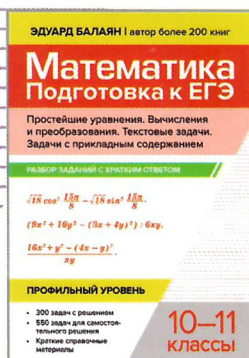
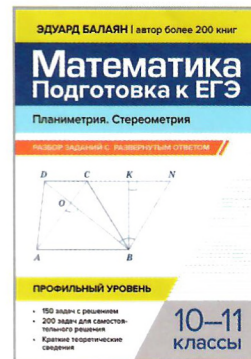
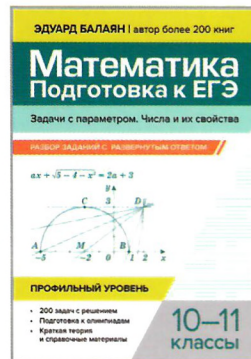
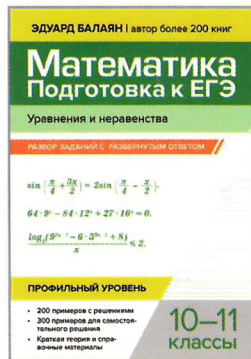


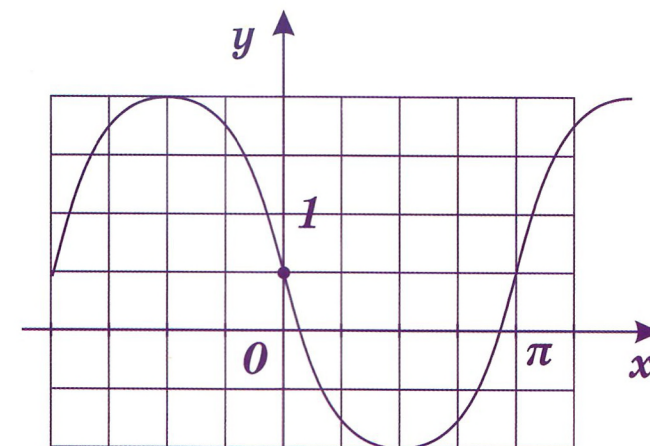
Предлагаемая мини-серия состоит из пособий, содержащих разбор заданий с кратким и развернутым ответами, предназначенных для подготовки к ЕГЭ. Каждое из пособий представляет тему или комплект тем, соответствующих профильному уровню. Каждая тема сопровождается краткой теорией, справочными материалами, образцами разнообразных примеров с подробными решениями и обоснованиями. В каждой теме приводятся примеры для самостоятельного решения, а в конце пособия — ответы для контроля правильности решения. Пособия предназначены старшеклассникам для эффективной подготовки и успешной сдачи экзамена, учителям математики и репетиторам.



Математика Подготовка к ЕГЭ

Графики функций. Производная и первообразная. Исследование функций

РАЗБОР ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ОТВЕТОМ



ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

- Более 300 примеров
- 120 примеров с решениями
- Краткие справочные материалы

10–11
классы

ISBN 978-5-222-41790-4



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФЕНИКС
ХОРОШИЕ КНИГИ



Э. Н. Балаян

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ.

ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Разбор заданий с кратким ответом

10–11 классы

Профильный уровень

- ◆ Более 300 примеров
- ◆ 120 примеров с решениями
- ◆ Краткие справочные материалы

Ростов-на-Дону

 **еникс**
2024

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я72

КТК 444

Б20

Балаян Э. Н.

Б20 Математика. Подготовка к ЕГЭ. Графики функций. Производная и первообразная. Исследование функций : разбор заданий с кратким ответом : 10–11 классы : профильный уровень / Э. Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2024. — 126 с. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-41790-4

Предлагаемое пособие содержит три темы из первой части ЕГЭ профильного уровня с краткими ответами.

Каждая тема сопровождается подробным решением и обоснованием разнообразных примеров, встречающихся на экзамене, приводятся примеры для самостоятельного решения и ответы к ним.

Для удобства пользования пособием приводятся краткие справочные материалы по алгебре и началам анализа.

Пособие адресовано старшеклассникам и абитуриентам для самостоятельной подготовки к экзаменам, учителям математики, методистам, слушателям подготовительных отделений вузов и репетиторам.

УДК 373.167.1:51

ISBN 978-5-222-41790-4

ББК 22.1я72

© Балаян Э. Н., 2024

© Оформление: ООО «Феникс», 2024

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие состоит из трех параграфов, разбитых на пункты, что дает возможность быстро найти нужную информацию.

§ 1 представлен подробным разбором примеров, включающих графики функций. Это примеры на линейные функции, параболы, гиперболы, показательные и логарифмические, тригонометрические функции, комбинированные задачи и кусочно-линейные функции.

В § 2 приведены примеры на производную и первообразную. Представлены темы на касательную, геометрический и физический смысл производной, применение производной к исследованию разнообразных функций.

§ 3 посвящен решению примеров на исследование функций: степенных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических.

Наличие достаточного количества примеров (более 300), из которых часть дана с подробным решением и обоснованием, дает возможность старшеклассникам и абитуриентам успешно справиться с задачами для самостоятельного решения, которые приводятся в конце каждого параграфа, а ответы к ним можно найти в конце пособия.

Для удобства пользования пособием приводятся краткие справочные материалы по алгебре и началам анализа.

§ 1. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

Это задание появилось в вариантах ЕГЭ профильного уровня по теме «Графики функций». По графику функции, который дается в условии, необходимо определить неизвестные параметры в ее формуле. Возможно — найти значение функции в некоторой точке или координаты точки пересечения графиков функций.

1.1. Комбинированные задачи

Пример 1. На рисунке изображены графики функций $f(x) = -4x + 9$ и $g(x) = ax^2 + bx + c$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

Решение.

Из графика видно, что $g(-1) = -1$, $g(1) = 5$, $g(0) = 1$. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} a - b + c = -1, \\ a + b + c = 5, \\ 0 + 0 + c = 1; \end{cases} \begin{cases} c = 1, \\ a - b + 1 = -1, \\ a + b + 1 = 5; \end{cases} \begin{cases} c = 1, \\ a - b = -2, \\ a + b = 4. \end{cases}$$

Складывая два последних уравнения, имеем $2a = -2 + 4$, $2a = 2$, $a = 1$, тогда $b = 4 - 1 = 3$.

Итак, $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$.

Заметим, что для нахождения значений a , b и c достаточно взять 3 точки, имеющие целые коэффициенты.

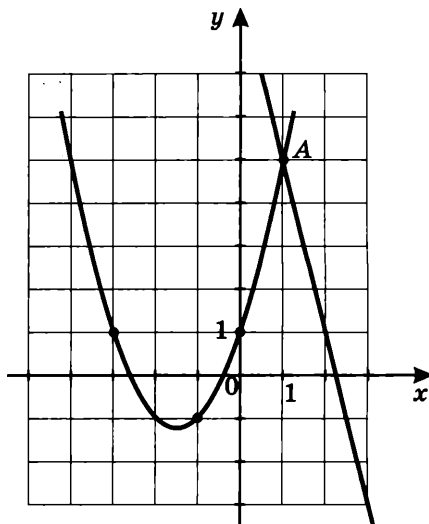
Следовательно, $g(x) = x^2 + 3x + 1$.

Поскольку прямая и парабола пересекаются в точке $A(1; 5)$, то получим уравнение $x^2 + 3x + 1 = -4x + 9$, или $x^2 + 7x - 8 = 0$.

Так как $1 + 7 - 8 = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -8$.

Таким образом, абсцисса точки B будет $x = -8$.

Ответ: -8 .



Пример 2. На рисунке изображены графики функций вида $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающихся в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

Решение.

$g(x) = kx$ — линейная функция, график которой проходит через начало координат.

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{1} = 3,$$

где k — тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox .

Значит, линейная функция имеет вид $g(x) = 3x$.

Парабола $f(x)$ проходит через начало координат, т. е. $A(0; 0)$, тогда $f(0) = 0$, $c = 0$.

Точка $(2; 0)$ принадлежит параболе, тогда $x = 2$, $f(2) = 0$, т. е. $4a + 2b = 0$, или $2a + b = 0$.

Точка $(3; 3)$ также принадлежит параболе $a \cdot 3^2 + b \cdot 3 = 3$, или $3a + b = 1$.

Имеем систему уравнений
$$\begin{cases} 2a + b = 0, \\ 3a + b = 1. \end{cases}$$

Вычитая из II уравнения I, получим $3a + b - (2a + b) = 1 - 0$, откуда $a = 1$, тогда $b = -2a = -2$.

Значит, $f(x) = x^2 - 2x$.

Теперь найдем абсциссу точки B из уравнения $x^2 - 2x = 3x$, или $x^2 - 5x = 0$, $x(x - 5) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 5$. Следовательно, абсцисса точки B равна 5.

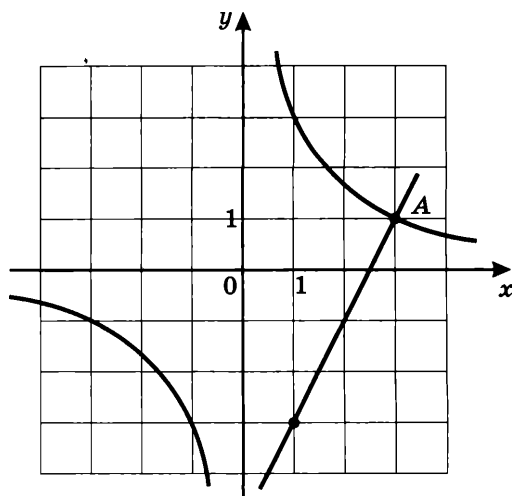
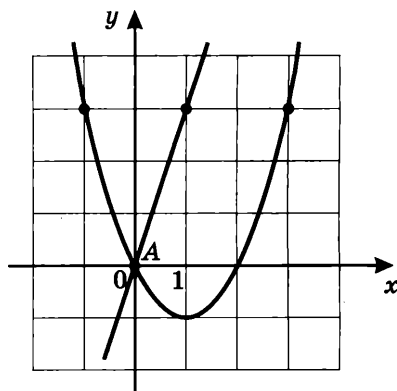
Ответ: 5.

Пример 3. На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите ординату точки B .

Решение.

$f(3) = 1$, или $1 = \frac{k}{3}$, откуда $k = 3$.

Значит, гипербола $f(x) = \frac{3}{x}$.



Угловой коэффициент a прямой $g(x)$ равен $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$,

т. е. $a = 2$.

Значение b найдем из точки $(3; 1)$, тогда $2 \cdot 3 + b = 1$, откуда $b = -5$.
Значит, уравнение прямой имеет вид $g(x) = 2x - 5$.

Найдем абсциссы точек пересечения прямой и гиперболы, для чего решим уравнение:

$$\frac{3}{x} = 2x - 5, \text{ или } 2x^2 - 5x - 3 = 0, x \neq 0.$$

$$D = 25 + 24 = 49 > 0, x_{1,2} = \frac{5 \pm 7}{4}, x_1 = 3, x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $x = -\frac{1}{2}$ — абсцисса точки B , тогда ордината

$$y = \frac{3}{x} = \frac{3}{-\frac{1}{2}} = -6.$$

Ответ: -6 .

Пример 4. На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A . Найдите ординату точки A .

Решение.

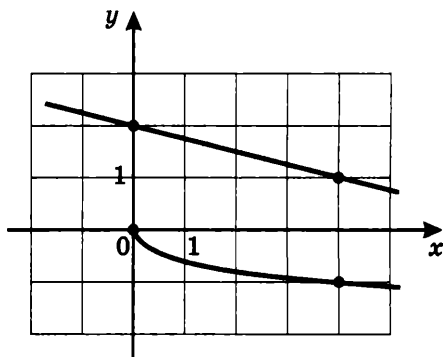
По графику $f(4) = -1$, тогда $a\sqrt{4} = -1$, или $2a = -1$, откуда $a = -\frac{1}{2}$.

Значит, $f(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x}$.

Составим уравнение прямой $g(x) = kx + b$. Так как функция $g(x)$ — убывающая, то $k < 0$. Но $k = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{4}$. По графику $g(0) = 2$, тогда $-\frac{1}{4} \cdot 0 + b = 2$, т. е. $b = 2$.

Значит, $g(x) = -\frac{1}{4}x + 2$.

Решим систему уравнений
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}\sqrt{x}, \\ y = -\frac{1}{4}x + 2. \end{cases}$$



$$-\frac{1}{2}\sqrt{x} = -\frac{1}{4}x + 2, \text{ или } 2\sqrt{x} = x - 8, 4x = (x - 8)^2, x \geq 8.$$

$$4x = x^2 - 16x + 64, \text{ или } x^2 - 20x + 64 = 0, \text{ откуда } x_1 = 16, x_2 = 4.$$

$$\text{Значит, } x = 16 \text{ — абсцисса точки } A, \text{ тогда } y = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 2 = -2.$$

Ответ: -2 .

Пример 5. На рисунке изображены графики функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = ax + b$, которые пересекаются в точках A и B . Найдите абсциссу точки B .

Решение.

Найдем значение k , учитывая, что гипербола проходит через точку $A(3; 1)$. Значит, $f(x) = y = 1, x = 3$, тогда $k = xy = 3 \cdot 1 = 3$.

$$\text{Следовательно, } f(x) = \frac{3}{x}.$$

Поскольку $a = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона прямой к положительному направлению оси Ox , то $a = \frac{4}{2} = 2$. Остается найти значение b .

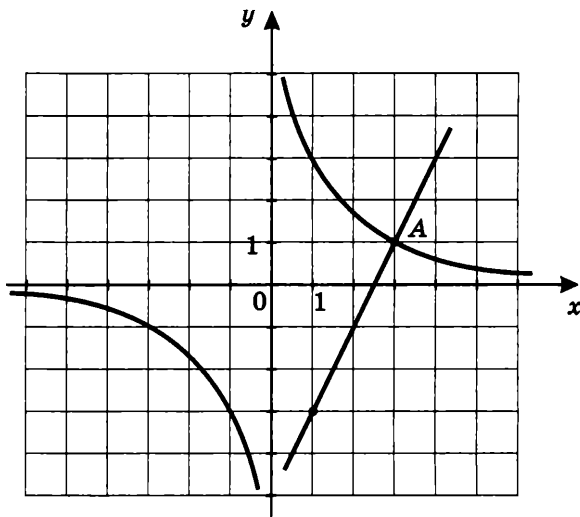
Заметим, что $g(3) = 1$, тогда $2 \cdot 3 + b = 1$, откуда $b = 1 - 6 = -5$.

Значит, прямая имеет вид $y = 2x - 5$.

Решая уравнение $\frac{3}{x} = 2x - 5$, получим $2x^2 - 5x - 3 = 0$, откуда находим $x_1 = 3, x_2 = -0,5$.

Следовательно, $x = -0,5$ — абсцисса точки B .

Ответ: $-0,5$.



Пример 6. На рисунке изображены графики функций $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx + b$, которые пересекаются в точке A . Найдите абсциссу точки A .

Решение.

На кривой $f(x) = a\sqrt{x}$ отмечена точка $(4; 3)$. Значит, $a\sqrt{4} = 3$,

или $2a = 3$, $a = \frac{3}{2} = 1,5$,

т. е. $f(x) = 1,5\sqrt{x}$.

Остается найти значения k и b ,

где $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Кроме того, $g(0) = -3$, тогда получим $\frac{1}{3} \cdot 0 + b = -3$, или $b = -3$,

следовательно, $g(x) = \frac{1}{3}x - 3$.

По условию графики пересекаются в точке A . Имеем уравнение $1,5\sqrt{x} = \frac{1}{3}x - 3$, или $9\sqrt{x} = 2x - 18$.

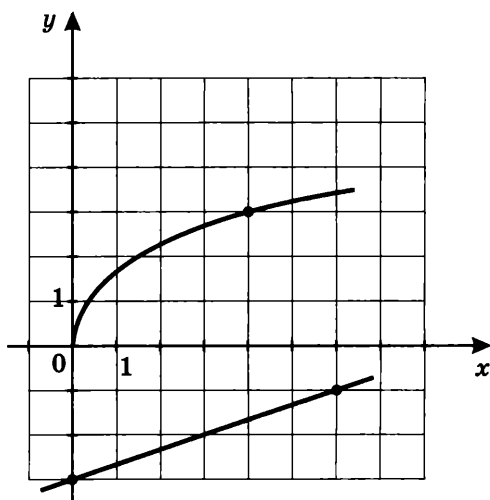
Пусть $\sqrt{x} = t$, тогда получим $9t = 2t^2 - 18$, или $2t^2 - 9t - 18 = 0$.

$D = 81 + 144 = 225 = 15^2 > 0$, $t_{1,2} = \frac{9 \pm 15}{4}$, $t_1 = 6$, $t_2 = -1,5$.

Так как $t \geq 0$, то корень $t_2 = -1,5$ не подходит.

Если $t = 6$, то $\sqrt{x} = 6$, $x = 36$ — абсцисса точки A .

Ответ: 36.

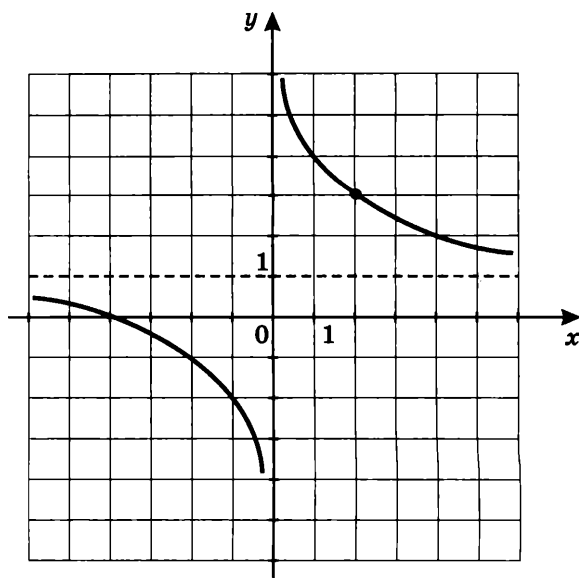


1.2. Гиперболы

Пример 7. На рисунке изображен график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$. Найдите $f(-16)$.

Решение.

$y = 1$ — горизонтальная асимптота графика функции, значит, $a = 1$.



Заметим, что $f(2) = 3$. Тогда получим уравнение $\frac{k}{2} + 1 = 3$, или

$$\frac{k}{2} = 2, k = 4.$$

$$\text{Значит, } f(-16) = \frac{4}{-16} + 1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75.$$

Ответ: 0,75.

Пример 8. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = \frac{a}{x+b} + c$, где числа a , b и c — целые. Найдите $f(8)$.

Решение.

$y = -2$ — горизонтальная асимптота, значит, $c = -2$.

$x = 4$ — вертикальная асимптота, значит, $b = -4$.

Точка, выделенная на графике, имеет координаты $(3; -3)$, тогда $\frac{a}{3-4} - 2 = -3$,

$$\text{или } \frac{a}{-1} = -1, a = 1.$$

Следовательно, $f(x) = \frac{2}{x-4} - 2$, значит, $f(8) = \frac{2}{8-4} - 2 = \frac{2}{4} - 2 = 0,5 - 2 = -1,5$.

Ответ: -1,5.

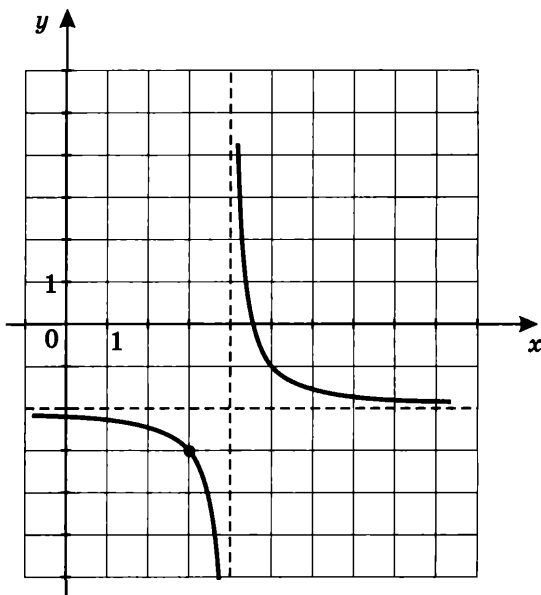
Пример 9. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$, где a , b и c — целые числа. Найдите b .

Решение.

І способ

Преобразуем дробь $\frac{ax+b}{x+c}$ так, чтобы выделить целую часть:

$$\frac{ax+b}{x+c} = \frac{a(x+c)+b-ac}{x+c} = a + \frac{b-ac}{x+c}.$$



Следовательно,

$$f(x) = a + \frac{b-ac}{x+c}.$$

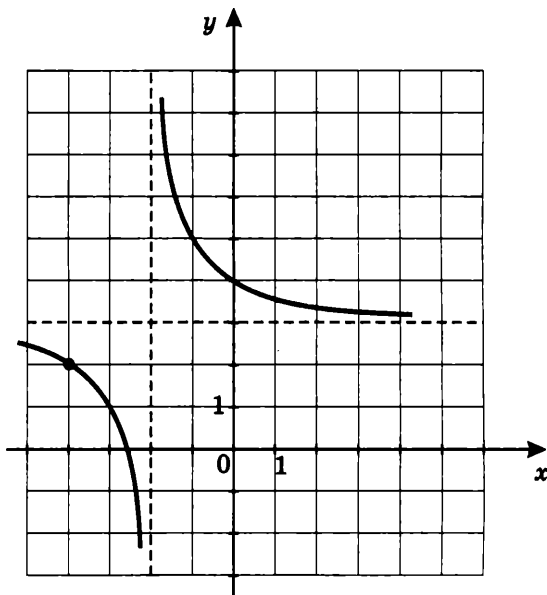
Заметим, что $y = 3$ — горизонтальная асимптота, значит, $a = 3$.

$x = -2$ — вертикальная асимптота, значит, $c = 2$.

Точка, отмеченная на графике, имеет координаты $(-4; 2)$.

Тогда получим уравнение $3 + \frac{b-3 \cdot 2}{-4+2} = 2$, или $\frac{b-6}{-2} = -1$, или $b-6 = 2$, откуда $b = 8$.

Ответ: 8.



II способ

Относительно системы координат XOY имеем сдвиги на 3 единицы вверх и на 2 единицы влево, т. е. $y = \frac{a}{x+2} + 3$. Если асимптоты $x = -2$ и $y = 3$ принять за новую систему координат, то $a = 2$.

Получим $y = \frac{2}{x+2} + 3 = \frac{3x+8}{x+2}$. Сравнивая дроби $\frac{ax+b}{x+c}$ и $\frac{3x+8}{x+2}$, находим $a = 3$, $b = 8$, $c = 2$.

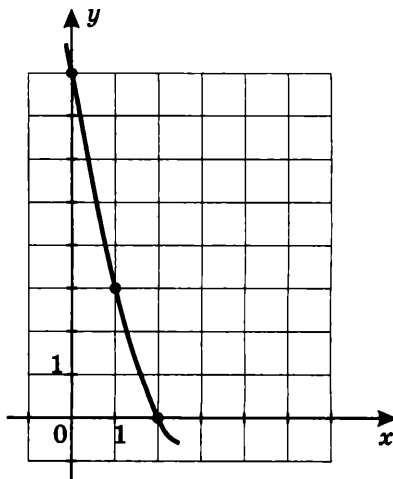
Ответ: 8.

1.3. Параболы

Пример 10. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a , b и c — целые числа. Найдите абсциссу вершины параболы.

Решение.

Абсцисса вершины параболы определяется по формуле $x_0 = \frac{-b}{2a}$.



Из рисунка видно, что при $x = 0$, $f(x) = 8$; при $x = 1$, $f(x) = 3$; при $x = 2$, $f(x) = 0$.

Следовательно, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 8, \\ a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 3, \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} c = 8, \\ a + b + 8 = 3, \\ 4a + 2b + 8 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} c = 8, \\ a + b = -5, \\ 2a + b = -4. \end{cases}$$

Вычитая из III уравнения II, получим $2a - a = -4 + 5$, или $a = 1$. Тогда $b = -5 - 1 = -6$.

Значит, абсцисса вершины параболы $x_0 = \frac{6}{2} = 3$.

Ответ: 3.

Пример 11. На рисунке изображен график функции

$$f(x) = 2x^2 + bx + c.$$

Найдите значение $f(-7)$.

Решение.

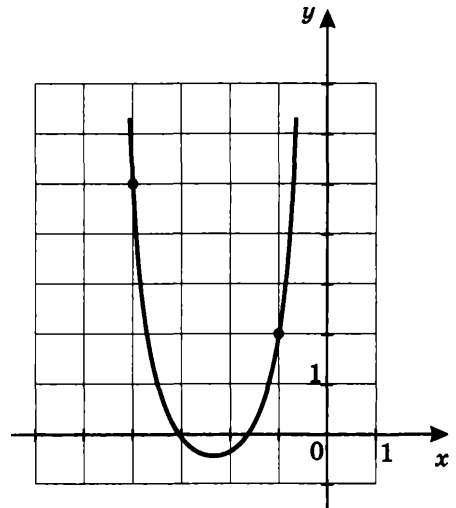
Для нахождения значений b и c достаточно использовать координаты двух выделенных точек: при $x = -4$, $f(x) = 5$; при $x = -1$, $f(x) = 2$. Получим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 2 \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + c = 5, \\ 2 \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 32 - 4b + c = 5, \\ 2 - b + c = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} -4b + c = -27, \\ -b + c = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4b + c = -27, \\ c = b; \end{cases} \quad \begin{cases} -4b + b = -27, \\ c = b; \end{cases} \quad \begin{cases} -3b = -27, \\ c = b; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 9, \\ c = 9. \end{cases}$$

Следовательно, $f(-7) = 2 \cdot (-7)^2 + 9 \cdot (-7) + 9 = 98 - 63 + 9 = 44$.

Ответ: 44.



Пример 12. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = \frac{x^2}{a} + bx + c$, где a , b и c — целые числа. Найдите значение $f(0)$.

Решение.

І способ

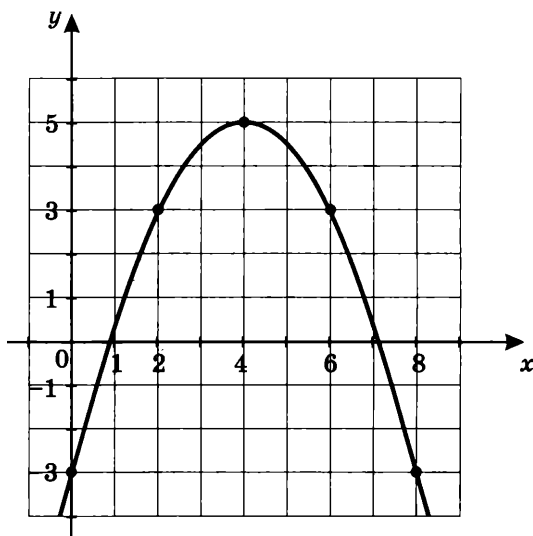
Так как ветви параболы направлены вниз, то $a < 0$.

$(4; 5)$ — координаты вершины параболы, тогда уравнение параболы имеет вид

$$y = -\frac{(x-4)^2}{2} + 5.$$

$$\text{Значит, } f(0) = -\frac{(-4)^2}{2} + 5 = -8 + 5 = -3.$$

Ответ: -3 .



ІІ способ

1) При $x = 0$, $f(x) = -3$; 2) при $x = 2$, $f(x) = 3$; 3) $x_0 = \frac{-b}{2a} = 4$, $f(x_0) = 5$.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{0}{a} + b \cdot 0 + c = -3, \\ \frac{4}{a} + 2b - 3 = 3, \\ \frac{16}{a} + 4b - 3 = 5; \end{cases} \quad \begin{cases} c = -3, \\ \frac{4}{a} + 2b = 6, \\ \frac{16}{a} + 4b = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} c = -3, \\ \frac{4}{a} + 2b = 6, \\ \frac{4}{a} + b = 2. \end{cases}$$

Вычтем из ІІ уравнения ІІІ: $2b - b = 4$, $b = 4$, тогда $\frac{4}{a} + 2 \cdot 4 = 6$,

или $\frac{4}{a} = -2$, $a = -2$.

Следовательно, $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 4x - 3$, тогда $f(0) = 0 + 4 \cdot 0 - 3 = -3$.

Ответ: -3 .

Пример 13. На рисунке изображен график функции

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Найдите $f(-7)$.

I способ

Решение.

Из рисунка видно, что $f(0) = -1$,
 $f(-1) = -4$.

Следовательно, $c = -1$,
 $a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) - 1 = -4$, или
 $a - b = -3$.

Кроме того, абсцисса вершины
параболы $x_0 = \frac{-b}{2a}$, или $-2 = \frac{-b}{2a}$,
откуда $b = 4a$.

Имеем систему уравнений $\begin{cases} a - b = -3, \\ b = 4a; \end{cases} \begin{cases} a - 4a = -3, \\ b = 4a; \end{cases} \begin{cases} a = 1, \\ b = 4. \end{cases}$

Значит, $f(x) = x^2 + 4x - 1$, $f(-7) = 49 - 28 - 1 = 20$.

Ответ: 20.

II способ

Решение.

Из рисунка видно, что у нас парабола вида $y = x^2$ (где $a = 1$), с вершиной в точке $(-2; -5)$, следовательно, $f(x) = (x + 2)^2 - 5$.

Тогда $f(-7) = (-7 + 2)^2 - 5 = 20$.

Ответ: 20.

Пример 14. На рисунке изображены графики функций

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 19 \text{ и } g(x) = ax^2 + bx + c,$$

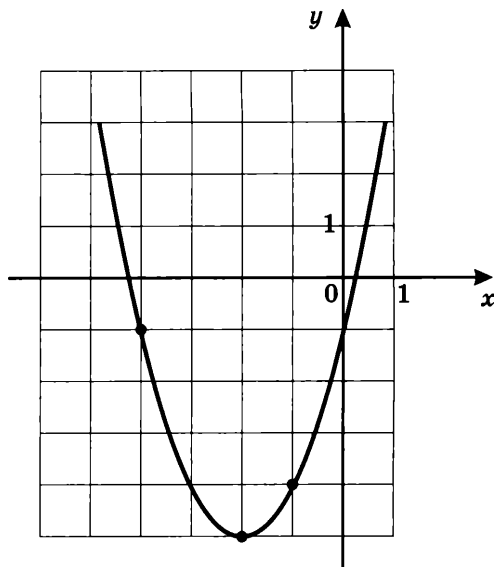
которые пересекаются в точках А и В. Найдите ординату точки В.

