

ЭДУАРД БАЛАЯН | автор более 200 книг

Математика Подготовка к ЕГЭ

Уравнения и неравенства

РАЗБОР ЗАДАНИЙ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

$$64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0.$$

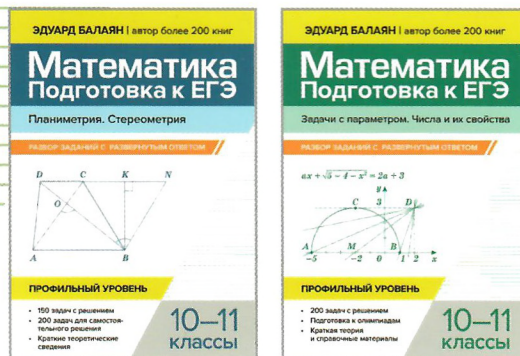
$$\frac{\log_3(9^{2x-1} - 6 \cdot 3^{2x-1} + 8)}{x} \leq 2.$$

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

- 200 примеров с решениями
- 300 примеров для самостоятельного решения
- Краткая теория и справочные материалы

10–11
классы

Предлагаемая мини-серия состоит из пособий, содержащих разбор заданий с кратким и развернутым ответами, предназначенных для подготовки к ЕГЭ. Каждое из пособий представляет тему или комплект тем, соответствующих профильному уровню. Каждая тема сопровождается краткой теорией, справочными материалами, образцами разнообразных примеров с подробными решениями и обоснованиями. В каждой теме приводятся примеры для самостоятельного решения, а в конце пособия — ответы для контроля правильности решения. Пособия предназначены старшеклассникам для эффективной подготовки и успешной сдачи экзамена, учителям математики и репетиторам.



ISBN 978-5-222-42892-4



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФЕНИКС
ХОРОШИЕ КНИГИ



ЭДУАРД БАЛАЯН | Математика Подготовка к ЕГЭ

Уравнения и неравенства

10–11 классы

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ



Э. Н. Балаян

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Разбор заданий с развернутым ответом

10–11 классы

Профильный уровень

- ◆ 200 примеров с решениями
- ◆ 300 примеров для самостоятельного решения
- ◆ Краткая теория и справочные материалы

Ростов-на-Дону

 **Феникс**
2025

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я72

КТК 444

Б20

Балаян Э. Н.

Б20 Математика. Подготовка к ЕГЭ. Уравнения и неравенства : разбор заданий с развернутым ответом : 10–11 классы : профильный уровень / Э. Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2025. — 247 с. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-42892-4

В предлагаемом пособии представлен материал профильного уровня для подготовки к ЕГЭ: решение уравнений и неравенств. В него входят все основные методы решения уравнений, изучаемых в основной и старшей школе: целых рациональных, дробно-рациональных, иррациональных, логарифмических и показательных.

В последние годы стало активно внедряться в ЕГЭ по математике решение неравенств методом рационализации.

На многочисленных примерах с подробными решениями и обоснованиями показаны различные методы и идеи решения уравнений и неравенств.

В начале каждого параграфа приводятся основные справочные материалы, а в конце — большое количество примеров для самостоятельного решения с ответами.

Пособие предназначено для выпускников средней школы, слушателей подготовительных отделений вузов, методистов и репетиторов, а также может быть полезно учителям математики в качестве дополнительного материала к школьному учебнику для работы в классах с углубленным изучением математики и при проведении кружковых и факультативных занятий.

УДК 373.167.1:51

ISBN 978-5-222-42892-4

ББК 22.1я72

© Балаян Э. Н., 2024

© Оформление ООО «Феникс», 2024

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена решению задач профильного уровня. Она включает в себя все типы уравнений и неравенств, предлагаемых на ЕГЭ.

Приступать к решению задач целесообразно при условии, что ученик владеет навыками решения задач базового уровня школьного курса математики.

Книга состоит из трех глав, разбитых на 12 параграфов, а параграфы — на пункты, что дает возможность быстро найти нужную информацию.

В главе 1 рассматриваются различные типы уравнений: тригонометрические, рациональные, иррациональные, логарифмические и показательные.

Каждый параграф снабжен краткими теоретическими сведениями и справочными материалами.

В главе 2 приводятся решения неравенств методом интервалов, т. е. метод решения рациональных неравенств. На многочисленных примерах с решениями рассмотрены основные типы неравенств.

В главе 3 рассматривается метод рационализации, или, как его еще иногда называют, метод замены множителей.

Метод рационализации позволяет значительно упростить решение многих неравенств с модулем, иррациональные неравенства, а также показательные и логарифмические неравенства как с постоянным, так и с переменным основанием.

Для каждого типа неравенств приведены алгоритмы и методические указания, а также подробные решения и обоснования разных типов примеров и разного уровня сложности.

Метод рационализации с успехом применяется в последние годы на ЕГЭ по математике профильного уровня.

Ко всем задачам в конце книги даны ответы, что дает возможность проверить правильность решения.

В качестве дополнительного материала и для основательной подготовки к ЕГЭ рекомендуется использовать вышедшие в издательстве «Феникс» книги автора: «Репетитор по математике для старшеклассников и абитуриентов» (2021), «Репетитор по алгебре и началам анализа для 10–11 классов» (2023), «Математика. Разбор заданий для подготовки к ЕГЭ с анализом типичных ошибок» (2024).

УРАВНЕНИЯ

§ 1. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Здесь предлагается решить различные типы уравнений. При этом решение состоит из двух частей:

- 1) собственно решить уравнение;
- 2) найти корни, принадлежащие отрезку.

Заметим, что корни на отрезке при решении тригонометрических уравнений можно находить по-разному: с помощью двойных неравенств, единичного круга, графически.

Выбор способа остается за учеником и вполне допустим на экзамене.

Краткая теория и справочные материалы

Тригонометрические уравнения — это уравнения, содержащие неизвестную величину под знаком тригонометрической функции.

При помощи соответствующих преобразований всякое тригонометрическое уравнение сводится к одному или нескольким простейшим уравнениям.

Главный принцип — не терять корней. Одним из возможных методов отбора корней, отсеивания посторонних является проверка. Заметим, что в отличие от алгебраических уравнений трудности, возникающие с отбором корней, проверкой, резко возрастают, так как проверять приходится целые серии, состоящие из бесконечного числа членов.

Типы тригонометрических уравнений и методы их решения

1. Простейшие тригонометрические уравнения.
2. Уравнения, решаемые разложением на множители.

3. Уравнения, сводящиеся к квадратным.
4. Однородные и сводящиеся к ним уравнения.
5. Уравнения, решаемые введением вспомогательного аргумента.
6. Уравнения, решаемые преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение.
7. Уравнения, решаемые преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму.
8. Уравнения, решаемые с применением формул понижения степени.
9. Уравнения, решаемые с применением формул двойного и тройного аргументов.
10. Уравнения, решаемые с помощью замены переменной.
11. Уравнения вида $f(x) = \sqrt{\varphi(x)}$.
12. Уравнения, решаемые с использованием ограниченности функций $\sin x$ и $\cos x$.

Замечание 1. В формулах для решения уравнений запись решений имеет простую и однозначную форму. Однако в более сложных примерах форма записи множества решений не однозначна, но идентичность их можно доказать при помощи тождественных преобразований. Объясняется это тем, что различные методы решения приводят к различным формам записи ответа.

Замечание 2. Довольно часто множество решений уравнения записывается при помощи нескольких формул. Иногда их объединяют (хотя и не обязательно), и получается более простая форма записи ответа. И в этом случае различная форма записи ответа часто объясняется различными методами решения данного уравнения.

Замечание 3. Часто бывает, что одно и то же множество решений дается несколько раз. В таких случаях эти повторы можно исключить. Например, если при решении уравнений получены два множества решений: $\frac{\pi}{2} + \pi n$ и $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, то, как видим, решения первой серии содержатся во второй, и тогда окончательная форма записи ответа будет иметь вид $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

Замечание 4. Возможен случай, когда найденные серии решений лишь частично пересекаются, тогда общая часть в записи окончательного ответа приводится лишь один раз без повторений.

Например, если при решении уравнения получены две серии решений: $\frac{\pi n}{3}$ и $\frac{\pi k}{2}$ ($n, k \in Z$), то ни одно из этих решений не является частью другого, но если положить $n = 3m$, $k = 2m$ ($m \in Z$), то получим в каждом случае πm . Значит, эту серию решений надо исключить в одной из серий, например, во II серии все четные значения k надо исключить и оставить лишь нечетные k вида $k = 2p + 1$ ($p \in Z$).

Тогда обе серии примут вид $\frac{\pi n}{3}$, $\frac{\pi(2p+1)}{2}$, где $n, p \in Z$.

Справочные материалы

1) $\sin x = a$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in Z$, $|a| \leq 1$;

2) $\cos x = a$, $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in Z$, $|a| \leq 1$;

3) $\operatorname{tg} x = a$, $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$, $a \in R$;

4) $\operatorname{ctg} x = a$, $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$, $a \in R$.

Частные случаи

($a = 0$, $a = 1$, $a = -1$)

$\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$.

$\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

$\sin x = -1$, $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

$\cos x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

$\cos x = 1$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

$\cos x = -1$, $x = \pi + 2\pi n$, $n \in Z$.

$\operatorname{tg} x = 0$, $x = \pi n$, $n \in Z$.

$\operatorname{ctg} x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Основные формулы

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$;

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$; $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$; $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$;

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$;

$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$;

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$;

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$;

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$; $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$;

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$;

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha;$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi),$$

$$\text{где } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta));$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x; \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x; \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

Примеры с решениями

Пример 1. а) Решите уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$.

б) Укажите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$(\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 = \frac{7}{16}, \text{ или } \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^3 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^3 = \frac{7}{16}, \text{ или}$$

$$1 - 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x - \cos^3 2x + 1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x = \frac{7}{2}, \text{ или } 2 \cos^2 2x = \frac{1}{2}, \quad 1 + \cos 4x = \frac{1}{2}, \quad \cos 4x = -\frac{1}{2},$$

$$\text{откуда } 4x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) Найдем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.

$$1) \quad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leq 0, \quad -3 \leq 1 + 3n \leq 0, \quad -\frac{4}{3} \leq n \leq -\frac{1}{3},$$

$$\text{откуда } n = -1, \text{ тогда } x = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3}.$$

$$2) \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leq 0, \quad -3 \leq -1 + 3n \leq 0, \quad -\frac{2}{3} \leq n \leq \frac{1}{3},$$

$$\text{откуда } n = 0, \text{ тогда } x = -\frac{\pi}{6}.$$

Таким образом, данное уравнение на заданном отрезке имеет всего 2 корня.

$$\text{Ответ: а) } \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } -\frac{\pi}{3}; \quad -\frac{\pi}{6}.$$

Пример 2. а) Решите уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

б) Укажите его корни, принадлежащие отрезку $[-\pi, \pi]$.

Решение.

а) Заметим, что

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = \sin\left(\pi - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) = \sin 3 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Известно, что $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$, тогда

$$\sin 3 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - 4 \sin^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

Следовательно, исходное уравнение примет вид

$$3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - 4 \sin^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - 4 \sin^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0, \text{ или}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \left(1 - 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) = 0, \text{ откуда:}$$

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0, \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi n, \text{ откуда } x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 1 - 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 0, \text{ или } 1 - 2 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = 0,$$

$$1 - 2(1 - \sin x) = 0; 2 \sin x = 1, \sin x = \frac{1}{2}, \text{ откуда}$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) Из найденных серий решений найдем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi, \pi]$.

$$1) x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

При $n = 0$ $x = \frac{\pi}{2}$ — единственный корень, принадлежащий отрезку $[-\pi, \pi]$.

$$2) x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Эта серия содержит два корня.

$$\text{При } n = 0 \quad x = \frac{\pi}{6}; \quad \text{при } n = 1 \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \text{б) } \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{6}; \quad \frac{5\pi}{6}.$$

Пример 3. Решите уравнение

$$8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} \text{ на отрезке } \left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right].$$

Решение.

$$\cos x \neq 0, \sin x \neq 0, \text{ т. е. } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Запишем уравнение в виде

$$8 \sin^2 x \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x, \text{ или } 4 \sin 2x \sin x = \sqrt{3} \sin x + \cos x.$$

Применяя формулу

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta), \text{ получим}$$

$$2(\cos x - \cos 3x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x.$$

Разделим обе части полученного уравнения на 2:

$$\cos x - \cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x, \text{ или } \cos 3x - \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) = 0.$$

$$\text{Но } \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}, \text{ тогда имеем}$$

$$\cos 3x - \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = 0, \text{ или } -2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 0, \text{ откуда:}$$

$$1) \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = 0, \quad 2x + \frac{\pi}{6} = \pi n, \quad x_1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 0, \quad x - \frac{\pi}{6} = \pi n, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Из найденных серий решений найдем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right]$.

$$1) -\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \leq -\frac{\pi}{2},$$

$$-30 \leq -1 + 6n \leq -6,$$

$$-29 \leq 6n \leq -5,$$

$$-4\frac{5}{6} \leq n \leq -\frac{5}{6}, \text{ откуда } n = -4; -3; -2; -1.$$

$$\text{При } n = -4 \quad x = -\frac{\pi}{12} - 2\pi = -\frac{25\pi}{12};$$

$$\text{при } n = -3 \quad x = -\frac{\pi}{12} - \frac{3\pi}{2} = -\frac{19\pi}{12};$$

$$\text{при } n = -2 \quad x = -\frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{13\pi}{12};$$

$$\text{при } n = -1 \quad x = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{12}.$$

$$2) -\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \pi n \leq -\frac{\pi}{2},$$

$$-15 \leq 1 + 6n \leq -3, \quad -16 \leq 6n \leq -4,$$

$$-2\frac{2}{3} \leq n \leq -\frac{2}{3}, \text{ откуда } n = -2; -1.$$

$$\text{При } n = -2 \quad x = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6};$$

$$\text{при } n = -1 \quad x = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; -\frac{25\pi}{12}; -\frac{19\pi}{12};$$

$$-\frac{13\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12}; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}.$$

Пример 4. Найдите все корни уравнения

$$\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin^2 \frac{25\pi}{6},$$

удовлетворяющие неравенству $\lg(x - \sqrt{2x + 24}) > 0$.

Решение.

Известно, что $2 \sin^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha$, тогда имеем

$$\frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = \sin^2\left(4\pi + \frac{\pi}{6}\right),$$

$$\text{или } \frac{1}{4}(1 - \cos 2x)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)^2 = 4\sin^2 \frac{\pi}{6},$$

$$(1 - 2\cos x)^2 + (1 + \sin 2x)^2 = 4 \cdot \frac{1}{4},$$

$$1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x + 1 + 2\sin 2x + \sin^2 2x = 1,$$

$$2 - 2\cos 2x + 2\sin 2x = 0, \text{ или } \sin 2x - \cos 2x + 1 = 0,$$

$$2\sin x \cos x + (1 - \cos 2x) = 0, \quad 2\sin x \cos x + 2\sin^2 x = 0,$$

$$\sin x (\cos x + \sin x) = 0, \text{ откуда } \sin x = 0, \text{ или } \cos x + \sin x = 0.$$

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$\cos x + \sin x = 0$, то $1 + \operatorname{tg} x = 0$ ($\cos x = 0$),

$$\operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Теперь решим логарифмическое неравенство $\lg(x - \sqrt{2x + 24}) > 0$.

Это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x - \sqrt{2x + 24} > 1, \\ x - \sqrt{2x + 24} > 0, \end{cases}$$

откуда $x - \sqrt{2x + 24} > 1$, или $\sqrt{2x + 24} < x - 1$,

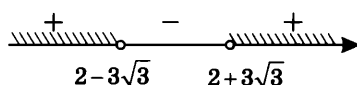
что равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2x + 24 \geq 0, \\ x - 1 > 0, \\ 2x + 24 < (x - 1)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \geq -12, \\ x > 1, \\ x^2 - 4x - 23 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x^2 - 4x - 23 > 0. \end{cases}$$

Решим неравенство $x^2 - 4x + 23 > 0$ методом интервалов:

$$\frac{D}{4} = 4 + 23 = 27 > 0, \quad x_{1,2} = 2 \pm 3\sqrt{3}.$$

$$x < 2 - 3\sqrt{3}, \quad x > 2 + 3\sqrt{3}.$$



Так как $x > 1$, то решением системы неравенств является $x > 2 + 3\sqrt{3}$. Этому условию удовлетворяют корни

$$x = \pi n, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; n \geq 3, n \in \mathbb{N}.$$

Ответ: $\pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, n \geq 3, n \in \mathbb{N}.$

Пример 5. Решите уравнение

$$(\cos x + \sqrt{3} \sin x)^2 = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right)$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$4\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)^2 = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right), \text{ или}$$

$$4\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x + \cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)^2 = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right),$$

$$4\sin^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right). \quad (1)$$

Заметим, что левая часть уравнения (1)

$$4\sin^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right) \leq 4, \text{ а правая — } 5 + \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) \geq 4.$$

Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 4\sin^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 4, & \sin^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 1, & \cos^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0, \\ 5 + \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = 4; & \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1; & \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1; \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0, & \frac{\pi}{6} + x = \frac{\pi}{2} + \pi n, & x = \frac{\pi}{3} + \pi n, \\ \cos\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1; & \frac{\pi}{6} + 2x = \pi + 2\pi k; & x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, \end{cases}$$

откуда $\frac{\pi}{3} + \pi n = \frac{5\pi}{12} + \pi k$, $4\pi + 12\pi n = 5\pi + 12\pi k$, $\pi + 12\pi k = 12\pi n$,

или $12k = 12n - 1$, откуда $k = \frac{12n-1}{12}$, тогда $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi(12n-1)}{12}$,

$x = \frac{5\pi + 12\pi n - \pi}{12}$, или $x = \frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Теперь найдем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, для чего

решим двойное неравенство

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + \pi n \leq \pi,$$

$$-3 \leq 2 + 6n \leq 6,$$

$$-5 \leq 6n \leq 4,$$

$$-\frac{5}{6} \leq n \leq \frac{2}{3}, \text{ откуда } n = 0, \text{ тогда } x = \frac{\pi}{3} \text{ — единственный корень.}$$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{3}$.

Пример 6. а) Решите уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\sin x} - 1 = 0$.

б) Найдите все корни, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

ОДЗ: $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$.

а) Так как $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{ctg}^2 x$ и $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$, то $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$.

В этом случае исходное уравнение примет вид

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} - 2 = 0 \text{ — квадратное уравнение относительно } \frac{1}{\sin x}.$$

Пусть $\frac{1}{\sin x} = a$, тогда получим $a^2 - a - 2 = 0$, откуда $a_1 = 2$; $a_2 = -1$.

Если $a = 2$, то $\frac{1}{\sin x} = 2$, $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$.

Если $a = -1$, то $\frac{1}{\sin x} = -1$, $\sin x = -1$.

В этом случае получим $\cos x = 0$, что невозможно в силу ОДЗ.

б) 1. $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$-3\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq -\frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{19}{6} \leq 2n \leq -\frac{5}{3}, \quad -\frac{19}{12} \leq n \leq -\frac{5}{6},$$

откуда $n = -1$, тогда $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$.

2. $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$-3\pi \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq -\frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{23}{6} \leq 2n \leq -\frac{7}{3},$$

$$-\frac{23}{12} \leq n \leq -\frac{7}{6} \quad \text{— нет целых } n.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$.

Замечание. Ответ можно записать иначе:

а) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$.

Пример 7. а) Решите уравнение

$$\log_2 (\cos x + \sin 2x + 8) = 3.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Заметим, что $\cos x + \sin 2x + 8 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, так как $|\cos x| \leq 1$, $|\sin 2x| \leq 1$.

По определению логарифма имеем $\cos x + \sin 2x + 8 = 8$, или $\cos x + \sin 2x = 0$.

Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то $\cos x + 2 \sin x \cos x = 0$, или $\cos x \cdot (1 + 2 \sin x) = 0$, откуда $\cos x = 0$, или $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$1) \frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq 3\pi,$$

$$2) \frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 3\pi,$$

$$1 \leq n \leq 2,5,$$

$$\frac{5}{3} \leq 2n \leq \frac{19}{6},$$

$$n = 1, x_1 = \frac{3\pi}{2},$$

$$\frac{5}{6} \leq n \leq \frac{19}{12},$$

$$n = 2, x_2 = \frac{5\pi}{2}.$$

$$n = 1, x = \frac{11\pi}{6}.$$

$$3) \frac{3\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq 3\pi,$$

$$\frac{1}{3} \leq 2n \leq \frac{11}{6}, \quad \frac{1}{6} \leq n \leq \frac{11}{12} \text{ — нет целых } n.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$б) \frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}.$$

Пример 8. а) Решите уравнение

$$\sin 2x - 2\sqrt{3} \sin^2 x + 4 \cos x - 4\sqrt{3} \sin x = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие промежутку $[-\pi; \pi]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$2 \sin x \cos x - 2\sqrt{3} \sin^2 x + 4 \cos x - 4\sqrt{3} \sin x = 0, \text{ или}$$

$$\sin x \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x + 2 \cos x - 2\sqrt{3} \sin x = 0.$$

Применим способ группировки:

$$\cos x (\sin x + 2) - \sqrt{3} \sin x (\sin x + 2) = 0, \text{ или}$$

$$(\sin x + 2)(\cos x - \sqrt{3} \sin x) = 0, \text{ откуда}$$

$$\sin x + 2 = 0 \text{ — нет корней, или}$$

$$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0 \text{ — однородное уравнение I степени.}$$

Разделив обе части полученного уравнения на $\cos x \neq 0$, имеем

$$1 - \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0, \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } -\pi \leq \frac{\pi}{6} + \pi n \leq \pi, \quad -\frac{7}{6} \leq n \leq \frac{5}{6}, \text{ откуда } n = -1; n = 0.$$

$$\text{Если } n = -1, \text{ то } x_1 = -\frac{5\pi}{6}; \text{ если } n = 0, \text{ то } x_2 = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } -\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{6}.$$

Пример 9. а) Решите уравнение

$$\sin 2x + \sqrt{2} \cos 3x = \sin 4x.$$

$$\text{б) Найдите корни, принадлежащие промежутку } \left[-\pi; -\frac{\pi}{2} \right].$$

Решение.

$$\text{а) } \sqrt{2} \cos 3x = \sin 4x - \sin 2x. \tag{1}$$

К правой части (1) применим формулу

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$\text{Получим } \sqrt{2} \cos 3x = 2 \sin x \cos 3x, \text{ или } \cos 3x \cdot (\sqrt{2} - 2 \sin x) = 0,$$

$$\text{откуда } \cos 3x = 0, 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}, \text{ или}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) 1) } x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3} \leq -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{7}{6} \leq \frac{n}{3} \leq -\frac{2}{3}, \quad -\frac{7}{2} \leq n \leq -2,$$

$$n = -3, x_1 = -\frac{5\pi}{6};$$

$$n = -2, x_2 = -\frac{\pi}{2}.$$

$$2) x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{5}{4} \leq 2n \leq -\frac{3}{4},$$

$$-\frac{5}{8} \leq n \leq -\frac{3}{8} \text{ — нет целых } n.$$

$$3) x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$-\pi \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \leq -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{7}{4} \leq 2n \leq -\frac{5}{4},$$

$$-\frac{7}{8} \leq n \leq -\frac{5}{8} \text{ — нет целых } n.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z; \text{ б) } -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}.$$

Пример 10. а) Решите уравнение

$$|\sin x + \cos x| = \sqrt{2} \sin 2x.$$

б) Найдите все корни из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Решение.

а) ОДЗ: $\sin 2x \geq 0$.

Возведем обе части уравнения в квадрат, учитывая, что $|a|^2 = a^2$.

$$(\sin x + \cos x)^2 = 2 \sin^2 2x, \text{ или}$$

$$1 + \sin 2x = 2 \sin^2 2x, \text{ или } 2 \sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0.$$

Заметим, что $2 - 1 - 1 = 0$, тогда $\sin 2x = 1$,

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z, \text{ или } \sin 2x = -\frac{1}{2} \text{ — не удовлетворяет}$$

ОДЗ, так как $\sin 2x \geq 0$.

$$\text{б) } x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z.$$

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} + \pi n < 2\pi, \quad -\frac{3}{4} < n < \frac{7}{4}, \text{ откуда } n = 0; n = 1.$$

$$\text{Если } n = 0, \text{ то } x_1 = \frac{\pi}{4}; \text{ если } n = 1, \text{ то } x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z; \text{ б) } \frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}.$$

Пример 11. а) Решите уравнение $4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 4$.

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде $4^{\sin^2 x} + 4^{1-\sin^2 x} = 4$, или $4^{\sin^2 x} + \frac{4}{4^{\sin^2 x}} = 4$.

Пусть $4^{\sin^2 x} = t$, тогда получим уравнение

$$t + \frac{1}{t} = 4, \text{ или } t^2 - 4t + 4 = 0, (t - 2)^2 = 0, t - 2 = 0, \text{ откуда } t = 2.$$

Учитывая, что $t = 4^{\sin^2 x}$, получим $4^{\sin^2 x} = 2$, или $2^{2\sin^2 x} = 2$,
 $2 \sin^2 x = 1$, или $1 - 2 \sin^2 x = 0$.

Так как $1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x$, то $\cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$,
 $n \in \mathbb{Z}$.

б) Корни на отрезке найдем с помощью двойного неравенства:

$\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \leq 2\pi$, или $\frac{3}{2} - \frac{1}{4} \leq \frac{n}{2} \leq 2 - \frac{1}{4}$, или $\frac{5}{2} \leq n \leq \frac{7}{2}$, откуда $n = 3$,
 тогда $x = \frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}$.

Пример 12. а) Решите уравнение

$$4 \cos^4 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = 7 \cos 4x + \sin 2x + 10.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Известно, что $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$,

$$\begin{aligned} \text{тогда получим } 4 \cos^4 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) &= \left(2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right)^2 \left(1 + \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \right)^2 = \\ &= (1 + \sin 2x)^2. \end{aligned}$$

Кроме того, $\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x$, и данное уравнение примет вид
 $(1 + \sin 2x)^2 = 7(1 - 2 \sin^2 2x) + \sin 2x + 10$, или
 $1 + 2 \sin 2x + \sin^2 2x = 7 - 14 \sin^2 2x + \sin 2x + 10$, или

$15 \sin^2 2x + \sin 2x - 16 = 0$ — квадратное уравнение относительно $\sin 2x$.

Пусть $\sin 2x = t$, где $|t| \leq 1$, тогда получим $15t^2 + t - 16 = 0$.

Заметим, что $15 + 1 - 16 = 0$, значит, $t_1 = 1$, тогда $t_2 = -\frac{16}{15}$ (не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$).

Значит, $t = 1$, тогда $\sin 2x = 1$, $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{б) } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right].$$

$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + \pi n \leq 3\pi$, или $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \leq n \leq 3 - \frac{1}{4}$, или $-\frac{3}{4} \leq n \leq 2\frac{3}{4}$, откуда $n = 0, 1, 2$.

Если $n = 0$, то $x_1 = \frac{\pi}{4}$; если $n = 1$, то $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$; если $n = 2$, то $x_3 = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$.

Пример 13. а) Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Разделим обе части уравнения на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \sin 5x, \text{ или } \cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \sin 5x,$$

$$\text{или } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 5x, \quad \sin 5x - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Применив формулу $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, получим

$$2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = 0, \text{ откуда:}$$

$$1) \sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 0, \quad 2x - \frac{\pi}{8} = \pi n, \quad x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = 0, \quad 3x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \text{откуда } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$б) x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$1) 0 \leq \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{2} \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{1}{18} \leq \frac{n}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{18}, \quad -\frac{1}{9} \leq n \leq \frac{8}{9}, \quad \text{откуда } n = 0,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{18}.$$

$$2) 0 \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{3} \leq \frac{\pi}{2},$$

$$-\frac{1}{8} \leq \frac{n}{3} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{8}, \quad -\frac{3}{8} \leq n \leq \frac{9}{8}, \quad \text{откуда}$$

$$n = 0, \quad x_2 = \frac{\pi}{8};$$

$$n = 1, \quad x_3 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{24}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{2}, \quad \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad б) \frac{\pi}{18}; \quad \frac{\pi}{8}; \quad \frac{11\pi}{24}.$$

Пример 14. а) Решите уравнение

$$2(\sin 2x + \cos 2x) + \sin 4x + 1 = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Пусть $\sin 2x + \cos 2x = t$, тогда $t^2 = 1 + \sin 4x$, и данное уравнение примет вид $2t + t^2 = 0$, или $t(2 + t) = 0$, откуда $t_1 = 0$, $t_2 = -2$.

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

1) $\sin 2x + \cos 2x = 0$ — однородное уравнение I степени. Разделим обе части уравнения на $\cos 2x \neq 0$. Деление возможно, ибо в противном случае и $\sin 2x = 0$, что невозможно, так как не будет выполняться основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Имеем $\operatorname{tg} 2x + 1 = 0$, $\operatorname{tg} 2x = -1$, $2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, откуда $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$,

$n \in \mathbb{Z}$.

2) $\sin 2x + \cos 2x = -2$ — нет корней, так как

$$|\sin \alpha + \cos \alpha| = \sqrt{2} \left| \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}, \text{ так что } |t| \leq \sqrt{2}.$$

$$\text{б) } \frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \leq 3\pi, \text{ или } \frac{5}{2} + \frac{1}{8} \leq \frac{n}{2} \leq 3 + \frac{1}{8},$$

$$\frac{21}{8} \leq \frac{n}{2} \leq \frac{25}{8}, \quad \frac{21}{4} \leq n \leq \frac{25}{4}, \text{ откуда } n = 6 \text{ — единственное целое, тогда}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + 3\pi = \frac{23\pi}{8}.$$

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{23\pi}{8}$.

Пример 15. а) Решите уравнение

$$\sqrt{3\sin^2 x - 2} = 1 - 3\cos x.$$

б) Найдите все корни на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } 1 - 3\cos x \geq 0, \text{ т.е. } \cos x \leq \frac{1}{3}.$$

а) Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$3\sin^2 x - 2 = 1 - 6\cos x + \cos^2 x, \text{ или}$$

$$3(1 - \cos^2 x) = 3 - 6\cos x + \cos^2 x, \text{ откуда имеем } 2\cos^2 x - \cos x = 0,$$

$$\cos x \cdot (2\cos x - 1) = 0, \cos x = 0 \text{ или } \cos x = \frac{1}{2}$$

(не удовлетворяет ОДЗ, так как $\cos x \leq \frac{1}{3}$).

$$\text{Если } \cos x = 0, \text{ то } x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } -\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq \frac{3\pi}{2}, \quad -1 - \frac{1}{2} \leq n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{2}, \text{ или } -1,5 \leq n \leq 1, \text{ откуда}$$

$$n = -1; 0; 1.$$

Если $n = -1$, то $x_1 = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$;

если $n = 0$, то $x_2 = \frac{\pi}{2}$; если $n = 1$, то $x_3 = \frac{3\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$.

Пример 16. а) Решите уравнение $\frac{\cos 2x + \sin x}{\sqrt{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}} = 0$.

б) Найдите все корни на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение.

а) ОДЗ: $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > 0$, или $2\pi n < x - \frac{\pi}{4} < \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, откуда

$$2\pi n + \frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Получим уравнение $\cos 2x + \sin x = 0$.

Поскольку $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, то получим $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.

Заметим, что $2 - 1 - 1 = 0$, тогда $\sin x = 1$, $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Учитывая ОДЗ, имеем $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ (серия

$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ не подходит).

б) 1) $x \in \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2\pi, \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \leq 2\pi \leq 2 - \frac{1}{2},$$

$$-\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{5}{4}, \quad n = 0, \quad n = 1.$$

Если $n = 0$, то $x_1 = \frac{\pi}{2}$; если $n = 1$, то $x_2 = \frac{5\pi}{2}$.

$$2) -\frac{\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq 2\pi, \text{ или } -\frac{1}{2} - \frac{7}{6} \leq 2n \leq 2 - \frac{7}{6},$$

$$-\frac{5}{3} \leq 2n \leq \frac{5}{6}, \quad -\frac{5}{6} \leq n \leq \frac{5}{12}, \text{ откуда } n = 0, \text{ тогда } x_3 = \frac{7\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } \frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}.$$

Пример 17. а) Решите уравнение

$$\log_2 (\cos x + \sin 2x + 8) = 3.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Заметим, что $\cos x + \sin 2x + 8 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, так как $|\cos x| \leq 1, |\sin 2x| \leq 1$.

По определению логарифма имеем

$$\cos x + \sin 2x + 8 = 8, \text{ или } \cos x + \sin 2x = 0.$$

Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то $\cos x + 2 \sin x \cos x = 0$, или $\cos x (1 + 2 \sin x) = 0$, откуда $\cos x = 0$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б)

$$1) \frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq 3\pi, \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \leq n \leq 3 - \frac{1}{2},$$

$$1 \leq n \leq 2,5, \text{ откуда } n = 1, x_1 = \frac{3\pi}{2}, n = 2, x_2 = \frac{5\pi}{2}.$$

$$2) \frac{3\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 3\pi, \quad \frac{5}{3} \leq 2n \leq \frac{19}{6}, \quad \frac{5}{6} \leq n \leq \frac{19}{12}, \text{ откуда } n = 1,$$

$$x_3 = \frac{11\pi}{6}.$$

$$3) \frac{3\pi}{2} \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \leq 3\pi, \quad \frac{1}{3} \leq 2n \leq \frac{11}{6}, \text{ или } \frac{1}{6} \leq n \leq \frac{11}{12} \text{ — нет целых } n.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } \frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}.$$

Пример 18. а) Решите уравнение

$$\sin 2x + 4\sqrt{3} \cos x - 4 \sin x - 2\sqrt{3} \cos^2 x = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие промежутку $[\pi; 3\pi]$.

Решение.

а) Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то уравнение примет вид

$$2 \sin x \cos x + 4\sqrt{3} \cos x - 4 \sin x - 2\sqrt{3} \cos^2 x = 0.$$

Разделим обе части полученного уравнения на 2:

$$\sin x \cos x + 2\sqrt{3} \cos x - 2 \sin x - \sqrt{3} \cos^2 x = 0.$$

Теперь разложим левую часть уравнения на множители способом группировки:

$$\sin x(\cos x - 2) - \sqrt{3} \cos x(\cos x - 2) = 0 \quad \text{или} \quad (\cos x - 2)(\sin x - \sqrt{3} \cos x) = 0,$$

откуда $\cos x - 2 = 0$, или $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$.

Если $\cos x - 2 = 0$, то $\cos x = 2$ — нет корней, так как $|\cos x| \leq 1$.

Если $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$, то имеем однородное уравнение I степени.

Поскольку $\cos x \neq 0$, так как при этом и $\sin x = 0$, что невозможно, ибо не будет выполняться основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то, разделив обе части полученного уравнения на $\cos x \neq 0$, получим

$$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0, \text{ или } \operatorname{tg} x = \sqrt{3}, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } \pi \leq \frac{\pi}{3} + \pi n \leq 3\pi, \text{ или } 1 \leq \frac{1}{3} + n \leq 3, \text{ или } 1 - \frac{1}{3} \leq n \leq 3 - \frac{1}{3}, \text{ или}$$

$$\frac{2}{3} \leq n \leq 2\frac{2}{3}.$$

Так как $n \in \mathbb{Z}$, то $n = 1, n = 2$.

$$\text{Если } n = 1, \text{ то } x = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3},$$

$$\text{если } n = 2, \text{ то } x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$.

Пример 19. а) Решите уравнение

$$2 \sin 3x \sin x + (3\sqrt{2} - 1) \cos 2x = 3.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие промежутку $[-\pi; \pi]$.

Решение.

а) Известно, что $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$.

Тогда данное уравнение запишется в виде

$$\cos 2x - \cos 4x + (3\sqrt{2} - 1) \cos 2x = 3.$$

Но $\cos 4x = \cos 2 \cdot (2x) = 2 \cos^2 2x - 1$.

Получим уравнение $\cos 2x - 2 \cos^2 2x + 1 + (3\sqrt{2} - 1) \cos 2x = 3$, или

$$2 \cos^2 2x - \cos 2x - (3\sqrt{2} - 1) \cos 2x + 2 = 0, \text{ или}$$

$$2 \cos^2 2x - \cos 2x - 3\sqrt{2} \cos 2x + \cos 2x + 2 = 0, \text{ или}$$

$$2 \cos^2 2x - 3\sqrt{2} \cos 2x + 2 = 0 \text{ — квадратное уравнение относительно } \cos 2x.$$

Пусть $\cos 2x = t$, где $|t| \leq 1$.

$$2t^2 - 3\sqrt{2}t + 2 = 0,$$

$$D = (3\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 18 - 16 = 2 > 0.$$

$$t_{1,2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{2}}{4}, \quad t_1 = \frac{4\sqrt{2}}{4} = \sqrt{2}, \quad t_2 = \frac{2\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Если $t = \sqrt{2}$, то $\cos 2x = \sqrt{2} > 1$ — нет корней.

Если $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$, то $\cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, или $2x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x = \pm \frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) 1) $x = -\frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$-\pi \leq -\frac{\pi}{8} + \pi n \leq \pi$, $-1 \leq -\frac{1}{8} + n \leq 1$, $-1 + \frac{1}{8} \leq n \leq 1\frac{1}{8}$, $-\frac{7}{8} \leq n \leq 1\frac{1}{8}$, откуда $n = 0$, $n = 1$.

Если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{8}$,

если $n = 1$, то $x = -\frac{\pi}{8} + \pi = \frac{7\pi}{8}$.

2) $x = \frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$-\pi \leq \frac{\pi}{8} + \pi n \leq \pi$, $-1 - \frac{1}{8} \leq n \leq 1 - \frac{1}{8}$, $-1\frac{1}{8} \leq n \leq \frac{7}{8}$, откуда $n = -1$, $n = 0$.

Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{8} - \pi = -\frac{7\pi}{8}$;

если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{8}$.

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{8} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\pm \frac{\pi}{8}$; $\pm \frac{7\pi}{8}$.

Пример 20. а) Решите уравнение

$$\frac{2^{\cos x}}{4 \sin x \cos x} = 2 \cdot 4^{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

Решение.

а) Так как $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, то, приведя обе части уравнения к

основанию 2, получим

$$\frac{2^{\cos x}}{2^{2 \sin x \cos x}} = 2 \cdot 2^{-2 \sin x}, \text{ или } 2^{\cos x - 2 \sin x \cos x} = 2^{1 - 2 \sin x}, \text{ откуда}$$

$$\cos x - 2 \sin x \cos x = 1 - 2 \sin x, \text{ или}$$

$$\cos x - 2 \sin x \cos x - 1 + 2 \sin x = 0.$$

Теперь применим способ группировки:

$$\cos x (1 - 2 \sin x) - (1 - 2 \sin x) = 0, \text{ или } (1 - 2 \sin x)(\cos x - 1) = 0,$$

$$\text{откуда } 1 - 2 \sin x = 0, \text{ или } \sin x = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x - 1 = 0,$$

$$\cos x = 1,$$

$$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) Найдем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{9\pi}{2}; 6\pi\right]$.

$$1) \quad x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$\frac{9\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 6\pi, \quad \frac{9}{2} - \frac{1}{6} \leq 2n \leq 6 - \frac{1}{6}, \quad \frac{26}{6} \leq 2n \leq \frac{35}{6},$$

$$\frac{13}{6} \leq n \leq \frac{35}{12}, \quad 2\frac{1}{6} \leq n \leq 2\frac{11}{12}. \quad \text{Нет } n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$\frac{9\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 6\pi, \quad \frac{9}{2} - \frac{5}{6} \leq 2n \leq 6 - \frac{5}{6}, \quad \frac{22}{6} \leq 2n \leq \frac{31}{6},$$

$$\frac{11}{6} \leq n \leq \frac{31}{12}, \quad 1\frac{5}{6} \leq n \leq 2\frac{7}{12}, \text{ значит, } n = 2, \text{ тогда } x = \frac{5\pi}{6} + 4\pi = \frac{29\pi}{6}.$$

$$3) x = 2\pi n,$$

$$\frac{9\pi}{2} \leq 2\pi n \leq 6\pi, \quad \frac{9}{4} \leq n \leq 3, \text{ откуда } n = 3, \text{ тогда } x = 6\pi.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } \frac{29\pi}{6}; 6\pi.$$

Пример 21. а) Решите уравнение

$$\sqrt{7 - 8\sin x} = -2\cos x.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение.

а) ОДЗ: $\cos x \leq 0$.

Возведем обе части уравнения в квадрат: $7 - 8\sin x = 4\cos^2 x$.

Так как $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, то получим $7 - 8\sin x = 4(1 - \sin^2 x)$,
или $7 - 8\sin x = 4 - 4\sin^2 x$, или $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$.

Пусть $\sin x = t$, где $|t| \leq 1$.

Получим квадратное уравнение относительно переменной t :

$$4t^2 - 8t + 3 = 0, \quad D = 64 - 48 = 16 = 4^2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm 4}{8}, \text{ откуда } t_1 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Корень $t_1 = \frac{3}{2}$ не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$.

Если $t = \frac{1}{2}$, то, учитывая замену, получим $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку $\cos x \leq 0$, то подходит серия $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

б) Найдем корни уравнения на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 2\pi, \quad -\frac{3}{2} - \frac{5}{6} \leq 2n \leq 2 - \frac{5}{6},$$

$$-\frac{14}{6} \leq 2n \leq \frac{7}{6}, \text{ или } -\frac{7}{6} \leq n \leq \frac{7}{12}, \text{ откуда } n = -1, n = 0.$$

$$\text{Если } n = -1, \text{ то } x = \frac{5\pi}{6} - 2\pi = \frac{5\pi - 12\pi}{6} = -\frac{7\pi}{6};$$

$$\text{если } n = 0, \text{ то } x = \frac{5\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } -\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}.$$

Пример 22. а) Решите уравнение

$$\log_2(2 - \cos x) = 1 + 2 \log_2(-\sin x).$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) ОДЗ: $\sin x < 0$.

Так как $1 = \log_2 2$ и $2 \log_2(-\sin x) = \log_2(-\sin x)^2$, то уравнение примет вид $\log_2(2 - \cos x) = \log_2 2 + \log_2(-\sin x)^2$, или

$$\log_2(2 - \cos x) = \log_2 2 (-\sin x)^2, \text{ откуда } 2 - \cos x = 2(-\sin x)^2, \text{ или } 2 - \cos x = 2 \sin^2 x.$$

$$\text{Но } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \text{ тогда получим } 2 - \cos x = 2 - 2 \cos^2 x, \text{ или } 2 \cos^2 x - \cos x = 0, \text{ или } \cos x(2 \cos x - 1) = 0, \text{ откуда } \cos x = 0, \text{ или } \cos x = \frac{1}{2}.$$

$$1) \text{ Если } \cos x = 0, \text{ то } \sin x = \pm 1. \text{ Но } \sin x < 0, \text{ значит, } \sin x = -1, \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \text{ Если } \cos x = \frac{1}{2}, \text{ то } \sin x = \pm \sqrt{1 - \cos^2 x}, \text{ или, учитывая, что}$$

$$\sin x < 0 \text{ (по ОДЗ), имеем } \sin x = -\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ откуда}$$

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } x \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right].$$

$$1) x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \quad 2) x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$\pi \leq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \frac{5\pi}{2}, \quad \pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{5\pi}{2},$$

$$1 + \frac{1}{2} \leq 2n \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{2}, \quad 1 + \frac{1}{3} \leq 2n \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{3},$$

$$\frac{3}{4} \leq n \leq \frac{3}{2}, \quad \frac{4}{3} \leq 2n \leq \frac{17}{6},$$

$$\text{откуда } n = 1, \quad \frac{2}{3} \leq n \leq \frac{17}{12}, \text{ откуда}$$

$$\text{тогда } x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}, \quad n = 1, x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{5\pi}{3}.$$

$$3) x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$\pi \leq -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{5\pi}{2}, \quad 1 + \frac{2}{3} \leq 2n \leq \frac{5}{2} + \frac{2}{3},$$

$$\frac{5}{6} \leq n \leq \frac{19}{12}, \text{ откуда } n = 1, x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\text{Ответ: а) } -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z; \text{ б) } \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}.$$

Пример 23. а) Решите уравнение

$$2\sqrt{3} \sin^2 \left(\frac{11\pi}{2} + x \right) = \sin 2x.$$

$$\text{б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку } \left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi \right].$$

Решение.

$$\text{а) Так как } \sin \left(\frac{11\pi}{2} + x \right) = \sin \left(5\pi + \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \right) = -\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = -\cos x$$

и $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то получим $2\sqrt{3} (-\cos x)^2 = 2 \sin x \cos x$, или

$$2\sqrt{3} \cos^2 x = 2 \sin x \cos x, \text{ или } \cos x (\sqrt{3} \cos x - \sin x) = 0, \text{ откуда}$$

$$\cos x = 0 \text{ или } \sqrt{3} \cos x - \sin x = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Уравнение $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 0$ является однородным уравнением I степени. Так как $\cos x = 0$, то $\sin x \neq 0$ (ибо не будет выполняться основное тригонометрическое тождество).

Разделив обе части уравнения на $\sin x \neq 0$, получим $\sqrt{3} \operatorname{ctg} x - 1 = 0$, или $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{б) } x \in \left[-\frac{11\pi}{2}; -4\pi \right].$$

$$1) x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{11\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq -4\pi,$$

$$-\frac{11}{2} - \frac{1}{2} \leq n \leq -4 - \frac{1}{2},$$

$$-6 \leq n \leq -4,5.$$

Значит, $n = -6, n = -5$.

Если $n = -6$, то

$$x = \frac{\pi}{2} - 6\pi = -\frac{11\pi}{2};$$

если $n = -5$, то

$$x = \frac{\pi}{2} - 5\pi = -\frac{9\pi}{2}.$$

$$2) x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{11\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3} + \pi n \leq -4\pi,$$

$$-\frac{11}{2} - \frac{1}{3} \leq n \leq -4 - \frac{1}{3},$$

$$-\frac{35}{6} \leq n \leq -4\frac{1}{3},$$

$$-5\frac{5}{6} \leq n \leq -4\frac{1}{3},$$

откуда $n = -5$,

$$\text{тогда } x = \frac{\pi}{3} - 5\pi =$$

$$= -\frac{14\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}; -\frac{11\pi}{2}; -\frac{9\pi}{2}$.

Пример 24. а) Решите уравнение

$$\cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = 1.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[4\pi; 6\pi]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде $\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{1}{2}$.

Но $\frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$, тогда получим $\sin \frac{\pi}{6} \cos 2x - \cos \frac{\pi}{6} \sin 2x = \frac{1}{2}$.

Как видим, левая часть уравнения представляет синус разности, т. е. $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = \frac{1}{2}$ или $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$, откуда получаем две серии решений:

$$1) 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$2x = 2\pi n, x = \pi n, n \in Z.$$

$$2) 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z,$$

$$2x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$$

б) $x \in [4\pi; 6\pi]$.

$$1) x = \pi n, n \in Z, 4\pi \leq \pi n \leq 6\pi, 4 \leq n \leq 6,$$

откуда $n = 4, n = 5, n = 6$.

Если $n = 4$, то $x = 4\pi$;

если $n = 5$, то $x = 5\pi$;

если $n = 6$, то $x = 6\pi$.

$$2) x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z,$$

$$4\pi \leq -\frac{\pi}{3} + \pi n \leq 6\pi, 4 + \frac{1}{3} \leq n \leq 6 + \frac{1}{3},$$

$$4\frac{1}{3} \leq n \leq 6\frac{1}{3}, \text{ откуда } n = 5, n = 6.$$

$$\text{Если } n = 5, \text{ то } x = -\frac{\pi}{3} + 5\pi = \frac{14\pi}{3};$$

$$\text{если } n = 6, \text{ то } x = -\frac{\pi}{3} + 6\pi = \frac{17\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\pi n; -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$; б) $4\pi; 5\pi; 6\pi; \frac{14\pi}{3}; \frac{17\pi}{3}$.

Пример 25. а) Решите уравнение

$$25^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)} = 5^{1-\cos 2x}.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие промежутку $(-5\pi; -2\pi)$.

Решение.

а) Поскольку $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) = \sin x$, то уравнение примет вид

$$25^{\sin x} = 5^{1-\cos 2x}.$$

Приведем обе части полученного уравнения к основанию 5.

$$5^{2 \sin x} = 5^{1-\cos 2x}, \text{ откуда } 2 \sin x = 1 - \cos 2x.$$

Но $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$, значит, $2 \sin x = 2 \sin^2 x$, или $\sin x(1 - \sin x) = 0$, откуда $\sin x = 0$, $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = 1$,

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) $x \in (-5\pi; -2\pi)$.

1) $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $-5\pi < \pi n < -2\pi$, $-5 < n < -2$,

откуда $n = -4$, $n = -3$.

Если $n = -4$, то $x = -4\pi$; если $n = -3$, то $x = -3\pi$.

2) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$-5\pi < -\frac{\pi}{2} + 2\pi n < -2\pi, -5 - \frac{1}{2} < 2n < -2 - \frac{1}{2},$$

$$-\frac{11}{4} < n < -\frac{5}{4}, -2\frac{3}{4} < n < -1\frac{1}{4}, \text{ откуда } n = -2,$$

$$\text{тогда } x = \frac{\pi}{2} - 4\pi = -\frac{7\pi}{2}.$$

Ответ: а) πn ; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) -4π ; -3π ; $-\frac{7\pi}{2}$.

Пример 26. а) Решите уравнение

$$\frac{2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x}{2\sin x + 1} = 0.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right)$.

Решение.

а) ОДЗ: $2\sin x + 1 \neq 0$, $\sin x \neq -\frac{1}{2}$,

$2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$, или $\cos x(2\cos x + \sqrt{3}) = 0$, откуда $\cos x = 0$,

или $2\cos x + \sqrt{3} = 0$, $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Если $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$.

Но $\sin x \neq -\frac{1}{2}$, т. е. $x \neq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x \neq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Значит, подходит лишь серия корней $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) $x \in \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right)$.

1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + \pi n < 4\pi$, $\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \leq n < 4 - \frac{1}{2}$, $2 \leq n < 3,5$.

Значит, $n = 2$; $n = 3$.

Если $n = 2$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}$;

если $n = 3$, то $x = \frac{\pi}{2} + 3\pi = \frac{7\pi}{2}$.

2) $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$\frac{5\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n < 4\pi$, $\frac{5}{2} - \frac{5}{6} \leq 2n < 4 - \frac{5}{6}$,

$\frac{10}{6} \leq 2n < \frac{19}{6}$, $\frac{5}{6} \leq n < \frac{19}{12}$, откуда $n = 1$, тогда $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{17\pi}{6}$.

Пример 27. а) Решите уравнение

$$\cos x + \sin x + \sin 2x + 1 = 0.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Заметим, что $1 + \sin 2x = \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = (\cos x + \sin x)^2$.

Тогда данное уравнение примет вид

$$(\cos x + \sin x) + (\cos x + \sin x)^2 = 0, \text{ или}$$

$$(\cos x + \sin x) \cdot (1 + \cos x + \sin x) = 0, \text{ откуда } \cos x + \sin x = 0, \text{ или } 1 + \cos x + \sin x = 0.$$

1) $\cos x + \sin x = 0$ — однородное уравнение I степени.

Разделив обе части уравнения на $\cos x \neq 0$, получим $1 + \operatorname{tg} x = 0$,

$$\operatorname{tg} x = -1, x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

2) $1 + \cos x + \sin x = 0$, или $\cos x + \sin x = -1$, или

$$\cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -1.$$

К полученному уравнению применим формулу суммы косинусов:

$$2 \cos \frac{x + \frac{\pi}{2} - x}{2} \cos \frac{x - \frac{\pi}{2} + x}{2} = -1, \text{ или } 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1, \text{ или}$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1, \text{ откуда } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ или}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{4} \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n.$$

$$\text{Значит, } x = \pi + 2\pi n; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) $x \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

1) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$

$$\pi \leq -\frac{\pi}{4} + \pi n \leq \frac{5\pi}{2}, \quad 1 + \frac{1}{4} \leq n \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{4},$$

$$1\frac{1}{4} \leq n \leq 2\frac{3}{4}, \text{ откуда } n = 2, \text{ тогда } x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}.$$

$$2) x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\pi \leq \pi + 2\pi n \leq \frac{5\pi}{2}, \quad 0 \leq 2n \leq \frac{5}{2} - 1, \quad 0 \leq n \leq \frac{3}{4},$$

откуда $n = 0$, $x = \pi$.

$$3) x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\pi \leq -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \frac{5\pi}{2}, \quad 1 + \frac{1}{2} \leq 2n \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{2},$$

$$\frac{3}{4} \leq n \leq \frac{3}{2}, \text{ откуда } n = 1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{Ответ: а) } -\frac{\pi}{4} + \pi n, \pi + 2\pi n, -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } \frac{7\pi}{4}; \pi, \frac{3\pi}{2}.$$

Пример 28. а) Решите уравнение

$$\cos 2x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 2x).$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение.

а) Разделим обе части уравнения на 2:

$$\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos x - \sin 2x), \text{ или}$$

$$\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x.$$

$$\text{Учитывая, что } \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{6} \text{ и } \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6},$$

$$\text{имеем } \cos \frac{\pi}{3} \cos 2x + \sin \frac{\pi}{3} \sin 2x = \cos \frac{\pi}{6} \cos x + \sin \frac{\pi}{6} \sin x;$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right), \text{ или } \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0.$$

Применяя формулы разности косинусов, получим

$$\frac{-2\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}-2x}{2} + \frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\right)\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}-2x}{2} - \frac{\frac{\pi}{6}-x}{2}\right)}{2} = 0;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right) = 0.$$

Отсюда получим:

$$1) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{3x}{2}\right) = 0, \quad \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \pi n, \quad 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{x}{2}\right) = 0, \quad \frac{x}{2} - \frac{\pi}{12} = \pi n, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$6) x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right].$$

$$1) x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \leq 2\pi, \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \leq \frac{2n}{3} \leq 2,$$

$$-\frac{2}{3} \leq \frac{2n}{3} \leq 2, \quad -1 \leq n \leq 3,$$

$$n = -1, n = 0, n = 1, n = 2, n = 3.$$

$$n = -1, x = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2};$$

$$n = 0, x = \frac{\pi}{6};$$

$$n = 1, x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6};$$

$$n = 2, x = \frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi}{2};$$

$$n = 3, x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}.$$

$$2) x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 2\pi, \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \leq 2n \leq 2 - \frac{1}{6},$$

$$-\frac{2}{3} \leq 2n \leq \frac{11}{6}, \quad -\frac{1}{3} \leq n \leq \frac{11}{12}.$$

$$\text{Значит, } n = 0, \text{ тогда } x = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}.$$

Пример 29. а) Решите уравнение

$$\sin x + 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin 2x + 1.$$

б) Найдите его корни на промежутке $[-3\pi; -1,5\pi]$.

Решение.

а) Применив формулу $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$, получим

$$\sin x + 2\left(\sin 2x \cos \frac{\pi}{6} + \cos 2x \sin \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin 2x + 1, \text{ или}$$

$$\sin x + 2\sin 2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cos 2x \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}\sin 2x + 1, \text{ или}$$

$$\sin x + \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{3}\sin 2x + 1, \text{ или } \sin x = 1 - \cos 2x.$$

Но $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, тогда $2\sin^2 x - \sin x = 0$, $\sin x(2\sin x - 1) = 0$, откуда $\sin x = 0$, или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Если $\sin x = 0$, то $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -1,5\pi]$.

1) $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$-3\pi \leq \pi n \leq -1,5\pi$, $-3 \leq n \leq -1,5$, откуда $n = -3$, $n = -2$, тогда $x_1 = -3\pi$; $x_2 = -2\pi$.

2) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$-3\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq -1,5\pi, \quad -3 \leq \frac{1}{6} + 2n \leq -\frac{3}{2},$$

$$-\frac{19}{6} \leq 2n \leq -\frac{10}{6}, \quad -\frac{19}{12} \leq n \leq -\frac{5}{6}, \text{ откуда } n = -1, \text{ тогда } x = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}.$$

3) $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$-3\pi \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq -1,5\pi, \quad -3 - \frac{5}{6} \leq 2n \leq -\frac{3}{2} - \frac{5}{6}, \quad -\frac{23}{12} \leq n \leq -\frac{7}{6}, \text{ нет целых}$$

$n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: а) πn ; $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) -3π ; -2π ; $-\frac{11\pi}{6}$.

Пример 30. а) Решите уравнение

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos 2x = 1.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Так как $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$,

то получим $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \cos 2x = 1$.

Известно, что $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$, тогда имеем

$$2 \cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \cos 2x = 1, \text{ или } 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos x - \cos 2x = 1, \text{ или } \cos x = 1 + \cos 2x.$$

Но $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$, тогда $2 \cos^2 x - \cos x = 0$, или $\cos x (2 \cos x - 1) = 0$, откуда $\cos x = 0$, или $\cos x = \frac{1}{2}$.

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

если $\cos x = \frac{1}{2}$, то $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$-\pi \leq \frac{\pi}{2} + \pi n \leq \frac{\pi}{2}, \quad -1 - \frac{1}{2} \leq n \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}, \quad -1,5 \leq n \leq 0, \text{ откуда } n = -1, n = 0.$$

Если $n = -1$, то $x = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$;

если $n = 0$, то $x = \frac{\pi}{2}$.

2) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$-\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{4}{3} \leq 2n \leq \frac{1}{6}, \quad -\frac{2}{3} \leq n \leq \frac{1}{12}, \text{ откуда } n = 0, x = \frac{\pi}{3}.$$

$$3) x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq \frac{\pi}{2}, \quad -1 + \frac{1}{3} \leq 2n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \quad -\frac{2}{3} \leq 2n \leq \frac{5}{6}, \quad -\frac{1}{3} \leq n \leq \frac{5}{12},$$

откуда $n = 0$, $x = -\frac{\pi}{3}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$; $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\pm \frac{\pi}{2}$; $\pm \frac{\pi}{3}$.

