\sin x = -\frac{1}{2}$ .

Если  $\cos x = 0$ , то  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ;

если  $\sin x = -\frac{1}{2}$ ,  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

(или  $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ ).

б)

$$1) \frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq 3\pi, \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \leq n \leq 3 - \frac{1}{2},$$

$$1 \leq n \leq 2,5, \text{ откуда } n = 1, x_1 = \frac{3\pi}{2}, n = 2, x_2 = \frac{5\pi}{2}.$$

$$2) \frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 3\pi,$$

$$\frac{5}{3} \leq 2n \leq \frac{19}{6}, \frac{5}{6} \leq n \leq \frac{19}{12}, \text{ откуда } n = 1, x_3 = \frac{11\pi}{6}.$$

$$3) \frac{3\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq 3\pi,$$

$$\frac{1}{3} \leq 2n \leq \frac{11}{6}, \text{ или } \frac{1}{6} \leq n \leq \frac{11}{12} \text{ — нет целых } n.$$

Ответ: а)  $\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}$ .

**Пример 8.** а) Решите уравнение

$$2\sqrt{3} \sin^2\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) = \sin 2x.$$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi\right]$ .

*Решение.*

а) Так как  $\sin\left(\frac{11\pi}{2} + x\right) = \sin\left(5\pi + \left(\frac{\pi}{2} + x\right)\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$  и

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ , то получим  $2\sqrt{3} (-\cos x)^2 = 2 \sin x \cos x$ , или

$2\sqrt{3} \cos^2 x = 2 \sin x \cos x$ , или  $\cos x (\sqrt{3} \cos x - \sin x) = 0$ , откуда

$\cos x = 0$  или  $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 0$ .

Если  $\cos x = 0$ , то  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Уравнение  $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 0$  является однородным уравнением I степени. Так как  $\cos x = 0$ , то  $\sin x \neq 0$  (ибо не будет выполняться основное тригонометрическое тождество).

Разделив обе части уравнения на  $\sin x \neq 0$ , получим  $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x - 1 = 0$ , или  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , откуда  $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{б) } x \in \left[ -\frac{11\pi}{2}; -4\pi \right],$$

$$1) x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{11\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq -4\pi,$$

$$-\frac{11}{2} - \frac{1}{2} \leq n \leq -4 - \frac{1}{2},$$

$$-6 \leq n \leq -4,5;$$

Значит,  $n = -6, n = -5$ .

Если  $n = -6$ ,

$$x = \frac{\pi}{2} - 6\pi = -\frac{11\pi}{2};$$

если  $n = -5$ ,

$$x = \frac{\pi}{2} - 5\pi = -\frac{9\pi}{2}.$$

$$2) x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{11\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + \pi n \leq -4\pi,$$

$$-\frac{11}{2} - \frac{1}{3} \leq n \leq -4 - \frac{1}{3},$$

$$-\frac{35}{6} \leq n \leq -4\frac{1}{3},$$

$$-5\frac{5}{6} \leq n \leq -4\frac{1}{3},$$

откуда  $n = -5$ ,

$$\text{тогда } x = \frac{\pi}{3} - 5\pi = -\frac{14\pi}{3}.$$

Ответ: а)  $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{14\pi}{3}; -\frac{11\pi}{2}; -\frac{9\pi}{2}$ .

**Пример 9.** а) Решите уравнение

$$\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 1.$$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[4\pi; 6\pi]$ .

*Решение.*

а) Запишем уравнение в виде  $\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{1}{2}$ .

Но  $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$ , тогда получим  $\sin \frac{\pi}{6} \cos 2x - \cos \frac{\pi}{6} \sin 2x = \frac{1}{2}$ .

Как видим, левая часть уравнения представляет синус разности,

$$\text{т. е. } \sin \left( \frac{\pi}{6} - 2x \right) = \frac{1}{2} \text{ или } \sin \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{2},$$

откуда получаем две серии решений:

$$1) \quad 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$2x = 2\pi n, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \quad 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$6) \quad x \in [4\pi; 6\pi].$$

$$1) \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 4\pi \leq \pi n \leq 6\pi, \quad 4 \leq n \leq 6,$$

откуда  $n = 4, n = 5, n = 6$ .

Если  $n = 4$ , то  $x = 4\pi$ ;

если  $n = 5$ ,  $x = 5\pi$ ;

если  $n = 6$ ,  $x = 6\pi$ .

$$2) \quad x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$4\pi \leq -\frac{\pi}{3} + \pi n \leq 6\pi, \quad 4 + \frac{1}{3} \leq n \leq 6 + \frac{1}{3},$$

$$4\frac{1}{3} \leq n \leq 6\frac{1}{3}, \text{ откуда } n = 5, n = 6.$$

$$\text{Если } n = 5, \quad x = -\frac{\pi}{3} + 5\pi = \frac{14\pi}{3};$$

$$\text{если } n = 6, \quad x = -\frac{\pi}{3} + 6\pi = \frac{17\pi}{3}.$$

Ответ: а)  $\pi n$ ;  $-\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $4\pi$ ;  $5\pi$ ;  $6\pi$ ;  $\frac{14\pi}{3}$ ;  $\frac{17\pi}{3}$ .

**Пример 10.** а) Решите уравнение

$$25^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)} = 5^{1-\cos 2x}.$$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие промежутку  $(-5\pi; -2\pi)$ .

*Решение.*

а) Поскольку  $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \sin x$ , то уравнение примет вид

$$25^{\sin x} = 5^{1-\cos 2x}.$$

Приведем обе части полученного уравнения к основанию 5:

$$5^{2 \sin x} = 5^{1-\cos 2x}, \text{ откуда } 2 \sin x = 1 - \cos 2x.$$

Но  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ , значит,  $2 \sin x = 2 \sin^2 x$ , или  $\sin x(1 - \sin x) = 0$ , откуда  $\sin x = 0$ ,

$$x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ или } \sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б)  $x \in (-5\pi; -2\pi)$ .

1)  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $-5\pi < \pi n < -2\pi$ ,  $-5 < n < -2$ , откуда  $n = -4$ ,  $n = -3$ .

Если  $n = -4$ ,  $x = -4\pi$ ; если  $n = -3$ ,  $x = -3\pi$ .

2)  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$-5\pi < -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < -2\pi, \quad -5 - \frac{1}{2} < 2n < -2 - \frac{1}{2},$$

$$-\frac{11}{4} < n < -\frac{5}{4}, \quad -2\frac{3}{4} < n < -1\frac{1}{4}, \quad \text{откуда } n = -2,$$

$$\text{тогда } x = \frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2}.$$

Ответ: а)  $\pi n$ ;  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-4\pi$ ;  $-3\pi$ ;  $-\frac{7\pi}{2}$ .

**Пример 11.** а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

*Решение.*

а) Так как  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x \sin x}$ , то

уравнение запишется в виде  $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{\cos x \sin x}$ .

Но  $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$ , тогда получим

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{2}{\sin 2x}. \quad (1)$$

Пусть  $\sin x + \cos x = y$ , тогда  $y^2 = (\sin x + \cos x)^2$ , или  $y^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x$ , или  $y^2 = 1 + \sin 2x$ , откуда  $\sin 2x = y^2 - 1$ .

Следовательно, уравнение (1) примет вид

$$\sqrt{2} y = \frac{2}{y^2 - 1}, \quad \text{или } \sqrt{2} y^3 - \sqrt{2} y - 2 = 0. \quad (2)$$

Разделив обе части уравнения (2) на  $\sqrt{2}$ , имеем  $y^3 - y - \sqrt{2} = 0$ , или

$$y^3 - 2y + y - \sqrt{2} = 0. \quad (3)$$

Решим уравнение (3) способом группировки:

$$y(y^2 - 2) + (y - \sqrt{2}) = 0, \quad \text{или } y(y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2}) + (y - \sqrt{2}) = 0, \quad \text{или} \\ (y - \sqrt{2})(y^2 + \sqrt{2}y + 1) = 0, \quad \text{откуда } y = \sqrt{2}.$$

Уравнение  $y^2 + \sqrt{2}y + 1 = 0$  не имеет действительных корней, так как  $D = 2 - 4 = -2 < 0$ .



Если  $y = \sqrt{2}$ , то, учитывая замену, получим

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}. \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{Но } \sin x + \cos x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \\ &= \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (4) примет вид  $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ , или

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \text{ откуда } x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n, \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б)  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq \frac{3\pi}{2}, \text{ или } -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \leq 2n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{4}, \text{ или } -\frac{3}{4} \leq 2n \leq \frac{5}{4}, \text{ или } -\frac{3}{8} \leq n \leq \frac{5}{8}, \text{ откуда } n = 0, \text{ тогда } x = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: а)  $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{4}$ .

**Замечание 1.** Данное уравнение можно решить иначе, например, записать уравнение (1) в виде

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{\sin 2x}, \text{ или } \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{1}{\sin 2x}, \text{ или}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{1}{\sin 2x}, \text{ или } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin 2x = 1, \text{ откуда}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \text{ и } \sin 2x = -1, \text{ или } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ и } \sin 2x = 1 \text{ и т. д.}$$

**Замечание 2.** Так как  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 2$  и

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 2, \text{ то } \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \end{cases} \text{ и т. д.}$$

**Пример 12.** а) Решите уравнение

$$\frac{1}{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{1 + \sin^2 x} = \frac{48}{35}.$$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[-\pi; \pi]$ .

**Решение.**

а) Приведем левую часть уравнения к общему знаменателю, учитывая, что  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

$$\text{Получим } \frac{1 + \sin^2 x + 1 + \cos^2 x}{(1 + \cos^2 x)(1 + \sin^2 x)} = \frac{48}{35}, \text{ или } \frac{3}{(1 + \cos^2 x)(1 + \sin^2 x)} = \frac{48}{35},$$

$$\text{или } (1 + \cos^2 x)(1 + \sin^2 x) = \frac{35}{16}. \quad (1)$$

$$\text{Но } \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \text{ и } \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \text{ тогда уравнение (1)}$$

$$\text{примет вид } \left(1 + \frac{1 + \cos 2x}{2}\right) \left(1 + \frac{1 - \cos 2x}{2}\right) = \frac{35}{16}, \text{ или}$$

$$(3 + \cos 2x)(3 - \cos 2x) = \frac{35}{4}, \text{ или } 9 - \cos^2 2x = \frac{35}{4}, \text{ или } \cos^2 2x = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Вновь понижая степень полученного уравнения, имеем } \frac{1 + \cos 4x}{2} = \frac{1}{4},$$

$$\text{откуда } 1 + \cos 4x = \frac{1}{2}, \text{ или } \cos 4x = -\frac{1}{2}, 4x = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,$$

$$4x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \text{ откуда } x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

**Замечание 1.** Если бы в уравнении  $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$  мы не понизили степень, то в результате получили бы 4 серии решений, что значительно удлинит решение уравнения в части б).

б)  $x \in [-\pi; \pi]$ .

$$1) x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leq \pi, -1 + \frac{1}{6} \leq \frac{n}{2} \leq 1 + \frac{1}{6},$$

$$-\frac{5}{2} \leq n \leq \frac{7}{3}, \text{ откуда}$$

$$n = -2, n = -1, n = 0, n = 1, n = 2,$$

$$n = -2, x_1 = -\frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{7\pi}{6};$$

$$n = -1, x_2 = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{3};$$

$$n = 0, x_3 = -\frac{\pi}{6};$$

$$n = 1, x_4 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3};$$

$$n = 2, x_5 = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

$$2) x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z,$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leq \pi, -\frac{7}{6} \leq \frac{n}{2} \leq \frac{5}{6}, -\frac{7}{3} \leq n \leq \frac{5}{3},$$

$$n = -2, n = -1, n = 0, n = 1,$$

$$n = -2, x_6 = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6};$$

$$n = -1, x_7 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3};$$

$$n = 0, x_8 = \frac{\pi}{6};$$

$$n = 1, x_9 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Ответ: а) } \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z; \text{ б) } -\frac{7\pi}{6}; \pm \frac{2\pi}{3}; \pm \frac{\pi}{3}; \pm \frac{5\pi}{6}; \pm \frac{\pi}{6}.$$

**Замечание 2.** Уравнение (1) можно свести к биквадратному, если учесть, что  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$  (или  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ ) и т. д.

**Замечание 3.** Обозначив  $1 + \cos^2 x = a$ ,

$$1 + \sin^2 x = b, \text{ где } a > 0, b > 0, \text{ получим } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{48}{35}.$$

Кроме того,  $a + b = 2 + (\cos^2 x + \sin^2 x) = 3$ . Далее решить систему уравнений  $\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{48}{35}, \\ a + b = 3, \end{cases}$  и т. д.

**Пример 13.** а) Решите уравнение

$$4(\sin^3 x + \cos^3 x) = 3(\sin x + \cos x).$$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$ .

*Решение.*

а) Запишем уравнение в виде

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

$$\text{Но } 4 \cos^3 x - 3 \cos x = \cos 3x \text{ и } 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin 3x.$$

Тогда  $\cos 3x = \sin 3x$  — однородное уравнение I степени. Разделив обе части на  $\cos 3x \neq 0$ , имеем  $\operatorname{tg} 3x = 1$ ,  $3x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in Z$ .

$$\text{б) } x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right].$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} \leq -\frac{\pi}{2}, -1 - \frac{1}{12} \leq \frac{n}{3} \leq -\frac{1}{2} - \frac{1}{12},$$

$$-\frac{13}{12} \leq \frac{n}{3} \leq -\frac{7}{12}, -\frac{13}{4} \leq n \leq -\frac{7}{4},$$

$$-3\frac{1}{4} \leq n \leq -1\frac{3}{4}, \text{ откуда } n = -3, n = -2.$$

$$\text{Если } n = -3, \text{ то } x = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12};$$

$$\text{если } n = -2, x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } -\frac{11\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12}.$$

**Замечание.** Исходное уравнение можно решить иначе, записав его в виде  $4(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 3(\sin x + \cos x)$ .

Далее вынести общий множитель  $\sin x + \cos x$  за скобки и т. д. Приведенное решение является самым коротким и изящным (прим. автора).

## 13.2. Рациональные уравнения

**Пример 14.** а) Решите уравнение

$$8(1 - 3x)^3 - 27(x - 2)^3 = 343 - 729x^3.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку  $[-2; 0]$ .

*Решение.*

а) Заметим, что равенство  $2(1 - 3x) - 3(x - 2) = 7 - 9x$  является тождеством. Учитывая, что члены исходного уравнения являются соответственно кубами членов этого тождества, разделим обе части данного уравнения на полученное тождество:

$$4(1 - 3x)^2 + 6(1 - 3x)(x - 2) + 9(x - 2)^2 = 49 + 63x + 81x^2,$$

откуда (после упрощений) получим квадратное уравнение

$$18x^2 + 27x + 7 = 0, \text{ корни которого } x_1 = -\frac{1}{3}, x_2 = -\frac{7}{6}.$$

Еще один корень получим из уравнения  $7 - 9x = 0$ , откуда  $x_3 = \frac{7}{9}$ .

Итак, исходное уравнение имеет ровно 3 корня.

$$\text{б) } x_1 = -\frac{1}{3} \in [-2; 0], \text{ так как } -2 < -\frac{1}{3} < 0;$$

$$x_2 = -\frac{7}{6} \in [-2; 0], \text{ так как } -2 < -\frac{7}{6} < 0;$$

$$x_3 = \frac{7}{9} \notin [-2; 0], \text{ так как } \frac{7}{9} > 0.$$

$$\text{Ответ: а) } -\frac{1}{3}; -\frac{7}{6}; \frac{7}{9}.$$

**Пример 15. а) Решите уравнение**

$$x^4 - (2x - 3)(4x^2 - 6x + 9) = 0.$$

**б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку  $[\sqrt{7}; 4]$ .**

*Решение.*

а) Заметим, что раскрытие скобок лишь усложняет решение, а неполный квадрат разности  $4x^2 - 6x + 9$  ничего не дает.

Нетрудно видеть, что  $x = 1,5$  не является корнем данного уравнения, тогда, разделив обе части уравнения на  $(2x - 3)^2 \neq 0$ , получим

$$\frac{x^4}{(2x-3)^2} - \frac{4x^2 - 6x + 9}{2x-3} = 0, \text{ или } \frac{x^4}{(2x-3)^2} - \frac{4x^2}{2x-3} + \frac{3(2x-3)}{2x-3} = 0, \text{ или}$$

$$\frac{x^4}{(2x-3)^2} - \frac{4x^2}{2x-3} + 3 = 0.$$

Теперь идея решения ясна.

Пусть  $\frac{x^2}{2x-3} = y$ , тогда имеем  $y^2 - 4y + 3 = 0$ , откуда  $y_1 = 1, y_2 = 3$ .

Если  $y = 1$ , то  $\frac{x^2}{2x-3} = 1, x^2 - 2x + 3 = 0$  — нет действительных корней.

Если  $y = 3$ , то  $\frac{x^2}{2x-3} = 3, x^2 - 6x + 9 = 0$ , или

$(x - 3)^2 = 0$ , т. е.  $x = 3$  — единственный корень исходного уравнения.

б) Сравним 3 и  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{9} > \sqrt{7}$ .

Значит,  $3 > \sqrt{7}$  и  $3 < 4$ , т. е.  $\sqrt{7} < 3 < 4$ .

*Ответ:* а) 3; б) 3.

**Пример 16. а) Решите уравнение**

$$x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 4 = 0.$$

**б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку  $[2; \sqrt{10}]$ .**

*Решение.*

а) Испытывая делитель свободного члена, можно убедиться, что уравнение не имеет целых корней (если вообще имеет). Тем интереснее нахождение идеи решения.

Запишем уравнение в виде

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 6x^2. \quad (1)$$

Прибавим к обеим частям (1) по  $\frac{1}{4}x^2$  (чтобы выделить полный квадрат):

$$\left(x^4 + x^3 + \frac{1}{4}x^2\right) - 4\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) + 4 = 6x^2 + \frac{1}{4}x^2, \text{ или}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) + 4 = \frac{25}{4}x^2. \quad (2)$$

Теперь видим, что левая часть (2) — квадрат разности двух чисел:

$$x^2 + \frac{1}{2}x \text{ и } 2, \text{ тогда уравнение (2) запишется в виде } \left(x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right)^2 = \frac{25}{4}x^2,$$

откуда имеем два уравнения:

$$1) \ x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = \frac{5}{2}x,$$

$$2) \ x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = -\frac{5}{2}x,$$

$$\text{или } x^2 - 2x - 2 = 0,$$

$$\text{или } x^2 + 3x - 2 = 0,$$

$$D/4 = 1 + 2 = 3 > 0,$$

$$D = 9 + 8 = 17 > 0,$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3};$$

$$x_{3,4} = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{17}).$$

Итак, исходное уравнение имеет 4 корня.

$$б) \ x_1 = 1 - \sqrt{3} \notin [2; \sqrt{10}], \text{ так как } 1 - \sqrt{3} < 2 < 0;$$

$$x_2 = 1 + \sqrt{3} \in [2; \sqrt{10}], \text{ так как } 2 < 1 + \sqrt{3} < \sqrt{10};$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{17}) < 0, \text{ т. е. } \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{17}) \notin [2; \sqrt{10}];$$

$$x_4 = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{17}).$$

$$\text{Сравним } \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{17}) \text{ и } 2, -3 + \sqrt{17} \text{ и } 4; \sqrt{17} \text{ и } 4 + 3; \sqrt{17} < 7.$$

$$\text{Значит, } \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{17}) < 2.$$

$$\text{Из найденных корней лишь корень } 1 + \sqrt{3} \in [2; \sqrt{10}].$$

$$\text{Ответ: а) } 1 \pm \sqrt{3}; \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{17}); б) 1 + \sqrt{3}.$$

**Пример 17.** а) Решите уравнение

$$\frac{224}{x(x+6)} = \frac{112}{x(x+3)} + x^2 + 3x.$$

$$б) \text{ Найдите его корни, принадлежащие отрезку } \left[-9; \frac{2}{3}\right].$$

*Решение.*

$$\text{а) Заметим, что } 6x^2 - 17x + 12 = (3x - 4)(2x - 3), \ 3x^2 - 7x + 4 = (3x - 4)(x - 1), \text{ тогда уравнение примет вид}$$

$$\frac{1}{(3x - 4)(2x - 3)} + \frac{1}{(3x - 4)(x - 1)} = 4x^2 - 10x + 5. \quad (1)$$

ОДЗ:  $x \neq \frac{4}{3}$ ,  $x \neq \frac{3}{2}$ ,  $x \neq 1$ .

Приведем левую часть (1) к общему знаменателю:

$$\begin{aligned}\frac{x-1+2x-3}{(3x-4)(2x-3)(x-1)} &= 4x^2 - 10x + 5, \text{ или} \\ \frac{3x-4}{(3x-4)(2x-3)(x-1)} &= 4x^2 - 10x + 5, \text{ или} \\ \frac{1}{(2x-3)(x-1)} &= 2(2x^2 - 5x + 3) - 1. \quad (2)\end{aligned}$$

Но  $2x^2 - 5x + 3 = (2x - 3)(x - 1)$ , тогда (2) запишется в виде

$$\frac{1}{(2x-3)(x-1)} = 2(2x-3)(x-1) - 1. \quad (3)$$

Заменой  $(2x - 3)(x - 1) = y$  уравнение (3) приводится к виду  $\frac{1}{y} = 2y - 1$ ,

или  $2y^2 - y - 1 = 0$ , откуда находим  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = -\frac{1}{2}$ .

Учитывая замену, получим два уравнения:

$$1) (2x - 3)(x - 1) = 1, \quad 2) (2x - 3)(x - 1) = -\frac{1}{2},$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0, \quad 2x^2 - 5x + 3 = -\frac{1}{2},$$

$$\text{откуда } x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}; \quad \text{или } 4x^2 - 10x + 7 = 0 —$$

нет корней, так как  $D < 0$ .

Оба найденных корня удовлетворяют ОДЗ, значит, являются корнями исходного уравнения.

$$\text{б) } x_1 = 2 \notin \left[-9; \frac{2}{3}\right], \text{ так как } 2 > \frac{2}{3};$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \in \left[-9; \frac{2}{3}\right], \text{ так как } -9 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}.$$

Ответ: а)  $2; \frac{1}{2}$ ; б)  $\frac{1}{2}$ .

**Пример 18.** а) Решите уравнение

$$\frac{1}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{1}{6x^2 - 19x + 15} = 2(6x^2 - 16x + 9).$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{5}{3}; 3\right]$ .

*Решение.*

а) Заметим, что  $2x^2 - 5x + 3 = (2x - 3)(x - 1)$  и

$6x^2 - 19x + 15 = (2x - 3)(3x - 5)$ , тогда данное уравнение примет вид

$$\frac{1}{(2x-3)(3x-5)} + \frac{1}{(2x-3)(x-1)} = 2(6x^2 - 16x + 9),$$

где  $x \neq 1, 5$ ;  $x \neq 5/3$ ;  $x \neq 1$ .

Далее имеем 
$$\frac{x-1+3x-5}{(2x-3)(3x-5)(x-1)} = 2(6x^2 - 16x + 9),$$

или 
$$\frac{1}{(3x-5)(x-1)} = 2(3x-5)(x-1) - 1.$$

Пусть  $(3x-5)(x-1) = y$ , тогда получим  $\frac{1}{y} = 2y - 1$ , или  $2y^2 - y - 1 = 0$ .

Так как  $2 - 1 - 1 = 0$ , то  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = -\frac{1}{2}$ .

Имеем два уравнения:

1)  $(3x-5)(x-1) = 1$ , или  $3x^2 - 8x + 4 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 2$ ,  
 $x_2 = \frac{2}{3}$ ;

2)  $(3x-5)(x-1) = -\frac{1}{2}$ , или  $6x^2 - 16x + 11 = 0$  — нет действительных корней, так как  $D < 0$ .

Следовательно, исходное уравнение имеет два корня.

б)  $x = 2 \in \left[\frac{5}{3}; 3\right]$ , так как  $\frac{5}{3} < 2 < 3$ .

$x = \frac{2}{3} < 1$ , а  $\frac{5}{3} > 1$ , значит,  $\frac{2}{3} \notin \left[\frac{5}{3}; 3\right]$ .

Ответ: а)  $2; \frac{2}{3}$ ; б)  $2$ .

### 13.3. Иррациональные уравнения

**Пример 19.** а) Решите уравнение

$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{8}{13} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{4}{3}; \frac{8}{9}\right]$ .



*Решение.*

а)

І способ

Идея решения заключается в применении формулы

$$\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = 2 \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

Пусть  $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = t$ , тогда  $\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{t}$ ,

$$t^3 + \frac{1}{t^3} = \frac{1-x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x} = \frac{2(1+x^2)}{1-x^2}, \text{ откуда}$$

$$\frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left( t^3 + \frac{1}{t^3} \right).$$

В этом случае исходное уравнение запишется в виде

$$t + \frac{1}{t} = \frac{14}{3} \left( t^3 + \frac{1}{t^3} \right), \text{ или} \\ t + \frac{1}{t} = \frac{14}{3} \left( t + \frac{1}{t} \right) \left( t^2 + \frac{1}{t^2} - 1 \right). \quad (1)$$

Заметим, что  $t + \frac{1}{t} \neq 0$ , тогда уравнение (1) примет вид  $13 = 4 \left( t^2 + \frac{1}{t^2} - 1 \right)$ ,  
или  $13t^2 = 4(t^4 - t^2 + 1)$ , или  $13t^2 = 4t^4 - 4t^2 + 4$ , или  $4t^4 - 17t^2 + 4 = 0$ ,  
откуда находим  $(t^2)_1 = 4$ ,  $(t^2)_2 = \frac{1}{4}$ , т. е.  $t_{1,2} = \pm 2$ ,  $t_{3,4} = \pm \frac{1}{2}$ .

Учитывая замену  $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = t$ , выразим  $x$  через  $t$ :

$$\frac{1+x}{1-x} = t^3, \text{ или } \frac{2}{2x} = \frac{t^3+1}{t^3-1}, \text{ откуда } x = \frac{t^3-1}{t^3+1}.$$

Если  $t = -2$ , то  $x = \frac{-9}{-7} = \frac{9}{7}$ ; если  $t = 2$ , то  $x = \frac{7}{9}$ ;

если  $t = \frac{1}{2}$ , то  $x = -\frac{7}{9}$ ; если  $t = -\frac{1}{2}$ , то  $x = -\frac{9}{7}$ .

Итак, исходное уравнение имеет 4 корня.

б)  $x = \frac{9}{7} > \frac{8}{9}$ , значит, корень  $x = \frac{9}{7} \notin \left[ -\frac{4}{3}; \frac{8}{9} \right]$ ;

$x = -\frac{9}{7} = -1\frac{2}{7} \in \left[ -\frac{4}{3}; \frac{8}{9} \right]$ , так как  $-\frac{9}{7} > -\frac{4}{3}$ ;

$x = -\frac{7}{9} \in \left[ -\frac{4}{3}; \frac{8}{9} \right]$ , т. е.  $-\frac{4}{3} = -\frac{12}{9} < -\frac{7}{9}$ ;

$x = \frac{7}{9} < \frac{8}{9}$ , значит,  $\frac{7}{9} \in \left[ -\frac{4}{3}; \frac{8}{9} \right]$ .

## II способ

Идея решения основана на том, что если  $a + b + c = 0$ , то  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .

В нашем случае

$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = a, \quad \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = b, \quad -\frac{8}{13} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2} = c.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x} - \frac{8^3}{13^3} \cdot \left( \frac{1+x^2}{1-x^2} \right)^3 &= -3 \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2}, \text{ или} \\ \frac{2(1+x^2)}{1-x^2} - \frac{8^3}{13^3} \cdot \left( \frac{1+x^2}{1-x^2} \right)^3 &= -\frac{24}{13} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее замена  $\frac{1+x^2}{1-x^2} = y$  приводит уравнение (2) к виду

$$\begin{aligned} 2y - \frac{8^3}{13^3} \cdot y^3 &= -\frac{24}{13} y, \text{ или } \frac{50}{13} y - \frac{8^3}{13^3} y^3 = 0, \text{ откуда находим } y_1 = 0, \text{ или} \\ y^2 &= \frac{65^2}{16^2}, \text{ т. е. } y_{2,3} = \pm \frac{65}{16}. \end{aligned}$$

Аналогично, учитывая замену  $\frac{1+x^2}{1-x^2} = y$ , находим  $x_{1,2} = \pm \frac{9}{7}$ ,  $x_{3,4} = \pm \frac{7}{9}$ .

**Замечание.** Если  $y = 0$ , то уравнение  $\frac{1+x^2}{1-x^2} = 0$  не имеет действительных корней.

**Ответ:** а)  $\pm \frac{9}{7}$ ;  $\pm \frac{7}{9}$ ; б)  $-\frac{9}{7}$ ;  $\pm \frac{7}{9}$ .

**Пример 20.** а) Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+2} = \sqrt[3]{x-2}.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$ .

**Решение.**

а) После почленного возведения уравнения в куб и подстановки  $\sqrt[3]{x-2}$  вместо суммы  $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+2}$  имеем

$$x + 2 + 3x + 2 + 3\sqrt[3]{(x+2)(3x+2)} \cdot \sqrt[3]{x-2} = x - 2,$$

$$3\sqrt[3]{(x+2)(3x+2)(x-2)} = -3(x+2), \text{ или}$$

$$(x+2)(3x+2)(x-2) + (x+2)^3 = 0,$$

$$(x + 2)((3x + 2)(x - 2) + (x + 2)^2) = 0,$$

откуда  $x + 2 = 0$ ,

$$x_1 = -2, \text{ либо } (3x + 2)(x - 2) + (x + 2)^2 = 0;$$

$$3x^2 + 2x - 6x - 4 + x^2 + 4x + 4 = 0, 4x^2 = 0,$$

откуда  $x_2 = 0$ .

Из найденных корней исходному уравнению удовлетворяет лишь корень  $x_1 = -2$ .

Корень  $x_2 = 0$  — посторонний.

Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень.

$$\text{б) } x = -2 \in \left[-3; \frac{1}{3}\right].$$

Ответ: а)  $-2$ ; б)  $-2$ .

**Пример 21.** а) Решите уравнение

$$4x^2 + 12x + 3\sqrt{x^2 + 3x + 1} = 3.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[-1; 2]$ .

*Решение.*

а) Понятно, что уединение корня и последующее возведение в квадрат обеих частей полученного уравнения привели бы к весьма сложному уравнению. Вместе с тем, записав уравнение в виде

$$4(x^2 + 3x + 1) + 3\sqrt{x^2 + 3x + 1} = 7 \text{ и обозначив}$$

$\sqrt{x^2 + 3x + 1} = y$ , где  $y \geq 0$ , получим уравнение

$$4y^2 + 3y - 7 = 0.$$

Так как  $4 + 3 - 7 = 0$ , то  $y_1 = 1$  — корень квадратного уравнения, тогда  $y_1 \cdot y_2 = -\frac{7}{4}$ , откуда  $y_2 = -\frac{7}{4}$  (не подходит ввиду того, что  $y \geq 0$ ).

Если  $y = 1$ , то  $x^2 + 3x + 1 = 1$ ,  $x^2 + 3x = 0$ ;  $x(x + 3) = 0$ , откуда  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -3$ . Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

б)  $x_1 = 0 \in [-1; 2]$ ,  $x_2 = -3 \notin [-1; 2]$ .

Ответ: а)  $0; -3$ ; б)  $0$ .

**Пример 22.** а) Решите уравнение  $\sqrt{7(x-1)} - \sqrt{3x-4} = \sqrt{4x-3}$ .

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[1; \frac{7}{3}\right]$ .

*Решение.*

а) I способ

Возведя почленно обе части в квадрат, получим

$$7x - 7 - 2\sqrt{(7x-7)(3x-4)} + 3x - 4 = 4x - 3;$$

$$6x - 8 = 2\sqrt{(7x-7)(3x-4)}, \text{ или}$$

$$3x - 4 = \sqrt{(7x-7)(3x-4)}.$$

Возведем еще раз почленно в квадрат:

$$9x^2 - 24x + 16 = 21x^2 - 21x - 28x + 28;$$

$$12x^2 - 25x + 12 = 0; D = 625 - 576 = 49 = 7^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{25 \pm 7}{24}, \quad x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = \frac{4}{3}.$$

Из исходного уравнения следует, что

$$x - 1 \geq 0; 3x - 4 \geq 0, 4x - 3 \geq 0, \text{ т. е. } x \geq \frac{4}{3}.$$

Следовательно, корень  $x_1 = \frac{3}{4}$  — посторонний, а корень  $x_2 = \frac{4}{3}$  удовлетворяет.

$$\text{б) } 1 < \frac{4}{3} < \frac{7}{3}, \text{ т. е. } x = \frac{4}{3} \in \left[1; \frac{7}{3}\right].$$

## II способ

Запишем исходное уравнение в виде

$$\sqrt{7(x-1)} = \sqrt{4x-3} + \sqrt{3x-4}.$$

$$\text{Тогда } 7x - 7 = 4x - 3 + 2\sqrt{(4x-3)(3x-4)} + 3x - 4;$$

$$0 = 2\sqrt{(4x-3)(3x-4)}, \text{ откуда } (4x-3)(3x-4) = 0, \quad x_1 = \frac{3}{4} \text{ (не удовлетворяет), } x_2 = \frac{4}{3}.$$

Отсюда видно, что второе решение значительно проще по сравнению с первым.

Итак,  $x = \frac{4}{3}$  — корень уравнения.

Ответ: а)  $\frac{4}{3}$ ; б)  $\frac{4}{3}$ .

## 13.4. Логарифмические и показательные уравнения

**Пример 23.** а) Решите уравнение

$$64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку  $\left(1; \frac{7}{3}\right)$ .

*Решение.*

а) Так как  $12^x > 0$  при любом  $x \in \mathbb{R}$ , то, разделив обе части уравнения на  $12^x \neq 0$ , получим

$$64 \cdot \left(\frac{9}{12}\right)^x - 84 + 27 \cdot \left(\frac{16}{12}\right)^x = 0, \text{ или}$$

$$64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 27 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x - 84 = 0.$$

Пусть  $\left(\frac{3}{4}\right)^x = t$ , где  $t > 0$ , тогда получим уравнение  $64t + \frac{27}{t} - 84 = 0$ ,  
или  $64t^2 - 84t + 27 = 0$ ,

$$D/4 = 42^2 - 64 \cdot 27 = 36 = 6^2 > 0, \quad t_{1,2} = \frac{42 \pm 6}{64}, \quad t_1 = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}, \quad t_2 = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}.$$

Если  $t = \frac{3}{4}$ , то  $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4}$ , откуда  $x_1 = 1$ ; если  $t = \frac{9}{16}$ , то  $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{9}{16}$ ,  
откуда  $x_2 = 2$ .

$$\text{б) } x_1 = 1 \notin \left(1; \frac{7}{3}\right), \quad x_2 = 2 \in \left(1; \frac{7}{3}\right), \text{ так как } 1 < 2 < \frac{7}{3}.$$

*Ответ:* а) 1; 2; б) 2.

**Пример 24.** а) Решите уравнение

$$\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[-1; 1,5]$ .

*Решение.*

а) Запишем уравнение в виде  $\log_3(x+1)(x+3) = 1$ .

С учетом области определения исходного уравнения имеем смешанную систему

$$\begin{cases} (x+1)(x+3) = 3, \\ x+1 > 0, \\ x+3 > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 4x = 0, \\ x+1 > 0. \end{cases}$$

Решая уравнение  $x^2 + 4x = 0$ , имеем

$$x(x+4) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -4.$$

Из найденных значений последней системе удовлетворяет лишь корень  $x = 0$ . Значит,  $x = 0$  — корень исходного уравнения.

б)  $x = 0 \in [-1; 1,5]$ .

*Ответ:* а) 0; б) 0.

**Пример 25.** а) Решите уравнение

$$\log_7(2^x - 1) + \log_7(2^x - 7) = 1.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[-1; \sqrt{10}]$ .

*Решение.*

а) Область определения уравнения равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} 2^x - 1 > 0, \\ 2^x - 7 > 0, \end{cases} \text{ откуда } 2^x > 7.$$

Потенцируя данное уравнение, имеем

$\log_7 (2^x - 1)(2^x - 7) = 1$ , откуда по определению логарифма получим уравнение

$$(2^x - 1)(2^x - 7) = 7, \text{ или } (2^x)^2 - 8 \cdot 2^x = 0;$$

$$2^x(2^x - 8) = 0, 2^x > 0 \text{ при любом } x \in \mathbb{R}.$$

Тогда  $2^x - 8 = 0$ ,  $2^x = 8$ , откуда  $x = 3$  — корень исходного уравнения ( $2^x > 7$ ).

$$\text{б) } x = 3 \in (-1; \sqrt{10}), \text{ так как } -1 < 3 < \sqrt{10}.$$

*Ответ:* а) 3; б) 3.

**Пример 26.** а) Решите уравнение

$$\log_6 \sqrt{x-2} + \frac{1}{2} \log_6 \sqrt{x-11} = 1.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \log_3 \frac{1}{6}; \frac{47}{3} \right]$ .

*Решение.*

а) Область определения данного уравнения равносильна системе неравенств  $\begin{cases} x-2 > 0, \\ x-11 > 0, \end{cases}$  откуда  $x > 11$ .

Запишем уравнение в виде

$$\log_6 \sqrt{x-2} + \log_6 \sqrt{x-11} = 1,$$

$$\log_6 \sqrt{(x-2)(x-11)} = 1, \text{ откуда } \sqrt{(x-2)(x-11)} = 6.$$

Возведя обе части полученного уравнения в квадрат и упрощая, имеем  $(x-2)(x-11) = 36$ ,  $x^2 - 13x - 14 = 0$ , откуда  $x_1 = 14$ ,  $x_2 = -1$ .

Так как  $x > 11$ , то корень  $x_2 = -1$  не подходит.

Значит,  $x = 14$  — корень данного уравнения.

$$\text{б) } x = 14 > \log_3 \frac{1}{6}, \text{ так как } \log_3 \frac{1}{6} = -\log_3 6 < 0 \text{ и } 14 < \frac{47}{3} = 15\frac{2}{3}.$$

*Ответ:* а) 14; б) 14.

**Пример 27.** а) Решите уравнение

$$(x+1)^{\lg(x+1)} = 100(x+1).$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ -\frac{4}{3}; 2 \right]$ .

*Решение.*

а) Область определения уравнения  $x + 1 > 0$ , т. е.  $x > -1$ .

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10:

$\lg(x+1) \lg(x+1) = \lg 100 + \lg(x+1)$ , или  $\lg^2(x+1) - \lg(x+1) - 2 = 0$  — квадратное уравнение относительно  $\lg(x+1)$ .

Решая его, находим  $\lg(x+1) = 2$ ,  $x+1 = 100$ ,  $x_1 = 99$ ;  $\lg(x+1) = -1$ ,  $x+1 = 0,1$ ,  $x_2 = -0,9$ .

Оба корня удовлетворяют условию  $x > -1$ , значит, являются корнями исходного уравнения.

$$\text{б) } x_1 = 99 > 2, \text{ значит, } x_1 = 99 \notin \left[-\frac{4}{3}; 2\right];$$

$$x_2 = -0,9 \in \left[-\frac{4}{3}; 2\right].$$

Ответ: а)  $-0,9$ ;  $99$ ; б)  $-0,9$ .

**Пример 28.** а) Решите уравнение

$$10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\lg \frac{1}{12}; \frac{15}{7}\right]$ .

*Решение.*

а) Область определения уравнения задается условиями  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ .

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10, предварительно упростив его:

$$(10^{\lg x})^{\lg x} + x^{\lg x} = 20, \quad x^{\lg x} + x^{\lg x} = 20, \quad x^{\lg x} = 10,$$

$$\lg^2 x = \lg 10, \text{ или } \lg^2 x = 1, \text{ откуда } \lg x = \pm 1, \text{ значит, } x_1 = 10, x_2 = 0,1.$$

Оба значения удовлетворяют ограничениям  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ , значит, являются корнями исходного уравнения.

$$\text{б) } x_1 = 10 \notin \left[\lg \frac{1}{12}; \frac{15}{7}\right], \text{ так как } 10 > \frac{15}{7},$$

$$x_2 = 0,1 \in \left[\lg \frac{1}{12}; \frac{15}{7}\right], \text{ так как } \lg \frac{1}{12} = -\lg 12 < 0 \text{ и } 0,1 < \frac{15}{7}.$$

Ответ: а)  $0,1$ ;  $10$ ; б)  $0,1$ .

**Пример 29.** а) Решите уравнение

$$6 \cdot 4^x - 6^x - 2 \cdot 9^x = 0.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\frac{1}{3}; \log_3 5\right]$ .

*Решение.*

а) Так как  $4^x > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , то, разделив обе части уравнения на  $4^x \neq 0$ , получим равносильное уравнение

$$6 - \frac{6^x}{4^x} - 2 \cdot \frac{9^x}{4^x} = 0, \text{ или } 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 6 = 0.$$

Получим квадратное уравнение относительно переменной  $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ .

Пусть  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$ , где  $t > 0$ , тогда  $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = t^2$ .

Имеем  $2t^2 + t - 6 = 0$ ,  $D = 1 + 48 = 49 = 7^2 > 0$ ,  $t_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{4}$ ,  $t_1 = \frac{3}{2}$ ,  $t_2 = -2$  (не удовлетворяет условию  $t > 0$ ).

Если  $t = \frac{3}{2}$ , то  $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$ , откуда  $x = 1$  — единственный корень исходного уравнения.

б) Заметим, что  $x = 1 > \frac{1}{3}$ .

Кроме того,  $\log_3 5 > \log_3 3 = 1$ , значит,  $1 < \log_3 5$ , т. е.  $x = 1 \in \left[\frac{1}{3}; \log_3 5\right]$ .

Ответ: а) 1; б) 1.

**Пример 30.** а) Решите уравнение

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[\log_3 4; \log_3 10]$ .

*Решение.*

а) Запишем уравнение в виде

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 6, \text{ или } 4^{x+\sqrt{x^2-2}} - \frac{5}{2} \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 6.$$

Обозначим  $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = t$ , где  $t > 0$ . Тогда получим квадратное уравнение относительно  $t$ :  $t^2 - \frac{5}{2}t = 6$ , или  $2t^2 - 5t - 12 = 0$ ,  $D = 25 + 96 = 121 = 11^2 > 0$ ,  $t_{1,2} = \frac{5 \pm 11}{4}$ , откуда  $t_1 = 4$ ,  $t_2 = -\frac{3}{2}$ .

Поскольку  $t > 0$ , корень  $t_2 = -\frac{3}{2}$  не подходит.

Если  $t = 4$ , то, учитывая замену, имеем  $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4$ , или  $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 2^2$ , откуда  $x + \sqrt{x^2-2} = 2$ , или  $\sqrt{x^2-2} = 2 - x$ .

Получим иррациональное уравнение, где  $2 - x \geq 0$ , т. е.  $x \leq 2$ .



Возведем обе части полученного уравнения в квадрат:  $x^2 - 2 = (2 - x)^2$ ,  
или  $x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2$ , или  $4x = 6$ ,  $x = \frac{3}{2} = 1,5$ .

б) Сравним  $x = 1,5$  и  $\log_3 4$ .

$1,5 = \log_3 3^{1,5}$  и  $\log_3 4$ ,  $3^{\frac{3}{2}}$  и  $4$ ,  $\sqrt{3^3}$  и  $4$ ,  $\sqrt{27} > \sqrt{16}$ .

Значит,  $1,5 > \log_3 4$ . Теперь сравним  $1,5$  и  $\log_3 10$ .

Заметим, что  $\log_3 10 > \log_3 9 = 2$ , т. е.  $1,5 < \log_3 10$ .

Следовательно, корень  $x = 1,5 \in [\log_3 4; \log_3 10]$ .

Ответ: а) 1,5; б) 1,5.

**Пример 31.** а) Решите уравнение

$$x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} - \frac{1}{x} = 0.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[\lg 9; \frac{4}{3}\right]$ .

*Решение.*

а) Область определения уравнения  $x > 0$ .

Запишем уравнение в виде  $x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} = x^{-1}$ .

Прологарифмируем обе части полученного уравнения по основанию 10:  
 $(2 - \lg^2 x - \lg x^2) \cdot \lg x = -\lg x$ , или  $\lg x \cdot (2 - \lg^2 x - \lg x^2 + 1) = 0$ , откуда  
имеем:

1)  $\lg x = 0$ ,  $x = 10^0 = 1$ ;

2)  $2 - \lg^2 x - \lg x^2 + 1 = 0$ , или  $\lg^2 x + 2 \lg x - 3 = 0$ , где  $\lg x^2 = 2 \lg x$ ,  
так как  $x > 0$ .

Решая это уравнение как квадратное относительно  $\lg x$ , находим  
 $\lg x = -3$ ,  $x = 10^{-3} = 0,001$ ;

$\lg x = 1$ ,  $x = 10$ .

Все три корня удовлетворяют условию  $x > 0$ , значит, являются корнями исходного уравнения.

б) Так как  $\lg 9 < \lg 10 = 1$  и  $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} > 1$ , то корень  $x_1 = 1 \in \left[\lg 9; \frac{4}{3}\right]$ ;

$x_2 = 10 > \frac{4}{3}$ , т. е.  $x_2 = 10 \notin \left[\lg 9; \frac{4}{3}\right]$ ;  $x_3 = 0,001 < \lg 9$ .

Ответ: а) 0,001; 1; 10; б) 1.

**Пример 32.** а) Решите уравнение

$$\frac{16}{2 + \log_3 x} 4 = 3 \log_3 x.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[2; \log_3 28]$ .

*Решение.*

а) Пусть  $2 + \log_3 x = t$ , где  $t \neq 0$ , тогда  $\log_3 x = t - 2$ , и данное уравнение примет вид

$$\frac{16}{t} - 4 = 3(t - 2), \text{ или } \frac{16}{t} - 4 = 3t - 6, \text{ или } \frac{16}{t} - 3t + 2 = 0,$$

$$16 - 3t^2 + 2t = 0, 3t^2 - 2t - 16 = 0, \text{ откуда находим } t_1 = \frac{8}{3}, t_2 = -2.$$

Учитывая подстановку, получим:

$$1) \log_3 x = \frac{2}{3}, x_1 = 3^{2/3} = \sqrt[3]{9};$$

$$2) \log_3 x = -4, \text{ откуда } x_2 = 3^{-4} = \frac{1}{81}.$$

Так как  $x > 0$  и  $2 + \log_3 x \neq 0$ , то  $x_1 = \sqrt[3]{9}$  и  $x_2 = \frac{1}{81}$  — корни исходного уравнения.

$$б) \sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{8} = 2, \log_3 28 > \log_3 27 = 3.$$

$$\text{Значит, } x_1 = \sqrt[3]{9} \in [2; \log_3 28];$$

$$x_2 = \frac{1}{81} < 2, \text{ т. е. } \frac{1}{81} \notin [2; \log_3 28].$$

$$\text{Ответ: а) } \sqrt[3]{9}; \frac{1}{81}; \text{ б) } \sqrt[3]{9}.$$

## § 14. Задание 14. Стереометрия

Здесь представлены задачи на нахождение:

- 1) угла между скрещивающимися прямыми;
- 2) угла между прямой и плоскостью;
- 3) угла между двумя плоскостями;
- 4) расстояния от точки до прямой;
- 5) расстояния от точки до плоскости;
- 6) расстояния между двумя прямыми;
- 7) площади сечений многогранников;
- 8) объема тел вращения плоских фигур и многогранников.

Эти задания, как правило, содержат два пункта. В первом пункте надо привести доказательство, а во втором — привести вычисления.

## 14.1. Многогранники

**Пример 1.** В основании прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит квадрат  $ABCD$  со стороной  $AB = 6$ . Боковое ребро  $AA_1 = 8$ . На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $M$  так, что  $AM : A_1M = 1 : 3$ .

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью  $BMD_1$ .

б) Найдите площадь полученного сечения.

*Решение.*

а) Соединим точку  $M$  с точками  $A_1$  и  $B$ . Так как  $AA_1 = 8$ , то  $AM = 2$ ,  $A_1M = 6$  ( $AM : A_1M = 1 : 3$ ). Если две параллельные плоскости пересечь третьей, то линии пересечения параллельны.

Из точки  $B$  проведем  $BN \parallel MD_1$ . Соединив точки  $D_1$  и  $N$ , получим искомое сечение — параллелограмм  $MBND_1$  (по признаку параллелограмма).

б) Пусть  $\angle D_1MB = \alpha$ . Из  $\triangle D_1MB$  по теореме косинусов имеем  $BD_1^2 = MB^2 + MD_1^2 - 2MB \cdot MD_1 \cdot \cos \alpha$ . С другой стороны, по свойству диагонали прямоугольного параллелепипеда имеем  $BD_1^2 = AB^2 + BC^2 + AA_1^2 = 36 + 36 + 64 = 136$ .

Из прямоугольного  $\triangle AMB$ , где  $AB = 6$ ,  $AM = 2$ , находим

$$MB = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Аналогично из  $\triangle MA_1D_1$ , где  $A_1M = 6$ ,  $A_1D_1 = AB = 6$ , имеем

$$MD_1 = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}.$$

Следовательно,  $136 = 40 + 72 - 2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{2} \cos \alpha$ , или  $24\sqrt{20} \cos \alpha = 112 - 136 = -24$ , откуда  $\cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{20}}$ , тогда

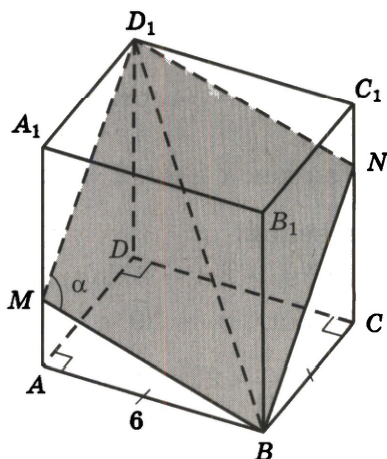
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{20}} = \sqrt{\frac{19}{20}}.$$

$$\text{Значит, } S_{\text{сеч.}} = BM \cdot MD_1 \cdot \sin \alpha = 2\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{19}{20}} = 12\sqrt{20} \cdot \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{20}} = 12\sqrt{19}.$$

*Ответ:* б)  $12\sqrt{19}$ .

**Пример 2.** Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ). Известно, что  $B_1C \perp A_1B$ .

а) Докажите, что  $BB_1 = BC$ .



б) Найдите расстояние между прямыми  $B_1C$  и  $A_1B$ , если  $BC = 7$ ,  $AC = 24$ .

*Решение.*

а) Поскольку  $A_1C_1 \perp B_1C_1$  (по условию) и  $A_1C_1 \perp C_1C$ , то  $A_1C_1 \perp (BB_1C_1C)$ . Следовательно, если  $A_1B$  — наклонная, то  $BC_1$  — проекция этой наклонной на плоскость грани  $BB_1C_1C$ . По условию  $A_1B \perp B_1C$ , тогда по теореме о трех перпендикулярах  $C_1B \perp B_1C$ , следовательно,  $BB_1C_1C$  — прямоугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны. Значит, прямоугольник  $BB_1C_1C$  — квадрат, тогда  $BB_1 = BC$ , ч. т. д.

б) Так как  $B_1O \perp A_1B$  и  $B_1O \perp BC_1$ , то  $B_1O \perp (BA_1C_1)$ . Следовательно,  $B_1O$  перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости (по определению перпендикулярности прямой и плоскости). Проведем  $OM \perp A_1B$ , тогда  $OM$  — искомое расстояние между прямыми  $B_1C$  и  $A_1B$ .

Заметим, что  $\triangle BOM \sim \triangle A_1BC_1$  (по двум углам), значит,  $\frac{OM}{A_1C_1} = \frac{OB}{A_1B}$ ,

откуда  $OM = \frac{A_1C_1 \cdot OB}{A_1B}$ , где  $AC = A_1C_1 = 24$ . Так как  $BB_1C_1C$  — квадрат

(по доказанному), то  $BC = BO\sqrt{2}$ , откуда  $BO = \frac{7}{\sqrt{2}}$ . Из  $\triangle ABC$  по теореме

Пифагора  $AB = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$ .

Из  $\triangle A_1AB$  имеем  $A_1B = \sqrt{AA_1^2 + AB^2} = \sqrt{7^2 + 25^2} = \sqrt{674}$ , тогда

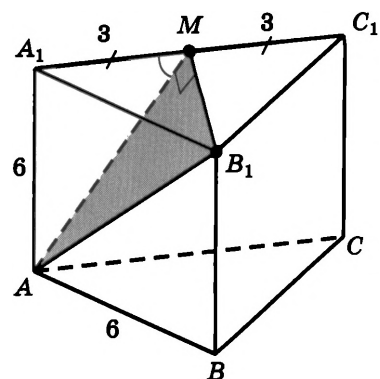
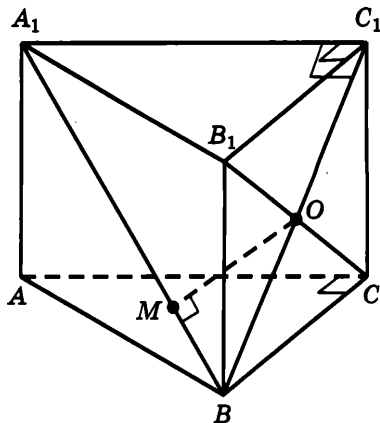
$$OM = \frac{24 \cdot 7}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{674}} = \frac{84}{\sqrt{337}}.$$

Ответ: б)  $\frac{84}{\sqrt{337}}$ .

**Пример 3.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все ребра равны 6. Через точки  $A$ ,  $B_1$  и середину  $M$  ребра  $A_1C_1$  проведена плоскость.

а) Докажите, что сечением призмы плоскостью  $AB_1M$  является прямоугольный треугольник.

б) Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы.



*Решение.*

а) Найдем длины сторон  $\triangle AB_1M$ .

Из  $\triangle ABB_1$ , где  $AB = BB_1 = 6$  (по условию), имеем

$$AB_1 = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{2 \cdot 6^2} = 6\sqrt{2}.$$

$$\text{Из } \triangle AA_1M, \text{ где } AA_1 = 6, A_1M = \frac{1}{2}A_1C_1 = 3, \text{ находим } AM = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = \sqrt{5 \cdot 9} = 3\sqrt{5}.$$

$$\text{Аналогично из } \triangle A_1B_1M, \text{ где } A_1B_1 = 6, A_1M = 3, \text{ получим } B_1M = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 9} = 3\sqrt{3}.$$

Поскольку  $AB_1^2 = 72 = 45 + 27 = AM^2 + B_1M^2$ , то  $\triangle AMB_1$  — прямоугольный (по теореме, обратной теореме Пифагора), ч. т. д.

б) Значит,  $AB_1$  — гипотенуза,  $AM$  и  $B_1M$  — катеты.

Тогда  $\cos \angle A_1MA = \frac{A_1M}{AM} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , где  $\angle A_1MA$  — искомый угол между  $(AMB_1)$  и  $(ABC)$ .

Ответ: б)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

**Пример 4.** Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является равнобедренный  $\triangle ABC$ , в котором  $AC = BC = 13$ ,  $AB = 10$ . Боковое ребро призмы  $AA_1 = 24$ . Точка  $M$  — середина ребра  $CC_1$ .

а) Найдите тангенс угла между плоскостями  $A_1B_1C_1$  и  $AMB$ .

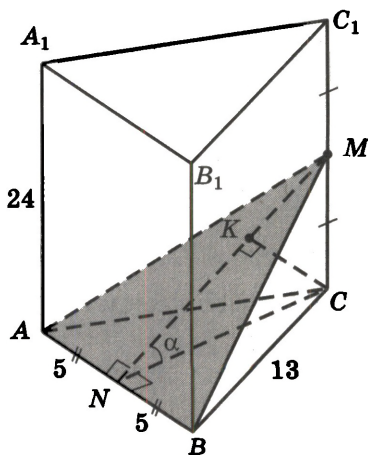
б) Найдите расстояние от точки  $C$  до  $(AMB)$ .

*Решение:*

а) Поскольку плоскости оснований призмы параллельны и равны, то тангенс угла между  $(A_1B_1C_1)$  и  $(AMB)$  будет равен тангенсу угла между  $(ABC)$  и  $(AMB)$ . Искомый угол будет равен углу между высотами  $MN$  и  $CN$ . Пусть  $\angle MNC = \alpha$ .

Так как  $M$  — середина ребра  $CC_1$ , то  $MC = \frac{1}{2}CC_1 = \frac{1}{2}AA_1 = 12$ .

Из  $\triangle CNB$ , где  $BC = 13$ ,  $BN = \frac{1}{2}AB = 5$ , по теореме Пифагора  $CN = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ . Тогда  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{MC}{CN} = \frac{12}{12} = 1$ .



б) Расстояние от точки  $C$  до  $(AMB)$  — это длина перпендикуляра, опущенного из точки  $C$  на гипотенузу  $MN$ , т. е.  $CK$ .

Так как  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ , то  $\alpha = 45^\circ$ , тогда  $CN = MC = 12$ .

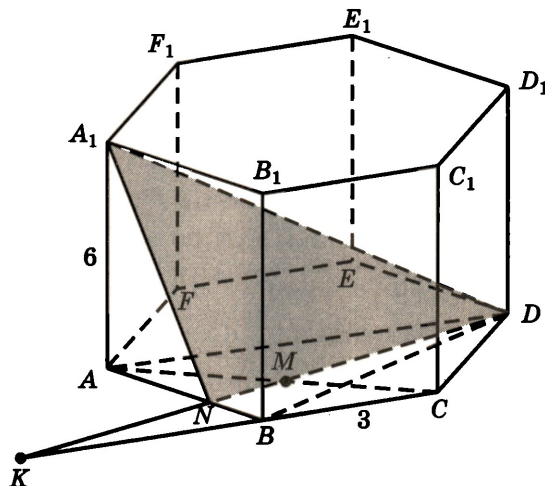
$$\begin{aligned} &\text{В } \triangle NKC \angle NCK = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ, \text{ т. е. } CK = NK, CK = CN \sin 45^\circ = \\ &= 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Ответ: а)  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ ; б)  $6\sqrt{2}$ .

**Пример 5\*.** В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$  стороны основания равны 3, а боковые ребра равны 6. Точка  $M$  — середина  $AC$ .

а) Докажите, что плоскость  $A_1MD$  делит сторону  $AB$  основания призмы в отношении 2 : 1.

б) Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $A_1MD$ .



*Решение.*

а) По условию точка  $M$  — середина  $AC$ ,  $DM \cap AB = N$ ,  $DM \cap BC = K$ . Так как призма — правильная, то  $AB = CD$ ,  $AD = 2AB$ ,  $ABCD$  — равнобедренная трапеция, где  $BC \parallel AD$ .

Кроме того,  $\triangle AMD = \triangle CMQ$  (по двум сторонам и углу между ними). Значит,  $AD = CK = 6$ ,  $BK = 3$ . Используя теорему Менелая для  $\triangle ABC$  и прямой  $DK$ , имеем  $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ , или  $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{3} = 1$ , откуда  $\frac{AN}{NB} = \frac{2}{1}$ , ч. т. д.

б) Искомое расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $A_1MD$  найдем, используя объем пирамиды  $A_1ADN$ .

С одной стороны,  $V_{A_1ADN} = \frac{1}{3} S_{\triangle ADN} \cdot AA_1$ , где  $AA_1$  — высота пирамиды  $A_1ADN$ .

$$\begin{aligned}\text{Значит, } V_{A_1ADN} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} S_{\Delta ABD} \cdot AA_1 = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot AA_1 = \frac{1}{9} \cdot 3 \cdot BD \cdot AA_1 = \\ &= \frac{1}{3} BD \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot BD = 2BD.\end{aligned}$$

Из  $\triangle BCD$ , где  $BC = CD = 3$ ,  $\angle BCD = 120^\circ$ , по теореме косинусов найдем сторону  $BD$ .  $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos 120^\circ = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = 18 - 18 \cos 120^\circ = 18 - 18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 18 + 9 = 27$ ,

откуда  $BD = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ .

Следовательно,  $V_{A_1ADN} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ .

С другой стороны,  $V_{A_1ADN} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1DN} \cdot d$ , где  $d$  — искомое расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $A_1MD$ . Значит,  $d = \frac{3 \cdot V_{A_1ADN}}{S_{\Delta A_1DN}}$ .

Так как  $AB = BC = 3$  (по условию) и  $AN : NB = 2 : 1$  (по доказанному), то  $BN = 1$ ,  $BD = 3\sqrt{3}$ , тогда из прямоугольного  $\triangle BDN$ , где  $BN \perp BD$ , имеем  $DN = \sqrt{BN^2 + BD^2} = \sqrt{1 + 27} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ .

Из  $\triangle A_1AN$ , где  $A_1A \perp AN$ , найдем  $A_1N$  по теореме Пифагора:

$$A_1N = \sqrt{AA_1^2 + AN^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Диагональ  $A_1D$  призмы найдем из прямоугольного  $\triangle A_1AD$ , где  $A_1A = 6$ ,  $AD = 2BC = 6$ .  $A_1D = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{2 \cdot 6^2} = 6\sqrt{2}$ .

Пусть в  $\triangle A_1ND$   $\angle NA_1D = \alpha$ , тогда по теореме косинусов имеем  $DN^2 = A_1N^2 + A_1D^2 - 2A_1N \cdot A_1D \cdot \cos \alpha$ , или

$$28 = 40 + 72 - 2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{2} \cos \alpha, \text{ или}$$

$$24\sqrt{20} \cos \alpha = 84, \text{ откуда } \cos \alpha = \frac{84}{24 \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{7}{4\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{4\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{49}{80}} = \sqrt{\frac{31}{80}} = \frac{\sqrt{31}}{4\sqrt{5}}.$$

$$\begin{aligned}\text{Следовательно, } S_{\Delta A_1DN} &= \frac{1}{2} A_1N \cdot A_1D \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{31}}{4\sqrt{5}} = \\ &= 6\sqrt{20} \cdot \frac{\sqrt{31}}{4\sqrt{5}} = 3\sqrt{31}.\end{aligned}$$

$$\text{Значит, } d = \frac{3 \cdot 6\sqrt{3}}{3\sqrt{31}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{31}} = \frac{6\sqrt{93}}{31}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{6\sqrt{93}}{31}.$$

**Пример 6.** В правильном тетраэдре  $МABC$  точка  $E$  — середина ребра  $AM$ .

а) Докажите, что  $AM \perp BC$ .

б) Найдите угол между прямыми  $MO$  и  $BE$ .

*Решение.*

а) Поскольку тетраэдр  $МABC$  — правильный, то все его грани — правильные треугольники. Значит, отрезки  $BE$  и  $CE$  являются медианами в  $\triangle MAB$  и  $\triangle MAC$  соответственно. Следовательно, прямая  $AM$  перпендикулярна этим отрезкам, а значит, и плоскости  $BEC$ . Тогда  $AM \perp BC$ , ч. т. д.

б) По условию задачи точка  $E$  — середина ребра  $AM$ , а точка  $N$  — середина ребра  $BC$ . По теореме Фалеса  $EF$  — средняя линия  $\triangle MAO$ , тогда  $EF = \frac{1}{2}MO$ ,  $\angle BEF = \alpha$  — искомый угол между прямыми  $MO$  и  $BE$ ,  $\angle EFB = 90^\circ$  ( $EF \perp (ABC) \Rightarrow EF \perp AN, EF \perp FB$ ).