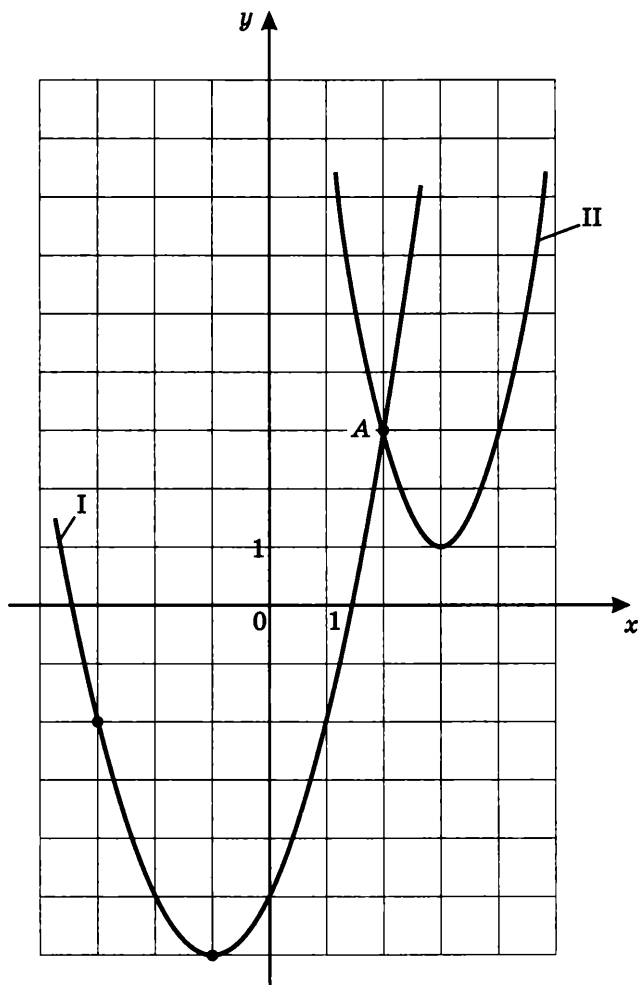
Решение.

Абсцисса вершины параболы $f(x)$ равна $x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{12}{4} = 3$, тогда
 $y_0 = 2 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 19 = 1$, что соответствует II параболы.

Остается найти формулу, задающую функцию $g(x)$.

При изменении абсциссы точки вершины параболы на 1 ед. ордината увеличивается на 1 ед. Значит, $a = 1$. Парабола пересекает ось Oy в точке $(0; -5)$, т. е. $c = -5$.





Абсцисса вершины параболы $g(x)$ равна $x_0 = \frac{-b}{2a}$, где $x_0 = -1$, $a = 1$, тогда $b = 2$. Следовательно, $g(x) = x^2 + 2x - 5$.

Теперь найдем абсциссу точки B , для чего решим уравнение:

$2x^2 - 12x + 19 = x^2 + 2x - 5$, или $x^2 - 14x + 24 = 0$, откуда $x_1 = 12$, $x_2 = 2$.

Значит, $x = 12$ — абсцисса точки B , тогда ордината равна $g(12) = 12^2 + 2 \cdot 12 - 5 = 163$.

Ответ: 163.

1.4. Линейные функции

Пример 15. На рисунке изображен график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x , при котором $f(x) = -7,5$.

Решение.

Координаты выделенных точек $(3; -3)$ и $(-1; -2)$.

Так как $f(x) = kx + b$, то координаты точек удовлетворяют уравнению прямой $\begin{cases} 3k + b = -3, \\ -k + b = -2. \end{cases}$

Вычтем из I уравнения II:

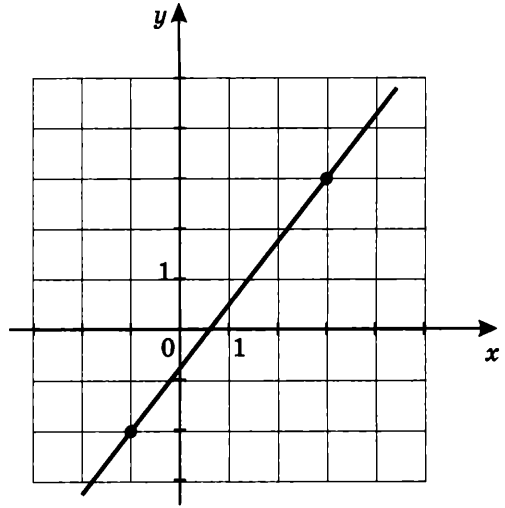
$$3k + k = -3 + 2; 4k = -1; k = -\frac{1}{4}, \text{ тогда } b = k - 2 = -\frac{1}{4} - 2 = -\frac{9}{4}.$$

Следовательно, уравнение прямой примет вид $y = -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4}$.

По условию $f(x) = -7,5$.

$$\text{Получим } -\frac{1}{4}x - \frac{9}{4} = -7,5, \text{ или } -x - 9 = -30, \text{ или } -x = -21, x = 21.$$

Ответ: 21.



Пример 16. На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения.

Решение.

Линейная функция имеет вид $y = kx + b$.

$$y_1 = k_1x + b_1, y_2 = k_2x + b_2, \text{ где}$$

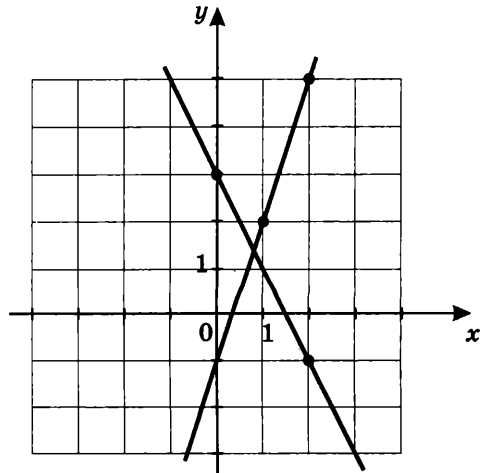
$$k_1 = \frac{3}{1} = 3, k_2 = -\frac{4}{2} = -2.$$

$$\text{Значит, } y_1 = 3x + b_1,$$

$$y_2 = -2x + b_2.$$

$(1; 2)$ — координаты точки пересечения, где $k_1 = 3$, тогда получим $2 = 3 \cdot 1 + b_1$, откуда $b_1 = -1$.

Следовательно, $y_1 = 3x - 1$.



Аналогично $(0; 3)$ — координаты второй прямой.

Тогда имеем $3 = -2 \cdot 0 + b_2$, т. е. $b_2 = 3$. Значит, $y_2 = -2x + 3$.

Так как прямые пересекаются, то $y_1 = y_2$, т. е. $3x - 1 = -2x + 3$, или $5x = 4$, $x = 0,8$.

Ответ: 0,8.

Пример 17. На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите ординату точки пересечения графиков.

Решение.

Линейная функция имеет вид $y = kx + b$. Для прямой, изображенной во II и III четвертях,

имеем $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{1} = 2$.

По графику $f(-2) = 1$, тогда $2 \cdot (-2) + b = 1$, откуда $b = 5$.

Значит, $y = 2x + 5$. Аналогично для II прямой: $k = \frac{1}{2}$.

По графику $f(1) = 1$, тогда $\frac{1}{2} \cdot 1 + b = 1$, $b = \frac{1}{2}$.

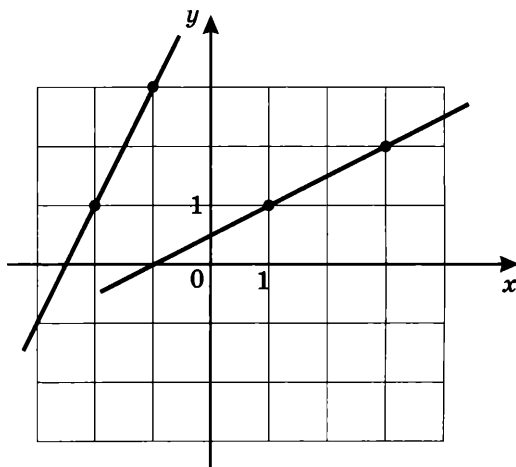
Следовательно, $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Найдем абсциссу точки пересечения:

$$2x + 5 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \text{ или } 4x + 10 = x + 1, 3x = -9,$$

откуда $x = -3$, тогда $y = 2 \cdot (-3) + 5 = -1$.

Ответ: -1.



1.5. Показательные и логарифмические функции

Пример 18. На рисунке изображен график функции

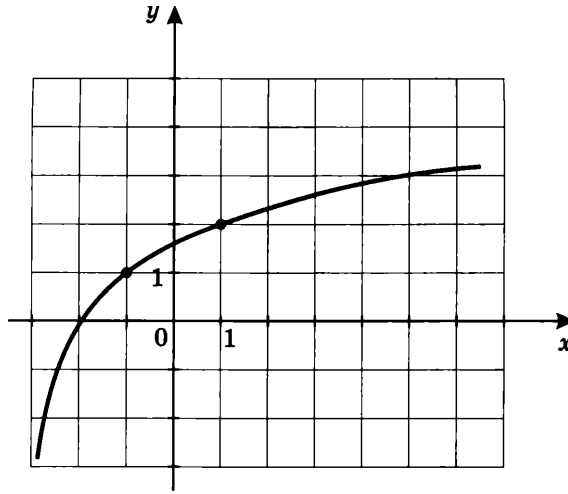
$$f(x) = \log_a (x + b).$$

Найдите $f(13)$.

Решение.

ОДЗ: $x \in (-3; +\infty)$.

Значит, $b = 3$.



Так как график проходит через точку $(-1; 1)$, то получим уравнение $1 = \log_a (-1 + 3)$, или $a = 2$.

Значит, $f(x) = \log_2 (x + 3)$, тогда $f(13) = \log_2 (13 + 3) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$.

Ответ: 4.

Пример 19. На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a x + b$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 2$.

Решение.

Отметим координаты выделенных точек: $(1; -4)$ и $(4; -2)$. Получим систему уравнений

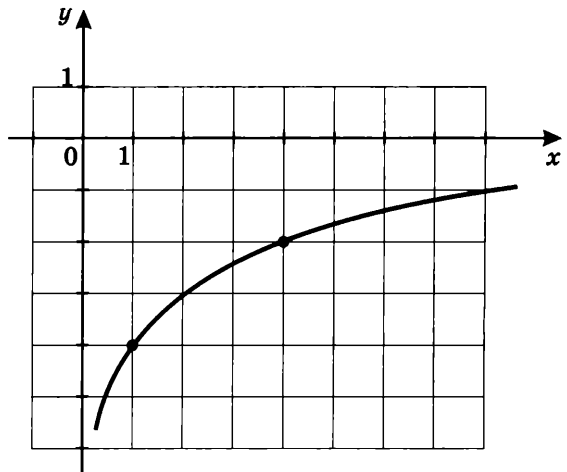
$$\begin{cases} \log_a 1 + b = -4, \\ \log_a 4 + b = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 + b = -4, \\ \log_a 4 + b = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -4, \\ \log_a 4 - 4 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -4, \\ \log_a 4 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -4, \\ 2\log_a 2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -4, \\ \log_a 2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} b = -4, \\ a = 2. \end{cases}$$

Значит, $f(x) = \log_2 x - 4$. Так как $f(x) = 2$, то получим $\log_2 x - 4 = 2$, $\log_2 x = 6$, $x = 2^6 = 64$.

Ответ: 64.



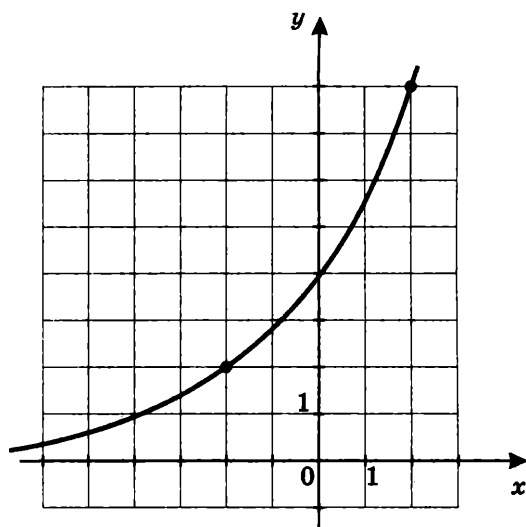
Пример 20. На рисунке изображен график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите $f(-8)$.

Решение.

Нам надо прежде всего найти значения a и b , для чего мы используем координаты выделенных точек $(-2; 2)$ и $(2; 8)$.

Так как $f(x) = a^{x+b}$, то получим систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} a^{-2+b} = 2, \\ a^{2+b} = 8, \end{cases} \text{ где } a > 0, a \neq 1.$$



Разделим II уравнение на I: $\frac{a^{2+b}}{a^{-2+b}} = \frac{8}{2}$, или $a^{2+b+2-b} = 4$, $a^4 = 4$, $a^2 = 2$,

откуда $a = \sqrt{2}$, так как $a > 0$.

Подставим значение $a = \sqrt{2}$ в одно из уравнений системы, например, в I: $\sqrt{2}^{-2+b} = 2$, или $\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-2+b} = 2^1$, или $\frac{1}{2}(-2+b) = 1$, или $-2+b = 2$,

откуда $b = 4$. Тогда $f(x) = (\sqrt{2})^{x+4}$.

$$\text{Значит, } f(-8) = (\sqrt{2})^{-8+4} = (\sqrt{2})^{-4} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{-4} = 2^{-2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

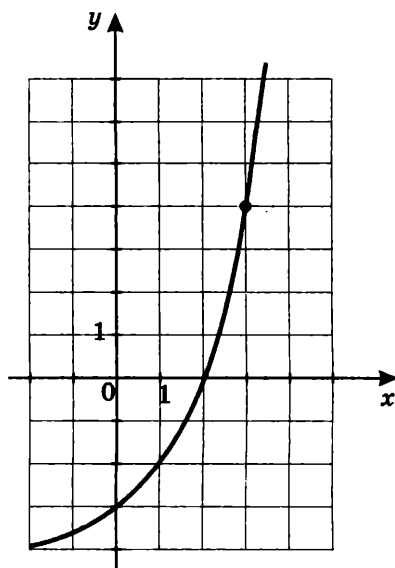
Пример 21. На рисунке изображен график функции $f(x) = a^x + b$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 28$.

Решение.

Так как функция — показательная, то $E(f) = (b; +\infty)$.

Из рисунка видно, что $E(f) = (-4; +\infty)$, т. е. $b = -4$. Кроме того, $f(3) = 4$.

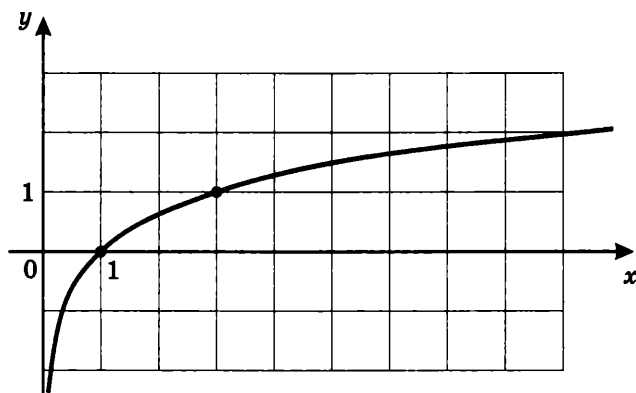
Тогда получим уравнение $a^3 - 4 = 4$, $a^3 = 8$, $a = 2$.



Следовательно, $f(x) = 2^x - 4$. Чтобы найти значение x , остается решить показательное уравнение $2^x - 4 = 28$, или $2^x = 32 = 2^5$, $x = 5$.

Ответ: 5.

Пример 22. На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(81)$.



Решение.

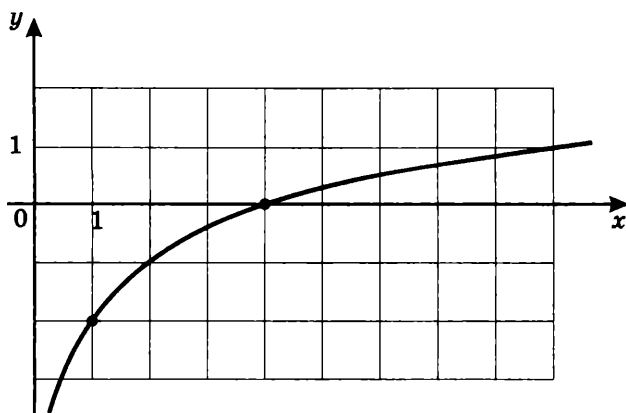
По графику $f(3) = 1$, тогда $\log_a 3 = 1$, откуда $a = 3$.

Значит, на рисунке изображен график функции $f(x) = \log_3 x$.

Следовательно, $\log_3 81 = 4$.

Ответ: 4.

Пример 23. На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a x + b$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 3$.



Решение.

По рисунку $f(1) = -2$, $f(4) = 0$.

Получим $\begin{cases} -2 = \log_a 1 + b, \\ 0 = \log_a 4 + b; \end{cases} \begin{cases} -2 = 0 + b, \\ \log_a 4 = -b; \end{cases} \begin{cases} b = -2, \\ \log_a 4 = 2; \end{cases} \begin{cases} b = -2, \\ a^2 = 4; \end{cases} \begin{cases} b = -2, \\ a = 2, \end{cases}$

где $a > 0$, $a \neq 1$.

Значит, $f(x) = \log_2 x - 2$. Так как $f(x) = 3$, то $\log_2 x - 2 = 3$, $\log_2 x = 5$, $x = 2^5 = 32$.

Ответ: 32.

1.6. Тригонометрические функции

Пример 24. На рисунке изображен график функции

$$f(x) = a \sin x + b.$$

Найдите b .

Решение.

Координаты выделенной точки

$$\left(0; \frac{1}{2}\right).$$

Тогда получим $a \cdot \sin 0 + b = \frac{1}{2}$,

$$0 + b = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

Пример 25. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \cos x + b$. Найдите a .

Решение.

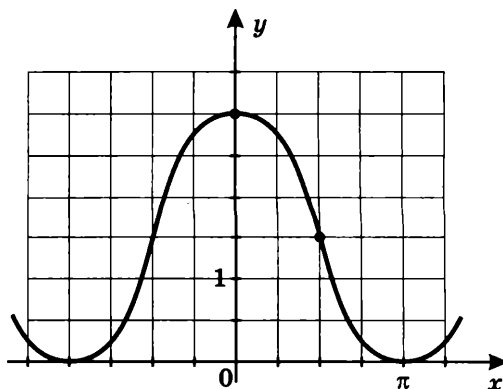
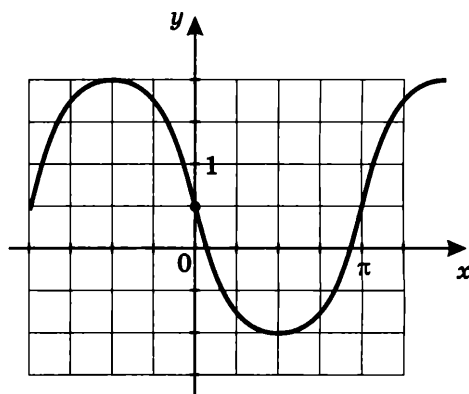
Координаты выделенных точек $(0; 3)$ и $\left(\frac{\pi}{2}; 1,5\right)$.

Тогда получим $\begin{cases} a \cdot \cos 0 + b = 3, \\ a \cdot \cos \frac{\pi}{2} + b = 1,5; \end{cases} \begin{cases} a \cdot 1 + b = 3, \\ a \cdot 0 + b = 1,5; \end{cases} \begin{cases} a + b = 3, \\ b = 1,5, \end{cases} \text{ откуда}$

$$a = 1,5.$$

Ответ: 1,5.

Замечание. Можно было учесть, что $f_{\max} = 3$, тогда $a = \frac{1}{2} f_{\max} = 1,5$.



Пример 26. Нарисунке изображен график функции $f(x) = a \operatorname{tg} x + b$. Найдите b .

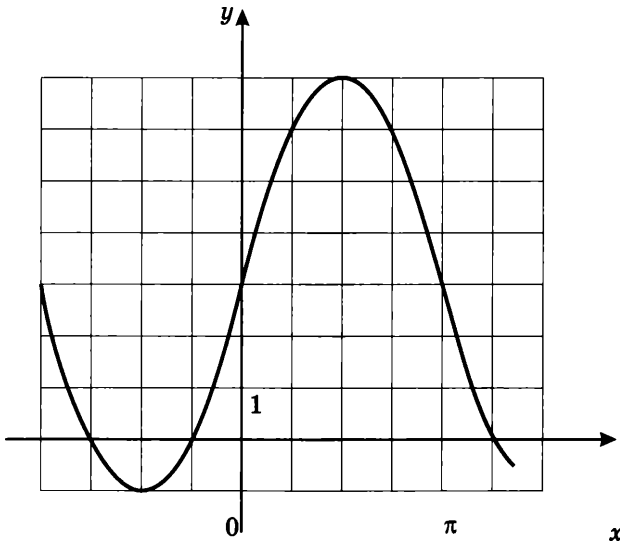
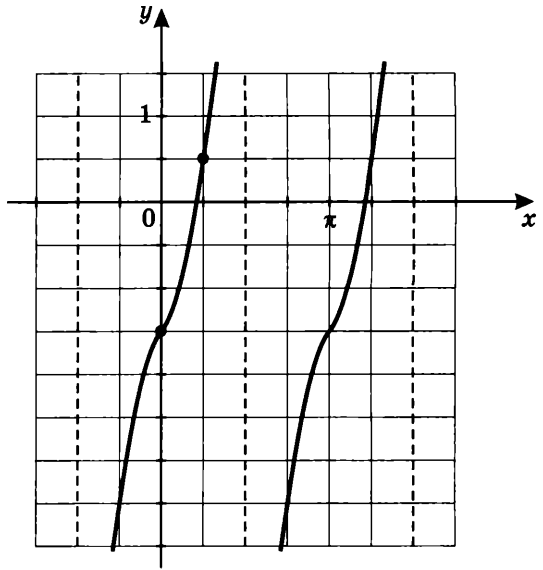
Решение.

Из выделенных точек удобно взять точку на оси Oy с координатами $(0; -1,5)$, так как $\operatorname{tg} 0 = 0$.

Получим $a \cdot \operatorname{tg} 0 + b = -1,5$, откуда $b = -1,5$.

Ответ: $-1,5$.

Пример 27. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите b .



Решение.

По графику находим $f(0) = 1,5$, тогда $a \cdot \sin 0 + b = 1,5$, или $0 + b = 1,5$, откуда $b = 1,5$.

Ответ: $1,5$.

1.7. Кусочно-линейные функции

Пример 28. На рисунке изображен график функции $y = k|x + a| + b$. Найдите $f(13)$.

Решение.

Обозначим вершину угла $A(x_0; y_0)$.

Коэффициенты a и b показывают сдвиги, k — растяжение графика.

$$f(x) = k|x - x_0| + y_0.$$

Угловым коэффициентом k найдем из прямоугольного $\triangle ACB$, где $k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{3}$.

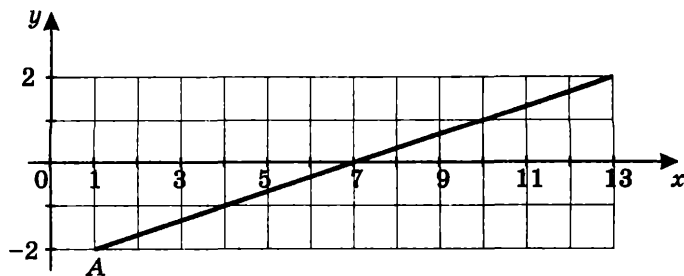
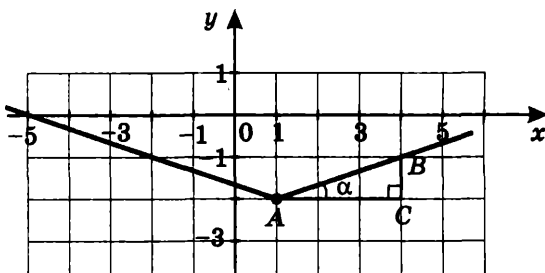
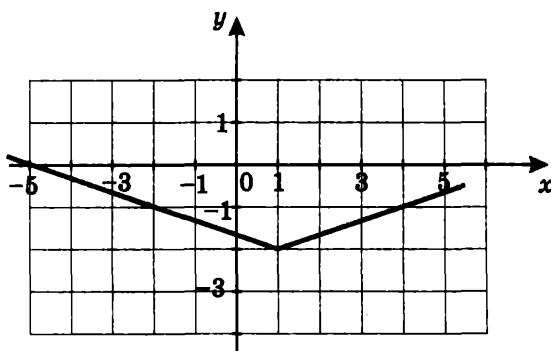
Точка A имеет координаты $(1; -2)$.

$$\text{Тогда } f(x) = \frac{1}{3}|x - 1| - 2.$$

$$\text{Следовательно, } f(13) = \frac{1}{3}|13 - 1| - 2 = \frac{1}{3} \cdot 12 - 2 = 4 - 2 = 2.$$

Ответ: 2.

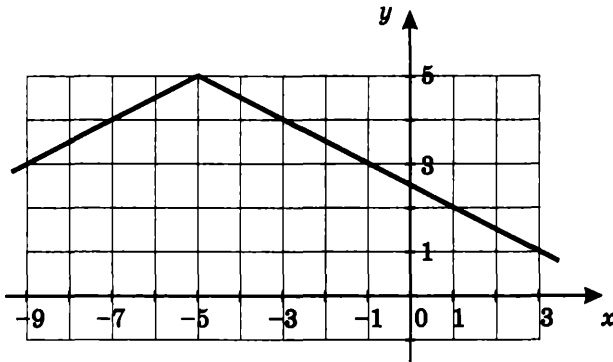
Замечание. Значение $f(13) = 2$ видно из приведенного рисунка.



Пример 29. На рисунке изображен график функции

$$f(x) = k|x + a| + b.$$

Найдите $f(7)$.



Решение.

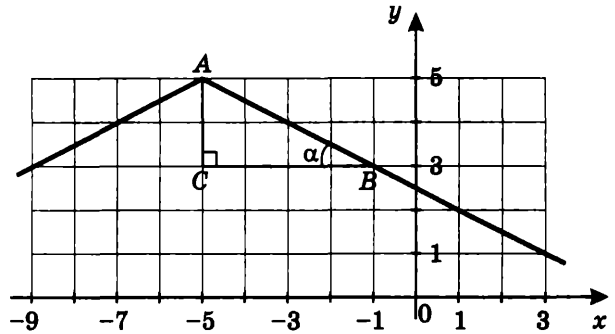
Запишем данную функцию в виде $f(x) = k|x - x_0| + y_0$, где $(x_0; y_0)$ — координаты вершины угла.

Правая ветвь графика — убывающая функция, тогда $k = \operatorname{tg} \alpha =$

$$= -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

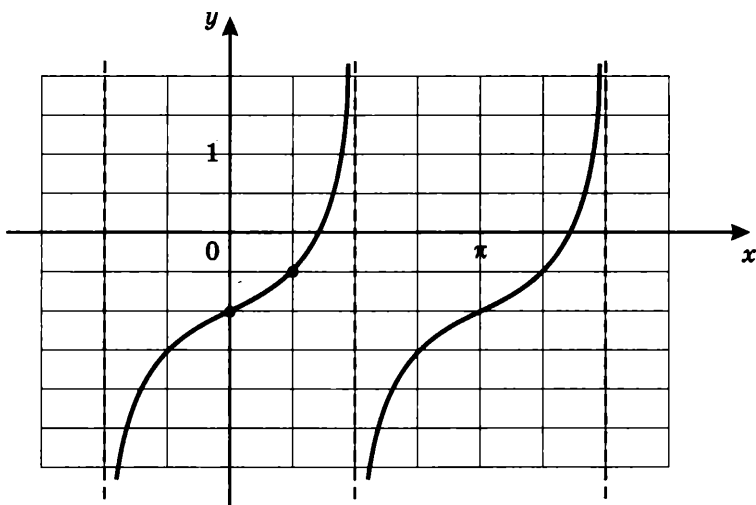
$$A(-5; 5), \text{ следовательно, } f(x) = -\frac{1}{2}|x + 5| + 5 = -\frac{1}{2} \cdot |7 + 5| + 5 = -6 + 5 = -1.$$

Ответ: -1.

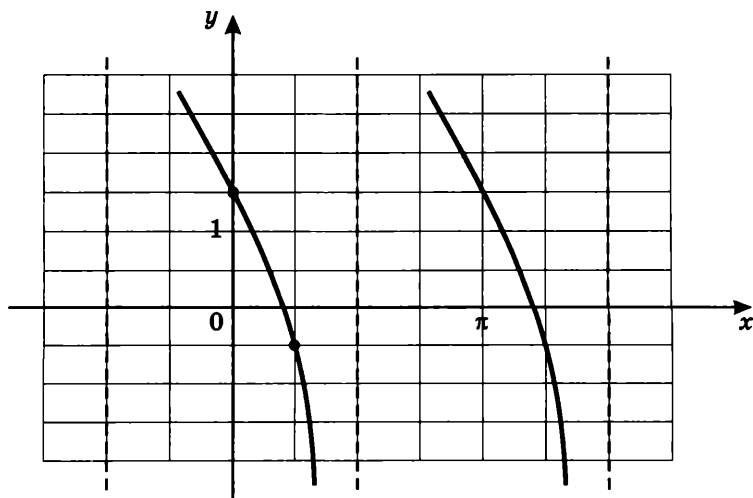


Задачи для самостоятельного решения

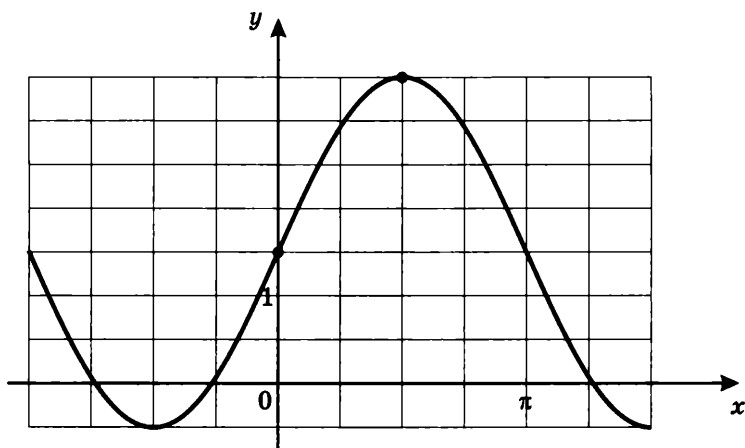
1. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \operatorname{tg} x + b$.
Найдите b .



