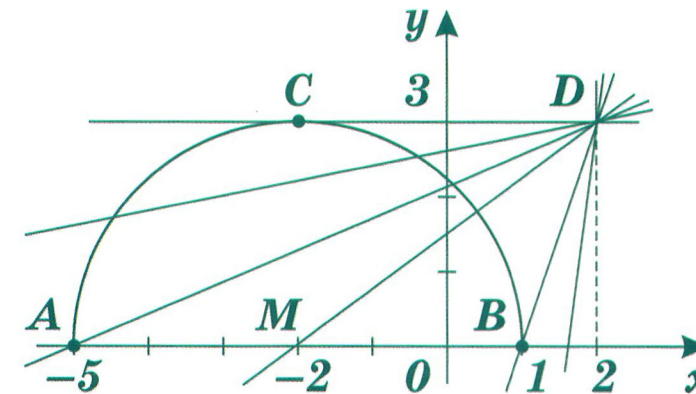


Математика Подготовка к ЕГЭ

Задачи с параметром. Числа и их свойства

РАЗБОР ЗАДАНИЙ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ

$$ax + \sqrt{5 - 4 - x^2} = 2a + 3$$

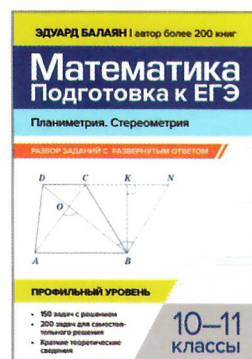
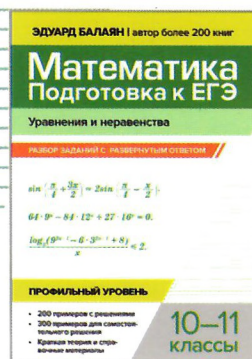
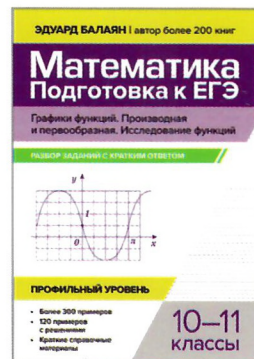
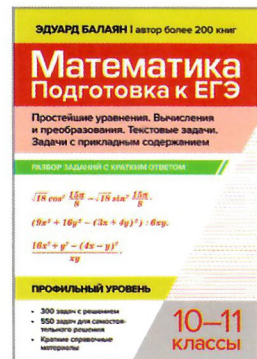


ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

- 200 задач с решением
- Подготовка к олимпиадам
- Краткая теория и справочные материалы

10–11
классы

Предлагаемая мини-серия состоит из пособий, содержащих разбор заданий с кратким и развернутым ответами, предназначенных для подготовки к ЕГЭ. Каждое из пособий представляет тему или комплект тем, соответствующих профильному уровню. Каждая тема сопровождается краткой теорией, справочными материалами, образцами разнообразных примеров с подробными решениями и обоснованиями. В каждой теме приводятся примеры для самостоятельного решения, а в конце пособия — ответы для контроля правильности решения. Пособия предназначены старшеклассникам для эффективной подготовки и успешной сдачи экзамена, учителям математики и репетиторам.



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФЕНИКС
ХОРОШИЕ КНИГИ



Э. Н. Балаян

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ.
ЧИСЛА И ИХ СВОЙСТВА

Разбор заданий с развернутым ответом

10–11 классы

Профильный уровень

- ◆ 200 задач с решениями
- ◆ Подготовка к олимпиадам
- ◆ Краткая теория
и справочные материалы

Ростов-на-Дону

 **еникс**
2025

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я72

КТК 444

Б20

Балаян Э. Н.

Б20 Математика. Подготовка к ЕГЭ. Задачи с параметром. Числа и их свойства : разбор заданий с развернутым ответом : 10–11 классы : профильный уровень / Э. Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2025. — 189 с. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-42896-2

В предлагаемом пособии представлен обширный материал, посвященный двум заключительным и сложным темам ЕГЭ профильного уровня: задачам с параметрами и числам и их свойствам.

На многочисленных примерах с подробными решениями и обоснованиями (как и требуется на экзамене) показаны различные методы и решения задач.

Для удобства пользования книгой приводятся справочные материалы и краткая теория к каждой теме, а в конце каждого параграфа — задачи для самостоятельного решения. Ответы к ним помещены в конце книги.

Пособие предназначено для выпускников и старшеклассников общеобразовательных школ, абитуриентов, слушателей подготовительных отделений вузов, методистов и репетиторов.

УДК 373.167.1:51

ISBN 978-5-222-42896-2

ББК 22.1я72

© Балаян Э. Н., 2024

© Оформление: ООО «Феникс», 2024

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое вниманию старшеклассников и учителей математики пособие продолжает серию из нескольких книг для подготовки к ЕГЭ по математике профильного уровня.

Настоящая книга посвящена двум заключительным темам на ЕГЭ: задачам с параметрами, числам и их свойствам. Эти темы вызывают наибольшие трудности не только у старшеклассников, но и у учителей математики, так как изучение соответствующих тем не входит в программу средних школ, за исключением специализированных школ с математическим уклоном.

Книга состоит из двух глав, разбитых на шесть параграфов, в каждом из которых приводятся примеры с подробными решениями и обоснованиями.

§ 1–5 посвящены задачам с параметрами. Здесь рассмотрены различные типы уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств: рациональные уравнения, неравенства и системы, иррациональные уравнения и неравенства, тригонометрические уравнения, неравенства и системы, показательные, логарифмические уравнения и неравенства, а также задачи, посвященные функциям и их свойствам.

§ 6 посвящен числам и их свойствам.

Приступать к изучению методов решения задач целесообразно при условии, что ученик или абитуриент хорошо владеет навыками решения задач школьного курса математики.

Данная книга поможет наиболее эффективно подготовиться к поступлению в большинство престижных вузов.

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ

Это задание высокого уровня сложности, рассчитанное на применение не одного метода решения, а на комбинацию различных методов. Для успешного выполнения этого задания, помимо прочных математических знаний, необходим также высокий уровень математической культуры.

Здесь встречаются задачи нескольких типов:

- 1) функции, зависящие от параметра;
- 2) уравнения с параметрами;
- 3) неравенства с параметрами;
- 4) системы и неравенства с параметрами.

Для решения задач с параметрами *необходимо овладеть всего тремя методами:*

- 1) аналитическим;
- 2) графическим в плоскости Oxy ;
- 3) графическим в плоскости Oxa .

Аналитический метод

Для овладения этим методом необходимо знать и понимать следующие термины:

- ▶ ОДЗ.
- ▶ Система уравнений (или неравенств).
- ▶ Совокупность уравнений (или неравенств).
- ▶ Равносильные уравнения (неравенства, системы и совокупности).

Кроме того, нужно хорошо разбираться в двух методах решения уравнений:

- ▶ Метод равносильных переходов.
- ▶ Метод перехода к уравнению-следствию с последующей проверкой корней (с помощью ОДЗ исходного уравнения или с помощью подстановки).

Графический метод в плоскостях Oxy и Oxz

Для успешного решения задач необходимо изучить термины:

- ▶ График функции.
- ▶ График уравнения.
- ▶ График неравенства.
- ▶ График системы.
- ▶ График совокупности.

Прежде всего необходимо разобраться с уравнениями следующих графиков:

- ▶ Прямая.
- ▶ Парабола.
- ▶ Окружность.
- ▶ Гипербола.

§ 1. Уравнения, неравенства и системы с параметрами

Краткая теория и справочные материалы

1. Уравнение I степени (линейное)

Общий вид: $ax + b = 0$.

- 1) Если $a \neq 0$, $a \in R$, $b \in R$, то $x = -b/a$ (корень уравнения).
- 2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет.
- 3) Если $a = b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней.

2. Уравнение II степени (квадратное)

Общий вид: $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

a — I (старший) коэффициент, b — II коэффициент, c — свободный член.

$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант (различитель).

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

2) Если $D = 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$ — один корень.

3) Если $D < 0$, то корней нет (действительных).

Частные случаи

1) Неполные квадратные уравнения:

а) $ax^2 + c = 0$, $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{c}{a}}$, если a и c имеют разные знаки; если a и

c имеют одинаковые знаки, то корней нет;

б) $ax^2 + bx = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -b/a$;

в) $ax^2 = 0$, $x = 0$.

2) Квадратное уравнение приведенного вида

$$x^2 + px + q = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

3) Квадратное уравнение вида

$$ax^2 + 2kx + c = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

3. Теорема Виета

а) Для квадратного уравнения общего вида:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a};$$

б) для приведенного вида:

$$x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q.$$

Теорема, обратная теореме Виета

Если p , q , x_1 , x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

4. Разложение квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1 и x_2 — корни трехчлена, $D > 0$.

Если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

5. Биквадратное уравнение

Общий вид: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$.

Заменой $x^2 = y$ приводят к квадратному виду

$$ay^2 + by + c = 0.$$

Корни биквадратного уравнения:

$$x_{1, 2, 3, 4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}, \text{ где } D = b^2 - 4ac.$$

6. Возвратное уравнение IV степени

Общий вид: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bmx + am^2 = 0$, $a \neq 0$.

Приводится к виду $a\left(x^2 + \frac{m^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{m}{x}\right) + c = 0$ и заменой

$$y = x + \frac{m}{x}, \quad y^2 - 2m = x^2 + \frac{m^2}{x^2} \text{ приводится к квадратному уравнению}$$

$$ay^2 + by + (c - 2am) = 0.$$

Частные случаи

1) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, $m = 1$ — симметрическое уравнение I рода.

Решается подстановкой $y = x + \frac{1}{x}$;

2) $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$, $m = -1$ — симметрическое уравнение II рода.

Решается подстановкой $y = x - \frac{1}{x}$.

7. Свойства степеней

Для любых действительных x , y и $a > 0$, $b > 0$ верны равенства
 $a^0 = 1$ (по определению);

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad a^x : a^y = a^{x-y};$$

$$(a^x)^y = a^{xy}; \quad (ab)^x = a^x b^x;$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}; \quad a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

8. Формулы сокращенного умножения

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \text{ — разность квадратов;}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ — квадрат суммы;}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ — квадрат разности;}$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ — куб суммы;}$$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб разности;

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) =$$

$= (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ — сумма кубов;

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) =$$

$= (a - b)^3 + 3ab(a - b)$ — разность кубов.

Дополнительные формулы

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc;$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab;$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) =$$

$$= (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3);$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4);$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4);$$

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) =$$

$$= (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5);$$

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b + b^4).$$

9. Рациональные неравенства

Неравенство, содержащее только рациональные функции, называется *рациональным*.

Неравенства вида $P_n(x) > 0$ или $P_n(x) < 0$, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$ или $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$,

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены соответственно степеней n и m , т. е. $P_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$; $Q_m(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$, наиболее часто решаются *методом интервалов* (промежутков). Этот метод основан на одном важном свойстве рациональной функции: в интервале между двумя соседними нулями рациональная функция сохраняет знак. Если рассматривается дробно-рациональная функция, то те значения переменной x , при которых функция обращается в нуль, будем называть *нулями функции* (точки числителя), а точки, при которых знаменатель дроби обращается в нуль, — *точками разрыва функции*.

Сущность метода интервалов состоит в следующем. На числовой оси отмечают все нули и точки разрыва функции $f(x)$ (если они есть). При этом числовая ось разбивается на конечное число интервалов, на

каждом из которых левая часть неравенства сохраняет постоянный знак. Чтобы установить этот знак, достаточно взять любую точку из интересующего нас промежутка и определить знак функции в этой точке. Что касается самих точек, то в случае строгого неравенства точки обозначают *светлыми кружками*. Это означает, что сами точки не входят во множество решений данного неравенства. В случае нестрогого неравенства точки наносят на числовую прямую *темными кружками*, а это означает, что сами точки также входят во множество решений данного неравенства. Понятно, что во всех случаях *точки разрыва* функции обозначают светлыми кружками.

Следует отметить, что наибольшие трудности возникают при определении знаков промежутков.

10. Системы неравенств

Несколько неравенств с одной переменной образуют систему неравенств, если ставится задача найти все общие решения данных неравенств.

Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называется *частным решением* системы неравенств, а множество всех частных решений представляет собой *общее решение* системы неравенств или просто решение системы неравенств.

Решить систему неравенств — значит найти все ее частные решения. Следует отметить, что решение системы неравенств представляет собой пересечение множеств решений неравенств системы, тогда как решение совокупности неравенств — объединение множеств решений неравенств, образующих совокупность.

Неравенства, образующие систему, обозначаются *фигурной скобкой*, а образующие совокупность — *квадратной*. Иногда неравенства, образующие совокупность, записывают в строчку через точку с запятой.

Задачи с решениями

1.1. Рациональные уравнения и неравенства

Пример 1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = |x - a| - x^2$ не меньше 3.

Решение.

Для того чтобы наибольшее значение функции было не меньше 3, необходимо и достаточно, чтобы функция в какой-либо точке приняла значение, равное 3.

И действительно, $f(a) = -a^2 < 3$.

Если $f(x) \geq 1$, то в какой-либо точке значение будет равно 3. Если же $f(x) < 1$, то значение, равное 3, приниматься не может.

Перефразируя задачу, условие можно записать так: при каких значениях параметра a уравнение $|x - a| = x^2 + 3$ имеет корни?

Заметим, что $x^2 + 3 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, полученное уравнение равносильно совокупности:

$$\begin{cases} x - a = x^2 + 3, \\ a - x = x^2 + 3, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 - x + (3 + a) = 0, \\ x^2 + x + (3 - a) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнение (1) имеет решение, если $D \geq 0$, т. е. $1 - 4(3 + a) \geq 0$, или $1 - 12 - 4a \geq 0$, или $-4a \geq 11$, откуда $a \leq -\frac{11}{4}$.

Аналогично, решая уравнение (2), имеем

$$1 - 4(3 - a) \geq 0, \quad 4a \geq 11, \quad a \geq \frac{11}{4}.$$

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{11}{4}\right] \cup \left[\frac{11}{4}; +\infty\right).$$

Пример 2. При каком значении параметра a уравнение $|x^2 - 4ax + 9| = |6a - x^2 - 4x - 3|$ имеет более двух корней?

Решение.

Если $|m| = |n|$, то $m^2 = n^2$. Следовательно, данное уравнение можно записать в виде $(x^2 - 4ax + 9)^2 = (6a - x^2 - 4x - 3)^2$.

Применив формулу разности квадратов, получим

$$\begin{aligned} (x^2 - 4ax + 9 - 6a + x^2 + 4x + 3)(x^2 - 4ax + 9 + 6a - x^2 - 4x - 3) &= 0, \\ \text{или } (2x^2 + 4(1 - a)x + 12 - 6a)(-4(a + 1)x + 6(a + 1)) &= 0, \text{ или} \\ (x^2 + 2(1 - a)x + 6 - 3a)(-2(a + 1)x + 3(a + 1)) &= 0, \text{ или} \\ (x^2 + 2(1 - a)x + 6 - 3a)(a + 1)(2x - 3) &= 0. \end{aligned}$$

Полученное уравнение имеет более двух корней, если $a = -1$, или уравнение $x^2 + 2(1-a)x + 6 - 3a = 0$ имеет два различных корня, отличных от $\frac{3}{2}$:

$$\begin{cases} (1-a)^2 - 6 + 3a > 0, & \begin{cases} a^2 + a - 5 > 0, & \begin{cases} a^2 + a - 5 > 0, \\ a \neq \frac{15}{8}. \end{cases} \end{cases} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2(1-a) \cdot \frac{3}{2} + 6 - 3a \neq 0; & \begin{cases} \frac{9}{4} + 3 - 3a + 6 - 3a \neq 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}, \text{ откуда } a < \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} < a < \frac{15}{8}, \text{ или } a > \frac{15}{8}.$$

Итак, исходное уравнение имеет более двух различных корней при $a < \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$, при $a = -1$, при $\frac{-1 + \sqrt{21}}{2} < a < \frac{15}{8}$ и при $a > \frac{15}{8}$.

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}\right); -1; \left(\frac{-1 + \sqrt{21}}{2}; \frac{15}{8}\right); \left(\frac{15}{8}; +\infty\right).$$

Пример 3. Найдите все значения параметра a , при которых сумма кубов различных корней уравнения $4x^2 - 3x + a = 0$ меньше или равна 1.

Решение.

Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения, причем $x_1 \neq x_2$. Тогда дискриминант уравнения $D > 0$, т. е. $D = 3^2 - 4 \cdot 4 \cdot a = 9 - 16a > 0$, откуда $a < \frac{9}{16}$.

Запишем исходное уравнение в виде $x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}a = 0$.

$$\text{По теореме Виета имеем } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3}{4}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{4}a. \end{cases}$$

Согласно условию $x_1^3 + x_2^3 \leq 1$.

$$\text{Но } x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{4}a \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64} - \frac{a}{16}.$$

Учитывая, что $x_1^3 + x_2^3 \leq 1$, получим $\frac{27}{64} - \frac{a}{16} \leq 1$, или $27 - 4a \leq 64$,

$$4a \geq -37, \text{ откуда } a \geq -\frac{37}{4}.$$

$$\text{Итак, } \begin{cases} a < \frac{9}{16}, \\ a \geq -\frac{37}{4}. \end{cases} \text{ Следовательно, } -\frac{37}{4} \leq a < \frac{9}{16}.$$

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{37}{4}; \frac{9}{16} \right).$$

Пример 4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $(a-3)x^2 - 5ax + a-1 = 0$ имеет два корня разных знаков.

Решение.

Если $a = 3$, то получим $-5ax + a - 1 = 0$, или $-15x + 2 = 0$, откуда $x = \frac{2}{15}$. В этом случае исходное уравнение имеет 1 корень.

Если $a \neq 3$, то квадратное уравнение имеет 2 корня, если $D > 0$.

По условию корни уравнения должны иметь разные знаки.

$$\text{Так как } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{5a}{a-3}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{a-1}{a-3}, \end{cases} \text{ то } \frac{a-1}{a-3} < 0, \text{ где } x_1 \cdot x_2 < 0.$$

Решая неравенство $\frac{a-1}{a-3} < 0$ методом интервалов, имеем

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ | \quad | \quad | \\ 1 \quad 3 \end{array} \rightarrow$$

$$1 < a < 3.$$

Ответ: (1; 3).

Пример 5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых модуль разности корней уравнения $x^2 - 4x + 12 + a^2 - 6a = 0$ принимает наибольшее значение.

Решение.

I способ

$$\text{Пусть } x_1 \text{ и } x_2 \text{ — корни уравнения. Тогда } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4, \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 - 6a + 12. \end{cases}$$

Согласно условию получим

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{4^2 - 4(a^2 - 6a + 12)} = \\ &= \sqrt{-4a^2 + 24a - 32} = 2\sqrt{-a^2 + 6a - 8} = 2\sqrt{1 - (a-3)^2}. \end{aligned}$$

Следовательно, полученное выражение, а значит, и модуль разности принимает наибольшее значение при $a - 3 = 0$, т. е. $a = 3$.

Ответ: $a = 3$.

II способ

Запишем уравнение в виде $(x^2 - 4x + 4) + (a^2 - 6a + 9) = 1$, или $(x - 2)^2 + (a - 3)^2 = 1$ — уравнение окружности с центром в точке $(2; 3)$ и радиусом $r = 1$.

Корнями уравнения являются точки пересечения окружности с горизонтальной прямой $a = \text{const}$. В этом случае прямая содержит диаметр окружности и наибольшая разность корней достигается при $a = 3$.

Ответ: $a = 3$.

Пример 6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(x^2 - 18)(3 - 2x) = a$ имеет три различных решения.

Решение.

Пусть $f(x) = (x^2 - 18)(3 - 2x) = -2x^3 + 3x^2 + 36x - 54$.

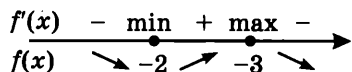
Эта функция определена, непрерывна и дифференцируема на \mathbb{R} , так как f — многочлен.

Найдем производную:

$f'(x) = (-2x^3 + 3x^2 + 36x - 54)' = -6x^2 + 6x + 36 = -6(x^2 - x - 6) = -6(x + 2)(x - 3)$, где -2 и 3 — корни квадратного трехчлена.

$f'(x) = 0$ при $x = -2$ или $x = 3$.

Изобразим на числовой прямой знаки производной и поведение функции.



Построим эскиз графика. Из графика видно, что уравнение $f(x) = a$ имеет три различных решения при $f(-2) < a < f(3)$.

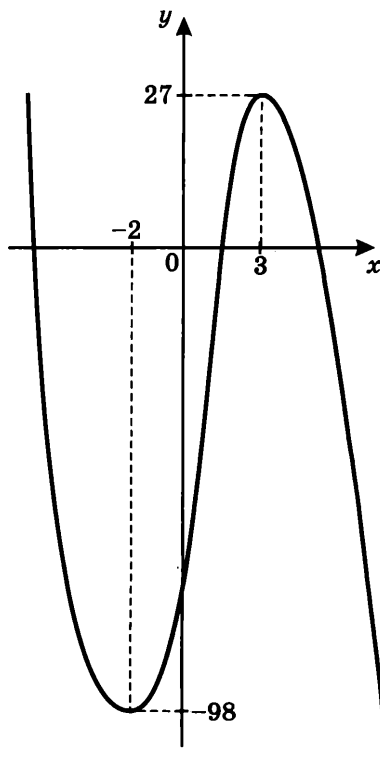
Найдем соответствующие значения функции в точках -2 и 3 .

$$f(-2) = (4 - 18) \cdot (3 + 4) = -98,$$

$$f(3) = (9 - 18) \cdot (-3) = 27.$$

Следовательно, при $-98 < a < 27$ уравнение имеет три различных решения.

Ответ: $a \in (-98; 27)$.



Пример 7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 12x - 12 - 2ax + 8a - a^2 = 0$ имеет не более трех решений.

Решение.

Разложим левую часть уравнения на множители:

$$\begin{aligned} & x^4 - 2x^3 - x^2(a - 2) + x^2(a - 6) - \\ & - 2x(a - 6) - (a - 6)(a - 2) = 0, \\ & \text{или } (x^2 - 2x - (a - 2))x^2 + (x^2 - 2x - \\ & - (a - 2))(a - 6) = 0, \\ & \text{или } (x^2 - 2x - (a - 2))(x^2 + (a - 6)) = 0, \\ & \text{откуда } x^2 - 2x - (a - 2) = 0, \text{ или} \\ & x^2 + (a - 6) = 0. \end{aligned}$$

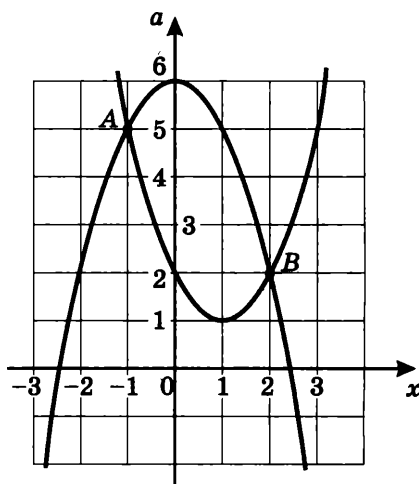
Выразим параметр a через x :

$$a = x^2 - 2x + 2, a = -x^2 + 6, \text{ или}$$

$$a = (x - 1)^2 + 1, a = -x^2 + 6.$$

В прямоугольной системе xOa построим графики двух парабол, для чего найдем координаты точек пересечения

из уравнения $(x - 1)^2 + 1 = -x^2 + 6$, или $2x^2 - 2x - 4 = 0$, или $x^2 - x - 2 = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, тогда имеем $A(-1; 5)$, $B(2; 2)$.



Из графика видно, что при $a < 0$ имеем два корня;

при $a = 0$ — два корня; при $a = 1$ — три корня;

при $1 < a < 2$ — четыре корня; при $a = 2$ — три корня;

при $2 < a < 5$ — четыре корня; при $a = 5$ — три корня;

при $5 < a < 6$ — четыре корня; при $a > 6$ — два корня.

Ответ: $(-\infty; 1] \cup \{2; 5\} \cup [6; +\infty)$.

Пример 8. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$9(ax - x^2) + \frac{1}{ax - x^2} + 6 = 0$$

имеет ровно два различных корня на промежутке $[-2; 1)$.

Решение.

Пусть $ax - x^2 = y$, тогда получим $9y + \frac{1}{y} + 6 = 0$, или $\frac{9y^2 + 6y + 1}{y} = 0$,

или $\frac{(3y + 1)^2}{y} = 0$, откуда $y = -\frac{1}{3}$, $y \neq 0$.

Следовательно, $ax - x^2 = -\frac{1}{3}$, $x^2 - ax - \frac{1}{3} = 0$.

Заметим, что дискриминант $D = a^2 + \frac{4}{3} > 0$.

Значит, уравнение $x^2 - ax - \frac{1}{3} = 0$ имеет два различных корня.

Пусть $f(x) = x^2 - ax - \frac{1}{3}$. Так как $f(0) = -\frac{1}{3} < 0$, то корни уравнения $f(x) = 0$ принадлежат промежутку $[-2; 1)$ тогда и только тогда, когда $f(-2) \geq 0$ и $f(1) > 0$, т. е. если $4 + 2a - \frac{1}{3} \geq 0$ и $1 - a - \frac{1}{3} > 0$.

Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} 4 + 2a - \frac{1}{3} \geq 0, \\ 1 - a - \frac{1}{3} > 0; \end{cases} \begin{cases} 2a \geq \frac{1}{3} - 4, \\ a < 1 - \frac{1}{3}; \end{cases} \begin{cases} 2a \geq -\frac{11}{3}, \\ a < \frac{2}{3}; \end{cases} \begin{cases} a \geq -\frac{11}{6}, \\ a < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Значит, исходное уравнение имеет ровно два различных корня на промежутке $[-2; 1)$ при $-\frac{11}{6} \leq a < \frac{2}{3}$.

Ответ: $-\frac{11}{6} \leq a < \frac{2}{3}$.

Пример 9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\frac{4x^2 - a^2}{2x - 4 - 3a} = 0$ имеет ровно два различных решения.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\frac{(2x - a)(2x + a)}{2x - 4 - 3a} = 0, \text{ или } \begin{cases} (2x - a)(2x + a) = 0, \\ 2x - 4 - 3a \neq 0, \end{cases}$$

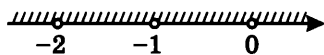
откуда $x = \frac{a}{2}$, $x = -\frac{a}{2}$, $x \neq \frac{3a + 4}{2}$.

Чтобы уравнение имело два различных решения, необходимо, чтобы числа $\frac{a}{2}$ и $-\frac{a}{2}$ были различны, а также ни одно из них не равнялось $\frac{3a + 4}{2}$.

Имеем: 1) $\frac{a}{2} \neq \frac{a}{2}$, откуда $a \neq 0$;

2) $\frac{a}{2} \neq \frac{3a+4}{2}$, или $a \neq 3a+4$, т. е. $a \neq -2$;

3) $-\frac{a}{2} \neq \frac{3a+4}{2}$, или $-a \neq 3a+4$, $a \neq -1$.



$a < -2$, $-2 < a < -1$, $-1 < a < 0$, $a > 0$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

Пример 10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\frac{x-3a}{x+3} + \frac{x-2}{x-a} = 1$ имеет ровно 1 корень.

Решение.

Упростим данное уравнение:

$$\frac{(x-3a)(x-a) + (x+3)(x-2) - (x+3)(x-a)}{(x+3)(x-a)} = 0, \text{ или}$$

$$\frac{x^2 - 3ax - ax + 3a^2 + x^2 + 3x - 2x - 6 - x^2 - 3x + ax + 3a}{(x+3)(x-a)} = 0, \text{ или}$$

$$\frac{x^2 - (3a+2)x + (3a^2 + 3a - 6)}{(x+3)(x-a)} = 0.$$

$$x^2 - (3a+2)x + (3a^2 + 3a - 6) = 0, \quad x \neq -3, \quad x \neq a. \quad (1)$$

1. Если $x = -3$, то уравнение (1) примет вид

$9 + 3(3a+2) + (3a^2 + 3a - 6) = 0$, или $a^2 + 4a + 3 = 0$, откуда $a = -3$, или $a = -1$.

2. Если $x = a$ — корень уравнения (1), то получим $a^2 - (3a+2)a + (3a^2 + 3a - 6) = 0$, или $a^2 + a - 6 = 0$, откуда $a = -3$ или $a = 2$.

Итак:

а) при $a = -3$ получим $\frac{x^2 + 7x + 12}{(x+3)^2} = 0$, или $\frac{(x+3)(x+4)}{(x+3)^2} = 0$, откуда

$x = -4$ — единственный корень уравнения;

б) при $a = -1$ получим $\frac{x^2 + x - 6}{(x+3)(x+1)} = 0$, или $\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+1)} = 0$, откуда

$x = 2$ — единственный корень уравнения;

в) при $a = 2$ получим $\frac{x^2 - 8x + 12}{(x+3)(x-2)} = 0$, или $\frac{(x-6)(x-2)}{(x+3)(x-2)} = 0$, откуда

$x = 6$ — единственный корень исходного уравнения.

Кроме того, исходное уравнение имеет единственный корень $x \neq a$, $x \neq -3$, если $D = 0$, т. е. $(3a+2)^2 - 4(3a^2 + 3a - 6) = 0$, или $-3a^2 + 28 = 0$,

откуда $a^2 = \frac{28}{3}$, $a = \pm\sqrt{\frac{28}{3}}$.

Значит, уравнение (1) имеет ровно два различных корня при $-\sqrt{\frac{28}{3}} < a < \sqrt{\frac{28}{3}}$; ровно один корень при $a = -\sqrt{\frac{28}{3}}$ или $a = \sqrt{\frac{28}{3}}$; не имеет корней при $a < -\sqrt{\frac{28}{3}}$ или при $a > \sqrt{\frac{28}{3}}$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно один корень при $a = -\sqrt{\frac{28}{3}}$, $a = -3$, $a = -1$, $a = 2$, $a = \sqrt{\frac{28}{3}}$.

Ответ: $a = -\sqrt{\frac{28}{3}}$, $a = -3$, $a = -1$, $a = 2$, $a = \sqrt{\frac{28}{3}}$.

Пример 11. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (2-a)^2 = |x-2+a| + |x-a+2|$$

имеет единственный корень.

Решение.

Если x_0 — корень исходного уравнения, то и $(-x_0)$ является его корнем. Значит, уравнение имеет нечетное число корней, если $x_0 = -x_0$, т. е. $x_0 = 0$. Тогда уравнение примет вид

$$(2-a)^2 = |a-2| + |2-a|, \text{ или } |2-a|^2 - 2|2-a| = 0,$$

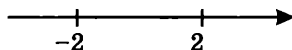
$$|2-a| \cdot (|2-a| - 2) = 0, \text{ откуда } |2-a| = 0, a = 2, \text{ или } |2-a| = 2,$$

$$\text{т. е. } 2-a = \pm 2, a = 0, a = 4.$$

1) При $a = 2$ уравнение запишется в виде $x^2 = 2|x|$, или $x^2 - 2|x| = 0$, $|x| \cdot (|x| - 2) = 0$, откуда находим $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 2$.

В этом случае уравнение имеет три корня.

2) При $a = 0$ и при $a = 4$ получим уравнение $x^2 + 4 = |x-2| + |x+2|$.



а) При $x \leq -2$ получим $x^2 + 4 = -x + 2 - x - 2$, или $x^2 + 2x + 4 = 0$ — нет действительных корней.

б) При $-2 < x \leq 2$ имеем $x^2 + 4 = 4$, $x^2 = 0$, $x = 0$, т. е. уравнение имеет единственный корень.

в) При $x > 2$ получим уравнение $x^2 + 4 = x - 2 + x + 2$, или $x^2 - 2x + 4 = 0$, которое не имеет действительных корней.

Итак, при $a = 0$ и при $a = 4$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $a = 0$ и $a = 4$.

Пример 12. В зависимости от значений параметра a решите уравнение $x^5 - 5x^3 + 5x = a^5 + \frac{1}{a^5}$.

Решение.

Пусть $y + \frac{1}{y} = x$, тогда $y^2 + \frac{1}{y^2} = x^2 - 2$;

$$y^3 + \frac{1}{y^3} = \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(y + \frac{1}{y}\right) = (x^2 - 2)x - x = x^3 - 3x;$$

$$y^4 + \frac{1}{y^4} = \left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) = (x^3 - 3x)x - (x^2 - 2) = \\ = x^4 - 4x^2 + 2;$$

$$y^5 + \frac{1}{y^5} = \left(y^4 + \frac{1}{y^4}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) - \left(y^3 + \frac{1}{y^3}\right) = \\ = (x^4 - 4x^2 + 2)x - (x^3 - 3x) = x^5 - 5x^3 + 5x.$$

Учитывая левую часть исходного уравнения, имеем

$$y^5 + \frac{1}{y^5} = a^5 + \frac{1}{a^5}. \quad (1)$$

Теперь идея решения становится ясной. Возможны следующие случаи:

1) если $a = -1$, то $y^5 + \frac{1}{y^5} = -2$, откуда $y = -1$, тогда $x = y + \frac{1}{y} = -2$;

2) если $a = 0$, то (1) не имеет корней;

3) если $a = 1$, то $y^5 + \frac{1}{y^5} = 2$, откуда $y = 1$ и $x = 2$;

4) если $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$, то $y = a$, $x = a + \frac{1}{a}$.

Ответ: если $a = -1$, то $x = -2$; если $a = 0$, то корней нет; если $a = 1$, то $x = 2$; если $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$, то $x = a + \frac{1}{a}$.

Пример 13. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3 + ax^2 + 56x - 64 = 0$ составляют геометрическую прогрессию?

Решение.

Пусть $x_1 = m$, $x_2 = mq$, $x_3 = mq^2$ — корни данного уравнения, составляющие геометрическую прогрессию, где q — знаменатель прогрессии, тогда левую часть уравнения можно разложить на множители:

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + 56x - 64 &= (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = \\ &= (x - m)(x - mq)(x - mq^2). \end{aligned}$$

Раскрывая скобки в правой части полученного равенства и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + 56x - 64 &= (x^2 - mx - mqx + m^2q)(x - mq^2) = \\ &= x^3 - mx^2 - mqx^2 + m^2qx - mq^2x^2 + m^2q^2x + m^2q^3x - m^3q^3 = \\ &= x^3 - (m + mq + mq^2)x^2 + (m^2q + m^2q^2 + m^2q^3)x - m^3q^3. \end{aligned}$$

Отсюда имеем систему

$$\begin{cases} m + mq + mq^2 = -a, \\ m^2q + m^2q^2 + m^2q^3 = 56, \\ m^3q^3 = 64; \end{cases} \quad \begin{cases} m(1 + q + q^2) = -a, \\ m^2q(1 + q + q^2) = 56, \\ mq = 4. \end{cases}$$

Разделив обе части II уравнения на I, имеем

$$mq = -\frac{56}{a}, \text{ и так как } mq = 4, \text{ то } -\frac{56}{a} = 4, \text{ откуда } a = -14.$$

Ответ: -14 .

Пример 14. При каких значениях параметра a неравенство

$$\frac{x^2 + a^2}{a(x + 6)} \geq 1$$

выполняется для всех $x \in (-1; 1)$?

Решение.

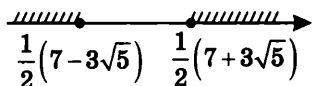
Данное неравенство должно выполняться, в частности, при $x = 0$, тогда оно примет вид $\frac{a^2}{6a} \geq 1$, откуда $a \geq 6$.

Заметим, что если $x \in (-1; 1)$, то $x + 6 > 0$, и при указанных ограничениях исходное неравенство имеет вид $x^2 - ax + a^2 - 6a \geq 0$.

Абсцисса вершины параболы $y = x^2 - ax + a^2 - 6a$ будет равна $x_0 = \frac{a}{2} > 1$, так как $a \geq 6$, и неравенство будет выполняться при всех

$x \in (-1; 1)$, если оно выполняется при $x = 1$, т. е. имеем

$$1 - a + a^2 - 6a \geq 0, \text{ или } a^2 - 7a + 1 \geq 0, D = 49 - 4 = 45 > 0, a_{1,2} = \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}.$$



$$\text{Следовательно, } a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}(7 - 3\sqrt{5})\right] \cup \left[\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5}); +\infty\right).$$

Учитывая условие $a \geq 6$, окончательно получим

$$a \in \left[\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5}); +\infty\right).$$

$$\text{Ответ: } \left[\frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5}); +\infty\right).$$

Пример 15. При каких значениях параметра a неравенство

$$x^2 + 5|x - a| \geq a^2$$

справедливо для всех значений?

Решение.

Заметим, что при $x - a \geq 0$, т. е. при $x \geq a$, данное неравенство равносильно неравенству $x^2 + 5(x - a) \geq a^2$, или $(x^2 - a^2) + 5(x - a) \geq 0$, $(x - a)(x + a + 5) \geq 0$, $(x - a)(x - (-a - 5)) \geq 0$ — справедливо для всех значений из рассматриваемого промежутка тогда и только тогда, когда $a \geq -a - 5$, т. е. когда $a \geq -2,5$.

Если $x < a$, то $|x - a| = a - x$, тогда имеем $x^2 - 5(x - a) \geq a^2$, или $(x - a)(x - (5 - a)) \geq 0$, которое справедливо при $a \leq -a + 5$, т. е. если $a \leq 2,5$.

Итак, исходное неравенство справедливо для всех значений при $-2,5 \leq a \leq 2,5$.

Ответ: $[-2,5; 2,5]$.

Пример 16. Решите неравенство $a \cdot \frac{x+1}{x-1} > 1$.

Решение.

Запишем данное неравенство в виде

$$a \cdot \frac{x+1}{x-1} - a > 1 - a, \text{ или } a \cdot \left(\frac{x+1}{x-1} - 1 \right) > 1 - a,$$

$$a \cdot \left(\frac{x+1-x+1}{x-1} \right) > 1 - a, \quad \frac{2a}{x-1} > 1 - a.$$

Если $a = 1$, то $\frac{2}{x-1} > 0$, $x - 1 > 0$, т. е. $x > 1$.

Если $a < 0$, то $x - 1 < 0$, т. е. $x < 1$.

В этом случае данное неравенство запишется в виде

$$2a < (1 - a)x - 1 + a, \text{ или } (1 - a)x > a + 1, \text{ откуда } x > \frac{1+a}{1-a}.$$

Следовательно, если $a < 0$, то $\frac{1+a}{1-a} < x < 1$.

Если $0 < a < 1$, то $x > 1$, и данное неравенство примет вид

$$2a > (1 - a)x - 1 + a, \text{ или } (1 - a)x < 1 + a, \text{ откуда } x < \frac{1+a}{1-a}.$$

Значит, если $0 < a < 1$, то $1 < x < \frac{1+a}{1-a}$.

Наконец, если $a > 1$, то при $x > 1$ неравенство выполняется, а если $x < 1$, то неравенство примет вид $2a < (1 - a)x - 1 + a$, или

$$(1 - a)x > 1 + a, \text{ откуда } x < -\frac{a+1}{a-1}.$$

Итак, если $a > 1$, то $x > 1$, или $x < -\frac{a+1}{a-1}$.

Ответ: 1) если $a = 1$, то $x > 1$;

2) если $a > 1$, то $x < -\frac{a+1}{a-1}$, или $x > 1$;

3) если $0 < a < 1$, то $1 < x < \frac{1+a}{1-a}$;

4) если $a < 0$, то $\frac{1+a}{1-a} < x < 1$.

Пример 17. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$(x^2 - 4|x| + a)^2 + 2(x^2 - 4|x| + a) + 2 = \cos \frac{6\pi}{a}$$

имеет ровно два корня.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$(x^2 - 4|x| + a)^2 + 2 \cdot (x^2 - 4|x| + a) + 1 + 1 - \cos \frac{6\pi}{a} = 0, \text{ или}$$

$$(x^2 - 4|x| + a + 1)^2 + \left(1 - \cos \frac{6\pi}{a}\right) = 0.$$

Заметим, что $(x^2 - 4|x| + a + 1)^2 \geq 0$, $1 - \cos \frac{6\pi}{a} \geq 0$.

Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 4|x| + a + 1 = 0, & (1) \\ 1 - \cos \frac{6\pi}{a} = 0. & (2) \end{cases}$$

Уравнение (1) представим в виде $|x|^2 - 4|x| + 4 = 3 - a$, или $(|x| - 2)^2 = 3 - a$, откуда находим $|x| = 2 \pm \sqrt{3 - a}$.

Из (2) имеем $\cos \frac{6\pi}{a} = 1$, $\frac{6\pi}{a} = 2\pi n$, т. е. $a = \frac{3}{n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Итак, имеем
$$\begin{cases} a \leq 3, \\ |x| = 2 \pm \sqrt{3 - a}, \\ a = \frac{3}{n}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Уравнение $|x| = 2 \pm \sqrt{3 - a}$ имеет ровно два корня, если $\sqrt{3 - a} = 0$, или $2 - \sqrt{3 - a} < 0$, т. е. при $a = 3$, или $a < -1$.

Значит, $a \in (-\infty; -1) \cup \{3\}$.

Так как $a = \frac{3}{n}$, $n \in \mathbb{Z}$, то $a = \pm 3; \pm \frac{3}{2}; \pm 1, \dots$.

Тогда $a = \pm 3$, $a = -\frac{3}{2}$.

Ответ: $\pm 3; -\frac{3}{2}$.

Пример 18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых три различных корня уравнения

$$x^3 + (a^2 - 10a)x^2 + 18ax - 216 = 0$$

образуют геометрическую прогрессию. Найдите эти корни.

Решение.

Пусть q — знаменатель прогрессии, тогда $x_2 = x_1 \cdot q$, $x_3 = x_1 \cdot q^2$.

По теореме Виета $x_1 x_2 x_3 = 216$, или $(x_1 q)^3 = 216$, откуда $x_1 q = 6$, т. е. $x_2 = 6$.

Запишем теорему Виета для $x_1 = \frac{x_2}{q} = \frac{6}{q}$, $x_2 = 6$, $x_3 = x_2 q = 6q$.

$$\text{Имеем } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -(a^2 - 10a), \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 18a, \\ x_1 x_2 x_3 = 216; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{6}{q} + 6 + 6q = 10a - a^2, \\ \frac{6}{q} \cdot 6 + \frac{6}{q} \cdot 6q + 6 \cdot 6q = 18a, \\ x_2 = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} 6\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 10a - a^2, \\ 36\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 18a, \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

Поскольку $a \neq 0$, ибо в противном случае уравнение $\frac{1}{q} + 1 + q = 0$ не имеет корней, следовательно, этот случай противоречит условию существования трех различных корней (согласно условию задачи).

Разделив первое уравнение полученной системы на второе, имеем $\frac{1}{6} = \frac{10-a}{18}$, откуда находим $a = 7$, тогда из второго уравнения последней системы получим

$$36\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 18 \cdot 7, \text{ или } q^2 - \frac{5}{2}q + 1 = 0, \quad \begin{cases} q = 2, \\ q = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Пусть $q = 2$, тогда $x_1 = \frac{6}{q} = 3$, $x_2 = 6$, $x_3 = 6 \cdot 2 = 12$. В обоих случаях получаем тройку чисел: 3; 6; 12.

Поскольку $x_2 = 6$, уравнение можно решить проще, подставив в исходное уравнение $x = 6$.

$$6^3 + 36(a^2 - 10a) + 18 \cdot 6a - 216 = 0, \text{ или}$$

$$6 + a^2 - 10a + 3a - 6 = 0, \text{ или } a^2 - 7a = 0, a \neq 0, a = 7.$$

Если $a = 7$, то получим уравнение

$$x^3 - 21x^2 + 126x - 216 = 0,$$

$(x - 3)(x^2 - 18x + 72) = 0, (x - 3)(x - 6)(x - 12) = 0$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = 6, x_3 = 12$.

Ответ: $a = 7, x_1 = 3, x_2 = 6, x_3 = 12$.

Пример 19. Найдите все значения параметра a , для которых ровно при одном x из промежутка $[1; 5)$ значение выражения $x^4 - x^2 + 5$ равно значению выражения $a(x^2 - 4)$.

Решение.

Согласно условию задачи имеем

$$x^4 - x^2 + 5 = a(x^2 - 4), \text{ или}$$

$$x^4 - (a + 1)x^2 + (5 + 4a) = 0. \quad (1)$$

Пусть $x^2 = t$. Так как $x \in [1; 5)$, то $t \in [1; 25)$. Учитывая замену, равенство (1) примет вид

$$t^2 - (a + 1)t + (5 + 4a) = 0. \quad (2)$$

С учетом (2) условие задачи можно перефразировать так: найти все значения параметра a , при которых квадратный трехчлен $f(t) = t^2 - (a + 1)t + (5 + 4a)$ имеет ровно один корень на промежутке $[1; 25)$. Это возможно в следующих случаях:

1) $D = 0$; $1 \leq x_0 < 25$, где x_0 — абсцисса вершины параболы $f(t)$;

2) $f(1) \cdot f(25) < 0$;

3) $f(1) = 0, \begin{cases} t_1 \cdot t_2 = 5 + 4a \geq 25, \\ t_1 \cdot t_2 = 5 + 4a < 1. \end{cases}$

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

$$1. \begin{cases} (a+1)^2 - 4(5+4a) = 0, \\ 1 \leq \frac{a+1}{2} < 25; \end{cases} \begin{cases} a^2 - 14a - 19 = 0, \\ 1 \leq a < 49. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение системы, находим

$$a_{1,2} = 7 \pm \sqrt{49 + 19} = 7 \pm 2\sqrt{17}, \quad 1 < 7 + 2\sqrt{17} < 49;$$

$7 - 2\sqrt{17} < 1 \Rightarrow 7 + 2\sqrt{17}$ — удовлетворяет условию задачи.