Пусть  $AB = x$ . Из  $\triangle ABN$   $AN = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ ,  $ON = \frac{1}{3}AN = \frac{\sqrt{3}}{6}x$  (по свойству медиан треугольника).

$$\text{Из } \triangle MON \text{ находим } MO = \sqrt{MN^2 - ON^2} = \sqrt{AN^2 - ON^2} = \\ = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^2} = \sqrt{\frac{8}{12}x^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}x = \frac{\sqrt{6}}{3}x, \quad EF = \frac{1}{2}MO = \frac{\sqrt{6}}{6}x,$$

$$BE = AN = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

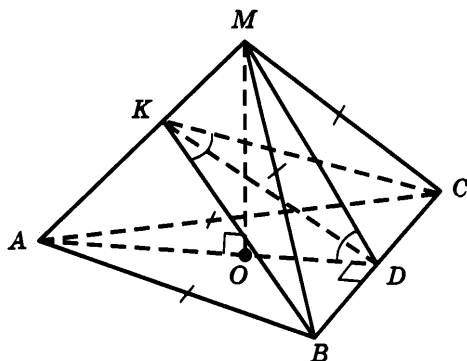
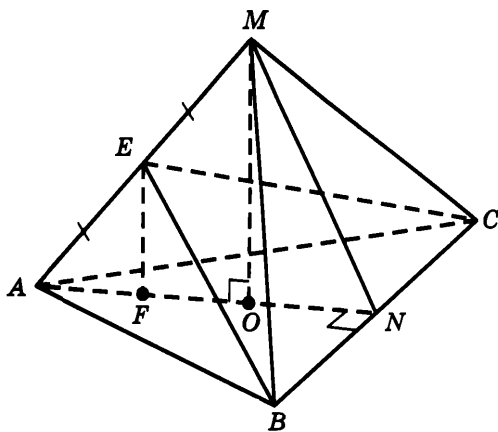
$$\text{Из } \triangle BEF \text{ имеем } \cos \alpha = \frac{EF}{BE} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}x}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}, \text{ откуда}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Ответ: б) } \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

**Пример 7.** В треугольной пирамиде  $МABC$  двугранные углы при ребрах  $AM$  и  $BC$  равны,  $AB = BM = MC = AC = 10$ .

а) Докажите, что  $AM = BC$ .





б) Найдите  $V_{MABC}$ , если двугранные углы при  $AM$  и  $BC$  равны  $60^\circ$ .

*Решение.*

а) Так как  $AB = AC$ , то  $\triangle ABC$  — равнобедренный с основанием  $BC$ , тогда высота  $AD$  является медианой, т. е.  $D$  — середина  $BC$ . Но  $MB = MC$  (по условию), значит,  $\triangle MBC$  — равнобедренный,  $\angle ADM = \alpha$  — линейный угол двугранного угла при ребре  $BC$ . Аналогично  $\angle BKC = \alpha$  — линейный угол двугранного угла при ребре  $MA$ . Следовательно,  $\triangle ABC = \triangle MBC$  (по трем сторонам)  $\Rightarrow MD = AD$  и  $\angle MAD = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ .

Аналогично  $\triangle MAB = \triangle MAC$  и  $KB = KC$ ,  $\angle KBC = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ .

Заметим, что  $\triangle AKD = \triangle BKD$  — по катету  $KD$  и острому углу ( $\angle MAD = \angle KBC$ )  $\Rightarrow AK = BD$ .

Но  $AK = \frac{1}{2}AM$ ,  $BD = \frac{1}{2}BC$ , значит,  $AM = BC$ , ч. т. д.

б) Поскольку  $\alpha = 60^\circ$ , то  $\triangle AMD$  — равносторонний. Пусть  $AM = AD = MD = BC = x$ , тогда  $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}x$ .

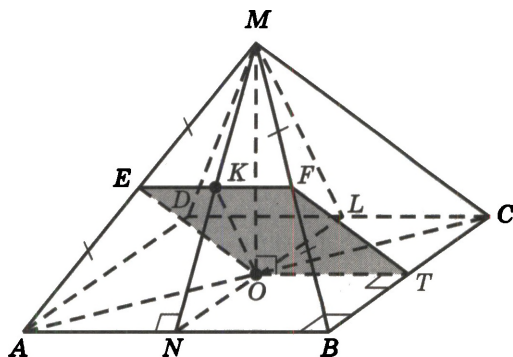
В  $\triangle ADB$  по теореме Пифагора имеем  $x^2 + \frac{x^2}{4} = 100$ , или  $\frac{5}{4}x^2 = 100$ ,  $x^2 = 100 \cdot \frac{4}{5} = 80$ , откуда  $x = 4\sqrt{5}$ . Следовательно,  $V_{MABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot MO$ .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 40.$$

Из  $\triangle AMO$ , где  $\angle MAO = 60^\circ$ ,  $AM = x = 4\sqrt{5}$ , имеем  $MO = AM \sin 60^\circ = 4\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{15}$ . Значит,  $V_{MABC} = \frac{1}{3} \cdot 40 \cdot 2\sqrt{15} = \frac{80\sqrt{15}}{3}$ .

Ответ: б)  $\frac{80\sqrt{15}}{3}$ .

**Пример 8\*.** В основании правильной четырехугольной пирамиды  $MABCD$  лежит квадрат со стороной 8. Противоположные боковые ребра пирамиды попарно перпендикулярны. Через середины ребер  $MA$  и  $MB$  проведена плоскость, параллельная ребру  $MC$ .



а) Докажите, что сечение плоскостью пирамиды  $MABCD$  — параллелограмм.

б) Найдите  $S_{\text{сеч.}}$ .

*Решение.*

а) Пусть точки  $E$  и  $F$  — середины ребер  $MA$  и  $MB$  соответственно. Плоскость пересекает грань  $MBC$  по отрезку  $FT \parallel MC$ . Следовательно, плоскость пересекает  $(AMC)$  по прямой, параллельной ребру  $MC$ . На этой прямой лежит средняя линия  $EO \triangle AMC$ . Значит, сечение проходит через середину  $AC$ , т. е. точку  $O$ . Сечение — четырехугольник  $EFTO$ , где  $FT \parallel MC$ ,  $EO \parallel MC$  и  $FT = \frac{1}{2}MC$ ,  $EO = \frac{1}{2}MC$ . Следовательно, сечение  $EFTO$  — параллелограмм, ч. т. д.

б) Отметим точку  $K$  — середину  $EF$ . Заметим, что  $EF \perp MK$  и  $EF \perp MO \Rightarrow EF \perp (MKO) \Rightarrow EF \perp OK$ , т. е.  $OK$  — высота параллелограмма  $EFTO$ . Сечение пирамиды  $MABCD$  плоскостью  $МОК$  — равнобедренный  $\triangle MNL$  ( $MN = ML$  — как апофемы равных граней).  $OK$  — медиана прямоугольного  $\triangle MON$ , значит,  $OK = MK = KN$ . Поскольку противоположные боковые ребра пирамиды попарно перпендикулярны, то  $\triangle AMC$  — прямоугольный и равнобедренный.

Пусть  $AM = MC = x$ , тогда  $AC^2 = 2x^2$ , или  $AC = x\sqrt{2}$ . По условию задачи  $AB = BC = 8$ , тогда из  $\triangle ABC$  получим  $AC^2 = 8^2 + 8^2 = 2 \cdot 8^2$ . Но  $AC^2 = 2x^2$ , значит,  $2x^2 = 2 \cdot 8^2$ , откуда  $x^2 = 8^2$ ;  $x = 8$ , т. е.  $AM = MC = 8$ .

Аналогично  $MB = MD = 8$ . Выходит, что все боковые грани пирамиды — равносторонние треугольники, тогда из  $\triangle AMN$  находим  $MN = \sqrt{AM^2 - AN^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$ , тогда  $OK = \frac{1}{2}MN = 2\sqrt{3}$ .

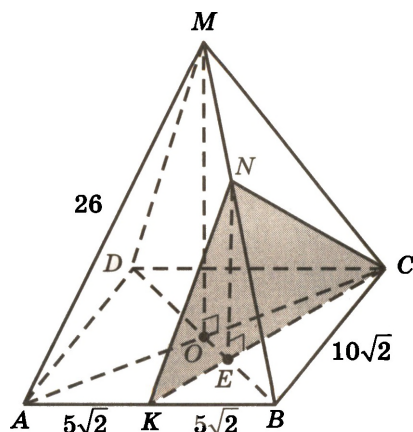
Следовательно,  $S_{\text{сеч.}} = OT \cdot OK = \frac{1}{2}AB \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ .

*Ответ:* б)  $8\sqrt{3}$ .

**Пример 9.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  через середину ребра  $AB$  и точку  $C$  проведена плоскость перпендикулярно основанию.

а) Докажите, что плоскость делит ребро  $MB$  в отношении  $2 : 1$ , считая от точки  $B$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, если  $MA = 26$ ,  $AB = 10\sqrt{2}$ .



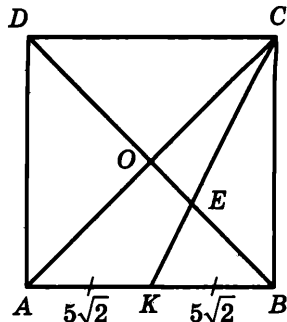
**Решение.**

а) Пусть точка  $K$  — середина  $AB$ ,  $E$  — точка пересечения  $CK$  и диагонали  $BD$ . Так как пирамида — правильная, то высота  $MO \perp (ABC)$  (по условию).

Значит,  $(NKC) \perp (ABC) \Rightarrow (NKC) \parallel MO$ .

Следовательно,  $(NKC)$  пересечет  $(MBD)$  по прямой  $NE \parallel MO$ .

Сечение  $NKC$  — искомое.



Заметим, что  $\triangle KEB \sim \triangle CED$  (по двум углам), где  $\frac{CD}{BK} = k = 2$ , тогда

$$\frac{DE}{BE} = 2. \text{ Но } DE = DO + OE = BO + OE = (OE + BE) + OE = BE + 2 \cdot OE.$$

Значит,  $\frac{DE}{BE} = \frac{BE + 2 \cdot OE}{BE} = 2$ , или  $BE + 2 \cdot OE = 2BE$ , откуда  $BE = 2 \cdot OE$ . Тогда  $\frac{BN}{MN} = \frac{BE}{OE} = 2$ , ч. т. д.

б)  $S_{NKC} = \frac{1}{2} KC \cdot NE$ , где  $NE = \frac{2}{3} MO$ . Так как  $ABCD$  — квадрат, то  $AB = a = R\sqrt{2}$ , где  $AB = 10\sqrt{2}$  (по условию), тогда  $AO = OB = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 10$ .

По условию задачи  $MA = 26$ ,  $AO = 10$ , следовательно,

$$MO = \sqrt{MA^2 - AO^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24.$$

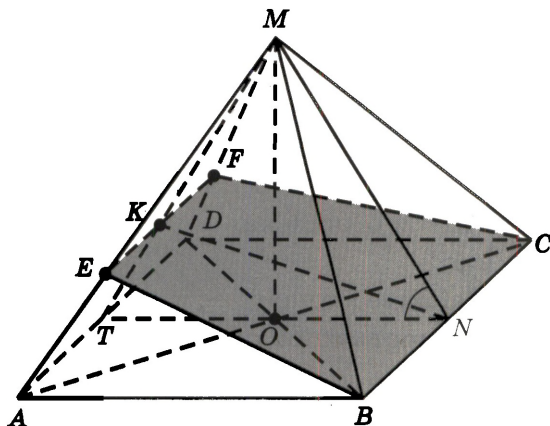
Значит,  $ME = \frac{2}{3} MO = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16$ .

Из  $\triangle CKB$ , где  $KB = 5\sqrt{2}$ ,  $BC = AB = 10\sqrt{2}$ , по теореме Пифагора найдем  $CK = \sqrt{BK^2 + BC^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2} = \sqrt{50 + 200} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}$ .

Тогда  $S_{NKC} = \frac{1}{2} KC \cdot NE = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{10} \cdot 16 = 40\sqrt{10}$ .

**Ответ:** б)  $40\sqrt{10}$ .

**Пример 10\*.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  через сторону основания  $BC$  проведено сечение, которое делит пополам двугранный угол, образованный гранью  $MBC$  и основанием. Найдите площадь сечения, если  $AB = 10$ , а объем пирамиды равен 400.



*Решение.*

Как известно, мерой двугранного угла является линейный угол, т. е. угол между перпендикулярами, проведенными в каждой из плоскостей к общей их линии пересечения.

Проведем апофему  $MN$  (высоту) грани  $MBC$ . Так как по условию пирамида правильная, то боковые грани — равные равнобедренные треугольники, значит,  $MN$  — медиана  $\triangle MBC$ . Проведем  $NT \perp BC$ , тогда  $\angle MNT$  — искомый линейный угол.

Заметим, что боковые стороны сечения  $BE$  и  $CF$  равны (как отрезки, проведенные в равных треугольниках). Значит, полученное сечение — равнобедренная трапеция  $BEFC$  с основаниями  $BC$  и  $EF$  ( $BC > EF$ ).

Для нахождения площади сечения необходимо найти ее основание  $EF$  и высоту  $KN$ .

По условию  $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$ , где  $V_{\text{пир.}} = 400$ ,  $S_{\text{осн.}} = AB^2 = 100$ ,

$$H = OM = \frac{3V_{\text{пир.}}}{S_{\text{осн.}}} = \frac{3 \cdot 400}{100} = 12. \text{ Апофему } MN \text{ найдем из прямоугольного}$$

$$\triangle MON, \text{ где } MO = 12, ON = \frac{1}{2}AB = 5. \text{ Имеем } MN = \sqrt{MO^2 + ON^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13.$$

Из  $\triangle MTN$  по теореме косинусов получим  $TN^2 = MT^2 + MN^2 - 2MT \cdot MN \cdot \cos \angle TMN$ , или  $100 = 169 + 169 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos \angle TMN$ , или  $100 = 2 \cdot 169 - 2 \cdot 169 \cdot \cos \angle TMN$ , или  $2 \cdot 169 \cdot \cos \angle TMN = 338 - 100$ , откуда  $\cos \angle TMN = \frac{238}{2 \cdot 169} = \frac{119}{169}$ .

Согласно условию задачи  $NK$  — биссектриса  $\angle MNT$ , тогда по свойству биссектрисы имеем  $\frac{MK}{MN} = \frac{KT}{TN}$ , где  $MN = 13$ ,  $TN = AB = 10$ .

Пусть  $MK = x$ , тогда  $KT = MT - MK = MN - MK = 13 - x$ . Следовательно,  $\frac{x}{13} = \frac{13-x}{10}$ , или  $10x = 169 - 13x$ , или  $23x = 169$ ,  $x = \frac{169}{23}$ .

$$\text{Значит, } MK = \frac{169}{23}, \text{ тогда } KT = 13 - \frac{169}{23} = \frac{130}{23}.$$

Заметим, что  $\triangle MAD \cup \triangle MEF$  (по двум углам), тогда  $\frac{EF}{AD} = \frac{MK}{MT}$ ,

$$\text{откуда } EF = \frac{AD \cdot MK}{MT} = \frac{10 \cdot \frac{169}{23}}{13} = \frac{10 \cdot 169}{23 \cdot 13} = \frac{10 \cdot 13}{23} = \frac{130}{23}.$$

$$\text{Таким образом, } S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} (BC + EF) \cdot KN, \text{ где } BC = AB = 10, EF = \frac{130}{23}.$$

Из  $\triangle MKN$  найдем  $KN$  по теореме косинусов:

$KN^2 = MK^2 + MN^2 - 2MK \cdot MN \cdot \cos \angle KMN$ , или

$$KN^2 = \left(\frac{169}{23}\right)^2 + 13^2 - 2 \cdot \frac{169}{23} \cdot 13 \cdot \frac{119}{169} = 13^2 \left(\frac{13^2}{23^2} + 1\right) - \frac{26 \cdot 119}{23} =$$

$$= \frac{169 \cdot 698}{23^2} - \frac{3094}{23} = \frac{117\,962 - 71\,162}{23^2} = \frac{46\,800}{23^2},$$

откуда  $KN = \frac{10}{23} \sqrt{468} = \frac{60\sqrt{13}}{23}$ .

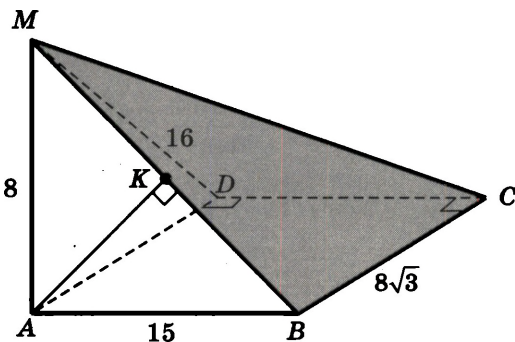
Тогда  $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \left(10 + \frac{130}{23}\right) \cdot \frac{60\sqrt{13}}{23} = \frac{(230 + 130) \cdot 30\sqrt{13}}{529} = \frac{10\,800\sqrt{13}}{529}$ .

Ответ:  $\frac{10\,800\sqrt{13}}{529}$ .

**Пример 11.** В основании четырехугольной пирамиды  $MABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$ , где  $AB = 15$ ,  $BC = 8\sqrt{3}$ . Длины боковых ребер  $MA = 8$ ,  $MB = 17$ ,  $MD = 16$ .

а) Докажите, что  $MA$  — высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $MBC$ .



*Решение.*

а) Поскольку  $MA^2 + AB^2 = MB^2$ , т. е.  $8^2 + 15^2 = 17^2$ , и  $MA^2 + AD^2 = MD^2$ , т. е.  $8^2 + (8\sqrt{3})^2 = 16^2$ , то  $MA \perp AB$  и  $MA \perp AD \Rightarrow MA \perp (ABC)$ .

Значит,  $MA$  — высота пирамиды, ч. т. д.

б) Из точки  $A$  опустим перпендикуляр на  $MB$ . Заметим, что  $AK \perp BC$ , так как  $(MAB) \perp BC$  ( $ABCD$  — прямоугольник по условию задачи),  $AB \perp BC$  и  $MA \perp AB \Rightarrow MA \perp BC$ . Следовательно,  $AK$  — расстояние от точки  $A$  до  $(MBC)$ .

$$S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} MA \cdot AB, \text{ с другой стороны,}$$

$$S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} MB \cdot AK. \text{ Значит, } MA \cdot AB = MB \cdot AK, \text{ откуда}$$

$$AK = \frac{MA \cdot AB}{MB} = \frac{8 \cdot 15}{17} = \frac{120}{17}.$$

Ответ: б)  $\frac{120}{17}$ .

**Пример 12.** В пирамиде  $МABC$   $MB = MC = AC = AB = \sqrt{19}$ ,  $MA = BC = 2\sqrt{7}$ .

а) Докажите, что  $MA \perp BC$ .

б) Найдите расстояние между  $MA$  и  $BC$ .

*Решение.*

а) По условию задачи  $MB = MC$  и  $AC = AB$ , значит,  $\triangle MBC = \triangle ABC$  (по трем сторонам) ( $BC$  — общая сторона). Заметим, что  $MD$  и  $AD$  — соответственно медианы и высоты  $\triangle MBC$  и  $\triangle ABC$ . Значит, прямая  $BC$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $MD$  и  $AD$  плоскости  $MAD \Rightarrow BC \perp (MAD)$ .

Но тогда прямая  $BC$  перпендикулярна ко всякой прямой, лежащей в плоскости  $MAD$ , а значит,  $BC \perp MA$ , ч. т. д.

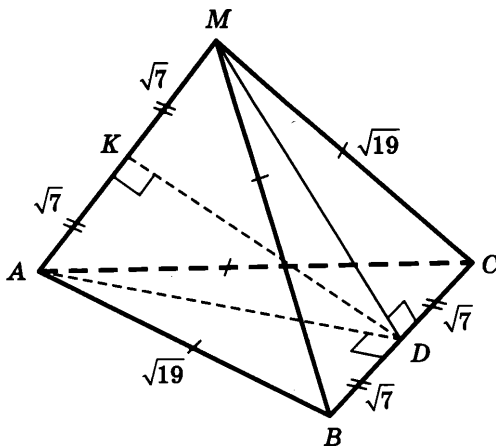
б) В плоскости  $MAD$  проведем высоту  $DK$  — искомое расстояние между скрещивающимися прямыми  $MA$  и  $BC$ . Но  $AD = MD$  (как высоты равных треугольников).

Значит,  $AD = MD = \sqrt{19 - 7} = \sqrt{12}$ .

Из прямоугольного  $\triangle ADK$  найдем искомое расстояние

$$DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{12 - 7} = \sqrt{5}.$$

Ответ: б)  $\sqrt{5}$ .



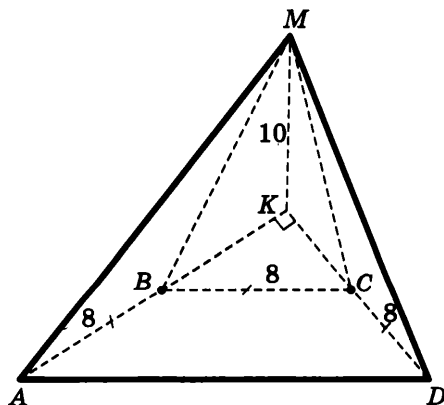
**Пример 13.** В основании четырехугольной пирамиды  $МABCD$  лежит трапеция  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ). Известно, что  $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$ ,  $(MAB) \perp (ABC)$  и  $(MCD) \perp (ABC)$ ,  $AB \cap CD = K$ .

а) Докажите, что  $(MAB) \perp (MCD)$ .

б) Найдите объем пирамиды  $MBKC$ , если  $AB = BC = CD = 8$ ,  $MK = 10$  — высота пирамиды  $МABCD$ .

*Решение.*

а) Так как  $(MAB) \perp (ABC)$  и  $(MCD) \perp (ABC)$ , то  $MK$  — высота пирамиды  $МABCD$ . По условию задачи  $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$ , тогда  $\angle AKD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ , т. е.  $\triangle AKD$  — прямоугольный. Тогда  $AK \perp MK$  и  $AK \perp KD$ , т. е.  $AK$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости  $MCD$ .



б) По условию  $AB = BC = CD$ , тогда  $\frac{AB}{CD} = \frac{BK}{KC} = 1$ , т. е.  $\triangle BKC$  — равнобедренный и прямоугольный.

**бедренный и прямоугольный.**

Так как  $BC = 8$ , то  $BK = CK = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ .

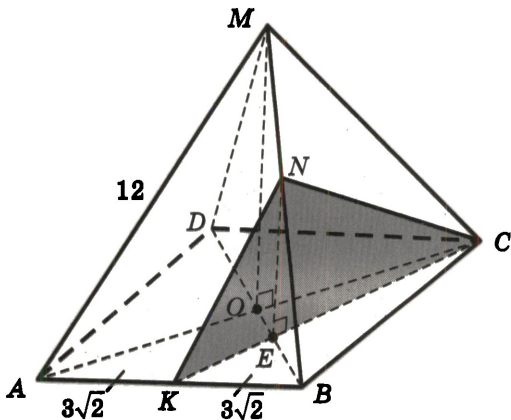
$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } V_{MKBC} &= \frac{1}{3} S_{\Delta BKC} \cdot MK = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BK \cdot KC \cdot MK = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 10 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10 = \frac{160}{3}. \end{aligned}$$

Ответ: б)  $\frac{160}{3}$ .

**Пример 14.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  через середину ребра  $AB$  и точку  $C$  проведена плоскость перпендикулярно основанию.

а) Докажите, что плоскость делит ребро  $MB$  в отношении  $2 : 1$ , считая от точки  $B$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, если  $MA = 12$ ,  $AB = 6\sqrt{2}$ .



**Решение.**

а) Пусть  $K$  — середина  $AB$ ,  $E$  — точка пересечения  $CK$  с диагональю  $BD$ .

Так как пирамида — правильная, то высота  $MO \perp (ABCD)$  и  $(NKC) \perp (ABCD)$  (по условию).

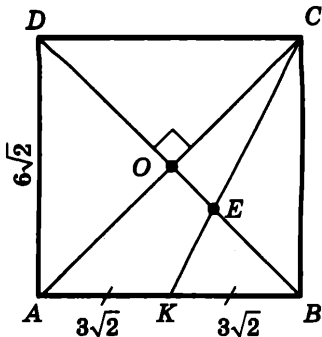
**Значит,  $(NKC) \perp (ABCD) \Rightarrow (NKC) \perp MO$ .**

Следовательно,  $(NKC)$  пересечет  $(MBD)$  по прямой  $NE \parallel MO$ . Сечение  $NKC$  — искомое.

Заметим, что  $\triangle KEB \sim \triangle CED$  (по двум углам),

$$k = \frac{CD}{BK} = 2, \text{ тогда } \frac{DE}{BE} = 2. \text{ Но } DE = BE + 2 \cdot OE,$$

значит,  $\frac{BE + 2 \cdot OE}{BE} = 2$ , или  $BE + 2 \cdot OE = 2BE$ , или  $BE = 2 \cdot OE$ .







$$\text{Значит, } S_{\text{сеч.}} = S_{\Delta AMD} = \frac{1}{2} AD \cdot MO = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{7\sqrt{6}}{3} = \frac{28\sqrt{18}}{2 \cdot 3} = \\ = \frac{28 \cdot 3\sqrt{2}}{2 \cdot 3} = 14\sqrt{2}.$$

б) Заметим, что по признаку перпендикулярности двух плоскостей  $\Rightarrow (ABC) \perp (AMD)$ , так как  $(AMD)$  содержит прямую  $MO \perp (ABC)$ , тогда косинус угла между плоскостью основания и сечением равен нулю.

Ответ: а)  $14\sqrt{2}$ ; б) 0.

**Пример 16.** В основании правильной треугольной пирамиды лежит  $\Delta ABC$  со стороной  $AB = 12$ . Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом  $\alpha = \arccos 0,8$ . В данную пирамиду вписана сфера, касающаяся грани  $MAV$  в точке  $K$ .

а) Докажите, что  $\Delta MOE \sim \Delta MKO_1$ , где  $O_1$  — центр сферы.

б) Найдите радиус сферы.

*Решение.*

а) Так как пирамида  $MABC$  — правильная, то  $\Delta ABC$  — равносторонний и точка  $O$  — центр вписанной и описанной окружностей,  $MO$  — высота пирамиды. По условию задачи  $K$  — точка касания сферы, вписанной в пирамиду.

$O_1K = O_1O = R$  — радиус сферы, где  $O_1K \perp ME$  и  $MO \perp (ABC) \Rightarrow MO \perp CE$ . Значит,  $\Delta MOE \sim \Delta MKO$  — как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle EMO$ , ч. т. д.

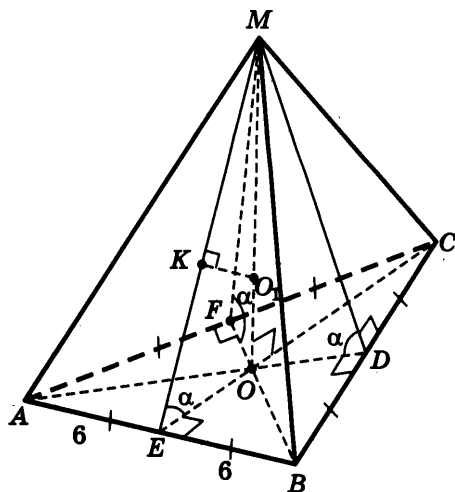
б)  $\angle MEO = \angle MDO = \angle MFO = \alpha$  — угол наклона боковых граней к плоскости основания.

Поскольку  $O$  — точка пересечения медиан  $\Delta ABC$ , то по свойству медиан  $CO : OE = 2 : 1$ , тогда  $OE = \frac{1}{3}CE$ . Из прямоугольного  $\Delta BCE$ , где

$$BC = AB = 12, BE = \frac{1}{2}AB = 6, \text{ имеем } CE = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = \\ = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}. \text{ Значит, } OE = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

По условию  $\alpha = \arccos 0,8$ , т. е.  $\cos \alpha = 0,8$ .

$$\text{В } \Delta MOE \cos \alpha = \frac{EO}{ME} = \frac{4}{5}, \text{ или } \frac{2\sqrt{3}}{ME} = \frac{4}{5}, \text{ откуда } ME = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$



Из  $\triangle MOE$  по теореме Пифагора находим

$$MO = \sqrt{ME^2 - OE^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{75}{4} - 12} = \sqrt{\frac{75 - 48}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

По доказанному:  $\triangle MOE \sim \triangle MKO_1 \Rightarrow \frac{ME}{OE} = \frac{MO_1}{KO_1}$ , где  $ME = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ,

$OE = 2\sqrt{3}$ ,  $MO_1 = MO - O_1O = \frac{3\sqrt{3}}{2} - R$ ,  $KO_1 = R$ . Тогда получим уравне-

ние  $\frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} - R}{R}$ , или  $\frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - 2R}{2R}$ , или  $\frac{5}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 2R}{R}$ , или  $5R = 6\sqrt{3} - 4R$ , или  $9R = 6\sqrt{3}$ , откуда  $R = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

Ответ: б)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .

**Пример 17.** В основании пирамиды  $MABC$  лежит равнобедренный  $\triangle ABC$  с основанием  $AB$ . Все боковые ребра пирамиды равны. В пирамиду вписана сфера.

а) Докажите, что точка касания сферы с гранью  $MAB$  лежит на прямой  $MD$ , где  $D$  — середина  $AB$ .

б) Найдите радиус сферы, если  $AB = 12$ ,  $AC = BC = 10$ ,  $MD = 8$ .

*Решение.*

а) По условию задачи все боковые ребра пирамиды равны, значит,  $\triangle MAB$  — равнобедренный, где  $MD$  — медиана и высота.

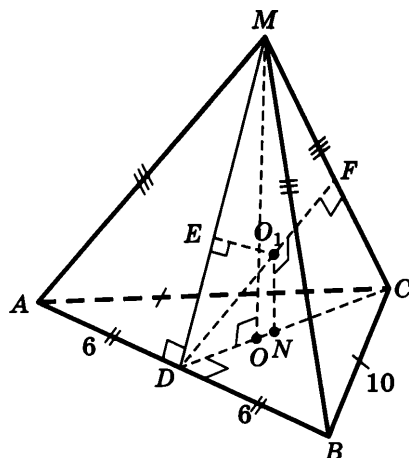
Так как  $AC = BC$ , то  $CD$  — высота, медиана и биссектриса  $\triangle ABC$ .

Точка  $O_1$  — центр вписанной сферы, лежит в плоскости  $MDC$ .

Точка  $O$  — центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$  ( $AO = BO = CO$ ).

Заметим, что  $(MDC) \perp (MAB)$ , так как  $AB \perp (MDC)$  (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

$E$  — точка касания сферы с гранью  $MAB$ , тогда  $O_1E \perp (MAB)$ , т. е. точка  $E$  лежит на прямой  $MD$ , ч. т. д.



б) Известно, что объем пирамиды, в которую вписана сфера радиуса  $r$ , определяется по формуле

$$V = \frac{1}{3} S \cdot r, \text{ где } S — \text{площадь поверхности пирамиды.}$$

Если  $R$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , то

$$S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}, \text{ где } a = b = 10, c = 12, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD.$$

$$\text{Из } \triangle BCD \text{ } CD = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

$$\text{Тогда } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48.$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4R} &= 48, \text{ откуда } R = \frac{25}{4}, OD = CD - OC = 8 - R = \\ &= 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Так как апофема  $MD = 8$  (по условию), то из  $\triangle MOD$  находим высоту пирамиды

$$MO = \sqrt{MD^2 - OD^2} = \sqrt{8^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{64 - \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{975}{16}} = \frac{5\sqrt{39}}{4}.$$

$$\text{Тогда } V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot \frac{5\sqrt{39}}{4} = 20\sqrt{39}.$$

$$S_{MABC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle MAB} + 2S_{\triangle MBC}, \text{ где } S_{\triangle ABC} = 48,$$

$$S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} AB \cdot MD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48.$$

$$\text{В } \triangle MBD \text{ находим } MB = \sqrt{BD^2 + MD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

Так как  $MB = MC = BC = 10$ , то  $\triangle MBC$  — правильный.

$$\text{Тогда } S_{\triangle MBC} = \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3} \text{ (площадь правильного треугольника).}$$

$$\text{Значит, } S_{MABC} = 48 + 48 + 50\sqrt{3} = 96 + 50\sqrt{3}.$$

$$\text{Тогда радиус сферы } r = \frac{3 \cdot V_{MABC}}{S_{MABC}} = \frac{3 \cdot 20\sqrt{39}}{96 + 50\sqrt{3}} = \frac{30\sqrt{39}}{48 + 25\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{30\sqrt{39}}{48 + 25\sqrt{3}}.$$

**Пример 18.** В основании треугольной пирамиды  $MABC$  лежит правильный  $\triangle ABC$ . Боковая грань  $MBC$  перпендикулярна основанию,  $MB = MC$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро  $BC \perp AM$ .

б) Найдите объем пирамиды  $MBCK$ , где  $K$  — точка пересечения ребра  $AM$  и плоскости сечения, если  $AB = 4\sqrt{3}$ , а угол между боковым ребром  $AM$  и плоскостью основания равен  $60^\circ$ .

*Решение.*

а) Так как  $MB = MC$ , то  $\triangle MBC$  — равнобедренный.

По условию  $(MBC) \perp (ABC)$ . В боковой грани  $MBC$  проведем высоту  $MN$ , тогда  $MN$  — медиана, значит,  $BN = CN = 2\sqrt{3}$ .

Углом между  $AM$  и плоскостью основания пирамиды будет угол между  $AM$  и ее проекцией  $AN$ , т. е.  $\angle MAN = 60^\circ$ .

В плоскости  $AMN$  проведем  $NK \perp AM$ .

Поскольку  $AN \perp BC$  и  $AN$  — проекция наклонной  $AM$ , то  $AM \perp (BKC)$  (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

В прямоугольном  $\triangle MAN$   $\angle MAN = 60^\circ \Rightarrow \angle AMN = 30^\circ$ , тогда

$$AN = \frac{1}{2}AM.$$

$$\text{Из } \triangle ABN \text{ найдем } AN = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48 - 12} = 6.$$

$$\text{Значит, } AM = 2AN = 12.$$

Из  $\triangle AKN$ , где  $AN = 6$ ,  $\angle KAN = 60^\circ$ ,  $AK \perp KN$ , имеем  $\angle ANK = 30^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow AK = \frac{1}{2}AN = 3, \text{ тогда } AK : AM = 3 : 12 = 1 : 4.$$

б) Найдём объем пирамиды  $KABC$  с основанием  $ABC$ :

$$V_{KABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot KD, \text{ где } KD \text{ — высота.}$$

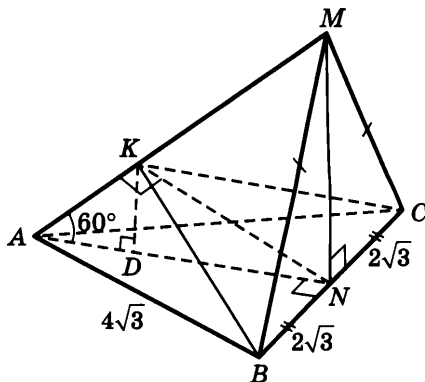
Заметим, что  $AD : AN = AK : AM = 1 : 4$  и  $KD = \frac{1}{4}MN$ . Из  $\triangle AMN$

$$MN = AM \cdot \sin 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}. \text{ Значит, } KD = \frac{1}{4} \cdot 6\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ (площадь правильного треугольника), где } a = AB = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Тогда } S_{\triangle ABC} = \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{16 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}.$$

$$\text{Итак, } V_{KABC} = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 18.$$



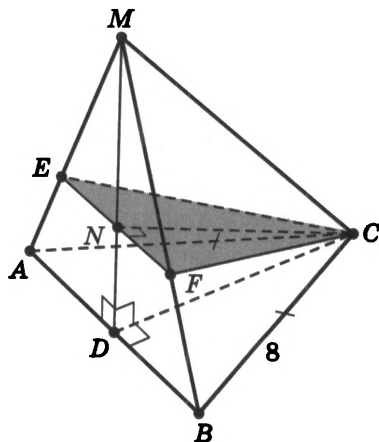
Теперь найдем объем пирамиды  $MABC$ :

$$V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot MN = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 72.$$

Следовательно,  $V_{MBCK} = V_{MABC} - V_{KABC} = 72 - 18 = 54$ .

Ответ: б) 54.

**Пример 19.** В основании пирамиды  $MABC$  лежит равнобедренный  $\triangle ABC$ , в котором  $AC = BC = 8$ ,  $\angle ACB = 120^\circ$ . Известно, что боковая грань  $MAB$  перпендикулярна плоскости основания  $ABC$ ,  $MA = MB$ , высота  $MD = 2\sqrt{2}$ . На ребрах  $MA$  и  $MB$  отмечены соответственно точки  $E$  и  $F$  так, что  $ME : EA = MF : FB = 3 : 2$ .



а) Докажите, что сечением пирамиды плоскостью  $CEF$  является прямоугольный треугольник.

б) Найдите объем пирамиды  $CABFE$ .

*Решение.*

а) По условию  $(MAB) \perp (ABC)$ ,  $AC = BC$ , значит,  $\triangle ABC$  — равнобедренный,  $CD$  — биссектриса, медиана и высота. Так как  $MA = MB$ , то  $MD$  — высота пирамиды  $MABC$  и грани  $MAB$ .

В  $\triangle BCD$   $\angle BCD = 60^\circ \Rightarrow \angle CBD = 30^\circ$ , тогда  $CD = \frac{1}{2} BC = 4$ .

По теореме Пифагора  $BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ ,  $AB = 8\sqrt{3}$ .

Так как  $ME : EA = MF : FB = 3 : 2$ , то  $\triangle MEF \sim \triangle MAB$  (по двум углам), тогда коэффициент подобия  $k = \frac{ME}{MA} = \frac{EF}{AB} = \frac{3}{5}$ , откуда  $EF = \frac{3}{5} AB = \frac{3}{5} \cdot 8\sqrt{3} = \frac{24\sqrt{3}}{5}$ .

$$MN = k \cdot MD = \frac{3}{5} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{2}}{5}, \quad ND = \frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{5}.$$

Из  $\triangle CND$ , где  $CD = 4$ ,  $ND = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ , имеем

$$CN = \sqrt{CD^2 + ND^2} = \sqrt{16 + \frac{16 \cdot 2}{25}} = \sqrt{16 \cdot \left(1 + \frac{2}{25}\right)} = 4\sqrt{\frac{27}{25}} = \frac{4 \cdot 3\sqrt{3}}{5} = \frac{12\sqrt{3}}{5}.$$

Поскольку  $CN$  — медиана  $\triangle CEF$  и  $CN = \frac{1}{2} EF$ , то  $\triangle CEF$  — прямоугольный, ч. т. д.

б) Объем пирамиды  $CABFE$  равен разности объемов пирамид  $CAMB$  и  $CMEF$ , т. е.  $V_{CABFE} = V_{CAMB} - V_{CMEF}$ .

$$V_{CMEF} = \frac{1}{3} S_{\Delta MEF} \cdot CD. \text{ Но } S_{\Delta MEF} : S_{\Delta MAB} = k^2 = \frac{9}{25}.$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } V_{CMEF} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{25} \cdot S_{\Delta MAB} \cdot CD = \\ &= \frac{3}{25} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot MD \cdot CD = \frac{3}{25} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 = \frac{96\sqrt{6}}{25}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{CAMB} &= \frac{1}{3} S_{\Delta MAB} \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot MD \cdot CD = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 = \frac{32\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } V_{CABFE} &= \frac{32\sqrt{6}}{3} - \frac{96\sqrt{6}}{25} = \\ &= 32\sqrt{6} \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{25} \right) = 32\sqrt{6} \cdot \frac{16}{3 \cdot 25} = \frac{512\sqrt{6}}{75}. \end{aligned}$$

Ответ: б)  $\frac{512\sqrt{6}}{75}$ .

**Пример 20.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  сторона основания  $AB = 8\sqrt{2}$ , а боковое ребро  $MA = 24$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку  $A$  и середину ребра  $MC$ .

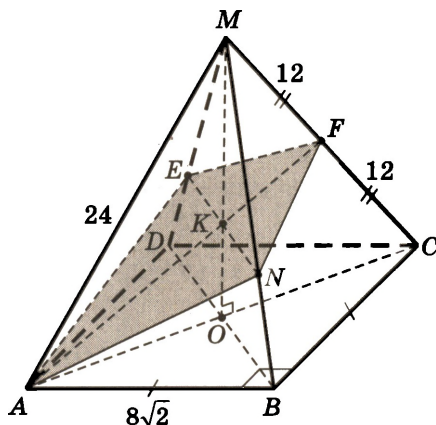
б) Найдите площадь полученного сечения.

*Решение.*

а) Пусть  $F$  — середина ребра  $MC$ . По условию задачи пирамида — правильная,  $O$  — точка пересечения диагоналей основания,  $MO$  — высота пирамиды. Прямая  $AF$  пересекает высоту  $MO$  в точке  $K$  ( $AMC$  — диагональное сечение).

В плоскости  $MBD$  через точку  $K$  проведем прямую, параллельную  $BD$ . Она пересечет боковые ребра  $MD$  и  $MB$  в точках  $E$  и  $N$  соответственно. Тогда четырехугольник  $AEFN$  — искомое сечение.

б) Так как  $MO \perp (ABC)$ , то  $MO \perp AC$ ,  $MO \perp BD$ ,  $AC \perp BD$ , тогда  $AK \perp BD$ . По построению  $BD \parallel NE$ , тогда  $AF \perp NE$ . Выходит, что у четы-



реугольника  $AEFN$  диагонали взаимно перпендикулярны. Следовательно,  $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} AF \cdot EN$ .

$AO$  — радиус описанной около квадрата  $ABCD$  окружности,  $AB = a = R\sqrt{2}$ , откуда  $R = AO = 8$ .

Из  $\triangle AMO$ , где  $AM = 24$ , получим  $MO = \sqrt{24^2 - 8^2} = \sqrt{(24-8)(24+8)} = \sqrt{16 \cdot 32} = \sqrt{16 \cdot 16 \cdot 2} = 16\sqrt{2}$ .

Пусть  $\angle AMC = \alpha$ , тогда из  $\triangle AMC$  по теореме синусов имеем

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2AM \cdot MC \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

$$16^2 = 24^2 + 24^2 - 2 \cdot 24 \cdot 24 \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

$$16^2 = 24^2 \cdot 2(1 - \cos \alpha), \text{ откуда } 1 - \cos \alpha = \frac{16^2}{24^2 \cdot 2}, \text{ или } 1 - \cos \alpha = \frac{2}{9},$$

$$\cos \alpha = \frac{7}{9}.$$

Аналогично из  $\triangle AMF$   $AF^2 = 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \cos \alpha$ , или

$$AF^2 = 576 + 144 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{7}{9} = 720 - 448 = 272, \text{ откуда}$$

$$AF = \sqrt{272} = \sqrt{4 \cdot 68} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 17} = 4\sqrt{17}.$$

Пусть  $AK = x$ ,  $KF = y$ , тогда  $x + y = 4\sqrt{17}$ .

Так как  $\triangle AMC$  — равнобедренный и  $MO$  — высота, то  $MO$  — биссектриса. Из  $\triangle AMF$  по свойству биссектрисы угла треугольника имеем

$$\frac{AM}{MF} = \frac{AK}{KF}, \text{ или } \frac{24}{12} = \frac{x}{y}, \text{ откуда } x = 2y.$$

$$\text{Но } x + y = 4\sqrt{17}, \text{ тогда } 2y + y = 4\sqrt{17}, \quad y = \frac{4\sqrt{17}}{3},$$

$$x = 2y = \frac{8\sqrt{17}}{3}. \text{ Из } \triangle AOK \quad OK = \sqrt{AK^2 - AO^2} = \sqrt{x^2 - 8^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{64 \cdot 17}{9} - 64} = \sqrt{64 \left( \frac{17}{9} - 1 \right)} = 8\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Тогда } MK = MO - OK = 16\sqrt{2} - \frac{16\sqrt{2}}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{3}.$$

Заметим, что  $\triangle MKN \sim \triangle MOB$  — как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle OMB$ .

$$\text{Значит, } \frac{MK}{KN} = \frac{MO}{OB}, \text{ откуда } KN = \frac{MK \cdot OB}{MO} = \frac{32\sqrt{2} \cdot 8}{3 \cdot 16\sqrt{2}} = \frac{16}{3}, \text{ тогда}$$

$$EN = 2 \cdot KN = \frac{32}{3}.$$

Следовательно,  $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} EN \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{3} \cdot 4\sqrt{17} = \frac{64\sqrt{17}}{3}$ .

Ответ: б)  $\frac{64\sqrt{17}}{3}$ .

**Пример 21.** В основании пирамиды  $MABCD$  лежит ромб  $ABCD$ , сторона которого равна 10, а острый угол —  $60^\circ$ . Известно, что  $MD = 5\sqrt{13}$ ,  $MB = 25$ ,  $AM = MC$ .

а) Докажите, что  $MD$  — высота пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостью  $MBD$  и ребром  $AM$ .

*Решение.*

а) Так как  $ABCD$  — ромб, то  $AB = BC = CD = AD$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ , тогда  $\angle CAB = \angle ACB = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$ . Значит,  $\triangle ABC$  — равносторонний, т. е.  $AC = 10$ , точка  $O$  — середина диагоналей,  $AO = OC = 5$ .

Поскольку  $AC \perp BD$  (по свойству ромба), то из  $\triangle AOB$  найдем  $BO = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ , тогда  $BD = 10\sqrt{3}$ . По условию  $MB = 25$ .

Заметим, что  $MD^2 + BD^2 = MB^2$ , или  $(5\sqrt{13})^2 + (10\sqrt{3})^2 = 25^2$ .

Значит,  $\triangle BMD$  — прямоугольный (по теореме, обратной теореме Пифагора), т. е.  $MD \perp DB$ . Следовательно,  $MD$  — высота пирамиды.

б) Угол между прямой  $AM$  и плоскостью  $MBD$  — это угол между  $AM$  и ее проекцией на эту плоскость, т. е.  $\angle AMO = \alpha$  — искомый угол.

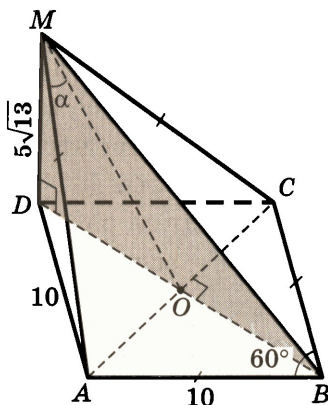
$$\text{В } \triangle MDO \text{ } MD = 5\sqrt{13}, OD = \frac{1}{2} BD = 5\sqrt{3}.$$

$$\text{Тогда } MO = \sqrt{MD^2 + OD^2} = \sqrt{325 + 75} = \sqrt{400} = 20.$$

По условию задачи  $AM = MC$ , значит,  $\triangle AMC$  — равнобедренный, тогда  $MO$  — медиана, биссектриса и высота.

Так как  $AC = 10$ , то  $AO = OC = 5$ . Из  $\triangle AMO$ , где  $MO = 20$  и  $AO = 5$ , имеем  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AO}{MO} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ , откуда  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{4}$ .

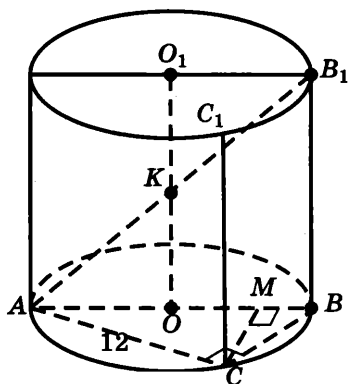
Ответ: б)  $\operatorname{arctg} \frac{1}{4}$ .





## 14.2. Круглые тела

**Пример 22.** В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки  $A$  и  $C$ , а на окружности верхнего основания —  $B_1$  и  $C_1$  так, что  $CC_1$  является образующей цилиндра, перпендикулярной основаниям, а  $AB_1$  пересекает ось  $OO_1$  цилиндра в точке  $K$ .



а) Докажите, что прямые  $AC$  и  $B_1C_1$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $CC_1$ , если  $AC = 12$ ,  $B_1C_1 = 5$ .

*Решение.*

а) По условию диагональ  $AB_1$  пересекает ось  $OO_1$  цилиндра в точке  $K$ , значит,  $AB_1$  и  $O_1O$  лежат в одной плоскости (в плоскости осевого сечения). Значит,  $AB$  — диаметр нижнего основания. Так как  $B_1C_1 \parallel (ABC)$  и  $B_1C_1 = BC$ , то  $\angle ACB = 90^\circ$  — как вписанный, опирающийся на диаметр  $AB$ , т. е.  $AC \perp BC$ , ч. т. д.

б) Заметим, что прямые  $CC_1$  и  $AB_1$  — скрещивающиеся, так как  $CC_1 \parallel (ABB_1)$ , а  $AB_1 \in (ABB_1)$ .

Тогда расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки прямой  $CC_1$  до плоскости  $(ABB_1)$ . Проведем  $CM \perp AB$ . Так как  $OO_1 \perp (ABC) \Rightarrow OO_1 \perp CM$ . Следовательно, в плоскости  $ABB_1$  мы имеем две прямые, которым перпендикулярна  $CM$ , т. е.  $CM$  — расстояние от точки  $C$  до  $(ABB_1)$ . По условию  $B_1C_1 = 5$  и  $B_1C_1 \parallel BC$ , где  $BC$  — проекция  $B_1C_1$  на плоскость нижнего основания.

Значит,  $BC = B_1C_1 = 5$ . Из  $\triangle ABC$ , где  $AC = 12$ ,  $BC = 5$ , по теореме Пифагора  $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ .

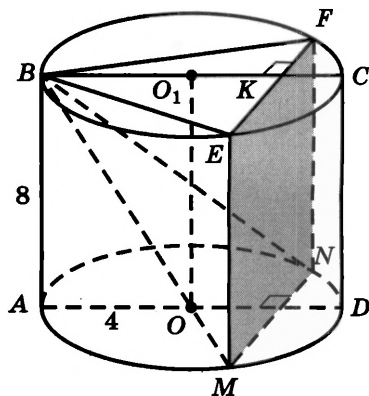
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CM, \text{ откуда } CM = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{12 \cdot 5}{13} = \frac{60}{13}.$$

Ответ: б)  $\frac{60}{13}$ .

**Пример 23.** В цилиндре  $ABCD$  высота  $AB = 8$ , радиус основания  $AO = 4$ ,  $MN$  — хорда в нижнем основании, причем  $MN = AO$ . В верхнем основании цилиндра проведен диаметр  $BC \perp MN$ . Сечение  $MEFN \perp BC$ .

а) Докажите, что диагонали сечения  $MEFN$  равны.

б) Найдите объем пирамиды  $BMEFN$ .



**Решение.**

а) Поскольку  $ME = NF$  — как образующие цилиндра и  $ME \parallel NF \Rightarrow \Rightarrow$  четырехугольник  $MEFN$  — параллелограмм (по признаку параллелограмма). Кроме того,  $BC \perp MN$  (по условию задачи),  $MN \parallel EF \Rightarrow \Rightarrow BC \perp EF$ . Выходит, что  $BC \perp (MEFN)$ . Так как  $ME \perp EF$ ,  $ME \perp MN$ , то  $MEFN$  — прямоугольник. Тогда его диагонали равны (по свойству прямоугольника), ч. т. д.

б) Так как  $BC \perp (MEFN)$ , то  $BK$  — высота пирамиды, а прямоугольник  $MEFN$  — основание пирамиды.

Найдем высоту  $BK$  пирамиды:  $BK = BO_1 + O_1K$ , где  $BO_1 = AO = 4$ ,  $MN = EF = 4$ .  $\triangle EO_1F$  — равнобедренный, так как  $EO_1 = O_1F = EF = 4$ ,  $O_1K$  — медиана и высота,  $EK = KF = 2$ . Из  $\triangle EO_1K$  по теореме Пифагора  $O_1K = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

Тогда  $BK = BO_1 + O_1K = 4 + 2\sqrt{3}$ .  $S_{\text{сеч.}} = S_{MEFN} = MN \cdot ME = 4 \cdot 8 = 32$ .

Следовательно,  $V_{BMEFN} = \frac{1}{3} S_{MEFN} \cdot BK = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot (4 + 2\sqrt{3}) = \frac{64}{3} (2 + \sqrt{3})$ .

**Ответ:** б)  $\frac{64}{3} (2 + \sqrt{3})$ .

**Пример 24.** В конусе  $MAV$  длина образующей равна 13, а радиус основания равен 5. На окружности основания конуса выбраны точки  $B$  и  $C$ , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 2 : 4.

а) Докажите, что  $\triangle BOC$  — равносторонний.

б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью  $MBC$ .

**Решение.**

а) Пусть  $\cup BC = 2x$ , тогда  $\cup CAB = 4x$ . Получим уравнение  $2x + 4x = 360$ , или  $6x = 360$ , откуда  $x = 60$ .

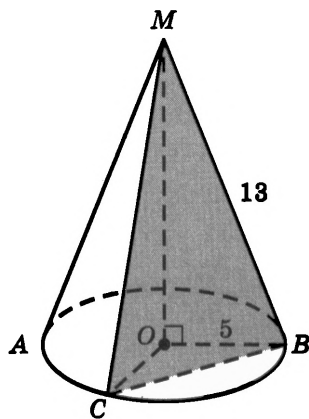
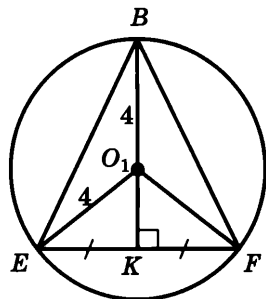
Значит,  $\cup BC = 60^\circ \Rightarrow \angle BOC = 60^\circ$ .

Так как  $BO = CO$ , то  $\angle OBC = \angle OCB = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$ .

Выходит, что  $\triangle BOC$  — равносторонний, ч. т. д.

б) Сечение  $MBC$  — равнобедренный треугольник, так как  $MC = MB = 13$ ,  $BC = 5$ .

По формуле Герона  $S_{\text{сеч.}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , где  $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$  — полупериметр.



$$p = \frac{1}{2}(5 + 13 + 13) = \frac{31}{2}, \quad p - a = p - b = \frac{31}{2} - 13 = \frac{5}{2}, \quad p - c = \frac{31}{2} - 5 = \frac{21}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\text{сеч.}} = \sqrt{\frac{31}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{21}{2}} = \frac{5\sqrt{651}}{4}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{5\sqrt{651}}{4}.$$

**Пример 25.** Радиус основания конуса с вершиной  $M$  и центром основания  $O$  равен 8, высота конуса  $MO = \sqrt{70}$ . Точка  $N$  — середина образующей  $MA$ , точка  $E \in AB$ , причем  $NE \parallel MB$ .

а) Докажите, что  $OE$  — биссектриса  $\angle AOB$ .

б) Найдите угол между прямой  $BN$  и плоскостью основания конуса, если  $AB = 6\sqrt{3}$ .

*Решение.*

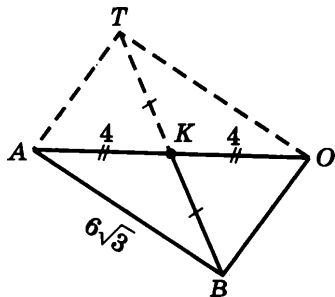
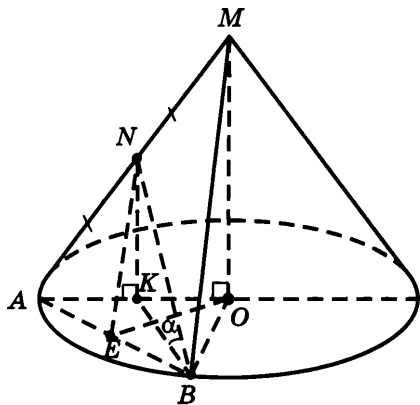
а) Поскольку точка  $N$  — середина  $MA$  и  $NE \parallel MB$  (по условию задачи), то  $E$  — середина  $AB$  (по теореме Фалеса). В  $\triangle AOB$   $AO = OB = R$ , т. е.  $\triangle AOB$  — равнобедренный с основанием  $AB$ , тогда  $OE$  — медиана  $\Rightarrow OE$  — биссектриса  $\angle AOB$ , ч. т. д.

б) Точка  $K$  — проекция точки  $N$  на  $(AOB)$ , тогда  $\angle NBK$  — искомый угол между прямой  $BN$  и плоскостью основания конуса.

Пусть  $\angle NBK = \alpha$ , тогда из  $\triangle NKB$  имеем  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{NK}{BK}$ , где  $NK$  — средняя линия  $\triangle MAO$ , т. е.  $NK = \frac{1}{2}MO = \frac{\sqrt{70}}{2}$ . Остается найти длину  $BK$ .

Достроим  $\triangle AOB$  до параллелограмма  $ABOT$ . По свойству параллелограмма имеем  $AO^2 + BT^2 = 2(AB^2 + BO^2)$ , где  $AO = OB = R = 8$ ,  $AB = 6\sqrt{3}$ .

Пусть  $BK = KT = x$ , тогда получим  $(2x)^2 + 8^2 = 2(8^2 + (6\sqrt{3})^2)$ , или  $4x^2 + 64 = 2(64 + 108)$ , или  $2x^2 = 172 - 32 = 140$ , или  $x^2 = 70$ , откуда  $x = \sqrt{70}$ , т. е.  $BK = \sqrt{70}$ .



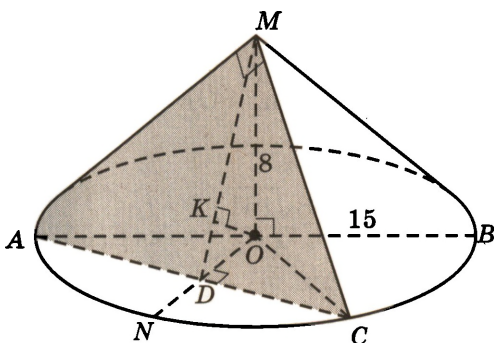
Из прямоугольного  $\triangle NKB$ , где  $NK = \frac{\sqrt{70}}{2}$ ,  $BK = \sqrt{70}$ , находим  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{NK}{BK} = \frac{\sqrt{70}}{2} : \sqrt{70} = \frac{1}{2}$ , откуда  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ .

Ответ: б)  $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$ .

**Пример 26.** В конусе  $MAV$  высота  $MO = 8$ , радиус основания  $AO = 15$ .

а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину  $M$  конуса и взаимно перпендикулярные образующие  $MA$  и  $MC$ .

б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания конуса.



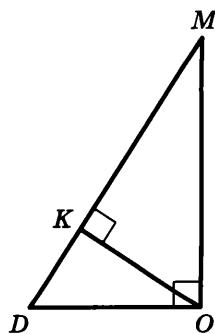
*Решение.*

а) Найдем длину образующей  $MA$  конуса из прямоугольного  $\triangle AMO$ , где  $AO = 15$ ,  $MO = 8$ . По теореме Пифагора  $AM = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$ . Через вершину  $M$  и две образующие  $MA$  и  $MC$  проходит сечение конуса  $AMC$ , где  $MA \perp MC$  (по условию задачи). Поскольку  $MA = MC$  (как образующие конуса) и  $MA \perp MC$ , то сечение — равнобедренный прямоугольный  $\triangle AMC$ , который пересекает основание конуса по хорде  $AC$ , где  $AC = \sqrt{17^2 + 17^2} = \sqrt{2 \cdot 17^2} = 17\sqrt{2}$ .

б) Проведем радиус  $OM \perp AC$ , тогда  $AD = DC$  (радиус, перпендикулярный хорде, делит ее пополам). Соединим точки  $M$  и  $D$ . Поскольку  $\triangle AMC$ , где  $AC$  — гипотенуза, — равнобедренный и прямоугольный, то  $MD$  — медиана, а значит, и высота.

Известно, что медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, т. е.  $MD = AD = DC = \frac{1}{2} AC = \frac{17\sqrt{2}}{2}$ .

Поскольку  $MD \perp AC$  и  $OD \perp AC$ , то плоскость  $(MOD) \perp (AMC)$ . Значит, перпендикуляр, опущенный из точки  $O$  на  $MD$ , будет расстоянием от точки  $O$  до  $(AMC)$ .



Из  $\triangle MOD$ , где  $MO = 8$ ,  $MD = \frac{17\sqrt{2}}{2}$ , по теореме Пифагора найдем катет  $OD$ . Получим  $OD = \sqrt{MD^2 - MO^2} = \sqrt{\frac{289}{2} - 64} = \sqrt{\frac{289 - 128}{2}} = \sqrt{\frac{161}{2}}$ .

Проведем  $OK \perp MD$ , тогда  $S_{\triangle MOD} = \frac{1}{2} MO \cdot OD = \frac{1}{2} MD \cdot OK$ , откуда

$$OK = \frac{MO \cdot OD}{MD}, \text{ или } OK = \frac{8 \cdot \sqrt{\frac{161}{2}}}{\frac{17\sqrt{2}}{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{161} \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 17\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{161}}{17}.$$

Ответ: б)  $\frac{8\sqrt{161}}{17}$ .

**Пример 27.** Дан прямой круговой цилиндр высотой 10 и радиусом основания 3. В основании конуса проведена хорда  $CD$ , равная радиусу основания, а в нижнем основании проведен диаметр  $MN \perp CD$ ,  $(ABCD) \perp MN$ . Точка  $M$  и центр  $O$  основания цилиндра лежат по одну сторону от  $(ABCD)$ .

а) Докажите, что  $AC = BD$ .

б) Найдите  $V_{MABCD}$ .

*Решение.*

а) Так как  $(ABCD) \perp MN$  (по условию), то  $AD$  и  $BC$  — образующие цилиндра. Значит,  $AD \parallel BC$  и  $AD = BC$ , т. е.  $ABCD$  — параллелограмм. Но  $AD$  и  $BC$  перпендикулярны основаниям цилиндра и  $AD \perp DC$ , а  $BC \perp CD$ . Следовательно, параллелограмм  $ABCD$  является прямоугольником, тогда  $AC = BD$ , ч. т. д.

б)  $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 10 \cdot 3 = 30$ .

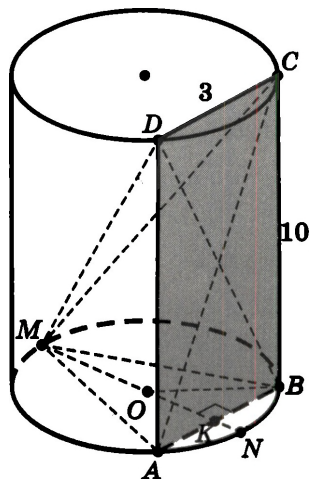
Пусть  $K$  — точка пересечения диаметра  $MN$  и хорды  $AB$ .

$$\text{В } \triangle OKB \text{ } OB = MO = AB = 3, KB = \frac{1}{2} AB = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Тогда } OK = \sqrt{OB^2 - KB^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$MK$  — высота пирамиды  $MABCD$ , тогда

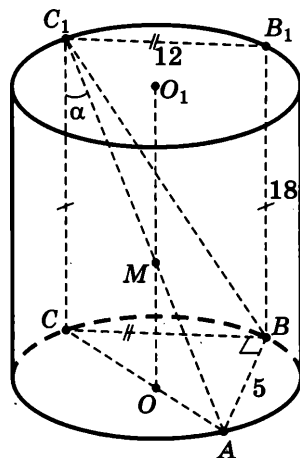
$$MK = MO + OK = 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{2}.$$



Следовательно,  $V_{MABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot MK = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot \frac{3(2+\sqrt{3})}{2} = 15(2+\sqrt{3})$ .

Ответ: б)  $15(2+\sqrt{3})$ .

**Пример 28.** В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности нижнего основания отмечены точки  $A$  и  $B$ , а на окружности верхнего — точки  $B_1$  и  $C_1$ , где  $BB_1$  — образующая цилиндра, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось  $OO_1$  в точке  $M$ .



а) Докажите, что

$$\angle ABC_1 = 90^\circ.$$

б) Найдите угол между прямыми  $BB_1$  и  $AC_1$ , если  $AB = 5$ ,  $B_1C_1 = 12$ ,  $BB_1 = 18$ .