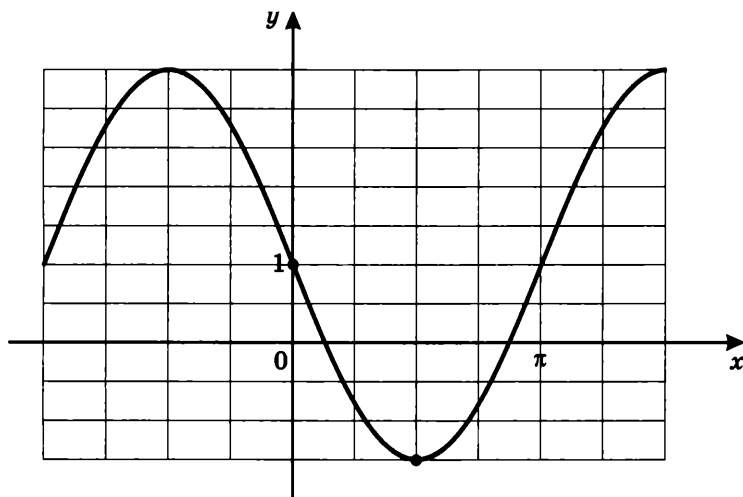
2. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \operatorname{tg} x + b$.
Найдите b .



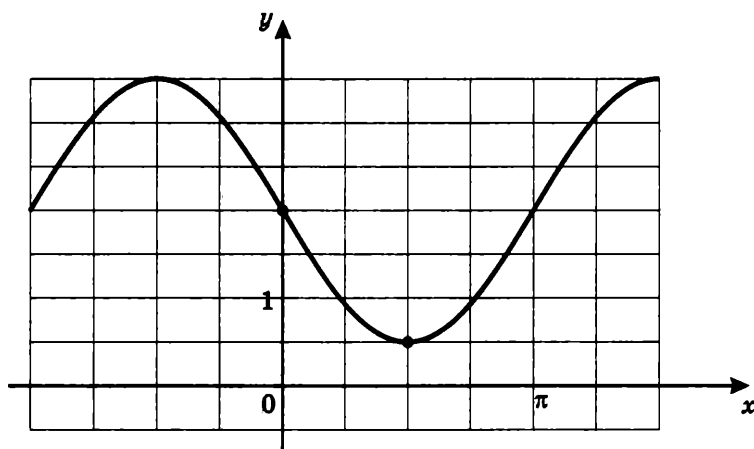
3. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \sin x + b$.
Найдите b .



4. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \sin x + b$.
Найдите b .



5. На рисунке изображен график функции $f(x) = a \sin x + b$. Найдите b .



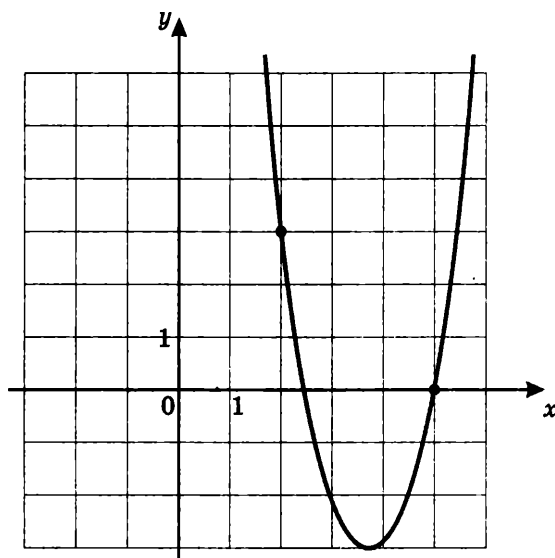
6. На рисунке изображен график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 2,1$.



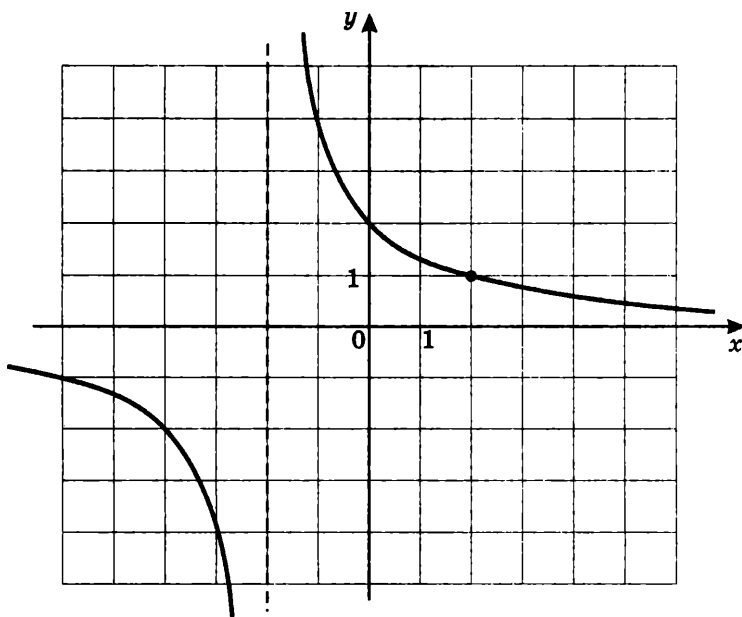
7. На рисунке изображен график функции $f(x) = k\sqrt{x} + m$. Найдите $f(144)$.



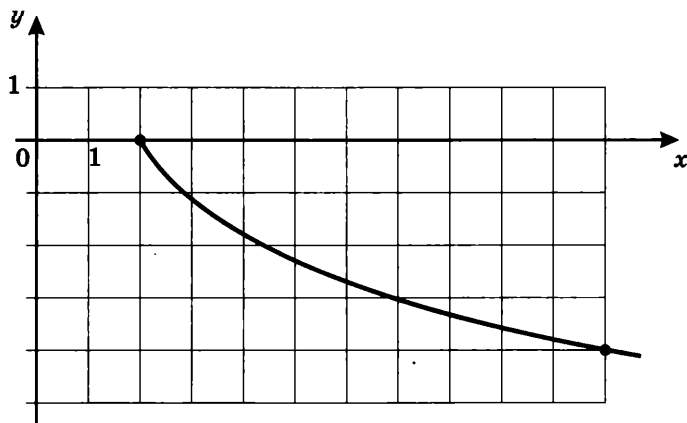
8. На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 - 15x + c$. Найдите $f(1)$.



9. На рисунке изображен график функции $f(x) = \frac{k}{x+a}$. Найдите значение x , при котором $f(x) = 0,04$.

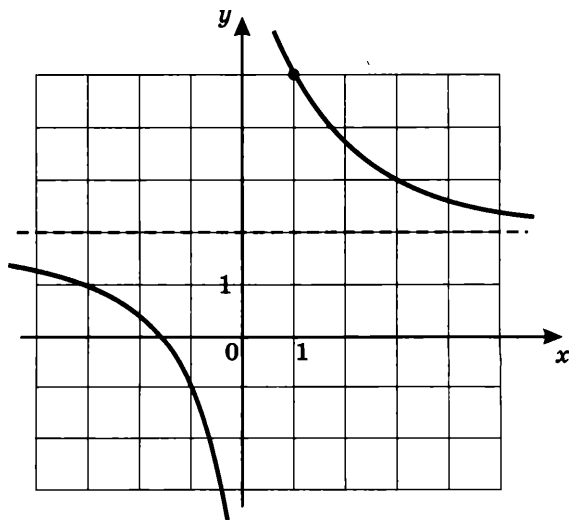


10. На рисунке изображен график функции $f(x) = k\sqrt{x+m}$. Найдите значение x , при котором $f(x) = -8$.

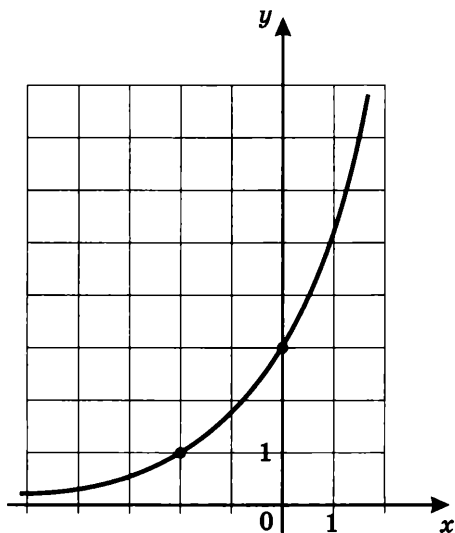


11. На рисунке изображен график функции $f(x) = \frac{k}{x} + a$.

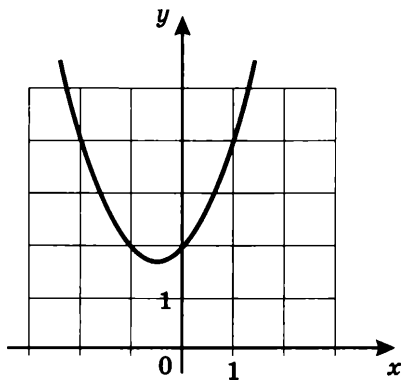
Найдите $f\left(\frac{1}{4}\right)$.



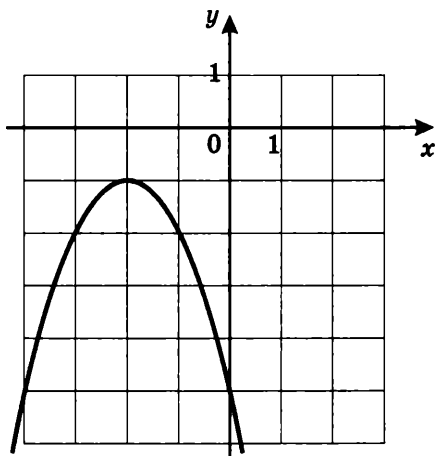
12. На рисунке изображен график функции $f(x) = a^{x+b}$. Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно $\frac{1}{27}$.



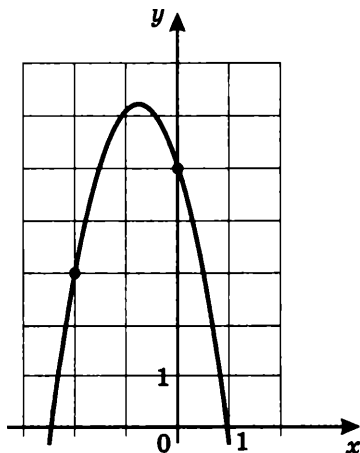
13. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — целые числа. Найдите $f(5)$.



14. На рисунке изображен график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — целые числа. Найдите $f(6)$.



15. На рисунке изображен график функции $f(x) = ax^2 - 3x + c$. Найдите $f(-3)$.



§ 2. ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ

Задачи из раздела «Производная и первообразная» подразделяются на несколько видов:

- 1) физический смысл производной;
- 2) геометрический смысл производной и касательной;
- 3) применение производной к исследованию функций;
- 4) первообразная.

В целом задание относится к математическому анализу.

2.1. Касательная. Геометрический и физический смысл производной

Пример 1. Прямая $y = 6x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 8x - 11$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, т. е. $f'(x_0) = k$.

По условию задачи касательная к графику функции параллельна прямой $y = 6x - 5$, значит, их угловые коэффициенты равны, т. е. $k = 6$.

Найдем производную данной функции $y' = (x^2 + 8x - 11)' = 2x + 8$. Поскольку $y' = k = 6$, то получим $2x + 8 = 6$, $2x = -2$, $x = -1$.

Ответ: -1 .

Пример 2. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = -\frac{5}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = -1$.

Решение.

$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha$, где k — угловой коэффициент касательной, α — угол наклона между касательной к графику данной функции в точке x_0 и положительным направлением оси Ox .

Так как $y = -\frac{5}{x}$, то $y'(x) = -5 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = -5 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{5}{x^2}$.

Тогда $y'(x_0) = y'(-1) = \frac{5}{(-1)^2} = 5$. Итак, $\operatorname{tg} \alpha = 5$.

Ответ: 5 .

Пример 3. Тело движется прямолинейно по закону

$$S(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6 \text{ (расстояние измеряется в метрах).}$$

Вычислите скорость движения в момент времени $t = 2$ с.

Решение.

Известно, что скорость движения есть производная пути S по времени t , т. е. $v(t) = S'(t)$, или $v(t) = \left(\frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3t^2 + \frac{3}{2} \cdot 2t - 0 = t^2 + 3t$.

Тогда $v(2) = 2^2 + 3 \cdot 2 = 10$ (м/с).

Ответ: 10.

Пример 4. Найдите угол между касательной к графику функции

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 \text{ в точке с абсциссой } x_0 = 1 \text{ и осью } Oх.$$

Решение.

$$f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Так как } f(x) = \frac{1}{3}x^3, \text{ то } f'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2.$$

Тогда $f'(x_0) = f'(1) = 1$. Значит, $\operatorname{tg} \alpha = 1$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$.

Ответ: 45.

Пример 5. Тело движется прямолинейно, и его скорость измеряется по закону $v(t) = 6t^2 - 4t$ (м/с). Какую скорость приобретает тело в момент, когда его ускорение станет равным 20 м/с²?

Решение.

Ускорение движущегося прямолинейного тела есть производная скорости по времени t , т. е. $a(t) = v'(t)$, $v(t) = 6t^2 - 4t$.

$$\text{Тогда } a(t) = (6t^2 - 4t)' = 12t - 4.$$

Если ускорение $a = 20$ м/с², то получим уравнение $12t - 4 = 20$, $12t = 24$, откуда $t = 2$.

$$\text{Тогда } v(2) = 6 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 16 \text{ (м/с).}$$

Ответ: 16.

Пример 6. Через точку графика функции $y = 14x \cos(x - 2) - 3x^2$ с абсциссой $x_0 = 2$ проведена касательная. Найдите тангенс угла наклона этой касательной к оси ординат.

Решение.

$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона между касательной и положительным направлением оси Ox .

Следовательно, $y'(x) = 14(x \cos(x-2))' - 6x = 14(1 \cdot \cos(x-2) + x(-\sin(x-2))) - 6x = 14(\cos(x-2) - x \sin(x-2)) - 6x$.

Тогда $y'(2) = 14(\cos 0 - 2 \sin 0) - 6 \cdot 2 = 14 \cdot (1 - 0) - 12 = 2$.

Так как по определению угол с осью ординат $\beta = 90^\circ - \alpha$, то $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha$.

Но $\operatorname{tg} \alpha = y'(2) = 2$, тогда $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2} = 0,5$.

Итак, $\operatorname{tg} \beta = 0,5$, где β — искомый угол.

Ответ: 0,5.

Пример 7. Укажите абсциссу точки графика функции

$$f(x) = 7 - 3x - 2x^2,$$

в которой коэффициент касательной равен нулю.

Решение.

$$f'(x) = (7 - 3x - 2x^2)' = -3 - 4x.$$

Согласно условию $f'(x) = 0$, или $-3 - 4x = 0$, $4x = 3$, $x = 0,75$.

Ответ: 0,75.

Пример 8. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -t^4 + 5t^3 + 6t + 13$ (где x — расстояние от точки отсчета в метрах, t — время в секундах, измеренное с начала движения). Найдите ее скорость в (м/с) в момент времени $t = 2$ с.

Решение.

$$v(t) = x'(t) = (-t^4 + 5t^3 + 6t + 13)' = -4t^3 + 15t^2 + 6.$$

При $t = 2$ имеем $v(2) = -4 \cdot 2^3 + 15 \cdot 2^2 + 6 = -32 + 60 + 6 = 34$ м/с.

Ответ: 34.

Пример 9. Прямая $y = 5x + 2$ является касательной к графику функции $f(x) = ax^2 + 3x + 4$. Найдите значение a .

Решение.

Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда выполняются одновременно условия $f(x_0) = y(x_0)$ и $f'(x_0) = k$, где $k = 5$ — угловой коэффициент прямой $y = 5x + 2$.

$$\text{Имеем } \begin{cases} 2ax_0 + 3 = 5, \\ ax_0^2 + 3x_0 + 4 = 5x_0 + 2; \end{cases} \begin{cases} ax_0 = 1, \\ 1 \cdot x_0 + 3x_0 + 4 = 5x_0 + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax_0 = 1, \\ x_0 = 2; \end{cases} \begin{cases} a = 0,5, \\ x_0 = 2. \end{cases}$$

Итак, искомое значение $a = 0,5$.

Ответ: 0,5.

Пример 10. Прямая $y = -6x + 9$ является касательной к графику функции $f(x) = 13x^2 + bx + 22$. Найдите значение b , если абсцисса точки касания $x_0 > 0$.

Решение.

Уравнение касательной к графику данной функции в точке с абсциссой x_0 имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0), \text{ или}$$

$$y = y_0 + f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0, \text{ где } y = -6x + 9.$$

Имеем $f'(x_0) = 26x_0 + b$, $f(x_0) = 13x_0^2 + bx_0 + 22$, где $x_0 > 0$.

$$\begin{cases} -6 = 26x_0 + b, \\ 9 = 13x_0^2 + bx_0 + 22 - 26x_0^2 - bx_0; \end{cases} \begin{cases} b = -6 - 26x_0, \\ 13x_0^2 = 13; \end{cases} \begin{cases} b = -32, \\ x_0 = 1. \end{cases}$$

Ответ: -32.

Пример 11. Прямая $y = 2x + 7$ является касательной к графику функции $f(x) = 5x^2 - 8x + c$. Найдите значение c .

Решение.

Уравнение касательной к графику в точке x_0 имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0), \text{ или}$$

$$y = y_0 + f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0, \text{ где } y = 2x + 7.$$

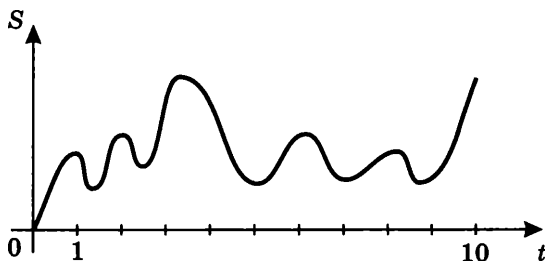
Имеем $f'(x_0) = 10x_0 - 8$, $f(x_0) = 5x_0^2 - 8x_0 + c$.

$$\begin{cases} 2 = 10x_0 - 8, \\ 7 = 5x_0^2 - 8x_0 + c - 10x_0^2 + 8x_0; \end{cases} \begin{cases} x_0 = 1, \\ c = 7 + 5x_0^2; \end{cases} \begin{cases} x_0 = 1, \\ c = 7 + 5 = 12. \end{cases}$$

Ответ: 12.

Пример 12. Материальная точка M начинает движение из точки A и движется по прямой на протяжении 10 секунд. График показывает, как менялось расстояние от точки A до точки M со временем.

На оси абсцисс откладывает-ся время t в секундах, на оси ординат — расстояние S в метрах. Определите, сколько раз точка M меняла направление движения.

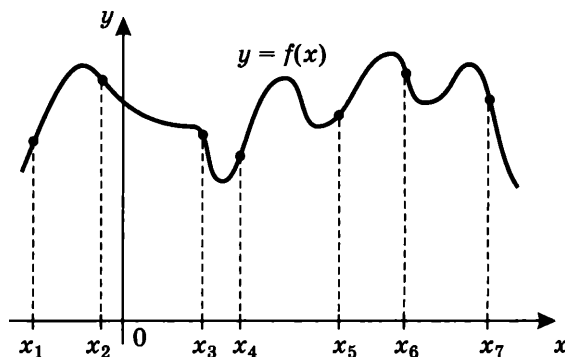


Решение.

Когда точка M меняет направление движения, мгновенная скорость равна нулю. Но $v(t) = S'(t)$. Значение производной равно нулю в точках экстремума функции $S(t)$, которых на графике всего 10.

Ответ: 10.

Пример 13. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены 7 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_7$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

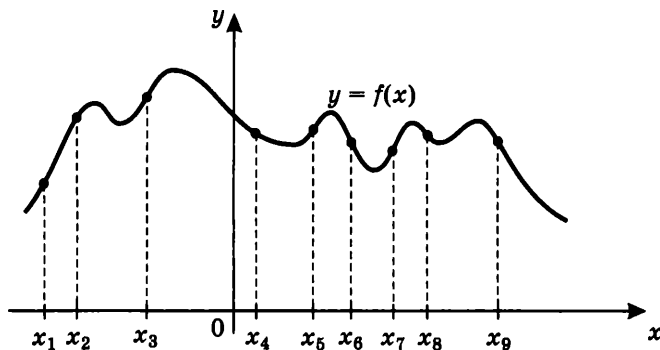


Решение.

Если производная функции $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает на промежутке. Таких точек всего 3: x_1, x_4, x_5 .

Ответ: 3.

Пример 14. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены 9 точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

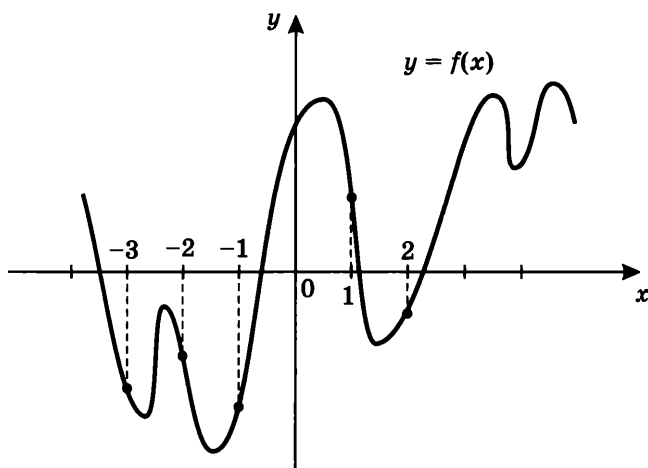


Решение.

Если производная функции отрицательна, т. е. $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ убывает на промежутке. Таких точек всего 4. Это точки x_4 , x_6 , x_8 , x_9 .

Ответ: 4.

Пример 15. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки -3 , -2 , -1 , 1 , 2 . В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



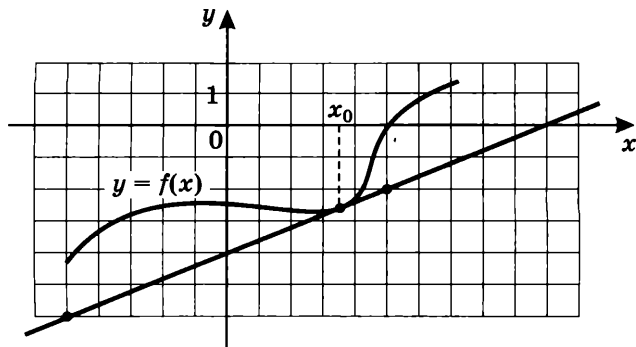
Решение.

Известно, что значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной в точке x_0 , т. е. $k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона между касательной и положительным направлением оси Ox . Но $f'(x_0) > 0$ в точках -1 и 2 .

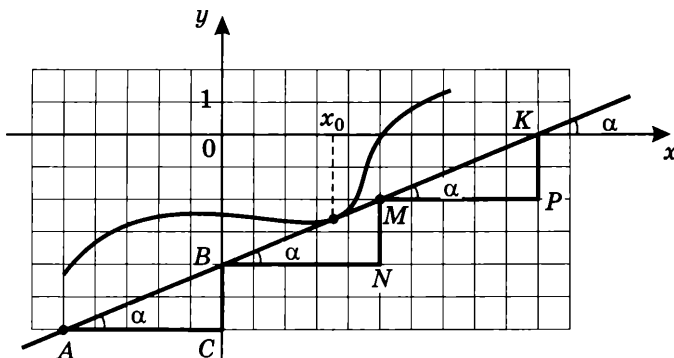
Как видно из рисунка, угол наклона явно больше в точке $x = -1$.

Ответ: -1 .

Пример 16. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Решение.



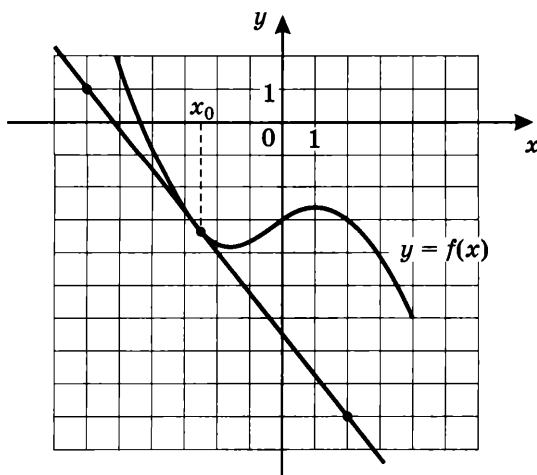
Известно, что значение производной в точке касания x_0 равно угловому коэффициенту к касательной, который, в свою очередь, равен тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox .

Построим, например, $\triangle ABC$, где $\angle BAC = \alpha$, $BC = 2$, $AC = 5$, тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{5} = 0,4$.

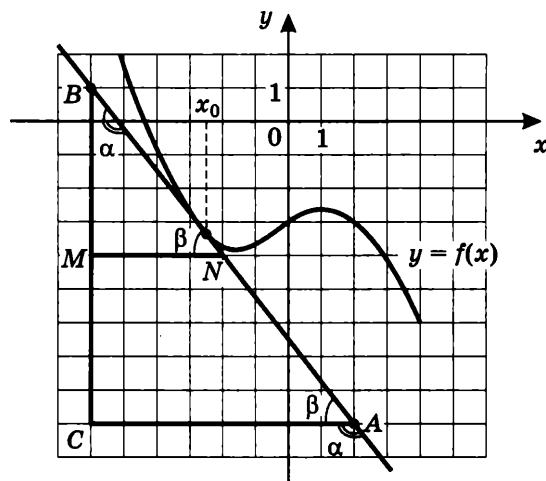
Ответ: 0,4.

Замечание. Таких треугольников можно показать несколько: $\triangle BNM$, $\triangle MPR$ и т. д. Во всех случаях угол α — величина постоянная.

Пример 17. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Решение.



Пусть α — угол между касательной и положительным направлением оси Ox . Заметим, что $\alpha > 90^\circ$, тогда $\operatorname{tg} \alpha < 0$.

Построим $\triangle BMN$ или $\triangle ACB$. Необходимо, чтобы катеты были целыми числами.

Пусть β — угол, смежный α .

$$\text{Из } \triangle BMN \text{ (или } \triangle ACB) \operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \beta = -\frac{BM}{MN} = -\frac{5}{4} = -1,25.$$

Значит, $f'(x_0) = k = \operatorname{tg} \alpha = -1,25$.

Ответ: $-1,25$.

Пример 18. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 5. Найдите $f'(5)$.

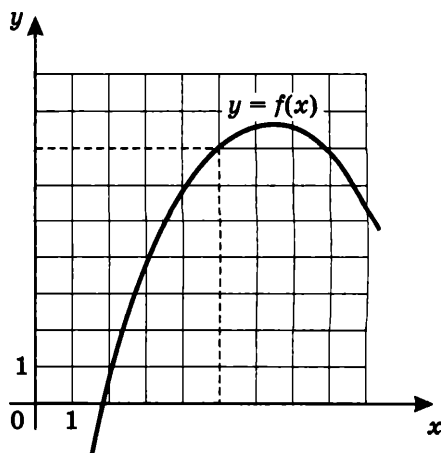
Решение.

Так как по условию прямая проходит через начало координат, то уравнение прямой имеет вид $y = kx$. Эта прямая проходит через точку $(5; 7)$,

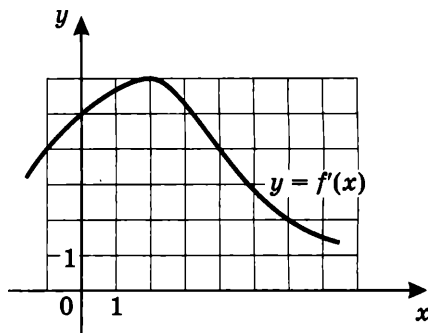
$$\text{тогда } k = \frac{y}{x} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Но $k = f'(x_0) = f'(8) = 1,4$.

Ответ: $1,4$.



Пример 19. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 3$ или совпадает с ней.

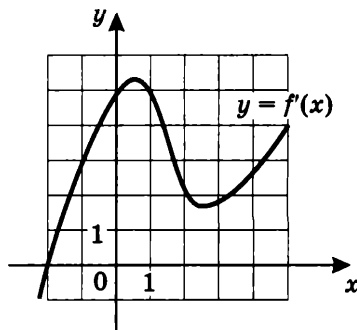


Решение.

$f'(x_0) = k$, т. е. значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту. Так как касательная параллельна прямой $y = 2x - 3$ или совпадает с ней, то $k = 2$ и $f'(x_0) = 2$. Как видно из рисунка, при $f'(x_0) = 2$, $x_0 = 6$.

Ответ: 6.

Пример 20. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Решение.

$f'(x_0) = k$. Поскольку касательная параллельна оси Ox или совпадает с ней, то она имеет вид $y = b$ и $k = 0$. Но тогда $f'(x_0) = 0$. А производная равна нулю в точке, в которой ее график пересекает ось Ox . Из рисунка видно, что $x = -2$.

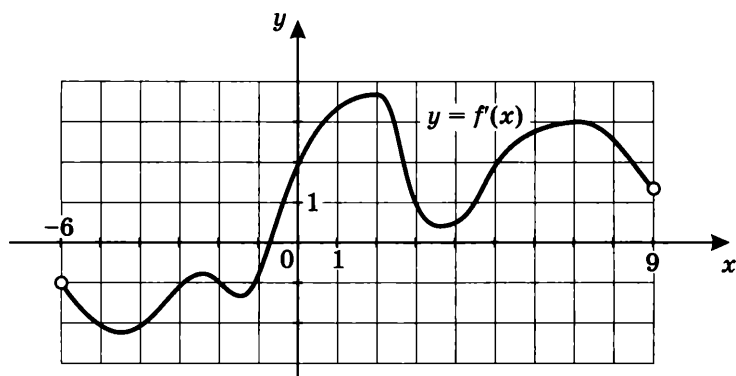
Ответ: -2 .

2.2. Применение производной к исследованию функций

Пример 21. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x - 2$ или совпадает с ней.

Решение.