2. $(1 - (a + 1) \cdot 1 + (5 + 4a))(25 - 5(a + 1) + (5 + 4a)) < 0$, или $(3a + 5)(a - 20) > 0$.

Решая полученное неравенство методом интервалов, имеем совокупность неравенств
$$\begin{cases} a < -\frac{5}{3}, \\ a > 20. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 1 - (a + 1) \cdot 1 + (5 + 4a) = 0, \\ \begin{cases} 5 + 4a \geq 25, \\ 5 + 4a < 1; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} 3a = -5, \\ \begin{cases} a \geq 5, \\ a < -1; \end{cases} \end{cases} \begin{cases} a = -\frac{5}{3}, \\ \begin{cases} a \geq 5, \\ a < -1, \end{cases} \end{cases}$$

откуда $a = -\frac{5}{3}$ удовлетворяет условию задачи.

$$\text{Ответ: } \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right] \cup \{7 + 2\sqrt{17}\} \cup (20; +\infty).$$

Пример 20. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\left|\frac{6}{x} - 5\right| = ax - 3$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f_1(x) = ax - 3$ и $f_2(x) = \left|\frac{6}{x} - 5\right|$. Исследуем уравнение $f_1(x) = f_2(x)$ на промежутке $(0; +\infty)$.

Заметим, что при $a \leq 0$ на промежутке $(0; +\infty)$ все значения функции $f_1(x) < 0$, а $f_2(x) \geq 0$, следовательно, при $a \leq 0$ уравнение $f_1(x) = f_2(x)$ не имеет решений на промежутке $(0; +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f_1(x)$ возрастает, а функция $f_2(x)$ убывает на промежутке $\left(0; \frac{6}{5}\right]$, значит, уравнение $f_1(x) = f_2(x)$ имеет не более одного корня на $\left(0; \frac{6}{5}\right]$; причем решение будет в том случае, если

$$f_1\left(\frac{6}{5}\right) \geq f_2\left(\frac{6}{5}\right), \text{ т. е. имеем } a \cdot \frac{6}{5} - 3 \geq 0, \text{ откуда } a \geq \frac{5}{2}.$$

Далее на промежутке $\left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$ уравнение $f_1(x) = f_2(x)$ запишется

в виде $ax - 3 = 5 - \frac{6}{x}$, откуда получим квадратное уравнение

$$ax^2 - 8x + 6 = 0.$$

Учитывая, что случай $a \leq 0$ был рассмотрен выше, будем считать, что $a > 0$.

Так как $D/4 = 16 - 6a$, то при $D/4 < 0$, т. е. $a > \frac{8}{3}$, уравнение не

имеет корней; при $D/4 = 0$, т. е. $a = \frac{8}{3}$ уравнение имеет один корень

$x = \frac{4}{a} = \frac{3}{2}$; при $0 < a < \frac{8}{3}$ — 2 корня: $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{D/4}}{a}$, причем больший

корень

$x_2 = \frac{4 + \sqrt{D/4}}{a} > \frac{4}{a} > \frac{3}{2} > \frac{6}{5}$, значит, $x_2 \in \left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$, а меньший корень

$x_1 \in \left(\frac{6}{5}; +\infty\right)$ в том случае, если

$$a\left(x_1 - \frac{6}{5}\right)\left(x_2 - \frac{6}{5}\right) = a\left(\frac{6}{5}\right)^2 - 8 \cdot \frac{6}{5} + 6 = \frac{36a - 90}{25} > 0,$$

т. е. $a > \frac{5}{2}$. Итак, исходное уравнение имеет один корень при $0 < a < \frac{5}{2}$

и $a > \frac{8}{3}$; 2 корня — при $a = \frac{5}{2}$ и $a = \frac{8}{3}$; 3 корня — при $\frac{5}{2} < a < \frac{8}{3}$; нет

корней при $a \leq 0$.

Ответ: $\frac{5}{2} < a < \frac{8}{3}$.

Пример 21. При каком значении параметра a уравнение $(a + 2 - |x + 1|)(a + x^2 + 2x) = 0$ имеет: 1) 3 корня; 2) 2 корня?

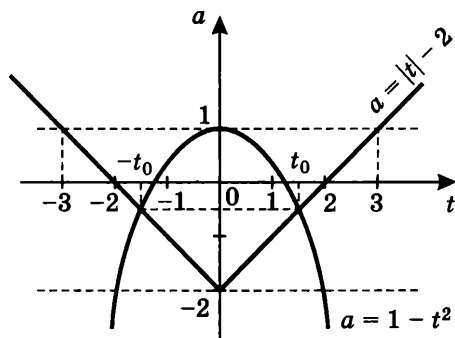
Решение.

Пусть $x + 1 = t$, тогда $x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1 = t^2 - 1$, и данное уравнение запишется в виде

$$(a + 2 - |t|)(a - 1 + t^2) = 0. \quad (1)$$

Построим графики функций

$$a = 1 - t^2 \text{ и } a = |t| - 2.$$



1. Прямые $a = 1$ и $a = -2$ имеют ровно 3 общие точки с графиком уравнения (1), т. е. при $a = 1$ и $a = -2$ уравнение (1) имеет 3 корня.

2. Если $a > 1$ и $a < -2$, то уравнение (1) имеет ровно 2 корня.

Кроме того, уравнение (1) имеет 2 корня в случае, если графики функций $a = 1 - t^2$ и $a = |t| - 2$ имеют общие точки, т. е. если $1 - t^2 = |t| - 2$, где $t_0 > 0$, или $1 - z^2 = z - 2$ ($z = |t_0|$).

Значит, $z^2 + z - 3 = 0$, $D = 13 > 0$, откуда

$$z_0 = \frac{\sqrt{13} - 1}{2}, \quad a_0 = z_0 - 2 = \frac{\sqrt{13} - 5}{2}.$$

Ответ: 3 корня при $a = 1$ и $a = -2$; 2 корня при $a < -2$; $a > 1$;

$$a = \frac{\sqrt{13} - 5}{2}.$$

Пример 22. Найдите все значения параметра a , для которых неравенство $\frac{ax^2 + 6x - 9a - 9}{x - 4} > 0$ выполняется при всех $x < -2$.

Решение.

Поскольку $x < -2$, то $x - 4 < 0$. Следовательно, данное неравенство равносильно неравенству $ax^2 + 6x - 9a - 9 < 0$. (1)

Пусть $f(x) = ax^2 + 6x - 9a - 9$.

Возможны три случая:

1. $a > 0$. В этом случае ветви параболы направлены вверх, значит, ни на каком бесконечном промежутке не может выполняться условие $f(x) < 0$.

2. $a = 0$. Тогда $6x - 9 < 0$ верно при всех $x < -2$; $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

3. $a < 0$. В этом случае неравенство (1) выполняется при всех $x < -2$, если

$$\begin{cases} D < 0, \\ f(-2) \leq 0, \\ x_0 \geq -2, \end{cases}$$

где x_0 — абсцисса вершины параболы $f(x)$.

Заметим, что $D/4 = 9 + 4a(9a + 9) = 36a^2 + 36a + 9 = (6a + 3)^2 \geq 0$, тогда имеем равносильную систему неравенств

$$\begin{cases} f(-2) \leq 0, \\ x_0 \geq -2, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4a - 12 - 9a - 9 \leq 0, \\ x_0 = \frac{-6}{2a} \geq -2; \end{cases} \begin{cases} 5a + 21 \geq 0, \\ \frac{2a - 3}{a} \geq 0. \end{cases}$$

Учитывая, что $a < 0$, получим $\begin{cases} 5a \geq -21, \\ 2a - 3 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} a \geq -4,2, \\ a \leq 1,5, \end{cases}$ откуда

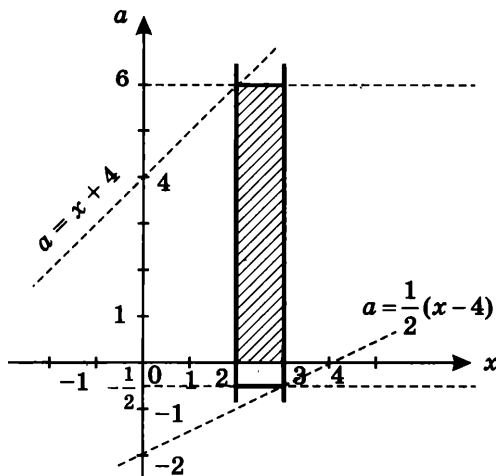
$$-4,2 \leq a \leq 1,5.$$

Так как $a < 0$ и $a = 0$ удовлетворяют условию задачи, окончательно получим $-4,2 \leq a \leq 0$.

Ответ: $[-4,2; 0]$.

Пример 23. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $\frac{x - 2a - 4}{x - a + 4} < 0$ выполняется для всех $x \in [2; 3]$.

Решение.



На плоскости xOa изобразим множество пар (x, y) , для которых выполняется данное неравенство. Искомые значения a_0 характеризуются тем, что отрезок прямой $a = a_0$ при $x \in [2; 3]$ полностью принадлежит заштрихованной области, что достигается при $a \in \left(-\frac{1}{2}; 6\right)$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; 6\right)$.

Пример 24. При каких значениях параметра a уравнение

$$(x^2 - a)^2 - 10x^2 - 3x + a = 0$$

имеет ровно 4 решения?

Решение.

Запишем данное уравнение как квадратное относительно переменной a :

$$x^4 - 2ax^2 + a^2 - 10x^2 - 3x + a = 0, \text{ или}$$

$$a^2 - (2x^2 - 1)a + (x^4 - 10x^2 - 3x) = 0,$$

$$D = (2x^2 - 1)^2 - 4(x^4 - 10x^2 - 3x) = 4x^4 - 4x^2 + 1 - 4x^4 + 40x^2 + 12x = 36x^2 + 12x + 1 = (6x + 1)^2 > 0,$$

$$a_{1,2} = \frac{(2x^2 - 1) \pm (6x + 1)}{2}, \quad a_1 = x^2 + 3x; \quad a_2 = x^2 - 3x - 1.$$

Имеем две возможности:

$$1) x^2 + 3x - a = 0, \quad D_1 = 9 + 4a;$$

$$2) x^2 - 3x - a - 1 = 0, \quad D_2 = 9 + 4(a + 1) = 4a + 13.$$

Если $D_1 < 0$ или $D_2 < 0$, то не существует значения a , удовлетворяющего данному уравнению. Значит, если существует значение a , при котором исходное уравнение имеет 4 корня, то должны выполняться условия $D_1 > 0$ и $D_2 > 0$.

Если $D_1 > 0$, то $a > -\frac{9}{4}$; если $D_2 > 0$, то $a > -\frac{13}{4}$. Из полученных неравенств следует, что $a > -\frac{9}{4}$.

Ответ: при $a > -2,25$.

Пример 25. Сколько корней в зависимости от параметра a имеет уравнение $|x^2 - 5x + 6| + |x^2 - 5x + 4| = a$?

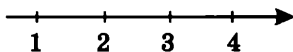
Решение.

Рассмотрим функцию $y = |x^2 - 5x + 6| + |x^2 - 5x + 4|$.

Так как

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + 6 &= (x - 2)(x - 3) \text{ и } x^2 - 5x + 4 = \\ &= (x - 1)(x - 4), \text{ то} \\ y &= |(x - 2)(x - 3)| + |(x - 1)(x - 4)|. \end{aligned} \quad (1)$$

Корни квадратных трехчленов отметим на числовой прямой:



Числовая прямая при этом разбивается на 5 промежутков:

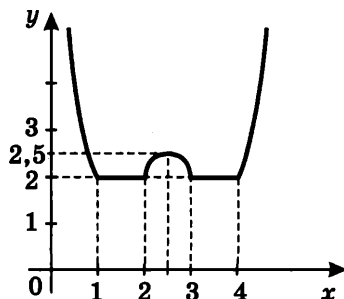
- 1) если $x < 1$, то $y = x^2 - 5x + 6 + x^2 - 5x + 4 = 2x^2 - 10x + 10$;
- 2) если $1 \leq x < 2$, то $y = x^2 - 5x + 6 - x^2 + 5x - 4 = 2$;
- 3) если $2 \leq x < 3$, то $y = -x^2 + 5x - 6 - x^2 + 5x - 4 = -2x^2 + 10x - 10$;
- 4) если $3 \leq x < 4$, то $y = x^2 - 5x + 6 - x^2 + 5x - 4 = 2$;
- 5) если $x \geq 4$, то $y = x^2 - 5x + 6 + x^2 - 5x + 4 = 2x^2 - 10x + 10$.

Для случая 3) $x_0 = -\frac{b}{2a} = 2,5$;

$$y_0 = -\frac{25}{2} + 25 - 10 = 2,5.$$

Итак, $(2,5; 2,5)$ — координаты вершины параболы $y = -2x^2 + 10x - 10$.

Построим график функции, заданной равенством (1).



Ответ: если $a < 2$, то корней нет;
если $2 \leq a < 2,5$, то 4 корня;
если $a = 2,5$, то 3 корня; если $a > 2,5$, то 2 корня.

Пример 26. При каких значениях параметра a неравенство

$$|x + a| + x^2 < 3$$

имеет положительные решения?

Решение.

Запишем данное неравенство в виде $|x + a| < 3 - x^2$. Приведем графическое решение неравенства, для чего рассмотрим функции

$$f_1(x) = 3 - x^2 \text{ и } f_2(x) = |x + a|.$$

Положительным решением данного неравенства будет то положительное значение $x = x_0$, при котором точка графика функции $f_1(x)$

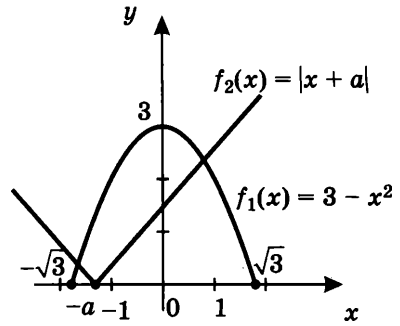
с абсциссой x_0 лежит выше точки графика функции $f_2(x)$ с той же абсциссой x_0 .

Если $x + a < 0$, то получим

$x^2 - x - (a + 3) = 0$, $D = 1 + 4(a + 3)$, отку-

да $a = -\frac{13}{4}$. В этом случае графики функ-

ций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ касаются, тогда уравнение имеет единственный положительный корень $x = 0,5$, а при $a = 3$ график функ-



ции $f_2(x)$ проходит через точку $(0; 3)$. Значит, если $-\frac{13}{4} < a < 3$, то на

интервале $(0; \sqrt{3})$ графики функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют точку пересечения, следовательно, исходное неравенство имеет положительные решения.

Ответ: при $-\frac{13}{4} < a < 3$.

Пример 27. Решите неравенство

$$(3 - a)x^2 + (7a - 19)x + (44 - 19a) > 0, \text{ если } a \in (1; 2).$$

Решение.

Запишем данное неравенство в виде

$$3x^2 - ax^2 + 7ax - 19x + 44 - 19a > 0, \text{ или}$$

$$(-x^2 + 7x - 19)a + (3x^2 - 19x + 44) > 0. \quad (1)$$

Левая часть (1) имеет вид $f(a, x) = f_1(x)a + f_2(x)$, где $f_1(x) = -x^2 + 7x - 19$, $f_2(x) = 3x^2 - 19x + 44$.

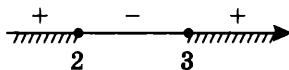
Заметим, что функция $f(a, x)$ является линейной относительно a , тогда неравенство $f(a, x) > 0$ будет выполняться при всех $a \in (1; 2)$, если

$$\begin{cases} f(1; x) = 2x^2 - 12x + 25 \geq 0, & (2) \\ f(2; x) = x^2 - 5x + 6 \geq 0. & (3) \end{cases}$$

Решим неравенство (2): $D/4 = 36 - 50 = -14 < 0$, и так как I коэффициент равен $2 > 0$, то $2x^2 - 12x + 25 > 0$ при любом $x \in R$.

Решим неравенство (3) методом интервалов:

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0, x_1 = 2, x_2 = 3.$$



$$x \leq 2, x \geq 3.$$

Следовательно, решением системы неравенств (2) и (3) будет решение неравенства (3), а значит, и исходного неравенства.

Ответ: $x \leq 2$, $x \geq 3$.

Пример 28. Найдите все целые a , при каждом из которых существует единственная пара (x, y) , удовлетворяющая уравнению $21x^2 - 41xy + 10y^2 + 17 = 0$ и двум неравенствам:

$x < 2y$ и $-13a^2x^2 - 19ax^2y + 45 > 0$.

Решение.

Заметим, что данное уравнение можно решить в целых числах следующим образом:

$$10y^2 - 6xy - 35xy + 21x^2 + 17 = 0, \text{ или}$$

$$2y(5y - 3x) - 7x(5y - 3x) + 17 = 0,$$

$$(5y - 3x)(2y - 7x) = -17, (3x - 5y)(2y - 7x) = 17. \quad (1)$$

Так как число 17 простое, то из (1) получим четыре системы уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x - 5y = 17, & | \cdot 2 \\ -7x + 2y = 1, & | \cdot 5 \end{cases} \begin{cases} 6x - 10y = 34, \\ -35x + 10y = 5. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, получим

$$-29x = 39, x = -39/29 \text{ — не удовлетворяют.}$$

$$2) \begin{cases} 3x - 5y = 1, & \begin{cases} 6x - 10y = 2, \\ -35x + 10y = 85, \end{cases} \\ -7x + 2y = 17, \end{cases} \quad -29x = 87,$$

откуда $x = 87 : (-29) = -3$, тогда $5y = 3x - 1$, $5y = -10$, $y = -2$.

Заметим, что пара $(-3; -2)$ не удовлетворяет условию $x < 2y$.

$$3) \begin{cases} 3x - 5y = -17, \\ -7x + 2y = -1. \end{cases}$$

Решая систему, получим $-29x = -39$ — также не удовлетворяет.

$$4) \begin{cases} 3x - 5y = -1, & \begin{cases} 6x - 10y = -2, \\ -35x + 10y = -85, \end{cases} \\ -7x + 2y = -17, \end{cases} \quad \text{складывая, находим}$$

$$-29x = -87; x = 3. \text{ Тогда } 9 - 5y = -1, 5y = 10, y = 2.$$

Полученная пара чисел $(3; 2)$ удовлетворяет неравенству $x < 2y$.

Остается найти все целые a , при которых найденная пара $(3; 2)$ удовлетворяет второму неравенству задачи:

$$-13a^2x^2 - 19ax^2y + 45 > 0.$$

Так как $x = 3$, $y = 2$, то получим

$$\begin{aligned} -13a^2 \cdot 9 - 19a \cdot 9 \cdot 2 + 45 &> 0, \text{ или} \\ -13a^2 - 38a + 5 &> 0, 13a^2 + 38a - 5, \\ D/4 &= 19^2 + 13 \cdot 5 = 426 > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$a_{1,2} = \frac{1}{13}(-19 \pm \sqrt{426}). \quad a_1 = \frac{1}{13}(-19 + \sqrt{426}), \quad a_2 = \frac{1}{13}(-19 - \sqrt{426}).$$

Решая неравенство (2) методом интервалов, находим $a_2 < a < a_1$.

Так как по условию задачи $a \in \mathbb{Z}$, то, учитывая, что $\sqrt{426} \approx 20,6$, получим следующие значения a , удовлетворяющие условию: $a = -3; -2; -1; 0$.

Ответ: $a = -3; -2; -1; 0$.

Пример 29. При каком значении параметра a уравнение

$$|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$$

имеет больше трех корней?

Решение.

Если $x^2 - 6x + 5 \geq 0$, то уравнение примет вид

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 8 + x^2 - 6x + 5 &= a, \text{ или} \\ 2x^2 - 12x + 13 - a &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнение (1) не может иметь больше двух корней ни при каком a .

Если $x^2 - 6x + 8 \leq 0$, $x^2 - 6x + 5 < 0$, тогда получим

$$\begin{aligned} -x^2 + 6x - 8 - x^2 + 6x - 5 &= a, \text{ или} \\ 2x^2 - 12x + 13 + a &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнение (2) также не может иметь больше двух корней ни при каком a .

Если $x^2 - 6x + 8 \geq 0$, $x^2 - 6x + 5 \leq 0$, то имеем

$$x^2 - 6x + 8 - x^2 + 6x - 5 = a, \text{ т. е. } a = 3.$$

Следовательно, при $a = 3$ и выполнении двух последних неравенств получим тождество, т. е. уравнение имеет сколько угодно корней.

Решая систему неравенств $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 \geq 0, \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0, \end{cases}$ находим $x_1 = 2$, $x_2 = 4$,

$$x_3 = 1, \quad x_4 = 5.$$



$$1 \leq x \leq 2, \quad 4 \leq x \leq 5. \quad (3)$$

Любое значение из (3) при $a = 3$ удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ: $a = 3$.

Пример 30. Найдите наибольшее целое значение параметра a , при котором множество решений неравенства

$$x(x - 4) \leq (a + 1)(|x - 2| - 2)$$

содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 3,8, и положительным знаменателем.

Решение.

Заметим, что

$$\begin{aligned} x(x - 4) &= (x - 2)^2 - 4 = |x - 2|^2 - 2^2 = \\ &= (|x - 2| - 2)(|x - 2| + 2). \end{aligned}$$

Тогда исходное неравенство запишется в виде

$$(|x - 2| - 2)(|x - 2| + 2) \leq (a + 1)(|x - 2| - 2), \text{ или}$$

$$(|x - 2| - 2)(|x - 2| + 2 - a - 1) \leq 0, \text{ или}$$

$$(|x - 2| - 2)(|x - 2| - (a - 1)) \leq 0.$$

Пусть $|x - 2| = t$, тогда получим неравенство

$$(t - 2)(t - (a - 1)) \leq 0. \quad (1)$$

Переменная t должна принадлежать промежутку, соединяющему точки $a - 1$ и 2. Рассмотрим три случая взаимного расположения этих точек:

1) $a - 1 = 2$, т. е. $a = 3$. В этом случае промежуток вырождается в точку.

Тогда $|x - 2| = 2$, откуда $x - 2 = \pm 2$, т. е. $x_1 = 0$; $x_2 = 4$. Как видим, при $a = 3$ условия задачи не выполнены, так как не содержится значение $x = 3,8$.

2) $a - 1 > 2$, т. е. $a > 3$. В этом случае решением неравенства (1) является промежуток $[2; a - 1]$. Получим $2 \leq |x - 2| \leq a - 1$, что равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} |x - 2| \leq a - 1, \\ |x - 2| \geq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 - a \leq x - 2 \leq a - 1, \\ x - 2 \geq 2, \\ x - 2 \leq -2; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 - a \leq x \leq a + 1, \\ x \geq 4, \\ x \leq 0. \end{cases}$$

Следовательно, $x \in [3 - a; 0] \cup [4; a + 1]$.

Это решение также не удовлетворяет условиям задачи (не содержит значение $x = 3,8$).

3) $a - 1 < 2$, т. е. $a < 3$. Тогда решением неравенства (1) является промежуток $[a - 1; 2]$.

Получим $a - 1 \leq x - 2 \leq 2$.

Далее имеем

$$\begin{cases} |x-2| \leq 2, \\ |x-2| \geq a-1; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 \leq x-2 \leq 2, \\ \begin{cases} x-2 \geq a-1, \\ x-2 \leq 1-a; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 4, \\ \begin{cases} x \geq a+1, \\ x \leq 3-a. \end{cases} \end{cases}$$

Следовательно, $x \in [0; 3-a] \cup [a+1; 4]$.

При $a + 1 \leq 3,8$, т. е. при $a \leq 2,8$, решение неравенства содержит точку $x = 3,8$ и все положительные числа меньше $3 - a$, т. е. бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с первым членом, равным $3,8$, и положительным знаменателем, меньшим или равным $\frac{3-a}{3,8}$. Можно взять геометрическую прогрессию с $b_1 = 3,8$ и $q = \frac{1}{19}$.

Ответ: $(-\infty; 2,8]$.

Пример 31. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $|x^2 - 6x + a| \leq 12$ выполняется для всех $x \in [a; a + 7]$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 6x + a$. Преобразуем ее к виду $f(x) = (x - 3)^2 + a - 9$.

Функция $f(x)$ возрастает на промежутке $[3; +\infty)$ и убывает на $(-\infty; 3]$.

Данное неравенство имеет вид $|f(x)| \leq 12$, следовательно, график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; a + 7]$ должен находиться в пределах горизонтальной полосы: $-12 \leq f(x) \leq 12$.

Заметим, что данный отрезок не должен лежать на промежутке монотонности функции $f(x)$, в противном случае приращение $f(x)$ на отрезке, длина которого равна 7, будет не меньше 49, тогда ее график не поместится в полосу шириной 42.

Значит, $a < 3 < a + 7$, откуда получим $-4 < a < 3$.

На отрезке $[a; a + 7]$ функция $f(x)$ достигает своего наибольшего значения либо при $x = a$, либо при $x = a + 7$, а наименьшего значения — при $x = 3$.

Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} -4 < a < 3, \\ f(a) \leq 12, \\ f(a+7) \leq 12, \\ f(3) \geq -12; \end{cases} \begin{cases} -4 < a < 3, \\ (a-3)^2 + a - 9 \leq 12, \\ (a+4)^2 + a - 9 \leq 12, \\ a - 9 \geq -12; \end{cases} \begin{cases} -4 < a < 3, \\ a^2 - 5a - 12 \leq 0, \\ a^2 + 9a - 5 \leq 0, \\ a \geq -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 < a < 3, \\ \frac{5 - \sqrt{73}}{2} \leq a \leq \frac{5 + \sqrt{73}}{2}, \\ \frac{-9 - \sqrt{101}}{2} \leq a \leq \frac{-9 + \sqrt{101}}{2}, \\ a \geq -3. \end{cases}$$

Решая полученную систему, получим $\frac{5 - \sqrt{73}}{2} \leq a \leq \frac{-9 + \sqrt{101}}{2}$.

Ответ: $\left[\frac{5 - \sqrt{73}}{2}; \frac{-9 + \sqrt{101}}{2} \right]$.

Пример 32. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $\left| \frac{x^2 + 2ax + 1}{x^2 - x + 1} \right| < 5$ выполняется при всех x .

Решение.

Заметим, что знаменатель $x^2 - x + 1 > 0$ при всех значениях x , так как первый коэффициент положителен и дискриминант $D = -3 < 0$.

Следовательно, данное неравенство примет вид

$$|x^2 + 2ax + 1| < 5(x^2 - x + 1). \quad (1)$$

Неравенство (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + 2ax + 1 < 5x^2 - 5x + 5, & \begin{cases} 4x^2 - (5 + 2a)x + 4 > 0, \\ 6x^2 - (5 - 2a)x + 6 > 0. \end{cases} \\ x^2 + 2ax + 1 > -5x^2 + 5x - 5; \end{cases}$$

Каждое из неравенств системы выполняется, если дискриминанты $D_1 < 0$ и $D_2 < 0$, т. е. получим

$$\begin{cases} (5 + 2a)^2 - 64 < 0, & \begin{cases} |2a + 5| < 8, & \begin{cases} -8 < 2a + 5 < 8, \\ -12 < 2a - 5 < 12; \end{cases} \\ (5 - 2a)^2 - 144 < 0; & \begin{cases} |2a - 5| < 12; \end{cases} \end{cases} \\ \begin{cases} -13 < 2a < 3, \\ -7 < 2a < 17; \end{cases} & \begin{cases} -6,5 < a < 1,5, \\ -3,5 < a < 8,5. \end{cases} \end{cases}$$

Значит, $-3,5 < a < 1,5$.

Ответ: $a \in (-3,5; 1,5)$.

Пример 33. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $|x^2 - 6x + a + 4| > 8$ не имеет решений на отрезке $[a - 5; a]$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 6x + a + 4 = (x - 3)^2 + a - 5$. Заметим, что на промежутке $[3; +\infty)$ функция возрастает, а на промежутке $(-\infty; 3]$ — убывает.

Найдем все значения a , при которых функция $f(x)$ не принимает на отрезке $[a - 5; a]$ значений, по модулю больших 8, т. е. график функции $y = f(x)$ на отрезке $[a - 5; a]$ расположен в пределах горизонтальной полосы: $-8 \leq f(x) \leq 8$.

Отрезок $[a - 5; a]$ не должен принадлежать участку монотонности функции $f(x)$, иначе приращение $f(x)$ на отрезке длины 5 будет не меньше 25, поэтому ее график не поместится в полосу шириной 16.

Значит, $a - 5 < 3 < a$, откуда $3 < a < 8$.

Наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a - 5; a]$ достигается либо при $x = a - 5$, либо при $x = a$.

Наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a - 5; a]$ достигается при $x = 3$. Имеем систему

$$\begin{cases} 3 < a < 8, \\ f(a - 5) \leq 8, \\ f(a) \leq 8, \\ f(3) \geq -8; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 < a < 8, \\ (a - 8)^2 + a - 5 \leq 8, \\ (a - 3)^2 + a - 5 \leq 8, \\ a - 5 \geq -8; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 < a < 8, \\ a^2 - 15a + 51 \leq 0, \\ a^2 - 5a - 4 \leq 0, \\ a \geq -3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 < a < 8, \\ \frac{15 - \sqrt{21}}{2} \leq a \leq \frac{15 + \sqrt{21}}{2}, \\ \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2} \leq a \leq \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}, \\ a \geq -3, \end{cases}$$

откуда находим $\frac{15 - \sqrt{21}}{2} \leq a \leq \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$.

$$\text{Ответ: } a \in \left[\frac{15 - \sqrt{21}}{2}; \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2} \right].$$

Пример 34. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\left| \frac{7}{x+1} - 5 \right| = ax + a - 3$ на промежутке $(-1; +\infty)$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x) = ax + a - 3$ и $g(x) = \left| \frac{7}{x+1} - 5 \right|$.

Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$ на промежутке $(-1; +\infty)$. Заметим, что при $a \leq 0$ $f(x) < 0$, $g(x) \geq 0$ на промежутке $(-1; +\infty)$. Значит, при $a \leq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ не имеет решений на промежутке $(-1; +\infty)$.

При $a > 0$ функция $f(x)$ возрастает, а функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(-1; \frac{2}{5}\right]$, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня на промежутке $\left(-1; \frac{2}{5}\right]$, причем решение будет существовать при условии, если $f\left(\frac{2}{5}\right) \geq g\left(\frac{2}{5}\right)$.

В этом случае получим неравенство $\left(\frac{2}{5} + 1\right)a - 3 \geq 0$, или $\frac{7}{5}a - 3 \geq 0$, откуда $a \geq \frac{15}{7}$.

На промежутке $\left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$ уравнение примет вид

$$ax + a - 3 = 5 - \frac{7}{x+1}, \text{ или } a(x+1) = 8 - \frac{7}{x+1}, \text{ или} \\ a(x+1)^2 = 8(x+1) - 7,$$

откуда получим квадратное уравнение относительно x :

$$ax^2 + 2(a-4)x + (a-1) = 0. \quad (1)$$

Поскольку случай $a \leq 0$ был рассмотрен ранее, то будем считать, что $a > 0$.

Дискриминант $\frac{D}{4} = (a-4)^2 - a(a-1) = -7a + 16$, тогда при $\frac{D}{4} < 0$,

т. е. при $a > \frac{16}{7}$, уравнение (1) не имеет корней; при $a = \frac{16}{7}$ — един-

ственный корень, равный $x = \frac{4-a}{a} = \frac{4-\frac{16}{7}}{\frac{16}{7}} = \frac{28-16}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$; при

$0 < a < \frac{16}{7}$ уравнение (1) имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2 , т. е. $0 < a < \frac{16}{7}$, то бóльший корень $x_2 = \frac{4-a+\sqrt{D}}{a} > \frac{4-a}{a} > 1 > \frac{2}{5}$, поэтому $x_2 \in \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$.

Меньший корень $x_1 \in \left(\frac{2}{5}; +\infty\right)$ в случае, если

$$a\left(x_1 - \frac{2}{5}\right)\left(x_2 - \frac{2}{5}\right) = a\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 2 \cdot (a-4) \cdot \frac{2}{5} + (a-1) = \frac{4}{25}a + \frac{4}{5}a - \frac{16}{5} + a - 1 = \frac{49a-105}{25} > 0, \text{ т. е. } a > \frac{105}{49} = \frac{15}{7}.$$

Следовательно, исходное уравнение на промежутке $(-1; +\infty)$ имеет более двух корней при $\frac{15}{7} < a < \frac{16}{7}$.

Ответ: $a \in \left(\frac{15}{7}; \frac{16}{7}\right)$.

Пример 35. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a^2 - 8a + \sqrt{x^2 + 16} = 3|x - 4a| - 7|x|$ имеет хотя бы один корень.

Решение.

Пусть $f(x) = a^2 - 8a + \sqrt{x^2 + 16}$, $g(x) = 3|x - 4a| - 7|x|$.

Поскольку $x^2 \geq 0$, то $f(x) \geq f(0) = a^2 - 8a + 4$.

Заметим, что функция $g(x)$ является кусочно-линейной, причем при $x < 0$ угловой коэффициент $k = 4$ либо 10 , а при $x > 0$, $k = -4$ либо $k = -10$. Значит, функция $g(x)$ возрастает при $x < 0$ и убывает при $x > 0$, тогда $g(x) \leq g(0) = 12|a|$.

Таким образом, исходное уравнение имеет хотя бы один корень, если $f(0) \leq g(0)$: $a^2 - 8a + 4 \leq 12|a|$.

$$1) \begin{cases} a \geq 0, \\ a^2 - 8a + 4 \leq 12a; \end{cases} \begin{cases} a \geq 0, \\ a^2 - 20a + 4 \leq 0; \end{cases}$$

$$D/4 = 100 - 4 = 96 > 0, a_{1,2} = 10 \pm 4\sqrt{6}.$$

$$\text{Значит, } 10 - 4\sqrt{6} \leq a \leq 10 + 4\sqrt{6}.$$

$$2) \begin{cases} a < 0, \\ a^2 - 8a + 4 \leq -12a; \end{cases} \begin{cases} a < 0, \\ a^2 + 4a + 4 \leq 0; \end{cases} \begin{cases} a < 0, \\ (a+2)^2 \leq 0, \end{cases} \text{ откуда } a = -2.$$

$$\text{Ответ: } \{-2\} \cup [10 - 4\sqrt{6}; 10 + 4\sqrt{6}].$$

Пример 36. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - |x - a + 7| = |x + a - 7| - (a - 7)^2$ имеет единственный корень.

Решение.

Запишем данное уравнение в виде

$$x^2 + (a - 7)^2 = |x - a + 7| + |x + a - 7|. \quad (1)$$

Заметим, что если x_0 — корень уравнения (1), то и $-x_0$ является его корнем. Следовательно, исходное уравнение имеет нечетное число корней только в случае, если $x_0 = -x_0$, или $2x_0 = 0$, т. е. $x = 0$.

Подставляя значение $x = 0$ в уравнение (1), получим

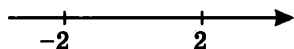
$$0 + (a - 7)^2 = |0 - a + 7| + |0 + a - 7|, \text{ или } (a - 7)^2 = |-(a - 7)| + |a - 7|.$$

Но $|-(a - 7)| = |a - 7|$ и $(a - 7)^2 = |a - 7|^2$, тогда получим $|a - 7|^2 = 2|a - 7|$, или $|a - 7| \cdot (|a - 7| - 2) = 0$, откуда $|a - 7| = 0$, т. е. $a = 7$, или $|a - 7| = 2$, $a - 7 = \pm 2$, т. е. $a = 5$, или $a = 9$.

Если $a = 7$, то уравнение (1) примет вид $x^2 = |x| + |x|$, или $x^2 - 2|x| = 0$, или $|x|^2 - 2|x| = 0$, $|x| \cdot (|x| - 2)$, откуда $|x| = 0$, $x_1 = 0$, $|x| = 2$, $x_{2,3} = \pm 2$, т. е. уравнение имеет три корня, что не удовлетворяет условию.

Если $a = 5$ и $a = 9$, то получим

$$x^2 + 4 = |x - 2| + |x + 2|. \quad (2)$$



Решим уравнение (2) на каждом промежутке:

1) $x \leq -2$, тогда уравнение (2) примет вид $x^2 + 4 = -x + 2 - x - 2$, или $x^2 + 2x + 4 = 0$ — нет корней, так как $D < 0$.

2) $-2 < x \leq 2$, тогда получим $x^2 + 4 = -x + 2 + x + 2$, или $x^2 = 0$, $x = 0$, т. е. уравнение имеет единственный корень, удовлетворяющий условию.

3) $x > 2$. В этом случае уравнение (2) запишется в виде $x^2 + 4 = x - 2 + x + 2$, или $x^2 - 2x + 4 = 0$ — нет корней.

Таким образом, при $a = 5$ и $a = 9$ исходное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Ответ: $a = 5$; $a = 9$.

Пример 37. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^2 - (|a + 3| - |a - 3|)x + (a - 10)(a + 10) = 0$ имеет два различных отрицательных корня.

Решение.

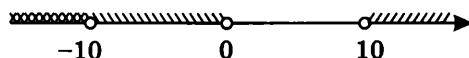
Используя теорему Виета, имеем

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 > 0, \\ x_1 + x_2 < 0, \\ D > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первые два неравенства:

$$\begin{cases} (a-10)(a+10) > 0, \\ |a+3| - |a-3| < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (a-10)(a+10) > 0, \\ (a+3)^2 - (a-3)^2 < 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-10)(a+10) > 0, \\ 2a \cdot 6 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (a-10)(a+10) > 0, \\ a < 0. \end{cases}$$



Значит, $a < -10$.

Теперь рассмотрим дискриминант D , учитывая, что $a < -10$.

$$(|a + 3| - |a - 3|)^2 - 4(a - 10)(a + 10) > 0,$$

$$(-a - 5 + a - 5)^2 - 4(a^2 - 100) > 0,$$

$$100 - 4(a^2 - 100) > 0,$$

$$a^2 - 100 < 25, \quad a^2 < 125, \quad -5\sqrt{5} < a < 5\sqrt{5}.$$

Остается учесть, что $a < -10$, тогда получим $-5\sqrt{5} < a < -10$.

Итак, исходное уравнение имеет два различных отрицательных корня при $-5\sqrt{5} < a < -10$.

Ответ: $a \in (-5\sqrt{5}; -10)$.

1.2. Рациональные системы уравнений и неравенств

Пример 1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3a, \\ 2xy = 3a - 1 \end{cases}$$

имеет два решения.

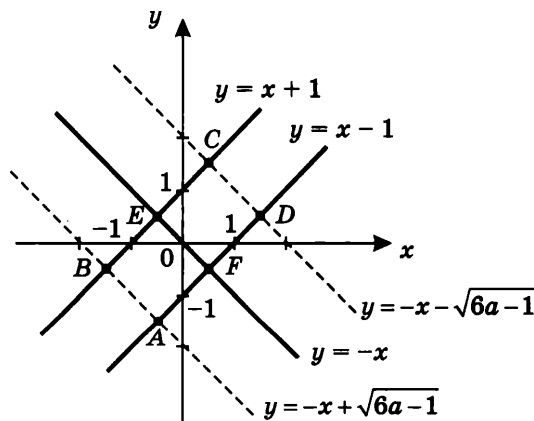
Решение.

Складывая и вычитая левые и правые части системы, имеем

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 6a-1, \\ (x-y)^2 = 1. \end{cases} \quad (1)$$

При $a < \frac{1}{6}$ уравнение (1), а значит, и исходная система не имеют решений.

При $a \geq \frac{1}{6}$ получим $x+y = \pm\sqrt{6a-1}$, откуда

$$\begin{cases} y = -x + \sqrt{6a-1}, \\ y = -x - \sqrt{6a-1}. \end{cases}$$


Как видно из рисунка, при $a > \frac{1}{6}$ система имеет четыре решения (координаты точек A , B , C и D), а при $a = \frac{1}{6}$ — два решения (координаты точек E и F).

Ответ: $a = \frac{1}{6}$.

Пример 2. При каждом значении параметра a решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2(2x - 3y) + 13 = 0, \\ a^2 - 3ax - 2ay - 9 = 0. \end{cases}$$

Решение.

Запишем первое уравнение в виде

$$(x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 0, \text{ или}$$

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$, откуда $x = -2$, $y = 3$, ибо при остальных значениях x и y левая часть положительна.

При $x = -2$, $y = 3$ второе уравнение системы примет вид

$$a^2 + 6a - 6a - 9 = 0, a^2 = 9, a = \pm 3.$$

Следовательно, исходная система имеет решение $x = -2$, $y = 3$ при $a = \pm 3$.

При остальных значениях a решений нет.

Ответ: при $a = \pm 3$ $x = -2$, $y = 3$, при остальных a решений нет.

Пример 3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система
$$\begin{cases} y^2 + xy - 3x - 7y + 12 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$
 имеет единственное решение.

Решение.

Запишем первое уравнение системы в виде

$$xy - 3x + y^2 - 3y - 4y + 12 = 0, \text{ или}$$

$$x(y - 3) + y(y - 3) - 4(y - 3) = 0, \text{ или}$$

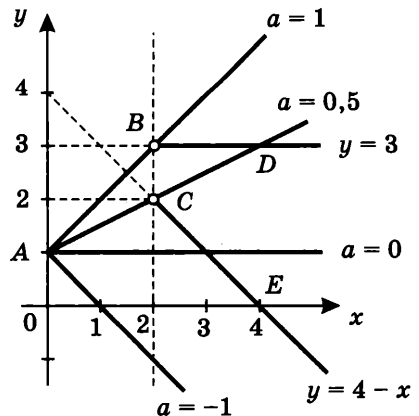
$$(y - 3)(x + y - 4) = 0. \quad (1)$$

Заметим, что уравнение (1) задает пару пересекающихся прямых $y = 4$ и $y = 4 - x$, а система

$$\begin{cases} (y - 3)(x + y - 4) = 0, \\ x > 2 \end{cases}$$

задает части этих прямых, расположенных правее прямой $x = 2$, т. е. лучи BD и CE , исключая сами точки B и C (см. рис.).

Уравнение $y = ax + 1$ задает прямую p с угловым коэффициентом a ,



проходящую через точку $A(0; 1)$. Необходимо найти те значения параметра a , при каждом из которых прямая p имеет одну общую точку с объединением лучей BD и CE .

а) Прямая AB задается уравнением $y = x + 1$, поэтому при $a > 1$ прямая p не пересечет лучи BD и CE .

б) Прямая AC задается уравнением $y = 0,5x + 1$, поэтому при $0,5 \leq a \leq 1$ прямая p пересечет луч BD , но не пересечет луч CE .

в) При $0 < a < 0,5$ прямая p пересечет оба луча.

г) Наконец, при $-1 < a \leq 0$ прямая p пересечет только луч CE , а при $a \leq -1$ она не пересечет ни луч BD , ни луч CE .

Ответ: $-1 < a \leq 0$; $0,5 \leq a \leq 1$.

Пример 4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - 2xy - 2y + 4}{\sqrt{x+2}} = 0, \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно 2 различных решения.

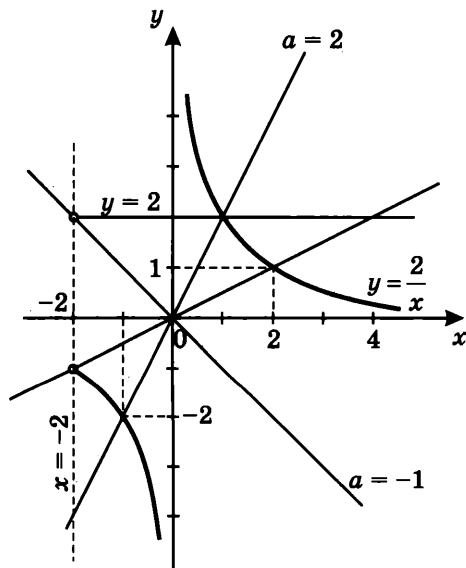
Решение.

Поскольку $xy^2 - 2xy - 2y + 4 = xy(y - 2) - 2(y - 2) = (y - 2)(xy - 2)$, то первое уравнение системы запишется в виде $\frac{(y - 2)(xy - 2)}{\sqrt{x+2}} = 0$.

При $x < -2$ левая часть не имеет смысла, а при $x > -2$ уравнение задает прямую $y = 2$ и гиперболу $y = \frac{2}{x}$.

Уравнение $y = ax$ — прямая, проходящая через начало координат, где a — угловой коэффициент.

При $x > -2$ прямая пересекает прямую $y = 2$ при $a < -1$ и $a > 0$, пересекает правую ветвь гиперболы $y = \frac{2}{x}$, при $a > 0$ пересекает левую ветвь гиперболы при $a > \frac{1}{2}$.



Прямая $y = ax$ проходит через точку пересечения прямой $y = 2$ и гиперболы $y = \frac{2}{x}$ при $a = 2$. Число решений исходной системы уравнений будет равно числу точек пересечения прямой $y = 2$ и гиперболы $y = \frac{2}{x}$ с прямой $y = ax$ при $x > -2$.

Следовательно, исходная система имеет ровно 2 решения при $0 < a \leq \frac{1}{2}$ и при $a = 2$.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup \{2\}$.