*Решение.*

а) Точка  $C$  — проекция точки  $C_1$  на плоскость нижнего основания. Наклонная  $AC_1$  пересекает ось цилиндра  $OO_1$  в точке  $M$ , проекцией которой является точка  $O$ . Значит,  $AC$  — диаметр окружности, тогда  $\angle ABC = 90^\circ$  — как вписанный угол, опирающийся на диаметр. Так как  $BC \perp AB$ , то  $BC_1 \perp AB$ , т. е.  $\angle ABC_1 = 90^\circ$  (по теореме о трех перпендикулярах), ч. т. д.

б) Поскольку образующие цилиндра параллельны, т. е.  $CC_1 \parallel BB_1$ , то  $\angle AC_1C = \alpha$  — искомый угол между прямыми  $BB_1$  и  $AC_1$ .

По условию  $B_1C_1 = 12$ ,  $CC_1 = BB_1 = 18$ ,  $BC = B_1C_1 = 12$ .

Из  $\triangle ABC$  имеем  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ .

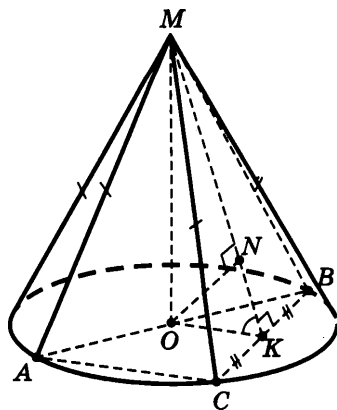
Из  $\triangle ACC_1$   $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{CC_1} = \frac{13}{18}$ , откуда  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{13}{18}$ .

Ответ: б)  $\operatorname{arctg} \frac{13}{18}$ .

**Пример 29.** Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на окружности основания конуса, причем  $AB$  — диаметр. Точка  $K$  — середина  $BC$ .

а) Докажите, что прямая  $MK$  образует с плоскостью  $ABC$  угол, равный углу между  $AC$  и плоскостью  $MAC$ .

б) Найдите угол между прямой  $MA$  и ( $MCB$ ), если  $AC = 8$ ,  $BC = 6$ ,  $MA = 4\sqrt{10}$ .



*Решение.*

а) Точка  $O$  — проекция точки  $M$  на плоскость основания конуса. Так как  $MK \perp BC$  ( $MK$  — медиана и высота равнобедренного  $\triangle MBC$ ), то  $\angle MKO$  — угол наклона  $MK$  к  $(ABC)$ .

Но  $OK \parallel AC$ , так как  $OK$  — средняя линия  $\triangle ABC$ . Значит, угол между  $AC$  и  $(MBC)$  равен углу между  $MK$  и  $(ABC)$ , ч. т. д.

б) Так как  $AC = 8$ , то  $OK = \frac{1}{2}AC = 4$ ,  $BK = \frac{1}{2}BC = 3$ ,  $MA = MC = MB = 4\sqrt{10}$ , тогда из  $\triangle MBK$  получим

$$MK = \sqrt{MB^2 - BK^2} = \sqrt{(4\sqrt{10})^2 - 3^2} = \sqrt{151}.$$

$$\text{Из } \triangle MOK \text{ } MO = \sqrt{MK^2 - OK^2} = \sqrt{151 - 16} = \sqrt{135} = 3\sqrt{15}.$$

$$S_{\triangle MOK} = \frac{1}{2}MO \cdot OK = \frac{1}{2}MK \cdot ON, \text{ откуда}$$

$$ON = \frac{MO \cdot OK}{MK} = \frac{3\sqrt{15} \cdot 4}{\sqrt{151}} = \frac{12\sqrt{15}}{\sqrt{151}}.$$

$$\text{Из } ONK \sin \angle OKN = \frac{ON}{OK} = \frac{12\sqrt{15}}{\sqrt{151}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{\sqrt{151}}.$$

$$\text{Ответ: б) } \arcsin \frac{3\sqrt{15}}{\sqrt{151}}.$$

**Пример 30.** В конус, радиус основания которого равен 4, вписан шар радиуса 3.

а) Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.

б) Найдите отношение площади поверхности конуса к площади поверхности шара.

*Решение.*

а) Так как  $ABC$  — конус, то осевое сечение — равнобедренный  $\triangle ABC$ , где  $AC = BC$  — как образующие конуса,  $AB$  — диаметр конуса. В  $\triangle ABC$  вписана окружность, радиус которой равен радиусу шара.

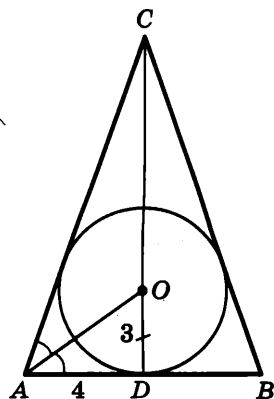
б) Пусть  $AD = r = 4$  — радиус основания конуса,  $OD = R = 3$  — радиус вписанного в конус шара.

Известно, что  $S_{\text{конуса}} = \pi r(r + l)$ , где  $l = AC$  — образующая конуса.

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2.$$

По свойству биссектрисы треугольника  $\frac{OD}{CO} = \frac{AD}{AC}$ , или

$$\frac{3}{CD - 3} = \frac{4}{AC}. \quad (1)$$



Кроме того,  $AC^2 - CD^2 = 16$ .

(2)

Из равенства (1) имеем  $3AC = 4CD - 12$ , откуда  $CD = \frac{3AC + 12}{4}$ .

Тогда равенство (2) примет вид  $AC^2 - \frac{9(AC + 4)^2}{16} = 16$ , или

$$16AC^2 - 9(AC + 4)^2 = 256.$$

Раскрыв скобки и упростив выражение, получим уравнение  $7AC^2 - 72AC - 400 = 0$ .

$$\frac{D}{4} = 36^2 + 2800 = 4096 = 64^2.$$

$$AC = l = \frac{36 \pm 64}{7}, \text{ откуда } l = \frac{100}{7} \text{ (так как } l > 0 \text{)}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{S_{\text{конуса}}}{S_{\text{шара}}} = \frac{\pi \cdot 4 \cdot \left(4 + \frac{100}{7}\right)}{4\pi \cdot 9} = \frac{128}{63}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{128}{63}.$$

*Замечание.* Задача допускает и другие способы решения.

**Пример 31.** Дан конус  $МAB$ . На окружности основания конуса отмечены точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  так, что  $AC = BC$ ,  $N$  — середина образующей  $MB$ .

а) Докажите, что  $\angle NOC = 90^\circ$ .

б) Найдите угол между прямыми  $AN$  и  $MC$ , если  $AM = 8$ ,  $AB = 2\sqrt{6}$ .

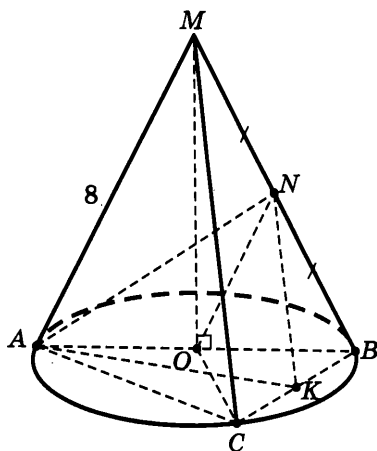
*Решение.*

а)  $МAB$  — осевое сечение конуса,  $N$  — середина  $MB$ , тогда медиана  $AN$  пересекает высоту  $MO$  конуса. Значит, плоскость  $МAB$  содержит высоту конуса,  $AB$  — диаметр конуса,  $MO$  — высота.

Так как  $AC = BC$  (по условию), то  $CO$  — высота равнобедренного  $\triangle ABC$ , тогда  $OC \perp AB$ ,  $OC \perp MO \Rightarrow OC \perp (MAB)$ . Значит,  $\angle NOC = 90^\circ$  (по определению перпендикулярности прямой и плоскости), ч. т. д.

б) Пусть  $K$  — середина  $BC$ , тогда  $NK$  — средняя линия  $\triangle MBC \Rightarrow NK \parallel MC$ . Следовательно, угол между скрещивающимися прямыми  $AN$  и  $MC$  равен углу между  $AN$  и  $NK$ .

Заметим, что  $\angle ACB = 90^\circ$  — как вписанный угол, опирающийся на диаметр  $AB$ ,  $\angle CAB = \angle ABC = 45^\circ$ .





$$BC = AC = AB \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Из } \triangle ACK \text{ } AK = \sqrt{AC^2 + CK^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{15}.$$

$$\text{В } \triangle MOB \cos \angle MBO = \frac{OB}{MB} = \frac{\sqrt{6}}{8}.$$

Из  $\triangle ANB$  по теореме косинусов имеем

$$AN^2 = AB^2 + BN^2 - 2AB \cdot BN \cdot \cos \angle ABN, \text{ или}$$

$$AN^2 = (2\sqrt{6})^2 + 4^2 - 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{8}, \text{ или}$$

$$AN^2 = 24 + 16 - 12 = 28, \text{ откуда } AN = 2\sqrt{7}.$$

Из  $\triangle ANK$ , где  $\angle ANK = \alpha$ , получим

$$AK^2 = AN^2 + NK^2 - 2AN \cdot NK \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

$$15 = 28 + 16 - 2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot 4 \cos \alpha, \text{ откуда}$$

$$16\sqrt{7} \cos \alpha = 29, \cos \alpha = \frac{29}{16\sqrt{7}}, \text{ т. е. } \alpha = \arccos \frac{29}{16\sqrt{7}}.$$

$$\text{Ответ: б) } \arccos \frac{29}{16\sqrt{7}}.$$

## § 15. Задание 15. Неравенства

Здесь представлены в основном логарифмические и показательные неравенства, а также другие типы неравенств. В любом случае исходное неравенство сводится к дробно-рациональному. Самое трудное — найти пересечение полученных неравенств с областью допустимых значений (ОДЗ).

### 15.1. Рациональные неравенства

**Пример 1.** Решите неравенство

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} \leq \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 3}.$$

*Решение.*

Запишем неравенство в виде

$$\frac{(x+1)^2 + 1}{x+1} + \frac{(x+4)^2 + 4}{x+4} \leq \frac{(x+2)^2 + 2}{x+2} + \frac{(x+3)^2 + 3}{x+3}, \text{ или}$$

$$x + 1 + \frac{1}{x+1} + x + 4 + \frac{4}{x+4} \leq x + 2 + \frac{2}{x+2} + x + 3 + \frac{3}{x+3}, \text{ или}$$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+4} \leq \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}. \quad (1)$$

Для упрощения вычислений запишем неравенство (1) в виде

$$\frac{4}{x+4} - \frac{3}{x+3} \leq \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}, \text{ или } \frac{4(x+3) - 3(x+4)}{(x+4)(x+3)} \leq \frac{2(x+1) - (x+2)}{(x+2)(x+1)}.$$

После раскрытия скобок в числителе дробей получим

$$\frac{x}{(x+4)(x+3)} \leq \frac{x}{(x+2)(x+1)}, \text{ или } x \left( \frac{(x+2)(x+1) - (x+4)(x+3)}{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)} \right) \leq 0.$$

Вновь раскрывая скобки в числителе дроби, имеем

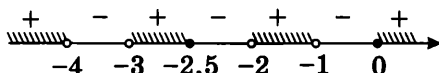
$$x \cdot \frac{x^2 + 3x + 2 - x^2 - 7x - 12}{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)} \leq 0, \text{ или } \frac{x(-4x - 10)}{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)} \leq 0, \text{ или}$$

$$\frac{x(x+2,5)}{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)} \geq 0.$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, находим

$$x_1 = 0; x_2 = -2,5; x_3 = -4;$$

$$x_4 = -3; x_5 = -2; x_6 = -1.$$



Ответ:  $(-\infty; -4) \cup (-3; -2,5] \cup (-2; -1) \cup [0; +\infty)$ .

**Пример 2.** Решите неравенство

$$\left( \frac{5}{6x-11} + \frac{6x-11}{5} \right)^2 \leq \frac{25}{4}.$$

*Решение.*

Неравенство имеет вид  $a^2 \leq \frac{25}{4}$ , которое приводим к виду

$$\left( a - \frac{5}{2} \right) \left( a + \frac{5}{2} \right) \leq 0 \text{ и т. д.}$$

В нашем случае получим неравенство

$$\left( \frac{5}{6x-11} + \frac{6x-11}{5} - \frac{5}{2} \right) \left( \frac{5}{6x-11} + \frac{6x-11}{5} + \frac{5}{2} \right) \leq 0,$$

$$\left( \frac{25 + (6x-11)^2}{5(6x-11)} - \frac{5}{2} \right) \left( \frac{25 + (6x-11)^2}{5(6x-11)} + \frac{5}{2} \right) \leq 0.$$

Пусть  $\frac{25 + (6x-11)^2}{5(6x-11)} = y$ , тогда имеем  $\left( y - \frac{5}{2} \right) \left( y + \frac{5}{2} \right) \leq 0$ . Решая мето-

дом интервалов, находим  $-\frac{5}{2} \leq y \leq \frac{5}{2}$ .

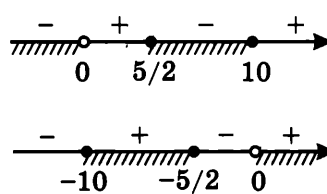
Учитывая замену, получим систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{25 + (6x - 11)^2}{5(6x - 11)} \leq \frac{5}{2}, & \begin{cases} \frac{50 + 2(6x - 11)^2 - 25(6x - 11)}{10(6x - 11)} \leq 0, \\ \frac{50 + 2(6x - 11)^2 + 25(6x - 11)}{10(6x - 11)} \geq 0. \end{cases} \\ \frac{25 + (6x - 11)^2}{5(6x - 11)} \geq -\frac{5}{2}; \end{cases}$$

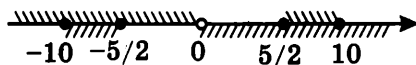
Пусть  $6x - 11 = t$ , тогда числители дробей можно разложить на множители:

$$2t^2 - 25t + 50 = 2(t - 10)\left(t - \frac{5}{2}\right) \text{ и } 2t^2 + 25t + 50 = 2(t + 10)\left(t + \frac{5}{2}\right).$$

Тогда получим

$$\begin{cases} \frac{2(t - 10)\left(t - \frac{5}{2}\right)}{10t} \leq 0, & \begin{cases} \frac{(t - 10)\left(t - \frac{5}{2}\right)}{t} \leq 0, \\ \frac{(t + 10)\left(t + \frac{5}{2}\right)}{t} \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$


Найдем пересечение:



$$-10 \leq t \leq -\frac{5}{2}; \quad \frac{5}{2} \leq t \leq 10.$$

Учитывая замену  $6x - 11 = t$ , имеем:

$$\begin{aligned} 1) \quad -10 \leq 6x - 11 \leq -\frac{5}{2}, & \quad 2) \quad \frac{5}{2} \leq 6x - 11 \leq 10, \\ 1 \leq 6x \leq \frac{17}{2}, & \quad \frac{27}{2} \leq 6x \leq 21, \\ \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{17}{12}, & \quad \frac{9}{4} \leq x \leq \frac{7}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $x \in \left[\frac{1}{6}; \frac{17}{12}\right] \cup \left[\frac{9}{4}; \frac{7}{2}\right]$ .

Ответ:  $\left[\frac{1}{6}; \frac{17}{12}\right] \cup \left[\frac{9}{4}; \frac{7}{2}\right]$ .

**Пример 3.** Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 3x - 3}{x^2 - 3x} + \frac{8x - 29}{x - 4} \leq \frac{9x + 1}{x}.$$

*Решение.*

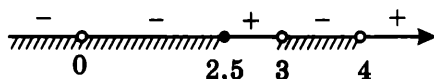
Если перенести последнюю дробь в левую часть неравенства, а затем привести дроби к общему знаменателю, то получим довольно сложное неравенство.

Более простое решение заключается в выделении целой части у каждой дроби.

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 - 3x) - 3}{x^2 - 3x} + \frac{8(x - 4) + 3}{x - 4} &\leq \frac{9x}{x} + \frac{1}{x}, \text{ или} \\ 1 - \frac{3}{x(x - 3)} + 8 + \frac{3}{x - 4} &\leq 9 + \frac{1}{x}, \text{ или } \frac{3}{x - 4} - \frac{3}{x(x - 3)} - \frac{1}{x} \leq 0, \text{ или} \\ \frac{3x(x - 3) - 3(x - 4) - (x - 4)(x - 3)}{x(x - 3)(x - 4)} &\leq 0. \end{aligned}$$

После упрощения числителя дроби получим  $\frac{x(2x - 5)}{x(x - 3)(x - 4)} \leq 0$ .

Решая методом интервалов, находим



*Ответ:*  $(-\infty; 0) \cup (0; 2,5] \cup (3; 4)$ .

**Пример 4.** Решите неравенство

$$x^3 + 2x^2 - \frac{7x^2 - 5x + 20}{x - 4} \leq 5.$$

*Решение.*

Приводить левую часть неравенства к общему знаменателю ни к чему хорошему не приводит, так как в результате в числителе дроби получим многочлен 4-й степени, который придется разложить на множители.

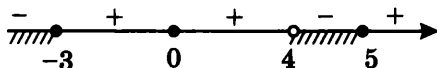
Запишем неравенство в виде

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 - \left( \frac{7x^2}{x - 4} - \frac{5(x - 4)}{x - 4} \right) &\leq 5, \text{ или} \\ x^3 + 2x^2 - \frac{7x^2}{x - 4} + 5 &\leq 5, \text{ или} \\ x^3 + 2x^2 - \frac{7x^2}{x - 4} &\leq 0. \end{aligned}$$

Теперь вынесем общий множитель  $x^2$  за скобки:

$$x^2 \left( x + 2 - \frac{7}{x - 4} \right) \leq 0, \text{ или } \frac{x^2((x + 2)(x - 4) - 7)}{x - 4} \leq 0, \text{ или}$$

$\frac{x^2(x^2 - 2x - 15)}{x - 4} \leq 0$ . Но  $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$ , где 5 и -3 — корни квадратного трехчлена. Тогда получим неравенство  $\frac{x^2(x - 5)(x + 3)}{x - 4}$ , которое решим методом интервалов, учитывая, что  $x^2$  — двойная точка.



Следовательно,  $x \leq -3$ ,  $x = 0$  или  $4 < x \leq 5$ .

Ответ:  $(-\infty; -3] \cup \{0\} \cup (4; 5]$ .

## 15.2. Иррациональные неравенства

**Пример 5.** Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12} - \sqrt{3x - 9}}{|3x^2 - 2x - 3| - |2x^2 + x - 5|} \geq 0.$$

*Решение.*

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{(x^2 - 7x + 12) - (3x - 9)}{(3x^2 - 2x - 3 - 2x^2 - x + 5)(3x^2 - 2x - 3 + 2x^2 + x - 5)} \geq 0, \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0, \\ 3x - 9 \geq 0, \end{cases}$$

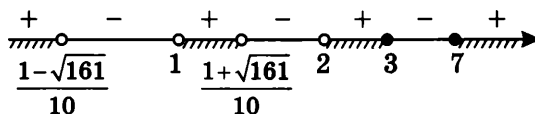
или  $\begin{cases} \frac{x^2 - 10x + 21}{(x^2 - 3x + 2)(5x^2 - x - 8)} \geq 0, \\ (x - 3)(x - 4) \geq 0, \\ x \geq 3. \end{cases} \quad (1)$

Так как  $x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 4)$ ,  $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$  и  $5x^2 - x - 8 = 5(x - x_1)(x - x_2)$ , где  $x_1 = \frac{1 - \sqrt{161}}{10}$ ,  $x_2 = \frac{1 + \sqrt{161}}{10}$ , то система (1) запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{(x - 3)(x - 7)}{(x - 1)(x - 2) \left(x - \frac{1 - \sqrt{161}}{10}\right) \left(x - \frac{1 + \sqrt{161}}{10}\right)} \geq 0, \\ x \in \{3\} \cup [4; +\infty). \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{161}}{10} \approx -1,2; \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{161}}{10} \approx 1,4.$$

Решим дробно-рациональное неравенство системы (2) методом интервалов:



Учитывая, что  $x \in \{3\} \cup [4; +\infty)$ , находим

$$x \in \{3\} \cup \{4\} \cup [7; +\infty).$$

Ответ:  $\{3\} \cup \{4\} \cup [7; +\infty)$ .

**Пример 6.** Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2 + 9x - 14} - x + 2}{|x^2 - 5x + 6| - |6 - x^2|} \leq 0.$$

*Решение.*

Запишем неравенство в виде

$$\frac{\sqrt{-(x^2 - 9x + 14)} - (x - 2)}{|x^2 - 5x + 6| - |x^2 - 6|} \leq 0.$$

Поскольку  $-(x^2 - 9x + 14) \geq 0$ , то  $x^2 - 9x + 14 \leq 0$ , или  $(x - 2)(x - 7) \leq 0$ , откуда  $x \in [2; 7]$ .

Но тогда  $x - 2 \geq 0$ . Значит,

$$\frac{(-x^2 + 9x - 14) - (x - 2)^2}{(x^2 - 5x + 6 - x^2 + 6)(x^2 - 5x + 6 + x^2 - 6)} \leq 0, \text{ или}$$

$$\frac{-2x^2 + 13x - 18}{(-5x + 12)(2x^2 - 5x)} \leq 0, \text{ или}$$

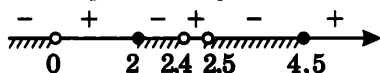
$$\frac{2x^2 - 13x + 18}{x(5x - 12)(2x - 5)} \leq 0. \quad (1)$$

Но  $2x^2 - 13x + 18 = (2x - 9)(x - 2)$ , тогда получим

$$\frac{(2x - 9)(x - 2)}{x(5x - 12)(2x - 5)} \leq 0. \quad (2)$$

Неравенство (2) решим методом интервалов:

$$x_1 = 4,5; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 2,4; \quad x_5 = 2,5.$$



Учитывая, что  $x \in [2; 7]$ , находим

$$x \in [2; 2,4] \cup (2,5; 4,5].$$

Ответ:  $[2; 2,4] \cup (2,5; 4,5]$ .

**Пример 7.** Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{6(2 - x)}}{\sqrt{x + 7} - 5} \geq 0$$

и укажите количество целых решений.

*Решение.*

Применяя метод рационализации (с учетом ОДЗ), получим систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x^2 - 4 - (12 - 6x)}{x + 7 - 25} \geq 0, \\ x^2 - 4 \geq 0, \\ 2 - x \geq 0, \\ x + 7 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2 + 6x - 16}{x - 18} \geq 0, \\ (x - 2)(x + 2) \geq 0, \\ x \leq 2, \\ x \geq -7; \end{cases}$$
  

$$\begin{cases} \frac{(x + 8)(x - 2)}{x - 18} \geq 0, \\ (x - 2)(x + 2) \geq 0, \\ -7 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Тогда решением последней системы, а значит, и данного неравенства будет



$x \in [-7; -2] \cup \{2\}$ , следовательно,  $x = -7, -6, -5, -4, -3, -2, 2$  — целые решения, а всего 7 целых решений.

*Ответ:* 7.

**Пример 8.** Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2 + x + 42}}{|x^2 - 4x + 3| - |x^2 - x - 6|} \leq 0.$$

*Решение.*

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} -x^2 + x + 42 \geq 0, \\ \frac{-x^2 + x + 42}{((x^2 - 4x + 3) - (x^2 - x - 6))((x^2 - 4x + 3) + (x^2 - x - 6))} \leq 0; \\ \begin{cases} x^2 - x - 42 \leq 0, \\ \frac{x^2 - x - 42}{(-3x + 9)(2x^2 - 5x - 3)} \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

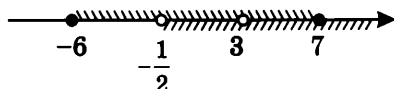
Так как  $x^2 - x - 42 = (x + 6)(x - 7)$ ,  $2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$  и  $-3x + 9 = -3(x - 3)$ , то получим

$$\begin{cases} (x+6)(x-7) \leq 0, \\ \frac{(x+6)(x-7)}{(x-3)^2(2x+1)} \leq 0. \end{cases}$$

Поскольку  $(x+6)(x-7) \leq 0$ , то знаменатель дроби  $(x-3)^2(2x+1) > 0$ .

Если  $(x+6)(x-7) \leq 0$ , то  $x \in [-6; 7]$ ;

если  $(x-3)^2(2x+1) > 0$ , то  $x \in \left(-\frac{1}{2}; 3\right) \cup (3; +\infty)$ .



Значит,  $x \in \{-6\} \cup \left(-\frac{1}{2}; 3\right) \cup (3; 7]$ .

Ответ:  $\{-6\} \cup \left(-\frac{1}{2}; 3\right) \cup (3; 7]$ .

**Пример 9.** Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^3 - 8x^2 + 16x - 9}}{\sqrt{x-1}} > \sqrt{9-x}$$

и укажите сумму целых решений.

*Решение.*

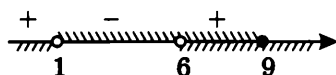
Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 9-x \geq 0, \\ x-1 > 0, \\ x^3 - 8x^2 + 16x - 9 \geq 0, \\ \sqrt{x^3 - 8x^2 + 16x - 9} - \sqrt{9-x} \cdot \sqrt{x-1} > 0; \\ 1 < x \leq 9, \\ x^3 - 8x^2 + 16x - 9 \geq 0, \\ \sqrt{x^3 - 8x^2 + 16x - 9} - \sqrt{(9-x)(x-1)} > 0. \end{cases}$$

Применив метод рационализации, получим

$$\begin{cases} 1 < x \leq 9, \\ x^3 - 8x^2 + 16x - 9 - (9-x)(x-1) > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 < x \leq 9, \\ x^3 - 7x^2 + 6x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 < x \leq 9, \\ x(x-1)(x-6) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < x \leq 9, \\ (x-1)(x-6) > 0. \end{cases}$$



Значит,  $x \in (6; 9]$ , тогда сумма целых решений будет равна

$$7 + 8 + 9 = 24.$$

Ответ: 24.



## 15.3. Показательные неравенства

**Пример 10.** Решите неравенство  $(\sqrt{7})^{\operatorname{tg} x} \leq \frac{7\sqrt{7}}{7^{\operatorname{tg} x}}$ .

*Решение.*

Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{1}{7^{\frac{1}{2}}}\right)^{\operatorname{tg} x} \leq 7 \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{-\operatorname{tg} x}, \text{ или } 7^{\frac{1}{2}\operatorname{tg} x} \leq 7^{\frac{3}{2}-\operatorname{tg} x}, \text{ или}$$

$$(7-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x - \frac{3}{2} + \operatorname{tg} x\right) \leq 0, \quad 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{tg} x - 3 + 2\operatorname{tg} x) \leq 0,$$

$$3\operatorname{tg} x \leq 3, \operatorname{tg} x \leq 1, \text{ откуда } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z}.$

**Пример 11.** Решите неравенство

$$(\sqrt{5}+2)^{\frac{8x-5}{x+2}} \leq (\sqrt{5}-2)^{-x}.$$

*Решение.*

Так как  $(\sqrt{5}-2)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} =$   
 $= \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2$ , то данное неравенство примет вид

$$(\sqrt{5}+2)^{\frac{8x-5}{x+2}} \leq (\sqrt{5}+2)^x. \quad (1)$$

К неравенству (1) применим метод рационализации:

$$(\sqrt{5}+2-1)\left(\frac{8x-5}{x+2} - x\right) \leq 0, \text{ где } \sqrt{5}+2-1 = \sqrt{5}+1 > 0,$$

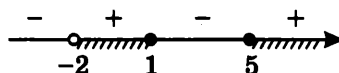
тогда получим равносильное неравенство

$$\frac{8x-5}{x+2} - x \leq 0, \text{ или } \frac{8x-5-x^2-2x}{x+2} \leq 0, \quad \frac{x^2-6x+5}{x+2} \geq 0.$$

Но  $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$ , тогда получим

$$\frac{(x-1)(x-5)}{x+2} \geq 0. \quad (2)$$

Неравенство (2) решим методом интервалов:  $x_1 = 5$ ;  $x_2 = 1$ ;  $x_3 = -2$ .



$$x \in (-2; 1] \cup [5; +\infty).$$

*Ответ:*  $(-2; 1] \cup [5; +\infty).$

**Пример 12.** Решите неравенство  $\frac{x-5\sqrt{x}+6}{3^x-81} \geq 0$ . Найдите наименьшее целое решение.

*Решение.*

Запишем неравенство в виде

$$\frac{x-5\sqrt{x}+6}{3^x-3^4} \geq 0. \quad (1)$$

В неравенстве (1) заменим разность в знаменателе дроби на равносильное по знаку выражение  $\frac{x-5\sqrt{x}+6}{(3-1)(x-4)} \geq 0$ , или  $\frac{x-5\sqrt{x}+6}{x-4} \geq 0$ .

Пусть  $\sqrt{x} = t$ , где  $t \geq 0$ , тогда  $x = t^2$ .

$$\text{Получим } \frac{t^2-5t+6}{t^2-4} \geq 0, \quad \frac{(t-2)(t-3)}{(t-2)(t+2)} \geq 0.$$

Но  $t+2 > 0$ , так как  $t \geq 0$  и  $t \neq 2$ .

$$\text{Следовательно, } \begin{cases} t-3 \geq 0, \\ t \neq 2, \end{cases} \text{ откуда } t \geq 3.$$

Значит,  $\sqrt{x} \geq 3$ , или  $\begin{cases} x \geq 9, \\ x \geq 0, \end{cases}$  т. е.  $x \geq 9$  и  $x = 9$  — наименьшее целое решение исходного неравенства.

*Ответ:* 9.

**Пример 13.** Решите неравенство

$$\frac{(2^{x^2}-2^{x+30})(5^x-125)}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x^3-2x^2}-3^{-x+2}} \geq 0$$

и укажите наибольшее целое решение.

*Решение.*

Запишем неравенство в виде

$$\frac{(2^{x^2}-2^{x+30})(5^x-5^3)}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x^3-2x^2}-\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}} \geq 0.$$

Теперь можно применить метод рационализации, т. е. заменить каждую разность в числителе и знаменателе дроби на равносильное по знаку выражение:

$$\frac{(2-1)(x^2-x-30)(5-1)(x-3)}{\left(\frac{1}{3}-1\right)(x^3-2x^2-x+2)} \geq 0, \text{ или}$$

$$\frac{(x^2 - x - 30)(x - 3)}{x^3 - 2x^2 - x + 2} \leq 0. \quad (1)$$

Но  $x^2 - x - 30 = (x - 6)(x + 5)$ , где 6 и -5 — корни квадратного трехчлена. Знаменатель дроби разложим на линейные множители способом группировки:

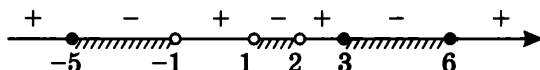
$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = x^2(x - 2) - (x - 2) = (x^2 - 1)(x - 2) = (x - 1)(x + 1)(x - 2).$$

В этом случае неравенство (1) примет вид

$$\frac{(x - 6)(x + 5)(x - 3)}{(x - 1)(x + 1)(x - 2)} \leq 0.$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, имеем

$$x_1 = 6; x_2 = -5; x_3 = 3; x_4 = 1; x_5 = -1; x_6 = 2.$$



Значит,  $x = 6$  — наибольшее целое решение исходного неравенства.

Ответ: 6.

**Пример 14.** Решите неравенство

$$3^{x+2} + 3^{-x} - 7 \geq \log_2 8.$$

Найдите наибольшее целое отрицательное решение.

*Решение.*

Так как  $3^{x+2} = 9 \cdot 3^x$ ,  $3^{-x} = \frac{1}{3^x}$  и  $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$ , то получим неравенство

$$9 \cdot 3^x + \frac{1}{3^x} - 10 \geq 0. \quad (1)$$

Пусть  $3^x = t$ , где  $t > 0$ , тогда неравенство (1) примет вид  $9t + \frac{1}{t} - 10 \geq 0$ , или  $9t^2 - 10t + 1 \geq 0$ .

Поскольку  $9 - 10 + 1 = 0$ , то  $t_1 = 1$ ;  $t_2 = \frac{1}{9}$ .

$$\text{Значит, } 9t^2 - 10t + 1 = 9(t - 1)\left(t - \frac{1}{9}\right).$$

Учитывая замену  $3^x = t$ , получим  $(t - 1)\left(t - \frac{1}{9}\right) \geq 0$ , или

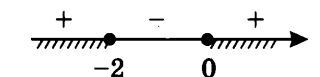
$$(3^x - 1)\left(3^x - \frac{1}{9}\right) \geq 0.$$

$$\text{Представим неравенство в виде } (3^x - 3^0)(3^x - 3^{-2}) \geq 0. \quad (2)$$

Теперь неравенство (2) решим методом рационализации:

$$(3-1)(x-0)(3-1)(x+2) \geq 0, \text{ или} \\ x(x+2) \geq 0. \quad (3)$$

Неравенство (3) решим методом интервалов:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = -2$ .



$$x \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty).$$

Тогда  $x = -2$  — наибольшее целое отрицательное решение неравенства (3), а значит, и исходного.

Ответ:  $-2$ .

**Пример 15.** Решите неравенство

$$125^x - 31 \cdot 25^x + 31 \cdot 5^{x+1} - 125 \leq 0.$$

*Решение.*

Запишем данное неравенство в виде

$$(5^x)^3 - 31 \cdot (5^x)^2 + 155 \cdot 5^x - 125 \leq 0.$$

Пусть  $5^x = y$ , где  $y > 0$ . Получим

$$y^3 - 31y^2 + 155y - 125 \leq 0. \quad (1)$$

Левую часть неравенства (1) разложим на множители способом группировки:

$$(y^3 - 125) - 31y(y - 5) \leq 0, \text{ или} \\ (y - 5)(y^2 + 5y + 25) - 31y(y - 5) \leq 0.$$

Вынося общий множитель  $y - 5$  за скобки, имеем

$$(y - 5)(y^2 - 26y + 25) \leq 0.$$

Но  $y^2 - 26y + 25 = (y - 1)(y - 25)$ , тогда

$$(y - 5)(y - 1)(y - 25) \leq 0, \text{ где } y > 0.$$

Учитывая замену  $y = 5^x$ , получим неравенство

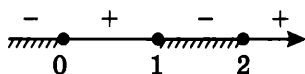
$$(5^x - 5)(5^x - 1)(5^x - 25) \leq 0. \quad (2)$$

Чтобы применить метод рационализации, запишем неравенство (2) в виде  $(5^x - 5)(5^x - 5^0)(5^x - 5^2) \leq 0$ .

Тогда получим равносильное неравенство

$$(5 - 1) \cdot (x - 1) \cdot (5 - 1) \cdot (x - 0) \cdot (5 - 1) \cdot (x - 2) \leq 0, \text{ или } x(x - 1)(x - 2) \leq 0.$$

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2.$$



$$x \in (-\infty; 0] \cup [1; 2].$$

Ответ:  $(-\infty; 0] \cup [1; 2]$ .

**Пример 16.** Решите неравенство

$$\sqrt[3]{3^{x^2-3x+2}} \leq (\sqrt{7+\sqrt{48}} - 2)^x.$$

Найдите наибольшее целое решение.

*Решение.*

Так как  $7 + \sqrt{48} = 7 + 4\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3} + 4 = (\sqrt{3} + 2)^2$ , то правая часть данного неравенства преобразуется к виду

$$\begin{aligned} (\sqrt{7+\sqrt{48}} - 2)^x &= (\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2} - 2)^x = \\ &= (|\sqrt{3}+2| - 2)^x = (\sqrt{3}+2-2)^x = (\sqrt{3})^x = 3^{\frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Левую часть неравенства запишем в виде  $\sqrt[3]{3^{x^2-3x+2}} = 3^{\frac{x^2-3x+2}{3}}$ .

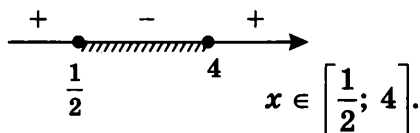
В этом случае исходное неравенство примет вид  $3^{\frac{x^2-3x+2}{3}} \leq 3^{\frac{x}{2}}$ , или  $3^{\frac{x^2-3x+2}{3}} - 3^{\frac{x}{2}} \leq 0$ .

Применяя метод рационализации, имеем равносильное неравенство

$$(3-1) \left( \frac{x^2-3x+2}{3} - \frac{x}{2} \right) \leq 0, \text{ или } \frac{2x^2-9x+4}{6} \leq 0, \text{ или } 2x^2-9x+4 \leq 0.$$

Но  $2x^2 - 9x + 4 = (x-4)(2x-1)$ , тогда  $(x-4)(2x-1) \leq 0$ .

Решая полученное неравенство методом интервалов, получим  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ .



Значит,  $x = 4$  — наибольшее целое решение исходного неравенства.

**Ответ:** 4.

**Пример 17.** Решите неравенство

$$(x^2+x+1)^{\frac{x^2-6}{x+4}} \geq (x^2+x+1)^3.$$

Найдите наименьшее целое решение.

*Решение.*

Применяя метод рационализации, имеем

$$\begin{cases} (x^2+x+1-1) \left( \frac{x^2-6}{x+4} - 3 \right) \geq 0, \\ x^2+x+1 > 0. \end{cases}$$

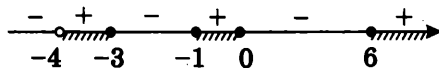
Заметим, что  $x^2 + x + 1 > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , так как  $D < 0$  и  $a = 1 > 0$ .

Тогда получим равносильное неравенство

$$(x^2 + x) \left( \frac{x^2 - 6}{x + 4} - 3 \right) \geq 0, \text{ или } x(x+1) \cdot \frac{x^2 - 3x - 18}{x + 4} \geq 0.$$

Но  $x^2 - 3x - 18 = (x - 6)(x + 3)$ , значит,  $\frac{x(x+1)(x-6)(x+3)}{x+4} \geq 0$ .

$$x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 6; x_4 = -3; x_5 = -4.$$



$$x \in (-4; -3] \cup [-1; 0] \cup [6; +\infty).$$

Следовательно,  $x = -3$  — наименьшее целое решение исходного неравенства.

**Ответ:**  $-3$ .

## 15.4. Логарифмические неравенства

**Пример 18.** Решите неравенство  $\log_{\frac{1}{3}} x^2 > 9$ .

**Решение.**

Запишем неравенство в виде

$$\begin{aligned} & \left( \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 3 \right) \left( \log_{\frac{1}{3}} x^2 + 3 \right) > 0, \text{ или} \\ & \left( \log_{\frac{1}{3}} x^2 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \right) \left( \log_{\frac{1}{3}} x^2 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \right) > 0, \\ & \text{или } \log_{\frac{1}{3}} (27x^2) \cdot \log_{\frac{1}{3}} \left( \frac{x^2}{27} \right) > 0. \end{aligned}$$

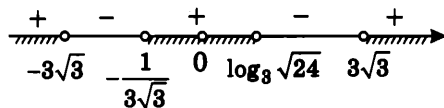
Заменим каждый логарифм на равносильное по знаку выражение, учитывая, что  $x \neq 0$ :

$$\left( \frac{1}{3} - 1 \right) (27x^2 - 1) \left( \frac{1}{3} - 1 \right) \left( \frac{x^2}{27} - 1 \right) > 0. \quad (1)$$

Так как  $\left( \frac{1}{3} - 1 \right) \left( \frac{1}{3} - 1 \right) = \left( \frac{1}{3} - 1 \right)^2 > 0$ , то знак неравенства (1) не изменится, тогда получим равносильную систему

$$\begin{cases} (3\sqrt{3}x - 1)(3\sqrt{3}x + 1)(x - 3\sqrt{3})(x + 3\sqrt{3}) > 0, \\ x \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решим неравенство системы (2) методом интервалов, где  $x \neq 0$ :



$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}; \quad x_{3,4} = \pm 3\sqrt{3}.$$

$$x \in (-\infty; -3\sqrt{3}) \cup \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \cup (3\sqrt{3}; +\infty).$$

*Ответ:*  $(-\infty; -3\sqrt{3}) \cup \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \cup (3\sqrt{3}; +\infty).$

**Пример 19.** Решите неравенство  $\log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} \geq 1,5$ .

*Решение.*

Запишем неравенство в виде  $\log_4^2 x + \frac{1}{2} \log_4 x \geq 1,5$ , или

$$2\log_4^2 x + \log_4 x - 3 \geq 0. \quad (1)$$

Левую часть неравенства (1) можно разложить на множители относительно  $\log_4 x$ :

$$2\log_4^2 x + 3\log_4 x - 2\log_4 x - 3 \geq 0, \text{ или}$$

$$\log_4 x \cdot (2\log_4 x + 3) - (2\log_4 x + 3) \geq 0, \quad (2\log_4 x + 3)(\log_4 x - 1) \geq 0, \text{ или}$$

$$(\log_4 x^2 - \log_4 4^{-3})(\log_4 x - \log_4 4) \geq 0. \quad (2)$$

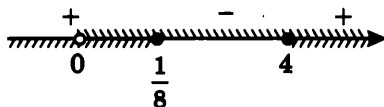
К неравенству (2) применим метод рационализации:

$$(4 - 1) \left( x^2 - \frac{1}{64} \right) \cdot (4 - 1)(x - 4) \geq 0, \text{ или}$$

$$\left( x - \frac{1}{8} \right) \left( x + \frac{1}{8} \right) (x - 4) \geq 0. \quad (3)$$

Так как  $x > 0$  (по ОДЗ), то неравенство (3) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \left( x - \frac{1}{8} \right) \left( x + \frac{1}{8} \right) (x - 4) \geq 0, \\ x > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \left( x - \frac{1}{8} \right) (x - 4) \geq 0, \\ x > 0. \end{cases}$$



$$x \in \left( 0; \frac{1}{8} \right] \cup [4; +\infty).$$

*Ответ:*  $\left( 0; \frac{1}{8} \right] \cup [4; +\infty).$

**Пример 20.** Решите неравенство

$$\frac{\log_3(x^2 - 2x - 14)^2 - \log_{13}(x^2 - 2x - 14)^3}{3 - 5x - 2x^2} \geq 0.$$

Укажите количество целых решений.

*Решение.*

Так как  $\log_3(x^2 - 2x - 14)^2 = \log_3 13 \cdot \log_{13}(x^2 - 2x - 14)^2 =$   
 $= 2 \log_3 13 \cdot \log_{13}(x^2 - 2x - 14)$ , где  $x^2 - 2x - 14 > 0$ , то данное неравенство примет вид

$$\frac{2 \log_3 13 \cdot \log_{13}(x^2 - 2x - 14) - 3 \log_{13}(x^2 - 2x - 14)}{3 - 5x - 2x^2} \geq 0,$$

или

$$\frac{(2 \log_3 13 - 3) \cdot \log_{13}(x^2 - 2x - 14)}{3 - 5x - 2x^2} \geq 0. \quad (1)$$

Но  $2 \log_3 13 - 3 = \log_3 13^2 - \log_3 27 = (\log_3 169 - \log_3 27) > 0$ , тогда неравенство (1) запишем в виде

$$\frac{\log_{13}(x^2 - 2x - 14)}{2x^2 + 5x - 3} \leq 0. \quad (2)$$

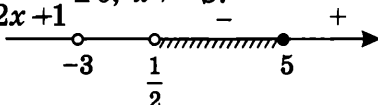
Но  $2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$ , где 1 и -3 — корни квадратного трехчлена.

Кроме того,  $x^2 - 2x - 14 > 0$  (по ОДЗ), или  $(x - (1 + \sqrt{15}))(x - (1 - \sqrt{15})) > 0$ .

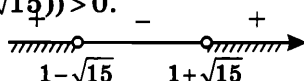
Теперь к неравенству (2) применим метод рационализации:

$$\begin{cases} \frac{(13-1)(x^2-2x-15)}{(2x-1)(x+3)} \leq 0, \\ x^2-2x-14 > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{(x-5)(x+3)}{(2x-1)(x+3)} \leq 0, \\ (x-(1+\sqrt{15}))(x-(1-\sqrt{15})) > 0. \end{cases} \quad (3)$$

$$1) \frac{(x-5)(x+3)}{(2x-1)(x+3)} \leq 0, \quad \frac{x-5}{2x-1} \leq 0, \quad x \neq -3.$$

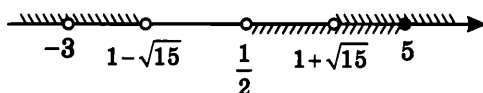


$$2) (x - (1 + \sqrt{15}))(x - (1 - \sqrt{15})) > 0.$$



Тогда решением системы (3) будет пересечение полученных множеств.

Учитывая, что  $-3 < 1 - \sqrt{15} < \frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{2} < 1 + \sqrt{15} < 5$ , получим





Следовательно,  $x \in (1 + \sqrt{15}; 5]$  и  $x = 5$  — единственное целое решение исходного неравенства.

Ответ: 1.

**Пример 21.** Решите неравенство

$$(3 + 2x - 8x^2) \log_3 \left( 1 - \frac{3}{x^2 + x + 3} \right) \leq 0.$$

*Решение.*

Поскольку  $3 + 2x - 8x^2 = -8 \left( x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} \right) = -8 \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{3}{4} \right)$ , то получим  $-8 \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{3}{4} \right) \log_3 \left( 1 - \frac{3}{x^2 + x + 3} \right) \leq 0$ .

Теперь заменим логарифм на равносильное по знаку выражение, учитывая ОДЗ:

$$\begin{cases} -8 \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{3}{4} \right) \cdot (3-1) \left( 1 - \frac{3}{x^2 + x + 3} - 1 \right) \leq 0, \\ 1 - \frac{3}{x^2 + x + 3} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -16 \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{3}{4} \right) \cdot \left( -\frac{3}{x^2 + x + 3} \right) \leq 0, & \left\{ \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{1}{x^2 + x + 3} \leq 0, \right. \\ x^2 + x + 3 - 3 > 0; & \left. x(x+1) > 0, \right. \end{cases}$$

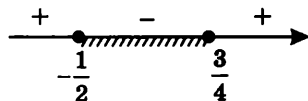
где  $x^2 + x + 3 > 0$  при всех  $x \in R$  ( $D < 0$ ,  $a = 1 > 0$ ).

Тогда получим систему неравенств

$$\begin{cases} \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{3}{4} \right) \leq 0, \\ x(x+1) > 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$1) \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{3}{4} \right) \leq 0, \quad x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{3}{4}.$$

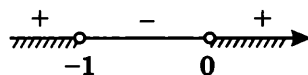
$$x \in \left[ -\frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right].$$



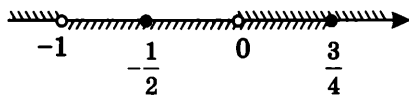
$$2) x(x+1) > 0.$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -1.$$

$$x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty).$$



Тогда решением системы (1), а значит, и исходного неравенства будет пересечение (общая часть) полученных множеств.



$$x \in \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \cup \left( 0; \frac{3}{4} \right].$$

Ответ:  $\left\{ -\frac{1}{2} \right\} \cup \left( 0; \frac{3}{4} \right].$

**Пример 22.** Решите неравенство

$$\frac{(16^{\log_3(x^2-9)} - (x+11)^{\log_3 16}) \log_7(x^2 + 2x - 8) - 1}{(8x^2 + 4x + 1)^{x^2-x-30} - 1} \leq 0.$$

Найдите сумму наименьшего и наибольшего целых решений.

*Решение.*

Введем обозначения:

$$f_1(x) = 16^{\log_3(x^2-9)} - (x+11)^{\log_3 16}, \quad (1)$$

$$f_2(x) = \log_7(x^2 + 2x - 8) - 1, \quad (2)$$

$$f_3(x) = (8x^2 + 4x + 1)^{x^2-x-30} - 1. \quad (3)$$

Тогда данное неравенство будет иметь вид

$$\frac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{f_3(x)} \leq 0.$$

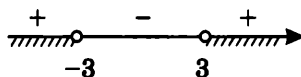
Найдем область определения  $D(f)$  неравенства:

$$D(f) = D(f_1) \cap D(f_2) \cap D(f_3).$$

$$\begin{cases} x^2 - 9 > 0, \\ x + 11 > 0, \\ x^2 + 2x - 8 > 0, \\ 8x^2 + 4x + 1 > 0; \end{cases} \begin{cases} (x-3)(x+3) > 0, \\ x + 11 > 0, \\ (x+4)(x-2) > 0, \\ x \in \mathbb{R} \ (D < 0; a = 8 > 0). \end{cases}$$

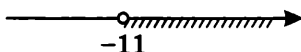
1)  $(x-3)(x+3) > 0.$

$x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty).$



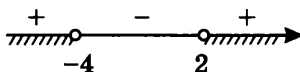
2)  $x + 11 > 0, x > -11.$

$x \in (-11; +\infty).$



3)  $(x+4)(x-2) > 0.$

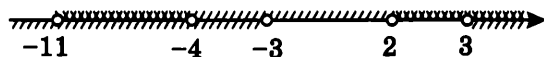
$x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty).$



4)  $x \in \mathbb{R}.$



Теперь найдем пересечение полученных множеств:



$$x \in (-11; -4) \cup (3; +\infty). \quad (4)$$

Упростим выражения (1), (2) и (3):

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 16^{\log_3(x^2-9)} - (x+11)^{\log_3 16} = 16^{\log_3(x^2-9)} - (3^{\log_3(x+11)})^{\log_3 16} = \\ &= 16^{\log_3(x^2-9)} - (3^{\log_3 16})^{\log_3(x+11)} = 16^{\log_3(x^2-9)} - 16^{\log_3(x+11)}; \end{aligned}$$

$$f_2(x) = \log_7(x^2 + 2x - 8) - 1 = \log_7(x^2 + 2x - 8) - \log_7 7;$$

$$f_3(x) = (8x^2 + 4x + 1)^{x^2 - x - 30} - 1 = (8x^2 + 4x + 1)^{x^2 - x - 30} - (8x^2 + 4x + 1)^0.$$

Приведенные преобразования вызваны необходимостью в подготовке к применению метода рационализации.

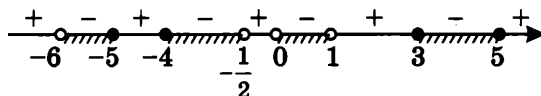
В этом случае исходное неравенство примет вид

$$\begin{aligned} &\frac{(16^{\log_3(x^2-9)} - 16^{\log_3(x+11)})(\log_7(x^2 + 2x - 8) - \log_7 7)}{(8x^2 + 4x + 1)^{x^2 - x - 30} - (8x^2 + 4x + 1)^0} \leq 0, \text{ или} \\ &\frac{(16 - 1)(\log_3(x^2 - 9) - \log_3(x + 11))(7 - 1)(x^2 + 2x - 8 - 7)}{(8x^2 + 4x + 1 - 1)(x^2 - x - 30 - 0)} \leq 0, \\ &\text{или} \frac{(3 - 1)(x^2 - 9 - x - 11)(x^2 + 2x - 15)}{4x(2x + 1)(x - 1)(x + 6)} \leq 0, \\ &\text{или} \frac{(x^2 - x - 20)(x^2 + 2x - 15)}{x(2x + 1)(x - 1)(x + 6)} \leq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

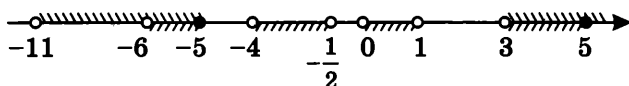
Но  $x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4)$ ,  $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$ , тогда неравенство (5) примет вид

$$\frac{(x - 5)(x + 4)(x + 5)(x - 3)}{x(2x + 1)(x - 1)(x + 6)} \leq 0. \quad (6)$$

Неравенство (6) решим методом интервалов:  $x_1 = 5$ ;  $x_2 = -4$ ;  $x_3 = -5$ ;  $x_4 = 3$ ;  $x_5 = 0$ ;  $x_6 = -\frac{1}{2}$ ;  $x_7 = 1$ ;  $x_8 = -6$ .



Учитывая (4), имеем



$$x \in (-6; -5] \cup (3; 5].$$

Тогда сумма наименьшего и наибольшего целых решений будет равна  $-5 + 5 = 0$ .

Ответ: 0.

## 15.5. Логарифмические неравенства с переменным основанием

**Пример 23.** Решите неравенство

$$\frac{\log_x(x-5) - \log_x(13-x)}{\log_{x-3}x} < 0.$$

Укажите количество целых решений неравенства.

*Решение.*

Применяя метод рационализации и учитывая ОДЗ, получим систему неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-1)(x-5-13+x)}{(x-3-1)(x-1)} < 0, \\ x > 0, \\ x-5 > 0, \\ x-3 > 0, \\ 13-x > 0; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-1)(2x-18)}{(x-4)(x-1)} < 0, \\ x > 0, \\ x > 5, \\ x > 3, \\ x < 13; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-1)(x-9)}{(x-4)(x-1)} < 0, \\ x > 5, \\ x < 13; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x-9}{x-4} < 0, \\ 5 < x < 13; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 < x < 9, \\ 5 < x < 13, \end{array} \right.$$

откуда находим  $x \in (5; 9)$ . Тогда целые решения:

$x = 6; 7; 8$ , всего 3 целых числа.

*Ответ:* 3.

**Пример 24.** Решите неравенство

$$\frac{(\log_2 7)^5 - (\log_2 7)^x}{x \log_{2^x} 7 - (\log_2 7)^{x+3}} \leq 0$$

и укажите количество целых решений.

*Решение.*

Пусть  $\log_2 7 = a$ , где  $a \in (2; 3)$ , тогда  $x \log_{2^x} 7 = x \cdot \frac{1}{x} \log_2 7 = \log_2 7 = a$ .

Кроме того, должно выполняться условие  $2^x \neq 1$ , т. е.  $x \neq 0$ .

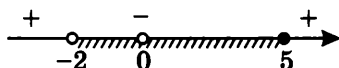
В этом случае данное неравенство примет вид

$$\frac{a^5 - a^x}{a - a^{x+3}} \leq 0, \text{ где } x \neq 0. \quad (1)$$

Неравенство (1) решим методом рационализации:

$$\frac{(a-1)(5-x)}{(a-1)(1-x-3)} \leq 0, \text{ или } \frac{x-5}{x+2} \leq 0. \quad (2)$$

Неравенство (2) решим методом интервалов, исключая число 0:



Значит,  $x \in (-2; 0) \cup (0; 5]$ .

Целыми решениями будут числа  $-1; 1; 2; 3; 4; 5$ , всего 6.

Ответ: 6.

**Пример 25.** Решите неравенство  $\log_{\frac{x-2}{|2x-5|}}(x-2) \leq 2$ .

*Решение.*

Поскольку  $2 = \log_{\frac{x-2}{|2x-5|}} \left( \frac{x-2}{|2x-5|} \right)^2 \leq 0$ , то неравенство запишется в виде

$$\log_{\frac{x-2}{|2x-5|}}(x-2) - \log_{\frac{x-2}{|2x-5|}} \left( \frac{x-2}{|2x-5|} \right)^2 \leq 0. \quad (1)$$

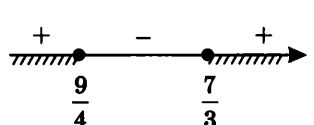
Применив к неравенству (1) метод рационализации, получим

$$\begin{cases} \left( \frac{x-2}{|2x-5|} - 1 \right) \left( x-2 - \left( \frac{x-2}{|2x-5|} \right)^2 \right) \leq 0, \\ \frac{x-2}{|2x-5|} > 0, & \text{или} \\ \frac{x-2}{|2x-5|} \neq 1, \\ x-2 > 0, \\ \begin{cases} (x-2-|2x-5|)(x-2)((2x-5)^2 - (x-2)) \leq 0, \\ |2x-5| \neq 0, \\ x-2 > 0, \\ |2x-5| - (x-2) \neq 0, \end{cases} & \text{или} \\ \begin{cases} (|2x-5| - (x-2))(4x^2 - 20x + 25 - x + 2) \geq 0, \\ x \neq 2, 5, \\ x > 2, \end{cases} & \text{или} \\ \begin{cases} (2x-5-x+2)(2x-5+x-2) \neq 0, \\ (2x-5-x+2)(2x-5+x-2)(4x^2 - 21x + 27) \geq 0, \\ x \neq 2, 5, \\ x > 2, \\ (x-3)(3x-7) \neq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

Но  $4x^2 - 21x + 27 = (x - 3)(4x - 9)$ , где  $x_1 = 3$ ;  $x_2 = \frac{9}{4}$  — корни квадратного трехчлена. В этом случае система (2) после преобразований запишется в виде

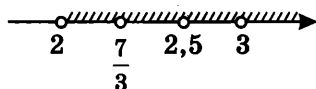
$$\begin{cases} (x-3)^2(3x-7)(4x-9) \geq 0, \\ x \neq 2,5, \\ x > 2, \\ x \neq 3; x \neq \frac{7}{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} (3x-7)(4x-9) \geq 0, \\ x \neq 2,5, \\ x > 2, \\ x \neq 3; x \neq \frac{7}{3}. \end{cases} \quad (3)$$

$$1) x_1 = \frac{7}{3}, x_2 = \frac{9}{4}.$$



$$x \in \left(-\infty; \frac{9}{4}\right] \cup \left[\frac{7}{3}; +\infty\right).$$

$$2) x \neq 2,5; x > 2, x \neq 3, x \neq \frac{7}{3}.$$



$$x \in \left(2; \frac{7}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; 2,5\right) \cup (2,5; 3).$$

Тогда решением системы (3), а значит, и исходного неравенства будет пересечение полученных множеств.

$$\text{Ответ: } \left(2; \frac{9}{4}\right] \cup \left(\frac{7}{3}; 2,5\right) \cup (2,5; 3) \cup (3; +\infty).$$

**Пример 26.** Решите неравенство  $\log_{|x-2|} \frac{1}{3} < \log_{|x-4|} \frac{1}{3}$ .

*Решение.*

Приведем логарифмы к основанию  $\frac{1}{3}$ , используя формулу перехода

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b};$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} |x-2|} - \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} |x-4|} &< 0, \text{ или} \\ \frac{\log_{\frac{1}{3}} |x-4| - \log_{\frac{1}{3}} |x-2|}{\log_{\frac{1}{3}} |x-2| \cdot \log_{\frac{1}{3}} |x-4|} &< 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Неравенство (1) равносильно системе неравенств

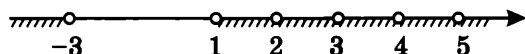
$$\begin{cases} \frac{\left(\frac{1}{3}-1\right)(|x-4|-|x-2|)}{\left(\frac{1}{3}-1\right)(|x-2|-1) \cdot \left(\frac{1}{3}-1\right)(|x-4|-1)} < 0, & \text{или} & \begin{cases} \frac{(x-4)^2 - (x-2)^2}{((x-2)^2 - 1)((x-4)^2 - 1)} > 0, \\ x \neq 2, x \neq 4. \end{cases} \\ |x-2| > 0, |x-4| > 0, \end{cases}$$

К числителю и знаменателю дроби применим формулу  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ , тогда получим

$$\begin{cases} \frac{(x-4-x+2)(x-4+x-2)}{(x-2-1)(x-2+1)(x-4-1)(x-4+1)} > 0, & \begin{cases} \frac{-2(2x-6)}{(x-3)^2(x-1)(x-5)} > 0, \\ x \neq 2, x \neq 4; \end{cases} \\ x \neq 2, x \neq 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+3}{(x-3)^2(x-1)(x-5)} < 0, \\ x \neq 2, x \neq 4. \end{cases} \quad (2)$$

Решим неравенство (2) методом интервалов, учитывая ограничения:



Ответ:  $(-\infty; -3) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; 4) \cup (4; 5)$ .

**Пример 27.** Решите неравенство

$$\log_{x-2}(x^3 - 12x^2 + 50x - 67) - \log_{x-2}(x-3) \leq \log_{x-2}(9-x).$$

Найдите сумму целых решений.

*Решение.*

Запишем неравенство в виде

$$\log_{x-2}(x^3 - 12x^2 + 50x - 67) \leq \log_{x-2}(x-3) + \log_{x-2}(9-x), \text{ или}$$

$$\log_{x-2}(x^3 - 12x^2 + 50x - 67) \leq \log_{x-2}(x-3)(9-x). \quad (1)$$

Неравенство (1) с учетом ОДЗ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x-3)(x^3 - 12x^2 + 50x - 67 - (x-3)(9-x)) \leq 0, \\ x^3 - 12x^2 + 50x - 67 > 0, \\ x-3 > 0, \\ 9-x > 0, \\ x-2 > 0; x-2 \neq 1, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x^3 - 12x^2 + 50x - 67 - 9x + 27 + x^2 - 3x) \leq 0, \\ x > 3, \\ x < 9, \\ x > 2; x \neq 3, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x^3 - 11x^2 + 38x - 40) \leq 0, \\ x < 9, \\ x > 3. \end{cases} \quad (2)$$

Упростим многочлен  $x^3 - 11x^2 + 38x - 40$ , разложив его на множители.

Заметим, что  $x = 4$  — корень многочлена, тогда получим  $x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = x^2(x-4) - 7x(x-4) + 10(x-4) = (x-4)(x^2 - 7x + 10)$ .

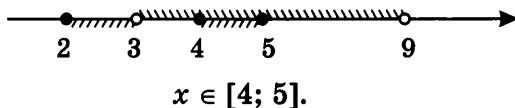
Но  $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$ , значит,

$$x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = (x-4)(x-2)(x-5).$$

В этом случае система (2) примет вид

$$\begin{cases} (x-3)(x-4)(x-2)(x-5) \leq 0, \\ x \in (3; 9). \end{cases} \quad (3)$$

Решая неравенство системы (3) методом интервалов и учитывая, что  $3 < x < 9$ , получим



$$x \in [4; 5].$$

Тогда сумма целых решений исходного неравенства —  $4 + 5 = 9$ .

Ответ: 9.

**Пример 28.** Решите неравенство

$$\frac{5^{3(x+1)} - 2^{\sqrt{9x^2 - 6x + 1} \cdot \log_{\sqrt{2}} 5}}{\log_{x^2}(3x+2) - \log_{|x|}(3x+1)} \leq 0.$$

Решение.

Так как  $2^{\sqrt{9x^2 - 6x + 1} \cdot \log_{\sqrt{2}} 5} = 2^{\sqrt{(3x-1)^2} \cdot \log_{\sqrt{2}} 5} = 2^{|3x-1| \cdot \log_2 5^2} = 2^{\log_2 5^{2|3x-1|}} = 5^{2|3x-1|}$ , то неравенство примет вид

$$\frac{5^{3(x+1)} - 5^{2|3x-1|}}{\log_{|x|} \sqrt{3x+2} - \log_{|x|}(3x+1)} \leq 0. \quad (1)$$

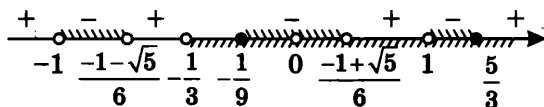
Теперь к неравенству (1) применим метод рационализации, учитывая ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{(5-1)(3(x+1) - 2|3x-1|)}{(|x|-1)(\sqrt{3x+2} - (3x+1))} \leq 0, \\ 3x+2 > 0, \\ 3x+1 > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{(3x+3-6x+2)(3x+3+6x-2)}{(x-1)(x+1)(3x+2-(3x+1)^2)} \leq 0, \\ x \neq 0; x \neq \pm 1, \\ x > -\frac{2}{3}, \\ x > -\frac{1}{3}, \end{cases} \quad \text{или}$$



$$\begin{cases} \frac{(3x-5)(9x+1)}{(x-1)(x+1)(9x^2+3x-1)} \leq 0, \\ x \neq 0, \\ x > -\frac{1}{3}. \end{cases} \quad (2)$$

Так как  $9x^2 + 3x - 1 = 9(x - x_1)(x - x_2)$ , где  $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{6} \approx -0,5$ ;  $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{6} \approx 0,2$ , то, решив дробно-рациональное неравенство системы (2), учитывая условия  $x \neq 0$ ,  $x > -\frac{1}{3}$ , получим



$$x \in \left[-\frac{1}{9}; 0\right) \cup \left(0; \frac{-1+\sqrt{5}}{6}\right) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right].$$

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{1}{9}; 0\right) \cup \left(0; \frac{-1+\sqrt{5}}{6}\right) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right].$$

## 15.6. Неравенства с модулем

**Пример 29.** Решите неравенство

$$\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \right| \leq 1.$$

*Решение.*

Запишем неравенство в виде

$$\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \right| - 1 \leq 0. \quad (1)$$

Неравенство (1) равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} |x^2 - 3x + 2| - |x^2 + 3x + 2| \leq 0, \\ x^2 + 3x + 2 \neq 0. \end{cases}$$

$$\text{Следовательно, } \begin{cases} (x^2 - 3x + 2 - x^2 - 3x - 2)(x^2 - 3x + 2 + x^2 + 3x + 2) \leq 0, \\ (x+1)(x+2) \neq 0, \end{cases}$$

$$\text{или } \begin{cases} -6x(2x^2 + 4) \leq 0, \\ x \neq -1, x \neq -2. \end{cases}$$

Разделив обе части неравенства на  $(-12)$ , получим  $\begin{cases} x(x^2 + 2) \geq 0, \\ x \neq -1, x \neq -2. \end{cases}$

Поскольку  $x^2 + 2 > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , то имеем  $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \neq -1, x \neq -2, \end{cases}$  откуда  $x \geq 0$ , т. е.  $x \in [0; +\infty)$ .