Пример 31. а) Решите уравнение

$$\sin^4 2x + \sin^4 \left(2x - \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{1}{4}.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi \right]$.

Решение.

а) Применяя формулу понижения степени, получим

$$\left(\frac{1 - \cos 4x}{2} \right)^2 + \left(\frac{1 - \cos \left(4x - \frac{3\pi}{2} \right)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}, \text{ или}$$

$$(1 - \cos 4x)^2 + \left(1 - \cos \left(\frac{3\pi}{2} - 4x \right) \right)^2 = 1,$$

$$1 - 2 \cos 4x + \cos^2 4x + (1 + \sin 4x)^2 = 1,$$

$$1 - 2 \cos 4x + \cos^2 4x + 1 + 2 \sin 4x + \sin^2 4x = 1,$$

$$-2 \cos 4x + 2 \sin 4x + (\cos^2 4x + \sin^2 4x) + 1 = 0,$$

$$-2 \cos 4x + 2 \sin 4x + 2 = 0,$$

$$\sin 4x + (1 - \cos 4x) = 0,$$

$$2 \sin 2x \cos 2x + \sin^2 2x = 0,$$

$$\sin 2x (\cos 2x + \sin 2x) = 0,$$

откуда $\sin 2x = 0$, или $\cos 2x + \sin 2x = 0$.

Если $\sin 2x = 0$, то $2x = \pi n$, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$;

если $\cos 2x + \sin 2x = 0$, то $1 + \operatorname{tg} 2x = 0$, $\operatorname{tg} 2x = -1$,

$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

$$1) x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi n}{2} \leq \pi, \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{n}{2} \leq 1, \quad -1 \leq n \leq 2,$$

$$n = -1, n = 0, n = 1, n = 2.$$

$$n = -1, x = -\frac{\pi}{2};$$

$$n = 0, x = 0;$$

$$n = 1, x = \frac{\pi}{2};$$

$$n = 2, x = \pi.$$

$$2) x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \leq \pi,$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \leq \frac{n}{2} \leq 1 + \frac{1}{8}, \quad -\frac{3}{8} \leq \frac{n}{2} \leq \frac{9}{8},$$

$$-\frac{3}{4} \leq n \leq \frac{9}{4}, \text{ откуда } n = 0, \text{ тогда } x = -\frac{\pi}{8}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi n}{2}; -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } \pm \frac{\pi}{2}; 0; \pi; -\frac{\pi}{8}.$$

Пример 32. а) Решите уравнение

$$8 \sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}.$$

$$\text{б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку } \left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right].$$

Решение.

$$\text{а) } \cos x \neq 0, \sin x \neq 0, \text{ т. е. } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Запишем уравнение в виде

$$8 \sin^2 x \cos x = \sqrt{3} \sin x + \cos x, \text{ или } 4 \sin 2x \sin x = \sqrt{3} \sin x + \cos x.$$

Применяя формулу $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$, получим

$$2(\cos x - \cos 3x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x.$$

Разделим обе части полученного уравнения на 2:

$$\cos x - \cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x, \text{ или } \cos 3x - \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) = 0.$$

Но $\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin \frac{\pi}{3}$, тогда имеем $\cos 3x - \cos \left(\frac{\pi}{3} + x \right) = 0$, или

$$-2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 0, \text{ откуда:}$$

$$1) \sin \left(2x + \frac{\pi}{6} \right) = 0, \quad 2x + \frac{\pi}{6} = \pi n, \quad x_1 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 0, \quad x - \frac{\pi}{6} = \pi n, \quad x_2 = \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) Из найденных серий решений найдем корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right]$.

$$1) -\frac{5\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2} \leq -\frac{\pi}{2},$$

$$-30 \leq -1 + 6n \leq -6, \quad -29 \leq 6n \leq -5,$$

$$-4\frac{5}{6} \leq n \leq -\frac{5}{6}, \text{ откуда } n = -4; -3; -2; -1.$$

$$\text{При } n = -4 \quad x = -\frac{\pi}{12} - 2\pi = -\frac{25\pi}{12};$$

$$\text{при } n = -3 \quad x = -\frac{\pi}{12} - \frac{3\pi}{2} = -\frac{19\pi}{12};$$

$$\text{при } n = -2 \quad x = -\frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{13\pi}{12};$$

$$\text{при } n = -1 \quad x = -\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{12}.$$

$$2) -\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + \pi n \leq -\frac{\pi}{2},$$

$$-15 \leq 1 + 6n \leq -3, \quad -16 \leq 6n \leq -4,$$

$$-2\frac{2}{3} \leq n \leq -\frac{2}{3}, \text{ откуда } n = -2; -1.$$

При $n = -2$ $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi = -\frac{11\pi}{6}$; при $n = -1$ $x = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{25\pi}{12}$; $-\frac{19\pi}{12}$; $-\frac{13\pi}{12}$; $-\frac{7\pi}{12}$; $-\frac{11\pi}{6}$; $-\frac{5\pi}{6}$.

Пример 33. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Так как $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\cos x \sin x} = \frac{1}{\cos x \sin x}$, то

уравнение запишется в виде $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{\cos x \sin x}$.

Но $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$, тогда получим

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{2}{\sin 2x}. \quad (1)$$

Пусть $\sin x + \cos x = y$, тогда $y^2 = (\sin x + \cos x)^2$, или $y^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x$, или $y^2 = 1 + \sin 2x$, откуда $\sin 2x = y^2 - 1$.

Следовательно, уравнение (1) примет вид

$$\sqrt{2}y = \frac{2}{y^2 - 1}, \text{ или } \sqrt{2}y^3 - \sqrt{2}y - 2 = 0. \quad (2)$$

Разделив обе части уравнения (2) на $\sqrt{2}$, имеем $y^3 - y - \sqrt{2} = 0$, или $y^3 - 2y + y - \sqrt{2} = 0$. (3)

Решим уравнение (3) способом группировки:

$y(y^2 - 2) + (y - \sqrt{2}) = 0$, или $y(y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2}) + (y - \sqrt{2}) = 0$, или $(y - \sqrt{2})(y^2 + \sqrt{2}y + 1) = 0$, откуда $y = \sqrt{2}$.

Уравнение $y^2 + \sqrt{2}y + 1 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D = 2 - 4 = -2 < 0$.

Если $y = \sqrt{2}$, то, учитывая замену, получим

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}. \quad (4)$$

$$\begin{aligned}\text{Но } \sin x + \cos x &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \\ &= \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

Следовательно, уравнение (4) примет вид $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, или $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$, откуда $x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq \frac{3\pi}{2}, \text{ или } -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \leq 2n \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{4}, \text{ или } -\frac{3}{4} \leq 2n \leq \frac{5}{4}, \text{ или } -\frac{3}{8} \leq n \leq \frac{5}{8}, \text{ откуда } n = 0, \text{ тогда } x = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{4}$.

Замечание 1. Данное уравнение можно решить иначе, например, записать уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) &= \frac{1}{\sin 2x}, \text{ или } \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{1}{\sin 2x}, \text{ или} \\ \sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x &= \frac{1}{\sin 2x}, \text{ или } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin 2x = 1, \text{ откуда} \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) &= -1 \text{ и } \sin 2x = -1, \text{ или } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ и } \sin 2x = 1, \text{ и т. д.}\end{aligned}$$

Замечание 2. Так как $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 2$

$$\text{и } \sqrt{2}(\sin x + \cos x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 2, \text{ то } \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \end{cases} \text{ и т. д.}$$

Пример 34. а) Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x = 0.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Поскольку $\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$, то данное уравнение примет вид

$$\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right).$$

Известно, что если $\operatorname{tg} \alpha x = \operatorname{tg} \beta x$, то $\beta x = \alpha x + \pi n$, где $\alpha x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда получим $2x = \frac{\pi}{2} - 3x + \pi n$, где $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, т. е. $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Значит, $5x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{б) } x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right].$$

$$\pi \leq \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5} \leq \frac{3\pi}{2}, \quad 1 - \frac{1}{10} \leq \frac{n}{5} \leq \frac{3}{2} - \frac{1}{10},$$

$$\frac{9}{10} \leq \frac{n}{5} \leq \frac{7}{5}, \text{ или } \frac{9}{2} \leq n \leq 7, \text{ т. е. } n = 5; n = 6; n = 7.$$

$$\text{Тогда } x_1 = \frac{\pi}{10} + \pi = \frac{11\pi}{10}; x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{6\pi}{5} = \frac{13\pi}{10};$$

$$x_3 = \frac{\pi}{10} + \frac{7\pi}{5} = \frac{3\pi}{2}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } \frac{11\pi}{10}; \frac{13\pi}{10}; \frac{3\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Замечание. Так как } \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x &= \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \\ &= \frac{\sin 2x \cdot \sin 3x - \cos 2x \cdot \cos 3x}{\cos 2x \cdot \sin 3x} = -\frac{\cos 5x}{\cos 2x \cdot \sin 3x}, \text{ то исходное уравнение} \end{aligned}$$

$$\text{равносильно системе } \begin{cases} \cos 5x = 0, \\ \cos 2x \neq 0, \text{ откуда } 5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ и т. д.} \\ \sin 3x \neq 0, \end{cases}$$

Пример 35. а) Решите уравнение

$$\frac{1}{1+\cos^2 x} + \frac{1}{1+\sin^2 x} = \frac{48}{35}.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; \pi]$.

Решение.

а) Приведем левую часть уравнения к общему знаменателю, учитывая, что $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

$$\text{Получим } \frac{1+\sin^2 x + 1+\cos^2 x}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)} = \frac{48}{35}, \text{ или } \frac{3}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)} = \frac{48}{35},$$

$$\text{или } (1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x) = \frac{35}{16}. \quad (1)$$

Но $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ и $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, тогда уравнение (1) примет вид $\left(1+\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(1+\frac{1-\cos 2x}{2}\right) = \frac{35}{16}$, или

$$(3+\cos 2x)(3-\cos 2x) = \frac{35}{4}, \text{ или } 9-\cos^2 2x = \frac{35}{4}, \text{ или } \cos^2 2x = \frac{1}{4}.$$

Вновь понижая степень полученного уравнения, имеем

$$\frac{1+\cos 4x}{2} = \frac{1}{4}, \text{ откуда } 1+\cos 4x = \frac{1}{2}, \text{ или } \cos 4x = -\frac{1}{2},$$

$$4x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, 4x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \text{ откуда } x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание 1. Если бы в уравнении $\cos^2 2x = \frac{1}{4}$ мы не понизили степень, то в результате получили бы 4 серии решений, что значительно удлинило бы решение уравнения в части б).

б) $x \in [-\pi; \pi]$.

$$1) x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leq \pi, -1 + \frac{1}{6} \leq \frac{n}{2} \leq 1 + \frac{1}{6},$$

$$-\frac{5}{2} \leq n \leq \frac{7}{3}, \text{ откуда}$$

$$n = -2, n = -1, n = 0, n = 1, n = 2,$$

$$n = -2, x_1 = -\frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{7\pi}{6};$$

$$n = -1, x_2 = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{3};$$

$$n = 0, x_3 = -\frac{\pi}{6};$$

$$n = 1, x_4 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3};$$

$$n = 2, x_5 = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5\pi}{6}.$$

$$2) x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z},$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2} \leq \pi, \quad -\frac{7}{6} \leq \frac{n}{2} \leq \frac{5}{6}, \quad -\frac{7}{3} \leq n \leq \frac{5}{3},$$

$$n = -2, n = -1, n = 0, n = 1,$$

$$n = -2, x_6 = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6};$$

$$n = -1, x_7 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3};$$

$$n = 0, x_8 = \frac{\pi}{6};$$

$$n = 1, x_9 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Ответ: а) } \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } -\frac{7\pi}{6}; \pm \frac{2\pi}{3}; \pm \frac{\pi}{3}; \pm \frac{5\pi}{6}; \pm \frac{\pi}{6}.$$

Замечание 2. Уравнение (1) можно свести к биквадратному, если учесть, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ (или $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$), и т. д.

Замечание 3. Обозначив $1 + \cos^2 x = a$, $1 + \sin^2 x = b$, где $a > 0$, $b > 0$, получим $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{48}{35}$.

Кроме того, $a + b = 2 + (\cos^2 x + \sin^2 x) = 3$. Далее решить систему

$$\text{уравнений } \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{48}{35}, \\ a + b = 3, \end{cases} \text{ и т. д.}$$

Пример 36. а) Решите уравнение

$$4(\sin^3 x + \cos^3 x) = 3(\sin x + \cos x).$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$4 \cos^3 x - 3 \cos x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x.$$

$$\text{Но } 4 \cos^3 x - 3 \cos x = \cos 3x \text{ и } 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin 3x.$$

Тогда $\cos 3x = \sin 3x$ — однородное уравнение I степени. Разделив обе части на $\cos 3x \neq 0$, имеем $\operatorname{tg} 3x = 1$, $3x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{б) } x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right].$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} \leq -\frac{\pi}{2}, \quad -1 - \frac{1}{12} \leq \frac{n}{3} \leq -\frac{1}{2} - \frac{1}{12},$$

$$-\frac{13}{12} \leq \frac{n}{3} \leq -\frac{7}{12}, \quad -\frac{13}{4} \leq n \leq -\frac{7}{4},$$

$$-3\frac{1}{4} \leq n \leq -1\frac{3}{4}, \text{ откуда } n = -3, n = -2.$$

$$\text{Если } n = -3, \text{ то } x = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12};$$

$$\text{если } n = -2, \text{ то } x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } -\frac{11\pi}{12}; -\frac{7\pi}{12}.$$

Замечание. Исходное уравнение можно решить иначе, записав его в виде $4(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) = 3(\sin x + \cos x)$.

Далее вынести общий множитель $\sin x + \cos x$ за скобки и т. д. Приведенное решение является самым коротким и изящным (прим. автора).

Пример 37. Решите уравнение

$$(2\cos^2 x - \cos x) \cdot \sqrt{-13\operatorname{tg} x} = 0.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \operatorname{tg} x \leq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$$

Произведение двух (и более) выражений равно нулю, если один из множителей равен нулю, а другой при этом не теряет смысла.

$$\text{Значит, } 2\cos^2 x - \cos x = 0, \text{ или } \sqrt{-13\operatorname{tg} x} = 0.$$

Уравнение $2\cos^2 x - \cos x = 0$ является квадратным относительно $\cos x$.

Решим его, разложив левую часть на множители:

$$\cos x (2\cos x - 1) = 0, \text{ откуда } \cos x = 0, \text{ или } 2\cos x - 1 = 0.$$

$$\text{Но } \cos x \neq 0 \text{ (по ОДЗ), значит, } 2\cos x - 1 = 0, \cos x = \frac{1}{2}, \text{ откуда}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что серия $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ принадлежит I четверти, значит, условие $\operatorname{tg} x \leq 0$ не выполняется.

Серия $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ принадлежит IV четверти, для нее условие $\operatorname{tg} x \leq 0$ выполняется.

Остается решить II уравнение совокупности: $\sqrt{-13\operatorname{tg} x} = 0$, или $-13\operatorname{tg} x = 0$, откуда $\operatorname{tg} x = 0$, значит, $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } -\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 38. а) Решите уравнение

$$\frac{2\sin^2 x - \sin x}{\log_7(\cos x)} = 0.$$

б) Найдите все корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

$$\text{а) ОДЗ: } \begin{cases} \cos x > 0, \\ \log_3(\cos x) \neq 0; \end{cases} \begin{cases} \cos x > 0, \\ \cos x \neq 1. \end{cases}$$

Получим $2 \sin^2 x - \sin x = 0$, или $\sin x \cdot (2 \sin x - 1) = 0$, откуда $\sin x = 0$, или $2 \sin x - 1 = 0$, т. е. $\sin x = \frac{1}{2}$.

Если $\sin x = 0$, то $\cos x = \pm 1$.

Но $\cos x > 0$ и $\cos x \neq 1$ (по ОДЗ).

Значит, корни уравнения $\sin x = 0$ не удовлетворяют ОДЗ.

Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ и $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Но серия $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$ принадлежит II четверти, где $\cos x < 0$, что не удовлетворяет ОДЗ.

Серия $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$ принадлежит I четверти, где $\cos x > 0$.

Значит, $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$ — решение исходного уравнения.

$$\text{б) } x \in \left[-4\pi; -\frac{7\pi}{2} \right],$$

$$-4\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq -\frac{7\pi}{2}, \quad -4 - \frac{1}{6} \leq 2n \leq -\frac{7}{2} - \frac{1}{6},$$

$$-\frac{25}{12} \leq n \leq -\frac{11}{6}, \quad -2\frac{1}{2} \leq n \leq -1\frac{5}{6}, \text{ откуда } n = -2, \text{ тогда}$$

$$x = \frac{\pi}{6} - 4\pi = -\frac{23\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } -\frac{23\pi}{6}.$$

Пример 39. Решите уравнение

$$\frac{2\cos^2 x - 2\cos x \cos 2x - 1}{\sqrt{\sin x}} = 0.$$

Решение.

ОДЗ: $\sin x > 0$.

$$2\cos^2 x - 2\cos x \cos 2x - 1 = 0.$$

Заметим, что $2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$, тогда получим уравнение $\cos 2x - 2\cos x \cos 2x = 0$.

Разложим левую часть полученного уравнения на множители: $\cos 2x \cdot (1 - 2\cos x) = 0$, откуда $\cos 2x = 0$, или $1 - \cos x = 0$.

Если $\cos 2x = 0$, то $1 - 2 \sin^2 x = 0$, откуда $\sin^2 x = \frac{1}{2}$, или

$$\sin x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Поскольку $\sin x > 0$, получим $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, откуда имеем две серии:

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если $1 - 2 \cos x = 0$, то $\cos x = \frac{1}{2}$, тогда $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Но серия $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ принадлежит IV четверти, где $\sin x < 0$, что не удовлетворяет ОДЗ, а серия $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ принадлежит I четверти, где $\sin x > 0$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

Пример 40. а) Решите уравнение

$$\cos 2x - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\frac{1}{4}.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Так как $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ и $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, то уравнение

примет вид $2 \cos^2 x - 1 - \cos^2 x = -\frac{1}{4}$, или $\cos^2 x = \frac{3}{4}$.

Но $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$, тогда получим $\frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{3}{4}$, или

$1 + \cos 2x = \frac{3}{2}$, или $\cos 2x = \frac{1}{2}$, откуда $2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$,

т. е. $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{б) } x \in \left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right].$$

$$1) x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z, \pi \leq -\frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{5\pi}{2},$$

$$1 + \frac{1}{6} \leq n \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{6}, 1\frac{1}{6} \leq n \leq 2\frac{2}{3}, \text{ откуда } n = 2,$$

$$\text{тогда } x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}.$$

$$2) x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z,$$

$$\pi \leq \frac{\pi}{6} + \pi n \leq \frac{5\pi}{2}, 1 - \frac{1}{6} \leq n \leq \frac{5}{2} - \frac{1}{6},$$

$$\frac{5}{6} \leq n \leq 2\frac{1}{3}, \text{ откуда } n = 1, n = 2,$$

$$\text{тогда } x = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} \text{ и } x = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: а) } \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z; \text{ б) } \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}.$$

Пример 41. а) Решите уравнение

$$(\sin x - 2)^4 = 1 + \cos^2 x + \cos^2 x \sin^2 x.$$

$$\text{б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку } \left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi \right].$$

Решение.

а) Упростим правую часть уравнения:

$$1 + \cos^2 x + \cos^2 x \sin^2 x = 1 + \cos^2 x (1 + \sin^2 x) = \\ = 1 + (1 - \sin^2 x)(1 + \sin^2 x) = 1 + 1 - \sin^4 x = 2 - \sin^4 x.$$

В этом случае исходное уравнение примет вид

$$(\sin x - 2)^4 + \sin^4 x = 2.$$

Так как $\frac{\sin x - 2 + \sin x}{2} = \sin x - 1$, то, обозначив $\sin x - 1 = y$, полу-

чим уравнение

$$(y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 2, \text{ или}$$

$$(y^2 - 2y + 1)(y^2 - 2y + 1) + (y^2 + 2y + 1)(y^2 + 2y + 1) = 2.$$

Раскрыв скобки и упростив, имеем $2y^4 + 12y^2 = 0$, или $y^2(y^2 + 6) = 0$, откуда $y^2 = 0$, или $y^2 + 6 = 0$ — нет корней, так как $y^2 + 6 > 0$.

Если $y^2 = 0$, то $y = 0$, тогда $\sin x - 1 = 0$, откуда $\sin x = 1$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$n \in \mathbb{Z}$.

б) $\frac{5\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 4\pi$, $\frac{5}{2} - \frac{1}{2} \leq 2n \leq 4 - \frac{1}{2}$, $1 \leq n \leq \frac{7}{4}$, откуда $n = 1$,

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{5\pi}{2}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{2}$.

Пример 42. а) Решите уравнение

$$\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 1.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

І способ

а) Пусть $2x + \frac{2\pi}{3} = y$, тогда $4x + \frac{\pi}{3} = 2y - \pi$.

Исходное уравнение примет вид

$$\sin y \cos(2y - \pi) = 1, \text{ или } -\sin y \cos 2y = 1.$$

Но $\cos 2y = 1 - 2 \sin^2 y$, значит, $\sin y (1 - 2 \sin^2 y) = 1$.

Получим уравнение $2 \sin^3 y - \sin y - 1 = 0$.

Заметим, что $2 - 1 - 1 = 0$, значит, $\sin y = 1$, тогда имеем

$$2 \sin y (\sin^2 y - 1) + (\sin y - 1) = 0, \text{ или}$$

$$(\sin y - 1)(2 \sin^2 y + 2 \sin y + 1) = 0,$$

откуда $\sin y = 1$, или $2 \sin^2 y + 2 \sin y + 1 = 0$ — нет корней ($D < 0$).

Если $\sin y = 1$, то, учитывая подстановку $y = 2x + \frac{2\pi}{3}$, получим

$$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ т. е. } 2x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ откуда } x = -\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) $-2\pi \leq -\frac{\pi}{12} + \pi n \leq \frac{\pi}{2}$, $-2 + \frac{1}{12} \leq n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$, $-1\frac{11}{12} \leq n \leq \frac{7}{12}$, откуда

$$n = -1, n = 0.$$

Если $n = -1$, то $x = -\frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{13\pi}{12}$; если $n = 0$, то $x = -\frac{\pi}{12}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{12}$.

II способ

Так как $|\sin \alpha| \leq 1$ и $|\cos \alpha| \leq 1$, то получим

$$\begin{cases} \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = 1, \\ \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = -1, \\ \cos\left(4x + \frac{\pi}{3}\right) = -1. \end{cases}$$

В I случае $\begin{cases} 2x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ 4x + \frac{\pi}{3} = 2\pi k; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + \pi n, \\ x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z},$

откуда $x = -\frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Решая II систему, имеем $\begin{cases} 2x + \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ 4x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2\pi k; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{7\pi}{12} + \pi n, \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}. \end{cases}$

Эта система не имеет решений.

Значит, $x = -\frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{12}; -\frac{\pi}{12}.$

Пример 43. а) Решите уравнение

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right].$

Решение.

I способ

а) Запишем уравнение в виде

$$2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1.$$

Известно, что $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta).$

Тогда получим уравнение $\cos \frac{2\pi}{3} + \cos 2x = -1$, или

$$\cos 2x = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}, \text{ откуда } 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

т. е. $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

$$\text{б) } -\frac{\pi}{3} \leq -\frac{\pi}{3} + \pi n \leq \pi,$$

$$-\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} + \pi n \leq \pi,$$

$$0 \leq n \leq \frac{4}{3},$$

$$-\frac{2}{3} \leq n \leq \frac{2}{3},$$

$$n = 0, x = -\frac{\pi}{3}.$$

$$n = 0, x = \frac{\pi}{3}.$$

$$n = 1, x = \frac{2\pi}{3}.$$

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\pm \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$.

II способ

а) Применив формулы $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$, получим

$$\left(\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right) \cdot \left(\cos x \cdot \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2}, \text{ или}$$

$$\left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right) = -\frac{1}{2}, \text{ или}$$

$$\frac{1}{4} \cos^2 x - \frac{3}{4} \sin^2 x = -\frac{1}{2}, \text{ или } \cos^2 x - 3 \sin^2 x = -2.$$

Но $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, тогда $1 - 4 \sin^2 x = -2, 4 \sin^2 x = 3, 2 \sin^2 x = \frac{3}{2}$.

Так как $2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x$, то имеем $1 - \cos 2x = \frac{3}{2}, \cos 2x = -\frac{1}{2},$

и т. д. (см. I способ).

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\pm \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$.

Пример 44. а) Решите уравнение

$$2 \sin 3x + 3 \sin 5x = 21 \sin x.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 4\pi \right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$3(\sin 5x - \sin 3x) + 5(\sin 3x - \sin x) = 16 \sin x.$$

Так как $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$, то получим

$$3 \cdot 2 \sin x \cos 4x + 5 \cdot 2 \sin x \cos 2x = 16 \sin x,$$

$$2 \sin x \cdot (3 \cos 4x + 5 \cos 2x - 8) = 0, \text{ откуда}$$

$$\sin x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ или } 3 \cos 4x + 5 \cos 2x - 8 = 0.$$

Но $\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$, тогда получим

$$3 \cdot (2 \cos^2 2x - 1) + 5 \cos 2x - 8 = 0, \text{ или } 6 \cos^2 2x + 5 \cos 2x - 11 = 0.$$

$$\text{Поскольку } 6 + 5 - 11 = 0, \text{ то } \cos 2x = 1, \text{ или } \cos 2x = -\frac{11}{6}.$$

Если $\cos 2x = 1$, то $2x = 2\pi n, x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$;

если $\cos 2x = -\frac{11}{6}$, то корней нет, так как $|\cos 2x| \leq 1$.

$$\text{б) } x \in \left[-\frac{3\pi}{2}; 4\pi \right].$$

$$-\frac{3\pi}{2} \leq \pi n \leq 4\pi, -\frac{3}{2} \leq n \leq 4, \text{ откуда } n = -1; 0; 1; 2; 3; 4.$$

Если $n = -1$, то $x = -\pi$; если $n = 0$, то $x = 0$;

если $n = 1$, то $x = \pi$; если $n = 2$, то $x = 2\pi$;

если $n = 3$, то $x = 3\pi$; если $n = 4$, то $x = 4\pi$.

Ответ: а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\pi; 0; \pi; 2\pi; 3\pi; 4\pi$.

Пример 45. а) Решите уравнение

$$\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 1 - \sin x \cos x.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2} \right]$.

Решение.

а) Упростим левую часть уравнения, применив формулу

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

$$\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sin x + \cos x.$$

Следовательно, исходное уравнение примет вид

$$\sin x + \cos x = 1 - \sin x \cos x. \quad (1)$$

Пусть $\sin x + \cos x = t$, тогда $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$.

Уравнение (1) преобразуется к виду $t = 1 - \frac{t^2 - 1}{2}$, или $2t = 2 - t^2 + 1$.

Получим $t^2 + 2t - 3 = 0$, откуда $t_1 = 1$, $t_2 = -3$.

$$1) \sin x + \cos x = 1, \text{ или } \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x = 1, \quad 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1,$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin x + \cos x = -3 \text{ — нет корней, так как } |\sin x| \leq 1 \text{ и } |\cos x| \leq 1.$$

$$\text{б) } x \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right].$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq \frac{3\pi}{2}, \quad -\pi \leq 2\pi n \leq \frac{3\pi}{2},$$

$$-\frac{3}{2} \leq 2n \leq 1, \quad -1 \leq 2n \leq \frac{3}{2},$$

$$-\frac{3}{4} \leq n \leq \frac{1}{2}, \quad -\frac{1}{2} \leq n \leq \frac{3}{4},$$

$$n = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}. \quad n = 0, \quad x = 0.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \quad 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \text{б) } 0; \quad \frac{\pi}{2}.$$

Пример 46. а) Решите уравнение

$$\cos 3x - \sin x = \sqrt{3}(\cos x - \sin 3x).$$

$$\text{б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку } \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right].$$

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$\cos 3x + \sqrt{3} \sin 3x - (\sin x + \sqrt{3} \cos x) = 0.$$

Разделим обе части уравнения на 2:

$$\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3x - \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) = 0,$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \cos 3x + \sin \frac{\pi}{3} \sin 3x - \left(\sin \frac{\pi}{6} \sin x + \cos \frac{\pi}{6} \cos x \right) = 0,$$

$$\cos \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) - \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 0.$$

Применим формулу разности косинусов:

$$-2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) \sin \left(x - \frac{\pi}{12} \right) = 0, \text{ откуда } \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 0, \quad 2x - \frac{\pi}{4} = \pi n,$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ или } \sin \left(x - \frac{\pi}{12} \right) = 0, \quad x - \frac{\pi}{12} = \pi n, \quad x = \frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi \right].$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \leq \pi,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{12} + \pi n \leq \pi,$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{8} \leq \frac{n}{2} \leq 1 - \frac{1}{8},$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \leq n \leq 1 - \frac{1}{12},$$

$$-\frac{5}{4} \leq n \leq \frac{7}{4},$$

$$-\frac{7}{12} \leq n \leq \frac{11}{12},$$

$$n = -1, \quad x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{8},$$

$$n = 0, \quad x = \frac{\pi}{12}.$$

$$n = 0, \quad x = \frac{\pi}{8}.$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \quad \frac{\pi}{12} + \pi n; \text{ б) } -\frac{3\pi}{8}; \quad \frac{\pi}{8}; \quad \frac{\pi}{12}.$$

Пример 47. а) Решите уравнение

$$(\sin^2 2x + \cos^2 x) + \sqrt{3}(\sin 2x + \cos x) + \frac{3}{2} = 0.$$

$$\text{б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку } \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right].$$

Решение.

І способ

а) Так как $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то уравнение преобразуется к виду

$$\cos^2 x \cdot (4 \sin^2 x + 1) + \sqrt{3} \cos x \cdot (2 \sin x + 1) + \frac{3}{2} = 0, \text{ или}$$

$$2(4 \sin^2 x + 1) \cos^2 x + 2\sqrt{3}(2 \sin x + 1) \cos x + 3 = 0. \quad (1)$$

Полученное уравнение рассматриваем как квадратное относительно переменной $\cos x$.

$$\begin{aligned} \text{Имеем } D/4 &= 3(2 \sin x + 1)^2 - 6(4 \sin^2 x + 1) = \\ &= 12 \sin^2 x + 12 \sin x + 3 - 24 \sin^2 x - 6 = -12 \sin^2 x + 12 \sin x - 3 = \\ &= -3(4 \sin^2 x - 4 \sin x + 1) = -3(2 \sin x - 1)^2 \leq 0, \text{ откуда } 2 \sin x - 1 = 0, \\ \text{т. е. } \sin x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В этом случае уравнение (1) преобразуется к виду

$$4 \cos^2 x + 4\sqrt{3} \cos x + 3 = 0, \text{ или } (2 \cos x + \sqrt{3})^2 = 0, \text{ откуда } \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Итак, } \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{cases} \text{ откуда } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } \frac{3\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 3\pi, \quad \frac{3}{2} - \frac{5}{6} \leq 2n \leq 3 - \frac{5}{6}, \quad \frac{1}{3} \leq n \leq \frac{13}{12}, \text{ откуда } n = 1,$$

$$\text{тогда } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}.$$

$$\text{Ответ: а) } x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \text{ б) } \frac{17\pi}{6}.$$

II способ

Пусть $\sin 2x = a$, $\cos x = b$, где $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$.

Получим уравнение $(a^2 + b^2) + \sqrt{3}(a + b) + \frac{3}{2} = 0$, или

$$(a^2 + \sqrt{3}a) + (b^2 + \sqrt{3}b) + \frac{3}{2} = 0. \quad (2)$$

Теперь выделим в левой части полные квадраты, для чего представим число $\frac{3}{2}$ в виде $\frac{3}{2} = \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$.

Уравнение (2) запишем в виде

$$\left(a^2 + \sqrt{3}a + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right) + \left(b^2 + \sqrt{3}b + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right) = 0, \text{ или } \left(a + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(b + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 0.$$

Но сумма двух неотрицательных выражений равна нулю, если каждое из них равно нулю.

Получим систему

$$\begin{cases} a = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ b = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \begin{cases} \sin 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \begin{cases} 2\sin x \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases} \text{ и т. д.}$$

(см. I способ).

Ответ: а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6}$.

Пример 48. а) Решите уравнение

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 6\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{7}{2}.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi; 0]$.

Решение.

а) Заметим, что $2x + \frac{\pi}{3} = 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

Обозначим $x + \frac{\pi}{6} = y$, тогда $2x + \frac{\pi}{3} = 2y$.

Исходное уравнение примет вид $\cos 2y + 6\sin y = \frac{7}{2}$.

Но $\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y$, значит, $1 - 2\sin^2 y + 6\sin y = \frac{7}{2}$, или

$2 - 4\sin^2 y + 12\sin y = 7$, или $4\sin^2 y - 12\sin y + 5 = 0$, откуда находим

$\sin y = \frac{5}{2}$ — нет корней, или $\sin y = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $y = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Учитывая подстановку $x + \frac{\pi}{6} = y$, получим:

1) $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

2) $x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

б) $x = 2\pi n$, $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$,

$-3\pi \leq 2\pi n \leq 0$, $-3\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq 0$,

$$-\frac{3}{2} \leq n \leq 0,$$

$$-3 - \frac{2}{3} \leq 2n \leq -\frac{2}{3},$$

$$n = -1, x = -2\pi,$$

$$-\frac{11}{6} \leq n \leq -\frac{1}{3}, \text{ откуда}$$

$$n = 0, x = 0.$$

$$n = -1, x = \frac{2\pi}{3} - 2\pi = -\frac{4\pi}{3}.$$

Ответ: а) $2\pi n; \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi; -\frac{4\pi}{3}; 0$.

Пример 49. а) Решите уравнение

$$\sin 3x + 2 \cos 2x = 2.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Решение.

1 способ

а) Так как $\sin 3x = \sin(2x + x) = \sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x$ и $2 - 2 \cos 2x = 2(1 - \cos 2x) = 4 \sin^2 x$, то исходное уравнение примет вид $\sin 2x \cos x + \cos 2x \sin x - 4 \sin^2 x = 0$, или

$$\sin x (2 \cos^2 x + \cos 2x - 4 \sin x) = 0.$$

Но $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ и $2 \cos^2 x = 2 - 2 \sin^2 x$.

Тогда получим уравнение

$$\sin x (2 - 2 \sin^2 x + 1 - 2 \sin^2 x - 4 \sin x) = 0, \text{ или}$$

$\sin x (-4 \sin^2 x - 4 \sin x + 3) = 0$, откуда $\sin x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, или $-4 \sin^2 x - 4 \sin x + 3 = 0, 4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0$.

Решив квадратное уравнение относительно $\sin x$, находим

$$\sin x = -\frac{3}{2} \text{ — нет корней, или } \sin x = \frac{1}{2}, x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } -\frac{\pi}{2} \leq \pi n \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq \pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq \pi,$$

$$-\frac{1}{2} \leq n \leq 1, \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \leq 2n \leq 1 - \frac{1}{6}, \quad -\frac{1}{2} - \frac{5}{6} \leq 2n \leq 1 - \frac{5}{6},$$

$$n = 0, x = 0, \quad -\frac{1}{3} \leq n \leq \frac{5}{12}, \quad -\frac{2}{3} \leq n \leq \frac{1}{12}.$$

$$n = 1, x = \pi. \quad n = 0, x = \frac{\pi}{6}. \quad \text{Нет } n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: а) $\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $0; \pi; \frac{\pi}{6}$.

II способ

Известно, что $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$.

Тогда получим уравнение $3 \sin x - 4 \sin^3 x + 2(1 - 2 \sin^2 x) = 2$, или $4 \sin^3 x + 4 \sin^2 x - 3 \sin x = 0$, или $\sin x (4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3) = 0$, откуда $\sin x = 0$, или $4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0$, и т. д. (см. I способ).

Ответ: а) πn ; $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 0 ; π ; $\frac{\pi}{6}$.

Пример 50. а) Решите уравнение

$$4 \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = 2 \sin x - \frac{1}{\sin x} + 4.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 0]$.

Решение.

а) ОДЗ: $\sin x \neq 0$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пусть $2 \sin x - \frac{1}{\sin x} = y$, тогда

$$4 \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = \left(2 \sin x - \frac{1}{\sin x}\right)^2 + 4 = y^2 + 4.$$

Исходное уравнение примет вид $y^2 + 4 = y + 4$, или $y(y - 1) = 0$, откуда $y_1 = 0$, $y_2 = 1$.

Учитывая подстановку $y = 2 \sin x - \frac{1}{\sin x}$, получим два уравнения:

$$1) \ 2 \sin x - \frac{1}{\sin x} = 0, \ 2 \sin^2 x - 1 = 0, \text{ или } 1 - 2 \sin^2 x = 0.$$

Но $1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x$, значит, $\cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, откуда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

$$2) \ 2 \sin x - \frac{1}{\sin x} = 1, \ 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0, \text{ откуда находим}$$

$$\sin x = 1, \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, \text{ или } \sin x = -\frac{1}{2}, \ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n,$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Итак, } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}.$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} \leq 0,$$

$$-\frac{5}{4} \leq \frac{n}{2} \leq -\frac{1}{4},$$

$$-2,5 \leq n \leq -0,5,$$

$$n = -2, \quad x = -\frac{3\pi}{4},$$

$$n = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4}.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

$$-\pi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 0,$$

$$-\frac{3}{2} \leq 2n \leq -\frac{1}{2},$$

$$-\frac{3}{4} \leq n \leq -\frac{1}{4}, \text{ нет } n \in \mathbb{Z}.$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n.$$

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq 0,$$

$$-1 + \frac{1}{6} \leq 2n \leq \frac{1}{6},$$

$$-\frac{5}{12} \leq n \leq \frac{1}{12},$$

$$n = 0, \quad x = -\frac{\pi}{6}.$$

$$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n.$$

$$-\pi \leq -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 0,$$

$$-1 + \frac{5}{6} \leq 2n \leq \frac{5}{6},$$

$$-\frac{1}{12} \leq n \leq \frac{5}{12},$$

$$n = 0, \quad x = -\frac{5\pi}{6}.$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$$\text{б) } -\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}.$$

Примеры для самостоятельного решения

1. а) $2 \cos^3 x - 2 \cos x + \sin^2 x = 0$; б) $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

2. а) $1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos 2x$; б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

3. а) $\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right) + \sin x = 0$; б) $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

4. а) $\left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)\left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$; б) $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

5. $\left(\frac{4 + 9\sin x - 4\cos 2x}{\sqrt{-\cos x}}\right) = 0$.

6. а) $6 \cos^2 x - \sin 2x = 4$; б) $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

7. а) $\frac{1}{\cos x} - 7 \operatorname{tg}^2 x = 1$; б) $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

8. а) $6 \cos^2 x - 5 \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 4$; б) $\left[-5\pi; -\frac{7\pi}{2}\right]$.

9. а) $6^{2 \sin 2x} = 36^{\sin x}$; б) $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

10. а) $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + 1 = 0$; б) $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

11. а) $3 \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x = 0$; б) $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

12. а) $\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos 2x = 0,25$; б) $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

13. $\frac{1 - 2\sin x \cos 2x - 2\sin^2 x}{\sqrt{\cos x}} = 0$.

14. а) $\frac{3}{\cos x} + 4 \operatorname{tg}^2 x + 3 = 0$; б) $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

15. а) $3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 4 \sin^3 x$; б) $\left[\frac{7\pi}{2}; \frac{9\pi}{2}\right]$.

16. а) $\log_2(\sin 2x + \cos x + 8) = 3$; б) $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

$$17. \text{ а) } \log_4(\sin 2x + \sin x + 16) = 2; \text{ б) } \left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2} \right].$$

$$18. \frac{\cos 2x + \sin x}{\sqrt{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}} = 0.$$

$$19. \text{ а) } 2\sqrt{3}\sin^2 x + 4\sqrt{3}\sin x - 4\cos x - \sin 2x = 0; \text{ б) } \left[-\frac{\pi}{2}; \pi \right].$$

$$20. \text{ а) } \cos^2 \frac{x}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin^2 \frac{x}{2}; \text{ б) } \left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right].$$

$$21. \frac{3\cos 2x + 7\cos x + 3}{\sqrt{-\sin x}} = 0.$$

$$22. \frac{2\cos x \cos 2x - 2\cos^2 x + 1}{\sqrt{\sin x}} = 0.$$

$$23. \text{ а) } 12^{\sin x} = 3^{\sin x} \cdot 4^{\cos x}; \text{ б) } \left[2\pi; \frac{7\pi}{2} \right].$$

$$24. \text{ а) } 14^{\cos x} = 2^{\cos x} \cdot 7^{-\sin x}; \text{ б) } \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi \right].$$

$$25. \text{ а) } 4\sin^4 2x + 3\cos 4x = 1; \text{ б) } \left[\pi; \frac{3\pi}{2} \right].$$

$$26. \text{ а) } 2\cos x + \sqrt{2} = \sin 2x + \sqrt{2}\sin x; \text{ б) } \left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right].$$

$$27. \text{ а) } 4\cos x - \sin x + 1 = 2\sin 2x; \text{ б) } \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right].$$

$$28. \text{ а) } \sin 2x - 1 = \sin x - 2\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right); \text{ б) } \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right].$$

$$29. \text{ а) } 2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sin 2x; \text{ б) } \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right].$$

$$30. \text{ а) } 1 + \cos 6x = 2\sin^2 5x; \text{ б) } \left[0; \frac{\pi}{4} \right].$$

$$31. \text{ а) } 9^{\sin x} + 9^{-\sin x} = 3\frac{1}{3}; \text{ б) } \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right].$$

$$32. \text{ а) } 16^{\cos x} + 3 \cdot 2^{2\cos x} = 10; \text{ б) } \left[\pi; \frac{5\pi}{2} \right].$$

$$33. \text{ а) } \frac{3^{2\sin 2x} - 9^{\sqrt{2}\sin x}}{\sqrt{3\sin x}} = 0; \text{ б) } \left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi \right].$$

$$34. (4 - 2\sin^2 x - 5\cos x) \cdot \log_2(-\sin x) = 0.$$

$$35. \text{ а) } 2\log_{\frac{1}{2}}^2(2\sin x) + 7\log_{\frac{1}{2}}(2\sin x) + 3 = 0; \text{ б) } \left[-\frac{3\pi}{2}; 0 \right].$$

$$36. \text{ а) } (\operatorname{tg}^2 x - 1)\sqrt{7\cos x} = 0; \text{ б) } \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2} \right].$$

$$37. \text{ а) } (2\sin x - 1)(\sqrt{-\cos x} + 1) = 0; \text{ б) } \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi \right].$$

$$38. \text{ а) } (\cos x + \sqrt{2}\sin^2 x - \sqrt{2})\sqrt{-5\sin x} = 0; \text{ б) } \left[2\pi; \frac{7\pi}{2} \right].$$

$$39. \text{ а) } \frac{31 - 26\sin^2 x - 23\cos x}{13\sin x - 12} = 0; \text{ б) } \left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi \right].$$

$$40. \text{ а) } 1 + \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{\cos\left(2x - \frac{3\pi}{2}\right)}; \text{ б) } \left[-2\pi; -\frac{\pi}{2} \right].$$

§ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение называется рациональным, если оно содержит переменную в целой степени.

Чаще встречаются следующие типы:

1. Линейные.
2. Квадратные.
3. Кубические.
4. Уравнения высших степеней.
5. Дробно-рациональные.

Линейные уравнения

Это уравнения вида $ax = b$, где $a \neq 0$, b — некоторые числа.

Квадратные уравнения

Уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Кубические уравнения

Имеют вид $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где $a \neq 0$, b , c , d — некоторые числа.

Целые корни (если они имеются) содержатся среди делителей свободного члена d .

Если найден корень $x = a$, то можно понизить степень кубического уравнения, приводя его к квадратному, для чего надо многочлен 3-й степени разделить столбиком (или иначе) на выражение $(x - a)$, где a — корень многочлена.

Уравнения высших степеней

Имеют вид $ax^n = b$, где $a \neq 0$.

Дробно-рациональные уравнения

Это уравнения, содержащие переменную в знаменателе дроби. При решении таких уравнений надо найти ОДЗ, умножить обе части уравнения на общий знаменатель дробей, упростить полученное уравнение, найти его корни, исключив те из них, которые не входят в ОДЗ.

Краткая теория и справочные материалы

Основные формулы алгебры

1. Уравнение I степени (линейное)

Общий вид: $ax + b = 0$.

1) Если $a \neq 0$, $a \in R$, $b \in R$, то $x = -b/a$ (корень уравнения).

2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет.

3) Если $a = b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней.

2. Уравнение II степени (квадратное)

Общий вид: $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

a — I (старший) коэффициент, b — II коэффициент, c — свободный член.

$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант (различитель).

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

2) Если $D = 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$ — один корень.

3) Если $D < 0$, то корней нет (действительных).

Частные случаи:

1) Неполные квадратные уравнения:

а) $ax^2 + c = 0$, $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$, если a и c имеют разные знаки; если a и c имеют одинаковые знаки, то корней нет;

б) $ax^2 + bx = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -b/a$;

в) $ax^2 = 0$, $x = 0$.

2) Квадратное уравнение приведенного вида

$$x^2 + px + q = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

3) Квадратное уравнение вида

$$ax^2 + 2kx + c = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

3. Теорема Виета

а) Для квадратного уравнения общего вида:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

б) Для приведенного вида:

$$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 x_2 = q.$$

Теорема, обратная теореме Виета

Если p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p; x_1 x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

4. Разложение квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена, $D > 0$.

Если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

5. Биквадратное уравнение

Общий вид: $ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$.

Заменой $x^2 = y$ приводят к квадратному уравнению вида

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Корни биквадратного уравнения

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

6. Возвратное уравнение IV степени

Общий вид: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bmx + am^2 = 0, a \neq 0$.

Приводится к виду $a\left(x^2 + \frac{m^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{m}{x}\right) + c = 0$ и заменой $y = x + \frac{m}{x}$

и $y^2 - 2m = x^2 + \frac{m^2}{x^2}$ приводится к квадратному уравнению

$$ay^2 + by + (c - 2am) = 0.$$

Частные случаи:

1) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, $m = 1$ — симметрическое уравнение I рода.

Решается подстановкой $y = x + \frac{1}{x}$.

2) $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$, $m = -1$ — симметрическое уравнение II рода.

Решается подстановкой $y = x - \frac{1}{x}$.

7. Свойства степеней

Для любых действительных x , y и $a > 0$, $b > 0$ верны равенства:

$a^0 = 1$ (по определению);

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $a^x : a^y = a^{x-y}$;

$(a^x)^y = a^{xy}$; $(ab)^x = a^x b^x$;

$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$; $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$; $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

8. Формулы сокращенного умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — разность квадратов;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — куб суммы;

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб разности;

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) =$

$= (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ — сумма кубов;

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) =$

$= (a - b)^3 + 3ab(a - b)$ — разность кубов.

Дополнительные формулы

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$;

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$;

$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) =$

$= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$;

$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;

$$\begin{aligned}
 a^5 + b^5 &= (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4); \\
 a^6 - b^6 &= (a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = \\
 &= (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5); \\
 a^6 + b^6 &= (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b + b^4).
 \end{aligned}$$

Примеры с решениями

Пример 1. а) Решите уравнение

$$x(19 - x)(19 + x^2) = 84(x + 1)^2.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7}{2}; 12\right]$.

Решение.

а) Можно, конечно, раскрыть скобки, привести уравнение к стандартному, а затем попытаться разложить многочлен 3-й степени на множители.

Решим уравнение иначе, более изящным способом. Заметим, что $x = -1$ не является корнем уравнения, тогда, разделив обе части на $(x + 1)^2 \neq 0$, получим равносильное уравнение:

$$x \left(\frac{19 - x}{x + 1} \right) \cdot \frac{19 + x^2}{x + 1} = 84, \text{ или } x \left(\frac{19 - x}{x + 1} \right) \left(x + \frac{19 - x}{x + 1} \right) = 84.$$

Пусть $x \cdot \frac{19 - x}{x + 1} = a$, $x + \frac{19 - x}{x + 1} = b$, тогда $ab = 84$,

$$a + b = \frac{19 - x}{x + 1} (x + 1) + x = 19.$$

Следовательно, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a + b = 19, \\ ab = 84, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} a_1 = 12, \\ b_1 = 7, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_2 = 7, \\ b_2 = 12. \end{cases}$$

Поскольку $b = x + \frac{19 - x}{x + 1} = \frac{x^2 + 19}{x + 1}$, то получим два уравнения:

$$1) \frac{x^2 + 19}{x + 1} = 7, \quad 2) \frac{x^2 + 19}{x + 1} = 12, \text{ или}$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0, \quad x^2 - 12x + 7 = 0, \text{ откуда}$$

$$x_1 = 3, x_2 = 4. \quad x_{3,4} = 6 \pm \sqrt{29}.$$

б) $x_1 = 3 \notin \left[\frac{7}{2}; 12\right]$, так как $3 < \frac{7}{2}$;

$x_2 = 4 \in \left[\frac{7}{2}; 12\right]$.

Сравним $6 - \sqrt{29}$ и $\frac{7}{2}$, $6 - 3,5$ и $\sqrt{29}$, $2,5$ и $\sqrt{29}$.

Но $\sqrt{29} > \sqrt{25} = 5$, т. е. $2,5 < \sqrt{29}$.

Значит, $6 - \sqrt{29} < \frac{7}{2}$, или $6 - \sqrt{29} \notin \left[\frac{7}{2}; 12\right]$.

Сравним $6 + \sqrt{29}$ и $\frac{7}{2}$.

$\frac{7}{2} = 3,5$, значит, $6 + \sqrt{29} > \frac{7}{2}$.

Теперь сравним $6 + \sqrt{29}$ и 12 .

$\sqrt{29}$ и $12 - 6$, $\sqrt{29}$ и 6 , $\sqrt{29} < \sqrt{36}$.

Значит, $6 + \sqrt{29} < 12$, т. е. $6 + \sqrt{29} \in \left[\frac{7}{2}; 12\right]$.

Ответ: а) 3; 4; $6 \pm \sqrt{29}$; б) 4; $6 + \sqrt{29}$.

Пример 2. а) Решите уравнение

$$8(1 - 3x)^3 - 27(x - 2)^3 = 343 - 729x^3.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 0]$.

Решение.

а) Заметим, что равенство $2(1 - 3x) - 3(x - 2) = 7 - 9x$ является тождеством. Учитывая, что члены исходного уравнения являются соответственно кубами членов этого тождества, разделим обе части данного уравнения на полученное тождество:

$$4(1 - 3x)^2 + 6(1 - 3x)(x - 2) + 9(x - 2)^2 = 49 + 63x + 81x^2,$$

откуда (после упрощений) получим квадратное уравнение

$$18x^2 + 27x + 7 = 0, \text{ корни которого } x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = -\frac{7}{6}.$$

Еще один корень получим из уравнения $7 - 9x = 0$, откуда $x_3 = \frac{7}{9}$.

Итак, исходное уравнение имеет ровно 3 корня.

б) $x_1 = -\frac{1}{3} \in [-2; 0]$, так как $-2 < -\frac{1}{3} < 0$;

$x_2 = -\frac{7}{6} \in [-2; 0]$, так как $-2 < -\frac{7}{6} < 0$;

$x_3 = \frac{7}{9} \notin [-2; 0]$, так как $\frac{7}{9} > 0$.

Ответ: а) $-\frac{1}{3}$; $-\frac{7}{6}$; $\frac{7}{9}$.

Пример 3. а) Решите уравнение

$$x^4 - (2x - 3)(4x^2 - 6x + 9) = 0.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[\sqrt{7}; 4]$.

Решение.

а) Заметим, что раскрытие скобок лишь усложняет решение, а неполный квадрат разности $4x^2 - 6x + 9$ ничего не дает.

Нетрудно видеть, что $x = 1,5$ не является корнем данного уравнения, тогда, разделив обе части уравнения на $(2x - 3)^2 \neq 0$, получим

$$\frac{x^4}{(2x-3)^2} - \frac{4x^2-6x+9}{2x-3} = 0, \text{ или } \frac{x^4}{(2x-3)^2} - \frac{4x^2}{2x-3} + \frac{3(2x-3)}{2x-3} = 0, \text{ или}$$

$$\frac{x^4}{(2x-3)^2} - \frac{4x^2}{2x-3} + 3 = 0.$$

Теперь идея решения ясна.

Пусть $\frac{x^2}{2x-3} = y$, тогда имеем $y^2 - 4y + 3 = 0$, откуда $y_1 = 1$, $y_2 = 3$.

Если $y = 1$, то $\frac{x^2}{2x-3} = 1$, $x^2 - 2x + 3 = 0$ — нет действительных корней.

Если $y = 3$, то $\frac{x^2}{2x-3} = 3$, $x^2 - 6x + 9 = 0$, или $(x - 3)^2 = 0$,

т. е. $x = 3$ — единственный корень исходного уравнения.

б) Сравним 3 и $\sqrt{7}$, $\sqrt{9} > \sqrt{7}$.

Значит, $3 > \sqrt{7}$ и $3 < 4$, т. е. $\sqrt{7} < 3 < 4$.

Ответ: а) 3; б) 3.

Пример 4. а) Решите уравнение

$$x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 4 = 0.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[2; \sqrt{10}]$.

Решение.

а) Испытывая делитель свободного члена, можно убедиться, что уравнение не имеет целых корней (если вообще имеет). Тем интереснее нахождение идеи решения.

Запишем уравнение в виде

$$x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 6x^2. \quad (1)$$

Прибавим к обеим частям (1) по $\frac{1}{4}x^2$ (чтобы выделить полный квадрат):

$$\left(x^4 + x^3 + \frac{1}{4}x^2\right) - 4\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) + 4 = 6x^2 + \frac{1}{4}x^2, \text{ или}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2 - 4\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right) + 4 = \frac{25}{4}x^2. \quad (2)$$

Теперь видим, что левая часть (2) — квадрат разности двух чисел:

$x^2 + \frac{1}{2}x$ и 2, тогда уравнение (2) запишется в виде

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}x - 2\right)^2 = \frac{25}{4}x^2,$$

откуда имеем два уравнения:

$$1) \quad x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = \frac{5}{2}x,$$

$$2) \quad x^2 + \frac{1}{2}x - 2 = -\frac{5}{2}x,$$

$$\text{или } x^2 - 2x - 2 = 0,$$

$$\text{или } x^2 + 3x - 2 = 0,$$

$$D/4 = 1 + 2 = 3 > 0,$$

$$D = 9 + 8 = 17 > 0,$$

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3};$$

$$x_{3,4} = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{17}).$$

Итак, исходное уравнение имеет 4 корня.

б) $x_1 = 1 - \sqrt{3} \notin [2; \sqrt{10}]$, так как $1 - \sqrt{3} < 2 < 0$;

$x_2 = 1 + \sqrt{3} \in [2; \sqrt{10}]$, так как $2 < 1 + \sqrt{3} < \sqrt{10}$;

$x_3 = \frac{1}{2}(-3 - \sqrt{17}) < 0$, т. е. $\frac{1}{2}(-3 - \sqrt{17}) \notin [2; \sqrt{10}]$;

$x_4 = \frac{1}{2}(-3 + \sqrt{17})$.

Сравним $\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{17})$ и 2, $-3 + \sqrt{17}$ и 4; $\sqrt{17}$ и $4 + 3$; $\sqrt{17} < 7$.

Значит, $\frac{1}{2}(-3 + \sqrt{17}) < 2$.

Из найденных корней лишь корень $1 + \sqrt{3} \in [2; \sqrt{10}]$.

Ответ: а) $1 \pm \sqrt{3}$; $\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{17})$; б) $1 + \sqrt{3}$.

Пример 5. а) Решите уравнение

$$\frac{224}{x(x+6)} = \frac{112}{x(x+3)} + x^2 + 3x.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-9; \frac{2}{3}\right]$.

Решение.

а) Заметим, что $6x^2 - 17x + 12 = (3x - 4)(2x - 3)$,

$3x^2 - 7x + 4 = (3x - 4)(x - 1)$, тогда уравнение примет вид

$$\frac{1}{(3x-4)(2x-3)} + \frac{1}{(3x-4)(x-1)} = 4x^2 - 10x + 5. \quad (1)$$

ОДЗ: $x \neq \frac{4}{3}$, $x \neq \frac{3}{2}$, $x \neq 1$.

Приведем левую часть (1) к общему знаменателю:

$$\frac{x-1+2x-3}{(3x-4)(2x-3)(x-1)} = 4x^2 - 10x + 5, \text{ или}$$

$$\frac{3x-4}{(3x-4)(2x-3)(x-1)} = 4x^2 - 10x + 5, \text{ или}$$

$$\frac{1}{(2x-3)(x-1)} = 2(2x^2 - 5x + 3) - 1. \quad (2)$$

Но $2x^2 - 5x + 3 = (2x - 3)(x - 1)$, тогда (2) запишется в виде

$$\frac{1}{(2x-3)(x-1)} = 2(2x-3)(x-1) - 1. \quad (3)$$

Заменой $(2x - 3)(x - 1) = y$ уравнение (3) приводится к виду

$$\frac{1}{y} = 2y - 1, \text{ или } 2y^2 - y - 1 = 0, \text{ откуда находим } y_1 = 1, y_2 = -\frac{1}{2}.$$

Учитывая замену, получим два уравнения:

$$1) (2x - 3)(x - 1) = 1, \quad 2) (2x - 3)(x - 1) = -\frac{1}{2},$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0, \quad 2x^2 - 5x + 3 = -\frac{1}{2},$$

$$\text{откуда } x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}; \quad \text{или } 4x^2 - 10x + 7 = 0 \text{ —}$$

нет корней, так как

$$D < 0.$$

Оба найденных корня удовлетворяют ОДЗ, значит, являются корнями исходного уравнения.

$$\text{б) } x_1 = 2 \notin \left[-9; \frac{2}{3}\right], \text{ так как } 2 > \frac{2}{3};$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \notin \left[-9; \frac{2}{3}\right], \text{ так как } -9 < \frac{1}{2} < \frac{2}{3}.$$

Ответ: а) 2; $\frac{1}{2}$; б) 2.