Пример 5. При каких значениях параметра a , хотя бы при одном значении параметра c система

$$\begin{cases} bx + 4y = ac^2, \\ x + 4by = ac + 2 \end{cases}$$

имеет решения для любых значений параметра b ?

Решение.

Умножим обе части второго уравнения на b , а затем вычтем первое уравнение:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} bx + 4b^2y = abc + 2b \\ bx + 4y = ac^2 \end{cases} \\ \hline 4y(b^2 - 1) = abc + 2b - ac^2. \end{array}$$

Аналогично умножим обе части первого уравнения на b и вычтем второе уравнение:

$$\begin{array}{r} \begin{cases} b^2x + 4by = abc^2 \\ x + 4by = ac + 2 \end{cases} \\ \hline x(b^2 - 1) = abc^2 - ac - 2. \end{array}$$

Имеем равносильную систему

$$\begin{cases} (b^2 - 1)x = abc^2 - ac - 2, \\ 4(b^2 - 1)y = abc + 2b - ac^2. \end{cases}$$

Система является линейной. При любом $b \neq \pm 1$ система имеет единственное решение.

1. Если $b = -1$, то получим уравнение $ac^2 + ac + 2 = 0$. Рассматривая его как квадратное относительно c , имеем $D = a^2 - 8a$.

Если $D \geq 0$ и $a \neq 0$, то $a(a - 8) \geq 0$, откуда $a \in (-\infty; 0) \cup [8; +\infty)$.

2. Если $b = 1$, то получим уравнение $ac^2 - ac - 2 = 0$. $D = a^2 + 8a \geq 0$, $a \neq 0$, тогда $a(a + 8) \geq 0$, откуда $a \in (-\infty; -8] \cup (0; +\infty)$.

Следовательно, $a \in (-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -8] \cup [8; +\infty)$.

Пример 6. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x, \\ x^2 + y^2 + 4a^2 = 4x + 4ay + 4 \end{cases}$$

имеет решения?

Решение.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-2)^2 = y+4, \\ (y-2a)^2 + (x-2)^2 = 4, \end{cases} \quad \text{откуда получим} \quad \begin{cases} (y-2a)^2 + y + 4 = 4, \\ y + 4 \geq 0, \end{cases}$$

или $\begin{cases} y^2 + (1-4a)y + 4a^2 = 0, \\ y \geq -4. \end{cases}$

Решим первое уравнение системы:

$$D = (1-4a)^2 - 16a^2 = 1-8a, \quad y_{1,2} = \frac{(4a-1) \pm \sqrt{1-8a}}{2}.$$

Следовательно, исходная система имеет решения, если полученная смешанная система имеет хотя бы одно решение. Искомые значения a найдем из неравенства

$$\frac{(4a-1) \pm \sqrt{1-8a}}{2} \geq -4, \quad \text{или} \quad 4a-1 \pm \sqrt{1-8a} \geq -8, \quad \pm \sqrt{1-8a} \geq -7-4a,$$

откуда имеем неравенство $a^2 + 4a + 3 \leq 0$, решая которое находим $-3 \leq a \leq -1$. Учитывая, что $1-8a \geq 0$, т. е. $a \leq \frac{1}{8}$, получим $a \in [-3; -1]$.

Ответ: $[-3; -1]$.

Пример 7. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} axy + 2x - y + \frac{5}{2} = 0, \\ x + 3y + xy + 1 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение.

Выразим x через y во втором уравнении системы:

$$x(1+y) = -3y - 1, \text{ откуда } x = -\frac{3y+1}{y+1}, y \neq -1.$$

Тогда первое уравнение примет вид

$$\begin{aligned} ay \left(-\frac{3y+1}{y+1} \right) + 2 \left(-\frac{3y+1}{y+1} \right) - y + \frac{5}{2} &= 0, \\ -2ay(3y+1) - 4(3y+1) - y(y+1) + 5(y+1) &= 0, \\ -6ay^2 - 2ay - 12y - 4 - y^2 - y + 5y + 5 &= 0, \text{ или} \\ (6a+1)y^2 + 2(a+4)y - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Данная система имеет единственное решение, если:

- 1) дискриминант уравнения (1) равен нулю;
- 2) первый коэффициент $6a+1=0$;
- 3) один из двух корней уравнения (1) равен (-1) .

В первом случае $D/4 = a^2 + 14a + 17 = 0$, откуда $a_{1,2} = -7 \pm 4\sqrt{2}$.

Во втором случае $a = -\frac{1}{6}$.

В третьем случае при $y = -1$ имеем

$$6a + 1 - 2(a+4) - 1 = 0, \text{ откуда } a = 2.$$

Ответ: $a_{1,2} = -7 \pm 4\sqrt{2}$, $a_3 = -\frac{1}{6}$, $a_4 = 2$.

Пример 8. При каждом значении a решите систему

$$\begin{cases} 2x^2 + 9xy + 10y^2 = a, \\ \log_{x+2y}(2x+5y) = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x+5y > 0, \\ x+2y > 0, \\ x+2y \neq 1. \end{cases}$$

По определению логарифма находим

$$2x + 5y = (x + 2y)^3. \quad (1)$$

Заметим, что $2x^2 + 9xy + 10y^2 = (2x^2 + 5xy) +$

$$+ (4xy + 10y^2) = x(2x + 5y) + 2y(2x + 5y) = (2x + 5y)(x + 2y). \quad (2)$$

В этом случае равенство (2) с учетом (1) примет вид

$$2x^2 + 9xy + 10y^2 = (x + 2y)^4 = a. \quad (3)$$

Уравнение (3) с учетом ОДЗ при $a > 0$, $a \neq 1$ имеет решение $x + 2y = \sqrt[4]{a}$, тогда $2x + 5y = \sqrt[4]{a^3}$.

Теперь решим полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y = \sqrt[4]{a}, \\ 2x + 5y = \sqrt[4]{a^3}; \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot (-2) \\ \cdot 1 \end{vmatrix} \begin{cases} -2x - 4y = -2\sqrt[4]{a}, \\ 2x + 5y = \sqrt[4]{a^3}. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, имеем

$$y = -2\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{a^3}, \text{ тогда } x = \sqrt[4]{a} - 2y, \text{ или } x = 5\sqrt[4]{a} - 2\sqrt[4]{a^3}.$$

Ответ: при $a \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$ решений нет; при $a \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$ $x = 5\sqrt[4]{a} - 2\sqrt[4]{a^3}$, $y = -2\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{a^3}$.

Пример 9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 3x - 7y + 12 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Запишем первое уравнение системы в виде

$$xy - 3x + y^2 - 3y - 4y + 12 = 0, \text{ или}$$

$$x(y - 3) + y(y - 3) - 4(y - 3) = 0, \text{ или}$$

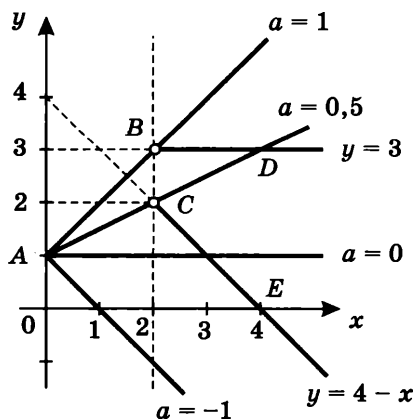
$$(y - 3)(x + y - 4) = 0. \quad (1)$$

Заметим, что уравнение (1) задает пару пересекающихся прямых $y = 4$ и $y = 4 - x$, а система

$$\begin{cases} (y - 3)(x + y - 4) = 0, \\ x > 2 \end{cases}$$

задает части этих прямых, расположенных правее прямой $x = 2$, т. е. лучи BD и CE , исключая сами точки B и C (см. рис.).

Уравнение $y = ax + 1$ задает прямую p с угловым коэффициентом a , проходящую через точку $A(0; 1)$. Необходимо найти те значения параметра a , при каждом из которых прямая p имеет одну общую точку с объединением лучей BD и CE .



а) Прямая AB задается уравнением $y = x + 1$, поэтому при $a > 1$ прямая p не пересечет лучи BD и CE .

б) Прямая AC задается уравнением $y = 0,5x + 1$, поэтому при $0,5 \leq a \leq 1$ прямая p пересечет луч BD , но не пересечет луч CE .

в) При $0 < a < 0,5$ прямая p пересечет оба луча.

г) Наконец, при $-1 < a \leq 0$ прямая p пересечет только луч CE , а при $a \leq -1$ она не пересечет ни луч BD , ни луч CE .

Ответ: $-1 < a \leq 0$; $0,5 \leq a \leq 1$.

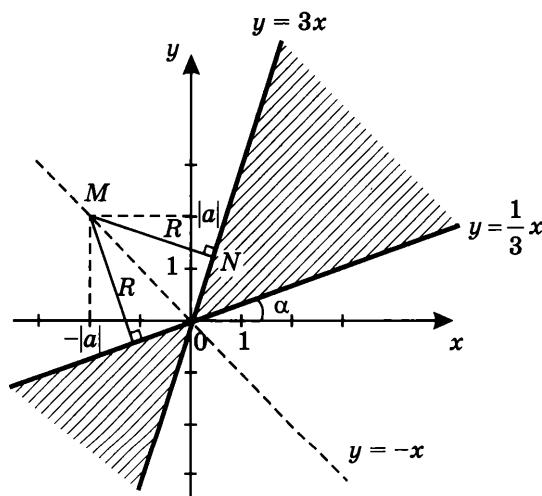
Пример 10. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} (y-3x)(3y-x) \leq 0, \\ \sqrt{(x+a)^2 + (y-a)^2} = \frac{|a+2|}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Первое неравенство системы задает пару вертикальных углов на координатной плоскости xOy (см. рис.).



Графиком уравнения системы является окружность радиуса $R = \frac{|a+2|}{\sqrt{10}}$, центр которой — точка $M(-a; a)$ — лежит на прямой $y = -x$ (биссектриса II и IV координатных углов).

Заметим, что оба графика симметричны относительно прямой $y = -x$, тогда исходная система будет иметь ровно два решения, если

расстояние MN от центра окружности до прямой $y = 3x$ будет равно радиусу $R = \frac{|a+2|}{\sqrt{10}}$ данной окружности.

Из $\triangle MON$ имеем $MN = MO \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$, где $\operatorname{tg} \alpha$ — угловой коэффициент прямой $y = \frac{1}{3}x$.

$$\text{Значит, } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}, \text{ тогда } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{10}},$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } MN &= MO \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \alpha + \cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha \right) = \\ &= |a| \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha \right) = |a| \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = |a| \cdot \frac{4}{\sqrt{10}}. \end{aligned}$$

$$\text{Поскольку } MN = R, \text{ то получим } |a| \cdot \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{|a+2|}{\sqrt{10}}, \text{ или } 4|a| = |a+x|,$$

$$16a^2 = (a+2)^2, 4a = \pm(a+2), \text{ откуда } 4a = a+2, \text{ т. е. } a = \frac{2}{3}, \text{ или}$$

$$4a = -(a+2), a = -\frac{2}{5}.$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{2}{3}, \text{ или } a = -\frac{2}{5}.$$

Пример 11. Найдите все значения a , при которых система неравенств
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - a^2 \leq 10x - 8y - 41, \\ x^2 + y^2 - 9a^2 \leq 4y - 6x + 24a + 3 \end{cases}$$

имеет одно решение.

Решение.

Преобразуем каждое неравенство системы к виду

$$\begin{cases} (x^2 - 10x + 25) + (y^2 + 8y + 16) \leq a^2, \\ (x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) \leq 9a^2 + 24a + 16, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (x-5)^2 + (y+4)^2 \leq a^2, \\ (x+3)^2 + (y-2)^2 \leq (3a+4)^2. \end{cases}$$

Как видим, первое неравенство системы задает круг с центром в точке $M(5; -4)$ радиуса $|a|$, а второе — круг с центром $N(-3; 2)$ радиуса $|3a + 4|$, включая границы кругов.

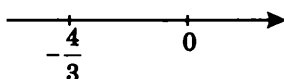
Заметим, что при $a = 0$ и $a = -\frac{4}{3}$ один из кругов вырождается в точку.

Система неравенств будет иметь единственное решение, если круги касаются внешним образом, т. е. когда сумма радиусов $r_1 + r_2$ равна расстоянию MN между центрами, или $MN = \sqrt{(5+3)^2 + (-4-2)^2} = 10$.

Следовательно, получим уравнение $|a| + |3a + 4| = 10$.

Решим полученное уравнение методом разбиения на промежутки:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{4}{3}.$$



1) При $a \leq -\frac{4}{3}$ получим $-a - (3a + 4) = 10$, $-4a = 14$, $a = -3,5$.

2) $-\frac{4}{3} < a \leq 0$. В этом случае имеем $-a + 3a + 4 = 10$, $2a = 6$,

$$a = 3 \notin \left(-\frac{4}{3}; 0\right].$$

3) $a > 0$. Тогда $a + 3a + 4 = 10$, $4a = 6$, $a = 1,5$.

Итак, имеем два значения: $a = -3,5$, или $a = 1,5$, при которых исходная система имеет одно решение.

Ответ: $a = -3,5$ или $1,5$.

Пример 12. Найдите наибольшее значение параметра a , при котором совместна система

$$\begin{cases} 16x + 4y = a, \\ x + 3y \leq 6, \\ x + y \geq 2, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Решение.

Приведем графики системы неравенств:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 6, \\ x + y \geq 2, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Множество решений системы (1) — это множество пар $(x; y)$, которым соответствует множество точек заштрихованной на рисунке области, обозначенной ABC с ее границей.

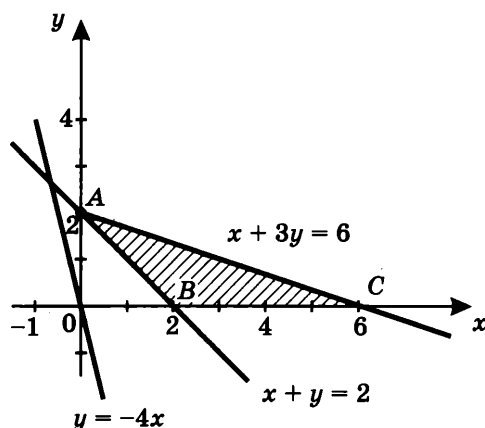
Пусть в уравнении $16x + 4y = a$ $a = 0$, тогда $y = -4x$ (см. рис.).

Прямая, заданная уравнением $16x + 4y = a$, при любом значении параметра a будет параллельна прямой $y = -4x$. Заметим, что с увеличением значений параметра a прямая будет перемещаться параллельно вдоль оси Oy вверх.

Следовательно, наибольшим значением параметра a , при котором прямая $16x + 4y = a$ будет иметь общие точки с заштрихованной фигурой ABC , будет то значение, при котором эта прямая пройдет через точку C , т. е. при $x = 6, y = 0$.

Тогда получим $a = 16 \cdot 6 + 4 \cdot 0 = 96$.

Ответ: 96.



Пример 13. При каком значении параметра a система

$$\begin{cases} \frac{x+2ax+a}{x-8a-4} \geq 0, \\ x+2ax > 16 \end{cases}$$

не имеет решений?

Решение.

Запишем второе неравенство в виде

$$(1 + 2a)x > 16. \quad (1)$$

Если $a = -\frac{1}{2}$, то неравенство (1), а значит, и система не имеют решений.

Если $a > -\frac{1}{2}$, то решением неравенства (1) является луч $x > \frac{16}{1+2a}$.

Если $a < -\frac{1}{2}$, то решением неравенства (1) будет луч $x < \frac{16}{1+2a}$.

При $a \neq -\frac{1}{2}$ первое неравенство исходной системы примет вид

$$\begin{cases} (1+2a)\left(x + \frac{a}{1+2a}\right)(x - 4(1+2a)) \geq 0, \\ x \neq 4(1+2a). \end{cases} \quad (2)$$

Если $a > -\frac{1}{2}$, то решение системы (2) — два луча с концами в точках $-\frac{a}{1+2a}$, $4(1+2a)$.

Если $a < -\frac{1}{2}$, то решением будет полуинтервал с концами в точках $-\frac{a}{1+2a}$, $4(1+2a)$.

Заметим, что точки $x = 4(1+2a)$ нет в множестве решений второго неравенства.

При $a \neq -\frac{1}{2}$ необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{cases} a \leq -\frac{1}{2}, \\ -\frac{a}{1+2a} \geq \frac{10}{1+2a}, \\ 4(1+2a) \geq \frac{16}{1+2a}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{10}{1+2a} + \frac{a}{1+2a} \leq 0, \\ (1+2a)^2 - 4 \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{10+a}{1+2a} \leq 0, \\ |1+2a| \leq 2; \end{cases} \quad \begin{cases} -10 \leq a \leq -\frac{1}{2}, \\ -2 \leq 1+2a \leq 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -10 \leq a \leq -\frac{1}{2}, \\ -\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{откуда } -1,5 \leq a \leq -0,5.$$

Ответ: $-1,5 \leq a \leq -0,5$.

Пример 14. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2ax - 3y = 2a + 3, \\ ax + (2a - 1)y = a + 5 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Из I уравнения системы имеем

$y = \frac{1}{3}(2ax - 2a - 3)$, тогда II уравнение примет вид

$$ax + (2a - 1) \cdot \frac{1}{3}(2ax - 2a - 3) = a + 5, \text{ или}$$

$$3ax + (2a - 1)(2ax - 2a - 3) = 3a + 15,$$

$$3ax + 4a^2x - 2ax - 4a^2 + 2a - 6a + 3 = 3a + 15,$$

$$ax(1 + 4a) = 4a^2 + 7a + 12. \quad (1)$$

Если $a = 0$ или $a = -\frac{1}{4}$, то уравнение (1), а значит, и данная система не имеют решений;

если $a \neq 0$ или $a \neq -\frac{1}{4}$, то уравнение (1), а значит, и данная система имеют единственное решение:

$$x = \frac{4a^2 + 7a + 12}{a(1 + 4a)}, \text{ тогда } y = \frac{1}{3}(2ax - 2a - 3) =$$

$$= \frac{1}{3} \left(2a \cdot \frac{4a^2 + 7a + 12}{a(1 + 4a)} - 2a - 3 \right) = \frac{21}{3(1 + 4a)} = \frac{7}{1 + 4a}.$$

Значит, данная система имеет хотя бы одно решение при любом a , кроме $a = 0$ и $a = -\frac{1}{4}$.

Ответ: при любом a , кроме $a = 0$ и $a = -\frac{1}{4}$.

Пример 15. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} y = x^2 - 4x, \\ x^2 + y^2 + 9a^2 = 4x + 6ay \end{cases}$$

имеет решение?

Решение.

Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} (x - 2)^2 = y + 4, \\ (y - 3a)^2 + (x - 2)^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} (y - 3a)^2 + y + 4 = 4, \\ y + 4 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - (6a - 1)y + 9a^2 = 0, \\ y \geq -4. \end{cases}$$

Решим уравнение $y^2 - (6a - 1)y + 9a^2 = 0$,

$$D = (6a - 1)^2 - 36a^2 = 1 - 12a,$$

$$y_{1,2} = \frac{(6a-1) \pm \sqrt{1-12a}}{2} \text{ и с учетом неравенства}$$

$$y \geq -4 \text{ имеем } \frac{(6a-1) \pm \sqrt{1-12a}}{2} \geq -4, \text{ или} \quad (6a-1) \pm \sqrt{1-12a} \geq -8. \quad (1)$$

Пусть $\sqrt{1-12a} = t$, где $t \geq 0$, тогда

$$1 - 12a = t^2, \quad a = \frac{1}{12}(1 - t^2), \text{ и (1) примет вид}$$

$$\frac{1}{2}(1 - t^2) - 1 \pm t \geq -8,$$

$1 - t^2 - 2 \pm 2t \geq -16$, откуда имеем две системы неравенств:

$$1) \begin{cases} 1 - t^2 - 2 + 2t \geq -16, \\ t \geq 0; \end{cases}$$



$$t^2 - 2t - 15 \leq 0, \quad t_1 = 5, \quad t_2 = -3 \text{ (не удовлетворяет)}.$$

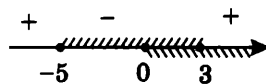
$$0 \leq t \leq 5, \text{ тогда } 0 \leq \sqrt{1-12a} \leq 5, \text{ или}$$

$$0 \leq 1 - 12a \leq 25,$$

$$-1 \leq -12a \leq 24,$$

$$-2 \leq a \leq \frac{1}{12}; \quad (2)$$

$$2) \begin{cases} t^2 + 2t - 15 \geq 0, \\ t \geq 0; \end{cases}$$



$$t_1 = -5, \quad t_2 = 3.$$

$$0 \leq t \leq 3, \text{ или } 0 \leq \sqrt{1-12a} \leq 3, \text{ или}$$

$$0 \leq 1 - 12a \leq 9, \text{ или } -\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{1}{12}. \quad (3)$$

Объединяя (2) и (3), получим решение исходной системы

$$-2 \leq a \leq \frac{1}{12}.$$

$$\text{Ответ: } \left[-2; \frac{1}{12} \right].$$

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения и неравенства

1. При всех значениях параметра a укажите наименьший корень уравнения

$$x^3 - 3ax^2 - (a - 1)^2x + 3a(a - 1)^2 = 0.$$

2. При всех значениях параметра a укажите наибольший корень уравнения

$$x^3 - 2ax^2 - (a + 1)^2x + 2a(a + 1)^2 = 0.$$

3. При каких значениях параметра a уравнение

$$ax^2 + 3x + 2a^2 - 3 = 0$$

имеет только целые корни?

4. При каком значении параметра a уравнение

$$(x^2 - x + 1)(x^2 - x) = 2 - x^2 + x - a$$

имеет два корня?

5. В зависимости от значения параметра a найдите наименьший корень уравнения

$$x^3 + 2ax^2 - (a + 1)^2x - 2a(a + 1)^2 = 0.$$

6. При каких значениях параметра a все решения уравнения $2|x - a| + a - 4 + x = 0$ удовлетворяют неравенству $0 \leq x \leq 4$?

7. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - x + 1| = a$ имеет единственное решение?

8. Найдите все значения параметра a , при которых сумма корней уравнения $x^2 - a(2x - 3) - 2 = 0$ равна сумме кубов корней.

9. Решите уравнение

$$(x + 3a)(x + 4a)(x + 9a)(x + 12a) = 3a^2x^2.$$

10. При каких значениях параметра a бóльший корень уравнения $x^2 - a(a + 2)x + 2a^3 = 0$ больше $\frac{1}{4}$?

11. При каких целых значениях параметра $a \neq 0$ корни уравнения $a^2x^2 - a(2a + 3)x + a^2 + 2a + 2 = 0$ рациональны?

12. Найдите наибольшее целое k , при котором уравнение $x^4 - 8x^2 - k = 0$ имеет ровно три корня.

13. При каком наибольшем целом отрицательном значении параметра b уравнение $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x - b = 0$ имеет ровно три корня?

14. При каком натуральном значении параметра k уравнение $45x - 3x^2 - x^3 + 3k = 0$ имеет один корень?

15. При каком наибольшем целом значении параметра a уравнение $x^4 - 8x^2 - a = 0$ не имеет корней?

16. Найдите наибольшее целое значение параметра m , при котором уравнение $x^4 - 8x^2 - m = 0$ имеет ровно четыре корня.

17. При каком наименьшем натуральном значении параметра k уравнение $x^4 - 8x^2 - k = 0$ имеет ровно два корня?

18. При каком значении параметра a уравнение $|2x + 2| = ax^2 + 4$ имеет ровно два корня?

19. При каком значении параметра a уравнение $x^2 + a|x - 2| = 0$ имеет четыре корня?

20. При каком значении параметра a уравнение $|3 - x^2| = a$ имеет три корня?

21. При каком значении параметра m неравенство $3 - |x - m| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное значение?

22. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $x^2 + 4x + |a - 2| < 0$ имеет решение.

23. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $|x + a| + x^2 < 2$ имеет хотя бы одно положительное решение.

24. Найдите все значения параметра a , при которых каждое решение неравенства $1 - ax^2 \geq 0$ удовлетворяет неравенству $x < 1$.

25. При каких значениях параметра a неравенство $(x - 3a)(x - a - 3) < 0$ выполняется при всех $x \in [1; 3]$?

26. При каких значениях параметра a уравнение $x|x + 2a| = a - 1$ имеет только один корень?

27. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$ выполнено для всех $x > 0$.

28. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 + |x - a| < 4$ имеет хотя бы одно отрицательное решение?

29. При каком значении параметра a неравенство $\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$

выполняется для всех $x \in R$?

30. Найдите все значения параметра a , при которых любое число $x \in R$ является решением хотя бы одного из неравенств:

$$x^2 + 4a^2 \geq a(4x + 1); \quad x^2 + 5a^2 + 8a \geq 2(3ax + 2).$$

Решите системы уравнений и неравенств**31.** При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x^2 - 2ax + 2a^2 = 4 - y^2 \end{cases} \text{ имеет решения?}$$

32. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4a^2, \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 = a^2 \end{cases} \text{ имеет единственное решение?}$$

33. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2x = a^2 - 1 \end{cases} \text{ имеет решение?}$$

34. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{2x}{x-|x|}, \\ (x+a)^2 + y + a - 3 = 0 \end{cases} \text{ имеет единственное решение?}$$

35. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} 5|y| + |x-1| = 1, \\ 25y^2 + x^2 - 2x = a \end{cases} \text{ имеет ровно четыре решения?}$$

36. Найдите все значения параметра a , для каждого из которых числа x и y , удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} -x + 2y = 10a - 5, \\ 2x + 5y = a + 1, \end{cases}$$

удовлетворяют также неравенству $x > y + 5a$.

37. При каких значениях параметра k система уравнений

$$\begin{cases} 3x - (k^2 - 6)y = k, \\ x - y = 1 \end{cases} \text{ не имеет решений?}$$

38. Найдите наибольшее целое a , при котором решения системы

$$\begin{cases} 3x + 7y = a, \\ 2x + 5y = 20 \end{cases} \text{ удовлетворяют условиям } x > 0, y > 0.$$

39. Найдите все значения m , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y + |x| = m \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

40. При каких значениях k система уравнений $\begin{cases} kx^2 - |y| = -1, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

не имеет решений?

41. При каких значениях параметра a система неравенств

$\begin{cases} \frac{x-y}{x+3y} \geq 0, \\ y(y-2) + x^2 \leq a^2 - 1 \end{cases}$ не имеет решений?

42. Найдите все значения параметра a , при которых система неравенств $\begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0, \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

43. Найдите все значения параметра m , при которых система $\begin{cases} x^2 - (3m+1) + 2m^2 + 2m < 0, \\ x + m^2 = 0 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

44. Найдите все значения параметра a , при которых система неравенств $\begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

45. При каких значениях параметра a система неравенств $\begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0, \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 \end{cases}$ имеет решение?

46. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} ax + 2ay - a^2 - 2xy + 2 = 0, \\ 8ax + 4ay + 7a^2 - 4x^2 - 4y + 20a = 0 \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

47. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система $\begin{cases} |x + 2y + 1| \leq 1, \\ (x-a)^2 + (y-2a)^2 = a + 2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

48. Найдите все положительные значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x - 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

49. Найдите все пары (x, y) целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств
$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$

50. При каких действительных значениях параметра a система уравнений
$$\begin{cases} 3|x| + 2|y| = 12, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$
 имеет наибольшее число решений?

§ 2. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами

Это уравнения, содержащие неизвестное под знаком корня (радикала):

При решении иррациональных уравнений речь идет о нахождении только действительных корней.

Основные методы решения иррациональных уравнений:

- 1) возведение обеих частей уравнения в одну и ту же степень;
- 2) введение новых переменных;
- 3) искусственные приемы решения.

Заметим, что все корни *четной* степени, входящие в уравнение, являются арифметическими, а все корни *нечетной* степени определены при любом действительном значении подкоренного выражения.

При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень следует учесть, что если n — четное число, то уравнение $(f(x))^n = (\varphi(x))^n$ является следствием уравнения $f(x) = \varphi(x)$, т. е. при переходе от уравнения $f(x) = \varphi(x)$ к уравнению $(f(x))^n = (\varphi(x))^n$ могут появиться посторонние корни.

При решении иррациональных уравнений используется формула $(\sqrt[n]{f(x)})^n = f(x)$, применение которой может привести к расширению области определения уравнения в случае четного n .

По этим причинам (и по другим) при решении иррациональных уравнений в большинстве случаев необходима *проверка* найденных корней.

Сам способ проверки зависит от вида найденных решений (простые и сложные), а также от способа решения уравнения.

В случае, когда при решении уравнений получаются громоздкие корни (и проверка затруднительна), целесообразнее переходить к равносильным системам уравнений и неравенств (смешанным системам).

Краткая теория и справочные материалы

1. Свойства арифметических корней

Для любых натуральных $n > 1$ и $k > 1$ и любых $a \geq 0$, $b \geq 0$ верны соотношения:

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{ab} &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; & \sqrt[n]{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); \\ (\sqrt[n]{a})^k &= \sqrt[n]{a^k}; & \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} &= \sqrt[nk]{a}; \\ \sqrt[n]{a} &= \sqrt[nk]{a^k}; & (\sqrt[n]{a})^n &= a \quad (a \geq 0); \\ \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, & \text{ если } 0 \leq a < b; & \sqrt{a^2} &= |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0; \end{cases} \\ \sqrt[2n]{a^{2n}} &= |a|; & \sqrt[2n+1]{-a} &= -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0). \end{aligned}$$

2. Некоторые важные неравенства

1. Неравенство Коши:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \text{ где } x \geq 0, y \geq 0.$$

2. Неравенство треугольника:

$$|x+a| \leq |x| + |a|.$$

3. Неравенство для двух взаимно обратных величин:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \text{ где } x > 0.$$

$$4. \frac{a^2+1}{2} \geq a.$$

$$5. \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

3. Иррациональные неравенства

1. Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 < (g(x))^2. \end{cases}$$

2. Иррациональное неравенство $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 > (g(x))^2; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

Задачи с решениями

Пример 1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + 4a^2} = x^2 + x - 2a$$

имеет ровно 3 решения.

Решение.

Возведем обе части уравнения в квадрат, учитывая, что $x^2 + x - 2a \geq 0$.

$$\begin{cases} x^4 - x^2 + 4a^2 = ((x^2 + x) - 2a)^2, \\ x^2 + x - 2a \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^4 - x^2 + 4a^2 = x^4 + 2x^3 + x^2 - 4ax^2 - 4ax + 4a^2, \\ x^2 + x - 2a \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ax(x+1) = x^2(x+1), \\ x^2 + x - 2a \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+1)(2a-x) = 0, \\ x^2 + x - 2a \geq 0. \end{cases}$$

Из уравнения находим $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2a$.

Чтобы уравнение имело 3 различных корня, необходимо, чтобы при $x = 0$, $x = -1$, $x = 2a$ выполнялось неравенство $x^2 + x - 2a \geq 0$, а также были выполнены условия $2a \neq 0$ и $2a \neq -1$.

Имеем систему неравенств

$$\begin{cases} (-1)^2 + (-1) - 2a \geq 0, \\ 0^2 + 0 - 2a \geq 0, \\ (2a)^2 + 2a - 2a \geq 0, \\ 2a \neq 0, \\ 2a \neq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} a \leq 0, \\ a \neq 0, \\ a \neq -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} a < -\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2} < a < 0. \end{cases}$$

Итак, исходное уравнение имеет ровно 3 корня при $a < -\frac{1}{2}$,

$$-\frac{1}{2} < a < 0.$$

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Пример 2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(x - x^2)^2 - 4\sqrt{x - x^2} = a^2 - 4a$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Пусть $\sqrt{x - x^2} = t$, где $0 \leq t \leq 1$, так как $0 \leq x - x^2 \leq 1$.

Тогда исходное уравнение примет вид

$$t^4 - 4t = a^2 - 4a.$$

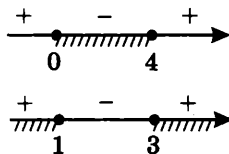
Рассмотрим функцию $f(t) = t^4 - 4t$ на $[0; 1]$.

Так как $f'(t) = (t^4 - 4t)' = 4t^3 - 4 = 4(t^3 - 1) < 0$ на промежутке $[0; 1]$, то функция $f(t)$ убывает на $[0; 1]$.

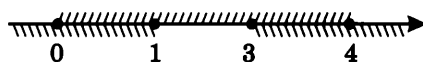
Следовательно, $E(f) = [f(1); f(0)] = [-3; 0]$.

Значит, уравнение $f(t) = a^2 - 12a$ имеет решения тогда и только тогда, когда $-3 \leq a^2 - 4a \leq 0$.

$$\begin{cases} a^2 - 4a \leq 0, \\ a^2 - 4a + 3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a(a - 4) \leq 0, \\ (a - 1)(a - 3) \geq 0. \end{cases}$$



Следовательно, решением системы неравенств будет пересечение полученных множеств.



$$0 \leq a \leq 1, 3 \leq a \leq 4.$$

Ответ: $[0; 1] \cup [3; 4]$.

Замечание. Задачу можно решить иначе, построив эскиз графика функции $f(t) = t^4 - 4t$ на отрезке $[0; 1]$, а затем исследовать взаимное расположение графика функции и прямой $y = a^2 - 4a$.

Пример 3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{4x^2 - (4a + 2)x + 2a}$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

Решение.

Возведем обе части уравнения в квадрат, учитывая ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 - a^2 = 4x^2 - (4a + 2)x + 2a, & \begin{cases} 3x^2 - (4a + 2)x + (a^2 + 2a) = 0, \\ (x - a)(x + a) \geq 0. \end{cases} \\ x^2 - a^2 \geq 0; \end{cases}$$

Решим уравнение $3x^2 - (4a + 2)x + (a^2 + 2a) = 0$,

$$D = (4a + 2)^2 - 12(a^2 + 2a) = 16a^2 + 16a + 4 - 12a^2 - 24a = (2a - 2)^2,$$

$$x_{1,2} = \frac{(4a + 2) \pm (2a - 2)}{6}, \quad x_1 = a, \quad x_2 = \frac{a + 2}{3}.$$

Заметим, что корень $x = a$ удовлетворяет II уравнению системы при любом a , а корень $x_2 = \frac{a + 2}{3}$ удовлетворяет тогда и только тогда,

когда $\left(\frac{a + 2}{3} - a\right)\left(\frac{a + 2}{3} + a\right) \geq 0$, или $\frac{1}{3}(-2a + 2) \cdot \frac{1}{3}(4a + 2) \geq 0$, откуда на-

ходим $-\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.

Следовательно, у исходного уравнения будет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$, если:

1) $x_1 = a \in [0; 1]$, а корень $x_2 = \frac{a + 2}{3}$ не подходит.

Получим систему $\begin{cases} 0 \leq a \leq 1, \\ a \notin \left[-\frac{1}{2}; 1\right]. \end{cases}$ Таких значений a нет.

2) $x_1 = a \in [0; 1]$, а корень $x_2 = \frac{a+2}{3}$ подходит, но $x_2 \notin [0; 1]$.

Имеем систему
$$\begin{cases} 0 \leq a \leq 1, \\ a \in \left[-\frac{1}{2}; 1\right], \\ \frac{a+2}{3} < 0, \text{ или } \frac{a+2}{3} > 1. \end{cases}$$

3) $x_1 = a \notin [0; 1]$, а x_2 — подходит и лежит на отрезке $[0; 1]$.

Получим систему
$$\begin{cases} a < 0, \text{ или } a > 1, \\ a \notin \left[-\frac{1}{2}; 1\right], \\ 0 \leq \frac{a+2}{3} \leq 1, \text{ откуда } a \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]. \end{cases}$$

4) Корни совпадают, т. е. $x_1 = x_2 \in [0; 1]$.

Следовательно, $a < \frac{a+2}{3}$, или $3a = a + 2$, $a = 1 \in [0; 1]$.

Ответ: $a \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \{1\}$.

Пример 4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{3-5x} \ln(4x^2 - a^2) = \sqrt{3-5x} \ln(2x - a)$ имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\sqrt{3-5x} (\ln(4x^2 - a^2) - \ln(2x - a)) = 0,$$

откуда $\sqrt{3-5x} = 0$, или $\ln(4x^2 - a^2) - \ln(2x - a) = 0$.

1. Если $\sqrt{3-5x} = 0$, то $3 - 5x = 0$, $x = \frac{3}{5}$.

Кроме того, $4x^2 - a^2 > 0$, $2x - a > 0$.

Имеем

$$\begin{cases} x = \frac{3}{5}, \\ 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - a^2 > 0, \\ 2 \cdot \frac{3}{5} - a > 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{3}{5}, \\ \frac{36}{25} - a^2 > 0, \\ \frac{6}{5} - a > 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{3}{5}, \\ -\frac{6}{5} < a < \frac{6}{5}. \end{cases}$$

Следовательно, $-\frac{6}{5} < a < \frac{6}{5}$.

2. $\ln(4x^2 - a^2) = \ln(2x - a)$ при условии $3 - 5x \geq 0$.

Получим

$$\begin{cases} 4x^2 - a^2 = 2x - a, \\ 2x - a > 0, \\ 3 - 5x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} (2x - a)(2x + a - 1) = 0, \\ 2x - a > 0, \\ 3 - 5x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} x \leq \frac{3}{5}, \\ 2x - a > 0, \\ \begin{cases} x = \frac{a}{2}, \\ x = \frac{1-a}{2}. \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{а) } \begin{cases} x \leq \frac{3}{5}, \\ 2x - a > 0, \\ x = \frac{a}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{a}{2}, \\ \frac{a}{2} \leq \frac{3}{5}, \\ 2 \cdot \frac{a}{2} - a > 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{a}{2}, \\ a \leq \frac{6}{5}, \\ 0 \cdot a > 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x = \frac{1-a}{2}, \\ \frac{1-a}{2} \leq \frac{3}{5}, \\ 2 \cdot \frac{1-a}{2} - a > 0; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1-a}{2}, \\ a \geq -\frac{1}{5}, \\ a < \frac{1}{2}; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{1-a}{2}, \\ -\frac{1}{5} \leq a < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Объединяя оба случая, получим, что исходное уравнение имеет хотя бы одно решение при $-\frac{6}{5} < a < \frac{6}{5}$.

Ответ: $\left(-\frac{6}{5}; \frac{6}{5}\right)$.

Пример 5. В зависимости от значений параметра a решите уравнение $\sqrt{a+2x} + \sqrt{a-2x} = x$.

Решение.

Заметим, что $x \geq 0$.

Если $a = 0$, то $x = 0$. Верно и обратное. Допустим, что $x > 0$. Тогда, полагая $\sqrt{a+2x} = u$, $\sqrt{a-2x} = v$, получим систему

$$\begin{cases} u+v=x, \\ u^2-v^2=4x; \end{cases} \quad \begin{cases} u+v=x, \\ (u+v)(u-v)=4x; \end{cases} \quad \begin{cases} u+v=x, \\ u-v=4, \end{cases}$$

$$\text{откуда } u = \sqrt{a+2x} = \frac{x+4}{2}. \quad (1)$$

Возведем обе части (1) в квадрат:

$$\begin{aligned} a+2x &= \frac{1}{4}(x^2+8x+16), \text{ или} \\ 4a+8x &= x^2+8x+16, \quad x^2=4a-16, \text{ или} \\ x^2 &= 4(a-4). \end{aligned} \quad (2)$$

Из (2) получим $x = 2\sqrt{a-4}$, где $a > 4$.

Заметим, что исходное уравнение и уравнение (1) равносильны. При переходе же от уравнения (1) к уравнению (2) могли появиться посторонние корни (при возведении в квадрат), поэтому необходимо проверить найденные корни. Подставляя значение $x = 2\sqrt{a-4}$ в исходное уравнение, получим

$$\begin{aligned} \sqrt{a+4\sqrt{a-4}} + \sqrt{a-4\sqrt{a-4}} &= 2\sqrt{a-4}, \text{ или} \\ \sqrt{(a-4)+4\sqrt{a-4}+4} + \sqrt{(a-4)-4\sqrt{a-4}+4} &= 2\sqrt{a-4}, \\ \sqrt{(\sqrt{a-4}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{a-4}-2)^2} &= 2\sqrt{a-4}, \\ |\sqrt{a-4}+2| + |\sqrt{a-4}-2| &= 2\sqrt{a-4}, \\ |\sqrt{a-4}-2| &= \sqrt{a-4}-2, \end{aligned}$$

решая которое как уравнение относительно параметра a , получим $a \geq 8$, а не $a > 4$, что следует при решении уравнения (2).

Ответ: если $a \in (-\infty; 0) \cup (0; 8)$, то решений нет;

если $a = 0$, то $x = 0$;

если $a \in [8; +\infty)$, то $x = 2\sqrt{a-4}$.

Пример 6. В зависимости от значений параметра a решите уравнение $\sqrt{3x+a} - \sqrt{x-2} = 3$.

Решение.

Пусть $\sqrt{x-2} = y$, где $y \geq 0$, тогда $x = y^2 + 2$, и исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{3y^2 + a + 6} = y + 3. \quad (1)$$

Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} 3y^2 + a + 6 = y^2 + 6y + 9, \\ y \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2y^2 - 6y + a - 3 = 0, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решим уравнение системы (2):

$$2y^2 - 6y + (a - 3) = 0, \quad D/4 = 9 - 2(a - 3) = 15 - 2a,$$

$$y_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{15 - 2a}}{2}.$$

Заметим, что система (2) будет иметь решения в трех случаях:

1) $0 \leq y_1 = y_2$; 2) $0 \leq y_1 < y_2$; 3) $y_1 < 0 \leq y_2$.

Первый случай будет иметь место, если $15 - 2a = 0$, т. е. при $a = 7,5$. В этом случае $y_1 = y_2 = 1,5$, значит, $x = (1,5)^2 + 2 = 4,25$.

Второй случай выполняется, если $\frac{3 - \sqrt{15 - 2a}}{2} \geq 0$, или $\sqrt{15 - 2a} \leq 3$.

С учетом первого случая полученное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 15 - 2a > 0, \\ 15 - 2a \leq 9; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 7,5, \\ a \geq 3, \end{cases} \quad \text{откуда } 3 \leq a < 7,5.$$

При этих значениях параметра a получим решения:

$$x_{1,2} = \frac{1}{4} (3 \pm \sqrt{15 - 2a})^2 + 2, \quad \text{или } x_{1,2} = \frac{1}{4} (9 \pm 6\sqrt{15 - 2a} + 15 - 2a) + 2,$$

$$x_{1,2} = 8 - \frac{1}{2}a \pm \frac{3}{2}\sqrt{15 - 2a}.$$

Третий случай выполняется, если

$$\begin{cases} \frac{3 - \sqrt{15 - 2a}}{2} < 0, \\ \frac{3 + \sqrt{15 - 2a}}{2} \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{15 - 2a} > 3, \\ \sqrt{15 - 2a} \geq -3, \end{cases}$$

откуда $\sqrt{15 - 2a} > 3$, $15 - 2a > 9$, или $a < 3$.

При этом значении параметра a получим

$$x = 8 - \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}\sqrt{15-2a}.$$

Ответ: если $a < 3$, то $x = 8 - \frac{1}{2}a + \frac{3}{2}\sqrt{15-2a}$;

если $3 \leq a \leq 7,5$, то $x_{1,2} = 8 - \frac{1}{2}a \pm \frac{3}{2}\sqrt{15-2a}$;

если $a = 7,5$, то $x = 4,25$;

если $a > 7,5$, то корней нет.

Пример 7. В зависимости от значений параметра a решите уравнение $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt[3]{2+x} = a$.

Решение.

Пусть $\sqrt[3]{2+x} = y$, тогда $x = y^3 - 2$, и исходное уравнение примет вид

$$y + \sqrt[3]{4-y^3} = a. \quad (1)$$

Уравнение (1) запишем в виде $\sqrt[3]{4-y^3} = a - y$, или, возведя обе части в куб, имеем

$$4 - y^3 = (a - y)^3, \text{ или } 4 - y^3 = a^3 - 3a^2y + 3ay^2 - y^3, \text{ или } 3ay^2 - 3a^2y + a^3 - 4 = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) квадратное относительно y :

$$D = 9a^4 - 12a(a^3 - 4) = 48a - 3a^4 = 3a(16 - a^3),$$

$$y_{1,2} = \frac{1}{6a} \left(3a^2 \pm \sqrt{3a(16 - a^3)} \right), \text{ где } 0 < a \leq 2\sqrt[3]{2}.$$

Учитывая подстановку, находим $x = y^3 - 2$, или

$$x_{1,2} = \frac{1}{216a^3} \left(3a^2 \pm \sqrt{3a(16 - a^3)} \right)^3 - 2.$$

Ответ: если $a \in (-\infty; 0] \cup (2\sqrt[3]{2}; +\infty)$, то корней нет;

если $a \in (0; 2\sqrt[3]{2}]$, то

$$x_{1,2} = \frac{1}{216a^3} \left(3a^2 \pm \sqrt{3a(16 - a^3)} \right)^3 - 2.$$

Пример 8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{x^2 - 6ax - 9a} = 4 - x$ не имеет решений.

Решение.

Пусть $\sqrt{x^2 - 6ax - 9a} = 4 - x$ равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0, \\ x^2 - 6ax - 9a = (4 - x)^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 4, \\ x^2 - 6ax - 9a = 16 - 8x + x^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ 8x - 6ax = 9a + 16; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 4, \\ 2(4 - 3a)x = 9a + 16. \end{cases}$$

а) Пусть $4 - 3a \neq 0$, т. е. $a \neq \frac{4}{3}$, тогда
$$\begin{cases} x \leq 4, \\ x = \frac{9a + 16}{2(4 - 3a)}. \end{cases}$$

Значит, если $\frac{9a + 16}{2(4 - 3a)} > 4$, то решения не попадают в область определения $D(y)$.