Ответ:  $[0; +\infty)$ .

**Пример 30.** Решите неравенство

$$|x^2 + x - 12| - 45 \leq 9|x - 3| - 5|x + 4|.$$

*Решение.*

Поскольку  $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$ , где 3 и  $-4$  — корни трехчлена и  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ , то исходное неравенство примет вид

$$|x + 4| |x - 3| - 45 \leq 9|x - 3| - 5|x + 4|, \text{ или}$$

$$(|x + 4| |x - 3| - 9|x - 3|) + 5(|x + 4| - 9) \leq 0, \text{ или}$$

$$|x - 3| \cdot (|x + 4| - 9) + 5(|x + 4| - 9) \leq 0.$$

Остается вынести за скобки общий множитель:

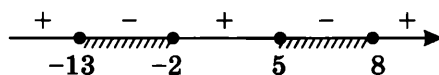
$$(|x + 4| - 9)(|x - 3| + 5) \leq 0. \quad (1)$$

Неравенство (3) мы привели к виду, при котором можно использовать условие равносильности.

$$(x + 4 - 9)(x + 4 + 9)(x - 3 - 5)(x - 3 + 5) \leq 0, \text{ или}$$

$$(x - 5)(x + 13)(x - 8)(x + 2) \leq 0.$$

Решая методом интервалов, имеем



$$x \in [-13; -2] \cup [5; 8].$$

Ответ:  $[-13; -2] \cup [5; 8]$ .

**Пример 31.** Решите неравенство

$$\frac{|7x - 2| - |x - 9|}{|4x - 3| - |x + 3|} \leq 0.$$

*Решение.*

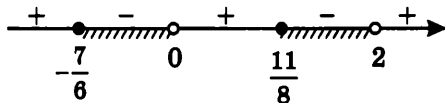
Используя метод рационализации, получим

$$\frac{(7x - 2 - x + 9)(7x - 2 + x - 9)}{(4x - 3 - x - 3)(4x - 3 + x + 3)} \leq 0, \text{ или}$$

$$\frac{(6x + 7)(8x - 11)}{3(x - 2) \cdot 5x} \leq 0, \text{ или } \frac{(6x + 7)(8x - 11)}{x(x - 2)} \leq 0. \quad (1)$$

Кроме того,  $|4x - 3| \neq |x + 3|$ , т. е.  $4x - 3 \neq \pm(x + 3)$ , откуда  $x \neq 2$ ,  $x \neq 0$ .

Теперь остается решить неравенство (4) методом интервалов.



Значит,  $x \in \left[-\frac{7}{6}; 0\right) \cup \left[\frac{11}{8}; 2\right)$ .

Ответ:  $\left[-\frac{7}{6}; 0\right) \cup \left[\frac{11}{8}; 2\right)$ .

**Пример 32.** Решите неравенство

$$\frac{7|4-x|}{13-|x+3|} - |x-4| \leq 0.$$

*Решение.*

Поскольку  $|-x| = x$ , то данное неравенство можно записать в виде

$$|x-4| \cdot \left( \frac{7}{13-|x+3|} - 1 \right) \leq 0, \text{ или } \frac{|x-4|(7-13+|x+3|)}{13-|x+3|} \leq 0, \text{ или}$$

$$\frac{|x-4|(|x+3|-6)}{|x+3|-13} \geq 0. \quad (1)$$

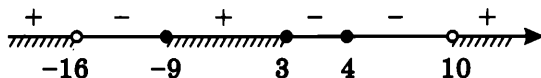
Нетрудно заметить, что  $x = 4$  — решение неравенства (1), а значит, и исходного.

Теперь решим методом рационализации неравенство  $\frac{|x+3|-6}{|x+3|-13} \geq 0$ ,

используя условие равносильности 3.

$$\frac{(x+3-6)(x+3+6)}{(x+3-13)(x+3+13)} \geq 0, \text{ или } \frac{(x-3)(x+9)}{(x-10)(x+16)} \geq 0,$$

$x = 4$ .



Значит,  $x \in (-\infty; -16) \cup [-9; 3] \cup \{4\} \cup (10; +\infty)$ .

Ответ:  $(-\infty; -16) \cup [-9; 3] \cup \{4\} \cup (10; +\infty)$ .

**Пример 33.** Решите неравенство

$$\frac{|x^2-5x+6|-|x^2+7x-8|}{|6x-1|-|2x-9|} \geq 0.$$

*Решение.*

$$\frac{(x^2-5x+6-x^2-7x+8)(x^2-5x+6+x^2+7x-8)}{(6x-1-2x+9)(6x-1+2x-9)} \geq 0, \text{ или}$$

$$\frac{(-12x+14)(2x^2+2x-2)}{(4x+8)(8x-10)} \geq 0.$$

После упрощения получим

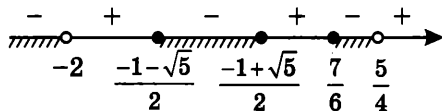
$$\frac{(6x-7)(x^2+x-1)}{(x+2)(4x-5)} \leq 0. \quad (1)$$

Корни числителя:  $x_1 = \frac{7}{6}$ ,  $x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

Корни знаменателя:  $x_4 = -2$ ,  $x_5 = \frac{5}{4}$ .

Заметим, что  $\sqrt{5} \approx 2,24$ , тогда  $x_1 < x_5$ ,  $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < \frac{7}{6}$ .

Решим неравенство (1) методом интервалов.



$$x \in (-\infty; -2) \cup \left[ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[ \frac{7}{6}; \frac{5}{4} \right).$$

Ответ:  $(-\infty; -2) \cup \left[ \frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[ \frac{7}{6}; \frac{5}{4} \right).$

**Пример 34.** Решите неравенство

$$|3x^2 - 4|x| - 4| \leq 2|x^2 - 6|x| + 8|.$$

*Решение.*

Запишем неравенство в виде

$$|3x^2 - 4|x| - 4| - |2x^2 - 12|x| + 16| \leq 0.$$

Так как  $x^2 = |x|^2$ , то имеем

$$|3|x|^2 - 4|x| - 4| - |2|x|^2 - 12|x| + 16| \leq 0.$$

Теперь применим метод рационализации:

$$(3|x|^2 - 4|x| - 4 - 2|x|^2 + 12|x| - 16)(3|x|^2 - 4|x| - 4 + 2|x|^2 - 12|x| + 16) \leq 0, \text{ или } (|x|^2 + 8|x| - 20)(5|x|^2 - 16|x| + 12) \leq 0.$$

Используя формулу  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — корни трехчлена, разложим каждый из квадратных трехчленов относительно  $|x|$  на линейные множители:

$$(|x| + 10)(|x| - 2)(5|x| - 6)(|x| - 2) \leq 0.$$

Так как  $|x| + 10 > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , то получим  $(|x| - 2)^2(5|x| - 6) \leq 0$ ,

откуда  $\begin{cases} |x| = 2, \\ 5|x| - 6 \leq 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \pm 2, \\ (5x - 6)(5x + 6) \leq 0. \end{cases}$



Следовательно,  $x \in \{-2\} \cup [-1, 2; 1, 2] \cup \{2\}$ .

Ответ:  $\{-2\} \cup [-1, 2; 1, 2] \cup \{2\}$ .

**Пример 35.** Решите неравенство

$$\frac{\left| \frac{x^2 - 3x}{8x - 7} - 5 \right| - 5}{\left| \frac{x^2 - 3x}{8x - 7} - 7 \right| - 9} \geq 0.$$

*Решение.*

Применяя метод рационализации, получим

$$\frac{(|x^2 - 3x| - 5 - 5)(|x^2 - 3x| - 5 + 5)}{(|8x - 7| - 7 - 9)(|8x - 7| - 7 + 9)} \geq 0, \text{ или } \frac{(|x^2 - 3x| - 10)|x^2 - 3x|}{(|8x - 7| - 16)(|8x - 7| + 2)} \geq 0.$$

Заметим, что  $|8x - 7| + 2 > 0$  при всех  $x \in R$ . Тогда полученное неравенство равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} \frac{|x^2 - 3x| - 10}{|8x - 7| - 16} \geq 0, \\ x^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

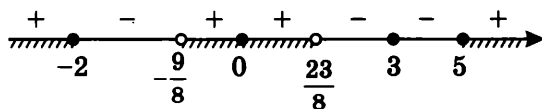
К неравенству системы еще раз применим метод рационализации:

$$\begin{cases} \frac{(x^2 - 3x - 10)(x^2 - 3x + 10)}{(8x - 7 - 16)(8x - 7 + 16)} \geq 0, & \text{или} \\ x(x - 3) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(x - 5)(x + 2)(x^2 - 3x + 10)}{(8x - 23)(8x + 9)} \geq 0, \\ x = 0, x = 3. \end{cases}$$

Учитывая, что  $x^2 - 3x + 10 > 0$  при всех  $x \in R$ , так как  $D < 0$  и  $a = 1 > 0$ , получим

$$\begin{cases} \frac{(x - 5)(x + 2)}{(8x - 23)(8x + 9)} \geq 0, \\ x = 0, x = 3. \end{cases}$$

Остается решить полученное неравенство методом интервалов и добавить числа 0 и 3.



$$x \in (-\infty; -2] \cup \left(-\frac{9}{8}; \frac{23}{8}\right) \cup \{0\} \cup \{3\} \cup [5; +\infty).$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -2] \cup \left(-\frac{9}{8}; \frac{23}{8}\right) \cup \{0\} \cup \{3\} \cup [5; +\infty).$$

## § 16. Задание 16. Экономические задачи

Задачи с экономическим содержанием появились в ЕГЭ в 2016 г. В настоящее время задачи стали более разнообразными и сложными.

Задание № 15 в ЕГЭ подразделяется на несколько видов:

- 1) задачи, связанные с банками, вкладами и кредитами;
- 2) задачи на оптимальный выбор.

**Пример 1.** На строительство нового завода требуется 72 млн руб. На производство  $x$  тыс. ед. продукции необходимо  $0,5x^2 + 4x + 26$  млн руб. в год. Если продукцию завода продать по цене  $p$  тыс. руб. за единицу, то прибыль фирмы (млн рублей) за 1 год составит  $px - (0,5x^2 + 4x + 26)$ . После окончания строительства завода фирма должна выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была максимальной. При каком наименьшем значении  $p$  строительство завода окупится не более чем за 3 года?

*Решение.*

Заметим, что если  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , то  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ , или  $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ , причем знак равенства выполняется, если  $a = b$ .

Чтобы прибыль завода за 3 года была не меньше 72 млн руб., необходимо, чтобы ежегодная прибыль была не меньше  $72 : 3 = 24$  млн руб., т. е. чтобы выполнялось неравенство  $px - (0,5x^2 + 4x + 26) \geq 24$ , откуда, используя вышеприведенное неравенство, получим

$$p \geq \frac{0,5x^2 + 4x + 50}{x} = 0,5x + \frac{50}{x} + 4 \geq 2\sqrt{0,5x \cdot \frac{50}{x}} + 4 = 2\sqrt{25} + 4 = 14.$$

Проверим, что при  $p = 14$  существует количество продукции  $x$ , когда достигается эта цена.

$$14x - (0,5x^2 + 4x + 26) \geq 24, \text{ или } 28x - (x^2 + 8x + 52) \geq 48, \text{ или } x^2 - 20x + 100 \leq 0, (x - 10)^2 \leq 0, \text{ откуда } x = 10.$$

Итак, при  $p = 14$  (цене 14 тыс. руб.) и  $x = 10$  (производстве 10 единиц продукции) завод окупится за 3 года.

*Ответ:* 14.

**Пример 2.** Сергей взял кредит в банке на срок 7 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 13 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Сергеем. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, т. е. на одну и ту же величину.

Сколько процентов от суммы кредита составила общая сумма, уплаченная Сергеем банку (сверх кредита)?

*Решение.*

Заметим, что общая сумма, уплаченная банку сверх кредита, обусловлена лишь применением процентной ставки.

В первом месяце эта часть заплаченной суммы составила  $0,13S$ , во втором —  $0,13 \cdot \frac{6}{7}S$ , в третьем —  $0,13 \cdot \frac{5}{7}S$ , ..., в последнем —  $0,13 \cdot \frac{1}{7}S$ .

Следовательно, за 7 месяцев сумма составит

$$0,13S \cdot \left(1 + \frac{6}{7} + \frac{5}{7} + \dots + \frac{1}{7}\right) = 0,13S \cdot \frac{1 + \frac{1}{7}}{2} \cdot 7 = 0,13S \cdot \frac{7+1}{2 \cdot 7} \cdot 7 = \\ = 0,13S \cdot 4 = 0,52S.$$

Значит, общая сумма, уплаченная банку (сверх кредита), составит 52%.

*Ответ:* 52.

**Пример 3.** В июле планируется взять кредит на сумму 4 468 500 руб. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?

*Решение.*

$$S = 4\,468\,500 \text{ руб.}, r\% = 10\%, a = 1,1.$$

$$S + \frac{10}{100} \cdot S = S \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right) = \frac{110}{100} \cdot S = 1,1S.$$

$b$  — платеж, тогда  $S \cdot 1,1 - b$  — первая выплата, получим за 3 года (три равных платежа).

$$((S \cdot 1,1 - b) \cdot 1,1 - b) \cdot 1,1 - b = 0, \text{ или}$$

$$S \cdot 1,1^3 - b \cdot 1,1^2 - b \cdot 1,1 - b = 0, \text{ или}$$

$$S \cdot 1,1^3 = (1,1^2 + 1,1 + 1)b, \text{ откуда}$$

$$b = \frac{S \cdot 1,1^3}{1,21 + 1,1 + 1} = \frac{S \cdot 133,1}{331} = \frac{4\,468\,500 \cdot 133,1}{331} = 13\,500 \cdot 133,1 = \\ = 1\,796\,850 \text{ (руб.)}.$$

*Ответ:* 1 796 850.

**Пример 4.** Сергей кладет в банк 500 000 руб. под 10 % годовых на 4 года (проценты начисляются один раз после истечения года) с правом докладывать три раза (в конце каждого года после начисления процентов) на счет фиксированную сумму 150 000 руб. Какая максимальная сумма может быть на счете у Сергея через 4 года?

*Решение.*

Сумма на счете у Сергея будет максимальной, если он все 3 раза воспользуется правом внести 150 000 руб. на счет.

1) После первого года хранения вклада:

сумма вклада возрастет до  $500\,000 \cdot 1,1 = 550\,000$  (руб.).

Тогда дополнительное пополнение счета будет

$550\,000 + 150\,000 = 700\,000$  (руб.).

2) После второго года хранения вклада:

сумма вклада возрастет до  $700\,000 \cdot 1,1 = 770\,000$  (руб.);

дополнительное пополнение счета составит

$770\,000 + 150\,000 = 920\,000$  (руб.).

3) После третьего года хранения вклада:

сумма вклада возрастет до  $920\,000 \cdot 1,1 = 1\,012\,000$  (руб.);

дополнительное пополнение счета составит

$1\,012\,000 + 150\,000 = 1\,162\,000$  (руб.).

4) После четвертого года хранения вклада:

сумма вклада возрастет до

$1\,162\,000 \cdot 1,1 = 1\,278\,200$  (руб.).

*Ответ:* 1 278 200.

**Пример 5.** По вкладу «А» банк в течение трех лет в конце каждого года увеличивает на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 12 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад все еще останется выгоднее, чем вклад «А».

*Решение.*

Пусть за каждый тип вклада внесена сумма  $S$ , тогда на вкладе «А» сумма увеличивается каждый год на 10 %, т. е. умножается на 1,1. Через 3 года сумма на вкладе «А» будет равна  $1,1^3 \cdot S = 1,331S$ .

Аналогично на вкладе «Б» через 3 года сумма будет равна

$$1,12^2 \left(1 + \frac{n}{100}\right) \cdot S = 1,2544 \left(1 + \frac{n}{100}\right) \cdot S, \text{ где } n \in N.$$



Согласно условию надо найти наименьшее целое решение неравенства  $1,2544 \left(1 + \frac{n}{100}\right) \cdot S > 1,331S$ , или  $1 + \frac{n}{100} > \frac{1,331}{1,2544}$ ,  
 $\frac{n}{100} > \frac{13\,310 - 12\,544}{12\,544}$ ,  $n > \frac{76\,600}{12\,544} = 6,106$ , т. е.  $n = 7\%$ .

*Ответ:* 7.

**Пример 6.** Строительство нового магазина стоит 60 млн руб. Затраты на производство  $x$  тыс. ед. продукции равны  $1,5x^2 + 2x + 4$  млн руб. в год. Если продукцию магазина продать по цене  $p$  тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн руб.) за год составит  $px - (1,5x^2 + 2x + 4)$ . Когда магазин будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении  $p$  строительство магазина окупится не более чем за 3 года?

*Решение.*

Чтобы прибыль за 3 года была не меньше 60 млн руб., необходимо, чтобы ежегодная прибыль была не меньше 20 млн руб., т. е. получим неравенство

$$px - (1,5x^2 + 2x + 4) \geq 20.$$

*Замечание.* Известно, что если  $a, b \geq 0$ , то  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ , или  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ , причем знак равенства выполняется, если  $a = b$ .

$$\begin{aligned} \text{В нашем случае получим } p &\geq \frac{1,5x^2 + 2x + 24}{x} = 1,5x + \frac{24}{x} + 2 \geq \\ &\geq 2\sqrt{1,5x \cdot \frac{24}{x}} + 2 = 2\sqrt{\frac{3}{2} \cdot 24} + 2 = 2\sqrt{36} + 2 = 2 \cdot 6 + 2 = 14. \end{aligned}$$

Остается убедиться, что это значение  $p = 14$  достигается, т. е. существует количество продукции  $x$ , при котором достигается эта цена.

$$\begin{aligned} 14x - (1,5x^2 + 2x + 4) &\geq 20, \text{ или } 28x - (3x^2 + 4x + 8) \geq 40, \text{ или } \\ 3x^2 - 24x + 48 &\leq 0, x^2 - 8x + 16 \leq 0, (x - 4)^2 \leq 0, \text{ откуда } x - 4 = 0, x = 4. \end{aligned}$$

Значит, при  $p = 14$  и  $x = 4$  магазин окупится за 3 года.

*Ответ:* 14.

**Пример 7.** При рытье колодца глубиной свыше 12 м за первый метр заплатили 1000 руб., а за каждый следующий на 500 руб. больше, чем за предыдущий. Сверх того за весь колодец дополнительно было уплачено 8000 руб. Средняя стоимость 1 м оказалась равной 5250 руб. Чему равна глубина колодца?

*Решение.*

Имеем арифметическую прогрессию, где  $d = 500$ ,  $a_1 = 1000$ . Пусть  $x$  м — глубина колодца, тогда сумма первых  $x$  членов арифметической прогрессии будет равна

$$\frac{2a_1 + (x-1)d}{2} \cdot x = \frac{2 \cdot 1000 + (x-1) \cdot 500}{2} \cdot x = (1000 + (x-1) \cdot 250)x = \\ = (1000 + 250x - 250)x = (250x + 750) \cdot x = 250x^2 + 750x.$$

Согласно условию задачи, кроме указанной суммы было уплачено еще 8000 руб., а средняя стоимость 1 м составила 5250 руб.

Учитывая, что глубина колодца свыше 12 м, получим уравнение

$$250x^2 + 750x + 8000 = 5250x, \quad x > 12, \text{ или } 250x^2 - 4500x + 8000 = 0.$$

Разделив обе части полученного уравнения на 250, получим  $x^2 - 18x + 32 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 16$ ,  $x_2 = 2$ . Поскольку  $x > 12$ , подходит корень  $x = 16$ , т. е. глубина колодца 16 м.

*Ответ:* 16.

**Пример 8.** В мае планируется взять кредит в банке на сумму 6 млн руб. на некоторый срок. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 16 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по апрель каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в мае каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на май предыдущего года.

На какой минимальный срок (целое число лет) следует брать кредит, чтобы наибольший годовой платеж по кредиту не превысил 1,5 млн руб.?

*Решение.*

Согласно условию задачи долг уменьшается равномерно. При такой схеме погашения кредита платеж состоит из двух компонентов:

Платеж =  $\frac{S}{n} + p\%$  от долга, где  $S$  — сумма кредита,  $n$  — количество выплат (срок,  $p$  — процентная ставка).

Понятно, что I платеж будет наибольшим, поскольку в первый раз необходимо погасить максимальную сумму долга.

I платеж вычисляется по формуле  $\frac{S}{n} + \frac{pS}{100}$ .

Наибольший годовой платеж, согласно условию, не должен превышать 1,5 млн руб.

Следовательно, имеем неравенство

$$\frac{6}{n} + \frac{6 \cdot 14}{100} \leq 1,5, \text{ или } \frac{6}{n} + \frac{84}{100} \leq 1,5.$$

Полученное неравенство запишем в виде

$$\frac{6}{n} - 1,5 + 0,84 \leq 0, \text{ или } \frac{6}{n} - 0,66 \leq 0, \text{ где } n > 0.$$

Следовательно,  $6 - 0,66n \leq 0$ ,  $0,66n \geq 6$ ,

$$0,11n \geq 1, \text{ или } 11n \geq 100, \text{ откуда получим } n \geq \frac{100}{11} = 9\frac{1}{11}.$$

Значит, минимальный срок, на который можно взять кредит, равен 10 лет.

Ответ: 10.

## § 17. Задание 17. Планиметрия

Эта задача содержит два пункта.

В первом пункте задания нужно доказать, а во втором пункте вычислить.

Вместе с тем никаких особых знаний в этой задаче не требуется. Помимо геометрии здесь необходимо знать тригонометрию, а в некоторых случаях уметь применять метод координат.

### 17.1. Треугольники

**Пример 1.** В  $\triangle ABC$  известно, что  $AC + BC = 28$ ,  $S_{\triangle ABC} = 98$ .

а) Докажите, что  $\triangle ABC$  — прямоугольный.

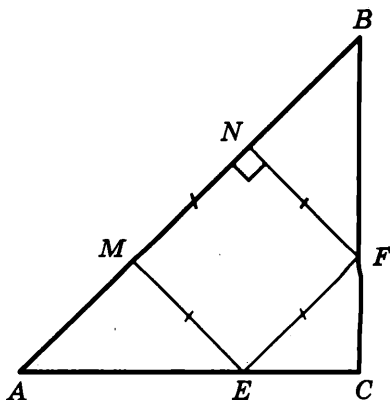
б) Найдите сторону квадрата, вписанного в  $\triangle ABC$ , если две его вершины лежат на стороне  $AB$ .

*Решение.*

а) По условию задачи  $AC + BC = 28$ . Пусть  $AC = x$ , тогда  $BC = 28 - x$ .

Так как  $S_{\triangle ABC} = 98$ , получим  $\frac{1}{2}AC \cdot BC \sin \angle C = 98$ ,

$$\frac{1}{2}x(28 - x) \sin \angle C = 98, x^2 - 28x + \frac{196}{\sin \angle C} = 0.$$



$$\frac{D}{4} = 14^2 - \frac{196}{\sin \angle C} \geq 0, \quad 196 \left( 1 - \frac{1}{\sin \angle C} \right) \geq 0,$$

$$1 - \frac{1}{\sin \angle C} \geq 0, \quad \sin \angle C \neq 0, \quad \sin \angle C \geq 1, \quad \text{откуда } \sin \angle C = 1, \quad \text{т. е. } \angle C = 90^\circ.$$

Значит,  $\triangle ABC$  — прямоугольный.

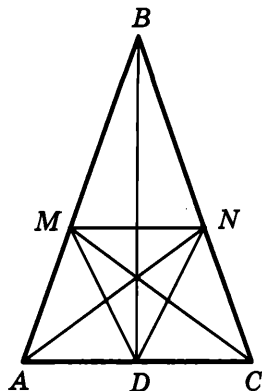
б) Так как  $\sin \angle C = 1$ , то  $\frac{D}{4} = 0$ , тогда  $AC = BC = 28 : 2 = 14$ ,

т. е.  $\triangle ABC$  — равнобедренный и прямоугольный. Если  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ , то  $\angle AEM = \angle BFN = \angle CEF = \angle EFC = 45^\circ$ , тогда  $AM = MN = NB$ .

Но  $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{14^2 + 14^2} = 14\sqrt{2}$ .

Значит,  $MN = \frac{1}{3} AB = \frac{14\sqrt{2}}{3}$ .

Ответ: б)  $\frac{14\sqrt{2}}{3}$ .



**Пример 2.** В равнобедренном  $\triangle ABC$  ( $AB = BC$ ) проведены биссектрисы  $AN$ ,  $CM$ ,  $BD$ .

а) Докажите, что  $\triangle DMN$  — равнобедренный.

б) Найдите  $S_{\triangle DMN}$ , если  $S_{\triangle ABC} = 121$ ,  $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$ .

*Решение.*

а) Рассмотрим  $\triangle MAC$  и  $\triangle NAC$ .  $\angle MAC = \angle ACN$  (по свойству равнобедренного  $\triangle ABC$ ),  $AC$  — общая сторона,  $\angle ACM = \angle CAN$ , так как  $AN$  и  $CM$  — биссектрисы (по условию).

Значит,  $\triangle MAC = \triangle NAC$  по II признаку (по стороне и прилежащим к ней углам). Тогда  $AM = CN$ . Заметим, что  $\triangle MAD = \triangle NCD$  по I признаку (по двум сторонам и углу между ними),  $AM = CN$  (по доказанному),  $\angle MAD = \angle NCD$  и  $AD = DC$ , так как в равнобедренном  $\triangle ABC$  биссектриса  $BD$ , проведенная к основанию  $AC$ , является медианой и высотой. Тогда  $DM = DN$ , т. е.  $\triangle DMN$  — равнобедренный с основанием  $MN$ , ч. т. д.

б) По условию  $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$ .

Пусть  $AD = 3x$ ,  $AB = 5x$ . Так как  $AN$  — биссектриса, то по свойству биссектрисы  $\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$ , где  $AC = 2AD = 6x$ ,  $NC = BC - BN = 5x - BN$ .

Тогда получим  $\frac{5x}{6x} = \frac{BN}{5x - BN}$ , или  $\frac{BN}{5x - BN} = \frac{5}{6}$ , или  $6BN = 25x - 5BN$ , или  $11BN = 25x$ , откуда  $BN = \frac{25}{11}x$ .

Так как  $\triangle BMN \sim \triangle ABC$  (по двум углам), то  $\frac{BN}{BC} = k = \frac{25}{11}x : 5x = \frac{5}{11}$ , где  $k$  — коэффициент подобия.

Но отношение площадей подобных треугольников равно  $k^2$ ,

$$\text{т. е. } S_{\triangle BMN} = \left(\frac{5}{11}\right)^2 S_{\triangle ABC} = \frac{25}{121} \cdot 121 = 25.$$

Пусть  $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ .

$$\begin{aligned} S_{\triangle AMD} &= S_{\triangle CND} = \frac{1}{2} AM \cdot AD \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} (AB - BM) \cdot 3x \cdot \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{2} \left( 5x - \frac{25}{11}x \right) \cdot 3x \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{11}x \cdot 3x \cdot \sin \alpha = \frac{45}{11}x^2 \sin \alpha. \end{aligned}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot 6x \cdot \sin \alpha = 15x^2 \sin \alpha.$$

По условию задачи  $S_{\triangle ABC} = 121$ , тогда  $15x^2 \sin \alpha = 121$ , откуда  $\sin \alpha = \frac{121}{15}x^2$ .

$$\text{Следовательно, } \frac{S_{\triangle AMD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{45}{11}x^2 \sin \alpha}{15x^2 \sin \alpha} = \frac{45}{11 \cdot 15} = \frac{3}{11} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{\triangle AMD} = S_{\triangle CND} = S_{\triangle ABC} - 2S_{\triangle AMD} - S_{\triangle BMN} = 121 - 2 \cdot 33 - 25 = 30.$$

Ответ: б) 30.

**Пример 3.** Биссектрисы  $AN$  и  $BM$   $\triangle ABC$  пересекаются в точке  $K$ .

а) Докажите, что  $\triangle ABC$  — прямоугольный, если  $AB = 13$ ,  $AM = \frac{13}{5}$ ,  $BN = \frac{26}{3}$ .

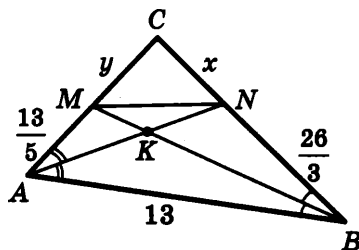
б) Найдите длину  $MN$ .

*Решение.*

а) Пусть  $CN = x$ ,  $CM = y$ . По свойству биссектрисы угла треугольника

$$\text{имеем } \frac{AC}{AB} = \frac{CN}{BN}, \text{ или } \frac{y + \frac{13}{5}}{13} = \frac{x}{\frac{26}{3}}, \text{ или } y + \frac{13}{5} = \frac{3x}{2}.$$

$$\text{Аналогично } \frac{BC}{AB} = \frac{CM}{AM}, \text{ или } \frac{x + \frac{26}{3}}{13} = \frac{y}{\frac{13}{5}}, \text{ или } x + \frac{26}{3} = 5y.$$



Полученные равенства решаем как систему способом подстановки:

$$\begin{cases} y + \frac{13}{5} = \frac{3x}{2}, \\ x + \frac{26}{3} = 5y; \end{cases} \begin{cases} y = \frac{3x}{2} - \frac{13}{5}, \\ x + \frac{26}{3} = 5\left(\frac{3x}{2} - \frac{13}{5}\right). \end{cases}$$

Упростим II уравнение полученной системы:

$$x + \frac{26}{3} = \frac{15}{2}x - 13, \text{ или } \frac{15}{2}x - x = 13 + \frac{26}{3}, \text{ или } \frac{13}{2}x = \frac{65}{3}, \text{ или } \frac{1}{2}x = \frac{5}{3},$$

$$\text{откуда } x = \frac{10}{3}.$$

Тогда из первого уравнения системы находим

$$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{3} - \frac{13}{5} = 5 - \frac{13}{5} = \frac{12}{5}.$$

$$\text{Значит, } AC = AM + MC = \frac{13}{5} + \frac{12}{5} = 5, \quad BC = x + \frac{26}{3} = \frac{36}{3} = 12.$$

Так как  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , т. е.  $13^2 = 5^2 + 12^2$ , то  $\triangle ABC$  — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора).

б) Из прямоугольного  $\triangle MCN$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) имеем

$$MN = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}, \text{ или}$$

$$MN = \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{3796}{9 \cdot 25}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 949}{9 \cdot 25}} = \frac{2}{15} \sqrt{949}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{2}{15} \sqrt{949}.$$

**Пример 4.** В остроугольном  $\triangle ABC$  проведены высоты  $AN$  и  $BM$ .

а) Докажите, что  $\triangle CMN \sim \triangle ABC$ .

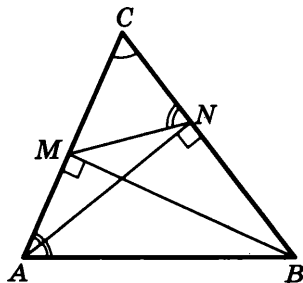
б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около  $\triangle ABC$  и  $\triangle CMN$ , если  $S_{\triangle ABC} = 27$ ,  $S_{\triangle CMN} = 3$  и  $MN = 3\sqrt{2}$ .

*Решение.*

а) Так как  $\angle AMB = \angle ANB = 90^\circ$ , то  $AB$  — диаметр окружности, описанной около четырехугольника  $AMNB$ .

Тогда  $\angle MAB + \angle BNM = 180^\circ$ . Значит,  $\angle MAB = \angle CAB = 180^\circ - \angle BNM = \angle CNM$ . Выходит, что  $\triangle CMN \sim \triangle ABC$  — по двум углам ( $\angle C$  — общий,  $\angle CAB = \angle CNM$  по доказанному), ч. т. д.

б) Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, т. е.  $\frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle ABC}} = k^2 = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$ , откуда  $k = \frac{1}{3}$ .



Значит,  $AB = 3MN = 3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ . С другой стороны,  $k = \frac{CN}{AC} = \cos \angle C$

(из  $\triangle ACN$ ), тогда  $\cos \angle C = \frac{1}{3}$ ,  $\sin \angle C = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

Пусть  $R_1$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ ,  $R_2$  — около  $\triangle CMN$ .

По теореме синусов  $R_1 = \frac{AB}{2\sin \angle C} = \frac{9\sqrt{2} \cdot 3}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{27}{4}$ .

Аналогично  $R_2 = \frac{MN}{2\sin \angle C} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{9}{4}$ .

Следовательно,  $\frac{R_1}{R_2} = \frac{27}{4} \cdot \frac{4}{9} = 3$ .

Ответ: б) 3.

**Пример 5.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность, где  $AB$  — диаметр. Угол между прямыми  $AD$  и  $BC$  равен  $60^\circ$ .

а) Докажите, что  $\angle CFB = 60^\circ$ .

б) Найдите отношение  $CD : AB$ .

*Решение.*

а) Проведем диагонали  $AC$  и  $BD$  четырехугольника  $ABCD$ . Пусть  $F$  — точка их пересечения, а  $E$  — точка пересечения прямых  $AD$  и  $BC$ . Поскольку  $AB$  — диаметр окружности, то  $\triangle ACB$  и  $\triangle ADB$  — прямоугольные ( $\angle ADB$  и  $\angle ACB$  — вписанные, опирающиеся на диаметр).

Значит,  $\angle AFB + \angle CFB = \angle DFC + \angle CFB = 180^\circ$ , откуда  $\angle CFB = 180^\circ - \angle DFC$ .

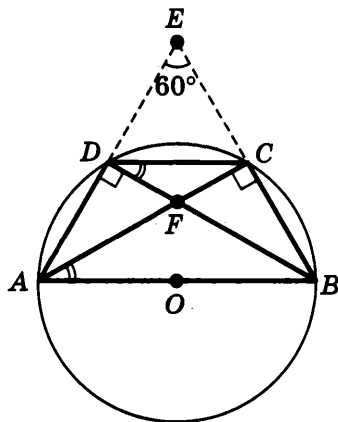
В четырехугольнике  $DECF$   $\angle EDF = \angle ECF = 90^\circ$ ,  $\angle E = 60^\circ$ , тогда  $\angle DFC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

Значит,  $\angle CFB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ , ч. т. д.

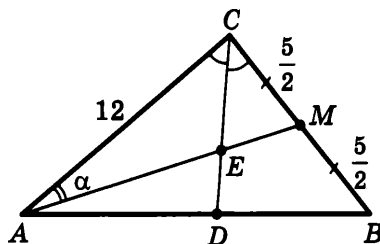
б) Заметим, что  $\angle CAB = \angle BDC$  — как вписанные, опирающиеся на одну и ту же  $\cup CB$ ,  $\angle AFD = \angle CFB$  — как вертикальные, тогда  $\triangle AFB \sim \triangle DFC$  (по двум углам), причем коэффициент подобия  $k = \frac{CF}{BF} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ .

Следовательно,  $CD : AB = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ .

Ответ: б) 1 : 2.



**Пример 6.** В прямоугольном  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 12$ ,  $BC = 5$  проведены медиана  $AM$  и биссектриса  $CD$ , пересекающиеся в точке  $E$ .



а) Докажите, что  $\frac{AE}{EM} = \frac{24}{5}$ .

б) Найдите  $S_{\triangle CEM}$ .

*Решение.*

а) Так как  $AC = 12$ ,  $BC = 5$  и  $\angle ACB = 90^\circ$ , то  $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ . По условию задачи  $CD$  — биссектриса, тогда  $\angle ACD = \angle BCD = 45^\circ$ .

Пусть  $\angle CAM = \alpha$ . Поскольку  $AM$  — медиана  $\triangle ABC$ , то  $CM = MB = \frac{5}{2}$ .

Из  $\triangle ACM$  имеем  $AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{144 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{601}}{2}$ .

Тогда  $\cos \alpha = \frac{AC}{AM} = \frac{24}{\sqrt{601}}$ .

По свойству биссектрисы  $\frac{AC}{CM} = \frac{AE}{EM} = \frac{12}{2,5} = \frac{24}{5}$ .

Значит,  $\frac{AE}{EM} = \frac{24}{5}$ , ч. т. д.

б) Так как  $AM = AE + EM = \frac{\sqrt{601}}{2}$  и  $\frac{AE}{EM} = \frac{24}{5}$  (по доказанному), то получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{AE}{EM} = \frac{24}{5}, \\ AE + EM = \frac{\sqrt{601}}{2}. \end{cases}$$

Пусть  $AE = x$ ,  $EM = y$ .

Имеем  $\begin{cases} 5x = 24y, \\ y = \frac{\sqrt{601}}{2} - x; \end{cases} \quad 5x = 24 \cdot \left( \frac{\sqrt{601}}{2} - x \right), \text{ или } 5x = 12\sqrt{601} - 24x,$

или  $29x = 12\sqrt{601}$ , откуда  $x = \frac{12\sqrt{601}}{29}$ . Для нахождения искомой площади  $\triangle CEM$  остается найти длину  $CE$ . Из  $\triangle AEC$  (по теореме косинусов) имеем  $CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2AC \cdot AE \cdot \cos \alpha$ , или

$$CE^2 = 12^2 + \left( \frac{12\sqrt{601}}{29} \right)^2 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{12\sqrt{601}}{29} \cdot \frac{24}{\sqrt{601}},$$



$$CE^2 = 12^2 \cdot \left(1 + \frac{601}{841}\right) - \frac{6912}{29},$$

$$CE^2 = 144 \cdot \frac{1442}{841} - \frac{6912}{29} = \frac{7200}{841}, \text{ откуда } CE = \frac{60\sqrt{2}}{29}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle CEM} = \frac{1}{2} CE \cdot CM \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{60\sqrt{2}}{29} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{75}{29}.$$

Ответ: б)  $\frac{75}{29}$ .

**Пример 7.** Основания высот остроугольного  $\triangle ABC$  служат вершинами другого  $\triangle DEF$ , периметр которого равен 8.

а) Докажите, что  $\triangle ABC \sim \triangle BDF$ .

б) Найдите  $S_{\triangle ABC}$ , если  $R = 3,5$ , где  $R$  — радиус описанной около  $\triangle ABC$  окружности.

*Решение.*

а) Пусть  $D, E$  и  $F$  — основания высот  $\triangle ABC$ . Так как  $\angle ODF = \angle OBF = \frac{\pi}{2} - \angle BCE$ , тогда  $\angle BDF = \frac{\pi}{2} - \angle ODF = \angle BCE$ , кроме того,  $\angle ABC$  — общий.

Значит,  $\triangle ABC \sim \triangle BDF$ , ч. т. д.

б) Пусть  $R$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ ,  $R_1$  — около  $\triangle BDF$ , тогда  $\frac{AC}{DF} = \frac{R}{R_1}$ , откуда  $DF = \frac{AC \cdot R_1}{R}$ , где  $R = 3,5$  (по условию задачи).

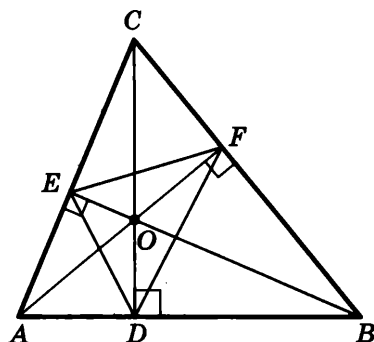
$$R_1 = \frac{1}{2} OB \text{ (} OB \text{ — диаметр), тогда } DF = \frac{AC \cdot OB}{2R} = \frac{AC \cdot (BE - OE)}{2R} = \frac{AC \cdot BE - AC \cdot OE}{2R}.$$

$$\text{Но } AC \cdot BE = 2S_{\triangle ABC}, AC \cdot OE = 2S_{\triangle AOC}.$$

$$\text{Значит, } DF = \frac{1}{R} (S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AOC}). \text{ Аналогично}$$

$$EF = \frac{1}{R} (S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AOB}) \text{ и } DE = \frac{1}{R} (S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BOC}).$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } DF + EF + DE &= \frac{1}{R} (3S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle AOC} + S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC})) = \\ &= \frac{1}{R} (3S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABC}) = \frac{2}{R} S_{\triangle ABC}. \end{aligned}$$



По условию задачи  $R = 3,5$ ,  $P_{\triangle DEF} = 8$ , тогда получим  $\frac{2}{3,5} S_{\triangle ABC} = 8$ ,

откуда  $S_{\triangle ABC} = 3,5 \cdot 4 = 14$ .

Ответ: б) 14.

**Пример 8.** В  $\triangle ABC$   $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  
 $CD$ ,  $BM$  и  $AN$  — высоты треугольника.

а) Докажите, что  $\triangle BDN \sim \triangle ABC$ .

б) Найдите длину  $AB$ , если

$$AC = 6(\sqrt{3} - 1).$$

Решение.

а) Из  $\triangle BCD$ , где  $CD$  — высота, имеем

$$BD = BC \cos 60^\circ = \frac{1}{2} BC.$$

Аналогично из  $\triangle ABN$  находим  $BN = AB \cos 60^\circ = \frac{1}{2} AB$ .

$$\text{Значит, } \frac{BD}{BN} = \frac{\frac{1}{2} BC}{\frac{1}{2} AB} = \frac{BC}{AB}.$$

Следовательно,  $\triangle BDN \sim \triangle ABC$  (по II признаку подобия), ч. т. д.

б) Из подобия треугольников следует, что  $k = \frac{BN}{AB} = \frac{1}{2}$ , тогда

$$DN = \frac{1}{2} AC.$$

Аналогично доказываем, что  $\triangle AMD \sim \triangle ABC$ , где коэффициент подобия  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\text{Значит, } MD = \frac{\sqrt{2}}{2} BC. \text{ По теореме синусов имеем } \frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ},$$

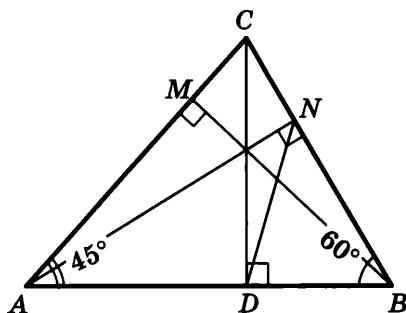
$$\text{или } \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{По условию задачи } AC = 6(\sqrt{3} - 1), \text{ тогда } BC = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} AC = \frac{6\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}}.$$

Так как  $\angle C = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$ , то по теореме косинусов найдем длину  $AB$ .

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos 75^\circ.$$

$$\text{Но } \cos 75^\circ = \cos (45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1).$$



Пусть для краткости  $AC = a$ ,  $BC = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a$ .

$$\begin{aligned} \text{Получим } AB^2 &= a^2 + \frac{2}{3}a^2 - 2a \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) = \frac{5}{3}a^2 - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}a^2 = \\ &= a^2 \cdot \left( \frac{5}{3} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3} \right) = \frac{2+\sqrt{3}}{3}a^2, \text{ откуда } AB = a\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{3}}, \text{ где } a = AC = \\ &= 6(\sqrt{3}-1) \text{ (по условию задачи).} \end{aligned}$$

$$\text{Но } 2+\sqrt{3} = \frac{1}{2}(1+2\sqrt{3}+3) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)^2.$$

$$\text{Следовательно, } AB = 6(\sqrt{3}-1) \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{6}} = \frac{6 \cdot (3-1)}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}.$$

Ответ: б)  $2\sqrt{6}$ .

## 17.2. Окружности и треугольники

**Пример 9.** В равнобедренном остроугольном  $\triangle ABC$  основание  $AC = 24$ , а расстояние от вершины  $B$  до точки  $M$  пересечения высот равно 7.

а) Докажите, что  $\triangle BCD \sim \triangle AEC$ .

б) Найдите радиус окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ .

*Решение.*

а) Заметим, что в  $\triangle BCD$  и  $\triangle AEC$   $\angle C$  — общий,  $\angle BDC = \angle AEC = 90^\circ$ .

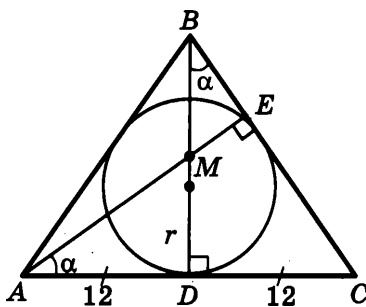
Значит,  $\triangle BCD \sim \triangle AEC$  (по двум углам), ч. т. д.

б) I способ

Пусть  $\angle CBD = \angle CAE = \alpha$ . Из  $\triangle AEC$ , где  $AC = 24$ , имеем  $EC = AC \sin \alpha = 24 \sin \alpha$ .

С другой стороны,  $EC = BC - BE$ , где  $BC = \frac{DC}{\sin \alpha} = \frac{12}{\sin \alpha}$ ,  $BE = 7 \cos \alpha$ .

Значит,  $EC = \frac{12}{\sin \alpha} - 7 \cos \alpha$ . Так как  $EC = 24 \sin \alpha$ , то получим уравнение  $24 \sin \alpha = \frac{12}{\sin \alpha} - 7 \cos \alpha$ , или  $24 \sin^2 \alpha + 7 \sin \alpha \cos \alpha - 12 = 0$ .



Поскольку  $12 = 12 \cdot 1 = 12(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$ , то получим  $24 \sin^2 \alpha + 7 \sin \alpha \cos \alpha - 12(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 0$ , или  $12 \sin^2 \alpha + 7 \sin \alpha \cos \alpha - 12 \cos^2 \alpha = 0$  — однородное уравнение II степени.

Разделив обе части полученного уравнения на  $\cos^2 \alpha \neq 0$ , получим  $12 \operatorname{tg}^2 \alpha + 7 \operatorname{tg} \alpha - 12 = 0$  — квадратное уравнение относительно  $\operatorname{tg} \alpha$ .

Решая полученное уравнение, находим  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$  (не подходит, так как  $0 < \alpha < 90^\circ$  и  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ).

Из  $\triangle AMD$  имеем  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{MD}{AD} = \frac{3}{4}$ , где  $AD = 12$ , тогда  $MD = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$ , высота  $BD = 7 + 9 = 16$ .

$$\text{Значит, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 16 = 192.$$

С другой стороны,  $S_{\triangle ABC} = p \cdot r$ , где  $p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$ ,

$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 20 \text{ (из } \triangle ABD), r = MD.$$

$$\text{Следовательно, } p = \frac{1}{2}(20 + 20 + 24) = 32, r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} = \frac{192}{32} = 6.$$

Ответ: б) 6.

## II способ

Из  $\triangle ABD$  имеем  $AB^2 = AD^2 + BD^2$ .

Пусть  $AB = y$ ,  $MD = x$ , тогда  $y^2 = (7 + x)^2 + 144$ .

Из подобия  $\triangle AEC$  и  $\triangle BDC$  имеем  $\frac{CE}{AC} = \frac{CD}{BC}$ , или  $\frac{CE}{24} = \frac{12}{y}$ .

$$\text{Но } CE = y - BE, \text{ тогда } \frac{y - BE}{24} = \frac{12}{y}. \quad (1)$$

Заметим, что  $\frac{BE}{BM} = \frac{BD}{y}$ , или  $BE = \frac{7}{y} \cdot (7 + x)$ , тогда

$$y - BE = y - \frac{7}{y} \cdot (7 + x) = \frac{1}{y} (y^2 - 49 - 7x). \quad (2)$$

Учитывая равенство (1), имеем  $\frac{y^2 - 49 - 7x}{24y} = \frac{12}{y}$ , или  $y^2 = 7x + 337$ .

Но  $y^2 = (7 + x)^2 + 144$ , тогда получим  $(7 + x)^2 + 144 = 7x + 337$ , или  $x^2 + 7x - 144 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = -16$  (не подходит, так как  $x > 0$ ). Если  $x = 9$ , то  $BD = 7 + 9 = 16$  и т. д. (см. I способ).

Ответ: б) 6.

**Пример 10.** В прямоугольном  $\triangle ABC$   $\angle B = 30^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ .

а) Докажите, что  $BO$  — биссектриса угла  $B$ .

б) Найдите отношение радиусов описанной и вписанной окружностей.

*Решение.*

а) По свойству касательных  $BM = BN$ ,  $OM = ON = r$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности. Кроме того,  $OM \perp BM$  и  $ON \perp BN$  (касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания).

Значит,  $\triangle BMO = \triangle BNO$  (по двум катетам).

Из равенства треугольников следует, что  $\angle OBM = \angle OBN$ , т. е.  $BO$  — биссектриса  $\angle B$ , ч. т. д.

б) Из  $\triangle BMO$ , где  $\angle MBO = 15^\circ$ , имеем  $BM = r \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ$ , тогда  $BC = BM + r = r \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ + r = r \cdot (1 + \operatorname{ctg} 15^\circ)$ .

Так как  $\angle C = 90^\circ$ , то  $AB = 2R$ , где  $R$  — радиус описанной окружности. По условию  $\angle B = 30^\circ$ , тогда  $BC = 2R \cos 30^\circ$ .

Значит,  $r(1 + \operatorname{ctg} 15^\circ) = 2R \cos 30^\circ$ , откуда  $\frac{R}{r} = \frac{1 + \operatorname{ctg} 15^\circ}{2 \cos 30^\circ} = \frac{1 + \operatorname{ctg} 15^\circ}{\sqrt{3}}$ .

$$\begin{aligned} \text{Но } \operatorname{ctg} 15^\circ &= \operatorname{ctg} (45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + 1}{\operatorname{ctg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ} = \frac{1 \cdot \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \\ &= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \frac{R}{r} = \frac{1 + (2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1.$$

Ответ: б)  $\sqrt{3} + 1$ .

**Пример 11.** Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности его катетов.

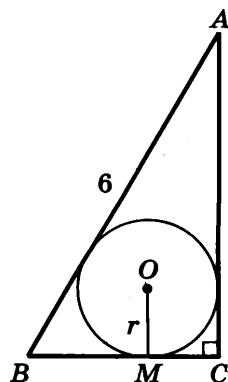
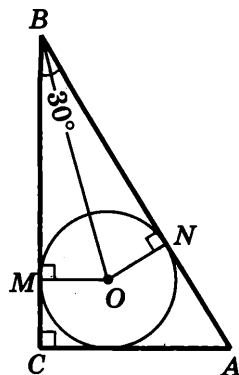
а) Докажите, что углы треугольника  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $90^\circ$ .

б) Найдите радиус вписанной окружности, если длина гипотенузы равна 6.

*Решение.*

а) Пусть  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ . Пусть для определенности  $b > a$ .

Согласно условию задачи  $r = \frac{1}{2}(b - a)$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности.



С другой стороны,  $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ .

Следовательно,  $\frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(a + b - c)$ , или  $b - a = a + b - c$ , откуда  $c = 2a$ .

Значит,  $\angle A = 30^\circ$  (по свойству),  $\angle C = 90^\circ$  (по условию), тогда  $\angle B = 60^\circ$ , ч. т. д.

б) Так как  $\angle A = 30^\circ$ , то  $BC = \frac{1}{2}AB = 3$ , т. е.  $a = 3$  и  $AC = b = c \cdot \cos 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ .

Значит,  $r = \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} - 3) = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1)$ .

Ответ: б)  $\frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1)$ .

**Пример 12.** Центр окружности, касающейся катетов  $BC$  и  $AC$  соответственно в точках  $D$  и  $E$ , лежит на гипотенузе.

а) Докажите, что  $BD \cdot AE = r^2$ , где  $r = OE$  — радиус окружности.

б) Найдите радиус  $r$ , если  $7r = AC + BC$  и  $S_{\triangle ABC} = 56$ .

*Решение.*

а) Пусть точка  $O$  — центр окружности, касающейся катетов  $AC$  и  $BC$  соответственно в точках  $E$  и  $D$ .

Пусть  $AC = x$ ,  $BC = y$ ,  $AE = b$ ,  $BD = a$ .

Так как  $BC \perp OD$ ,  $AC \perp OE$  и  $OE = OD = r$ , то  $CDOE$  — квадрат, тогда  $AC = b + r$ ,  $BC = a + r$ , т. е.  $x = b + r$ ,  $y = a + r$ .

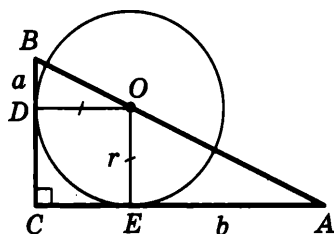
Заметим, что  $\triangle BOD \sim \triangle ABC$  — как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle B$ . Тогда  $\frac{a}{r} = \frac{a+r}{b+r}$ , или  $ab + ar = ar + r^2$ , откуда  $r^2 = ab$ , т. е.  $BD \cdot AE = r^2$ , ч. т. д.

б) По условию задачи  $S_{\triangle ABC} = 56$ , или  $\frac{1}{2}AC \cdot BC = 56$ , или  $(a + r)(b + r) = 112$ , или  $ab + (a + b)r + r^2 = 112$ .

Но  $ab = r^2$  (по доказанному) и  $7r = x + y$  (по условию).

Получим  $r^2 + 5r^2 + r^2 = 112$ , или  $7r^2 = 112$ , откуда  $r^2 = 16$ ,  $r = 4$ .

Ответ: б) 4.



**Пример 13.** Хорда  $NC$  пересекает диаметр  $AB$  в точке  $M$  под углом  $30^\circ$ . Через точку  $C$  проведена хорда  $CD \perp AB$ . Известно, что  $MN : MC = 1 : 3$ , а радиус окружности  $R = 3$ .

а) Докажите, что  $NC : CD = 4 : 3$ .

б) Найдите  $S_{\triangle NCD}$ .

*Решение.*

а) Пусть  $MN = x$ ,  $MC = 3x$ . Так как  $CD \perp AB$ , то  $\triangle MCK$  — прямоугольный, где

$\angle CMK = 30^\circ$ . Тогда  $CK = \frac{1}{2}MC = \frac{3x}{2}$ ,  $NC = 4x$ ,  $CD = 2CK = 3x$ .

Из  $\triangle NCD$  по теореме синусов имеем  $\frac{ND}{\sin \angle C} = 2R$ , где  $R = 3$ ,  $\angle C = 60^\circ$ .

Значит,  $ND = 2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ .

С другой стороны, по теореме косинусов  $ND^2 = CN^2 + CD^2 - 2CN \cdot CD \cdot \cos \angle C$ , или

$$ND^2 = 16x^2 + 9x^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3x \cdot \frac{1}{2} = 25x^2 - 12x^2 = 13x^2, \text{ откуда } ND = x\sqrt{13}.$$

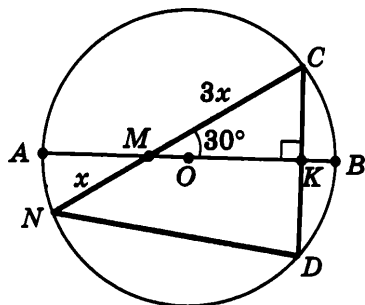
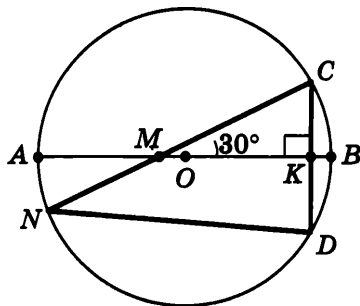
Но  $ND = 3\sqrt{3}$ , значит,  $x\sqrt{13} = 3\sqrt{3}$ , откуда

$$x = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{39}}{13}.$$

$$NC = 4x = \frac{12\sqrt{39}}{13}, \quad CD = 3x = \frac{9\sqrt{39}}{13}, \quad \text{тогда } NC : CD = \frac{12\sqrt{39}}{13} : \frac{9\sqrt{39}}{13} = 12 : 9 = 4 : 3, \text{ ч. т. д.}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } S_{\triangle NCD} &= \frac{1}{2} NC \cdot CD \cdot \sin \angle C = \frac{1}{2} \cdot \frac{12\sqrt{39}}{13} \cdot \frac{9\sqrt{39}}{13} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{12 \cdot 39 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}}{13} = \frac{81\sqrt{3}}{13}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{81\sqrt{3}}{13}.$$



### 17.3. Четырехугольники

**Пример 14.** Радиус окружности равен 10. Из точки  $M$ , взятой вне окружности, проведены касательные  $MA$  и  $MB$  ( $A$  и  $B$  — точки касания),  $AM \perp MB$ .  $FE$  — также касательная к окружности, причем  $E \in AM$ ,  $F \in BM$ .

а) Докажите, что  $AOBM$  — квадрат.

б) Найдите периметр  $\triangle MEF$ .

*Решение.*

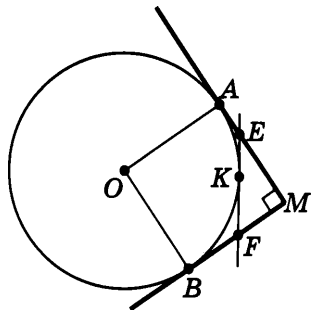
а) Так как  $MA$  и  $MB$  — касательные к окружности, то  $MA \perp AO$  и  $MB \perp BO$ . Кроме того,  $AM \perp MB$  (по условию) и  $OA = OB = R$ .

Значит,  $AOBM$  — квадрат.

б)  $P_{\triangle MEF} = ME + FM + EF$ . Пусть  $K$  — точка касания  $EF$  к окружности, тогда  $AE = EK$  и  $KF = BF$  (по свойству касательных).

Так как  $AOBM$  — квадрат, то  $P_{\triangle MEF} = ME + FM + (EK + KF) = ME + FM + AE + FB = (ME + AE) + (MF + FB) = AM + MB = 10 + 10 = 20$ .

Ответ: б) 20.



**Пример 15.** В квадрате  $ABCD$  точки  $M$ ,  $E$ ,  $F$  — середины сторон  $BC$ ,  $AB$  и  $CD$  соответственно,  $K$  — точка пересечения  $AM$  и  $DE$ ,  $T$  —  $MD$  и  $AF$ ,  $N$  —  $AF$  и  $DE$ .

а) Докажите, что точки  $M$ ,  $K$ ,  $N$  и  $T$  лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник  $MKNT$ , если  $AB = 16$ .

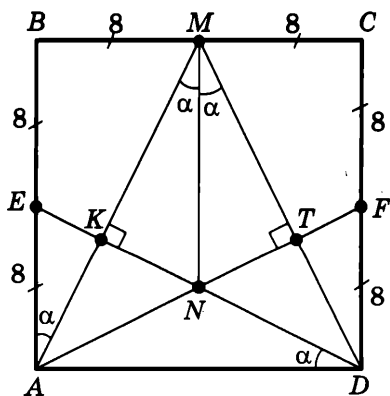
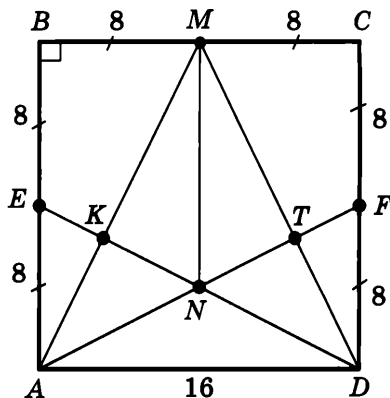
*Решение.*

а) Так как  $ABCD$  — квадрат, точки  $E$ ,  $M$  и  $F$  — середины сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $CD$  соответственно, то  $\triangle ABM = \triangle DAE$  (по двум катетам). Тогда  $\angle BAM = \angle ADE = \alpha$ .

Так как  $\triangle EAD$  — прямоугольный, то  $\angle AED = 90^\circ - \angle ADE = 90^\circ - \alpha$ . В  $\triangle AEK$   $\angle AKE = 180^\circ - (\angle EAK + \angle AEK) = 180^\circ - (\alpha + 90^\circ - \alpha) = 90^\circ$ . Значит,  $\triangle AEK$  — прямоугольный. Аналогично  $\triangle DFT$  — прямоугольный.

Выходит, что в четырехугольнике  $\angle MKN = \angle MTN = 90^\circ$ . Следовательно, вершины треугольников, имеющих общую гипотенузу  $MN$ , лежат на одной окружности, где  $MN$  — диаметр.

Итак, точки  $K$ ,  $M$ ,  $T$ ,  $N$  лежат на одной окружности.





б) Известно, что площадь четырехугольника, описанного около четырехугольника, определяется по формуле  $S = p \cdot r$ , где  $p$  — полупериметр,  $r$  — радиус вписанной окружности.

$$\text{В } \triangle ABM \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Известно, что  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ , или  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{5}{4}$ , откуда  $\cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$ ,

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\cos \alpha > 0).$$

$$\text{Из } \triangle AEK \quad \cos \alpha = \frac{AK}{AE} \Rightarrow AK = AE \cdot \cos \alpha = 8 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Из } \triangle ABM \quad \cos \alpha = \frac{BM}{AM} \Rightarrow AM = \frac{8\sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{5}.$$

$$\text{Тогда } MK = AM - AK = 4\sqrt{5} - \frac{16}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Так как точка  $M$  — середина  $BC$ , то  $MN$  — биссектриса  $\angle AMD$ , тогда  $\angle BAM = \angle AMN$  (как накрест лежащие углы).

$$\text{Из } \triangle MKN \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{KN}{MK} \Rightarrow KN = MK \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$S_{MKNT} = 2S_{\triangle MKN} = 2 \cdot \frac{1}{2} MK \cdot KN = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}.$$

$$p = \frac{2MK + 2KN}{2} = MK + KN = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Следовательно, } r = \frac{S_{MKNT}}{p} = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{4\sqrt{5}}{15}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{4\sqrt{5}}{15}.$$

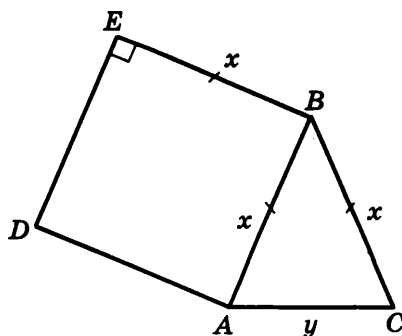
**Пример 16.** Площадь квадрата  $ABED$ , построенного на стороне равнобедренного  $\triangle ABC$  с острым углом  $B$ , в 4 раза больше площади  $\triangle ABC$ .

а) Докажите, что  $\angle ABC = 30^\circ$ .

б) Найдите  $\frac{R}{r}$ , где  $R$  и  $r$  — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

*Решение.*

а) Пусть  $AB = BC = BE = x$ ,  $AC = y$ .