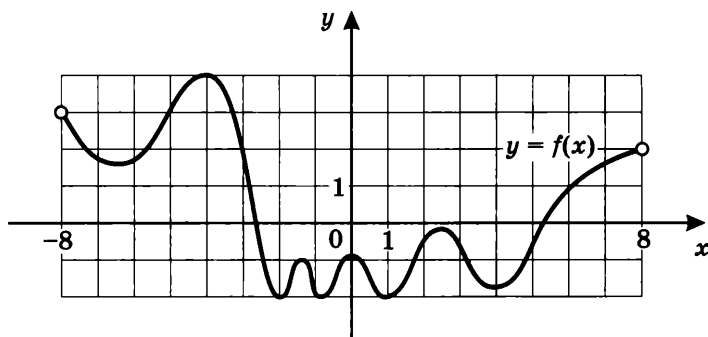
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, т. е. $f'(x_0) = k$. Согласно условию касательная па-



параллельна прямой $y = x - 2$ или совпадает с ней. Значит, их угловые коэффициенты равны 1. Итак, $f'(x_0) = 1$. Геометрически это соответствует количеству точек пересечения графика производной с прямой $y = 1$. Таких точек всего 3.

Ответ: 3.

Пример 22. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-8; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -13$.

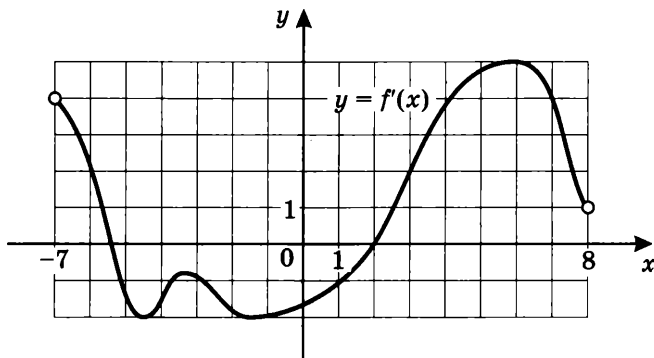


Решение.

Согласно условию касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = -13$ или совпадает с ней. Значит, их угловые коэффициенты равны 0. Но угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, т. е. $k = f'(x_0)$. Производная $f'(x) = 0$ в точках максимума и минимума функции. На интервале $(-8; 8)$ функция имеет 5 минимумов и 4 максимума, т. е. всего 9 экстремумов. Следовательно, касательная к графику функции параллельна прямой $y = -13$ или совпадает с ней в 9 точках.

Ответ: 9.

Пример 23. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-7; 8)$. В какой точке отрезка $[-5; -1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?

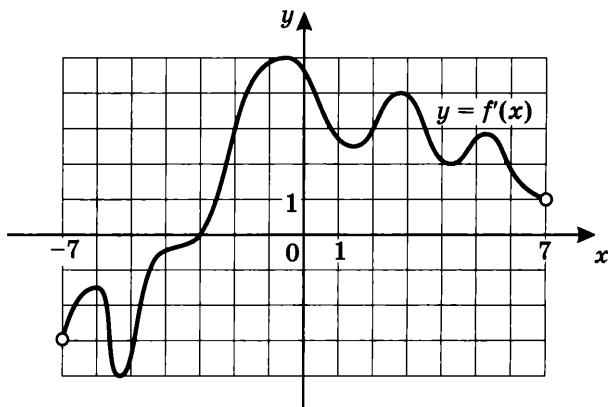


Решение.

Заметим, что на отрезке $[-5; -1]$ производная функции отрицательна, значит, функция убывает. Следовательно, наименьшее значение функции достигается на конце отрезка, т. е. в точке $x = -1$.

Ответ: -1 .

Пример 24. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-7; 7)$. В какой точке отрезка $[-3; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?

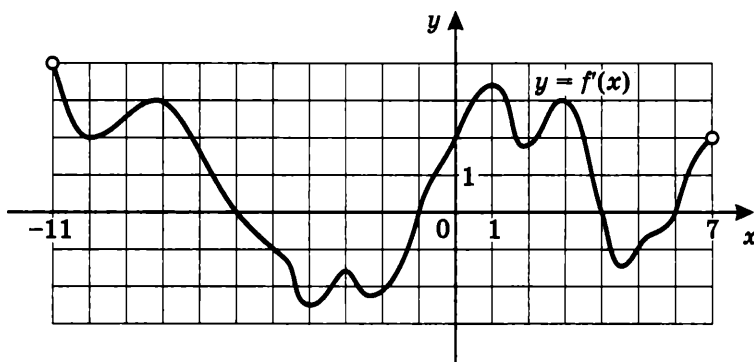


Решение.

На отрезке $[-3; 3]$ производная функции положительна, значит, функция возрастает и свое наибольшее значение принимает на конце отрезка, т. е. в точке $x = 3$.

Ответ: 3 .

Пример 25. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-11; 7)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-7; 5]$.

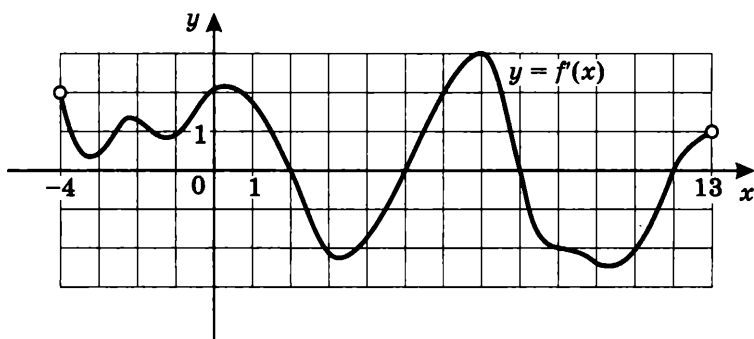


Решение.

В точке минимума производная меняет знак с « $-$ » на « $+$ ». На отрезке $[-7; 5]$ функция имеет одну точку минимума $x = -1$.

Ответ: 1.

Пример 26. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-4; 13)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-2; 12]$.



Решение.

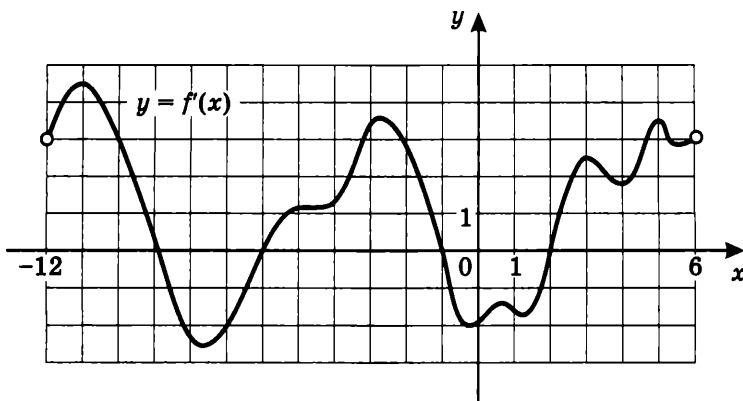
В точке максимума производная меняет знак с « $+$ » на « $-$ ». На отрезке $[-2; 12]$ таких точек две: $x = 2$ и $x = 8$.

Ответ: 2.

Пример 27. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-12; 6)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-10; 4]$.

Решение.

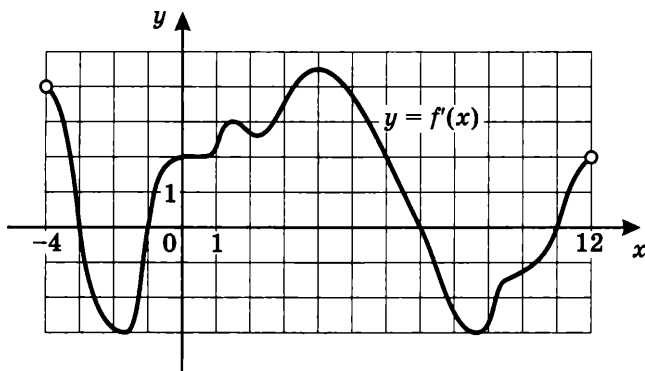
Экстремумы функции — это ее максимумы и минимумы.



Производная меняет знак в точках $x = -9$; -6 ; -1 ; 2 . На отрезке $[-10; 4]$ таких точек всего 4.

Ответ: 4.

Пример 28. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4; 12)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

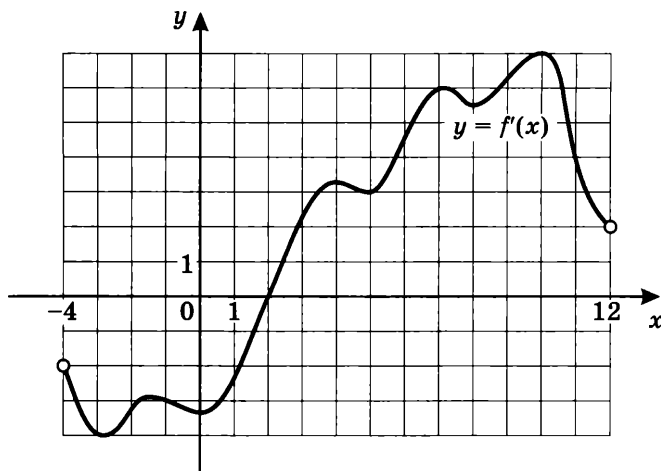


Решение.

Промежутки убывания функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, т. е. интервалам $(-3; -1)$ длиной 2 и $(7; 11)$ длиной 4. Длина наибольшего из них равна 4.

Ответ: 4.

Пример 29. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-4; 12)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 10]$.



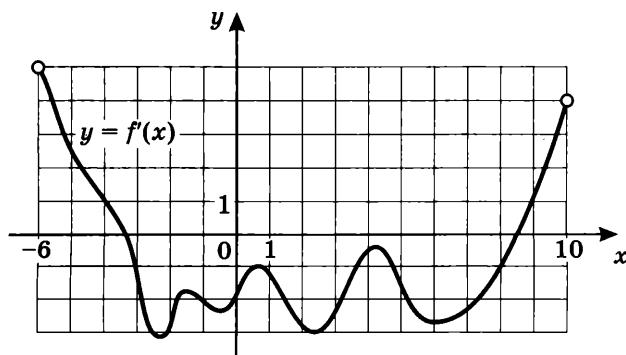
Решение.

В точке экстремума производная функции $f(x)$ равна нулю. На отрезке $[-3; 10]$ график производной пересекает ось абсцисс, производная меняет знак с «-» на «+».

Следовательно, $x = 2$ — точка экстремума (минимума).

Ответ: 2.

Пример 30. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6, 10)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



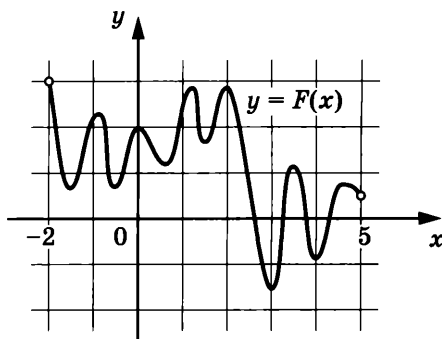
Решение.

Промежутки убывания функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, т. е. интервалу $(-3, 5; 8, 5)$. Указанный интервал содержит целые точки: $-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$. Их сумма равна $4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 30$.

Ответ: 30.

2.3. Первообразная

Пример 31. На рисунке изображен график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 5)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-1; 3]$.



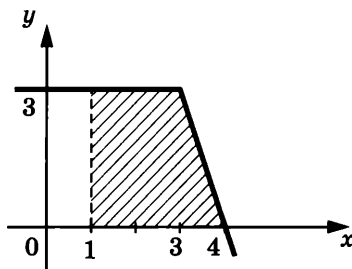
Решение.

По определению первообразной на интервале $(-2; 5)$ справедливо равенство $f(x) = F'(x)$. Значит, решениями уравнения $f(x) = 0$ являются точки экстремумов. Из них на отрезке $[-1; 3]$ лежат 8 точек, т. е. уравнение $f(x) = 0$ имеет 8 решений.

Ответ: 8.

Пример 32. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Вычислите определенный интеграл

$$\int_1^4 f(x) dx.$$



Решение.

Определенный интеграл от некоторой функции $f(x)$ представляет собой площадь трапеции с основаниями 3 и 2, высота которой равна 3.

$$\text{Следовательно, } \int_1^4 f(x) dx = S_{\text{трап.}} = \frac{3+2}{2} \cdot 3 = \frac{15}{2} = 7,5.$$

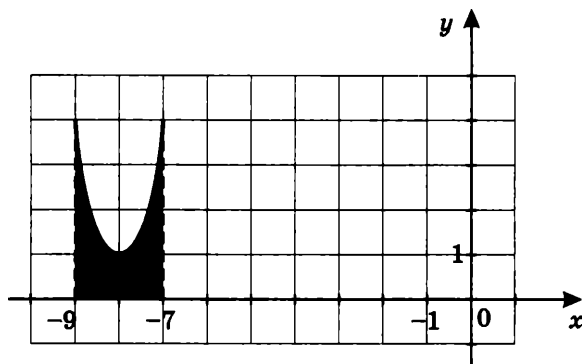
Ответ: 7,5.

Пример 33. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = x^3 + 24x^2 + 193x - \frac{5}{4}$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.

Решение.

І способ

Вычисления можно значительно упростить, если заметить, что в данной функции можно выделить полный куб:



$$F(x) = x^3 + 24x^2 + 193x - \frac{5}{4} = (x^3 + 24x^2 + 192x + 512) + x - 512 - \frac{5}{4} = (x + 8)^3 + x - 512 - \frac{5}{4}.$$

$$\text{Тогда } F(-7) - F(-9) = (-7 + 8)^3 + (-7) - ((-9 + 8)^3 + (-9)) = 1 - 7 - (-1 - 9) = -6 + 10 = 4.$$

Ответ: 4.

II способ

$$f(x) = F'(x) = \left(x^3 + 24x^2 + 193x - \frac{5}{4} \right)' = 3x^2 + 48x + 193 = 3(x^2 + 16x + 64) + 1 = 3(x + 8)^2 + 1.$$

$$\text{Тогда } S = \int_{-9}^{-7} (3(x+8)^2 + 1) dx = ((x+8)^3 + x) \Big|_{-9}^{-7} = (-7 + 8)^3 - 7 - ((-9 + 8)^3 - 9) = 1 - 7 - (-1 - 9) = -6 + 10 = 4.$$

Ответ: 4.

III способ

II способ можно еще упростить, если заметить, что график функции $f(x) = 3(x + 8)^2 + 1$ получен сдвигом графика функции $y = 3x^2 + 1$ на 8 единиц влево вдоль оси Ox . Следовательно, искомая площадь фигуры будет равна площади фигуры, ограниченной графиком функции $y = 3x^2 + 1$ и отрезком $[-1; 1]$ оси Ox . Учитывая симметрию графика относительно оси Oy , имеем

$$S = \int_{-1}^1 (3x^2 + 1) dx = 2 \int_0^1 (3x^2 + 1) dx = 2 \left(3 \cdot \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = 2(x^3 + x) \Big|_0^1 = 2(1^3 + 1) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Ответ: 4.

IV способ

Этот способ является самым длинным и технически сложным.

$$S = F(-7) - F(-9) = \left((-7)^3 + 24 \cdot (-7)^2 + 193 \cdot (-7) - \frac{5}{4} \right) - \\ - \left((-9)^3 + 24 \cdot (-9)^2 + 193 \cdot (-9) - \frac{5}{4} \right) = (-7)^3 - (-9)^3 - 24((-7)^2 - (-9)^2) + \\ + 193 \cdot ((-7) - (-9)) = (9^3 - 7^3) - 24 \cdot (9^2 - 7^2) + 193 \cdot (9 - 7).$$

Далее, применив формулы $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ и $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, получим

$$S = (9 - 7)(9^2 + 9 \cdot 7 + 7^2) - 24 \cdot (9 - 7)(9 + 7) + 193 \cdot 2 = 2 \cdot (81 + 63 + \\ + 49) - 24 \cdot 2 \cdot 16 + 386 = 386 - 768 + 386 = 772 - 768 = 4.$$

Ответ: 4.

Замечание 1. Подавляющая часть абитуриентов и выпускников решают этим способом или находят $F(-7)$ и $F(-9)$, а затем $F(-7) - F(-9)$, что еще больше усложняет решение.

Замечание 2. Наконец, самый простой способ (если ученик не может выполнить задание) можно применить, учитывая масштаб на рисунке и тот факт, что ответом является целое число. На глаз можно определить, что в данном случае $S = 4$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Прямая $y = 4x + 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 3x + 4$. Найдите абсциссу точки касания.

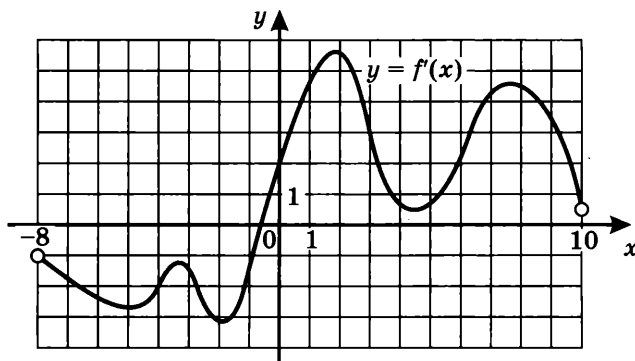
2. Прямая $y = -3x + 2$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x + 3$. Найдите абсциссу точки касания.

3. Прямая $y = -x - 7$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 3,5x^2 + x - 5$. Найдите абсциссу точки касания.

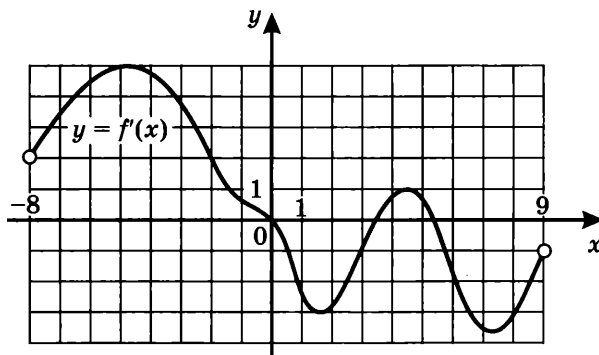
4. Прямая $y = 5x + 8$ является касательной к графику функции $y = x^3 - 4x^2 + 9x + 8$. Найдите абсциссу точки касания.

5. Прямая $y = x + 13$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 5x^2 + 9x + 17$. Найдите абсциссу точки касания.

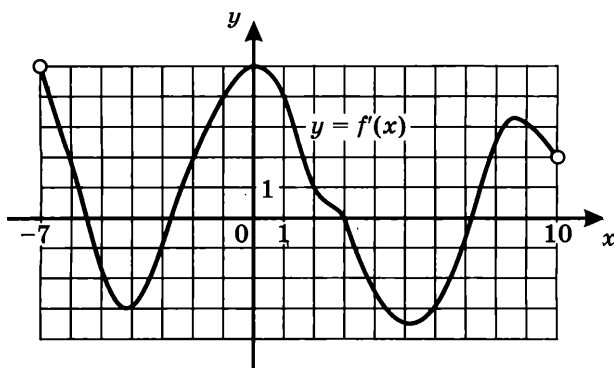
6. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-8; 10)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x + 5$ или совпадает с ней.



7. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-8; 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x - 7$ или совпадает с ней.

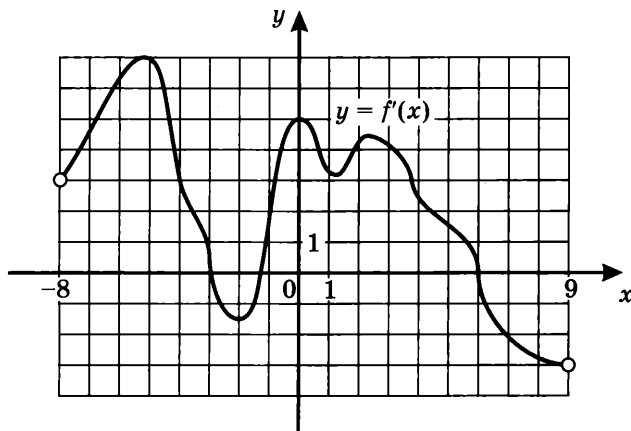


8. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-7; 10)$. Найдите количество точек, в ко-

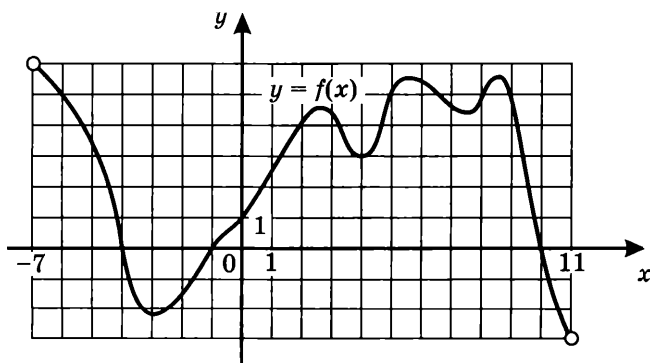


торых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x + 3$ или совпадает с ней.

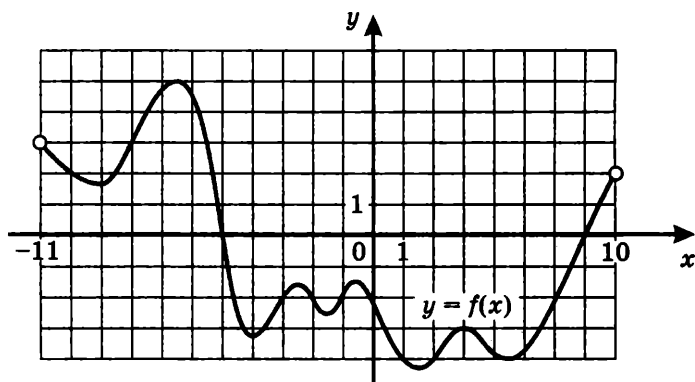
9. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-8; 9)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = x - 5$ или совпадает с ней.



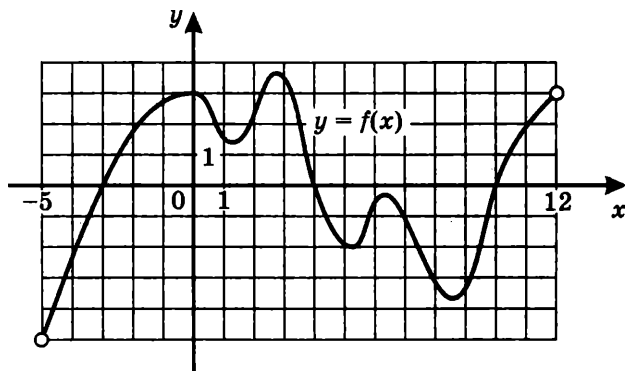
10. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-7; 11)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 11$.



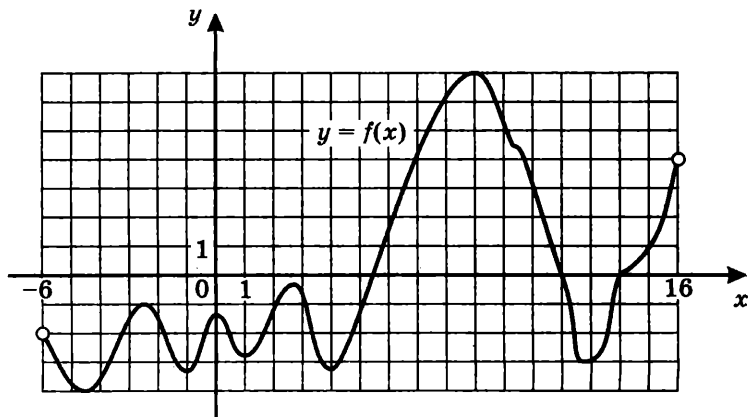
11. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-11; 8)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -13$.



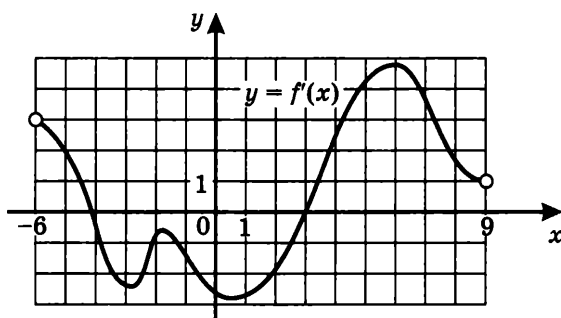
12. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 12)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 14$.



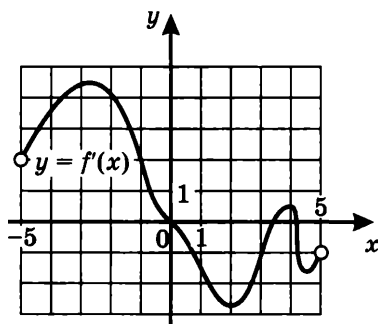
13. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-6; 16)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = -11$.



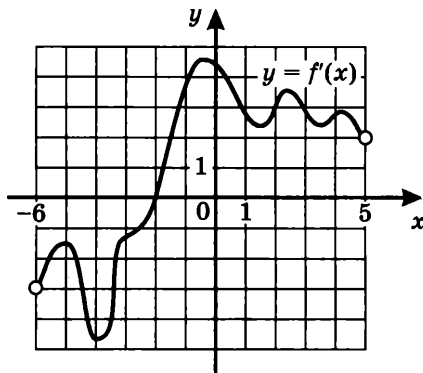
14. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-6; 9)$. В какой точке отрезка $[-3; 5]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



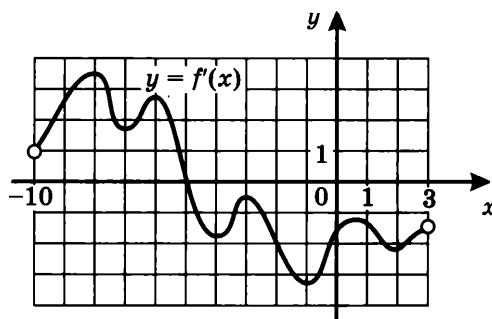
15. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-5; 5)$. В какой точке отрезка $[-4; -1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



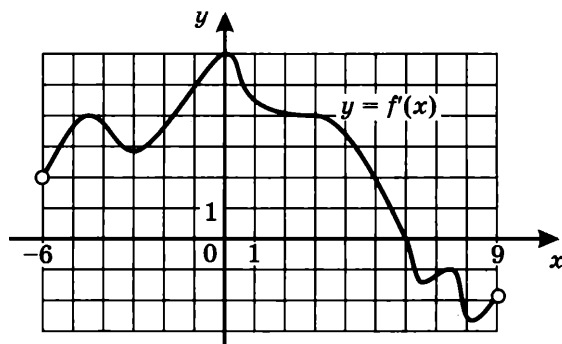
16. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-6; 5)$. В какой точке отрезка $[-2; 2]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



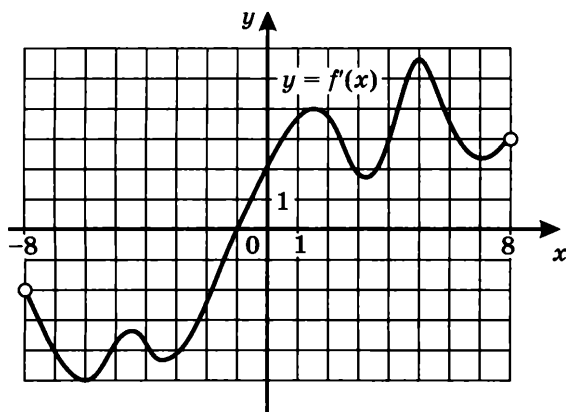
17. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-10; 3)$. В какой точке отрезка $[-5; 2]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



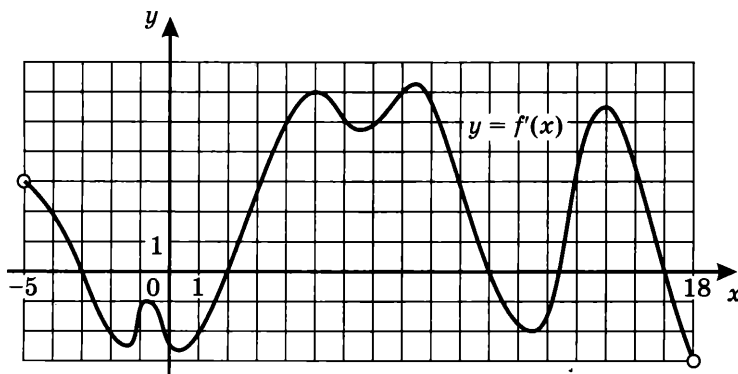
18. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-6; 9)$. В какой точке отрезка $[-4; 4]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение?



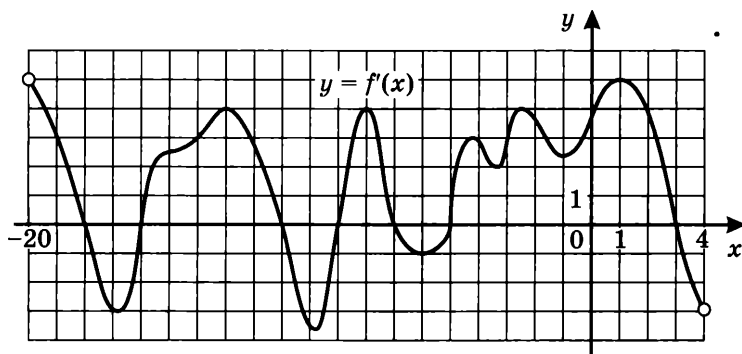
19. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-8; 8)$. В какой точке отрезка $[-6; -1]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



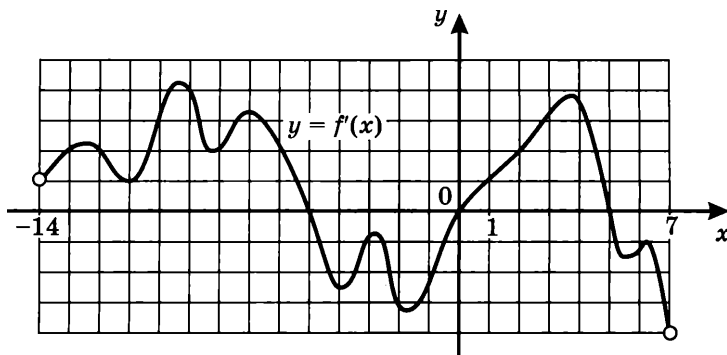
20. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-5; 18)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[0; 15]$.



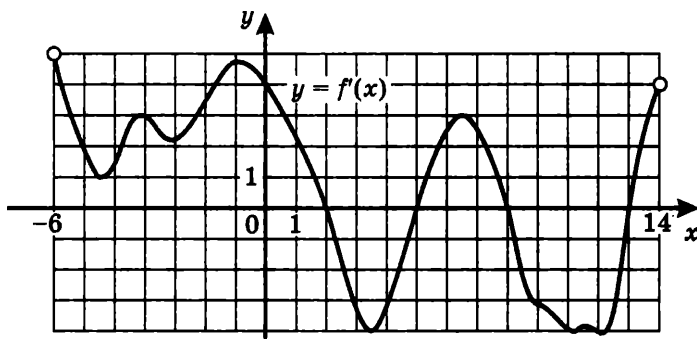
21. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-20; 4)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-17; -2]$.