Имеем $\frac{9a + 16}{2(4 - 3a)} - 4 > 0$, или $\frac{9a + 16 - 32 + 24a}{2(4 - 3a)} > 0$, $\frac{33a - 16}{2(4 - 3a)} > 0$,

$$\frac{33a - 16}{3a - 4} < 0.$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, имеем

$$a_1 = \frac{16}{33}, \quad a_2 = \frac{4}{3},$$

$$\begin{array}{c} + \quad \quad \quad - \quad \quad \quad + \\ \hline \frac{16}{33} \quad \quad \quad \frac{4}{3} \end{array} \quad a \in \left(\frac{16}{33}; \frac{4}{3} \right).$$

б) При $a = \frac{4}{3}$ решений нет.

Ответ: при $a \in \left(\frac{16}{33}; \frac{4}{3} \right]$ уравнение не имеет решений.

Пример 9. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{a - 2xy} = y - x + 5$ имеет единственное решение.

Решение.

Данное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} \sqrt{a - 2xy} = y - x + 5, \\ y - x + 5 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a - 2xy = y^2 + x^2 - 2xy + 10y + 25 - 10x, \\ y - x + 5 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2 - 10x + 25) + (y^2 + 10y + 25) = a + 25, \\ y - x + 5 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 5)^2 + (y + 5)^2 = a + 25, \\ y - x + 5 \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение $(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = a + 25$ при $a > -25$ задает на координатной плоскости окружность с центром в точке $A(-5; 5)$ и радиусом $R = \sqrt{a + 25}$, а неравенство $y - x + 5 \geq 0$ задает верхнюю полуплоскость с границей $y - x + 5 = 0$.

Как видно из рисунка, окружность и полуплоскость имеют одну общую точку, если радиус окружности

$$R = \frac{1}{2}AO \text{ квадрата } MANO,$$

т. е. $\sqrt{a + 25} = \frac{5}{\sqrt{2}}$, откуда $a + 25 = \frac{25}{2}$, $a = -12,5$.

При $a < -25$ уравнение, а следовательно, и система не имеют решений, а при $a = -25$ решением уравнения будет пара $(5; -5)$, не удовлетворяющая неравенству $y - x + 5 \geq 0$.

Ответ: $-12,5$.

Пример 10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $ax + \sqrt{5 - 4x - x^2} = 2a + 3$ имеет единственный корень.

Решение.

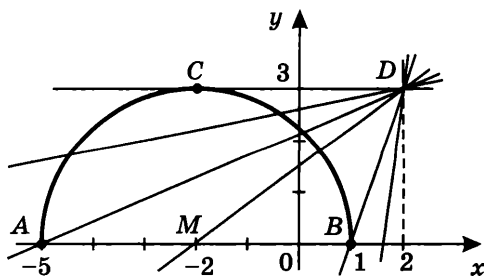
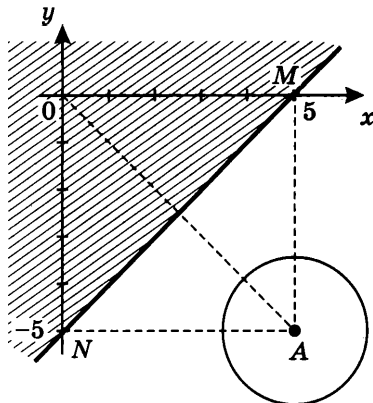
Запишем данное уравнение в виде

$$\sqrt{5 - 4x - x^2} = -ax + 2a + 3. \quad (1)$$

Приведем графическое решение уравнения (1), для чего рассмотрим функции

$$f(x) = \sqrt{5 - 4x - x^2} \text{ и } g(x) = -ax + 2a + 3.$$

Заметим, что графиком функции $f(x) = \sqrt{3^2 - (x + 2)^2}$ является полуокружность радиуса $r = 3$ с центром в точке $M(-2; 0)$, лежащая в верхней полуплоскости. Графиком функции $g(x) = -ax + 2a + 3$ явля-



ется прямая с угловым коэффициентом $(-a)$, проходящая через точку $D(2; 3)$.

Уравнение (1) имеет единственный корень при условии, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют одну общую точку: либо прямая $g(x)$ касается полуокружности, либо пересекает ее в одной точке.

Поскольку касательная DC , проведенная из точки D к полуокружности, параллельна оси Ox , то угловой коэффициент равен нулю, т. е. при $a = 0$ исходное уравнение имеет один корень.

При $-a < 0$ прямая $g(x)$ не имеет общих точек с полуокружностью.

Так как прямая DA , заданная уравнением $y = -ax + 2a + 3$, проходит через точки $D(2; 3)$ и $A(-5; 0)$, то получим

$$0 = 5a + 2a + 3, \text{ откуда } 7a = -3, -a = \frac{3}{7}.$$

При $0 < -a \leq \frac{3}{7}$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 2a + 3$, имеет две общие точки с полуокружностью.

Аналогично прямая DB , заданная уравнением $y = -ax + 2a + 3$, проходит через точки D и B , тогда $0 = -a + 2a + 3, -a = 3$.

При $\frac{3}{7} < -a \leq 3$ прямая, заданная уравнением $y = -ax + 2a + 3$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой DA , и не больше, чем у прямой DM , и пересекает полуокружность в одной точке.

Таким образом, при $-3 \leq a < -\frac{3}{7}$ исходное уравнение имеет единственный корень, а при $-a > 3$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

$$\text{Ответ: } \left[-3; -\frac{3}{7}\right); 0.$$

Пример 11. В зависимости от значений параметра a решите неравенство $x + 5a > 6\sqrt{ax}$.

Решение.

Если $a < 0$, то из правой части неравенства следует, что $x \leq 0$. Но тогда $x + 5a < 0$, значит, ни при каких отрицательных значениях a исходное неравенство не имеет решений.

Если $a = 0$, то $x > 0$.

Пусть $a > 0$, тогда $x \geq 0$, и $x = 0$ является решением исходного неравенства. Кроме того, при таких значениях a и x данное неравенство равносильно неравенству $(x + 5a)^2 > 36ax$, или $x^2 - 26ax + 25a^2 > 0$.

Разлагая на множители левую часть полученного неравенства, имеем $(x - a)(x - 25a) > 0$.

Решая полученное неравенство методом интервалов, находим $0 < x < a$, $x > 25a$.

Ответ: при $a < 0$ решений нет; при $a = 0$ $x > 0$;
при $a > 0$, $0 \leq x < a$, $x > 25a$.

Пример 12. При каких значениях параметра a множество решений неравенства $3 + \sqrt{x^2 + ax} > x$ содержит отрезок $[5; 8]$?

Решение.

Запишем неравенство в виде $\sqrt{x^2 + ax} > x - 3$. (1)

Поскольку $x \in [5; 8]$, то $x - 3 > 0$.

Тогда неравенство (1) равносильно системе $\begin{cases} x^2 + ax > (x - 3)^2, \\ x^2 + ax \geq 0. \end{cases}$

Из первого неравенства системы имеем

$$x^2 + ax > x^2 - 6x + 9, \text{ или } (a + 6)x - 9 > 0.$$

Графиком функции $y = (a + 6)x - 9$ является прямая, причем в точках $x = 5$ и $x = 8$ функция принимает положительные значения.

Следовательно, получим системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} (a + 6) \cdot 5 - 9 > 0, \\ (a + 6) \cdot 8 - 9 > 0; \end{cases} \begin{cases} 5a > -21, \\ 8a > -39; \end{cases} \begin{cases} a > -\frac{21}{5}, \\ a > -\frac{39}{8}, \end{cases} \text{ откуда } a > -\frac{21}{5}.$$

Ответ: $\left(-\frac{21}{5}; +\infty\right)$.

Пример 13. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства $3 + \sqrt{x^2 + 3ax} > x$ содержит отрезок $[3; 6]$.

Решение.

Запишем неравенство в виде $\sqrt{x^2 + 3ax} > x - 3$.

Возведем обе части в квадрат: $x^2 + 3ax > x^2 - 6x + 9$, $3 \leq x \leq 6$.

$3ax > -6x + 9$, откуда $a > -2 + \frac{3}{x}$, $3 \leq x \leq 6$.

На отрезке $[3; 6]$ функция $a(x) = -2 + \frac{3}{x}$ убывает.

Следовательно, чтобы отрезок $[3; 6]$ являлся решением неравенства $a > -2 + \frac{3}{x}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось нера-

венство $a > a(3) = -2 + \frac{3}{3} = -1$, т. е. $a > -1$.

Ответ: $(-1; +\infty)$.

Пример 14. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $|x - 2a^2| - \sqrt{x - \frac{5}{4}} \geq 0$ выполняется при любом допустимом значении x .

Решение.

Запишем неравенство в виде $|x - 2a^2| \geq \sqrt{x - \frac{5}{4}}$.

Поскольку обе части неравенства неотрицательны, то, возведя в квадрат, с учетом ОДЗ, получим

$$\begin{cases} (x - 2a^2)^2 \geq x - \frac{5}{4}, \\ x \geq \frac{5}{4}; \end{cases} \begin{cases} x^2 - 4a^2x + 4a^4 \geq x - \frac{5}{4}, \\ x \geq \frac{5}{4}; \end{cases} \begin{cases} x^2 - (4a^2 + 1)x + 4a^4 + \frac{5}{4} \geq 0, \\ x \geq \frac{5}{4}. \end{cases}$$

При всех $x \geq \frac{5}{4}$ полученное неравенство может быть выполнено лишь в двух случаях.

1) Дискриминант $D \leq 0$, т. е. $(4a^2 + 1)^2 - 4 \cdot \left(4a^4 + \frac{5}{4}\right) \leq 0$,

$$16a^4 + 8a^2 + 1 - 16a^4 - 5 \leq 0, 8a^2 - 4 \leq 0, a^2 \leq \frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2) Дискриминант $D > 0$, но оба корня удовлетворяют условию $x \leq \frac{5}{4}$, что невозможно.

Действительно, пусть x_0 — абсцисса вершины параболы, которая является графиком квадратичной функции

$$f(x) = x^2 - (4a^2 + 1)x + 4a^4 + \frac{5}{4}.$$

$$\text{Тогда } x_0 = \frac{1}{2}(4a^2 + 1) = 2a^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Но корни x_1 и x_2 квадратного трехчлена расположены симметрично относительно x_0 , значит, бо́льший корень расположен правее $\frac{1}{2}$,

$$\text{т. е. } x_2 > \frac{1}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Ответ: } \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right].$$

Пример 15. В зависимости от значений параметра a решите неравенство $\sqrt{4x+a} \geq x$.

Решение.

І способ

Пусть $\sqrt{4x+a} = y$, тогда данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} y^2 - 4y - a \leq 0, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Квадратный трехчлен $f(y) = y^2 - 4y - a$ имеет следующие случаи расположения корней y_1 и y_2 :

$$1) 0 \leq y_1 \leq y_2; \quad 2) y_1 < 0 \leq y_2.$$

При выполнении этих условий система (1) будет иметь решения.

Заметим, что первый случай выполняется, если совместна система

$$\begin{cases} D = 4(4+a) \geq 0, \\ f(0) = -a \geq 0, \end{cases}$$

где D — дискриминант трехчлена $f(y)$.

$$\text{Далее имеем } \begin{cases} 4+a \geq 0, \\ a \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geq -4, \\ a \leq 0, \end{cases} \quad \text{откуда } -4 \leq a \leq 0.$$

При этих значениях a решениями системы (1) будут все y из промежутка $[y_1; y_2]$, где $y_1 = 2 - \sqrt{4+a}$, $y_2 = 2 + \sqrt{4+a}$.

Следовательно, решениями исходного неравенства будут все те x , которые удовлетворяют неравенствам $2 - \sqrt{4+a} \leq x \leq 2 + \sqrt{4+a}$.

Рассматривая случай 2), замечаем, что абсцисса вершины параболы $f(y) = y^2 - 4y - a$ равна $x_0 = \frac{4}{2} = 2$, тогда рассматриваемый случай имеет место, если $f(0) = -a < 0$, т. е. при $a > 0$. При этом системе (1) удовлетворяют все значения y из промежутка $[0; y_2]$, тогда решениями исходного неравенства будут все значения x , удовлетворяющие неравенствам

$$-\frac{a}{4} \leq x \leq 2 + \sqrt{4+a}.$$

При $4 + a < 0$, т. е. при $a < -4$, исходное неравенство не имеет решений.

Ответ: если $-4 \leq a \leq 0$, то $2 - \sqrt{4+a} \leq x \leq 2 + \sqrt{4+a}$;

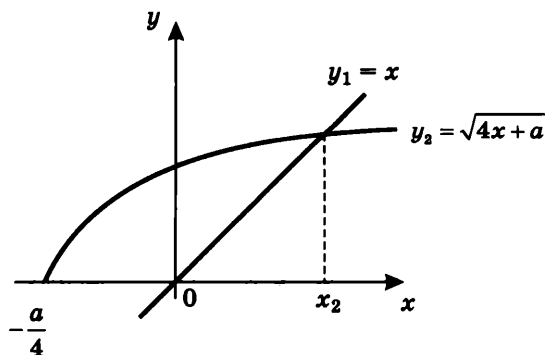
если $a > 0$, то $-\frac{a}{4} \leq x \leq 2 + \sqrt{4+a}$;

если $a < -4$, то решений нет.

II способ

Рассмотрим в координатной плоскости xOy графики функций

$$y_1 = x \text{ и } y_2 = \sqrt{4x+a} = \sqrt{4\left(x+\frac{a}{4}\right)} = 2\sqrt{x+\frac{a}{4}}.$$



Решениями исходного неравенства будут те значения x , при которых при каждом значении параметра a график функции $y_2(x)$ расположен не ниже графика функции $y_1(x)$. Если графики касаются, то значение a находится из условия $D = 0$, т. е. $16 + 4a = 0$, $a = -4$.

Если $a < -4$, то график функции y_2 расположен под графиком функции y_1 , и поэтому в этом случае исходное неравенство не имеет решений.

Заметим далее, что при $a = 0$ график проходит через начало координат, значит, при $a \in [-4; 0]$ все решения исходного неравенства принадлежат отрезку $[x_1; x_2]$, где x_1 и x_2 — корни иррационального уравнения, т. е. $x_1 = 2 - \sqrt{4+a}$, $x_2 = 2 + \sqrt{4+a}$.

Если $a > 0$, то график функции y_2 будет иметь одну общую точку с осью абсцисс с координатами $\left(-\frac{a}{4}; 0\right)$ и одну общую точку с графиком функции y_1 с абсциссой x_2 .

Следовательно, при $a > 0$ все решения исходного уравнения — это значения x , удовлетворяющие неравенствам $-\frac{a}{4} \leq x \leq x_2$.

Пример 16. В зависимости от значений параметра a решите неравенство $x + 5a > 2\sqrt{ax}$.

Решение.

Если $a < 0$, то из исходного неравенства следует, что $x \leq 0$.

Заметим, что при этих значениях a и x левая часть неравенства $x + 5a < 0$, и, значит, ни при каких отрицательных значениях исходное неравенство решений не имеет.

Если $a = 0$, то данному неравенству удовлетворяет любое $x > 0$.

Если $a > 0$, то $x \geq 0$. В частности, $x = 0$ — решение исходного неравенства. При этих значениях a и x исходное неравенство равносильно неравенству $(x + 5a)^2 > 36ax$, или $x^2 - 26ax + 25a^2 > 0$, или

$$(x - a)(x - 25a) > 0, \text{ откуда находим } 0 < x < a, x > 25a.$$

Ответ: если $a \in (-\infty; 0)$, то решений нет;

если $a = 0$, то $x \in (0; +\infty)$;

если $a \in (0; +\infty)$, то $x \in [0; a) \cup (25a; +\infty)$.

Пример 17. Решите неравенство $(a + 2)\sqrt{3 - x} < 1$.

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} a + 2 \leq 0, \\ 3 - x \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a + 2 > 0, \\ \sqrt{3 - x} < \frac{1}{a + 2}. \end{cases}$$

Из первой системы находим $x \leq 3$ при $a \leq 2$.

Решая вторую систему неравенств, находим

$$3 - \frac{1}{(a+2)^2} < x \leq 3 \text{ при } a > -2.$$

Ответ: при $a \in (-\infty; -2]$ $x \in (-\infty; 3]$;

$$\text{при } a \in (-2; +\infty) \quad x \in \left(3 - \frac{1}{(a+2)^2}; 3 \right).$$

Пример 18. Найдите все значения параметра a , для которых при каждом x из промежутка $[3; 5)$ выполняется неравенство $\frac{5x-a}{x-3a} < 0$.

Решение.

Данное неравенство равносильно неравенству

$$(5x - a)(x - 3a) < 0.$$

Пусть $f(x) = (5x - a)(x - 3a)$ — квадратный трехчлен, у которого первый коэффициент положителен. Кроме того, $f(0) = 3a^2 \geq 0$, значит, $f(x) < 0$ на промежутке $[3; 5)$, если будут выполняться условия

$$\begin{cases} f(3) < 0, \\ f(5) \leq 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (10-a)(3-3a) < 0, \\ (25-a)(5-3a) \leq 0; \end{cases} \begin{cases} (a-10)(a-1) < 0, \\ (3a-5)(a-25) \leq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решая первое неравенство методом интервалов, имеем $1 < a < 10$.

Аналогично решая второе неравенство, находим $\frac{5}{3} \leq a \leq 25$.

Тогда решением системы (1), а значит, и исходного неравенства будет пересечение полученных множеств, т. е. $a \in \left[\frac{5}{3}; 10 \right)$.

$$\text{Ответ: } \left[\frac{5}{3}; 10 \right).$$

Пример 19. Решите неравенство $\sqrt{a+2x} + \sqrt{a-2x} > a$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}.$$

Отсюда следует, что $a \geq 0$. При $a = 0$ исходное неравенство не имеет решений.

Если $a > 0$, то, возведя обе части неравенства в квадрат, получим $a + 2x + a - 2x + 2\sqrt{a^2 - 4x^2} > a^2$, или $2\sqrt{a^2 - 4x^2} > a^2 - 2a$, откуда при $a \in (0; 2]$ имеем $x \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2} \right]$.

Если $a \geq 2$, то, возведя в квадрат, имеем

$$4(a^2 - 4x^2) > (a^2 - 2a)^2, \text{ или } 4a^2 - 16x^2 > a^4 - 4a^3 + 4a^2,$$

$$16x^2 < a^3(4 - a), \text{ откуда при } a \in (2; 4) \text{ получим}$$

$$x^2 < \frac{a^3}{16}(4 - a), \text{ или } x \in \left(-\frac{a}{4}\sqrt{4a - a^2}; \frac{a}{4}\sqrt{4a - a^2} \right),$$

а при $a \in [4; +\infty)$ решений нет.

Объединяя полученные решения, получим ответ.

Ответ: при $a \in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$ решений нет;

$$\text{при } a \in (0; 2), x \in \left[-\frac{a}{2}; \frac{a}{2} \right];$$

$$\text{при } a \in [2; 4), x \in \left(-\frac{a}{4}\sqrt{4a - a^2}; \frac{a}{4}\sqrt{4a - a^2} \right).$$

Пример 20. При каких значениях параметра a решения неравенства $\sqrt{2x - 4a} \geq x$ образуют на числовой прямой отрезок длиной $3|a|$?

Решение.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x \leq 0, \\ 2x - 4a \geq 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x \geq 0, \\ 2x - 4a \geq x^2. \end{cases}$$

Из первой системы имеем: при $a \leq 0$, $x \in [2a; 0]$; при $a > 0$ решений нет.

Из второй системы находим:

$$\text{при } a \leq 0, x \in [0; 1 + \sqrt{1 - 4a}];$$

$$\text{при } a \in \left(0; \frac{1}{4} \right], x \in [1 - \sqrt{1 - 4a}; 1 + \sqrt{1 - 4a}];$$

$$\text{при } a \in \left(\frac{1}{4}; +\infty \right) \text{ решений нет.}$$

Объединяя решения систем, получим:

$$\text{при } a \in (-\infty; 0] \text{ решением системы является отрезок } [2a; 1 + \sqrt{1 - 4a}].$$

Его длина равна $3|a|$ в том случае, если a ($a < 0$) удовлетворяет уравнению

$$1 + \sqrt{1 - 4a} - 2a = -3a, \text{ или } \sqrt{1 - 4a} = -a - 1,$$

$$\text{или } 1 - 4a = a^2 + 2a + 1, a^2 + 6a = 0, a(a + 6) = 0,$$

$$a_1 = 0 \text{ (не удовлетворяет)}, a_2 = -6.$$

Если $a \in \left[0; \frac{1}{4}\right]$, то решения данного неравенства заполняют отрезок $[1 - \sqrt{1 - 4a}; 1 + \sqrt{1 - 4a}]$. Его длина равна $3|a|$ (где $a \geq 0$) в том случае, если $2\sqrt{1 - 4a} = 3a$, или $4(1 - 4a) = 9a^2$, $9a^2 + 16a - 4 = 0$, откуда $a = \frac{2}{9}$.

Ответ: $a = -6$, $a = \frac{2}{9}$.

Пример 21. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{1 - 3x} = a - 8|x|$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x) = a - 8|x|$ и $g(x) = \sqrt{1 - 3x}$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$.

Заметим, что функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 0)$, а функция $g(x)$ убывает на этом промежутке, значит, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня на этом промежутке, причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f(0) > g(0)$, т. е. при $a > 1$.

При $x \geq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ примет вид

$$a - 8x = \sqrt{1 - 3x}. \quad (1)$$

Если $x > \frac{a}{8}$, то левая часть уравнения (1) отрицательна. В этом случае корней нет.

Если $x \leq \frac{a}{8}$, то уравнение (1) преобразуется к квадратному:

$$(a - 8x)^2 = 1 - 3x, \text{ или } a^2 - 16ax + 64x^2 = 1 - 3x, \text{ или } 64x^2 + (3 - 16a)x + (a^2 - 1) = 0. \quad (2)$$

$$D = (3 - 16a)^2 - 256(a^2 - 1) = 9 - 96a + 256a^2 - 256a^2 + 256 = 265 - 96a. \text{ Значит, при } 265 - 96a > 0, \text{ т. е. } a > \frac{265}{96}, \text{ уравнение (2) не}$$

имеет действительных корней; при $a = \frac{265}{96}$ уравнение (2) имеет

единственный корень $x = \frac{16a-3}{128}$, или $x = \frac{\frac{265}{6}-3}{128} = \frac{247}{768}$, при $a < \frac{265}{96}$

уравнение имеет два корня.

$$\text{Пусть } x_1 = \frac{16a-3-\sqrt{D}}{128} = \frac{a}{8} - \frac{3+\sqrt{D}}{128}, \quad x_2 = \frac{16a-3+\sqrt{D}}{128} = \frac{a}{8} - \frac{3-\sqrt{D}}{128},$$

тогда меньший корень $x_1 < \frac{a}{8}$, а больший корень x_2 не превосходит

$$\frac{a}{8}, \text{ если } \sqrt{D} \leq 3, \text{ т. е. при } \frac{8}{3} \leq a < \frac{265}{96}.$$

$$\text{Согласно теореме Виета } x_1 + x_2 = \frac{16a-3}{64}, \quad x_1 x_2 = \frac{a^2-1}{64}.$$

Следовательно, знаки корней x_1 и x_2 зависят от знаков выражений $\frac{16a-3}{64}$ и $\frac{a^2-1}{64}$.

Значит, при $a < -1$ оба корня отрицательны, при $-1 \leq a \leq 1$ один из корней отрицательный, а другой — неотрицательный, при $a \geq 1$ оба корня неотрицательны.

Таким образом, при $x \geq 0$ уравнение (1) имеет следующее количество корней:

- 1) при $a < 1$ корней нет;
- 2) при $a = 1$ и $a > \frac{265}{96}$ — один корень;
- 3) при $1 < a < \frac{8}{3}$ и $a = \frac{265}{96}$ — два корня;
- 4) при $\frac{8}{3} \leq a < \frac{265}{96}$ — три корня.

$$\text{Ответ: } a \in \left[\frac{8}{3}; \frac{265}{96} \right).$$

Пример 22. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых на интервале $(1; 3)$ существует хотя бы одно число x , не удовлетворяющее неравенству $a + \sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \leq 4x - x^2$.

Решение.

Запишем неравенство в виде $a + \sqrt{(x-a)^2} \leq 4x - x^2$, или

$$a + |x - a| \leq 4x - x^2, \text{ или } |x - a| \leq 4x - x^2 - a. \quad (1)$$

Неравенство (1) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x - a \leq 4x - x^2 - a, \\ x - a \geq -4x + x^2 + a; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x - 3) \leq 0, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a \leq -\frac{1}{3}x^2 + 2x. \end{cases} \quad (3)$$

Заметим, что неравенство (2) определяет на плоскости Oxa полосу, заключенную между прямыми $x = 0$ и $x = 3$.

Неравенство (3) задает часть плоскости, ограниченную сверху параболой.

Из рисунка видно, что на интервале $(1; 3)$ есть значения x , не удовлетворяющие исходному неравенству, только если $a > \frac{5}{3}$.

Ответ: $a \in \left(\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

Пример 23. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{8xy + a} = 2x + 2y + 5$ не имеет решений.

Решение.

Данное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} 2x + 2y + 5 \geq 0, \end{cases} \quad (1)$$

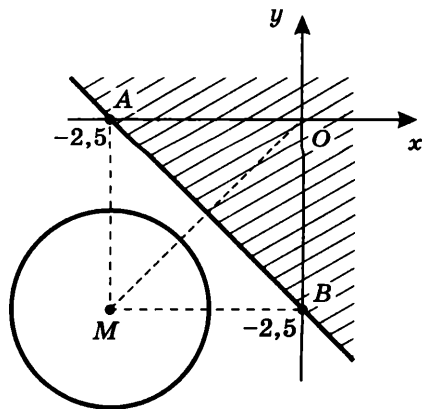
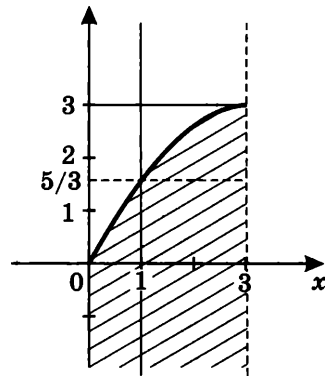
$$\begin{cases} 8xy + a = 4x^2 + 4y^2 + 8xy + 12x + 12y + 9, \end{cases} \quad \text{или} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2x + 2y + 5 \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x + 3)^2 + (2y + 3)^2 = a + 9. \end{cases}$$

Неравенство (1) задает на координатной плоскости верхнюю полуплоскость с границей $2x + 2y + 5 = 0$, а уравнение (2) при $a > -9$ — окружность с центром $M(-2, 5; -2, 5)$ и радиусом $R = \sqrt{a + 9}$ (см. рис.).

Заметим, что окружность и полуплоскость не имеют общих точек



в случае, когда радиус $R < \frac{1}{2}MO$ квадрата $AOBM$, т. е. $\sqrt{a+9} < \frac{5\sqrt{2}}{4}$,

или $a+9 < \frac{50}{16}$, $a < -\frac{47}{8}$. Учитывая, что $a > -9$, находим $-9 < a < -\frac{47}{8}$.

При $a < -9$ уравнение (2), а значит, и вся система решений не имеют, а при $a = -9$ решением уравнения является пара $(-2,5; -2,5)$, которая не удовлетворяет неравенству (1).

Итак, исходное уравнение не имеет решений при $a < -\frac{47}{8}$.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{47}{8}\right)$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения и неравенства с параметрами

1. Решите уравнение $\sqrt{2x - a^2 + 5} = x + 1$.

2. Решите уравнение $x^2 - \sqrt{a - x} = a$.

3. Решите уравнение $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = 2a$.

4. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{5|x| - x^2} = a$ имеет ровно два решения.

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{4x - 3 - x^2} = ax - 1$ имеет единственное решение.

6. Найдите все значения параметра a , при которых всякая пара чисел $(x; a)$, удовлетворяющая неравенству $x > \frac{1}{a}$, удовлетворяет также неравенству $\sqrt{2x+7} \geq ax$.

7. При каких значениях a уравнение $\sqrt{x-2} = a - x$ имеет решения?

8. При каком значении a уравнение $\sqrt{2a|x| - x^2} = x + 3$ имеет два корня?

9. При каком значении a уравнение $\sqrt{a} - \sqrt{a+x} = x$ не имеет корней?
10. При каком значении a уравнение $x^2 - \sqrt{a-x} = a$ имеет один корень?
11. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x^2 - 9a + 5} - x + 4 = 0$ имеет корни?
12. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{-8x - x^2 - 15} = ax + 7$ имеет единственное решение?
13. При каком значении a уравнение $\sqrt{2x+1} = x - a$ имеет два корня?
14. Найдите все значения a , при которых уравнение $ax + \sqrt{10-6x} = 0$ имеет решение на отрезке $[-1; 1]$.
15. При каких значениях a уравнение $\sqrt{x^2 + 7a - 6} = x - 5$ не имеет корней?
16. При каком наибольшем целом значении параметра a множество решений неравенства $\sqrt{7+x} + \sqrt{x^2 - 2ax + a^2} \leq 4$ является отрезком?
17. Решите неравенство $\sqrt{5x^2 + a^2} \geq -3x$.
18. Решите неравенство $x + \sqrt{a-x} > 0$.
19. Решите неравенство $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x-a}$.
20. Решите неравенство $\sqrt{x+2a} \geq x$.
21. Решите неравенство $a\sqrt{x+1} < 1$.
22. Решите неравенство $x + 2a \geq 3\sqrt{ax}$.
23. Решите неравенство $a - x \leq \sqrt{2ax - x^2}$.
24. Решите неравенство $x + 4a > 5\sqrt{ax}$.

25. При каком наименьшем значении параметра a длина интервала, являющегося областью решений неравенства $\sqrt{2ax - x^2} \geq a - x$, равна $2 + \sqrt{2}$?

26. При каких значениях параметра a уравнение $2x + 3\sqrt{x} + 2a^2 - 11a = 0$ имеет один корень?

27. В зависимости от значений параметра a решите неравенство $\sqrt{x+8a} + x \leq \sqrt{9a} + a$.

28. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $3 + \sqrt{1+2ax-a^2-x^2} = a + \sqrt{6x-x^2-8}$ имеет ровно один корень.

29. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{x-9} = ax+7a-3$ имеет один корень.

30. Найдите все значения параметра a , при которых все числа $x \in [1; 5]$ удовлетворяют неравенству $3ax + 2\sqrt{3x+1} - 6x + a - 5 < 0$.

§ 3. Тригонометрические уравнения, неравенства и системы с параметрами

Краткая теория и справочные материалы

Это уравнения, содержащие неизвестную величину под знаком тригонометрической функции.

При помощи соответствующих преобразований всякое тригонометрическое уравнение сводится к одному или нескольким простейшим уравнениям.

Главный принцип — не терять корней. Одним из возможных методов отбора корней, отсеивания посторонних является проверка. Заметим, что в отличие от алгебраических уравнений трудности, возникающие с отбором корней, проверкой, резко возрастают, так как проверять приходится целые серии, состоящие из бесконечного числа членов.

Типы тригонометрических уравнений и методы их решения

1. Простейшие тригонометрические.
2. Уравнения, решаемые разложением на множители.
3. Уравнения, сводящиеся к квадратным.
4. Однородные и сводящиеся к ним.
5. Уравнения, решаемые введением вспомогательного аргумента.
6. Уравнения, решаемые преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение.
7. Уравнения, решаемые преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму.
8. Уравнения, решаемые с применением формул понижения степени.
9. Уравнения, решаемые с применением формул двойного и тройного аргументов.
10. Уравнения, решаемые с помощью замены переменной.
11. Уравнения вида $f(x) = \sqrt{\varphi(x)}$.
12. Уравнения, решаемые с использованием ограниченности функций $\sin x$ и $\cos x$.

Краткие справочные материалы

1) $\sin x = a, x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}, |a| \leq 1;$

2) $\cos x = a, x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, |a| \leq 1;$

3) $\operatorname{tg} x = a, x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R};$

4) $\operatorname{ctg} x = a, x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}.$

Частные случаи

$(a = 0, a = 1, a = -1)$

$\sin x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$

$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$\cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$

$\cos x = 1, x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$\cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$\operatorname{tg} x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$

$\operatorname{ctg} x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Основные формулы

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$

$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$

$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta};$

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha};$

$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha;$

$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$

$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2};$

$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2};$

$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi),$$

$$\text{где } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta));$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta));$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta));$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x; \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x; \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

Задачи с решениями

3.1. Тригонометрические уравнения

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sin^2 3x - \left(a + \frac{1}{2}\right) \sin 3x + \frac{a}{2} = 0$$

имеет ровно 3 корня, принадлежащих отрезку $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$?

Решение.

Решаем данное уравнение как квадратное относительно $\sin 3x = t$, где $|t| \leq 1$.

$$t^2 - \left(a + \frac{1}{2}\right)t + \frac{a}{2} = 0, \quad D = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 - 2a = a^2 + a + \frac{1}{4} - 2a = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2;$$

$$t_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\left(a + \frac{1}{2}\right) \pm \left(a - \frac{1}{2}\right) \right), \text{ откуда находим } t_1 = a, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\sin 3x = a$ и $\sin 3x = \frac{1}{2}$.

Так как второе уравнение на отрезке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ имеет 2 корня:

$x_1 = \frac{13\pi}{18}$ и $x_2 = \frac{17\pi}{18}$, то значение параметра a удовлетворяет условию

задачи, если уравнение $\sin 3x = a$ имеет на отрезке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ лишь один корень.

Заметим, что функция $y = \sin 3x$ принимает на отрезке $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ все значения от 0 до 1, причем каждое из этих значений, кроме 1, — дважды. Тогда условие задачи выполняется только при значении $a = 1$.

Ответ: 1.

Пример 2. При каких значениях параметра a уравнение

$$(x^2 + 16) \sin ax = 2(x^2 - 4x + 16)$$

имеет корни? Найдите эти корни.

Решение.

$$\sin ax = \frac{2(x^2 - 4x + 16)}{x^2 + 16}. \quad (1)$$

Но $|\sin ax| \leq 1$, кроме того, $\frac{2(x^2 - 4x + 16)}{x^2 + 16} > 0$ при любом $x \in \mathbb{R}$, так как $x^2 + 16 > 0$ и $x^2 - 4x + 16 = (x - 2)^2 + 12 > 0$, тогда из неравенства $\frac{2(x^2 - 4x + 16)}{x^2 + 16} \leq 1$ имеем $2x^2 - 8x + 32 \leq x^2 + 16$, или $x^2 - 8x + 16 \leq 0$, $(x - 4)^2 \leq 0$, что верно, если $x - 4 = 0$, т. е. $x = 4$.

Тогда равенство (1) возможно лишь при $x = 4$, т. е. в этом случае получим $\sin 4a = \frac{2(4^2 - 4 \cdot 4 + 16)}{4^2 + 16} = \frac{2 \cdot 16}{32} = 1$, откуда $4a = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$,

$$a = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: если $a = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, $x = 4$; при других значениях параметра a корней нет.

Пример 3. Найдите все значения α , которые удовлетворяют условию $4 < \alpha < 17$ и при которых уравнение

$$1 + \cos^2\left(\frac{\alpha x}{3} + \frac{3\pi}{4}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|}$$

имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $1 \leq x \leq 2$.

Решение.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \cos \pi x - \sin \pi x &= \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \pi x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \pi x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos \pi x - \sin \frac{\pi}{4} \sin \pi x \right) = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi x \right). \end{aligned}$$

Учитывая ограниченность функции $\cos t$, имеем

$$0 \leq \left| \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \pi x \right) \right| \leq \sqrt{2}, \quad \text{тогда} \quad \left(\frac{1}{3} \right)^{\sqrt{2}} \leq \left(\frac{1}{3} \right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|} \leq 1.$$

$$\text{Значит,} \quad \left(\frac{1}{3} \right)^{\sqrt{2}} \leq 1 + \cos^2 \left(\frac{\alpha x}{3} + \frac{3\pi}{4} \right) \leq 1,$$

$$\text{т. е.} \quad \left(\frac{1}{3} \right)^{\sqrt{2}} - 1 \leq \cos^2 \left(\frac{\alpha x}{3} + \frac{3\pi}{4} \right) \leq 0.$$

$$\text{Отсюда} \quad \cos \left(\frac{\alpha x}{3} + \frac{3\pi}{4} \right) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\alpha x}{3} + \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\alpha x}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} + \pi n, \quad \frac{\alpha x}{3} = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$$

$$\alpha x = -\frac{3\pi}{4} + 3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Равенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|} = 1$ выполняется при $\cos \pi x - \sin \pi x = 0$ —

однородное уравнение I степени.

Разделив обе части полученного уравнения на $\cos \pi x \neq 0$, получим $\operatorname{tg} \pi x = 1$, откуда $\pi x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, т. е. $x = \frac{1}{4} + k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Так как по условию задачи $1 \leq x \leq 2$, то

$$1 \leq \frac{1}{4} + k \leq 2, \text{ или } \frac{3}{4} \leq k \leq \frac{7}{4}, \text{ откуда } k = 1, \text{ тогда } x = \frac{1}{4} + 1 = 1,25.$$

Итак, учитывая (1), имеем

$$1,25\alpha = -\frac{3\pi}{4} + 3\pi n, \text{ откуда } \alpha = \left(-\frac{3\pi}{4} + 3\pi n\right) \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3\pi}{5} + \frac{12\pi n}{5}. \quad (2)$$

По условию $4 < \alpha < 17$, тогда (2) примет вид

$$4 < -\frac{3\pi}{5} + \frac{12\pi n}{5} < 17, \quad 20 < -3\pi + 12\pi n < 85,$$

$$20 + 3\pi < 12\pi n < 85 + 3\pi, \quad \frac{20 + 3\pi}{12\pi} < n < \frac{85 + 3\pi}{12\pi}.$$

Так как $\pi \approx 3,14$, то $\frac{20 + 3\pi}{12\pi} \approx 0,78$ и $\frac{85 + 3\pi}{12\pi} \approx 2,51$, тогда $n = 1$ и

$n = 2$.

$$\text{Если } n = 1, \text{ то } \alpha = -\frac{3\pi}{5} + \frac{12\pi}{5} = \frac{9\pi}{5}.$$

$$\text{Если } n = 2, \text{ то } \alpha = -\frac{3\pi}{5} + \frac{24\pi}{5} = \frac{21\pi}{5}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{9\pi}{5}; \frac{21\pi}{5}.$$

Пример 4. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{1}{2} \left(\sin x + \frac{1}{\sin x} \right) = |\cos ax| \text{ имеет решения?}$$

Решение.

Из условия следует, что $\sin x + \frac{1}{\sin x} > 0$, откуда $\sin x > 0$.

Следовательно, $\frac{1}{2}\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sin x} - \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\right)^2 + 1 \geq 1$, а правая

часть $|\cos ax| \leq 1$.

Равенство возможно тогда и только тогда, если

$$\begin{cases} \sin x = 1, \\ |\cos ax| = 1; \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ ax = \pi k, \end{cases} \text{ откуда } a = \frac{\pi k}{x} = \frac{\pi k}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} = \frac{2k}{1+4n}, \text{ где } n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $a = \frac{2k}{1+4n}$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5. Решите уравнение $\sin 3x = \frac{a}{3} \sin x$.

Решение.

Так как $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$, то получим

$$3 \sin x - 4 \sin^3 x - \frac{a}{3} \sin x = 0, \text{ или } 9 \sin x - 12 \sin^3 x - a \sin x = 0,$$

$$\sin x (9 - 12 \sin^2 x - a) = 0, \text{ откуда } \sin x = 0, x_1 = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ или}$$

$$9 - 12 \sin^2 x - a = 0, \sin^2 x = \frac{9-a}{12}.$$

$$\text{Но } \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \text{ тогда } \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{9-a}{12}, 1 - \cos 2x = \frac{9-a}{6};$$

$$\cos 2x = 1 - \frac{9-a}{6}, \text{ или } \cos 2x = \frac{a-3}{6}. \quad (1)$$

Так как $|\cos 2x| \leq 1$, то из (1) имеем

$$-1 \leq \frac{a-3}{6} \leq 1, -6 \leq a-3 \leq 6, \text{ т. е. } a \in [-3; 9].$$

Значит, корни уравнения (1) будут

$$2x = \pm \arccos \frac{a-3}{6} + 2\pi n, \text{ откуда } x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{a-3}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x_1 = \pi n$, $x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{a-3}{6} + \pi n$, где $a \in [-3; 9]$.

Пример 6. При каких неотрицательных значениях параметра a все неотрицательные решения уравнения $\cos(4a-3)x = \cos(8a+7)x$, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию?

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\cos(4a - 3)x - \cos(8a + 7)x = 0, \text{ или}$$

$$2 \sin \frac{(4a-3)x + (8a+7)x}{2} \cdot \sin \frac{(8a+7)x - (4a-3)x}{2} = 0,$$

$$\sin(6a + 2)x \cdot \sin(2a + 5)x = 0, \text{ откуда } \sin(6a + 2)x = 0,$$

$$\text{или } \sin(2a + 5)x = 0, (6a + 2)x = \pi k, (2a + 5)x = \pi n,$$

$$x_k = \frac{\pi k}{6a+2}, \text{ или } x_n = \frac{\pi n}{2a+5}, n, k \in \mathbb{Z}.$$

Согласно условию $a \geq 0$, тогда решения неотрицательны, если $n \geq 0, k \geq 0$.

При $n = k = 0$ оба корня равны нулю.

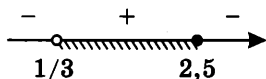
Так как все неотрицательные решения исходного уравнения, расположенные в порядке возрастания, образуют арифметическую прогрессию, то необходимо выполнение условий

$$\frac{\pi}{6a+2} = \frac{\pi}{2a+5} p, \text{ или } \frac{\pi}{2a+5} = \frac{\pi}{6a+2} q, \text{ где } p, q \in \mathbb{N}.$$

В первом случае имеем $2a + 5 = p(6a + 2)$, или

$$(2 - 6p)a = 2p - 5, \text{ откуда } a = \frac{2p-5}{2-6p} \geq 0.$$

$$p_1 = 2,5, p_2 = \frac{1}{3}.$$



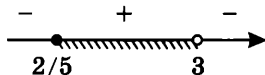
Значит, $p = 1$ и $p = 2$.

$$\text{Если } p = 1, \text{ то } a_1 = \frac{3}{4}; \text{ если } p = 2, \text{ то } a_2 = \frac{1}{10}.$$

Во втором случае имеем $6a + 2 = q(2a + 5)$,

$$(6 - 2q)a = 5q - 2, \text{ откуда } a = \frac{5q-2}{6-2q} \geq 0.$$

$$q_1 = \frac{2}{5}, q_2 = 3.$$



Значит, $q = 1$ и $q = 2$.

$$\text{Если } q = 1, \text{ то } a_3 = \frac{3}{4}; \text{ если } q = 2, \text{ то } a_4 = 4.$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{3}{4}; \frac{1}{10}; 4.$$

Пример 7. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$(5 \cos x + 10 + 2a) \cdot \cos x - 1,5 \cos 2x - 13,5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

Решение.

Поскольку $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$, то уравнение примет вид

$$(5 \cos x + 10 + 2a) \cos x - 1,5(2 \cos^2 x - 1) - 13,5 = 0, \text{ или}$$

$$5 \cos^2 x + 2(5 + a) \cos x - 3 \cos^2 x - 12 = 0, \text{ или}$$

$$\cos^2 x + (5 + a) \cos x - 6 = 0. \quad (1)$$

Пусть $\cos x = t$, где $|t| \leq 1$, тогда получим квадратное уравнение

$$t^2 + (5 + a)t - 6 = 0. \quad (2)$$

Следовательно, исходное уравнение имеет хотя бы один корень, если уравнение (2) имеет хотя бы один корень, принадлежащий отрезку $[-1; 1]$.

Заметим, что графиком функции

$$f(t) = t^2 + (5 + a)t - 6$$

является парабола, ветви которой направлены вверх, $f(0) = -6 < 0$, значит, уравнение $f(t) = 0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий отрезку $[-1; 1]$, либо при условии $f(-1) \geq 0$, либо при условии $f(1) \geq 0$.

Если $f(-1) \geq 0$, то получим $1 - (5 + a) - 6 \geq 0$, или $-10 - a \geq 0$, откуда $a \leq -10$; если $f(1) \geq 0$, то $1 + 5 + a - 6 \geq 0$, т. е. $a \geq 0$.

Итак, исходное уравнение имеет хотя бы один корень, если $a \leq -10$ и $a \geq 0$.

Ответ: $(-\infty; -10]; [0; +\infty)$.

3.2. Тригонометрические неравенства

Пример 1. Решите неравенство

$$\cos x - \sqrt{y - x^2 - 1} - y^2 \geq 0.$$

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\cos x \geq y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1}.$$

Заметим, что $y - x^2 - 1 \geq 0$, т. е. $y \geq x^2 + 1 \geq 1$, тогда и $\cos x \geq 1$. Значит, неравенство выполняется лишь при $y = 1$, $x = 0$.

Ответ: $(0; 1)$.