По условию задачи  $x^2 = 4S_{\triangle ABC}$ .

$$\text{Но } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2} x^2 \sin \angle ABC.$$

Следовательно,  $x^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 \sin \angle ABC$ , или  $x^2 = 2x^2 \sin \angle ABC$ , откуда

$$\sin \angle ABC = \frac{1}{2}. \text{ Значит, } \angle ABC = 30^\circ, \text{ ч. т. д.}$$

б) По следствию из теоремы синусов имеем  $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$ , откуда

$$R = \frac{y}{2 \sin 30^\circ} = \frac{y}{2 \cdot \frac{1}{2}} = y. \text{ Итак, } R = y = AC.$$

Известно, что  $S_{\triangle} = p \cdot r$ , где  $p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(2x + y)$ , тогда

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2} x^2 \cdot \sin 30^\circ}{\frac{1}{2} \cdot (2x + y)} = \frac{x^2}{2(2x + y)}, \text{ значит, } \frac{R}{r} = \frac{2y(2x + y)}{x^2}.$$

Но  $\cos \angle BAC = \cos 75^\circ$ , или  $y = 2x \cos 75^\circ$ ,

$$\text{т. е. } \frac{R}{r} = \frac{4x \cos 75^\circ \cdot (2x + 2x \cos 75^\circ)}{x^2} = 8 \cos 75^\circ \cdot (1 + \cos 75^\circ).$$

$$\begin{aligned} \text{Но } \cos 75^\circ &= \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1). \end{aligned}$$

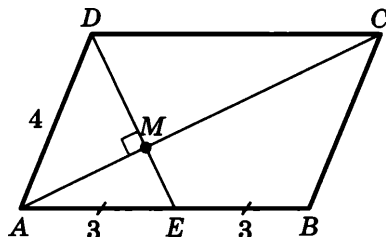
$$\begin{aligned} \text{Тогда } \frac{R}{r} &= 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1)\right) = \\ &= 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{1}{4} \cdot (4 + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot (4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{2}(2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} - 1) \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1) = \\ &= 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 4 = 2\sqrt{3}(\sqrt{2} - 1) + 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

Ответ: б)  $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$ .

**Пример 17.** В параллелограмме  $ABCD$  стороны  $AB = 6$ ,  $AD = 4$ , точка  $E$  — середина  $AB$ . Известно, что  $AC \perp DE$ ,  $M$  — точка их пересечения.

а) Докажите, что  $\triangle AME \sim \triangle DMC$ .

б) Найдите  $S_{ABCD}$ .



*Решение.*

а) Проведем  $BF \parallel DE$ , тогда  $DEBF$  — параллелограмм. По условию точка  $E$  — середина  $AB$ , тогда  $F$  — середина  $CD$  (по теореме Фалеса).

Заметим, что  $\angle CAB = \angle ACD$  и  $\angle AED = \angle CDE$  (как накрест лежащие при параллельных прямых и секущей).

Тогда  $\triangle AME \sim \triangle DMC$  (по двум углам или как прямоугольные, имеющие общий острый угол), ч. т. д.

б) Значит,  $\frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$ , тогда  $\frac{DM}{ME} = \frac{2}{1}$ . Пусть  $ME = x$ ,  $AM = y$ ,  $MD = 2x$ ,  $MC = 2y$ . Из прямоугольных треугольников  $AME$  и  $AMD$  имеем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 4x^2 + y^2 = 16, \end{cases} \text{ или, вычитая из II уравнения I, получим } 3x^2 = 7, x^2 = \frac{7}{3},$$

откуда  $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$ . Тогда  $y^2 = 9 - x^2 = 9 - \frac{7}{3} = \frac{20}{3}$ ,  $y = \sqrt{\frac{20}{3}}$ .

Так как диагональ  $AC$  делит параллелограмм  $ABCD$  на два равных треугольника, то  $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ADC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot DM = 3y \cdot 2x = 6xy$ , или

$$S_{ABCD} = 6 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{\frac{20}{3}} = 2\sqrt{7 \cdot 20} = 4\sqrt{35}.$$

Ответ: б)  $4\sqrt{35}$ .

**Пример 18.** В параллелограмме  $ABCD$  точка  $M$  — середина  $AB$ . Прямые  $AC$  и  $DM$  пересекаются в точке  $O$ .

а) Докажите, что  $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COM}$ .

б) Найдите  $S_{ABCD}$ , если  $AB = 8$ ,  $AD = 6$ .

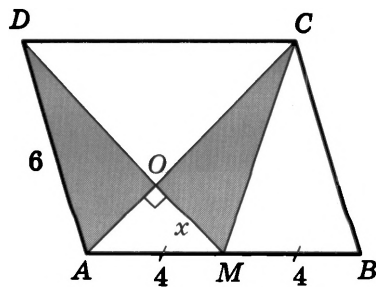
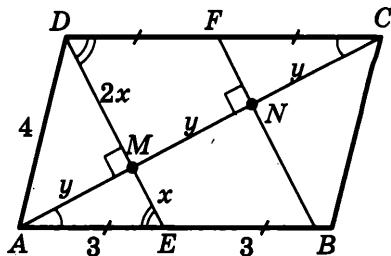
*Решение.*

а) Заметим, что  $S_{\triangle ADM} = S_{\triangle ACM}$ , так как у них  $AM$  — общее основание, а высоты равны,  $\triangle AOM$  — общая часть. Значит,  $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COM}$ , ч. т. д.

б) В прямоугольном  $\triangle AOM$   $AM = \frac{1}{2}AB = 4$ . Пусть  $OM = x$ , тогда

$$AO = \sqrt{AM^2 - OM^2} = \sqrt{16 - x^2}.$$

Из  $\triangle AOD$  имеем  $OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{36 - (16 - x^2)} = \sqrt{x^2 + 20}$ .



Так как  $\triangle AOM \sim \triangle DOC$  (по двум углам), то  $k = \frac{DC}{AM} = 2$ , где  $k$  — коэффициент подобия.

Значит,  $\frac{DC}{AM} = \frac{OD}{OM} = 2$ , или  $\frac{\sqrt{x^2 + 20}}{x} = 2$ , или  $\frac{x^2 + 20}{x^2} = 4$ ,  $3x^2 = 20$ , откуда  $x = \sqrt{\frac{20}{3}}$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } DM &= OD + OM = \sqrt{x^2 + 20} + x = \sqrt{\frac{20}{3} + 20} + \sqrt{\frac{20}{3}} = \sqrt{\frac{80}{3}} + \sqrt{\frac{20}{3}} = \\ &= \sqrt{\frac{20}{3}}(\sqrt{4} + 1) = 3\sqrt{\frac{20}{3}}. \end{aligned}$$

Теперь, зная стороны  $\triangle ADM$ , найдем  $\angle DAM$ . Пусть  $\angle DAM = \alpha$ , тогда по теореме косинусов имеем  $DM^2 = AD^2 + AM^2 - 2AD \cdot AM \cdot \cos \alpha$ , или

$$\left(3\sqrt{\frac{20}{3}}\right)^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos \alpha, \text{ или } 2 \cdot 6 \cdot 4 \cos \alpha = 52 - 9 \cdot \frac{20}{3}, \text{ или}$$

$$2 \cdot 6 \cdot 4 \cos \alpha = -8, \text{ откуда } \cos \alpha = -\frac{1}{6}.$$

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6}.$$

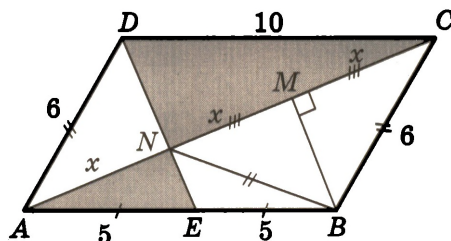
$$\text{Следовательно, } S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \alpha = 8 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} = 8\sqrt{35}.$$

Ответ: б)  $8\sqrt{35}$ .

**Пример 19.** В параллелограмме  $ABCD$  точка  $E$  — середина  $AB$ ,  $N$  — точка пересечения  $AC$  и  $DE$ ,  $AD = BN$ .

а) Докажите, что  $DE \perp AC$ .

б) Найдите  $S_{ABCD}$ , если  $AB = 10$ ,  $AD = 6$ .



*Решение.*

а) Пусть точка  $M$  — середина  $NC$ . Так как  $AD = BN$  (по условию задачи) и  $BC = AD$  (по свойству параллелограмма), то  $BC = BN$ , т. е.  $\triangle CBN$  — равнобедренный, тогда медиана  $BM$  является высотой, т. е.  $BM \perp AC$ .

Заметим, что  $\triangle ANE \sim \triangle DNC$  (по I признаку), тогда  $k = \frac{DC}{AE} = \frac{10}{5} = 2$ , где  $k$  — коэффициент подобия. Пусть  $AN = x$ , тогда  $NM = MC = x$ ,  $NC = 2x$ . Кроме того,  $\triangle ANE \sim \triangle AMB$ , так как  $\frac{AN}{AE} = \frac{AM}{AB}$ , тогда  $\angle ANE = \angle AMB$ . Поскольку  $BM \perp AC$ , то  $NE \perp AC$ , ч. т. д.

6) Пусть  $NE = y$ , тогда  $DN = 2y$  (так как  $k = 2$ ).

В  $\triangle AND$   $x^2 = 6^2 - (2y)^2$ , или  $x^2 = 36 - 4y^2$ .

В  $\triangle ANE$   $x^2 = 5^2 - y^2$ , или  $x^2 = 25 - y^2$ .

Сравнивая правые части полученных равенств, получим  $36 - 4y^2 = 25 - y^2$ , или  $3y^2 = 11$ ,  $y^2 = \frac{11}{3}$ ,  $y = \sqrt{\frac{11}{3}}$ . Тогда  $x^2 = 25 - y^2 = 25 - \frac{11}{3} = \frac{64}{3}$ ,

откуда  $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$ .

Следовательно,  $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ADC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot DN = 3x \cdot 2y = 6xy = 6 \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{11}{3}} = \frac{6 \cdot 8 \cdot \sqrt{11}}{3} = 16\sqrt{11}$ .

Ответ: 6)  $16\sqrt{11}$ .

## 17.4. Окружности и четырехугольники

**Пример 20.** Окружность с центром  $O$ , построенная на стороне  $AB$  параллелограмма  $ABCD$  как на диаметре, проходит через точку  $M$ .

а) Докажите, что  $ABCD$  — ромб.

б) Найдите  $AC$ , если  $AB = 3\sqrt{2}$  и  $AK : KD = 3 : 1$ , где  $K$  — точка пересечения окружности со стороной  $AD$ .

*Решение.*

а) Поскольку  $AB$  — диаметр и  $\angle AMB$  — вписанный, то  $\triangle AMB$  — прямоугольный.

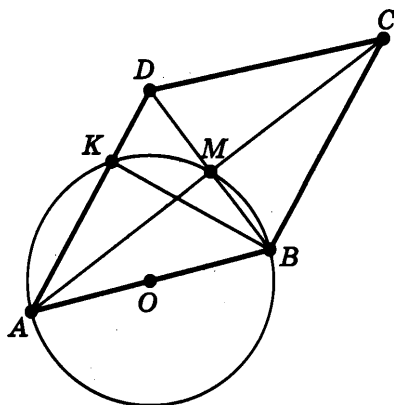
Значит,  $AC \perp BD$ , т. е. параллелограмм  $ABCD$  является ромбом, ч. т. д.

б) По условию  $AB = 3\sqrt{2}$  и  $AB = AD$ . Пусть  $KD = x$ , тогда  $AK = 3x$  и  $AD = 4x$ . Значит,  $4x = 3\sqrt{2}$ ,  $x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ .

Тогда  $KD = x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ ,  $AK = 3x = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ .

Заметим, что  $\triangle ABK$  — прямоугольный ( $\angle AKB = \angle AMB = 90^\circ$  — как вписанные, опирающиеся на диаметр  $AB$ ).

$$KB = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - \left(\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{18 - \frac{162}{16}} = \sqrt{\frac{126}{16}} = \frac{3\sqrt{14}}{4}.$$



Из прямоугольного  $\triangle BDK$  ( $\angle DKB = \angle AKB = 90^\circ$ ) найдем  $BD$ :

$$BD = \sqrt{DK^2 + BK^2}, \text{ или } BD = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{126}{16}} = \sqrt{\frac{18}{16} + \frac{126}{16}} = \sqrt{\frac{144}{16}} = \frac{12}{4} = 3.$$

Тогда  $DM = \frac{1}{2}BD = \frac{3}{2}$ . Из  $\triangle AMD$  найдем  $AM = \sqrt{AD^2 - MD^2} =$

$$= \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{18 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

Следовательно,  $AC = 2AM = 3\sqrt{7}$ .

Ответ: б)  $3\sqrt{7}$ .

**Пример 21.** В трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) окружности, построенные на боковых сторонах как на диаметрах, пересекаются в точках  $M$  и  $N$ .

а) Докажите, что  $MN \perp AD$ .

б) Найдите  $MN$ , если  $AD = 21$ ,  $BC = 3$ ,  $AB = 18$ ,  $CD = 12$ .

*Решение.*

а) Так как  $AB$  и  $CD$  — диаметры, то точки  $O_1$  и  $O_2$  — середины  $AB$  и  $CD$  соответственно. Тогда  $O_1O_2$  — средняя линия трапеции  $ABCD$ , т. е.  $O_1O_2 \parallel BC \parallel AD$ .

Заметим, что  $\triangle O_1MO_2 = \triangle O_1NO_2$  (по III признаку), так как  $O_1M = O_1N$ ,  $MO_2 = NO_2$  — как радиусы окружностей и  $O_1O_2$  — общая сторона. Тогда  $\angle MO_1K = \angle NO_1K$ , т. е. в равнобедренном  $\triangle MO_1N$   $O_1K$  — биссектриса и высота. Значит,  $O_1O_2 \perp MN$ , и так как  $BC \parallel AD \parallel O_1O_2$ , то  $MN \perp AD$ , ч. т. д.

б) Найдём длину средней линии трапеции:

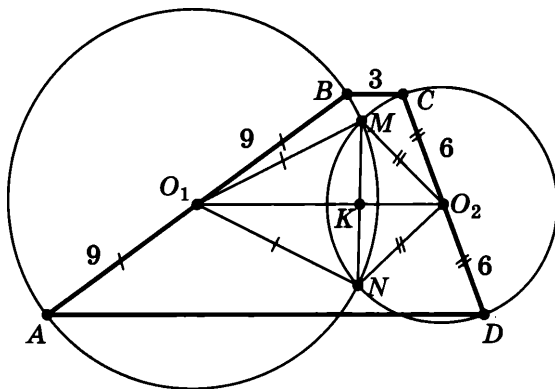
$$O_1O_2 = \frac{AD + BC}{2} = \frac{21 + 3}{2} = 12.$$

В  $\triangle O_1MO_2$   $O_1M = O_1B = 9$ ,  $MO_2 = CO_2 = 6$ , тогда

$$S_{\triangle O_1MO_2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{1}{2}(9 + 6 + 12) = \frac{27}{2};$$

$$p - a = \frac{27}{2} - O_1M = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}; \quad p - b = \frac{27}{2} - MO_2 = \frac{27}{2} - 6 = \frac{15}{2};$$

$$p - c = \frac{27}{2} - 12 = \frac{3}{2}.$$



$$\text{Следовательно, } S_{\Delta O_1 M O_2} = \sqrt{\frac{27}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{27 \cdot 27 \cdot 15}{2^4}} = \frac{27\sqrt{15}}{4}.$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\Delta O_1 M O_2} = \frac{1}{2} O_1 O_2 \cdot MK.$$

$$\text{Значит, } \frac{27\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot MK, \text{ откуда } 6MK = \frac{27\sqrt{15}}{4}, \text{ или}$$

$$MK = \frac{27\sqrt{15}}{6 \cdot 4} = \frac{9\sqrt{15}}{8}.$$

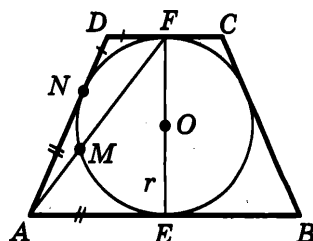
$$\text{Тогда } MN = 2MK = \frac{9\sqrt{15}}{4}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{9\sqrt{15}}{4}.$$

**Пример 22.** В равнобедренную трапецию  $ABCD$  вписана окружность радиуса  $r = 2\sqrt{3}$ ,  $F$  — точка касания окружности с основанием  $CD$ . Отрезок  $AF$  пересекает окружность в точке  $M$  так, что  $AM : MF = 2 : 6$ .

а) Докажите, что  $DF = AM$ .

б) Найдите периметр трапеции.



*Решение.*

а) Пусть  $AM = 2x$ , тогда  $MF = 6x$ ,  $AF = 8x$ ,  $DF = y$ . По свойству касательных  $DF = DN = y$ ,  $AN = AE$ . По свойству касательной и секущей  $AE^2 = AF \cdot AM$ , откуда  $AE = \sqrt{8x \cdot 2x} = 4x$ . Так как  $AE = 4x$ ,  $AF = 8x$ , то  $\angle AFE = 30^\circ$ , тогда  $\angle AFD = \angle FAE = 60^\circ$ .

Из  $\triangle ADF$ , где  $DF = y$ ,  $AD = AN + ND = AE + DF = 4x + y$ , по теореме косинусов имеем  $(4x + y)^2 = (8x)^2 + y^2 - 2 \cdot 8x \cdot y \cdot \cos 60^\circ$ , или  $16x^2 + 8xy + y^2 = 64x^2 + y^2 - 8xy$ , или  $48x^2 = 16xy$ ,  $x \neq 0$ , откуда  $y = 2x$ .

Но  $y = DF$ ,  $2x = AM$ , т. е.  $DF = AM$ , ч. т. д.

б) Если  $y = 2x$ , то  $DC = 2y = 4x$ ,  $AB = 2AE = 8x$ .

Из  $\triangle AEF$  имеем  $AF^2 - AE^2 = FE^2$ , или  $(8x)^2 - (4x)^2 = (2r)^2$ , или  $12x^2 = r^2$ , откуда  $2x\sqrt{3} = r$ .

По условию задачи  $r = 2\sqrt{3}$ . Значит,  $2x\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ , откуда  $x = 1$ .

Следовательно,  $AB = 8x = 8$ ,  $CD = 4$ . Но  $AB + CD = AD + BC$  (по свойству описанного четырехугольника), тогда периметр трапеции  $P = (8 + 4) \cdot 2 = 24$ .

*Ответ: б) 24.*

**Пример 23.** В равнобедренную трапецию  $TMNK$ , площадь которой равна 125, вписана окружность радиуса  $r$ .  $E$  и  $F$  — соответственные точки касания боковых сторон  $MT$  и  $NK$  с окружностью,  $EF = 8$ .

а) Докажите, что  $r^2 = ME \cdot TE$ .

б) Найдите площадь круга.

*Решение.*

а) Проведем диаметр  $AB$  окружности. По условию  $TM = KN$ .

Пусть  $ME = m$ ,  $TE = n$ ,  $EO = BO = r$ ,  $AB = 2r$ . Заметим, что  $MO$  и  $TO$  — биссектрисы соответственно углов  $TMN$  и  $MTK$ .

Кроме того,  $\angle TMN + \angle MTK = 180^\circ$ , тогда  $\angle TMO + \angle MTO = 90^\circ$ ,  $\angle TOM = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ , т. е.  $\triangle MOT$  — прямоугольный.

Так как  $OE = r$ , то  $OE \perp MT$ . Значит,  $OE$  — высота прямоугольного  $\triangle MOT$ .

По свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, имеем  $OE^2 = mn$ , или  $r^2 = ME \cdot TE$ , ч. т. д.

б) По условию  $EF = 8$ , тогда  $CE = CF = 4$ . Из  $\triangle OEC$   $OC = \sqrt{r^2 - 16}$ , тогда  $AC = AO - OC = r - \sqrt{r^2 - 16}$ ,  $BC = BO + OC = r + \sqrt{r^2 - 16}$ .

Значит,  $ME : ET = AC : BC$ , или  $m : n = (r - \sqrt{r^2 - 16}) : (r + \sqrt{r^2 - 16})$ .

По условию  $S_{TMNK} = 125$ , или  $\frac{1}{2}(MN + TK) \cdot AB = 125$ .

По свойству описанного четырехугольника  $MN + TK = 2MT = 2(m + n)$ .

Значит,  $\frac{1}{2} \cdot 2MT \cdot AB = 125$ , или  $(m + n) \cdot 2r = 125$ .

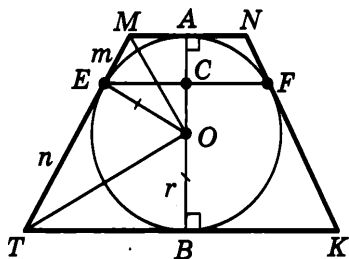
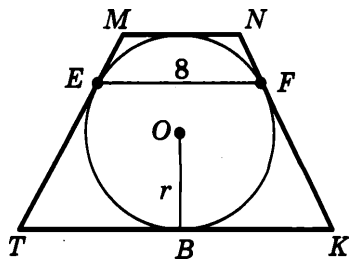
Получим систему уравнений

$$\begin{cases} m : n = (r - \sqrt{r^2 - 16}) : (r + \sqrt{r^2 - 16}), \\ mn = r^2, \\ 2(m + n)r = 125. \end{cases}$$

Пусть для краткости  $r - \sqrt{r^2 - 16} = \alpha$ ,  $r + \sqrt{r^2 - 16} = \beta$ , тогда  $m = \frac{\alpha}{\beta}n$  и

II уравнение системы примет вид  $\frac{\alpha}{\beta} \cdot n^2 = r^2$ , следовательно, III уравне-

ние преобразуется к виду  $2\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot n + n\right) \cdot r = 125$ , или  $2nr\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) = 125$ .





Но  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = r$ ,  $n = \frac{r}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}$ , значит,  $2r^2 \left( \frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) = 125 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ .

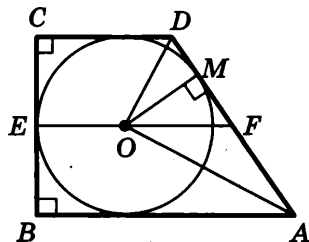
Так как  $\frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{r - \sqrt{r^2 - 16}}{r + \sqrt{r^2 - 16}} + 1 = \frac{2r}{r + \sqrt{r^2 - 16}}$ ,  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} = \frac{4}{r + \sqrt{r^2 - 16}}$ .

Следовательно,  $2r^2 \cdot \frac{2r}{r + \sqrt{r^2 - 16}} = 125 \cdot \frac{4}{r + \sqrt{r^2 - 16}}$ ,

или  $r^3 = 125$ , откуда  $r = 5$ , тогда  $S_{кр.} = \pi r^2 = 25\pi$ .

Ответ: б)  $25\pi$ .

**Пример 24.** В прямоугольную трапецию  $ABCD$  вписана окружность, центр  $O$  которой удален от концов боковой стороны на расстояния  $OD = 9$  и  $OA = 12$ .



а) Докажите, что  $\triangle AOD$  — прямоугольный.

б) Найдите периметр трапеции.

*Решение.*

а) Так как  $ABCD$  — трапеция, то  $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$  (сумма односторонних углов при параллельных прямых  $AB$  и  $CD$  и секущей  $AD$ ).

По условию в прямоугольную трапецию вписана окружность, тогда  $AO$  и  $DO$  — биссектрисы соответственно углов  $BAD$  и  $ADC$ . Значит,

$$\angle OAF = \frac{1}{2} \angle BAD \text{ и } \angle ODA = \frac{1}{2} \angle ADC, \text{ тогда } \angle OAF + \angle ODA = 90^\circ,$$

т. е.  $\triangle AOD$  — прямоугольный, ч. т. д.

б) По свойству описанного четырехугольника  $AB + CD = BC + AD$ .

Так как  $O$  — центр окружности, то  $EF$  — средняя линия трапеции, тогда  $AB + CD = 2EF$ .

Периметр трапеции будет равен  $P = (AB + CD) + (BC + AD) = 2EF + 2EF = 4EF$ , где  $EF = EO + OF$ ,  $EO = OM$  — радиус вписанной окружности. Так как  $OD = 9$  и  $OA = 12$  (по условию), то из  $\triangle AOD$  по теореме Пифагора  $AD = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15$ . Но точка  $F$  — середина  $AD$ , тогда  $OF$  — медиана  $\triangle AOD$ , а точка  $F$  — центр окружности, описанной около

прямоугольного  $\triangle AOD$ , т. е.  $OF = \frac{1}{2} AD = \frac{15}{2}$ .

Заметим, что  $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} AD \cdot OM = \frac{1}{2} AO \cdot DO$ , откуда  $OM = \frac{AO \cdot OD}{AD} = \frac{36}{5}$ .

$$\begin{aligned} \text{Значит, } P &= 4EF = 4 \cdot (EO + OF) = 4(OM + OF) = 4\left(\frac{36}{5} + \frac{15}{2}\right) = \\ &= 4(7,2 + 7,5) = 4 \cdot 14,7 = 58,8. \end{aligned}$$

Ответ: б) 58,8.

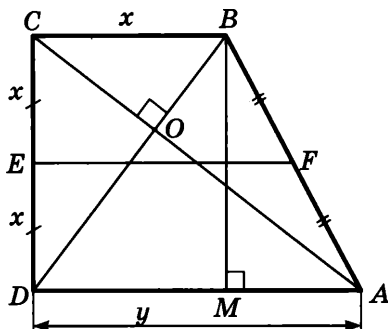
**Пример 25.** В прямоугольной трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ )  $EF$  — средняя линия,  $BC : CD = 1 : 2$ ,  $AC \perp BD$ .

а) Докажите, что  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ .

б) Найдите  $BC$ , если  $EF = 20$ .

Решение.

а) Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ .



$$\begin{aligned} \text{По условию } AC \perp BD, \text{ тогда } S_{ABCD} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2} AC \cdot BO + \\ &+ \frac{1}{2} AC \cdot DO = \frac{1}{2} AC \cdot (BO + DO) = \frac{1}{2} AC \cdot BD, \text{ ч. т. д.} \end{aligned}$$

б) Пусть в трапеции  $ABCD$   $BC = x$ ,  $CD = 2x$ ,  $AD = y$ , тогда  $EF = \frac{1}{2}(x + y) = 20$ , или  $x + y = 40$ .

$$\text{Из } \triangle ADC \text{ } AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4x^2 + y^2}.$$

Проведем высоту  $BM$ , тогда из  $\triangle DMB$  имеем  $BD = \sqrt{BM^2 + DM^2}$ , где  $BM = CD = 2x$ ,  $DM = BC = x$ .

$$\text{Значит, } BD = \sqrt{4x^2 + x^2} = \sqrt{5}x.$$

$$\text{Так как } S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \text{ (по доказанному), то } S_{ABCD} = \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + y^2} \cdot \sqrt{5}x.$$

$$\text{С другой стороны, } S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AD + BC) \cdot BM = \frac{1}{2} (x + y) \cdot 2x.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + y^2} \cdot \sqrt{5}x = \frac{1}{2} (x + y) \cdot 2x, \text{ или } \sqrt{5(4x^2 + y^2)} = 2(x + y),$$

$$x \neq 0. \text{ Но } x + y = 40, \text{ тогда получим } \sqrt{5(4x^2 + y^2)} = 80, \text{ или } 4x^2 + y^2 = 1280.$$

$$\text{Получим систему уравнений } \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1280, \\ x + y = 40; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1280, \\ y = 40 - x. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 4x^2 + (40 - x)^2 &= 1280, \text{ или } 4x^2 + 1600 - 80x + x^2 - 1280 = 0, \text{ или } \\ 5x^2 - 80x + 320 &= 0, \text{ или } x^2 - 16x + 64 = 0, \text{ или } (x - 8)^2 = 0, \text{ откуда } x = 8. \end{aligned}$$

Значит,  $BC = x = 8$ .

Ответ: б) 8.

**Пример 26.** Трапеция  $MEQT$  ( $MT \parallel EQ$ ) вписана в окружность радиуса  $OQ = 8$ ,  $MQ$  — биссектриса  $\angle EMT$ ,  $\angle MQE = 30^\circ$ .

а) Докажите, что  $\triangle MEQ$  — равнобедренный.

б) Найдите  $S_{MEQT}$ .

*Решение.*

а) По условию задачи  $MQ$  — биссектриса  $\angle EMT$ , значит,  $\angle EMQ = \angle QMT$ . Но  $\angle QMT = \angle MQE$  — как накрест лежащие при параллельных прямых  $MT$  и  $EQ$  и секущей  $MQ$ . Выходит, что  $\angle EMQ = \angle MQE = \angle QMT = 30^\circ$ , т. е.  $\triangle MEQ$  — равнобедренный, ч. т. д.

б) Проведем высоты  $EF$  и  $QK$  трапеции, где  $EM = QT$ . Пусть  $EQ = 2x$ ,  $MT = 2y$ ,  $ME = EQ = 2x$ .

Из  $\triangle MEF$   $MF = \frac{1}{2}ME = x$  ( $\angle MEF = 30^\circ$ ),

$EF = \sqrt{ME^2 - MF^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$ ; из  $\triangle MQK$   $MQ = 2 \cdot QK = 2 \cdot EF = 2x\sqrt{3}$  ( $\angle QMK = 30^\circ$ ).

$$S_{\triangle MQT} = \frac{1}{2}MT \cdot QK = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot x\sqrt{3} = \sqrt{3}xy.$$

С другой стороны,  $S_{\triangle MQT} = \frac{abc}{4R}$ , где  $a = MQ$ ,  $b = QT$ ,  $c = MT$ ,  $R = OQ = 8$

(по условию), тогда 
$$S_{\triangle MQT} = \frac{2x\sqrt{3} \cdot 2x \cdot 2y}{4 \cdot 8} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2y.$$

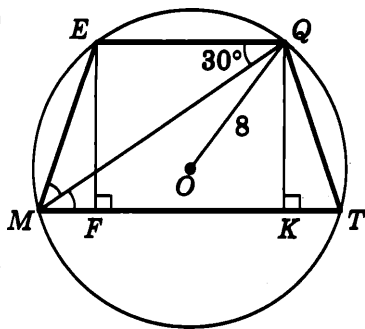
Значит,  $\sqrt{3}xy = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2y$ ,  $xy \neq 0$ , откуда  $x = 4$ .

Следовательно,  $S_{MTQE} = \frac{1}{2}(MT + QE) \cdot EF = (x + y) \cdot x\sqrt{3}$ .

Но  $MT = 2MF + FK = 2MF + EQ = 2x + 2x = 4x$ , или  $2y = 4x$ ,  $y = 2x$ .

Но  $x = 4$ , тогда  $y = 8$ .  $S_{MTQE} = (4 + 8) \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ .

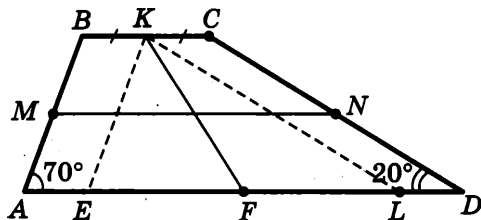
Ответ: б)  $48\sqrt{3}$ .



**Пример 27.** В трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ )  $\angle A = 70^\circ$ ,  $\angle D = 20^\circ$ ,  $MN = 4$  — средняя линия трапеции,  $KF = 2$ , где  $K$  и  $F$  — соответственно середины  $BC$  и  $AD$ .

а) Докажите, что  $KF = \frac{1}{2}(AD - BC)$ .

б) Найдите длины оснований  $AD$  и  $BC$ .



*Решение.*

а) Пусть  $AD = 2x$ ,  $BC = 2y$ . Проведем  $KE \parallel AB$  и  $KL \parallel CD$ . Заметим, что  $\angle KEF = \angle A = 70^\circ$  и  $\angle KLF = \angle D = 20^\circ$  (как соответственные углы), тогда  $\angle EKL = 90^\circ$ , т. е.  $\triangle EKL$  — прямоугольный и  $KF$  — медиана  $\triangle EKL$ , значит,  $FE = FL = KF = \frac{1}{2}(AD - BC)$ , ч. т. д.

б) Следовательно,  $\frac{1}{2}(2x - 2y) = 2$ , или  $x - y = 2$ .

Кроме того,  $MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 4$ , или  $x + y = 4$ .

Решая систему уравнений  $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2 \end{cases}$  способом сложения, находим

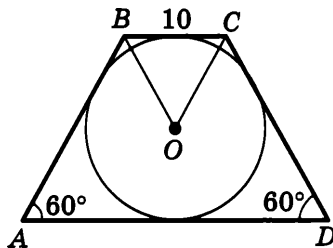
$2x = AD = 6$ ,  $2y = BC = 2$ .

Ответ: б)  $AD = 6$ ,  $BC = 2$ .

**Пример 28.** Меньшее основание равнобедренной трапеции  $ABCD$  равно 10, а острый угол равен  $60^\circ$ .

а) Докажите, что  $\triangle BOC$  — равносторонний.

б) Найдите длину отрезка, соединяющего центр вписанной окружности с вершиной меньшего основания.



*Решение.*

а) Так как  $ABCD$  — трапеция, то  $AD \parallel BC$ , тогда  $\angle A + \angle B = 180^\circ$  и  $\angle D + \angle C = 180^\circ$ , откуда  $\angle B = \angle C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ . По условию задачи окружность вписана в трапецию, тогда  $BO$  и  $CO$  — биссектрисы углов  $ABC$  и  $BCD$ .

Значит,  $\angle OBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 60^\circ$  и  $\angle BCO = 60^\circ$ . Выходит, что  $\angle BOC = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$ , т. е.  $\triangle BOC$  — равносторонний.

б) Поскольку  $\triangle BOC$  — равносторонний, то  $BO = OC = BC = 10$ .

Ответ: б) 10.

## § 18. Задание 18. Задачи с параметром

Это задание высокого уровня сложности, рассчитанное на применение не одного метода решения, а на комбинацию различных методов. Для успешного выполнения этого задания, помимо прочных математических знаний, необходим также высокий уровень математической культуры.

Здесь встречаются задачи нескольких типов:

- 1) функции, зависящие от параметра;
- 2) уравнения с параметрами;
- 3) неравенства с параметрами;
- 4) системы и неравенства с параметрами.

## 18.1. Рациональные уравнения и неравенства

**Пример 1.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых наибольшее значение функции  $f(x) = |x - a| - x^2$  не меньше 3.

*Решение.*

Для того чтобы наибольшее значение функции было не меньше 3, необходимо и достаточно, чтобы функция в какой-либо точке приняла значение, равное 3.

И действительно,  $f(a) = -a^2 < 3$ .

Если  $f(x) \geq 1$ , то в какой-либо точке значение будет равно 3. Если же  $f(x) < 1$ , то значение, равное 3, приниматься не может.

Перефразируя задачу, условие можно записать так: при каких значениях параметра  $a$  уравнение  $|x - a| = x^2 + 3$  имеет корни?

Заметим, что  $x^2 + 3 > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ . Следовательно, полученное уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x - a = x^2 + 3, \\ z - x = x^2 + 3, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 - x + (3 + a) = 0, \\ x^2 + x + (3 - a) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнение (1) имеет решение, если  $D \geq 0$ , т. е.  $1 - 4(3 + a) \geq 0$ , или  $1 - 12 - 4a \geq 0$ , или  $-4a \geq 11$ , откуда  $a \leq -\frac{11}{4}$ .

Аналогично, решая уравнение (2), имеем

$$1 - 4(3 - a) \geq 0, 4a \geq 11, a \geq \frac{11}{4}.$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{11}{4}\right] \cup \left[\frac{11}{4}; +\infty\right).$$

**Пример 2.** При каком значении параметра  $a$  уравнение  $|x^2 - 4ax + 9| = |6a - x^2 - 4x - 3|$  имеет более двух корней?

*Решение.*

Если  $|m| = |n|$ , то  $m^2 = n^2$ . Следовательно, данное уравнение можно записать в виде  $(x^2 - 4ax + 9)^2 = (6a - x^2 - 4x - 3)^2$ .

Применив формулу разности квадратов, получим

$$(x^2 - 4ax + 9 - 6a + x^2 + 4x + 3)(x^2 - 4ax + 9 + 6a - x^2 - 4x - 3) = 0, \text{ или} \\ (2x^2 + 4(1 - a)x + 12 - 6a)(-4(a + 1)x + 6(a + 1)) = 0, \text{ или}$$

$$(x^2 + 2(1-a)x + 6 - 3a)(-2(a+1)x + 3(a+1)) = 0, \text{ или}$$

$$(x^2 + 2(1-a)x + 6 - 3a)(a+1)(2x-3) = 0.$$

Полученное уравнение имеет более двух корней, если  $a = -1$  или если уравнение  $x^2 + 2(1-a)x + 6 - 3a = 0$  имеет два различных корня, отличных от  $\frac{3}{2}$ :

$$\begin{cases} (1-a)^2 - 6 + 3a > 0, & \begin{cases} a^2 + a - 5 > 0, \\ \frac{9}{4} + 3 - 3a + 6 - 3a \neq 0; \end{cases} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2(1-a) \cdot \frac{3}{2} + 6 - 3a \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + a - 5 > 0, \\ a \neq \frac{15}{8}. \end{cases} \quad D = 21 > 0,$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}, \text{ откуда } a < \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} < a < \frac{15}{8} \text{ или } a > \frac{15}{8}.$$

Итак, исходное уравнение имеет более двух различных корней при  $a < \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$ , при  $a = -1$ , при  $\frac{-1 + \sqrt{21}}{2} < a < \frac{15}{8}$  и при  $a > \frac{15}{8}$ .

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}\right); -1; \left(\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; \frac{15}{8}\right); \left(\frac{15}{8}; +\infty\right).$$

**Пример 3.** В зависимости от значений параметра  $a$  решить уравнение  $x^5 - 5x^3 + 5x = a^5 + \frac{1}{a^5}$ .

*Решение.*

$$\text{Пусть } y + \frac{1}{y} = x, \text{ тогда } y^2 + \frac{1}{y^2} = x^2 - 2;$$

$$y^3 + \frac{1}{y^3} = \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(y + \frac{1}{y}\right) = (x^2 - 2)x - x = x^3 - 3x;$$

$$y^4 + \frac{1}{y^4} = \left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) = (x^3 - 3x)x - (x^2 - 2) = x^4 - 4x^2 + 2;$$

$$\begin{aligned} y^5 + \frac{1}{y^5} &= \left(y^4 + \frac{1}{y^4}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) = \\ &= (x^4 - 4x^2 + 2)x - (x^3 - 3x) = x^5 - 5x^3 + 5x. \end{aligned}$$

Учитывая левую часть исходного уравнения, имеем

$$y^5 + \frac{1}{y^5} = a^5 + \frac{1}{a^5}. \quad (1)$$

Теперь идея решения становится ясной. Возможны следующие случаи:

1) если  $a = -1$ , то  $y^5 + \frac{1}{y^5} = -2$ , откуда  $y = -1$ , тогда  $x = y + \frac{1}{y} = -2$ ;

2) если  $a = 0$ , то (1) не имеет корней;

3) если  $a = 1$ , то  $y^5 + \frac{1}{y^5} = 2$ , откуда  $y = 1$  и  $x = 2$ ;

4) если  $a \neq \pm 1$ ,  $a \neq 0$ , то  $y = a$ ,  $x = a + \frac{1}{a}$ .

Ответ: если  $a = -1$ , то  $x = -2$ ; если  $a = 0$ , то корней нет; если  $a = 1$ , то  $x = 2$ ; если  $a \neq \pm 1$ ,  $a \neq 0$ , то  $x = a + \frac{1}{a}$ .

**Пример 4.** При каких значениях параметра  $a$  корни уравнения  $x^3 + ax^2 + 56x - 64 = 0$  составляют геометрическую прогрессию?

*Решение.*

Пусть  $x_1 = m$ ,  $x_2 = mq$ ,  $x_3 = mq^2$  — корни данного уравнения, составляющие геометрическую прогрессию, где  $q$  — знаменатель прогрессии, тогда левую часть уравнения можно разложить на множители:

$$\begin{aligned}x^3 + ax^2 + 56x - 64 &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = \\&= (x - m)(x - mq)(x - mq^2).\end{aligned}$$

Раскрывая скобки в правой части полученного равенства и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получим

$$\begin{aligned}x^3 + ax^2 + 56x - 64 &= (x^2 - mx - mqx + m^2q)(x - mq^2) = \\&= x^3 - mx^2 - mqx^2 + m^2qx - mq^2x^2 + m^2q^2x + m^2q^3x - m^3q^3 = \\&= x^3 - (m + mq + mq^2)x^2 + (m^2q + m^2q^2 + m^2q^3)x - m^3q^3.\end{aligned}$$

Отсюда имеем систему

$$\begin{cases} m + mq + mq^2 = -a, \\ m^2q + m^2q^2 + m^2q^3 = 56, \\ m^3q^3 = 64, \end{cases} \quad \begin{cases} m(1 + q + q^2) = -a, \\ m^2q(1 + q + q^2) = 56, \\ mq = 4. \end{cases}$$

Разделив обе части II уравнения на I, имеем

$$mq = -\frac{56}{a}, \text{ и так как } mq = 4, \text{ то } -\frac{56}{a} = 4, \text{ откуда } a = -14.$$

Ответ:  $-14$ .

**Пример 5.** При каких значениях параметра  $a$  неравенство

$$\frac{x^2 + a^2}{a(x + 6)} \geq 1 \text{ выполняется для всех } x \in (-1; 1).$$

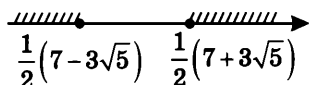
**Решение.**

Данное неравенство должно выполняться, в частности, при  $x = 0$ , тогда оно примет вид  $\frac{a^2}{6a} \geq 1$ , откуда  $a \geq 6$ .

Заметим, что если  $x \in (-1; 1)$ , то  $x + 6 > 0$ , и при указанных ограничениях исходное неравенство имеет вид  $x^2 - ax + a^2 - 6a \geq 0$ .

Абсцисса вершины параболы  $y = x^2 - ax + a^2 - 6a$  будет равна  $x_0 = \frac{a}{2} > 1$ , так как  $a \geq 6$ , и неравенство будет выполняться при всех  $x \in (-1; 1)$ , если оно выполняется при  $x = 1$ , т. е. имеем

$$1 - a + a^2 - 6a \geq 0, \text{ или } a^2 - 7a + 1 \geq 0, D = 49 - 4 = 45 > 0, a_{1,2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$


$$\frac{1}{2}(7-3\sqrt{5}) \quad \frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})$$

$$\text{Следовательно, } a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}(7-3\sqrt{5})\right] \cup \left[\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}); +\infty\right).$$

Учитывая условие  $a \geq 6$ , окончательно получим

$$a \in \left[\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}); +\infty\right).$$

$$\text{Ответ: } \left[\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5}); +\infty\right).$$

**Пример 6.** При каких значениях параметра неравенство  $x^2 + 5|x - a| \geq a^2$  справедливо для всех значений?

**Решение.**

Заметим, что при  $x - a \geq 0$ , т. е. при  $x \geq a$  данное неравенство равносильно неравенству  $x^2 + 5(x - a) \geq a^2$ , или  $(x^2 - a^2) + 5(x - a) \geq 0$ ,  $(x - a)(x + a + 5) \geq 0$ ,  $(x - a)(x - (-a - 5)) \geq 0$  справедливо для всех значений из рассматриваемого промежутка тогда и только тогда, когда  $a \geq -a - 5$ , т. е. когда  $a \geq -2,5$ .

Если  $x < a$ , то  $|x - a| = a - x$ , тогда имеем  $x^2 - 5(x - a) \geq a^2$ , или  $(x - a)(x - (5 - a)) \geq 0$ , которое справедливо при  $a \leq -a + 5$ , т. е. если  $a \leq 2,5$ .

Итак, исходное неравенство справедливо для всех значений при  $-2,5 \leq a \leq 2,5$ .

$$\text{Ответ: } [-2,5; 2,5].$$



**Пример 7.** Решите неравенство  $a \cdot \frac{x+1}{x-1} > 1$ .

*Решение.*

Запишем данное неравенство в виде

$$a \cdot \frac{x+1}{x-1} - a > 1 - a, \text{ или } a \cdot \left( \frac{x+1}{x-1} - 1 \right) > 1 - a,$$

$$a \cdot \left( \frac{x+1-x+1}{x-1} \right) > 1 - a, \quad \frac{2a}{x-1} > 1 - a.$$

Если  $a = 1$ , то  $\frac{2}{x-1} > 0$ ,  $x - 1 > 0$ , т. е.  $x > 1$ .

Если  $a < 0$ , то  $x - 1 < 0$ , т. е.  $x < 1$ .

В этом случае данное неравенство запишется в виде

$$2a < (1 - a)x - 1 + a, \text{ или } (1 - a)x > a + 1, \text{ откуда } x > \frac{1+a}{1-a}.$$

Следовательно, если  $a < 0$ , то  $\frac{1+a}{1-a} < x < 1$ .

Если  $0 < a < 1$ , то  $x > 1$ , и данное неравенство примет вид

$$2a > (1 - a)x - 1 + a, \text{ или } (1 - a)x < 1 + a, \text{ откуда } x < \frac{1+a}{1-a}.$$

Значит, если  $0 < a < 1$ , то  $1 < x < \frac{1+a}{1-a}$ .

Наконец, если  $a > 1$ , то при  $x > 1$  неравенство выполняется, а если  $x < 1$ , то неравенство примет вид  $2a < (1 - a)x - 1 + a$ , или

$$(1 - a)x > 1 + a, \text{ откуда } x < -\frac{a+1}{a-1}.$$

Итак, если  $a > 1$ , то  $x > 1$ , или  $x < -\frac{a+1}{a-1}$ .

*Ответ:* 1) Если  $a = 1$ , то  $x > 1$ ;

2) если  $a > 1$ , то  $x < -\frac{a+1}{a-1}$ , или  $x > 1$ ;

3) если  $0 < a < 1$ , то  $1 < x < \frac{1+a}{1-a}$ ;

4) если  $a < 0$ , то  $\frac{1+a}{1-a} < x < 1$ .

**Пример 8.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$(x^2 - 4|x| + a)^2 + 2(x^2 - 4|x| + a) + 2 = \cos \frac{6\pi}{a}$$

имеет ровно два корня.

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$(x^2 - 4|x| + a)^2 + 2 \cdot (x^2 - 4|x| + a) + 1 + 1 - \cos \frac{6\pi}{a} = 0, \text{ или}$$

$$(x^2 - 4|x| + a + 1)^2 + \left(1 - \cos \frac{6\pi}{a}\right) = 0.$$

Заметим, что  $(x^2 - 4|x| + a + 1)^2 \geq 0$ ,  $1 - \cos \frac{6\pi}{a} \geq 0$ .

Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 4|x| + a + 1 = 0, & (1) \\ 1 - \cos \frac{6\pi}{a} = 0. & (2) \end{cases}$$

Уравнение (1) представим в виде

$$|x|^2 - 4|x| + 4 = 3 - a, \text{ или } (|x| - 2)^2 = 3 - a, \text{ откуда находим } |x| = 2 \pm \sqrt{3 - a}.$$

Из (2) имеем  $\cos \frac{6\pi}{a} = 1$ ,  $\frac{6\pi}{a} = 2\pi n$ , т. е.  $a = \frac{3}{n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Итак, имеем } \begin{cases} a \leq 3, \\ |x| = 2 \pm \sqrt{3 - a}, \\ a = \frac{3}{n}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Уравнение  $|x| = 2 \pm \sqrt{3 - a}$  имеет ровно два корня, если  $\sqrt{3 - a} = 0$ , или  $2 - \sqrt{3 - a} < 0$ , т. е. при  $a = 3$ , или  $a < -1$ . Значит,  $a \in (-\infty; -1) \cup \{3\}$ .

Так как  $a = \frac{3}{n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , то  $a = \pm 3; \pm \frac{3}{2}; \pm 1, \dots$

Тогда  $a = \pm 3$ ,  $a = -\frac{3}{2}$ .

Ответ:  $\pm 3; -\frac{3}{2}$ .

**Пример 9.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых три различных корня уравнения  $x^3 + (a^2 - 10a)x^2 + 18ax - 216 = 0$  образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

*Решение.*

Пусть  $q$  — знаменатель прогрессии, тогда  $x_2 = x_1 \cdot q$ ,  $x_3 = x_1 \cdot q^2$ .

По теореме Виета  $x_1 x_2 x_3 = 216$ , или  $(x_1 q)^3 = 216$ , откуда  $x_1 q = 6$ , т. е.  $x_2 = 6$ .

Запишем теорему Виета для  $x_1 = \frac{x_2}{q} = \frac{6}{q}$ ,  $x_2 = 6$ ,  $x_3 = x_2 q = 6q$ .

$$\text{Имеем } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -(a^2 - 10a), \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 18a, \\ x_1x_2x_3 = 216; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{q} + 6 + 6q = 10a - a^2, \\ \frac{6}{q} \cdot 6 + \frac{6}{q} \cdot 6q + 6 \cdot 6q = 18a, \\ x_2 = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} 6\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 10a - a^2, \\ 36\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 18a, \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

Поскольку  $a \neq 0$ , ибо в противном случае уравнение  $\frac{1}{q} + 1 + q = 0$  не имеет корней, следовательно, этот случай противоречит условию существования трех различных корней (согласно условию задачи).

Разделив первое уравнение полученной системы на второе, имеем  $\frac{1}{6} = \frac{10-a}{18}$ , откуда находим  $a = 7$ , тогда из второго уравнения последней системы получим

$$36\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 18 \cdot 7, \text{ или } q^2 - \frac{5}{2}q + 1 = 0, \quad \begin{cases} q = 2, \\ q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Пусть  $q = 2$ , тогда  $x_1 = \frac{6}{q} = 3$ ,  $x_2 = 6$ ,  $x_3 = 6 \cdot 2 = 12$ . В обоих случаях получаем тройку чисел 3; 6; 12.

Поскольку  $x_2 = 6$ , уравнение можно решить проще: подставим в исходное уравнение  $x = 6$ .

$$6^3 + 36(a^2 - 10a) + 18 \cdot 6a - 216 = 0, \text{ или}$$

$$6 + a^2 - 10a + 3a - 6 = 0, \text{ или}$$

$$a^2 - 7a = 0, a \neq 0, a = 7.$$

Если  $a = 7$ , то получим уравнение

$$x^3 - 21x^2 + 126x - 216 = 0,$$

$(x - 3)(x^2 - 18x + 72) = 0$ ,  $(x - 3)(x - 6)(x - 12) = 0$ , откуда  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 6$ ,  $x_3 = 12$ .

Ответ:  $a = 7$ ,  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 6$ ,  $x_3 = 12$ .

**Пример 10.** Найдите все значения параметра  $a$ , для которых ровно при одном  $x$  из промежутка  $[1; 5)$  значение выражения  $x^4 - x^2 + 5$  равно значению выражения  $a(x^2 - 4)$ .

*Решение.*

Согласно условию задачи имеем

$$x^4 - x^2 + 5 = a(x^2 - 4), \text{ или}$$

$$x^4 - (a+1)x^2 + (5+4a) = 0. \quad (1)$$

Пусть  $x^2 = t$ . Так как  $x \in [1; 5)$ , то  $t \in [1; 25)$ . Учитывая замену, равенство (1) примет вид

$$t^2 - (a+1)t + (5+4a) = 0. \quad (2)$$

С учетом (2) условие задачи можно перефразировать так: найти все значения параметра  $a$ , при которых квадратный трехчлен  $f(t) = t^2 - (a+1)t + (5+4a)$  имеет ровно один корень на промежутке  $[1; 25)$ . Это возможно в следующих случаях:

1)  $D = 0$ ;  $1 \leq x_0 < 25$ , где  $x_0$  — абсцисса вершины параболы  $f(t)$ ;

2)  $f(1) \cdot f(25) < 0$ ;

3)  $f(1) = 0$ ,  $\begin{cases} t_1 \cdot t_2 = 5+4a \geq 25, \\ t_1 \cdot t_2 = 5+4a < 1. \end{cases}$

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

$$1. \begin{cases} (a+1)^2 - 4(5+4a) = 0, \\ 1 \leq \frac{a+1}{2} < 25; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - 14a - 19 = 0, \\ 1 \leq a < 49. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение системы, находим

$$a_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49+19} = 7 \pm 2\sqrt{17}, \quad 1 < 7+2\sqrt{17} < 49;$$

$7-2\sqrt{17} < 1 \Rightarrow 7+2\sqrt{17}$  — удовлетворяет условию задачи.

2.  $(1 - (a+1) \cdot 1 + (5+4a))(25 - 5(a+1) + (5+4a)) < 0$ , или  
 $(3a+5)(a-20) > 0$ .

Решая полученное неравенство методом интервалов, имеем совокуп-

ность неравенств  $\begin{cases} a < -\frac{5}{3}, \\ a > 20. \end{cases}$

$$3. \begin{cases} 1 - (a+1) \cdot 1 + (5+4a) = 0, \\ \begin{cases} 5+4a \geq 25, \\ 5+4a < 1; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} 3a = -5, \\ \begin{cases} a \geq 5, \\ a < -1; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{5}{3}, \\ \begin{cases} a \geq 5, \\ a < -1. \end{cases} \end{cases}$$

откуда  $a = -\frac{5}{3}$  удовлетворяет условию задачи.

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right] \cup \{7+2\sqrt{17}\} \cup (20; +\infty).$$

**Пример 11.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $\left|\frac{6}{x} - 5\right| = ax - 3$  на промежутке  $(0; +\infty)$  имеет более двух корней.

*Решение.*

Рассмотрим функции  $f_1(x) = ax - 3$  и  $f_2(x) = \left| \frac{6}{x} - 5 \right|$ . Исследуем уравнение  $f_1(x) = f_2(x)$  на промежутке  $(0; +\infty)$ .

Заметим, что при  $a \leq 0$  на промежутке  $(0; +\infty)$  все значения функции  $f_1(x) < 0$ , а  $f_2(x) \geq 0$ , следовательно, при  $a \leq 0$  уравнение  $f_1(x) = f_2(x)$  не имеет решений на промежутке  $(0; +\infty)$ .

При  $a > 0$  функция  $f_1(x)$  возрастает, а функция  $f_2(x)$  убывает на промежутке  $\left(0; \frac{6}{5}\right]$ , значит, уравнение  $f_1(x) = f_2(x)$  имеет не более одного корня на  $\left(0; \frac{6}{5}\right]$ , причем решение будет в том случае, если  $f_1\left(\frac{6}{5}\right) \geq f_2\left(\frac{6}{5}\right)$ , т. е. имеем  $a \cdot \frac{6}{5} - 3 \geq 0$ , откуда  $a \geq \frac{5}{2}$ .

Далее на промежутке  $\left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$  уравнение  $f_1(x) = f_2(x)$  запишется в виде  $ax - 3 = 5 - \frac{6}{x}$ , откуда получим квадратное уравнение  $ax^2 - 8x + 6 = 0$ .

Учитывая, что случай  $a \leq 0$  был рассмотрен выше, будем считать, что  $a > 0$ .

Так как  $D/4 = 16 - 6a$ , то при  $D/4 < 0$ , т. е.  $a > \frac{8}{3}$  уравнение не имеет корней; при  $D/4 = 0$ , т. е.  $a = \frac{8}{3}$  уравнение имеет 1 корень  $x = \frac{4}{a} = \frac{3}{2}$ ; при  $0 < a < \frac{8}{3}$  — 2 корня:  $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{D/4}}{a}$ , причем больший корень  $x_2 = \frac{4 + \sqrt{D/4}}{a} > \frac{4}{a} > \frac{3}{2} > \frac{6}{5}$ , значит,  $x_2 \in \left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$ , а меньший корень  $x_1 \in \left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$  в том случае, если

$$a\left(x_1 - \frac{6}{5}\right)\left(x_2 - \frac{6}{5}\right) = a\left(\frac{6}{5}\right)^2 - 8 \cdot \frac{6}{5} + 6 = \frac{36a - 90}{25} > 0,$$

т. е.  $a > \frac{5}{2}$ . Итак, исходное уравнение имеет 1 корень при  $0 < a < \frac{5}{2}$  и  $a > \frac{8}{3}$ ; 2 корня при  $a = \frac{5}{2}$  и  $a = \frac{8}{3}$ ; 3 корня при  $\frac{5}{2} < a < \frac{8}{3}$ ; нет корней при  $a \leq 0$ .

*Ответ:*  $\frac{5}{2} < a < \frac{8}{3}$ .

**Пример 12.** При каком значении параметра  $a$  уравнение  $(a + 2 - |x + 1|)(a + x^2 + 2x) = 0$  имеет: 1) 3 корня; 2) 2 корня?

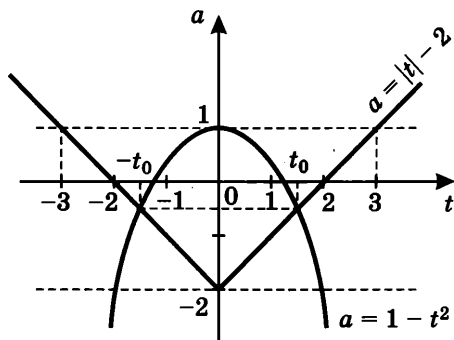
*Решение.*

Пусть  $x + 1 = t$ , тогда  $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1 = t^2 - 1$ , и данное уравнение запишется в виде

$$(a + 2 - |t|)(a - 1 + t^2) = 0. \quad (1)$$

Построим графики функции

$$a = 1 - t^2 \text{ и } a = |t| - 2.$$



1. Прямые  $a = 1$  и  $a = -2$  имеют ровно 3 общие точки с графиком уравнения (1), т. е. при  $a = 1$  и  $a = -2$  уравнение (1) имеет 3 корня.

2. Если  $a > 1$  и  $a < -2$ , то уравнение (1) имеет ровно 2 корня.

Кроме того, уравнение (1) имеет 2 корня в случае, если графики функций  $a = 1 - t^2$  и  $a = |t| - 2$  имеют общие точки, т. е. если  $1 - t^2 = |t| - 2$ , где  $t_0 > 0$ , или  $1 - z^2 = z - 2$  ( $z = |t_0|$ ).

Значит,  $z^2 + z - 3 = 0$ ,  $D = 13 > 0$ , откуда

$$z_0 = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}, \quad a_0 = z_0 - 2 = \frac{\sqrt{13} - 5}{2}.$$

**Ответ:** 3 корня при  $a = 1$  и  $a = -2$ ; 2 корня при

$$a < -2; a > 1; a = \frac{\sqrt{13} - 5}{2}.$$

**Пример 13.** Найдите все значения параметра  $a$ , для которых неравенство  $\frac{ax^2 + 6x - 9a - 9}{x - 4} > 0$  выполняется при всех  $x < -2$ .

*Решение.*

Поскольку  $x < -2$ , то  $x - 4 < 0$ . Следовательно, данное неравенство равносильно неравенству

$$ax^2 + 6x - 9a - 9 < 0. \quad (1)$$

Пусть  $f(x) = ax^2 + 6x - 9a - 9$ .

Возможны три случая:

1.  $a > 0$ . В этом случае ветви параболы направлены вверх, значит, ни на каком бесконечном промежутке не может выполняться условие  $f(x) < 0$ .

2.  $a = 0$ , тогда  $6x - 9 < 0$  верно при всех  $x < -2$ , значит,  $a = 0$  удовлетворяет условию задачи.

3.  $a < 0$ . В этом случае неравенство (1) выполняется при всех  $x < -2$ , если

$$\begin{cases} D < 0, \\ f(-2) \leq 0, \\ x_0 \geq -2, \end{cases}$$

где  $x_0$  — абсцисса вершины параболы  $f(x)$ .

Заметим, что  $D/4 = 9 + 4a(9a + 9) = 36a^2 + 36a + 9 = (6a + 3)^2 \geq 0$ , тогда имеем равносильную систему неравенств

$$\begin{cases} f(-2) \leq 0, \\ x_0 \geq -2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4a - 12 - 9a - 9 \leq 0, \\ x_0 = \frac{-6}{2a} \geq -2; \end{cases} \begin{cases} 5a + 21 \geq 0, \\ \frac{2a - 3}{a} \geq 0. \end{cases}$$

Учитывая, что  $a < 0$ , получим  $\begin{cases} 5a \geq -21, \\ 2a - 3 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} a \geq -4,2, \\ a \leq 1,5; \end{cases}$  откуда

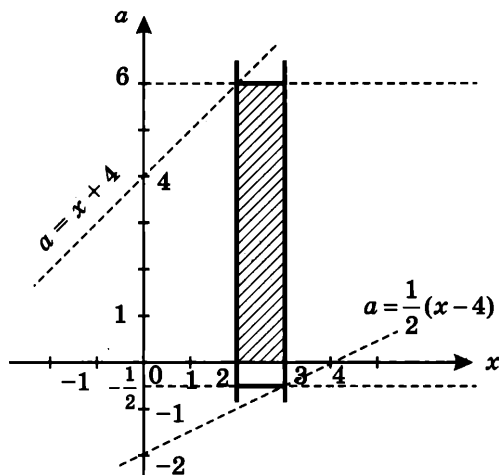
$$-4,2 \leq a \leq 1,5.$$

Так как  $a < 0$  и  $a = 0$  удовлетворяют условию задачи, окончательно получим  $-4,2 \leq a \leq 0$ .

Ответ:  $[-4,2; 0]$ .

**Пример 14.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство  $\frac{x - 2a - 4}{x - a + 4} < 0$  выполняется для всех  $x \in [2; 3]$ .

Решение.



На плоскости  $xOa$  изобразим множество пар  $(x, y)$ , для которых выполняется данное неравенство. Искомые значения  $a_0$  характеризуются тем, что отрезок прямой  $a = a_0$  при  $x \in [2; 3]$  полностью принадлежит заштрихованной области, что достигается при

$$a \in \left(-\frac{1}{2}; 6\right).$$

Ответ:  $\left(-\frac{1}{2}; 6\right).$

## 18.2. Рациональные системы уравнений

**Пример 15.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3a, \\ 2xy = 3a - 1 \end{cases}$$

имеет два решения.

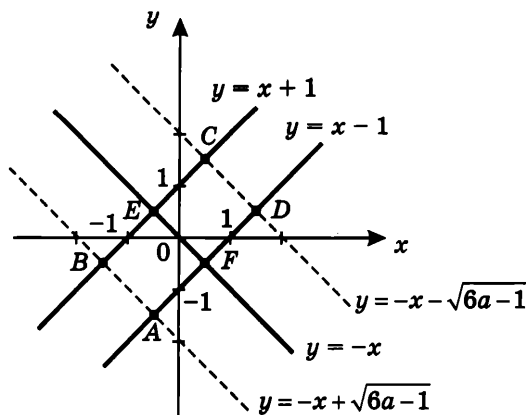
*Решение.*

Складывая и вычитая левые и правые части системы, имеем

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 6a-1, \\ (x-y)^2 = 1. \end{cases} \quad (1)$$

При  $a < \frac{1}{6}$  уравнение (1), а значит, и исходная система не имеет решений.

При  $a \geq \frac{1}{6}$  получим  $x+y = \pm\sqrt{6a-1}$ , откуда  $\begin{cases} y = -x + \sqrt{6a-1}, \\ y = -x - \sqrt{6a-1}. \end{cases}$





Как видно из рисунка, при  $a > \frac{1}{6}$  система имеет четыре решения (координаты точек  $A, B, C$  и  $D$ ), а при  $a = \frac{1}{6}$  — два решения (координаты точек  $E$  и  $F$ ).

Ответ:  $a = \frac{1}{6}$ .

**Пример 16.** При каждом значении параметра  $a$  решите систему уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(2x - 3y) + 13 = 0, \\ a^2 - 3ax - 2ay - 9 = 0. \end{cases}$$

*Решение.*

Запишем первое уравнение в виде

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 0, \text{ или}$$

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$ , откуда  $x = -2, y = 3$ , ибо при остальных значениях  $x$  и  $y$  левая часть положительна.

При  $x = -2, y = 3$  второе уравнение системы примет вид

$$a^2 + 6a - 6a - 9 = 0, a^2 = 9, a = \pm 3.$$

Следовательно, исходная система имеет решение  $x = -2, y = 3$  при  $a = \pm 3$ .

При остальных значениях  $a$  решений нет.

Ответ: при  $a = \pm 3$   $x = -2, y = 3$ , при остальных  $a$  решений нет.