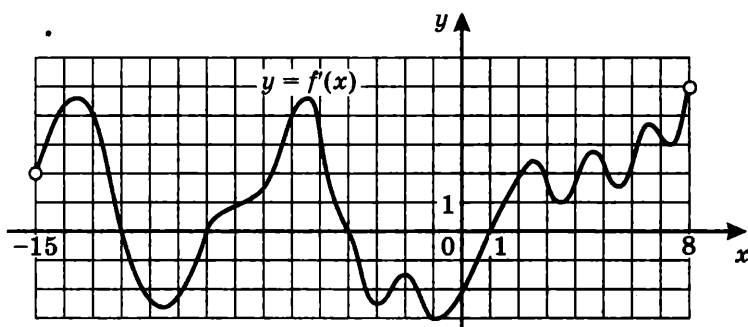
22. На рисунке изображен график производной функции $y = f(x)$, определенной на интервале $(-14; 7)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-11; 6]$.



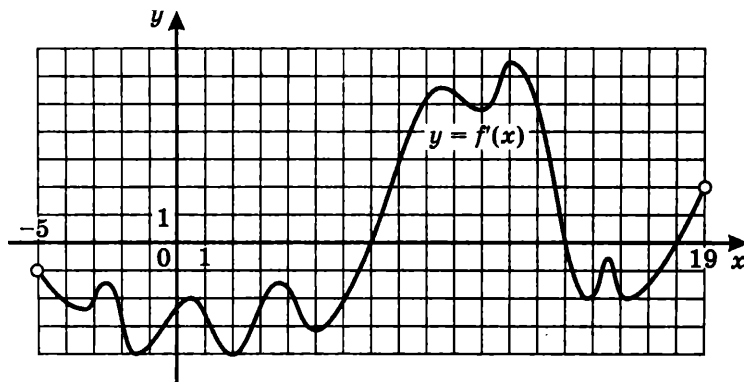
23. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-6; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 12]$.



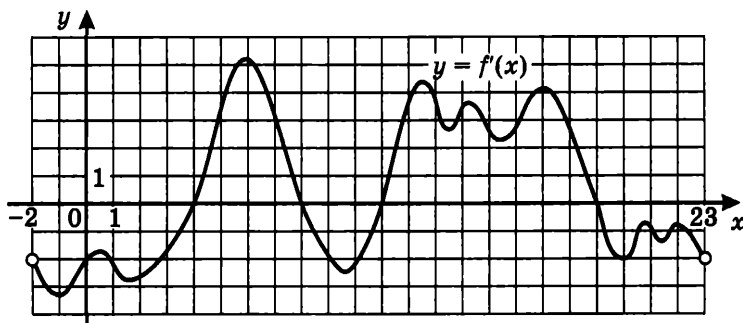
24. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-15; 8)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-13; 7]$.



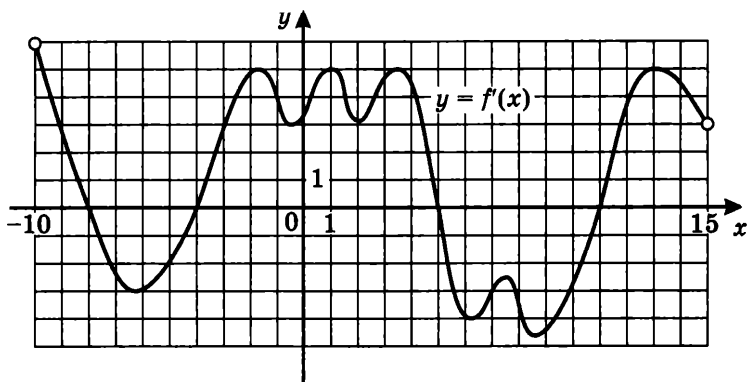
25. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-5; 19)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[0; 17]$.



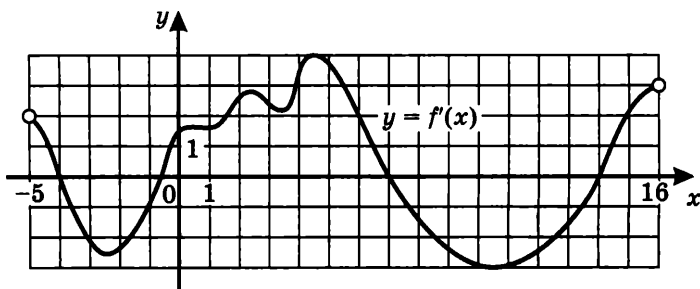
26. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-2; 23)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[0; 20]$.



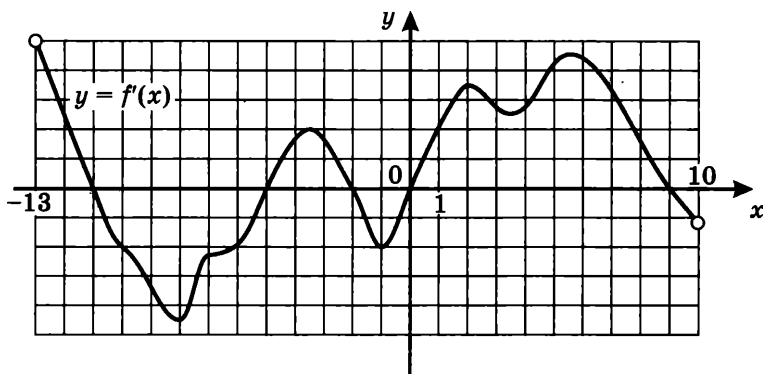
27. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-10; 15)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-9; 13]$.



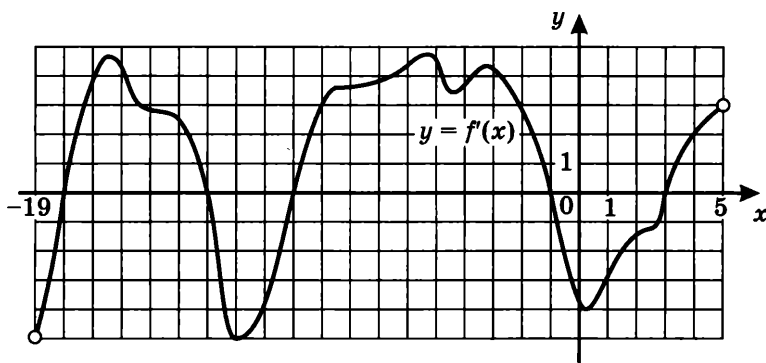
28. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-5; 16)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



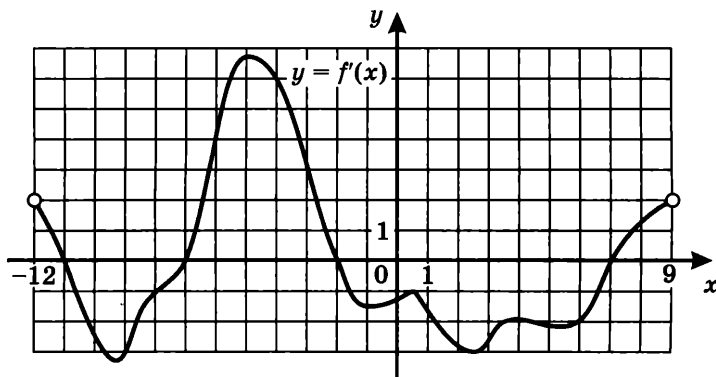
29. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-13; 10)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



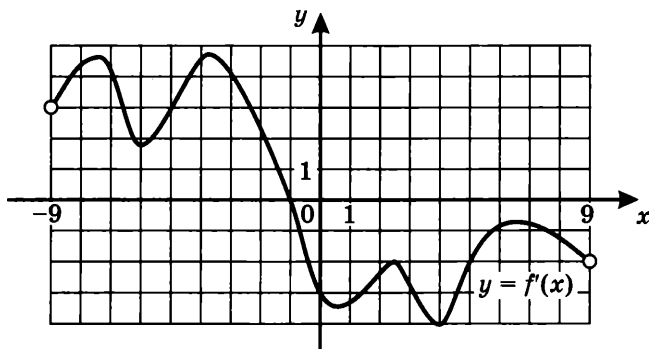
30. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-19; 5)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



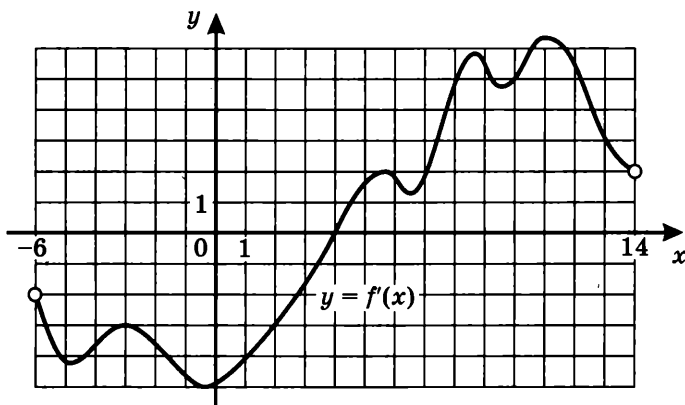
31. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-12; 9)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.



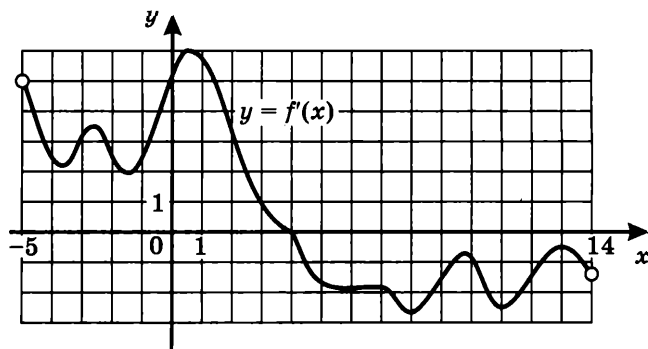
32. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-9; 9)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-7; 7]$.



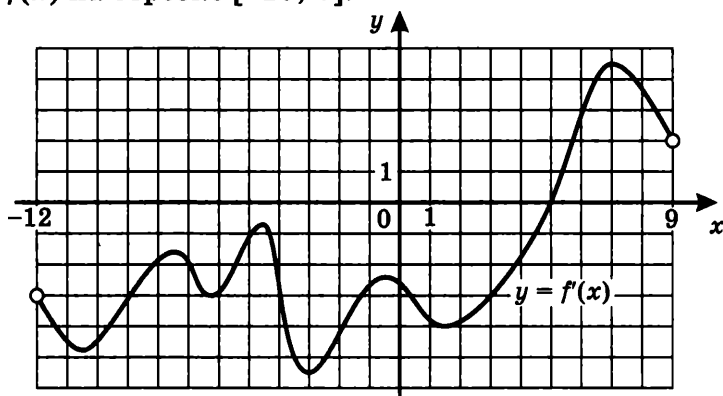
33. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-6; 14)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[0; 11]$.



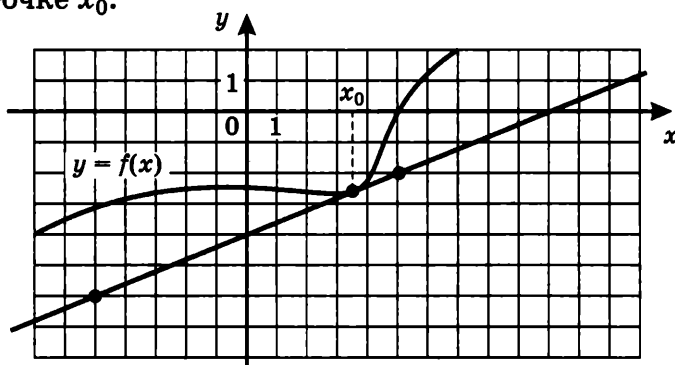
34. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-5; 14)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-4; 10]$.



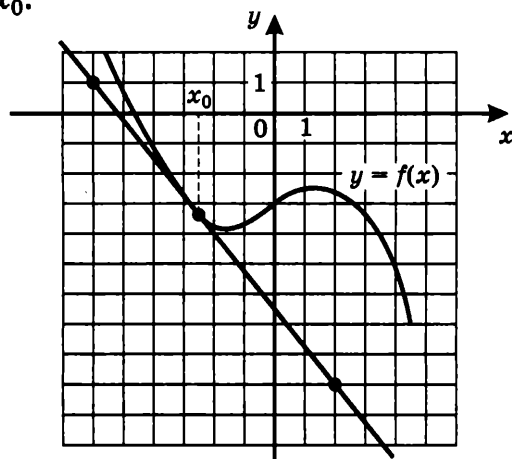
35. На рисунке изображен график производной функции $y = f'(x)$, определенной на интервале $(-12; 9)$. Найдите точку экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-10; 7]$.



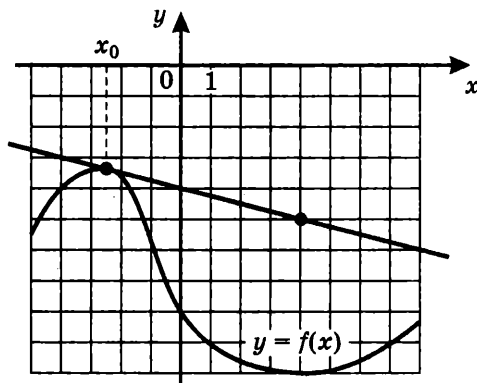
36. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



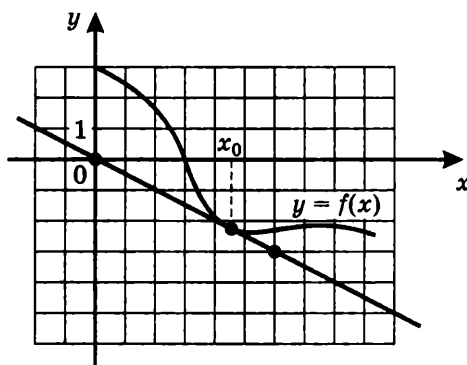
37. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



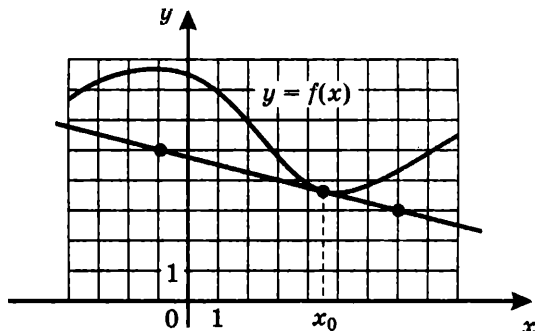
38. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



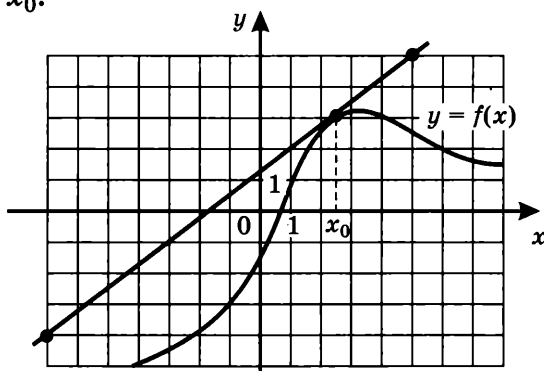
39. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



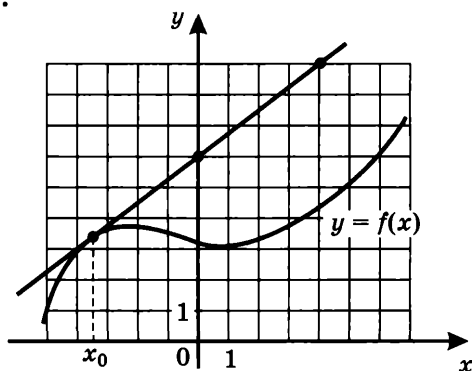
40. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



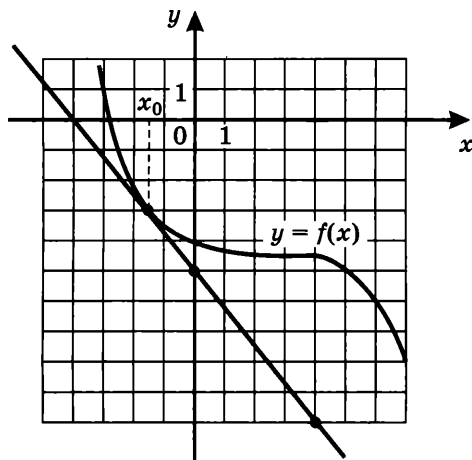
41. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



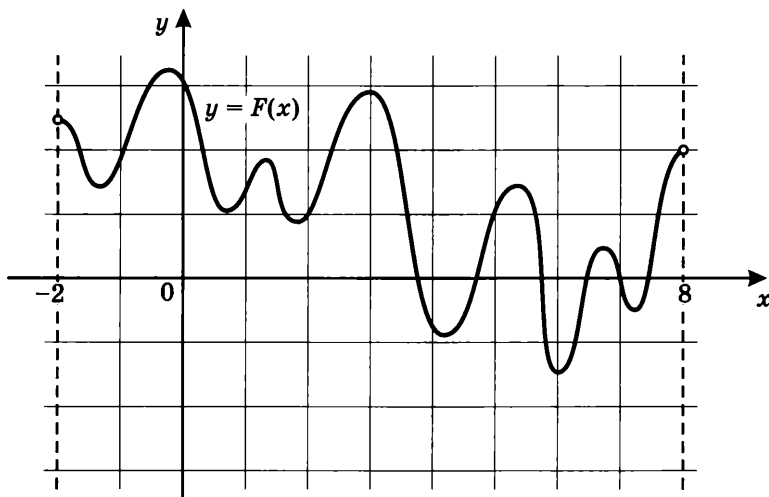
42. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



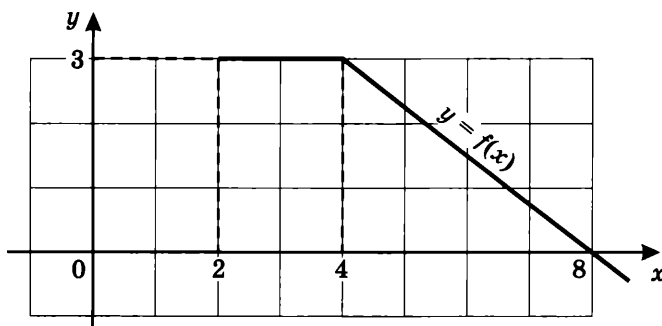
43. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



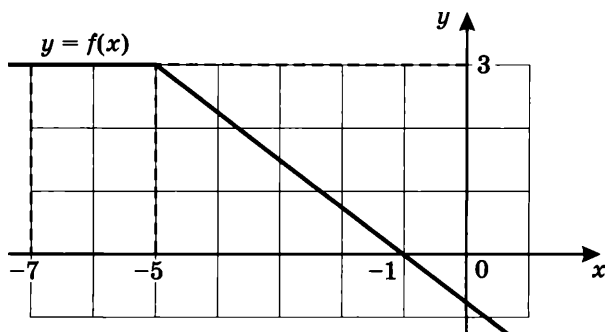
44. На рисунке изображен график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных функции $f(x)$, определенной на интервале $(-2; 8)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-1; 5]$.



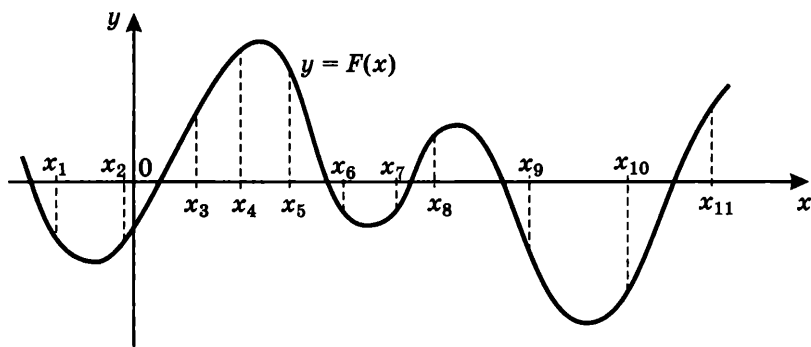
45. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Вычислите $F(8) - F(2)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



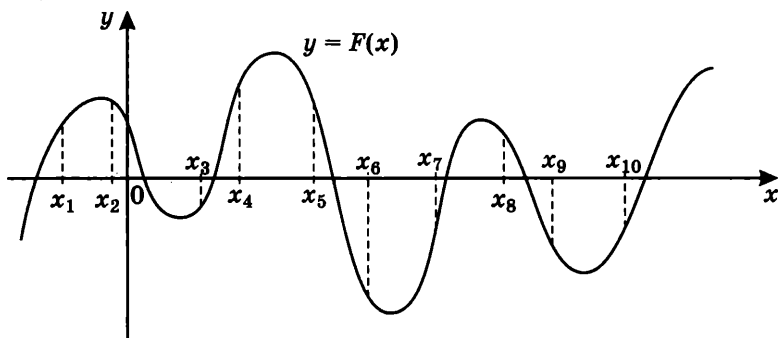
46. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ (два луча с общей начальной точкой). Вычислите $F(-1) - F(-7)$, где $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$.



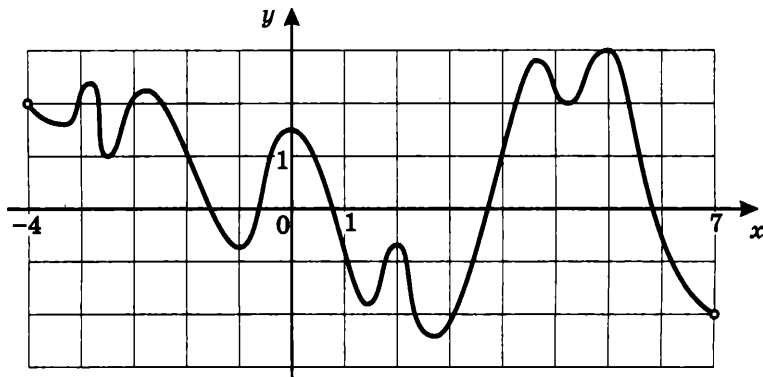
47. На рисунке изображен график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ — и отмечены 11 точек на оси Ox : $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ отрицательна?



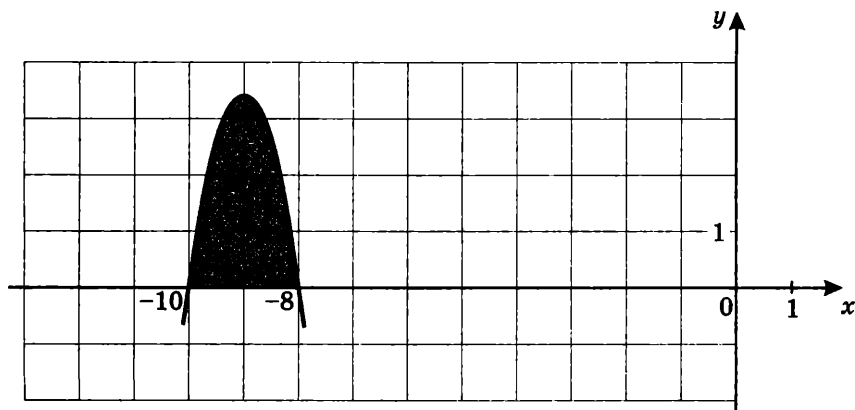
48. На рисунке изображен график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$ — и отмечены 10 точек на оси Ox : $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$. В скольких из этих точек функция $f(x)$ положительна?



49. На рисунке изображен график функции $y = F(x)$ — одной из первообразных некоторой функции $f(x)$, определенной на интервале $(-4; 7)$. Найдите количество решений уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-2; 4]$.



50. На рисунке изображен график некоторой функции $y = f(x)$. Функция $F(x) = -x^3 - 27x^2 - 240x - 8$ — одна из первообразных функции $f(x)$. Найдите площадь закрашенной фигуры.



§ 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Здесь встречаются задания следующих видов:

- 1) исследование степенных и иррациональных функций;
- 2) исследование произведений;
- 3) исследование показательных и логарифмических функций;
- 4) исследование тригонометрических функций;
- 5) исследование функций без помощи производной.

Все задачи, которые встречаются на ЕГЭ, делятся на 2 типа:

1. Задачи на нахождение наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке. Иногда отрезок не задан, тогда находим на всей числовой прямой.

2. Задачи на нахождение точек экстремума (максимума или минимума) функции.

3.1. Степенные функции

Пример 1. Найдите точку максимума функции

$$y = x^3 - 27x + 15.$$

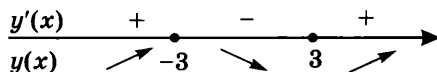
Решение.

Найдем производную данной функции:

$$y' = (x^3 - 27x + 15)' = 3x^2 - 27.$$

Найдем стационарные точки из уравнения $y' = 0$, или $3x^2 - 27 = 0$, $x^2 - 9 = 0$, $x^2 = 9$, $x_{1,2} = \pm 3$.

На числовой прямой определим знаки производной и изобразим поведение функции:



$x = -3$ — точка максимума функции, так как при переходе через нее производная меняет знак с «+» на «-».

Ответ: -3 .

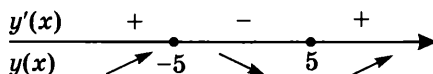
Пример 2. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 - 75x + 19.$$

Решение.

$$y' = (x^3 - 75x + 19)' = 3x^2 - 75,$$

$$y' = 0, \text{ или } 3x^2 - 75 = 0, 3x^2 = 75, x^2 = 25, x_{1,2} = \pm 5.$$



В точке минимума производная меняет знак с «-» на «+».

Значит, $x = 5$ — точка минимума.

Ответ: 5.

Пример 3. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 12x$ на отрезке $[0; 3]$.

Решение.

$$y' = (x^3 - 12x)' = 3x^2 - 12,$$

$$y' = 0, \text{ или } 3x^2 - 12 = 0, x^2 = 4, x = \pm 2.$$

$$x = -2 \notin [0; 3], x = 2 \in [0; 3].$$

$$y(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = 8 - 24 = -16.$$

Найдем значения функции на концах отрезка $[0; 3]$:

$$y(0) = 0; y(3) = 3^3 - 12 \cdot 3 = 27 - 36 = -9.$$

$$\text{Значит, } y_{\text{наим.}} = y(2) = -16.$$

Ответ: -16.

Пример 4. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 3x + 2$ на отрезке $[-1; 1]$.

Решение.

$$y' = (x^3 - 3x + 2)' = 3x^2 - 3,$$

$$y' = 0, \text{ или } 3x^2 - 3 = 0, 3x^2 = 3, x^2 = 1,$$

$$x_{1,2} = \pm 1 \in [-1; 1].$$

$$y(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4,$$

$$y(1) = 1 - 3 + 2 = 0.$$

$$\text{Значит, } y_{\text{наиб.}} = y(-1) = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 5. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 + 5$ на отрезке $[1; 3]$.

Решение.

$y' = (x^3 - 3x^2 + 5)' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0$, или $3x(x - 2) = 0$, откуда $x_1 = 0 \notin [1; 3]$, $x_2 = 2 \in [1; 3]$.

Отметим стационарную точку $x = 2$ и точки $x = 1$, $x = 3$ (концы отрезка) на числовой прямой и определим знаки производной функции:



Так как в точке $x = 2$ производная меняет знак с «-» на «+», то $x = 2$ — точка минимума функции, значит, в этой точке достигается наименьшее значение функции. Тогда

$$y_{\text{наим.}} = y(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 5 = 8 - 12 + 5 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 6. Найдите точку минимума функции

$$y = x^3 - x^2 - x.$$

Решение.

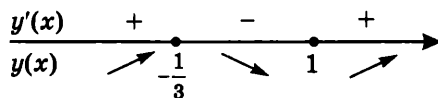
Найдем производную функции:

$$y' = (x^3 - x^2 - x)' = 3x^2 - 2x - 1,$$

$$y' = 0, \text{ или } 3x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Так как $3 - 2 - 1 = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$.

На числовой прямой отметим стационарные точки 1 и $-\frac{1}{3}$:



Как видно из рисунка, $x = 1$ — точка минимума функции, так как при переходе через нее производная меняет знак с «-» на «+».

Ответ: 1.

Пример 7. Найдите точку максимума функции

$$y = 13 + 12x - x^3.$$

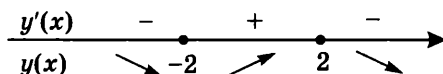
Решение.

Найдем производную функции:

$$y' = (13 + 12x - x^3)' = 0 + 12 - 3x^2 = 12 - 3x^2.$$

Найдем стационарные точки, для чего решим уравнение $y' = 0$, или $12 - 3x^2 = 0$, $3x^2 = 12$, $x^2 = 4$, откуда $x_{1,2} = \pm 2$.

Отметим на числовой прямой стационарные точки и определим знаки производной функции. Так как коэффициент при x^2 равен $-3 < 0$, то знак справа на числовой прямой будет отрицательным, далее знаки чередуются.



В точке максимума производная меняет знак с «+» на «-». Значит, $x = 2$ — точка максимума функции.

Ответ: 2.

Пример 8. Найдите наименьшее значение функции $y = 7 + 48x - x^3$ на отрезке $[-3; 3]$.

Решение.

$$y' = (7 + 48x - x^3)' = 48 - 3x^2.$$

$$y' = 0, \text{ или } 48 - 3x^2 = 0, x^2 = 16, x_{1,2} = \pm 4 \notin [-3; 3].$$

Остается найти значения функции на концах отрезка:

$$y(-3) = 7 + 48 \cdot (-3) - (-3)^3 = 7 - 144 + 27 = -110,$$

$$y(3) = 7 + 48 \cdot 3 - 3^3 = 7 + 144 - 27 = 124.$$

$$\text{Следовательно, } y_{\text{наим.}} = y(-3) = -110.$$

Ответ: -110.

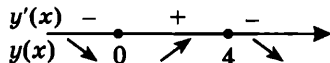
Пример 9. Найдите точку максимума функции

$$y = 6x^2 - x^3.$$

Решение.

$$y' = (6x^2 - x^3)' = 12x - 3x^2.$$

$$y' = 0, \text{ или } 12x - 3x^2 = 0, 4x - x^2 = 0, x(4 - x) = 0, \text{ откуда } x_1 = 0, x_2 = 4.$$



Так как коэффициент при x^2 равен $-1 < 0$, то знаки производной чередуются с «-» на «+». В точке максимума производная меняет знак с «+» на «-».