Пример 2. В зависимости от значений параметра a решите неравенство $(a - 3) \sin x < 4a + 5$.

Решение.

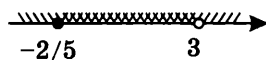
Заметим, что при $a = 3$ данное неравенство не имеет решений.

Пусть $a - 3 \neq 0$, т. е. $a \neq 3$. При таких значениях параметра рассмотрим случай, когда $a - 3 < 0$, т. е. $a < 3$.

В этом случае исходное неравенство равносильно неравенству $\sin x < \frac{4a+5}{a-3}$.

$$\begin{cases} a < 3, \\ \frac{4a+5}{a-3} \leq -1; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 3, \\ \frac{4a+5+a-3}{a-3} \leq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 3, \\ \frac{5a+2}{a-3} \leq 0. \end{cases}$$

$$a_1 = -\frac{2}{5}, a_2 = 3; -\frac{2}{5} \leq a < 3.$$



Итак, при $-\frac{2}{5} \leq a < 3$ данное неравенство решений не имеет.

Если $\begin{cases} a < 3, \\ \frac{4a+5}{a-3} > 1, \end{cases}$ т. е. если $a < -8$, то решением исходного неравен-

ства является любое x .

Если $-1 < \frac{4a+5}{a-3} \leq 1$, т. е. при $-\frac{8}{3} \leq a < -\frac{2}{5}$ данное неравенство имеет решения

$$-\arcsin \frac{4a+5}{a-3} + \pi(2n-1) < x < \arcsin \frac{4a+5}{a-3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $a - 3 > 0$, т. е. $a > 3$. В этом случае $\frac{4a+5}{a-3} > 1$, поэтому исходное неравенство не имеет решений.

Ответ: если $a < -8$, то x — любое число;

$$\text{если } -\frac{8}{3} \leq a < -\frac{2}{5}, \text{ то } -\arcsin \frac{4a+5}{a-3} +$$

$$+ \pi(2n-1) < x < \arcsin \frac{4a+5}{a-3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$\text{если } a \geq -\frac{2}{5}, \text{ то решений нет.}$$

Пример 3. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$\frac{4}{3}(x^2 - ax) - \frac{\pi}{3} < \sin(x^2 - ax) + \cos\left(2x^2 - 2ax + \frac{\pi}{4}\right)$$

выполняется при всех $x \in [\pi, 2\pi]$.

Решение.

Заменой $x^2 - ax = t$ данное неравенство преобразуется к виду

$$\frac{4}{3}t - \frac{\pi}{3} < \sin t + \cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right), \text{ или } \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{3}\left(2t - \frac{\pi}{4}\right) < \sin t + \frac{4}{3}t.$$

Заметим, что функция $f(t) = \sin t + \frac{4}{3}t$ возрастает на всей оси, так

как $f'(t) = \cos t + \frac{4}{3} > 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Следовательно, имеем равносильное неравенство

$$2t - \frac{\pi}{4} < t, \text{ или } x^2 - ax < \frac{\pi}{4}. \quad (1)$$

Чтобы неравенство (1) выполнялось при всех x , необходимо и достаточно, чтобы оно было верно для $x = \pi$ и $x = 2\pi$.

Если $x = \pi$, то $a > \pi - \frac{1}{4}$; если $x = 2\pi$, то $a > 2\pi - \frac{1}{8}$; но $2\pi - \frac{1}{8} > \pi - \frac{1}{4}$.

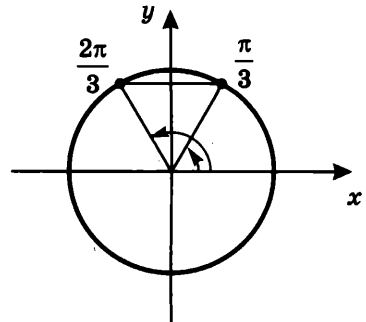
Значит, исходное неравенство выполняется при $a > 2\pi - \frac{1}{8}$.

Ответ: $a > 2\pi - \frac{1}{8}$.

Пример 4. Решите неравенство $\sin ax \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

На единичной окружности с центром в начале координат находятся две точки, ордината каждой из которых равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Одна из них является концом каждой из дуг множества $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$,

а другая — концом каждой из дуг множества $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Как видно из рисунка, данное неравенство справедливо при

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq ax \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, если $a > 0$, то $\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \leq x \leq \frac{1}{a}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

если $a < 0$, то $\frac{1}{a}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) \leq x \leq \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

если $a = 0$, то решений нет.

Ответ: если $a > 0$, то $\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \leq x \leq \frac{1}{a}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

если $a < 0$, то $\frac{1}{a}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) \leq x \leq \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;

если $a = 0$, то решений нет.

Пример 5. Решите неравенство $\operatorname{tg}(ax + 5) \geq b$.

Решение.

Решим данное неравенство графически, для чего построим графики функций $y = \operatorname{tg}(ax + 5)$ и $y = b$.

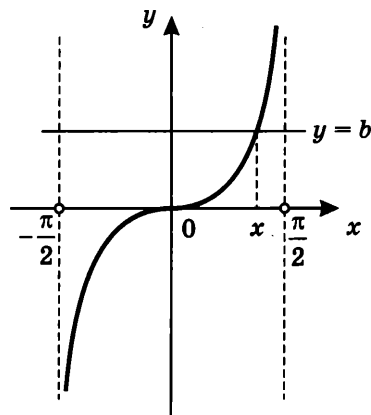
На главной ветви тангенсоиды они пересекаются в точке $x = \operatorname{arctg} b$.

Выделим промежуток оси x , на котором главная ветвь тангенсоиды расположена выше прямой $y = b$, это интервал $\left(\operatorname{arctg} b; \frac{\pi}{2}\right)$.

Учитывая, что период тангенса равен π , делаем вывод, что заданное неравенство выполняется, если

$$\operatorname{arctg} b + \pi n \leq ax + 5 < \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ или}$$

$$-5 + \operatorname{arctg} b + \pi n \leq ax < -5 + \frac{\pi}{2} + \pi n.$$



Следовательно, при $a < 0$ имеем

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} - 5 + \pi n \right) < x \leq \frac{1}{a} (\operatorname{arctg} b - 5 + \pi n);$$

при $a > 0$ $\frac{1}{a} (\operatorname{arctg} b - 5 + \pi n) \leq x < \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} - 5 + \pi n \right).$

Нетрудно видеть, что при $a = 0$ и $b \leq \operatorname{tg} 5$, $x \in R$.

Ответ: если $a > 0$, $\frac{1}{a} (\operatorname{arctg} b - 5 + \pi n) \leq x < \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} - 5 + \pi n \right)$, $n \in Z$;

если $a < 0$, $\frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} - 5 + \pi n \right) < x \leq \frac{1}{a} (\operatorname{arctg} b - 5 + \pi n)$, $n \in Z$;

если $a = 0$ и $b \leq \operatorname{tg} 5$, $x \in R$.

Пример 6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$7a - 3 + a(5 - \sin^2 x)^2 + 2 \cos^2 x < 0$$

выполняется для всех значений x .

Решение.

Пусть $\sin^2 x = t$, где $0 \leq t \leq 1$. Тогда неравенство запишется в виде $7a - 3 + a(5 - t)^2 + 2(1 - t) < 0$, или $a((5 - t)^2 + 7) < 2t + 1$, $t \in [0; 1]$.

Заметим, что $(5 - t^2)^2 + 7 > 0$, следовательно, $a < \frac{2t+1}{(5-t)^2+7}$.

Найдем наименьшее значение функции $f(t) = \frac{2t+1}{(5-t)^2+7}$ на отрезке $[0; 1]$.

$$\begin{aligned} \text{Получим } f'(t) &= \frac{2((5-t)^2+7) - (2t+1)(2t-10)}{(5-t)^2+7} = \\ &= \frac{-2t^2 - 2t + 74}{(5-t)^2+7} = \frac{2(37 - (t^2+t))}{(5-t)^2+7}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что при $t \in [0; 1]$ производная $f'(t) > 0$. Значит, функция $f(t)$ возрастает на этом отрезке.

Но тогда функция $f(t)$ достигает своего наименьшего значения в точке $t = 0$, т. е. $f_{\text{наим.}} = f(0) = \frac{1}{32}$.

Значит, решением исходного неравенства будут все значения a , при которых $a < f_{\text{наим.}}$, или $a < \frac{1}{32}$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{32}\right)$.

3.3. Тригонометрические системы

Пример 1. В зависимости от значений параметра a решите систему

$$\begin{cases} (a^2 - 2a)\sin\frac{x}{3} + 3\cos y = a + 7, \\ 4\sin\frac{x}{3} + \cos y = 5. \end{cases}$$

Решение.

Так как $\sin\frac{x}{3} \leq 1$ и $\cos y \leq 1$, то $4\sin\frac{x}{3} + \cos y \leq 5$, причем знак равенства выполняется тогда и только тогда, когда $\sin\frac{x}{3} = 1$ и $\cos y = 1$.

Следовательно, второе уравнение исходной системы имеет решение только при тех значениях параметра a , при которых совместна система

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{3} = 1, \\ \cos y = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Используя соотношения (1), первое уравнение исходной системы примет вид

$$a^2 - 2a + 3 = a + 7, \text{ или } a^2 - 3a - 4 = 0,$$

откуда $a = -1$ и $a = 4$,

При этих значениях a исходная система и система (1) равносильны.

Решая систему (1), находим

$$\begin{cases} \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ y = 2\pi k, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{3\pi}{2} + 6\pi n, \\ y = 2\pi k, \end{cases} \text{ где } k, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: если $a = -1$ и $a = 4$, то $x = \frac{3\pi}{2} + 6\pi n$, $y = 2\pi k$, $k, n \in \mathbb{Z}$; при других значениях a решений нет.

Пример 2. Найдите все значения a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos 2y = a^2 + 1, \\ \cos x \sin 2y = a \end{cases}$$

имеет решение, и решите систему.

Решение.

Так как левая часть первого уравнения системы не превосходит единицы, то система может иметь решения лишь при $a = 0$.

Если $a = 0$, то получим систему

$$\begin{cases} \sin x \cos 2y = 1, \\ \cos x \sin 2y = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Из второго уравнения системы (1) имеем

$$\cos x = 0, \text{ или } \sin 2y = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то при $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ из первого уравнения находим

$$y_1 = \pi n, \text{ а при } x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \text{ получим } y_2 = \left(l + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

Случай $\sin 2y = 0$ не дает новых решений.

Итак, исходная система уравнений имеет решение лишь при $a = 0$ и имеет две серии решений.

$$\text{Ответ: } \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m; \pi n\right), \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \left(l + \frac{1}{2}\right)\pi\right), m, n, k, l \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x - y = a, \\ 2(\cos 2x + \cos 2y) = 1 + 4\cos^2(x - y) \end{cases}$$

имеет решения? Найдите эти решения.

Решение.

Так как $\cos 2x + \cos 2y = 2 \cos(x + y) \cos(x - y)$, то второе уравнение системы запишется в виде

$$4 \cos(x + y) \cos(x - y) = 1 + 4 \cos^2(x - y).$$

Тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} 4 \cos a \cos(x + y) = 1 + 4 \cos^2 a, \\ x - y = a. \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Сравним обе части уравнения (1).

$$\text{Имеем } |4 \cos a \cos(x + y)| \leq 4 |\cos a|.$$

С другой стороны, из неравенства $(1 \pm 2 \cos a)^2 \geq 0$ следует, что $4 |\cos a| \leq 1 + 4 \cos^2 a$, причем знак равенства выполняется лишь при условии, что $2 |\cos a| = 1$.

Следовательно, система (1)–(2) может иметь решения лишь при условии, что $|\cos a| = \frac{1}{2}$.

Имеем две возможности:

$$1) \cos a = \frac{1}{2}, \text{ тогда из (1) находим, что } \cos(x + y) = 1,$$

$$\text{т. е. } x + y = 2\pi n. \quad (3)$$

Решая систему (2)–(3), находим

$$\begin{cases} x - y = a, \\ x + y = 2\pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = a + 2\pi n, \\ 2y = -a + 2\pi n; \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{a}{2} + \pi n, \quad y_1 = -\frac{a}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \cos a = -\frac{1}{2}.$$

Решая аналогично, находим вторую пару решений:

$$x_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{a}{2}, \quad y_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{a}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{a}{2} + \pi n; -\frac{a}{2} + \pi n\right), \left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{a}{2}; \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi - \frac{a}{2}\right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнение $(a - 1)\cos x + (a + 1)\sin x = 2a$.

2. Решите уравнение $\sin \sqrt{x} = a + 1$.

3. Решите уравнение $\operatorname{tg} |x - 2| = a$.

4. Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x = a(1 - \cos x)$.

5. Среди всех решений уравнения $\sin x + \cos x = \sin ax$, где $a \in \mathbb{R}$, найдите наименьшее положительное.

6. При каком значении параметра a уравнение $3 - \frac{a}{\cos x} = 2 \operatorname{tg} x$ имеет решение?

7. Решите уравнение относительно a :

$$\sin^2 x - 2a \sin x + 2a^2 - 2a + 1 = 0.$$

8. При всех значениях параметра a решите уравнение

$$\sqrt{a \cos 2x + \sin^2 x} = a, \quad a \in R.$$

9. Найдите все значения параметра p , при которых уравнение $\cos^{-4} x + p \sin^2 x - 2p = 1$ имеет решение.

10. Найдите наибольшее положительное a , при котором уравнение $2 \cos^2 x + \cos x = a$ имеет решение.

11. При каких значениях параметра a из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ уравнение $\sqrt{2 \sin(x-a)} + \sqrt{3} = \cos 6x - 1$ имеет решение?

12. При каких значениях параметра a уравнение $\cos \sqrt{a-x^2} = 1$ имеет ровно восемь корней?

13. При каких целых значениях параметра a уравнение $\cos ax = 1 + 7 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ имеет решения? Найдите эти решения.

14. В зависимости от значений параметра a решите уравнение $x^2 + 2x \cos(x-a) + 1 = 0$.

15. При каком наибольшем целом значении параметра a уравнение $\cos x + \sqrt{1+a} \sin x = 1 + \sqrt{1-a}$ имеет решение?

16. Решите неравенство $y - \frac{1}{|\cos x|} - \sqrt{1-y-x^2} \geq 0$.

17. При каких значениях параметра a неравенство $a^2 + 2a - \sin^2 x - 2a \cos x > 2$ выполняется для любого $x \in R$?

18. Решите неравенство $|\sin(2x-4)| \leq m$ ($0 < m < 1$).

19. Решите неравенство $\sin x + a \cos x < a$ ($a \neq 0$).

20. Найдите все вещественные значения параметра a , такие, при которых неравенство

$$a(3 - \cos^2 x)^3 - \sin^2 x + a < 5$$

выполняется при всех x .

21. При каком наименьшем целом положительном значении параметра a неравенство

$$\cos^2 x + 2a \sin x - 2a < a^2 - 4$$

выполняется при любом значении x ?

22. При каком значении параметра a неравенство

$$(a - 2)\sin x > 3a + 4$$

не имеет решений?

23. Решите неравенство $|\cos(x - 2)| \geq a$, где a — параметр, $a \in (0; 1)$.

24. Решите неравенство $\sin 3x - 2a \sin^2 \frac{3x}{2} > 0$.

25. При каком наименьшем целом значении параметра a неравенство

$$a(2 + \sin^2 x)^4 + \cos^2 x + a > 11$$

выполняется при всех x ?

26. Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y \leq a, \\ \sin x = \sin y \end{cases} \text{ имеет решения.}$$

27. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = 0, \\ \cos x + \cos y = a, \end{cases} a \in \mathbb{R}.$

28. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \sin x \sin y = -2a^2. \end{cases}$

29. В зависимости от значения параметра a решите систему неравенств $0 \leq \cos x \leq 4 - a^2$.

30. Решите систему уравнений $\begin{cases} 8 \cos x \cos y \cos(x - y) + 1 = 0, \\ x + y = a. \end{cases}$

31. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$ имеет ровно восемь различных корней.

32. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$2^{\frac{2x}{x^2+1}} + a \cos\left(\frac{x^2-1}{x}\right) + a^2 - \frac{5}{4} = 0$$

имеет один корень.

33. При каких значениях параметра a уравнение

$$2\cos^2(2^{2x-x^2}) = a + \sqrt{3}\sin(2^{2x-x^2+1})$$

имеет корни?

34. При каких значениях параметра a уравнение

$$2\pi^2(x-1)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$$

имеет один корень?

35. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$8a\sin\frac{x}{3} - (a^2 - 16)\cos\frac{x}{3} = 12a - 16$$

имеет хотя бы один корень.

36. Для каждого значения параметра a найдите все корни уравнения $\cos 2x + 2\sin^2(x+a) + 2 - \sin a = 0$, принадлежащие отрезку $[\pi; 2\pi]$.

37. При каких значениях параметра a уравнение

$$(\sin x - \log_4 a)(\sin x - 2 + 2a) = 0$$

имеет ровно два корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$?

38. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых для любого значения x выполняется неравенство

$$|\sin^2 x - 2(a-1)\sin x \cos x + 5\cos^2 x + 2 - a| \leq 6.$$

39. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x|+1)a = y + \cos x, \\ \sin^2 x + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

40. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = a, \\ \cos(x-y) + xy \leq 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

§ 4. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства с параметрами

Краткая теория и справочные материалы

1. Показательные уравнения

Это уравнения, содержащие переменную в показателе степени.

Решение показательных уравнений часто сводится к решению уравнений вида $a^x = a^b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, x — неизвестное.

Это уравнение решается с помощью свойства степени: степени с одинаковыми основаниями $a > 0$, $a \neq 1$ равны только тогда, когда равны их показатели.

Типы показательных уравнений и методы их решения

1. Решение уравнений с использованием свойств показательной функции.

2. Решение уравнений, сводящихся к квадратным.

3. Решение уравнений вынесением общего множителя за скобку.

4. Решение показательных уравнений логарифмированием обеих частей.

5. Решение уравнений с использованием свойства монотонности показательной функции.

2. Показательно-степенные уравнения

Это уравнения, содержащие неизвестное как в показателе, так и в основании степени:

$$(f(x))^{g(x)} = (f(x))^{\varphi(x)}$$

Корнями этого уравнения считаются только решения смешанной системы

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 0, \\ g(x) = \varphi(x) \end{cases}$$

и те значения x , для которых $f(x) = 1$ при условии, что при этих значениях определены $g(x)$ и $\varphi(x)$.

Если условием не исключается случай $f(x) \leq 0$ или $f(x) = 1$, то приходится рассматривать все случаи.

3. Логарифмические уравнения

Это уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма.

Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида $\log_a x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$, равносильное уравнению $x = a^b$.

Решение логарифмического уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ равносильно каждой из систем:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Заметим, что переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ может привести к появлению посторонних корней.

Эти корни можно выявить либо с помощью подстановки их в исходное уравнение, либо с помощью нахождения области определения исходного уравнения, которая задается системой неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Методы решения логарифмических уравнений

1. Решение уравнений, основанных на определении логарифма.
2. Решение уравнений потенцированием.
3. Применение основного логарифмического тождества.
4. Логарифмирование.
5. Замена переменной.
6. Переход к другому основанию.

4. Логарифмы и их свойства

1°. Если $x > 0$, то $x = a^{\log_a x}$ — основное логарифмическое тождество.

2°. $\log_a a = 1$.

3°. $\log_a 1 = 0$.

4°. Если $x > 0$, $y > 0$, то $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$ — логарифм произведения.

5°. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ — логарифм частного.

6°. Если $x > 0$, $p \in \mathbb{R}$, то $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$ — логарифм степени.

7°. Если $x > 0, b > 0, b \neq 1$, то $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ — формула перехода от

основания a к основанию b .

В частности, если $x = b$, то $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, или $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

8°. $\log_a b = \log_{a^p} b^p = p \log_{a^p} b$ ($p \in \mathbb{R}, p \neq 0$).

9°. Если $a > 0, a \neq 1, b > 0, p \neq 0$, то $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$.

10°. $\log_a x \cdot \log_b y = \log_a y \cdot \log_b x$, где $x > 0, y > 0, a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1$.

5. Показательные неравенства

Это неравенства вида $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, где $a > 0, a \neq 1$.

Решение показательных неравенств основано на монотонности показательной функции.

Решение неравенства указанного вида и неравенств, сводящихся к этому виду, основано на следующих утверждениях:

если $a > 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$;

если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$.

6. Показательно-степенные неравенства

Это неравенства, в которых неизвестное находится одновременно и в показателе, и в основании степени, например,

$$(x-3)^{2x^2-7x} > 1.$$

При решении показательных неравенств будем пользоваться свойствами неравенств, содержащих степени:

1. При всех допустимых значениях a и b справедливы следующие утверждения:

- 1) неравенства $a^b > 1$ и $(a-1)b > 0$ равносильны;
- 2) неравенства $a^b \geq 1$ и $(a-1)b \geq 0$ равносильны;
- 3) неравенства $a^b < 1$ и $(a-1)b < 0$ равносильны;
- 4) неравенства $a^b \leq 1$ и $(a-1)b \leq 0$ равносильны.

2. При всех допустимых значениях a , b и c справедливы следующие утверждения:

- 1) неравенства $a^b > a^c$ и $(a - 1)(b - c) > 0$ равносильны;
- 2) неравенства $a^b \geq a^c$ и $(a - 1)(b - c) \geq 0$ равносильны;
- 3) неравенства $a^b < a^c$ и $(a - 1)(b - c) < 0$ равносильны;
- 4) неравенства $a^b \leq a^c$ и $(a - 1)(b - c) \leq 0$ равносильны.

7. Логарифмические неравенства

Неравенство, содержащее переменную только под знаком логарифма, называется логарифмическим.

При решении логарифмических неравенств (как и показательных) следует учитывать свойства монотонности, область определения логарифмической функции и общие свойства неравенств.

Логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ при $a > 1$ равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x), \end{cases}$$

а при $0 < a < 1$ — системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

8. Показательно-логарифмические неравенства

Это неравенства, содержащие неизвестное в основании и показателе степени, причем показатель степени содержит логарифмы.

При решении логарифмических неравенств будем пользоваться следующими свойствами:

1. При всех допустимых значениях a , b и c , таких, что $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ и $c > 0$, справедливы утверждения:

- 1) неравенства $\log_a b > \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) > 0$ равносильны;
- 2) неравенства $\log_a b \geq \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) \geq 0$ равносильны;
- 3) неравенства $\log_a b < \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) < 0$ равносильны;
- 4) неравенства $\log_a b \leq \log_a c$ и $(a - 1)(b - c) \leq 0$ равносильны.

2.

1) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d > 0$ и $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) > 0$ равносильны;

2) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d \geq 0$ и $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \geq 0$ равносильны;

3) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d < 0$ и $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) < 0$ равносильны;

4) неравенства $\log_a b \cdot \log_c d \leq 0$ и $(a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \leq 0$ равносильны.

3.

1) неравенства $\log_a b - \log_c b > 0$ и $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) > 0$ равносильны;

2) неравенства $\log_a b - \log_c b \geq 0$ и $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) \geq 0$ равносильны;

3) неравенства $\log_a b - \log_c b < 0$ и $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) < 0$ равносильны;

4) неравенства $\log_a b - \log_c b \leq 0$ и $(a-1)(b-1)(c-1)(c-a) \leq 0$ равносильны.

Задачи с решениями

4.1. Показательные и логарифмические уравнения

Пример 1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $(2x-1)\ln(x+a) = (2x-1)\ln(3x-a)$ имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$.

Решение.

$$(2x-1)\ln(x+a) - (2x-1)\ln(3x-a) = 0,$$

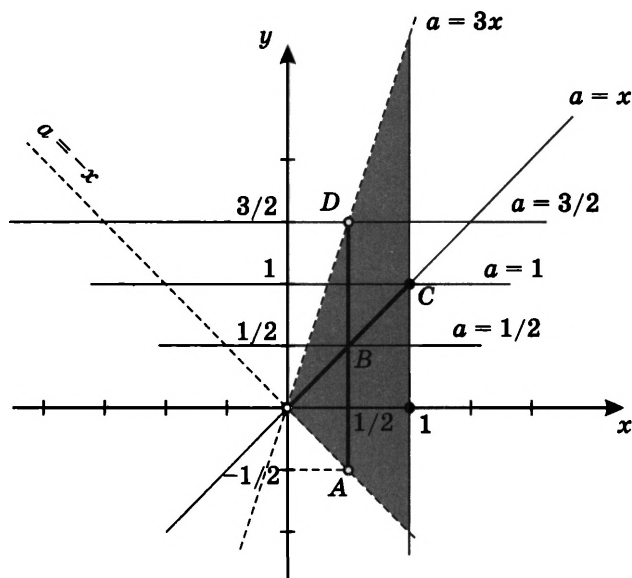
$$(2x-1)(\ln(x+a) - \ln(3x-a)) = 0, \text{ откуда } 2x-1 = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \text{ или}$$

$$\ln(x+a) - \ln(3x-a) = 0,$$

$$\begin{cases} x+a > 0, \\ 3x-a > 0, \\ \ln(x+a) = \ln(3x-a); \end{cases} \quad \begin{cases} a > -x, \\ a < 3x, \\ a = x. \end{cases}$$

По условию $x \in [0; 1]$.

Приведем графическое решение уравнения.



Прямые $a = -x$ и $x = \frac{1}{2}$ пересекаются в точке $A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$; прямые $a = x$ и $x = \frac{1}{2}$ — в точке $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; прямые $a = x$ и $x = 1$ — в точке $C(1; 1)$; прямые $a = 3x$ и $x = \frac{1}{2}$ — в точке $D\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Следовательно, исходное уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$, если $-\frac{1}{2} < a \leq 0$; $a = \frac{1}{2}$, $1 < a < \frac{3}{2}$.

Ответ: $\left(-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \left\{\frac{1}{2}\right\} \cup \left(1; \frac{3}{2}\right)$.

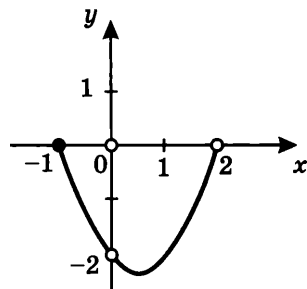
Пример 2. Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение $\log_{1-x}(a - x + 3) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 2)$.

Решение.

По определению логарифма $(1 - x)^2 = a - x + 3$, или $a = x^2 - x - 2$.

Кроме того, $\begin{cases} 1 - x > 0, \\ 1 - x \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x < 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$

Данное уравнение имеет решения на полуинтервале $[-1; 2)$ тогда и только тогда, когда прямые $y = a$ имеют общие точки с графиком функции $y = x^2 - x - 2$ при условии $-1 \leq x < 2$, $x \neq 0$.



Найдем координаты вершины параболы:

$$x_0 = \frac{1}{2}, \quad y_0 = a = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 2 = -\frac{9}{4}.$$

Значит, искомыми значениями параметра являются $-\frac{9}{4} \leq a \leq 2$,
исключая $a = -2$.

Ответ: $a \in \left[-\frac{9}{4}; -2\right) \cup (-2; 2)$.

Пример 3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $1 + \log_2(3x^2 + 2ax - a^2) = \log_2(x^2 - ax + 5x + 5a - 2a^2)$ имеет хотя бы одно решение.

Решение.

$$\begin{aligned} &\text{Заметим, что } 3x^2 + 2ax - a^2 = 3x^2 + 3ax - ax - a^2 = \\ &= 3x(x + a) - a(x + a) = (x + a)(3x - a), \quad x^2 - ax + 5x + 5a - 2a^2 = \\ &= (x^2 + ax) - (2ax + 2a^2) + (5x + 5a) = x(x + a) - 2a(x + a) + 5(x + a) = \\ &= (x + a)(x - 2a + 5). \end{aligned}$$

Исходное уравнение примет вид

$$1 + \log_2(x + a)(3x - a) = \log_2(x + a)(x - 2a + 5), \text{ или}$$

$$\log_2 2(x + a)(3x - a) = \log_2(x + a)(x - 2a + 5), \text{ откуда}$$

$$\begin{cases} 2(x + a)(3x - a) = (x + a)(x - 2a + 5), & \begin{cases} (x + a)(5x - 5) = 0, \\ (x + a)(3x - a) > 0; \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1, \\ (1 + a)(3 - a) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ (1 + a)(a - 3) < 0. \end{cases}$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, имеем

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ | \quad | \quad | \\ -1 \quad 3 \\ \hline -1 < a < 3. \end{array}$$

Следовательно, уравнение имеет хотя бы одно решение при $-1 < a < 3$.

Ответ: $a \in (-1; 3)$.

Пример 4. При каком значении параметра a уравнение

$$\log_3 (13 - |x^2 - 4x + 3|) = a$$

имеет три корня?

Решение.

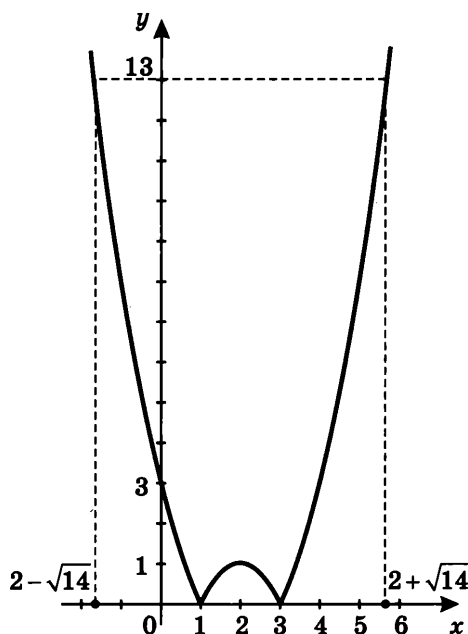
ОДЗ: $13 - |x^2 - 4x + 3| > 0$, или $-13 < x^2 - 4x + 3 < 13$, или

$$2 - \sqrt{14} < x < 2 + \sqrt{14}.$$

Исходное уравнение в области допустимых значений равносильно уравнению $|x^2 - 4x + 3| = 13 - 3^a$.

Рассмотрим график функции $y(x) = |x^2 - 4x + 3|$.

Значение $y(2 - \sqrt{14}) = y(2 + \sqrt{14}) = 13$.



Как видно из рисунка, если $13 - 3^a = 1$, или $3^a = 12$,

т. е. $a = \log_3 12 = 1 + \log_3 4$, то исходное уравнение имеет три корня:

$|x^2 - 4x + 3| = 1$, или $x^2 - 4x + 3 = \pm 1$, откуда имеем:

$$1) \ x^2 - 4x + 3 = 1, \quad 2) \ x^2 - 4x + 3 = -1,$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0, \quad x^2 - 4x + 4 = 0,$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}; \quad (x - 2)^2 = 0, \ x - 2 = 0, \ x_3 = 2.$$

Ответ: если $a = 1 + \log_3 4$, то $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$, $x_3 = 2$.

Пример 5. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x , что числа $3^{1+x} + 3^{1-x}$, $\frac{a}{4}$, $9^x + 9^{-x}$ составят арифметическую прогрессию?

Решение.

Пусть $3^x + 3^{-x} = y$, тогда $3^{1+x} + 3^{1-x} = 3 \cdot (3^x + 3^{-x}) = 3y$,
 $9^x + 9^{-x} = 3^{2x} + 3^{-2x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 \cdot 3^x \cdot 3^{-x} = y^2 - 2$.

Согласно условию задачи тройка чисел $3^{1+x} + 3^{1-x}$, $\frac{a}{4}$, $9^x + 9^{-x}$ должна составлять арифметическую прогрессию, тогда

$$\frac{a}{4} = \frac{1}{2}((3^{1+x} + 3^{1-x}) + (9^x + 9^{-x})), \text{ или } a = 2(3y + y^2 - 2), \text{ или}$$

$$2y^2 + 6y - (a + 4) = 0. \quad (1)$$

Поскольку при любом x $3^x + 3^{-x} \geq 2$, т. е. $y \geq 2$, то получим $a \geq 16$. Кроме того, дискриминант квадратного уравнения (1) должен быть неотрицательным, т. е. $D/4 = 9 + 2(a + 4) \geq 0$, откуда $a \geq -8,5$. Учитывая, что $a \geq 16$, окончательно имеем, что условие задачи выполняется при $a \geq 16$.

Ответ: при $a \geq 16$.

Пример 6. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 10 \cdot 2^{|x|} + 7|x| + 1 = 5y + 7x^2 + 5a, \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение.

Если $(x_0; y_0)$ — решение системы, то пара $(-x_0; y_0)$ — также решение при некотором значении параметра a . Следовательно, чтобы система имела единственное решение, необходимо выполнение условия $x = 0$.

В этом случае исходная система примет вид

$$\begin{cases} 10 \cdot 1 + 0 + 1 = 5y + 0 + 5a, \\ y^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 5a = 11 - 5y, \\ y^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{11 - 5y}{5}, \\ y = \pm 2. \end{cases}$$

Решая полученную систему относительно a , находим

$$a_1 = \frac{1}{5}; \quad a_2 = \frac{21}{5}.$$

1. Пусть $a = \frac{1}{5}$, тогда данная система запишется в виде

$$\begin{cases} 10 \cdot 2^{|x|} + 7|x| = 5y + 7x^2, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Поскольку $|x| \leq 2$, $|y| \leq 2$, то $7x^2 \leq 7|x|$, $2^{|x|} \geq 1$.

Имеем неравенство $10 \cdot 2^{|x|} + 7|x| \geq 5y + 7x^2$, что означает $2^{|x|} = 1$, $|x| = x^2$, тогда $y = 2$, т. е. при $x = 0$, $y = 2$. $(0; 2)$ — решение системы.

Итак, при $a = \frac{1}{5}$ система имеет единственное решение.

2. Пусть $a = \frac{21}{5}$. В этом случае получим систему

$$\begin{cases} 10 \cdot 2^{|x|} + 7|x| = 5y + 7x^2 + 20, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $x = 0$, $y = -2$ — решение полученной системы, так как при этом имеем

$$\begin{cases} 10 \cdot 1 + 0 = -10 + 0 + 20, \\ 0 + 4 = 4. \end{cases}$$

Но при этом также выполняется условие единственности исходной системы. Значит, при $a = \frac{1}{5}$ и при $a = \frac{21}{5}$ система имеет единственное решение.

Ответ: $a = \frac{1}{5}$, $a = \frac{21}{5}$.

Пример 7. В зависимости от значений параметра a решите уравнение $\log_3(28 - |x^2 - 4x + 3|) = a$.

Решение.

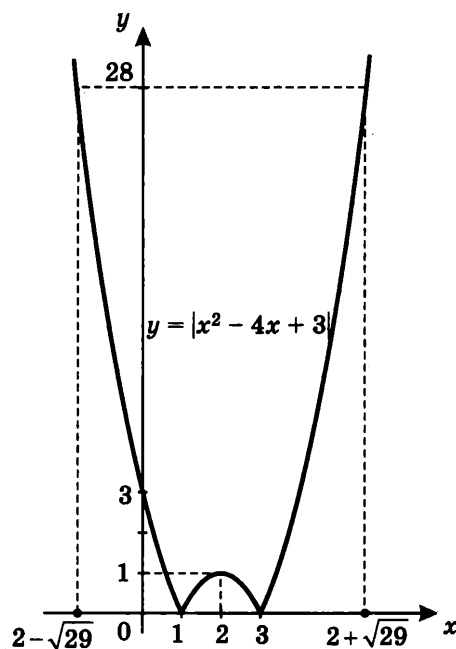
ОДЗ: $28 - |x^2 - 4x + 3| > 0$, или $-28 < (x - 2)^2 - 1 < 28$, или $(x - 2)^2 < 29$, откуда $x \in (2 - \sqrt{29}; 2 + \sqrt{29})$.

Данное уравнение с учетом ОДЗ равносильно уравнению

$$|x^2 - 4x + 3| = 28 - 3^a.$$

Рассмотрим график функции

$$y(x) = |x^2 - 4x + 3|.$$



Как видно из рисунка, значение

$$y(2 - \sqrt{29}) = y(2 + \sqrt{29}) = 28.$$

Кроме того, если $1 < 28 - 3^a < 28$, т. е. $a < 3$, то исходное уравнение имеет два корня — абсциссы точек пересечения графика функции $y(x)$ с прямой $y = 28 - 3^a$.

Решим квадратное уравнение

$$x^2 - 4x + 3 = 28 - 3^a, \text{ или}$$

$$x^2 - 4x + (3^a - 25) = 0,$$

$$D/4 = 4 - (3^a - 25) = 29 - 3^a, \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{29 - 3^a}.$$

Если $28 - 3^a = 1$, т. е. при $a = 3$ данное уравнение имеет три корня.

$$x^2 - 4x + 3 = \pm 1, \quad x^2 - 4x + 2 = 0, \quad x^2 - 4x + 4 = 0, \text{ откуда}$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}, \quad x_3 = 2.$$

Если $0 < 28 - 3^a < 1$, т. е. при $3 < a < \log_3 28$, исходное уравнение имеет четыре корня: помимо корней $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{29 - 3^a}$ также и корни

$$\text{уравнения } -x^2 + 4x - 3 = 28 - 3^a, \text{ равные } x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3^a - 27}.$$

Если $28 - 3^a = 0$, т. е. при $a = \log_3 28$, исходное уравнение имеет два корня: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$.

Наконец, если $a > \log_3 28$, то корней нет.

Ответ: если $a < 3$, то $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{29 - 3^a}$;

если $a = 3$, то $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$, $x_3 = 2$;

если $3 < a < \log_3 28$, то $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{29 - 3^a}$, $x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{3^a - 27}$;

если $a = \log_3 28$, то $x_1 = 1$, $x_2 = 3$;

если $a > \log_3 28$, то корней нет.

Пример 8. При каких значениях параметра a уравнение

$$2ax^2 = 3 \ln x$$

имеет один корень?

Решение.

Рассмотрим графики функций $y = 2ax^2$ и $y = 3 \ln x$. Заметим, что при $a \leq 0$ они имеют одну общую точку, значит, исходное уравнение будет иметь один корень. Если $a > 0$, то уравнение будет иметь один корень в случае, когда графики рассматриваемых функций касаются в некоторой точке $A(x_0; y_0)$.

Запишем уравнение касательной в точке $A(x_0; y_0)$:

$$f_1'(x) = (2ax^2)' = 4ax_0, \quad f_2'(x) = (3 \ln x)' = \frac{3}{x_0}, \quad \text{тогда}$$

$$y - y_0 = 4ax_0(x - x_0), \quad \text{или} \quad y - y_0 = \frac{3}{x_0}(x - x_0).$$

Поскольку в точке $A(x_0; y_0)$ значения рассматриваемых функций равны, то имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 4ax_0 = \frac{3}{x_0}, \\ 2ax_0^2 = 3 \ln x_0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4ax_0^2 = 3, \\ 2ax_0^2 = 3 \ln x_0; \end{cases} \quad 2 \cdot 3 \ln x_0 = 3, \quad \ln x_0 = \frac{1}{2}, \quad \text{откуда} \quad x_0 = e^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Значит, } a = \frac{3}{4x_0^2} = \frac{3}{4e} = \frac{3}{4}e^{-1}.$$

Итак, при $a \leq 0$ и $a = \frac{3}{4}e^{-1}$ исходное уравнение имеет один корень.

Ответ: $a \in (-\infty; 0] \cup \left\{ \frac{3}{4}e^{-1} \right\}$.

Пример 9. При каких значениях параметра a уравнение

$$\lg(x^2 + 3ax) - \lg(6x - 4a + 7) = 0$$

имеет единственное решение?

Решение.

Исходное уравнение с учетом области определения логарифмической функции равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} x^2 + 3ax = 6x - 4a + 7, \\ 6x - 4a + 7 > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 + 3(a-2)x + (4a-7) = 0, \\ x > \frac{4a-7}{6}. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 3(a-2)x + 4a-7$. Заметим, что абсцисса вершины параболы равна $x_0 = \frac{3(2-a)}{2}$, тогда система (1) будет иметь единственное решение при выполнении трех условий:

$$1) D = 0; \quad 6-3a > \frac{4a-7}{6}; \quad 2) f\left(\frac{4a-7}{6}\right) < 0; \quad 3) \begin{cases} f\left(\frac{4a-7}{6}\right) = 0, \\ 6-3a > \frac{4a-7}{6}. \end{cases}$$

$$\text{При этом } D = (3a-6)^2 - 4(4a-7) = 9a^2 - 52a + 64,$$

$$f\left(\frac{4a-7}{6}\right) = \left(\frac{4a-7}{6}\right)^2 + (3a-6) \cdot \frac{4a-7}{6} + (4a-7) = \frac{(4a-7)(22a-7)}{36}.$$

$$\text{В первом случае } \begin{cases} 9a^2 - 52a + 64 = 0, \\ a < \frac{43}{22}, \end{cases} \quad \text{откуда } a_1 = 4, \quad a_2 = \frac{16}{9}, \text{ из кото-}$$

рых подходит значение $a = \frac{16}{9}$.

$$\text{Во втором получим } \frac{(4a-7)(22a-7)}{36} < 0, \text{ или } \frac{7}{22} < a < \frac{7}{4}.$$

$$\text{Наконец, в третьем имеем } a_1 = \frac{7}{4}, \quad a_2 = \frac{7}{22}.$$

$$\text{Следовательно, условие задачи выполняется при } a = \frac{16}{9}, \quad \frac{7}{22} \leq a \leq \frac{7}{4}.$$

$$\text{Ответ: } a = \frac{16}{9}, \quad \frac{7}{22} \leq a \leq \frac{7}{4}.$$

Пример 10. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения

$$2 \log_4 (2x^2 - 3x + 12a - 6a^2) + \log_{0,5} (x^2 + 3ax - 2a^2) = 0$$

больше 9?

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\log_2 (2x^2 - 3x + 12a - 6a^2) - \log_2 (x^2 + 3ax - 2a^2) = 0, \text{ или}$$

$$\log_2 (2x^2 - 3x + 12a - 6a^2) = \log_2 (x^2 + 3ax - 2a^2). \quad (1)$$

Уравнение (1) равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 12a - 6a^2 = x^2 + 3ax - 2a^2, \\ x^2 + 3ax - 2a^2 > 0, \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} x^2 - 3(a+1)x + 4a(3-a) = 0, \\ (x+4a)(x-a) > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решим уравнение системы (2):

$$\begin{aligned} D &= 9(a+1)^2 - 16a(3-a) = 9a^2 + 18a + 9 - 48a + 16a^2 = \\ &= 25a^2 - 30a + 9 = (5a-3)^2; \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{3(a+1) \pm (5a-3)}{2}, \quad x_1 = 4a, \quad x_2 = -a + 3.$$

Подставляя значения x_1 и x_2 в неравенство системы (2), имеем

$$\begin{cases} 8a \cdot 3a > 0, \\ (3a+3)(3-2a) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 > 0, \\ (a+1)(3-2a) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a \neq 0, \\ a \in \left(-1; \frac{3}{2}\right), \end{cases}$$

$$\text{откуда } a \in (-1; 0) \cup \left(0; \frac{3}{2}\right). \quad (3)$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 3a + 3$, $x_1 x_2 = 4a(3-a)$.

$$\text{Тогда } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (3a+3)^2 - 8a(3-a) = 17a^2 - 6a + 9.$$

Согласно условию задачи $x_1^2 + x_2^2 > 9$, следовательно, $17a^2 - 6a > 0$,

$$\text{откуда } a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{6}{17}; +\infty\right).$$

$$\text{Учитывая (3), получим } a \in (-1; 0) \cup \left(\frac{6}{17}; \frac{3}{2}\right).$$

$$\text{Ответ: } (-1; 0) \cup \left(\frac{6}{17}; \frac{3}{2}\right).$$

Пример 11. При каких значениях a сумма $\log_a(\sin^2 x + 2)$ и $\log_a(\sin^2 x + 7)$ равна единице хотя бы при одном значении x ?

Решение.

Очевидно, что задача равносильна следующей: найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$\log_a(\sin^2 x + 2) + \log_a(\sin^2 x + 7) = 1$$

имеет решение.

ОДЗ: $a > 0$, $a \neq 1$.

Пусть $\sin^2 x = t$, где $t \in [0; 1]$.

Запишем уравнение в виде

$$\log_a(t+2)(t+7) = \log_a a.$$

В силу монотонности логарифмической функции получим

$$(t+2)(t+7) = a, \text{ или } t^2 + 9t = (14-a) = 0;$$

$$D = 81 - 4(14-a) = 4a + 25 > 0;$$

$$t_{1,2} = \frac{1}{2}(-9 \pm \sqrt{4a+25}), \quad t_1 = \frac{1}{2}(-9 - \sqrt{4a+25}) < 0, \text{ т. е. } t_1 \notin [0; 1],$$

$$t_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{4a+25} - 9).$$

Учитывая, что $0 \leq t \leq 1$, получим $0 \leq \frac{1}{2}(\sqrt{4a+25} - 9) \leq 1$,

$0 \leq \sqrt{4a+25} - 9 \leq 2$, $9 \leq \sqrt{4a+25} \leq 11$, $81 \leq 4a + 25 \leq 121$, $56 \leq 4a \leq 96$, откуда $14 \leq a \leq 24$.

Ответ: $[14; 24]$.

Пример 12. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\log_{x+1}(a+x-9) = 2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1; 1]$.

Решение.