Пример 6. а) Решите уравнение

$$\frac{1}{2x^2 - 5x + 3} + \frac{1}{6x^2 - 19x + 15} = 2(6x^2 - 16x + 9).$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5}{3}; 3\right]$.

Решение.

а) Заметим, что $2x^2 - 5x + 3 = (2x - 3)(x - 1)$ и $6x^2 - 19x + 15 = (2x - 3)(3x - 5)$, тогда данное уравнение примет вид

$$\frac{1}{(2x - 3)(3x - 5)} + \frac{1}{(2x - 3)(x - 1)} = 2(6x^2 - 16x + 9),$$

где $x \neq 1,5$; $x \neq 5/3$; $x \neq 1$.

$$\text{Далее имеем } \frac{x - 1 + 3x - 5}{(2x - 3)(3x - 5)(x - 1)} = 2(6x^2 - 16x + 9),$$

$$\text{или } \frac{1}{(3x - 5)(x - 1)} = 2(3x - 5)(x - 1) - 1.$$

Пусть $(3x - 5)(x - 1) = y$, тогда получим $\frac{1}{y} = 2y - 1$, или $2y^2 - y - 1 = 0$.

Так как $2 - 1 - 1 = 0$, то $y_1 = 1$, $y_2 = -\frac{1}{2}$.

Имеем два уравнения:

1) $(3x - 5)(x - 1) = 1$, или $3x^2 - 8x + 4 = 0$, откуда находим $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{2}{3}$;

2) $(3x - 5)(x - 1) = -\frac{1}{2}$, или $6x^2 - 16x + 11 = 0$ — нет действительных корней, так как $D < 0$.

Следовательно, исходное уравнение имеет 2 корня.

б) $x = 2 \in \left[\frac{5}{3}; 3\right]$, так как $\frac{5}{3} < 2 < 3$.

$x = \frac{2}{3} < 1$, а $\frac{5}{3} > 1$, значит, $\frac{2}{3} \notin \left[\frac{5}{3}; 3\right]$.

Ответ: а) 2; $\frac{2}{3}$; б) 2.

Пример 7. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{x+3}{x+2}\right)^2 + \left(\frac{x-3}{x-2}\right)^2 = \frac{13}{6} \cdot \frac{x^2-9}{x^2-4}.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-2; \frac{5}{4}\right]$.

Решение.

а) Пусть $\frac{x+3}{x+2} = a$, $\frac{x-3}{x-2} = b$, тогда данное уравнение запишется в виде

$$a^2 + b^2 = \frac{13}{6}ab. \quad (1)$$

Очевидно, что $b \neq 0$, так как в противном случае и $a = 0$, тогда $x = 3$ и $x = -3$ одновременно, что невозможно, поэтому, разделив обе части (1) на $b^2 \neq 0$, получим

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1 = \frac{13}{6} \cdot \frac{a}{b}.$$

Пусть $\frac{a}{b} = y$, тогда $y^2 - \frac{13}{6}y + 1 = 0$, или $6y^2 - 13y + 6 = 0$, откуда

$$y_1 = \frac{3}{2}, y_2 = \frac{2}{3}, \text{ тогда } \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \text{ и } \frac{a}{b} = \frac{2}{3}.$$

Учитывая подстановки, получим два уравнения:

$$1) \frac{x+3}{x+2} : \frac{x-3}{x-2} = \frac{3}{2}, \text{ или } \frac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-3)} = \frac{3}{2}, 2(x^2 + x - 6) = 3(x^2 - x - 6),$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0, \text{ откуда } x_1 = -1; x_2 = 6;$$

$$2) \frac{x+3}{x+2} : \frac{x-3}{x-2} = \frac{2}{3}. \text{ Решая аналогично, имеем } x^2 + 5x - 6 = 0, \text{ откуда}$$

$$x_3 = -6, x_4 = 1.$$

Найденные корни удовлетворяют исходному уравнению.

$$б) x_1 = -1 \in \left[-2; \frac{5}{4}\right], \text{ так как } -2 < -1 < \frac{5}{4};$$

$$x_2 = 6 \notin \left[-2; \frac{5}{4}\right], \text{ так как } 6 > \frac{5}{4};$$

$$x_3 = -6 \notin \left[-2; \frac{5}{4}\right], \text{ так как } -6 < -2;$$

$$x_4 = 1 \notin \left[-2; \frac{5}{4}\right], \text{ так как } -2 < 1 < \frac{5}{4}.$$

Ответ: а) $\pm 1; \pm 6$; б) $-1; 1$.

Пример 8. а) Решите уравнение $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{7}{8}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{10}{3}; \frac{1}{4}\right]$.

Решение.

а) I способ

Пусть $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{x+1} = b$, откуда $x = \frac{1}{a}$ и $x+1 = \frac{1}{b}$, тогда

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = x+1-x=1.$$

$$\text{Итак, } \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = 1.$$

Учитывая подстановки, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a^3 - b^3 = \frac{7}{8}, \\ \frac{a-b}{ab} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} (a-b)^3 + 3ab(a-b) = \frac{7}{8}, \\ a-b = ab. \end{cases}$$

Учитывая II уравнение системы, I уравнение запишется в виде

$$(ab)^3 + 3(ab)^2 = \frac{7}{8}, \text{ или } (2ab)^3 + 6(2ab)^2 - 7 = 0.$$

Пусть $2ab = y$, тогда $y^3 + 6y - 7 = 0$.

Нетрудно заметить, что $y = 1$ — корень полученного уравнения, тогда имеем

$$y(y^2 - 1) + 7(y - 1) = 0, \quad (y - 1)(y^2 + y + 7) = 0,$$

откуда $y = 1$ — единственный корень, так как уравнение $y^2 + y + 7 = 0$ не имеет действительных корней ($D < 0$).

Итак, $y = 1$, тогда $2ab = 1$, $ab = \frac{1}{2}$.

Но $a = \frac{1}{x}$, $b = \frac{1}{x+1}$.

Значит, $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$, откуда $\begin{cases} x(x+1) = 2, \\ x \neq 0, \\ x \neq -1. \end{cases}$

Решая уравнение $x(x+1) = 2$, т. е. $x^2 + x - 2 = 0$, находим $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Найденные корни удовлетворяют исходному уравнению.

б) $x_1 = -2 \in \left[-\frac{10}{3}; \frac{1}{4}\right]$, так как $-\frac{10}{3} < -2 < \frac{1}{4}$;

$x_2 = 1 \notin \left[-\frac{10}{3}; \frac{1}{4}\right]$, так как $1 > \frac{1}{4}$.

II способ

$$\frac{(x+1)^3 - x}{x^3(x+1)^3} = \frac{7}{8}, \text{ или } \frac{3x(x+1)+1}{(x(x+1))^3} = \frac{7}{8}.$$

Далее замена $x(x+1) = y$ приводит к уравнению $\frac{3y+1}{y^3} = \frac{7}{8}$, или

$$7y^3 - 24y - 8 = 0.$$

Можно убедиться, что $y = 2$ — корень полученного уравнения, тогда получим $7y(y^2 - 4) + 4(y - 2) = 0$, или $(y - 2)(7y^2 + 14y + 4) = 0$, откуда $y - 2 = 0$, или $7y^2 + 14y + 4 = 0$ — нет действительных корней ($D < 0$).

Если $y - 2 = 0$, то $y = 2$, тогда $x(x + 1) = 2$, и т. д. (см. I способ).

Ответ: а) -2 ; 1 ; б) -2 .

Пример 9. а) Решите уравнение

$$\frac{(x^2 - 1)^2}{x(x^2 - 1 - 2x)^3} = \frac{32}{3}.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-1; \frac{17}{6}\right]$.

Решение.

а) I способ

Так как $x \neq 0$ и $x^2 - 1 - 2x \neq 0$, то, разделив числитель и знаменатель левой части уравнения на $x^2 \neq 0$, получим

$$\frac{(x^2 - 1)^2}{x^2} : \frac{x(x^2 - 1 - 2x)}{x^2} = \frac{32}{3}, \text{ или } \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}{x - \frac{1}{x} - 2} = \frac{32}{3}.$$

Пусть $x - \frac{1}{x} = y$, тогда получим уравнение $\frac{y^2}{y - 2} = \frac{32}{3}$, или

$$3y^2 - 32y + 64 = 0, \text{ откуда находим } y_1 = 8, y_1 = \frac{8}{3}.$$

Учитывая подстановку, получим два уравнения:

$$1) x - \frac{1}{x} = 8,$$

$$2) x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3},$$

$$x^2 - 8x - 1 = 0,$$

$$3x^2 - 8x - 3 = 0,$$

$$x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{17};$$

откуда находим

$$x_3 = 3, x_4 = -\frac{1}{3}.$$

Итак, исходное уравнение имеет 4 корня.

$$б) x_1 = 4 - \sqrt{17}.$$

Сравним $4 - \sqrt{17}$ и -1 , $4 + 1$ и $\sqrt{17}$,

$$5 > \sqrt{17}, \text{ т. е. } 4 - \sqrt{17} > -1.$$

Кроме того, $4 - \sqrt{17} < 0$, значит, $4 - \sqrt{17} < \frac{17}{6}$, т. е. $4 - \sqrt{17} \in \left[-1; \frac{17}{6}\right]$;

$x_2 = 4 + \sqrt{17} > \frac{17}{6} = 2\frac{5}{6}$, т. е. $4 + \sqrt{17} \notin \left[-1; \frac{17}{6}\right]$;

$x_3 = 3 > \frac{17}{6}$; корень $x = 3 \notin \left[-1; \frac{17}{6}\right]$;

$x_4 = -\frac{1}{3} > -1$ и $-\frac{1}{3} < \frac{17}{6}$, т. е. $-\frac{1}{3} \in \left[-1; \frac{17}{6}\right]$.

II способ

Пусть $x^2 - 1 = y$, тогда уравнение примет вид

$$\frac{y^2}{x(y-2x)} = \frac{32}{3}, \text{ или } 3y^2 - 32xy + 64x^2 = 0.$$

Левую часть полученного уравнения можно разложить на множители:

$$(3y^2 - 8xy) - (24xy - 64x^2) = 0, \text{ или } y(3y - 8x) - 8x(3y - 8x) = 0,$$

$(3y - 8x)(y - 8x) = 0$, откуда, учитывая замену $x^2 - 1 = y$, получим две системы уравнений:

$$1) \begin{cases} 3y - 8x = 0, \\ x^2 - 1 = y; \end{cases} \text{ или } 3(x^2 - 1) - 8x = 0,$$

$$3x^2 - 8x - 3 = 0, \text{ откуда } x_1 = 3, x_2 = -\frac{1}{3};$$

$$2) \begin{cases} y - 8x = 0, \\ x^2 - 1 = y; \end{cases} \text{ или } x^2 - 8x - 1 = 0, \text{ и т. д. (см. I способ).}$$

Ответ: а) $4 \pm \sqrt{17}$; 3; $-\frac{1}{3}$; б) $4 - \sqrt{17}$; $-\frac{1}{3}$.

Пример 10. а) Решите уравнение $4x^2 + \frac{10}{3x} = \frac{61}{9}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 0,8]$.

Решение.

а) I способ

а) Запишем уравнение в виде $4x^2 - \frac{25}{9} = 4 - \frac{10}{3x}$, или

$$\left(2x - \frac{5}{3}\right)\left(2x + \frac{5}{3}\right) = \frac{2}{x}\left(2x - \frac{5}{3}\right), \text{ откуда имеем:}$$

$$1) 2x - \frac{5}{3} = 0, 2x = \frac{5}{3}, x_1 = \frac{5}{6};$$

$$2) 2x + \frac{5}{3} - \frac{2}{x} = 0, x \neq 0,$$

$$6x^2 + 5x - 6 = 0, \text{ откуда находим } x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = -\frac{3}{2}.$$

$$б) x_1 = \frac{5}{6} > -2.$$

$$\text{Сравним } \frac{5}{6} \text{ и } 0,8, \frac{5}{6} \text{ и } \frac{4}{5}, \frac{25}{30} > \frac{24}{30}.$$

$$\text{Значит, } \frac{5}{6} > 0,8, \text{ так как корень } x_1 = \frac{5}{6} \notin [-2; 0,8];$$

$$x_2 = \frac{2}{3} = 0,666... \text{ т. е. } -2 < \frac{2}{3} < 0,8.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{2}{3} \in [-2; 0,8];$$

$$x_3 = -\frac{3}{2} = -1,5 > -2 \text{ и } -\frac{3}{2} < 0,8, \text{ значит, } -\frac{3}{2} \in [-2; 0,8].$$

II способ

Запишем исходное уравнение в виде

$$36x^3 - 61x + 30 = 0, \text{ или}$$

$$(36x^2 - 25)x - (36x - 30) = 0, \text{ или}$$

$$(6x - 5)(6x + 5)x - 6(6x - 5) = 0,$$

$$(6x - 5)(6x^2 + 5x - 6) = 0, \text{ откуда}$$

$$6x - 5 = 0, \text{ или } 6x^2 + 5x - 6 = 0, \text{ и т. д. (см. I способ).}$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{5}{6}; \frac{2}{3}; -\frac{3}{2}; \text{ б) } \frac{2}{3}; -\frac{3}{2}.$$

Пример 11. а) Решите уравнение

$$(x^2 - 2x - 2)^2 - x^3 = 44.$$

$$\text{б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку } \left[-3; \frac{15}{7}\right].$$

Решение.

$$\text{а) Запишем уравнение в виде } (x^2 - 2x - 2)^2 - 6^2 = x^3 + 8. \quad (1)$$

В таком представлении исходного уравнения и заключается идея решения.

Теперь разложим левую часть уравнения (1) на множители:

$$(x^2 - 2x - 2 - 6)(x^2 - 2x - 2 + 6) = x^3 + 8, \text{ или}$$

$$(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 8.$$

Но $x^3 + 8 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$, тогда получим

$$(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x + 4) = (x + 2)(x^2 - 2x + 4), \text{ или}$$

$$(x^2 - 2x + 4)(x^2 - 2x - 8 - x - 2) = 0, \text{ или}$$

$$(x^2 - 2x + 4)(x^2 - 3x - 10) = 0, \text{ откуда}$$

$$x^2 - 2x + 4 = 0, \text{ или } x^2 - 3x - 10 = 0.$$

Заметим, что уравнение $x^2 - 2x + 4 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D < 0$.

$$\text{Если } x^2 - 3x - 10 = 0, \text{ то } x_1 = 5, x_2 = -2.$$

Замечание. Если решать уравнение обычным способом, т. е. раскрытием скобки и приведением полученного уравнения к стандартному виду, то получим уравнение IV степени, решить которое не так-то просто.

$$\text{б) } -3 < -2 < \frac{15}{7}, \text{ т. е. } x = -2 \in \left[-3; \frac{15}{7}\right], \quad x = 5 > \frac{15}{7}, \text{ т. е. } 5 \notin \left[-3; \frac{15}{7}\right].$$

Ответ: а) $-2; 5$; б) -2 .

Пример 12. а) Решите уравнение

$$\frac{(x^2 + 1)^2}{(x - 1)^2 x} = \frac{25}{3}.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{4}{3}; \sqrt{10}\right]$.

Решение.

І способ

а) Запишем уравнение в виде

$$\frac{((x^2 - 2x + 1) + 2x)^2}{(x - 1)^2 x} = \frac{25}{3}, \text{ или } \frac{((x - 1)^2 + 2x)^2}{(x - 1)^2 x} = \frac{25}{3}.$$

$$\text{Далее имеем } \frac{(x - 1)^4 + 4x(x - 1)^2 + 4x^2}{(x - 1)^2 x} = \frac{25}{3}, \text{ или}$$

$$\frac{(x - 1)^2}{x} + 4 \cdot \frac{x}{(x - 1)^2} = \frac{13}{3}.$$

Пусть $\frac{(x-1)^2}{x} = y$, где $y \neq 0$, тогда получим уравнение

$$y + \frac{4}{y} = \frac{13}{3}, \text{ или } 3y^2 - 13y + 12 = 0, \text{ откуда находим } y_1 = 3, y_2 = \frac{4}{3}.$$

Учитывая замену, имеем 2 уравнения:

$$1) \frac{(x-1)^2}{x} = 3, \text{ или } x^2 - 5x + 1 = 0, x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2};$$

$$2) \frac{(x-1)^2}{x} = \frac{4}{3}, \text{ или } 3x^2 - 10x + 3 = 0, \text{ откуда находим } x_3 = 3, x_4 = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, исходное уравнение имеет 4 корня.

$$б) 4 < \sqrt{21} < 5, 0 < \frac{5 - \sqrt{21}}{2} < 0,5, 9 < 5 + \sqrt{21} < 10, 4,5 < \frac{5 + \sqrt{21}}{2} < 5,$$

$$3 < \sqrt{10} < 4.$$

Из найденных корней

$$x = \frac{5 - \sqrt{21}}{2} \in \left[\frac{4}{3}; \sqrt{10} \right] \text{ и } x = 3 \in \left[\frac{4}{3}; \sqrt{10} \right].$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}; \frac{1}{3}; 3; б) \frac{5 - \sqrt{21}}{2}; 3.$$

II способ

$$\text{Пусть } \frac{25}{3} = a, \text{ где } a > 0, x > 0.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби в левой части уравнения на $x^2 \neq 0$:

$$\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2}{x + \frac{1}{x} - 2} = a, \text{ или } \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - a\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2a = 0.$$

Обозначим $x + \frac{1}{x} = y$, тогда получим уравнение

$$y^2 - ay + 2a = 0, y_{1,2} = \frac{1}{2}(a \pm \sqrt{a^2 - 8a}).$$

$$\begin{aligned} \text{Учитывая, что } a = \frac{25}{3}, \text{ имеем } y_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{25}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{3} \left(\frac{25}{3} - 8 \right)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{25}{3} \pm \frac{5}{3} \right), \text{ откуда } y_1 = 5, y_2 = \frac{10}{3}. \end{aligned}$$

Так как $x + \frac{1}{x} = y$, то получим 2 уравнения:

$$1) x + \frac{1}{x} = 5, \text{ или } x^2 - 5x + 1 = 0, x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2};$$

$$2) x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3} = 3 + \frac{1}{3}, \text{ тогда } x_3 = 3, x_4 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Ответ: } x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}, x_3 = 3, x_4 = \frac{1}{3}.$$

III способ

Пусть $x^2 + 1 = y$, где $y > 0$, тогда исходное уравнение примет вид

$$\frac{y^2}{(y-2x)x} = \frac{25}{3}.$$

Так как $x > 0$ и $y > 0$, то получим $3y^2 - 25xy + 50x^2 = 0$,

$$D = 625x^2 - 600x^2 = (5x)^2 > 0, y_{1,2} = \frac{25x \pm 5x}{6}, y_1 = 5x, y_2 = \frac{10}{3}x.$$

Учитывая замену $x^2 + 1 = y$, получим 2 уравнения, и т. д. (см. I способ).

$$\text{Ответ: } x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}, x_3 = 3, x_4 = \frac{1}{3}.$$

IV способ

Запишем уравнение в виде $\frac{(x-1)^2 x}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{25}$, или $\frac{(x^2-2x+1)x}{(x^2+1)^2} = \frac{3}{25}$,

или $\left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1}\right) \cdot \frac{x}{x^2+1} = \frac{3}{25}$, или $\left(1 - 2 \cdot \frac{x}{x^2+1}\right) \cdot \frac{x}{x^2+1} = \frac{3}{25}$.

Далее замена $\frac{x}{x^2+1} = y$ приводит к уравнению $(1-2y)y = \frac{3}{25}$, или

$$50y^2 - 25y + 3 = 0, D = 625 - 600 = 25, y_{1,2} = \frac{25 \pm 5}{100}, y_1 = \frac{3}{10}, y_2 = \frac{1}{5}.$$

Учитывая замену $y = \frac{x}{x^2+1}$, получим:

$$1) \frac{x}{x^2+1} = \frac{3}{10}, \text{ или } 3x^2 - 10x + 3 = 0, x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3};$$

$$2) \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{5}, \text{ или } x^2 - 5x + 1 = 0, x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}, x_{3,4} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Пример 13. а) Решите уравнение

$$5x^4 - 18x^3 + 5x^2 - 1 = 0.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-1; \sqrt{2}]$.

Решение.

І способ

а) Сложность в решении данного уравнения заключается в том, что оно не имеет целых корней, в чем нетрудно убедиться, испытывая делители числа 1.

Подстановка $x = \frac{1}{y}$ приводит исходное уравнение к виду

$$\frac{5}{y^4} - \frac{18}{y^3} + \frac{5}{y^2} - 1 = 0, \text{ или } y^4 - 5y^2 + 18y - 5 = 0. \quad (1)$$

Нетрудно проверить, что уравнение (1) также не имеет целых корней.

Запишем его в виде $y^4 + 4y^2 + 4 = 9y^2 - 18y + 9$, или

$$(y^2 + 2)^2 = 9(y - 1)^2, \text{ откуда } y^2 + 2 = \pm 3(y - 1).$$

1) $y^2 + 2 = 3(y - 1)$, или $y^2 - 3y + 5 = 0$ — нет действительных корней, так как $D < 0$.

$$2) y^2 + 2 = -3(y - 1), \text{ или } y^2 + 3y - 1 = 0, \text{ откуда } y_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Тогда } x_{1,2} = \frac{2}{-3 \pm \sqrt{13}} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{б) } x \in [-1; \sqrt{2}].$$

$$3 < \sqrt{13} < 4, -\frac{1}{2} < \frac{3 - \sqrt{13}}{2} < 0, 1 < \sqrt{2} < 2, 6 < 3 + \sqrt{13} < 7,$$

$$3 < \frac{3 + \sqrt{13}}{2} < 3,5. \quad x = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \in [-1; \sqrt{2}].$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}; \text{ б) } \frac{3 - \sqrt{13}}{2}.$$

II способ

Трудность этого способа решения заключается в нахождении идеи решения уравнения $5x^4 - 18x^3 + 5x^2 - 1 = 0$.

Представим уравнение в виде $4x^4 + 4x^2 + 1 = 9x^2 - 18x^3 + 9x^4$, или $(2x^2 + 1)^2 = 9x^2(1 - x)^2$.

Теперь применим формулу разности квадратов:

$$(2x^2 + 1 - 3x(1 - x))(2x^2 + 1 + 3x(1 - x)) = 0, \text{ или}$$

$$(5x^2 - 3x + 1)(-x^2 + 3x + 1) = 0, \text{ откуда:}$$

$$1) 5x^2 - 3x + 1 = 0 \text{ — нет действительных корней, так как } D < 0;$$

$$2) -x^2 + 3x + 1 = 0, \text{ или } x^2 - 3x - 1 = 0, \text{ откуда } x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Пример 14. а) Решите уравнение

$$(x - 6)^2 + (x - 5)^3 + (x - 4)^4 = 2.$$

$$\text{б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку } \left[2; \frac{13}{4} \right].$$

Решение.

а) Раскрытие скобок и дальнейшее упрощение полученного уравнения приводят к уравнению IV степени. Вместе с тем исходное уравнение можно решить значительно проще, если записать его в виде

$$(x - 6)^2 - 1 + (x - 5)^3 + (x - 4)^4 - 1 = 0, \text{ или}$$

$$(x - 7)(x - 5) + (x - 5)^3 + (x^2 - 8x + 15)(x^2 - 8x + 17) = 0,$$

$$(x - 7)(x - 5) + (x - 5)^3 + (x - 5)(x - 3)(x^2 - 8x + 17) = 0,$$

$$(x - 5)(x - 7 + x^2 - 10x + 25 + (x - 3)(x^2 - 8x + 17)) = 0,$$

$$(x - 5)(x^2 - 9x + 18 + (x - 3)(x^2 - 8x + 17)) = 0,$$

$$(x - 5)((x - 3)(x - 6) + (x - 3)(x^2 - 8x + 17)) = 0,$$

$$(x - 5)(x - 3)(x^2 - 7x + 11) = 0, \text{ откуда}$$

$$x_1 = 5, x_2 = 3, x_{3,4} = \frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{5}).$$

$$\text{б) } 2 < \sqrt{5} < 3, 9 < 7 + \sqrt{5} < 10, \frac{9}{2} < \frac{1}{2}(7 + \sqrt{5}) < 5, 2 < \frac{7 - \sqrt{5}}{2} < 2,5,$$

$$3 < \frac{13}{4} < 4.$$

Значит, $x = 5 \in \left[2; \frac{13}{4}\right]$, $x = 3 \in \left[2; \frac{13}{4}\right]$, $x = \frac{1}{2}(7 - \sqrt{5}) \in \left[2; \frac{13}{4}\right]$.

Ответ: а) 3; 5; $\frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{5})$; б) $\frac{1}{2}(7 - \sqrt{5})$; 3.

Пример 15. а) Решите уравнение

$$(3 - x)^3 - (x - 5)^3 = 8(4 - x)^3.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\sqrt{15}; \frac{19}{3}\right]$.

Решение.

І способ

а) Запишем уравнение в виде

$$(3 - x)^3 + (5 - x)^3 = 8(4 - x)^3, \text{ или } (3 - x)^3 + (5 - x)^3 = (8 - 2x)^3.$$

Пусть $3 - x = a$, $5 - x = b$, тогда $8 - 2x = a + b$, или $a^3 + b^3 = (a + b)^3$, откуда получим $3ab(a + b) = 0$, или $ab(a + b) = 0$.

1) $ab = 0$, $a = 0$, или $b = 0$.

Если $a = 0$, то $3 - x = 0$, $x_1 = 3$;

если $b = 0$, то $5 - x = 0$, $x_2 = 5$.

2) $a + b = 0$, или $(3 - x) + (5 - x) = 0$, откуда $x_3 = 4$.

б) $x \in \left[\sqrt{15}; \frac{19}{3}\right]$.

$$x = 4 = \sqrt{16} > \sqrt{15} < \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}, \text{ значит, } x = 4 \in \left[\sqrt{15}; \frac{19}{3}\right].$$

$$x = 3 = \sqrt{9} < \sqrt{15}, \text{ т. е. } x = 3 \notin \left[\sqrt{15}; \frac{19}{3}\right].$$

$$x = 5 = \sqrt{25} > \sqrt{15} < \frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}, \text{ т. е. } x = 5 \in \left[\sqrt{15}; \frac{19}{3}\right].$$

Ответ: а) 4; 3; 5; б) 4; 5.

ІІ способ

Применив формулу разности кубов, запишем исходное уравнение в виде $(3 - x - x + 5)((3 - x)^2 + (3 - x)(x - 5) + (x - 5)^2) = 8(4 - x)^3$, или $(4 - x)(9 - 6x + x^2 + 3x - x^2 + 5x - 15 + x^2 - 10x + 25) = 4(4 - x)^3$, или $(4 - x)(x^2 - 8x + 19) = 4(4 - x)^3$, откуда:

1) $x_1 = 4$; 2) $x^2 - 8x + 19 = 4(4 - x)^2$, или $x^2 - 8x + 15 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

Ответ: а) 4; 3; 5; б) 4; 5.

Примеры для самостоятельного решения

$$1. \text{ а) } (x^2 + 8x + 8)^3 = x^2(x^2 + 14x + 8); \text{ б) } \left[-3; -\frac{10}{3}\right].$$

$$2. \text{ а) } (2x - 5)^2 + 8(x - 2)^3 + (2x - 3)^4; \text{ б) } \left[\frac{3}{2}; 2\right].$$

$$3. \text{ а) } (x^2 - 4x)^2 - 2(x - 2)^2 = 7; \text{ б) } \left[-2; \frac{5}{3}\right].$$

$$4. \text{ а) } (x^2 + x + 6)^2 + 6x(x^2 + x + 6) + 8x^2 = 0; \text{ б) } \left[-2, 5; \frac{2}{3}\right].$$

$$5. \text{ а) } \frac{x^2}{25} + \frac{36}{x^2} = \frac{16}{5} \cdot \left(\frac{x}{5} - \frac{6}{x}\right); \text{ б) } [10; 13].$$

$$6. \text{ а) } x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8; \text{ б) } [-1; 1].$$

$$7. \text{ а) } x^2 + \left(\frac{5x}{x+5}\right)^2 = \frac{125}{4}; \text{ б) } \left[-4, 5; \frac{17}{6}\right].$$

$$8. \text{ а) } \frac{3x}{2x^2 - 4x - 9} + \frac{5x}{2x^2 - 2x - 9} = 2; \text{ б) } \left[\frac{1}{6}; 5\right].$$

$$9. \text{ а) } x^2 - 7x + \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} + 10 = 0; \text{ б) } \left[\frac{16}{3}; 6\right].$$

$$10. \text{ а) } \frac{x-36}{41} + \frac{x-41}{36} = \frac{36}{x-41} + \frac{41}{x-36}; \text{ б) } [-1; 78].$$

$$11. \text{ а) } (x^2 + x + 1)^2 = x^2(7x^2 + x + 1); \text{ б) } \left[-\frac{1}{3}; \sqrt{2}\right].$$

$$12. \text{ а) } (x^2 + 8x + 8)^2 = x^3 + 10x^2 + 8x; \text{ б) } \left[-\frac{5}{3}; \sqrt{3}\right].$$

$$13. \text{ а) } (1 + x)^4 + (1 + x^2)^2 = 4x^2; \text{ б) } \left[-\frac{5}{6}; \frac{1}{3}\right].$$

$$14. \text{ а) } 2(x^2 - x + 1)^2 = x^2(8x^2 - 5x + 5); \text{ б) } \left[\frac{1}{\sqrt{5}}; 1\right].$$

$$15. \text{ а) } (x^2 - 4x)^2 - 2(x - 2) = 7; \text{ б) } \left[\frac{16}{7}; \sqrt{10}\right].$$

§ 3. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Краткая теория и справочные материалы

Это уравнения, содержащие неизвестное под знаком корня (радикала).

При решении иррациональных уравнений речь идет о нахождении только действительных корней.

Основные методы решения иррациональных уравнений:

- 1) возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень;
- 2) введение новых переменных;
- 3) искусственные приемы решения.

Заметим, что все корни *четной* степени, входящие в уравнение, являются арифметическими, а все корни *нечетной* степени определены при любом действительном значении подкоренного выражения.

При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень следует учесть, что если n — четное число, то уравнение $(f(x))^n = (\varphi(x))^n$ является следствием уравнения $f(x) = \varphi(x)$, т. е. при переходе от уравнения $f(x) = \varphi(x)$ к уравнению $(f(x))^n = (\varphi(x))^n$ могут появиться посторонние корни.

При решении иррациональных уравнений используется формула $\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^n = f(x)$, применение которой может привести к расширению области определения уравнения в случае четного n .

По этим причинам (и другим) при решении иррациональных уравнений в большинстве случаев необходима *проверка* найденных корней.

Сам способ проверки зависит от вида найденных решений (простые и сложные), а также от способа решения уравнения.

В случае, когда при решении уравнений получаются громоздкие корни (и проверка затруднительна), целесообразнее переходить к равносильным системам уравнений и неравенств (смешанным системам).

Свойства арифметических корней

Для любых натуральных $n > 1$ и $k > 1$ и любых $a \geq 0$, $b \geq 0$ верны равенства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0);$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k};$$

$$(\sqrt[n]{a})^n = a \quad (a \geq 0);$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ если } 0 \leq a < b;$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{при } a \geq 0, \\ -a, & \text{при } a < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|;$$

$$\sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0).$$

Примеры с решениями

Пример 1. Решите уравнение

$$\sqrt{(5+x)^3} - \sqrt{(5-x)^3} = \frac{13}{2}x.$$

Решение.

Пусть $\sqrt{5+x} = a$, $\sqrt{5-x} = b$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$, тогда

$$\begin{cases} 5+x = a^2, \\ 5-x = b^2. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 5+x = a^2, \\ 5-x = b^2. \end{cases} \quad (2)$$

Складывая и вычитая (1) и (2), получим

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(a^2 - b^2), \\ a^2 + b^2 = 10. \end{cases} \quad (3)$$

С учетом соотношений (1), (2) и (3) исходное уравнение примет вид

$$a^3 - b^3 = \frac{13}{4}(a^2 - b^2).$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a^3 - b^3 = \frac{13}{4}(a^2 - b^2), \\ a^2 + b^2 = 10. \end{cases} \quad (4)$$

Из (4) получим

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = \frac{13}{4}(a-b)(a+b). \quad (5)$$

С учетом (5) имеем две системы уравнений:

$$1) \begin{cases} a-b=0, \\ a^2+b^2=10; \end{cases} \begin{cases} a=b, \\ b^2=5; \end{cases} \begin{cases} a=\sqrt{5}, \\ b=\sqrt{5}, \end{cases} \text{ где } a \geq 0, b \geq 0.$$

Тогда из (3) находим $x_1 = 0$;

$$2) \begin{cases} a^2+ab+b^2 = \frac{13}{4}(a+b), \\ a^2+b^2=10. \end{cases}$$

Преобразуем полученную систему к виду

$$\begin{cases} (a+b)^2 = \frac{13}{4}(a+b) + ab, \\ (a+b)^2 - 2ab = 10. \end{cases}$$

Пусть $a+b=u$, $ab=v$, тогда имеем

$$\begin{cases} u^2 = \frac{13}{4}u + v, \\ u^2 = 2v + 10. \end{cases}$$

Решая подстановкой, находим $2v + 10 = \frac{13}{4}u + v$, $v = \frac{13}{4}u - 10$,

тогда I уравнение примет вид $2u^2 - 13u + 20 = 0$, откуда $u_1 = 4$, $u_2 = \frac{5}{2}$,

тогда $v_1 = 13 - 10 = 3$, $v_2 = \frac{65}{8} - 10 = -\frac{15}{8}$.

Учитывая подстановки, получим две системы уравнений:

$$\begin{cases} a+b=4, \\ ab=3, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} a=3, \\ b=1; \end{cases} \begin{cases} a=1, \\ b=3, \end{cases} \text{ тогда из (3) находим } x_2 = \frac{1}{2}(3^2 - 1^2) = 4,$$

$x_3 = -4$.

Аналогично получим систему $\begin{cases} a+b = \frac{5}{2}, \\ ab = -\frac{15}{8}, \end{cases}$ которая не имеет реше-

ний ввиду того, что $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Ответ: 0; ± 4 .

Пример 2. а) Решите уравнение

$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{8}{13} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{4}{3}; \frac{8}{9}\right]$.

Решение.

а)

I способ

Идея решения заключается в применении формулы

$$\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} = 2 \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}.$$

Пусть $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = t$, тогда $\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{t}$,

$$t^3 + \frac{1}{t^3} = \frac{1-x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x} = \frac{2(1+x^2)}{1-x^2}, \text{ откуда } \frac{1+x^2}{1-x^2} = \frac{1}{2} \left(t^3 + \frac{1}{t^3} \right).$$

В этом случае исходное уравнение запишется в виде

$$t + \frac{1}{t} = \frac{4}{13} \left(t^3 + \frac{1}{t^3} \right), \text{ или } t + \frac{1}{t} = \frac{4}{13} \left(t + \frac{1}{t} \right) \left(t^2 + \frac{1}{t^2} - 1 \right). \quad (1)$$

Заметим, что $t + \frac{1}{t} \neq 0$, тогда уравнение (1) примет вид

$$13 = 4 \left(t^2 + \frac{1}{t^2} - 1 \right), \text{ или } 13t^2 = 4(t^4 - t^2 + 1), \text{ или } 13t^2 = 4t^4 - 4t^2 + 4, \text{ или}$$

$$4t^4 - 17t^2 + 4 = 0, \text{ откуда находим } (t^2)_1 = 4, (t^2)_2 = \frac{1}{4}, \text{ т. е. } t_{1,2} = \pm 2,$$

$$t_{3,4} = \pm \frac{1}{2}.$$

Учитывая замену $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = t$, выразим x через t :

$$\frac{1+x}{1-x} = t^3, \text{ или } \frac{2}{2x} = \frac{t^3+1}{t^3-1}, \text{ откуда } x = \frac{t^3-1}{t^3+1}.$$

$$\text{Если } t = -2, \text{ то } x = \frac{-9}{-7} = \frac{9}{7}; \text{ если } t = 2, \text{ то } x = \frac{7}{9};$$

$$\text{если } t = \frac{1}{2}, \text{ то } x = -\frac{7}{9}; \text{ если } t = -\frac{1}{2}, \text{ то } x = -\frac{9}{7}.$$

Итак, исходное уравнение имеет 4 корня.

$$\text{б) } x = \frac{9}{7} > \frac{8}{9}, \text{ значит, корень } x = -\frac{9}{7} \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{8}{9}\right];$$

$$x = -\frac{9}{7} = -1\frac{2}{7} \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{8}{9}\right], \text{ так как } -\frac{9}{7} > -\frac{4}{3};$$

$$x = -\frac{7}{9} \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{8}{9}\right], \text{ т. е. } -\frac{4}{3} = -\frac{12}{9} < -\frac{7}{9};$$

$$x = \frac{7}{9} < \frac{8}{9}, \text{ значит, } \frac{7}{9} \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{8}{9}\right].$$

II способ

Идея решения основана на том, что если $a + b + c = 0$, то $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

В нашем случае

$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} = a, \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = b, -\frac{8}{13} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2} = c.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{1+x} - \frac{8^3}{13^3} \cdot \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^3 &= -3 \cdot \frac{8}{13} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2}, \text{ или} \\ \frac{2(1+x^2)}{1-x^2} - \frac{8^3}{13^3} \cdot \left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^3 &= -\frac{24}{13} \cdot \frac{1+x^2}{1-x^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее замена $\frac{1+x^2}{1-x^2} = y$ приводит уравнение (2) к виду

$$\begin{aligned} 2y - \frac{8^3}{13^3} \cdot y^3 &= -\frac{24}{13}y, \text{ или } \frac{50}{13}y - \frac{8^3}{13^3}y^3 = 0, \text{ откуда находим } y_1 = 0, \text{ или} \\ y^2 &= \frac{65^2}{16^2}, \text{ т. е. } y_{2,3} = \pm \frac{65}{16}. \end{aligned}$$

Аналогично, учитывая замену $\frac{1+x^2}{1-x^2} = y$, находим $x_{1,2} = \pm \frac{9}{7}$,

$$x_{3,4} = \pm \frac{7}{9}.$$

Замечание. Если $y = 0$, то уравнение $\frac{1+x^2}{1-x^2} = 0$ не имеет действительных корней.

$$\text{Ответ: а) } \pm \frac{9}{7}; \pm \frac{7}{9}; \text{ б) } -\frac{9}{7}; \pm \frac{7}{9}.$$

Пример 3. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x+27} + \sqrt[3]{1-x} = 4.$$

Решение.

І способ

Идея решения заключается в применении формулы куба суммы, записанного в виде

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

В этом случае уравнение примет вид

$$\begin{aligned} x+27+1-x+3\sqrt[3]{(x+27)(1-x)} \cdot 4 &= 64, \text{ или} \\ 12 \cdot \sqrt[3]{(x+27)(1-x)} &= 36, \text{ или } \sqrt[3]{(x+27)(1-x)} = 3. \end{aligned} \quad (1)$$

Теперь возведем в куб обе части (1):

$$(x+27)(1-x) = 27, \text{ или } x^2 + 26x = 0, \quad x(x+26) = 0, \text{ откуда } x_1 = 0, \quad x_2 = -26.$$

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

ІІ способ

Пусть $\begin{cases} x+27=a^3, \\ 1-x=b^3, \end{cases}$ тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} a^3+b^3=28, \\ a+b=4. \end{cases} \quad (2)$$

Систему (2) можно решить способом подстановки или применив формулы куба суммы и т. д.

ІІІ способ

Известно, что если $a+b+c=0$, то $a^3+b^3+c^3=3abc$.

В этом случае исходное уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned} (x+27) + (1-x) - 64 &= 3\sqrt[3]{x+27} \cdot \sqrt[3]{1-x} \cdot (-4), \text{ или } 9 = 3\sqrt[3]{x+27} \cdot \sqrt[3]{1-x}, \\ \text{или } \sqrt[3]{(x+27)(1-x)} &= 3, \text{ и т. д. (см. І способ).} \end{aligned}$$

Ответ: $-26; 0$.

Пример 4. Решите уравнение

$$5(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x-4}+2)=3x.$$

Решение.

ОДЗ: $x \geq 4$.

Поскольку $x = (\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)$, то уравнение запишется в виде

$$5(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x-4} + 2) = 3(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2).$$

В этом и заключается идея решения. Общий множитель $\sqrt{x+4} - 2$ выносим за скобки:

$$(\sqrt{x+4} - 2)(5(\sqrt{x-4} + 2) - 3(\sqrt{x+4} + 2)) = 0,$$

откуда $\sqrt{x+4} - 2 = 0$, $x + 4 = 4$, $x = 0$ (не удовлетворяет ОДЗ), или $5(\sqrt{x-4} + 2) - 3(\sqrt{x+4} + 2) = 0$, или

$$5\sqrt{x-4} - 3\sqrt{x+4} + 4 = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) можно решить стандартным способом, т. е. уединением одного из корней и последующим возведением в квадрат обеих частей полученного уравнения, и т. д.

Решим уравнение (1) иначе.

Пусть $\sqrt{x+4} = a$, $\sqrt{x-4} = b$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$, тогда $x + 4 = a^2$, $x - 4 = b^2$, т. е. $a^2 - b^2 = 8$. (2)

С учетом подстановок уравнение (1) запишется в виде

$$5b - 3a + 4 = 0. \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) рассматриваем как систему

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 8, \\ 5b - 3a + 4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 8, \\ a = \frac{1}{3}(5b + 4). \end{cases}$$

$$\frac{1}{9}(5b + 4)^2 - b^2 = 8, \text{ или } 25b^2 + 40b + 16 - 9b^2 = 72,$$

$$16b^2 + 40b - 56 = 0, \quad 2b^2 + 5b - 7 = 0.$$

Так как $2 + 5 - 7 = 0$, то $b_1 = 1$, тогда $b_2 = -\frac{7}{2}$ (не удовлетворяет условию $b \geq 0$).

$$\text{Если } b = 1, \text{ то } a = \frac{1}{3} \cdot (5 + 4) = 3.$$

Для нахождения значения x достаточно использовать значения a или b .

Если $a = 3$, то $x = 3^2 - 4 = 5$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: 5.

Пример 5. а) Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{1}{x} = 1.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $[-1; \sqrt{2}]$.

Решение.

а) ОДЗ: $\frac{x^2-1}{x} \geq 0$, откуда $x \in [-1; 0) \cup [1; +\infty)$.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{x}} - \sqrt{\frac{x-1}{x}} = \frac{x-1}{x}$, или

$$\sqrt{\frac{x-1}{x}} \left(\sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) = 0, \text{ откуда имеем } \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 0, \text{ или}$$

$$\sqrt{x+1} - 1 - \sqrt{\frac{x-1}{x}} = 0.$$

Из I уравнения находим $x_1 = 1$ — удовлетворяет ОДЗ.

Из II уравнения имеем $\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}}$, или, возведя обе части в

квадрат, получим $x+1 = 1 + 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \frac{x-1}{x}$, или $\frac{x-1}{x} + 2\sqrt{\frac{x-1}{x}} - x = 0$,

$$\frac{x-1}{x} + 2 \cdot \frac{\sqrt{x(x-1)}}{x} - x = 0,$$

$$x-1 + 2\sqrt{x(x-1)} - x^2 = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) запишем в виде

$$x(x-1) - 2\sqrt{x(x-1)} + 1 = 0. \quad (2)$$

Как видим, левая часть уравнения (2) — квадрат разности,

т. е. $(\sqrt{x(x-1)} - 1)^2 = 0$, или $\sqrt{x(x-1)} = 1$, $x(x-1) = 1$, т. е. $x^2 - x - 1 = 0$,

откуда находим $x_{2,3} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

Найденные корни удовлетворяют ОДЗ, значит, являются корнями исходного уравнения.

б) $x = 1 \in [-1; \sqrt{2}]$, так как $\sqrt{2} > 1$.

Сравним $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$ и -1 ; $1 - \sqrt{5}$ и -2 , $1 + 2$ и $\sqrt{5}$; $3 > \sqrt{5}$.

Значит, $-1 < \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) < \sqrt{2}$, т. е. $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \in [-1; \sqrt{2}]$.

Сравним $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ и $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{5}$ и $2\sqrt{2}$.

Возведем обе части в квадрат: $(1+\sqrt{5})^2$ и $(2\sqrt{2})^2$, $1+2\sqrt{5}+5$ и 8 , $6+2\sqrt{5}$ и 8 , $2\sqrt{5}$ и 2 , т. е. $2\sqrt{5} > 2$, значит, $1+\sqrt{5} > 2\sqrt{2}$, тогда корень $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \notin [-1; \sqrt{2}]$.

Ответ: а) $1; \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$; б) $1; \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.

Пример 6. а) Решите уравнение $\frac{12}{x} = 18x + \sqrt{1-x^2}$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{4}{5}; 4\right]$.

Решение.

а) ОДЗ: $x \neq 0$, $1-x^2 \geq 0$.

Запишем уравнение в виде

$$12 = 18x^2 + x\sqrt{1-x^2}, \text{ или } 12(1-x^2) = 6x^2 + x\sqrt{1-x^2}. \quad (1)$$

Заметим, что $x \neq \pm 1$, тогда, разделив обе части (1) на $1-x^2 \neq 0$, получим

$$\frac{6x^2}{1-x^2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = 12, \text{ или } 6 \cdot \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 12. \quad (2)$$

Теперь идея решения ясна.

Заменой $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = y$ уравнение (2) приводится к квадратному:

$$6y^2 + y - 12 = 0, \text{ корни которого } y_1 = \frac{4}{3}, y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Учитывая замену, имеем два уравнения:

$$1) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{4}{3}, \text{ где } x > 0, 1-x^2 > 0.$$

Далее получим $\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{16}{9}$, или $25x^2 = 16$, $x_1 = \frac{4}{5}$ (так как $x > 0$);

$$2) \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{3}{2}, \text{ где } x < 0, 1-x^2 > 0.$$

Решая аналогично, имеем $\frac{x^2}{1-x^2} = \frac{9}{4}$, $13x^2 = 9$, откуда $x_2 = -\frac{3}{\sqrt{13}}$

(так как $x < 0$).

Итак, исходное уравнение имеет 2 корня.

$$б) x = -\frac{3}{\sqrt{13}}. \text{ Сравним } -\frac{3}{\sqrt{13}} \text{ и } -\frac{4}{5}, -\frac{15}{5\sqrt{13}} \text{ и } -\frac{4\sqrt{13}}{5\sqrt{13}},$$

$$-15 \text{ и } -4\sqrt{13}, -\sqrt{225} \text{ и } -\sqrt{16 \cdot 13}, -\sqrt{225} < -\sqrt{208}.$$

$$\text{Значит, } -\frac{3}{\sqrt{13}} < -\frac{4}{5}, \text{ т. е. } -\frac{3}{\sqrt{13}} \in \left[-\frac{4}{5}; 4\right].$$

$$\text{Корень } x = \frac{4}{3} \in \left[-\frac{4}{5}; 4\right].$$

$$\text{Ответ: а) } -\frac{3}{\sqrt{13}}; \frac{4}{3}; б) \frac{4}{3}.$$

Пример 7. а) Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+2} = \sqrt[3]{x-2}.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$.

Решение.

а) После почленного возведения уравнения в куб и подстановки $\sqrt[3]{x-2}$ вместо суммы $\sqrt[3]{x+2} + \sqrt[3]{3x+2}$ имеем

$$x+2+3x+2+3\sqrt[3]{(x+2)(3x+2)} \cdot \sqrt[3]{x-2} = x-2,$$

$$3\sqrt[3]{(x+2)(3x+2)(x-2)} = -3(x+2), \text{ или}$$

$$(x+2)(3x+2)(x-2) + (x+2)^3 = 0,$$

$$(x+2)((3x+2)(x-2) + (x+2)^2) = 0,$$

откуда $x+2=0$,

$$x_1 = -2, \text{ либо } (3x+2)(x-2) + (x+2)^2 = 0,$$

$$3x^2 + 2x - 6x - 4 + x^2 + 4x + 4 = 0, 4x^2 = 0,$$

откуда $x_2 = 0$.

Из найденных корней исходному уравнению удовлетворяет лишь корень $x_1 = -2$.

Корень $x_2 = 0$ — посторонний.

Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень.

$$\text{б) } x = -2 \in \left[-3; \frac{1}{3}\right].$$

Ответ: а) -2 ; б) -2 .

Пример 8. а) Решите уравнение

$$4x^2 + 12x + 3\sqrt{x^2 + 3x + 1} = 3.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $[-1; 2]$.

Решение.

а) Понятно, что уединение корня и последующее возведение в квадрат обеих частей полученного уравнения привели бы к весьма сложному уравнению. Вместе с тем, записав уравнение в виде

$4(x^2 + 3x + 1) + 3\sqrt{x^2 + 3x + 1} = 7$ и обозначив $\sqrt{x^2 + 3x + 1} = y$, где $y \geq 0$, получим уравнение

$$4y^2 + 3y - 7 = 0.$$

Так как $4 + 3 - 7 = 0$, то $y_1 = 1$ — корень квадратного уравнения, тогда $y_1 \cdot y_2 = -\frac{7}{4}$, откуда $y_2 = -\frac{7}{4}$ (не подходит ввиду того, что $y \geq 0$).

Если $y = 1$, то $x^2 + 3x + 1 = 1$, $x^2 + 3x = 0$; $x(x + 3) = 0$, откуда $x_1 = 0$, $x_2 = -3$. Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

б) $x_1 = 0 \in [-1; 2]$, $x_2 = -3 \notin [-1; 2]$.

Ответ: а) 0 ; -3 ; б) 0 .

Пример 9. а) Решите уравнение

$$\sqrt{7(x-1)} - \sqrt{3x-4} = \sqrt{4x-3}.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[1; \frac{7}{3}\right]$.

Решение.

а) I способ

Возведя почленно обе части в квадрат, получим

$$7x - 7 - 2\sqrt{(7x-7)(3x-4)} + 3x - 4 = 4x - 3;$$

$$6x - 8 = 2\sqrt{(7x-7)(3x-4)}, \text{ или } 3x - 4 = \sqrt{(7x-7)(3x-4)}.$$

Возведем еще раз почленно в квадрат:

$$9x^2 - 24x + 16 = 21x^2 - 21x - 28x + 28;$$

$$12x^2 - 25x + 12 = 0; D = 625 - 576 = 49 = 7^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{25 \pm 7}{24}, \quad x_1 = \frac{3}{4}, \quad x_2 = \frac{4}{3}.$$

Из исходного уравнения следует, что

$$x - 1 \geq 0; \quad 3x - 4 \geq 0, \quad 4x - 3 \geq 0, \quad \text{т. е. } x \geq \frac{4}{3}.$$

Следовательно, корень $x_1 = \frac{3}{4}$ — посторонний, а корень $x_2 = \frac{4}{3}$ — удовлетворяет.

$$\text{б) } 1 < \frac{4}{3} < \frac{7}{3}, \quad \text{т. е. } x = \frac{4}{3} \in \left[1; \frac{7}{3}\right].$$

II способ

Запишем исходное уравнение в виде

$$\sqrt{7(x-1)} = \sqrt{4x-3} + \sqrt{3x-4}.$$

$$\text{Тогда } 7x - 7 = 4x - 3 + 2\sqrt{(4x-3)(3x-4)} + 3x - 4;$$

$0 = 2\sqrt{(4x-3)(3x-4)}$, откуда $(4x-3)(3x-4) = 0$, $x_1 = \frac{3}{4}$ (не удовлетворяет), $x_2 = \frac{4}{3}$.

Отсюда видно, что второе решение значительно проще по сравнению с первым.

Итак, $x = \frac{4}{3}$ — корень уравнения.

Ответ: а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{4}{3}$.

Пример 10. а) Решите уравнение

$$\frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 8x}} - \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 8x}} = \frac{3}{4x}.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $[\sqrt{80}; 10]$.

Решение.

а) Освободимся от иррациональности в знаменателе каждой из дробей:

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 8x}}{x^2 - (x^2 - 8x)} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 8x}}{x^2 - (x^2 - 8x)} = \frac{3}{4x}, \quad \frac{x + \sqrt{x^2 - 8x}}{8x} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 8x}}{8x} = \frac{3}{4x}.$$

Из условия следует, что $x \neq 0$, тогда получим

$$x + \sqrt{x^2 - 8x} - x + \sqrt{x^2 - 8x} = 6, \text{ или } \sqrt{x^2 - 8x} = 3. \quad (1)$$

Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x > 8, \\ x^2 - 8x = 9; \end{cases}$$

или $x^2 - 8x - 9 = 0$, откуда находим $x_1 = 9$, $x_2 = -1$ (не подходит).

Проверка показывает, что $x = 9$ — корень исходного уравнения.

$$\text{б) } x = 9 = \sqrt{81} > \sqrt{80}. \text{ Значит, } 9 \in [\sqrt{80}; 10].$$

Ответ: а) 9; б) 9.

Пример 11. а) Решите уравнение

$$\sqrt{x+9} = x^2 - 9.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $[-2; 3]$.

Решение.

а) ОДЗ: $x^2 - 9 \geq 0$, т. е. $x \in (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.

Пусть $\sqrt{x+9} = y$, тогда $y^2 = x + 9$, и исходное уравнение примет вид $y = x^2 - 9$.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 = x + 9, \\ y = x^2 - 9. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, имеем

$$y^2 + y = x^2 + x, \text{ или } y^2 - x^2 + y - x = 0.$$

Следовательно, $(y - x)(y + x) + (y - x) = 0$, или $(y - x)(y + x + 1) = 0$, откуда $y - x = 0$, или $y + x + 1 = 0$.

1) $y - x = 0$, $y = x$, тогда I уравнение системы запишется в виде

$$x^2 = x + 9, \text{ или } x^2 - x - 9 = 0, \text{ откуда } x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{37}}{2}.$$

2) $y + x + 1 = 0$, $y = -x - 1$, тогда II уравнение системы примет вид

$$-x - 1 = x^2 - 9, \text{ или } x^2 + x - 8 = 0, \text{ откуда } x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Поскольку $6 < \sqrt{37} < 7$, то $-3 < \frac{1 - \sqrt{37}}{2} < -2,5$, и $\frac{1 + \sqrt{37}}{2} > 3$,

$$\text{т. е. } x_1 = \frac{1 + \sqrt{37}}{2}.$$

Аналогично $5 < \sqrt{33} < 6$, тогда $2 < \frac{-1+\sqrt{33}}{2} < 2,5$, и $\frac{-1-\sqrt{33}}{2} < -3$,

т. е. $x_2 = \frac{-1-\sqrt{33}}{2}$.

б) Из а) следует, что $\frac{-1-\sqrt{33}}{2} < -3 < \frac{1+\sqrt{37}}{2} < 4$.

Значит, на отрезке $[-2; 3]$ лежит только корень $\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$.

Ответ: а) $\frac{1-\sqrt{33}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{37}}{2}$; б) $\frac{-1+\sqrt{33}}{2}$.

Пример 12. а) Решите уравнение

$$\frac{7}{x\sqrt{x^2+7}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{1}{6}.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{17}{7}; \sqrt{10}\right]$.

Решение.

І способ

а) Запишем уравнение в виде

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{7}{x\sqrt{x^2+7}} = \frac{1}{6}, \text{ или } \frac{x^2-7}{x\sqrt{x^2+7}} = \frac{1}{6}. \quad (1)$$

Возведем обе части уравнения (1) в квадрат, учитывая, что $\frac{x^2-7}{x} > 0$:

$$36(x^2-7)^2 = (x\sqrt{x^2+7})^2, \text{ или } 36x^4 - 504x^2 + 1764 = x^4 + 7x^2, \text{ или}$$

$$35x^4 - 511x^2 + 1764 = 0, \text{ или } 5x^4 - 73x^2 + 252 = 0,$$

$$D = 5329 - 5040 = 17^2 > 0, x^2 = \frac{73 \pm 17}{10}, \text{ откуда } x^2 = 9, x_{1,2} = \pm 3;$$

$$x^2 = \frac{28}{5}, x_{3,4} = \pm 2\sqrt{\frac{7}{5}} = \pm \frac{2}{5}\sqrt{35}.$$

Условию $\frac{x^2-7}{x} > 0$ удовлетворяют корни $x = 3$ и $x = -\frac{2}{5}\sqrt{35}$.

$$б) x \in \left[\frac{17}{7}; \sqrt{10} \right].$$

$$\frac{17}{7} = 2\frac{3}{7} < 3; \sqrt{10} > 3, \text{ значит, } x = 3 \in \left[\frac{17}{7}; \sqrt{10} \right].$$

$$x = -\frac{2}{5}\sqrt{35} < 0 < \frac{17}{7}, \text{ т. е. } x = -\frac{2}{5}\sqrt{35} \notin \left[\frac{17}{7}; \sqrt{10} \right].$$

Ответ: а) $-\frac{2}{5}\sqrt{35}$, 3; б) 3.