Значит, $x = 4$ — точка максимума функции.

Ответ: 4.

Пример 10. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^3}{3} - 16x - 5$ на отрезке $[-2; 3]$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{x^3}{3} - 16x - 5 \right)' = x^2 - 16, \quad y' = 0, \quad x^2 - 16 = 0,$$

$$x^2 = 16, \quad x_{1,2} = \pm 4 \notin [-2; 3].$$

Найдем значения функции на концах отрезка:

$$y(-2) = -\frac{8}{3} + 32 - 5 = -\frac{8}{3} + 27 = \frac{81-8}{3} = \frac{73}{3},$$

$$y(3) = 9 - 48 - 5 = -44.$$

Значит, $y_{\text{наим.}} = y(3) = -44$.

Ответ: -44 .

Пример 11. Найдите наибольшее значение функции $y = 5 + 9x - \frac{x^3}{3}$ на отрезке $[-3; 3]$.

Решение.

$$y' = \left(5 + 9x - \frac{x^3}{3} \right)' = 9 - x^2.$$

$$y' = 0, \text{ или } 9 - x^2 = 0, \quad x^2 = 9, \quad x_{1,2} = \pm 3.$$

Заметим, что на отрезке $[-3; 3]$ $y' \geq 0$, значит, данная функция возрастает, тогда наибольшее значение функции достигается в точке $x = 3$, т. е.

$$y_{\text{наиб.}} = y(3) = 5 + 9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} = 32 - 9 = 23.$$

Ответ: 23 .

3.2. Иррациональные функции

Пример 12. Найдите точку минимума функции

$$y = x^{\frac{3}{2}} - 6x + 1.$$

Решение.

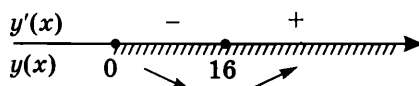
Найдем производную функции:

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}} - 6x + 1 \right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 6 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 6, \text{ где } x \geq 0.$$

Найдем нули производной:

$$y' = 0, \text{ или } \frac{3}{2}\sqrt{x} - 6 = 0, \sqrt{x} = 4, \text{ откуда } x = 16.$$

Определим знаки производной и поведение функции на числовой прямой:



$x = 16$ — точка минимума функции, так как при переходе через нее производная меняет знак с «-» на «+».

Ответ: 16.

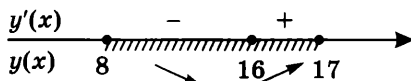
Пример 13. Найдите наименьшее значение функции $y = x^{\frac{3}{2}} - 6x + 1$ на отрезке $[8; 17]$.

Решение.

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 6, \quad x \geq 0.$$

$$y' = 0, \sqrt{x} = 4, x = 16 \in [8; 17].$$

Определим знаки производной и поведение функции на числовой прямой:



Как видим, производная меняет знак с «-» на «+» при переходе через стационарную точку $x = 16$.

Значит, $x = 16$ — точка минимума функции и в ней исходная функция принимает наименьшее значение:

$$y_{\text{наим.}} = y(16) = 16^{\frac{3}{2}} - 6 \cdot 16 + 1 = (4^2)^{\frac{3}{2}} - 96 + 1 = 64 - 95 = -31.$$

Ответ: -31.

Пример 14. Найдите точку максимума функции

$$y = 9 + 3x - 2x^{\frac{3}{2}}.$$

Решение.

$$y' = \left(9 + 3x - 2x^{\frac{3}{2}} \right)' = 3 - 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = 3 - 3\sqrt{x}, \text{ где } x \geq 0.$$

$$y' = 0, \text{ или } 3 - 3\sqrt{x} = 0, \sqrt{x} = 1, x = 1.$$



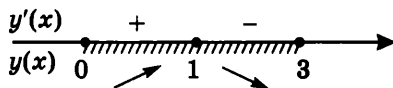
$x = 1$ — точка максимума функции, так как производная меняет знак с «+» на «-».

Ответ: 1.

Пример 15. Найдите наибольшее значение функции $y = 9 + 3x - 2x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[0; 3]$.

Решение.

$$y' = 3 - 3\sqrt{x}, y' = 0, \sqrt{x} = 1, x = 1.$$



$x = 1$ — точка максимума функции, значит, в этой точке исходная функция принимает наибольшее значение:

$$y_{\text{наиб.}} = y(1) = 9 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 10.$$

Ответ: 10.

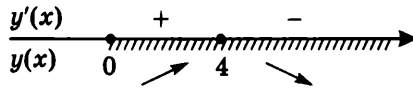
Пример 16. Найдите точку максимума функции

$$y = -\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x + 3.$$

Решение.

$$y' = \left(-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x + 3 \right)' = -\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + 2 \cdot 1 + 0 = -\sqrt{x} + 2, \text{ где } x \geq 0.$$

$$y' = 0, \text{ или } -\sqrt{x} + 2 = 0, \sqrt{x} = 2, x = 4.$$



В точке максимума производная меняет знак с «+» на «-», значит, $x = 4$ — точка максимума функции.

Ответ: 4.

Пример 17. Найдите наименьшее значение функции

$$y = \frac{3}{2}x\sqrt{x} - 2x + 3 \text{ на отрезке } [1; 4].$$

Решение.

$$y' = \left(\frac{3}{2}x\sqrt{x} - 2x + 3 \right)' = \left(\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} - 2x + 3 \right)' = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2 = \frac{9}{4}\sqrt{x} - 2.$$

Заметим, что $y' \leq 0$ на отрезке $[1; 4]$, значит, данная функция убывает, поэтому наименьшее значение функции достигается в точке $x = 4$, т. е. $y_{\text{наим.}} = y(4) = \frac{3}{2} \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 3 = 12 - 5 = 7$.

Ответ: 7.

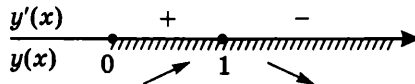
Пример 18. Найдите точку максимума функции

$$y = 1 + 3x - 2x\sqrt{x}.$$

Решение.

$$y' = (1 + 3x - 2x\sqrt{x})' = \left(1 + 3x - 2x^{\frac{3}{2}} \right)' = 0 + 3 - 2 \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = 3 - 3\sqrt{x}, \quad x \geq 0.$$

$$y' = 0, \text{ или } 3 - 3\sqrt{x} = 0, \quad \sqrt{x} = 1, \quad x = 1.$$



Так как в точке $x = 1$ производная меняет знак с «+» на «-», то $x = 1$ — точка максимума функции.

Ответ: 1.

Пример 19. Найдите наибольшее значение функции

$$y = -\frac{3}{4}x\sqrt{x} + 4x + 1 \text{ на отрезке } [1; 4].$$

Решение.

$$y' = \left(-\frac{3}{4}x\sqrt{x} + 4x + 1 \right)' = \left(-\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + 4x + 1 \right)' = -\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 4 = -\frac{9}{8}\sqrt{x} + 4.$$

Нетрудно заметить, что на отрезке $[1; 4]$ производная $y' \geq 0$. Значит, функция возрастает на отрезке и наибольшего значения достигает на конце отрезка, т. е. в точке $x = 4$:

$$y_{\text{наиб.}} = y(4) = -\frac{3}{4} \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 1 = -6 + 17 = 11.$$

Ответ: 11.

3.3. Рациональные функции

Пример 20. Найдите точку максимума функции

$$y = -\frac{x^2 + 256}{x}.$$

Решение.

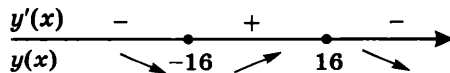
Найдем производную данной функции:

$$y' = \left(-\frac{x^2 + 256}{x} \right)' = -\left(x + \frac{256}{x} \right)' = -1 + \frac{256}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$y' = 0, \text{ или } -1 + \frac{256}{x^2} = 0, \frac{256}{x^2} = 1, x^2 = 256, x_{1,2} = \pm 16.$$

Определим на числовой прямой знаки производной и поведение функции:



В точке максимума производная меняет знак с «+» на «-». Значит, $x = 16$ — точка максимума.

Ответ: 16.

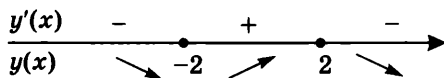
Пример 21. Найдите точку минимума функции

$$y = -\frac{x^2 + 4}{x}.$$

Решение.

$$y' = -\left(\frac{x^2 + 4}{x}\right)' = -\left(x + \frac{4}{x}\right)' = -\left(1 - \frac{4}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2} - 1.$$

$$y' = 0, \text{ или } \frac{4}{x^2} - 1 = 0, \quad x^2 = 4, \quad x_{1,2} = \pm 2.$$



В точке минимума производная меняет знак с «−» на «+». Значит, $x = -2$ — точка минимума.

Ответ: -2 .

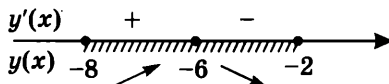
Пример 22. Найдите наименьшее значение функции $y = \frac{x^2 + 36}{x}$ на отрезке $[-8; -2]$.

Решение.

$$y' = \left(\frac{x^2 + 36}{x}\right)' = \left(x + \frac{36}{x}\right)' = 1 - \frac{36}{x^2}.$$

$$y' = 0, \text{ или } 1 - \frac{36}{x^2} = 0, \quad x^2 = 36, \quad x_{1,2} = \pm 6.$$

По условию $x \in [-8; -2]$, $x_1 = -6 \in [-8; -2]$, $x_2 = 6 \notin [-8; -2]$.



В точке $x = -6$ — точке максимума — достигается наибольшее значение функции. Значит, наименьшее значение функции может быть на концах отрезка:

$$y(-8) = \frac{(-8)^2 + 36}{-8} = \frac{64 + 36}{-8} = \frac{100}{-8} = -12,5.$$

$$y(-2) = \frac{(-2)^2 + 36}{-2} = \frac{4 + 36}{-2} = \frac{40}{-2} = -20.$$

Следовательно, $y_{\text{наим.}} = y(-2) = -20$.

Ответ: -20 .

Пример 23. Найдите точку максимума функции

$$y = -\frac{x}{x^2 + 49}.$$

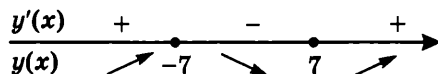
Решение.

Применяя формулу для нахождения производной дроби, имеем

$$\begin{aligned} y' &= -\left(\frac{x}{x^2 + 49}\right)' = -\frac{x'(x^2 + 49) - x(x^2 + 49)'}{(x^2 + 49)^2} = \\ &= -\frac{x^2 + 49 - x(2x + 0)}{(x^2 + 49)^2} = \frac{x^2 - 49}{(x^2 + 49)^2}. \end{aligned}$$

Поскольку $x^2 + 49 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $y' = 0$, если $x^2 - 49 = 0$, или $x^2 = 49$, $x_{1,2} = \pm 7$.

На числовой прямой определим знаки производной и поведение функции:



В точке максимума производная функции меняет знак с «+» на «-». Значит, $x = -7$ — точка максимума.

Ответ: -7 .

Пример 24. Найдите точку минимума функции

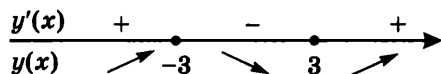
$$y = -\frac{x}{x^2 + 9}.$$

Решение.

$$y' = -\left(\frac{x}{x^2 + 9}\right)' = -\left(\frac{1 \cdot (x^2 + 9) - x(x^2 + 9)'}{(x^2 + 9)^2}\right) = -\frac{x^2 + 9 - x \cdot 2x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{x^2 - 9}{(x^2 + 9)^2}.$$

$$y' = 0, \quad x^2 - 9 = 0, \quad x^2 + 9 > 0.$$

$$\text{Тогда } x^2 = 9, \quad x_{1,2} = \pm 3.$$



$x = 3$ — точка минимума.

Ответ: 3 .

3.4. Показательные функции

Пример 25. Найдите наибольшее значение функции $y = (x - 9)e^{x-8}$ на отрезке $[7; 9]$.

Решение.

Найдем производную данной функции:

$$y' = (x - 9)'e^{x-8} + (x - 9)(e^{x-8})' = 1 \cdot e^{x-8} + (x - 9)e^{x-8} = e^{x-8} \cdot (x - 8).$$

Найдем нули производной:

$y' = 0$, или $e^{x-8} \cdot (x - 8) = 0$. Так как $e^{x-8} > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $x - 8 = 0$, откуда $x = 8 \in [7; 9]$.

На числовой прямой покажем знаки производной и поведение функции:



$x = 8$ — точка минимума функции, значит, наибольшее значение будет на концах отрезка:

$$y(7) = (7 - 9)e^{7-8} = -e^{-1} = -\frac{1}{e}.$$

$$y(9) = (9 - 9)e^{9-8} = 0 \cdot e = 0.$$

Следовательно, $y_{\text{наиб.}} = y(9) = 0$.

Ответ: 0.

Пример 26. Найдите точку минимума функции

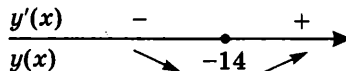
$$y = (x + 13)e^{x-13}.$$

Решение.

$$y' = (x + 13)' \cdot e^{x-13} + (x + 13) \cdot (e^{x-13})' = 1 \cdot e^{x-13} + (x + 13)e^{x-13} = e^{x-13}(x + 14).$$

$$y' = 0, \text{ или } e^{x-13} \cdot (x + 14) = 0.$$

Так как $e^{x-13} > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $x + 14 = 0$, откуда $x = -14$.



$x = -14$ — точка минимума функции, так как производная меняет знак с «-» на «+».

Ответ: -14.

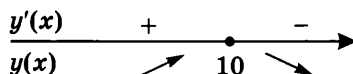
Пример 27. Найдите точку максимума функции

$$y = (11 - x)e^{x+11}.$$

Решение.

$$y' = (11 - x)' \cdot e^{x+11} + (11 - x) \cdot (e^{x+11})' = -1 \cdot e^{x+11} + (11 - x) \cdot e^{x+11} = e^{x+11} \cdot (10 - x).$$

$y' = 0$, или $10 - x = 0$, так как $e^{x+11} > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$.



Значит, $x = 10$ — точка максимума функции, так как при переходе через нее производная меняет знак с «+» на «-».

Ответ: 10.

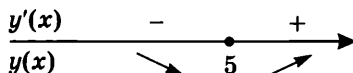
Пример 28. Найдите точку минимума функции

$$y = (4 - x)e^{4-x}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= (4 - x)' \cdot e^{4-x} + (4 - x) \cdot (e^{4-x})' = \\ &= -1 \cdot e^{4-x} + (4 - x) \cdot e^{4-x} \cdot (-1) = -e^{4-x} + (4 - x)e^{4-x} \cdot (-1) = -e^{4-x}(1 + 4 - x) = \\ &= -e^{4-x}(5 - x) = e^{4-x} \cdot (x - 5). \end{aligned}$$

$y' = 0$, $e^{4-x} > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, тогда $x - 5 = 0$, $x = 5$.



$x = 5$ — точка минимума функции.

Ответ: 5.

Пример 29. Найдите точку максимума функции

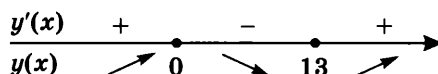
$$y = (2x^2 - 30x + 30)e^{x-30}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= (2x^2 - 30x + 30)' \cdot e^{x-30} + (2x^2 - 30x + 30) \cdot (e^{x-30})' = \\ &= (4x - 30)e^{x-30} + (2x^2 - 30x + 30) \cdot e^{x-30} = \\ &= e^{x-30} \cdot (4x - 30 + 2x^2 - 30x + 30) = e^{x-30} \cdot (2x^2 - 26x) = \\ &= 2x(x - 13) \cdot e^{x-30}. \end{aligned}$$

$y' = 0$, или $2x(x - 13) \cdot e^{x-30} = 0$.

$e^{x-30} > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, тогда $2x(x - 13) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = 13$.



$x = 0$ — точка максимума функции, так как производная меняет знак с «+» на «-».

Ответ: 0.

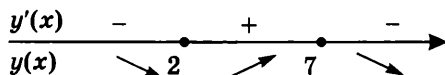
Пример 30. Найдите точку максимума функции

$$y = (x^2 - 7x + 7)e^{3-x}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= (x^2 - 7x + 7)' \cdot e^{3-x} + (x^2 - 7x + 7) \cdot (e^{3-x})' = \\ &= (2x - 7) \cdot e^{3-x} - (x^2 - 7x + 7) \cdot e^{3-x} = e^{3-x} \cdot (-x^2 + 9x - 14) = \\ &= -(x-2)(x-7)e^{3-x}. \end{aligned}$$

$y' = 0$, или $(x-2)(x-7) = 0$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = 7$.



$x = 7$ — точка максимума функции.

Ответ: 7.

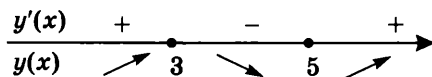
Пример 31. Найдите точку минимума функции

$$y = (x - 5)^2 e^{x-7}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= ((x-5)^2)' \cdot e^{x-7} + (x-5)^2 \cdot (e^{x-7})' = \\ &= 2(x-5) \cdot e^{x-7} + (x-5)^2 \cdot e^{x-7} = e^{x-7} \cdot (x-5)(2+x-5) = \\ &= (x-5)(x-3)e^{x-7}. \end{aligned}$$

Поскольку $e^{x-7} > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $y' = 0$, если $(x-5)(x-3) = 0$, откуда $x_1 = 5$, $x_2 = 3$.



В точке минимума производная меняет знак с «-» на «+», значит, $x = 5$ — точка минимума функции.

Ответ: 5.

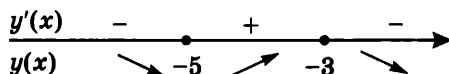
Пример 32. Найдите точку максимума функции

$$y = (x + 5)^2 e^{1-x}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= ((x+5)^2)' \cdot e^{1-x} + (x+5)^2 \cdot (e^{1-x})' = 2(x+5) \cdot e^{1-x} + \\ &+ (x+5)^2 \cdot (-1) \cdot e^{1-x} = e^{1-x} \cdot (x+5)(2-(x+5)) = (x+5)(-x-3)e^{1-x} = \\ &= -(x+5)(x+3)e^{1-x}. \end{aligned}$$

$e^{1-x} > 0$ при всех $x \in R$, тогда $y' = 0$, если $-(x+5)(x+3) = 0$, откуда $x_1 = -5$, $x_2 = -3$.



$x = -3$ — точка максимума функции.

Ответ: -3 .

Пример 33. Найдите точку минимума функции

$$y = (3x^2 - 8x + 8)e^{7-x}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= (3x^2 - 8x + 8)' \cdot e^{7-x} + (3x^2 - 8x + 8) \cdot (e^{7-x})' = \\ &= (6x - 8) \cdot e^{7-x} + (3x^2 - 8x + 8) \cdot (-1) \cdot e^{7-x} = e^{7-x} \cdot (6x - 8 - 3x^2 + \\ &+ 8x - 8) = (-3x^2 + 14x - 16)e^{7-x} = -(3x^2 - 14x + 16)e^{7-x}. \end{aligned}$$

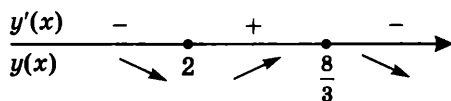
Разложим квадратный трехчлен $3x^2 - 14x + 16$ на множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена:

$$D/4 = 49 - 3 \cdot 16 = 1 > 0, \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{3}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{8}{3}.$$

$$y' = -3(x - 2) \left(x - \frac{8}{3} \right) e^{7-x}.$$

Так как $e^{7-x} > 0$ при всех $x \in R$, то $y' = 0$, если $-3(x - 2) \left(x - \frac{8}{3} \right) = 0$,

откуда $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{8}{3}$.



$x = 2$ — точка минимума функции.

Ответ: 2 .

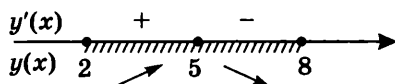
Пример 34. Найдите наибольшее значение функции

$y = (6 - x)e^{x-5}$ на отрезке $[2; 8]$.

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= (6 - x)' \cdot e^{x-5} + (6 - x)(e^{x-5})' = -1 \cdot e^{x-5} + (6 - x) \cdot e^{x-5} = \\ &= (5 - x) \cdot e^{x-5}. \end{aligned}$$

Так как $e^{x-5} > 0$ при всех $x \in R$, то $y' = 0$, если $5 - x = 0$, $x = 5$.



$x = 5$ — точка максимума функции, в ней достигается наибольшее значение функции: $y_{\text{наиб.}} = y(5) = (6 - 5) \cdot e^{5-5} = 1 \cdot e^0 = 1$.

Ответ: 1.

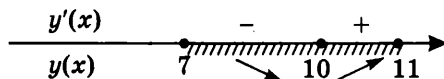
Пример 35. Найдите наименьшее значение функции $y = (2x^2 - 24x + 24) \cdot e^{x-10}$ на отрезке $[7; 11]$.

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= (2x^2 - 24x + 24)' \cdot e^{x-10} + (2x^2 - 24x + 24) \cdot (e^{x-10})' = \\ &= (4x - 24) \cdot e^{x-10} + (2x^2 - 24x + 24) \cdot e^{x-10} = (4x - 24 + 2x^2 - 24x + \\ &+ 24) \cdot e^{x-10} = (2x^2 - 20x) \cdot e^{x-10} = 2x(x - 10) \cdot e^{x-10}. \end{aligned}$$

Так как $e^{x-10} > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $y' = 0$, если $2x(x - 10) = 0$, или $x_1 = 0 \notin [7; 11]$, $x_2 = 10 \in [7; 11]$.

На числовой прямой отметим знаки производной и поведение функции:



$x = 10$ — точка минимума, так как производная при переходе через нее меняет знак с «-» на «+». Значит, в точке $x = 10$ достигается наименьшее значение функции,

$$\begin{aligned} \text{т. е. } y_{\text{наим.}} &= y(10) = (2 \cdot 10^2 - 24 \cdot 10 + 24) \cdot e^{10-10} = \\ &= (200 - 240 + 24) \cdot e^0 = -16. \end{aligned}$$

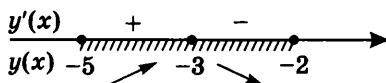
Ответ: -16.

Пример 36. Найдите наибольшее значение функции $y = (x + 5)^2 e^{-3-x}$ на отрезке $[-5; -2]$.

Решение.

$$\begin{aligned} y' &= ((x + 5)^2)' \cdot e^{-3-x} + (x + 5)^2 \cdot (e^{-3-x})' = 2(x + 5) \cdot e^{-3-x} + \\ &+ (x + 5)^2 \cdot (-1) \cdot e^{-3-x} = (x + 5) \cdot e^{-3-x} \cdot (2 - x - 5) = \\ &= -(x + 5)(x + 3)e^{-3-x}. \end{aligned}$$

Так как $e^{-3-x} > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то $y' = 0$, если $-(x + 5)(x + 3) = 0$, откуда $x_1 = -5 \in [-5; -2]$, $x_2 = -3 \in [-5; -2]$.



$x = -3$ — точка максимума функции, значит, в этой точке функция имеет наибольшее значение, т. е. $y_{\text{наиб.}} = y(-3) = (-3 + 5)^2 \cdot e^0 = 4$.

Ответ: 4.

3.5. Логарифмические функции

Пример 37. Найдите наименьшее значение функции $y = 6x - \ln(x + 4)^6$ на отрезке $[-3, 5; 0]$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq -4$.

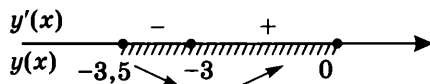
Найдем производную функции:

$$y' = 6 \cdot 1 - 6 \cdot \frac{(x+4)'}{x+4} = 6 - \frac{6}{x+4}.$$

Найдем нули производной:

$$y' = 0, \text{ или } 6 - \frac{6}{x+4} = 0, \frac{6}{x+4} = 6, \frac{1}{x+4} = 1, x+4 = 1, x = -3 \in [-3, 5; 0].$$

Определим знаки производной и поведение функции на данном отрезке:



$x = -3$ — точка минимума функции, значит, в ней функция имеет наименьшее значение, т. е. $y_{\text{наим.}} = y(-3) = 6 \cdot (-3) - \ln 1 = -18 - 0 = -18$.

Ответ: -18 .

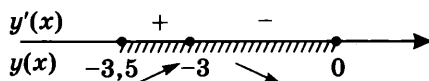
Пример 38. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 4)^6 - 6x$ на отрезке $[-3, 5; 0]$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq -4$.

$$y' = 6 (\ln(x + 4))' - 6 = \frac{6}{x+4} - 6.$$

$$y' = 0, \text{ или } \frac{6}{x+4} = 6, x + 4 = 1, \text{ откуда } x = -3 \in [-3, 5; 0].$$



$x = -3$ — точка максимума функции, значит, в этой точке достигается наибольшее значение функции, равное

$$y_{\text{наиб.}} = y(-3) = \ln 1 - 6 \cdot (-3) = 18.$$

Ответ: 18 .

Пример 39. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - 4 \ln(x + 3) + 7$ на отрезке $[-2, 5; 0]$.

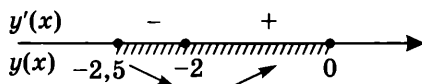
Решение.

ОДЗ: $x > -3$.

$$y' = 4 \cdot 1 - \frac{4}{x+3} + 0 = 4 - \frac{4}{x+3}.$$

$$y' = 0, \text{ или } 4 - \frac{4}{x+3} = 0, \frac{4}{x+3} = 4, x + 3 = 1,$$

$$x = -2 \in [-2, 5; 0].$$



$x = -2$ — точка минимума функции, в которой достигается наименьшее значение функции, т. е.

$$y_{\text{наим.}} = y(-2) = 4 \cdot (-2) - 4 \cdot \ln 1 + 7 = -8 - 4 \cdot 0 + 7 = -1.$$

Ответ: -1 .

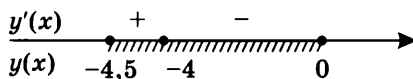
Пример 40. Найдите наибольшее значение функции $y = 6 \ln(x + 5) - 6x + 10$ на отрезке $[-4, 5; 0]$.

Решение.

ОДЗ: $x > -5$.

$$y' = (6 \ln(x + 5) - 6x + 10)' = \frac{6}{x+5} - 6.$$

$$y' = 0, \text{ или } \frac{6}{x+5} - 6 = 0, \frac{6}{x+5} = 6, x + 5 = 1, x = -4 \in [-4, 5; 0].$$



$x = -4$ — точка максимума, значит, в ней функция достигает наибольшего значения, т. е.

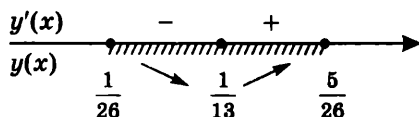
$$y_{\text{наиб.}} = y(-4) = 6 \ln 1 - 6 \cdot (-4) + 10 = 0 + 24 + 10 = 34.$$

Ответ: 34 .

Пример 41. Найдите наименьшее значение функции $y = 13x - \ln 13x + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{26}; \frac{5}{26}\right]$.

Решение.

$$y' = (13x - \ln(13x) + 3)' = 13 \cdot 1 - \frac{(13x)'}{13x} + 0 = 13 - \frac{1}{x}.$$



$$y' = 0, \text{ или } 13 - \frac{1}{x} = 0, \frac{1}{x} = 13, \text{ откуда } x = \frac{1}{13} \in \left[\frac{1}{26}; \frac{5}{26} \right].$$

$x = \frac{1}{13}$ — точка минимума, тогда в ней функция достигает наименьшего значения,

$$\text{т. е. } y_{\text{наим.}} = y\left(\frac{1}{13}\right) = 13 \cdot \frac{1}{13} - \ln\left(13 \cdot \frac{1}{13}\right) + 3 = 1 - \ln 1 + 3 = 4 - 0 = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 42. Найдите наибольшее значение функции

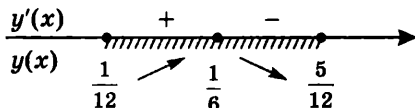
$$y = \ln(6x) - 6x + 5 \text{ на отрезке } \left[\frac{1}{12}; \frac{5}{12} \right].$$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

$$y' = (\ln(6x) - 6x + 5)' = \frac{(6x)'}{6x} - 6 \cdot 1 + 0 = \frac{1}{x} - 6.$$

$$y' = 0, \text{ или } \frac{1}{x} - 6 = 0, \frac{1}{x} = 6, x = \frac{1}{6} \in \left[\frac{1}{12}; \frac{5}{12} \right].$$



$x = \frac{1}{6}$ — точка максимума функции, тогда

$$y_{\text{наиб.}} = y\left(\frac{1}{6}\right) = \ln\left(6 \cdot \frac{1}{6}\right) - 6 \cdot \frac{1}{6} + 5 = 0 - 1 + 5 = 4.$$

Ответ: 4.

Замечание. Решение можно значительно сократить, если учесть,

что $\ln(6x) = 0$, или $6x = 1$, т. е. $x = \frac{1}{6}$, и т. д.

Пример 43. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2x^2 - 9x + 5 \ln x - 13 \text{ на отрезке } \left[\frac{1}{10}; \frac{11}{10} \right].$$

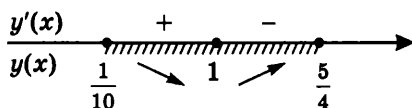
Решение.

$$\text{ОДЗ: } x > 0.$$

$$y' = (2x^2 - 9x + 5 \ln x - 13)' = 4x - 9 + 5 \cdot \frac{1}{x} - 0 = 4x - 9 + \frac{5}{x}.$$

Так как $x > 0$, то $y' = 0$, если $4x^2 - 9x + 5 = 0$.

$$\text{Поскольку } 4 - 9 + 5 = 0, \text{ то } x_1 = 1, x_2 = \frac{5}{4} \notin \left[\frac{1}{10}; \frac{11}{10} \right].$$



$x = 1$ — точка максимума функции, тогда

$$y_{\text{наиб.}} = y(1) = 2 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 5 \ln 1 - 13 = 2 - 9 + 0 - 13 = -20.$$

Ответ: -20 .

Замечание. Аналогично предыдущему примеру $\ln x = 0$ при $x = 1$ и т. д.

Пример 44. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 3x - 3 \ln x + 1$ на отрезке $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right]$.