**Пример 17.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система 
$$\begin{cases} y^2 + xy - 3x - 7y + 12 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

*Решение.*

Запишем первое уравнение системы в виде

$$xy - 3x + y^2 - 3y - 4y + 12 = 0, \text{ или}$$

$$x(y - 3) + y(y - 3) - 4(y - 3) = 0, \text{ или}$$

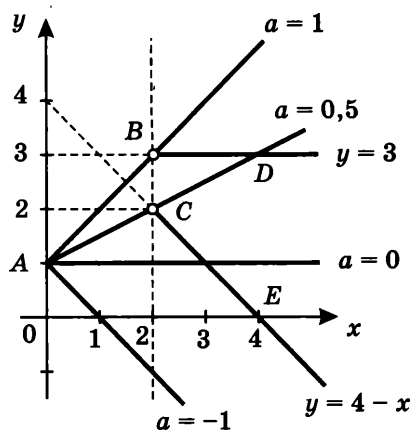
$$(y - 3)(x + y - 4) = 0. \quad (1)$$

Заметим, что уравнение (1) задает пару пересекающихся прямых  $y = 4$  и  $y = 4 - x$ , а система

$$\begin{cases} (y - 3)(x + y - 4) = 0, \\ x > 2 \end{cases}$$

задает части этих прямых, расположенных правее прямой  $x = 2$ , т. е. лучи  $BD$  и  $CE$  (исключая сами точки  $B$  и  $C$ ), см. рис.

Уравнение  $y = ax + 1$  задает прямую  $p$  с угловым коэффициентом  $a$ , проходящую через точку  $A(0; 1)$ . Необходимо найти те значения параметра  $a$ , при каждом из которых прямая  $p$  имеет одну общую точку с объединением лучей  $BD$  и  $CE$ .



а) Прямая  $AB$  задается уравнением  $y = x + 1$ , поэтому при  $a > 1$  прямая  $p$  не пересечет лучи  $BD$  и  $CE$ .

б) Прямая  $AC$  задается уравнением  $y = 0,5x + 1$ , поэтому при  $0,5 \leq a \leq 1$  прямая  $p$  пересечет луч  $BD$ , но не пересечет луч  $CE$ .

в) При  $0 < a < 0,5$  прямая  $p$  пересечет оба луча.

г) Наконец, при  $-1 < a \leq 0$  прямая  $p$  пересечет только луч  $CE$ , а при  $a \leq -1$  она не пересечет ни луч  $BD$ , ни луч  $CE$ .

Ответ:  $-1 < a \leq 0; 0,5 \leq a \leq 1$ .

**Пример 18.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 - 4x + |y| - 5 = 0, \\ x^2 + (y - a)(y + a) = 4(x - 1) \end{cases}$$

имеет ровно шесть решений.

*Решение.*

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 + |y| = 9, \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 = a^2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x - 2)^2 + |y| = 9, \\ (x - 2)^2 + y^2 = a^2. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнение (1) задает части двух парабол:

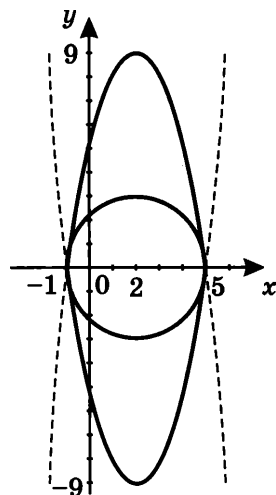
$$y = \begin{cases} 9 - (x - 2)^2, & y \geq 0, \\ (x - 2)^2 - 9, & y < 0 \end{cases} \quad (\text{см. рис.}).$$

Уравнение (2) задает окружность радиуса  $|a|$  с центром  $(2; 0)$ .

Из рисунка видно, что исходная система имеет 6 решений, если окружность проходит через точки  $(-1; 0)$  и  $(5; 0)$ , пересекая параболу еще в четырех точках.

При этом радиус окружности равен 3, тогда  $a^2 = 9$ , откуда  $a = -3$  или  $a = 3$ .

Ответ:  $a = \pm 3$ .



## 18.3. Иррациональные уравнения и неравенства

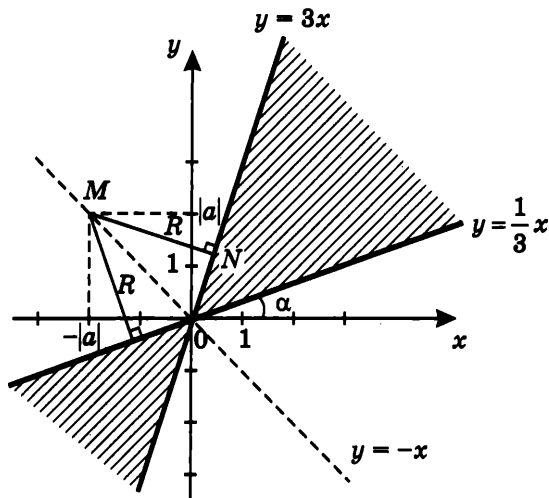
**Пример 19.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} (y-3x)(3y-x) \leq 0, \\ \sqrt{(x+a)^2 + (y-a)^2} = \frac{|a+2|}{\sqrt{10}} \end{cases} \text{ имеет ровно два решения.}$$

*Решение.*

Первое неравенство системы задает пару вертикальных углов на координатной плоскости  $xOy$  (см. рис.).

Графиком уравнения системы является окружность радиуса  $R = \frac{|a+2|}{\sqrt{10}}$ , центр которой — точка  $M(-a; a)$  — лежит на прямой  $y = -x$  (биссектриса II и IV координатных углов).



Заметим, что оба графика симметричны относительно прямой  $y = -x$ , тогда исходная система будет иметь ровно два решения, если расстояние  $MN$  от центра окружности до прямой  $y = 3x$  будет равно радиусу  $R = \frac{|a+2|}{\sqrt{10}}$  данной окружности.

Из  $\triangle MON$  имеем  $MN = MO \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ , где  $\operatorname{tg} \alpha$  — угловой коэффициент прямой  $y = \frac{1}{3}x$ .

$$\text{Значит, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, \text{ тогда } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } MN &= MO \left( \sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha \right) = \\ &= |a| \sqrt{2} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha \right) = |a| \cdot \left( \frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = |a| \cdot \frac{4}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

Поскольку  $MN = R$ , то получим  $|a| \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{|a+2|}{\sqrt{10}}$ , или  $4|a| = |a+x|$ ,

$$16a^2 = (a+2)^2, 4a = \pm(a+2), \text{ откуда } 4a = a+2, \text{ т. е. } a = \frac{2}{3}, \text{ или}$$

$$4a = -(a+2), a = -\frac{2}{5}.$$

Ответ:  $a = \frac{2}{3}$ , или  $a = -\frac{2}{5}$ .

**Пример 20.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $\sqrt{x^2 - 6ax - 9a} = 4 - x$  решения не имеет.

Решение.

Пусть  $\sqrt{x^2 - 6ax - 9a} = 4 - x$  равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0, \\ x^2 - 6ax - 9a = (4 - x)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 4, \\ x^2 - 6ax - 9a = 16 - 8x + x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ 8x - 6ax = 9a + 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 4, \\ 2(4 - 3a)x = 9a + 16. \end{cases}$$

а) Пусть  $4 - 3a \neq 0$ , т. е.  $a \neq \frac{4}{3}$ , тогда  $\begin{cases} x \leq 4, \\ x = \frac{9a + 16}{2(4 - 3a)}. \end{cases}$

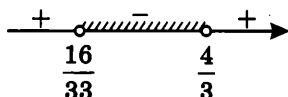
Значит, если  $\frac{9a + 16}{2(4 - 3a)} > 4$ , то решения не попадают в область определения  $D(y)$ .

Имеем  $\frac{9a + 16}{2(4 - 3a)} - 4 > 0$ , или  $\frac{9a + 16 - 32 + 24a}{2(4 - 3a)} > 0$ ,  $\frac{33a - 16}{2(4 - 3a)} > 0$ ,

$$\frac{33a - 16}{3a - 4} < 0.$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, имеем

$$a_1 = \frac{16}{33}, a_2 = \frac{4}{3},$$



$$a \in \left( \frac{16}{33}; \frac{4}{3} \right).$$

б) При  $a = \frac{4}{3}$  решений нет.

Ответ: при  $a \in \left( \frac{16}{33}; \frac{4}{3} \right]$  уравнение не имеет решений.

**Пример 21.** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $\sqrt{a-2xy} = y-x+5$  имеет единственное решение.

*Решение.*

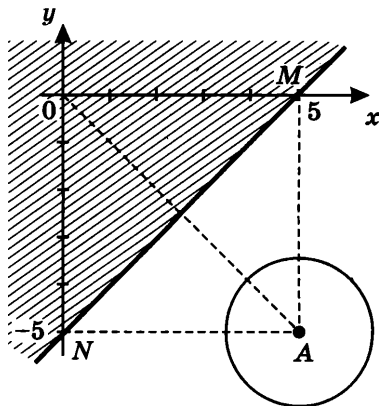
Данное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} \sqrt{a-2xy} = y-x+5, \\ y-x+5 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a-2xy = y^2 + x^2 - 2xy + 10y + 25 - 10x, \\ y-x+5 \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 - 10x + 25) + (y^2 + 10y + 25) = a + 25, \\ y-x+5 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y+5)^2 = a+25, \\ y-x+5 \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение  $(x-5)^2 + (y+5)^2 = a+25$  задает на координатной плоскости при  $a > -25$  — окружность с центром в точке  $A(-5; 5)$  и радиусом  $R = \sqrt{a+25}$ , а неравенство  $y-x+5 \geq 0$  задает верхнюю полуплоскость с границей  $y-x+5=0$ .



Как видно из рисунка, окружность и полуплоскость имеют одну общую точку, если радиус окружности  $R = \frac{1}{2}AO$  квадрата  $MANO$ ,

т. е.  $\sqrt{a+25} = \frac{5}{\sqrt{2}}$ , откуда  $a+25 = \frac{25}{2}$ ,  $a = -12,5$ .

При  $a < -25$  уравнение, следовательно, и система не имеют решений, а при  $a = -25$  решением уравнения будет пара  $(5; -5)$ , не удовлетворяющая неравенству  $y-x+5 \geq 0$ .

*Ответ:*  $-12,5$ .

**Пример 22.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $ax + \sqrt{5-4x-x^2} = 2a+3$  имеет единственный корень.

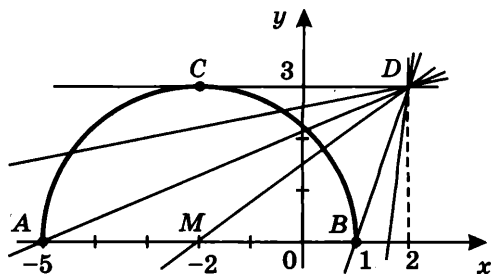
*Решение.*

Запишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{5-4x-x^2} = -ax + 2a + 3. \quad (1)$$

Приведем графическое решение уравнения (1), для чего рассмотрим функции

$$f(x) = \sqrt{5-4x-x^2} \text{ и } g(x) = -ax + 2a + 3.$$



Заметим, что графиком функции  $f(x) = \sqrt{3^2 - (x+2)^2}$  является полуокружность радиуса  $r = 3$  с центром в точке  $M(-2; 0)$ , лежащая в верх-

ней полуплоскости. Графиком функции  $g(x) = -ax + 2a + 3$  является прямая с угловым коэффициентом  $(-a)$ , проходящая через точку  $D(2; 3)$ .

Уравнение (1) имеет единственный корень при условии, если графики функций  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют одну общую точку: либо прямая  $g(x)$  касается полуокружности, либо пересекает ее в одной точке.

Поскольку касательная  $DC$ , проведенная из точки  $D$  к полуокружности, параллельна оси  $Ox$ , то угловой коэффициент равен нулю, т. е. при  $a = 0$  исходное уравнение имеет 1 корень.

При  $-a < 0$  прямая  $g(x)$  не имеет общих точек с полуокружностью.

Так как прямая  $DA$ , заданная уравнением  $y = -ax + 2a + 3$ , проходит через точки  $D(2; 3)$  и  $A(-5; 0)$ , то получим

$$0 = 5a + 2a + 3, \text{ откуда } 7a = -3, -a = \frac{3}{7}.$$

При  $0 < -a \leq \frac{3}{7}$  прямая, заданная уравнением  $y = -ax + 2a + 3$ , имеет две общие точки с полуокружностью.

Аналогично прямая  $DB$ , заданная уравнением  $y = -ax + 2a + 3$ , проходит через точки  $D$  и  $B$ , тогда  $0 = -a + 2a + 3, -a = 3$ .

При  $\frac{3}{7} < -a \leq 3$  прямая, заданная уравнением  $y = -ax + 2a + 3$ , имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой  $DA$ , и не больше, чем у прямой  $DM$ , и пересекает полуокружность в одной точке.

Таким образом, при  $-3 \leq a < -\frac{3}{7}$  исходное уравнение имеет единственный корень, а при  $-a > 3$  прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ:  $\left[-3; -\frac{3}{7}\right); 0$ .

**Пример 23.** В зависимости от значений параметра  $a$  решите неравенство  $x + 5a > 6\sqrt{ax}$ .

*Решение.*

Если  $a < 0$ , то из правой части неравенства следует, что  $x \leq 0$ . Но тогда  $x + 5a < 0$ , значит, ни при каких отрицательных значениях  $a$  исходное неравенство не имеет решений.

Если  $a = 0$ , то  $x > 0$ .

Пусть  $a > 0$ , тогда  $x \geq 0$  и  $x = 0$  является решением исходного неравенства. Кроме того, при таких значениях  $a$  и  $x$  данное неравенство равносильно неравенству  $(x + 5a)^2 > 36ax$ , или  $x^2 - 26ax + 25a^2 > 0$ .

Разлагая на множители левую часть полученного неравенства, имеем  $(x - a)(x - 25a) > 0$ .

Решая полученное неравенство методом интервалов, находим  $0 < x < a$ ,  $x > 25a$ .

*Ответ:* при  $a < 0$  решений нет; при  $a = 0$ ,  $x > 0$ ;  
при  $a > 0$ ,  $0 \leq x < a$ ,  $x > 25a$ .

**Пример 24.** При каких значениях параметра  $a$  множество решений неравенства  $3 + \sqrt{x^2 + ax} > x$  содержит отрезок  $[5; 8]$ ?

*Решение.*

Запишем неравенство в виде  $\sqrt{x^2 + ax} > x - 3$ . (1)

Поскольку  $x \in [5; 8]$ , то  $x - 3 > 0$ .

Тогда неравенство (1) равносильно системе  $\begin{cases} x^2 + ax > (x - 3)^2, \\ x^2 + ax \geq 0. \end{cases}$

Из первого неравенства системы имеем

$$x^2 + ax > x^2 - 6x + 9, \text{ или } (a + 6)x - 9 > 0.$$

Графиком функции  $y = (a + 6)x - 9$  является прямая, причем в точках  $x = 5$  и  $x = 8$  функция принимает положительные значения.

Следовательно, получим системы линейных неравенств

$$\begin{cases} (a + 6) \cdot 5 - 9 > 0, \\ (a + 6) \cdot 8 - 9 > 0; \end{cases} \begin{cases} 5a > -21, \\ 8a > -39; \end{cases} \begin{cases} a > -\frac{21}{5}, \\ a > -\frac{39}{8}, \end{cases} \text{ откуда } a > -\frac{21}{5}.$$

*Ответ:*  $\left(-\frac{21}{5}; +\infty\right)$ .

## 18.4. Тригонометрические уравнения

**Пример 25.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$\sin^2 3x - \left(a + \frac{1}{2}\right) \sin 3x + \frac{a}{2} = 0$$

имеет ровно три корня, принадлежащих отрезку  $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ ?

*Решение.*

Решаем данное уравнение как квадратное относительно  $\sin 3x = t$ , где  $|t| \leq 1$ .

$$t^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t + \frac{a}{2} = 0, \quad D = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - 2a = a^2 + a + \frac{1}{4} - 2a = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2;$$

$$t_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \left( a + \frac{1}{2} \right) \pm \left( a - \frac{1}{2} \right) \right), \text{ откуда находим } t_1 = a, t_2 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,  $\sin 3x = a$  и  $\sin 3x = \frac{1}{2}$ .

Так как второе уравнение на отрезке  $\left[ \frac{2\pi}{3}; \pi \right]$  имеет два корня  $x_1 = \frac{13\pi}{18}$  и  $x_2 = \frac{17\pi}{18}$ , то значение параметра  $a$  удовлетворяет условию задачи, если уравнение  $\sin 3x = a$  имеет на отрезке  $\left[ \frac{2\pi}{3}; \pi \right]$  лишь один корень.

Заметим, что функция  $y = \sin 3x$  принимает на отрезке  $\left[ \frac{2\pi}{3}; \pi \right]$  все значения от 0 до 1, причем каждое из этих значений, кроме 1, — дважды. Тогда условие задачи выполняется только при значении  $a = 1$ .

*Ответ:* 1.

**Пример 26.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $(x^2 + 16) \sin ax = 2(x^2 - 4x + 16)$  имеет корни? Найдите эти корни.

*Решение.*

$$\sin ax = \frac{2(x^2 - 4x + 16)}{x^2 + 16}. \quad (1)$$

Но  $|\sin ax| \leq 1$ , кроме того,  $\frac{2(x^2 - 4x + 16)}{x^2 + 16} > 0$  при любом  $x \in R$ , так как  $x^2 + 16 > 0$  и  $x^2 - 4x + 16 = (x - 2)^2 + 12 > 0$ ,

тогда из неравенства  $\frac{2(x^2 - 4x + 16)}{x^2 + 16} \leq 1$  имеем

$$2x^2 - 8x + 32 \leq x^2 + 16, \text{ или } x^2 - 8x + 16 \leq 0,$$

$$(x - 4)^2 \leq 0, \text{ что верно, если } x - 4 = 0, \text{ т. е. } x = 4.$$

Тогда равенство (1) возможно лишь при  $x = 4$ , т. е. в этом случае получим

$$\sin 4a = \frac{2(4^2 - 4 \cdot 4 + 16)}{4^2 + 16} = \frac{2 \cdot 16}{32} = 1,$$

$$\text{откуда } 4a = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad a = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z.$$

*Ответ:* если  $a = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in Z$ ,  $x = 4$ ; при других значениях параметра  $a$  корней нет.



**Пример 27.** Найдите все значения  $\alpha$ , которые удовлетворяют условию  $4 < \alpha < 17$  и при которых уравнение

$$1 + \cos^2\left(\frac{\alpha x}{3} + \frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|}$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию  $1 \leq x \leq 2$ .

*Решение.*

Заметим, что

$$\begin{aligned} \cos \pi x - \sin \pi x &= \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \pi x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \pi x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \cos \pi x - \sin \frac{\pi}{4} \sin \pi x \right) = \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} + \pi x \right). \end{aligned}$$

Учитывая ограниченность функции  $\cos t$ , имеем

$$0 \leq \left| \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} + \pi x \right) \right| \leq \sqrt{2},$$

$$\text{тогда } \left( \frac{1}{3} \right)^{\sqrt{2}} \leq \left( \frac{1}{3} \right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|} \leq 1.$$

$$\text{Значит, } \left( \frac{1}{3} \right)^{\sqrt{2}} \leq 1 + \cos^2 \left( \frac{\alpha x}{3} + \frac{3\pi}{4} \right) \leq 1, \text{ т. е. } \left( \frac{1}{3} \right)^{\sqrt{2}} - 1 \leq \cos^2 \left( \frac{\alpha x}{3} + \frac{3\pi}{4} \right) \leq 0.$$

$$\text{Отсюда } \cos \left( \frac{\alpha x}{3} + \frac{3\pi}{4} \right) = 0, \text{ т. е. } \frac{\alpha x}{3} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\alpha x}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad \frac{\alpha x}{3} = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$$

$$\alpha x = -\frac{3\pi}{4} + 3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Равенство  $\left( \frac{1}{3} \right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|} = 1$  выполняется при  $\cos \pi x - \sin \pi x = 0$  — однородное уравнение I степени.

Разделив обе части полученного уравнения на  $\cos \pi x \neq 0$ , получим  $\tan \pi x = 1$ , откуда  $\pi x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ , т. е.  $x = \frac{1}{4} + k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Так как по условию задачи  $1 \leq x \leq 2$ , то

$$1 \leq \frac{1}{4} + k \leq 2, \text{ или } \frac{3}{4} \leq k \leq \frac{7}{4}, \text{ откуда } k = 1, \text{ тогда } x = \frac{1}{4} + 1 = 1,25.$$

Итак, учитывая (1), имеем

$$\begin{aligned} 1,25\alpha &= -\frac{3\pi}{4} + 3\pi n, \text{ откуда} \\ \alpha &= \left( -\frac{3\pi}{4} + 3\pi n \right) \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3\pi}{5} + \frac{12\pi n}{5}. \end{aligned} \quad (2)$$

По условию  $4 < \alpha < 17$ , тогда (2) примет вид

$$4 < -\frac{3\pi}{5} + \frac{12\pi n}{5} < 17, \quad 20 < -3\pi + 12\pi n < 85,$$

$$20 + 3\pi < 12\pi n < 85 + 3\pi, \quad \frac{20+3\pi}{12\pi} < n < \frac{85+3\pi}{12\pi}.$$

Так как  $\pi \approx 3,14$ , то  $\frac{20+3\pi}{12\pi} \approx 0,78$  и  $\frac{85+3\pi}{12\pi} \approx 2,51$ , тогда  $n = 1$  и  $n = 2$ .

$$\text{Если } n = 1, \text{ то } \alpha = -\frac{3\pi}{5} + \frac{12\pi n}{5} = \frac{9\pi}{5}.$$

$$\text{Если } n = 2, \text{ то } \alpha = -\frac{3\pi}{5} + \frac{24\pi n}{5} = \frac{21\pi}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{9\pi}{5}; \frac{21\pi}{5}.$$

**Пример 28.** При каком значении параметра  $a$  уравнение

$$|\operatorname{tg} x + a \operatorname{ctg} x| = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ не имеет корней?}$$

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } x \neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При таких значениях  $x$ , полагая  $\operatorname{tg} x = t$ , получим

$$\left| t + \frac{a}{t} \right| = \frac{4}{\sqrt{3}}. \quad (1)$$

$$\text{Если } a = 0, \text{ то } t = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

При  $a \neq 0$  уравнение (1) равносильно совокупности

$$\begin{cases} t^2 - \frac{4}{\sqrt{3}}t + a = 0, \\ t^2 + \frac{4}{\sqrt{3}}t + a = 0. \end{cases}$$

Заметим, что дискриминанты обоих уравнений совокупности совпадают и равны  $D = 4\left(\frac{4}{3} - a\right)$ .

Значит, если  $D > 0$ , т. е.  $\frac{4}{3} - a > 0$ ,  $a > \frac{4}{3}$ , то исходное уравнение не имеет корней.

$$\text{Ответ: } a \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right).$$

## 18.5. Показательные и логарифмические уравнения

**Пример 29.** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$27 \cdot 9^{-x-3/2} - (a+2) \cdot 3^{-x} + (1-a)(2a+1) = 0$$

имеет единственное решение?

*Решение.*

Пусть  $3^{-x} = t$ , где  $t > 0$ , тогда получим уравнение

$$27 \cdot (3^{-x})^2 (3^2)^{-3/2} - (a+2) \cdot 3^{-x} + (1-a)(2a+1) = 0,$$

$$27 \cdot t^2 \cdot \frac{1}{27} - (a+2)t + (1-a)(2a+1) = 0, \text{ или}$$

$$t^2(a+2) + t + (1-a)(2a+1) = 0. \quad (1)$$

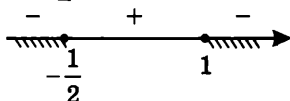
$$t_{1,2} = \frac{(a+2) \pm \sqrt{(a+2)^2 - 4(1-a)(2a+1)}}{2}.$$

$$t_{1,2} = \frac{(a+2) \pm \sqrt{a^2 + 4a + 4 - 8a + 8a^2 - 4 + 4a}}{2} =$$

$$= \frac{a+2 \pm 3a}{2}, \text{ откуда } t_1 = 2a+1, t_2 = 1-a.$$

Заметим, что уравнение (1) имеет единственное решение, если  $t_1$  и  $t_2$  имеют разные знаки или когда  $t_1 = t_2 > 0$ .

В первом случае получим  $(2a+1)(1-a) \leq 0$ , откуда, решая методом интервалов, находим  $a_1 = -\frac{1}{2}$ ,  $a_2 = 1$ .



$$a_1 \leq -\frac{1}{2}, a \geq 1.$$

Во втором случае имеем  $t_1 = t_2$  при  $a = 0$ .

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \{0\} \cup [1; +\infty).$$

**Пример 30.** Найдите все значения параметра  $a$  из интервала  $(2; 5)$ , при каждом из которых существует хотя бы одно  $x \in [2; 3]$ , удовлетворяющее уравнению.

$$\log_2 (3 - |\sin ax|) = \cos \left( \pi x - \frac{\pi}{6} \right).$$

*Решение.*

Рассматривая возможные значения функций в обеих частях равенства, легко заметить, что

$$\log_2 (3 - |\sin ax|) \geq 1, \text{ а } \cos \left( \pi x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1,$$

и равенство возможно только при выполнении условий  $\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$  и  $|\sin ax| = 1$ .

Первое из этих уравнений при  $x \in [2; 3]$  имеет единственное решение, так как  $\pi x - \frac{\pi}{6} = 2\pi n$ ,  $x = \frac{1}{6} + 2\pi$ , откуда при  $n = 1$ ,  $x = \frac{13}{6}$ . Значения

$a \in (2; 5)$  найдем, решив уравнение  $\left|\sin \frac{13a}{6}\right| = 1$ , откуда  $\sin \frac{13a}{6} = \pm 1$ .

Если  $\sin \frac{13a}{6} = 1$ , то  $\frac{13a}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $a = \frac{6}{13}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ ;

при  $n = 1$ ,  $a_1 = \frac{15\pi}{13} \in (2; 5)$ .

Если  $\sin \frac{13a}{6} = -1$ , то  $\frac{13a}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $a = \frac{6}{13}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$ ;

при  $n = 1$ ,  $a_2 = \frac{9\pi}{13} \in (2; 5)$ .

Итак, условию задачи удовлетворяют лишь два значения параметра  $a$ .

Ответ:  $a_1 = \frac{15\pi}{13}$ ,  $a_2 = \frac{9\pi}{13}$ .

**Пример 31.** Решите уравнение

$$\lg(ax) + \lg x = \lg(x - 3).$$

*Решение.*

ОДЗ:  $x > 3$ ,  $a > 0$ .

Потенцируя уравнение, получим

$$\lg(ax \cdot x) = \lg(x - 3), \text{ или } ax^2 = x - 3, ax^2 - x + 3 = 0,$$

$$D = 1 - 12a, x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12a}}{2a}.$$

Следовательно,  $\begin{cases} 1 - 12a \geq 0, \\ a > 0, \end{cases}$  откуда  $0 < a \leq \frac{1}{12}$ .

Учитывая, что  $x > 3$ , имеем

$$\begin{cases} 0 < a \leq \frac{1}{12}, \\ \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12a}}{2a} > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a \leq \frac{1}{12}, \\ 1 \pm \sqrt{1 - 12a} > 6a, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < a \leq \frac{1}{12}, \\ 1 - \sqrt{1 - 12a} > 6a. \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a} > 3. \quad (2)$$

Система (1) имеет решение при любых  $0 < a \leq \frac{1}{12}$ .

Неравенство (2) запишем в виде  $\frac{1+\sqrt{1-12a}}{2a} - 3 > 0$ , или  $\frac{1-6a+\sqrt{1-12a}}{2a} > 0$ , имеет смысл при любых  $0 < a \leq \frac{1}{12}$ .

Ответ: при  $a = \frac{1}{12}$ ,  $x = 6$ ;

при  $0 < a \leq \frac{1}{12}$ ,  $x_{1,2} = \frac{1}{2a}(1 \pm \sqrt{1-12a})$ ;

при  $a \leq 0$  или  $a > \frac{1}{12}$ , корней нет.

**Пример 32.** В зависимости от значений параметра  $a$  решите уравнение  $2 \log_5(ax - 1) = \log_{\sqrt{5}}(-x^2 - 7x - 10)$ .

*Решение.*

Запишем уравнение в виде

$$2 \log_5(ax - 1) = 2 \log_5(-x^2 - 7x - 10), \text{ или}$$

$$\log_5(ax - 1) = \log_5(-x^2 - 7x - 10). \quad (1)$$

Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} ax - 1 = -x^2 - 7x - 10, \\ -x^2 - 7x - 10 > 0, \end{cases}$$

$$\text{или системе } \begin{cases} x^2 + (a+7)x + 9 = 0, \\ x^2 + 7x + 10 < 0, \end{cases} \text{ или}$$

$$\begin{cases} x^2 + (a+7)x + 9 = 0, \\ -5 < x < -2. \end{cases} \quad (2)$$

Корни уравнения системы (2) (если они существуют) будут равны

$$D = (a+7)^2 - 36 = (a+7-6)(a+7+6) = (a+1)(a+13),$$

$$x_1 = \frac{-a-7-\sqrt{(a+1)(a+13)}}{2}, \quad x_2 = \frac{-a-7+\sqrt{(a+1)(a+13)}}{2}.$$

Рассмотрим возможные случаи расположения корней  $x_1, x_2$  в интервале  $(-5; -2)$ :

1) Пусть дискриминант уравнения системы (2) равен нулю, т. е.  $D = 0$ , тогда  $a = -1$ , или  $a = -13$ .

Если  $a = -1$ , то  $x = \frac{1-7}{2} = -3 \in (-5; -2)$ ;

если  $a = -13$ , то  $x = \frac{13-7}{2} = 3 \notin (-5; -2)$ .

2) Пусть  $a \in (-\infty; -13) \cup (-1; +\infty)$ .

Если оба корня  $x_1$  и  $x_2$  лежат в интервале  $(-5; -2)$ , то должна быть совместна система

$$\begin{cases} x_1 > -5, \\ x_2 < -2. \end{cases} \quad (3)$$

Решая систему (3), находим, что  $-1 < a < -\frac{1}{2}$ .

3) Если только корень  $x_2 \in (-5; -2)$ , то должны выполняться неравенства  $\begin{cases} -5 < x_2 < -2, \\ x_1 \leq 5, \end{cases}$  откуда следует, что решений нет.

4) Если только меньший корень  $x_1 \in (-5; -2)$ , то получим систему  $\begin{cases} -5 < x_1 < -2, \\ -2 \leq x_2, \end{cases}$  решая которую находим, что  $-\frac{1}{2} \leq a < -\frac{1}{5}$ .

Ответ: если  $a \in (-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ , то корней нет;

если  $a = -1$ , то  $x = -3$ ;

если  $a \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ , то  $x_{1,2} = \frac{-(a+7) \pm \sqrt{(a+1)(a+13)}}{2}$ ;

если  $a \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{5}\right)$ , то  $x = \frac{-(a+7) + \sqrt{(a+1)(a+13)}}{2}$ .

## 18.6. Логарифмические неравенства

**Пример 33.** Решите неравенство

$$(4x^2 - x + \sqrt{7}) \cdot \frac{\log_{0,5}(x+1)}{x-a} > 0.$$

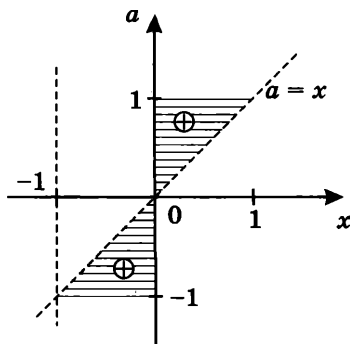
*Решение.*

Заметим, что  $4x^2 - x + \sqrt{7} > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$  (так как  $D < 0$  и первый коэффициент  $4 > 0$ ).

Тогда данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\log_{0,5}(x+1)}{x-a} > 0. \quad (1)$$

Для решения неравенства (1) на координатной плоскости  $(x; a)$  найдем области, где выражение, стоящее в левой части неравенства, сохраняет знак, и определим его. Границы этих областей задаются соотношения



ми  $x + 1 > 0$ ,  $x + 1 = 1$ , т. е.  $x = 0$  и  $a = x$ . На рисунке заштрихованы те области, координаты точек которых удовлетворяют неравенству.

**Ответ:** при  $a \in (-\infty; -1]$ ,  $x \in (-1; 0)$ ;

при  $a \in (-1; 0)$ ,  $x \in (a; 0)$ ;

при  $a = 0$  решений нет;

при  $a \in (0; +\infty)$ ,  $x \in (0; a)$ .

**Пример 34.** Решите неравенство  $(a - 6) \cdot 2^{\sqrt{x-4}} < a - 3$ .

**Решение.**

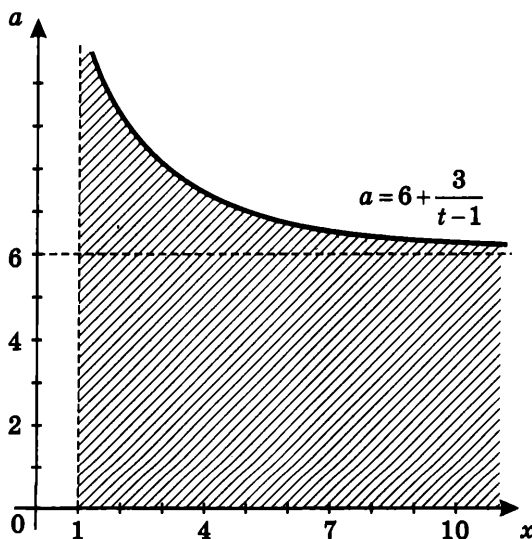
Пусть  $2^{\sqrt{x-4}} = t$ , где  $t \geq 1$ , тогда получим неравенство  $(a - 6)t < a - 3$ . На координатной плоскости  $(t; a)$  изобразим области, координаты точек которых удовлетворяют соотношениям  $t = 1$  и  $(a - 6)t = a - 3$ , или

$$(t - 1)a = 6t - 3, \text{ откуда } a = \frac{3(2t - 1)}{t - 1} = 6 + \frac{3}{t - 1}.$$

На рисунке нужная область заштрихована.

Следовательно, при  $a \in (-\infty; 6]$ ,  $t \in [1; +\infty)$  и при  $a \in (6; +\infty)$ ,

$$t \in \left[1; \frac{a - 3}{a - 6}\right).$$



Учитывая подстановку  $t = 2^{\sqrt{x-4}}$ , получим окончательный результат.

**Ответ:** при  $a \in (-\infty; 6]$ ,  $x \in [4; +\infty)$ ;

$$\text{при } a \in (6; +\infty), x \in \left[4; 4 + \log_2^2\left(\frac{a - 3}{a - 6}\right)\right].$$

**Пример 35.** При каких значениях параметра  $a$  неравенство

$$\log_4(x + 1 - a) + 0,5 \log_{0,5}(x - 3 - 2a) \geq 1$$

имеет решение?

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+1-a > 0, \\ x-3-2a > 0. \end{cases}$$

Запишем исходное неравенство в виде

$$2 \log_4 (x+1-a) - 2 \log_4 (x-3-2a) \geq 2, \text{ или} \\ \log_4 (x+1-a) - \log_4 (x-3-2a) \geq 1,$$

которое в области допустимых значений  $x$  и  $a$  равносильно неравенству

$$\frac{x+1-a}{x-3-2a} \geq 4, \text{ или } x+1-a \geq 4(x-3-2a),$$

откуда получим  $x+1-a \geq 4x-12-8a$ ,  $7a+13 \geq 3x$ , или

$$x \leq \frac{1}{3}(7a+13). \quad (1)$$

Так как  $a-1 < x$  и  $2a+3 < x$  (следует из ОДЗ), то с учетом (1) получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a-1 < \frac{1}{3}(7a+13), \\ 2a+3 < \frac{1}{3}(7a+13); \end{cases} \quad \begin{cases} 3a-3 < 7a+13, \\ 6a+9 < 7a+13; \end{cases} \quad \begin{cases} 4a > -10, \\ a > -4; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -2,5, \\ a > -4, \end{cases}$$

откуда  $a > -2,5$ .

Заметим, что при  $a > -2,5$  верно неравенство  $a-1 < 2a+3$ .

Итак, при  $a > -2,5$  исходное неравенство имеет решение

$$2a+3 < x \leq \frac{1}{3}(7a+13).$$

*Ответ:*  $(-2,5; +\infty)$ .

**Пример 36.** Найдите наибольшее значение параметра  $a$ , при котором сумма  $\log_a \left( \frac{4+3|x|}{1+|x|} \right)$  и  $\log_a \left( \frac{6+5|x|}{1+|x|} \right)$  больше единицы при всех  $x$ .

*Решение.*

ОДЗ:  $x \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $|x| = t$ , где  $t \geq 0$ , тогда получим

$$\log_a \left( \frac{4+3|x|}{1+|x|} \right) + \log_a \left( \frac{6+5|x|}{1+|x|} \right) > 1, \text{ или} \\ \log_a \frac{(4+3t)(6+5t)}{(1+t)^2} > \log_a a. \quad (1)$$

1) Если  $a > 1$ , то (1) примет вид

$$\frac{(4+3t)(6+5t)}{(1+t)^2} > a, \text{ или } (4+3t)(6+5t) - a(1+t)^2 > 0, \\ 24 + 38t + 15t^2 - a - 2at - at^2 > 0,$$



$$(15 - a)t^2 + 2(19 - a)t + (24 - a) > 0. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} D/4 &= (19 - a)^2 - (15 - a)(24 - a) = \\ &= 361 - 38a + a^2 - 360 + 39a - a^2 = a + 1 > 0. \end{aligned}$$

Так как  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , то

$$t_1 = \frac{(a-19) - \sqrt{a+1}}{15-a}, \quad t_2 = \frac{(a-19) + \sqrt{a+1}}{15-a}.$$

а)  $a = 15$ , тогда из (2) имеем  $8t + 9 > 0$  — верно при всех  $t \geq 0$ ;

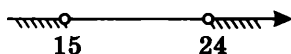
б)  $1 < a < 15$ .

Так как  $15 - a > 0$ , то  $t_2 > t_1$ , тогда неравенство (2) верно при любом  $t \geq 0$ , если  $t_2 < 0$ , т. е.  $\frac{(a-19) + \sqrt{a+1}}{15-a} < 0$ , или  $(a-19) + \sqrt{a+1} < 0$ , или  $\sqrt{a+1} < 19 - a$ ,

$$\begin{cases} a+1 < (19-a)^2, \\ 19-a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - 39a + 360 > 0, \\ a < 19. \end{cases}$$

Решая неравенство  $a^2 - 39a + 360 > 0$ , находим

$$D = 39^2 - 4 \cdot 360 = 81 = 9^2 > 0,$$



$$a_1 = \frac{39-9}{2} = 15, \quad a_2 = \frac{39+9}{2} = 24.$$

Следовательно,  $a \in (-\infty; 15) \cup (24; +\infty)$ .

Сравнивая с рассматриваемым случаем, имеем  $a \in (1; 15)$ .

в)  $a > 15$ .

Учитывая, что первый коэффициент в левой части неравенства (2) отрицателен, приходим к выводу, что неравенство (2) не может выполняться при  $t \geq 0$  ни для какого  $a > 15$ .

2) Если  $0 < a < 1$ , то неравенство (1) примет вид

$$(15 - a)t^2 + 2(19 - a)t + (24 - a) < 0. \quad (3)$$

Заметим, что  $15 - a > 0$ , значит, неравенство (3) не может выполняться при  $t \geq 0$  ни для какого  $0 < a < 1$ .

Итак,  $a \in (1; 15]$ , тогда  $a = 15$  — наибольшее значение, удовлетворяющее условию задачи.

Ответ: 15.

## § 19. Задание 19. Числа и их свойства

Это в некотором смысле уникальная задача, которая решается довольно просто — иногда всего в несколько строчек. Однако найти идею решения очень трудно.

Здесь встречаются задачи:

- 1) на числа и их свойства;
- 2) числовые наборы на карточках и досках;
- 3) последовательности и прогрессии;
- 4) сюжетные задачи.

**Пример 1.** Найдите все простые числа  $p$  такие, что  $14p^2 + 1$  — тоже простые.

*Решение.*

Если  $p \neq 3$ , то  $14p^2 + 1$  делится на 3.

И действительно,  $p = 3k + 1$ , или  $p = 3k - 1$ , тогда  $p^2 = 9k^2 + 6k + 1$ , или  $p^2 = 9k^2 - 6k + 1$ , а это значит, что остаток от деления числа  $p^2$  на 3 равен 1.

Следовательно,  $14p^2 + 1$  делится на 3 при любом  $p$ , не делящемся на 3, т. е. не является простым числом.

Если же  $p = 3$ , то число  $14p^2 + 1 = 127$  — простое.

*Ответ:* 3.

**Пример 2.** На доске написано более 45, но менее 55 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 6, среднее арифметическое всех положительных из них равно 15, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно  $-5$ .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди них?

*Решение.*

Пусть  $k$  — количество положительных чисел,  $l$  — отрицательных и  $m$  — нулей. Заметим, что сумма набора всех чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое. Тогда

$$15k - 5l + 0 \cdot m = 6(k + l + m). \quad (1)$$

а) Нетрудно заметить, что в левой части равенства (1) каждое слагаемое кратно 5, значит,  $k + l + m$  — количество целых чисел, кратных 5.

Согласно условию задачи  $45 < k + l + m < 55$ , поэтому  $k + l + m = 50$ . Значит, на доске написано 50 чисел.

б) Упростим равенство  $15k - 5l = 6(k + l + m)$  к виду  $9k \geq 11l + 6m$ . Учитывая, что  $m \geq 0$ , имеем  $9k \geq 11l$ , т. е.  $k > 1$ , значит, положительных чисел больше, чем отрицательных.

в) (Оценка.) Подставим значение  $k + l + m = 50$  в правую часть равенства  $15k - 5l = 6(k + l + m)$ . Получим  $15k - 5l = 6 \cdot 50 = 300$ , откуда  $l = 3k - 60$ .

Так как  $k + l \leq 50$ , то  $k + (3k - 60) \leq 50$ ,  $4k \leq 110$ ,  $k \leq 27$ , тогда  $l = 3k - 60 = 3 \cdot 27 - 60 \leq 21$ . Значит, отрицательных чисел не более 21.

г) (Пример.) Пусть на доске 27 раз написано число 27, 21 раз написано число  $(-5)$  и 2 раза — 0.

Тогда имеем  $\frac{15 \cdot 7 - 5 \cdot 21}{50} = \frac{405 - 105}{50} = 6$ , что удовлетворяет условиям задачи.

Ответ: а) 50; б) положительных чисел; в) 21.

**Пример 3.** Каждое из чисел 2, 3, ..., 7 умножают на каждое из чисел 12, 13, ..., 17 и перед каждым произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 36 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

*Решение.*

1. Если все произведения взяты со знаком «+», то их сумма наибольшая и будет равна

$$(2 + 3 + \dots + 6 + 7)(12 + 13 + \dots + 16 + 17) = \left(\frac{2+7}{2} \cdot 6\right) \left(\frac{12+17}{2} \cdot 6\right) = \\ = (9 \cdot 3) \cdot (29 \cdot 3) = 27 \cdot 87 = 2349.$$

2. Поскольку полученная сумма нечетная, то число нечетных слагаемых в ней — нечетно. Кроме того, это свойство суммы сохраняется при изменении знака любого из слагаемых. Следовательно, любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не равна нулю.

3. Наименьшую по модулю сумму можно получить при такой расстановке знаков у произведения:

$$(-2 + 3 - 4 + 5 + 6 - 7) \cdot (12 - 13 - 14 + 15 - 16 + 17) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ответ: 1; 2349.

**Пример 4.** Коричневый карандаш стоит 19 руб., зеленый — 15 руб. Необходимо купить карандаши, имея в наличии 629 руб. и соблюдая дополнительное условие: число зеленых карандашей не должно отличаться от числа коричневых карандашей больше, чем на 5.

а) Можно ли купить 36 карандашей?

б) Можно ли купить 39 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?

*Решение.*

а) Можно, например, купить 17 коричневых и 22 зеленых карандаша:  
 $16 \cdot 19 + 20 \cdot 15 = 604$  (руб.).

б) Дешевле всего 39 карандашей будут стоить, если купить наибольшее возможное количество зеленых карандашей и наименьшее возможное количество коричневых, т. е. если купить 17 коричневых и 22 зеленых, учитывая, что если коричневых меньше 17, то зеленых больше 22.

В этом случае разность между числом коричневых и зеленых карандашей больше, чем 5.

Тогда стоимость покупки равна

$17 \cdot 19 + 22 \cdot 15 = 653$  (руб.), что больше, чем имеющаяся сумма 629 руб.

в) Пусть  $a$  и  $b$  — число зеленых и коричневых карандашей соответственно. Тогда получим

$$\begin{cases} 19b + 15a \leq 629, & (1) \\ |b - a| \leq 5, & (2) \\ b, a = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Пусть  $b + a = k$ , откуда  $a = k - b$ . В этом случае неравенство (1) примет вид  $19b + 15(k - b) \leq 629$ , или  $4b + 15k \leq 629$ , откуда  $b \leq \frac{1}{4}(629 - 15k)$ .

Следовательно, неравенство (2) преобразуется к виду

$$-5 \leq b - a \leq 5, \text{ или } -5 \leq b - (k - b) \leq 5, \text{ или } k - 5 \leq 2b \leq k + 5,$$

$$\text{откуда } \frac{1}{2}(k - 5) \leq b \leq \frac{1}{2}(k + 5), b = 0, 1, \dots, k.$$

$$\text{Значит, } \frac{1}{2}(k - 5) \leq \frac{1}{4}(629 - 15k), \text{ или } 2(k - 5) \leq 629 - 15k, 17k \leq 639,$$

$$\text{т. е. } k \leq 37 \frac{10}{17}.$$

Таким образом, можно купить не более 37 карандашей.

Проверим, возможен ли случай, когда  $k = 37$ . При  $b = 17$ ,  $a = 20$  имеем  $17 \cdot 19 + 20 \cdot 15 = 623 < 629$ .

Следовательно, наибольшее число карандашей равно 37.

*Ответ:* а) да; б) нет; в) 37.

**Пример 5.** Сторона квадрата на 3 см больше ширины прямоугольника, а площади этих фигур равны. Длины сторон квадрата и прямоугольника — целые числа.

а) Может ли ширина прямоугольника быть равной 6?

б) Может ли длина прямоугольника быть равной 12?

в) Найдите все возможные варианты таких пар прямоугольников и квадратов.

*Решение.*

а) Пусть  $x$  — ширина,  $y$  — длина прямоугольника, тогда  $(x + 3)$  — сторона квадрата.

По условию задачи  $S_{\text{кв.}} = S_{\text{пр.}}$

Но  $S_{\text{кв.}} = (x + 3)^2$ ,  $S_{\text{пр.}} = xy$ , тогда получим  $(x + 3)^2 = xy$ , где  $x, y \in N$ .

Если  $x = 6$ , то получим  $6y = (6 + 3)^2$ , или  $6y = 81$ , откуда

$$y = \frac{81}{6} = \frac{27}{2} \notin N.$$

Значит, ширина прямоугольника не может быть равной 6.

б) Если  $y = 12$ , то  $(x + 3)^2 = 12x$ , или  $x^2 - 6x + 9 = 0$ , или  $(x - 3)^2 = 0$ ,  $x - 3 = 0$ ,  $x = 3$ .

Так как  $x = 3 \in N$  и  $y = 12 \in N$ , то длина прямоугольника может быть равной 12.

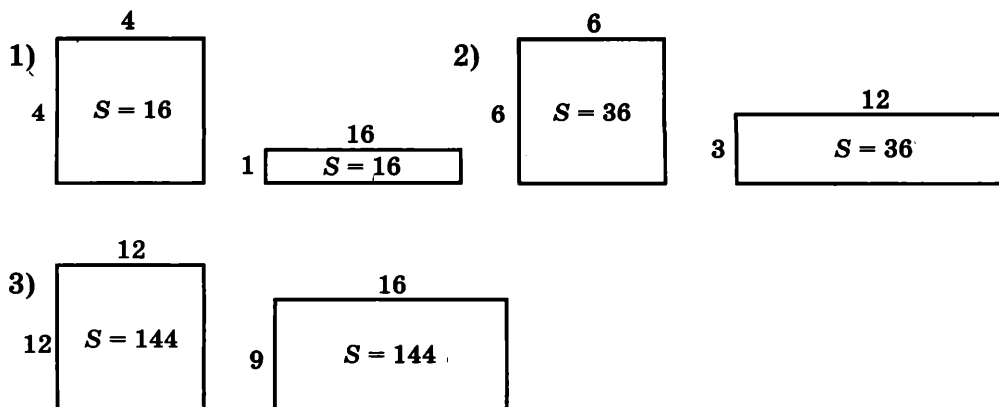
$$\text{в) } (x + 3)^2 = xy, \text{ откуда } y = \frac{(x + 3)^2}{x} = \frac{x^2 + 6x + 9}{x} = x + 6 + \frac{9}{x}.$$

Так как  $y \in N$ , то  $x$  — делители числа 9, где  $x \in N$ .

Значит,  $x = 1; 3; 9$ .

$$\text{Тогда } y = 1 + 6 + \frac{9}{1} = 16; y = 3 + 6 + \frac{9}{3} = 12; y = 9 + 6 + \frac{9}{9} = 16.$$

Имеем 3 возможности:



Ответ: а) нет; б) да; в)  $4 \times 4$  и  $1 \times 16$ ;  $6 \times 6$  и  $3 \times 12$ ;  $12 \times 12$  и  $9 \times 16$ .

**Пример 6.** Гриша перемножил несколько различных натуральных чисел из отрезка  $[21; 82]$ . Артур увеличил каждое из чисел на 1 и перемножил все полученные числа.

а) Может ли результат Артура быть вдвое больше, чем у Гриши?

б) Может ли результат Артура быть в 7 раз больше, чем у Гриши?

в) В какое наибольшее целое число раз результат Артура может быть больше, чем Гриши?

*Решение.*

а) Например, для набора чисел  $\{22; 23; \dots; 43\}$  результат Гриши равен  $22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 43$ , а результат Артура будет  $23 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 44$ , т. е.  $(23 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 44) : (22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 43) = 2$ , т. е. в 2 раза больше.

б) При добавлении новых чисел отношение результатов Гриши и Артура становится только больше. Следовательно, наибольшее отношение получим, если Гриша перемножит все натуральные числа из данного отрезка  $[21; 82]$ . При этом результат Гриши равен  $21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 82$ , а Артура —  $22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 83$ . Тогда отношение этих чисел будет равно

$$(22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 83) : (21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 82) = \frac{83}{21} < 7.$$

Значит, результат Артура не может быть в 7 раз больше результата Гриши.

в) Как показано в пункте б), результат Артура превосходит результат Гриши не более чем в  $\frac{83}{21}$  раза. Наибольшее целое число, не большее

$\frac{83}{21}$ , — это число 3.

Для набора  $\{21; 22; 23; \dots; 62\}$  результат Гриши равен  $21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 62$ , а Артура —  $22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 63$ , т. е. в 3 раза больше.

Таким образом, наибольшее целое отношение результатов Артура и Гриши равно 3.

*Ответ:* а) да; б) нет; в) 3.

**Пример 7.** Известно, что  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{9}{21}$ ?

б) Может ли дробь  $\frac{a+c}{b+d}$  быть в 13 раз меньше, чем сумма  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ ?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь  $\frac{a+c}{b+d}$ , если  $a > 3b$  и  $c > 6d$ ?

*Решение.*

а)  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{9}{21} = \frac{18}{42} = \frac{27}{63} = \frac{12+15}{13+50}$ , значит,  $a = 12, b = 13, c = 15, d = 50$ .

б) Допустим, что  $13 \cdot \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ . Тогда получим  $13bd(a+c) = ad(b+d) + bc(b+d)$ , или  $13abd + 13bcd = abd + ad^2 + b^2c + bcd$ , или  $12abd - ad^2 + 12bcd - b^2c = 0$ .

Группируя слагаемые, имеем

$$ad(12b-d) + bc(12d-b) = 0. \quad (1)$$

По условию задачи  $a, b, c$  и  $d$  — различные положительные двузначные числа, тогда  $12b-d > 0$  и  $12d-b > 0, ad > 0, bc > 0$ , значит, равенство (1) выполняться не может.

Кроме того,  $12b-d \geq 12 \cdot 10 - 99 > 0$  и  $12d-b \geq 12 \cdot 10 - 99 > 0$ , значит, б) нет.

в)  $a \geq 3b+1, c \geq 6d+1$ , тогда

$$\frac{a+c}{b+d} \geq \frac{3b+1+6d+1}{b+d} = \frac{(3b+3d)+(3d+2)}{b+d} = 3 + \frac{3d+2}{b+d},$$

$$3b+1 \leq a, \text{ или } 3b+1 \leq 99, b \leq \frac{98}{3} = 32\frac{2}{3}.$$

Значит, наибольшее значение  $b = 32$ , тогда

$$3 + \frac{3d+2}{b+d} = 3 + \frac{3d+2}{32+d} \geq 3 + \frac{3d+96-94}{d+32} = 3 + \frac{3(d+32)}{d+32} - \frac{94}{d+32} = 6 - \frac{94}{d+32}.$$

Дробь  $\frac{94}{d+32}$  будет наибольшей, при наименьшем значении  $d = 10$  (так как  $d$  — двузначное положительное число).

$$\text{Получим } 6 - \frac{94}{10+32} \geq 6 - \frac{94}{42} = 6 - \frac{47}{21} = \frac{126-47}{21} = \frac{79}{21}.$$

$$\text{Итак, } b = 32, d = 10, a \geq 3 \cdot 32 + 1 = 97, c \geq 6d + 1 = 6 \cdot 10 + 1 = 61.$$

$$\text{Значит, } \frac{a+c}{b+d} = \frac{97+61}{32+10} = \frac{158}{42} = \frac{79}{21}.$$

*Ответ:* а) да,  $a = 12, b = 13, c = 15, d = 50$ ; б) нет; в)  $\frac{79}{21}$ .

**Пример 8.** Известно, что  $a, b, c, d, e$  и  $f$  — это различные, расставленные в произвольном порядке числа 2, 3, 4, 6, 7 и 16.

а) Может ли выполняться равенство

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = 7?$$

б) Может ли выполняться равенство

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{1235}{336}?$$

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ ?

*Решение.*

а)  $\frac{16}{6} + \frac{7}{3} + \frac{4}{2} = \frac{8}{3} + \frac{7}{3} + 2 = 5 + 2 = 7.$

б) Заметим, что произведение  $b \cdot d \cdot f$  должно быть кратно 336.

$$336 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 = 16 \cdot 3 \cdot 7.$$

Знаменатель дробей может быть и 672, так как  $672 = 2 \cdot 336 = 2 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 7 = 16 \cdot 7 \cdot 6.$

Если знаменатель равен  $336 \cdot 3 = 1008 = 16 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3$ , что не подходит, так как среди данных чисел всего одна тройка.

$$\frac{a}{16} + \frac{c}{7} + \frac{e}{3} = \frac{21a + 48c + 112e}{336} < \frac{(21 + 48 + 112) \cdot 6}{336} = \frac{181 \cdot 6}{336} = \frac{1086}{336} < \frac{1235}{336}.$$

$$\frac{a}{16} + \frac{c}{7} + \frac{e}{6} = \frac{42a + 96c + 112e}{672} < \frac{(42 + 96 + 112) \cdot 4}{672} = \frac{250 \cdot 2}{336} = \frac{500}{336} < \frac{1235}{336}.$$

в) Сумма  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$  может принимать наибольшее значение, если в знаменателях дробей выбрать наименьшее из данных чисел, т. е. 2, 3 и 4, а в числителе выбрать число 16. Можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} &\leq \frac{a}{4} + \frac{c}{3} + \frac{e}{2} \leq \frac{a}{4} + \frac{c}{3} + \frac{16}{2} \leq \frac{6}{4} + \frac{7}{3} + \frac{16}{2} = \frac{3}{2} + \frac{7}{3} + \frac{16}{2} = \\ &= \frac{19}{2} + \frac{7}{3} = \frac{57 + 14}{6} = \frac{71}{6}. \end{aligned}$$

*Замечание.* Если записать  $\frac{6}{4} + \frac{7}{3}$  иначе, например,  $\frac{6}{3} + \frac{7}{4}$ , то в I случае получим  $\frac{23}{6}$ , а во II случае получим  $\frac{45}{12}$ .

$$\text{Но } \frac{23}{6} = \frac{46}{12} > \frac{45}{12}.$$

*Ответ:* а) да; б) нет; в)  $\frac{71}{6}$ .

**Пример 9.** Квадратное уравнение  $x^2 + px + q = 0$  имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть  $q = 14$ . Найдите все возможные значения  $p$ .

б) Пусть  $p + q = 18$ . Найдите возможные значения  $q$ .

в) Пусть  $q^2 - p^2 = 1265$ . Найдите все возможные корни исходного уравнения.



**Решение.**

а) Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни данного уравнения. По теореме Виета  $x_1 \cdot x_2 = q = 14$  (по условию). Но  $14 = 1 \cdot 14 = 2 \cdot 7$ . Значит,  $x_1 + x_2 = 15$ , или  $x_1 + x_2 = 9$ .

Тогда  $p_1 = -(x_1 + x_2) = -15$  или  $p_2 = -9$ .

б)  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 \cdot x_2 = q$ .

По условию  $p + q = 18$ , или  $x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 18$ . Преобразуем левую часть полученного равенства так, чтобы разложить на множители:

$1 + x_1 x_2 - x_1 - x_2 = 19$ , или  $(x_1 x_2 - x_2) - (x_1 - 1) = 19$ , или  $x_2(x_1 - 1) - (x_1 - 1) = 19$ , или  $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 19$ , где  $x_1, x_2 \in N$ .

Но  $19 = 1 \cdot 19$ , значит,  $x_1 - 1 = 1$ ,  $x_2 - 1 = 19$  (или наоборот). В любом случае  $q = x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 20 = 40$ .

в) По условию  $q^2 - p^2 = 1265$ , или

$(q - p)(q + p) = (x_1 x_2 + x_1 + x_2)(x_1 x_2 - x_1 - x_2) = 1265$ .

Но  $1265 = 5 \cdot 253 = 5 \cdot 11 \cdot 23$ .

Заметим, что числа  $q - p$  и  $q + p$  — одинаковой четности, поэтому каждое из них нечетное. Кроме того,  $q - p > q + p$ .

Остается рассмотреть варианты:

1)  $x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 55$ ,  $x_1 x_2 - x_1 - x_2 = 23$ ;

2)  $x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 115$ ,  $x_1 x_2 - x_1 - x_2 = 11$ ;

3)  $x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 253$ ,  $x_1 x_2 - x_1 - x_2 = 5$ .

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

$$1) \begin{cases} x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 55, \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 23. \end{cases}$$

Складывая и вычитая почленно левые и правые части системы, имеем

$$\begin{cases} 2x_1 x_2 = 78, \\ 2(x_1 + x_2) = 32; \end{cases} \begin{cases} x_1 x_2 = 39, \\ x_1 + x_2 = 16, \end{cases} \text{ откуда } x_1 = 13, x_2 = 3 \text{ (или наоборот).}$$

Аналогично находим:

$$2) \begin{cases} x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 115, \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 11; \end{cases} \begin{cases} 2x_1 x_2 = 126, \\ 2(x_1 + x_2) = 104; \end{cases} \begin{cases} x_1 x_2 = 63, \\ x_1 + x_2 = 52. \end{cases}$$

Легко показать, что уравнение  $x^2 - 52x + 63 = 0$  не имеет натуральных корней:

$$3) \begin{cases} x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 253, \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 5; \end{cases} \begin{cases} 2x_1 x_2 = 258, \\ 2(x_1 + x_2) = 248; \end{cases} \begin{cases} x_1 x_2 = 129, \\ x_1 + x_2 = 124. \end{cases}$$

Уравнение  $x^2 - 124x + 129 = 0$  также не имеет натуральных корней.

**Ответ:** а)  $-15, -9$ ; б)  $40$ ; в)  $13$  и  $3$ .

**Пример 10.** Известно, что квадратное уравнение вида  $x^2 + mx + k = 0$  имеет 2 различных натуральных корня.

а) Найдите все возможные значения  $k$  при  $m = -8$ .

б) Найдите возможные значения  $m$  при  $k - m = 25$ .

в) Найдите все возможные значения корней уравнения, если  $k^2 - m^2 = 1628$ .

*Решение.*

а) Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — натуральные корни уравнения, тогда по теореме Виета имеем 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m, \\ x_1 \cdot x_2 = k. \end{cases}$$

Заметим, что число 8 можно записать в виде суммы двух различных натуральных слагаемых двумя способами.

$8 = 1 + 7 = 2 + 6$ , тогда  $k = 7$  или  $k = 12$ .

б) По условию задачи  $k - m = 25$ , где  $k = x_1 x_2$ ,  $m = -(x_1 + x_2)$ . Тогда получим

$$x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 25, \text{ или}$$

$$x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 26.$$

Теперь применим способ группировки:

$$x_1(x_2 + 1) + (x_2 + 1) = 26, \text{ или}$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 26.$$

Поскольку оба множителя — натуральные числа, не меньшие двух, то  $x_1 + 1 = 13$ ,  $x_2 + 1 = 2$ .

Значит,  $x_1 = 12$ ,  $x_2 = 1$ , тогда  $m = -(12 + 1) = -13$ .

в) Запишем данное уравнение в виде

$$(k - m)(k + m) = 1628 = 4 \cdot 407 = 2^2 \cdot 11 \cdot 37.$$

Заметим, что числа  $k - m$  и  $k + m$  имеют одинаковую четность, поэтому они оба четны.

При этом  $k - m > k + m$ , так как  $m < 0$ .

$$\text{Значит, 1) } \begin{cases} k - m = 74, \\ k + m = 22; \end{cases} \begin{cases} 2k = 96, \\ 2m = -52; \end{cases} \begin{cases} k = 48, \\ m = -26. \end{cases}$$

В этом случае получим уравнение  $x^2 - 26x + 48 = 0$ , корни которого  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 24$ .

$$2) \begin{cases} k - m = 814, \\ k + m = 2; \end{cases} \begin{cases} 2k = 814, \\ 2m = -812; \end{cases} \begin{cases} k = 408, \\ m = -406. \end{cases}$$

Получим уравнение  $x^2 - 406x + 408 = 0$ , которое не имеет натуральных корней.

*Ответ:* а) 7 или 12; б) -13; в) 2 и 24.

# АНАЛИЗ ТИПИЧНЫХ ОШИБОК ШКОЛЬНИКОВ И АБИТУРИЕНТОВ ПРИ СДАЧЕ ЕГЭ

.....