II способ

Поскольку $\frac{7}{x\sqrt{x^2+7}} = \frac{\sqrt{x^2+7}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}$, то исходное уравнение примет вид

$$\frac{\sqrt{x^2+7}}{x} - \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} - \frac{1}{6}, \text{ или } \frac{\sqrt{x^2+7}}{x} - 2\frac{x}{\sqrt{x^2+7}} + \frac{1}{6} = 0. \quad (2)$$

Пусть $\frac{\sqrt{x^2+7}}{x} = y$, тогда уравнение (2) преобразуется в квадратное

$$y - \frac{2}{y} + 6 = 0, \text{ или } 6y^2 + y - 12 = 0, \text{ откуда находим } y_1 = \frac{4}{3}, y_2 = -\frac{3}{2}.$$

Учитывая замену, получим два уравнения:

$$1) \frac{\sqrt{x^2+7}}{x} = \frac{4}{3}, \text{ где } x > 0, \text{ тогда } \frac{x^2+7}{x^2} = \frac{16}{9}, \text{ или } 16x^2 = 9x^2 + 63, \\ x^2 = 9, \text{ откуда } x = \pm 3.$$

Поскольку $x > 0$, имеем $x = 3$.

$$2) \frac{\sqrt{x^2+7}}{x} = -\frac{3}{2}, \text{ где } x < 0, \text{ тогда } \frac{x^2+7}{x^2} = \frac{9}{4}, \text{ или } 5x^2 = 28, x = \pm \frac{2}{5}\sqrt{35}, \\ \text{значит, } x = -\frac{2}{5}\sqrt{35}.$$

Итак, исходное уравнение имеет два корня:

$$x = 3 \text{ и } x = -\frac{2}{5}\sqrt{35}.$$

Ответ: а) $-\frac{2}{5}\sqrt{35}$, 3; б) 3.

III способ

Пусть $\sqrt{x^2+7}=a$, где $a > 0$, тогда $a^2 - x^2 = 7$.

Исходное уравнение примет вид $\frac{7}{ax} = \frac{x}{a} - \frac{1}{6}$, или $6x^2 - ax = 42$.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 - ax - 42, \\ a^2 - x^2 = 7; \end{cases} \begin{cases} \cdot 1 \\ \cdot 6 \end{cases} \begin{cases} 6x^2 - ax = 42, \\ 6a^2 - 6x^2 = 42. \end{cases}$$

Вычтем из I уравнения системы II:

$12x^2 - 6a^2 - ax = 0$, или $3x(4x - 3a) + 2a(4x - 3a) = 0$, или $(4x - 3a)(3x + 2a) = 0$, откуда получим:

$$1) 4x - 3a = 0, a = \frac{4}{3}x.$$

Учитывая, что $a^2 - x^2 = 7$, имеем $\frac{16}{9}x^2 - x^2 = 7$, $x^2 = 9$, $x = 3$, так как $x > 0$.

$$2) 3x + 2a = 0, a = -\frac{3}{2}x. \text{ Тогда получим уравнение } \left(-\frac{2}{3}x\right)^2 - x^2 = 7,$$

$$\frac{9}{4}x^2 - x^2 = 7, 5x^2 = 28, x^2 = \frac{28}{5}, \text{ откуда } x = -\frac{2}{5}\sqrt{35}, \text{ так как } x < 0.$$

Итак, $x = 3$ и $x = -\frac{2}{5}\sqrt{35}$ — корни исходного уравнения.

IV способ

$$\text{Пусть } \begin{cases} x\sqrt{x^2+7}=a, \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+7}}=b, x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} ab = x^2, \\ \frac{a}{b} = ab + 7, \\ \frac{7}{a} = b - \frac{1}{6}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = ab^2 + 7b, \\ a = 6ab - 42; \end{cases} \begin{cases} \cdot 6 \\ \cdot b \end{cases} \begin{cases} 6a = 6ab^2 + 42b, \\ ab = 6ab^2 - 42b. \end{cases}$$

Складывая и вычитая уравнения системы, получим

$$\begin{cases} 6a + ab = 12ab^2, \\ 6a - ab = 84b, \end{cases} a \neq 0, \text{ так как } x \neq 0.$$

$$6 + b = 12b^2, \text{ или } 12b^2 - b - 6 = 0, \text{ откуда } b_1 = \frac{3}{4}, b_2 = -\frac{2}{3}.$$

Учитывая, что $\frac{7}{a} = b - \frac{1}{6}$, получим $a = \frac{42}{6b-1}$, откуда

$$a_1 = \frac{42}{6 \cdot \frac{3}{4} - 1} = \frac{42}{\frac{9}{2} - 1} = \frac{42 \cdot 2}{9-2} = 12, \quad a_2 = \frac{42}{6 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) - 1} = \frac{42}{-5} = -\frac{42}{5}.$$

Но $x^2 = ab$, тогда:

$$1) \quad x^2 = a_1 b_1 = 12 \cdot \frac{3}{4} = 9, \quad x = 3;$$

$$2) \quad x^2 = a_2 b_2 = -\frac{42}{5} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{28}{5}, \quad x = -\frac{2}{5}\sqrt{35}.$$

Следовательно, $x = 3$ и $x = -\frac{2}{5}\sqrt{35}$ — корни исходного уравнения.

Ответ: а) $-\frac{2}{5}\sqrt{35}$, 3; б) 3.

Пример 13. а) Решите уравнение

$$x(3\sqrt{1+x} - 4\sqrt{1-x}) = 2(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}).$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{1}{3}; \sqrt{2}\right]$.

Решение.

І способ

а) Заметим, что $x = 1$ не является корнем уравнения. Тогда, разделив обе части уравнения на $\sqrt{1-x} \neq 0$, получим

$$x \left(3\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 4 \right) = 2 \left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - 1 \right). \quad (1)$$

Пусть $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = y$, где $y \geq 0$, тогда $\frac{1+x}{1-x} = y^2$. Известно, что если

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (свойство производной пропорции).

Тогда $\frac{2}{2x} = \frac{y^2+1}{y^2-1}$, откуда $x = \frac{y^2-1}{y^2+1}$.

В этом случае уравнение (1) преобразуется к виду

$$\frac{y^2-1}{y^2+1} \cdot (3y-4) = 2(y-1), \text{ или } (y-1)(y+1)(3y-4) - 2(y-1)(y^2+1) = 0.$$

Вынесем общий множитель $(y - 1)$ за скобки:

$$(y - 1)((y + 1)(3y - 4) - 2(y^2 + 1)) = 0, \text{ откуда } y_1 = 1, \text{ или}$$

$$(y + 1)(3y - 4) - 2(y^2 + 1) = 0.$$

После раскрытия скобок и упрощений получим $y^2 - y - 6 = 0$,
 $y_2 = 3$, $y_3 = -2$.

Поскольку $y \geq 0$, корень $y = -2$ не подходит.

$$\text{Если } y = 1, \text{ то } x = \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} = 0.$$

$$\text{Если } y = 3, \text{ то } x = \frac{8}{10} = 0,8.$$

$$\text{б) } x \in \left[\frac{1}{3}; \sqrt{2} \right].$$

$$x = 0 < \frac{1}{3}, \text{ значит, корень } x = 0 \notin \left[\frac{1}{3}; \sqrt{2} \right].$$

$$x = 0,8 = \frac{4}{5} = \frac{12}{15}, \quad \frac{1}{3} = \frac{5}{12}, \text{ т. е. } 0,8 > \frac{1}{3}.$$

$$\sqrt{2} > 1, \text{ значит, } x = 0,8 < \sqrt{2}, \text{ т. е. } 0,8 \in \left[\frac{1}{3}; \sqrt{2} \right].$$

Ответ: а) 0; 0,8; б) 0,8.

II способ

Пусть $1 + x = a^2$, $1 - x = b^2$, где $a \geq 0$, $b \geq 0$, тогда $a^2 - b^2 = 2x$, откуда $x = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$. В этом случае исходное уравнение примет вид

$$\frac{1}{2}(a^2 - b^2)(3a - 4b) = 2(a - b), \text{ откуда:}$$

$$1) a - b = 0, \text{ тогда } x = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0.$$

$$2) (a + b)(3a - 4b) = 4, \text{ или } 3a^2 - ab - 4b^2 = 4.$$

Учитывая, что $a^2 = 1 + x$, $b^2 = 1 - x$, получим

$$3(1 + x) - \sqrt{(1 + x)(1 - x)} - 4(1 - x) = 4, \text{ или } 7x - 5 = \sqrt{(1 + x)(1 - x)}, \text{ где } x \geq \frac{5}{7}.$$

$$(7x - 5)^2 = 1 - x^2, \text{ или } 25x^2 - 35x + 12 = 0, \text{ откуда находим } x = 0,8, \\ x = 0,4 \text{ — не подходит } \left(x \geq \frac{5}{7} \right).$$

Ответ: а) 0; 0,8; б) 0,8.

III способ

Так как $1 + x = a^2$, $1 - x = b^2$, то $a^2 + b^2 = 2$.

Кроме того, $3a^2 - ab - 4b^2 = 4$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2, \\ 3a^2 - ab - 4b^2 = 4 \end{cases} \begin{cases} \cdot 2 \\ \cdot 1 \end{cases} \begin{cases} 2a^2 + 2b^2 = 4, \\ 3a^2 - ab - 4b^2 = 4. \end{cases}$$

Вычитая из II уравнения I, получим $a^2 - ab - 6b^2 = 0$, или $(a - 3b)(a + 2b) = 0$.

$$1) \begin{cases} a^2 + b^2 = 2, \\ a = 3b; \end{cases} \begin{cases} 10b^2 = 2, \\ a = 3b; \end{cases} \quad b^2 = \frac{1}{5}, \quad 1 - x = b^2, \quad x = 1 - \frac{1}{5} = 0,8.$$

$$2) \begin{cases} a^2 + b^2 = 2, \\ a = -2b. \end{cases} \quad \text{Эта система не имеет решений, так как } a \geq 0, b \geq 0.$$

Кроме того, $a - b = 0$, откуда $x = 0$.

Ответ: а) 0; 0,8; б) 0,8.

Пример 14. а) Решите уравнение

$$(2x - 1)(\sqrt{x} + 4x - 2) = x.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right]$.

Решение.

I способ

а) Запишем уравнение в виде $2x\sqrt{x} - \sqrt{x} + 8x^2 - 4x - 4x + 2 = x$, или

$$2x\sqrt{x} - \sqrt{x} + 8x^2 - 9x + 2 = 0. \quad (1)$$

Заметим, что $x = 0$ не является корнем уравнения (1). Тогда, разделив обе части полученного уравнения на $x \neq 0$, имеем

$$2\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} + 8x + \frac{2}{x} - 9 = 0, \quad \text{или} \quad 2\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 8\left(x + \frac{1}{4x}\right) - 9 = 0. \quad (2)$$

$$\text{Пусть } \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = t, \quad \text{тогда } x + \frac{1}{4x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2 + 1 = t^2 + 1.$$

Следовательно, уравнение (2) примет вид

$$2t + 8(t^2 + 1) - 9 = 0, \quad \text{или } 8t^2 + 2t - 1 = 0, \quad \text{откуда находим } t_1 = \frac{1}{4},$$

$$t_2 = -\frac{1}{2}.$$

Так как $t = \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$, то получим:

$$1) \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{4}, \text{ или } 4x - \sqrt{x} - 2 = 0, \text{ где } x > 0.$$

Решая полученное уравнение, находим $(\sqrt{x})_{1,2} = \frac{1}{8}(1 \pm \sqrt{33})$.

Поскольку $x > 0$, подходит корень $\sqrt{x} = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{33})$, тогда

$$x = \frac{1}{32}(17 + \sqrt{33}).$$

$$2) \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2}, \text{ или } 2x + \sqrt{x} - 1 = 0, \text{ откуда } \sqrt{x} = \frac{1}{2}, x = \frac{1}{4},$$

$\sqrt{x} = -1 < 0$ — нет корней.

Итак, исходное уравнение имеет 2 корня:

$$x_1 = \frac{1}{32}(17 + \sqrt{33}), x_2 = \frac{1}{4}.$$

$$б) x \in \left[\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right].$$

Так как $x = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, то корень $x = \frac{1}{4} \notin \left[\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right]$.

$$5 < \sqrt{33} < 6, 22 < 17 + \sqrt{33} < 23, 0,68 < \frac{1}{32}(17 + \sqrt{33}) < 0,72.$$

$$\text{Значит, } \frac{1}{2} < \frac{1}{32}(17 + \sqrt{33}) < \sqrt{3}, \text{ т. е. корень } x = \frac{1}{32}(17 + \sqrt{33}) \in \left[\frac{1}{2}; \sqrt{3}\right].$$

$$\text{Ответ: а) } \frac{1}{32}(17 + \sqrt{33}); \frac{1}{4}; б) \frac{1}{32}(17 + \sqrt{33}).$$

II способ

Пусть $\sqrt{x} = y$, где $y \geq 0$, $x \geq 0$, тогда $x = y^2$.

Получим уравнение $(2y^2 - 1)(y + 4y^2 - 2) = y^2$, или $(2y^2 - 1)(y + 2(2y^2 - 1)) = y^2$.

Подстановка $2y^2 - 1 = t$ приводит к уравнению $t(y + 2t) = y^2$, или $y^2 - ty - 2t^2 = 0$, откуда по теореме, обратной теореме Виета, находим $y_1 = 2t$, $y_2 = -t$.

1) Если $y = 2t$, то $t = \frac{1}{2}y$, тогда $2y^2 - 1 = t$, или $2y^2 - 1 = \frac{1}{2}y$, или $4y^2 - y - 2 = 0$, откуда $y_{1,2} = \frac{1}{8}(1 \pm \sqrt{33})$.

Поскольку $y \geq 0$, подходит корень $y = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{33})$, тогда $x = y^2 = \frac{1}{32}(17 + \sqrt{33})$.

2) Если $y = -t$, то $t = -y$, получим уравнение $2y^2 - 1 = -y$, или $2y^2 + y - 1 = 0$, откуда $y_1 = -1$ (не подходит, так как $y \geq 0$), $y_2 = \frac{1}{2}$, тогда $x = y^2 = \frac{1}{4}$.

III способ

Пусть $2x - 1 = a$, $\sqrt{x} = b$, где $x \geq 0$, $b \geq 0$.

Тогда $x = \frac{1}{2}(a + 1)$ и $x = b^2$, так как $a + 1 = 2b^2$, откуда $a = 2b^2 - 1$.

Исходное уравнение примет вид $a(b + 2a) = b^2$, или $(2b^2 - 1)(b + 4b^2 - 2) = b^2$, или $(2b^2 - 1) \cdot b + 2(2b^2 - 1)^2 = b^2$. (3)

Заметим, что $x = 0$ не является корнем исходного уравнения, значит, $b \neq 0$.

Разделим обе части уравнения (3) на $b^2 \neq 0$:

$$\frac{2b^2 - 1}{b} + \frac{2(2b^2 - 1)^2}{b^2} = 1. \quad (4)$$

Пусть $\frac{2b^2 - 1}{b} = t$, тогда уравнение (4) примет вид $t + 2t^2 = 1$, или

$2t^2 + t - 1 = 0$, откуда находим $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

1) $\frac{2b^2 - 1}{b} = -1$, или $2b^2 + b - 1 = 0$, $b_1 = -1$, $b_2 = \frac{1}{2}$.

Корень $b = -1 < 0$ не подходит.

Если $b = \frac{1}{2}$, то $x = b^2 = \frac{1}{4}$.

$$2) \frac{2b^2 - 1}{b} = \frac{1}{2}, \text{ или } 4b^2 - b - 2 = 0, \text{ откуда } b_{1,2} = \frac{1}{8}(1 \pm \sqrt{33}).$$

Поскольку $b > 0$, подходит корень $b = \frac{1}{8}(1 + \sqrt{33})$, тогда

$$x = b^2 = \frac{1}{32}(17 + \sqrt{33}).$$

Ответ: а) $\frac{1}{32}(17 + \sqrt{33})$; $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{32}(17 + \sqrt{33})$.

Пример 15. а) Решите уравнение

$$x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}.$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3}{4}; \log_3 \frac{5}{3}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$x\sqrt{1+x} = 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{3-x}. \quad (1)$$

Возведем обе части уравнения (1) в квадрат

$$\begin{aligned} x^2(1+x) &= 4(x^2+1) - 4\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{3-x} + 3-x, \text{ или} \\ 4\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{3-x} &= -x^3 + 3x^2 - x + 3 + 4. \end{aligned} \quad (2)$$

Но $-x^3 + 3x^2 - x + 3 = 3(x^2+1) - x(x^2+1) = (x^2+1)(3-x)$.

Следовательно, уравнение (2) преобразуется к виду

$$4\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{3-x} = (x^2+1)(3-x) + 4.$$

Обозначив $\sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{3-x} = y$, получим квадратное уравнение

$$4y = y^2 + 4, \text{ или } (y-2)^2 = 0, \text{ откуда } y = 2. \text{ Учитывая подстановку } \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{3-x} = y, \text{ получим } \sqrt{x^2+1} \cdot \sqrt{3-x} = 2, \text{ или } (x^2+1)(3-x) = 4.$$

Упростив полученное уравнение, имеем

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + x + 1 &= 0, \text{ или } x^2(x-1) - 2x(x-1) - (x-1) = 0, \text{ или} \\ (x-1)(x^2 - 2x - 1) &= 0, \text{ откуда находим } x_1 = 1, x_2 = 1 - \sqrt{2}, x_3 = 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Найденные корни удовлетворяют исходному уравнению.

$$\text{б) } x \in \left[\frac{3}{4}; \log_3 \frac{5}{3} \right].$$

Заметим, что $\frac{3}{4} < 1$, $\log_3 \frac{5}{3} > \log_3 \frac{3}{3} > 1$, значит, $\frac{3}{4} < 1 < \log_3 \frac{5}{3}$,

$$\text{т. е. } x = 1 \in \left[\frac{3}{4}; \log_3 \frac{5}{3} \right].$$

$$x = 1 - \sqrt{2} < 1, \quad x = 1 + \sqrt{2} > 2 > \log_3 \frac{5}{3}.$$

Ответ: а) 1; $1 \pm \sqrt{2}$; б) 1.

Пример 16. а) Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2}} + 2x^2 = 1,$$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{1}{6}; \sqrt{2} \right]$.

Решение.

І способ

а) Пусть $x = \sin t$, где $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right]$, тогда получим уравнение

$$\sqrt{\frac{1+2\sin t \cos t}{2}} = \cos 2t, \text{ где } \cos 2t = 1 - 2 \sin^2 t = 1 - 2x^2.$$

Но $2 \sin t \cos t = \sin 2t$, тогда имеем

$$\sqrt{\frac{1+\sin 2t}{2}} = \cos 2t. \quad (1)$$

Возведем обе части уравнения (1) в квадрат: $\frac{1+\sin 2t}{2} = \cos^2 2t$,

или $1 + \sin 2t = 2 \cos^2 2t$, $1 + \sin 2t = 2(1 - \sin^2 2t)$, или $2 \sin^2 2t + \sin 2t - 1 = 0$.

Так как $2 - 1 - 1 = 0$, то $\sin 2t = -1$, или $\sin 2t = \frac{1}{2}$.

1) Если $\sin 2t = -1$, то $2t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $t = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Учитывая, что $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, получим $t = -\frac{\pi}{4}$.

Значит, $x = \sin t = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2) Если $\sin 2t = \frac{1}{2}$, то $\cos 2t = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Так как $\cos 2t \geq 0$ (что следует из уравнения (1)), то $\cos 2t = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$2t = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $t = \pm \frac{\pi}{12} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, где $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Тогда $t = \pm \frac{\pi}{12}$.

Следовательно, $x = \sin t = \pm \sin \frac{\pi}{12}$.

Известно, что $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, тогда

$$x^2 = \sin^2 t = \sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}.$$

Но $\frac{2 - \sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{8} > 0$, значит, $x^2 = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{8}$, откуда $x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$.

Итак, исходное уравнение имеет 2 корня:

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}.$$

б) $x \in \left[\frac{1}{6}; \sqrt{2}\right]$.

$x = -\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2}$, значит, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \notin \left[\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right]$.

Сравним $\frac{1}{6}$ и $\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$, где $\frac{1}{6} \approx 0,17$; $\sqrt{2} \approx 1,4$; $\sqrt{3} \approx 1,7$, тогда

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} \approx 0,25 > 0,17.$$

Значит, $\frac{1}{6} < \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} < \sqrt{2}$.

Ответ: а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$; б) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}}$.

II способ

Одночлен $2x^2$ перенесем в правую часть уравнения и возведем в квадрат:

$$\frac{1+2x\sqrt{1-x^2}}{2} = (1-2x^2)^2, \text{ или } 1+2x\sqrt{1-x^2} = 2(1-4x^2+4x^4). \quad (2)$$

Пусть $2x\sqrt{1-x^2} = y$, тогда $y^2 = 4x^2 - 4x^4$, и уравнение (1) примет вид $1 + y = 2(1 - y^2)$, или $2y^2 + y - 1 = 0$, откуда $y_1 = -1$, $y_2 = \frac{1}{2}$.

1) Если $y = -1$, то, учитывая подстановку $2x\sqrt{1-x^2} = y$, получим $2x\sqrt{1-x^2} = -1$, где $x < 0$. Исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{\frac{1+(-1)}{2}} + 2x^2 = 1, \text{ или } 2x^2 = 1, \text{ откуда } x = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) Если $y = \frac{1}{2}$, то $2x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}$, где $x > 0$.

Тогда исходное уравнение запишется в виде

$$\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} + 2x^2 = 1, \text{ или } \frac{\sqrt{3}}{2} + 2x^2 = 1, \quad 2x^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

$$x = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \quad (\text{см. I способ}).$$

Итак, $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $x_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ — корни исходного уравнения.

Ответ: а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$; б) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$.

Примеры для самостоятельного решения

1. а) $\sqrt{x^3+89}-\sqrt{x^3+9}=3x+14$; б) $\left[-3; \frac{2}{7}\right]$.
2. а) $2x-\sqrt{x-5}(\sqrt{7+x}+3)=4$; б) $[8; 10]$.
3. а) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3x+4}=\sqrt[3]{16(x+1)}$; б) $\left[-\frac{7}{3}; -\frac{1}{7}\right]$.
4. а) $\sqrt[3]{7-x}+2=\sqrt{x+3}$; б) $\left[\frac{18}{7}; \frac{29}{4}\right]$.
5. а) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{4x-3}=\sqrt{5x-4}+\sqrt{6x-5}$; б) $\left[\frac{4}{9}; 2\right]$.
6. а) $x^2+\sqrt{x(x-6)}=2(1+3x)$; б) $[-0,7; 5]$.
7. а) $\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x-15}=4$; б) $[13; 95]$.
8. а) $16x^2+9x+117=24x\sqrt{x+13}$; б) $\left[\frac{7}{3}; \frac{17}{4}\right]$.
9. а) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$; б) $[4; 10]$.
10. а) $\sqrt{x-4+\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-3-\sqrt{x-2}}=1$; б) $\left[\frac{15}{7}; 7\right]$.
11. а) $x^2+2x+\sqrt{x^2+2x+8}-12=0$; б) $[-5; 1]$.
12. а) $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}-2\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}=1$; б) $[-4; 2]$.
13. а) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$; б) $\left[1; \frac{16}{3}\right]$.
14. а) $(x-1)\sqrt{x+1}=(x+3)\sqrt{x-3}$; б) $[2; 4]$.
15. а) $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$; б) $[6; 7]$.
16. а) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$; б) $[0; 3]$.
17. а) $\sqrt{x^3-4x^2-10x+29}=3-x$; б) $[-\sqrt{3}; \sqrt{19}]$.
18. а) $\sqrt{x^4+8x^3+2x^2-1}=\sqrt{x^4+2x^2}$; б) $[\log_2 0,5; \log_3 4]$.
19. а) $\sqrt{x^3+4x^2+9}=x+3$; б) $\left[-\frac{9}{2}; \sqrt{3}\right]$.
20. а) $\sqrt[3]{x+4}+\sqrt{x}=4$; б) $\left[\frac{17}{6}; \sqrt{17}\right]$.

§ 4. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ И ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Краткая теория и справочные материалы

1. Показательные уравнения

Это уравнения, содержащие переменную в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнений вида $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, x — неизвестное.

Это уравнение решается с помощью свойства степени: степени с одинаковыми основаниями $a > 0$, $a \neq 1$ равны только тогда, когда равны их показатели.

Типы показательных уравнений и методы их решения

1. Решение уравнений с использованием свойств показательной функции.
2. Решение уравнений, сводящихся к квадратным.
3. Решение уравнений вынесением общего множителя за скобку.
4. Решение уравнений логарифмированием обеих частей.
5. Решение уравнений с использованием свойства монотонности показательной функции.

2. Показательно-степенные уравнения

Это уравнения, содержащие неизвестное как в показателе, так и в основании степени:

$$(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}.$$

Корнями этого уравнения считаются только решения смешанной системы

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 0, \\ g(x) = \varphi(x) \end{cases}$$

и те значения x , для которых $f(x) = 1$ при условии, что при этих значениях определены $g(x)$ и $\varphi(x)$.

Если условием не исключается случай $f(x) \leq 0$ или $f(x) = 1$, то приходится рассматривать все случаи.

3. Логарифмические уравнения

Это уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида $\log_a x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильное уравнению $x = a^b$.

Решение логарифмического уравнения вида

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно каждой из систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Заметим, что переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ может привести к появлению посторонних корней.

Эти корни можно выявить либо с помощью подстановки их в исходное уравнение, либо с помощью нахождения области определения исходного уравнения, которая задается системой неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Методы решения логарифмических уравнений

1. Решение уравнений, основанных на определении логарифма.
2. Решение уравнений потенцированием.
3. Применение основного логарифмического тождества.
4. Логарифмирование.
5. Замена переменной.
6. Переход к другому основанию.

4. Логарифмы и их свойства

1. Если $x > 0$, то $x = a^{\log_a x}$ — основное логарифмическое тождество.
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a 1 = 0$.
4. Если $x > 0$, $y > 0$, то $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ — логарифм произведения.
5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ — логарифм частного.
6. Если $x > 0$, $p \in \mathbb{R}$, то $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$ — логарифм степени.
7. Если $x > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, то $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ — формула перехода от основания a к основанию b .

В частности, если $x = b$, то

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ или } \log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

$$8. \log_a b = \log_{a^p} b^p = p \log_{a^p} b \quad (p \in \mathbb{R}, p \neq 0).$$

9. Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $p \neq 0$, то

$$\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b.$$

$$10. \log_a x \cdot \log_b y = \log_a y \cdot \log_b x, \text{ где } x > 0, y > 0, a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1.$$

Примеры с решениями

Пример 1. а) Решите уравнение

$$64 \cdot 9^x - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие промежутку $\left(1; \frac{7}{3}\right)$.

Решение.

а) Так как $12^x > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$, то, разделив обе части уравнения на $12^x \neq 0$, получим

$$64 \cdot \left(\frac{9}{12}\right)^x - 84 + 27 \cdot \left(\frac{16}{12}\right)^x = 0, \text{ или } 64 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 27 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x - 84 = 0.$$

Пусть $\left(\frac{3}{4}\right)^x = t$, где $t > 0$, тогда получим уравнение $64t + \frac{27}{t} - 84 = 0$,

$$\text{или } 64t^2 - 84t + 27 = 0,$$

$$D/4 = 42^2 - 64 \cdot 27 = 36 = 6^2 > 0, t_{1,2} = \frac{42 \pm 6}{64}, t_1 = \frac{48}{64} = \frac{3}{4}, t_2 = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}.$$

Если $t = \frac{3}{4}$, то $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{3}{4}$, откуда $x_1 = 1$; если $t = \frac{9}{16}$, то $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{9}{16}$,

откуда $x_2 = 2$.

б) $x_1 = 1 \notin \left(1; \frac{7}{3}\right)$, $x_2 = 2 \in \left(1; \frac{7}{3}\right)$, так как $1 < 2 < \frac{7}{3}$.

Ответ: а) 1; 2; б) 2.

Пример 2. а) Решите уравнение

$$\log_3 (x + 1) + \log_3 (x + 3) = 1.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $[-1; 1,5]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде $\log_3 (x + 1)(x + 3) = 1$.

С учетом области определения исходного уравнения имеем смешанную систему

$$\begin{cases} (x+1)(x+3)=3, \\ x+1>0, \\ x+3>0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2+4x=0, \\ x+1>0. \end{cases}$$

Решая уравнение $x^2 + 4x = 0$, имеем

$$x(x + 4) = 0, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -4.$$

Из найденных значений последней системе удовлетворяет лишь корень $x = 0$. Значит, $x = 0$ — корень исходного уравнения.

б) $x = 0 \in [-1; 1,5]$.

Ответ: а) 0; б) 0.

Пример 3. а) Решите уравнение

$$\log_7 (2^x - 1) + \log_7 (2^x - 7) = 1.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $[-1; \sqrt{10}]$.

Решение.

а) Область определения уравнения равносильна системе неравенств $\begin{cases} 2^x - 1 > 0, \\ 2^x - 7 > 0, \end{cases}$ откуда $2^x > 7$.

Потенцируя данное уравнение, имеем

$\log_7 (2^x - 1)(2^x - 7) = 1$, откуда по определению логарифма получим уравнение $(2^x - 1)(2^x - 7) = 7$, или $(2^x)^2 - 8 \cdot 2^x = 0$; $2^x(2^x - 8) = 0$, $2^x > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

Тогда $2^x - 8 = 0$, $2^x = 8$, откуда $x = 3$ — корень исходного уравнения ($2^x > 7$).

б) $x = 3 \in (-1; \sqrt{10})$, так как $-1 < 3 < \sqrt{10}$.

Ответ: а) 3; б) 3.

Пример 4. а) Решите уравнение

$$\log_6 \sqrt{x-2} + \frac{1}{2} \log_6 \sqrt{x-11} = 1.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[\log_3 \frac{1}{6}; \frac{47}{3} \right]$.

Решение.

а) Область определения данного уравнения равносильна системе неравенств $\begin{cases} x-2 > 0, \\ x-11 > 0, \end{cases}$ откуда $x > 11$.

Запишем уравнение в виде

$$\log_6 \sqrt{x-2} + \log_6 \sqrt{x-11} = 1,$$

$$\log_6 \sqrt{(x-2)(x-11)} = 1, \text{ откуда } \sqrt{(x-2)(x-11)} = 6.$$

Возведя обе части полученного уравнения в квадрат и упрощая, имеем $(x-2)(x-11) = 36$, $x^2 - 13x - 14 = 0$, откуда $x_1 = 14$, $x_2 = -1$.

Так как $x > 11$, то корень $x_2 = -1$ не подходит.

Значит, $x = 14$ — корень данного уравнения.

б) $x = 14 > \log_3 \frac{1}{6}$, так как $\log_3 \frac{1}{6} = -\log_3 6 < 0$ и $14 < \frac{47}{3} = 15\frac{2}{3}$.

Ответ: а) 14; б) 14.

Пример 5. а) Решите уравнение

$$(x+1)^{\lg(x+1)} = 100(x+1).$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{4}{3}; 2 \right]$.

Решение.

а) Область определения уравнения $x+1 > 0$, т. е. $x > -1$.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10:

$$\lg(x+1) \lg(x+1) = \lg 100 + \lg(x+1), \text{ или}$$

$$\lg^2(x+1) - \lg(x+1) - 2 = 0 \text{ — квадратное уравнение относительно } \lg(x+1).$$

Решая его, находим $\lg(x+1) = 2$, $x+1 = 100$, $x_1 = 99$;

$\lg(x+1) = -1$, $x+1 = 0,1$, $x_2 = -0,9$.

Оба корня удовлетворяют условию $x > -1$, значит, являются корнями исходного уравнения.

б) $x_1 = 99 > 2$, значит, $x_1 = 99 \notin \left[-\frac{4}{3}; 2\right]$; $x_2 = -0,9 \in \left[-\frac{4}{3}; 2\right]$.

Ответ: а) $-0,9; 99$; б) $-0,9$.

Пример 6. а) Решите уравнение $10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[\lg \frac{1}{12}; \frac{15}{7}\right]$.

Решение.

а) Область определения уравнения задается условиями $x > 0$, $x \neq 1$. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10, предварительно упростив его: $(10^{\lg x})^{\lg x} + x^{\lg x} = 20$, $x^{\lg x} + x^{\lg x} = 20$, $x^{\lg x} = 10$, $\lg^2 x = \lg 10$, или $\lg^2 x = 1$, откуда $\lg x = \pm 1$, значит, $x_1 = 10$, $x_2 = 0,1$. Оба значения удовлетворяют ограничениям $x > 0$, $x \neq 1$, значит, являются корнями исходного уравнения.

б) $x_1 = 10 \notin \left[\lg \frac{1}{12}; \frac{15}{7}\right]$, так как $10 > \frac{15}{7}$;

$x_2 = 0,1 \in \left[\lg \frac{1}{12}; \frac{15}{7}\right]$, так как $\lg \frac{1}{12} = -\lg 12 < 0$ и $0,1 < \frac{15}{7}$.

Ответ: а) $0,1; 10$; б) $0,1$.

Пример 7. а) Решите уравнение

$$6 \cdot 4^x - 6^x - 2 \cdot 9^x = 0.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{1}{3}; \log_3 5\right]$.

Решение.

а) Так как $4^x > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то, разделив обе части уравнения на $4^x \neq 0$, получим равносильное уравнение

$$6 - \frac{6^x}{4^x} - 2 \cdot \frac{9^x}{4^x} = 0, \text{ или } 2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} + \left(\frac{3}{2}\right)^x - 6 = 0.$$

Получим квадратное уравнение относительно переменной $\left(\frac{3}{2}\right)^x$.

Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$, где $t > 0$, тогда $\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = t^2$.

Имеем $2t^2 + t - 6 = 0$, $D = 1 + 48 = 49 = 7^2 > 0$, $t_{1,2} = \frac{-1 \pm 7}{4}$, $t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = -2$ (не удовлетворяет условию $t > 0$).

Если $t = \frac{3}{2}$, то $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$, откуда $x = 1$ — единственный корень исходного уравнения.

б) Заметим, что $x = 1 > \frac{1}{3}$.

Кроме того, $\log_3 5 > \log_3 3 = 1$, значит, $1 < \log_3 5$, т. е. $x = 1 \in \left[\frac{1}{3}; \log_3 5\right]$.

Ответ: а) 1; б) 1.

Пример 8. а) Решите уравнение

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $[\log_3 4; \log_3 10]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 6$, или

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}} - \frac{5}{2} \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 6.$$

Обозначим $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = t$, где $t > 0$.

Тогда получим квадратное уравнение относительно t : $t^2 - \frac{5}{2}t = 6$,

или $2t^2 - 5t - 12 = 0$, $D = 25 + 96 = 121 = 11^2 > 0$, $t_{1,2} = \frac{5 \pm 11}{4}$, откуда

$$t_1 = 4, \quad t_2 = -\frac{3}{2}.$$

Поскольку $t > 0$, корень $t_2 = -\frac{3}{2}$ не подходит.

Если $t = 4$, то, учитывая замену, имеем $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4$, или $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 2^2$, откуда $x + \sqrt{x^2-2} = 2$, или $\sqrt{x^2-2} = 2 - x$.

Получим иррациональное уравнение, где $2 - x \geq 0$, т. е. $x \leq 2$.

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$$x^2 - 2 = (2 - x)^2, \text{ или } x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2, \text{ или } 4x = 6, x = \frac{3}{2} = 1,5.$$

б) Сравним $x = 1,5$ и $\log_3 4$.

$$1,5 = \log_3 3^{1,5} \text{ и } \log_3 4,$$

$$3^{\frac{3}{2}} \text{ и } 4, \sqrt{3^3} \text{ и } 4, \sqrt{27} > \sqrt{16}.$$

Значит, $1,5 > \log_3 4$. Теперь сравним $1,5$ и $\log_3 10$. Заметим, что $\log_3 10 > \log_3 9 = 2$, т. е. $1,5 < \log_3 10$.

Следовательно, корень $x = 1,5 \in [\log_3 4; \log_3 10]$.

Пример 9. а) Решите уравнение

$$x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} - \frac{1}{x} = 0.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[\lg 9; \frac{4}{3} \right]$.

Решение.

а) Область определения уравнения $x > 0$.

Запишем уравнение в виде $x^{2-\lg^2 x - \lg x^2} = x^{-1}$.

Прологарифмируем обе части полученного уравнения по основанию 10:

$(2 - \lg^2 x - \lg x^2) \cdot \lg x = -\lg x$, или $\lg x \cdot (2 - \lg^2 x - \lg x^2 + 1) = 0$, откуда имеем:

$$1) \lg x = 0, x = 10^0 = 1;$$

2) $2 - \lg^2 x - \lg x^2 + 1 = 0$, или $\lg^2 x + 2 \lg x - 3 = 0$, где $\lg x^2 = 2 \lg x$, так как $x > 0$.

Решая это уравнение как квадратное относительно $\lg x$, находим $\lg x = -3, x = 10^{-3} = 0,001$;

$$\lg x = 1, x = 10.$$

Все три корня удовлетворяют условию $x > 0$, значит, являются корнями исходного уравнения.

б) Так как $\lg 9 < \lg 10 = 1$ и $\frac{4}{3} = 1\frac{1}{3} > 1$, то корень $x_1 = 1 \in \left[\lg 9; \frac{4}{3} \right]$;

$$x_2 = 10 > \frac{4}{3}, \text{ т. е. } x_2 = 10 \notin \left[\lg 9; \frac{4}{3} \right];$$

$$x_3 = 0,001 < \lg 9.$$

Ответ: а) 0,001; 1; 10; б) 1.

Пример 10. а) Решите уравнение

$$\frac{16}{2 + \log_3 x} - 4 = 3 \log_3 x.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $[2; \log_3 28]$.

Решение.

а) Пусть $2 + \log_3 x = t$, где $t \neq 0$, тогда $\log_3 x = t - 2$, и данное уравнение примет вид $\frac{16}{t} - 4 = 3(t - 2)$, или $\frac{16}{t} - 4 = 3t - 6$, или $\frac{16}{t} - 3t + 2 = 0$,

$$16 - 3t^2 + 2t = 0, \quad 3t^2 - 2t - 16 = 0, \quad \text{откуда находим } t_1 = \frac{8}{3}, \quad t_2 = -2.$$

Учитывая подстановку, получим:

$$1) \log_3 x = \frac{2}{3}, \quad x_1 = 3^{2/3} = \sqrt[3]{9};$$

$$2) \log_3 x = -4, \quad \text{откуда } x_2 = 3^{-4} = \frac{1}{81}.$$

Так как $x > 0$ и $2 + \log_3 x \neq 0$, то $x_1 = \sqrt[3]{9}$ и $x_2 = \frac{1}{81}$ — корни исходного уравнения.

$$б) \sqrt[3]{9} > \sqrt[3]{8} = 2, \quad \log_3 28 > \log_3 27 = 3.$$

$$\text{Значит, } x_1 = \sqrt[3]{9} \in [2; \log_3 28];$$

$$x_2 = \frac{1}{81} < 2, \quad \text{т. е. } \frac{1}{81} \notin [2; \log_3 28].$$

$$\text{Ответ: а) } \sqrt[3]{9}; \frac{1}{81}; б) \sqrt[3]{9}.$$

Пример 11. а) Решите уравнение

$$\log_3(x^2 - 7) \cdot \log_4^2(9 - x) + 5 \log_3(x^2 - 7) - 2 \log_4^2(9 - x) - 10 = 0.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку

$$\left[\log_3 \frac{1}{80}; \log_3 82 \right].$$

Решение.

а) Обозначим для краткости $\log_3(x^2 - 7) = a$, $\log_4^2(9 - x) = b$, тогда получим уравнение $ab + 5a - 2b - 10 = 0$.

Применяя способ группировки, имеем

$$a(b + 5) - 2(b + 5) = 0, \quad \text{или } (a - 2)(b + 5) = 0,$$

откуда $a = 2$, или $b = -5$.

Следовательно, получим два уравнения:

$$1) \log_3(x^2 - 7) = 2, \text{ откуда } x^2 - 7 = 9, x^2 = 16, x_{1,2} = \pm 4.$$

Так как $x^2 - 7 > 0$ и $9 - x > 0$, то оба корня являются корнями исходного уравнения.

$$2) \log_4(9 - x) = -5 \text{ — нет корней, так как } \log_4^2(9 - x) \geq 0.$$

$$б) x \in \left[\log_3 \frac{1}{80}; \log_3 82 \right].$$

$$\text{Заметим, что } -4 = -\log_3 3^4 = \log_3 \frac{1}{81} < \log_3 \frac{1}{80} < 4 = \log_3 81 < \log_3 82.$$

$$\text{Следовательно, } x = 4 \in \left[\log_3 \frac{1}{80}; \log_3 82 \right].$$

Ответ: а) ± 4 ; б) 4.

Пример 12. а) Решите уравнение

$$\log_2 x \cdot \log_2(9x^2 - 7) = \log_2 \frac{x(9x^2 - 7)}{2}.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $[\log_3 2; \log_3 8]$.

Решение.

$$а) \text{ Так как } \log_2 \frac{x(9x^2 - 7)}{2} = \log_2 x + \log_2(9x^2 - 7) - 1,$$

то уравнение запишется в виде

$$\log_2 x \cdot \log_2(9x^2 - 7) - \log_2 x - \log_2(9x^2 - 7) + 1 = 0, \text{ или}$$

$$\log_2 x \cdot (\log_2(9x^2 - 7) - 1) - (\log_2(9x^2 - 7) - 1) = 0, \text{ или}$$

$$(\log_2(9x^2 - 7) - 1)(\log_2 x - 1) = 0, \text{ откуда } \log_2(9x^2 - 7) - 1 = 0, \text{ или } \log_2 x - 1 = 0.$$

$$1) \begin{cases} \log_2(9x^2 - 7) - 1 = 0, & \begin{cases} 9x^2 - 7 = 2, & \begin{cases} x^2 = 1, & \begin{cases} x = 1, \\ x = -1, \end{cases} \end{cases} \\ x > 0; & \begin{cases} x > 0; \\ x > 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \log_2 x - 1 = 0, & \begin{cases} \log_2 x = 1, & \begin{cases} x = 2, \\ 9x^2 - 7 > 0; \end{cases} \end{cases} \\ 9x^2 - 7 > 0; & \begin{cases} 9x^2 - 7 > 0; \\ 9x^2 - 7 > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Итак, $x = 1$ и $x = 2$ — корни исходного уравнения.

$$б) x \in [\log_3 2; \log_3 8].$$

$$x = 1 = \log_3 3 > \log_3 2 \text{ и } 1 = \log_3 3 < \log_3 8.$$

Значит, $x = 1 \in [\log_3 2; \log_3 8]$.

Заметим, что $x = 2 = \log_3 9 > \log_3 8$, т. е. корень $x = 2 \notin [\log_3 2; \log_3 8]$.

Ответ: а) 1; 2; б) 1.

Пример 13. а) Решите уравнение

$$\log_2(1-x) \cdot \log_{(1-x)} 16 = x^3 + 3x^2 - 9x - 23.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку

$$\left[-\frac{\sqrt{91}}{3}; \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{3}} \right].$$

Решение.

а) Так как $\log_{(1-x)} 16 = \frac{\log_2 16}{\log_2(1-x)} = \frac{4}{\log_2(1-x)}$, то уравнение примет вид

$$\log_2(1-x) \cdot \frac{4}{\log_2(1-x)} = x^3 + 3x^2 - 9x - 23, \text{ или}$$

$$x^3 + 3x^2 - 9x - 23 = 4, \text{ или } x^3 + 3x^2 - 9x - 27 = 0.$$

ОДЗ: $1-x > 0$, $1-x \neq 1$, т. е. $x < 1$, $x \neq 0$.

Полученное уравнение решим способом группировки:

$x^2(x+3) - 9(x+3) = 0$, или $(x+3)(x^2-9) = 0$, или $(x+3)^2(x-3) = 0$, откуда $x_1 = -3$, $x_2 = 3$ (не удовлетворяет ОДЗ).

Итак, $x = -3$ — единственный корень исходного уравнения.

б) $x \in \left[-\frac{\sqrt{91}}{3}; \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{3}} \right].$

$$x = -3 = -\sqrt{9} > -\frac{\sqrt{91}}{3} = -\sqrt{10\frac{1}{3}}.$$

Кроме того, $-3 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^{-3} = \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3\sqrt{3}} < \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{2\sqrt{3}}.$

Значит, корень $x = -3$ принадлежит отрезку.*Ответ:* а) -3 ; б) -3 .**Пример 14.** а) Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} \cdot \log_5 x = -1.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{1}{50}; 2 \right].$ *Решение.*

а) Так как $\log_x \sqrt{5x} = \frac{1}{2} \log_x 5x = \frac{1}{2} (\log_x 5 + 1)$, $\log_5 x = \frac{1}{\log_x 5}$, где

$x > 0$, $x \neq 1$, то, обозначив $\log_x 5 = y$, получим уравнение

$$\sqrt{\frac{1}{2}(y+1)} \cdot \frac{1}{y} = -1. \quad (1)$$

Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(y+1)=y^2, & 2y^2-y-1=0, \text{ откуда находим } y_1=1, y_2=-\frac{1}{2}. \\ y < 0; \end{cases}$$

Так как $y < 0$, то корень $y = -\frac{1}{2}$ не подходит.

Если $y = 1$, то, учитывая подстановку $\log_x 5 = y$, получим

$$\log_x 5 = -\frac{1}{2}, \text{ откуда } x^{-\frac{1}{2}} = 5, \quad x = 5^{-2} = \frac{1}{25}.$$

$$\text{б) } x \in \left[\frac{1}{50}; 2 \right].$$

$$x = \frac{1}{25} = \frac{2}{50} > \frac{1}{50}, \text{ т. е. корень } x = \frac{1}{25} \in \left[\frac{1}{50}; 2 \right].$$

Ответ: а) $\frac{1}{25}$; б) $\frac{1}{25}$.

Пример 15. а) Решите уравнение

$$\frac{x}{12} = \left(\frac{4}{3} \right)^{\log_x 16}$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[\log_3 \frac{5}{6}; \frac{49}{3} \right]$.

Решение.

а) ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$.

Идея решения заключается в связи между числами 12, 16 и $\frac{4}{3}$.

Нетрудно видеть, что $12 = 16 \cdot \frac{3}{4}$. Тогда исходное уравнение можно

записать в виде

$$\frac{\frac{4}{3}x}{16} = \left(\frac{4}{3} \right)^{\log_x 16}, \text{ или } \frac{x}{16} = \left(\frac{4}{3} \right)^{\log_x 16 - 1}, \quad \frac{x}{16} = \left(\frac{4}{3} \right)^{\log_x \frac{16}{x}}.$$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию x . Получим

$$\log_x \frac{x}{16} = -\log_x \frac{x}{16} \cdot \log_x \frac{4}{3}, \text{ или } \log_x \frac{x}{16} \left(1 + \log_x \frac{4}{3} \right) = 0,$$

откуда $\log_x \frac{x}{16} = 0$, $\frac{x}{16} = 1$, $x = 16$, или $\log_x \frac{4}{3} = -1$, $\frac{1}{x} = \frac{4}{3}$, $x = \frac{3}{4}$.

Оба корня удовлетворяют ОДЗ, значит, являются корнями исходного уравнения.

$$\text{б) } x = 16 < \frac{49}{3} = 16\frac{1}{3}, \text{ т. е. } x = 16 \in \left[\log_3 \frac{5}{6}; \frac{49}{3} \right].$$

$$x = \frac{3}{4} = \log_3 8^{\frac{3}{4}} = \log_3 \sqrt[4]{27}. \text{ Но } 2 < \sqrt[4]{27} < 3, \quad 0 < \frac{5}{6} < 1.$$

$$\text{Значит, } x = \frac{3}{4} > \log_3 \frac{5}{6} \text{ и } \frac{3}{4} < \frac{49}{3}, \text{ т. е. } x = \frac{3}{4} \in \left[\log_3 \frac{5}{6}; \frac{49}{3} \right].$$

Ответ: а) $16; \frac{3}{4}$; б) $16; \frac{3}{4}$.

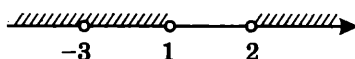
Пример 16. а) Решите уравнение

$$3 \log_8 (x^2 + x - 6)^2 - 6 \log_8 (x^2 - 3x + 2) = 2.$$

$$\text{б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку } \left[-\frac{5}{6}; \log_3 \frac{43}{4} \right].$$

Решение.

$$\text{а) ОДЗ: } \begin{cases} x^2 + x - 6 \neq 0, \\ x^2 - 3x + 2 > 0; \end{cases} \begin{cases} x \neq -3, x \neq 2, \\ x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty). \end{cases}$$



$$x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 1) \cup (2; +\infty).$$

Разделим обе части уравнения на 3:

$$\log_8 (x^2 + x - 6)^2 - 2 \log_8 (x^2 - 3x + 2) = \frac{2}{3},$$

$$\log_8 (x^2 + x - 6)^2 = \log_8 (x^2 - 3x + 2)^2 + \log_8 4,$$

$$(x^2 + x - 6)^2 = 4(x^2 - 3x + 2).$$

Применим формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

$$\begin{aligned} (x^2 + x - 6 - 2x^2 + 6x - 4)(x^2 + x - 6 + 2x^2 - 6x + 4) &= 0, \\ (x^2 - 7x + 10)(3x^2 - 5x - 2) &= 0, \text{ откуда } x^2 - 7x + 10 = 0, x_1 = 2, \\ x_2 = 5, \text{ или } 3x^2 - 5x - 2 &= 0, \text{ откуда находим } x_3 = 2, x_4 = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Из найденных корней удовлетворяют корни $x = -\frac{1}{3}$ и $x = 5$.

$$\text{б) } x = -\frac{1}{3} = -\frac{2}{6} > -\frac{5}{6}, \text{ т. е. } x = -\frac{1}{3} \in \left[-\frac{5}{6}; \log_3 \frac{43}{4}\right].$$

$$x = 5 = \log_3 3^5 = \log_3 243 > \log_3 \frac{43}{4}.$$

$$\text{Значит, } x = 5 \notin \left[-\frac{5}{6}; \log_3 \frac{43}{4}\right].$$

$$\text{Ответ: а) } -\frac{1}{3}; \text{ б) } -\frac{1}{3}.$$

Пример 17. а) Решите уравнение

$$2x^2 + \log_3(26 + 2x - x^2) = x^4 + 4.$$

$$\text{б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку } \left[\lg \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right].$$

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$\log_3(26 + 2x - x^2) = x^4 - 2x^2 + 4, \text{ или}$$

$$\log_3(27 - (x - 1)^2) = (x^2 - 1)^2 + 3. \quad (1)$$

Заметим, что $\log_3(27 - (x - 1)^2) \leq \log_3 27 = 3$, и $(x^2 - 1)^2 + 3 \geq 3$.

Следовательно, уравнение (1) имеет решение тогда и только тогда,

$$\text{когда обе его части равны 3, т. е. } \begin{cases} 27 - (x - 1)^2 = 27, \\ (x^2 - 1)^2 = 0. \end{cases}$$

В этом случае $x = 1$ — единственный корень исходного уравнения.

$$\text{б) } x \in \left[\lg \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right].$$

$$x = 1 = \lg 10 > \lg \frac{2}{3} \text{ и } x = 1 = \frac{3}{3} < \frac{4}{3}.$$

$$\text{Значит, } x = 1 \in \left[\lg \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right].$$

Ответ: а) 1; б) 1.

Пример 18. а) Решите уравнение

$$4 \log_4 \left(2 - \frac{2}{2x+3}\right) = 5 \log_4 \left(2 + \frac{1}{x+1}\right) + 4.$$

$$\text{б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку } [-3; \sqrt{5}].$$

Решение.

а) Выражения в каждой скобке приведем к общему знаменателю:

$$4 \log_4 \left(\frac{4x+4}{2x+3} \right) = 5 \log_4 \left(\frac{2x+3}{x+1} \right) + 4, \quad 4 \log_4 \left(4 \cdot \frac{x+1}{2x+3} \right) = 5 \log_4 \left(\frac{2x+3}{x+1} \right) + 4,$$

$$4 + 4 \log_4 \left(\frac{x+1}{2x+3} \right) - 5 \log_4 \left(\frac{2x+3}{x+1} \right) - 4 = 0,$$

$$4 \log_4 \left(\frac{x+1}{2x+3} \right) + 5 \log_4 \left(\frac{x+1}{2x+3} \right) = 0, \quad 9 \log_4 \left(\frac{x+1}{2x+3} \right) = 0, \quad \log_4 \left(\frac{x+1}{2x+3} \right) = 0,$$

откуда $\frac{x+1}{2x+3} = 1$, $\frac{x+2}{2x+3} = 0$, $x = -2$ — корень исходного уравнения.

б) $x \in [-3; \sqrt{5}]$.

$$-3 < -2 < \sqrt{5}.$$

Ответ: а) -2 ; б) -2 .

Пример 19. а) Решите уравнение

$$9^{\frac{x^2-x}{2}} - 8 \cdot 3^{x^2} - 3^{2+x} = 0.$$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-2; \frac{13}{15}\right]$.

Решение.

а) $(3^{2x^2-x} - 9 \cdot 3^{x^2}) + (3^{x^2} - 9 \cdot 3^x) = 0$, или $3^{x^2}(3^{x^2-x} - 9) + 3^x(3^{x^2-x} - 9) = 0$,

или $(3^{x^2-x} - 9)(3^{x^2} + 3^x) = 0$, откуда $3^{x^2} + 3^x = 0$ — нет корней, так как

$3^{x^2} + 3^x > 0$, или $3^{x^2-x} - 9 = 0$, $3^{x^2-x} = 3^2$, или $x^2 - x - 2 = 0$, откуда

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$$

б) $x = -1 > -2$, $-2 < -1 < \frac{13}{15}$, т. е. $x = -1 \in \left[-2; \frac{13}{15}\right]$.

$x = 2 > \frac{13}{15}$, значит, $x = 2 \notin \left[-2; \frac{13}{15}\right]$.

Ответ: а) -1 ; 2; б) -1 .

Примеры для самостоятельного решения

1. а) $4^{4x-2} - 4^{2x-1} = 12$; б) $\left[0,5; \frac{7}{3}\right]$.

2. а) $3^{2\sqrt{x}} - 8 \cdot 3^{\sqrt{x}} = 9$; б) $\left[\frac{17}{6}; 5\right]$.

3. а) $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{2-x} = 29$; б) $\left[\frac{4}{3}; 3\right]$.

4. а) $3^{2x^2} - 2 \cdot 3^{x^2+x+6} + 3^{2x+12} = 0$; б) $[-3; 2]$.

5. а) $9^x + 4^x - 13 \cdot 6^{x-1} = 0$; б) $\left[-2; \frac{11}{12}\right]$.

6. а) $(4 - \sqrt{15})^x + (4 + \sqrt{15})^x = 62$; б) $\left[\frac{5}{3}; \frac{16}{7}\right]$.

7. а) $\log_{1+x}(2x^3 + 2x^2 - 3x + 1) = 3$; б) $[\sqrt{3}; \log_2 9]$.

8. а) $2 \log_2 \left(\frac{x-3}{x-2}\right) + \log_2 \left(\frac{3(x-2)}{x-1}\right) = 3$; б) $\left[\lg 0,01; \frac{1}{3}\right]$.

9. а) $\lg \sqrt{8x+8} - \frac{1}{2} \lg(x-13) = 3 \lg 2$; б) $\left[\frac{47}{3}; 17\right]$.

10. а) $\lg(x+2)(x-3) = \lg \frac{x+2}{x-3}$; б) $[\log_3 82; 5]$.

11. а) $\log_2^2 x - \log_2 \frac{16}{x} = 2$; б) $[\log_2 15; \log_2 18]$.

12. а) $\lg^2(2x-1) - \lg(x-0,5) = \lg 2$; б) $\left[\frac{4}{3}; \log_2 65\right]$.

13. а) $\log_3(2x+1) - \frac{2}{\log_3(2x+1)} = 1$; б) $\left[-\frac{2}{3}; \log_3 2\right]$.

14. а) $\lg \sqrt{11x-1} - \lg x = 0,5$; б) $[\lg 4; \lg 11]$.

15. а) $\sqrt{1+2\log_9 x} + \sqrt{4-\log_3 x} = 3$; б) $\left[\frac{9}{8}; 28\right]$.

16. а) $\log_4(4x-1) \cdot \log_{4x-1} 16 = x^2 + 3x$; б) $\left[\frac{3}{7}; \log_5 6\right]$.

17. а) $27^x - 4 \cdot 3^{x+2} + 3^{5-x} = 0$; б) $\left[0; \sqrt{\frac{7}{6}}\right]$.

18. а) $3 \cdot 9^{x+1} - 5 \cdot 6^{x+1} + 8 \cdot 2^{2x} = 0$; б) $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

19. а) $3 \cdot 9^{x-\frac{1}{2}} - 7 \cdot 6^x + 12 \cdot 4^x = 0$; б) $[2; 3]$.

20. а) $8^x - 10 \cdot 2^x + 16 \cdot 2^{-x} = 0$; б) $[0; \log_5 11]$.

МЕТОД ИНТЕРВАЛОВ

§ 5. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Здесь представлены в основном логарифмические и показательные неравенства, а также другие типы неравенств. В любом случае исходное неравенство сводится к дробно-рациональному. Самое трудное — найти пересечение полученных неравенств с областью допустимых значений (ОДЗ).

Неравенство, содержащее только рациональные функции, называется *рациональным*.

Неравенства вида $P_n(x) > 0$ или $P_n(x) < 0$, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ или $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$,

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены соответственно степеней m и n , т. е. $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$; $Q_m(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$, наиболее часто решаются *методом интервалов* (промежутков). Этот метод основан на одном важном свойстве рациональной функции: в интервале между двумя соседними нулями рациональная функция сохраняет знак. Если рассматривается дробно-рациональная функция, то те значения переменной x , при которых функция обращается в нуль, будем называть *нулями функции* (точки числителя), а точки, при которых знаменатель дроби обращается в нуль, — *точками разрыва функции*.