Данное уравнение равносильно смешанной системе

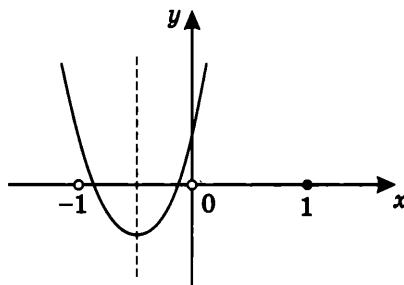
$$\begin{cases} (x+1)^2 = a+x-9, \\ x+1 > 0, \\ x+1 \neq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + x + 10 - a = 0, \\ x > -1, \\ x \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

Система (1) имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1; 1]$, если исходное уравнение имеет хотя бы один корень, принадлежащий либо промежутку $(-1; 0)$, либо промежутку $(0; 1]$.

Так как графиком функции $f(x) = x^2 + x + 10 - a$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке $x = -\frac{1}{2}$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1; 0)$, при условии

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{2}\right) \leq 0, & \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 10 - a \leq 0, \\ 10 - a > 0, \end{cases} \\ f(-1) = f(0) > 0; \end{cases}$$

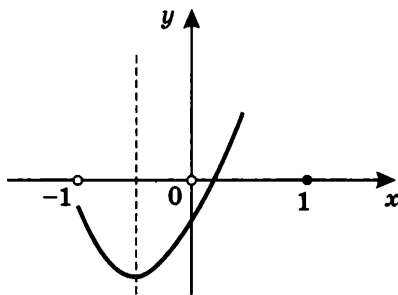
откуда находим $\frac{39}{4} \leq a < 10$.



Уравнение $f(x) = 0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(0; 1]$, если

$$\begin{cases} f(0) < 0, & \begin{cases} 10 - a < 0, \\ 12 - a \geq 0; \end{cases} & \begin{cases} a > 10, \\ a \leq 12, \end{cases} \\ f(1) \geq 0; \end{cases}$$

откуда $10 < a \leq 12$.



Итак, исходное уравнение имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1; 1]$, если $\frac{39}{4} \leq a < 10$ и $10 < a \leq 12$.

Ответ: $\left[\frac{39}{4}; 10\right), (10; 12]$.

Пример 13. При каких значениях параметра a уравнение

$$27 \cdot 9^{-x-3/2} - (a+2) \cdot 3^{-x} + (1-a)(2a+1) = 0$$

имеет единственное решение?

Решение.

Пусть $3^{-x} = t$, где $t > 0$, тогда получим уравнение

$$27 \cdot (3^{-x})^2 (3^2)^{-3/2} - (a+2) \cdot 3^{-x} + (1-a)(2a+1) = 0,$$

$$27 t^2 \cdot \frac{1}{27} - (a+2)t + (1-a)(2a+1) = 0, \text{ или}$$

$$t^2(a+2) + t + (1-a)(2a+1) = 0. \quad (1)$$

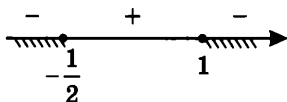
$$t_{1,2} = \frac{(a+2) \pm \sqrt{(a+2)^2 - 4(1-a)(2a+1)}}{2}.$$

$$t_{1,2} = \frac{(a+2) \pm \sqrt{a^2 + 4a + 4 - 8a + 8a^2 - 4 + 4a}}{2} = \frac{a+2 \pm 3a}{2}, \text{ откуда}$$

$$t_1 = 2a+1, t_2 = 1-a.$$

Заметим, что уравнение (1) имеет единственное решение, если t_1 и t_2 имеют разные знаки или когда $t_1 = t_2 > 0$.

В первом случае получим $(2a+1)(1-a) \leq 0$, откуда, решая методом интервалов, находим $a_1 = -\frac{1}{2}$, $a_2 = 1$.



$$a_1 \leq -\frac{1}{2}, a \geq 1.$$

Во втором случае имеем $t_1 = t_2$ при $a = 0$.

$$\text{Ответ: } a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \{0\} \cup [1; +\infty).$$

Пример 14. Найдите все значения параметра a из интервала $(2; 5)$, при каждом из которых существует хотя бы одно $x \in [2; 3]$, удовлетворяющее уравнению

$$\log_2 (3 - |\sin ax|) = \cos \left(\pi x - \frac{\pi}{6} \right).$$

Решение.

Рассматривая возможные значения функций в обеих частях равенства, легко заметить, что $\log_2 (3 - |\sin ax|) \geq 1$, а $\cos \left(\pi x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1$,

и равенство возможно только при выполнении условий $\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ и $|\sin ax| = 1$.

Первое из этих уравнений при $x \in [2; 3]$ имеет единственное решение, так как $\pi x - \frac{\pi}{6} = 2\pi n$, $x = \frac{1}{6} + 2\pi n$, откуда при $n = 1$, $x = \frac{13}{6}$.

Значения $a \in (2; 5)$ найдем, решив уравнение $\left|\sin \frac{13a}{6}\right| = 1$, откуда $\sin \frac{13a}{6} = \pm 1$.

Если $\sin \frac{13a}{6} = 1$, то $\frac{13a}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $a = \frac{6}{13}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$;

при $n = 1$ $a_1 = \frac{15\pi}{13} \in (2; 5)$.

Если $\sin \frac{13a}{6} = -1$, то $\frac{13a}{6} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $a = \frac{6}{13}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$;

при $n = 1$ $a_2 = \frac{9\pi}{13} \in (2; 5)$.

Итак, условию задачи удовлетворяют лишь два значения параметра a .

Ответ: $a_1 = \frac{15\pi}{13}$, $a_2 = \frac{9\pi}{13}$.

Пример 15. Решите уравнение

$$\lg(ax) + \lg x = \lg(x - 3).$$

Решение.

ОДЗ: $x > 3$, $a > 0$.

Потенцируя уравнение, получим

$$\lg(ax \cdot x) = \lg(x - 3), \text{ или } ax^2 = x - 3, ax^2 - x + 3 = 0,$$

$$D = 1 - 12a, x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12a}}{2a}.$$

Следовательно, $\begin{cases} 1 - 12a \geq 0, \\ a > 0, \end{cases}$ откуда $0 < a \leq \frac{1}{12}$.

Учитывая, что $x > 3$, имеем

$$\begin{cases} 0 < a \leq \frac{1}{12}, \\ \frac{1 \pm \sqrt{1-12a}}{2a} > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < a \leq \frac{1}{12}, \\ 1 \pm \sqrt{1-12a} > 6a, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 0 < a \leq \frac{1}{12}, \\ 1 - \sqrt{1-12a} > 6a. \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{1 + \sqrt{1-12a}}{2a} > 3. \quad (2)$$

Система (1) имеет решение при любых $0 < a \leq \frac{1}{12}$.

Неравенство (2) запишем в виде $\frac{1 + \sqrt{1-12a}}{2a} - 3 > 0$, или

$$\frac{1 - 6a + \sqrt{1-12a}}{2a} > 0, \text{ имеет смысл при любых } 0 < a \leq \frac{1}{12}.$$

Ответ: при $a = \frac{1}{12}$, $x = 6$;

$$\text{при } 0 < a < \frac{1}{12}, \quad x_{1,2} = \frac{1}{2a} (1 \pm \sqrt{1-12a});$$

при $a \leq 0$ или $a > \frac{1}{12}$ корней нет.

Пример 16. В зависимости от значений параметра a решите уравнение

$$2 \log_5 (ax - 1) = \log_{\sqrt{5}} (-x^2 - 7x - 10).$$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$2 \log_5 (ax - 1) = 2 \log_5 (-x^2 - 7x - 10), \text{ или } \log_5 (ax - 1) = \log_5 (-x^2 - 7x - 10). \quad (1)$$

Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} ax - 1 = -x^2 - 7x - 10, \\ -x^2 - 7x - 10 > 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + (a+7)x + 9 = 0, \\ x^2 + 7x + 10 < 0, \end{cases}$$

$$\text{или} \quad \begin{cases} x^2 + (a+7)x + 9 = 0, \\ -5 < x < -2. \end{cases} \quad (2)$$

Корни уравнения системы (2) (если они существуют) будут равны $D = (a + 7)^2 - 36 = (a + 7 - 6)(a + 7 + 6) = (a + 1)(a + 13)$,

$$x_1 = \frac{-a-7-\sqrt{(a+1)(a+13)}}{2}, \quad x_2 = \frac{-a-7+\sqrt{(a+1)(a+13)}}{2}.$$

Рассмотрим возможные случаи расположения корней x_1, x_2 в интервале $(-5; -2)$:

1) Пусть дискриминант уравнения системы (2) равен нулю, т. е. $D = 0$, тогда $a = -1$, или $a = -13$.

Если $a = -1$, то $x = \frac{1-7}{2} = -3 \in (-5; -2)$;

если $a = -13$, то $x = \frac{13-7}{2} = 3 \notin (-5; -2)$.

2) Пусть $a \in (-\infty; -13) \cup (-1; +\infty)$.

Если корни x_1 и x_2 лежат в интервале $(-5; -2)$, то должна быть совместна система

$$\begin{cases} x_1 > -5, \\ x_2 < -2. \end{cases} \quad (3)$$

Решая систему (3), находим $-1 < a < -\frac{1}{2}$.

3) Если только корень $x_2 \in (-5; -2)$, то должны выполняться неравенства $\begin{cases} -5 < x_2 < -2, \\ x_1 \leq 5, \end{cases}$ откуда следует, что решений нет.

4) Если только меньший корень $x_1 \in (-5; -2)$, то получим систему $\begin{cases} -5 < x_1 < -2, \\ -2 \leq x_2, \end{cases}$ решая которую находим $-\frac{1}{2} \leq a < -\frac{1}{5}$.

Ответ: если $a \in (-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$, то корней нет;

если $a = -1$, то $x = -3$;

если $a \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right)$, то $x_{1,2} = \frac{-(a+7) \pm \sqrt{(a+1)(a+13)}}{2}$;

если $a \in \left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{5}\right)$, то $x = \frac{-(a+7) + \sqrt{(a+1)(a+13)}}{2}$.

4.2. Показательные и логарифмические неравенства

Пример 1. Решите неравенство

$$(4x^2 - x + \sqrt{7}) \cdot \frac{\log_{0,5}(x+1)}{x-a} > 0.$$

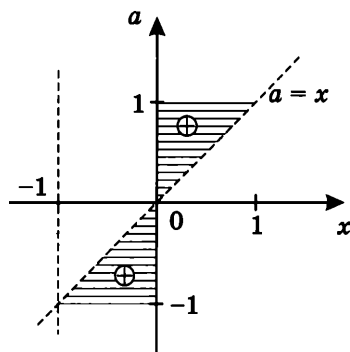
Решение.

Заметим, что $4x^2 - x + \sqrt{7} > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ (так как $D < 0$ и первый коэффициент $4 > 0$).

Тогда данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{\log_{0,5}(x+1)}{x-a} > 0. \quad (1)$$

Для решения неравенства (1) на координатной плоскости $(x; a)$ найдем области, где выражение, стоящее в левой части неравенства, сохраняет знак, и определим его. Границы этих областей задаются соотношениями $x + 1 > 0$, $x + 1 = 1$, т. е. $x = 0$ и $a = x$. На рисунке заштрихованы те области, координаты точек которых удовлетворяют неравенству.



Ответ: при $a \in (-\infty; -1]$, $x \in (-1; 0)$;

при $a \in (-1; 0)$, $x \in (a; 0)$;

при $a = 0$ решений нет;

при $a \in (0; +\infty)$, $x \in (0; a)$.

Пример 2. Решите неравенство $(a-6) \cdot 2^{\sqrt{x-4}} < a-3$.

Решение.

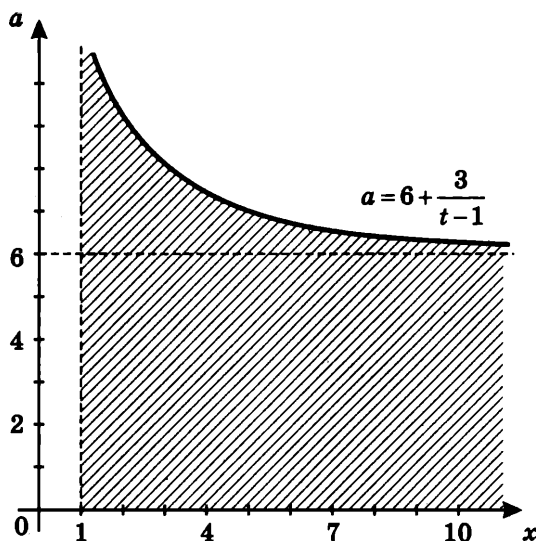
Пусть $2^{\sqrt{x-4}} = t$, где $t \geq 1$, тогда получим неравенство $(a-6)t < a-3$. На координатной плоскости $(t; a)$ изобразим области, координаты точек которых удовлетворяют соотношениям $t = 1$ и $(a-6)t = a-3$, или

$$(t-1)a = 6t-3, \text{ откуда } a = \frac{3(2t-1)}{t-1} = 6 + \frac{3}{t-1}.$$

На рисунке нужная область заштрихована.

Следовательно, при $a \in (-\infty; 6]$ $t \in [1; +\infty)$ и при $a \in (6; +\infty)$

$$t \in \left[1; \frac{a-3}{a-6} \right).$$



Учитывая подстановку $t = 2^{\sqrt{x-4}}$, получим окончательный результат.

Ответ: при $a \in (-\infty; 6]$, $x \in [4; +\infty)$;

$$\text{при } a \in (6; +\infty), x \in \left[4; 4 + \log_2^2\left(\frac{a-3}{a-6}\right)\right].$$

Пример 3. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_4(x+1-a) + 0,5 \log_{0,5}(x-3-2a) \geq 1$$

имеет решение?

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+1-a > 0, \\ x-3-2a > 0. \end{cases}$$

Запишем исходное неравенство в виде

$$2 \log_4(x+1-a) - 2 \log_4(x-3-2a) \geq 2, \text{ или}$$

$$\log_4(x+1-a) - \log_4(x-3-2a) \geq 1,$$

которое в области допустимых значений x и a равносильно неравенству

$$\frac{x+1-a}{x-3-2a} \geq 4, \text{ или } x+1-a \geq 4(x-3-2a),$$

откуда получим $x+1-a \geq 4x-12-8a$, $7a+13 \geq 3x$, или

$$x \leq \frac{1}{3}(7a+13). \quad (1)$$

Так как $a - 1 < x$ и $2a + 3 < x$ (следует из ОДЗ), то с учетом (1) получим систему неравенств

$$\begin{cases} a - 1 < \frac{1}{3}(7a + 13), \\ 2a + 3 < \frac{1}{3}(7a + 13); \end{cases} \quad \begin{cases} 3a - 3 < 7a + 13, \\ 6a + 9 < 7a + 13; \end{cases} \quad \begin{cases} 4a > -10, \\ a > -4; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -2,5, \\ a > -4, \end{cases}$$

откуда $a > -2,5$.

Заметим, что при $a > -2,5$ верно неравенство $a - 1 < 2a + 3$.

Итак, при $a > -2,5$ исходное неравенство имеет решение

$$2a + 3 < x \leq \frac{1}{3}(7a + 13).$$

Ответ: $(-2,5; +\infty)$.

Пример 4. Найдите наибольшее значение параметра a , при котором сумма $\log_a \left(\frac{4+3|x|}{1+|x|} \right)$ и $\log_a \left(\frac{6+5|x|}{1+|x|} \right)$ больше единицы при всех x .

Решение.

ОДЗ: $x \in \mathbb{R}$.

Пусть $|x| = t$, где $t \geq 0$, тогда получим

$$\begin{aligned} \log_a \left(\frac{4+3|x|}{1+|x|} \right) + \log_a \left(\frac{6+5|x|}{1+|x|} \right) &> 1, \text{ или} \\ \log_a \frac{(4+3t)(6+5t)}{(1+t)^2} &> \log_a a. \end{aligned} \quad (1)$$

1) Если $a > 1$, то (1) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{(4+3t)(6+5t)}{(1+t)^2} &> a, \text{ или } (4+3t)(6+5t) - a(1+t)^2 > 0, \\ 24 + 38t + 15t^2 - a - 2at - at^2 &> 0, \\ (15-a)t^2 + 2(19-a)t + (24-a) &> 0. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} D/4 &= (19-a)^2 - (15-a)(24-a) = \\ &= 361 - 38a + a^2 - 360 + 39a - a^2 = a + 1 > 0. \end{aligned}$$

Так как $a > 0$, $a \neq 1$, то

$$t_1 = \frac{(a-19) - \sqrt{a+1}}{15-a}, \quad t_2 = \frac{(a-19) + \sqrt{a+1}}{15-a}.$$

а) $a = 15$, тогда из (2) имеем $8t + 9 > 0$ — верно при всех $t \geq 0$;

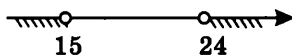
б) $1 < a < 15$.

Так как $15 - a > 0$, то $t_2 > t_1$, тогда неравенство (2) верно при любом $t \geq 0$, если $t_2 < 0$, т. е. $\frac{(a-19)+\sqrt{a+1}}{15-a} < 0$, или $(a-19)+\sqrt{a+1} < 0$, или $\sqrt{a+1} < 19-a$,

$$\begin{cases} a+1 < (19-a)^2, \\ 19-a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 - 39a + 360 > 0, \\ a < 19. \end{cases}$$

Решая неравенство $a^2 - 39a + 360 > 0$, находим

$$D = 39^2 - 4 \cdot 360 = 81 = 9^2 > 0,$$



$$a_1 = \frac{39-9}{2} = 15, \quad a_2 = \frac{39+9}{2} = 24.$$

Следовательно, $a \in (-\infty; 15) \cup (24; +\infty)$.

Сравнивая с рассматриваемым случаем, имеем $a \in (1; 15)$.

в) $a > 15$.

Учитывая, что первый коэффициент в левой части неравенства (2) отрицателен, приходим к выводу, что неравенство (2) не может выполняться при $t \geq 0$ ни для какого $a > 15$.

2) Если $0 < a < 1$, то неравенство (1) примет вид

$$(15-a)t^2 + 2(19-a)t + (24-a) < 0. \quad (3)$$

Заметим, что $15 - a > 0$, значит, неравенство (3) не может выполняться при $t \geq 0$ ни для какого $0 < a < 1$.

Итак, $a \in (1; 15]$, тогда $a = 15$ — наибольшее значение, удовлетворяющее условию задачи.

Ответ: 15.

Пример 5. Решите неравенство

$$\log_a(x^2 + 3x + 3) < \log_{2a}(x^2 + 3x + 3).$$

Решение.

Преобразуем данное неравенство, приводя логарифмы к основанию 2:

$$\begin{aligned} \frac{\log_2(x^2 + 3x + 3)}{\log_2 a} &< \frac{\log_2(x^2 + 3x + 3)}{\log_2 2a}, \text{ или} \\ \frac{\log_2(x^2 + 3x + 3)}{\log_2 a} - \frac{\log_2(x^2 + 3x + 3)}{1 + \log_2 a} &< 0, \text{ или} \end{aligned}$$

$$\log_2(x^2 + 3x + 3) \cdot \left(\frac{1}{\log_2 a} - \frac{1}{1 + \log_2 a} \right) < 0, \text{ или}$$

$$\frac{\log_2(x^2 + 3x + 3)}{\log_2 a \cdot (1 + \log_2 a)} < 0. \quad (1)$$

Имеем две возможности:

$$1) \log_2 a \cdot (1 + \log_2 a) > 0. \quad (2)$$

Пусть $\log_2 a = t$, тогда $t(1 + t) > 0$, откуда $t < -1$ и $t > 0$.

Если $t < -1$, то $\log_2 a < -1$, откуда $0 < a < \frac{1}{2}$;

если $t > 0$, то $\log_2 a > 0$, т. е. $a > 1$.

Итак, в случае (2) имеем $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Тогда неравенство (2) сводится к решению неравенства $\log_2(x^2 + 3x + 3) < 0$, откуда

$$\begin{cases} x^2 + 3x + 3 > 0, \\ x^2 + 3x + 3 < 1. \end{cases} \quad (3)$$

Заметим, что $x^2 + 3x + 3 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$ (так как дискриминант $D = -3 < 0$ и первый коэффициент положителен), тогда система (3) равносильна неравенству $x^2 + 3x + 3 < 1$, или $x^2 + 3x + 2 < 0$, откуда, решая методом интервалов, находим $-2 < x < -1$.

2) $\log_2 a \cdot (1 + \log_2 a) < 0$, тогда получим $\frac{1}{2} < a < 1$, и решение неравенства (1) сводится к решению неравенства $\log_2(x^2 + 3x + 3) > 0$, откуда получим $x < -2$ и $x > -1$.

Ответ: при $a \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$, $x \in (-2; -1)$;

при $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$, $x \in (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

Пример 6. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства $(0,6)^{x^2+1} \geq \left(\frac{25}{9}\right)^{a-4x}$ является решением неравенства $x^2 - 16x + 13 < a^2$?

Решение.

Запишем первое неравенство в виде

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+1} \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{8x-2a} \quad (1)$$

Так как $0 < \frac{3}{5} < 1$, то неравенство (1) равносильно неравенству

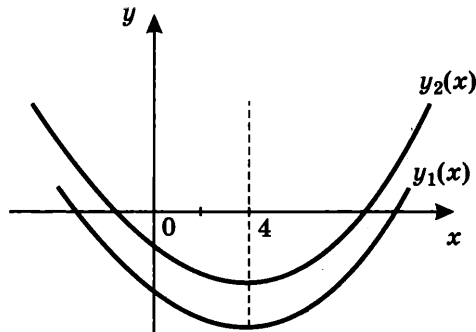
$$\begin{aligned} x^2 + 1 &\leq 8x - 2a, \text{ или} \\ (x - 4)^2 + 2a - 15 &\leq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Запишем второе неравенство в виде

$$\begin{aligned} x^2 - 16x + 16 - a^2 - 3 &< 0, \text{ или} \\ (x - 4)^2 - a^2 - 3 &< 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим графики парабол

$$y_1 = (x - 4)^2 - a^2 - 3 \text{ и } y_2 = (x - 4)^2 + 2a - 15.$$

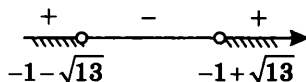


Как видно из рисунка, параболы имеют одну и ту же ось симметрии $x = 4$. Учитывая, что пустое множество является подмножеством любого множества, получим, что требования задачи будут удовлетворены только в случае, когда график функции y_2 лежит выше функции y_1 , т. е. когда выполняется неравенство

$$-a^2 - 3 < 2a - 15, \text{ или } a^2 + 2a - 12 > 0,$$

откуда, решая методом интервалов, находим

$$D/4 = 1 + 12 = 13 > 0, \quad a_{1,2} = -1 \pm \sqrt{13}.$$



$$a < -1 - \sqrt{13}, \quad a > -1 + \sqrt{13}.$$

Ответ: $a \in (-\infty; -1 - \sqrt{13}) \cup (-1 + \sqrt{13}; +\infty).$

Пример 7. Найдите наименьшее целое значение параметра a , при котором сумма

$$\log_a(\sqrt{1-x^2}+1) \text{ и } \log_a(\sqrt{1-x^2}+7)$$

будет меньше единицы при всех допустимых значениях x .

Решение.

$$\text{ОДЗ: } 1-x^2 \geq 0, |x| \leq 1, \text{ т. е. } -1 \leq t \leq 1.$$

Пусть $\sqrt{1-x^2} = t$, тогда $0 \leq t \leq 1$, и данное неравенство запишется в виде

$$\begin{aligned} \log_a(t+1) + \log_a(t+7) &< 1, \text{ или} \\ \log_a(t+1)(t+7) &< \log_a a. \end{aligned} \quad (1)$$

Имеем две возможности:

1) $0 < a < 1$, тогда (1) примет вид $(t+1)(t+7) > a$. Ввиду того что $0 \leq t \leq 1$, имеем $(t+1)(t+7) \geq 7 > a$.

Следовательно, все $0 < a < 1$ удовлетворяют условию задачи.

2) $a > 1$, тогда (1) примет вид $(t+1)(t+7) < a$, или $t^2 + 8t + (7-a) < 0$, откуда находим $t_1 = -4 - \sqrt{9+a}$, $t_2 = -4 + \sqrt{9+a}$, где $t_1 < t < t_2$.

В этом случае получим систему неравенств

$$\begin{cases} t_1 < 0, \\ t_2 > 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -4 - \sqrt{9+a} < 0, \\ -4 + \sqrt{9+a} > 1. \end{cases} \quad \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix}$$

Заметим, что неравенство (2) выполняется при любых a . Решая неравенство (3), находим $\sqrt{9+a} > 5$, $9+a > 25$, $a > 16$.

Так как ранее мы получили $0 < a < 1$, то окончательно имеем $a \in (0; 1) \cup (16; +\infty)$.

Значит, $a = 17$ — наименьшее целое, удовлетворяющее условию задачи.

Ответ: $a = 17$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите уравнение $(2^x + 2a - 1)(a + 1 - 2^x) = 0$.

2. Решите уравнение $4^{\sin x} - a - 3 = (a + 2) \cdot 2^{\sin x}$.

3. Решите уравнение $\log_3(31 - |x^2 - 6x + 5|) = a$.

4. Решите уравнение $\left| 49^{\sqrt{x}} - 4 \cdot 7^{\sqrt{x}} - 5 \right| = a$.

5. При каких значениях параметра a число 1 является корнем уравнения $\sqrt{3 \cdot 5^{2x} - 16 \cdot 5^x + 3a} = 5^x - a$?

6. При каких значениях параметра a уравнение $2 \cdot 5^{|x|} + 3a \cdot 5^{-|x|} + a^2 = 0$ имеет единственное решение?

7. При каких значениях параметра m уравнение $\lg(x^2 + 6x + 8) = \lg(m - 3x)$ имеет единственное решение?

8. Найдите количество целых значений параметра p , при которых уравнение $\log_2^2 x - 4|\log_2 x| + p^2 - 2p - 6 = 0$ имеет решение.

9. Найдите сумму всех целых значений параметра k , при которых уравнение $x^2 + 2x + \log_{16}(k^2 - 2k + 1) = 0$ имеет действительные корни.

10. При каких значениях параметра m уравнение $2\log_{\frac{1}{2}} x - |\log_3 x| + m = 0$ имеет три корня?

11. При каком значении параметра a уравнение $\log_{0,2} \left(\left(\frac{1}{5} \right)^{2x} + 4a \right) = x$ имеет два корня?

12. При каком значении параметра a уравнение $\log_{x^2+3}(2ax^2 + 1 - a) = 2$ имеет один корень?

13. При каком значении параметра a уравнение $\log_{a-1}(x^2 + a(2x - 1) + a^2 + 7) = 2$ имеет один корень?

14. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $\log_a |x - 1| - \log_a x = 1$ равна 34?

15. Решите уравнение $9^{\lg(x-a)} - \lg 2 = 3^{\lg(x-1)}$.

16. При каких значениях параметра a неравенство $\log_4(x + 1 - a) + 0,5 \log_{0,5}(x - 3 - 2a) \geq 1$ имеет решение?

17. Решите неравенство $(a - 6) \cdot 2^{\sqrt{x-3}} < a - 2$.

18. Решите неравенство $\frac{x^2}{x-4} \log_{\frac{1}{3}}(x+a) < 0$.

19. При каком наибольшем целом значении параметра m неравенство $\log_{\frac{m}{m+1}}(x^2+2) > 1$ выполняется для всех $x \in R$?

20. При каком наименьшем целом значении параметра a неравенство $a \cdot 9^x + 4(a-1) \cdot 3^x + a > 1$ выполняется для всех $x \in R$?

21. Найдите наибольшее целое значение параметра p , при котором неравенство $56 \cdot 3^x > 9^x - p$ не имеет ни одного целочисленного решения.

22. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство $16^x < 126 \cdot 4^x - a$ не имеет ни одного целочисленного решения.

23. Найдите все $x \in (0,5; 2,5)$, удовлетворяющие неравенству $\log_{3x-x^2}(3a-ax) < 1$ при любых значениях параметра $a \in (0; 2)$.

24. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{2} \sin \alpha}(2x+9) > 2 \log_{\sqrt{2} \sin \alpha}(x-3).$$

25. Решите неравенство $\frac{1}{\log_a(x-3)} > 1$.

26. Решите неравенство $\sqrt{2-a^{x-3}} < a^{x-3}$.

27. При каком наименьшем целом значении параметра p неравенство $4^x - p \cdot 2^x - p + 3 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение?

28. Решите неравенство $|3^x - 3^{-x}| < 3^a - 3^{-a}$.

29. При каком наибольшем целом значении параметра m неравенство $\log_{\frac{m}{m+3}}(x^2+|x|+2) > 1$ выполняется при всех x ?

30. Найдите сумму натуральных n , таких, что неравенство

$$2 \log_{0,5} n - 3 + 2 \log_{0,5} n - x^2 < 0$$

выполняется при всех x .

31. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$\log_a \left(\frac{3x^2+8}{x^2+2} \right) + \log_a \left(\frac{2x^2+6}{x^2+2} \right) > 1.$$

не имеет решений.

32. При каких значениях параметра a неравенство

$$\log_{a^2-2}((a^2-1)x^2+2x+2) > 1$$

выполняется для любого значения x ?

33. При каких значениях параметра a уравнение

$$4^x - (5a-3) \cdot 2^x + 4a^2 - 3a = 0$$

имеет единственное решение?

34. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$64^{x+a} - 4^{x^2-5x+4a} = x^2 - 8x + a$$

не имеет действительных корней.

35. При каких значениях параметра a уравнение

$$2\log_3^2 x - |\log_3 x| + a = 0$$

имеет четыре различных корня?

36. При каких значениях параметра a уравнение

$$4^x + 2^{x+2} + 7 = a - 2^{-2x} - 2 \cdot 2^{1-x}$$

имеет корни?

37. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$\log_5(25^x - \log_5 a) = x$$

имеет единственное решение.

38. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$9^x + (a^2 + 6) \cdot 3^x - a^2 + 16 = 0$$

не имеет решения.

39. Найдите все значения параметра a , при которых неравенство

$$\log_a(x^2 + 4) > 1$$

выполняется для всех значений x .

40. При каких значениях параметра a уравнение

$$4^x + (a^2 - 7) \cdot 2^x + a^2 + 5a - 2 = 0$$

имеет два различных корня, сумма которых равна 2?

§ 5. Функции. Свойства функций

Краткая теория и справочные материалы

1. Зависимость переменной y от переменной x называется **функцией**, если каждому значению x соответствует единственное значение y .

Обозначение: $y = f(x)$.

2. Переменная x называется **независимой переменной**, или **аргументом**, а переменная y — **зависимой переменной**, или **функцией**.

3. Значение y , соответствующее заданному значению x , называется **значением функции**.

4. Все значения, которые принимает аргумент, называются **областью определения функции**. Все значения, которые принимает сама функция, называются **областью изменения (множеством значений) функции**.

5. $D(f)$ или $D(y)$ — область определения функции; $E(f)$ или $E(y)$ — множество значений функции; $y(x_0)$ или $f(x_0)$ — значение функции в точке x_0 .

6. **Графиком функции** называется множество всех точек плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям самой функции.

1. Способы задания функции

1. Аналитический способ (в виде формулы).

2. Табличный (в виде пар $(x; y)$).

3. Графический.

Заметим, что не всякая кривая является графиком некоторой функции.

Для того чтобы кривая на плоскости являлась графиком функции, необходимо и достаточно, чтобы каждому значению аргумента x соответствовало лишь одно значение переменной y .

2. Монотонность функции

1. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей** на данном числовом промежутке X , если для любых двух точек x_1 и x_2 из промежутка X , таких, что $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

2. Функция $y = f(x)$ называется **убывающей** на данном числовом промежутке X , если для любых двух точек x_1 и x_2 из промежутка X , таких, что $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$.

3. Если функция только возрастает или убывает на данном промежутке, то она называется **монотонной** на этом промежутке.

3. Четные и нечетные функции

1. **Четная функция** — функция $y(x)$, обладающая свойством $y(-x) = y(x)$ для каждого x из области определения.

Например: $y = x^2$, $y = \cos x$ — четные функции.

2. **График четной функции** симметричен относительно оси ординат.

3. **Нечетная функция** — функция $y(x)$, обладающая свойством $y(-x) = -y(x)$ для каждого x из области определения.

Например: $y = x^3$, $y = \sin x$ — нечетные функции.

4. **График нечетной функции** симметричен относительно начала координат.

Заметим, что не всякая функция является четной или нечетной.

Например: функции $y = 3x + 7$; $y = x^2 + x$ не являются ни четными, ни нечетными (не имеют класса четности).

4. Периодические функции

1. Функция f называется **периодической**, если существует число $T \neq 0$, такое, что при любом $x \in D(f)$ числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат этой области и выполняется равенство $f(x - T) = f(x) = f(x + T)$, где T — **период** функции f .

2. Если T — период функции, то kT , где $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, — также период функции.

Следовательно, всякая периодическая функция имеет сколько угодно периодов. На практике обычно рассматривают наименьший положительный период.

5. Обратная функция

Обратная функция к функции $y = f(x)$ — функция $y = g(x)$, которая получается при решении уравнения $f(x) = y$ относительно x и заменой x на y и y на x .

6. Экстремумы функции

1. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ (причем уравнение $f'(x) = 0$ имеет лишь конечное множество корней), то функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке X .

2. Если во всех точках открытого промежутка X выполняется неравенство $f'(x) \leq 0$ (причем уравнение $f'(x) = 0$ имеет лишь конечное множество корней), то функция $y = f(x)$ убывает на промежутке X .

3. Точка $x = x_0$ называется **точкой минимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x = x_0$) выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Значение функции в точке минимума обозначают y_{\min} .

4. Точка $x = x_0$ называется **точкой максимума функции** $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой (кроме самой точки $x = x_0$) выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Значение функции в точке максимума обозначают y_{\max} .

5. **Точки экстремума функции** — точки максимума и минимума.

6. Точки, в которых производная функции равна нулю, называются **стационарными**, а точки, в которых функция непрерывна, но производная функции не существует, — **критическими**.

7. Необходимое и достаточное условия экстремума функции

1. **Необходимое условие экстремума (теорема Ферма)**: если дифференцируемая в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то $f'(x) = 0$.

2. **Достаточное условие экстремума**:

- если при переходе через стационарную точку x_0 производная функции меняет знак с «+» на «-», то x_0 — **точка максимума функции**;
- если производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 — **точка минимума функции**.

8. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке

В некоторых случаях находить наибольшее и наименьшее значения функции можно без помощи графика.

В более сложных случаях для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции используется производная. Для этого находят:

1) производную $f'(x)$;

2) стационарные и критические точки функции; выбирают те из них, которые принадлежат отрезку $[a; b]$;

3) значения функции $y = f(x)$ в стационарных и критических точках и на концах отрезка, тогда меньшее из них будет наименьшим, а большее — наибольшим значением функции.

9. Область определения основных элементарных функций

1) Область определения любого многочлена — R ;

$$2) D\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty);$$

$$3) D(\sqrt[n]{x}) = [0; +\infty);$$

$$4) D(\sqrt[n+1]{x}) = R;$$

$$5) D(\log_a x) = (0; +\infty);$$

$$6) D(a^x) = R;$$

$$7) D(\sin x) = D(\cos x) = R;$$

$$8) D(\arcsin x) = D(\arccos x) = [-1; 1];$$

$$9) D(\operatorname{tg} x): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;$$

$$10) D(\operatorname{ctg} x): x \neq \pi n, n \in Z;$$

$$11) D(\operatorname{arctg} x) = D(\operatorname{arcctg} x) = R.$$

10. Множество (область) значений основных элементарных функций

1) Областью значений всякого многочлена нечетной степени является R .

2) Областью значений многочлена четной степени является промежуток $[a; +\infty)$, где a — наименьшее значение этого многочлена, либо промежуток $(-\infty; b)$, где b — наибольшее значение этого многочлена.

$$3) E\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

$$4) E(\sqrt[n]{x}) = [0; +\infty).$$

$$5) E(\sqrt[n+1]{x}) = R.$$

$$6) E(\log_a x) = R.$$

$$7) E(a^x) = (0; +\infty).$$

$$8) E(\sin x) = E(\cos x) = [-1; 1].$$

$$9) E(\arcsin x) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$10) E(\arccos) = [0; \pi].$$

$$11) E(\operatorname{tg} x) = E(\operatorname{ctg} x) = R.$$

$$12) E(\operatorname{arctg} x) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$$

$$13) E(\operatorname{arcctg} x) = (0; \pi).$$

Задачи с решениями

Пример 1. Найдите наименьшее значение функции

$$y = -3^{2x} + (7 - a)3^x - 15 + 4a$$

на отрезке $[-\log_3 2; \log_3 2]$.

Решение.

Найдем производную функции

$$y' = -2 \ln 3 \cdot 3^{2x} + (7 - a) \ln 3 \cdot 3^x. \quad (1)$$

Пусть $3^x = t$, где $t > 0$, тогда найдем наибольшее значение функции: $y = -t^2 + (7 - a)t - 15 + 4a$ на отрезке $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда если } \frac{7-a}{2} < \frac{1}{2}, \text{ или } a > 6, \text{ то } y_{\text{наиб.}} = y\left(\frac{1}{2}\right) &= -\frac{1}{4} + \frac{7-a}{2} - 15 + 4a = \\ &= \frac{1}{4}(-1 + 14 - 2a - 60 + 16a) = \frac{1}{4}(14a - 47). \end{aligned}$$

Если $\frac{1}{2} \leq \frac{7-a}{2} \leq 2$, или $1 \leq 7 - a \leq 4$, т. е. $a \in [3; 6]$, то

$$\begin{aligned} y_{\text{наиб.}} &= y\left(\frac{7-a}{2}\right) = -\left(\frac{7-a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}(7-a)^2 - 15 + 4a = \frac{(7-a)^2}{4} - 15 + 4a = \\ &= \frac{(7-a)^2 - 60 + 16a}{4} = \frac{1}{4}(a^2 + 2a - 11). \end{aligned}$$

Если же $a < 3$, то $y_{\text{наиб.}} = y(2) = -4 + (7 - a) \cdot 2 - 15 + 4a = 2a - 5$.

Ответ: при $a \in (-\infty; 3)$, $y_{\text{наиб.}} = 2a - 5$;

$$\text{при } a \in [3; 6], y_{\text{наиб.}} = \frac{1}{4}(a^2 + 2a - 11);$$

$$\text{при } a \in (6; +\infty), y_{\text{наиб.}} = \frac{1}{4}(14a - 47).$$

Пример 2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 2ax + |x^2 - 4x + 3|$ больше, чем -19 .

Решение.

1. а) Пусть $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3) \geq 0$, тогда $f(x) = 2ax + (x^2 - 4x + 3) = x^2 + 2(a - 2)x + 3$ — парабола, ветви которой направлены вверх, с осью симметрии $x = 2 - a$.

б) Если $x^2 - 4x + 3 < 0$, т. е. $1 \leq x \leq 3$, то $f(x) = 2ax - (x^2 - 4x + 3) = -x^2 + 2(a + 2)x - 3$ — парабола, ветви которой направлены вниз.

2. Если $2 - a \in [1; 3]$, то наименьшее значение функция $f(x)$ может принимать только на концах отрезка, т. е. в точках $x = 1$ и $x = 3$.

Если $2 - a \notin [1; 3]$, то в точке $x = 2 - a$.

3. Наименьшее значение функции $f(x) > -19$ в случае, если

$$\begin{cases} 2 - a \in [1; 3], \\ f(1) > -19, \\ f(3) > -19, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2 - a \notin [1; 3], \\ f(1) > -19, \\ f(3) > -19, \\ f(2 - a) > -19. \end{cases}$$

Решая первую систему, имеем

$$\begin{cases} 1 \leq 2 - a \leq 3, \\ 2a > -19, \\ 6a > -19, \end{cases} \quad \text{откуда } -1 \leq a \leq 1.$$

Решая вторую систему, находим

$$a \in \left(-\frac{19}{6}; -1\right) \cup (1; +\infty),$$

$$2a(2 - a) + |1 - a^2| > -19, \text{ или } a^2 - 4a - 18 < 0,$$

$$D/4 = 4 + 18 = 22 > 0, \quad a_{1,2} = 2 \pm \sqrt{22}, \text{ откуда}$$

$$2 - \sqrt{22} < a < 2 + \sqrt{22}.$$

$$\text{Следовательно, } 2 - \sqrt{22} < a < -1, \text{ или } 1 < a < 2 + \sqrt{22}.$$

$$\text{Ответ: } a \in (2 - \sqrt{22}; 2 + \sqrt{22}).$$

Пример 3. При каких целых положительных n функция f , заданная равенством $f(x) = \cos 3nx \cdot \sin \frac{25x}{n^2}$, является периодической функцией с периодом $T = 3\pi$?

Решение.

Согласно условию при любом значении x должно выполняться равенство

$$\cos 3n(x+3\pi) \cdot \sin \frac{25}{n^2}(x+3\pi) = \cos 3nx \cdot \sin \frac{25x}{n^2},$$

тогда это равенство будет выполняться и при $x = 0$.

В этом случае получим уравнение

$$\cos 9\pi n \cdot \sin \frac{75\pi}{n^2} = 0.$$

Но $\cos 9\pi n \neq 0$ при целых положительных n , тогда $\sin \frac{75\pi}{n^2} = 0$, или

$\frac{75\pi}{n^2} = \pi k$, где k — целое, значит, $\frac{75}{n^2} = k$. Поскольку по условию зада-

чи n — положительное целое, то подходят значения $n = 1$ и $n = 5$.

Ответ: $n = 1; n = 5$.

Пример 4. При каких значениях параметра a наибольшее значение функции $f(x) = \frac{1}{x^2 - 6x + a}$ на отрезке $[7; 9]$ не превышает $\frac{1}{12}$?

Решение.

Функция $f(x)$ определена на отрезке $[7; 9]$, если квадратный трехчлен $g(x) = x^2 - 6x + a$ не имеет корней на этом же отрезке.

Поскольку графиком функции $g(x)$ является парабола, ветви которой направлены вверх, и абсцисса вершины равна $x_0 = \frac{6}{2} = 3$, то $g(x)$

на отрезке $[7; 9]$ не будет иметь корней, если выполняется условие $g(7) \cdot g(9) > 0$, где $g(7) = 49 - 42 + a = 7 + a$, $g(9) = 81 - 54 + a = 27 + a$.

Тогда $(7 + a)(27 + a) > 0$, откуда

$$a \in (-\infty; -27) \cup (-7; +\infty). \quad (1)$$

Заметим, что функция $g(x) = x^2 - 6x + a$ на отрезке $[7; 9]$ является возрастающей, тогда функция $f(x)$ на этом же отрезке будет убывающей, следовательно, условие задачи выполняется, если

$$\frac{1}{7+a} \leq \frac{1}{12}, \text{ или } \frac{5-a}{7+a} \leq 0. \quad (2)$$

Решая неравенство (2) методом интервалов, находим

$$a \in (-\infty; -7) \cup [5; +\infty).$$

Учитывая (1), окончательно имеем

$$a \in (-\infty; -27) \cup [5; +\infty).$$

Ответ: $(-\infty; -27) \cup [5; +\infty)$.

Пример 5. При каких значениях параметра a график функции $f(x) = x^4 + 4ax^3 - 4x^2 - 8ax$ имеет вертикальную ось симметрии?

Решение.

Заметим, что если функция $f(x)$ четная, то она имеет вертикальную ось симметрии $x = x_0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы функция

$$f(x - x_0) = (x - x_0)^4 + 4a(x - x_0)^3 - 4(x - x_0)^2 - 8a(x - x_0), \text{ или}$$

$$\begin{aligned} f(x - x_0) &= x^4 - 4x^3x_0 + 4x^2x_0^2 + 2x^2x_0^2 - 4xx_0^3 + x_0^4 + 4ax^3 - \\ &- 12ax^2x_0 + 12axx_0^2 - 4ax_0^3 - 4x^2 + 8xx_0 - 4x_0^2 - 8ax + 8ax_0 = \\ &= x^4 + (4a - 4x_0)x^3 + (6x_0^2 - 12ax_0 - 4)x^2 + (-4x_0^3 + 12ax_0^2 + 8x_0 - \\ &- 8a)x + x_0^4 - 4ax_0^3 - 4x_0^2 + 8ax_0. \end{aligned}$$

Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 4a - 4x_0 = 0, & x_0 = a, \\ -4x_0^3 + 12ax_0^2 + 8x_0 - 8a = 0; & -4a^3 + 12a^3 + 8a - 8a = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы имеем $8a^3 = 0$, $a^3 = 0$, $a = 0$.

Ответ: при $a = 0$.

Пример 6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{1-5x} = a - 8|x|$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f_1(x) = a - 8|x|$ и $f_2(x) = \sqrt{1-5x}$. Исследуем уравнение $f_1(x) = f_2(x)$. Заметим, что функция $f_2(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; 0)$, а функция $f_1(x)$ возрастает.

Следовательно, уравнение $f_1(x) = f_2(x)$ на промежутке $(-\infty; 0)$ имеет не более одного корня, причем решение существует при условии $f_1(0) > f_2(0)$, т. е. при $a > 1$.

Если $x \geq 0$, то получим уравнение $a - 8x = \sqrt{1-5x}$. При $x > \frac{a}{8}$ левая часть полученного уравнения отрицательна, следовательно, корней нет.