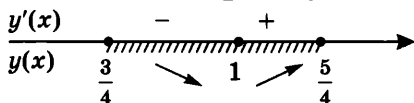
Решение.

$$\text{ОДЗ: } x > 0.$$

$$y' = 6x - 3 - 3 \cdot \frac{1}{x} + 0 = 6x - 3 - \frac{3}{x}.$$

$$y' = 0, \text{ или } 6x^2 - 3x - 3 = 0, x > 0, \text{ или } 2x^2 - x - 1 = 0.$$

$$\text{Так как } 2 - 1 - 1 = 0, \text{ то } x_1 = 1 \in \left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right], x_2 = -\frac{1}{2} \notin \left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4} \right].$$



$$x = 1 \text{ — точка минимума, тогда } y_{\text{наим.}} = y(1) = 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 3 \ln 1 + 1 = 3 - 3 - 3 \cdot 0 + 1 = 1.$$

Ответ: 1 .

Замечание. $\ln x = 0$ при $x = 1$ и т. д.

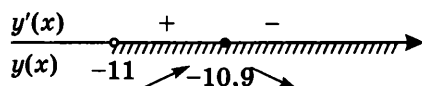
Пример 45. Найдите точку максимума функции

$$y = \ln(x + 11) - 10x + 13.$$

*Решение.*ОДЗ: $x > -11$.

$$y' = \frac{(x+11)'}{x+11} - 10 \cdot 1 + 0 = \frac{1}{x+11} - 10.$$

$$y' = 0, \text{ или } \frac{1}{x+11} = 10, x + 11 = 0,1, \text{ откуда } x = -10,9.$$



При переходе через точку $x = -10,9$ производная меняет знак с «+» на «-», значит, $x = -10,9$ — точка максимума функции.

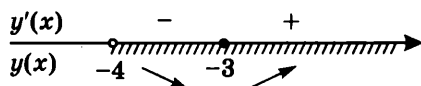
Ответ: $-10,9$.**Пример 46.** Найдите точку максимума функции

$$y = 5x - \ln(x + 4)^5.$$

*Решение.*ОДЗ: $x > -4$.

$$y' = 5 \cdot 1 - 5 \cdot \frac{(x+4)'}{x+4} = 5 - \frac{5}{x+4}.$$

$$y' = 0, \text{ если } \frac{5}{x+4} = 5, x + 4 = 1, \text{ откуда } x = -3 \in (-4; +\infty).$$



$x = -3$ — точка минимума функции.

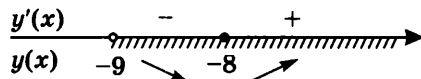
Ответ: -3 .**Пример 47.** Найдите точку минимума функции

$$y = 3x - 3 \ln(x + 9).$$

*Решение.*ОДЗ: $x > -9$.

$$y' = 3 \cdot 1 - 3 \cdot \frac{(x+9)'}{x+9} = 3 - \frac{3}{x+9}.$$

$$y' = 0, \text{ или } \frac{3}{x+9} = 3, x + 9 = 1, \text{ откуда } x = -8.$$



$x = -8$ — точка минимума функции.

Ответ: -8 .

Замечание. $\ln(x+9) = 0$ при $x+9 = 1$, т. е. $x = -8$ и т. д.

Пример 48. Найдите точку минимума функции

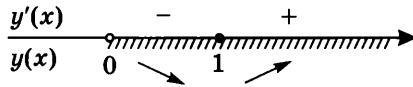
$$y = 3x^2 - 4x - 2 \ln x - 3.$$

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

$$y' = 6x - 4 - \frac{2}{x}, y' = 0, \text{ или } 6x^2 - 4x - 2 = 0, \\ 3x^2 - 2x - 1 = 0.$$

Так как $3 - 2 - 1 = 0$, то $x_1 = 1 \in (0; +\infty)$, $x_2 = -\frac{1}{3} \notin (0; +\infty)$.



$x = 1$ — точка минимума функции.

Ответ: 1.

Замечание. $\ln x = 0$ при $x = 1$.

3.6. Тригонометрические функции

Пример 49. Найдите наибольшее значение функции $y = 24 \cos x + 12\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}\pi + 5$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

Найдем производную функции:

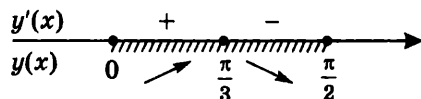
$$y' = 24 \cdot (\cos x)' + 12\sqrt{3} \cdot x' - 0 = -24 \sin x + 12\sqrt{3}.$$

Найдем нули производной:

$$y' = 0, \text{ или } -24 \sin x + 12\sqrt{3} = 0, \sin x = \frac{12\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{2}, x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, \\ n \in \mathbb{Z}.$$

При $n = 0$ $x = \frac{\pi}{3} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ — единственный корень, принадлежащий данному отрезку.

Определим знаки производной и поведение функции на числовой прямой:



$x = \frac{\pi}{3}$ — точка максимума, значит, в ней функция достигает наибольшего значения:

$$y_{\text{наиб.}} = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 24 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 12\sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{3} - 4\sqrt{3}\pi + 5 = 24 \cdot \frac{1}{2} + 4\sqrt{3}\pi - 4\sqrt{3}\pi + 5 = 17.$$

Ответ: 17.

Замечание. Решение значительно упростится, если учесть, что ответом может быть целое число или конечная десятичная дробь.

Учитывая это, должно выполняться условие

$$12\sqrt{3}x - 4\sqrt{3}\pi = 0, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{3} \text{ и т. д.}$$

Пример 50. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 13 + \frac{5\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{5\sqrt{3}}{3}x - \frac{10\sqrt{3}}{3}\cos x \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Решение.

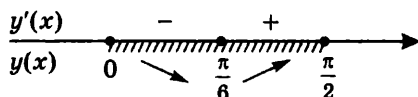
$$y' = 0 + 0 - \frac{5\sqrt{3}}{3} - \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot (-\sin x) = -\frac{5\sqrt{3}}{3} + \frac{10\sqrt{3}}{3}\sin x.$$

$$y' = 0, \text{ или } -\frac{5\sqrt{3}}{3} + \frac{10\sqrt{3}}{3}\sin x = 0, \quad \frac{10\sqrt{3}}{3}\sin x = \frac{5\sqrt{3}}{3}, \quad \sin x = \frac{1}{2},$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{По условию } x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

При $n = 0$ $x = \frac{\pi}{6} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ — единственный корень, принадлежащий данному отрезку.



$x = \frac{\pi}{6}$ — точка минимума, тогда в ней функция достигает наимень-

шего значения, т. е.

$$y_{\text{наим.}} = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 13 + \frac{5\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{5\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{10\sqrt{3}}{3} \cos \frac{\pi}{6} = 13 - \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= 13 - 5 = 8.$$

Ответ: 8.

Замечание. Аналогично предыдущему примеру имеем

$\frac{5\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{5\sqrt{3}}{3}x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{6}$ и т. д. При этом решение значительно сократится.

Пример 51. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5 \cos x - 19x + 5 \text{ на отрезке } \left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right].$$

Решение.

$$y' = (5 \cos x - 19x + 5)' = -5 \sin x - 19.$$

Так как $|\sin x| \leq 1$, то $y' < 0$, значит, функция является убывающей и наименьшее значение принимает в конце отрезка, т. е. в точке 0.

Следовательно, $y_{\text{наим.}} = y(0) = 5 \cos 0 - 19 \cdot 0 + 5 = 5 - 0 + 5 = 10$.

Ответ: 10.

Пример 52. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 10x - 9 \sin x + 8 \text{ на отрезке } \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right].$$

Решение.

$$y' = (10x - 9 \sin x + 8)' = 10 - 9 \cos x.$$

Заметим, что $y' > 0$ при всех $|\cos x| \leq 1$, значит, функция является возрастающей и наибольшее значение принимает на конце отрезка, т. е. в точке 0.

Следовательно, $y_{\text{наиб.}} = y(0) = 0 - 9 \sin 0 + 8 = 8$.

Ответ: 8.

Пример 53. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 11 \cos x + 13x + 6 \text{ на отрезке } \left[0; \frac{3\pi}{2}\right].$$

Решение.

$y' = (11 \cos x + 13x + 6)' = 11 \cdot (-\sin x) + 13 \cdot 1 + 0 = -11 \sin x + 13 > 0$
при всех $|\sin x| \leq 1$.

Значит, данная функция является возрастающей и наименьшее значение принимает в точке 0, т. е.

$$y_{\text{наим.}} = y(0) = 11 \cdot \cos 0 + 13 \cdot 0 + 6 = 11 \cdot 1 + 0 + 6 = 17.$$

Ответ: 17.

Пример 54. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 3 \sin x + \frac{36}{\pi}x + 7 \text{ на отрезке } \left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right].$$

Решение.

$$y' = 3 \cos x + \frac{36}{\pi} > 0 \text{ при всех } |\cos x| \leq 1.$$

Значит, функция $y(x)$ является возрастающей, тогда наибольшее значение достигается в конце отрезка, т. е.

$$y_{\text{наиб.}} = y(0) = 3 \cdot 0 + 0 + 7 = 7.$$

Ответ: 7.

Пример 55. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5 \sin x + \frac{30}{\pi}x + 3 \text{ на отрезке } \left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right].$$

Решение.

$$y' = 5 \cos x + \frac{30}{\pi}, \text{ где } \frac{30}{\pi} \approx 9,6, |\cos x| \leq 1.$$

Значит, $y' > 0$, т. е. данная функция является возрастающей, тогда наименьшее значение достигается в начале отрезка, т. е. в точке

$$\left(-\frac{5\pi}{6}\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} y_{\text{наим.}} &= y\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = 5 \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + \frac{30}{\pi} \cdot \left(-\frac{5\pi}{6}\right) + 3 = -5 \sin \frac{5\pi}{6} - 25 + 3 = \\ &= -5 \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - 22 = -5 \sin \frac{\pi}{6} - 22 = -5 \cdot \frac{1}{2} - 22 = -24,5. \end{aligned}$$

Ответ: -24,5.

Пример 56. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 10 \operatorname{tg} x - 10x + 8 \text{ на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right].$$

Решение.

$$y' = (10 \operatorname{tg} x - 10x + 8)' = 10 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 10.$$

Но $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, тогда получим

$$y' = 10(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 10 = 10 \operatorname{tg}^2 x \geq 0.$$

Значит, данная функция является возрастающей и наибольшего значения достигает в конце отрезка, т. е. в точке 0.

Следовательно, $y_{\text{наиб.}} = y(0) = 10 \cdot \operatorname{tg} 0 - 10 \cdot 0 + 8 = 8$.

Ответ: 8.

Пример 57. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 24 \operatorname{tg} x - 24x + 6\pi - 5 \text{ на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

Решение.

$$y' = 24 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 24 \cdot 1 + 0 = 24 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) - 24 = 24 \operatorname{tg}^2 x \geq 0.$$

Значит, данная функция является возрастающей и наибольшего значения достигает в конце отрезка, т. е. в точке $\frac{\pi}{4}$.

Следовательно, $y_{\text{наиб.}} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 24 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 24 \cdot \frac{\pi}{4} + 6\pi - 5 = 24 \cdot 1 - 6\pi + 6\pi - 5 = 24 - 5 = 19$.

Ответ: 19.

Пример 58. Найдите наибольшее значение функции

$$y = 12 \operatorname{tg} x - 12x + 3\pi - 5 \text{ на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right].$$

Решение.

$$y' = 12 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} - 12 \cdot 1 + 0 = 12 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) - 12 = 12 \operatorname{tg}^2 x \geq 0.$$

Значит, данная функция является возрастающей и наибольшего значения достигает в точке $\frac{\pi}{4}$, т. е.

$$y_{\text{наиб.}} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 12 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 12 \cdot \frac{\pi}{4} + 3\pi - 5 = 12 - 5 = 7.$$

Ответ: 7.

Пример 59. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 5x - 5 \operatorname{tg} x + 9 \text{ на отрезке } \left[-\frac{\pi}{4}; 0\right].$$

Решение.

$$y' = 5 - 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 0 = 5 - 5 \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 x) = -5 \operatorname{tg}^2 x \leq 0.$$

Значит, данная функция является убывающей.

$$\text{Тогда } y_{\text{наим.}} = y(0) = 5 \cdot 0 - 5 \cdot \operatorname{tg} 0 + 9 = 0 - 0 + 9 = 9.$$

Ответ: 9.

Пример 60. Найдите наибольшее значение функции

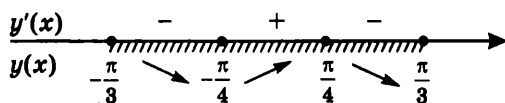
$$y = 2x - \operatorname{tg} x - 0,5\pi + 13 \text{ на отрезке } \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right].$$

Решение.

$$y' = 2 \cdot 1 - \frac{1}{\cos^2 x} - 0 = 2 - (1 + \operatorname{tg}^2 x) = 1 - \operatorname{tg}^2 x.$$

$$y' = 0, \text{ или } \operatorname{tg}^2 x = 1, \operatorname{tg} x = \pm 1, x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{При } n = 0, x = \pm \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right].$$



$x = \frac{\pi}{4}$ — точка максимума функции, значит, в ней достигается наибольшее значение, т. е.

$$y_{\text{наиб.}} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - 0,5\pi + 13 = \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi}{2} + 13 = 12.$$

Ответ: 12.

Пример 61. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 15x - 8 \sin x + 11 \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Решение.

$$y' = 15 \cdot 1 - 8 \cos x + 0 = 15 - 8 \cos x > 0, \text{ так как } |\cos x| \leq 1.$$

Значит, данная функция является возрастающей, тогда

$$y_{\text{наим.}} = y(0) = 15 \cdot 0 - 8 \cdot \sin 0 + 11 = 0 - 0 + 11 = 11.$$

Ответ: 11.

Пример 62. Найдите точку максимума функции

$$y = (4x - 5) \cos x - 4 \sin x + 7, \text{ принадлежащую промежутку } \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Решение.

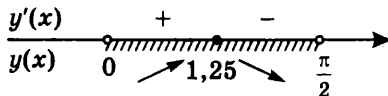
Найдем производную данной функции:

$$y' = (4x - 5)' \cdot \cos x + (4x - 5)(\cos x)' - 4 \cos x + 0 = \\ = 4 \cos x - (4x - 5) \sin x - 4 \cos x = (5 - 4x) \sin x.$$

$$y' = 0, \text{ если } 5 - 4x = 0, \text{ или } \sin x = 0.$$

$$4x = 5, x = 1,25 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Уравнение $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ не имеет корней, принадлежащих промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.



$x = 1,25$ — точка максимума функции, так как производная меняет знак с «+» на «-».

Ответ: 1,25.

Пример 63. Найдите точку минимума функции

$$y = (3 - 2x) \cos x + 2 \sin x, \text{ принадлежащую промежутку } \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

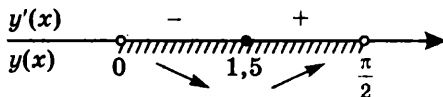
Решение.

$$y' = (3 - 2x)' \cdot \cos x + (3 - 2x) \cdot (\cos x)' + 2 \cos x = \\ = -2 \cos x - (3 - 2x) \sin x + 2 \cos x = (2x - 3) \sin x.$$

$$y' = 0, \text{ или } (2x - 3) \sin x = 0, \text{ откуда } 2x - 3 = 0, \text{ или } \sin x = 0.$$

$$\text{Если } 2x - 3 = 0, \text{ то } x = 1,5 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \text{ так как } \frac{\pi}{2} \approx 1,57 > 1,5.$$

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Эта серия не содержит корней, принадлежащих промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.



При переходе через точку 1,5 производная меняет знак с «-» на «+». Значит, $x = 1,5$ — точка минимума функции.

Ответ: 1,5.

Пример 64. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 9 - \frac{7\pi}{4} + 7x - 7\sqrt{2} \sin x \text{ на отрезке } \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

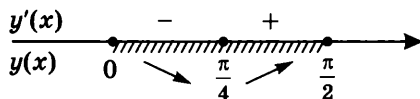
Решение.

$$y' = 0 + 7 \cdot 1 - 7\sqrt{2} \cos x = 7 - 7\sqrt{2} \cos x.$$

$$y' = 0, \text{ или } 7 - 7\sqrt{2} \cos x = 0, \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}, x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{При } n = 0 \quad x = \pm \frac{\pi}{4}, \text{ откуда } \frac{\pi}{4} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], -\frac{\pi}{4} \notin \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Других корней, принадлежащих отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, нет.



$x = \frac{\pi}{4}$ — точка минимума, тогда

$$y_{\text{наим.}} = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 9 - \frac{7\pi}{4} + 7 \cdot \frac{\pi}{4} - 7\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 9 - 7 = 2.$$

Ответ: 2.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 17)e^{x-16}$ на отрезке $[15; 17]$.

2. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 10)e^{x-9}$ на отрезке $[8; 10]$.

3. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 13)e^{x-12}$ на отрезке $[11; 13]$.

4. Найдите наименьшее значение функции $y = (x - 30)e^{x-29}$ на отрезке $[28; 30]$.

5. Найдите наибольшее значение функции $y = 3\sqrt{2} \cos x + 3x - \frac{3\pi}{4} + 8$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

- 6.** Найдите наибольшее значение функции $y = 7\sqrt{2} \cos x + 7x - \frac{7\pi}{4} + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 7.** Найдите наименьшее значение функции $y = 20 \operatorname{tg} x - 20x - 5\pi + 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.
- 8.** Найдите наименьшее значение функции $y = 36 \operatorname{tg} x - 36x - 9\pi + 11$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.
- 9.** Найдите наибольшее значение функции $y = 3x - 3 \operatorname{tg} x - 8$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
- 10.** Найдите наибольшее значение функции $y = x - \operatorname{tg} x - 9$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.
- 11.** Найдите наименьшее значение функции $y = 6x - 6 \operatorname{tg} x + 11$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.
- 12.** Найдите наименьшее значение функции $y = 5x - 5 \operatorname{tg} x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.
- 13.** Найдите наибольшее значение функции $y = 12 \operatorname{tg} x - 12x + 3\pi - 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.
- 14.** Найдите наибольшее значение функции $y = 16 \operatorname{tg} x - 16x + 4\pi - 9$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.
- 15.** Найдите наименьшее значение функции $y = 20 \operatorname{tg} x - 20x - 5\pi + 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.
- 16.** Найдите наименьшее значение функции $y = 4 \operatorname{tg} x - 4x - \pi + 9$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

17. Найдите наименьшее значение функции $y = 2 \operatorname{tg} x - 4x + \pi - 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

18. Найдите наименьшее значение функции $y = 12 \operatorname{tg} x - 24x + 6\pi - 13$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

19. Найдите наибольшее значение функции $y = 8x - 4 \operatorname{tg} x - 2\pi + 6$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

20. Найдите наибольшее значение функции $y = 2x - \operatorname{tg} x - 0,5\pi + 13$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$.

21. Найдите точку минимума функции $y = (x + 7)e^{x-7}$.

22. Найдите точку минимума функции $y = (x + 11)e^{x-11}$.

23. Найдите точку максимума функции $y = (21 - x)e^{x+21}$.

24. Найдите точку максимума функции $y = (17 - x)e^{x+17}$.

25. Найдите точку минимума функции $y = (22 - x)e^{22-x}$.

26. Найдите точку минимума функции $y = (15 - x)e^{15-x}$.

27. Найдите точку максимума функции $y = (x + 6)e^{6-x}$.

28. Найдите точку максимума функции $y = (x + 3)e^{3-x}$.

29. Найдите наименьшее значение функции $y = 6x - \ln(x + 4)^6$ на отрезке $[-3,5; 0]$.

30. Найдите наименьшее значение функции $y = 5x - \ln(x + 9)^5$ на отрезке $[-8,5; 0]$.

31. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x + 3)^3$ на отрезке $[-2,5; 0]$.

32. Найдите наименьшее значение функции $y = 7x - \ln(x + 2)^7$ на отрезке $[-1,5; 0]$.

33. Найдите наименьшее значение функции $y = 13 + \frac{5\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{5\sqrt{3}}{3}x - \frac{10\sqrt{3}}{3}\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

34. Найдите наименьшее значение функции $y = 19 + \frac{7\sqrt{3}\pi}{18} - \frac{7\sqrt{3}}{3}x - \frac{14\sqrt{3}}{3}\cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

35. Найдите наименьшее значение функции $y = 5 \cos x - 19x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

36. Найдите наименьшее значение функции $y = 3 \cos x - 17x + 8$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

37. Найдите наибольшее значение функции $y = 10x - 9 \sin x + 8$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

38. Найдите наибольшее значение функции $y = 13x - 8 \sin x + 9$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

39. Найдите наибольшее значение функции $y = 18x - 8 \sin x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

40. Найдите наибольшее значение функции $y = 7x - 3 \sin x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

41. Найдите наименьшее значение функции $y = 5 \cos x + 12x + 7$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

42. Найдите наименьшее значение функции $y = 11 \cos x + 13x + 6$ на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

43. Найдите наименьшее значение функции $y = 13 \sin x - 17x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

44. Найдите наименьшее значение функции $y = 6 \sin x - 10x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

45. Найдите наименьшее значение функции $y = 3 \cos x + \frac{15}{\pi}x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

46. Найдите наименьшее значение функции $y = 4 \cos x + \frac{18}{\pi}x + 5$ на отрезке $\left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right]$.

47. Найдите наименьшее значение функции $y = 3 \sin x + \frac{36}{\pi}x + 7$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

48. Найдите наименьшее значение функции $y = 5 \sin x + \frac{30}{\pi}x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$.

49. Найдите наибольшее значение функции $y = 10 \operatorname{tg} x - 10x + 8$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

50. Найдите наибольшее значение функции $y = 5 \operatorname{tg} x - 5x + 4$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; 0\right]$.

51. Найдите наименьшее значение функции $y = 12 \operatorname{tg} x - 12x + 8$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

52. Найдите наименьшее значение функции $y = 13 \operatorname{tg} x - 13x + 5$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

53. Найдите наибольшее значение функции $y = 20 \operatorname{tg} x - 20x + 5\pi - 9$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

54. Найдите наибольшее значение функции $y = 24 \operatorname{tg} x - 24x + 6\pi - 5$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

55. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 6)^4 - 4x$ на отрезке $[-5, 5; 0]$.

56. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 4)^6 - 6x$ на отрезке $[-3, 5; 0]$.

57. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x + 5)^7 - 7x$ на отрезке $[-4, 5; 0]$.

58. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - 4 \ln(x + 3) + 7$ на отрезке $[-2, 5; 0]$.

59. Найдите наименьшее значение функции $y = 7x - 7 \ln(x + 5) + 4$ на отрезке $[-4, 5; 0]$.

60. Найдите наименьшее значение функции $y = 5x - 5 \ln(x + 2) + 3$ на отрезке $[-1, 5; 0]$.

61. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - 3 \ln(x + 6) + 7$ на отрезке $[-5, 5; 0]$.

62. Найдите наибольшее значение функции $y = 3 \ln(x + 4) - 3x + 5$ на отрезке $[-3, 5; 0]$.

63. Найдите наибольшее значение функции $y = 5 \ln(x + 6) - 5x + 7$ на отрезке $[-5, 5; 0]$.

64. Найдите наибольшее значение функции $y = 4 \ln(x + 3) - 4x + 3$ на отрезке $[-2, 5; 0]$.

65. Найдите наибольшее значение функции $y = 6 \ln(x + 5) - 6x + 10$ на отрезке $[-4, 5; 0]$.

66. Найдите наименьшее значение функции $y = 13x - \ln(13x) + 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{26}; \frac{5}{26}\right]$.

67. Найдите наименьшее значение функции $y = 4x - \ln(4x) + 7$ на отрезке $\left[\frac{1}{8}; \frac{5}{8}\right]$.

68. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(3x) + 4$ на отрезке $\left[\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right]$.

69. Найдите наименьшее значение функции $y = 5x - \ln(5x) + 8$ на отрезке $\left[\frac{1}{10}; \frac{1}{2}\right]$.

70. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(6x) - 6x + 5$ на отрезке $\left[\frac{1}{12}; \frac{5}{12}\right]$.

71. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(5x) - 5x + 11$ на отрезке $\left[\frac{1}{10}; \frac{1}{2}\right]$.

72. Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(8x) - 8x + 13$ на отрезке $\left[\frac{1}{16}; \frac{5}{16}\right]$.

- 73.** Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(3x) - 3x + 4$ на отрезке $\left[\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right]$.
- 74.** Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 3x + \ln x + 6$ на отрезке $\left[\frac{4}{5}; \frac{6}{5}\right]$.
- 75.** Найдите наименьшее значение функции $y = x^2 - 5x + 3 \ln x + 9$ на отрезке $\left[\frac{5}{6}; \frac{7}{6}\right]$.
- 76.** Найдите наименьшее значение функции $y = 2x^2 - 10x + 6 \ln x + 13$ на отрезке $\left[\frac{10}{11}; \frac{12}{11}\right]$.
- 77.** Найдите наименьшее значение функции $y = 3x^2 - 3x - 3 \ln x + 1$ на отрезке $\left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$.
- 78.** Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 - 6x + 4 \ln x - 7$ на отрезке $\left[\frac{1}{7}; \frac{8}{7}\right]$.
- 79.** Найдите наибольшее значение функции $y = x^2 - 8x + 6 \ln x - 11$ на отрезке $\left[\frac{1}{9}; \frac{10}{9}\right]$.
- 80.** Найдите наибольшее значение функции $y = 2x^2 - 9x + 5 \ln x - 13$ на отрезке $\left[\frac{1}{10}; \frac{11}{10}\right]$.
- 81.** Найдите наибольшее значение функции $y = 3x^2 - 4x - 2 \ln x - 3$ на отрезке $\left[\frac{1}{5}; \frac{6}{5}\right]$.
- 82.** Найдите точку максимума функции $y = (2x^2 - 24x + 24)e^{x-24}$.
- 83.** Найдите точку максимума функции $y = (2x^2 - 30x + 30)e^{x-30}$.
- 84.** Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 13x + 13)e^{x-13}$.
- 85.** Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 19x + 19)e^{x-19}$.
- 86.** Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - 13x + 13)e^{x+13}$.
- 87.** Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - 16x + 16)e^{x+16}$.
- 88.** Найдите точку минимума функции $y = (3x^2 - 18x + 18)e^{x+18}$.
- 89.** Найдите точку минимума функции $y = (2x^2 - 6x + 6)e^{x+6}$.

90. Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - 7x + 7)e^{3-x}$.
91. Найдите точку минимума функции $y = (x^2 - 11x + 11)e^{5-x}$.
92. Найдите точку минимума функции $y = (2x^2 - 30x + 30)e^{6-x}$.
93. Найдите точку минимума функции $y = (3x^2 - 8x + 8)e^{7-x}$.
94. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 6x + 6)e^{1-x}$.
95. Найдите точку максимума функции $y = (x^2 - 13x + 13)e^{2-x}$.
96. Найдите точку максимума функции $y = (4x^2 - 20x + 20)e^{3-x}$.
97. Найдите точку максимума функции $y = (5x^2 - 30x + 30)e^{4-x}$.
98. Найдите точку максимума функции $y = (x - 8)^2 e^{x-3}$.
99. Найдите точку максимума функции $y = (x - 13)^2 e^{x-4}$.
100. Найдите точку максимума функции $y = (x - 3)^2 e^{x-5}$.
101. Найдите точку максимума функции $y = (x - 7)^2 e^{x-6}$.
102. Найдите точку минимума функции $y = (x - 5)^2 e^{x-5}$.
103. Найдите точку минимума функции $y = (x - 7)^2 e^{x-7}$.
104. Найдите точку минимума функции $y = (x - 9)^2 e^{x+9}$.
105. Найдите точку минимума функции $y = (x - 11)^2 e^{x+11}$.
106. Найдите точку максимума функции $y = (x + 5)^2 e^{1-x}$.
107. Найдите точку максимума функции $y = (x + 6)^2 e^{2-x}$.
108. Найдите точку максимума функции $y = (x + 7)^2 e^{3-x}$.
109. Найдите точку максимума функции $y = (x + 8)^2 e^{4-x}$.
110. Найдите точку минимума функции $y = (x + 9)^2 e^{5-x}$.
111. Найдите точку минимума функции $y = (x + 10)^2 e^{6-x}$.
112. Найдите точку минимума функции $y = (x + 11)^2 e^{7-x}$.
113. Найдите точку минимума функции $y = (x + 12)^2 e^{8-x}$.
114. Найдите точку минимума функции $y = 4x - \ln(x + 2) + 13$.
115. Найдите точку минимума функции $y = 5x - \ln(x + 5) + 7$.
116. Найдите точку минимума функции $y = 10x - \ln(x + 13) + 8$.
117. Найдите точку минимума функции $y = 2x - \ln(x + 9) + 3$.
118. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 3) - 2x + 1$.
119. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 8) - 4x + 3$.
120. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 19) - 5x + 7$.
121. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x + 11) - 10x + 13$.

КРАТКИЕ СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

1. Уравнение I степени (линейное)

Общий вид: $ax + b = 0$.

1) Если $a \neq 0$, $a \in R$, $b \in R$, то $x = -\frac{b}{a}$ (корень уравнения).

2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет.

3) Если $a = b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней.

2. Система линейных уравнений

Пусть дана система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

1) Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение (прямые пересекаются в одной точке).

2) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений (прямые не пересекаются, т. е. параллельны).

3) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное множество решений (прямые совпадают).

3. Уравнение II степени (квадратное)

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где $a \neq 0$, a — I (старший) коэффициент, b — II коэффициент, c — свободный член.

$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант (различитель).

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

2) Если $D = 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$ — один корень.

3) Если $D < 0$, корней нет (действительных).

Частные случаи

1) Неполные квадратные уравнения:

а) $ax^2 + c = 0$, $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$, если коэффициенты a и c имеют разные знаки; если коэффициенты a и c имеют одинаковые знаки, то корней нет;

б) $ax^2 + bx = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$;

в) $ax^2 = 0$, $x = 0$.

2) Квадратное уравнение приведенного вида

$$x^2 + px + q = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

3) Квадратное уравнение вида $ax^2 + 2kx + c = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

4) Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$,

$a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$;

$a - b + c = 0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

4. Теорема Виета

а) Для квадратного уравнения общего вида $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$;

б) для приведенного вида $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$.

Теорема, обратная теореме Виета

Если p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Теорема Виета для кубического уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения, то $x_1 + x_2 + x_3 = -a$;

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = b; \quad x_1 x_2 x_3 = -c.$$

5. Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена, $D > 0$.

Если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

6. Биквадратное уравнение

Общий вид: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$.

Заменой $x^2 = y$ приводят к квадратному виду $ay^2 + by + c = 0$.

Корни биквадратного уравнения:

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}},$$

где $D = b^2 - 4ac$.