Сущность метода интервалов состоит в следующем. На числовой оси отмечают все нули и точки разрыва функции $f(x)$ (если они есть). При этом числовая ось разбивается на конечное число интервалов, на каждом из которых левая часть неравенства сохраняет постоянный знак. Чтобы установить этот знак, достаточно взять любую точку из интересующего нас промежутка и определить знак функции в этой точке. Что касается самих точек, то в случае строгого неравенства точки обозначают *светлыми кружками*. Это означает, что сами точки не входят во множество решений данного неравенства. В случае нестрогого неравенства точки наносят на числовую прямую *темны-*

ми кружками, а это означает, что сами точки также входят во множество решений данного неравенства. Понятно, что во всех случаях *точки разрыва* функции обозначают светлыми кружками.

Следует отметить, что наибольшие трудности возникают при определении знаков промежутков.

При решении неравенств методом интервалов могут встретиться следующие типы неравенств.

5.1. Простейшие неравенства, представленные в виде произведения линейных множителей

Пример 1. Решите неравенство

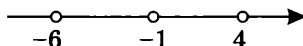
$$(x + 1)(x + 6)(x - 4) < 0.$$

Решение.

Рассмотрим функцию

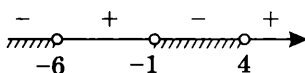
$$f(x) = (x + 1)(x + 6)(x - 4). \quad (1)$$

Найдем нули функции, для чего решим уравнение $f(x) = 0$ или $(x + 1)(x + 6)(x - 4) = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = -6$, $x_3 = 4$.



Отметим эти точки на числовой прямой. Так как мы решаем строгое неравенство, то все точки отмечаем светлыми кружками. На каждом из полученных промежутков каждый из множителей $(x + 1)$, $(x + 6)$ и $(x - 4)$ сохраняет знак, следовательно, сохраняет знак все выражение.

Для определения знаков промежутков достаточно знать, какой знак имеет функция в одном из промежутков, и, пользуясь свойством чередования знаков, найдем знаки во всех остальных промежутках. При этом удобно начинать с крайнего справа промежутка $(4; +\infty)$, так как в нем значение функции (1) заведомо положительно. Объясняется это тем, что при значениях x , взятых правее наибольшего из нулей функции, каждый из множителей $x + 1$, $x + 6$ и $x - 4$ положителен. Определим теперь, используя свойство чередования знаков на числовой прямой, знаки данной функции в каждом из остальных промежутков:



Как видно из рисунка, те значения x , при которых $f(x) < 0$ (заштрихованы), лежат в промежутках $(-\infty; -6)$, $(-1; 4)$. Решение данного неравенства представляет собой объединение указанных промежутков.

Ответ: $(-\infty; -6) \cup (-1; 4)$.

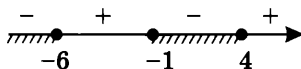
Пример 2. Решите неравенство

$$(x + 1)(x + 6)(x - 4) \leq 0.$$

Решение.

Решение данного неравенства полностью соответствует приведенному выше. Отличие состоит лишь в том, что неравенство нестрогое, а потому нули функции входят во множество решений.

Такие точки, как было сказано ранее, отмечаем темными кружками.



Ответ: $(-\infty; -6] \cup [-1; 4]$.

5.2. Простейшие неравенства, разлагающиеся на линейные множители

Мы рассмотрели неравенство, левая часть которого уже была разложена на линейные множители, а в правой части число 0. Рассмотрим неравенство, которое можно привести к аналогичному виду.

Пример 3. Решите неравенство $x^3 \geq 9x$.

Решение.

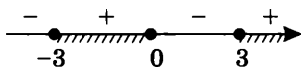
Запишем неравенство в виде $x^3 - 9x \geq 0$.

Вынесем общий множитель x за скобки:

$$x(x^2 - 9) \geq 0, \text{ или } x(x - 3)(x + 3) \geq 0.$$

Решая методом интервалов, получим

$$x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = -3.$$



Ответ: $[-3; 0] \cup [3; +\infty)$.

5.3. Простейшие дробно-рациональные неравенства без кратных корней

Пример 4. Решите неравенство

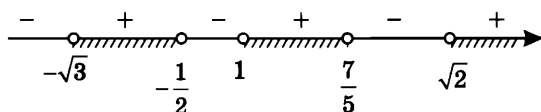
$$\frac{(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})}{(2x+1)(5x-7)} > 0.$$

Решение.

Функция $f(x) = \frac{(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})}{(2x+1)(5x-7)}$ обращается в нуль в точках

$x_1 = 1$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{2}$ и претерпевает разрыв в точках $x_4 = -\frac{1}{2}$ и $x_5 = \frac{7}{5}$.

Эти 5 точек разбивают числовую прямую на 6 промежутков. Так как неравенство строгое, то все точки отмечаем светлыми кружками:



Нужно решить неравенство $f(x) > 0$. Решая методом интервалов, получим

$$\left(-\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{7}{5}\right) \cup (\sqrt{2}; +\infty).$$

Заметим, что ответ можно записать иначе:

$$-\sqrt{3} < x < -\frac{1}{2}, \quad 1 < x < \frac{7}{5}, \quad x > \sqrt{2}.$$

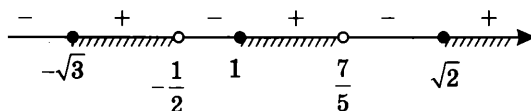
Ответ: $\left(-\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{7}{5}\right) \cup (\sqrt{2}; +\infty).$

Пример 5. Решите неравенство

$$\frac{(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})}{(2x+1)(5x-7)} \geq 0.$$

Решение.

В данном случае нули функции принадлежат множеству решений данного неравенства, поэтому на рисунке они отмечаются темными кружками, а точки разрыва функции (как было отмечено ранее) — светлыми.



Ответ: $\left[-\sqrt{3}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[1; \frac{7}{5}\right) \cup [\sqrt{2}; +\infty)$.

5.4. Неравенство, содержащее множитель, не принимающий нулевого значения на числовой прямой

Пример 6. Решите неравенство

$$\frac{(6x-5)(2+x^2)}{(4-x^2)x} \leq 0.$$

Решение.

Запишем неравенство в виде $\frac{(6x-5)(2+x^2)}{-(x^2-4)x} \leq 0$.

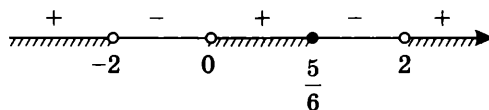
Умножим обе части полученного неравенства на -1 , изменив знак неравенства на противоположный:

$$\frac{(6x-5)(2+x^2)}{(x-2)(x+2)x} \geq 0.$$

Заметим, что множитель $2+x^2 > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$. В этом случае полученное неравенство равносильно неравенству $\frac{(6x-5)}{(x-2)(x+2)x} \geq 0$.

Тогда $x_1 = \frac{5}{6}$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$, $x_4 = 0$.

Решаем полученное неравенство методом интервалов:



Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left(0; \frac{5}{6}\right] \cup (2; +\infty)$.

Пример 7. Решите неравенство $\frac{2x^2 - 5x - 2}{3x - x^2 - 7} \leq 1$.

Решение.

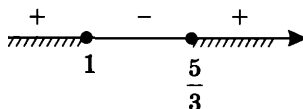
Перенесем 1 из правой части в левую и упростим полученную дробь:

$$\frac{2x^2 - 5x - 2}{3x - x^2 - 7} - 1 \leq 0, \text{ или } \frac{2x^2 - 5x - 2 - 3x + x^2 + 7}{3x - x^2 - 7} \leq 0,$$

$$\frac{3x^2 - 8x + 5}{-(x^2 - 3x + 7)} \leq 0, \text{ или } \frac{3x^2 - 8x + 5}{x^2 - 3x + 7} \geq 0.$$

Заметим, что $x^2 - 3x + 7 > 0$ при любом $x \in R$, так как дискриминант $D < 0$ и $a = 1 > 0$, тогда имеем равносильное неравенство $3x^2 - 8x + 5 \geq 0$,

$$D/4 = 16 - 15 = 1 > 0, x_{1,2} = \frac{4 \pm 1}{3}, \text{ откуда } x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = 1.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; 1] \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right).$$

Пример 8. Решите неравенство

$$\frac{(x+1)(x^2+1)}{(x-3)(2-x)(-4-x^2)} \geq 0.$$

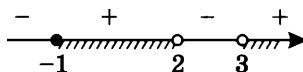
Решение.

Запишем данное неравенство в виде

$$\frac{(x+1)(x^2+1)}{(x-3)(x-2)(x^2+4)} \geq 0.$$

Так как $x^2 + 1 > 0$ и $x^2 + 4 > 0$ при любом $x \in R$, то получим равносильное неравенство $\frac{(x+1)}{(x-3)(x-2)} \geq 0$. Решая методом интервалов,

имеем $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$.



$$\text{Ответ: } [-1; 2) \cup (3; +\infty).$$

5.5. Простейшие неравенства с кратными корнями

Если в условии неравенства содержится множитель вида $(x - a)^{2n}$, где $n \in \mathbb{N}$, то точку $x = a$ будем называть *двойной*. Это означает, что при переходе через двойную точку функция не меняет знака.

Если же неравенство содержит множитель с нечетным показателем, то справа и слева от точки $x = a$ функция имеет разные знаки. В этом случае точку $x = a$ будем называть *простой*. Следовательно, при переходе через простую точку функция $f(x)$ меняет знак.

Пример 9. Решите неравенство

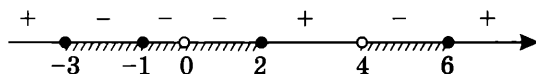
$$\frac{(x-2)^3(x+1)^4(x+3)^5(x-6)}{x^2(x-4)^3} \leq 0.$$

Решение.

Нули функции: $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = -3$, $x_4 = 6$.

Точки разрыва функции: $x_5 = 0$, $x_6 = 4$.

Двойные точки: $x_2 = -1$ и $x_5 = 0$.



На рисунке нули функции отмечены темными кружками, а точки разрыва — светлыми. Как видно, слева и справа от двойных точек -1 и 0 функция не меняет знака.

Следовательно, получим $-3 \leq x \leq -1$; $-1 \leq x \leq 0$; $0 < x \leq 2$; $4 < x \leq 6$, или короче $[-3; 0] \cup (0; 2] \cup (4; 6]$.

Ответ: $[-3; 0] \cup (0; 2] \cup (4; 6]$.

Пример 10. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} - \frac{2x - 1}{x^3 + 1}}.$$

Решение.

Нахождение области определения данной функции сводится к решению неравенства

$$\frac{2}{x^2 - x + 1} - \frac{1}{x + 1} - \frac{2x - 1}{x^3 + 1} \geq 0, \text{ или } \frac{2(x+1) - (x^2 - x + 1) - (2x - 1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \geq 0,$$

$$\frac{-x^2 + x + 2}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \geq 0, \text{ или } \frac{x^2 - x - 2}{(x+1)(x^2 - x + 1)} \leq 0.$$

Так как $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$ и $x^2 - x + 1 > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$ (так как $D < 0$ и $a = 1 > 0$), то полученное неравенство равносильно неравенству $\frac{(x+1)(x-2)}{x+1} \leq 0$.

Заметим, что $x = 2$ — нуль функции, а $x = -1$ — точка разрыва. Отметим, что слева и справа от точки $x = -1$ функция не меняет знака.



Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-1; 2]$.

5.6. Рациональные неравенства

Пример 11. Решите неравенство

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} \leq \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 3}.$$

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\begin{aligned} \frac{(x+1)^2 + 1}{x+1} + \frac{(x+4)^2 + 4}{x+4} &\leq \frac{(x+2)^2 + 2}{x+2} + \frac{(x+3)^2 + 3}{x+3}, \text{ или} \\ x + 1 + \frac{1}{x+1} + x + 4 + \frac{4}{x+4} &\leq x + 2 + \frac{2}{x+2} + x + 3 + \frac{3}{x+3}, \text{ или} \\ \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+4} &\leq \frac{2}{x+2} + \frac{3}{x+3}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для упрощения вычислений запишем неравенство (1) в виде

$$\frac{4}{x+4} - \frac{3}{x+3} \leq \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}, \text{ или } \frac{4(x+3) - 3(x+4)}{(x+4)(x+3)} \leq \frac{2(x+1) - (x+2)}{(x+2)(x+1)}.$$

После раскрытия скобок в числителе дробей получим

$$\frac{x}{(x+4)(x+3)} \leq \frac{x}{(x+2)(x+1)}, \text{ или } x \left(\frac{(x+2)(x+1) - (x+4)(x+3)}{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)} \right) \leq 0.$$

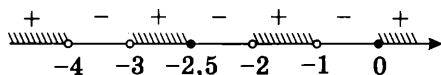
Вновь раскрывая скобки в числителе дроби, имеем

$$\begin{aligned} x \cdot \frac{x^2 + 3x + 2 - x^2 - 7x - 12}{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)} &\leq 0, \text{ или } \frac{x(-4x - 10)}{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)} \leq 0, \text{ или} \\ \frac{x(x+2,5)}{(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)} &\geq 0. \end{aligned}$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, находим

$$x_1 = 0; x_2 = -2,5; x_3 = -4;$$

$$x_4 = -3; x_5 = -2; x_6 = -1.$$



Ответ: $(-\infty; -4) \cup (-3; -2,5] \cup (-2; -1) \cup [0; +\infty]$.

Пример 12. Решите неравенство

$$\left(\frac{5}{6x-11} + \frac{6x-11}{5} \right)^2 \leq \frac{25}{4}.$$

Решение.

Неравенство имеет вид $a^2 \leq \frac{25}{4}$, приводим к виду

$$\left(a - \frac{5}{2} \right) \left(a + \frac{5}{2} \right) \leq 0 \text{ и т. д.}$$

В нашем случае получим неравенство

$$\left(\frac{5}{6x-11} + \frac{6x-11}{5} - \frac{5}{2} \right) \left(\frac{5}{6x-11} + \frac{6x-11}{5} + \frac{5}{2} \right) \leq 0,$$

$$\left(\frac{25 + (6x-11)^2}{5(6x-11)} - \frac{5}{2} \right) \left(\frac{25 + (6x-11)^2}{5(6x-11)} + \frac{5}{2} \right) \leq 0.$$

Пусть $\frac{25 + (6x-11)^2}{5(6x-11)} = y$, тогда имеем $\left(y - \frac{5}{2} \right) \left(y + \frac{5}{2} \right) \leq 0$. Решая мето-

дом интервалов, находим $-\frac{5}{2} \leq y \leq \frac{5}{2}$.

Учитывая замену, получим систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{25 + (6x-11)^2}{5(6x-11)} \leq \frac{5}{2}, & \begin{cases} \frac{50 + 2(6x-11)^2 - 25(6x-11)}{10(6x-11)} \leq 0, \\ \frac{50 + 2(6x-11)^2 + 25(6x-11)}{10(6x-11)} \geq 0. \end{cases} \\ \frac{25 + (6x-11)^2}{5(6x-11)} \geq -\frac{5}{2}; \end{cases}$$

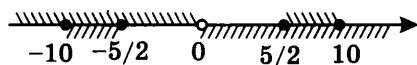
Пусть $6x - 11 = t$, тогда числители дробей можно разложить на множители:

$$2t^2 - 25t + 50 = 2(t - 10) \left(t - \frac{5}{2} \right) \text{ и } 2t^2 + 25t + 50 = 2(t + 10) \left(t + \frac{5}{2} \right).$$

Тогда получим

$$\begin{cases} \frac{2(t-10)\left(t-\frac{5}{2}\right)}{10t} \leq 0, & \frac{(t-10)\left(t-\frac{5}{2}\right)}{t} \leq 0, \\ \frac{2(t+10)\left(t+\frac{5}{2}\right)}{10t} \geq 0; & \frac{(t+10)\left(t+\frac{5}{2}\right)}{t} \geq 0. \end{cases}$$

Найдем пересечение:



$$-10 \leq t \leq -\frac{5}{2}; \quad \frac{5}{2} \leq t \leq 10.$$

Учитывая замену $6x - 11 = t$, имеем:

$$1) -10 \leq 6x - 11 \leq -\frac{5}{2}, \quad 2) \frac{5}{2} \leq 6x - 11 \leq 10,$$

$$1 \leq 6x \leq \frac{17}{2},$$

$$\frac{27}{2} \leq 6x \leq 21,$$

$$\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{17}{12}.$$

$$\frac{9}{4} \leq x \leq \frac{7}{2}.$$

Следовательно, $x \in \left[\frac{1}{6}; \frac{17}{12}\right] \cup \left[\frac{9}{4}; \frac{7}{2}\right]$.

Ответ: $\left[\frac{1}{6}; \frac{17}{12}\right] \cup \left[\frac{9}{4}; \frac{7}{2}\right]$.

Пример 13. Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 3x - 3}{x^2 - 3x} + \frac{8x - 29}{x - 4} \leq \frac{9x + 1}{x}.$$

Решение.

Если перенести последнюю дробь в левую часть неравенства, а затем привести дроби к общему знаменателю, то получим довольно сложное неравенство.

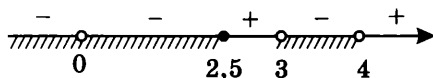
Более простое решение заключается в выделении целой части у каждой дроби.

$$\begin{aligned} & \frac{(x^2 - 3x) - 3}{x^2 - 3x} + \frac{8(x - 4) + 3}{x - 4} \leq \frac{9x}{x} + \frac{1}{x}, \text{ или} \\ & 1 - \frac{3}{x(x - 3)} + 8 + \frac{3}{x - 4} \leq 9 + \frac{1}{x}, \text{ или } \frac{3}{x - 4} - \frac{3}{x(x - 3)} - \frac{1}{x} \leq 0, \text{ или} \end{aligned}$$

$$\frac{3x(x-3)-3(x-4)-(x-4)(x-3)}{x(x-3)(x-4)} \leq 0.$$

После упрощения числителя дроби получим $\frac{x(2x-5)}{x(x-3)(x-4)} \leq 0$.

Решая методом интервалов, находим



Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 2,5] \cup (3; 4)$.

Пример 14. Решите неравенство

$$x^3 + 2x^2 - \frac{7x^2 - 5x + 20}{x-4} \leq 5.$$

Решение.

Приведение левой части неравенства к общему знаменателю ни к чему хорошему не приводит, так как в результате в числителе дроби получим многочлен IV степени, который придется разложить на множители.

Запишем неравенство в виде

$$x^3 + 2x^2 - \left(\frac{7x^2}{x-4} - \frac{5(x-4)}{x-4} \right) \leq 5, \text{ или } x^3 + 2x^2 - \frac{7x^2}{x-4} + 5 \leq 5, \text{ или}$$

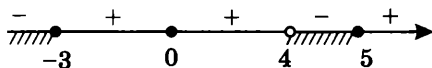
$$x^3 + 2x^2 - \frac{7x^2}{x-4} \leq 0.$$

Теперь вынесем общий множитель x^2 за скобки:

$$x^2 \left(x + 2 - \frac{7}{x-4} \right) \leq 0, \text{ или } \frac{x^2((x+2)(x-4)-7)}{x-4} \leq 0, \text{ или}$$

$$\frac{x^2(x^2 - 2x - 15)}{x-4} \leq 0.$$

Но $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$, где 5 и -3 — корни квадратного трехчлена. Тогда получим неравенство $\frac{x^2(x-5)(x+3)}{x-4}$, которое решим методом интервалов, учитывая, что x^2 — двойная точка.



Следовательно, $x \leq -3$, $x = 0$ или $4 < x \leq 5$.

Ответ: $(-\infty; -3] \cup \{0\} \cup (4; 5]$.

Пример 15. Решите неравенство

$$\frac{x^2 + 3x - 4}{x + 4} + \frac{x^2 + 6x + 4}{x + 6} \leq 2x - 3.$$

Решение.

Поскольку $x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$, где 1 и -4 — корни квадратного трехчлена, то неравенство примет вид

$$\frac{(x+4)(x-1)}{x+4} + \frac{x(x+6)}{x+6} + \frac{4}{x+6} \leq 2x - 3, \text{ или}$$

$$x - 1 + x + \frac{4}{x+6} \leq 2x - 3, \quad x \neq -4.$$

Получим неравенство $\frac{4}{x+6} + 2 \leq 0, \quad x \neq -4,$

$$\text{или } \frac{4 + 2x + 12}{x + 6} \leq 0, \quad x \neq -4, \text{ или } \frac{x + 8}{x + 6} \leq 0, \quad x \neq -4.$$

Решая методом интервалов, имеем

$$\begin{array}{ccccccc} + & & - & & + & & \\ | & & | & & | & & \\ \bullet & & \circ & & \circ & & \\ -8 & & -6 & & -4 & & \end{array} \quad -8 \leq x < -6.$$

Ответ: $[-8; -6);$

Пример 16. Решите неравенство

$$\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} \leq \frac{3}{4}.$$

Решение.

Приведение дроби к общему знаменателю лишь усложняет решение.

$$\text{Заметим, что } \frac{1}{(x-1)x} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1},$$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}.$$

Тогда исходное неравенство примет вид

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \leq \frac{3}{4}, \text{ или } \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \leq \frac{3}{4}, \text{ где } x \neq 0,$$

$$x \neq -1, \quad \frac{x+2-x+1}{(x-1)(x+2)} \leq \frac{3}{4}, \quad \frac{3}{(x-1)(x+2)} \leq \frac{3}{4}, \text{ или } \frac{4-(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} \leq 0.$$

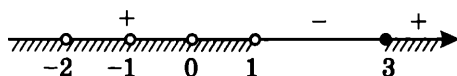
После преобразований получим неравенство

$$\frac{x^2 + x - 6}{(x-1)(x+2)} \geq 0, \quad x \neq 0, \quad x \neq -1.$$

Но $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, где 3 и -2 — корни квадратного трехчлена.

Следовательно, $\frac{(x-3)(x+2)}{(x-1)(x+2)} \geq 0, \quad x \neq 0, \quad x \neq -1, \quad x \neq -2.$

Решая полученное неравенство методом интервалов, имеем



Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 1) \cup [3; +\infty).$

Пример 17. Решите неравенство

$$\frac{x}{(x-3)^3 + (x-4)^3 - 1} \geq 0.$$

Решение.

Понятно, что раскрытие скобок с применением формулы куба разности лишь усложнит решение неравенства.

Идея решения заключается в применении формулы кубов к выражению

$$(x-3)^3 - 1 = (x-3-1)((x-3)^2 + (x-3) + 1) = (x-4)(x^2 - 5x + 7).$$

В этом случае неравенство примет вид

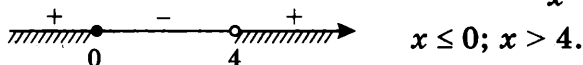
$$\frac{x}{(x-4)(x^2 - 5x + 7) + (x-4)^3} \geq 0.$$

В знаменателе дроби вынесем общий множитель $(x-4)$ за скобки:

$$\frac{x}{(x-4)(x^2 - 5x + 7 + (x-4)^2)} \geq 0, \quad \text{или} \quad \frac{x}{(x-4)(2x^2 - 13x + 23)} \geq 0.$$

Заметим, что $2x^2 - 13x + 23 > 0$, так как $D = -15 < 0$ и $a = 2 > 0$.

Следовательно, получим равносильное неравенство $\frac{x}{x-4} \geq 0$.



Ответ: $(-\infty; 0] \cup (4; +\infty).$

Пример 18. Решите неравенство

$$24(5x + 6)(x^2 - x + 8) < 16(5x + 6)^2 + 9(x^2 - x + 8).$$

Решение.

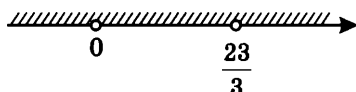
Пусть для краткости $a = 5x + 6$, $b = x^2 - x + 8$. Тогда получим неравенство $24ab < 16a^2 + 9b^2$, или $16a^2 - 24ab + 9b^2 > 0$.

Левая часть полученного неравенства — квадрат разности.

Имеем $(4a - 3b)^2 > 0$, откуда $4a \neq 3b$.

Учитывая замены, получим $4(5x + 6) \neq 3(x^2 - x + 8)$, или

$$3x^2 - 23x \neq 0, \text{ или } x(3x - 23) \neq 0, \text{ т. е. } x \neq 0, x \neq \frac{23}{3}.$$



$$x < 0, 0 < x < \frac{23}{3}, x > \frac{23}{3}.$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{23}{3}\right) \cup \left(\frac{23}{3}; +\infty\right).$$

Пример 19. Решите неравенство

$$x^3 + 3x^2 - \frac{8x^2 - x + 4}{x - 4} \leq 1.$$

Решение.

$$\text{Заметим, что } \frac{8x^2 - x + 4}{x - 4} = \frac{8x^2 - (x - 4)}{x - 4} = \frac{8x^2}{x - 4} - 1.$$

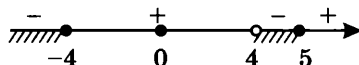
$$\text{Тогда получим } x^3 + 3x^2 - \frac{8x^2}{x - 4} + 1 \leq 1, \text{ или } x^3 + 3x^2 - \frac{8x^2}{x - 4} \leq 0, \text{ или}$$

$$x^2 \left(x + 3 - \frac{8x^2}{x - 4} \right) \leq 0, \text{ или } \frac{x^2(x^2 - x - 12 - 8)}{x - 4} \leq 0, \text{ или } \frac{x^2(x^2 - x - 20)}{x - 4} \leq 0.$$

$$\text{Так как } x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4), \text{ то имеем } \frac{x^2(x - 5)(x + 4)}{x - 4} \leq 0.$$

Решая неравенство методом интервалов, находим

$$x = 0, \frac{(x - 5)(x + 4)}{x - 4} \leq 0.$$



$$\text{Ответ: } (-\infty; -4] \cup \{0\} \cup (4; 5].$$

Пример 20. Решите неравенство

$$(7x + 3)(5 - 6x)(42x^2 - 17x - 15) < 0.$$

Решение.

Разложим квадратный трехчлен на множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена.

Имеем $a = 42$, $b = -17$, $c = -15$, тогда

$$D = 289 - 4 \cdot 42 \cdot (-15) = 289 + 2520 = 2809 = 53^2 > 0,$$

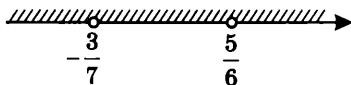
$$x_{1,2} = \frac{17 \pm 53}{2 \cdot 42}, \quad x_1 = \frac{70}{2 \cdot 42} = \frac{35}{42} = \frac{5}{6}, \quad x_2 = \frac{-36}{2 \cdot 42} = -\frac{18}{42} = -\frac{3}{7}.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } 42x^2 - 17x - 15 &= 42\left(x - \frac{5}{6}\right)\left(x + \frac{3}{7}\right) = \\ &= (6x - 5)(7x + 3). \end{aligned}$$

Исходное неравенство примет вид

$$(7x + 3)(5 - 6x)(6x - 5)(7x + 3) < 0, \text{ или } -(7x + 3)^2(5 - 6x)^2 < 0.$$

Неравенство выполняется при всех x , кроме $x = -\frac{3}{7}$ и $x = \frac{5}{6}$.



$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{3}{7}\right) \cup \left(-\frac{3}{7}; \frac{5}{6}\right) \cup \left(\frac{5}{6}; +\infty\right).$$

Примеры для самостоятельного решения

Найдите наименьшее целое решение неравенства:

1. $4x^2 - 3x + 5 \leq 0.$

2. $9x^2 + 6x + 1 \leq 0.$

3. $(x - 3)^2 \leq 49.$

4. $\frac{(x+1)(x-3)(x+2)^3 x^2}{(x+1)(x-1)(x-4)^4} \geq 0.$

5. $(x - 3)^3(x + 1)^3(x + 2)^4(3x - 2) < 0.$

6. $x^3 - 64x > 0.$

7. $x^4 + 8x^3 + 12x^2 \geq 0.$

8. $\frac{x^3 + x^2 + x}{9x^2 - 25} \geq 0.$

9. $(x^2 + 4x + 4)(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4)(x^2 - 6x + 8) < 0.$

10. $\frac{x^2 - 6x}{x^2 + 6x + 9} \leq 0.$

11. $\frac{2x^2 + 2x - 11}{x^2 + x + 1} < 1.$

12. $\frac{x^2+6x}{x^2+3x-4} \leq 0.$

13. $\frac{3-x^2}{x^2-1} \leq -1.$

14. $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x+3} < \frac{3}{x+2}.$

15. $\frac{10(5-x)}{3(x-4)} + \frac{11(6-x)}{3(4-x)} \geq \frac{5(6-x)}{x-2}.$

16. $x^6 + 9x^3 + 8 \leq 0.$

17. $x^2 + \frac{27}{x} \leq 0.$

18. $\frac{2x-3}{x^2+3} \leq -1.$

Найдите длины интервалов, на которых выполняются неравенства:

19. $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{5}.$

20. $\frac{x-3}{x+7} \geq 2.$

21. $\frac{x^2-5x+6}{x^2+x+1} < 0.$

22. $\frac{x-2}{x^2+1} < -\frac{1}{2}.$

23. $\frac{x^4+x^2+1}{x^2-4x-5} < 0.$

24. $\frac{x^2-5x+7}{-2x^2+3x+2} > 0.$

25. $1 + \frac{12}{x^2} < \frac{7}{x}.$

26. $x^4 - 2x^2 - 63 \leq 0.$

27. $\frac{x^4+x^2+3}{-x^2+x+2} > 0.$

Найдите середины интервалов, на которых выполняются неравенства:

28. $\frac{x^2+2x+1}{x^2-x-6} \leq 0.$

29. $\frac{36-x^2}{x^2+6x} > 0.$

30. $\frac{x^2-8x+16}{x^2-5} \leq 0.$

31. $\frac{2x^2+5x+9}{x^2+1} > 3.$

32. $\frac{3x^2-11x+22}{x^2-4x+5} > 3.$

Найдите среднее арифметическое целых решений неравенств:

33. $x^4 - 17x^2 + 16 \leq 0.$

34. $\frac{(x-2)(x+5)^2}{-x-2} \geq 0.$

35. $-\frac{4}{x} \leq -\frac{1}{2}.$

36. $\frac{(x^3-27)(-x^2-4)}{x^3+8} \geq 0.$

37. $\frac{9x^2 + 9x + 7}{3x^2 + 2x - 1} \geq 0.$

38. $\frac{15}{3x + 4 - x^2} > 1.$

39. $\frac{1 - x + x^2 - x^3}{x + 8} \geq 0.$

40. $\frac{1}{x + 2} \geq \frac{2x}{x^2 - 9}.$

Найдите наименьшие натуральные решения неравенств:

41. $x^3 - 3x^2 - x + 3 > 0.$ **42.** $2x + 7 > \frac{x}{2} - 1.$

43. $\frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 1} > 0.$

44. $\frac{5}{2 + x} + \frac{1}{2 - x} < 1.$

45. $\frac{x^2 - 4x + 3}{x} > 0.$

46. $x > \frac{x^2 - 2x - 1}{x + 1}.$

Найдите наибольшие решения неравенств:

47. $x^4 - 2x^2 - 63 \leq 0.$

48. $\frac{x + 1}{x - 1} \leq \frac{x + 5}{x + 1}.$

49. $\frac{6}{x - 5} \geq x.$

50. $\frac{3x^2 - 16x + 21}{x^2 + 4x + 4} \leq 0.$

МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ

§ 6. СУЩНОСТЬ МЕТОДА РАЦИОНАЛИЗАЦИИ (МЕТОДА ЗАМЕНЫ МНОЖИТЕЛЕЙ)

Этот метод наиболее эффективен и доступен для применения к самому широкому классу задач. Он дает возможность рационализировать неравенства с модулем, многие иррациональные неравенства, показательные и логарифмические неравенства как с постоянным, так и с переменным основаниями, а также различные сложные комбинированные неравенства и их системы.

Суть метода рационализации заключается в том, что он позволяет заменять неравенства, состоящие из весьма сложных выражений, на более простые неравенства, решаемые методом интервалов. Единственное ограничение — функции должны быть монотонными.

Необходимо также отметить, что метод рационализации применяется при условии, если исходное неравенство имеет канонический вид

$$\frac{f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_n(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \dots \cdot g_m(x)} \vee 0,$$

где знак сравнения \vee обозначает один из знаков $>$, $<$, \geq , \leq , $=$, множители $f_k(x)$ и $g_p(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $p = 1, 2, \dots, m$) представляют собой различные типы функций.

Решение неравенства зависит *только от знаков* входящих в него множителей.

6.1. Равносильность неравенств

Два неравенства называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

Надо учесть, что о равносильности неравенств мы говорим на одном и том же множестве M .

Например, неравенства $(x - 1)(x - 4) < 0$ и $\frac{x-1}{x-4} < 0$ равносильны (на множестве $(-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$).

Множества их решений $(1; 4)$ совпадают. Чтобы убедиться в этом, достаточно решить их методом интервалов.

Аналогично равносильны неравенства $\log_2 x > \log_2 13$ и $x > 13$ при условии $x > 0$. Решением каждого из них является множество $x > 13$. При этом первое неравенство логарифмическое, второе — алгебраическое.

Другими словами, решения неравенств $\log_2 x - \log_2 13 > 0$ и $x - 13 > 0$ совпадают при $x > 0$. Иначе говоря, при $x > 0$ выражение $\log_2 x - \log_2 13$ имеет такой же знак, что и $x - 11$. Следовательно, если в каком-либо рассматриваемом неравенстве имеется множитель $\log_2 x - \log_2 13$, то при $x > 0$ его можно заменить на $x - 13$.

Заметим, что основная часть методов рационализации для различных классов неравенств обусловлена принципом *монотонности функций*, входящих в неравенства.

6.2. Монотонность функций

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей* на данном числовом промежутке X , если для любых двух точек x_1 и x_2 из промежутка X , таких, что $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно убывающей* на данном числовом промежутке X , если для любых двух точек x_1 и x_2 из промежутка X , таких, что $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

Если функция только возрастает или только убывает на данном промежутке, то она называется *монотонной* на этом промежутке.

6.3. Теорема о корне

1. Если в уравнении $f(x) = C$, где $C = \text{const}$, функция $y = f(x)$ непрерывна и монотонна на множестве M , то уравнение имеет на M не более одного корня.

2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $y = f(x)$ непрерывна и строго *возрастает*, а функция $y = g(x)$ непрерывна и строго *убывает* на множестве M , то уравнение имеет на M не более одного корня.

§ 7. НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

При решении неравенств, содержащих переменную под знаком модуля, методом рационализации необходимо учитывать *условия равносильности*:

$$1. |f(x)| \vee 0 \Leftrightarrow f^2(x) \vee 0.$$

$$2. |f(x)| \vee |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \vee g^2(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \vee 0.$$

$$3. |f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow |f(x)| - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0, \\ |f(x)| - g(x) > 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \geq 0, \end{cases}$$

для всех $x \in D(f) \cap D(g)$.

$$4. |f(x)| \leq g(x) \Leftrightarrow |f(x)| - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \leq 0. \end{cases}$$

$$5. (|f(x)| - |g(x)|) \cdot h(x) \vee 0 \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \cdot h(x) \vee 0.$$

Примеры с решениями

Пример 1. Решите неравенство

$$|x^2 - 13x + 1| \leq |x^2 + 6x - 11|.$$

Решение.

Применяя условие 2, имеем $(x^2 - 13x + 1 - x^2 - 6x + 11)(x^2 - 13x + 1 + x^2 + 6x - 11) \leq 0$, или $(-19x + 12)(2x^2 - 7x - 10) \leq 0$, или $(19x - 12)(2x^2 - 7x - 10) \geq 0$. (1)

Неравенство (1) решим методом интервалов:

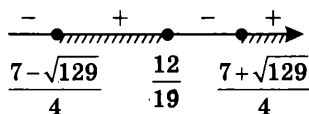
$$19x - 12 = 0, \quad 2x^2 - 7x - 10 = 0,$$

$$x_1 = \frac{12}{19}.$$

$$D = 49 + 80 = 129 > 0,$$

$$x_{2,3} = \frac{7 \pm \sqrt{129}}{4}.$$

Расположим полученные корни на числовой прямой, учитывая, что $\frac{7-\sqrt{129}}{4} < \frac{12}{19} < \frac{7+\sqrt{129}}{4}$, где $\sqrt{129} \approx 11,4$.



Ответ: $\left[\frac{7-\sqrt{129}}{4}; \frac{12}{19} \right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{129}}{4}; +\infty \right)$.

Пример 2. Решите неравенство

$$\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \right| \leq 1.$$

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \right| - 1 \leq 0. \quad (1)$$

Неравенство (1) равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} |x^2 - 3x + 2| - |x^2 + 3x + 2| \leq 0, \\ x^2 + 3x + 2 \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\begin{cases} (x^2 - 3x + 2 - x^2 - 3x - 2)(x^2 - 3x + 2 + x^2 + 3x + 2) \leq 0, \\ (x+1)(x+2) \neq 0, \end{cases}$

или $\begin{cases} -6x(2x^2 + 4) \leq 0, \\ x \neq -1, x \neq -2. \end{cases}$

Разделив обе части неравенства на (-12) , получим $\begin{cases} x(x^2 + 2) \geq 0, \\ x \neq -1, x \neq -2. \end{cases}$

Поскольку $x^2 + 2 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то имеем $\begin{cases} x \geq 0, \\ x \neq -1, x \neq -2, \end{cases}$ отку-

да $x \geq 0$, т. е. $x \in [0; +\infty)$.

Ответ: $[0; +\infty)$.

Пример 3. Решите неравенство

$$|x^2 + x - 12| - 45 \leq 9|x - 3| - 5|x + 4|.$$

Решение.

Поскольку $x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$, где 3 и -4 — корни трехчлена и $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, то исходное неравенство примет вид

$$|x + 4| |x - 3| - 45 \leq 9|x - 3| - 5|x + 4|, \text{ или} \\ (|x + 4| |x - 3| - 9|x - 3|) + 5(|x + 4| - 9) \leq 0, \text{ или} \\ |x - 3| \cdot (|x + 4| - 9) + 5(|x + 4| - 9) \leq 0.$$

Остается вынести за скобки общий множитель:

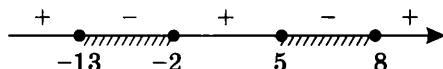
$$(|x + 4| - 9)(|x - 3| + 5) \leq 0. \quad (1)$$

Неравенство (1) мы привели к виду, при котором можно использовать условие равносильности 2.

$$(x + 4 - 9)(x + 4 + 9)(x - 3 - 5)(x - 3 + 5) \leq 0, \text{ или}$$

$$(x - 5)(x + 13)(x - 8)(x + 2) \leq 0.$$

Решая методом интервалов, имеем



$$x \in [-13; -2] \cup [5; 8].$$

Ответ: $[-13; -2] \cup [5; 8]$.

Пример 4. Решите неравенство

$$\frac{|7x - 2| - |x - 9|}{|4x - 3| - |x + 3|} \leq 0.$$

Решение.

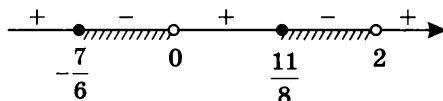
Используя метод рационализации, получим

$$\frac{(7x - 2 - x + 9)(7x - 2 + x - 9)}{(4x - 3 - x - 3)(4x - 3 + x + 3)} \leq 0, \text{ или } \frac{(6x + 7)(8x - 11)}{3(x - 2) \cdot 5x} \leq 0, \text{ или}$$

$$\frac{(6x + 7)(8x - 11)}{x(x - 2)} \leq 0. \quad (1)$$

Кроме того, $|4x - 3| \neq |x + 3|$, т. е. $4x - 3 \neq \pm(x + 3)$, откуда $x \neq 2$, $x \neq 0$.

Теперь остается решить неравенство (1) методом интервалов:



$$\text{Значит, } x \in \left[-\frac{7}{6}; 0\right) \cup \left[\frac{11}{8}; 2\right).$$

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{7}{6}; 0\right) \cup \left[\frac{11}{8}; 2\right).$$

Пример 5. Решите неравенство

$$\frac{7|4-x|}{13-|x+3|} - |x-4| \leq 0.$$

Решение.

Поскольку $|-x| = x$, то данное неравенство можно записать в виде

$$|x-4| \cdot \left(\frac{7}{13-|x+3|} - 1 \right) \leq 0, \text{ или } \frac{|x-4|(7-13+|x+3|)}{13-|x+3|} \leq 0, \text{ или}$$

$$\frac{|x-4|(|x+3|-6)}{|x+3|-13} \geq 0. \quad (1)$$

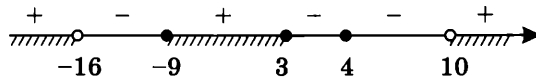
Нетрудно заметить, что $x = 4$ — решение неравенства (1), а значит, и исходного.

Теперь решим неравенство $\frac{|x+3|-6}{|x+3|-13} \geq 0$ методом рационализации,

используя условие равносильности 3:

$$\frac{(x+3-6)(x+3+6)}{(x+3-13)(x+3+13)} \geq 0, \text{ или } \frac{(x-3)(x+9)}{(x-10)(x+16)} \geq 0,$$

$x = 4$.



Значит, $x \in (-\infty; -16) \cup [-9; 3] \cup \{4\} \cup (10; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -16) \cup [-9; 3] \cup \{4\} \cup (10; +\infty)$.

Пример 6. Решите неравенство

$$\frac{|x^2-5x+6|-|x^2+7x-8|}{|6x-1|-|2x-9|} \geq 0.$$

Решение.

$$\frac{(x^2-5x+6-x^2-7x+8)(x^2-5x+6+x^2+7x-8)}{(6x-1-2x+9)(6x-1+2x-9)} \geq 0, \text{ или}$$

$$\frac{(-12x+14)(2x^2+2x-2)}{(4x+8)(8x-10)} \geq 0.$$

После упрощения получим

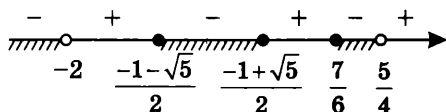
$$\frac{(6x-7)(x^2+x-1)}{(x+2)(4x-5)} \leq 0. \quad (1)$$

Корни числителя: $x_1 = \frac{7}{6}$, $x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Корни знаменателя: $x_4 = -2$, $x_5 = \frac{5}{4}$.

Заметим, что $\sqrt{5} \approx 2,24$, тогда $x_1 < x_5$, $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < \frac{7}{6}$.

Решим неравенство (1) методом интервалов:



$$x \in (-\infty; -2) \cup \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{7}{6}; \frac{5}{4} \right).$$

Ответ: $(-\infty; -2) \cup \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[\frac{7}{6}; \frac{5}{4} \right).$

Пример 7. Решите неравенство

$$|3x^2 - 4|x| - 4| \leq 2|x^2 - 6|x| + 8|.$$

Решение.

Запишем неравенство в виде $|3x^2 - 4|x| - 4| - |2x^2 - 12|x| + 16| \leq 0$.

Так как $x^2 = |x|^2$, то имеем $|3|x|^2 - 4|x| - 4| - |2|x|^2 - 12|x| + 16| \leq 0$.

Теперь применим метод рационализации:

$$(3|x|^2 - 4|x| - 4 - 2|x|^2 + 12|x| - 16)(3|x|^2 - 4|x| - 4 + 2|x|^2 - 12|x| + 16) \leq 0,$$

или $(|x|^2 + 8|x| - 20)(5|x|^2 - 16|x| + 12) \leq 0$.

Используя формулу $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена, разложим каждый из квадратных трехчленов относительно $|x|$ на линейные множители:

$$(|x| + 10)(|x| - 2)(5|x| - 6)(|x| - 2) \leq 0.$$

Так как $|x| + 10 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то получим $(|x| - 2)^2(5|x| - 6) \leq 0$,

откуда $\begin{cases} |x| = 2, \\ 5|x| - 6 \leq 0, \end{cases}$ или

$$\begin{cases} x = \pm 2, \\ (5x - 6)(5x + 6) \leq 0. \end{cases}$$

Следовательно, $x \in \{-2\} \cup [-1,2; 1,2] \cup \{2\}$.

Ответ: $\{-2\} \cup [-1,2; 1,2] \cup \{2\}$.

Пример 8. Решите неравенство $\frac{||x^2 - 3x| - 5| - 5}{||8x - 7| - 7| - 9} \geq 0$.

Решение.

Применяя метод рационализации, получим

$$\frac{(|x^2 - 3x| - 5 - 5)(|x^2 - 3x| - 5 + 5)}{(|8x - 7| - 7 - 9)(|8x - 7| - 7 + 9)} \geq 0, \text{ или}$$

$$\frac{(|x^2 - 3x| - 10)|x^2 - 3x|}{(|8x - 7| - 16)(|8x - 7| + 2)} \geq 0.$$

Заметим, что $|8x - 7| + 2 > 0$ при всех $x \in R$. Тогда полученное неравенство равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} \frac{|x^2 - 3x| - 10}{|8x - 7| - 16} \geq 0, \\ x^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

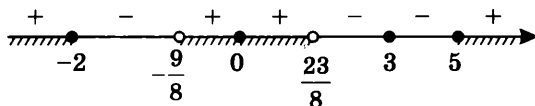
К неравенству системы еще раз применим метод рационализации:

$$\begin{cases} \frac{(x^2 - 3x - 10)(x^2 - 3x + 10)}{(8x - 7 - 16)(8x - 7 + 16)} \geq 0, \\ x(x - 3) = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{(x - 5)(x + 2)(x^2 - 3x + 10)}{(8x - 23)(8x + 9)} \geq 0, \\ x = 0, x = 3. \end{cases}$$

Учитывая, что $x^2 - 3x + 10 > 0$ при всех $x \in R$, так как $D < 0$ и $a = 1 > 0$, получим

$$\begin{cases} \frac{(x - 5)(x + 2)}{(8x - 23)(8x + 9)} \geq 0, \\ x = 0, x = 3. \end{cases}$$

Остается решить полученное неравенство методом интервалов и добавить числа 0 и 3.



$$x \in (-\infty; -2] \cup \left(-\frac{9}{8}; \frac{23}{8}\right) \cup \{3\} \cup [5; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -2] \cup \left(-\frac{9}{8}; \frac{23}{8}\right) \cup \{3\} \cup [5; +\infty).$

Пример 9. Решите неравенство

$$\frac{||5x^2 - x| - 3| - 5x^2 - x - 8}{|x - 2 - x^2| - x^2 + 4x - 6} \geq 0$$

и укажите наименьшее целое решение.

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\frac{||5x^2 - x| - 3| - (5x^2 + x + 8)}{|x - 2 - x^2| - (x^2 - 4x + 6)} \geq 0. \quad (1)$$

Заметим, что $5x^2 + x + 8 > 0$ при всех $x \in R$, так как $D < 0$ и $a = 5 > 0$.

Аналогично $x^2 - 4x + 6 > 0$ при всех $x \in R$. Тогда неравенство (1) примет вид

$$\frac{||5x^2 - x| - 3| - |5x^2 + x + 8|}{|x - 2 - x^2| - |x^2 - 4x + 6|} \geq 0. \quad (2)$$

Теперь к неравенству (2) применим метод рационализации:

$$\frac{(|5x^2 - x| - 3 - (5x^2 + x + 8))(|5x^2 - x| - 3 + (5x^2 + x + 8))}{(x - 2 - x^2 - x^2 + 4x - 6)(x - 2 - x^2 + x^2 - 4x + 6)} \geq 0, \text{ или}$$

$$\frac{(|5x^2 - x| - (5x^2 + x + 11))(|5x^2 - x| + (5x^2 + x + 5))}{(2x^2 - 5x + 8)(3x - 4)} \geq 0.$$

Но $5x^2 + x + 5 > 0$ при всех $x \in R$ и $|5x^2 - x| \geq 0$, тогда $|5x^2 - x| + (5x^2 + x + 5) > 0$.

Аналогично $2x^2 - 5x + 8 > 0$ при всех $x \in R$. Полученное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{|5x^2 - x| - (5x^2 + x + 11)}{3x - 4} \geq 0. \quad (3)$$

Так как $5x^2 + x + 11 > 0$ при всех $x \in R$, то $5x^2 + x + 11 = |5x^2 + x + 11|$. Тогда неравенство (3) запишется в виде

$$\frac{|5x^2 - x| - |5x^2 + x + 11|}{3x - 4} \geq 0.$$

Вновь применив метод рационализации, получим

$$\frac{(5x^2 - x - 5x^2 - x - 11)(5x^2 - x + 5x^2 + x + 11)}{3x - 4} \geq 0, \text{ или}$$

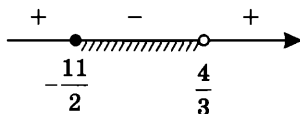
$$\frac{-(2x + 11)(10x^2 + 11)}{3x - 4} \geq 0.$$

Поскольку $10x^2 + 11 > 0$ при всех $x \in R$, то получим равносильное неравенство

$$\frac{2x+11}{3x-4} \leq 0. \quad (4)$$

Наконец, решая неравенство (4) методом интервалов, находим

$$x_1 = -\frac{11}{2}, \quad x_2 = \frac{4}{3}.$$



$$x \in \left[-\frac{11}{2}; \frac{4}{3} \right).$$

Тогда $x = -5$ — наименьшее целое решение неравенства (4), а значит, и исходного.

Ответ: -5 .

Пример 10. Решите неравенство

$$\frac{(|3x-4|-1)(|6-x^2|-13)}{(x-7)^2+|x-7|-30} \leq 0$$

и укажите наибольшее целое решение.

Решение.

Так как $|6-x^2| = |x^2-6|$ и $(x-7)^2 = |x-7|^2$, то данное неравенство примет вид

$$\frac{(|3x-4|-1)(|x^2-6|-13)}{|x-7|^2+|x-7|-30} \leq 0. \quad (1)$$

Знаменатель дроби неравенства (1) представляет собой квадратный трехчлен относительно $|x-7|$, корни которого 5 и -6 .

Следовательно, неравенство (1) можно записать в виде

$$\frac{(|3x-4|-1)(|x^2-6|-13)}{(|x-7|-5)(|x-7|+6)} \leq 0. \quad (2)$$

Но $|x-7|+6 > 0$ при всех $x \in R$, тогда получим равносильное неравенство $\frac{(|3x-4|-1)(|x^2-6|-13)}{|x-7|-5} \leq 0$, которое решим методом рационализации:

$$\frac{(3x-4-1)(3x-4+1)(x^2-6-13)(x^2-6+13)}{(x-7-5)(x-7+5)} \leq 0, \text{ или}$$

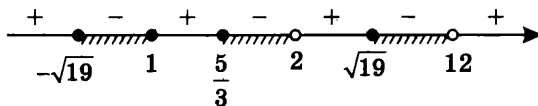
$$\frac{(3x-5)(3x-3)(x^2-19)(x^2+7)}{(x-12)(x-2)} \leq 0.$$

Так как $x^2 + 7 > 0$ при всех $x \in R$, то имеем

$$\frac{3(3x-5)(x-1)(x^2-19)}{(x-12)(x-2)} \leq 0, \text{ или } \frac{(3x-5)(x-1)(x-\sqrt{19})(x+\sqrt{19})}{(x-12)(x-2)} \leq 0.$$

Решая методом интервалов, находим $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = 1$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{19}$,

$$x_5 = 12, x_6 = 2.$$



$$x \in [-\sqrt{19}; 1] \cup \left[\frac{5}{3}; 2\right) \cup [\sqrt{19}; 12).$$

Тогда $x = 11$ — наибольшее целое решение неравенства.

Ответ: 11.

Пример 11. Решите неравенство

$$\frac{|x^2 + 6x|}{(x^2 - 6x + 5)^2} \leq \left((-x+1)^{-1} - (-x+5)^{-1}\right)^2$$

и укажите наименьшее целое решение.

Решение.

Упростим знаменатель дроби: $(x^2 - 6x + 5)^2 = (x - 1)^2(x - 5)^2$, где 1 и 5 — корни квадратного трехчлена.

Упростим правую часть неравенства:

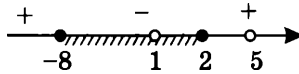
$$\left((-x+1)^{-1} - (-x+5)^{-1}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{5-x}\right)^2 = \left(\frac{5-x-1+x}{(1-x)(5-x)}\right)^2 = \frac{16}{(x-1)^2(x-5)^2}.$$

Таким образом, исходное неравенство запишется в виде

$$\frac{|x^2 + 6x|}{(x-1)^2(x-5)^2} - \frac{16}{(x-1)^2(x-5)^2} \leq 0, \text{ или } \frac{|x^2 + 6x| - 16}{(x-1)^2(x-5)^2} \leq 0,$$

$$\text{или } \begin{cases} (x^2 + 6x - 16)(x^2 + 6x + 16) \leq 0, \\ x \neq 1, x \neq 5. \end{cases}$$

Но $x^2 + 6x + 16 > 0$ при всех $x \in R$, так как $D < 0$ и $a = 1 > 0$, тогда получим $\begin{cases} x^2 + 6x - 16 \leq 0, \\ x \neq 1, x \neq 5, \end{cases} \begin{cases} (x-2)(x+8) \leq 0, \\ x \neq 1, x \neq 5. \end{cases}$



$$x \in [-8; 1) \cup (1; 2].$$

Тогда $x = -8$ — наименьшее целое решение исходного неравенства.
Ответ: -8 .

Пример 12. Решите неравенство

$$\frac{|x+7|+|x+11|}{|x+15|} \geq \frac{|x+3|-|x+15|}{|x+7|-|x+11|}$$

и найдите среднее арифметическое наибольшего и наименьшего целых решений.

Решение.

Умножим обе части неравенства на выражение, сопряженное правой части неравенства:

$$\frac{|x+7|+|x+11|}{|x+15|} \cdot \frac{|x+3|+|x+15|}{|x+7|+|x+11|} \geq \frac{|x+3|-|x+15|}{|x+7|-|x+11|} \cdot \frac{|x+3|+|x+15|}{|x+7|+|x+11|}, \text{ или}$$

$$\frac{|x+3|+|x+15|}{|x+15|} \geq \frac{(x+3)^2 - (x+15)^2}{(x+7)^2 - (x+11)^2}.$$

Здесь мы использовали соотношение

$$|a| \cdot |a| = |a|^2 = a^2.$$

Далее имеем

$$\frac{|x+3|+|x+15|}{|x+15|} \geq \frac{(x+3-x-15)(x+3+x+15)}{(x+7-x-11)(x+7+x+11)}, \text{ или}$$

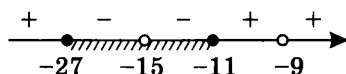
$$\frac{|x+3|+|x+15|}{|x+15|} \geq \frac{-12 \cdot (2x+18)}{-4 \cdot (2x+18)}, \text{ или}$$

$$\begin{cases} |x+3|+|x+15| \geq 3|x+15|, \\ 2x+18 \neq 0, \\ x+15 \neq 0, \end{cases} \begin{cases} |x+3| \geq 2|x+15|, \\ x \neq -9, \\ x \neq -15, \end{cases} \begin{cases} |2x+30|-|x+3| \leq 0, \\ x \neq -9, \\ x \neq -15. \end{cases}$$

К неравенству полученной системы применим метод рационализации:

$$\begin{cases} (2x+30-x-3)(2x+30+x+3) \leq 0, \\ x \neq -9, \\ x \neq -15, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(x+27)(x+11) \leq 0, \\ x \neq -9, \\ x \neq -15, \end{cases} \quad \begin{cases} (x+27)(x+11) \leq 0, \\ x \neq -9, \\ x \neq -15. \end{cases}$$



$$x \in [-27; -15] \cup (-15; -11].$$

$x = -27$ — наименьшее целое решение неравенства, $x = -11$ — наибольшее целое, тогда среднее арифметическое будет равно $(-27 + (-11)):2 = -19$.

Ответ: -19.

Пример 13. Решите неравенство

$$\frac{(x^2 - x + 3)^2 - 5|x^2 - x + 3| \cdot |x - 2| + 6(x - 2)^2}{3x^2 + 11x - 4} \geq 0.$$

Решение.

Так как $(x^2 - x + 3)^2 = |x^2 - x + 3|^2$, $(x - 2)^2 = |x - 2|^2$ и $3x^2 + 11x - 4 = (3x - 1)(x + 4)$, то данное неравенство запишется в виде

$$\frac{|x^2 - x + 3|^2 - 5|x^2 - x + 3| \cdot |x - 2| + 6|x - 2|^2}{(3x - 1)(x + 4)} \geq 0. \quad (1)$$

Пусть $|x^2 - x + 3| = a$, $|x - 2| = b$, где $a > 0$, $b \geq 0$, тогда числитель дроби неравенства (1) примет вид $a^2 - 5ab + 6b^2$.

Полученный квадратный трехчлен (относительно переменной a или b) можно разложить на множители:

$$\begin{aligned} a^2 - 5ab + 6b^2 &= a^2 - 2ab - 3ab + 6b^2 = \\ &= a(a - 2b) - 3b(a - 2b) = (a - 2b)(a - 3b). \end{aligned}$$

Следовательно, неравенство (1) можно представить в виде

$$\frac{(|x^2 - x + 3| - 2|x - 2|)(|x^2 - x + 3| - 3|x - 2|)}{(3x - 1)(x + 4)} \geq 0. \quad (2)$$

К неравенству (2) применим метод рационализации:

$$\frac{(x^2 - x + 3 - 2x + 4)(x^2 - x + 3 + 2x - 4)}{(3x - 1)} \cdot \frac{(x^2 - x + 3 - 3x + 6)(x^2 - x + 3 + 3x - 6)}{(x + 4)} \geq 0, \text{ или}$$

$$\frac{(x^2 - 3x + 7)(x^2 + x - 1)(x^2 - 4x + 9)(x^2 + 2x - 3)}{(3x - 1)(x + 4)} \geq 0. \quad (3)$$

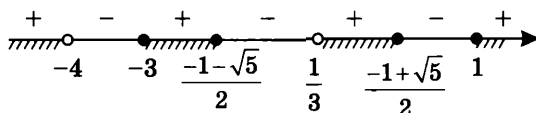
Но $x^2 - 3x + 7 > 0$ при всех $x \in R$, так как $D < 0$ и $a = 1 > 0$. Аналогично $x^2 - 4x + 9 > 0$ при всех $x \in R$, тогда неравенство (3) равносильно неравенству

$$\frac{(x^2 + x - 1)(x + 3)(x - 1)}{(3x - 1)(x + 4)} \geq 0. \quad (4)$$

Остается решить неравенство (4) методом интервалов:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ где } x_1 \approx 0,62; x_2 \approx -1,62; x_3 = -3;$$

$$x_4 = 1; x_5 = \frac{1}{3} \approx 0,3; x_6 = -4.$$



$$x \in (-\infty; -4) \cup \left[-3; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup [1; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup \left[-3; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup [1; +\infty).$

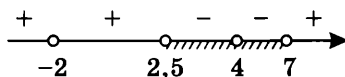
Пример 14. Решите неравенство $\left|\frac{1}{x-4}\right| < \left|\frac{3}{x+2}\right|$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{x-4} - \frac{3}{x+2}\right)\left(\frac{1}{x-4} + \frac{3}{x+2}\right) < 0, \text{ или}$$

$$\left(\frac{x+2-3x+12}{(x-4)(x+2)} \cdot \frac{x+2+3x-12}{(x-4)(x+2)}\right) < 0, \text{ или}$$

$$\frac{-2(x-7) \cdot 2(2x-5)}{(x-4)^2(x+2)^2} < 0, \text{ или } \begin{cases} (x-7)(2x-5) < 0, \\ x \neq 4, x \neq -2. \end{cases}$$



$$x \in (2,5; 4) \cup (4; 7).$$

Ответ: $(2,5; 4) \cup (4; 7)$.