При $x \leq \frac{a}{8}$ получим уравнение $(a - 8x)^2 = 1 - 5x$, или $a^2 - 16ax + 64x^2 = 1 - 5x$, или $64x^2 + (5 - 16a)x + (a^2 - 1) = 0$ — квадратное уравнение относительно x :

$$D = (5 - 16a)^2 - 256(a^2 - 1) = 281 - 160a.$$

При $D < 0$, т. е. при $a > \frac{281}{160}$, квадратное уравнение не имеет корней; при $a = \frac{281}{160}$ — один корень, равный $x = \frac{16a - 5}{2 \cdot 64} = \frac{231}{1280}$; при $a < \frac{281}{160}$ — два корня:

$$x_1 = \frac{(16a - 5) - \sqrt{D}}{128} = \frac{a}{8} - \frac{5 + \sqrt{D}}{128}, \quad x_2 = \frac{a}{8} - \frac{5 - \sqrt{D}}{128}.$$

Тогда $x_1 < \frac{a}{8}$, а больший корень x_2 не превосходит $\frac{a}{8}$, если $\sqrt{D} \leq 5$, или $281 - 160a \leq 25$, т. е. при $\frac{8}{5} \leq a < \frac{281}{160}$. По теореме Виета имеем

$$x_1 + x_2 = \frac{16a - 5}{64}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{(16a - 5)^2 - D}{128^2} = \frac{256(a^2 - 1)}{128^2} = \frac{a^2 - 1}{64}.$$

Следовательно, знаки x_1 и x_2 зависят от знаков выражений $\frac{16a - 5}{64}$ и $\frac{a^2 - 1}{64}$.

Значит, при $a < -1$ оба корня отрицательны, при $-1 \leq a < 1$ один корень отрицательный, а другой неотрицательный, при $a \geq 1$ оба корня неотрицательны.

Таким образом, уравнение $\sqrt{1 - 5x} = a - 8|x|$

не имеет корней при $a < 1$;

имеет один корень при $a = 1$ и $a > \frac{281}{160}$;

два корня при $1 < a < \frac{8}{5}$ и $a = \frac{281}{160}$;

три корня при $\frac{8}{5} \leq a < \frac{281}{160}$.

Ответ: $\frac{8}{5} \leq a < \frac{281}{160}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите наибольшее из значений x , для которых существуют числа y, z , удовлетворяющие уравнению

$$3x^2 + y^2 + 2z^2 + xy + xz + yz = 7.$$

2. Найдите наименьшее значение выражения

$$x^2 + 4xy + 16y^2 - 2x - 16y + 9.$$

3. При каких значениях x функция $y = |x - 2| + |x - 5|$ имеет наименьшее значение? Найдите это значение.

4. Найдите значение k , при котором, произведение чисел, составляющих решение системы уравнений, будет наименьшим

$$\begin{cases} 3x - y = k + 2, \\ x + 2y = 3k. \end{cases}$$

5. При каких значениях параметра a наибольшее значение функции $y = -x^2 + 2ax - 71$ на отрезке $[-3; +\infty)$ равно 10?

6. При каких значениях параметра a наименьшее значение функции $y = -x^2 + 4ax + 5a^2$ на отрезке $[-3; 1]$ равно 8?

7. Функция $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + a}$ определена на отрезке $[5; 7]$. Найдите

все значения a , при которых наибольшее значение $f(x)$ на $[5; 7]$ не превышает 0,1.

8. При каких a сумма корней уравнения

$$x^2 + 2(a^2 - 3a)x - (6a^3 - 14a^2 + 4) = 0$$

принимает наибольшее возможное значение?

9. При каких a наименьшее значение функции $y = x^2 + (a - 2)x - a$ на отрезке $[1; 3]$ равно (-4) ?

10. Найдите наибольшее значение функции $y = |x - a|$ на отрезке $[1; 3]$.

11. Найдите все пары чисел a и b , при которых наибольшее значение функции $y = |x^2 + (a - b)x + 2a + b|$ на отрезке $[-3; 1]$ является наименьшим.

12. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2 - 3x + 3|x + a| + a \leq 0$ максимально.

13. Найдите наименьшее значение функции

$$y = 4^{-x} + (6a - 7)(0,5)^x - 14a + 8a^2$$

на отрезке $[-\log_2 3; \log_2 3]$.

14. При каком значении параметра a функция

$$y = a(x - 1)(x - 3) + a^2 - 1$$

имеет максимум, равный 5?

15. Точка A лежит на графике функции $y = x^2 - 2x$, а точка B — на графике функции $y = -x^2 + 14x - 50$. Чему равно наименьшее значение длины отрезка AB ?

16. Найдите все $a \in [1; +\infty)$, при которых бóльший корень уравнения $x^2 - 6x + 2ax + a - 13 = 0$ принимает наибольшее значение.

17. Найдите все $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$, при которых максимальное значение

функции

$$y = -9x^4 + 12x^3 \cdot (\sin \alpha + \cos \alpha) - 9x^2 \sin 2\alpha$$

на отрезке $[-\cos \alpha; -\sin \alpha]$ является наибольшим.

18. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых функция $f(x) = 2|2|x| - a^2| - x + a$ имеет ровно три нуля.

19. Найдите все значения a , при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$ пересекает ось Ox более чем в двух различных точках.

20. При каких значениях параметра a функция

$$f(x) = x^3 + ax^2 - (2a - 3)x + 5$$

возрастает на отрезке $[2; +\infty)$?

21. Найдите все значения параметра a , при которых минимум функции

$$f(x) = 3|x - a| + |x^2 + x - 2|$$

меньше 2.

22. При каких положительных значениях параметра a наименьшее значение функции $y(x) = x\sqrt{x+a}$ равно $-6\sqrt{3}$?

23. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество значений функции $f(x) = \frac{x^2 - ax + 1}{x^2 + x + 1}$ лежит на интервале $(-3; 3)$.

24. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди значений функции $y = \frac{x^2 - 2x + a}{x^2 + 6}$ есть ровно одно целое число.

25. При каком наименьшем положительном значении параметра a функция $y = \cos\left(24x + \frac{a\pi}{25}\right)$ имеет максимум в точке $x_0 = \pi$?

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

§ 6. Числа и их свойства

Это в некотором смысле уникальная задача, которая решается довольно просто, иногда всего в несколько строчек. Однако найти идею решения очень трудно.

Здесь встречаются задачи:

- 1) на числа и их свойства;
- 2) числовые наборы на карточках и досках;
- 3) последовательности и прогрессии;
- 4) сюжетные задачи.

Предлагаемые задачи считаются самыми сложными в профильном ЕГЭ по математике, однако набрать 1–2 первичных балла не так уж трудно.

Традиционно задача содержит три подзадачи: а); б); в).

В пункте а) обычно предлагается решить несложную задачу на построение примера. За какой-либо правильный пример (а их может быть и несколько) можно получить 1 первичный балл.

Особых обоснований в этом пункте не требуется, нужно лишь показать, что приведенный пример действительно удовлетворяет условию задачи.

Пункт б) существенно отличается от пункта а). В нем, как правило, требуется строго доказать, что требуемый пример построить нельзя. За этот пункт начисляют также 1 балл.

Пункт в), оцениваемый в 2 первичных балла, уже значительно сложнее. В нем требуется построение примера, обладающего в некотором смысле «экстремальными» характеристиками (например, задача на максимум или минимум выражения, принимающего дискретные значения), а также доказательство того, что именно этот пример, а не какой-то другой обладает данными характеристиками.

В решении предлагаемых задач поможет знание следующих разделов математики:

- ▶ Элементы комбинаторики: сочетания, перестановки, бином Ньютона.
- ▶ Элементы статистики: числовые характеристики рядов, графические и табличные представления данных.
- ▶ Элементы теории вероятности.
- ▶ Признаки делимости чисел. Формулы сокращенного умножения. Сумма делителей натурального числа.
- ▶ Квадратные уравнения. Теорема Виета.
- ▶ Прогрессии.

Краткая теория и справочные материалы

1. Числовые неравенства

1. Простейшим множеством чисел является множество *натуральных чисел*.

Счет начинается с единицы, поэтому ноль не *является* натуральным числом.

Обозначение: N .

N : 1, 2, 3, ...

2. Если к натуральным числам добавить целые отрицательные, включая 0, то получим *множество целых чисел*.

Обозначение: Z .

Z : 0, ± 1 , ± 2 , ...

3. Числа целые и дробные, как положительные, так и отрицательные, образуют множество рациональных чисел.

Это числа вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$.

Обозначение: Q .

Всякое рациональное число может быть представлено в виде конечной или бесконечной десятичной периодической дроби.

Число, которое повторяется после запятой, называется *периодом дроби*.

Например, $\frac{2}{3} = 0,666... = 0,(6)$; $\frac{5}{6} = 0,83233... = 0,8(3)$;

$2\frac{7}{11} = 2,636363... = 2,(63)$.

4. Числа, не имеющие периода, называются *иррациональными*.

Например, $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\pi \approx 3,14$, $e \approx 2,71$ — основание натурального логарифма.

Совокупность рациональных и иррациональных чисел образует множество *действительных чисел*.

Обозначение: R .

2. Делимость

Если любое натуральное число делится без остатка на второе натуральное число, то первое число называется *кратным*, а второе число называется *делителем*.

Натуральное число, на которое делится без остатка другое число, называется его *делителем*.

Например, 9 — делитель числа 72, так как $72 = 9 \cdot 8$.

Кроме того, само число 8 имеет делители 1, 2, 4, 8, так как на каждое из этих чисел оно делится без остатка.

Натуральное число, которое делится без остатка на другое, называется его *кратным*.

Всякое натуральное число имеет сколько угодно кратных данному числу.

Само число является наименьшим из кратных.

Например, кратным 4 будут числа 4, 8, 12, 16, 20 и т. д.

3. Признаки делимости

1) Признак делимости на 5.

Если натуральное число оканчивается цифрами 0 или 5, то это число делится без остатка на 5.

Например, числа 325, 40, 4705, 3200 делятся без остатка на 5, а числа 78, 302, 6189 не делятся на 5.

2) Признак делимости на 2.

Если число делится на 2 без остатка, то оно называется *четным*, а числа, которые при делении на 2 дают в остатке 1, называются *нечетными*.

Если натуральное число оканчивается четной цифрой, то оно делится без остатка на 2, а если оканчивается нечетной цифрой, то не делится на 2.

Например, числа 20, 42, 378 — четные, значит, делятся на 2, а числа 11, 37, 145 — нечетные, т. е. на 2 не делятся.

3) Признаки делимости на 9 и 3.

Если сумма цифр числа делится на 9, то и само число делится на 9.

Например, число 832 043 565 делится на 9, так как $8 + 3 + 2 + 0 + 4 + 3 + 5 + 6 + 5 = 36$ — делится на 9.

Число 182 743 не делится на 9, так как $1 + 8 + 2 + 7 + 4 + 3 = 25$ не делится на 9.

Если сумма цифр числа делится на 3, то и само число делится на 3.

Например, 408 153 делится на 3, так как $4 + 0 + 8 + 1 + 5 + 3 = 21$ — делится на 3, а число 994 013 не делится на 3, так как $9 + 9 + 4 + 0 + 1 + 3 = 26$ не делится на 3.

Замечание. Если число делится на 9, то оно *всегда* делится на 3, так как 9 делится на 3 без остатка.

Обратное утверждение *не всегда* выполняется. Например, число 7422 делится на 3, но не делится на 9.

4) Признак делимости на 10.

Если натуральное число оканчивается цифрой 0, то оно делится без остатка на 10.

Например, на 10 делятся числа 10, 30, 70, 150, 240, 7560 и т. д.

5) Признак делимости на 4.

Число делится на 4, если оно оканчивается на 00 или на число, составленное из двух последних цифр данного числа, которое делится на 4.

Например, число 47 032 делится на 4, так как 32 делится на 4; число 230 508 делится на 4, так как 08 делится на 4; число 18 632 130 не делится на 4, так как 30 не делится нацело на 4.

6) Признак делимости на 6.

Число делится на 6, если оно делится на 2 и 3.

Например, число 43 524 делится на 6, так как оно делится на 2 (последняя цифра 4 — четное) и 3 ($4 + 3 + 5 + 2 + 4 = 18$ — кратно 3); число 963 022 не делится на 6, так как оно делится на 2, но не делится на 3.

7) Признак делимости на 8.

Число делится на 8, если оно оканчивается на 000 или на число, три последние цифры которого делятся на 8.

Например, 74 000 делится на 8, так как оно оканчивается на 000; 51 024 760 делится на 8, так как 760 делится на 8; 21 073 542 не делится на 8, так как число 542 не делится на 8.

8) *Признак делимости на 7.*

Число делится на 7, если утроенное число десятков, сложенное с цифрой единиц, делится на 7.

Например, 245 делится на 7, так как $24 \cdot 3 + 5 = 77$ делится на 7;

1001 делится на 7, так как $100 \cdot 3 + 1 = 301$,

$30 \cdot 3 + 1 = 91$, $9 \cdot 3 + 1 = 28$ — делится на 7.

9) *Признак делимости на 11.*

Число делится на 11, если сумма цифр, стоящих на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, либо отличается от нее на 11.

Например, 283 679 делится на 11, так как $8 + 6 + 9 = 23$; $2 + 3 + 7 = 12$; $23 - 12 = 11$.

87 654 321 не делится на 11, так как $7 + 5 + 3 + 1 = 16$; $8 + 6 + 4 + 2 = 20$; $20 - 16 = 4$ — не делится на 11.

10) *Признак делимости на 13.*

Число делится на 13, если число его десятков, сложенное с учетверенным числом единиц, кратно 13.

Например, 1157 делится на 13, так как $115 + 4 \cdot 7 = 143$ — делится на 13.

11) *Признак делимости на 17.*

Число делится на 17, если разность между числом его десятков и упятеренным числом единиц делится на 17.

Например, $36\,278 \Rightarrow 3627 - 5 \cdot 8 = 3587 \Rightarrow 358 - 5 \cdot 7 = 323 \Rightarrow 32 - 5 \cdot 3 = 32 - 15 = 17$ — делится на 17.

12) *Признак делимости на 19.*

Число делится на 19, если число его десятков, сложенное с удвоенным числом единиц, делится на 19.

Например, 646 делится на 19, так как $64 + (6 \cdot 2) = 76$ — делится на 19.

Замечание. Последние 5 признаков деления в школе не изучаются, а применяются, как правило, при решении олимпиадных задач.

4. Четность и нечетность чисел

1. Четное число имеет вид $a = 2n$.
2. Нечетное число можно записать в виде $a = 2n + 1$.
3. Сумма любого количества четных слагаемых четна.
4. Сумма *четного* количества нечетных слагаемых — *четное* число.
5. Сумма *нечетного* количества *нечетных* слагаемых — *нечетное* число.
6. Если в произведении все множители *нечетные* числа, то произведение — *нечетное* число.
7. Если в произведении хотя бы одно число *четное*, то в результате умножения получится *четное* число.

5. Числовые свойства степеней

1. Точный квадрат целого числа не может оканчиваться цифрами 2, 3, 7, 8, а также нечетным количеством нулей.
2. Квадрат натурального числа либо делится на 4, либо при делении на 8 дает остаток 1.
3. Квадрат натурального числа либо делится на 9, либо при делении на 3 дает остаток 1.
4. Разность квадратов двух целых чисел одинаковой четности делится на 4.
5. Куб целого числа и само число при делении на 3 дают одинаковые остатки (0; 1; 2).
6. Куб целого числа при делении на 9 дает в остатке 0; 1 или 8.
7. Куб целого числа при делении на 4 дает в остатке 0; 1 или 3.
8. Число a^3 оканчивается на ту же цифру, что и число a .

6. Факториал

Это произведение натуральных чисел от 1 до самого числа (включая данное число).

Обозначение: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

$0! = 1$.

Например, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

1. Комбинаторика. Бином Ньютона

Перестановки — комбинации, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

Обозначения: P_n , $P(n)$ — число всех возможных перестановок из n элементов.

Если все n элементов различны, то число всех *перестановок без повторений* определяется по формуле

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

($n!$ — символ для обозначения произведения n первых чисел натурального ряда. Читается «эн факториал». По определению считают $0! = 1$.)

Если среди n элементов имеется p элементов одного вида, q — другого, r — третьего и т. д., то число всех *перестановок с повторениями* определяется формулой

$$P_n = (p, q, r, \dots) = \frac{n!}{p!q!r!}.$$

Размещения из n элементов по k — комбинации, составленные из n данных элементов по k элементов в каждой; при этом два размещения считаются различными, если они отличаются либо элементами, либо их порядком.

Обозначение: A_n^k — число всех размещений из n элементов по k .

Если среди n элементов нет одинаковых и повторения одного и того же элемента не допускаются, то число *размещений без повторений* определяется формулой

$$\begin{aligned} A_n^k &= A_n^{k-1} (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!} = \\ &= n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1). \end{aligned}$$

Если все n элементов различны, но в размещениях допускаются повторения, то число *размещений с повторениями* определяется формулой

$$A_n^{k(\text{повт})} = n^k.$$

Сочетания из n элементов по k — комбинации по k элементов из данных n , отличающиеся одна от другой хотя бы одним элементом.

Обозначения: C_n^k , или $\binom{n}{k}$, — число всех сочетаний из n элементов

по k .

Для k различных элементов из n различных

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}.$$

Для k с повторениями из n различных

$$C_n^{k(\text{повт})} = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Соотношения между числом размещений, сочетаний и перестановок

$$C_n^k = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}} = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Бином Ньютона

$$(x \pm a)^n = x^n \pm nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}a^3 + \dots + (\pm 1)^n a^n, \quad (1)$$

$$\text{или } (x \pm a)^n = C_n^0 x^n a^0 \pm C_n^1 x^{n-1} a^1 + C_n^2 x^{n-2} a^2 \pm C_n^3 x^{n-3} a^3 + \dots + (\pm 1)^n C_n^n x^0 a^n, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{или } (x \pm a)^n &= \binom{n}{0} x^n a^0 \pm \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \\ &+ \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 \pm \binom{n}{3} x^{n-3} a^3 + \dots + (\pm 1)^n \binom{n}{n} x^0 a^n. \end{aligned} \quad (3)$$

Во (2) и (3) формулах для симметрии мы определили

$$C_n^0 = C_n^n = 1.$$

2. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется такая числовая последовательность, в которой каждое число, начиная со второго, равно предыдущему, сложенному с постоянным для данной последовательности числом.

Это постоянное число называется *разностью прогрессии* и обозначается буквой d .

Арифметическая прогрессия обычно обозначается (a_n) .

Из определения следует

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d.$$

Если $d > 0$, то прогрессия называется *возрастающей*, если $d < 0$ — *убывающей*.

Последовательность (a_n) является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого $n > 1$ верно равенство

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}).$$

Это свойство называется *характеристическим свойством* арифметической прогрессии.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ — формула n -го члена, где n — число членов.

Формула суммы n первых членов арифметической прогрессии имеет вид

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

Так как $a_n = a_1 + (n - 1)d$, то получим II формулу суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)d}{2} \cdot n.$$

3. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется такая числовая последовательность, в которой каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на некоторое отличное от нуля постоянное число.

Это постоянное число называется *знаменателем прогрессии* и обозначается буквой q .

Геометрическая прогрессия часто обозначается (b_n) .

Из определения следует

$$b_2 : b_1 = b_3 : b_2 = \dots = b_{n+1} : b_n = q.$$

Последовательность (b_n) является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, есть среднее геометрическое соседних с ним членов, т. е. $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$.

Формула n -го члена геометрической прогрессии имеет вид

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Если $q \neq 1$, то сумма S_n первых n членов вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}, \text{ или } S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Геометрическая прогрессия, у которой $|q| < 1$, называется *бесконечно убывающей*, а ее сумма определяется по формуле $S = \frac{b_1}{1 - q}$.

Заметим, что если все члены геометрической прогрессии возвести в некоторую степень, то опять получим геометрическую прогрессию.

Так, последовательность чисел $b_1^2, b_1^2 q^2, b_1^2 q^4, \dots, b_1^2 q^{2n}$ — также геометрическая прогрессия с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2 .

Аналогично последовательность чисел $b_1^3, b_1^3 q^3, b_1^3 q^6, \dots, b_1^3 q^{3n}$ — также геометрическая прогрессия с первым членом b_1^3 и знаменателем q^3 и т. д.

Задачи с решениями

Пример 1. Найдите все простые числа p , такие, что $14p^2 + 1$ — тоже простые.

Решение.

Если $p \neq 3$, то $14p^2 + 1$ делится на 3.

И действительно, $p = 3k + 1$, или $p = 3k - 1$, тогда $p^2 = 9k^2 + 6k + 1$, или $p^2 = 9k^2 - 6k + 1$, а это значит, что остаток от деления числа p^2 на 3 равен 1.

Следовательно, $14p^2 + 1$ делится на 3 при любом p , не делящемся на 3, т. е. не является простым числом.

Если же $p = 3$, то число $14p^2 + 1 = 127$ — простое.

Ответ: 3.

Пример 2. На доске написано более 45, но менее 55 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно 6, среднее арифметическое всех положительных из них равно 15, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -5 .

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество отрицательных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть k — количество положительных чисел, l — отрицательных и m — нулей. Заметим, что сумма набора всех чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое. Тогда

$$15k - 5l + 0 \cdot m = 6(k + l + m). \quad (1)$$

а) Нетрудно заметить, что в левой части равенства (1) каждое слагаемое кратно 5, значит, $k + l + m$ — количество целых чисел, кратных 5.

Согласно условию задачи $45 < k + l + m < 55$, поэтому $k + l + m = 50$. Значит, на доске написано 50 чисел.

б) Упростим равенство $15k - 5l = 6(k + l + m)$ к виду $9k \geq 11l + 6m$. Учитывая, что $m \geq 0$, имеем $9k \geq 11l$, т. е. $k > 1$, значит, положительных чисел больше, чем отрицательных.

в) (*Оценка.*) Подставим значение $k + l + m = 50$ в правую часть равенства $15k - 5l = 6(k + l + m)$. Получим $15k - 5l = 6 \cdot 50 = 300$, откуда $l = 3k - 60$.

Так как $k + l \leq 50$, то $k + (3k - 60) \leq 50$, $4k \leq 110$, $k \leq 27$, тогда $l = 3k - 60 = 3 \cdot 27 - 60 \leq 21$. Значит, отрицательных чисел не более 21.

г) (*Пример.*) Пусть на доске 27 раз написано число 27, 21 раз — (−5) и 2 раза — 0.

Тогда имеем $\frac{15 \cdot 7 - 5 \cdot 21}{50} = \frac{405 - 105}{50} = 6$, что удовлетворяет услови-

ям задачи.

Ответ: а) 50; б) положительных чисел; в) 21.

Пример 3. Каждое из чисел 2, 3, ..., 7 умножают на каждое из чисел 12, 13, ..., 17 и перед каждым произвольным образом ставят знак «+» или «−», после чего все 36 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все произведения взяты со знаком «+», то их сумма наибольшая и будет равна

$$(2 + 3 + \dots + 6 + 7)(12 + 13 + \dots + 16 + 17) = \left(\frac{2+7}{2} \cdot 6\right) \left(\frac{12+17}{2} \cdot 6\right) = \\ = (9 \cdot 3) \cdot (29 \cdot 3) = 27 \cdot 87 = 2349.$$

2. Поскольку полученная сумма нечетная, то число нечетных слагаемых в ней — нечетно. Кроме того, это свойство суммы сохраняется при изменении знака любого из слагаемых. Следовательно, любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не равна нулю.

3. Наименьшую по модулю сумму можно получить при такой расстановке знаков у произведения:

$$(-2 + 3 - 4 + 5 + 6 - 7) \cdot (12 - 13 - 14 + 15 - 16 + 17) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Ответ: 1; 2349.

Пример 4. Коричневый карандаш стоит 19 руб., зеленый — 15 руб. Необходимо купить карандаши, имея в наличии 629 руб. и соблюдая дополнительное условие: число зеленых карандашей не должно отличаться от числа коричневых больше, чем на 5.

а) Можно ли купить 36 карандашей?

б) Можно ли купить 39 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?

Решение.

а) Можно, например, купить 17 коричневых и 22 зеленых карандаша:

$$16 \cdot 19 + 20 \cdot 15 = 604 \text{ (руб.)}.$$

б) Дешевле всего 39 карандашей будут стоить, если купить наибольшее возможное количество зеленых карандашей и наименьшее возможное количество коричневых, т. е. если купить 17 коричневых и 22 зеленых, учитывая, что если коричневых меньше 17, то зеленых больше 22.

В этом случае разность между числом коричневых и зеленых карандашей больше, чем 5.

Тогда стоимость покупки равна

$17 \cdot 19 + 22 \cdot 15 = 653$ (руб.), что больше, чем имеющаяся сумма 629 руб.

в) Пусть a и b — число зеленых и коричневых карандашей соответственно. Тогда получим

$$\begin{cases} 19b + 15a \leq 629, & (1) \\ |b - a| \leq 5, & (2) \\ b, a = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Пусть $b + a = k$, откуда $a = k - b$. В этом случае неравенство (1) примет вид $19b + 15(k - b) \leq 629$, или $4b + 15k \leq 629$, откуда

$$b \leq \frac{1}{4}(629 - 15k).$$

Следовательно, неравенство (2) преобразуется к виду $-5 \leq b - a \leq 5$, или $-5 \leq b - (k - b) \leq 5$, или $k - 5 \leq 2b \leq k + 5$,

откуда $\frac{1}{2}(k - 5) \leq b \leq \frac{1}{2}(k + 5)$, $b = 0, 1, \dots, k$.

Значит, $\frac{1}{2}(k - 5) \leq \frac{1}{4}(629 - 15k)$, или $2(k - 5) \leq 629 - 15k$, $17k \leq 639$,

т. е. $k \leq 37\frac{10}{17}$.

Таким образом, можно купить не более 37 карандашей.

Проверим, возможен ли случай, когда $k = 37$. При $b = 17$, $a = 20$ имеем $17 \cdot 19 + 20 \cdot 15 = 623 < 629$.

Следовательно, наибольшее число карандашей равно 37.

Ответ: а) да; б) нет; в) 37.

Пример 5. Сторона квадрата на 3 см больше ширины прямоугольника, а площади этих фигур равны. Длины сторон квадрата и прямоугольника — целые числа.

а) Может ли ширина прямоугольника быть равной 6?

б) Может ли длина прямоугольника быть равной 12?

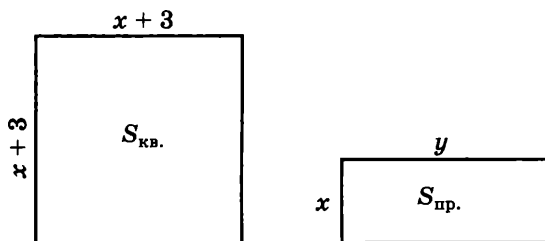
в) Найдите все возможные варианты таких пар прямоугольников и квадратов.

Решение.

а) Пусть x — ширина, y — длина прямоугольника, тогда $(x + 3)$ — сторона квадрата.

По условию задачи $S_{\text{кв.}} = S_{\text{пр.}}$

Но $S_{\text{кв.}} = (x + 3)^2$, $S_{\text{пр.}} = xy$, тогда получим $(x + 3)^2 = xy$, где $x, y \in \mathbb{N}$.



Если $x = 6$, то получим $6y = (6 + 3)^2$, или $6y = 81$, откуда

$$y = \frac{81}{6} = \frac{27}{2} \notin N.$$

Значит, ширина прямоугольника не может быть равной 6.

б) Если $y = 12$, то $(x + 3)^2 = 12x$, или $x^2 - 6x + 9 = 0$, или $(x - 3)^2 = 0$, $x - 3 = 0$, $x = 3$.

Так как $x = 3 \in N$ и $y = 12 \in N$, то длина прямоугольника может быть равной 12.

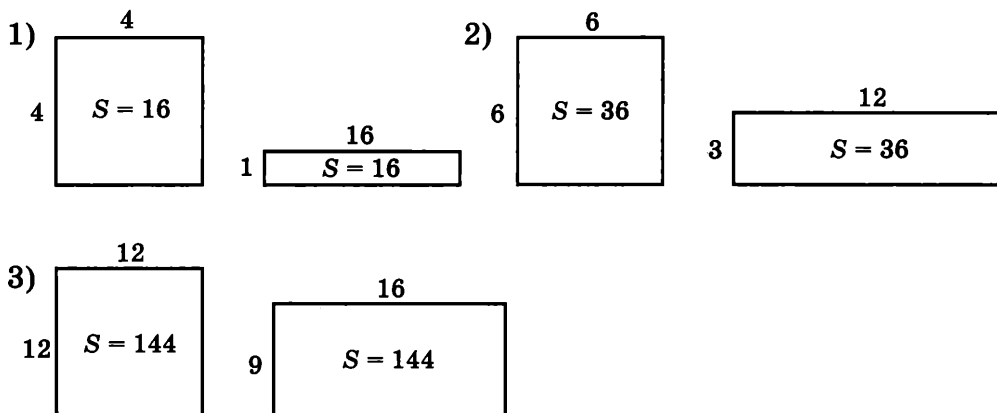
$$\text{в) } (x + 3)^2 = xy, \text{ откуда } y = \frac{(x+3)^2}{x} = \frac{x^2 + 6x + 9}{x} = x + 6 + \frac{9}{x}.$$

Так как $y \in N$, то x — делители числа 9, где $x \in N$.

Значит, $x = 1; 3; 9$.

$$\text{Тогда } y = 1 + 6 + \frac{9}{1} = 16; y = 3 + 6 + \frac{9}{3} = 12; y = 9 + 6 + \frac{9}{9} = 16,$$

Имеем 3 возможности:



Ответ: а) нет; б) да; в) 4×4 и 1×16 ; 6×6 и 3×12 ; 12×12 и 9×16 .

Пример 6. Гриша перемножил несколько различных натуральных чисел из отрезка $[21; 82]$. Артур увеличил каждое из чисел на 1 и перемножил все полученные числа.

а) Может ли результат Артура быть вдвое больше, чем у Гриши?

б) Может ли результат Артура быть в 7 раз больше, чем у Гриши?

в) В какое наибольшее целое число раз результат Артура может быть больше, чем у Гриши?

Решение.

а) Например, для набора чисел $\{22; 23; \dots; 43\}$ результат Гриши равен $22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 43$, а результат Артура будет $23 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 44$, т. е. $(23 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 44) : (22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 43) = 2$, в 2 раза больше.

б) При добавлении новых чисел отношение результатов Гриши и Артура становится только больше. Следовательно, наибольшее отношение получим, если Гриша перемножит все натуральные числа из данного отрезка $[21; 82]$. При этом результат Гриши равен $21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 82$, а Артура — $22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 83$. Тогда отношение этих чисел будет равно

$$(22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 83) : (21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 82) = \frac{83}{21} < 7.$$

Значит, результат Артура не может быть в 7 раз больше результата Гриши.

в) Как показано в пункте б), результат Артура превосходит результат Гриши не более чем в $\frac{83}{21}$ раза. Наибольшее целое число, не большее $\frac{83}{21}$, — это число 3.

Для набора $\{21; 22; 23; \dots; 62\}$ результат Гриши равен $21 \cdot 22 \cdot 23 \cdot \dots \cdot 62$, а Артура — $22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 63$, т. е. в 3 раза больше.

Таким образом, наибольшее целое отношение результатов Артура и Гриши равно 3.

Ответ: а) да; б) нет; в) 3.

Пример 7. Известно, что a, b, c и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{9}{21}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 13 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 3b$ и $c > 6d$?

Решение.

а) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{9}{21} = \frac{18}{42} = \frac{27}{63} = \frac{12+15}{13+50}$, значит, $a = 12, b = 13, c = 15, d = 50$.

б) Допустим, что $13 \cdot \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$. Тогда получим $13bd(a+c) = ad(b+d) + bc(b+d)$, или $13abd + 13bcd = abd + ad^2 + b^2c + bcd$, или $12abd - ad^2 + 12bcd - b^2c = 0$.

Группируя слагаемые, имеем

$$ad(12b-d) + bc(12d-b) = 0. \quad (1)$$

По условию задачи a, b, c и d — различные положительные двузначные числа, тогда $12b-d > 0$ и $12d-b > 0$, $ad > 0$, $bc > 0$, значит, равенство (1) выполняться не может.

Кроме того, $12b-d \geq 12 \cdot 10 - 99 > 0$ и $12d-b \geq 12 \cdot 10 - 99 > 0$, значит, б) нет.

в) $a \geq 3b+1$, $c \geq 6d+1$, тогда

$$\frac{a+c}{b+d} \geq \frac{3b+1+6d+1}{b+d} = \frac{(3b+3d)+(3d+2)}{b+d} = 3 + \frac{3d+2}{b+d},$$

$$3b+1 \leq a, \text{ или } 3b+1 \leq 99, b \leq \frac{98}{3} = 32\frac{2}{3}.$$

Значит, наибольшее значение $b = 32$, тогда

$$3 + \frac{3d+2}{b+d} = 3 + \frac{3d+2}{32+d} \geq 3 + \frac{3d+96-94}{d+32} = 3 + \frac{3(d+32)}{d+32} - \frac{94}{d+32} = 6 - \frac{94}{d+32}.$$

Дробь $\frac{94}{d+32}$ будет наибольшей, при наименьшем значении $d = 10$

(так как d — двузначное положительное число).

$$\text{Получим } 6 - \frac{94}{10+32} \geq 6 - \frac{94}{42} = 6 - \frac{47}{21} = \frac{126-47}{21} = \frac{79}{21}.$$

Итак, $b = 32$, $d = 10$, $a \geq 3 \cdot 32 + 1 = 97$, $c \geq 6d + 1 = 6 \cdot 10 + 1 = 61$.

$$\text{Значит, } \frac{a+c}{b+d} = \frac{97+61}{32+10} = \frac{158}{42} = \frac{79}{21}.$$

Ответ: а) да, $a = 12$, $b = 13$, $c = 15$, $d = 50$; б) нет; в) $\frac{79}{21}$.

Пример 8. Известно, что a, b, c, d, e и f — это различные, расставленные в произвольном порядке числа 2, 3, 4, 6, 7 и 16.

а) Может ли выполняться равенство

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = 7?$$

б) Может ли выполняться равенство

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{1235}{336}?$$

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$?

Решение.

$$\text{а) } \frac{16}{6} + \frac{7}{3} + \frac{4}{2} = \frac{8}{3} + \frac{7}{3} + 2 = 5 + 2 = 7.$$

б) Заметим, что произведение $b \cdot d \cdot f$ должно быть кратно 336.

$$336 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3 \cdot 7 = 16 \cdot 3 \cdot 7.$$

$$\text{Знаменатель дробей может быть и } 672, \text{ так как } 672 = 2 \cdot 336 = 2 \cdot 16 \cdot 3 \cdot 7 = 16 \cdot 7 \cdot 6.$$

Если знаменатель равен $336 \cdot 3 = 1008 = 16 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3$, то не подходит, так как среди данных чисел всего одна тройка.

$$\frac{a}{16} + \frac{c}{7} + \frac{e}{3} = \frac{21a + 48c + 112e}{336} < \frac{(21+48+112) \cdot 6}{336} = \frac{181 \cdot 6}{336} = \frac{1086}{336} < \frac{1235}{336}.$$

$$\frac{a}{16} + \frac{c}{7} + \frac{e}{6} = \frac{42a + 96c + 112e}{672} < \frac{(42+96+112) \cdot 4}{672} = \frac{250 \cdot 2}{336} = \frac{500}{336} < \frac{1235}{336}.$$

в) Сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ может принимать наибольшее значение, если в

знаменателях дробей выбрать наименьшее из данных чисел, т. е. 2, 3 и 4, а в числителе выбрать число 16. Можно записать так:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} \leq \frac{a}{4} + \frac{c}{3} + \frac{e}{2} \leq \frac{a}{4} + \frac{c}{3} + \frac{16}{2} \leq \frac{6}{4} + \frac{7}{3} + \frac{16}{2} = \frac{3}{2} + \frac{7}{3} + \frac{16}{2} =$$

$$= \frac{19}{2} + \frac{7}{3} = \frac{57+14}{6} = \frac{71}{6}.$$

Замечание. Если записать $\frac{6}{4} + \frac{7}{3}$ иначе, например, $\frac{6}{3} + \frac{7}{4}$, то в I слу-

чае получим $\frac{23}{6}$, а во II случае получим $\frac{45}{12}$.

$$\text{Но } \frac{23}{6} = \frac{46}{12} > \frac{45}{12}.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) $\frac{71}{6}$.

Пример 9. Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть $q = 14$. Найдите все возможные значения p .

б) Пусть $p + q = 18$. Найдите возможные значения q .

в) Пусть $q^2 - p^2 = 1265$. Найдите все возможные корни исходного уравнения.

Решение.

а) Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = q = 14$ (по условию). Но $14 = 1 \cdot 14 = 2 \cdot 7$. Значит, $x_1 + x_2 = 15$, или $x_1 + x_2 = 9$.

Тогда $p_1 = -(x_1 + x_2) = -15$ или $p_2 = -9$.

б) $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$.

По условию $p + q = 18$, или $x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 18$. Преобразуем левую часть полученного равенства так, чтобы разложить на множители:

$1 + x_1 x_2 - x_1 - x_2 = 19$, или $(x_1 x_2 - x_2) - (x_1 - 1) = 19$, или

$x_2(x_1 - 1) - (x_1 - 1) = 19$, или $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 19$, где $x_1, x_2 \in N$.

Но $19 = 1 \cdot 19$, значит, $x_1 - 1 = 1$, $x_2 - 1 = 19$ (или наоборот). В любом случае $q = x_1 \cdot x_2 = 2 \cdot 20 = 40$.

в) По условию $q^2 - p^2 = 1265$, или

$(q - p)(q + p) = (x_1 x_2 + x_1 + x_2)(x_1 x_2 - x_1 - x_2) = 1265$.

Но $1265 = 5 \cdot 253 = 5 \cdot 11 \cdot 23$.

Заметим, что числа $q - p$ и $q + p$ — одинаковой четности, поэтому каждое из них нечетное. Кроме того, $q - p > q + p$.

Остается рассмотреть варианты:

1) $x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 55$, $x_1 x_2 - x_1 - x_2 = 23$;

2) $x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 115$, $x_1 x_2 - x_1 - x_2 = 11$;

3) $x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 253$, $x_1 x_2 - x_1 - x_2 = 5$.

Рассмотрим каждый случай в отдельности.

$$1) \begin{cases} x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 55, \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 23. \end{cases}$$

Складывая и вычитая почленно левые и правые части системы, имеем

$$\begin{cases} 2x_1 x_2 = 78, \\ 2(x_1 + x_2) = 32; \end{cases} \begin{cases} x_1 x_2 = 39, \\ x_1 + x_2 = 16, \end{cases} \text{ откуда } x_1 = 13, x_2 = 3 \text{ (или наоборот).}$$

Аналогично находим:

$$2) \begin{cases} x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 115, \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 11; \end{cases} \begin{cases} 2x_1 x_2 = 126, \\ 2(x_1 + x_2) = 104; \end{cases} \begin{cases} x_1 x_2 = 63, \\ x_1 + x_2 = 52. \end{cases}$$

Легко показать, что уравнение $x^2 - 52x + 63 = 0$ не имеет натуральных корней:

$$3) \begin{cases} x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 253, \\ x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = 5; \end{cases} \begin{cases} 2x_1 x_2 = 258, \\ 2(x_1 + x_2) = 248; \end{cases} \begin{cases} x_1 x_2 = 129, \\ x_1 + x_2 = 124. \end{cases}$$

Уравнение $x^2 - 124x + 129 = 0$ также не имеет натуральных корней.

Ответ: а) $-15, -9$; б) 40 ; в) 13 и 3 .

Пример 10. Известно, что квадратное уравнение вида $x^2 + mx + k = 0$ имеет 2 различных натуральных корня.

а) Найдите все возможные значения k при $m = -8$.

б) Найдите возможные значения m при $k - m = 25$.

в) Найдите все возможные значения корней уравнения, если $k^2 - m^2 = 1628$.

Решение.

а) Пусть x_1 и x_2 — натуральные корни уравнения, тогда по теореме

Виета имеем
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m, \\ x_1 \cdot x_2 = k. \end{cases}$$

Заметим, что число 8 можно записать в виде суммы двух различных натуральных слагаемых двумя способами.

$8 = 1 + 7 = 2 + 6$, тогда $k = 7$ или $k = 12$.

б) По условию задачи $k - m = 25$, где $k = x_1 x_2$, $m = (x_1 + x_2)$. Тогда получим $x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 25$, или $x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1 = 26$.

Теперь применим способ группировки:

$$x_1(x_2 + 1) + (x_2 + 1) = 26, \text{ или } (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 26.$$

Поскольку оба множителя — натуральные числа, не меньшие двух, то $x_1 + 1 = 13$, $x_2 + 1 = 2$.

Значит, $x_1 = 12$, $x_2 = 1$, тогда $m = -(12 + 1) = -13$.

в) Запишем данное уравнение в виде

$$(k - m)(k + m) = 1628 = 4 \cdot 407 = 2^2 \cdot 11 \cdot 37.$$

Заметим, что числа $k - m$ и $k + m$ имеют одинаковую четность, поэтому они оба четны.

При этом $k - m > k + m$, так как $m < 0$.

Значит, 1) $\begin{cases} k-m=74, \\ k+m=22; \end{cases} \begin{cases} 2k=96, \\ 2m=-52; \end{cases} \begin{cases} k=48, \\ m=-26. \end{cases}$

В этом случае получим уравнение $x^2 - 26x + 48 = 0$, корни которого $x_1 = 2$, $x_2 = 24$.

2) $\begin{cases} k-m=814, \\ k+m=2; \end{cases} \begin{cases} 2k=814, \\ 2m=-812; \end{cases} \begin{cases} k=408, \\ m=-406. \end{cases}$

Получим уравнение $x^2 - 406x + 408 = 0$, которое не имеет натуральных корней.

Ответ: а) 7 или 12; б) -13; в) 2 и 24.

Пример 11. а) Существуют ли натуральные числа m и n , такие, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + mx + n$ равен 37?

б) Существуют ли натуральные числа m и n , такие, что дискриминант $D = 52$?

в) Найдите наименьшее значение дискриминанта D квадратного трехчлена $x^2 + (4m + n)x + (3n + 4m)$, если известно, что $m, n, D \in N$ (натуральные).

Решение.

а) Да. Например, $x^2 + 7x + 3$, где $D = 49 - 12 = 37$.

б) Если $D = 52$, то получим $m^2 - 4n = 52$, $m^2 = 52 + 4n$.

1) m — четное число, тогда m^2 делится на 4, а $52 + 4n$ — не делится.

2) m — нечетное число, тогда m^2 — нечетное, а $52 + 4n$ — четное.

Следовательно, не существуют $m, n \in N$, такие, что дискриминант $D = 52$.

в) Найдём дискриминант D квадратного трехчлена:

$$\begin{aligned} D &= (4m + n)^2 - 4(3n + 4m) = (4m + n)^2 - 12n - 16m = \\ &= (4m + n)^2 - 12(4m + n) + 32m = ((4m + n)^2 - 12(4m + n) + 36) + \\ &+ 32m - 36 = (4m + n - 6)^2 + 32m - 36. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) \text{ Пусть } m = 1, \text{ тогда получим } (4 \cdot 1 + n - 6)^2 + 32 \cdot 1 - 36 = \\ = (n - 2)^2 - 4 = (n - 6)(n + 2). \end{aligned}$$

Так как $n \in N$, то $n \in [1; 6] \Rightarrow (n - 6)(n + 2) \leq 0$; при $n \geq 7$ трехчлен $(n - 6)(n + 2)$ возрастает, тогда оптимальный вариант будет при $n = 7$. Тогда $D = (7 - 6)(7 + 2) = 9$. Получим $x^2 + 11x + 25$.

$$2) \text{ Пусть } m \geq 2, \text{ тогда получим } 0^2 + 32 \cdot 2 - 36 = 28.$$

Ответ: а) да; б) нет; в) 9.

Пример 12. Гриша участвовал в викторине по географии. За каждый правильный ответ участнику начисляется 7 баллов, за каждый неверный — списывается 7 баллов, за отсутствие ответа списывается 2 балла. По результатам викторины Гриша набрал 23 балла.

а) На сколько вопросов Гриша не дал ответа, если в викторине было 27 вопросов?

б) На сколько вопросов Гриша не дал ответа, если в викторине было 30 вопросов?

в) На сколько вопросов Гриша ответил правильно, если в викторине было 28 вопросов?

Решение.

Пусть x — количество правильных ответов, y — количество неверных ответов, z — за отсутствие ответа. Так как Гриша набрал всего 23 балла, то получим уравнение

$$7x - 7y - 2z = 23.$$

а) Надо найти значение z .

Так как в викторине было 27 вопросов, то получим $x + y + z = 27$.

Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 27, \\ 7x - 7y - 2z = 23, \end{cases} \text{ где } x, y, z \in N.$$

Исключим переменную y , для чего умножим обе части I уравнения на 7 и сложим со II уравнением системы:

$$\begin{cases} 7x + 7y + 7z = 189, \\ 7x - 7y - 2z = 23; \end{cases} \quad 14x + 5z = 212, \text{ откуда } 5z = 212 - 14x, \text{ или}$$

$$z = \frac{212 - 14x}{5}.$$

В полученной дроби выделим целую часть:

$$z = \frac{210 - 15x + x + 2}{5} = 42 - 3x + \frac{x + 2}{5}.$$

Поскольку $x, y, z \in N$, то $\frac{x+2}{5} = k$, откуда $x = 5k - 2$.

Тогда $z = 42 - 3(5k - 2) + k = 48 - 14k$.