Свойства корней

1. Если биквадратное уравнение имеет корень x_0 , то оно имеет и корень $-x_0$.

2. Сумма корней биквадратного уравнения равна нулю (по теореме Виета).

Замечание. Для вычисления корней биквадратного уравнения часто удобно воспользоваться **формулой сложного радикала**

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(A + \sqrt{A^2 - B} \right)} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(A - \sqrt{A^2 - B} \right)}.$$

Последняя полезна лишь в случае, если $\sqrt{A^2 - B}$ есть рациональное число.

7. Возвратное уравнение IV степени

Общий вид: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bmx + am^2 = 0$, $a \neq 0$.

Приводится к виду $a \left(x^2 + \frac{m^2}{x^2} \right) + b \left(x + \frac{m}{x} \right) + c = 0$ и заменой $y = x + \frac{m}{x}$

и $y^2 - 2m = x^2 + \frac{m^2}{x^2}$ приводится к квадратному уравнению

$$ay^2 + by + (c - 2am) = 0.$$

Частные случаи

1) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, $(m = 1)$ — симметрическое уравнение I рода.

Решается подстановкой $y = x + \frac{1}{x}$;

2) $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$, $(m = -1)$ — симметрическое уравнение II рода.

Решается подстановкой $y = x - \frac{1}{x}$.

8. Свойства степеней

Для любых x , y и $a > 0$, $b > 0$ верны равенства:

$a^0 = 1$ (по определению);

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad a^x : a^y = a^{x-y}; \quad (a^x)^y = a^{xy};$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \quad \left(\frac{a}{b} \right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x};$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

9. Формулы сокращенного умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — разность квадратов;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — куб суммы;

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб разности;

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ — сумма кубов;

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$ — разность кубов.

Дополнительные формулы

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$;

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$;

$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$;

$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;

$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$;

$a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$;

$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$.

10. Свойства арифметических корней

Для любых натуральных $n > 1$ и $k > 1$ и любых $a \geq 0$, $b \geq 0$ верны равенства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); \quad (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k};$$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[nk]{a}; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \quad (\sqrt[n]{a})^n = a \quad (a \geq 0);$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ если } 0 \leq a < b; \quad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \quad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0).$$

11. Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1; & 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}; & 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \\ \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha}; & \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha}.\end{aligned}$$

12. Формулы сложения

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; & \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.\end{aligned}$$

Дополнительные формулы

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}; \quad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta};$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \\ &- \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma; \\ \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \\ &- \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma.\end{aligned}$$

13. Формулы двойных и тройных аргументов

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha; \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; & \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}; \\ \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; & \cos 3\alpha &= 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \\ \operatorname{tg} 3\alpha &= \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}; & \operatorname{ctg} 3\alpha &= \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}.\end{aligned}$$

14. Формулы половинного аргумента (для функций \sin и \cos — формулы понижения степени)

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2};$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha};$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

15. Универсальные тригонометрические подстановки

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

16. Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi), \text{ где}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Дополнительные формулы

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}; \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}; \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta};$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha); \quad \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha);$$

$$1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right); \quad 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha; \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

17. Формулы преобразования произведения в сумму

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta);$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta);$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta).$$

Дополнительные формулы

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha;$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

18. Радианная и градусная меры углов

$$1 \text{ рад.} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ;$$

$$1 \text{ рад.} \approx 57,3^\circ;$$

$$\alpha \text{ рад.} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \alpha \right)^\circ;$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад.};$$

$$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ рад.};$$

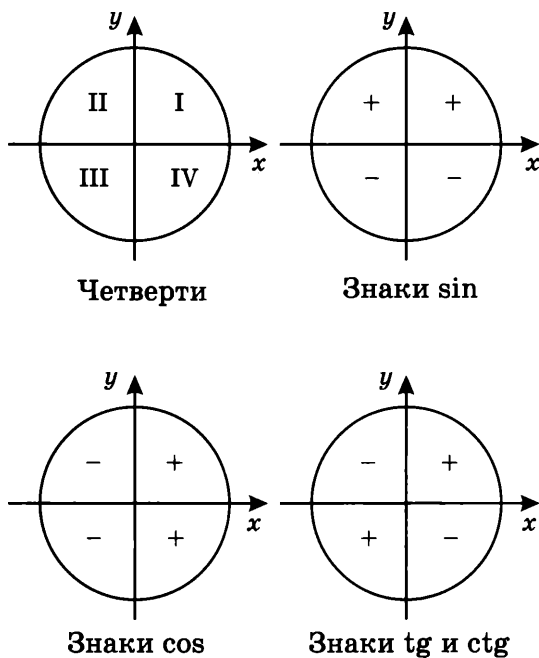
$l = \alpha R$ — длина дуги окружности;

α — угол в радианах;

R — радиус окружности;

$S = \frac{R^2}{2} \alpha$ — площадь кругового сектора, $0 < \alpha < \pi$.

19. Знаки тригонометрических функций



20. Формулы приведения

Функция α	Аргумент α							
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
sin	cos α	cos α	sin α	-sin α	-cos α	-cos α	-sin α	sin α
cos	sin α	-sin α	-cos α	-cos α	-sin α	sin α	cos α	cos α
tg	ctg α	-ctg α	-tg α	tg α	ctg α	-ctg α	-tg α	tg α
ctg	tg α	-tg α	-ctg α	ctg α	tg α	-tg α	-ctg α	ctg α

21. Значения тригонометрических функций для некоторых углов

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0	-

22. Периоды тригонометрических функций

Периоды функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ равны 2π .

Периоды функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ равны π .

Периоды функций $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ и $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ находят по формуле $T = \frac{2\pi}{\omega}$, а функций $y = A \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$ и $y = A \operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$ — по

формуле $T = \frac{\pi}{\omega}$.

23. Обратные тригонометрические функции

Функция	Область определения	Область значений
$y = \arcsin x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \operatorname{arctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$0 < y < \pi$

$$\sin(\arcsin x) = x, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x;$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\cos(\arccos x) = x, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x;$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, x \neq 0;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, x \neq 0;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsin} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arccos} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcsin} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arccos} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1;$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\operatorname{arcsin}(-x) = -\operatorname{arcsin} x;$$

$$\operatorname{arccos}(-x) = \pi - \operatorname{arccos} x;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x;$$

$$\operatorname{arcsin} x + \operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

24. Значения обратных тригонометрических функций некоторых углов

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\operatorname{arcsin} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\operatorname{arccos} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

25. Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a$, где $|a| \leq 1$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\cos x = a$, $|a| \leq 1$, $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Частные случаи ($a = 0$, $a = 1$, $a = -1$)

$\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\operatorname{ctg} x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

26. Средние величины

1. Среднее арифметическое

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

2. Среднее геометрическое $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, где $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$.

3. Среднее гармоническое

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

4. Среднее квадратичное

$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

5. Среднее взвешенное

$$V = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

27. Некоторые важные неравенства

1. Неравенство Коши:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \text{ где } x \geq 0, y \geq 0.$$

2. Неравенство треугольника:

$$|x + a| \leq |x| + |a|.$$

3. Неравенство для двух взаимно обратных величин:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \text{ где } x > 0.$$

$$4. \frac{a^2 + 1}{2} \geq 2.$$

$$5. \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

28. Прогрессии

1. Арифметическая прогрессия

(a_1 — 1-й член, d — разность,

n — число членов, a_n — n -й член, S_n — сумма n первых членов).

Определение арифметической прогрессии:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Формула n -го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Формула суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Характеристическое свойство:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}), \text{ где } n > 1.$$

2. Геометрическая прогрессия

(b_1 — 1-й член, q — знаменатель ($q \neq 0$), n — число членов,

b_n — n -й член, S_n — сумма n первых членов).

Определение геометрической прогрессии:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \text{ где } b_1 \neq 0, q \neq 0.$$

Формула n -го члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Формула суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}; S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ где } q \neq 1.$$

Характеристическое свойство:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Формула суммы членов *бесконечной геометрической прогрессии*:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \text{ где } |q| < 1.$$

29. Логарифмы и их свойства

1. Если $x > 0$, то $x = a^{\log_a x}$ — основное логарифмическое тождество.
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a 1 = 0$.
4. Если $x > 0$, $y > 0$, то $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ — логарифм произведения.

$$5. \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \text{ — логарифм частного.}$$

$$6. \text{ Если } x > 0, p \in R, \text{ то } \log_a x^p = p \cdot \log_a x \text{ — логарифм степени.}$$

$$7. \text{ Если } x > 0, b > 0, b \neq 1, \text{ то } \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{ — формула перехода от}$$

основания a к основанию b .

$$\text{В частности, если } x = b, \text{ то } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ или } \log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

$$8. \log_a b = \log_{a^p} b^p = p \log_{a^p} b \quad (p \in R, p \neq 0).$$

$$9. \text{ Если } a > 0, a \neq 1, b > 0, p \neq 0, \text{ то } \log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b.$$

$$10. \log_a x \cdot \log_b y = \log_a y \cdot \log_b x, \text{ где } x > 0, y > 0, a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1.$$

$$11. c^{\log_a b} = b^{\log_a c}; a, b, c > 0, a \neq 1.$$

30. Неравенства

1. Основные свойства числовых неравенств

1. Если $a > b$, то $b < a$.
2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.

3. Если $a > b$, то $a + c > b + c$, $a - c > b - c$ для любого c .

4. $ac > bc$ при $c > 0$; $ac < bc$ при $c < 0$.

$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ при $c > 0$; $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ при $c < 0$.

5. Если $0 < a < b$, то $a^c < b^c$ при $c > 0$, $a^c > b^c$ при $c < 0$.

6. Если $a > b$, $c > d$, то $a + c > b + d$, $a - d > b - c$.

7. Если $a > b > 0$, $c > d > 0$, то $ac > bd$, $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

8. Если $a < x < b$, то $(x - a)(x - b) < 0$, и обратно.

2. Неравенство I степени (линейное)

Общий вид: $ax + b > 0$.

1. Если $a > 0$, то $x > -\frac{b}{a}$.

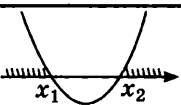
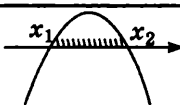
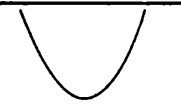
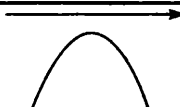
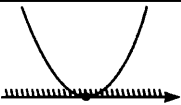
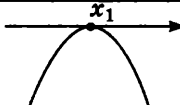
2. Если $a < 0$, то $x < -\frac{b}{a}$.

3. Если $a = 0$, то при $b > 0$ $x \in R$, при $b \leq 0$ решений нет.

3. Неравенство II степени (квадратное)

Общий вид: $ax^2 + bx + c \geq 0$, $a \neq 0$.

В зависимости от знака a и знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ имеем 6 возможностей:

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$	 $x \leq x_1, x \geq x_2$	 $x_1 \leq x \leq x_2$
$D < 0$	 $x \in R$	 Решений нет
$D = 0$	 $x_1 = x_2$ $x \in R$	 $x = x_1$

4. Иррациональные неравенства

1. Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 < (g(x))^2. \end{cases}$$

2. Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 > (g(x))^2; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

5. Показательное неравенство

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$ при $a > 1$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$, а при $0 < a < 1$ — неравенству $f(x) < g(x)$.

При решении показательных неравенств пользуются свойствами неравенств, содержащих степени.

1. При всех допустимых значениях a и b справедливы следующие утверждения:

- 1) неравенства $a^b > 1$ и $(a - 1)b > 0$ равносильны;
- 2) неравенства $a^b \geq 1$ и $(a - 1)b \geq 0$ равносильны;
- 3) неравенства $a^b < 1$ и $(a - 1)b < 0$ равносильны;
- 4) неравенства $a^b \leq 1$ и $(a - 1)b \leq 0$ равносильны.

2. При всех допустимых значениях a , b и c справедливы следующие утверждения:

- 1) неравенства $a^b > a^c$ и $(a - 1)(b - c) > 0$ равносильны;
- 2) неравенства $a^b \geq a^c$ и $(a - 1)(b - c) \geq 0$ равносильны;
- 3) неравенства $a^b < a^c$ и $(a - 1)(b - c) < 0$ равносильны;
- 4) неравенства $a^b \leq a^c$ и $(a - 1)(b - c) \leq 0$ равносильны.

6. Логарифмическое неравенство

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a > 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ — системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

При решении логарифмических неравенств пользуются следующими свойствами:

При всех допустимых значениях a , b и c , таких, что $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, справедливы утверждения:

1.

1) неравенства $\log_a b > \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) > 0$ равносильны;

2) неравенства $\log_a b \geq \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) \geq 0$ равносильны;

3) неравенства $\log_a b < \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) < 0$ равносильны;

4) неравенства $\log_a b \leq \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) \leq 0$ равносильны.

2.

1) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d > 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) > 0$ равносильны;

2) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d \geq 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) \geq 0$ равносильны;

3) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d < 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) < 0$ равносильны;

4) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d \leq 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) \leq 0$ равносильны.

3.

1) неравенства $\log_a b \cdot \log_c b > 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) > 0$ равносильны;

2) неравенства $\log_a b \cdot \log_c b \geq 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) \geq 0$ равносильны;

3) неравенства $\log_a b \cdot \log_c b < 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) < 0$ равносильны;

4) неравенства $\log_a b \cdot \log_c b \leq 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) \leq 0$ равносильны.

7. Тригонометрические неравенства

$\sin x > a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x > a$, $\operatorname{ctg} x > a$ (вместо знака $>$ могут быть знаки $<$, \geq , \leq) решаются графически: находят точки пересечения графика функции с прямой $y = a$, расположенной ближе к началу координат, а затем используют периодичность функции.

Тригонометрические неравенства можно решать и с помощью единичного круга.

31. Таблица производных и первообразных элементарных и сложных функций

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Первообразная $F(x)$
C , где C – const	0	Cx
Cx	C	$\frac{1}{2}Cx^2$
$x^p, p \in R$	px^{p-1}	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$
$ax + b, a \neq 0$	a	$\frac{1}{2}ax^2 + bx + C$
$(ax + b)^p$	$pa(ax + b)^{p-1}$	$\frac{(ax + b)^{p+1}}{a(p+1)} + C$
e^x	e^x	e^x
$e^{ax+b}, a \neq 0$	ae^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$a^x, a > 0, a \neq 0$	$a^x \ln a$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$a^{kx+b}, a > 0, a \neq 0$	$ka^{kx+b} \ln a$	$\frac{a^{kx+b}}{k \ln a} + C$
$\ln x, x > 0$	$\frac{1}{x}$	$x \ln x - x + C$
$\ln(ax + b), a \neq 0$	$\frac{a}{ax + b}$	–
$\log_a x, x > 0, a > 0$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$
$\log_a(kx + b)$	$\frac{k}{(kx + b) \ln a}$	–
$\sin x$	$\cos x$	$-\cos x + C$
$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + C$
$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\ln \cos x + C$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\ln \sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	–	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	–	$-\operatorname{ctg} x + C$

32. Правила дифференцирования

(u, v — функции, C — const)

$$(Cu)' = Cu'; \quad (u + v)' = u' + v'; \quad (uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C}{v^2}; \quad \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}.$$

$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, где $g(f(x))$ — сложная функция.

33. Уравнение касательной

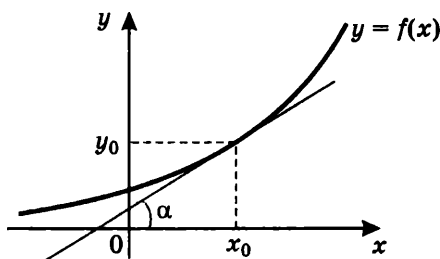
Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

где (x_0, y_0) — точка касания.

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = k,$$

где k — угловой коэффициент касательной к графику функции.



34. Правила нахождения первообразных

1. Если F — первообразная для f , а H — первообразная для h , то $F + H$ есть первообразная для $f + h$.

2. Если F — первообразная для f , а k — const, то kF есть первообразная для kf .

3. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а k и b — постоянные, причем $k \neq 0$, то $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для функции $f(kx + b)$.

35. Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Свойства

$$1. \int_a^a f(x)dx = 0.$$

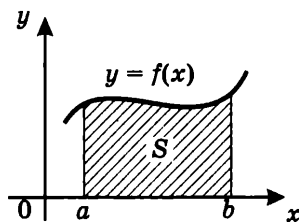
$$2. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ где } a < c < b.$$

36. Площадь криволинейной трапеции

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox , прямыми $x = a$ и $x = b$ и графиком неотрицательной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$, находится по формуле

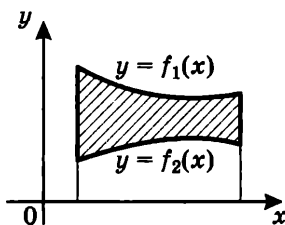
$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



37. Площадь фигуры, заключенной на отрезке

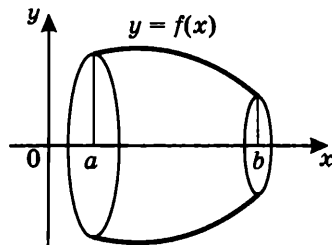
Площадь фигуры, заключенной на отрезке $[a, b]$ между графиками функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ ($f_1(x) \geq f_2(x)$), находится по формуле

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx.$$



38. Объем тела вращения

Объем тела вращения вычисляется по формуле $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$.



39. Формула Лагранжа

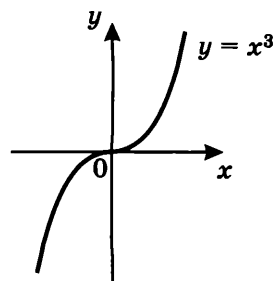
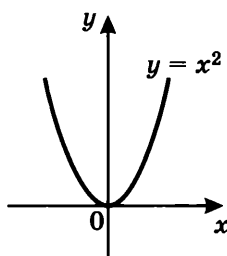
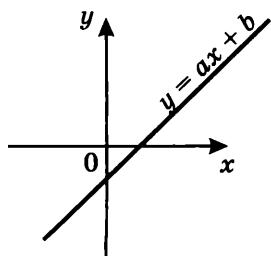
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

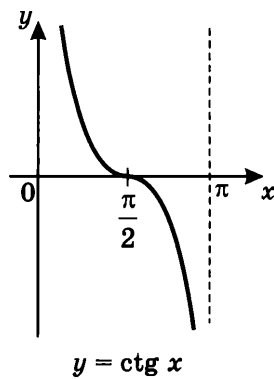
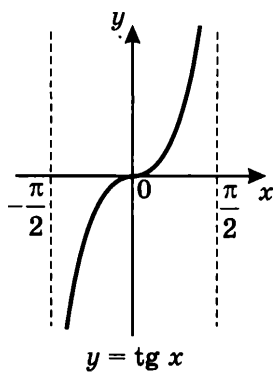
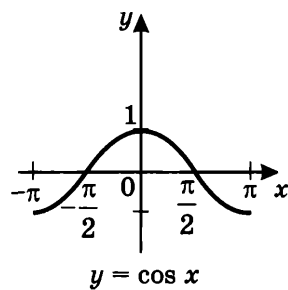
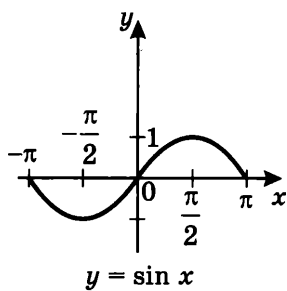
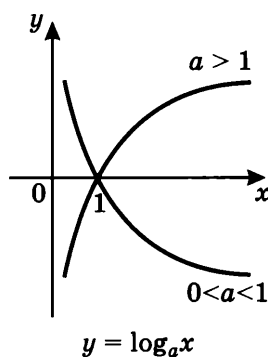
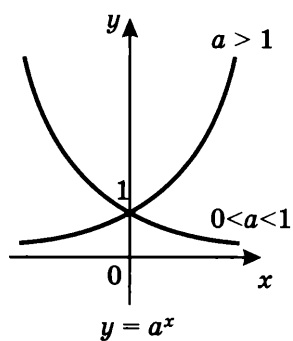
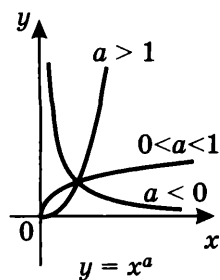
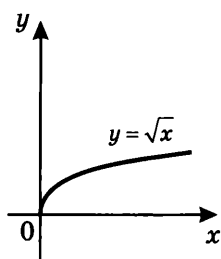
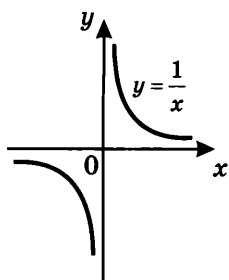
Характеристики элементарных функций

Функция	ООФ*	ОЗФ**	Период	Четность	Нули
$y = ax + b$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	—	Неч. при $b = 0$	$x = -\frac{b}{2a}$
$y = x^2$	$(-\infty; +\infty)$	$[0; +\infty)$	—	Чет.	$x = 0$
$y = x^3$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	—	Неч.	$x = 0$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$	—	Неч.	Нет
$y = \sqrt{x}$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	—	—	$x = 0$
$y = \sqrt[3]{x}$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	—	Неч.	$x = 0$
$y = x^a, a > 0$	$[0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	—	—	$x = 0$
$y = x^a, a < 0$	$(0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	—	—	Нет
$y = a^x$	$(-\infty; +\infty)$	$(0; +\infty)$	—	—	Нет
$y = \log_a x$	$(0; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	—	—	$x = 1$
$y = \sin x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	2π	Неч.	$x = \pi n$
$y = \cos x$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; 1]$	2π	Чет.	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$
$y = \operatorname{tg} x$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$	$(-\infty; +\infty)$	π	Неч.	$x = \pi n$
$y = \operatorname{ctg} x$	$x \neq \pi n$	$(-\infty; +\infty)$	π	Чет.	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n$

Примечание. ООФ — область определения функции;
ОЗФ — область (множество) значений функции.

Характеристики элементарных функций





ОТВЕТЫ

§ 1. Графики функций

1. -1. 2. 1,5. 3. 1,5. 4. 1. 5. 2. 6. 1,47. 7. 18. 8. 12. 9. 98. 10. 38.
11. 14. 12. -8. 13. 32. 14. -65. 15. -4.

§ 2. Производная и первообразная

1. 0,5. 2. -4,5. 3. 2. 4. 2. 5. -2. 6. 4. 7. 2. 8. 4. 9. 3. 10. 6. 11. 9.
12. 6. 13. 9. 14. 3. 15. -1. 16. 2. 17. 2. 18. -4. 19. -6. 20. 2. 21. 3.
22. 2. 23. 2. 24. 4. 25. 2. 26. 4. 27. 4. 28. 7. 29. 6. 30. 9. 31. 5.
32. -1. 33. 4. 34. 4. 35. 5. 36. 0,4. 37. -1,25. 38. -0,25. 39. -0,5.
40. -0,25. 41. 0,75. 42. 0,75. 43. -1,25. 44. 6. 45. 12. 46. 12. 47. 4.
48. 5. 49. 7. 50. 4.

§ 3. Исследование функций

1. -1. 2. -1. 3. -1. 4. -1. 5. 11. 6. 13. 7. -13. 8. -25. 9. -8. 10. -9.
11. 11. 12. 9. 13. 7. 14. 7. 15. -15. 16. 5. 17. -5. 18. -1. 19. 2.
20. 12. 21. -8. 22. -12. 23. 20. 24. 16. 25. 21. 26. 16. 27. -5. 28. -2.
29. -18. 30. -40. 31. -6. 32. -7. 33. 8. 34. 12. 35. 10. 36. 11. 37. 8.
38. 9. 39. 7. 40. 4. 41. 12. 42. 17. 43. 4. 44. 4. 45. -4,5. 46. -9.
47. -24,5. 48. -24,5. 49. 8. 50. 4. 51. 8. 52. 5. 53. 11. 54. 19. 55. 20.
56. 18. 57. 28. 58. -1. 59. -24. 60. -2. 61. -8. 62. 14. 63. 32. 64. 11.
65. 34. 66. 4. 67. 8. 68. 5. 69. 9. 70. 4. 71. 10. 72. 12. 73. 3. 74. 4.
75. 5. 76. 5. 77. 1. 78. -12. 79. -18. 80. -20. 81. -4. 82. 0. 83. 0.
84. 0. 85. 0. 86. 11. 87. 14. 88. 4. 89. 1. 90. 2. 91. 2. 92. 2. 93. 2.
94. 6. 95. 13. 96. 5. 97. 6. 98. 6. 99. 11. 100. 1. 101. 5. 102. 5.
103. 7. 104. 9. 105. 11. 106. -3. 107. -4. 108. -5. 109. -6. 110. -9.
111. -10. 112. -11. 113. -12. 114. -1,75. 115. -4,8. 116. -12,9.
117. -8,5. 118. -2,5. 119. -7,75. 120. -18,8. 121. -10,9.

ЛИТЕРАТУРА

Балаян Э. Н. Математика. Задачи типа В1, В2, В3, В4, В5, В6, В7, В9, В11, В12, В14, В15. — Ростов н/Д: Феникс, 2014.

Балаян Э. Н. Математика. Подготовка к ЕГЭ и дополнительным экзаменам. — Ростов н/Д: Феникс, 2024.

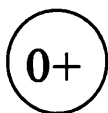
Балаян Э. Н. Математика. Разбор заданий для подготовки к ЕГЭ с анализом типичных ошибок. 10–11 классы. Профильный уровень. — 2-е изд. — Ростов н/Д: Феникс, 2024.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|------------|
| Предисловие | 3 |
| § 1. Графики функций | 4 |
| 1.1. Комбинированные задачи..... | 4 |
| 1.2. Гиперболы..... | 8 |
| 1.3. Параболы | 10 |
| 1.4. Линейные функции | 15 |
| 1.5. Показательные и логарифмические функции..... | 16 |
| 1.6. Тригонометрические функции | 20 |
| 1.7. Кусочно-линейные функции | 22 |
| <i>Задачи для самостоятельного решения</i> | 24 |
| § 2. Производная и первообразная | 31 |
| 2.1. Касательная. Геометрический и физический смысл
производной..... | 31 |
| 2.2. Применение производной к исследованию функций | 39 |
| 2.3. Первообразная | 45 |
| <i>Задачи для самостоятельного решения</i> | 47 |
| § 3. Исследование функций | 64 |
| 3.1. Степенные функции | 64 |
| 3.2. Иррациональные функции | 69 |
| 3.3. Рациональные функции | 72 |
| 3.4. Показательные функции | 75 |
| 3.5. Логарифмические функции | 80 |
| 3.6. Тригонометрические функции | 85 |
| <i>Задачи для самостоятельного решения</i> | 92 |
| Краткие справочные материалы по алгебре
и началам анализа | 100 |
| 1. Уравнение I степени (линейное) | 100 |
| 2. Система линейных уравнений | 100 |
| 3. Уравнение II степени (квадратное) | 101 |
| 4. Теорема Виета | 102 |

| | |
|--|-----|
| 5. Разложение квадратного трехчлена на множители | 102 |
| 6. Биквадратное уравнение | 102 |
| 7. Возвратное уравнение IV степени | 103 |
| 8. Свойства степеней | 103 |
| 9. Формулы сокращенного умножения | 104 |
| 10. Свойства арифметических корней | 104 |
| 11. Соотношение между тригонометрическими функциями
одного и того же аргумента | 105 |
| 12. Формулы сложения | 105 |
| 13. Формулы двойных и тройных аргументов | 105 |
| 14. Формулы половинного аргумента (для функций \sin и
\cos — формулы понижения степени) | 106 |
| 15. Универсальные тригонометрические подстановки | 106 |
| 16. Формулы преобразования суммы в произведение | 106 |
| 17. Формулы преобразования произведения в сумму | 107 |
| 18. Радианная и градусная меры углов | 107 |
| 19. Знаки тригонометрических функций | 108 |
| 20. Формулы приведения | 108 |
| 21. Значения тригонометрических функций для некоторых
углов | 109 |
| 22. Периоды тригонометрических функций | 109 |
| 23. Обратные тригонометрические функции | 109 |
| 24. Значения обратных тригонометрических функций
некоторых углов | 110 |
| 25. Простейшие тригонометрические уравнения | 111 |
| 26. Средние величины | 111 |
| 27. Некоторые важные неравенства | 112 |
| 28. Прогрессии | 112 |
| 29. Логарифмы и их свойства | 113 |
| 30. Неравенства | 113 |
| 31. Таблица производных и первообразных элементарных
и сложных функций | 117 |
| 32. Правила дифференцирования | 118 |

| | |
|---|-----|
| 33. Уравнение касательной..... | 118 |
| 34. Правила нахождения первообразных..... | 118 |
| 35. Формула Ньютона – Лейбница..... | 119 |
| 36. Площадь криволинейной трапеции | 119 |
| 37. Площадь фигуры, заключенной на отрезке..... | 119 |
| 38. Объем тела вращения | 119 |
| 39. Формула Лагранжа | 120 |
| Ответы | 122 |
| Литература | 123 |



Учебное издание

Балаян Эдуард Николаевич

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

**ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ. ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ.
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ**

Разбор заданий с кратким ответом

10–11 классы

Профильный уровень

Ответственный редактор *С. А. Осташов*

Формат 70 × 100/16. Бумага газетная.

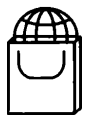
Тираж 3 000 экз. Заказ №0381.

Издатель и Изготовитель: ООО «Феникс»
Юр. и факт. адрес: 344011, Россия, Ростовская обл.,
г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150.
Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-59.


Изготовлено в России. Дата изготовления: 07.2024.
Срок годности не ограничен.


Отпечатано в ООО «БПК-Групп»
Юр. адрес: 142400, Россия, Московская обл., Ногинский район,
г. Ногинск, ул. Индустриальная, д. 40Б, каб. 106.
Факт. адрес: 142400, Россия, Московская обл., Ногинский район,
г. Ногинск, ул. Индустриальная, д. 40Б.

ОПЫТ  **32** года
создаём книги

ЭКСПЕРТИЗА  **200 000 000**
экземпляров наших книг
читают по всему миру

В ТРЕНДЕ  **свыше 700**
«Феникс» всегда на волне
ваших ожиданий книжных новинок
мы выпускаем ежегодно

ЗНАНИЯ  Учебная литература
Книги для профессионалов
Прикладная литература
Психология и саморазвитие
Литература для родителей и детей
Книги для дома, досуга, хобби

ВПЕЧАТЛЕНИЯ  Классическая литература
Интеллектуальная проза
Книги для подростков
Детская художественная литература

КАЧЕСТВО  Нам важна ваша
безопасность!
все книги издательства
соответствуют ГОСТам