Пример 15. Решите неравенство

$$|4x^2 - 5|x| + 1| \geq |x^2 - 3|x| + 2|.$$

Решение.

Поскольку $x^2 = |x|^2$, то получим неравенство

$$|4|x|^2 - 5|x| + 1| - ||x|^2 - 3|x| + 2| \geq 0. \quad (1)$$

К неравенству (1) применим метод рационализации:

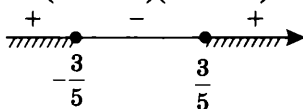
$$(4|x|^2 - 5|x| + 1 - |x|^2 + 3|x| - 2)(4|x|^2 - 5|x| + 1 + |x|^2 - 3|x| + 2) \geq 0, \text{ или}$$

$$(3|x|^2 - 2|x| - 1)(5|x|^2 - 8|x| + 3) \geq 0. \quad (2)$$

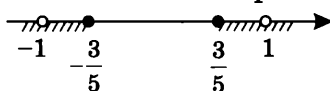
Но $3|x|^2 - 2|x| - 1 = (|x| - 1)(3|x| + 1)$ и $5|x|^2 - 8|x| + 3 = (|x| - 1)(5|x| - 3)$, тогда неравенство (2) примет вид $(|x| - 1)^2(3|x| + 1)(5|x| - 3) \geq 0$.

Но $3|x| + 1 > 0$ при всех $x \in R$, $(|x| - 1)^2 \geq 0$ при $|x| = 1$, т. е. $x = \pm 1$.

Значит, $5|x| - 3 \geq 0$, или $(5x - 3)(5x + 3) \geq 0$.



Учитывая, что $x = \pm 1$ тоже является решением, получим



$$x \in (-\infty; -1) \cup \left[-1; -\frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5}; 1\right] \cup (1; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup \left[-1; -\frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{3}{5}; 1\right] \cup (1; +\infty)$.

Пример 16. Решите неравенство

$$12 - \frac{|x-2|}{|x+5|} - \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 10x + 25} \leq 0$$

и укажите сумму целых решений.

Решение.

Поскольку $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 = |x - 2|^2$ и $x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$, то данное неравенство примет вид

$$12 - \frac{|x-2|}{|x+5|} - \frac{|x-2|^2}{|x+5|^2} \leq 0, \text{ или } \frac{|x-2|^2}{|x+5|^2} + \frac{|x-2|}{|x+5|} - 12 \geq 0. \quad (1)$$

Полученное неравенство (1) можно, конечно, решить методом интервалов, введя замену $\left| \frac{x-2}{x+5} \right| = t$ и т. д., но мы решим методом рационализации.

Нетрудно заметить, что корни квадратного трехчлена относительно переменной $\left| \frac{x-2}{x+5} \right|$ — числа 3 и -4 , тогда неравенство (1) можно разложить на множители:

$$\left(\left| \frac{x-2}{x+5} \right| - 3 \right) \left(\left| \frac{x-2}{x+5} \right| + 4 \right) \geq 0. \quad (2)$$

Но $\left| \frac{x-2}{x+5} \right| + 4 > 0$ при всех $x \neq -5$, тогда неравенство (2) равносильно неравенству $\left| \frac{x-2}{x+5} \right| - 3 \geq 0$, которое мы также решим методом рационализации:

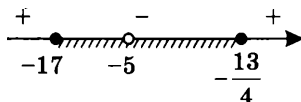
$$\left(\frac{x-2}{x+5} - 3 \right) \left(\frac{x-2}{x+5} + 3 \right) \geq 0, \text{ или } \frac{-2x-17}{x+5} \cdot \frac{4x+13}{x+5} \geq 0, \text{ или}$$

$$\frac{(x+17)(4x+13)}{(x+5)^2} \leq 0. \quad (3)$$

Неравенство (3) равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} (x+17)(4x+13) \leq 0, \\ x \neq -5. \end{cases} \quad (4)$$

Остается решить полученное неравенство системы (4) методом интервалов:



Значит, $x \in [-17; -5) \cup \left(-5; -\frac{13}{4}\right]$. Тогда сумма целых решений

будет равна $-17 + (-16) + (-15) + (-14) + (-13) + (-12) + (-11) + (-10) + (-9) + (-8) + (-7) + (-6) + (-4) = -23 \cdot 6 + (-4) = -142$.

Ответ: -142 .

Примеры для самостоятельного решения

Решите неравенства:

1. $|x^2 - 8x + 12| \leq |15 - x^2|$.

2. $|x^2 - 8x - 3| \geq |x^2 + 9x + 7|$.

3. $|4x^3 - x + 7| \leq |2x^3 + 5x + 3|$.

4. $|2x^3 - x^2 + 3x - 6| \leq |2x^3 - 5x^2 + 3x - 3|$.

5. $|3x^2 - 4|x| + 1| \geq |x^2 - 6|x| + 5|$. Найдите наименьшее целое решение.

6. $\left| \frac{x^2 - 5x - 2}{x^2 + 5x + 24} \right| > 2$. Найдите наибольшее целое решение.

7. $\frac{x^2 + |x| - 2}{x^2 + |x| - 6} > 0$. Найдите наименьшее целое положительное решение.

8. $|4x^2 + 35x + 38| > |12x^2 + 33x + 32|$.

9. $|x^2 - |x|| \geq \frac{1}{4}$. Найдите наименьшее целое положительное решение.

10. $|2x^2 - 3|x| + 1| \geq |x^2 - 5|x| + 4|$.

11. $\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1$. Найдите наибольшее целое положительное решение.

12. $x^2 \leq |x - 2|$. Найдите наибольшее целое положительное решение.

13. $\frac{2}{|x+1|-2} \leq \frac{1}{|x+1|-1}$.

14. $\left| \frac{2}{x-2} \right| > \left| \frac{1}{x+1} \right|$. Найдите наименьшее целое положительное решение.

15. $\frac{|x+1| - |2x-1|}{|x-3| - |2x+3|} \leq 0$.

16. $\left| \frac{x^2 - |x| - 6}{x^2 - |x|} \right| > 1$. Найдите наименьшее целое положительное

решение.

17. $|x^2 - 5|x| + 4| \geq |2x^2 - 3|x| + 1|$.

18. $\frac{|x^2 - 10x|}{(x^2 + 7x + 6)^2} \geq ((x+1)^{-1} - (x+6)^{-1})^2$. Найдите наибольшее целое

отрицательное решение.

19. $\frac{1 + 2x + x^2 - |2x^2 - x - 3|}{1 + 2x + x^2 - |3x^2 + x - 2|} \leq 0$. Укажите количество целых решений.

20. $\frac{|x-3| + |x-2|}{|x-4|} > \frac{|x-1| - |x-4|}{|x-2| - |x-3|}$. Укажите сумму целых решений.

§ 8. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

При решении иррациональных неравенств методом рационализации необходимо учитывать следующие условия равносильности:

$$1. \sqrt[n+1]{f(x)} - g(x) \vee 0 \Leftrightarrow f(x) - g^{2n+1}(x) \vee 0.$$

$$2. \sqrt[n]{f(x)} - |g(x)| \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - g^{2n}(x) \vee 0, \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

$$3. \sqrt[n+1]{f(x)} - \sqrt[n+1]{g(x)} \vee 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) \vee 0, \quad n \in N.$$

$$4. \sqrt[n]{f(x)} - \sqrt[n]{g(x)} \vee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) - g(x) \vee 0, \\ f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \end{cases} \quad n \in N.$$

$$5. \sqrt[n]{f(x)} - g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) - g^{2n}(x) \geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \geq 0, \\ \sqrt[n]{f(x)} - g(x) > 0 \end{cases} \quad \text{при всех}$$

$$x \in D(f) \cap D(g).$$

$$6. \sqrt[n]{f(x)} - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) \geq 0, \\ f(x) - g^{2n}(x) \leq 0. \end{cases}$$

$$7. \sqrt[n+1]{f(x)} - |g(x)| \vee 0 \Leftrightarrow f(x) - |g(x)|^{2n+1} \vee 0.$$

Знак \vee сравнения обозначает один из знаков $>$, $<$, \geq , \leq , $=$.

Примеры с решениями

Пример 1. Решите неравенство

$$4\sqrt{x+2} \leq 8 - |x-2|.$$

Решение.

Пусть $\sqrt{x+2} = t$, где $t \geq 0$, тогда $t^2 = x + 2$, $x - 2 = t^2 - 4$. Получим систему неравенств

$$\begin{cases} 4t \leq 8 - |t^2 - 4|, \\ t \geq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} |t^2 - 4| \leq 8 - 4t, \\ t \geq 0. \end{cases}$$

Поскольку $|t^2 - 4| \geq 0$, то $8 - 4t \geq 0$.

$$\text{Имеем } \begin{cases} |t^2 - 4| - (8 - 4t) \leq 0, \\ t \geq 0, \\ 8 - 4t \geq 0. \end{cases}$$

К I неравенству системы применим метод рационализации:

$$\begin{cases} (t^2 - 4 - 8 + 4t)(t^2 - 4 + 8 - 4t) \leq 0, & \text{или} \\ 0 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (t^2 + 4t - 12)(t^2 - 4t + 4) \leq 0, \\ 0 \leq t \leq 2. \end{cases} \quad (1)$$

Но $t^2 + 4t - 12 = (t + 6)(t - 2)$, $t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$, тогда система (1) запишется в виде

$$\begin{cases} (t - 2)^3(t + 6) \leq 0, \\ 0 \leq t \leq 2. \end{cases}$$

Так как $t \geq 0$, то $t + 6 > 0$. Значит, $(t - 2)^3 \leq 0$, откуда $t - 2 \leq 0$, $t \leq 2$, тогда $0 \leq t \leq 2$. Учитывая замену, имеем $0 \leq x + 2 \leq 4$, или $-2 \leq x \leq 2$, т. е. $x \in [-2; 2]$.

Ответ: $[-2; 2]$.

Пример 2. Решите неравенство $\frac{\sqrt{8-x^3}-4+x}{x+3} \leq x$ и найдите наибольшее целое отрицательное решение.

Решение.

Перенесем переменную x в левую часть и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{\sqrt{8-x^3}-4+x-x^2-3x}{x+3} \leq 0, \text{ или}$$

$$\frac{\sqrt{(2-x)(4+2x+x^2)}-(x^2+2x+4)}{x+3} \leq 0. \quad (1)$$

Поскольку $x^2 + 2x + 4 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ ($D < 0$, $a = 1 > 0$), то, разделив обе части неравенства (1) на $\sqrt{x^2 + 2x + 4}$, получим равносильное неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x^2+2x+4}}{x+3} \leq 0. \quad (2)$$

Теперь к неравенству (2) можно применить условие равносильности 4:

$$\begin{cases} \frac{(2-x)-(x^2+2x+4)}{x+3} \leq 0, \\ 2-x \geq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x^2+3x+2}{x+3} \geq 0, \\ x \leq 2. \end{cases}$$

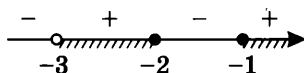
Но $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, тогда получим

$$\begin{cases} \frac{(x+1)(x+2)}{x+3} \geq 0, \\ x \leq 2. \end{cases} \quad (3)$$

Решим I неравенство системы (3) методом интервалов:

$$x \in (-3; -2] \cup [-1; +\infty).$$

Учитывая, что $x \leq 2$, находим $x \in (-3; -2] \cup [-1; 2]$.



Тогда $x = -1$ — наибольшее целое отрицательное решение исходного неравенства.

Ответ: -1 .

Пример 3. Решите неравенство $\frac{\sqrt{7-x}-|5x-3|}{\sqrt{x+3}-|5x-3|} \geq 1$ и найдите среднее арифметическое наибольшего и наименьшего целых решений.

Решение.

$$\frac{\sqrt{7-x}-|5x-3|}{\sqrt{x+3}-|5x-3|} - 1 \geq 0, \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{7-x}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+3}-|5x-3|} \geq 0.$$

Решим полученное неравенство методом рационализации, применив к числителю и знаменателю дроби соответственно условия равносильности 4 и 2:

$$\begin{cases} \frac{(7-x)-(x+3)}{(x+3)-(5x-3)^2} \geq 0, \\ 7-x \geq 0, \\ x+3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{4-2x}{x+3-25x^2+30x-9} \geq 0, \\ x \leq 7, \\ x \geq -3; \end{cases}$$

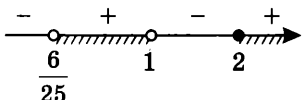
$$\begin{cases} \frac{2(2-x)}{-25x^2+31x-6} \geq 0, \\ -3 \leq x \leq 7; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x-2}{25x^2-31x+6} \geq 0, \\ -3 \leq x \leq 7. \end{cases} \quad (1)$$

Разложим квадратный трехчлен на линейные множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена.

Заметим, что $25 - 31 + 6 = 0$. Значит, $x_1 = 1$, тогда $x_2 = \frac{c}{a} = \frac{6}{25}$, и система (1) примет вид

$$\begin{cases} \frac{x-2}{(x-1)(25x-6)} \geq 0, \\ -3 \leq x \leq 7. \end{cases} \quad (2)$$

Решением I неравенства системы (2) будет



$$x \in \left(\frac{6}{25}; 1 \right) \cup [2; +\infty).$$

Учитывая, что $x \in [-3; 7]$, имеем $x \in \left(\frac{6}{25}; 1 \right) \cup [2; 7]$, где 2 и 7 — соответственно наименьшее и наибольшее целые решения, тогда среднее арифметическое будет $(2 + 7) : 2 = 4,5$.

Ответ: 4,5.

Пример 4. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2 - 7x + 12} - \sqrt{3x - 9}}{|3x^2 - 2x - 3| - |2x^2 + x - 5|} \geq 0.$$

Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{(x^2 - 7x + 12) - (3x - 9)}{(3x^2 - 2x - 3 - 2x^2 - x + 5)(3x^2 - 2x - 3 + 2x^2 + x - 5)} \geq 0, \\ x^2 - 7x + 12 \geq 0, \\ 3x - 9 \geq 0, \end{cases}$$

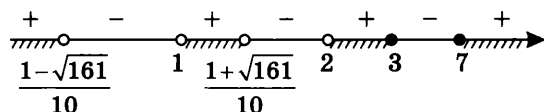
$$\text{или} \begin{cases} \frac{x^2 - 10x + 21}{(x^2 - 3x + 2)(5x^2 - x - 8)} \geq 0, \\ (x - 3)(x - 4) \geq 0, \\ x \geq 3. \end{cases} \quad (1)$$

Так как $x^2 - 10x + 21 = (x - 3)(x - 4)$, $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ и $5x^2 - x - 8 = 5(x - x_1)(x - x_2)$, где $x_1 = \frac{1 - \sqrt{161}}{10}$, $x_2 = \frac{1 + \sqrt{161}}{10}$, то система (1) запишется в виде

$$\begin{cases} \frac{(x-3)(x-7)}{(x-1)(x-2)\left(x - \frac{1-\sqrt{161}}{10}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{161}}{10}\right)} \geq 0, \\ x \in \{3\} \cup [4; +\infty). \end{cases} \quad (2)$$

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{161}}{10} \approx -1,2; \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{161}}{10} \approx 1,4.$$

Решим дробно-рациональное неравенство системы (2) методом интервалов:



Учитывая, что $x \in \{3\} \cup [4; +\infty)$, находим

$$x \in \{3\} \cup \{4\} \cup [7; +\infty).$$

Ответ: $\{3\} \cup \{4\} \cup [7; +\infty)$.

Пример 5. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2 + 9x - 14} - x + 2}{|x^2 - 5x + 6| - |6 - x^2|} \leq 0.$$

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\frac{\sqrt{-(x^2 - 9x + 14)} - (x - 2)}{|x^2 - 5x + 6| - |x^2 - 6|} \leq 0.$$

Поскольку $-(x^2 - 9x + 14) \geq 0$, то $x^2 - 9x + 14 \leq 0$, или $(x - 2)(x - 7) \leq 0$, откуда $x \in [2; 7]$.

Но тогда $x - 2 \geq 0$. Значит,

$$\frac{(-x^2 + 9x - 14) - (x - 2)^2}{(x^2 - 5x + 6 - x^2 + 6)(x^2 - 5x + 6 + x^2 - 6)} \leq 0, \text{ или}$$

$$\frac{-2x^2 + 13x - 18}{(-5x + 12)(2x^2 - 5x)} \leq 0, \text{ или}$$

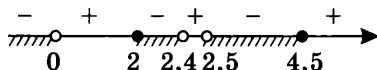
$$\frac{2x^2 - 13x + 18}{x(5x - 12)(2x - 5)} \leq 0. \quad (1)$$

Но $2x^2 - 13x + 18 = (2x - 9)(x - 2)$, тогда получим

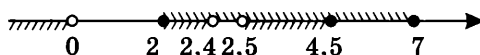
$$\frac{(2x-9)(x-2)}{x(5x-12)(2x-5)} \leq 0. \quad (2)$$

Неравенство (2) решим методом интервалов:

$$x_1 = 4,5; x_2 = 2; x_3 = 0; x_4 = 2,4; x_5 = 2,5.$$



Учитывая, что $x \in [2; 7]$, находим



$$x \in [2; 2,4] \cup (2,5; 4,5].$$

Ответ: $[2; 2,4] \cup (2,5; 4,5]$.

Пример 6. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{6(2-x)}}{\sqrt{x+7}-5} \geq 0$$

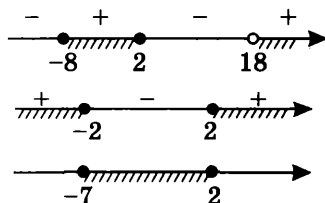
и укажите количество целых решений.

Решение.

Применяя метод рационализации (с учетом ОДЗ), получим систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x^2-4-(12-6x)}{x+7-25} \geq 0, \\ x^2-4 \geq 0, \\ 2-x \geq 0, \\ x+7 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2+6x-16}{x-18} \geq 0, \\ (x-2)(x+2) \geq 0, \\ x \leq 2, \\ x \geq -7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x+8)(x-2)}{x-18} \geq 0, \\ (x-2)(x+2) \geq 0, \\ -7 \leq x \leq 2. \end{cases}$$



Тогда решением последней системы, а значит, и данного неравенства будет



$x \in [-7; -2] \cup \{2\}$, следовательно, $x = -7, -6, -5, -4, -3, -2, 2$ — целые решения, всего 7.

Ответ: 7.

Пример 7. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2 + x + 42}}{|x^2 - 4x + 3| - |x^2 - x - 6|} \leq 0.$$

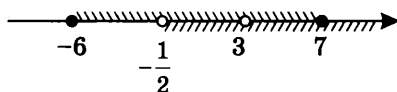
Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} -x^2 + x + 42 \geq 0, \\ \frac{-x^2 + x + 42}{((x^2 - 4x + 3) - (x^2 - x - 6))((x^2 - 4x + 3) + (x^2 - x - 6))} \leq 0; \\ \begin{cases} x^2 - x - 42 \leq 0, \\ \frac{x^2 - x - 42}{(-3x + 9)(2x^2 - 5x - 3)} \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Так как $x^2 - x - 42 = (x + 6)(x - 7)$, $2x^2 - 5x - 3 = (x - 3)(2x + 1)$ и $-3x + 9 = -3(x - 3)$, то получим

$$\begin{cases} (x + 6)(x - 7) \leq 0, \\ \frac{(x + 6)(x - 7)}{(x - 3)^2(2x + 1)} \leq 0. \end{cases}$$

Поскольку $(x + 6)(x - 7) \leq 0$, то знаменатель дроби $(x - 3)^2(2x + 1) > 0$.Если $(x + 6)(x - 7) \leq 0$, то $x \in [-6; 7]$;если $(x - 3)^2(2x + 1) > 0$, то $x \in \left(-\frac{1}{2}; 3\right) \cup (3; +\infty)$.Значит, $x \in \{-6\} \cup \left(-\frac{1}{2}; 3\right) \cup (3; 7]$.*Ответ:* $\{-6\} \cup \left(-\frac{1}{2}; 3\right) \cup (3; 7]$.**Пример 8.** Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6x^2 - 2x + 9} - \sqrt{5x^2 + 2x + 5}}{\sqrt[3]{2x^2 - 13x - 17} + \sqrt[3]{3x^2 - 19x - 4}} \geq 0.$$

*Решение.*Заметим, что $6x^2 - 2x + 9 > 0$ и $5x^2 + 2x + 5 > 0$, так как $D < 0$ и $a > 0$.

Чтобы применить метод рационализации и использовать условия равносильности 4 и 3 соответственно к числителю и знаменателю дроби, запишем исходное неравенство в виде

$$\frac{\sqrt{6x^2 - 2x + 9} - \sqrt{5x^2 + 2x + 5}}{\sqrt[3]{2x^2 - 13x - 17} - \sqrt[3]{-3x^2 + 19x + 4}} \geq 0.$$

Следовательно, имеем

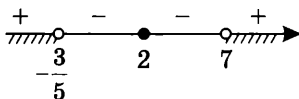
$$\frac{(6x^2 - 2x + 9) - (5x^2 + 2x + 5)}{(2x^2 - 13x - 17) - (-3x^2 + 19x + 4)} \geq 0, \text{ или}$$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{5x^2 - 32x - 21} \geq 0. \quad (1)$$

Но $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ и $5x^2 - 32x - 21 = (5x + 3)(x - 7)$, тогда неравенство (1) примет вид

$$\frac{(x - 2)^2}{(5x + 3)(x - 7)} \geq 0. \quad (2)$$

Неравенство (2) решим методом интервалов, учитывая, что $x = 2$ — кратная (двойная) точка.



$$\text{Значит, } x \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup \{2\} \cup (7; +\infty).$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup \{2\} \cup (7; +\infty).$$

Пример 9. Решите неравенство

$$\frac{x^3 - 64 + 12x(4 - x)}{|19 - 4x|} \leq \sqrt{4x - 19}$$

и укажите сумму целых решений.

Решение.

Поскольку $|19 - 4x| = |4x - 19| > 0$, то неравенство можно записать в виде

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 \leq |4x - 19|\sqrt{4x - 19}.$$

Заметим, что $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = (x - 4)^3$, тогда получим $(x - 4)^3 - (\sqrt{4x - 19})^3 \leq 0$.

$$\text{Значит, } \begin{cases} x - 4 - \sqrt{4x - 19} \leq 0, \\ x > 4,75. \end{cases} \quad (1)$$

I неравенство системы (1) решим заменой $\sqrt{4x-19}=t$, где $t > 0$, тогда $x = \frac{t^2+19}{4}$, $x-4 = \frac{t^2+3}{4}$.

Получим неравенство относительно t : $\frac{t^2+3}{4} - t \leq 0$, или

$$\begin{cases} t^2 - 4t + 3 \leq 0, \\ t > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (t-1)(t-3) \leq 0, \\ t > 0, \end{cases} \quad \text{откуда } 1 \leq t \leq 3, \text{ или } 1 \leq t^2 \leq 9.$$

Учитывая замену, имеем $1 \leq 4x - 19 \leq 9$, $20 \leq 4x \leq 28$, $5 \leq x \leq 7$.

Тогда сумма целых решений будет равна $5 + 6 + 7 = 18$.

Ответ: 18.

Замечание. Отметим, что неравенство системы (1) можно легко решить и графическим способом.

Пример 10. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2+x-72}-|x-6|}{\sqrt[3]{x^3-7x^2+13x-7}-x+3} \geq 0.$$

Решение.

Так как $|x-6| \geq 0$, то неравенство можно записать в виде

$$\frac{\sqrt{x^2+x-72}-\sqrt{(x-6)^2}}{\sqrt[3]{x^3-7x^2+13x-7}-\sqrt[3]{(x-3)^3}} \geq 0. \quad (1)$$

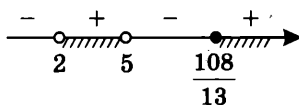
Теперь к неравенству (1) применим метод рационализации, используя условия равносильности 3 и 4:

$$\frac{(x^2+x-72)-(x^2-12x+36)}{(x^3-7x^2+13x-7)-(x^3-9x^2+27x-27)} \geq 0, \text{ или} \quad \begin{cases} \frac{13x-108}{2x^2-14x+20} \geq 0, \\ x^2+x-72 \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

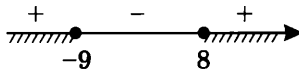
Но $2x^2-14x+20 = 2(x^2-7x+10) = 2(x-2)(x-5)$ и $x^2+x-72 = (x-8)(x+9)$, тогда получим

$$\begin{cases} \frac{13x-108}{2(x-2)(x-5)} \geq 0, \\ (x-8)(x+9) \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{13x-108}{(x-2)(x-5)} \geq 0, \\ (x-8)(x+9) \geq 0. \end{cases} \quad (3)$$

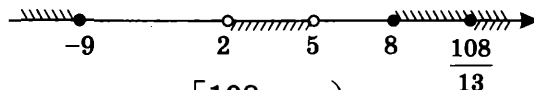
$$1) \frac{13x-108}{(x-2)(x-5)} \geq 0$$



$$2) (x-8)(x+9) \geq 0$$



Тогда решением системы (3) будет



$$x \in \left[\frac{108}{13}; +\infty \right).$$

Ответ: $\left[\frac{108}{13}; +\infty \right).$

Пример 11. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{6x+x^2-x^3}}{2x+5} \leq \frac{\sqrt{6x+x^2-x^3}}{x+4}.$$

Решение.

Вынесем общий множитель $\sqrt{6x+x^2-x^3}$

за скобку:

$$\sqrt{6x+x^2-x^3} \cdot \left(\frac{1}{x+4} - \frac{1}{2x+5} \right) \geq 0.$$

Выражение в скобке приведем к общему знаменателю:

$$\sqrt{6x+x^2-x^3} \cdot \left(\frac{x+1}{(x+4)(2x+5)} \right) \geq 0. \quad (1)$$

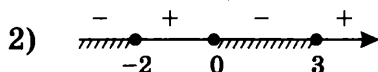
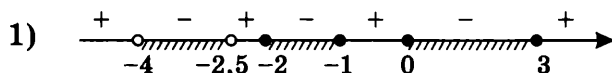
К неравенству (1) применим метод рационализации:

$$\begin{cases} \frac{(6x+x^2-x^3)(x+1)}{(x+4)(2x+5)} \geq 0, & \frac{x(x^2-x-6)(x+1)}{(x+4)(2x+5)} \leq 0, \\ 6x+x^2-x^3 \geq 0; & x(x^2-x-6) \leq 0. \end{cases}$$

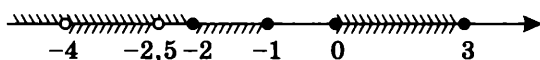
Так как $x^2-x-6 = (x-3)(x+2)$, то получим

$$\begin{cases} \frac{x(x-3)(x+2)(x+1)}{(x+4)(2x+5)} \leq 0, \\ x(x-3)(x+2) \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решим каждое неравенство системы (2) методом интервалов:



Тогда решением системы (2) будет



$$x \in (-4; -2,5) \cup \{-2\} \cup [0; 3].$$

Ответ: $(-4; -2,5) \cup \{-2\} \cup [0; 3]$.

Пример 12. Решите неравенство

$$\left(x + \frac{6}{x}\right) \left(\frac{\sqrt{x^2 - 12x + 36} - 2}{\sqrt{12 - x} - 2}\right)^2 \geq 7 \left(\frac{\sqrt{x^2 - 12x + 36} - 2}{\sqrt{12 - x} - 2}\right)^2.$$

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\left(\frac{\sqrt{x^2 - 12x + 36} - 2}{\sqrt{12 - x} - 2}\right)^2 \cdot \left(x + \frac{6}{x} - 7\right) \geq 0.$$

Так как $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$ и $\sqrt{x^2 - 12x + 36} = \sqrt{(x - 6)^2} = |x - 6|$,
то получим

$$\left(\frac{|x - 6| - 2}{\sqrt{12 - x} - 2}\right)^2 \cdot \frac{x^2 - 7x + 6}{x} \geq 0. \quad (1)$$

Но $x^2 - 7x + 6 = (x - 6)(x - 1)$, тогда неравенство (1) примет вид

$$\left(\frac{|x - 6| - 2}{\sqrt{12 - x} - 2}\right)^2 \cdot \frac{(x - 6)(x - 1)}{x} \geq 0. \quad (2)$$

Кроме того, надо учесть ограничения:

$$\begin{cases} 12 - x \geq 0, \\ \sqrt{12 - x} - 2 \neq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x \leq 12, \\ \sqrt{12 - x} \neq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 12, \\ 12 - x \neq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 12, \\ x \neq 8. \end{cases}$$

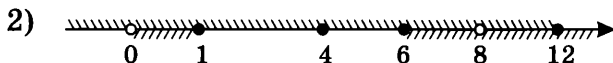
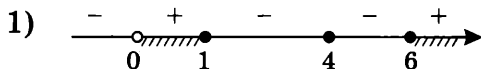
С учетом полученных ограничений применим метод рационализации к неравенству (2):

$$\left(\frac{(x-6-2)(x-6+2)}{12-x-4} \right)^2 \cdot \frac{(x-6)(x-1)}{x} \geq 0, \text{ или}$$

$$\frac{(x-8)^2(x-4)^2(x-6)(x-1)}{(8-x)^2 \cdot x} \geq 0.$$

Так как $(x-8)^2 = (8-x)^2$, то получим

$$\begin{cases} \frac{(x-4)^2(x-6)(x-1)}{x} \geq 0, \\ x \leq 12, \\ x \neq 8. \end{cases}$$



$$x \in (0; 1] \cup \{4\} \cup [6; 8) \cup (8; 12].$$

Ответ: $(0; 1] \cup \{4\} \cup [6; 8) \cup (8; 12]$.

Пример 13. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x+2+\sqrt{5x-9}} - \sqrt{x+2+\sqrt{4x-15}}}{\sqrt{x+7-6\sqrt{x-2}} - \sqrt{x+14-8\sqrt{x-2}}} \leq 0$$

и укажите наибольшее целое решение.

Решение.

Заметим, что $x+7-6\sqrt{x-2} = (x-2) - 6\sqrt{x-2} + 9 = (\sqrt{x-2}-3)^2$, где $x \geq 2$.

Аналогично $x+14-8\sqrt{x-2} = (x-2) - 8\sqrt{x-2} + 16 = (\sqrt{x-2}-4)^2$, где $x \geq 2$.

Кроме того, должны выполняться условия $\begin{cases} 5x-9 \geq 0, \\ 4x-15 \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \geq 1,8, \\ x \geq 3,75, \end{cases}$

откуда $x \geq 3,75$, тогда, применив метод рационализации и условие равносильности 4, имеем

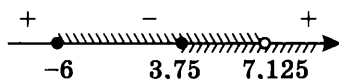
$$\begin{cases} \frac{(x+2+\sqrt{5x-9}) - (x+2+\sqrt{4x-15})}{(x+7-6\sqrt{x-2}) - (x+14-8\sqrt{x-2})} \leq 0, \\ x \geq 3,75, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{\sqrt{5x-9} - \sqrt{4x-15}}{2\sqrt{x-2} - 7} \leq 0, \\ x \geq 3,75. \end{cases}$$

Еще раз применив метод рационализации, имеем

$$\begin{cases} \frac{(5x-9)-(4x-15)}{4(x-2)-49} \leq 0, & \begin{cases} \frac{x+6}{8x-57} \leq 0, \\ x \geq 3,75; \end{cases} \end{cases} \quad (1)$$

Остается решить дробно-рациональное неравенство системы, учитывая, что $x \geq 3,75$.

$$x_1 = -6; \quad x_2 = \frac{57}{8} = 7,125.$$



$$x \in [3,75; 7,125).$$

Тогда $x = 7$ — наибольшее целое решение системы (1), а значит, и исходного неравенства.

Ответ: 7.

Пример 14. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^3 - 8x^2 + 16x - 9}}{\sqrt{x-1}} > \sqrt{9-x}$$

и укажите сумму целых решений.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств

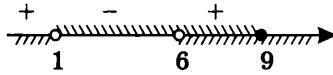
$$\begin{cases} 9-x \geq 0, \\ x-1 > 0, \\ x^3 - 8x^2 + 16x - 9 \geq 0, \\ \sqrt{x^3 - 8x^2 + 16x - 9} - \sqrt{9-x} \cdot \sqrt{x-1} > 0; \\ 1 < x \leq 9, \\ x^3 - 8x^2 + 16x - 9 \geq 0, \\ \sqrt{x^3 - 8x^2 + 16x - 9} - \sqrt{(9-x)(x-1)} > 0. \end{cases}$$

Применив метод рационализации, получим

$$\begin{cases} 1 < x \leq 9, \\ x^3 - 8x^2 + 16x - 9 - (9-x)(x-1) > 0, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} 1 < x \leq 9, \\ x^3 - 7x^2 + 6x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < x \leq 9, \\ x(x-1)(x-6) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 < x \leq 9, \\ (x-1)(x-6) > 0. \end{cases}$$



Значит, $x \in (6; 9]$, тогда сумма целых решений будет равна $7 + 8 + 9 = 24$.

Ответ: 24.

Пример 15. Решите неравенство

$$\frac{(x^2 - 9)(2\sqrt{5 + x^2} + 3x)(\sqrt{5 + x^2} - \sqrt{4 + x^2})}{|x - 5| - |6x + 7|} \geq 0$$

и укажите наибольшее целое решение.

Решение.

Заметим, что разность $|f(x)| - |g(x)|$ равносильна по знаку выражению $(f(x) + g(x)) \cdot (f(x) - g(x))$.

Аналогично разность $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ равносильна по знаку выражению $f(x) - g(x)$ (при условии $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$).

В этом случае $|x - 5| - |6x + 7| \Leftrightarrow ((x - 5) + (6x + 7))((x - 5) - (6x + 7)) = (7x + 2)(-5x - 12)$.

Кроме того, $\sqrt{5 + x^2} - \sqrt{4 + x^2} \Leftrightarrow 5 + x^2 - (4 + x^2) = 1$.

Следовательно, данное неравенство примет вид

$$\frac{(x-3)(x+3)(2\sqrt{5+x^2}+3x)}{(7x+2)(-5x-12)} \geq 0. \quad (1)$$

Для выражения $2\sqrt{5+x^2}+3x$ мы не можем выписать выражение, равносильное по знаку, поскольку знак выражения $3x$ не определен.

Решим неравенство (1) методом интервалов.

Нули числителя: $x_1 = -3$; $x_2 = 3$.

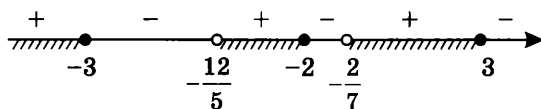
$2\sqrt{5+x^2}+3x=0$, $x \leq 0$, или $2\sqrt{5+x^2}=-3x$, или $5+x^2=\frac{9}{4}x^2$, откуда $x^2=4$, тогда $x_3=-2$ ($x \leq 0$).

Нули знаменателя (точки разрыва функции):

$$7x+2=0, \quad x_4=-\frac{2}{7};$$

$$-5x-12=0, \quad x_5=-\frac{12}{5}.$$

Наносим полученные точки на числовую прямую (учитывая, что неравенство нестрогое):



Значит, $x \in (-\infty; -3] \cup \left(-\frac{12}{5}; -2\right) \cup \left(-\frac{2}{7}; 3\right]$, тогда $x = 3$ — наибольшее целое решение.

Ответ: 3.

Примеры для самостоятельного решения

Решите неравенство.

1. $\frac{\sqrt{-x^2+7x-6}}{|x^2-2x-3|-|x^2-6x+5|} \geq 0.$

Найдите наименьшее целое решение.

2. $\sqrt{\frac{x^2+9x-162}{x-2}} > 9-|x|.$

3. $\frac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4} \leq \frac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}.$ Укажите сумму целых решений.

4. $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9} \geq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10}.$ Найдите наименьшее целое решение.

5. $\frac{(\sqrt{x^2+3}+2x)(x^2-1)}{|x-2|-4x+3} \geq 0.$

6. $\frac{\sqrt{2x^2+x-6}}{\sqrt{x-1}} < \sqrt{x+2}.$ 7. $\frac{|x+6|-\sqrt{2x+20}}{|x-3|-\sqrt{9-3x}} \geq 0.$

8. $\frac{\sqrt{x^2-9}-\sqrt{5(3-x)}}{\sqrt{x+10}-6} \geq 0.$ Укажите сумму наибольшего и наимень-

шего целых решений.

9. $4\sqrt{x+3} \leq 8-|x-1|.$ 10. $\frac{7-\sqrt{8-x^3}}{x+3} \geq 1-x.$

11. $\frac{\sqrt{6-x}-|5x-8|}{\sqrt{x+2}-|5x-8|} \geq 1$. Найдите среднее арифметическое наиболь-

шего и наименьшего целых решений.

12. $\frac{\sqrt{-x^2+11x-24}-x+1}{|x^2-7x+6|-|5+2x-x^2|} \leq 0$. Укажите количество целых решений.

13. $\frac{\sqrt{-x^2+3x+40}}{|x^2-6x+8|-|x^2-3x-4|} \leq 0$.

14. $\frac{\sqrt{6x^2-14x+17}-\sqrt{5x^2-8x+8}}{\sqrt[3]{2x^2-17x-2}+\sqrt[3]{3x^2-25x+18}} \geq 0$.

15. $\frac{\sqrt{x^2-x-72}-|x-7|}{\sqrt[3]{x^3-10x^2+30x-28}-x+4} \geq 0$.

16. $\left(x+\frac{3}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-10x+25}-1}{\sqrt{8-x}-1}\right)^2 \geq 4\left(\frac{\sqrt{x^2-10x+25}-1}{\sqrt{8-x}-1}\right)^2$.

17. $\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{2x-5}-\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-5}}{\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-2}-\sqrt{x+2}-4\sqrt{x-2}} \geq 0$. Найдите наименьшее це-

лое решение.

18. $\frac{x^3-11x^2+35x-20}{\sqrt{x-2}} > \sqrt{10-x}$.

19. $\frac{(x+2,5-\sqrt{11-4x})(x+5-\sqrt{7-x})}{(|6x+1|-|4x-3|)\sqrt{5+3x-2x^2}} \geq 0$. Найдите наибольшее целое

решение.

20. $(x^2+2-|x-4|)(\sqrt{3x+5}-\sqrt{x+3}) > 0$. Найдите наименьшее целое решение.

§ 9. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ПОСТОЯННЫМ ОСНОВАНИЕМ

Решение показательных неравенств основано на *монотонности* показательной функции $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Если $a > 1$, то показательная функция монотонно *возрастает*, а если $0 < a < 1$, то монотонно *убывает*.

При решении показательных неравенств методом рационализации необходимо учитывать *условия равносильности*:

$$1. a^{f(x)} - a^{g(x)} \vee 0 \Leftrightarrow (a - 1)(f(x) - g(x)) \vee 0.$$

$$2. \begin{cases} a^x - b \vee 0, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a - 1)(x - \log_a b) \vee 0.$$

Частные случаи:

$$1. a^{f(x)} - 1 \vee 0 \Leftrightarrow a^{f(x)} - a^0 \vee 0 \Leftrightarrow (a - 1) \cdot f(x) \vee 0.$$

$$2. \begin{cases} a^{f(x)} - b \vee 0, \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a^{f(x)} - a^{\log_a b} \vee 0 \Leftrightarrow (a - 1)(f(x) - \log_a b) \vee 0.$$

Примеры с решениями

Пример 1. Решите неравенство $5^{\frac{1}{x-4}} \leq \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3}{2-x}}$.

Решение.

Так как $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{3}{2-x}} = (5^{-2})^{\frac{3}{2-x}} = 5^{\frac{6}{x-2}}$, то данное неравенство запишется в виде

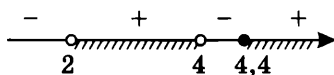
$$5^{\frac{1}{x-4}} \leq 5^{\frac{6}{x-2}}. \quad (1)$$

Конечно, неравенство (1) легко можно решить обычным, стандартным способом, но мы решим его методом рационализации, используя условие равносильности 1:

$$\begin{aligned} (5-1) \left(\frac{1}{x-4} - \frac{6}{x-2} \right) &\leq 0, \text{ или } 4 \cdot \frac{x-2-6(x-4)}{(x-4)(x-2)} \leq 0, \\ \text{или } \frac{-5x+22}{(x-4)(x-2)} &\leq 0, \text{ или } \frac{5x-22}{(x-4)(x-2)} \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Неравенство (2) решим методом интервалов:

$$x_1 = 4,4; x_2 = 4; x_3 = 2.$$



$$x \in (2; 4) \cup [4,4; +\infty).$$

Ответ: $(2; 4) \cup [4,4; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $(\sqrt{7})^{\operatorname{tg} x} \leq \frac{7\sqrt{7}}{7^{\operatorname{tg} x}}$.

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\left(7^{\frac{1}{2}}\right)^{\operatorname{tg} x} \leq 7 \cdot 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{-\operatorname{tg} x}, \text{ или } 7^{\frac{1}{2}\operatorname{tg} x} \leq 7^{\frac{3}{2}-\operatorname{tg} x}, \text{ или } (7-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} x - \frac{3}{2} + \operatorname{tg} x\right) \leq 0,$$

$$6 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\operatorname{tg} x - 3 + 2 \operatorname{tg} x) \leq 0, \quad 3 \operatorname{tg} x \leq 3, \quad \operatorname{tg} x \leq 1, \text{ откуда}$$

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3. Решите неравенство

$$(\sqrt{5}+2)^{\frac{8x-5}{x+2}} \leq (\sqrt{5}-2)^{-x}.$$

Решение.

$$\text{Так как } (\sqrt{5}-2)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4} = \sqrt{5}+2, \text{ то дан-}$$

ное неравенство примет вид

$$(\sqrt{5}+2)^{\frac{8x-5}{x+2}} \leq (\sqrt{5}+2)^x. \quad (1)$$

К неравенству (1) применим метод рационализации:

$$(\sqrt{5}+2-1)\left(\frac{8x-5}{x+2}-x\right) \leq 0, \text{ где } \sqrt{5}+2-1 = \sqrt{5}+1 > 0,$$

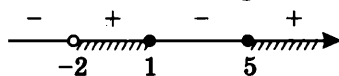
тогда получим равносильное неравенство

$$\frac{8x-5}{x+2}-x \leq 0, \text{ или } \frac{8x-5-x^2-2x}{x+2} \leq 0, \quad \frac{x^2-6x+5}{x+2} \geq 0.$$

Но $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$, тогда получим

$$\frac{(x-1)(x-5)}{x+2} \geq 0. \quad (2)$$

Неравенство (2) решим методом интервалов: $x_1 = 5$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$.



$$x \in (-2; 1] \cup [5; +\infty).$$

Ответ: $(-2; 1] \cup [5; +\infty)$.

Пример 4. Решите неравенство $\frac{x-5\sqrt{x}+6}{3^x-81} \geq 0$. Найдите наимень-

шее целое решение.

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\frac{x-5\sqrt{x}+6}{3^x-3^4} \geq 0. \quad (1)$$

В неравенстве (1) заменим разность в знаменателе дроби на равносильное по знаку выражение $\frac{x-5\sqrt{x}+6}{(3-1)(x-4)} \geq 0$, или $\frac{x-5\sqrt{x}+6}{x-4} \geq 0$.

Пусть $\sqrt{x} = t$, где $t \geq 0$, тогда $x = t^2$.

$$\text{Получим } \frac{t^2-5t+6}{t^2-4} \geq 0, \quad \frac{(t-2)(t-3)}{(t-2)(t+2)} \geq 0.$$

Но $t+2 > 0$, так как $t \geq 0$ и $t \neq 2$.

$$\text{Следовательно, } \begin{cases} t-3 \geq 0, \\ t \neq 2, \end{cases} \text{ откуда } t \geq 3.$$

Значит, $\sqrt{x} \geq 3$, или $\begin{cases} x \geq 9, \\ x \geq 0, \end{cases}$ т. е. $x \geq 9$ и $x = 9$ — наименьшее целое

решение исходного неравенства.

Ответ: 9.

Пример 5. Решите неравенство

$$\frac{(2^{x^2} - 2^{x+30})(5^x - 125)}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x^3-2x^2} - 3^{-x+2}} \geq 0$$

и укажите наибольшее целое решение.

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\frac{(2^{x^2} - 2^{x+30})(5^x - 5^3)}{\left(\frac{1}{3}\right)^{x^3-2x^2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}} \geq 0.$$

Теперь можно применить метод рационализации, т. е. заменить каждую разность в числителе и знаменателе дроби на равносильное по знаку выражение:

$$\frac{(2-1)(x^2-x-30)(5-1)(x-3)}{\left(\frac{1}{3}-1\right)(x^3-2x^2-x+2)} \geq 0, \text{ или } \frac{(x^2-x-30)(x-3)}{x^3-2x^2-x+2} \leq 0. \quad (1)$$

Но $x^2 - x - 30 = (x - 6)(x + 5)$, где 6 и -5 — корни квадратного трехчлена. Знаменатель дроби разложим на линейные множители способом группировки:

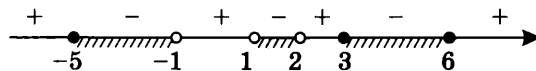
$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 - x + 2 &= x^2(x - 2) - (x - 2) = (x^2 - 1)(x - 2) = \\ &= (x - 1)(x + 1)(x - 2). \end{aligned}$$

В этом случае неравенство (1) примет вид

$$\frac{(x-6)(x+5)(x-3)}{(x-1)(x+1)(x-2)} \leq 0.$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, имеем

$$x_1 = 6; x_2 = -5; x_3 = 3; x_4 = 1; x_5 = -1; x_6 = 2.$$



Значит, $x = 6$ — наибольшее целое решение исходного неравенства.

Ответ: 6.

Пример 6. Решите неравенство

$$3^{x+2} + 3^{-x} - 7 \geq \log_2 8.$$

Найдите наибольшее целое отрицательное решение.

Решение.

Так как $3^{x+2} = 9 \cdot 3^x$, $3^{-x} = \frac{1}{3^x}$ и $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$, то получим не-

равенство

$$9 \cdot 3^x + \frac{1}{3^x} - 10 \geq 0. \quad (1)$$

Пусть $3^x = t$, где $t > 0$, тогда неравенство (1) примет вид $9t + \frac{1}{t} - 10 \geq 0$,
или $9t^2 - 10t + 1 \geq 0$.

Поскольку $9 - 10 + 1 = 0$, то $t_1 = 1$; $t_2 = \frac{1}{9}$.

Значит, $9t^2 - 10t + 1 = 9(t - 1)\left(t - \frac{1}{9}\right)$.

Учитывая замену $3^x = t$, получим $(t - 1)\left(t - \frac{1}{9}\right) \geq 0$, или
 $(3^x - 1)\left(3^x - \frac{1}{9}\right) \geq 0$.

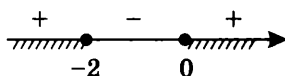
Представим неравенство в виде

$$(3^x - 3^0)(3^x - 3^{-2}) \geq 0. \quad (2)$$

Теперь неравенство (1) решим методом рационализации:

$$(3 - 1)(x - 0)(3 - 1)(x + 2) \geq 0, \text{ или } x(x + 2) \geq 0. \quad (3)$$

Неравенство (2) решим методом интервалов: $x_1 = 0$; $x_2 = -2$.



$$x \in (-\infty; -2] \cup [0; +\infty).$$

Тогда $x = -2$ — наибольшее целое отрицательное решение неравенства (2), а значит, и исходного.

Ответ: -2 .

Пример 7. Решите неравенство

$$125^x - 31 \cdot 25^x + 31 \cdot 5^{x+1} - 125 \leq 0.$$

Решение.

Запишем данное неравенство в виде

$$(5^x)^3 - 31 \cdot (5^x)^2 + 155 \cdot 5^x - 125 \leq 0.$$

Пусть $5^x = y$, где $y > 0$. Получим

$$y^3 - 31y^2 + 155y - 125 \leq 0. \quad (1)$$

Левую часть неравенства (1) разложим на множители способом группировки:

$$(y^3 - 125) - 31y(y - 5) \leq 0, \text{ или } (y - 5)(y^2 + 5y + 25) - 31y(y - 5) \leq 0.$$

Вынося общий множитель $y - 5$ за скобки, имеем

$$(y - 5)(y^2 - 26y + 25) \leq 0.$$

Но $y^2 - 26y + 25 = (y - 1)(y - 25)$, тогда $(y - 5)(y - 1)(y - 25) \leq 0$, где $y > 0$.

Учитывая замену $y = 5^x$, получим неравенство

$$(5^x - 5)(5^x - 1)(5^x - 25) \leq 0. \quad (2)$$

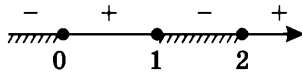
Чтобы применить метод рационализации, запишем неравенство (2) в виде $(5^x - 5)(5^x - 5^0)(5^x - 5^2) \leq 0$.

Тогда получим равносильное неравенство

$$(5 - 1) \cdot (x - 1) \cdot (5 - 1) \cdot (x - 0) \cdot (5 - 1) \cdot (x - 2) \leq 0, \text{ или}$$

$$x(x - 1)(x - 2) \leq 0.$$

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = 2.$$



$$x \in (-\infty; 0] \cup [1; 2].$$

Ответ: $(-\infty; 0] \cup [1; 2]$.

Пример 8. Решите неравенство

$$(3 - \sqrt{8})^x + (3 + \sqrt{8})^x \leq 34.$$

Укажите сумму целых решений.

Решение.

Заметим, что $(3 - \sqrt{8})(3 + \sqrt{8}) = 9 - 8 = 1$, тогда $(3 - \sqrt{8})^x = \frac{1}{(3 + \sqrt{8})^x}$.

В этом случае неравенство запишется в виде $\frac{1}{(3 + \sqrt{8})^x} + (3 + \sqrt{8})^x \leq 34$.

Пусть $(3 + \sqrt{8})^x = a$, где $a > 0$.

Получим $a + \frac{1}{a} - 34 \leq 0$, или $a^2 - 34a + 1 \leq 0$,

$D/4 = 17^2 - 1 = 288$, $a_{1,2} = 17 \pm 12\sqrt{2}$, откуда находим

$$a_1 = 17 - 12\sqrt{2} = (3 - \sqrt{8})^2; \quad a_2 = 17 + 12\sqrt{2} = (3 + \sqrt{8})^2.$$

Следовательно, $a^2 - 34a + 1 = (a - (3 - \sqrt{8})^2)(a - (3 + \sqrt{8})^2)$, или

$$(a - (3 + \sqrt{8})^{-2})(a - (3 + \sqrt{8})^2) \leq 0. \quad (1)$$

Учитывая замену $(3 + \sqrt{8})^x = a$, неравенство (1) запишется в виде

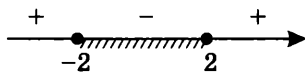
$$((3 + \sqrt{8})^x - (3 + \sqrt{8})^{-2})((3 + \sqrt{8})^x - (3 + \sqrt{8})^2) \leq 0.$$

Теперь к полученному неравенству применим метод рационализации: $(3 + \sqrt{8} - 1)(x + 2)(3 + \sqrt{8} - 1)(x - 2) \leq 0$, или $(x + 2)(x - 2) \leq 0$, где $3 + \sqrt{8} - 1 > 0$.

Полученное неравенство решим методом интервалов:

$$x_1 = -2; x_2 = 2.$$

$$x \in [-2; 2].$$



Тогда $-2 + (-1) + 0 + 1 + 2 = 0$ — сумма целых решений.

Ответ: 0.

Пример 9. Решите неравенство

$$\sqrt[3]{3^{x^2-3x+2}} \leq (\sqrt{7+\sqrt{48}} - 2)^x.$$

Найдите наибольшее целое решение.

Решение.

Так как $7 + \sqrt{48} = 7 + 4\sqrt{3} = 3 + 4\sqrt{3} + 4 = (\sqrt{3} + 2)^2$, то правая часть данного неравенства преобразуется к виду

$$(\sqrt{7+\sqrt{48}} - 2)^x = (\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2} - 2)^x = (|\sqrt{3}+2| - 2)^x = (\sqrt{3}+2-2)^x = (\sqrt{3})^x = 3^{\frac{x}{2}}.$$

Левую часть неравенства запишем в виде $\sqrt[3]{3^{x^2-3x+2}} = 3^{\frac{x^2-3x+2}{3}}$.

В этом случае исходное неравенство примет вид $3^{\frac{x^2-3x+2}{3}} \leq 3^{\frac{x}{2}}$, или $3^{\frac{x^2-3x+2}{3} - \frac{x}{2}} \leq 0$.

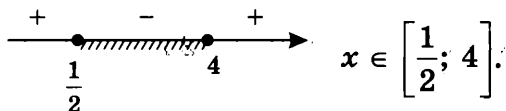
Применяя метод рационализации, имеем равносильное неравенство

$$(3-1) \left(\frac{x^2-3x+2}{3} - \frac{x}{2} \right) \leq 0, \text{ или } \frac{2x^2-9x+4}{6} \leq 0, \text{ или } 2x^2-9x+4 \leq 0.$$

Но $2x^2 - 9x + 4 = (x-4)(2x-1)$, тогда $(x-4)(2x-1) \leq 0$.

Решая полученное неравенство методом интервалов, получим

$$x_1 = 4, x_2 = \frac{1}{2}.$$



Значит, $x = 4$ — наибольшее целое решение исходного неравенства.

Ответ: 4.

Пример 10. Решите неравенство

$$\frac{49^{x^2-8x+6} - \left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-3}}{2^{7-2x} - (0,25)^{3-4x}} \geq 0.$$

Решение.

$$49^{x^2-8x+6} = (7^2)^{x^2-8x+6} = 7^{2x^2-16x+12}; \quad \left(\frac{1}{7}\right)^{2x^2+x-3} = 7^{-2x^2-x+3};$$

$$(0,25)^{3-4x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3-4x} = (2^{-2})^{3-4x} = 2^{8x-6}.$$

Данное неравенство примет вид

$$\frac{7^{2x^2-16x+12} - 7^{-2x^2-x+3}}{2^{7-2x} - 2^{8x-6}} \geq 0. \quad (1)$$

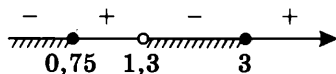
Неравенство (1) решим методом рационализации, учитывая условие равносильности 1 (см. стр. 184):

$$\frac{(7-1)(2x^2-16x+12+2x^2+x-3)}{(2-1)(7-2x-8x+6)} \geq 0, \text{ или}$$

$$\frac{4x^2-15x+9}{-10x+13} \geq 0; \quad \frac{(x-3)(4x-3)}{10x-13} \leq 0.$$

Полученное неравенство решим методом интервалов:

$$x_1 = 3; \quad x_2 = 0,75; \quad x_3 = 1,3.$$



$$x \in (-\infty; 0,75] \cup (1,3; 3].$$

Ответ: $(-\infty; 0,75] \cup (1,3; 3]$.

Пример 11. Решите неравенство

$$\frac{266 - 5^x - 5^{3-x} - 2|7-5^x|}{118 - |7-5^x|} \leq 2.$$

Решение.

Перенесем число 2 в левую часть и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{266 - 5^x - 5^{3-x} - 2|7-5^x| - 236 + 2|7-5^x|}{118 - |7-5^x|} \leq 0, \text{ или}$$

$$\frac{30 - 5^x - 5^{3-x}}{118 - |7-5^x|} \leq 0, \text{ или } \frac{5^x - 30 + 5^{3-x}}{|7-5^x| - 118} \leq 0. \quad (1)$$

Так как $5^x > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, то, умножив обе части неравенства на 5^x , получим равносильное неравенство

$$\frac{5^{2x} - 30 \cdot 5^x + 125}{|5^x - 7| - 118} \leq 0. \quad (2)$$

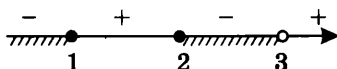
Числитель дроби неравенства (2) — квадратный трехчлен относительно 5^x . Разложив его на множители, получим $\frac{(5^x - 5)(5^x - 25)}{|5^x - 7| - 118} \leq 0$,

или, применив метод рационализации, имеем

$$\frac{(5-1)(x-1)(5-1)(x-2)}{(5^x-7-118)(5^x-7+118)} \leq 0, \text{ или } \frac{(x-1)(x-2)}{(5^x-5^3)(5^x+111)} \leq 0.$$

Но $5^x + 111 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, тогда $\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)} \leq 0$.

$$x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 3.$$



$$x \in (-\infty; 1] \cup [2; 3).$$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup [2; 3)$.