Итак, $x = 5k - 2$, $z = 48 - 14k$.

Кроме того, $\begin{cases} 5k - 2 > 0, \\ 48 - 14k > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} k > \frac{2}{5}, \\ k < \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}. \end{cases}$

Значит, $\frac{2}{5} < k < 3\frac{3}{7}$.

$$y = 27 - (x + z) = 27 - (5k - 2 + 48 - 14k) = 9k - 19 > 0, \text{ откуда}$$

$$k > \frac{19}{9} = 2\frac{1}{9}.$$

Следовательно, $2\frac{1}{9} < k < 3\frac{3}{7}$, т. е. $k = 3$ — единственное целое.

В этом случае $x = 5k - 2 = 13$, $y = 9k - 19 = 8$, $z = 48 - 14k = 6$.

Итак, $z = 6$, т. е. Гриша не дал ответа на 6 вопросов.

б) Аналогично имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 30, \\ 7x - 7y - 2z = 23; \end{cases} \begin{cases} \cdot 7 \\ \cdot 1 \end{cases} \begin{cases} 7x + 7y + 7z = 210, \\ 7x - 7y - 2z = 23 \end{cases}$$

$$\underline{14x + 5z = 233},$$

$$\text{откуда } z = \frac{233 - 14x}{5} = \frac{230 - 15x + x + 3}{5} = 46 - 3x + \frac{x + 3}{5}, \text{ где } \frac{x + 3}{5} = k,$$

$$\text{откуда } x = 5k - 3, \text{ тогда } z = 46 - 3 \cdot (5k - 3) + k = 55 - 14k,$$

$$y = 27 - (x + z) = 27 - (5k - 3 + 55 - 14k) = 9k - 25.$$

$$\text{Итак, имеем систему неравенств } \begin{cases} 55 - 14k > 0, \\ 9k - 25 > 0; \end{cases} \begin{cases} k < \frac{55}{14} = 3\frac{13}{14}, \\ k > \frac{25}{9} = 2\frac{7}{9}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 3, \text{ тогда } x = 5k - 3 = 12, y = 9k - 25 = 2, z = 55 - 14k = 13.$$

В этом случае Гриша не дал ответа на 13 вопросов.

в) В этом случае надо найти x , т. е. количество правильных ответов.

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 28, \\ 7x - 7y - 2z = 23; \end{cases} \begin{cases} \cdot 7 \\ \cdot 1 \end{cases} \begin{cases} 7x + 7y + 7z = 196, \\ 7x - 7y - 2z = 23 \end{cases}$$

$$\underline{14x + 5z = 219},$$

$$\text{откуда } z = \frac{219 - 14x}{5} = \frac{220 - 15x + x - 1}{5} = 44 - 3x + \frac{x - 1}{5}, \frac{x - 1}{5} = k, \text{ откуда}$$

$$x = 5k + 1, \text{ тогда } z = 44 - 3 \cdot (5k + 1) + k = 41 - 14k.$$

$$\text{Так как } x + y + z = 28, \text{ то } y = 28 - (x + z) = 28 - (5k + 1 + 41 - 14k) =$$

$$= 28 - (42 - 9k) = 9k - 14.$$

Учитывая, что $y > 0$, $z > 0$, $x > 0$, получим систему неравенств

$$\begin{cases} 9k - 11 > 0, \\ 41 - 14k > 0; \end{cases} \begin{cases} k > \frac{11}{9} = 1\frac{2}{9}, \\ k < \frac{41}{14} = 2\frac{13}{14}, \end{cases} \text{ откуда } k = 2.$$

В этом случае $x = 5k + 1 = 11$, $y = 9k - 14 = 4$, $z = 41 - 14k = 13$.

Следовательно, Гриша ответил правильно на 11 вопросов.

Ответ: а) 6; б) 13; в) 11.

Пример 13. Известно, что m и n — натуральные числа.

а) Существует ли пара чисел m и n , для которых выполняется неравенство $\frac{1}{n} - \frac{1}{m} = \frac{1}{108}$?

б) Существует ли пара чисел m и n , для которых выполняется неравенство $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} = \frac{1}{108}$?

в) Найдите все пары натуральных чисел m и n , для которых выполняется равенство $\frac{1}{n^3} - \frac{1}{m^2} = \frac{1}{108}$.

Решение.

а) Например, $m = 54$, $n = 36 \Rightarrow \frac{1}{36} - \frac{1}{54} = \frac{3-2}{108} = \frac{1}{108}$.

б) Например, $m = 18$, $n = 9 \Rightarrow \frac{1}{9^2} - \frac{1}{18^2} = \frac{4-1}{18^2} = \frac{3}{18 \cdot 18} = \frac{1}{108}$.

в) Так как $\frac{1}{n^3} - \frac{1}{m^2} = \frac{1}{108}$, то $\frac{1}{n^3} > \frac{1}{108}$, откуда $n^3 < 108 \Rightarrow n = 1; 2; 3; 4$.

1) Если $n = 1$, то $1 - \frac{1}{m^2} = \frac{1}{108}$, $\frac{1}{m^2} = \frac{107}{108} \Rightarrow m \notin N$.

2) Если $n = 2$, то $\frac{1}{8} - \frac{1}{m^2} = \frac{1}{108}$, $\frac{1}{m^2} = \frac{1}{8} - \frac{1}{108} = \frac{25}{216} \Rightarrow m \notin N$.

3) Если $n = 3$, то $\frac{1}{27} - \frac{1}{m^2} = \frac{1}{108}$, $\frac{1}{m^2} = \frac{3}{108} = \frac{1}{36}$, откуда $m = 6$.

4) Если $n = 4$, то $\frac{1}{64} - \frac{1}{m^2} = \frac{1}{108}$, $\frac{1}{m^2} = \frac{11}{1728} \notin N$.

Ответ: а) да, существует; б) да, существует; в) $m = 6$, $n = 4$.

Пример 14. а) Представьте число $\frac{33}{40}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых — единицы, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

б) Представьте число $\frac{23}{96}$ в виде суммы нескольких дробей, все числители которых — единицы, а знаменатели — попарно различные натуральные числа.

в) Найдите все возможные пары натуральных чисел m и n , для которых $m \leq n$ и $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12}$.

Решение.

$$\text{а) } \frac{33}{40} = \frac{20+10+2+1}{40} = \frac{20}{40} + \frac{10}{40} + \frac{2}{40} + \frac{1}{40} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40}.$$

$$\text{б) } \frac{23}{96} = \frac{1+4+6+12}{96} = \frac{1}{96} + \frac{4}{96} + \frac{6}{96} + \frac{12}{96} = \frac{1}{96} + \frac{1}{24} + \frac{1}{16} + \frac{1}{6}.$$

в)

$$1) \text{ Поскольку } \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12}, \text{ то } \frac{1}{m} < \frac{1}{12} \Rightarrow m > 12.$$

$$\text{Кроме того, } 1 \leq m \leq n \Rightarrow \frac{1}{m} \geq \frac{1}{n}, \text{ тогда } \frac{2}{m} \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12} \Rightarrow m \leq 24,$$

т. е. $m = 13; 14; \dots 24$.

$$2) \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{12} \Rightarrow mn = 12n + 12m \Rightarrow (m-12)(n-12) = 144.$$

Следовательно, $m-12$ — делитель 144.

Делители 144 — это 1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24; 36; 48; 72; 144.

3) Рассмотрим все возможности:

$$\begin{array}{lll} m-12=1, & m-12=2, & m-12=3, \\ m=13, n=156; & m=14, n=84; & m=15, n=60; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} m-12=4, & m-12=6, & m-12=8, \\ m=16, n=48; & m=18, n=36; & m=20, n=30. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} m-12=9, & m-12=12, \\ m=21, n=28; & m=24, n=24; \end{array}$$

Остальные делители дают значения $m > 28$.

$$\text{Ответ: а) } \frac{33}{40} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} + \frac{1}{40}; \text{ б) } \frac{23}{96} = \frac{1}{96} + \frac{1}{24} + \frac{1}{16} + \frac{1}{6}; \text{ в) } (13; 156),$$

(14; 84), (15; 60), (16; 48), (18; 36), (20; 30), (21; 28), (24; 24).

Пример 15. Отношение трехзначного натурального числа к сумме его цифр — целое число.

а) Может ли это отношение быть равным 17?

б) Может ли это отношение быть равным 86?

в) Какое наименьшее значение может принимать это отношение, если первая цифра исходного числа равна 4?

Решение.

а) Например, $\frac{153}{1+5+3} = \frac{153}{9} = 17$.

б) Всякое трехзначное число можно записать в виде \overline{abc} , или $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, где a, b, c — соответственно цифра сотен, десятков и единиц.

Согласно условию задачи имеем

$$\frac{100a + 10b + c}{a + b + c} = 86, \text{ или } 100a + 10b + c = 86(a + b + c).$$

Упростив полученное равенство, получим $14a = 76b + 85c$.

Заметим, что 14 и 76 делятся на 2, но 85 — не делится.

Значит, $c = 0$ или $c \geq 2$.

Но если $c \geq 2$, то $76b + 85c \geq 170 \Rightarrow 14a \geq 170 \Rightarrow a > 12$, что невозможно, так как a — цифра.

Следовательно, $c = 0$, но тогда $14a = 76b \Rightarrow 7a = 38b$.

Если $b = 0$, то $a = 0$ — не подходит.

Если $b = 1$, то $7a = 38$, $a = 5\frac{3}{7}$ — не подходит.

Если $b \geq 2$, то $a > 10$, что невозможно.

Значит, отношение не может быть равным 86.

в) По условию задачи первая цифра трехзначного числа равна 4, тогда сумма его цифр не превышает $4 + 9 + 9 = 22$.

Будем перебирать последовательно числа с максимально возможными суммами цифр.

1) Сумма цифр 22, тогда $22 - 4 = 18$ — сумма II и III цифр (от 0 до 9 включительно). Подходит единственный набор 9; 9, тогда получим 499 — не подходит, так как 499 не делится на 22.

2) Сумма цифр 21, тогда $21 - 4 = 17$ — сумма II и III цифр. Здесь возможны два набора: 9; 8 и 8; 9. Получим числа 498 и 489. Ни одно из них не делится на 21.

3) Сумма цифр 20, тогда $20 - 4 = 16$ — сумма II и III цифр. Получим три числа: 497; 488; 479. Ни одно из них не делится на 20.

4) Сумма цифр 19, тогда $19 - 4 = 15$. В этом случае имеем числа 496; 487; 478; 469. Ни одно из них не делится на 19.

5) Сумма цифр 18, тогда $18 - 4 = 14$, откуда получим числа 495; 459; 486; 468; 477.

Можно убедиться, что из этих чисел только 486 и 468 делятся на 18. Получим $\frac{468}{18} = 26$ и $\frac{486}{18} = 27$.

Остается доказать, что отношение меньше 26 невозможно.

Заметим, что если такое отношение существует, то оно 25 или меньше. Если взять число 400, то $400 : (4 + 0 + 0) = 100$.

Рассмотрим числа не меньше 401. Если существует число, у которого отношение к сумме цифр — целое меньше 26, то сумма цифр такого числа не менее $\frac{401}{25} > 16$.

Значит, сумма цифр такого числа не менее 17. Поскольку мы рассмотрели отношения всех чисел с суммами цифр от 22 до 18 включительно, то осталось рассмотреть последний возможный вариант.

6) Сумма цифр 17, тогда $17 - 4 = 13$ — сумма II и III цифр. При этом возможны числа 494; 485; 476; 467; 449; 458. Из этих чисел на 17 делится только число 476, тогда получим $\frac{476}{4+7+6} = \frac{476}{17} = 28 > 26$.

Следовательно, отношение числа к сумме его цифр не может быть менее 26.

Ответ: а) да; б) нет; в) 26.

Пример 16. Мария задумала трехзначное натуральное число n . В результате деления этого числа на сумму его цифр получается натуральное число m .

а) Может ли $m = 16$?

б) Какое наименьшее число n могла задумать Мария, если известно, что средняя цифра n трехзначного числа равна 7, а первая цифра — четная и больше 2?

в) Чему равно наименьшее возможное значение m , если последняя цифра числа n равна 6?

Решение.

а) Всякое трехзначное число имеет вид $100a + 10b + c$, где a — цифра сотен, b — десятков, c — единиц.

Согласно условию $n = 100a + 10b + c$, $m = a + b + c$.

Имеем $100a + 10b + c = 16(a + b + c)$, или $84a = 6b + 15c$, или $28a = 2b + 5c$.

Если $a = 1$, $b = c = 4$, то число $144 = 16 \cdot (1 + 4 + 4)$ удовлетворяет условию задачи.

б) Заметим, что задуманное число должно быть четным: если оно нечетно, то его последняя цифра единиц — нечетна. Тогда в сумме с цифрой сотен (четная по условию) и цифрой десятков (нечетная) даст четное число. Но нечетное число не может делиться на четное. Остается перебрать четные числа по возрастанию:

I цифра — четная и больше 2 (по условию), т. е. 4.

Имеем:

470 не делится на 11,

472 не делится на 13,

474 не делится на 15,

$476 = 17 \cdot 28 = (4 + 7 + 6) \cdot 28$ — подходит.

Значит, 476 — наименьшее число, задуманное Марией.

в) Выделим целую часть:

$$m = \frac{100a + 10b + 6}{a + b + 6} = \frac{10(a + b + 6) + 90a - 54}{a + b + 6} = 10 + \frac{90a - 54}{a + b + 6}.$$

Поскольку при каждом значении a числитель полученной дроби постоянен, то нам надо подобрать наибольшее значение b , чтобы числитель дроби $90a - 54$ делился на знаменатель $a + b + 6$.

I случай: $a = 1$, тогда получим $\frac{36}{b+7}$, откуда $b = 5$ — максимальное подходящее значение.

$$\text{В этом случае } m = 10 + \frac{36}{12} = 13.$$

II случай: $a \geq 2$.

$$\text{Имеем } \frac{90a - 54}{a + b + 6} \geq \frac{90a - 54}{a + 15} \geq \frac{90 \cdot 2 - 54}{9 + 15} = \frac{126}{24} > 5.$$

Тогда $m > 10 + 5 = 15$.

Следовательно, оптимальный вариант уже найден.

Ответ: а) да; б) 476; в) 13.

Пример 17. а) Можно ли число 2024 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли число 189 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы четырех различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

Решение.

а) Да, можно. Например, для чисел 2002 и 22, их сумма $2002 + 22 = 2024$, а сумма цифр в каждом числе равна 4:

$$2 + 0 + 0 + 2 = 4 \text{ и } 2 + 2 = 4.$$

б) Да, можно. Например, для чисел 135 и 54, их сумма равна $135 + 54 = 189$, а сумма цифр в каждом числе равна 9:

$$1 + 3 + 5 = 9 \text{ и } 5 + 4 = 9.$$

Другие примеры:

$$144 + 45 \text{ или } 153 + 36;$$

$$1 + 4 + 4 = 9 \text{ и } 4 + 5 = 9;$$

$$1 + 5 + 3 = 9 \text{ и } 3 + 6 = 9.$$

в) Если существует наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы четырех различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр, то оно равно сумме четырех наименьших чисел с этой суммой цифр.

Для сумм 1, 2, 3, 4 имеем:

$$1 + 10 + 100 + 1000 = 1111,$$

$$2 + 11 + 20 + 101 = 134,$$

$$3 + 12 + 21 + 30 = 66,$$

$$4 + 13 + 22 + 31 = 70.$$

Пусть сумма цифр равна x .

Если $x \geq 5$, то наименьшее из таких чисел — как минимум x . Заметим, что числа с одинаковой суммой цифр при делении на 9 дают одинаковые остатки, т. е. следуют минимум через 9. Следовательно, их сумма равна

$$x + (x + 9) + (x + 18) + (x + 27) = 4x + 54 \geq 4 \cdot 5 + 54 = 74.$$

Значит, искомое число равно 66.

Ответ: а) да; б) да; в) 66.

Пример 18. а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, в которой сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 101?

б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из 8 натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 11. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.

в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, равно 8,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Решение.

Пусть a_1 — первый член прогрессии, n — количество членов, d — разность прогрессии, где $a, n \in N$.

а) $a_1 + a_5 = a_1 + (a_1 + 4d) = 2a_1 + 4d$ — четное число.

Значит, $a_1 + a_5 \neq 101$.

б) $a_1 + a_8 = 11$ (по условию), или $a_1 + (a_1 + 7d) = 11$, или $2a_1 + 7d = 11$.

Если $d = 0$, то $2a_1 = 11$, что невозможно, так как $a_1 \in N$.

Единственный возможный случай при $d = 1$, тогда $2a_1 + 7 \cdot 1 = 11$, откуда $a_1 = 2$, получим

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, где $2 + 9 = 11$.

в) Среднее арифметическое прогрессии равно полусумме ее крайних членов, т. е. $2a_1 + (n - 1)d = 17$, где $d \neq 0$, тогда $d \geq 1$.

Кроме того, $a_1 \geq 1$, т. е. $(n - 1)d \leq 15$, откуда имеем $(n - 1) \leq 15$, т. е. $n \leq 16$.

Действительно, натуральные числа от 1 до 16 составляют арифметическую прогрессию, у которой среднее арифметическое членов равно 8,5 и $n = 16$.

Ответ: а) нет; б) 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; в) 16.

Пример 19. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 22?

б) Каково наибольшее значение n , если сумма всех данных чисел меньше 800?

в) Найдите все возможные значения n , если сумма всех данных чисел равна 185.

Решение.

а) Может, например, числа 1, 4, 7, 10 составляют арифметическую прогрессию с разностью $d = 3$, а их сумма равна $1 + 4 + 7 + 10 = 22$.

б) По условию $n \in N$, тогда наименьшее из них $n \geq 1$, а так как все числа различны, т. е. отличаются друг от друга не менее чем на 1, то их сумма $S_n \geq 1 + 2 + 3 + \dots + n$, или $S_n \geq \frac{n(n+1)}{2}$.

Но $S_n < 800$, тогда $\frac{n(n+1)}{2} < 800$, или $n(n+1) < 1600$,

$n^2 + n - 1600 < 0$, откуда $n < 40$ (при $n \geq 40$ получим $n(n+1) \leq 40 \cdot 41 > 1600$).

При $n = 39$ имеем $n(n+1) \leq 39 \cdot 40 < 1600$. Натуральные числа от 1 до 39 составляют арифметическую прогрессию, где $n = 39$, а $S_n < 800$. Следовательно, наибольшее возможное значение $n = 39$.

в) Пусть a_1 — наименьшее из данных n чисел, d — разность прогрессии. Тогда $S_n = \frac{1}{2}(2a_1 + (n-1)d) \cdot n$.

По условию $S_n = 185$, тогда $(2a_1 + (n-1)d)n = 370$. (1)

Заметим, что $370 = 37 \cdot 10$, где 37 — простое число и $n < 37$. Значит, n — один из делителей числа 10. Поскольку $n \geq 3$, то $n = 5$, или $n = 10$.

1) Если $n = 5$, равенство (1) примет вид $(2a_1 + 4d) \cdot 5 = 370$, откуда $a_1 + 2d = 37$. Например, при $a_1 = 1$, $d = 18$ получим $1 + 19 + 37 + 55 + 73 = 185$.

2) Если $n = 10$, то $2a_1 + 9d = 37$. При $a_1 = 5$, $d = 3$ имеем $5 + 8 + 11 + 14 + 17 + 20 + 23 + 26 + 29 + 32 = 185$.

Ответ: а) да; б) 39; в) 5 и 10.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дана правильная несократимая дробь $\frac{a}{b}$, где $a, b \in N$. Из нее за один ход получают дробь $\frac{a+b}{2a+b}$.

а) Можно ли за несколько ходов из дроби $\frac{1}{3}$ получить дробь $\frac{22}{31}$?

б) Можно ли за два таких хода из некоторой дроби получить дробь $\frac{7}{12}$?

в) Несократимая дробь $\frac{c}{d} > 0,7$. Найдите такую наименьшую дробь $\frac{c}{d}$, которую нельзя получить ни из какой правильной несократимой дроби за два таких хода.

2. Дано натуральное число. К этому числу можно либо прибавить, либо вычесть утроенную сумму его цифр. Причем после прибавления или вычитания суммы цифр число должно остаться натуральным.

- а) Можно ли получить из числа 128 число 29?
- б) Можно ли получить из числа 128 число 31?
- в) Какое наименьшее число можно было получить из числа 128?

3. В классе больше 10, но не больше 26 учеников, причем доля девочек не более 46 %.

- а) Может ли в классе быть 9 девочек?
- б) Может ли в классе быть 55 % девочек, если придет еще одна?
- в) Какова наибольшая доля девочек, если в класс придет одна девочка?

4. На доске написаны все пятизначные числа, в десятичной записи которых по одному разу встречаются цифры 4; 5; 6; 7 и 8 (45 678; 45 687 и т. д.).

- а) Есть ли среди них число, которое делится на 55?
- б) Есть ли среди них число, которое делится на 505?
- в) Найдите наибольшее из этих чисел, которое делится на 11.

5. Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ состоит из различных натуральных чисел.

- а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_7 ровно три числа делятся на 36?
- б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{30} ровно 9 чисел делятся на 36?
- в) Для какого наибольшего натурального n может оказаться так, что среди чисел a_1, a_2, \dots, a_{2n} больше кратных 36, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{5n}$?

6. Все члены возрастающих арифметических прогрессий a_1, a_2, \dots и b_1, b_2, \dots являются натуральными числами.

- а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_1b_1 + 2a_3b_3 = 4a_2b_2$.
- б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $2a_1b_1 + a_4b_4 = 3a_2b_2$?
- в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_2b_2 , если $2a_1b_1 + a_4b_4 \leq 210$?

7. Пусть $K(n)$ обозначает сумму квадратов всех цифр натурального числа n .

а) Существует ли такое трехзначное число n , при котором $K(n) = 187$?

б) Существует ли такое трехзначное число n , при котором $K(n) = 188$?

в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $4K(n) - 2n$, если n — трехзначное число?

8. Дано трехзначное натуральное число, не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

9. На доске написано несколько различных натуральных чисел, каждое из которых делится на 3 и оканчивается на 4.

а) Может ли сумма этих чисел быть равной 282?

б) Может ли сумма этих чисел быть равной 390?

в) Какое наибольшее количество чисел может быть на доске, если их сумма равна 2226?

10. Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть $q = 55$. Найдите все возможные значения p .

б) Пусть $p + q = 30$. Найдите все возможные значения q .

в) Пусть $q^2 - p^2 = 2108$. Найдите все возможные корни данного уравнения.

11. На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма написанных на доске чисел, если их всего четыре?

ОТВЕТЫ

§ 1. Уравнения, неравенства и системы с параметрами

1. 1) Если $a \leq -\frac{1}{2}$, то $x_{\min} = 3a$; 2) если $-\frac{1}{2} < a < 1$, то $x_{\min} = a - 1$;

3) если $a \geq 1$, то $x_{\min} = 1 - a$.

2. 1) Если $a \leq -1$, то $x_{\max} = -a - 1$; 2) если $-1 < a < 1$, то $x_{\max} = a + 1$;

3) если $a \geq 1$, то $x_{\max} = 2a$.

3. $a = -\frac{1}{2}$; $a = 0$; $a = \frac{3}{2}$.

4. $a < \frac{39}{16}$.

5. Если $a \leq -1$, то $x = a + 1$; если $a \geq 1$, то $x = -2a$; если $-1 < a < 1$, то $x = -(a + 1)$.

6. $a \in \left[\frac{4}{3}; 2\right)$.

7. $a = 0,75$.

8. $a = 0$; $a = 1$; $a = \frac{5}{4}$.

9. Если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \neq 0$, то $x = -6a$, $x = (-8 \pm 2\sqrt{7})a$.

10. $a < -\frac{1}{2}$; $a > 2$; $\frac{1}{8} < a < 2$.

11. $a = p(p + 1)$, где $p \in N$.

12. $k = 0$.

13. $b = -1$.

14. $b = 59$.

15. $a = -17$.

16. $m = -1$.

17. $k = 1$.

18. $a \in (-\infty; 0] \cup \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$.

19. $a < -8$.

20. $a = 3$.

21. $\left(-\frac{13}{4}; 3\right)$.

22. $(-2; 6)$.

23. $\left(-\frac{9}{4}; 2\right)$.

24. $(1; +\infty)$.

25. $\left(0; \frac{1}{3}\right)$.

26. $\left(-\infty; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

27. $(1; +\infty)$.

28. $\left(-\frac{17}{4}; 4\right)$.

29. $(-1; 5)$.

30. $(-\infty; 0] \cup \{1\}$.

31. $[2 - 2\sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}]$.

32. $a = \pm 5$; $a = \pm \frac{5}{3}$.

$$33. \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}}; +\infty\right).$$

$$34. (-2; 1] \cup \{2\}.$$

$$35. a = -\frac{1}{2}; a = -1; a = 0. \quad 36. \left(-\infty; \frac{6}{19}\right). \quad 37. k = -3.$$

$$38. a = 29. \quad 39. m \in (1; \sqrt{2}). \quad 40. a \in \left(-\infty; -\frac{1}{4}\right).$$

$$41. |a| < \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad 42. a = 0; a = 1. \quad 43. m \in (-2; 0).$$

$$44. a = -\frac{3}{4}; a = \frac{4}{3}. \quad 45. a \in [0; 1]. \quad 46. a = -2; a = \frac{1}{3}.$$

$$47. a = -2; a = 3. \quad 48. 3 \text{ и } \sqrt{65} + 2. \quad 49. (12; -8).$$

$$50. \left(\frac{144}{13}; 16\right).$$

§ 2. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами

1. При $|a| \leq 2$ $x = \sqrt{4-a^2}$; при $\sqrt{3} \leq |a| \leq 2$ $x = \pm\sqrt{4-a^2}$; при $|a| > 2$ решений нет.

2. При $a \in (-\infty; 0)$ решений нет; при $a \in \left[0; \frac{3}{4}\right)$ $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+4a})$;
при $a \in \left[\frac{3}{4}; 1\right]$ $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+4a})$, $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{4a-3})$; при $a \in (1; +\infty)$
 $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+4a})$, $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{4a-3})$.

3. При $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ решений нет;
при $a \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$ $x = a^2 + \frac{1}{4}$; при $a = 0$ $x \in [0; +\infty)$.

$$4. a = \frac{5}{2}. \quad 5. a \in \left[\frac{1}{3}; 1\right) \cup \left\{\frac{4}{3}\right\}. \quad 6. a \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right).$$

$$7. [2; +\infty). \quad 8. a = 3(\sqrt{2} + 1). \quad 9. a \in (-\infty; 0) \cup (0; 1).$$

$$10. a \in (0; 1). \quad 11. \left[\frac{7}{3}; +\infty\right). \quad 12. \left(\frac{7}{5}; \frac{7}{3}\right] \cup \left\{\frac{4}{3}\right\}.$$

$$13. a \in \left(-1; -\frac{1}{2}\right). \quad 14. a \leq -2; a \geq 4. \quad 15. \left(-\frac{19}{7}; +\infty\right).$$

$$16. a = 8. \quad 17. x \geq -\frac{1}{2}|a|.$$

$$18. \text{Если } a \leq -\frac{1}{4}, \text{ то решений нет;}$$

$$\text{если } -\frac{1}{4} < a \leq 0, \text{ то } -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4a}) < x < \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 + 4a}).$$

$$19. \text{Если } a \in (-\infty; -2), \text{ то решений нет; если } a \in [-2; +\infty), \text{ то } x \in [a; +\infty).$$

$$20. \text{Если } a \in (-\infty; -1), \text{ то решений нет; если } a \in [-1; 0], \text{ то}$$

$$x \in [1 - \sqrt{a+1}; 1 + \sqrt{a+1}]; \text{ если } a \in [0; +\infty), \text{ то } x \in \left[-\frac{a}{2}; 1 + \sqrt{a+1}\right].$$

$$21. \text{Если } a \in (-\infty; 0], \text{ то } x \in [-1; +\infty);$$

$$\text{если } a \in (0; +\infty), \text{ то } x \in \left(-1; \frac{1}{a^2} - 1\right).$$

$$22. \text{Если } a \in (-\infty; 0), \text{ то решений нет;}$$

$$\text{если } a \in [0; +\infty), \text{ то } x \in [0; a] \cup [4a; +\infty).$$

$$23. \text{Если } a \in (-\infty; 0), \text{ то } x \in \left[a\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right); 0\right];$$

$$\text{если } a \in [0; +\infty), \text{ то } x \in \left[a\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right); 2a\right].$$

$$24. \text{Если } a \in (-\infty; 0), \text{ то решений нет; если } a = 0, \text{ то } x \in (0; +\infty);$$

$$\text{если } a \in (0; +\infty), \text{ то } x \in [0; a] \cup [16a; +\infty).$$

$$25. a = -2.$$

$$26. [0; 5, 5].$$

$$27. \text{Если } a = 0, \text{ то } x = 0; \text{ если } a > 0, \text{ то } x \in [-8a; a].$$

$$28. a \in [2; 3) \cup (3; 4]. \quad 29. a \in \left(0; \frac{3}{16}\right), a = \frac{1}{4}. \quad 30. a \in \left(-\infty; \frac{5}{3}\right).$$

§ 3. Тригонометрические уравнения, неравенства и системы с параметрами

$$1. \text{При } a = \frac{1}{3} \quad x = \pi + 2\pi n, \quad x = 2\arctg 0,5 + 2\pi n; \text{ при } -1 \leq a \leq 1$$

$$\left(a \neq \frac{1}{3}\right) \quad x = 2\arctg \frac{a+1 \pm \sqrt{2(1-a^2)}}{3a-1} + 2\pi n; \text{ при } |a| > 1 \text{ решений нет.}$$

2. $x = ((-1)^n \arcsin(a+1) + \pi n)^2$, где $n \in \mathbb{N}$ при $-2 \leq a \leq -1$ и $n = 0$,
1, 2... при $-1 < a \leq 0$.

3. $x = 2 \pm (\operatorname{arctg} a + \pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 0$) при $a \geq 0$ и $n \in \mathbb{N}$ при $a < 0$.

4. При $a < 0$ $x = 2\pi k$;

при $a = 0$ $x = \pi n$;

при $0 < a < 2$ $x = 2\pi n$, $x = \pm \arccos \frac{1}{2a}(1 - \sqrt{1+4a}) + 2\pi n$;

при $a = 2$ $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x = 2\pi n$;

при $a > 2$ $x = \pm \arccos \frac{1}{2a}(1 \pm \sqrt{1+4a}) + 2\pi k$, $x = 2\pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$.

5. $\frac{\pi}{2}$.

6. $|a| \leq \sqrt{13}$.

7. При $a = 1$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; при $a \neq 1$ решений нет.

8. При $a \in \{0\} \cup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 1 \right]$ $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{2b^2-1}{2b-1} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; при

остальных a решений нет.

9. При $p \in [-1; 0]$ $x = \pm \frac{1}{2} \arccos(2p+1) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

10. $m = 3$.

11. $a = -\frac{\pi}{3}$; 0 ; $\frac{\pi}{3}$.

12. $a \in (36\pi^2; 64\pi^2)$.

13. $a = 4n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

14. Если $a = -1 + 2\pi n$, то $x = -1$; если $a = 1 + \pi + 2\pi n$, то $x = 1$,
 $n \in \mathbb{Z}$; при других a решений нет.

15. $a = 1$.

16. $(0; 1)$.

17. $(-\infty; -2 - \sqrt{6}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

18. $(2 + 0,5\pi - 0,5 \arcsin m + \pi n; 2 + 0,5\pi + 0,5 \arcsin m + \pi n)$;
 $(2 - 0,5 \arcsin m + \pi n; 2 + 0,5 \arcsin m + \pi n)$.

19. $(\pi - 2\varphi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, где $\varphi = \arcsin \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

20. $a \in \left(-\infty; \frac{3}{14} \right)$.

21. $a = 3$.

22. $a \in \left[-\frac{1}{2}; 2 \right)$.

23. $(2 - \arccos a + 2\pi n; 2 + \arccos a + 2\pi n)$;
 $(2 + \arccos(-a) + 2\pi k; 2 + 2\pi - \arccos(-a) + 2\pi k)$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

$$24. \left(\frac{2\pi n}{3}; \frac{2}{3} \arcsin \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{2\pi n}{3} \right),$$

$$\left(\frac{2\pi n}{3}; \frac{2}{3} \arcsin \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{2\pi n}{3} \right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$25. a = 1. \quad 26. a \in \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right).$$

$$27. \text{ При } a = 0 \quad x = y + (2k+1)\pi, y \text{ — любое; при } a \in [-2; 0) \cup (0; 2],$$

$$\left(\pm \arccos \left[(-1)^k \cdot \frac{a}{2} \right] + (2m+k)\pi; \mp \arccos \left[(-1)^k \cdot \frac{a}{2} \right] + (k-2m)\pi \right),$$

$k, m \in \mathbb{Z}$; при остальных a решений нет.

$$28. \text{ При } a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2} \right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty \right) \text{ решений нет;}$$

$$((-1)^{k+1} \arcsin a + \pi k; (-1)^n \arcsin 2a + \pi n),$$

$$((-1)^k \arcsin 2a + \pi k; (-1)^{n+1} \arcsin a + \pi n) \text{ при } a \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right].$$

$$29. \text{ Если } |a| \leq \sqrt{3}, \text{ то } \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right];$$

$$\text{если } \sqrt{3} < |a| \leq 2, \text{ то } \left[\arccos(4-a^2) + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right],$$

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; -\arccos(4-a^2) + 2\pi n \right], \text{ где } n \in \mathbb{Z}; \text{ если } |a| > 2, \text{ то решений нет.}$$

$$30. \text{ Если } a = 2\pi k, \text{ то } x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi(n+k), y = \mp \frac{\pi}{3} + \pi(k-n);$$

$$\text{если } a = \pi(2k+1), \text{ то } x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \pi(n+k), y = \mp \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \pi(k-n), \text{ где}$$

$k, n \in \mathbb{Z}$; при остальных a решений нет.

$$31. 5-2\sqrt{6}. \quad 32. a = -1,5. \quad 33. a \in [-1; 2).$$

$$34. a = 0; a = -\frac{2}{3}. \quad 35. a \in (-\infty; -12] \cup [0; 4] \cup [8; +\infty).$$

$$36. \frac{3\pi}{2} \text{ при } a = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad 37. a \in \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2} \right) \cup \{1\} \cup \left(\frac{3}{2}; 4 \right].$$

$$38. a \in [1; 5,8]. \quad 39. a = 2. \quad 40. a = 0.$$

§ 4. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства с параметрами

1. При $a \in (-\infty; -1]$, $x = \log_2(1 - 2a)$; при

$a \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$, $x_1 = \log_2(1 - 2a)$, $x_2 = \log_2(a + 1)$;

при $a \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$, $x = \log_2(a + 1)$.

2. При $a \in \left[-\frac{5}{2}; -1\right]$, $x = (-1)^n \arcsin(\log_2(a + 3)) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

при $a \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup (-1; +\infty)$ решений нет.

3. При $a \in (-\infty; 3)$, $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{35 - 3^a}$;

при $a \in [3; \log_3 31]$, $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{35 - 3^a}$, $x_{3,4} = \sqrt{3^a - 27}$;

при $a \in (\log_3 31; +\infty)$ решений нет.

4. При $a \in (-\infty; 0)$ решений нет; при $a \in [0; 8)$, $x_1 = \log_7^2(2 + \sqrt{9 + a})$,
 $x_2 = \log_7^2(2 + \sqrt{9 - a})$; при $a \in [8; 9]$, $x_1 = \log_7^2(2 + \sqrt{9 + a})$,
 $x_{2,3} = \log_7^2(2 \pm \sqrt{9 - a})$; при $a \in (9; +\infty)$, $x = \log_7^2(2 + \sqrt{9 + a})$.

5. $a = 3$. 6. $a = -1$; $a = -2$. 7. $m = -\frac{49}{4}$, $m \in [-12; -6]$.

8. $p = 9$. 9. 8. 10. $m = 0$. 11. $a \in \left(0; \frac{1}{16}\right)$.

12. $a = -8$. 13. $a = 3$. 14. $a = 4$.

15. Если $a < 0$, то корней нет; если $0 \leq a < 1$, то $x_{1,2} = a + 2 \pm 2\sqrt{a}$;
 если $a \geq 1$, то $x = a + 2 + 2\sqrt{a}$.

16. $a \in (-2, 5; +\infty)$.

17. При $a \in (-\infty; 6]$ $x \in [3; +\infty)$; при $a \in (6; +\infty)$, $x \in \left[3; 3 + \log_2^2\left(\frac{a-2}{a-6}\right)\right)$.

18. При $a \in (-\infty; -4]$, $x \in (1 - a; +\infty)$; при $a \in (-4; -3]$,

$x \in (-a; 4) \cup (1 - a; +\infty)$; при $a \in (-3; 0]$,

$x \in (-a; 1 - a) \cup (4; +\infty)$; при $a \in (0; 1]$,

$x \in (-a; 0) \cup (0; 1 - a) \cup (4; +\infty)$; при $a \in [1; +\infty)$,

$x \in (-a; 1 - a) \cup (4; +\infty)$.

19. $m = -1$. 20. $a = 1$. 21. $p = -784$.
 22. $a \in [3968; +\infty)$. 23. $a \in [2; 2,5)$.
 24. При $a \in \left(2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$,
 $x \in (8; +\infty)$; при $a \in \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, $x \in (3; 8)$.
 25. При $a \in (0; 1)$, $x \in (a + 3; 4)$; при $a \in (1; +\infty)$, $x \in (4; a + 3)$.
 26. При $a \in (0; 1)$, $x \in [3 + \log_a 2; 3)$; при $a \in (1; +\infty)$,
 $x \in (3; 3 + \log_a 2]$.
 27. $p = 2$.
 28. При $a \in (-\infty; 0]$ решений нет; при $a \in (-\infty; 0)$, $x \in (-a; a)$.
 29. $m = -7$. 30. 28.
 31. $a \in (0; 1) \cup [12; +\infty)$. 32. $\sqrt{3} < |a| < \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.
 33. $a \in \left(0; \frac{3}{4}\right]$; $a = 1$. 34. $a \in (16; +\infty)$.
 35. $a \in \left(0; \frac{1}{8}\right)$. 36. $a \in (1; 4)$. 37. $a = \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$; $a \in [1; +\infty)$.
 38. $a \in [-4; 4]$. 39. $a \in (1; 4)$. 40. $a = 1$.

§ 5. Функции. Свойства функций

1. $7\sqrt{19}$. 2. 5. 3. $y_{\text{наим.}} = 3$ при $x \in [2; 5]$.
 4. $k = -\frac{11}{40}$. 5. $a = -15$; $a = 9$. 6. $a = -\frac{9}{5}$; $a = \frac{17}{5}$.
 7. $a \in (-\infty; -21) \cup [5; +\infty)$. 8. $a = 1$. 9. $a = -2\sqrt{3}$.
 10. При $a \in (-\infty; 2]$, $y_{\text{наиб.}} = 3 - a$; при $a \in (2; +\infty)$, $y_{\text{наиб.}} = a - 1$.
 11. $\left(\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)$. 12. $a \in \{-4\} \cup \left[-\frac{5}{2}; -\frac{9}{4}\right]$.
 13. При $a \in \left(-\infty; \frac{1}{6}\right)$, $y_{\min} = 8a^2 + 4a - 12$;
 при $a \in \left[\frac{1}{6}; \frac{19}{18}\right]$, $y_{\min} = -\frac{1}{4}(2a - 7)^2$;
 при $a \in \left(\frac{19}{18}; +\infty\right)$, $y_{\min} = 8a^2 - 12a - \frac{20}{9}$.

14. $a = 2$.

15. $2\sqrt{5}$.

16. $a = 1$.

17. $\alpha = -\operatorname{arctg} \frac{1}{15}(7+2\sqrt{31}), \alpha = -\operatorname{arcctg} \frac{1}{15}(7+2\sqrt{31})$.

18. $a = -2; a = -0,5$. 19. $a \in (-3,5; 1)$. 20. $a \in [-3-3\sqrt{2}; +\infty)$.

21. $a \in \left(-\frac{8}{3}; -1\right) \cup \left(0; \frac{5}{3}\right)$. 22. $a = 9$.

23. $a \in (-5; 1)$.

24. $a \in (1; 11)$.

25. $a = 50$.

§ 6. Числа и их свойства

1. а) да; б) нет; в) $\frac{5}{7}$. 2. а) да; б) нет; в) 2. 3. а) да; б) нет; в) 50.

4. а) да; б) нет; в) 68 574. 5. а) да, например, 18, 36, 54, 72 ...; б) нет; в) 23. 6. а) да, например, 2, 3, 4, ... и 2, 3, 4, ...; б) нет; в) 68.

7. а) да; б) нет; в) -1500. 8. а) да; б) нет; в) 91. 9. а) да, может; б) нет, не может; в) 9. 10. а) $p = -56$ или $p = -16$; б) 64; в) $x_1 = 6, x_2 = 8$. 11. а) да, может; б) нет, не может; в) 35.

ЛИТЕРАТУРА

Балаян Э. Н. Математика. Задачи типа 19 (профильный уровень). — Ростов н/Д: Феникс, 2016.

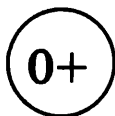
Балаян Э. Н. Математика. Задачи типа 20: уравнения, неравенства и системы с параметрами. — Ростов н/Д: Феникс, 2015.

Балаян Э. Н. Математика. Разбор заданий для подготовки к ЕГЭ с анализом типичных ошибок (профильный уровень). — Изд. 2-е. — Ростов н/Д: Феникс, 2024.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Задачи с параметром	4
§ 1. Уравнения, неравенства и системы с параметрами.....	5
Краткая теория и справочные материалы	5
<i>Задачи с решениями</i>	<i>10</i>
1.1. Рациональные уравнения и неравенства	10
1.2. Рациональные системы уравнений и неравенств	42
Задачи для самостоятельного решения	56
§ 2. Иррациональные уравнения и неравенства с параметрами	60
Краткая теория и справочные материалы	61
<i>Задачи с решениями</i>	<i>62</i>
Задачи для самостоятельного решения	83
§ 3. Тригонометрические уравнения, неравенства и системы с параметрами	86
Краткая теория и справочные материалы	86
<i>Задачи с решениями</i>	<i>88</i>
3.1. Тригонометрические уравнения	88
3.2. Тригонометрические неравенства	94
3.3. Тригонометрические системы	99
Задачи для самостоятельного решения	101
§ 4. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства с параметрами	105
Краткая теория и справочные материалы	105
<i>Задачи с решениями</i>	<i>109</i>
4.1. Показательные и логарифмические уравнения	109
4.2. Показательные и логарифмические неравенства	125
Задачи для самостоятельного решения	131
§ 5. Функции. Свойства функций	135
Краткая теория и справочные материалы	135

<i>Задачи с решениями</i>	139
Задачи для самостоятельного решения	144
Глава 2. Элементы теории чисел	147
§ 6. Числа и их свойства	147
Краткая теория и справочные материалы	148
<i>Задачи с решениями</i>	156
Задачи для самостоятельного решения	176
Ответы	179
Литература	187



Учебное издание

Балаян Эдуард Николаевич

МАТЕМАТИКА
ПОДГОТОВКА К ЕГЭ
ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРОМ. ЧИСЛА И ИХ СВОЙСТВА
Разбор заданий с развернутым ответом
10–11 классы
Профильный уровень

Ответственный редактор *С. А. Осташов*


Формат 70 × 100/16. Бумага газетная.
Тираж 3000 экз. Заказ №0518.

Издатель и Изготовитель: ООО «Феникс»
Юр. и факт. адрес: 344011, Россия, Ростовская обл.,
г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150.
Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-59.


Изготовлено в России. Дата изготовления: 09.2024.
Срок годности не ограничен.


Отпечатано в ООО «БПК-Групп»
Юр. адрес: 142400, Россия, Московская обл., Ногинский район,
г. Ногинск, ул. Индустриальная, д. 40Б, каб. 106.
Факт. адрес: 142400, Россия, Московская обл., Ногинский район,
г. Ногинск, ул. Индустриальная, д. 40Б.

ОПЫТ  32 года
создаём книги

ЭКСПЕРТИЗА  200 000 000
экземпляров наших книг
читают по всему миру

В ТРЕНДЕ  свыше 700
«Феникс» всегда на волне
ваших ожиданий книжных новинок
мы выпускаем ежегодно

ЗНАНИЯ  Учебная литература
Книги для профессионалов
Прикладная литература
Психология и саморазвитие
Литература для родителей и детей
Книги для дома, досуга, хобби

ВПЕЧАТЛЕНИЯ  Классическая литература
Интеллектуальная проза
Книги для подростков
Детская художественная литература

КАЧЕСТВО  Нам важна ваша
безопасность!



ХОРОШАЯ РАБОТА



- ... Мы предлагаем стабильный доход
- ... от реализации книг нашего издательства.

**344011, Россия, Ростовская обл.,
г. Ростов-на-Дону,
ул. Варфоломеева, 150
(863) 261-89-53**



- ... Вы писатель или художник?
- ... Присылайте свои работы к нам в издательство.
- ... Отдел редакции: **idea@fenixrostov.ru**



- ... Вы блогер и жить не можете без книг? Вы все время
- ... о них пишете? Мы предоставим Вам возможность
- ... писать об интересных проектах издательства!
- ... Отдел маркетинга: **blogger@fenixrostov.ru**

www.phoenixrostov.ru