## § 20. Вычислительные ошибки

### 20.1. Действия с обыкновенными и десятичными дробями

**Пример 1.**  $\frac{3}{4} + \frac{4}{5} \neq \frac{7}{9}$ .

*Правильное решение.*

$$\frac{3}{4} + \frac{4}{5} = \frac{3 \cdot 5 + 4 \cdot 4}{20} = \frac{15 + 16}{20} = \frac{31}{20} = 1\frac{11}{20}.$$

**Пример 2.**  $9 - \frac{2}{3} \neq 8\frac{2}{3}$ .

*Правильное решение.*

$$9 - \frac{2}{3} = 8\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = 8\frac{1}{3}.$$

**Пример 3.**  $13\frac{5}{8} - 7\frac{1}{3} \neq 6\frac{4}{24} \neq 6\frac{1}{6}$ .

*Правильное решение.*

$$13\frac{5}{8} - 7\frac{1}{3} = 6\frac{5 \cdot 3 - 1 \cdot 8}{24} = 6\frac{7}{24}.$$

**Пример 4.** 
$$\begin{array}{r} 19,8 \\ - 4,35 \\ \hline 15,55 \end{array}$$
 — неверное решение.

*Правильное решение.*

$$\begin{array}{r} 19,80 \\ - 4,35 \\ \hline 15,45 \end{array}.$$

**Пример 5.**  $23,2 \cdot 0,001 \neq 0,232$ .

*Правильное решение.*

$$23,2 \cdot 0,001 = 0,0232.$$

**Пример 6.**  $14,4 : 0,09 \neq 16$ .

*Правильное решение.*

$$14,4 : 0,09 = 1440 : 9 = 160.$$

## 20.2. Нахождение значения выражений, содержащих степени

**Пример 7.** Найдите значение выражения

$$(6^{-1} + 7^{-1})^{-2} \neq (6^{-1})^{-2} + (7^{-1})^{-2}.$$

*Правильное решение.*

$$(6^{-1} + 7^{-1})^{-2} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7+6}{42}\right)^{-2} = \left(\frac{13}{42}\right)^{-2} = \left(\frac{42}{13}\right)^2 = \frac{1764}{169} = 10\frac{74}{169}.$$

**Пример 8.** Вычислите  $9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} \neq 9^{\frac{1}{4}}$ .

*Правильное решение.*

$$9^{\frac{1}{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 9^1 = 9.$$

**Пример 9.** Вычислите  $64^{-\frac{1}{3}} \neq 64^3$ .

*Правильное решение.*

$$64^{-\frac{1}{3}} = (4^3)^{-\frac{1}{3}} = 4^{-1} = \frac{1}{4}.$$

**Пример 10.** Вычислите  $12 \cdot 3^{-1} \neq (12 \cdot 3)^{-1} \neq \frac{1}{36}$ .

*Правильное решение.*

$$12 \cdot 3^{-1} = 12 \cdot \frac{1}{3} = 4.$$

## 20.3. Нахождение значения выражений, содержащих корни

**Пример 11.** Найдите значение выражения

$$\begin{aligned} & \sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}}. \\ \sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}} &= \sqrt{1-2\sqrt{6}+6} + \sqrt{1+2\sqrt{6}+6} = \\ &= \sqrt{(1-\sqrt{6})^2} + \sqrt{(1+\sqrt{6})^2} \neq 1-\sqrt{6}+1+\sqrt{6} \neq 2. \end{aligned}$$

*Правильное решение.*

$$\begin{aligned}\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}} &= \sqrt{(1-\sqrt{6})^2} + \sqrt{(1+\sqrt{6})^2} = \\ &= |1-\sqrt{6}| + |1+\sqrt{6}| = \sqrt{6} - 1 + 1 + \sqrt{6} = 2\sqrt{6}.\end{aligned}$$

**Пример 12.** Вычислите  $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{9}$ .

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{9} \neq \sqrt[8]{27}.$$

*Правильное решение.*

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[5]{9} = \sqrt[15]{3^5} \cdot \sqrt[15]{9^3} = \sqrt[15]{3^5 \cdot 9^3} = \sqrt[15]{3^5 \cdot (3^2)^3} = \sqrt[15]{3^5 \cdot 3^6} = \sqrt[15]{3^{11}}.$$

**Пример 13.** Вычислите  $\sqrt[4]{\sqrt[5]{8}}$ .

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{8}} \neq \sqrt[9]{8}.$$

*Правильное решение.*

$$\sqrt[4]{\sqrt[5]{8}} = \sqrt[4 \cdot 5]{8} = \sqrt[20]{8}.$$

**Пример 14.** Внесите множитель под знак корня  $-3\sqrt[4]{5}$ .

$$-3\sqrt[4]{5} \neq \sqrt[4]{(-3)^4 \cdot 5}.$$

*Правильное решение.*

$$-3\sqrt[4]{5} = -\sqrt[4]{3^4 \cdot 5} = -\sqrt[4]{405}.$$

**Пример 15.** Вынесите множитель из-под знака корня  $\sqrt[6]{(-3)^6 a^6}$ .

$$\sqrt[6]{(-3)^6 a^6} \neq -3a.$$

*Правильное решение.*

$$\sqrt[6]{(-3)^6 a^6} = \sqrt[6]{(-3a)^6} = |-3a| = |-3| \cdot |a| = 3|a|.$$

**Пример 16.** Вычислите  $\sqrt[8]{(-5)^8}$ .

$$\sqrt[8]{(-5)^8} \neq -5.$$

*Правильное решение.*

$$\sqrt[8]{(-5)^8} = |-5| = 5.$$

**Пример 17.** Вычислите  $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2}$ .

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \neq \sqrt[6]{2}.$$

*Правильное решение.*

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}.$$

## 20.4. Вычисления, связанные с логарифмами

**Пример 18.** Вычислите  $\log_3 5 + \log_3 8 \neq \log_3 13$ .

*Правильное решение:*  $\log_3 5 + \log_3 8 = \log_3 (5 \cdot 8) = \log_3 40$ .

**Пример 19.** Вычислите  $\log_2 18 - \log_2 6 \neq \log_2 12$ .

*Правильное решение:*  $\log_2 18 - \log_2 6 = \log_2 \frac{18}{6} = \log_2 3$ .

**Пример 20.**  $3^{-\log_3 7} \neq -7$ .

*Правильное решение:*  $3^{-\log_3 7} = (3^{\log_3 7})^{-1} = 7^{-1} = \frac{1}{7}$ .

**Пример 21.**  $6^{\frac{1}{n}} \neq \frac{1}{6^n}$ .

*Правильное решение:*  $6^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{6}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ .

**Пример 22.**  $8^{\sqrt{\log_8 9}} - 9^{\sqrt{\log_9 8}} \neq \sqrt{9} - \sqrt{8}$ .

*Правильное решение:*

$$\begin{aligned} 8^{\sqrt{\log_8 9}} - 9^{\sqrt{\log_9 8}} &= 8^{\frac{\log_8 9}{\sqrt{\log_8 9}}} - 9^{\frac{\log_9 8}{\sqrt{\log_9 8}}} = (8^{\log_8 9})^{\frac{1}{\sqrt{\log_8 9}}} - 9^{\sqrt{\log_9 8}} = 9^{\sqrt{\log_8 9}} - 9^{\sqrt{\log_9 8}} = \\ &= 9^{\sqrt{\log_9 8}} - 9^{\sqrt{\log_9 8}} = 0. \end{aligned}$$

## § 21. Ошибки в тождественных преобразованиях

### 21.1. Действия с многочленами

**Пример 23.** Раскройте скобки:

$$-(5x - 2y + 7) \neq 5x + 2y - 7.$$

*Правильное решение.*

Знак « $-$ » относится к каждому одночлену, тогда

$$-(5x - 2y + 7) = -5x + 2y - 7.$$

**Пример 24.** Раскройте скобки:

$$-(x - 2)(4x + 3) \neq -4x^2 - 5x - 6.$$

*Правильное решение.*

$$-(x - 2)(4x + 3) = (2 - x)(4x + 3) = 8x - 4x^2 + 6 - 3x = -4x^2 + 5x + 6.$$

**Пример 25.** Разложите на множители

$$a^6 + a^3 + a^2 - a + 1 \neq a^3(a^3 + 1)(a^2 - a + 1).$$

*Правильное решение.*

$$\begin{aligned} a^6 + a^3 + a^2 - a + 1 &= a^3(a^3 + 1) + (a^2 - a + 1) = \\ &= a^3(a + 1)(a^2 - a + 1) + (a^2 - a + 1) = (a^2 - a + 1)(a^4 - a^3 + 1). \end{aligned}$$

**Пример 26.** Разложите на множители  $3x^2 - 10x + 3$ .

$$3x^2 - 10x + 3 \neq (x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

*Правильное решение.*

$$3x^2 - 10x + 3 = 3(x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x - 3)(3x - 1),$$

где 3 и  $\frac{1}{3}$  — корни трехчлена.

**Пример 27.** Ошибки в применении формул сокращенного умножения:

$$a^2 + b^2 \neq (a - b)(a + b);$$

$$a^2 - b^2 \neq (a - b)^2;$$

$$a^2 - ab + b^2 \neq (a - b)^2;$$

$$a^3 + b^3 \neq (a + b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$(a + b)^3 \neq a^3 + b^3;$$

$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2.$$

## 21.2. Действия с алгебраическими дробями

**Пример 28.** Сократите дробь  $\frac{x^3 - x^2}{5x^2}$ .

$$\frac{x^3 - x^2}{5x^2} \neq \frac{x^3}{5}.$$

*Правильное решение.*

$$\frac{x^3 - x^2}{5x^2} = \frac{x^2(x - 1)}{5x^2} = \frac{x - 1}{5}.$$

**Пример 29.** Выделите целую часть  $\frac{x^2}{x - 3}$ .

$$\frac{x^2}{x - 3} \neq \frac{x^2}{x} - \frac{x^2}{3} \neq x - \frac{x^2}{3}.$$

*Правильное решение.*

$$\frac{x^2}{x - 3} = \frac{(x^2 - 9) + 9}{x - 3} = \frac{x^2 - 9}{x - 3} + \frac{9}{x - 3} = x + 3 + \frac{9}{x - 3}.$$

**Пример 30.** Упростите  $\frac{y+3}{y^2-4} - \frac{6}{y+2}$ .

$$\frac{y+3}{y^2-4} - \frac{6}{y+2} = \frac{y+3}{(y-2)(y+2)} - \frac{6(y-2)}{(y-2)(y+2)} \neq \frac{y+3-6y-12}{(y-2)(y+2)}.$$

*Правильное решение.*

Следует учесть тот факт, что если перед дробью стоит знак «-», то знаки всех слагаемых в числителе вычитаемого следует поменять.

$$\begin{aligned} \frac{y+3}{y^2-4} - \frac{6}{y+2} &= \dots = \frac{y+3-6(y-2)}{(y-2)(y+2)} = \frac{y+3-6y+12}{(y-2)(y+2)} = \frac{-5y+15}{(y-2)(y+2)} = \\ &= \frac{-5(3-y)}{y^2-4} = -\frac{5(3-y)}{y^2-4}. \end{aligned}$$

**Пример 31.** Выполните сложение:  $\frac{x-3y}{x^2+3xy+9y^2} + \frac{9xy}{x^3-27y^3}$ .

$$\begin{aligned} \frac{x-3y}{x^2+3xy+9y^2} + \frac{9xy}{x^3-27y^3} &= \frac{x-3y}{x^2+3xy+9y^2} + \frac{9xy}{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)} = \\ &= \frac{(x-3y)^2+9xy}{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)} \neq \frac{x-3y+9xy}{x^2+3xy+9y^2}. \end{aligned}$$

Сокращение дроби выполнено неверно, так как для сокращения необходимо числитель дроби разложить на множители.

*Правильное решение.*

$$\begin{aligned} \frac{x-3y}{x^2+3xy+9y^2} + \frac{9xy}{x^3-27y^3} &= \dots = \frac{(x-3y)^2+9xy}{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)} = \\ &= \frac{x^2+3xy+9xy}{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)} = \frac{1}{x-3y}. \end{aligned}$$

### 21.3. Преобразование выражений, содержащих корни и степени с дробными показателями

**Пример 32.**  $\frac{x+y}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}} \neq x^3 + y^3$ .

*Правильное решение.*

$$\frac{x+y}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}} = \frac{(x^{\frac{1}{3}})^3 + (y^{\frac{1}{3}})^3}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}} = \frac{(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}})}{\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}} = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}}.$$



**Пример 33.**  $x^3 - x^{\frac{1}{3}} \neq x^3 \left( 1 - x^{\frac{1}{9}} \right).$

Разложение на множители выполнено неверно, надо иметь в виду, что выносить за скобки следует множитель с наименьшим показателем, т. е.  $x^{\frac{1}{3}}$ .

*Правильное решение.*

$$x^3 - x^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} \left( x^{\frac{8}{3}} - 1 \right).$$

**Пример 34.** Найдите значение выражения  $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-7}$ , если  $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-7} = 11$ .

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{x-7} = -11 \text{ — неверно.}$$

*Правильное решение.*

$$\begin{aligned} \sqrt{x+4} + \sqrt{x-7} &= \frac{(\sqrt{x+4} + \sqrt{x-7})(\sqrt{x+4} - \sqrt{x-7})}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-7}} = \frac{x+4 - (x-7)}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-7}} = \\ &= \frac{11}{\sqrt{x+4} - \sqrt{x-7}}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-7} = 11$ , то  $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-7} = 11:11 = 1$ .

**Пример 35.**  $\left( \frac{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right)^{-2} \neq \frac{x^{-3} + y^{-3}}{x^{-1} + y^{-1}} \neq x^3 + y^3.$

*Правильное решение.*

$$\begin{aligned} \left( \frac{x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}} \right)^{-2} &= \left( \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}} \right)^2 = \left( \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{(x^{\frac{1}{2}})^3 + (y^{\frac{1}{2}})^3} \right)^2 = \\ &= \left( \frac{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}{\left( x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \right) \cdot \left( x - x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + y \right)} \right)^2 = \left( \frac{1}{x - x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + y} \right)^2 = \frac{1}{\left( x - x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} + y \right)^2}. \end{aligned}$$

**Пример 36.**  $(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})^2 \neq x - y.$

*Правильное решение.*

$$(x^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{2}})^2 = (x^{\frac{1}{2}})^2 - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + (y^{\frac{1}{2}})^2 = x - 2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}} + y.$$

**Пример 37.**  $\sqrt[6]{(a-4)^2} \neq \sqrt[3]{a-4}$ .

*Правильное решение.*

$\sqrt[6]{(a-4)^2} = \sqrt[3]{a-4}$ , если  $a \geq 4$ ;  $\sqrt[6]{(a-4)^2} = \sqrt[3]{4-a}$ , если  $a \leq 4$ .

## § 22. Ошибки при решении различных типов уравнений

**Пример 38.** Решите уравнение  $\sqrt{-x+7}(8-x) = 0$ .

*Неверный ответ:*  $x_1 = 7$ ,  $x_2 = 8$ .

*Ошибка:*  $x_2 = 8$  — посторонний корень.

*Причина ошибки:* из ОДЗ  $\Rightarrow -x + 7 \geq 0$ , откуда  $x \leq 7$ .

Значит,  $x_2 = 8$  не удовлетворяет ОДЗ.

*Решение.*

$$\sqrt{-x+7}(8-x) = 0, \text{ откуда } \begin{cases} 8-x=0, \\ -x+7 \geq 0, \\ \sqrt{-x+7}=0; \end{cases} \begin{cases} x=8, \\ x \leq 7, \\ x=7. \end{cases}$$

Значит,  $x = 7$ .

*Ответ:*  $x = 7$ .

**Пример 39.** Решите уравнение  $\frac{x-4}{x-4} = 1$ .

*Неверный ответ:*  $x \in R$ .

*Ошибка:*  $x = 4$  не является корнем.

*Причина ошибки:* не учтено условие существования дроби  $\frac{x-4}{x-4}$ .

*Решение.*

$$\frac{x-4}{x-4} = 1, \text{ откуда } \begin{cases} 1=1, \\ x-4 \neq 0, \end{cases} \text{ или } x \neq 4.$$

*Ответ:*  $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$ .

**Пример 40.** Решите уравнение  $\frac{2x-1}{2x-1} = 0$ .

*Неверный ответ:*  $x = \frac{1}{2}$ .

*Ошибка:*  $x = \frac{1}{2}$  не является корнем.

*Причина ошибки:* при  $x = \frac{1}{2}$  знаменатель дроби обращается в нуль

(дробь не имеет смысла).

*Решение.*

$$\frac{2x-1}{2x-1} = 0, \text{ откуда } \begin{cases} 2x-1=0, \\ 2x-1 \neq 0, \end{cases} \text{ т. е. уравнение не имеет действительных}$$

корней.

*Ответ:* корней нет.

**Пример 41.** Решите уравнение  $\frac{4|x|-x^2}{x} = 0$ .

*Неверный ответ:*  $x_1 = 4, x_2 = 0, x_3 = -4$ .

*Ошибка:*  $x = 0$  не является корнем.

*Причина ошибки:* при  $x = 0$  знаменатель дроби обращается в нуль (дробь не имеет смысла).

*Решение.*

$$\frac{4|x|-x^2}{x} = 0, \text{ откуда } \begin{cases} 4|x|-x^2=0, \\ x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} |x|(4-|x|)=0, \\ x \neq 0, \end{cases}$$

т. е.  $4 - |x| = 0, |x| = 4$ , значит,  $x_{1,2} = \pm 4$ .

*Ответ:*  $x_1 = -4, x_2 = 4$ .

**Пример 42.** Решите уравнение  $\frac{\sqrt{x-4}(x-3)}{x} = 0$ .

*Неверный ответ:*  $x_1 = 4, x_2 = 3$ .

*Ошибка:*  $x_2 = 3$  не является корнем.

*Причина ошибки:* не учтено условие существования корня.

*Решение.*

$$\frac{\sqrt{x-4}(x-3)}{x} = 0, \text{ откуда } \begin{cases} x-4 \geq 0, \\ x \neq 0, \end{cases} \text{ т. е. } x = 4. \\ \left[ \begin{array}{l} \sqrt{x-4} = 0, \\ x-3 = 0 \end{array} \right),$$

*Ответ:*  $x = 4$ .

**Пример 43.** Решите уравнение  $(x+9)(x^2-3) = 6(x+9)$ .

*Неверный ответ:*  $x_1 = -3, x_2 = 3$ .

*Ошибка:* потерян корень  $x_3 = -9$ .

*Причина ошибки:* при делении обеих частей уравнения на  $x+9$  потерян корень  $x_3 = -9$ , при котором обе части уравнения обращаются в нуль. Следовало  $x+9$  вынести за скобку.

*Решение.*

$$(x+9)(x^2-3)=6(x+9), \text{ или } (x+9)(x^2-3-6)=0,$$

$$(x+9)(x^2-9)=0, (x+9)(x-3)(x+3)=0.$$

Откуда находим  $x_1 = -3, x_2 = 3, x_3 = -9$ .

Ответ:  $x_1 = -3, x_2 = 3, x_3 = -9$ .

**Пример 44.** Решите уравнение  $x^2 + |x-2| = 10$ .

Неверный ответ:  $x_1 = -4, x_2 = 3, x_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{33})$ .

Ошибка:  $x_1 = -4$  и  $x_4 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33})$  не являются корнями исходного уравнения.

Причина ошибки: корень  $x_1 = -4$  был найден при условии  $x \geq 2$  и этому условию не удовлетворяет, а корень  $x_4 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33})$  найден при условии  $x < 2$  и этому условию не удовлетворяет.

*Решение.*

$$x^2 + |x-2| = 10.$$

$$1) \begin{cases} x-2 \geq 0, \\ x^2 + x - 2 = 10; \end{cases} \begin{cases} x \geq 2, \\ x^2 + x - 12 = 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 2, \\ x_1 = -4, x_2 = 3. \end{cases}$$

Корень  $x_1 = -4$  не удовлетворяет условию  $x \geq 2$ , значит, при  $x \geq 2$  исходное уравнение имеет корень  $x_2 = 3$ .

$$2) \begin{cases} x-2 < 0, \\ x^2 - x + 2 = 10; \end{cases} \begin{cases} x < 2, \\ x^2 - x - 8 = 0; \end{cases} \begin{cases} x < 2, \\ x_{3,4} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{33}). \end{cases}$$

Так как  $x < 2$ , то корень  $x_3 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{33})$  не удовлетворяет, тогда

$x_4 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33})$  — корень исходного уравнения.

Ответ:  $3, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{33})$ .

**Пример 45.** Решите уравнение  $\sqrt{20-x^2} = 2-x$ .

Неверный ответ:  $x_1 = 4, x_2 = -2$ .

Ошибка:  $x_1 = 4$  не является корнем уравнения.

Причина ошибки: при  $x = 4$  правая часть уравнения отрицательна, что невозможно, так как  $2-x \geq 0$ .

*Решение.*

$$\sqrt{20-x^2} = 2-x.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат:  $20 - x^2 = 4 - 4x + x^2$ , или  $2x^2 - 4x - 16 = 0$ , или  $x^2 - 2x - 8 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 4, x_2 = -2$ .

При  $x = 4$  правая часть уравнения  $2 - x < 0$ , что невозможно, следовательно,  $x = 4$  — посторонний корень. Корень  $x = -2$  удовлетворяет исходному уравнению.

*Ответ:*  $x = -2$ .

**Пример 46.** Решите уравнение  $\sqrt[3]{x^2} = 2$ .

*Неверный ответ:*  $x = 2\sqrt{2}$ .

*Ошибка:* потерял корень  $x = -2\sqrt{2}$ .

*Причина ошибки:* переход от уравнения  $\sqrt[3]{x^2} = 2$  к уравнению  $x^{\frac{2}{3}} = 2$  не является равносильным, поскольку исходное уравнение имеет также корень  $x = -2\sqrt{2}$ , а уравнение  $x^{\frac{2}{3}} = 2$  имеет лишь один корень  $x = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$ , так как  $x > 0$  (по определению степени с дробным показателем).

*Решение.*

$\sqrt[3]{x^2} = 2$ , тогда  $x^2 = 2^3 = 8$ ,  $x_{1,2} = \pm \sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$ .

*Ответ:*  $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{2}$ .

**Пример 47.** Решите уравнение  $x^{\frac{2}{5}} = 4$ .

*Неверный ответ:*  $x_1 = -32$ ,  $x_2 = 32$ .

*Ошибка:*  $x_1 = -32$  не является корнем данного уравнения.

*Причина ошибки:* переход от уравнения  $x^{\frac{2}{5}} = 4$  к уравнению  $\sqrt[5]{x^2} = 4$  не является равносильным, так как для данного уравнения должно выполняться условие  $x > 0$  (по определению степени с дробным показателем), тогда как уравнение  $\sqrt[5]{x^2} = 4$  действительно имеет корни  $x_1 = -32$ ,  $x_2 = 32$ .

*Решение.*

$x^{\frac{2}{5}} = 4$ , тогда  $x = 4^{\frac{5}{2}}$ ,  $x = (2^2)^{\frac{5}{2}}$ ,  $x = 2^5 = 32$  — единственный корень уравнения.

*Ответ:*  $x = 32$ .

**Пример 48.** Решите уравнение  $16x^2 - 9 = (4x - 3)\sqrt{x^2 + 48}$ .

*Неверный ответ:*  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -2,6$ .

*Ошибка:* потерял корень  $x_3 = 0,75$  при делении обеих частей уравнения на  $4x - 3$ .

*Причина ошибки:* выражение  $4x - 3 = 0$  при  $x = 0,75$ , т. е.  $x_3 = 0,75$  — также корень уравнения,  $x_2 = -2,6$  — посторонний корень, так как при  $x = -2,6$  правая часть исходного уравнения отрицательна, а левая положительна.

*Решение.*

$16x^2 - 9 = (4x - 3)\sqrt{x^2 + 48}$ ,  $(4x - 3)(4x + 3) = (4x - 3)\sqrt{x^2 + 48}$ , или  $(4x - 3)(4x + 3 - \sqrt{x^2 + 48}) = 0$ , откуда  $4x - 3 = 0$ , или  $4x + 3 - \sqrt{x^2 + 48} = 0$ .

Из первого уравнения находим  $x = 0,75$  — корень уравнения.

Из второго уравнения имеем  $4x + 3 = \sqrt{x^2 + 48}$ , или  $16x^2 + 24x + 9 = x^2 + 48$ ,  $5x^2 + 8x - 13 = 0$ , откуда находим  $x = 1$ ,  $x = -2,6$  — посторонний корень.

*Ответ:* 1; 0,75.

**Пример 49.** Решите уравнение  $\sqrt{3x+4} - \sqrt{x+5} = 1$ .

*Неверный ответ:*  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = -1$ .

*Ошибка:*  $x_2 = -1$  не является корнем данного уравнения.

*Причина ошибки:* ошибка появилась в связи с тем, что при возведении обеих частей данного уравнения в квадрат получилось уравнение-следствие, не все корни которого являются корнями исходного уравнения.

*Решение.*

$\sqrt{3x+4} - \sqrt{x+5} = 1$ ,  $(\sqrt{3x+4} - \sqrt{x+5})^2 = 1$ , или  
 $3x + 4 + x + 5 - 2\sqrt{(3x+4)(x+5)} = 1$ ,  $4x + 8 = 2\sqrt{(3x+4)(x+5)}$ ,  
 $2(x + 2) = \sqrt{(3x+4)(x+5)}$ ,  $4(x^2 + 4x + 4) = 3x^2 + 4x + 15x + 20$ ,  
 $4x^2 + 16x + 16 = 3x^2 + 19x + 20$ ,  
 $x^2 - 3x - 4 = 0$ .

Откуда  $x_1 = 4$ ,  $x_2 = -1$ .

Проверка показывает, что  $x_2 = -1$  — посторонний корень.

*Ответ:*  $x = 4$ .

**Пример 50.** Решите уравнение  $(x - 5) \log_2 (2 - x) = 0$ .

*Неверный ответ:*  $x_1 = 5$ ;  $x_2 = 1$ .

*Ошибка:*  $x = 5$  не является корнем.

*Причина ошибки:*  $x = 5$  не удовлетворяет условию  $2 - x > 0$ , так как при  $x = 5$  множитель  $x - 5 = 0$ , а второй множитель при  $x = 5$  не имеет смысла.

*Решение.*

$(x - 5) \log_2 (2 - x) = 0$ , или  $\begin{cases} x - 5 = 0, \\ 2 - x > 0, \\ \log_2(2 - x) = 0, \end{cases}$

откуда  $2 - x = 2^0 = 1$ ,  $x = 1$  — корень уравнения.

*Ответ:*  $x = 1$ .

**Пример 51.** Решите уравнение  $\lg x^2 = 3$ .

*Неверный ответ:*  $x = 10\sqrt{10}$ .

*Ошибка:* потерян корень  $x = -10\sqrt{10}$ .

*Причина ошибки:* ошибка в применении формулы  $\lg x^2 = 2 \lg x$ .

Эта формула верна, если  $x > 0$ . Если  $x < 0$ , то  $\lg x^2 = 2 \lg (-x)$ .

*Решение.*

I способ

$\lg x^2 = 3$ , или  $2 \lg |x| = 3$ ,  $\lg |x| = \frac{3}{2}$ , откуда  $|x| = 10^{3/2} = \sqrt{10^3} = 10\sqrt{10}$ ,

тогда  $x_{1,2} = \pm 10\sqrt{10}$ .

II способ

$\lg x^2 = 3$ . По определению логарифма имеем

$x^2 = 10^3 = 1000$ ,  $x = \pm 10\sqrt{10}$ , где  $x \neq 0$  (по ОДЗ).

*Ответ:*  $-10\sqrt{10}$ ;  $10\sqrt{10}$ .

**Пример 52.** Решите уравнение  $\log_4 (17 - 8x) \cdot \log_{5-2x} 2 = 1$ .

*Неверный ответ:*  $x = 1$ ,  $x = 2$ .

*Ошибка:* число 2 не является корнем уравнения.

*Причина ошибки:* не учтено, что  $5 - 2x \neq 1$ , т. е.  $x \neq 2$ .

*Решение.*

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 17 - 8x > 0, \\ 5 - 2x > 0, \\ 5 - 2x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x < \frac{17}{8}, \\ x < \frac{5}{2}, \\ x \neq 2; \end{cases} \begin{cases} x < \frac{17}{8}, \\ x \neq 2. \end{cases}$$

Следовательно,  $x \in (-\infty; 2) \cup \left(2; \frac{17}{8}\right)$ .

Запишем уравнение в виде  $\log_4 (17 - 8x) \log_{(5-2x)^2} 2^2 = 1$ , или

$\log_4 (17 - 8x) = \log_4 (5 - 2x)^2$ , откуда  $17 - 8x = (5 - 2x)^2$ .

После упрощений получим квадратное уравнение

$4x^2 - 12x + 8 = 0$ , или  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ .

Корень  $x = 2$  не удовлетворяет ОДЗ.

Значит,  $x = 1$  — корень исходного уравнения.

*Ответ:*  $x = 1$ .

**Пример 53.** Решите уравнение  $25^{\frac{x-1}{x}} \cdot 4^x = 80$ .

*Неверный ответ:*  $x = 2$  и  $x = -1$ .

*Ошибка:* потерян корень  $x = -\log_5 4$ .

*Причина ошибки:* уравнение записали в виде

$$(5^2)^{\frac{x-1}{x}} \cdot 4^x = 5 \cdot 4^2, \text{ откуда сделан вывод, что } \frac{2(x-1)}{x} + x = 1 + 2,$$

решив, получили  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -1$ .

*Решение.*

Прологарифмируем данное уравнение по основанию 5 (или 2). Следует заметить, что можно, вообще говоря, логарифмировать по любому положительному основанию, не равному 1, но не совсем удачный выбор основания может привести к громоздким вычислениям.

$$\text{Имеем } \log_5 5^{\frac{2(x-1)}{x}} + \log_5 4^x = 80, \text{ или } \frac{2(x-1)}{x} + x \log_5 4 = \log_5 (16 \cdot 5),$$

$$\text{или } \frac{2(x-1)}{x} + x \log_5 4 = 2 \log_5 4 + 1.$$

Умножим обе части уравнения на  $x \neq 0$ :

$$2(x-1) + x^2 \log_5 4 - 2x \log_5 4 + x, \text{ или } (\log_5 4)x^2 + (1 - 2 \log_5 4)x - 2 = 0.$$

$$D = (1 - 2 \log_5 4)^2 + 8 \log_5 4 = (1 + 2 \log_5 4)^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2 \log_5 4} ((2 \log_5 4 - 1) \pm (2 \log_5 4 + 1)), \text{ откуда}$$

$$x_1 = \frac{1}{2 \log_5 4} (2 \log_5 4 + 2 \log_4 5) = \frac{4 \log_5 4}{2 \log_5 4} = 2,$$

$$x_2 = \frac{1}{2 \log_4 5} \cdot (-2) = -\frac{1}{\log_4 5} = -\log_5 4.$$

*Ответ:*  $-\log_5 4$ ; 2.

**Пример 54.** Решите уравнение  $x^{x-5} = 1$ .

*Неверный ответ:*  $x = 5$ .

*Ошибка:* потеряны корни  $x = -1$  и  $x = 1$ .

*Причина ошибки:* корень  $x = 5$  получен при условии  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ , по определению степени с целым показателем основание степени может быть 1 и  $-1$ .

*Решение.*

При  $x > 0$ ,  $x \neq 1$  получим  $x^{x-5} = x^0$ , откуда  $x = 5$ .

При  $x = 1$  получим  $1^{1-5} = 1$ , т. е. 1 — корень уравнения.

При  $x = -1$  имеем  $(-1)^{-1-5} = 1$ , т. е.  $x = -1$  — корень уравнения.

*Ответ:*  $-1$ ; 1; 5.

**Пример 55.** Решите уравнение  $\cos 3x = 0,5$ .

*Неверный ответ:*  $x = \pm \frac{\pi}{9} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Ошибка:* неверно найдено второе слагаемое.



*Причина ошибки:* второе слагаемое  $2\pi n$  не разделили на 3.

*Решение.*

$$\cos 3x = 0,5, \quad 3x = \pm \arccos 0,5 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 3x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad \text{откуда}$$
$$x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $\pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

**Пример 56.** Решите уравнение  $\cos x + \sin x = 1$ .

*Неверный ответ:*  $x = \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

*Ошибка:* посторонние решения  $x = \pi + 2\pi n, \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

*Причина ошибки:* обе части уравнения возвели в квадрат, что привело к появлению посторонних решений. Следовало сделать проверку корней.

*Решение.*

$$\sin x + \cos x = 1.$$

В книге «Научись решать уравнения различными способами» автором приводится 10 способов решения уравнения, один из которых мы приведем.

$$\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1, \quad \text{или, применяя формулу суммы синусов, имеем}$$

$$2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \text{или } \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{откуда}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \text{т. е. } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

## § 23. Ошибки при решении неравенств

**Пример 57.** Решите неравенство  $-4x \leq -8$ .

*Неверный ответ:*  $(-\infty; 2]$ .

*Ошибка:* неправильно найден промежуток изменения переменной.

*Причина ошибки:* при делении обеих частей неравенства на отрицательное число  $(-4)$  знак неравенства не был изменен.

*Решение.*

$$-4x \leq -8, \quad \text{или } x \geq 2.$$

*Ответ:*  $[2; +\infty).$

**Пример 58.** Решите неравенство  $\frac{1}{x} \leq -1$ .

*Неверный ответ:*  $[-1; +\infty)$ .

*Ошибка:* неправильно найден промежуток изменения переменной.

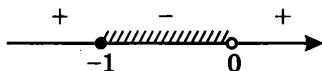
*Причина ошибки:* в освобождении от знаменателя дроби без учета его знака (число  $x$  может быть как положительным, так и отрицательным).

*Решение.*

$$\frac{1}{x} \leq -1, \frac{1}{x} + 1 \leq 0, \text{ или } \frac{x+1}{x} \leq 0.$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, находим

$$-1 \leq x < 0.$$



*Ответ:*  $[-1; 0)$ .

**Пример 59.** Решите неравенство  $x^2(x+2)(x+3) > 0$ .

*Неверный ответ:*  $(-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$ .

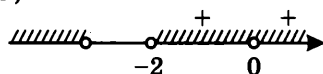
*Ошибка:* не учтено, что  $x \neq 0$ .

*Причина ошибки:* при решении данного неравенства методом интервалов не учтено, что  $x = 0$  — двойная точка и при переходе через нее функция  $f(x) = x^2(x+2)(x+3)$  не меняет знака.

*Решение.*

$$x^2(x+2)(x+3) > 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = -2, x_3 = -3,$$



$$x < -3, -2 < x < 0, x > 0.$$

*Ответ:*  $(-\infty; -3) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$ .

**Пример 60.** Решите неравенство  $(x-4)^2(x+1)(x-5) \geq 0$ .

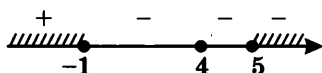
*Неверный ответ:*  $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$ .

*Ошибка:* пропущено решение  $x = 4$ .

*Причина ошибки:* при решении нестрогого неравенства в ответе необходимо записать все значения переменной, при котором данное неравенство обращается в верное числовое неравенство.

*Решение.*

$$(x-4)^2(x+1)(x-5) \geq 0, x_1 = 4, x_2 = -1, x_3 = 5.$$



Следовательно,  $x \leq -1, x = 4, x \geq 5$ .

*Ответ:*  $(-\infty; -1] \cup \{4\} \cup [5; +\infty)$ .

**Пример 61.** Решите неравенство  $\frac{(x-5)^2}{(2-x)(6+x)} < 0$ .

*Неверный ответ:*  $(-\infty; -6) \cup (2; +\infty)$ .

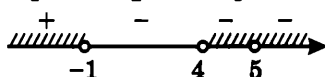
*Ошибка:*  $x = 5$  из интервала  $(2; +\infty)$  не является решением.

*Причина ошибки:* при решении неравенства из множества решений не исключено число 5, так как при  $x = 5$  неравенство обращается в равенство.

*Решение.*

$$\frac{(x-5)^2}{(2-x)(6+x)} < 0,$$

$$x_1 = 5, x_2 = 2, x_3 = -6.$$



Следовательно,  $x < -6$ ,  $2 < x < 5$ ,  $x > 5$ .

*Ответ:*  $(-\infty; -6) \cup (2; 5) \cup (5; +\infty)$ .

**Пример 62.** Решите неравенство  $\frac{|x-10|}{x^2+x+7} > 0$ .

*Неверный ответ:*  $x \in \mathbb{R}$ .

*Ошибка:* при  $x = 10$  левая часть неравенства обращается в нуль.

*Причина ошибки:* значение  $x = 10$  надо исключить из решения.

*Решение.*

Заметим, что  $x^2 + x + 7 > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , так как дискриминант  $D < 0$  и  $a = 1 > 0$ . Числитель дроби  $|x - 10| > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , кроме  $x = 10$ . Следовательно,  $x < 10$ ,  $x > 10$ .

*Ответ:*  $(-\infty; 10) \cup (10; +\infty)$ .

**Пример 63.** Решите неравенство  $(2x - 3)\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq 0$ .

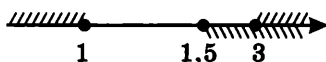
*Неверный ответ:*  $[3; +\infty)$ .

*Ошибка:* потеряно решение  $x = 1$ .

*Причина ошибки:* значение  $x = 1$  также является решением исходного неравенства, так как при этом левая часть неравенства обращается в нуль.

*Решение.*

Поскольку  $x^2 - 4x + 3 \geq 0$  при  $x \leq 1$  и  $x \geq 3$ , то знак исходного неравенства выполняется при  $x = 1$  и  $x \geq 3$ .



Следовательно,  $x = 1$ ,  $x \geq 3$ .

*Ответ:*  $\{1\} \cup [3; +\infty)$ .

**Пример 64.** Решите неравенство  $\frac{\sqrt{3x^2+4}}{x-1} \geq 4$ .

*Неверный ответ:*  $x \leq 2$ .

*Ошибка:* пропущено решение  $x > 1$ .

*Причина ошибки:* не учтено, что  $3x^2 + 4 > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , тогда  $x - 1 > 0$ , т. е.  $x > 1$ .

*Решение.*

Поскольку  $x > 1$  (что следует из условия), то данное неравенство запишем в виде  $\sqrt{3x^2+4} \geq 4(x-1)$ .

Так как обе части полученного неравенства положительны, то, возведя в квадрат, получим равносильное неравенство

$$3x^2 + 4 \geq 16x^2 - 32x + 16, \text{ или } 13x^2 - 32x + 12 \leq 0.$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, имеем

$$\frac{6}{13} \leq x \leq 2.$$



Так как  $x > 1$ , то получим  $1 < x \leq 2$ .

*Ответ:*  $(1; 2]$ .

**Пример 65.** Решите неравенство  $\sqrt{3x-2} + \sqrt{9-x} + \sqrt{4+x} > 0$ .

*Неверный ответ:*  $x \in \mathbb{R}$ .

*Ошибка:* квадратные корни определены не для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

*Причина ошибки:* не учтена область определения квадратных корней.

*Решение.*

Данное неравенство с учетом области определения арифметического корня равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 3x-2 \geq 0, \\ 9-x \geq 0, \\ 4+x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq \frac{2}{3}, \\ x \leq 9, \\ x \geq -4; \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x \geq \frac{2}{3}, \\ x \leq 9. \end{cases}$$

Следовательно,  $\frac{2}{3} \leq x \leq 9$ .

*Ответ:*  $\left[\frac{2}{3}; 9\right]$ .

**Пример 66.** Решите неравенство  $\sqrt{(0,6x-3)^2} > 0$ .

*Неверный ответ:*  $x \in \mathbb{R}$ .

*Ошибка:* при  $x = 5$  знак неравенства не выполняется.

**Причина ошибки:** надо учесть, что неравенство строгое.

**Решение.**

Поскольку  $\sqrt{x^2} = |x|$ , то данное неравенство запишется в виде  $|0,6x - 3| > 0$ .

Полученное неравенство выполняется при любом  $x \in R$ , кроме тех значений, при которых  $0,6x - 3 = 0$ , т. е.  $0,6x = 3$ , откуда  $x = 5$ .

Следовательно,  $x \neq 5$ .

**Ответ:**  $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$ .

**Пример 67.** Решите неравенство  $\sqrt{4-3x} > x$ .

**Неверный ответ:**  $[0; 1)$ .

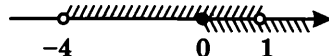
**Ошибка:** пропущены решения  $(-\infty; 0)$ .

**Причина ошибки:** при решении неравенства рассмотрен лишь случай, когда правая часть неравенства неотрицательна.

**Решение.**

Данное неравенство равносильно совокупности систем неравенств:

а)  $\begin{cases} x \geq 0, \\ 4-3x > x^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + 3x - 4 < 0. \end{cases}$



Следовательно,  $0 \leq x < 1$ .

б)  $\begin{cases} x < 0, \\ 4-3x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ x < 4/3, \end{cases} \text{ откуда } x < 0.$

Тогда решением исходного неравенства будет объединение полученных решений, т. е.  $x < 1$ .

**Ответ:**  $(-\infty; 1)$ .

**Пример 68.** Решите неравенство  $|x^2 - 4x + 3| \leq 3x - x^2$ .

**Неверный ответ:**  $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

**Ошибка:** указанный промежуток не является решением данного неравенства.

**Причина ошибки:** не учтено условие  $3x - x^2 \geq 0$ , при котором данное неравенство имеет решение.

**Решение.**

Запишем данное неравенство в виде  $3x - x^2 \geq |x^2 - 4x + 3|$ .

Отсюда видно, что  $3x - x^2 \geq 0$ . Но тогда обе части полученного неравенства неотрицательны и мы можем возвести их в квадрат.

Получим систему неравенств

$$\begin{cases} 3x - x^2 \geq 0, \\ |x^2 - 4x + 3|^2 \leq (3x - x^2)^2. \end{cases}$$

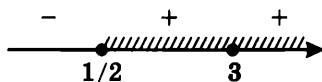
Решим I неравенство полученной системы методом интервалов:

$$x(3 - x) \geq 0, \text{ откуда } 0 \leq x \leq 3.$$

Из II неравенства системы имеем

$$(x^2 - 4x + 3)^2 - (3x - x^2)^2 \leq 0, \text{ или } (x - 1)^2(x - 3)^2 - x^2(x - 3)^2 \leq 0,$$

$$(x - 3)^2(2x - 1) \geq 0, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$



Значит,  $x \geq \frac{1}{2}$ .

Следовательно, решением системы неравенств, а значит, и данного неравенства будет  $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$ .

Ответ:  $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ .

**Пример 69.** Решите неравенство  $0,3^{x-5} > 1$ .

*Неверный ответ:*  $(5; +\infty)$ .

*Ошибка:* не изменен знак неравенства.

*Причина ошибки:* так как  $0 < 0,3 < 1$ , то показательная функция  $y = 0,3^t$  — убывающая.

*Решение.*

$$0,3^{x-5} > 1, \text{ или } 0,3^{x-5} > 0,3^0, \text{ откуда } x - 5 < 0, \text{ т. е. } x < 5.$$

Ответ:  $(-\infty; 5)$ .

**Пример 70.** Решите неравенство  $0,09^x + 0,3^x - 2 \leq 0$ .

*Неверный ответ:*  $(-\infty; 0]$ .

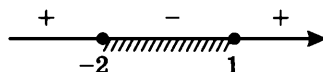
*Ошибка:* неверно решено неравенство  $0,3^x \leq 1$ .

*Причина ошибки:* не учтено, что функция  $y = 0,3^x$  — убывающая, так как  $0 < 0,3 < 1$ .

*Решение.*

Пусть  $0,3^x = t$ , где  $t > 0$ , тогда получим  $t^2 + t - 2 \leq 0$ . Решая методом интервалов, имеем  $t_1 = -2$ ,  $t_2 = 1$ .

Так как  $t > 0$ , то  $0 < t \leq 1$ .



Значит,  $0,3^x \leq 1$ , или  $0,3^x \leq 0,3^0$ , откуда  $x \geq 0$ , т. е.  $x \in [0; +\infty)$ .

Ответ:  $[0; +\infty)$ .

**Пример 71.** Решите неравенство  $\log_{0,2} x \geq 3$ .

*Неверный ответ:*  $[0,008; +\infty)$ .

*Ошибка:* не изменен знак неравенства.

*Причина ошибки:* не учтено, что функция  $y = \log_{0,2} x$  — убывающая.

*Решение.*

Так как  $0 < 0,2 < 1$ , то функция  $y = \log_{0,2} x$  — убывающая, тогда данное неравенство с учетом ОДЗ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x \leq 0,2^3, \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0,008, \\ x > 0, \end{cases} \quad \text{откуда } x \in (0; 0,008].$$

*Ответ:*  $(0; 0,008]$ .

**Пример 72.** Решите неравенство  $\lg(x - 6) + \lg(x + 3) \leq 1$ .

*Неверный ответ:*  $[4; 7]$ .

*Ошибка:* не учтена ОДЗ.

*Причина ошибки:*  $x > 6$ .

*Решение.*

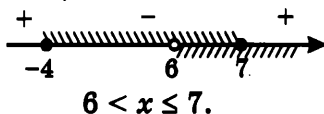
Потенцируя, получим  $\lg(x - 6)(x + 3) \leq 1$ .

Так как основание логарифма  $10 > 1$ , то полученное неравенство с учетом ОДЗ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 6)(x + 3) \leq 10, \\ x - 6 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3x - 28 \leq 0, \\ x > 6. \end{cases}$$

Решая методом интервалов, имеем

$$x_1 = 7, \quad x_2 = -4.$$



*Ответ:*  $(6; 7]$ .

## § 24. Ошибки при исследовании функций, их свойств и построении графиков

**Пример 73.** Найдите область определения функции  $y = \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$ .

*Неверный ответ:*  $D(y) = [-2; 2]$ .

*Ошибка:* неверно указан промежуток.

*Причина ошибки:* при решении неравенства методом интервалов ошибочно установлены знаки промежутков, на которых выполняется неравенство.

*Решение.*

Корень четной степени имеет смысл, если  $\frac{x+2}{x-2} \geq 0$ .

Решая неравенство методом интервалов, находим  $x \leq -2, x > 2$ .

*Ответ:*  $D(y) = (-\infty; -2] \cup (2; +\infty)$ .

**Пример 74.** Найдите множество значений функции  $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

*Неверный ответ:*  $(0; +\infty)$ .

*Ошибка:* не все значения  $y$  из  $(0; +\infty)$  принадлежат  $E(y)$ , например,  $y \neq 1$  ни при каком  $x$ .

*Причина ошибки:* не учтено, что  $x^2 \geq 0$ ,  $y \neq 1$ .

*Решение.*

Запишем данную функцию в виде  $y(x^2 + 1) = x^2 - 1$ , где  $x^2 + 1 > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , или  $x^2(y - 1) + y + 1 = 0$ .

Понятно, что  $y \neq 1$ , тогда  $x^2 = \frac{1+y}{1-y}$ .

Значит, из того, что  $x^2 \geq 0$ , имеем  $\frac{1+y}{1-y} \geq 0$ , откуда, решая методом интервалов, находим  $-1 \leq y < 1$ , т. е.  $E(y) = [-1; 1)$ .

*Ответ:*  $[-1; 1)$ .

**Пример 75.** Найдите множество значений функции

$$y = x^2 - 4x + 11.$$

*Неверный ответ:*  $(0; +\infty)$ .

*Ошибка:* не все значения  $y$  из промежутка  $(0; +\infty)$  принадлежат  $E(y)$ , например,  $y \neq -1; 0; 2$  ни при каком  $x$ .

*Причина ошибки:* поскольку дискриминант  $D < 0$  и  $a = 1 > 0$ , то  $y > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ .

*Решение.*

Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вверх, так как  $a = 1 > 0$ . Парабола целиком расположена выше оси  $Ox$ , так как  $D < 0$ .

Абсцисса  $x_0$  параболы определяется по формуле  $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$ , тогда

ордината  $y_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 + 11 = 7$ . Значит,  $E(y) = [7; +\infty)$ .

*Ответ:*  $[7; +\infty)$ .

**Пример 76.** Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{2x^2 - 8x + 19}{x^2 - 4x + 9}.$$

*Неверный ответ:*  $y = 1$ .

*Ошибка:* не все значения принадлежат  $E(y)$ , например,  $y \neq 1$ ,  $y \neq 3$  ни при каком значении  $x$ .

*Причина ошибки:* из условия следует, что  $y > 0$ , так как  $2x^2 - 8x + 19 > 0$  и  $x^2 - 4x + 9 > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ .



*Решение.*

$$y = \frac{2x^2 - 8x + 19}{x^2 - 4x + 9} = \frac{2(x^2 - 4x + 9) + 1}{x^2 - 4x + 9} = 2 + \frac{1}{x^2 - 4x + 9} = 2 + \frac{1}{(x-2)^2 + 5}.$$

Следовательно, данная функция достигает наибольшего значения при наименьшем значении знаменателя полученной дроби, что достигается при  $x = 2$ .

Тогда  $y_{\text{наиб.}} = y(2) = 2 + \frac{1}{5} = 2,2$ .

*Ответ:* 2,2.

**Пример 77.** Постройте график функции  $y = \frac{x^2}{|x|}$ .

*Неверный ответ:* рис. 1.

*Ошибка:*  $|x| \neq x$ , так как по определению модуля числа

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

*Решение* (рис. 2).

$$y = \frac{x^2}{|x|} = \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

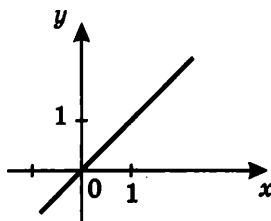


Рис. 1

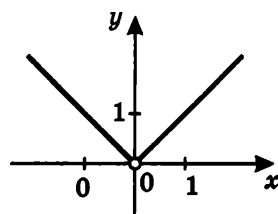


Рис. 2

**Пример 78.** Постройте график функции  $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$ .

*Неверный ответ:* рис. 3.

*Ошибка:* функция не определена, если  $x + 3 = 0$ , т. е. при  $x = -3$ .

*Причина ошибки:* из рисунка надо исключить точку  $x = -3$ .

*Решение* (рис. 4).

$$y = \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = x-3, \quad x \neq -3.$$

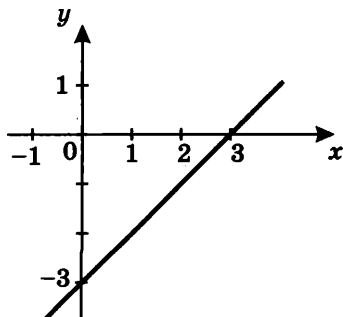


Рис. 3

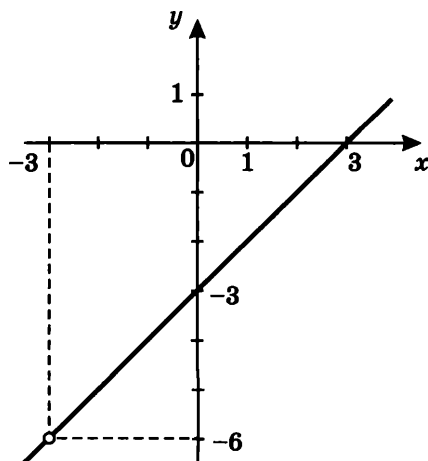


Рис. 4

**Пример 79.** Постройте график уравнения  $\frac{y^2 - 2y + 1}{|y - 1|} = x - 3$ .

*Неверный ответ:* рис. 5.

*Ошибка:*  $|y - 1| \neq y - 1$ .

*Причина ошибки:*  $\frac{y^2 - 2y + 1}{|y - 1|} \neq y - 1$ .

*Решение* (рис. 6).

$$\frac{(y-1)^2}{|y-1|} = x - 3.$$

$$1) \begin{cases} y > 1, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} y < 1, \\ y = 4 - x. \end{cases}$$

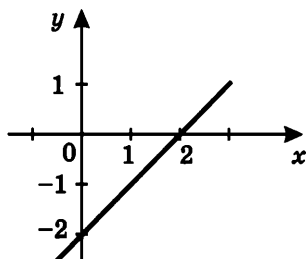


Рис. 5

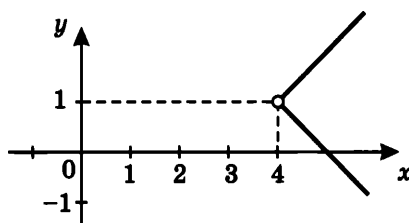


Рис. 6

**Пример 80.** Найдите производную функции  $y = \sin^2 x$ .

*Неверный ответ:*  $2 \cos x$ .

*Ошибка:* не учтено, что функция сложная.

*Причина ошибки:* к сложной функции применено правило дифференцирования функции  $y = x^n$ .

*Решение.*

$$y' = (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cdot (\sin x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x.$$

*Ответ:*  $\sin 2x$ .

**Пример 81.** Найдите производную функции  $y = \operatorname{tg}(2 - 3x)$ .

*Неверный ответ:*  $-\frac{3}{\cos^2 x}$ .

*Ошибка:* в знаменателе должно быть  $\cos^2(2 - 3x)$ .

*Причина ошибки:* не учтено, что функция сложная.

*Решение.*

$$y' = (\operatorname{tg}(2 - 3x))' = \frac{(2 - 3x)'}{\cos^2(2 - 3x)} = -\frac{3}{\cos^2(2 - 3x)}.$$

*Ответ:*  $-\frac{3}{\cos^2(2 - 3x)}$ .

**Пример 82.** Найдите производную функции  $y = \sqrt{2x^3 - 1}$ .

*Неверный ответ:*  $\frac{1}{2\sqrt{2x^3 - 1}}$ .

*Ошибка:* не найдена производная  $2x^3 - 1$ .

*Причина ошибки:* к данной функции применена формула  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

*Решение.*

$$y' = (\sqrt{2x^3 - 1})' = \frac{(2x^3 - 1)'}{2\sqrt{2x^3 - 1}} = \frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3 - 1}} = \frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 - 1}}.$$

*Ответ:*  $\frac{3x^2}{\sqrt{2x^3 - 1}}$ .

**Пример 83.** Найдите производную функции  $y = \sqrt{x^3}$ .

*Неверный ответ:*  $\sqrt{3x^2}$ .

*Ошибка:* найдена производная подкоренного выражения.

*Причина ошибки:* функцию надо представить в виде степенной.

*Решение.*

$$y' = (\sqrt{x^3})' = (x^{3/2})' = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

*Ответ:*  $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ .

**Пример 84.** Найдите производную функции  $y = \frac{1}{x^3}$ .

*Неверный ответ:*  $\frac{1}{3x^2}$ .

*Ошибка:* найдена производная знаменателя дроби.

*Причина ошибки:* функцию надо представить в виде степенной.

*Решение.*

$$y' = \left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}.$$

*Ответ:*  $-\frac{3}{x^4}$ .

**Пример 85.** Найдите производную функции  $y = x^3(2x^2 - 3)$ .

*Неверный ответ:*  $12x^3$ .

*Ошибка:* найдена производная каждого множителя.

*Причина ошибки:* неправильно применено правило дифференцирования произведения.

*Решение.*

$$y' = (x^3(2x^2 - 3))' = (2x^5 - 3x^3)' = 10x^4 - 9x^2.$$

*Ответ:*  $10x^4 - 9x^2$ .

# КРАТКИЕ СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

### 1. Уравнение I степени (линейное)

Общий вид:  $ax + b = 0$ .

- 1) Если  $a \neq 0$ ,  $a \in R$ ,  $b \in R$ , то  $x = -\frac{b}{a}$  (корень уравнения).
- 2) Если  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , то корней нет.
- 3) Если  $a = b = 0$ , то уравнение имеет бесконечно много корней.

### 2. Система линейных уравнений

Пусть дана система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

- 1) Если  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ , то система имеет единственное решение (прямые пересекаются в одной точке).
- 2) Если  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ , то система не имеет решений (прямые не пересекаются, т. е. параллельны).
- 3) Если  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ , то система имеет бесконечное множество решений (прямые совпадают).

### 3. Уравнение II степени (квадратное)

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где  $a \neq 0$ ,  $a$  — I (старший) коэффициент,  $b$  — II коэффициент,  $c$  — свободный член.

$D = b^2 - 4ac$  — дискриминант (различитель).

1) Если  $D > 0$ , то уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

2) Если  $D = 0$ , то  $x = -\frac{b}{2a}$  — один корень.

3) Если  $D < 0$ , корней нет (действительных).

### **Частные случаи**

1) Неполные квадратные уравнения:

а)  $ax^2 + c = 0$ ,  $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ , если коэффициенты  $a$  и  $c$  имеют разные знаки; если коэффициенты  $a$  и  $c$  имеют одинаковые знаки, то корней нет;

б)  $ax^2 + bx = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -\frac{b}{a}$ ;

в)  $ax^2 = 0$ ,  $x = 0$ .

2) Квадратное уравнение приведенного вида

$$x^2 + px + q = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

3) Квадратное уравнение вида  $ax^2 + 2kx + c = 0$ ,

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

4) Если в квадратном уравнении  $ax^2 + bx + c = 0$

$a + b + c = 0$ , то  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -\frac{c}{a}$ ;

$a - b + c = 0$ , то  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -\frac{c}{a}$ .

## **4. Теорема Виета**

а) Для квадратного уравнения общего вида  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ;

б) для приведенного вида  $x_1 + x_2 = -p$ ;  $x_1 x_2 = q$ .

### **Теорема, обратная теореме Виета**

Если  $p$ ,  $q$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  таковы, что  $x_1 + x_2 = -p$ ;  $x_1 x_2 = q$ , то  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$ .

### Теорема Виета для кубического уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Если  $x_1, x_2, x_3$  — корни уравнения, то  $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ ;

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = b; \quad x_1x_2x_3 = -c.$$

## 5. Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — корни трехчлена,  $D > 0$ .

Если  $D = 0$ , то  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ .

## 6. Биквадратное уравнение

Общий вид:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ,  $a \neq 0$ .

Заменой  $x^2 = y$  приводят к квадратному виду  $ay^2 + by + c = 0$ .

Корни биквадратного уравнения:

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}},$$

где  $D = b^2 - 4ac$ .

### Свойства корней

1. Если биквадратное уравнение имеет корень  $x_0$ , то оно имеет и корень  $-x_0$ .

2. Сумма корней биквадратного уравнения равна нулю (по теореме Виета).

*Замечание.* Для вычисления корней биквадратного уравнения часто удобно воспользоваться **формулой сложного радикала**:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( A + \sqrt{A^2 - B} \right)} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( A - \sqrt{A^2 - B} \right)}.$$

Последняя полезна лишь в случае, если  $\sqrt{A^2 - B}$  есть рациональное число.

## 7. Возвратное уравнение IV степени

Общий вид:  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bmx + am^2 = 0$ ,  $a \neq 0$ .

Приводится к виду  $a \left( x^2 + \frac{m^2}{x^2} \right) + b \left( x + \frac{m}{x} \right) + c = 0$  и заменой  $y = x + \frac{m}{x}$  и

$y^2 - 2m = x^2 + \frac{m^2}{x^2}$  приводится к квадратному уравнению

$$ay^2 + by + (c - 2am) = 0.$$

### Частные случаи

1)  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ , ( $m = 1$ ) — симметрическое уравнение I рода.

Решается подстановкой  $y = x + \frac{1}{x}$ ;

2)  $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$ , ( $m = -1$ ) — симметрическое уравнение II рода.

Решается подстановкой  $y = x - \frac{1}{x}$ .

## 8. Свойства степеней

Для любых  $x$ ,  $y$  и  $a > 0$ ,  $b > 0$  верны равенства:

$a^0 = 1$  (по определению);

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ;

$a^x : a^y = a^{x-y}$ ;

$(a^x)^y = a^{xy}$ ;

$(ab)^x = a^x b^x$ ;

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ ;

$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ ;

$a^{-1} = \frac{1}{a}$ .

## 9. Формулы сокращенного умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  — разность квадратов;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  — квадрат суммы;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  — квадрат разности;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  — куб суммы;

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  — куб разности;

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$  — сумма кубов;

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$  — разность кубов.

### Дополнительные формулы

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ ;

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$ ;

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$ ;

$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ ;

$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ ;

$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ ;

$a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$ ;

$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$ .

## 10. Свойства арифметических корней

Для любых натуральных  $n > 1$  и  $k > 1$  и любых  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  верны равенства:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); & (\sqrt[n]{a})^k &= \sqrt[n]{a^k}; \\ \sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[nk]{a}; & \sqrt[n]{a} &= \sqrt[nk]{a^k}; & (\sqrt[n]{a})^n &= a \quad (a \geq 0); \\ \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, & \text{ если } 0 \leq a < b; & \sqrt{a^2} &= |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0; \end{cases} \\ \sqrt[2n]{a^{2n}} &= |a|; & \sqrt[2n+1]{-a} &= -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0). \end{aligned}$$

## 11. Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1; & 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}; & 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \\ \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha}; & \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha}. \end{aligned}$$

## 12. Формулы сложения

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; & \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \end{aligned}$$

### Дополнительные формулы

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}; \quad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta};$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \\ &- \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma; \\ \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \\ &- \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$



### 13. Формулы двойных и тройных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

### 14. Формулы половинного аргумента

(для функций  $\sin$  и  $\cos$  — формулы понижения степени)

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2};$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha};$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

### 15. Универсальные тригонометрические подстановки

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

### 16. Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi), \text{ где } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

### **Дополнительные формулы**

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}; \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}; \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta};$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha); \quad \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha);$$

$$1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right); \quad 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha; \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

## **17. Формулы преобразования произведения в сумму**

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta);$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta);$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta).$$

### **Дополнительные формулы**

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha;$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

## **18. Радианная и градусная меры углов**

$$1 \text{ рад.} = \left( \frac{180}{\pi} \right)^\circ; \quad 1 \text{ рад.} \approx 57,3^\circ;$$

$$\alpha \text{ рад.} = \left( \frac{180}{\pi} \cdot \alpha \right)^\circ; \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад.};$$

$$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ рад.};$$

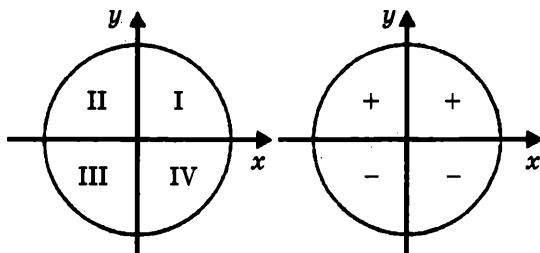
$l = \alpha R$  — длина дуги окружности;

$\alpha$  — угол в радианах;

$R$  — радиус окружности;

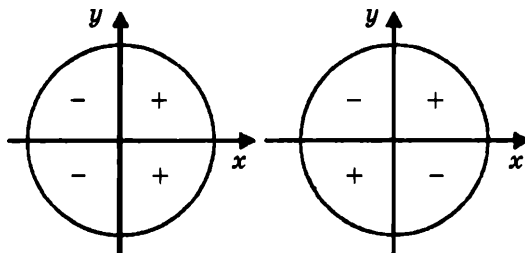
$$S = \frac{R^2}{2} \alpha \text{ — площадь кругового сектора, } 0 < \alpha < \pi.$$

## 19. Знаки тригонометрических функций



Четверти

Знаки sin



Знаки cos

Знаки tg и ctg

## 20. Формулы приведения

Функция $\alpha$	Аргумент $\alpha$							
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
sin	cosa	cosa	sina	-sina	-cosa	-cosa	-sina	sina
cos	sina	-sina	-cosa	-cosa	-sina	sina	cosa	cosa
tg	ctga	-ctga	-tga	tga	ctga	-ctga	-tga	tga
ctg	tga	-tga	-ctga	ctga	tga	-tga	-ctga	ctga

## 21. Значения тригонометрических функций для некоторых углов

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
sin $\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos $\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg $\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctg $\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0	-

## 22. Периоды тригонометрических функций

Периоды функций  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$  равны  $2\pi$ .

Периоды функций  $y = \operatorname{tg} x$  и  $y = \operatorname{ctg} x$  равны  $\pi$ .

Периоды функций  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  и  $y = A \cos(\omega x + \varphi)$  находят по формуле  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , а функций  $y = A \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$  и  $y = A \operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$  — по формуле  $T = \frac{\pi}{\omega}$ .

## 23. Обратные тригонометрические функции

Функция	Область определения	Область значений
$y = \arcsin x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \operatorname{arctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arccotg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$0 < y < \pi$

$$\sin(\arcsin x) = x, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x;$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arccotg} x) = \frac{1}{x}, x \neq 0;$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1;$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$$

$$\cos(\arccos x) = x, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arccotg} x) = x;$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, x \neq 0;$$

$$\sin(\operatorname{arccotg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arccotg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg} x;$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}.$$

## 24. Значения обратных тригонометрических функций некоторых углов

$x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\pi$

$x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

## 25. Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a$ , где  $|a| \leq 1$ ,  $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$\cos x = a$ ,  $|a| \leq 1$ ,  $x = \pm \arccos a + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$\operatorname{tg} x = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$\operatorname{ctg} x = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Частные случаи ( $a = 0$ ,  $a = 1$ ,  $a = -1$ )*

$\sin x = 0$ ,  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$\cos x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$\operatorname{tg} x = 0$ ,  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$\operatorname{ctg} x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$\sin x = 1$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$\cos x = 1$ ,  $x = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$\sin x = -1$ ,  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$\cos x = -1$ ,  $x = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 26. Средние величины

1. Среднее арифметическое

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

2. Среднее геометрическое  $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ .

### 3. Среднее гармоническое

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

### 4. Среднее квадратичное

$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

### 5. Среднее взвешенное

$$V = \frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

## 27. Некоторые важные неравенства

### 1. Неравенство Коши:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \text{ где } x \geq 0, y \geq 0.$$

### 2. Неравенство треугольника:

$$|x + a| \leq |x| + |a|.$$

### 3. Неравенство для двух взаимно обратных величин:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \text{ где } x > 0.$$

$$4. \frac{a^2 + 1}{2} \geq 2.$$

$$5. \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

## 28. Прогрессии

### 1. Арифметическая прогрессия

( $a_1$  — 1-й член,  $d$  — разность,

$n$  — число членов,  $a_n$  —  $n$ -й член,  $S_n$  — сумма  $n$  первых членов).

Определение арифметической прогрессии:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Формула  $n$ -го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Формула суммы  $n$  первых членов:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Характеристическое свойство:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}), \text{ где } n > 1.$$

## 2. Геометрическая прогрессия

( $b_1$  — 1-й член,  $q$  — знаменатель ( $q \neq 0$ ),  $n$  — число членов,  $b_n$  —  $n$ -й член,  $S_n$  — сумма  $n$  первых членов).

Определение геометрической прогрессии:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \text{ где } b_1 \neq 0, q \neq 0.$$

Формула  $n$ -го члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Формула суммы  $n$  первых членов:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}; S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ где } q \neq 1.$$

Характеристическое свойство:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Формула суммы членов бесконечной геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \text{ где } |q| < 1.$$

## 29. Логарифмы и их свойства

1. Если  $x > 0$ , то  $x = a^{\log_a x}$  — основное логарифмическое тождество.

2.  $\log_a a = 1$ .

3.  $\log_a 1 = 0$ .

4. Если  $x > 0$ ,  $y > 0$ , то  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$  — логарифм произведения.

5.  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$  — логарифм частного.

6. Если  $x > 0$ ,  $p \in R$ , то  $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$  — логарифм степени.

7. Если  $x > 0$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ , то  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$  — формула перехода от

основания  $a$  к основанию  $b$ .

В частности, если  $x = b$ , то  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ , или  $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ .

8.  $\log_a b = \log_{a^p} b^p = p \log_{a^p} b$  ( $p \in R$ ,  $p \neq 0$ ).

9. Если  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $p \neq 0$ , то  $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$ .

10.  $\log_a x \cdot \log_b y = \log_{ay} x \cdot \log_{bx} y$ , где  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b \neq 1$ .

11.  $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$ ;  $a, b, c > 0$ ,  $a \neq 1$ .

## 30. Неравенства

### 1. Основные свойства числовых неравенств

1. Если  $a > b$ , то  $b < a$ .
2. Если  $a > b$  и  $b > c$ , то  $a > c$ .
3. Если  $a > b$ , то  $a + c > b + c$ ,  $a - c > b - c$  для любого  $c$ .
4.  $ac > bc$  при  $c > 0$ ;  $ac < bc$  при  $c < 0$ .  
 $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$  при  $c > 0$ ;  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$  при  $c < 0$ .
5. Если  $0 < a < b$ , то  $a^c < b^c$  при  $c > 0$ ,  $a^c > b^c$  при  $c < 0$ .
6. Если  $a > b$ ,  $c > d$ , то  $a + c > b + d$ ,  $a - d > b - c$ .
7. Если  $a > b > 0$ ,  $c > d > 0$ , то  $ac > bd$ ,  $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ .
8. Если  $a < x < b$ , то  $(x - a)(x - b) < 0$ , и обратно.

### 2. Неравенство I степени (линейное)

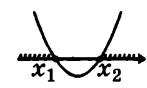
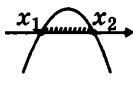


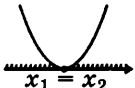
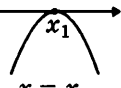
Общий вид:  $ax + b > 0$ .

1. Если  $a > 0$ , то  $x > -\frac{b}{a}$ .
2. Если  $a < 0$ , то  $x < -\frac{b}{a}$ .
3. Если  $a = 0$ , то при  $b > 0$   $x \in R$ , при  $b \leq 0$  решений нет.

### 3. Неравенство II степени (квадратное)

Общий вид:  $ax^2 + bx + c \geq 0$ ,  $a \neq 0$ .

В зависимости от знака  $a$  и от знака дискриминанта  $D = b^2 - 4ac$  имеем 6 возможностей:

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$	 $x \leq x_1, x \geq x_2$	 $x_1 \leq x \leq x_2$
$D < 0$	 $x \in R$	 Решений нет
$D = 0$	 $x_1 = x_2$ $x \in R$	 $x = x_1$



#### 4. Иррациональные неравенства

1. Иррациональное неравенство  $\sqrt{f(x)} < g(x)$  равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 < (g(x))^2. \end{cases}$$

2. Иррациональное неравенство  $\sqrt{f(x)} > g(x)$  равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 > (g(x))^2; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

#### 5. Показательное неравенство

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$  при  $a > 1$  равносильно неравенству того же смысла  $f(x) > g(x)$ , а при  $0 < a < 1$  — неравенству  $f(x) < g(x)$ .

При решении показательных неравенств пользуются свойствами неравенств, содержащих степени.

1. При всех допустимых значениях  $a$  и  $b$  справедливы следующие утверждения:

- 1) неравенства  $a^b > 1$  и  $(a - 1)b > 0$  равносильны;
- 2) неравенства  $a^b \geq 1$  и  $(a - 1)b \geq 0$  равносильны;
- 3) неравенства  $a^b < 1$  и  $(a - 1)b < 0$  равносильны;
- 4) неравенства  $a^b \leq 1$  и  $(a - 1)b \leq 0$  равносильны.

2. При всех допустимых значениях  $a$ ,  $b$  и  $c$  справедливы следующие утверждения:

- 1) неравенства  $a^b > a^c$  и  $(a - 1)(b - c) > 0$  равносильны;
- 2) неравенства  $a^b \geq a^c$  и  $(a - 1)(b - c) \geq 0$  равносильны;
- 3) неравенства  $a^b < a^c$  и  $(a - 1)(b - c) < 0$  равносильны;
- 4) неравенства  $a^b \leq a^c$  и  $(a - 1)(b - c) \leq 0$  равносильны.

#### 6. Логарифмическое неравенство

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$  при  $a > 1$  равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases}$$

а при  $0 < a < 1$  — системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

При решении логарифмических неравенств пользуются следующими свойствами:

1. При всех допустимых значениях  $a$ ,  $b$  и  $c$ , таких, что  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ , справедливы утверждения:

1) неравенства  $\log_a b > \log_a c$  и  $(a - 1)(b - c) > 0$  равносильны;

2) неравенства  $\log_a b \geq \log_a c$  и  $(a - 1)(b - c) \geq 0$  равносильны;

3) неравенства  $\log_a b < \log_a c$  и  $(a - 1)(b - c) < 0$  равносильны;

4) неравенства  $\log_a b \leq \log_a c$  и  $(a - 1)(b - c) \leq 0$  равносильны.

2.

1) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c d > 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) > 0$  равносильны;

2) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c d \geq 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) \geq 0$  равносильны;

3) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c d < 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) < 0$  равносильны;

4) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c d \leq 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) \leq 0$  равносильны.

3.

1) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c b > 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) > 0$  равносильны;

2) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c b \geq 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) \geq 0$  равносильны;

3) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c b < 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) < 0$  равносильны;

4) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c b \leq 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) \leq 0$  равносильны.

### **7. Тригонометрические неравенства**

$\sin x > a$ ,  $\cos x > a$ ,  $\operatorname{tg} x > a$ ,  $\operatorname{ctg} x > a$  (вместо знака  $>$  могут быть знаки  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ ) решаются графически: находят точки пересечения графика функции с прямой  $y = a$ , расположенной ближе к началу координат, а затем используют периодичность функции.

Тригонометрические неравенства можно решать и с помощью единичного круга.

## 31. Таблица производных и первообразных элементарных и сложных функций

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Первообразная $F(x)$
$C$ , где $C - \text{const}$	$0$	$Cx$
$Cx$	$C$	$\frac{1}{2}Cx^2$
$x^p, p \in R$	$px^{p-1}$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$ax + b, a \neq 0$	$a$	$\frac{1}{2}ax^2 + bx + C$
$(ax + b)^p$	$pa(ax + b)^{p-1}$	$\frac{(ax + b)^{p+1}}{a(p+1)} + C$
$e^x$	$e^x$	$e^x$
$e^{ax+b}, a \neq 0$	$ae^{ax+b}$	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$a^x, a > 0, a \neq 0$	$a^x \ln a$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$a^{kx+b}, a > 0, a \neq 0$	$ka^{kx+b} \ln a$	$\frac{a^{kx+b}}{k \ln a} + C$
$\ln x, x > 0$	$\frac{1}{x}$	$x \ln x - x + C$
$\ln(ax + b), a \neq 0$	$\frac{a}{ax+b}$	$-$
$\log_a x, x > 0, a > 0$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$
$\log_a(kx + b)$	$\frac{k}{(kx+b) \ln a}$	$-$
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\ln \cos x  + C$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\ln \sin x  + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-$	$-\operatorname{ctg} x + C$

## 32. Правила дифференцирования

( $u, v$  — функции,  $C$  — const)

$$(Cu)' = Cu';$$

$$(u + v)' = u' + v';$$

$$(uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2};$$

$$\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C}{v^2};$$

$$\left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}.$$

$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ , где  $g(f(x))$  — сложная функция.

## 33. Уравнение касательной

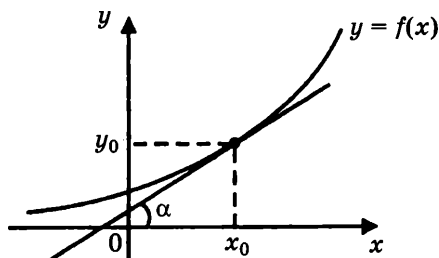
Уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

где  $(x_0, y_0)$  — точка касания.

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = k,$$

где  $k$  — угловой коэффициент касательной к графику функции.



## 34. Правила нахождения первообразных

1. Если  $F$  — первообразная для  $f$ , а  $H$  — первообразная для  $h$ , то  $F + H$  есть первообразная для  $f + h$ .

2. Если  $F$  — первообразная для  $f$ , а  $k$  — const, то  $kF$  есть первообразная для  $kf$ .

3. Если  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$ , а  $k$  и  $b$  — постоянные, причем  $k \neq 0$ , то  $\frac{1}{k}F(kx + b)$  есть первообразная для функции  $f(kx + b)$ .

## 35. Формула Ньютона–Лейбница

Формула Ньютона–Лейбница имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

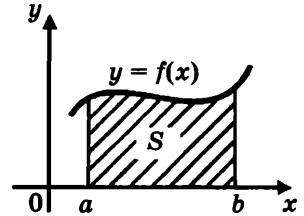
$$1. \int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$2. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ где } a < c < b.$$

### 36. Площадь криволинейной трапеции

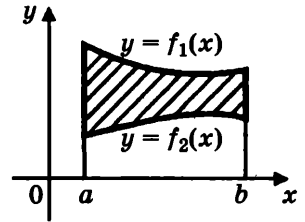
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью  $Ox$ , прямыми  $x = a$  и  $x = b$  и графиком неотрицательной функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , находится по формуле  $S = \int_a^b f(x)dx$ .



### 37. Площадь фигуры, заключенной на отрезке

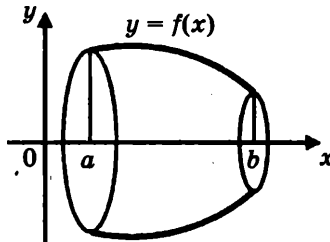
Площадь фигуры, заключенной на отрезке  $[a, b]$  между графиками функций  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  ( $f_1(x) \geq f_2(x)$ ), находится по формуле

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx.$$



### 38. Объем тела вращения

Объем тела вращения вычисляется по формуле  $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ .



### 39. Формула Лагранжа

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

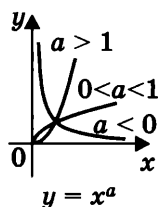
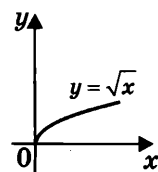
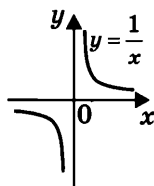
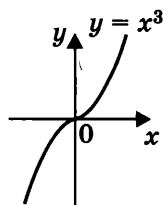
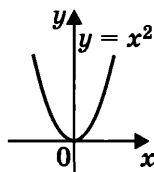
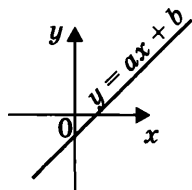
## Характеристики элементарных функций

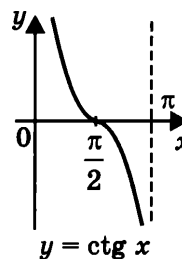
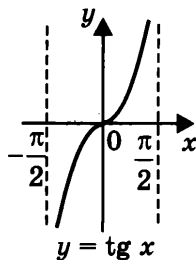
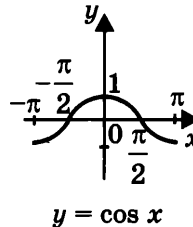
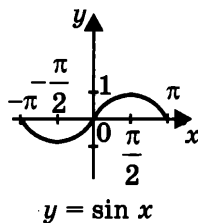
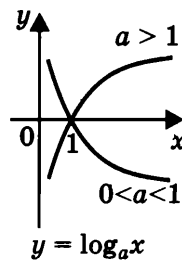
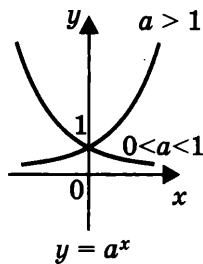
Функция	ООФ*	ОЗФ**	Период	Четность	Нули
$y = ax + b$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	—	Неч. при $b = 0$	$x = -\frac{b}{2a}$
$y = x^2$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	—	Чет.	$x = 0$
$y = x^3$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	—	Неч.	$x = 0$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	—	Неч.	Нет
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	—	—	$x = 0$
$y = \sqrt[3]{x}$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	—	Неч.	$x = 0$
$y = x^a, a > 0$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	—	—	$x = 0$
$y = x^a, a < 0$	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	—	—	Нет
$y = a^x$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$	—	—	Нет
$y = \log_a x$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	—	—	$x = 1$
$y = \sin x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	$2\pi$	Неч.	$x = \pi n$
$y = \cos x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	$2\pi$	Чет.	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$(-\infty; +\infty)$	$\pi$	Неч.	$x = \pi n$
$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq \pi n$	$(-\infty; +\infty)$	$\pi$	Чет.	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

**Примечание.** ООФ — область определения функции.

ОЗФ — область (множество) значений функции.

## Характеристики элементарных функций





## 40. Комбинаторика. Бином Ньютона

1. *Перестановки* — комбинации, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

*Обозначения:*  $P_n$ ,  $P(n)$  — число всех возможных перестановок из  $n$  элементов.

Если все  $n$  элементов различны, то число всех *перестановок без повторений* определяется по формуле

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

( $n!$  — символ для обозначения произведения  $n$  первых чисел натурального ряда. Читается «эн факториал». По определению считают  $0! = 1$ ).

Если среди  $n$  элементов имеется  $p$  элементов одного вида,  $q$  — другого,  $r$  — третьего и т. д., то число всех *перестановок с повторениями* определяется формулой

$$P_n = (p, q, r, \dots) = \frac{n!}{p!q!r!}.$$

2. *Размещения из  $n$  элементов по  $k$*  — комбинации, составленные из  $n$  данных элементов по  $k$  элементов в каждой; при этом два размещения

считаются различными, если они отличаются либо элементами, либо их порядком.

**Обозначение:**  $A_n^k$  — число всех размещений из  $n$  элементов по  $k$ .

Если среди  $n$  элементов нет одинаковых и повторения одного и того же элемента не допускаются, то число размещений без повторений определяется формулой

$$A_n^k = A_n^{k-1}(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1).$$

Если все  $n$  элементов различны, но в размещении допускаются повторения, то число размещений с повторениями определяется формулой

$$A_n^{k(\text{повт})} = n^k.$$

3. Сочетания из  $n$  элементов по  $k$  — комбинации по  $k$  элементов из данных  $n$ , отличающиеся одна от другой хотя бы одним элементом.

**Обозначения:**  $C_n^k$  или  $\binom{n}{k}$  — число всех сочетаний из  $n$  элементов по  $k$ .

Для  $k$  различных элементов из  $n$  различных

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}.$$

Для  $k$  с повторениями из  $n$  различных

$$C_n^{k(\text{повт})} = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Соотношения между числом размещений, сочетаний и перестановок:

$$C_n^k = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}} = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

#### 4. Бином Ньютона

$$(x \pm a)^n = x^n \pm nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}a^3 + \dots + (\pm 1)^n a^n,$$

или

$$(x \pm a)^n = C_n^0 x^n a^0 \pm C_n^1 x^{n-1} a^1 + C_n^2 x^{n-2} a^2 \pm C_n^3 x^{n-3} a^3 + \dots + (\pm 1)^n C_n^n x^0 a^n,$$

или

$$(x \pm a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 \pm \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 \pm \binom{n}{3} x^{n-3} a^3 + \dots + (\pm 1)^n \binom{n}{n} x^0 a^n.$$

Во второй и третьей формулах для симметрии мы определили

$$C_n^0 = C_n^n = 1.$$



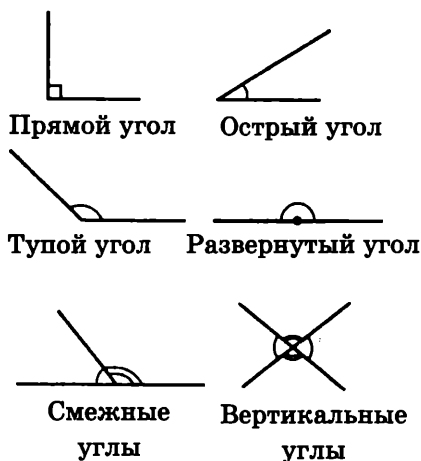
# КРАТКИЕ СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

.....

Часть 1

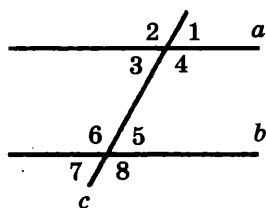
## ПЛАНИМЕТРИЯ

### 41. Классификация углов



### 42. Углы при параллельных прямых

( $a \parallel b$ ,  $c$  — секущая)



1. Соответственные углы:  $\angle 1$  и  $\angle 5$ ;  $\angle 2$  и  $\angle 6$ ;  $\angle 3$  и  $\angle 7$ ;  $\angle 4$  и  $\angle 8$ .

Каждые два соответственных угла равны.

2. Внутренние накрест лежащие углы:  $\angle 3$  и  $\angle 5$ ;  $\angle 4$  и  $\angle 6$ .

3. Внешние накрест лежащие углы:  $\angle 1$  и  $\angle 7$ ;  $\angle 2$  и  $\angle 8$ .

Каждые два накрест лежащих угла равны.

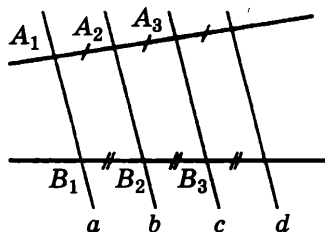
4. Внутренние односторонние углы:  $\angle 3$  и  $\angle 6$ ;  $\angle 4$  и  $\angle 5$ .

5. Внешние односторонние углы:  $\angle 1$  и  $\angle 8$ ;  $\angle 2$  и  $\angle 7$ .

Каждая пара односторонних углов равна в сумме  $180^\circ$ .

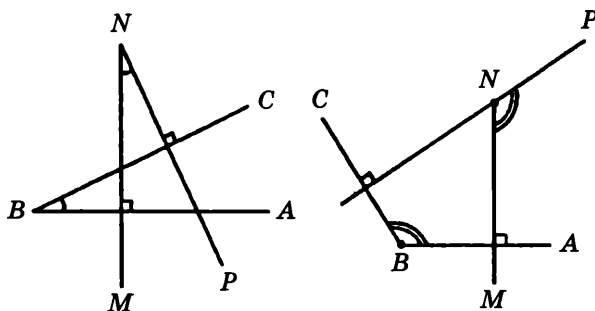
### 43. Теорема Фалеса

$$a \parallel b \parallel c \parallel d$$



Если  $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots$ , то  $B_1B_2 = B_2B_3 = \dots$

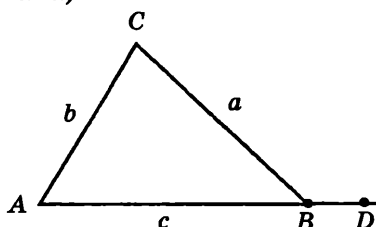
### 44. Равенство углов со взаимно перпендикулярными сторонами



Если  $AB \perp MN$  и  $BC \perp NP$ , то  $\angle ABC = \angle MNP$ .

### 45. Произвольный треугольник

( $a, b, c$  — стороны,  $\alpha, \beta, \gamma$  — противолежащие им углы;  $p$  — полупериметр;  $R$  — радиус описанной окружности;  $r$  — радиус вписанной окружности;  $S$  — площадь;  $h_a$  — высота, проведенная к стороне  $a$ ;  $l_a$  — биссектриса;  $m_a$  — медиана)



1.  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  — сумма углов  $\triangle ABC$ .

2.  $\angle CBD = \angle A + \angle B$  — внешний угол  $\triangle ABC$ .

3. Неравенства треугольника:

$$a < b + c,$$

$$b < a + c,$$

$$c < a + b.$$

4. Определение вида треугольника по его сторонам.

Пусть  $c$  — наибольшая сторона. Тогда:

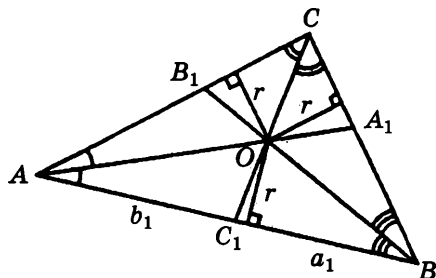
а) если  $c^2 < a^2 + b^2$ , то  $\triangle$  остроугольный;

б) если  $c^2 = a^2 + b^2$ , то  $\triangle$  прямоугольный;

в) если  $c^2 > a^2 + b^2$ , то  $\triangle$  тупоугольный.

5. Биссектрисы треугольника пересекаются в точке  $O$  — центре вписанной окружности.

$$BC = a, AB = c, AC = b.$$



6. Свойство биссектрисы внутреннего угла  $\Delta$ :

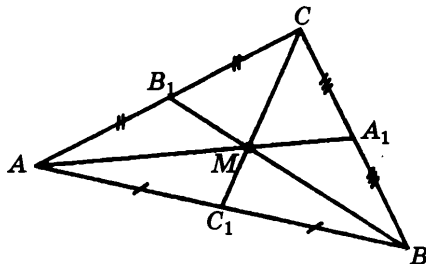
$$\frac{BC}{AC} = \frac{BC_1}{AC_1}, \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

7. Длина биссектрисы:

$$l_c = \sqrt{ab - a_1b_1}; \quad l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

8. Медианы треугольника пересекаются в одной точке (центр тяжести, или центроид  $\Delta$ ) и делятся в этой точке в отношении 2 : 1, считая от вершины:

$$AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2 : 1.$$



9. Длина медианы:

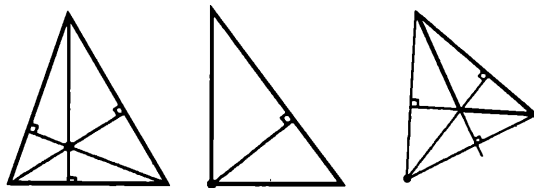
$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

10. Длина высоты:

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где  $a, b, c$  — стороны треугольника,  $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$  — полупериметр,  $h_c$  — высота, проведенная к стороне  $c$ .

11. Высоты треугольника пересекаются в одной точке (ортоцентре  $\Delta$ ).



Остроугольный Прямоугольный Тупоугольный

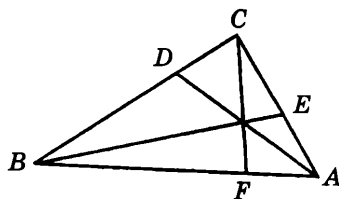
12. Зависимость между сторонами и высотами:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

13. Зависимость между высотами  $h_a, h_b, h_c$  и радиусом  $r$  вписанной окружности:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

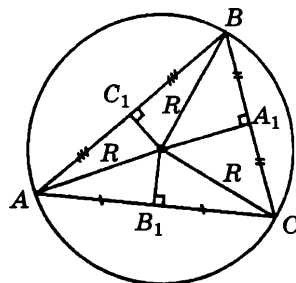
14. Теорема Чевы:



Для того чтобы прямые  $BE, AD$  и  $CF$  пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

15. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника.



**16. Теорема синусов:**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

**17. Теорема косинусов:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

**18. Площадь треугольника:**

$$S = \frac{1}{2}ah_a; S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ — формула Герона;}$$

$$S = p \cdot r, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a+b+c);$$

$$S = \frac{abc}{4R}; S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

## 46. Прямоугольный треугольник

( $a, b$  — катеты;  $c$  — гипотенуза;  $a_c, b_c$  — проекции катетов на гипотенузу)

$$S = \frac{1}{2}ab; S = \frac{1}{2}ch_c;$$

$$r = \frac{1}{2}(a+b-c); R = \frac{1}{2}c;$$

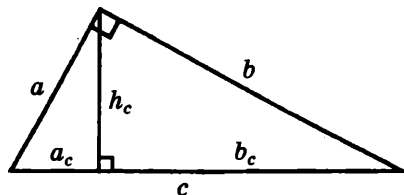
$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (теорема Пифагора);}$$

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c; a^2 = a_c \cdot c;$$

$$b^2 = b_c \cdot c;$$

$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \operatorname{ctg} \beta;$$

$$c = 2m_c, \text{ где } m_c \text{ — медиана.}$$



## 47. Равносторонний (правильный) треугольник

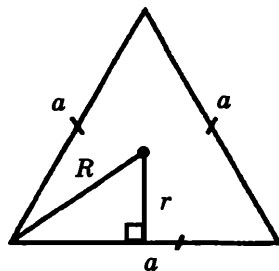
$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4};$$

$$a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3};$$

$$R = 2r;$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}; r = \frac{a}{2\sqrt{3}};$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

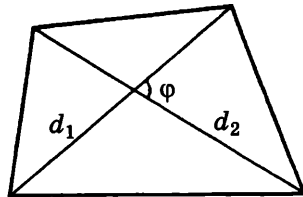


## 48. Четырехугольник

### 1. Произвольный выпуклый

( $d_1$  и  $d_2$  — диагонали,  $\varphi$  — угол между ними).

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$



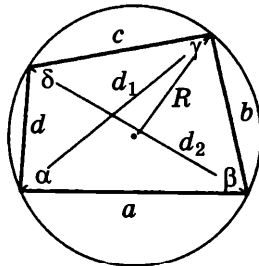
### 2. Вписанный

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ;$$

$ac + bd = d_1 d_2$  (теорема Птолемея).

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

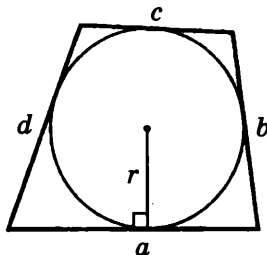
где  $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d).$



### 3. Описанный

$a + c = b + d$  — суммы противоположных сторон равны:

$$S = p \cdot r.$$



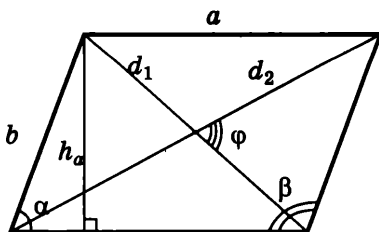
## 49. Параллелограмм

( $a$  и  $b$  — смежные стороны,  $\alpha$  — угол между ними;  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали,  $\varphi$  — угол между ними;  $h_a$  — высота к стороне  $a$ )

$\alpha + \beta = 180^\circ$  — сумма углов, прилежащих к одной стороне.

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$  — зависимость между сторонами и диагоналями.

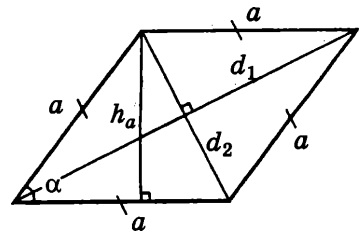
$$S = a \cdot h_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$



## 50. Ромб

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2;$$

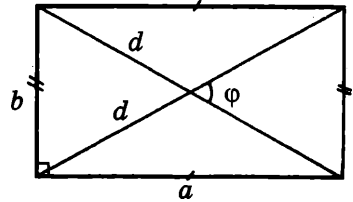
$$S = ah_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$



## 51. Прямоугольник

$$d^2 = a^2 + b^2;$$

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi.$$

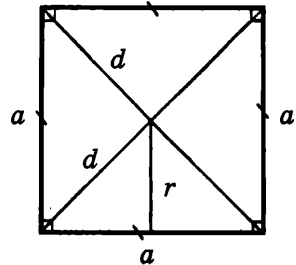


## 52. Квадрат

$$d = a\sqrt{2};$$

$$a = R\sqrt{2} = 2r;$$

$$R = \frac{1}{2}d = \frac{\sqrt{2}}{2}a; \quad S = a^2 = \frac{1}{2}d^2.$$



## 53. Трапеция

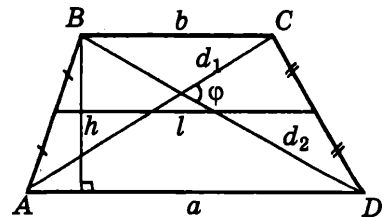
( $a$  и  $b$  — основания;  $h$  — высота;  $l$  — средняя линия;  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали,  $\varphi$  — угол между ними)

$$l = \frac{1}{2}(a + b);$$

$$\angle A + \angle D = 180^\circ;$$

$$\angle B + \angle C = 180^\circ.$$

$$S = lh = \frac{1}{2}(a + b)h = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin \varphi.$$



### 1. Равнобедренная трапеция

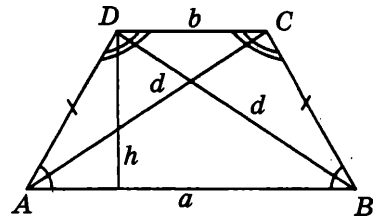
$$AC = BD = d; \quad AD = BC;$$

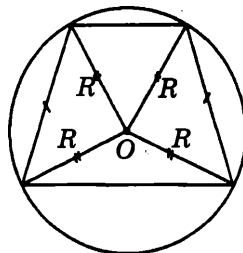
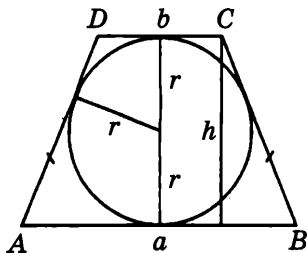
$$\angle A = \angle B; \quad \angle D = \angle C;$$

$$AE = \frac{1}{2}(a - b).$$

Если  $AC \perp BD$ , то  $S = h^2$ .

$$AB + CD = 2AD.$$





$h = 2r$ ,  $r$  — радиус вписанной окружности.

$$h = \sqrt{ab}.$$

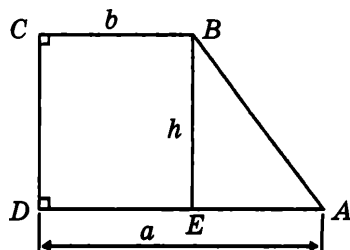
$R$  — радиус описанной окружности;

$O$  — центр окружности, описанной около треугольника, вершины которого совпадают с вершинами трапеции.

## 2. Прямоугольная трапеция

$$AE = a - b; \quad \angle D = \angle C = 90^\circ;$$

$$BE = CD = h \text{ — высота трапеции.}$$



## 54. Многоугольник (выпуклый)

( $n$  — число сторон (углов))

*Основные свойства:*

1)  $180^\circ(n - 2)$  — сумма внутренних углов;

2)  $360^\circ$  — сумма внешних углов;

3)  $\frac{1}{2}n(n - 3)$  — число диагоналей.

## 55. Правильный многоугольник

( $a_n$  — сторона;  $R_n$  — радиус описанной окружности;  $r_n$  — радиус вписанной окружности,  $\alpha_n$  — величина угла;  $P_n$  — периметр;  $S_n$  — площадь)

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ; \quad a_n = 2R_n \sin \frac{180^\circ}{n};$$

$$a_n = 2r_n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}; \quad r_n = R_n \cos \frac{180^\circ}{n};$$

$$P_n = na_n = 2nR_n \sin \frac{180^\circ}{n}; \quad S_n = \frac{1}{2}nR_n^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{1}{4}na_n^2 \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.$$



## 56. Длина окружности. Площадь круга и его частей

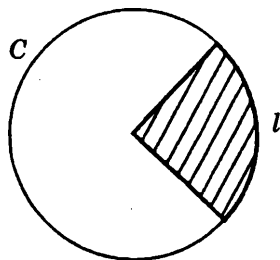
( $R$  — радиус окружности, круга;  $D$  — диаметр;  $C$  — длина окружности;  $l$  — длина дуги;  $\alpha$  — радианная мера центрального угла;  $n^\circ$  — градусная мера;  $S$  — площадь круга;  $S_{\text{сект.}}$  — площадь сектора)

$$C = 2\pi R = \pi D \text{ — длина окружности.}$$

$$l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = R\alpha \text{ — длина дуги окружности.}$$

$$S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2 = \frac{1}{2}CR; \quad \pi = \frac{C}{D} \approx 3,14;$$

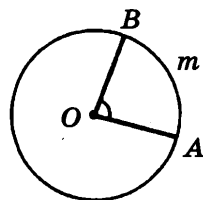
$$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2}R^2\alpha.$$



## 57. Углы и окружность

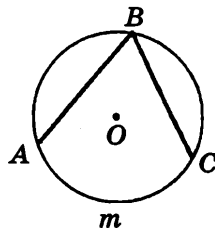
1. **Центральный угол** измеряется дугой, на которую он опирается:

$$\angle AOB = \cup AmB.$$



2. **Вписанный угол** измеряется половиной дуги, на которую он опирается:

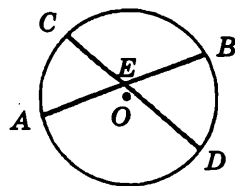
$$\angle ABC = \frac{1}{2}\cup AmC.$$



## 58. Метрические отношения в окружности

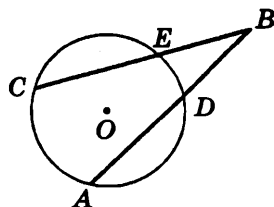
1. Если хорды  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $E$ , то

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$



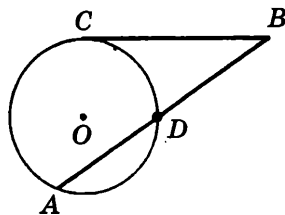
2. Если из точки  $B$  к окружности проведены две секущие, то

$$DB \cdot AB = EB \cdot CB.$$



3. Если из точки  $B$  к окружности проведе-  
ны *секущая* и *касательная*, то произведение  
секущей на ее внешнюю часть равно квадрату  
касательной:

$$AB \cdot DB = BC^2.$$



## 59. Числовое выражение

**Числовое выражение** — запись, которая состоит из чисел, соединен-  
ных между собой знаками действий.

Например:  $-3,4 \cdot (-8) + 12 : 0,4$  — числовое выражение.

**Значением числового выражения** называется число, которое полу-  
чено в результате выполнения действий, указанных в этом выражении.

Например: число 57,2 — значение выражения.

## 60. Стандартный вид числа

**Стандартный вид числа** — представление числа в виде  $a \cdot 10^n$ , где  
 $1 \leq a < 10$ ,  $n$  — целое число,  $a$  — мантисса числа,  $n$  — порядок числа.

Например:  $342,7 = 3,427 \cdot 10^2$ , т. е.  $a = 3,427$ ,  $n = 2$ ;

$0,009 = 9 \cdot 10^{-3}$ , т. е.  $a = 9$ ,  $n = -3$ .

## 61. Целая часть числа. Дробная часть числа

**Целой частью** числа  $x$  называется наибольшее целое число, не пре-  
восходящее  $x$ , где  $x \in R$ .

**Обозначение:**  $[x]$ .

**Дробной частью** числа  $x$  называется разность между данным числом  
и его целой частью.

**Обозначение:**  $\{x\}$ , тогда  $\{x\} = x - [x]$ .

Например:  $[2,59] = 2$ ;

$\{2,59\} = 0,59$ ;  $[-8,4] = -9$ ;

$\{-8,4\} = -8,4 - (-9) = 0,6$ .

## 62. Погрешность приближения

**Абсолютная погрешность приближения** — модуль разности между  
точным значением величины и ее приближенным значением.

**Обозначение:**  $|x - a|$ , где  $x$  — точное,  $a$  — приближенное значение.

Например: запись  $e = 2,71 \pm 0,01$  означает, что  $|e - 2,71| \leq 0,01$ ,  
т. е. число  $e = 2,71$  с точностью до 0,01.

**Относительная погрешность** — частное от деления абсолютной по-  
грешности  $|x - a|$  на модуль приближенного значения величины.

Обозначение:  $\frac{|x-a|}{|a|}$ , где  $x$  — точное значение,  $a$  — приближенное.

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

Например: если  $x = 2,89$ ,  $a = 3$ , то относительная погрешность будет равна  $\frac{|3-2,89|}{|3|} = \frac{0,01}{3} = \frac{1}{300} \approx 0,003$ , или  $0,3\%$ .

## 63. Пропорции.

### Производные пропорции

Частное двух чисел называется **отношением** этих чисел.

Отношение показывает, во сколько раз I число больше II или какую часть I число составляет от II.

Два числа, произведение которых равно 1, называются **взаимно обратными**.

Например: 5 и  $\frac{1}{5}$ ; 0,4 и 2,5;  $7\frac{3}{4}$  и  $\frac{4}{31}$ .

Равенство двух отношений называется **пропорцией**:

$$a : b = c : d, \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Числа  $a$  и  $d$  называются **крайними членами**, а числа  $b$  и  $c$  — **средними членами** пропорции, где  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $d \neq 0$ .

**Основное свойство пропорции**: произведение крайних членов равно произведению средних.

Верно и обратное утверждение: если  $a : b = c : d$ , то  $a \cdot d = b \cdot c$ .

Если  $a \cdot d = b \cdot c$ , то числа  $a, b, c, d$  составляют пропорцию

$$a : b = c : d.$$

### Производные пропорции

Если  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , то  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ;

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}; \quad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d};$$

$$\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}; \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d};$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}.$$

## 64. Периодические дроби

При обращении обыкновенной дроби в десятичную может образоваться **бесконечная десятичная дробь**.

Бесконечная десятичная дробь, которая, начиная с некоторого разряда, образуется последовательным добавлением справа одного и того же числа, называется **периодической**, а повторяющееся число — ее **периодом**.

Периодические дроби, в которых повторение начинается сразу после запятой, называются **чистыми периодическими**.

Например:  $0,333... = 0,(3)$ ;  $21,666... = 21,(6)$ .

Периодические дроби, в которых повторение начинается не сразу после запятой, называются **смешанными периодическими**.

Например:  $7,23444... = 7,23(4)$ ;  $0,19535353... = 0,19(53)$ .

### 1. Обращение чистой периодической дроби в обыкновенную.

В качестве числителя обыкновенной дроби берут период чистой периодической дроби; в знаменателе пишут цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде.

Например:  $0,(8) = \frac{8}{9}$ ;

$$3,(14) = 3\frac{14}{99}.$$

### 2. Обращение смешанной периодической дроби в обыкновенную.

Для этого достаточно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность записать в числитель, а в знаменатель написать цифру 9 столько раз, сколько цифр между запятой и периодом.

Например:

$$2,63(13) = 2\frac{6313-63}{9900} = 2\frac{6250}{9900} = 2\frac{125}{198};$$

$$0,7(4) = \frac{74-7}{90} = \frac{67}{90};$$

$$8,(61) = \frac{861-8}{99} = \frac{853}{99};$$

$$4,3(65) = \frac{4365-43}{990} = \frac{4322}{990} = \frac{2161}{495}.$$

## 65. Проценты

**Процентом** называется сотая часть числа.

**Обозначение** — %.

Например: 3 %, 250 %, 0,02 %.

**Тысячная часть** числа называется **промилле**.

**Обозначение** — ‰.

1. Если данное число принять за 1, то 1 % составляет 0,01 этого числа, 35 % составляют 0,35 числа, или  $\frac{7}{20}$  этого числа, и т. д.

Следовательно, чтобы число процентов выразить в виде дроби, достаточно число процентов разделить на 100.

Например:  $86 \% = 86 : 100 = 0,86$ .

## 2. Нахождение процентов данного числа.

Чтобы найти  $a \%$  от числа  $b$ , надо число  $b$  умножить на  $a/100$ .

Например:  $24 \%$  от 80 составляют  $\frac{80 \cdot 24}{100} = 19,2$ .

## 3. Нахождение числа по его процентам.

Если известно, что  $a \%$  числа  $x$  равно  $b$ , то число  $x$  можно найти по формуле  $x = \frac{b}{a} \cdot 100$ .

Например, если  $2 \%$  вклада в сберкасса составляют 120 руб., то этот вклад равен  $\frac{120}{2} \cdot 100 = 6000$  руб.

## 4. Нахождение процентного отношения чисел.

Чтобы найти процентное отношение двух чисел —  $a$  и  $b$ , надо отношение этих чисел умножить на  $100 \%$ , т. е. вычислить

$$\left( \frac{a}{b} \right) \cdot 100 \%$$

## 5. Сложные проценты.

Если в сберегательную кассу внесен вклад в  $a$  рублей и положен на  $p$  процентов годовых (т. е. проценты начисляются один раз в год), то через  $n$  лет сумма составит  $a \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n$  руб.

*Замечание.* Здесь проценты насчитываются на проценты и поэтому называются сложными.

# 66. Деление числа на части прямо и обратно пропорционально данным

1. Чтобы разделить некоторое число пропорционально данным числам, надо разделить это число на сумму данных чисел и результат умножить на каждое из них.

Например, отрезок длиной 20 см разделить в отношении  $2 : 3$ .

*Решение.*

$$\frac{20}{2+3} \cdot 2 = 8 \text{ (см)}; \quad \frac{20}{2+3} \cdot 3 = 12 \text{ (см)}.$$

2. Чтобы разделить число на части, обратно пропорциональные данным числам, достаточно разделить это число на части, прямо пропорциональные числам, обратным данным.

Например, число 54 разделить обратно пропорционально числам 3 и 6.

*Решение.*

Числа, обратные данным, относятся как  $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 6 : 3$ . Тогда получим

$$\frac{54}{9} \cdot 6 = 36; \quad \frac{54}{9} \cdot 3 = 18.$$

## Часть 2

## СТЕРЕОМЕТРИЯ

### 67. Призма

#### 1. Произвольная призма

$l$  — боковое ребро;

$P$  — периметр основания;

$S_{\text{осн}}$  — площадь основания;

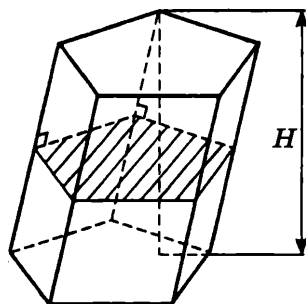
$H$  — высота;

$P_{\text{сеч}}$  — периметр перпендикулярного сечения;

$S_{\text{сеч}}$  — площадь сечения;

$S_{\text{бок}}$  — площадь боковой поверхности;

$V$  — объем)



$$S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}} \cdot l;$$

$$V = S_{\text{сеч}} \cdot H;$$

$$V = S_{\text{сеч}} \cdot l.$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

#### 2. Прямая призма

$$S_{\text{бок}} = P \cdot H;$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}};$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H.$$

*Замечание.* Для произвольного параллелепипеда справедливы те же формулы.

### 68. Прямоугольный параллелепипед

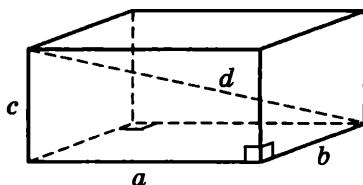
( $a, b, c$  — измерения;  $d$  — диагональ;  $S$  — поверхность)

$$S_{\text{бок}} = P \cdot H;$$

$$V = abc;$$

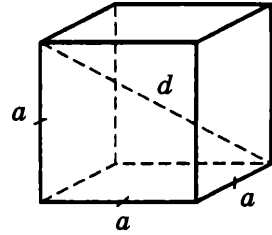
$$S = 2(ab + bc + ac);$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$



## 69. Куб ( $a$ — ребро)

$$V = a^3;$$
$$d = a\sqrt{3}.$$
$$S = 6a^2.$$



## 70. Пирамида

### 1. Произвольная пирамида

( $S_{\text{осн}}$  — площадь основания;  $H$  — высота;  $V$  — объем)

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$

### 2. Правильная пирамида

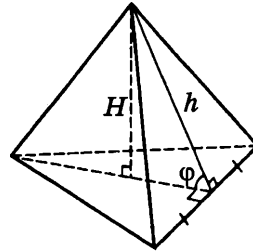
( $h$  — апофема;  $H$  — высота;  $\varphi$  — двугранный угол при основании)

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P \cdot h;$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha};$$

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}};$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$



### 3. Произвольная усеченная пирамида

( $H$  — высота;  $S_1$  и  $S_2$  — площади оснований;  $V$  — объем)

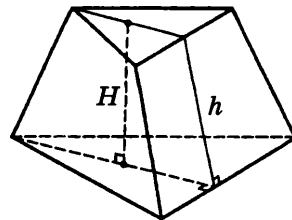
$$V = \frac{H}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

### 4. Правильная усеченная пирамида

( $h$  — апофема;  $P_1$  и  $P_2$  — периметры оснований)

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) h;$$

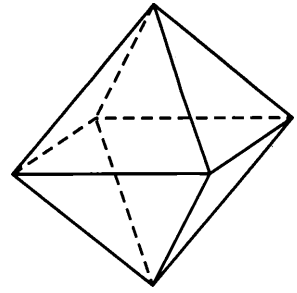
$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2.$$



## 71. Октаэдр

Все 8 граней — равносторонние треугольники; 6 вершин, 12 ребер;  $V$  — объем;  $S$  — поверхность;  $a$  — сторона (ребро);  $R$  — радиус описанной сферы;  $r$  — радиус вписанной сферы.

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}; \quad S = 2a^2 \sqrt{3}; \quad R = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



## 72. Цилиндр

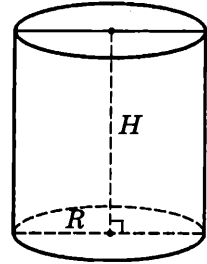
( $H$  — высота;  $R$  — радиус основания)

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH;$$

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}};$$

$$S_{\text{пол}} = 2\pi R(R + H);$$

$$V = \pi R^2 H.$$



## 73. Конус

( $H$  — высота;  $R$  — радиус основания;

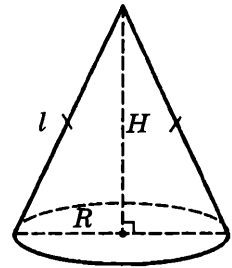
$l$  — образующая)

$$S_{\text{бок}} = \pi Rl;$$

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}};$$

$$S_{\text{пол}} = \pi R(R + l);$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$



### Усеченный конус

( $H$  — высота;  $l$  — образующая;  $R$  и  $r$  — радиусы оснований)

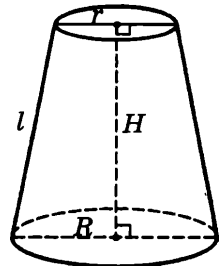
$$S_{\text{бок}} = \pi l(R + r);$$

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2;$$

$$S_1 = \pi R^2;$$

$$S_2 = \pi r^2;$$

$$V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$



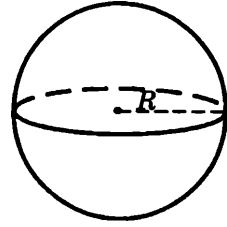


## 74. Шар, сфера

( $R$  — радиус шара;  $S$  — площадь сферической поверхности;  
 $V$  — объем;  $D$  — диаметр)

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2;$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$



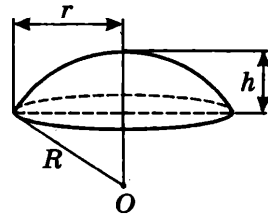
## 75. Шаровой сегмент

( $R$  — радиус шара;  $h$  — высота сегмента;  $S$  — площадь сферической поверхности сегмента;  $V$  — объем;  $r$  — радиус основания)

$$S = 2\pi Rh = \pi Dh = \pi(r^2 + h^2);$$

$$S_{\text{полн}} = \pi(2Rh + r^2) = \pi(h^2 + 2r^2);$$

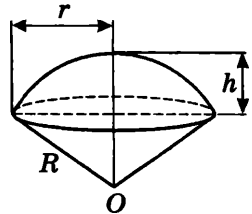
$$V = \pi h^2 \left( R - \frac{1}{3}h \right).$$



## 76. Шаровой сектор

$$S = \pi R(2h + r);$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{6}\pi D^2 h.$$



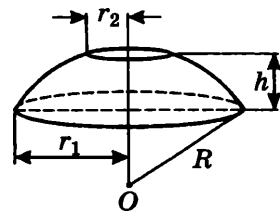
## 77. Шаровой пояс

( $h$  — высота пояса;  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы оснований)

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh = \pi Dh;$$

$$S = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2);$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$



## Условные обозначения

- $N$  — множество натуральных чисел;  
 $Z$  — множество целых чисел;  
 $Z_0$  — множество целых неотрицательных чисел;  
 $Q$  — множество рациональных чисел;  
 $R$  — множество действительных чисел (числовая прямая);  
 $C$  — множество комплексных чисел;  
 $[a; b]$ , или  $a \leq x \leq b$  — замкнутый промежуток (или отрезок) с началом  $a$  и концом  $b$ ;  
 $(a; b)$ , или  $a < x < b$  — открытый промежуток (или интервал);  
 $[a; b)$ , или  $a \leq x < b$ ;  $(a; b]$ , или  $a < x \leq b$  — полуоткрытые промежутки (полуинтервалы);  
 $[a; +\infty)$ , или  $x \geq a$ ;  $(-\infty; b]$ , или  $x \leq b$  — лучи;  
 $(a; +\infty)$ , или  $x > a$ ;  $(-\infty; b)$ , или  $x < b$  — открытые лучи;  
 $(-\infty; +\infty) = R$  — числовая прямая;  
 $a = b$  —  $a$  равно  $b$ ;  
 $a \neq b$  —  $a$  не равно  $b$ ;  
 $a \approx b$  —  $a$  приближенно равно  $b$ ;  
 $a > b$  —  $a$  больше  $b$ ;  
 $a \geq b$  —  $a$  больше или равно  $b$ ;  
 $a < b$  —  $a$  меньше  $b$ ;  
 $a \leq b$  —  $a$  меньше или равно  $b$ ;  
 $a \in A$  —  $a$  принадлежит множеству  $A$ ;  
 $a \notin A$  —  $a$  не принадлежит множеству  $A$ ;  
 $B \subset A$  —  $B$  является подмножеством  $A$ ;  
 $A \cup B$  — объединение множеств  $A$  и  $B$ ;  
 $A \cap B$  — пересечение множеств  $A$  и  $B$ ;  
 $\emptyset$  — пустое множество;  
 $\%$  — процент;  
 $\text{‰}$  — промилле;  
 $\text{НОД}(a; b)$  — наибольший общий делитель чисел  $a$  и  $b$ ;  
 $\text{НОК}(a; b)$  — наименьшее общее кратное чисел  $a$  и  $b$ ;  
 $|a|$  — модуль (абсолютная величина) действительного числа  $a$ ;  
 $a^n$  —  $n$ -я степень числа  $a$ ;  
 $\sqrt[n]{a}$  — корень  $n$ -й степени из числа  $a$ ;  
 $\sqrt{a}$  — арифметический квадратный корень из числа  $a$ ;  
 $\pi \approx 3,1415$  — отношение длины окружности к диаметру;  
 $e \approx 2,71828$  — основание натурального логарифма;  
 $\log_a x$ , где  $x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  — логарифм числа  $x$  по основанию  $a$ ;  
 $\lg x$  — десятичный логарифм числа  $x$ ;  
 $\ln x$  — натуральный логарифм числа  $x$ ;  
 $\sin x$  — синус  $x$ ;  
 $\cos x$  — косинус  $x$ ;  
 $\text{tg } x$  — тангенс  $x$ ;  
 $\text{ctg } x$  — котангенс  $x$ ;  
 $1/\sin x$  — косеканс  $x$ ;

$1/\cos x$  — секанс  $x$ ;

$\arcsin x$  — арксинус  $x$ ;

$\arccos x$  — арккосинус  $x$ ;

$\arctg x$  — арктангенс  $x$ ;

$\operatorname{arcctg} x$  — арккотангенс  $x$ ;

$\Delta x$  — приращение аргумента;

$\Delta y$  — приращение функции;

$y', f'(x)$  — производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x$ ;

$y_{\max}, \max_{[a;b]} f(x)$  — наибольшее значение функции на отрезке  $[a; b]$ ;

$y_{\min}, \min_{[a;b]} f(x)$  — наименьшее значение функции на отрезке  $[a; b]$ ;

$\int_a^b f(x)dx$  — интеграл функции  $f(x)$  от  $a$  до  $b$ ;

$A$  — точка  $A$ ;

$a, AB$  — прямая  $a$ , прямая  $AB$ ;

$\alpha, ABC$  — плоскость  $\alpha$ , плоскость  $ABC$ ;

$\triangle ABC$  — треугольник  $ABC$ ;

$\angle$  — знак угла, например,  $\angle(a; b)$ ,  $\angle ABC$ ;

$\parallel$  — знак параллельности, например,  $a \parallel b$ ,  $\alpha \parallel \beta$ ;

$\perp$  — знак перпендикулярности, например,  $a \perp b$ ,  $\alpha \perp \beta$ ;

$\cup$  — знак дуги, например,  $\cup AB$ ;

$\sim$  — знак подобия, например,  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ ;

$M(x)$  — точка  $M$  на координатной прямой имеет координату  $x$ ;

$M(x; y)$  — точка  $M$  в прямоугольной (декартовой) системе координат имеет абсциссу  $x$  и ординату  $y$ ;

$M(x; y; z)$  — точка в пространстве имеет абсциссу  $x$ , ординату  $y$ , аппликату  $z$ .

## Таблицы

### Квадраты натуральных чисел от 10 до 99

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

### Кубы натуральных чисел от 1 до 9

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^3$	1	8	27	64	125	216	343	512	729

### Степени некоторых чисел

$n$	$n^4$	$n^5$	$n^6$	$n^7$	$n^8$
1	1	1	1	1	1
2	16	32	64	128	256
3	81	243	729	2187	6561
4	256	1024	4096	16384	65536
5	625	3125	15625	78125	390625
6	1296	7776	46656	279936	1679616
7	2401	16807	117649	823543	5764801
8	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	6561	59049	531441	4782969	43046721

### Простые числа до 997

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521
523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

## ЛИТЕРАТУРА

*Балаян Э.Н.* Математика. Справочное пособие для подготовки к ЕГЭ. Профильный уровень. — Ростов н/Д: Феникс, 2019.

*Балаян Э.Н.* Научись решать уравнения различными способами. Профильный уровень. — Ростов н/Д: Феникс, 2022.

*Балаян Э.Н.* Математика. Подготовка к ОГЭ. 9 класс. — Ростов н/Д: Феникс, 2016.

*Балаян Э.Н.* Математика. Задачи типа В1, В2, В3, В4, В6, В7, В9, В11, В12, В14, В15. — Ростов н/Д: Феникс, 2014.

*Балаян Э.Н.* Математика. Задачи типа В5, В8, В10, В13. — Ростов н/Д: Феникс, 2014.

*Балаян Э.Н., Каспаров Г.Л.* Математика. Уравнения и неравенства. Подготовка к ЕГЭ. Профильный уровень. — Ростов н/Д: Феникс, 2020.

*Балаян Э.Н.* Математика. Решение неравенств повышенной сложности методом рационализации. — Ростов н/Д: Феникс, 2015.

# СОДЕРЖАНИЕ

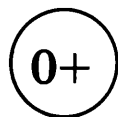
<b>Предисловие .....</b>	<b>3</b>
<b>Структура КИМ ЕГЭ.....</b>	<b>4</b>
<b>Структура КИМов .....</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Решение всех заданий.....</b>	<b>8</b>
<b>§ 1. Задание 1. Планиметрия .....</b>	<b>8</b>
1.1. Прямоугольный треугольник.....	8
1.2. Равнобедренный треугольник .....	14
1.3. Произвольный треугольник.....	20
1.4. Четырехугольники.....	22
1.5. Окружность и треугольники .....	26
1.6. Окружность и четырехугольники .....	29
<b>§ 2. Задание 2. Векторы .....</b>	<b>31</b>
2.1. Векторы и операции с ними.....	32
<b>§ 3. Задание 3. Стереометрия .....</b>	<b>35</b>
3.1. Куб, прямоугольный параллелепипед .....	35
3.2. Призма .....	38
3.3. Пирамида.....	42
3.4. Элементы составных многогранников .....	49
3.5. Площадь поверхности и объем составного многогранника .	50
3.6. Цилиндр, конус, шар.....	53
<b>§ 4. Задание 4. Начала теории вероятностей .....</b>	<b>63</b>
<b>§ 5. Задание 5. Вероятность сложных событий .....</b>	<b>67</b>
<b>§ 6. Задание 6. Простейшие уравнения.....</b>	<b>71</b>
6.1. Линейные уравнения .....	71
6.2. Рациональные уравнения.....	72
6.3. Квадратные уравнения .....	74
6.4. Иррациональные уравнения .....	75
6.5. Показательные уравнения .....	77
6.6. Логарифмические уравнения .....	78
6.7. Тригонометрические уравнения .....	79
<b>§ 7. Задание 7. Вычисления и преобразования .....</b>	<b>81</b>
7.1. Преобразования числовых рациональных выражений .....	82
7.2. Преобразования алгебраических выражений и дробей .....	83
7.3. Преобразования числовых иррациональных выражений ...	86

7.4. Преобразования буквенных иррациональных выражений.....	88
7.5. Вычисление значений степенных выражений .....	90
7.6. Действия со степенями .....	92
7.7. Преобразования числовых логарифмических выражений.....	92
7.8. Вычисление значений тригонометрических выражений....	96
7.9. Преобразования числовых тригонометрических выражений.....	98
§ 8. Задание 8. Производная и первообразная .....	101
8.1. Физический и геометрический смысл производной, касательная.....	101
8.2. Применение производной к исследованию функций .....	108
8.3. Первообразная.....	111
§ 9. Задание 9. Задачи с прикладным содержанием .....	113
§ 10. Задание 10. Текстовые задачи .....	121
10.1. Задачи на числовые зависимости .....	122
10.2. Задачи на движение.....	122
10.3. Задачи на совместную работу .....	124
10.4. Задачи на сплавы и смеси .....	125
10.5. Задачи на проценты.....	127
10.6. Задачи на разбавление .....	128
10.7. Задачи на прогрессии.....	129
§ 11. Задание 11. Графики функций .....	130
11.1. Комбинированные задачи .....	130
11.2. Гиперболы.....	132
11.3. Параболы .....	134
11.4. Линейные функции .....	136
11.5. Показательные и логарифмические функции .....	137
11.6. Тригонометрические функции .....	139
11.7. Кусочно-линейные функции .....	140
§ 12. Задание 12. Исследование функций .....	142
12.1. Степенные функции.....	142
12.2. Иррациональные функции.....	143
12.3. Рациональные функции .....	144
12.4. Показательные функции .....	145
12.5. Логарифмические функции .....	146
12.6. Тригонометрические функции .....	147
12.7. Исследование функций без помощи производной.....	149

§ 13. Задание 13. Уравнения .....	151
13.1. Тригонометрические уравнения .....	151
13.2. Рациональные уравнения .....	163
13.3. Иррациональные уравнения .....	167
13.4. Логарифмические и показательные уравнения .....	171
§ 14. Задание 14. Стереометрия .....	177
14.1. Многогранники .....	178
14.2. Круглые тела .....	200
§ 15. Задание 15. Неравенства .....	208
15.1. Рациональные неравенства .....	208
15.2. Иррациональные неравенства .....	212
15.3. Показательные неравенства .....	216
15.4. Логарифмические неравенства .....	221
15.5. Логарифмические неравенства с переменным основанием .....	227
15.6. Неравенства с модулем .....	232
§ 16. Задание 16. Экономические задачи .....	237
§ 17. Задание 17. Планиметрия .....	242
17.1. Треугольники .....	242
17.2. Окружности и треугольники .....	250
17.3. Четырехугольники .....	254
17.4. Окружности и четырехугольники .....	260
§ 18. Задание 18. Задачи с параметром .....	267
18.1. Рациональные уравнения и неравенства .....	268
18.2. Рациональные системы уравнений .....	279
18.3. Иррациональные уравнения и неравенства .....	282
18.4. Тригонометрические уравнения .....	286
18.5. Показательные и логарифмические уравнения .....	290
18.6. Логарифмические неравенства .....	293
§ 19. Задание 19. Числа и их свойства .....	297
<b>Глава 2. Анализ типичных ошибок школьников и абитуриентов при сдаче ЕГЭ .....</b>	<b>306</b>
§ 20. Вычислительные ошибки .....	306
20.1. Действия с обыкновенными и десятичными дробями .....	306
20.2. Нахождение значения выражений, содержащих степени .....	307
20.3. Нахождение значения выражений, содержащих корни .....	307

20.4. Вычисления, связанные с логарифмами .....	309
§ 21. Ошибки в тождественных преобразованиях .....	309
21.1. Действия с многочленами .....	309
21.2. Действия с алгебраическими дробями .....	310
21.3. Преобразование выражений, содержащих корни и степени с дробными показателями .....	311
§ 22. Ошибки при решении различных типов уравнений .....	313
§ 23. Ошибки при решении неравенств.....	320
§ 24. Ошибки при исследовании функций, их свойств и построении графиков.....	326
<b>Глава 3. Краткие справочные материалы по алгебре         и началам анализа .....</b>	<b>331</b>
<b>Глава 4. Краткие справочные материалы по геометрии.....</b>	<b>352</b>
<b>Условные обозначения .....</b>	<b>369</b>
<b>Таблицы.....</b>	<b>370</b>
<b>Литература .....</b>	<b>371</b>





*Учебное издание*

**Балаян Эдуард Николаевич**

# **МАТЕМАТИКА**

**РАЗБОР ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ  
С АНАЛИЗОМ ТИПИЧНЫХ ОШИБОК**

**10–11 классы**

**Профильный уровень**

Ответственный редактор *С. Осташов*

**Формат 70 × 100/16. Бумага офсетная.**

**Печать офсетная. Тираж 4000 экз.**

**Заказ № 8083.**

Издатель и Изготовитель: ООО «Феникс»

Юр. и факт. адрес: 344011, Россия, Ростовская обл.,

г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150.

Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-59.

Изготовлено в России. Дата изготовления: 12.2023.

Срок годности не ограничен

Отпечатано в ООО «Принт-М»

142300, Россия, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов 1 /

Корпус Производственный Б, помещение 279, этаж 4.