Пример 12. Решите неравенство

$$\frac{(\log_2 7)^5 - (\log_2 7)^x}{x \log_2 7 - (\log_2 7)^{x+3}} \leq 0$$

и укажите количество целых решений.

Решение.

Пусть $\log_2 7 = a$, где $a \in (2; 3)$, тогда $x \log_2 7 = x \cdot \frac{1}{x} \log_2 7 = \log_2 7 = a$.

Кроме того, должно выполняться условие $2^x \neq 1$, т. е. $x \neq 0$.

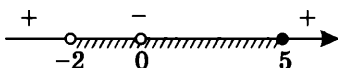
В этом случае данное неравенство примет вид

$$\frac{a^5 - a^x}{a - a^{x+3}} \leq 0, \text{ где } x \neq 0. \quad (1)$$

Неравенство (1) решим методом рационализации:

$$\frac{(a-1)(5-x)}{(a-1)(1-x-3)} \leq 0, \text{ или } \frac{x-5}{x+2} \leq 0. \quad (2)$$

Неравенство (2) решим методом интервалов, исключая число 0.



Значит, $x \in (-2; 0) \cup (0; 5]$.

Целыми решениями будут числа $-1; 1; 2; 3; 4; 5$, всего 6.

Ответ: 6.

Пример 13. Решите неравенство

$$\frac{(\sqrt{3x^2 - 16x + 20} - 2)(8^{|x+6|} - 8^{|x^2 - 5x + 6|})}{3^{x \log_3 4} \cdot 4^{9x^2 - 10x} - 1} \geq 0.$$

Решение.

Упростим знаменатель дроби:

$$3^{x \log_3 4} \cdot 4^{9x^2 - 10x} - 1 = 3^{\log_3 4^x} \cdot 4^{9x^2 - 10x} - 1 = 4^x \cdot 4^{9x^2 - 10x} = 4^{9x^2 - 9x} - 1.$$

Тогда неравенство примет вид

$$\frac{(\sqrt{3x^2 - 16x + 20} - 2)(8^{|x+6|} - 8^{|x^2 - 5x + 6|})}{4^{9x^2 - 9x} - 4^0} \geq 0.$$

Теперь применим метод рационализации:

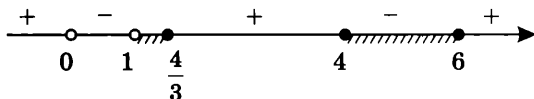
$$\begin{aligned} & \frac{(3x^2 - 16x + 20 - 4)(8 - 1)(|x + 6| - |x^2 - 5x + 6|)}{(4 - 1)(9x^2 - 9x - 0)} \geq 0, \text{ или} \\ & \frac{(3x^2 - 16x + 16)(x + 6 - x^2 + 5x - 6)(x + 6 + x^2 - 5x + 6)}{9x(x - 1)} \geq 0, \\ & \text{или} \frac{(3x^2 - 16x + 16)(x^2 - 6x)(x^2 - 4x + 12)}{9x(x - 1)} \leq 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Но $3x^2 - 16x + 16 = (3x - 4)(x - 4)$, $x^2 - 4x + 12 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ ($D < 0$, $a = 1 > 0$). Неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{x(3x - 4)(x - 4)(x - 6)}{x(x - 1)} \leq 0, \\ 3x^2 - 16x + 20 \geq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{(3x - 4)(x - 4)(x - 6)}{x - 1} \leq 0, \quad x \neq 0, \\ (3x - 10)(x - 2) \geq 0. \end{cases}$$

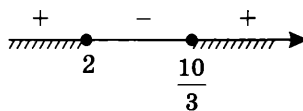
$$1) \begin{cases} \frac{(3x - 4)(x - 4)(x - 6)}{x - 1} \leq 0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{4}{3}; \quad x_2 = 4; \quad x_3 = 6; \quad x_4 = 1.$$

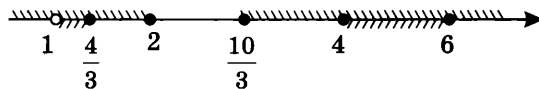


$$x \in \left[1; \frac{4}{3}\right] \cup [4; 6].$$

$$2) (3x - 10)(x - 2) \geq 0, \quad x_1 = \frac{10}{3}; \quad x_2 = 2.$$



3) Найдем пересечение полученных множеств:



$$x \in \left(1; \frac{4}{3}\right] \cup [4; 6].$$

Ответ: $\left(1; \frac{4}{3}\right] \cup [4; 6].$

Пример 14. Решите неравенство

$$\frac{(25^{\sqrt{3x^2-2x}} - 2 \cdot 5^{\sqrt{3x^2-2x}} - 15)(27^{\log_3(x+2)} - x^3 - 13x - 3)}{(0,6^{6x^2-2x+1} - 0,6^{5x^2+3x-5})(|4x+3| - |3x-5|)} \geq 0.$$

Решение.

По своей структуре данное неравенство имеет вид $\frac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{f_3(x) \cdot f_4(x)} \geq 0$,

$$\text{где } f_1(x) = 25^{\sqrt{3x^2-2x}} - 2 \cdot 5^{\sqrt{3x^2-2x}} - 15 = (5^{\sqrt{3x^2-2x}} + 3)(5^{\sqrt{3x^2-2x}} - 5);$$

$$f_2(x) = 27^{\log_3(x+2)} - x^3 - 13x - 3 = 3^{3\log_3(x+2)} - x^3 - 13x - 3 =$$

$$= (x+2)^3 - x^3 - 13x - 3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 - 13x - 3 = 6x^2 - x - 5;$$

$$f_3(x) = 0,6^{6x^2-2x+1} - 0,6^{5x^2+3x-5};$$

$$f_4(x) = |4x+3| - |3x-5|.$$

В этом случае данное неравенство запишется в виде

$$\frac{(5^{\sqrt{3x^2-2x}} + 3)(5^{\sqrt{3x^2-2x}} - 5)(6x^2 - x - 5)}{(0,6^{6x^2-2x+1} - 0,6^{5x^2+3x-5})(|4x+3| - |3x-5|)} \geq 0. \quad (1)$$

Поскольку $5^{\sqrt{3x^2-2x}} + 3 > 0$ при $3x^2 - 2x \geq 0$ и

$6x^2 - x - 5 = (x-1)(6x+5)$, где 1 и -5 — корни квадратного трехчлена, то неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(5^{\sqrt{3x^2-2x}} - 5)(x-1)(6x+5)}{(0,6^{6x^2-2x+1} - 0,6^{5x^2+3x-5})(|4x+3| - |3x-5|)} \geq 0, \\ 3x^2 - 2x \geq 0, \\ x+2 > 0, \end{array} \right. \quad (2)$$

или, применив к первому неравенству системы (2) метод рационализации, получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(3x^2 - 2x - 1)(x-1)(6x+5)}{(6x^2 - 2x + 1 - 5x^2 - 3x + 5)(4x+3 - 3x+5)(4x+3+3x-5)} \leq 0, \\ x(3x-2) \geq 0, \\ x > -2, \end{array} \right.$$

где $5 - 1 > 0$ и $0,6 - 1 < 0$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(3x^2 - 2x - 1)(x-1)(6x+5)}{(x^2 - 5x + 6)(x+8)(7x-2)} \leq 0, \\ x(3x-2) \geq 0, \\ x > -2. \end{array} \right.$$

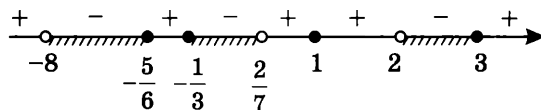
Но $3x^2 - 2x - 1 = (x-1)(3x+1)$ и $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$, тогда получим

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-1)(3x+1)(x-1)(6x+5)}{(x-2)(x-3)(x+8)(7x-2)} \leq 0, \\ x(3x-2) \geq 0, \\ x > -2, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-1)^2(3x+1)(6x+5)}{(x-2)(x-3)(x+8)(7x-2)} \leq 0, \\ x(3x-2) \geq 0, \\ x > -2. \end{array} \right.$$

$$1) \frac{(x-1)^2(3x+1)(6x+5)}{(x-2)(x-3)(x+8)(7x-2)} \leq 0.$$

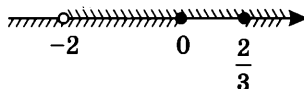
$x_1 = 1$ — кратная (двойная точка);

$$x_2 = -\frac{1}{3}; \quad x_3 = -\frac{5}{6}; \quad x_4 = 2; \quad x_5 = 3; \quad x_6 = -8; \quad x_7 = \frac{2}{7}.$$



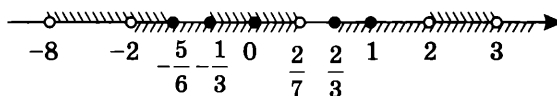
$$x \in \left(-8; -\frac{5}{6}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}; \frac{2}{7}\right) \cup \{1\} \cup (2; 3).$$

$$2) \begin{cases} x(3x-2) \geq 0, \\ x > -2. \end{cases}$$



$$x \in (-2; 0] \cup \left[\frac{2}{3}; +\infty\right).$$

3) Найдем пересечение полученных множеств:



$$\text{Ответ: } \left(-2; -\frac{5}{6}\right] \cup \left[-\frac{1}{3}; 0\right] \cup \{1\} \cup (2; 3).$$

Примеры для самостоятельного решения

Решите неравенства:

$$1. 6^{\frac{x+5}{x^2-9}} > 1.$$

$$2. \frac{3^x - 27}{x^2 - 4x + 4} \leq 0.$$

$$3. (\sqrt{3})^{\lg x} \leq \frac{3\sqrt{3}}{3^{\lg x}}.$$

$$4. 2 \cdot 8^{\frac{2x^2+1}{x}} - 4^{3x} < 0.$$

$$5. (\sqrt{5} + 2)^{\frac{5x-4}{x+1}} \leq (\sqrt{5} - 2)^{-x}.$$

$$6. \frac{x - 2\sqrt{x} - 8}{2^x - 4} \geq 0. \text{ Найдите наименьшее целое решение.}$$

$$7. 8 \cdot 3^{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}} + 9^{\sqrt[4]{x} + 1} \geq 9^{\sqrt{x}}. \text{ Найдите длину промежутка, на котором выполняется неравенство.}$$

$$8. \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8} \right)^{\frac{3x+1}{x-5}} \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{8} \right)^{-3}. \text{ Найдите сумму целых решений нера-$$

венства, принадлежащих отрезку $[-1; 6]$.

$$9. \frac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1. \text{ Найдите наименьшее целое решение неравен-$$

ства.

$$10. \frac{(3^{x^2} - 3^{x+6})(5^x - 25)}{\left(\frac{1}{4}\right)^{x^3-3x^2} - 4^{-x+3}} \geq 0.$$

$$11. \frac{x^4 - 81}{125 \cdot 5^{12-x^2} - 25^x} \leq 0.$$

$$12. \left(\frac{2}{7}\right)^{6x-21} \cdot 12,25^{\frac{4x+1}{2}} \leq 1. \text{ Найдите наименьшее целое решение.}$$

$$13. \sqrt[x^2]{\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-2x}} \geq 1. \text{ Укажите количество целых решений.}$$

$$14. \sqrt[6]{3^{x^2+4x-14}} \leq \left(\sqrt{31+12\sqrt{3}} - 2\right)^x. \text{ Найдите сумму целых решений.}$$

$$15. \left| 2^{4x^2-1} - 5 \right| \leq 3. \text{ Найдите наименьшее целое решение.}$$

$$16. \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^{x+4} - 1}{\left(\frac{8}{5}\right)^{x-6} - 1} \geq 0. \text{ Найдите сумму целых решений.}$$

$$17. (\sqrt{5} + 2)^{x-1} \geq (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}}. \quad 18. \frac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1.$$

$$19. \frac{(2^x - 2)(|x+1| - 2x)}{(\sqrt{3+x^2} - 2x)(3x - 2 - x^2)} \geq 0.$$

$$20. \frac{(\sqrt{2x^2+5x+11} - 3) \left(3^{|x-5|} - 3^{|x^2+5x+13|} \right)}{5^{3x^2+7x} \cdot 6^{x \log_6 5} - 1} \geq 0.$$

Найдите наименьшее целое решение.

§ 10. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМ ОСНОВАНИЕМ

Это неравенства, в которых неизвестное находится одновременно и в показателе, и в основании степени.

Например, $(x-5)^{3x^2-2x} \leq 1$.

При решении показательных неравенств будем пользоваться свойствами неравенств, содержащих степени.

1. При всех допустимых значениях a и b справедливы следующие утверждения:

- 1) неравенства $a^b > 1$ и $(a-1)b > 0$ равносильны;
- 2) неравенства $a^b \geq 1$ и $(a-1)b \geq 0$ равносильны;
- 3) неравенства $a^b < 1$ и $(a-1)b < 0$ равносильны;
- 4) неравенства $a^b \leq 1$ и $(a-1)b \leq 0$ равносильны.

2. При всех допустимых значениях a , b и c справедливы следующие утверждения:

- 1) неравенства $a^b > a^c$ и $(a-1)(b-c) > 0$ равносильны;
- 2) неравенства $a^b \geq a^c$ и $(a-1)(b-c) \geq 0$ равносильны;
- 3) неравенства $a^b < a^c$ и $(a-1)(b-c) < 0$ равносильны;
- 4) неравенства $a^b \leq a^c$ и $(a-1)(b-c) \leq 0$ равносильны.

Примеры с решениями

Пример 1. Решите неравенство

$$\sqrt[7]{|x-5|^{x+4}} \leq \sqrt{|x-5|^{x-7}}$$

Решение.

Применив метод рационализации, имеем

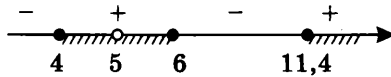
$$\begin{cases} |x-5|^{2(x+4)} - |x-5|^{7(x-7)} \leq 0, \\ |x-5| > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (|x-5|-1)(2(x+4)-7(x-7)) \leq 0, \\ x \neq 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (|x-5|-1)(-5x+57) \leq 0, \\ x \neq 5; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-5-1)(x-5+1)(5x-57) \geq 0, \\ x \neq 5; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)(x-4)(5x-57) \geq 0, \\ x \neq 5. \end{cases} \quad (1)$$

Неравенство системы (1) решим методом интервалов, исключив число 5:

$$x_1 = 6; x_2 = 4; x_3 = 11,4.$$



$$x \in [4; 5) \cup (5; 6] \cup [11,4; +\infty).$$

Ответ: $[4; 5) \cup (5; 6] \cup [11,4; +\infty)$.

Пример 2. Решите неравенство $(x^2 - 6x)^{x+3} \leq 1$.

Решение.

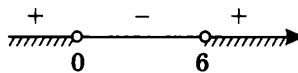
Представим неравенство в виде

$$(x^2 - 6x)^{x+3} \leq (x^2 - 6x)^0. \quad (1)$$

Неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 6x > 0, \\ (x^2 - 6x - 1)(x + 3 - 0) \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x - 6) > 0, \\ (x^2 - 6x - 1)(x + 3) \leq 0. \end{cases}$$

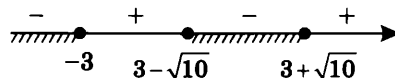
1) $x(x - 6) > 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = 6$.



$$x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty).$$

2) $(x^2 - 6x - 1)(x + 3) \leq 0$.

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10}, \quad x_3 = -3.$$



$$x \in (-\infty; -3] \cup [3 - \sqrt{10}; 3 + \sqrt{10}].$$

3) Найдем пересечение полученных множеств:



$$x \in (-\infty; -3] \cup [3 - \sqrt{10}; 0) \cup (6; 3 + \sqrt{10}].$$

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [3 - \sqrt{10}; 0) \cup (6; 3 + \sqrt{10}]$.

Замечание. Здесь мы учли, что $\sqrt{10} > 3$, $3 + \sqrt{10} > 6$.

Пример 3. Решите неравенство $(x^2 - 6x + 1)^x \leq 1$. Найдите наибольшее целое решение.

Решение.

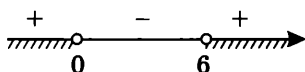
Так как $1 = (x^2 - 6x + 1)^0$, то получим $(x^2 - 6x + 1)^x \leq (x^2 - 6x + 1)^0$.

Полученное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - 6x + 1 - 1)(x - 0) \leq 0, \\ x^2 - 6x + 1 > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Неравенство $x^2 - 6x + 1 > 0$ выполняется при всех $x \in \mathbb{R}$, так как $D < 0$ и $a = 1 > 0$.

Тогда система (1) равносильна неравенству $(x^2 - 6x)x \leq 0$, или $x^2(x - 6) \leq 0$. Решая методом интервалов, имеем $x_1 = 0$ — кратная (двойная) точка, $x_2 = 6$.



$$x \in (-\infty; 6].$$

Тогда $x = 6$ — наибольшее целое решение исходного неравенства.

Ответ: 6.

Пример 4. Решите неравенство

$$(x^2 + x + 1)^{\frac{x^2 - 6}{x + 4}} \geq (x^2 + x + 1)^3.$$

Найдите наименьшее целое решение.

Решение.

Применяя метод рационализации, имеем

$$\begin{cases} (x^2 + x + 1 - 1) \left(\frac{x^2 - 6}{x + 4} - 3 \right) \geq 0, \\ x^2 + x + 1 > 0. \end{cases}$$

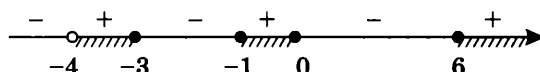
Заметим, что $x^2 + x + 1 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, так как $D < 0$ и $a = 1 > 0$.

Тогда получим равносильное неравенство

$$(x^2 + x) \left(\frac{x^2 - 6}{x + 4} - 3 \right) \geq 0, \text{ или } x(x + 1) \cdot \frac{x^2 - 3x - 18}{x + 4} \geq 0.$$

Но $x^2 - 3x - 18 = (x - 6)(x + 3)$, значит, $\frac{x(x + 1)(x - 6)(x + 3)}{x + 4} \geq 0$.

$x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = 6$; $x_4 = -3$; $x_5 = -4$.



$$x \in (-4; -3] \cup [-1; 0] \cup [6; +\infty).$$

Следовательно, $x = -3$ — наименьшее целое решение исходного неравенства.

Ответ: -3 .

Пример 5. Решите неравенство

$$7 \cdot 3^{\log_3^2 x} + 13 \cdot x^{\log_3 x} \leq 60.$$

Укажите количество целых решений.

Решение.

Так как $x^{\log_3 x} = (3^{\log_3 x})^{\log_3 x} = 3^{\log_3^2 x}$, то данное неравенство примет вид $7 \cdot 3^{\log_3^2 x} + 13 \cdot 3^{\log_3^2 x} \leq 60$, или $20 \cdot 3^{\log_3^2 x} \leq 60$, или $3^{\log_3^2 x} \leq 3$.

Чтобы применить метод рационализации, полученное неравенство представим в виде $3^{\log_3^2 x} - 3 \leq 0$, тогда получим $(3-1)(\log_3^2 x - 1) \leq 0$, или

$$(\log_3 x - 1)(\log_3 x + 1) \leq 0. \quad (1)$$

Так как $\log_3 x = \log_3(3x) - \log_3 1 - 1$, то $\log_3 x + 1 = \log_3(3x) - \log_3 1$.

Значит, к неравенству (1) можно опять применить метод рационализации:

$$(\log_3 x - \log_3 3)(\log_3(3x) - \log_3 1) \leq 0, \text{ или}$$

$$(3-1)(x-3)(3-1)(3x-1) \leq 0, \text{ или}$$

$$(x-3)(3x-1) \leq 0, \text{ откуда находим } x \in \left[\frac{1}{3}; 3 \right].$$

Целые решения: 1; 2; 3, всего 3.

Ответ: 3.

Пример 6. Решите неравенство $(x^2 - 3)^{\frac{x+1}{2-x}} \geq 1$. Найдите наименьшее целое решение.

Решение.

Так как $1 = (x^2 - 3)^0$, то данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x^2 - 3)^{\frac{x+1}{2-x}} \geq (x^2 - 3)^0, \\ x^2 - 3 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2 - 3 - 1) \left(\frac{x+1}{2-x} - 0 \right) \geq 0, \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-2)(x+2)(x+1)}{x-2} \leq 0, \\ (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0. \end{cases} \quad (1)$$

$$1) (x + 2)(x + 1) \leq 0, x \neq 2.$$

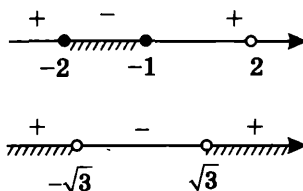
$$x_1 = -2; x_2 = -1.$$

$$x \in [-2; -1].$$

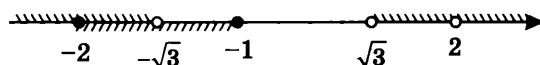
$$2) (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0.$$

$$x_1 = \sqrt{3}; x_2 = -\sqrt{3}.$$

$$x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty).$$



Тогда решением системы (1), а значит, и исходного неравенства, будет пересечение полученных множеств:



$$x \in [-2; -\sqrt{3}).$$

Значит, $x = -2$ — наименьшее целое решение.

Ответ: -2 .

Пример 7. Решите неравенство

$$(11x - 35)^{\sqrt{27x - 9x^2 - 20}} \leq (x^2 - 5)^{\sqrt{27x - 9x^2 - 20}}.$$

Найдите сумму целых решений.

Решение.

Поскольку $11x - 35 > 0$, $x^2 - 5 > 0$, то, разделив обе части неравенства на $11x - 35 \neq 0$, получим

$$\left(\frac{x^2 - 5}{11x - 35} \right)^{\sqrt{27x - 9x^2 - 20}} - 1 \geq 0, \text{ или } \left(\frac{x^2 - 5}{11x - 35} \right)^{\sqrt{27x - 9x^2 - 20}} - \left(\frac{x^2 - 5}{11x - 35} \right)^0 \geq 0. \quad (1)$$

К неравенству (1) применим метод рационализации, учитывая ОДЗ исходного неравенства:

$$\begin{cases} \left(\frac{x^2 - 5}{11x - 35} - 1 \right) (\sqrt{27x - 9x^2 - 20} - 0) \geq 0, & \text{или} \\ x^2 - 5 > 0, 11x - 35 > 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} (x^2 - 5 - 11x + 35)(27x - 9x^2 - 20) \geq 0, \\ x^2 - 5 > 0, 11x - 35 > 0, \end{array} \right. & \text{или} \\ 27x - 9x^2 - 20 \geq 0, \end{cases}$$

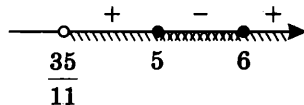
$$\begin{cases} (x^2 - 11x + 30)(9x^2 - 27x + 20) \leq 0, \\ x^2 - 5 > 0, \\ 11x - 35 > 0, \\ 9x^2 - 27x + 20 \leq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Но $x^2 - 11x + 30 = (x - 5)(x - 6)$; $9x^2 - 27x + 20 = (3x - 4)(3x - 5)$;
 $x^2 - 5 = (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$, тогда система (2) примет вид

$$\begin{cases} (x - 5)(x - 6)(3x - 4)(3x - 5) \leq 0, \\ (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) > 0, \\ x > \frac{35}{11}, \\ (3x - 4)(3x - 5) \leq 0. \end{cases}$$

Так как $x > \frac{35}{11} = 3\frac{2}{11} \approx 3,2$, то $x - \sqrt{5} > 0$; $x + \sqrt{5} > 0$; $3x - 4 > 0$;

$3x - 5 > 0$. Следовательно, имеем систему неравенств

$$\begin{cases} (x - 5)(x - 6) \leq 0, \\ x > \frac{35}{11}. \end{cases}$$


Значит, $x \in [5; 6]$, тогда сумма целых решений будет $5 + 6 = 11$.

Ответ: 11.

Пример 8. Решите неравенство

$$\frac{(16^{\log_3(x^2-9)} - (x+11)^{\log_3 16}) \log_7(x^2 + 2x - 8) - 1}{(8x^2 + 4x + 1)^{x^2 - x - 30} - 1} \leq 0.$$

Найдите сумму наименьшего и наибольшего целых решений.

Решение.

Введем обозначения:

$$f_1(x) = 16^{\log_3(x^2-9)} - (x+11)^{\log_3 16}, \quad (1)$$

$$f_2(x) = \log_7(x^2 + 2x - 8) - 1, \quad (2)$$

$$f_3(x) = (8x^2 + 4x + 1)^{x^2 - x - 30} - 1. \quad (3)$$

Тогда данное неравенство будет иметь вид

$$\frac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{f_3(x)} \leq 0.$$

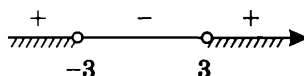
Найдем область определения $D(f)$ неравенства:

$$D(f) = D(f_1) \cap D(f_2) \cap D(f_3).$$

$$\begin{cases} x^2 - 9 > 0, \\ x + 11 > 0, \\ x^2 + 2x - 8 > 0, \\ 8x^2 + 4x + 1 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-3)(x+3) > 0, \\ x + 11 > 0, \\ (x+4)(x-2) > 0, \\ x \in R \ (D < 0; a = 8 > 0). \end{cases}$$

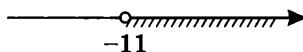
$$1) (x-3)(x+3) > 0.$$

$$x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty).$$



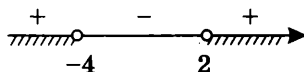
$$2) x + 11 > 0, x > -11.$$

$$x \in (-11; +\infty).$$



$$3) (x+4)(x-2) > 0.$$

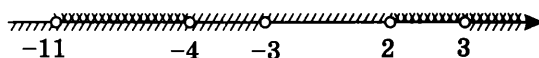
$$x \in (-\infty; -4) \cup (2; +\infty).$$



$$4) x \in R.$$



Теперь найдем пересечение полученных множеств:



$$x \in (-11; -4) \cup (3; +\infty).$$

(4)

Упростим выражения (1), (2) и (3):

$$\begin{aligned} f_1(x) &= 16^{\log_3(x^2-9)} - (x+11)^{\log_3 16} = 16^{\log_3(x^2-9)} - (3^{\log_3(x+11)})^{\log_3 16} = \\ &= 16^{\log_3(x^2-9)} - (3^{\log_3 16})^{\log_3(x+11)} = 16^{\log_3(x^2-9)} - 16^{\log_3(x+11)}; \end{aligned}$$

$$f_2(x) = \log_7(x^2 + 2x - 8) - 1 = \log_7(x^2 + 2x - 8) - \log_7 7;$$

$$f_3(x) = (8x^2 + 4x + 1)^{x^2-x-30} - 1 = (8x^2 + 4x + 1)^{x^2-x-30} - (8x^2 + 4x + 1)^0.$$

Приведенные преобразования вызваны необходимостью в подготовке к применению метода рационализации.

В этом случае исходное неравенство примет вид

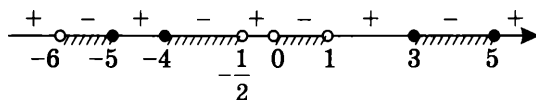
$$\begin{aligned} &\frac{(16^{\log_3(x^2-9)} - 16^{\log_3(x+11)})(\log_7(x^2 + 2x - 8) - \log_7 7)}{(8x^2 + 4x + 1)^{x^2-x-30} - (8x^2 + 4x + 1)^0} \leq 0, \text{ или} \\ &\frac{(16-1)(\log_3(x^2-9) - \log_3(x+11))(7-1)(x^2 + 2x - 8 - 7)}{(8x^2 + 4x + 1 - 1)(x^2 - x - 30 - 0)} \leq 0, \\ &\text{или} \quad \frac{(3-1)(x^2-9-x-11)(x^2+2x-15)}{4x(2x+1)(x-1)(x+6)} \leq 0, \\ &\text{или} \quad \frac{(x^2-x-20)(x^2+2x-15)}{x(2x+1)(x-1)(x+6)} \leq 0. \end{aligned}$$

(5)

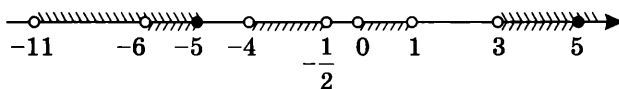
Но $x^2 - x - 20 = (x - 5)(x + 4)$, $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$, тогда неравенство (5) примет вид

$$\frac{(x-5)(x+4)(x+5)(x-3)}{x(2x+1)(x-1)(x+6)} \leq 0. \quad (6)$$

Неравенство (6) решим методом интервалов: $x_1 = 5$; $x_2 = -4$; $x_3 = -5$; $x_4 = 3$; $x_5 = 0$; $x_6 = -\frac{1}{2}$; $x_7 = 1$; $x_8 = -6$.



Учитывая (4), имеем



$$x \in (-6; -5] \cup (3; 5].$$

Тогда сумма наименьшего и наибольшего целых решений будет равна $-5 + 5 = 0$.

Ответ: 0.

Примеры для самостоятельного решения

Решите неравенства:

- $|x-3|^{2x^2-7} > 1.$
- $(4x^2+2x+1)^{x^2-x} > 1.$
- $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2+x+1)^3.$ Найдите сумму целых решений.
- $(x+3)^{x^2-16} < 1.$
- $(x^2-4x)^{x+2} \leq 1.$
- $(x^2-x+1)^x < 1.$
- $x^x \leq x^{7x-x^2-8}.$ Найдите наименьшее целое решение.
- $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x^2} \geq \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x-6}$
- $(x-1)^{2x^2} \geq (x-1)^{9x-9}.$ Найдите наибольшее целое решение.
- $\left(\sqrt{1-2x+x^2}\right)^{2x-1} \geq 1.$ Найдите наименьшее целое решение.

11. $(2x-1)^{\frac{\log_1(-x^2+x+6)}{16}} \geq \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$. Найдите сумму целых решений.

12. $(x^2-x+2)^{\log_{0,6} \frac{2x-3}{x+1}} > 1$. Найдите наибольшее целое решение.

13. $(x^2-x+1)^{x^2-2,5x+1} < 1$.

14. $\sqrt{x^{\log_2 \sqrt{x}}} > 2$.

15. $|x-2|^{x^2-2x-3} > 1$.

16. $5^{\log_{0,2}^2 x} + x^{\log_{0,2} x} \geq \frac{26}{5}$.

17. $x^{\log_8 x} + 25^{\log_5^2 x} \leq 30$. Укажите количество целых решений.

§ 11. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА С ПОСТОЯННЫМ ОСНОВАНИЕМ

При решении логарифмических неравенств (как и показательных) следует учитывать свойства монотонности, область определения логарифмической функции и общие свойства неравенств.

Используя метод рационализации, необходимо учитывать *условия равносильности*:

$$\log_a f(x) - \log_a g(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(f(x) - g(x)) < 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0, a \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x) - g(x)}{a-1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Частные случаи:

$$1. \log_a f(x) - b < 0 \Leftrightarrow \log_a f(x) - \log_a a^b < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(f(x) - a^b) < 0, \\ f(x) > 0, \\ a > 0, a \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x) - a^b}{a-1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

$$2. \log_a f(x) + \log_a g(x) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a (f(x) \cdot g(x)) - \log_a 1 < 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(f(x) \cdot g(x) - 1) < 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0, a \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{f(x) \cdot g(x) - 1}{a-1} < 0, \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ a > 0. \end{cases}$$

Примеры с решениями

Пример 1. Решите неравенство

$$\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) + 1 \leq 0.$$

Решение.

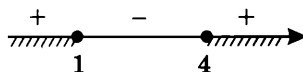
Так как $\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) = -\log_2(x^2 - 5x + 6)$ и $1 = \log_2 2$, то данное неравенство примет вид

$$-\log_2(x^2 - 5x + 6) + \log_2 2 \leq 0, \text{ или } \log_2(x^2 - 5x + 6) - \log_2 2 \geq 0. \quad (1)$$

К неравенству (1) применим метод рационализации:

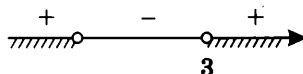
$$\begin{cases} (2-1)(x^2 - 5x + 6 - 2) \geq 0, & \begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0, \\ x^2 - 5x + 6 > 0; \end{cases} & \begin{cases} (x-1)(x-4) \geq 0, \\ (x-2)(x-3) > 0. \end{cases} \end{cases}$$

$$1) (x-1)(x-4) \geq 0.$$

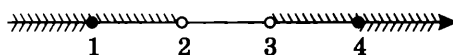


$$x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty).$$

$$2) (x-2)(x-3) > 0.$$



Теперь найдем пересечение полученных множеств:



$$x \in (-\infty; 1] \cup [4; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; 1] \cup [4; +\infty).$

Пример 2. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}} x^2 > 9.$

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\left(\log_{\frac{1}{3}} x^2 - 3 \right) \left(\log_{\frac{1}{3}} x^2 + 3 \right) > 0, \text{ или}$$

$$\left(\log_{\frac{1}{3}} x^2 - \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \right) \left(\log_{\frac{1}{3}} x^2 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \right) > 0, \text{ или } \log_{\frac{1}{3}} (27x^2) \cdot \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{x^2}{27} \right) > 0.$$

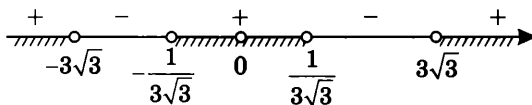
Заменим каждый логарифм на равносильное по знаку выражение, учитывая, что $x \neq 0$:

$$\left(\frac{1}{3} - 1 \right) (27x^2 - 1) \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \left(\frac{x^2}{27} - 1 \right) > 0. \quad (1)$$

Так как $\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)=\left(\frac{1}{3}-1\right)^2 > 0$, то знак неравенства (1) не изменится, тогда получим равносильную систему

$$\begin{cases} (3\sqrt{3}x-1)(3\sqrt{3}x+1)(x-3\sqrt{3})(x+3\sqrt{3}) > 0, \\ x \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решим неравенство системы (2) методом интервалов, где $x \neq 0$:



$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{3\sqrt{3}}; \quad x_{3,4} = \pm 3\sqrt{3}.$$

$$x \in (-\infty; -3\sqrt{3}) \cup \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \cup (3\sqrt{3}; +\infty).$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -3\sqrt{3}) \cup \left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) \cup (3\sqrt{3}; +\infty).$$

Пример 3. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(9^{2x-1} - 6 \cdot 3^{2x-1} + 8)}{x} \leq 2.$$

Найдите наибольшее целое решение.

Решение.

Перенесем число 2 в левую часть неравенства, а затем приведем к общему знаменателю:

$$\frac{\log_3(9^{2x-1} - 6 \cdot 3^{2x-1} + 8) - 2x}{x} \leq 0. \quad (1)$$

Так как $2x = \log_3 3^{2x}$, то неравенство (1) запишется в виде

$$\frac{\log_3(9^{2x-1} - 6 \cdot 3^{2x-1} + 8) - \log_3 3^{2x}}{x} \leq 0. \quad (2)$$

Для краткости обозначим

$f(x) = \log_3(9^{2x-1} - 6 \cdot 3^{2x-1} + 8) - \log_3 3^{2x}$, тогда неравенство (2) примет вид $\frac{f(x)}{x} \leq 0$.

К неравенству (2) применим метод рационализации:

$$\frac{(3-1)(9^{2x-1} - 6 \cdot 3^{2x-1} + 8 - 3^{2x})}{x} \leq 0, \text{ или } \frac{(3^{2x-1})^2 - 9 \cdot 3^{2x-1} + 8}{x} \leq 0, \text{ или}$$

$$\frac{(3^{2x-1} - 3^{\log_3 8})(3^{2x-1} - 3^0)}{x} \leq 0.$$

Еще раз применим метод рационализации к числителю дроби:

$$\frac{(3-1)(2x-1-\log_3 8)(3-1)(2x-1-0)}{x} \leq 0, \text{ или}$$

$$\frac{(2x-\log_3 24)(2x-1)}{x} \leq 0. \quad (3)$$

Кроме того, надо учесть, что

$$9^{2x-1} - 6 \cdot 3^{2x-1} + 8 > 0, \text{ или}$$

$$(3^{2x-1})^2 - 6 \cdot 3^{2x-1} + 8 > 0. \quad (4)$$

Левую часть неравенства (4) можно разложить на множители относительно 3^{2x-1} :

$$(3^{2x-1} - 2)(3^{2x-1} - 4) > 0. \quad (5)$$

Но $2 = 3^{\log_3 2}$, $4 = 3^{\log_3 4}$, тогда неравенство (5) преобразуется к виду

$$(3^{2x-1} - 3^{\log_3 2})(3^{2x-1} - 3^{\log_3 4}) > 0, \text{ или}$$

$$(3-1)(2x-1-\log_3 2)(3-1)(2x-1-\log_3 4) > 0, \text{ или}$$

$$(2x-\log_3 6)(2x-\log_3 12) > 0. \quad (6)$$

Неравенства (3) и (6) образуют систему неравенств

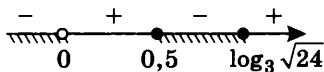
$$\begin{cases} \frac{(2x-\log_3 24)(2x-1)}{x} \leq 0, \\ (2x-\log_3 6)(2x-\log_3 12) > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{(x-\log_3 \sqrt{24})(x-0,5)}{x} \leq 0, \\ (x-\log_3 \sqrt{6})(x-\log_3 \sqrt{12}) > 0. \end{cases}$$

$$1) \frac{(x-\log_3 \sqrt{24})(x-0,5)}{x} \leq 0.$$

$$x_1 = \log_3 \sqrt{24}, \quad x_2 = 0,5.$$

Заметим, что $0,5 = \log_3 3^{0,5} = \log_3 \sqrt{3}$,

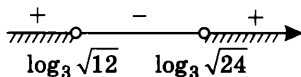
$\log_3 \sqrt{3} < \log_3 \sqrt{24}$. Получим



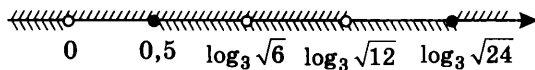
$$x \in (-\infty; 0) \cup [0,5; \log_3 \sqrt{24}].$$

$$2) (x - \log_3 \sqrt{6})(x - \log_3 \sqrt{12}) > 0.$$

$$x_1 = \log_3 \sqrt{6}; \quad x_2 = \log_3 \sqrt{12}.$$



Найдем пересечение полученных множеств:



$$x \in (-\infty; 0) \cup [0, 0,5; \log_3 \sqrt{6}) \cup (\log_3 \sqrt{6}; \log_3 \sqrt{12}).$$

Так как $\frac{1}{2} < \log_3 \sqrt{6} < 1$; $1 < \log_3 \sqrt{12} < 1,5$, то $x = 1$ — наибольшее целое решение.

Ответ: 1.

Пример 4. Решите неравенство

$$\log_4(x-4)^4 \cdot \log_{16}(x-3)^2 + \log_2 \frac{(x-3)^2}{x-4} \geq 2.$$

Решение.

Для применения метода рационализации упростим неравенство следующим образом, учитывая ОДЗ:

$$\begin{cases} \log_2(x-4)^4 \cdot \log_2(x-3)^2 + \log_2 \frac{(x-3)^2}{x-4} - 2 \geq 0, \\ \frac{(x-3)^2}{x-4} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{2} \log_2 |x-4| \cdot \frac{2}{4} \log_2 |x-3| + 2 \log_2 |x-3| - \log_2 |x-4| - 2 \geq 0, \\ x \neq 3, \quad x-4 > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 |x-4| \cdot \log_2 |x-3| + 2 \log_2 |x-3| - \log_2 |x-4| - 2 \geq 0, \\ x > 4. \end{cases} \quad (1)$$

К I неравенству системы (1) применим способ группировки:

$$\log_2 |x-3| \cdot (\log_2 |x-4| + 2) - (\log_2 |x-4| + 2) \geq 0, \text{ или}$$

$$(\log_2 |x-3| - 1)(\log_2 |x-4| + 2) \geq 0. \quad (2)$$

Так как $1 = \log_2 2$ и $2 = -\log_2 2^{-2}$, то неравенство (2) преобразуется к виду $(\log_2 |x-3| - \log_2 2)(\log_2 |x-4| - \log_2 2^{-2}) \geq 0$. Теперь вновь применим метод рационализации:

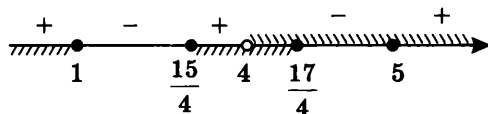
$$(2-1)(|x-3|-2) \cdot (2-1)(|x-4|-2^{-2}) \geq 0, \text{ или}$$

$$((x-3)^2 - 2^2) \left((x-4)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \right) \geq 0, \text{ или}$$

$$(x-3-2)(x-3+2) \left(x-4-\frac{1}{4} \right) \left(x-4+\frac{1}{4} \right) \geq 0, \text{ или}$$

$$(x-5)(x-1) \left(x-\frac{17}{4} \right) \left(x-\frac{15}{4} \right) \geq 0. \quad (3)$$

Решим неравенство (3) методом интервалов, учитывая ОДЗ ($x > 4$):



$$x \in \left(4; \frac{17}{4} \right] \cup [5; +\infty).$$

Ответ: $\left(4; \frac{17}{4} \right] \cup [5; +\infty).$

Пример 5. Решите неравенство

$$\frac{\log_5(x^2 - 3x - 9)^6 - \log_4(x^2 - 3x - 9)^3}{4x^2 - 13x + 3} \geq 0.$$

Найдите наибольшее целое отрицательное решение.

Решение.

Пусть $f(x) = \log_5(x^2 - 3x - 9)^6 - \log_4(x^2 - 3x - 9)^3$, $g(x) = 4x^2 - 13x + 3$.

Приведем $f(x)$ и $g(x)$ к виду, где можно применить метод рационализации:

$$f(x) = 6 \log_5|x^2 - 3x - 9| - 3 \log_4(x^2 - 3x - 9).$$

Поскольку $x^2 - 3x - 9 > 0$ (по ОДЗ), то

$$f(x) = 6 \log_5(x^2 - 3x - 9) - 3 \log_4(x^2 - 3x - 9).$$

Применив формулу перехода от одного основания к другому, имеем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{6 \log_4(x^2 - 3x - 9)}{\log_4 5} - 3 \log_4(x^2 - 3x - 9) = \\ &= \frac{6 - 3 \log_4 5}{\log_4 5} \cdot \log_4(x^2 - 3x - 9). \end{aligned}$$

Заметим, что $1 < \log_4 5 < 2$, тогда $-6 < -3 \log_4 5 < -3$, значит, $0 < 6 - 3 \log_4 5 < 3$.

Следовательно, $\frac{6 - 3 \log_4 5}{\log_4 5} > 0$.

$g(x) = 4x^2 - 13x + 3 = (4x - 1)(x - 3)$, где $\frac{1}{4}$ и 3 — корни $g(x)$.

Следовательно, исходное неравенство запишется в виде

$$\frac{6 - 3\log_4 5}{\log_4 5} \cdot \frac{\log_4(x^2 - 3x - 9)}{(4x - 1)(x - 3)} \geq 0, \text{ или, учитывая ОДЗ, имеем равносиль-}$$

ную систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{\log_4(x^2 - 3x - 9)}{(4x - 1)(x - 3)} \geq 0, & \begin{cases} \frac{\log_4(x^2 - 3x - 9) - \log_4 1}{(4x - 1)(x - 3)} \geq 0, \\ (x - x_1)(x - x_2) > 0, \end{cases} \\ x^2 - 3x - 9 > 0; \end{cases}$$

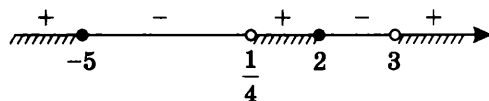
где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена.

$$D = 9 + 36 = 45 > 0, \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm 3\sqrt{5}}{2}, \text{ тогда получим}$$

$$\begin{cases} \frac{(4 - 1)(x^2 - 3x - 9 - 1)}{(4x - 1)(x - 3)} \geq 0, & \text{или} \begin{cases} \frac{x^2 - 3x - 10}{(4x - 1)(x - 3)} \geq 0, \\ (x - x_1)(x - x_2) > 0; \end{cases} \\ (x - x_1)(x - x_2) > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x + 5)(x - 2)}{(4x - 1)(x - 3)} \geq 0, \\ \left(x - \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}\right) > 0. \end{cases}$$

$$1) \frac{(x + 5)(x - 2)}{(4x - 1)(x - 3)} \geq 0, \quad x_1 = -5; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = \frac{1}{4}; \quad x_4 = 3.$$

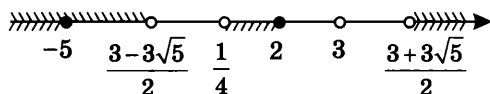


$$x \in (-\infty; -5] \cup \left(\frac{1}{4}; 2\right] \cup (3; +\infty).$$

$$2) \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \text{-----} \\ \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2} \quad \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} \end{array}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}; +\infty\right).$$

Теперь найдем пересечение полученных множеств:



$$x \in (-\infty; -5] \cup \left(\frac{3+3\sqrt{5}}{2}; +\infty \right).$$

Тогда $x = -5$ — наибольшее целое отрицательное решение исходного неравенства.

Ответ: -5 .

Пример 6. Решите неравенство

$$\log_2 \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4) \leq 1.$$

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\log_2 \left(\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4) \right) - \log_2 2 \leq 0, \text{ или } \log_2 \frac{\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4)}{2} \leq 0. \quad (1)$$

Неравенство (1) равносильно неравенству по знаку

$$(2-1) \left(\frac{\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4)}{2} - 1 \right) \leq 0, \text{ или } \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4) - 2 \leq 0, \text{ или}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4) - \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^2 \leq 0, \text{ или } \log_{\frac{1}{3}}(9(x^2 - 4)) \leq 0. \quad (2)$$

Неравенство (2) равносильно неравенству

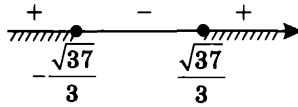
$$\left(\frac{1}{3} - 1 \right) (9x^2 - 36 - 1) \leq 0, \text{ или } 9x^2 - 37 \geq 0. \quad (3)$$

Неравенство (3) с учетом ОДЗ исходного неравенства равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 9x^2 - 37 \geq 0, \\ \log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4) > 0, \\ x^2 - 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 9x^2 - 37 \geq 0, \\ \left(\frac{1}{3} - 1 \right) (x^2 - 5) > 0, \\ x^2 - 4 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 9x^2 - 37 \geq 0, \\ x^2 - 5 < 0, \\ x^2 - 4 > 0. \end{cases}$$

$$1) 9x^2 - 37 \geq 0, (3x - \sqrt{37})(3x + \sqrt{37}) \geq 0.$$

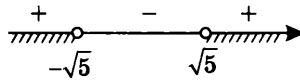
$$x_1 = \frac{\sqrt{37}}{3}; \quad x_2 = -\frac{\sqrt{37}}{3}.$$



$$x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{37}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{37}}{3}; +\infty\right).$$

$$2) x^2 - 5 < 0, (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) < 0.$$

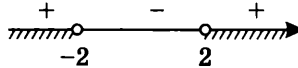
$$x_1 = \sqrt{5}; \quad x_2 = -\sqrt{5}.$$



$$x \in (-\sqrt{5}; \sqrt{5}).$$

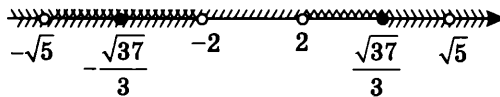
$$3) x^2 - 4 > 0, (x - 2)(x + 2) > 0.$$

$$x_1 = 2; \quad x_2 = -2.$$



Найдем пересечение полученных множеств:

$$\frac{\sqrt{37}}{3} \approx 2,0; \quad \sqrt{5} \approx 2,2.$$



$$x \in \left(-\sqrt{5}; -\frac{\sqrt{37}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{37}}{3}; \sqrt{5}\right).$$

$$\text{Ответ: } \left(-\sqrt{5}; -\frac{\sqrt{37}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{37}}{3}; \sqrt{5}\right).$$

Пример 7. Решите неравенство

$$2 \lg^2(x + 6) + \lg(x + 6) \lg(x + 8) \leq \lg^2(x + 8).$$

Решение.

Пусть $\lg(x + 6) = a$, $\lg(x + 8) = b$, тогда получим

$$2a^2 + ab - b^2 \leq 0.$$

(1)

Левую часть неравенства (1) разложим на множители:

$$2a^2 + 2ab - ab - b^2 \leq 0, \text{ или } 2a(a + b) - b(a + b) \leq 0, \text{ или} \\ (a + b)(2a - b) \leq 0. \quad (2)$$

Учитывая подстановки $a = \lg(x + 6)$, $b = \lg(x + 8)$, неравенство (2) запишется в виде

$$(\lg(x + 6) + \lg(x + 8))(2\lg(x + 6) - \lg(x + 8)) \leq 0, \\ \text{или } \lg(x + 6)(x + 8) \cdot \lg \frac{(x + 6)^2}{x + 8} \leq 0. \quad (3)$$

К неравенству (3) применим метод рационализации, учитывая ОДЗ:

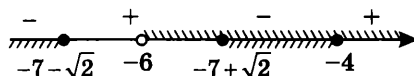
$$\begin{cases} (10 - 1)((x + 6)(x + 8) - 1) \left(\frac{(x + 6)^2}{x + 8} - 1 \right) \leq 0, \\ x + 6 > 0, \\ x + 8 > 0, \end{cases} \quad \text{или} \\ \begin{cases} (x^2 + 14x + 47)(x^2 + 12x + 36 - x - 8) \leq 0, \\ x + 6 > 0, \end{cases} \quad \text{или} \\ \begin{cases} (x^2 + 14x + 47)(x^2 + 11x + 28) \leq 0, \\ x + 6 > 0, \end{cases} \quad \text{или} \\ \begin{cases} (x - x_1)(x - x_2)(x + 4)(x + 7) \leq 0, \\ x + 6 > 0, \end{cases} \quad (4)$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, $x_{1,2} = -7 \pm \sqrt{2}$. Кроме того, надо учесть, что если $x + 6 > 0$, то $x + 7 = (x + 6) + 1 > 0$ тем более.

Значит, система (4) преобразуется к виду

$$\begin{cases} (x + 7 + \sqrt{2})(x + 7 - \sqrt{2})(x + 4) \leq 0, \\ x > -6. \end{cases}$$

$$x_1 = -7 - \sqrt{2} \approx -8,4; \quad x_2 \approx -5,6; \quad x_3 = -4.$$



$$x \in [-7 + \sqrt{2}; -4].$$

Ответ: $[-7 + \sqrt{2}; -4]$.

Пример 8. Решите неравенство

$$\log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 4 \log_{\frac{1}{2}} x + 4 \right) \geq 4.$$

Найдите наименьшее целое решение.

Решение.

$$\text{Заметим, что } \log_{\frac{1}{2}}^2 x - 4 \log_{\frac{1}{2}} x + 4 = \left(\log_{\frac{1}{2}} x - 2 \right)^2.$$

Тогда данное неравенство запишется в виде

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\log_{\frac{1}{2}} x - 2 \right)^2 \geq 4, \text{ или } 2 \log_2 \left| \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \right| \geq 4, \text{ или} \\ \log_2 \left| \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \right| \geq 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Для применения метода рационализации представим неравенство (1) в виде

$$\log_2 \left| \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \right| - \log_2 4 \geq 0. \quad (2)$$

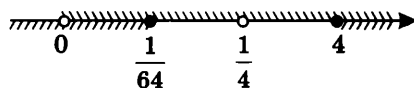
Неравенство (2) с учетом ОДЗ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (2-1) \left(\left| \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \right| - 4 \right) \geq 0, \\ x > 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \neq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (\log_{\frac{1}{2}} x - 2 - 4)(\log_{\frac{1}{2}} x - 2 + 4) \geq 0, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (3)$$

Упростим первое неравенство (3), применив вновь метод рационализации:

$$\begin{aligned} (\log_{\frac{1}{2}} x - 6)(\log_{\frac{1}{2}} x + 2) \geq 0, \text{ или } \left(\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \right)^6 \right) (\log_{\frac{1}{2}} x - \log_{\frac{1}{2}} 4) \geq 0, \\ \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(x - \frac{1}{64} \right) \left(\frac{1}{2} - 1 \right) (x - 4) \geq 0, \text{ или } \left(x - \frac{1}{64} \right) (x - 4) \geq 0. \end{aligned}$$

Учитывая ограничения $x > 0$, $x \neq \frac{1}{4}$, имеем



$$x \in \left(0; \frac{1}{64}\right] \cup [4; +\infty).$$

Тогда $x = 4$ — наименьшее целое решение исходного неравенства.

Ответ: 4.

Пример 9. Решите неравенство

$$\log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} \geq 1,5.$$

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\log_4^2 x + \frac{1}{2} \log_4 x \geq 1,5, \text{ или } 2\log_4^2 x + \log_4 x - 3 \geq 0. \quad (1)$$

Левую часть неравенства (1) можно разложить на множители относительно $\log_4 x$:

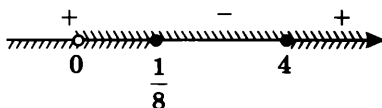
$$\begin{aligned} 2\log_4^2 x + 3\log_4 x - 2\log_4 x - 3 &\geq 0, \text{ или} \\ \log_4 x \cdot (2\log_4 x + 3) - (2\log_4 x + 3) &\geq 0, \\ (2\log_4 x + 3)(\log_4 x - 1) &\geq 0, \text{ или} \\ (\log_4 x^2 - \log_4 4^{-3})(\log_4 x - \log_4 4) &\geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

К неравенству (2) применим метод рационализации:

$$(4 - 1)\left(x^2 - \frac{1}{64}\right) \cdot (4 - 1)(x - 4) \geq 0, \text{ или } \left(x - \frac{1}{8}\right)\left(x + \frac{1}{8}\right)(x - 4) \geq 0. \quad (3)$$

Так как $x > 0$ (по ОДЗ), то неравенство (3) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{8}\right)\left(x + \frac{1}{8}\right)(x - 4) \geq 0, \\ x > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \left(x - \frac{1}{8}\right)(x - 4) \geq 0, \\ x > 0. \end{cases}$$



$$x \in \left(0; \frac{1}{8}\right] \cup [4; +\infty).$$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup [4; +\infty).$

Пример 10. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(x^2 - 2x - 14)^2 - \log_{13}(x^2 - 2x - 14)^3}{3 - 5x - 2x^2} \geq 0.$$

Укажите количество целых решений.

Решение.

Так как $\log_3(x^2 - 2x - 14)^2 = \log_3 13 \cdot \log_{13}(x^2 - 2x - 14)^2 = 2 \log_3 13 \cdot \log_{13}(x^2 - 2x - 14)$, где $x^2 - 2x - 14 > 0$, то данное неравенство примет вид

$$\frac{2\log_3 13 \cdot \log_{13}(x^2 - 2x - 14) - 3\log_{13}(x^2 - 2x - 14)}{3 - 5x - 2x^2} \geq 0,$$

$$\text{или } \frac{(2\log_3 13 - 3) \cdot \log_{13}(x^2 - 2x - 14)}{3 - 5x - 2x^2} \geq 0. \quad (1)$$

Но $2\log_3 13 - 3 = \log_3 13^2 - \log_3 27 = (\log_3 169 - \log_3 27) > 0$, тогда неравенство (1) запишем в виде

$$\frac{\log_{13}(x^2 - 2x - 14)}{2x^2 + 5x - 3} \leq 0. \quad (2)$$

Но $2x^2 + 5x - 3 = (2x - 1)(x + 3)$, где 1 и -3 — корни квадратного трехчлена.

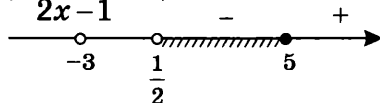
Кроме того, $x^2 - 2x - 14 > 0$ (по ОДЗ), или

$$(x - (1 + \sqrt{15}))(x - (1 - \sqrt{15})) > 0.$$

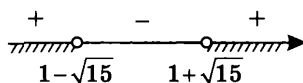
Теперь к неравенству (2) применим метод рационализации:

$$\begin{cases} \frac{(13-1)(x^2-2x-15)}{(2x-1)(x+3)} \leq 0, \\ x^2-2x-14 > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{(x-5)(x+3)}{(2x-1)(x+3)} \leq 0, \\ (x-(1+\sqrt{15}))(x-(1-\sqrt{15})) > 0. \end{cases} \quad (3)$$

$$1) \frac{(x-5)(x+3)}{(2x-1)(x+3)} \leq 0, \quad \frac{x-5}{2x-1} \leq 0, \quad x \neq -3.$$

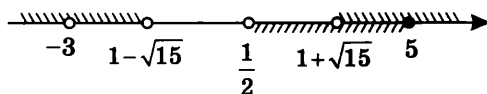


$$2) (x - (1 + \sqrt{15}))(x - (1 - \sqrt{15})) > 0.$$



Тогда решением системы (3) будет пересечение полученных множеств.

Учитывая, что $-3 < 1 - \sqrt{15} < \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < 1 + \sqrt{15} < 5$, получим



Следовательно, $x \in (1 + \sqrt{15}; 5]$ и $x = 5$ — единственное целое решение исходного неравенства.

Ответ: 1.

Пример 11. Решите неравенство

$$(3 + 2x - 8x^2) \log_3 \left(1 - \frac{3}{x^2 + x + 3} \right) \leq 0.$$

Решение.

Поскольку $3 + 2x - 8x^2 = -8 \left(x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} \right) = -8 \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{3}{4} \right)$, то получим $-8 \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{3}{4} \right) \log_3 \left(1 - \frac{3}{x^2 + x + 3} \right) \leq 0$.

Теперь заменим логарифм на равносильное по знаку выражение, учитывая ОДЗ:

$$\begin{cases} -8 \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{3}{4} \right) \cdot (3 - 1) \left(1 - \frac{3}{x^2 + x + 3} - 1 \right) \leq 0, \\ 1 - \frac{3}{x^2 + x + 3} > 0; \\ \begin{cases} -16 \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{3}{4} \right) \cdot \left(-\frac{3}{x^2 + x + 3} \right) \leq 0, \\ x^2 + x + 3 - 3 > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{1}{x^2 + x + 3} \leq 0, \\ x(x + 1) > 0, \end{cases} \end{cases}$$

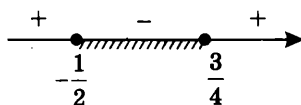
где $x^2 + x + 3 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ ($D < 0$, $a = 1 > 0$).

Тогда получим систему неравенств

$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{3}{4} \right) \leq 0, \\ x(x + 1) > 0. \end{cases} \quad (1)$$

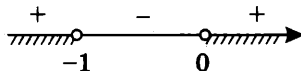
$$1) \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) \leq 0, \quad x_1 = -\frac{1}{2}; \quad x_2 = \frac{3}{4}.$$

$$x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right].$$

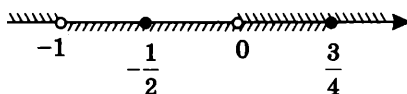


$$2) x(x + 1) > 0.$$

$$x_1 = 0; \quad x_2 = -1.$$



Тогда решением системы (1), а значит, и исходного неравенства, будет пересечение (общая часть) полученных множеств.



$$x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left(0; \frac{3}{4}\right].$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left(0; \frac{3}{4}\right].$

Примеры для самостоятельного решения

Решите неравенства:

1. $\lg\left(\frac{4x+3}{x-1} + 1\right) > 0.$

2. $\log_{6x-7}(3x^2 - 10x + 8) \geq 0.$

3. $\log_{\sqrt{5}} \log_{\frac{1}{32}} \frac{x-4}{1-x} \geq -2.$

4. $2\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(3x+4) - \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(x^2+x+8) \geq -2.$

5. $\sqrt{\log_3 x} \geq \log_3 \frac{x}{9}.$ Найдите наименьшее целое решение.

6. $\log_x \log_2(4^x - 12) \leq 1.$ Укажите количество целых решений.

7. $\frac{\lg x^4 - 2\lg(2x+3)}{\lg(2-\sqrt{3})} \geq 0.$ Найдите сумму целых решений.

8. $\log_{\frac{x}{3}} 27 \geq \left(1 + \frac{2}{1 - \log_3 x}\right) \log_{\frac{x}{27}}$ 9. Найдите наименьшее целое

решение.

9. $\sqrt{1 - \left(\log_{\frac{1}{2}} x\right)^2} > 1 - 4 \log_{\frac{1}{8}} x.$

10. $\frac{3}{\log_3 x - 1} + \frac{2}{\log_3 \frac{x}{27}} \left(\frac{1}{\log_3 x - 1} - 1\right) \geq 0.$

11. $\log_{\frac{1}{3}} (\log_4 (x^2 - 5)) > 0.$

12. $\log_3 \log_{\frac{1}{16}} (x^2 - 4x + 3) \leq 0.$

13. $\log_2 \log_3 \frac{x-1}{x+1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-1}.$

14. $\log_4 (18 - 2^x) \cdot \log_2 \left(\frac{18 - 2^x}{8}\right) \leq -1.$ Найдите наибольшее целое

решение.

15. $3 \log_{10} (x^2 + 6x - 16) \leq 4 + \log_{10} \frac{(x-2)^3}{x+8}.$ Найдите наименьшее

целое решение.

16. $\sqrt{\log_{0,5} (x^2 - 4x + 19,25)} < 1.$ Укажите количество целых решений.

17. $\frac{\log_3 (16 + 3^{2x+1} - 16 \cdot 3^x)}{x+1} \leq 1.$ Найдите наибольшее целое отрица-

тельное решение.

18. $\frac{\log_3 (2x+3)}{\log_9 (x^2 - 2x + 1)} \leq \frac{\log_3 (1-x)}{\log_3 (2x+3)}.$

19. $\log_{\frac{1}{3}} \log_4 \frac{x^2 - |x+1| - 13}{x+4} > 0.$ Найдите наибольшее целое решение.

20. $\frac{(|2x+1| - x - 2) \left(\log_{\frac{1}{3}} (x+4) + 1\right)}{2^{x^2+1} - 2^{|x|}} \geq 0.$ Найдите сумму целых

решений.

§ 12. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМ ОСНОВАНИЕМ

При решении логарифмических неравенств будем пользоваться следующими свойствами:

1. При всех допустимых значениях a , b и c , таких, что $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ и $c > 0$, справедливы утверждения:

- 1) неравенства $\log_a b > \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) > 0$ равносильны;
- 2) неравенства $\log_a b \geq \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) \geq 0$ равносильны;
- 3) неравенства $\log_a b < \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) < 0$ равносильны;
- 4) неравенства $\log_a b \leq \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) \leq 0$ равносильны.

2.

1) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d > 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) > 0$ равносильны;

2) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d \geq 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) \geq 0$ равносильны;

3) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d < 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) < 0$ равносильны;

4) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d \leq 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) \leq 0$ равносильны.

3.

1) неравенства $\log_a b - \log_c b > 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) > 0$ равносильны;

2) неравенства $\log_a b - \log_c b \geq 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) \geq 0$ равносильны;

3) неравенства $\log_a b - \log_c b < 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) < 0$ равносильны;

4) неравенства $\log_a b - \log_c b \leq 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) \leq 0$ равносильны.

Примеры с решениями

Пример 1. Решите неравенство

$$\log_{6-x}(6+x-5x^2) \leq 1.$$

Решение.

Запишем неравенство в виде

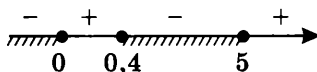
$$\log_{6-x}(6+x-5x^2) - \log_{6-x}(6-x) \leq 0. \quad (1)$$

Теперь к неравенству (1) применим метод рационализации, учитывая ОДЗ:

$$\begin{cases} (6-x-1)(6+x-5x^2-6+x) \leq 0, \\ 6+x-5x^2 > 0, \\ 6-x > 0, \\ 6-x \neq 1, \end{cases} \quad \text{или}$$

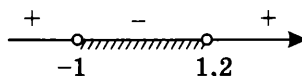
$$\begin{cases} (x-5)(5x^2-2x) \leq 0, \\ 5x^2-x-6 < 0, \\ x < 6, \\ x \neq 5; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x(x-5)(5x-2) \leq 0, \\ (x+1)(5x-6) < 0, \\ x < 6, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

1) $x(x-5)(5x-2) \leq 0$; $x_1 = 0$; $x_2 = 5$; $x_3 = 0,4$.



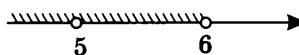
$$x \in (-\infty; 0] \cup [0,4; 5].$$

2) $(x+1)(5x-6) < 0$, $x_1 = -1$; $x_2 = 1,2$.



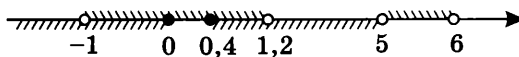
$$x \in (-1; 1,2).$$

3) $x < 6$; $x \neq 5$.



$$x \in (-\infty; 5) \cup (5; 6).$$

Остается найти пересечение полученных множеств:



$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0] \cup [0,4; 1,2) \cup (1,2; 5).$$

Ответ: $(-1; 0] \cup [0,4; 1,2)$.

Пример 2. Решите неравенство $\log_{2x+3} x^2 < 1$. Найдите наибольшее целое решение.

Решение.

Запишем данное неравенство в виде

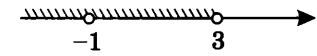
$$\log_{2x+3} x^2 - \log_{2x+3} (2x+3) < 0. \quad (1)$$

Неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} (2x+3-1)(x^2-2x-3) < 0, \\ 2x+3 > 0, \\ 2x+3 \neq 1, \\ x \neq 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x+1)(x-3)(x+1) < 0, \\ x > -1,5, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad (2)$$

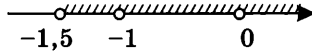
$$\begin{cases} (x+1)^2(x-3) < 0, \\ x > -1,5, \\ x \neq -1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

1) $(x+1)^2(x-3) < 0, x \neq -1; x < 3.$



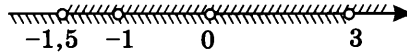
$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 3).$$

2)



$$x \in (-1,5; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty).$$

Тогда решением системы (2), а значит, и исходного неравенства, будет пересечение полученных множеств:



$$x \in (-1,5; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3).$$

Значит, $x = 2$ — наибольшее целое решение.

Ответ: 2.

Пример 3. Решите неравенство

$$\log_{3x}(2x^2 - 5x + 8) \leq \log_{3x}(x^2 + x).$$

Найдите сумму целых решений.

Решение.

Данное неравенство с учетом области определения логарифмической функции равносильно системе

$$\begin{cases} (3x-1)(2x^2-5x+8-x^2-x) \leq 0, \\ 3x \neq 1, \\ 3x > 0, \\ 2x^2-5x+8 > 0, \\ x^2+x > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-1)(x^2-6x+8) \leq 0, \\ x \neq \frac{1}{3}, \\ x > 0, \\ 2x^2-5x+8 > 0, \\ x(x+1) > 0. \end{cases}$$

Заметим, что $2x^2 - 5x + 8 > 0$ при всех $x \in R$, так как $D < 0$ и $a = 2 > 0$, тогда получим

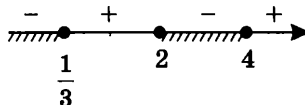
$$\begin{cases} \left(x - \frac{1}{3}\right)(x-2)(x-4) \leq 0, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}, \end{cases} \quad (1)$$

где $x(x+1) > 0$ при $x > 0$.

$$1) \left(x - \frac{1}{3}\right)(x-2)(x-4) \leq 0, \quad x_1 = \frac{1}{3};$$

$$x_2 = 2; \quad x_3 = 4.$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [2; 4].$$

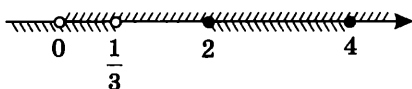


$$2) \quad x > 0, \quad x \neq \frac{1}{3}.$$

$$x \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right).$$



Тогда решением системы (1), а значит, и данного неравенства, будет пересечение полученных множеств:



$$x \in \left(0; \frac{1}{3}\right) \cup [2; 4].$$

Значит, $x = 2; 3; 4$ — целые решения, а их сумма равна $2 + 3 + 4 = 9$.

Ответ: 9.

Пример 4. Решите неравенство

$$\frac{\log_x(x-5) - \log_x(13-x)}{\log_{x-3}x} < 0.$$

Укажите количество целых решений.

Решение.

Применяя метод рационализации и учитывая ОДЗ, получим систему неравенств

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-1)(x-5-13+x)}{(x-3-1)(x-1)} < 0, \\ x > 0, \\ x-5 > 0, \\ x-3 > 0, \\ 13-x > 0; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-1)(2x-18)}{(x-4)(x-1)} < 0, \\ x > 0, \\ x > 5, \\ x > 3, \\ x < 13; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \frac{(x-1)(x-9)}{(x-4)(x-1)} < 0, \\ x > 5, \\ x < 13; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x-9}{x-4} < 0, \\ 5 < x < 13; \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 4 < x < 9, \\ 5 < x < 13, \end{array} \right.$$

откуда находим $x \in (5; 9)$, тогда целые решения $x = 6; 7; 8$, всего 3.

Ответ: 3.

Пример 5. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{x+2}\right) \log_{x-3}(x^2+2) \leq 0.$$

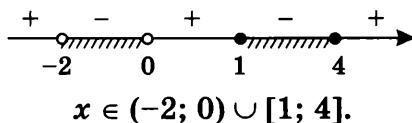
Решение.

Применяя метод рационализации, получим равносильную систему неравенств

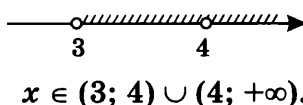
$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{x}{x+2}-1\right)(x-3-1)(x^2+2-1) \leq 0, \\ \frac{1}{x} > 0, \ x \neq 1, \\ \frac{x}{x+2} > 0, \\ x-3 > 0, \ x-3 \neq 1; \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} \frac{1-x}{x} \cdot \frac{-2}{x+2} \cdot (x-4)(x^2+1) \leq 0, \\ x > 0, x \neq 1, \\ x+2 > 0, \\ x > 3, x \neq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(x-1)(x-4)}{x(x+2)} \leq 0, \\ x > 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

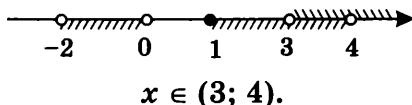
$$1) \frac{(x-1)(x-4)}{x(x+2)} \leq 0, x_1 = 1; x_2 = 4; x_3 = 0; x_4 = -2.$$



$$2) x > 3; x \neq 4.$$



Теперь найдем пересечение полученных множеств:



Ответ: (3; 4).

Пример 6. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{18}}(3x^2-2)} > \frac{1}{\log_{\frac{1}{6}}x} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}x}.$$

Найдите наименьшее целое решение.

Решение.

Используя формулу перехода от одного основания к другому, имеем

$$\log_{(3x^2-2)} \frac{1}{18} > \log_x \frac{1}{6} + \log_x \frac{1}{3}, \text{ или } \log_{(3x^2-2)} \frac{1}{18} > \log_x \frac{1}{18}, \text{ или}$$

$$\log_{(3x^2-2)} \frac{1}{18} - \log_x \frac{1}{18} > 0. \quad (1)$$

Известно, что при всех допустимых значениях a , b и c верно утверждение: неравенства $\log_a b - \log_c b > 0$ и $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) > 0$ равносильны.

Тогда неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (3x^2 - 2 - 1)\left(\frac{1}{18} - 1\right)(x-1)(x-(3x^2-2)) > 0, \\ 3x^2 - 2 > 0, \\ x > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3(x-1)^2(x+1)(3x^2-x-2) > 0, \\ 3x^2 - 2 > 0, \\ x > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Так как $3x^2 - x - 2 = (x-1)(3x+2)$ и $3x^2 - 2 = (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x + \sqrt{2})$, то система (1) примет вид

$$\begin{cases} (x-1)^3(x+1)(3x+2) > 0, \\ (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x + \sqrt{2}) > 0, \\ x > 0. \end{cases}$$

Так как $x > 0$, то получим

$$\begin{cases} (x-1)^3 > 0, \\ \sqrt{3}x - \sqrt{2} > 0, \text{ или} \\ x > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ x > \frac{\sqrt{6}}{3}, \\ x > 0, \end{cases} \quad \text{откуда находим } x > 1.$$

Тогда $x = 2$ — наименьшее целое решение исходного неравенства.

Ответ: 2.

Пример 7. Решите неравенство $\log_{\frac{x-2}{|2x-5|}}(x-2) \leq 2$.

Решение.

Поскольку $2 = \log_{\frac{x-2}{|2x-5|}}\left(\frac{x-2}{|2x-5|}\right)^2 \leq 0$, то неравенство запишется в

виде

$$\log_{\frac{x-2}{|2x-5|}}(x-2) - \log_{\frac{x-2}{|2x-5|}}\left(\frac{x-2}{|2x-5|}\right)^2 \leq 0. \quad (1)$$

Применив к неравенству (1) метод рационализации, получим

$$\begin{cases} \left(\frac{x-2}{|2x-5|} - 1 \right) \left(x - 2 - \left(\frac{x-2}{|2x-5|} \right)^2 \right) \leq 0, \\ \frac{x-2}{|2x-5|} > 0, \\ \frac{x-2}{|2x-5|} \neq 1, \\ x-2 > 0, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} (x-2-|2x-5|)(x-2)((2x-5)^2 - (x-2)) \leq 0, \\ |2x-5| \neq 0, \\ x-2 > 0, \\ |2x-5| - (x-2) \neq 0, \end{cases} \quad \text{или}$$

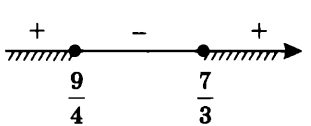
$$\begin{cases} (|2x-5| - (x-2))(4x^2 - 20x + 25 - x + 2) \geq 0, \\ x \neq 2,5, \\ x > 2, \\ (2x-5-x+2)(2x-5+x-2) \neq 0, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} (2x-5-x+2)(2x-5+x-2)(4x^2 - 21x + 27) \geq 0, \\ x \neq 2,5, \\ x > 2, \\ (x-3)(3x-7) \neq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Но $4x^2 - 21x + 27 = (x-3)(4x-9)$, где $x_1 = 3$; $x_2 = \frac{9}{4}$ — корни квадратного трехчлена. В этом случае система (2) после преобразований запишется в виде

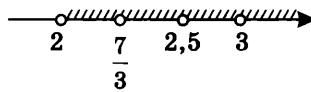
$$\begin{cases} (x-3)^2(3x-7)(4x-9) \geq 0, \\ x \neq 2,5, \\ x > 2, \\ x \neq 3; x \neq \frac{7}{3}. \end{cases} \quad \begin{cases} (3x-7)(4x-9) \geq 0, \\ x \neq 2,5, \\ x > 2, \\ x \neq 3; x \neq \frac{7}{3}. \end{cases} \quad (3)$$

$$1) x_1 = \frac{7}{3}, x_2 = \frac{9}{4}.$$



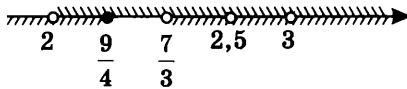
$$x \in \left(-\infty; \frac{9}{4}\right] \cup \left[\frac{7}{3}; +\infty\right).$$

$$2) x \neq 2,5; x > 2, x \neq 3, x \neq \frac{7}{3}.$$



$$x \in \left(2; \frac{7}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{3}; 2,5\right) \cup (2,5; 3).$$

Тогда решением системы (3), а значит, и исходного неравенства, будет пересечение полученных множеств:



Ответ: $\left(2; \frac{9}{4}\right] \cup \left(\frac{7}{3}; 2,5\right) \cup (2,5; 3) \cup (3; +\infty).$

Пример 8. Решите неравенство $\log_{|x-2|} \frac{1}{3} < \log_{|x-4|} \frac{1}{3}.$

Решение.

Приведем логарифмы к основанию $\frac{1}{3}$, используя формулу перехода

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}:$$

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} |x-2|} - \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} |x-4|} < 0, \text{ или } \frac{\log_{\frac{1}{3}} |x-4| - \log_{\frac{1}{3}} |x-2|}{\log_{\frac{1}{3}} |x-2| \cdot \log_{\frac{1}{3}} |x-4|} < 0. \quad (1)$$

Неравенство (1) равносильно системе неравенств

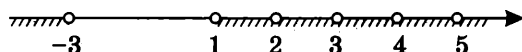
$$\begin{cases} \frac{\left(\frac{1}{3} - 1\right)(|x-4| - |x-2|)}{\left(\frac{1}{3} - 1\right)(|x-2| - 1) \cdot \left(\frac{1}{3} - 1\right)(|x-4| - 1)} < 0, & \text{или} & \begin{cases} \frac{(x-4)^2 - (x-2)^2}{((x-2)^2 - 1)((x-4)^2 - 1)} > 0, \\ x \neq 2, x \neq 4. \end{cases} \\ |x-2| > 0, |x-4| > 0, \end{cases}$$

К числителю и знаменателю дроби применим формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, тогда получим

$$\begin{cases} \frac{(x-4-x+2)(x-4+x-2)}{(x-2-1)(x-2+1)(x-4-1)(x-4+1)} > 0, \\ x \neq 2, x \neq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{-2(2x-6)}{(x-3)^2(x-1)(x-5)} > 0, \\ x \neq 2, x \neq 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x+3}{(x-3)^2(x-1)(x-5)} < 0, \\ x \neq 2, x \neq 4. \end{cases} \quad (2)$$

Решим неравенство (2) методом интервалов, учитывая ограничения:



Ответ: $(-\infty; -3) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; 4) \cup (4; 5)$.

Пример 9. Решите неравенство $\log_{x-2}(x^3 - 12x^2 + 50x - 67) - \log_{x-2}(x - 3) \leq \log_{x-2}(9 - x)$.

Найдите сумму целых решений.

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\log_{x-2}(x^3 - 12x^2 + 50x - 67) \leq \log_{x-2}(x - 3) + \log_{x-2}(9 - x), \text{ или}$$

$$\log_{x-2}(x^3 - 12x^2 + 50x - 67) \leq \log_{x-2}(x - 3)(9 - x). \quad (1)$$

Неравенство (1) с учетом ОДЗ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x-3)(x^3 - 12x^2 + 50x - 67 - (x-3)(9-x)) \leq 0, \\ x^3 - 12x^2 + 50x - 67 > 0, \\ x-3 > 0, \\ 9-x > 0, \\ x-2 > 0; x-2 \neq 1, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x^3 - 12x^2 + 50x - 67 - 9x + 27 + x^2 - 3x) \leq 0, \\ x > 3, \\ x < 9, \\ x > 2; x \neq 3, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x^3 - 11x^2 + 38x - 40) \leq 0, \\ x < 9, \\ x > 3. \end{cases} \quad (2)$$

Упростим многочлен $x^3 - 11x^2 + 38x - 40$, разложив его на множители.

Заметим, что $x = 4$ — корень многочлена, тогда получим

$$x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = x^2(x - 4) - 7x(x - 4) + 10(x - 4) = (x - 4)(x^2 - 7x + 10).$$

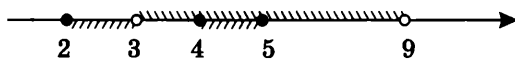
Но $x^2 - 7x + 10 = (x - 2)(x - 5)$, значит,

$$x^3 - 11x^2 + 38x - 40 = (x - 4)(x - 2)(x - 5).$$

В этом случае система (2) примет вид

$$\begin{cases} (x - 3)(x - 4)(x - 2)(x - 5) \leq 0, \\ x \in (3; 9). \end{cases} \quad (3)$$

Решая неравенство системы (3) методом интервалов и учитывая, что $3 < x < 9$, получим



$$x \in [4; 5].$$

Тогда сумма целых решений исходного неравенства — $4 + 5 = 9$.

Ответ: 9.

Пример 10. Решите неравенство

$$\frac{5^{3(x+1)} - 2^{\sqrt{9x^2 - 6x + 1} \cdot \log_{\sqrt{2}} 5}}{\log_{x^2} (3x + 2) - \log_{|x|} (3x + 1)} \leq 0.$$

Решение.

Так как $2^{\sqrt{9x^2 - 6x + 1} \cdot \log_{\sqrt{2}} 5} = 2^{\sqrt{(3x-1)^2} \cdot \log_{\sqrt{2}} 5} = 2^{|3x-1| \cdot \log_2 5^2} = 2^{\log_2 5^{2|3x-1|}} = 5^{2|3x-1|}$, то неравенство примет вид

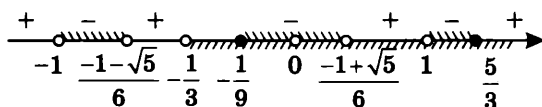
$$\frac{5^{3(x+1)} - 5^{2|3x-1|}}{\log_{|x|} \sqrt{3x+2} - \log_{|x|} (3x+1)} \leq 0. \quad (1)$$

Теперь к неравенству (1) применим метод рационализации, учитывая ОДЗ:

$$\begin{cases} \frac{(5-1)(3(x+1)-2|3x-1|)}{(|x|-1)(\sqrt{3x+2}-(3x+1))} \leq 0, \\ 3x+2 > 0, \\ 3x+1 > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{(3x+3-6x+2)(3x+3+6x-2)}{(x-1)(x+1)(3x+2-(3x+1)^2)} \leq 0, \\ x \neq 0; x \neq \pm 1, \\ x > -\frac{2}{3}, \\ x > -\frac{1}{3}, \end{cases}$$

$$\text{или} \begin{cases} \frac{(3x-5)(9x+1)}{(x-1)(x+1)(9x^2+3x-1)} \leq 0, \\ x \neq 0, \\ x > -\frac{1}{3}. \end{cases} \quad (2)$$

Так как $9x^2 + 3x - 1 = 9(x - x_1)(x - x_2)$, где $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{6} \approx -0,5$; $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{6} \approx 0,2$, то, решив дробно-рациональное неравенство системы (2), учитывая условия $x \neq 0$, $x > -\frac{1}{3}$, получим



$$x \in \left[-\frac{1}{9}; 0\right) \cup \left(0; \frac{-1+\sqrt{5}}{6}\right) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right].$$

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{1}{9}; 0\right) \cup \left(0; \frac{-1+\sqrt{5}}{6}\right) \cup \left(1; \frac{5}{3}\right].$$

Пример 11. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(x^4 - 6x^3 + 9x^2) + \log_3(8x^2 - 24x - 16)}{x^2 - 3x - 7} \geq 0.$$

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\frac{\log_3(x^2 - 3x) - \log_3(8(x^2 - 3x) - 16)}{(x^2 - 3x) - 7} \geq 0, \text{ или,}$$

обозначив $x^2 - 3x = y$, получим

$$\frac{\log_3 y^2 - \log_3(8y - 16)}{y - 7} \geq 0. \quad (1)$$

Применив к неравенству (1) метод рационализации, имеем равносильную систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{y^2 - 8y + 16}{y - 7} \geq 0, \\ 8y - 16 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{(y-4)^2}{y-7} \geq 0, \\ y > 2, \end{cases}$$

откуда находим $y = 4$; $y > 7$.

Учитывая подстановку $x^2 - 3x = y$, получим уравнение и неравенство:

$$1) x^2 - 3x = 4, \text{ или } x^2 - 3x - 4 = 0, \text{ откуда } x_1 = 4; x_2 = -1;$$

$$2) x^2 - 3x - 7 > 0, x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}, \text{ тогда } x < \frac{3 - \sqrt{37}}{2}; x > \frac{3 + \sqrt{37}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{3 - \sqrt{37}}{2}\right) \cup \{-1; 4\} \cup \left(\frac{3 + \sqrt{37}}{2}; +\infty\right).$$

Пример 12. Решите неравенство

$$\log_{x-3} 7 + \log_{x+3} 7 \geq \log_{x-3} 7 \cdot \log_{x+3} 7.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-3 > 0, \\ x-3 \neq 1, \\ x+3 > 0, \\ x+3 \neq 1, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x > 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Значит, $x \in (3; 4) \cup (4; +\infty)$.

Поскольку у логарифмов числа одинаковы, то целесообразно привести все логарифмы к основанию 7:

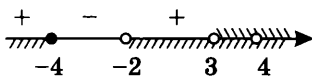
$$\frac{1}{\log_7(x-3)} + \frac{1}{\log_7(x+3)} \geq \frac{1}{\log_7(x-3)\log_7(x+3)}, \text{ или}$$

$$\frac{\log_7(x^2 - 9)}{\log_7(x-3)\log_7(x+3)} \geq \frac{1}{\log_7(x-3)\log_7(x+3)}, \text{ или}$$

$$\frac{\log_7 \frac{x^2 - 9}{7}}{\log_7(x-3)\log_7(x+3)} \geq 0.$$

При такой форме записи заменим каждый логарифм на равносильное по знаку выражение, учитывая ОДЗ:

$$\frac{(7-1)(x^2-16)}{(7-1)(x-4)(7-1)(x+2)} \geq 0, \text{ или } \frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+2)} \geq 0, \text{ или } \frac{x+4}{x+2} \geq 0, x \neq 4.$$



$$x \in (3; 4) \cup (4; +\infty).$$

Ответ: $(3; 4) \cup (4; +\infty)$.

Пример 13. Решите неравенство

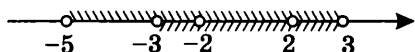
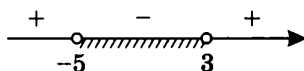
$$\log_{\frac{5}{9-x^2}} \left(\frac{2}{15-2x-x^2} \right) > 1.$$

Найдите сумму целых решений.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} \frac{2}{15-2x-x^2} > 0, \\ \frac{5}{9-x^2} > 0, \\ \frac{5}{9-x^2} \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2x - 15 < 0, \\ x^2 - 9 > 0, \\ x \neq \pm 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+5)(x-3) < 0, \\ (x-3)(x+3) > 0, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$



$$\text{ОДЗ: } x \in (-3; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; 3).$$

Запишем исходное неравенство в виде

$$\log_{\frac{5}{9-x^2}} \left(\frac{2}{15-2x-x^2} \right) - 1 > 0. \quad (1)$$

Неравенство (1) равносильно неравенству

$$\left(\frac{5}{9-x^2} - 1 \right) \left(\frac{2}{15-2x-x^2} - \frac{5}{9-x^2} \right) > 0, \quad \frac{x^2-4}{9-x^2} \cdot \frac{3x^2+10x-57}{(15-2x-x^2)(9-x^2)} > 0,$$

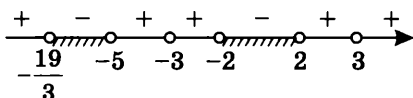
$$\frac{(x-2)(x+2)(3x^2+10x-57)}{(x-3)^2(x+3)^2(x^2+2x-15)} < 0. \quad (2)$$

$$\text{Но } 3x^2 + 10x - 57 = 3(x-3) \left(x + \frac{19}{3} \right), \quad x^2 + 2x - 15 = (x+5)(x-3),$$

тогда неравенство (2) примет вид

$$\frac{(x-2)(x+2) \cdot 3(x-3) \left(x + \frac{19}{3} \right)}{(x-3)^2(x+3)^2(x+5)(x-3)} < 0, \quad \text{или} \quad \frac{(x-2)(x+2) \left(x + \frac{19}{3} \right)}{(x-3)^2(x+3)^2(x+5)} < 0. \quad (3)$$

Решая неравенство (3) методом интервалов, получим



Следовательно, $x \in \left(-\frac{19}{3}; -5\right) \cup (-2; 2)$.

Учитывая ОДЗ, имеем $x \in (-2; 2)$. Тогда сумма целых решений будет равна $-1 + 1 = 0$.

Ответ: 0.

Примеры для самостоятельного решения

Решите неравенства:

1. $\log_4 x - 44 + \log_{(x-1)^2} 64 \geq 2$. Найдите наибольшее целое решение.

2. $\log_x 2 + 2\log_{2x} 2 - 9\log_{4x} 2 \leq 0$.

3. $\log_{\sqrt{2x^2-11x+15}} \left(\frac{x-1}{5}\right) > 0$. Найдите наименьшее целое решение.

4. $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 16x \geq 1$.

5. $\log_{x^2-6x+8} (x-4) > 0$.

6. $\log_{x+1} (x^3 + 3x^2 + 2x) < 2$.

7. $\log_{x^2} (x^2 + x - 1) < 0$.

8. $\log_2 -x(x+2) \cdot \log_{x+3} (3-x) \leq 0$. Укажите количество целых решений.

9. $\log_{\frac{x}{3}} 27 \geq \left(1 + \frac{2}{1 - \log_3 x}\right) \log_{\frac{x}{27}} 9$.

10. $\sqrt{\log_x (5x^3)} \geq \log_x (5x)$.

11. $\log_x \frac{4x-12}{x-4} \leq 1$. Найдите наименьшее целое решение.

12. $\log_{\frac{x}{6}} (\log_x \sqrt{6-x}) > 0$. Найдите сумму целых решений.

13. $\log_{x-2} 0,2 \geq \log_{x^2-8x+15} 1$.

14. $\sqrt{\log_x (2x^5)} \geq \log_x \left(\frac{2}{x}\right)$.

15. $\log_{|x-4|} (x^2 - 4x) \leq 0$.

16. $\log_{12x-4x^2-8} |4x-5| > 0$.

$$17. \log_{|x-4|}(2x^2 - 9x + 4) \geq 1.$$

$$18. \log_{x^2} \frac{2x}{|x-3|} \leq \frac{1}{2}. \text{ Найдите наименьшее целое решение.}$$

$$19. \log_{\frac{25-x^2}{16}} \left(\frac{24-2x-x^2}{14} \right) > 1. \text{ Укажите количество целых решений.}$$

$$20. \log_x \frac{4x+1}{6(x-1)} < 0.$$

$$21. \log_{x^2-1}(3x-1) < \log_{x^2-1} x^2.$$

$$22. \log x \log 2(4x-12) \leq 1. \text{ Найдите наибольшее целое решение.}$$

$$23. \log_{2x} \left(6x + \frac{1}{7} \right) \log_{5x} \left(3x + \frac{4}{7} \right) \leq 0.$$

$$24. \log_{x+1}(x^2 + x - 6)^2 \geq 4.$$

$$25. \log_{\frac{2}{x}} \left(\frac{x-1}{x} \right) \log_{x-3}(x^2 + 4) \leq 0.$$

$$26. \frac{\log_x(x-6) - \log_x(13-x)}{\log_{x-2} x} < 0. \text{ Найдите сумму целых решений.}$$

$$27. \log_{2x-10}(\sqrt{x-2} - \sqrt{8-x}) < 1. \text{ Найдите наибольшее целое решение.}$$

$$28. \log_{2x^2-x} \sqrt{2-x^2} < \log_{2x^2-x}(|x+2| - |x|).$$

$$29. 2\log_{2x-8}(\sqrt{x+3} - \sqrt{-x+7}) < 1.$$

$$30. \log_{\frac{x+4}{2}} \log_2 \frac{2x-1}{x+3} \leq 0. \text{ Найдите наименьшее целое решение.}$$

$$31. \log_{|x|}|x+2| \cdot \log_{|x|}|x+4| \leq 0. \text{ Найдите сумму наименьшего и наибольшего целых решений.}$$

$$32. \log_{x^2} \frac{|5x-1|}{2x-1} \leq \frac{1}{2}.$$

$$33. \log_{|x|} \frac{|x+3| - |x|}{2-x} > 1.$$

$$34. \log_{\sqrt{x}} \left(x - \frac{1}{2} \right) \leq 1.$$

$$35. \frac{\log_3(x-1)^3 - \log_4(x-1)^4}{(x-1)(x-3)} \leq 0. \text{ Найдите наименьшее целое решение.}$$

$$36. \log_{(x-2)^2} \frac{\sqrt{x^3-3,5}}{\sqrt{x-2}} \geq \frac{1}{2}.$$

$$37. \log_{\frac{3|x-2|}{4}} 5^{x^2-1} \leq 0. \text{ Найдите наибольшее целое решение.}$$

$$38. \log_{\frac{3x}{x^2+1}} (x^2 - 2,5x + 1) \geq 0.$$

$$39. \log_{2\sin x} 16 + \log_2(\sin x) \leq 3.$$

$$40. (\log_{\cos x} 2)^2 < \log_{\cos x} (4 \cos^3 x).$$

ОТВЕТЫ

§ 1. Тригонометрические уравнения

1. а) $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; 3\pi; \frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3}$. 2. а) $\pi n, \frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}; -\frac{11\pi}{6}; -2\pi$. 3. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}$. 4. а) $\frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3}; 2\pi$. 5. $\pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 6. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, \arctg \frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}; \arctg \frac{1}{2} + 2\pi$. 7. а) $2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) -2π . 8. а) $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}$. 9. а) $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) -3π . 10. а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$. 11. а) $-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}; \frac{11\pi}{6}; \frac{17\pi}{6}$. 12. а) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}$. 13. $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 14. а) $\pi + 12\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) 3π . 15. а) $\pi n, \frac{\pi}{3} + \pi n, \frac{2\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{3}; \frac{13\pi}{3}; 4\pi$. 16. а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}$. 17. а) $\pi n, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $-4\pi; -3\pi; -\frac{10\pi}{3}; -\frac{8\pi}{3}$. 18. $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 19. а) $\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{6}$. 20. а) $\frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{4\pi}{3}; 2\pi$. 21. $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 22. $\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 23. а) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4}$. 24. а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}$. 25. а) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{8}; \frac{11\pi}{8}$. 26. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{5\pi}{4}; \frac{5\pi}{2}$. 27. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pm \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi n,$

- $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{2}$; $\pi - \arccos \frac{1}{4}$; $\pi + \arccos \frac{1}{4}$. **28.** а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$. **29.** а) πn , $\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) 2π ; 3π ; $\frac{13\pi}{6}$.
30. а) $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$; $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{\pi}{16}$; $\frac{3\pi}{16}$; $\frac{\pi}{4}$. **31.** а) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$,
 $\pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{19\pi}{6}$; $-\frac{17\pi}{6}$; $-\frac{13\pi}{6}$. **32.** а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 б) $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$. **33.** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{4}$. **34.** $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$. **35.** а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{5\pi}{4}$. **36.** а) $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$,
 $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$. **37.** а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{17\pi}{6}$. **38.** а) πn ,
 $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$; б) 2π ; 3π ; $\frac{7\pi}{2}$. **39.** а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $-\arccos \frac{5}{13} +$
 $+ 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{3}$; $-2\pi - \arccos \frac{5}{13}$. **40.** а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;
 б) $-\frac{5\pi}{4}$.

§ 2. Рациональные уравнения

- 1.** а) -2 ; -4 ; б) -2 . **2.** а) 1 ; 2 ; $\frac{\sqrt{5}}{4}(\sqrt{5} \pm 1)$; б) 2 ; $\frac{\sqrt{5}}{4}(\sqrt{5} \pm 1)$. **3.** а) ± 1 ;
 3 ; 5 ; б) ± 1 . **4.** а) -2 ; -3 ; б) -2 . **5.** а) $3 \pm \sqrt{39}$; $5 \pm \sqrt{55}$; б) $5 + \sqrt{55}$.
6. а) 2 ; $-1 \pm \sqrt{3}$; б) $-1 + \sqrt{3}$. **7.** а) $-2,5$; 5 ; б) $-2,5$. **8.** а) $-1,5$; -1 ; 3 ;
 $4,5$; б) 3 ; $4,5$. **9.** а) $2 \pm \sqrt{5}$; $\frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{13})$; б) $2 + \sqrt{5}$. **10.** а) 0 ; 77 ; $\frac{2977}{77}$;
 б) 0 ; 77 . **11.** а) $-\frac{1}{2}$; 1 ; б) 1 . **12.** а) -8 ; -4 ; -2 ; -1 ; б) -1 . **13.** а) -1 ;
 б) -1 . **14.** а) -1 ; $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. **15.** а) ± 1 ; 3 ; 5 ; б) 3 .

§ 3. Иррациональные уравнения

1. а) -2 ; б) -2 . 2. а) 9; б) 9. 3. а) -2 ; -1 ; б) -2 . 4. а) 6; б) 6.
 5. а) 1; б) 1. 6. а) $3 \pm \sqrt{10}$; б) $3 - \sqrt{10}$. 7. а) 16; 96; б) 16. 8. а) 3; б) 3.
 9. а) $[5; 8]$; б) $[5; 8]$. 10. а) 6; б) 6. 11. а) -4 ; 2; б) -4 . 12. а) -3 ; б) 3.
 13. а) 0; 5; б) 5. 14. а) $1 + \sqrt{8}$; б) $1 + \sqrt{8}$. 15. а) 7; 8; б) 7. 16. а) $[1; 2]$;
 б) $[1; 2]$. 17. а) ± 2 ; б) 2. 18. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. 19. а) 0; $\frac{1}{2}(\sqrt{33} - 3)$; б) 0;
 $\frac{1}{2}(\sqrt{33} - 3)$. 20. а) 4; б) 4.

§ 4. Логарифмические и показательные уравнения

1. а) 1; б) 1. 2. а) 4; б) 4. 3. а) 2; $\log_3 \frac{2}{3}$; б) 2. 4. а) -2 ; 3; б) -2 .
 5. а) -1 ; 1; б) -1 . 6. а) -2 ; 2; б) 2. 7. а) 3; б) 3. 8. а) -1 ; б) -1 . 9. а) 15;
 б) 15. 10. а) 4; б) 4. 11. а) $\frac{1}{8}$; 4; б) 4. 12. а) 1; 5,5; б) 5,5. 13. а) $-\frac{1}{3}$; 4;
 б) $-\frac{1}{3}$. 14. а) 0,1; 1; б) 1. 15. а) 1; 27; б) 27. 16. а) $\frac{1}{2}(\sqrt{17} - 3)$;
 б) $\frac{1}{2}(\sqrt{17} - 3)$. 17. а) 1; 1,5; б) 1. 18. а) -2 ; -1 ; б) -1 . 19. а) $\log_{\frac{3}{2}} 3$;
 $\log_{\frac{3}{2}} 4$; б) $\log_{\frac{3}{2}} 3$. 20. а) $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; б) $\frac{1}{2}$.

§ 5. Рациональные неравенства

1. Нет решений. 2. Нет решений. 3. -4 . 4. -2 . 5. 1. 6. 1. 7. -2 .
 8. -1 . 9. -1 . 10. 0. 11. -3 . 12. -6 . 13. 0. 14. 0. 15. 7. 16. -2 . 17. -3 .
 18. -2 . 19. 5. 20. 10. 21. 1. 22. 4. 23. 6. 24. 2,5. 25. 1. 26. 6. 27. 3.
 28. 0,5. 29. 3. 30. 2,5. 31. 2,5. 32. 1,75. 33. 0. 34. $-0,6$. 35. 4,5.
 36. 1. 37. 0. 38. 1,5. 39. -3 . 40. 0,5. 41. 4. 42. 1. 43. 3. 44. 1. 45. 4.
 46. 1. 47. 3. 48. 3. 49. 6. 50. 3.

§ 7. Неравенства с модулем

1. $\left[\frac{4-\sqrt{22}}{2}; \frac{27}{8}\right] \cup \left[\frac{4+\sqrt{22}}{2}; +\infty\right)$. 2. $\left(-\infty; -\frac{10}{17}\right]$. 3. $[-2; -1] \cup \{1\}$.
 4. $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right]$. 5. -1. 6. -6. 7. 3. 8. $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}; 1\right)$.
 9. 2. 10. $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right] \cup \{\pm 1\} \cup \left[\frac{5}{3}; +\infty\right)$. 11. 1. 12. 1. 13. $(-3; -2) \cup$
 $\cup \{-1\} \cup (0; 1)$. 14. 1. 15. $(-6; 0) \cup (0; 2]$. 16. 2. 17. $(0; 1) \cup (1; +\infty)$.
 18. -3. 19. 3. 20. 11.

§ 8. Иррациональные неравенства

1. $[1; 2) \cup (2+\sqrt{3}; 6]$. 2. -18. 3. 0. 4. -4. 5. -1. 6. $[1,5; 2)$. 7. $[-10; -9) \cup$
 $\cup [-8; -2] \cup (0; 3)$. 8. -5. 9. $[-3; -1]$. 10. $(-3; -2] \cup [-1; 2]$. 11. 4, 5.
 12. 6. 13. $\{-5\} \cup \left(\frac{1}{2}; 4\right) \cup (4; 8]$. 14. $(-\infty; 0,4) \cup \{3\} \cup (8; +\infty)$.
 15. $\left[\frac{121}{13}; +\infty\right)$. 16. $(-\infty; 0) \cup [1; 4] \cup [6; 7) \cup \{8\}$. 17. 3.
 18. $(2; 5-\sqrt{2}) \cup [5+\sqrt{2}; 10]$. 19. 2. 20. 2.

§ 9. Показательные неравенства с постоянным основанием

1. $(-5; -3) \cup (3; +\infty)$. 2. $(-\infty; 2) \cup (2; 3]$. 3. $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.
 4. $(-3; 0)$. 5. $(-1; +\infty)$. 6. 0. 7. 16. 8. 8. 9. 1. 10. $[-2; -1) \cup (1; 2]$.
 11. $(-\infty; -5) \cup [-3; 3) \cup (3; +\infty)$. 12. 11. 13. 2. 14. 25. 15. -1. 16. 5.
 17. $[-2; 1) \cup (1; +\infty)$. 18. $[1; 5) \cup (10; +\infty)$. 19. $(-\infty; 1) \cup (1; 2)$.
 20. -4.

§ 10. Показательные неравенства с переменным основанием

1. $(-\infty; 0) \cup (2; 3,5) \cup (4; +\infty)$. 2. $(0; +\infty)$. 3. -1 . 4. $(-2; 4)$. 5. $(-\infty; -2] \cup [2 - \sqrt{5}; 0) \cup (4; 2 + \sqrt{5})$. 6. $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$. 7. 1. 8. $[-3; -1) \cup [2; +\infty)$. 9. 2. 10. 0. 11. 3. 12. 3. 13. $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 2)$. 14. $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup (4; +\infty)$. 15. $(-\infty; -1) \cup (1; 2) \cup (2; 3) \cup (3; +\infty)$. 16. $\left(0; \frac{1}{5}\right] \cup [5; +\infty)$. 17. 5.

§ 11. Логарифмические неравенства с постоянным основанием

1. $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right) \cup (1; +\infty)$. 2. $\left(\frac{7}{6}; \frac{4}{3}\right) \cup \left[\frac{7}{3}; +\infty\right)$. 3. $[3; 4)$. 4. $\left(-\frac{4}{3}; 0\right]$. 5. 2. 6. 1. 7. 3. 8. 4. 9. $\left[\frac{1}{2}; 1\right)$. 10. $(3; 27) \cup [243; +\infty)$. 11. $(-3; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; 3)$. 12. $\left(2 - \sqrt{2}; \frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{13}{4}; 2 + \sqrt{2}\right)$. 13. $(-\infty; -2)$. 14. 4. 15. -18 . 16. 1. 17. -2 . 18. $\left(-\frac{3}{2}; \frac{-1 - \sqrt{17}}{4}\right] \cup \left(-1; -\frac{2}{3}\right] \cup \left(0; \frac{-1 + \sqrt{17}}{4}\right]$. 19. 8. 20. -5 .

§ 12. Логарифмические неравенства с переменным основанием

1. 5. 2. $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup [\sqrt[3]{2}; +\infty)$. 3. 7. 4. $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup (1; 4]$. 5. $(4; 3 + \sqrt{2}) \cup (5; +\infty)$. 6. $\left(0; \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$. 7. $\left(-2; -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$. 8. 1. 9. $(3; 27) \cup (27; +\infty)$. 10. $\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right) \cup [5; +\infty)$. 11. 2. 12. 12.

13. $(2; 4 - \sqrt{2}) \cup (4 - \sqrt{2}; 3)$. 14. $\left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right] \cup [\sqrt[4]{2}; +\infty)$.
15. $[2 - \sqrt{5}; 0) \cup [2 + \sqrt{5}; 5)$. 16. $\left(1; \frac{5}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$. 17. $(-\infty; 0] \cup (5; +\infty)$.
18. 5. 19. 3. 20. $\left(\frac{7}{2}; +\infty\right)$. 21. $(1; \sqrt{2}) \cup \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$. 22. 2.
23. $\left\{\frac{1}{7}\right\} \cup \left(\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right)$. 24. $(0; 1]$. 25. $(3; 4)$. 26. 24. 27. 8.
28. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{6} - 4}{5}\right) \cup (1; \sqrt{2})$. 29. $\left(4; \frac{9}{2}\right) \cup (5; 6)$. 30. 5. 31. -8.
32. $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left[\frac{3 + \sqrt{7}}{2}; +\infty\right)$. 33. $(-1; 2 - \sqrt{7}) \cup (1; 2)$. 34. $\left(1; 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
35. 2. 36. $(3; +\infty)$. 37. 3. 38. $\left(0; \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left[\frac{5}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)$.
39. $\left(2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.
40. $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

ЛИТЕРАТУРА

Балаян Э. Н. Алгебра. Задачи-головоломки. Прокачай свои мозги! 7–11 классы. Профильный уровень. — Ростов н/Д: Феникс, 2024.

Балаян Э. Н. Математика. Решение неравенств повышенной сложности методом рационализации. — Ростов н/Д: Феникс, 2015.

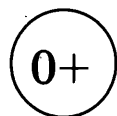
Балаян Э. Н. Научись решать уравнения различными способами. Профильный уровень. — Ростов н/Д: Феникс, 2022.

Балаян Э. Н., Каспаров Г. Л. Математика. Уравнения и неравенства. Подготовка к ЕГЭ. Профильный уровень. — Ростов н/Д: Феникс, 2020.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Уравнения.....	4
§ 1. Тригонометрические уравнения.....	4
Краткая теория и справочные материалы.....	4
Типы тригонометрических уравнений и методы их решения.....	4
Примеры с решениями.....	8
Примеры для самостоятельного решения	64
§ 2. Рациональные уравнения	67
Краткая теория и справочные материалы.....	68
Основные формулы алгебры.....	68
Примеры с решениями.....	71
Примеры для самостоятельного решения	89
§ 3. Иррациональные уравнения.....	90
Краткая теория и справочные материалы.....	90
Примеры с решениями.....	91
Примеры для самостоятельного решения	115
§ 4. Логарифмические и показательные уравнения.....	116
Краткая теория и справочные материалы.....	116
Примеры с решениями.....	118
Примеры для самостоятельного решения	131
Глава 2. Метод интервалов	133
§ 5. Рациональные неравенства	133
5.1. Простейшие неравенства, представленные в виде произведения линейных множителей	134
5.2. Простейшие неравенства, разлагающиеся на линейные множители	135
5.3. Простейшие дробно-рациональные неравенства без кратных корней	136
5.4. Неравенство, содержащее множитель, не принимающий нулевого значения на числовой прямой.....	137
5.5. Простейшие неравенства с кратными корнями	139
5.6. Рациональные неравенства.....	140
Примеры для самостоятельного решения	147

Глава 3. Метод рационализации	150
§ 6. Сущность метода рационализации (метода замены множителей)	150
6.1. Равносильность неравенств	150
6.2. Монотонность функций	151
6.3. Теорема о корне	151
§ 7. Неравенства с модулем	152
Примеры с решениями.....	152
Примеры для самостоятельного решения	166
§ 8. Иррациональные неравенства	168
Примеры с решениями.....	168
Примеры для самостоятельного решения	182
§ 9. Показательные неравенства с постоянным основанием	184
Примеры с решениями.....	184
Примеры для самостоятельного решения	196
§ 10. Показательные неравенства с переменным основанием	198
Примеры с решениями.....	198
Примеры для самостоятельного решения	205
§ 11. Логарифмические неравенства с постоянным основанием	207
Примеры с решениями.....	208
Примеры для самостоятельного решения	221
§ 12. Логарифмические неравенства с переменным основанием	223
Примеры с решениями.....	223
Примеры для самостоятельного решения	237
Ответы	240
Литература	245



Учебное издание

Балаян Эдуард Николаевич

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Разбор заданий с развернутым ответом

10–11 классы

Профильный уровень

Ответственный редактор *С. А. Осташов*

Формат 70х100/16. Бумага газетная.

Тираж 3 000 экз. Заказ № 4360-2024.

Издатель и изготовитель: ООО «Феникс».

Юр. и факт. адрес: 344011, Россия, Ростовская обл.,

г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, д. 150

Тел/факс: (863) 261-89-65, 261-89-50

Изготовлено в России. Дата изготовления: 09.2024.

Срок годности не ограничен.

Отпечатано в АО «Красная Звезда»

Юр. адрес: 125284, Россия, г. Москва, Хорошевское шоссе д. 38

Факт. адрес: 117342, Россия, г. Москва,
Севастопольский проспект, 56/40, стр. 3

ОПЫТ 

32 года
создаём книги

ЭКСПЕРТИЗА
мы знаем о книгах всё



200 000 000
экземпляров наших книг
читают по всему миру

В ТРЕНДЕ
«Феникс» всегда на волне
ваших ожиданий



свыше **700**
книжных новинок
мы выпускаем ежегодно

ЗНАНИЯ
весь опыт наших авторов
воплотился в книгах издательства



Учебная литература
Книги для профессионалов
Прикладная литература
Психология и саморазвитие
Литература для родителей и детей
Книги для дома, досуга, хобби

ВПЕЧАТЛЕНИЯ
книги для хороших людей



Классическая литература
Интеллектуальная проза
Книги для подростков
Детская художественная литература

КАЧЕСТВО
все книги издательства
соответствуют ГОСТам



Нам важна ваша
безопасность!

www.phoenixrostov.ru



ХОРОШАЯ РАБОТА



Мы предлагаем стабильный доход
от реализации книг нашего издательства.

**344011, Россия, Ростовская обл.,
г. Ростов-на-Дону,
ул. Варфоломеева, 150
(863) 261-89-53**



Вы писатель или художник?
Присылайте свои работы к нам в издательство.
Отдел редакции: **idea@fenixrostov.ru**



Вы блогер и жить не можете без книг? Вы все время
о них пишете? Мы предоставим Вам возможность
писать об интересных проектах издательства!
Отдел маркетинга: **blogger@fenixrostov.ru**

www.phoenixrostov.ru

Э. Н. Балаян

**МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ЕГЭ.
ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ. ПРОИЗВОДНАЯ
И ПЕРВООБРАЗНАЯ. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ.**

Разбор заданий с кратким ответом

10–11 классы

Профильный уровень

Предлагаемое пособие содержит три темы из первой части ЕГЭ профильного уровня с краткими ответами.

Каждая тема сопровождается подробным решением и обоснованием разнообразных примеров, встречающихся на экзамене, приводятся примеры для самостоятельного решения и ответы к ним.

Для удобства пользования пособием приводятся краткие справочные материалы по алгебре и началам анализа.

Пособие адресовано старшеклассникам и абитуриентам для самостоятельной подготовки к экзаменам, учителям математики, методистам, слушателям подготовительных отделений вузов и репетиторам.

Э. Н. Балаян

**МАТЕМАТИКА.
ПОСОБИЕ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ
И ДОПОЛНИТЕЛЬНОМУ ЭКЗАМЕНУ.**

10–11 классы.

Профильный уровень

Предлагаемое пособие написано в соответствии с ныне действующей программой по математике, содержит 10 вариантов тренировочных тестов профильного уровня, из которых вариант 1 дан с подробным решением и обоснованием, а также 200 вариантов заданий, разделенных на 3 части в порядке возрастания степени сложности.

Все разделы содержат подробные решения и обоснования наиболее сложных нечетных вариантов, причем многие задания решены различными способами, что способствует творческой активности учащихся, повышению качества знаний, необходимых при поступлении в вузы.

В заключительной части для удобства пользования книгой приводятся справочные материалы.

Пособие предназначено старшеклассникам, абитуриентам, слушателям подготовительных отделений вузов, учителям математики, репетиторам, для самообразования с целью подготовки к дополнительным экзаменам в вузы с различным уровнем требований к математической подготовке, а также для сдачи ЕГЭ по математике.

Вышли в свет

Э. Н. Балаян

МАТЕМАТИКА
РАЗБОР ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ
С АНАЛИЗОМ ТИПИЧНЫХ ОШИБОК.

10–11 классы.

Профильный уровень

Предлагаемое пособие содержит подробное решение всех заданий ЕГЭ профильного уровня с анализом типичных ошибок, допускаемых школьниками и абитуриентами. Ошибки классифицированы, указаны их причины и приведены правильные решения.

Для удобства пользования пособием приводятся краткие справочные материалы по всему курсу математики 7–11 классов.

Пособие адресовано старшеклассникам и абитуриентам для эффективной подготовки и успешной сдачи экзамена, а также учителям математики, методистам, слушателям подготовительных отделений вузов и репетиторам.

Э. Н. Балаян

**МАТЕМАТИКА.
РАЗБОР ЗАДАНИЙ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ОГЭ
С АНАЛИЗОМ ТИПИЧНЫХ ОШИБОК.
7–9 классы**

В предлагаемом пособии приводятся решения всех заданий ОГЭ по математике.

На многочисленных примерах с подробными решениями и обоснованиями показаны различные способы решения задач, что имеет бо льшее значение для математического развития учащихся, чем решение многих задач, но одним и тем же способом.

В пособии классифицированы типичные ошибки, допускаемые школьниками, указаны причины таких ошибок и приведены правильные решения.

Рассмотрены ошибки (в том числе вычислительные) в тождественных преобразованиях, при решении различных типов уравнений, неравенств, при исследовании функций, их свойств и построении графиков.

Упражнения для самостоятельного решения отмечены темными кружочками перед каждым номером, что позволяет закрепить усвоенный материал и ликвидировать пробелы в знаниях.

Для удобства пользования пособием приводятся краткие справочные материалы по курсу математики 7–9 классов.

Пособие адресовано учащимся 7–9 классов для подготовки к ОГЭ, учителям математики и репетиторам.

Э. Н. Балаян

**МАТЕМАТИКА. ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ.
5–7 классы**

В предлагаемом пособии рассмотрены основные методы и приемы решения олимпиадных задач разного уровня сложности для учащихся 5–7 классов.

Пособие содержит 750 задач, разбитых на 50 вариантов по каждому классу. Каждый вариант содержит 5 задач по различным темам.

Задачи, представленные в книге, посвящены таким уже ставшим классическими темам, как делимость и остатки, инварианты, диофантовы уравнения, принцип Дирихле, решение уравнений в целых числах, построение графиков функций и т. п.

Ко всем задачам даны ответы и указания, а к наиболее трудным — решения. Большинство задач авторские.

В заключительной части книги приводятся занимательные задачи творческого характера, посвященные числам и числовым закономерностям, вызывающие повышенный интерес не только у школьников, но и у преподавателей.

Пособие адресовано учащимся 5–7 классов для подготовки к олимпиадам различного уровня, учителям математики, студентам педвузов, репетиторам.

Э. Н. Балаян

**МАТЕМАТИКА.
ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ.
8–9 классы**

В предлагаемом пособии рассмотрены основные методы и приемы решения олимпиадных задач разного уровня сложности для учащихся 8–9 классов.

Пособие содержит 650 задач, разбитых на 65 вариантов по каждому классу. Каждый вариант содержит 5 задач по различным темам.

Задачи, представленные в книге, посвящены таким уже ставшим классическими темам, как делимость и остатки, инварианты, диофантовы уравнения, принцип Дирихле, тригонометрические уравнения, линейные и нелинейные системы с параметром и т. п.

Ко всем задачам даны ответы и указания, а к наиболее трудным — решения, причем некоторые задачи решены различными способами.

Большинство задач авторские.

В заключительной части книги приводятся занимательные задачи творческого характера, связанные с числовыми закономерностями. Эти задачи вызывают повышенный интерес не только у школьников, но и у преподавателей.

Пособие адресовано учащимся 8–9 классов для подготовки к олимпиадам различного уровня, учителям математики, студентам педвузов, репетиторам.