

ЭДУАРД БАЛАЯН | автор более 200 книг

Математика Подготовка к ЕГЭ

Простейшие уравнения. Вычисления и преобразования. Текстовые задачи. Задачи с прикладным содержанием

РАЗБОР ЗАДАНИЙ С КРАТКИМ ОТВЕТОМ

$$\sqrt{18} \cos^2 \frac{15\pi}{8} - \sqrt{18} \sin^2 \frac{15\pi}{8}.$$

$$(9x^2 + 16y^2 - (3x + 4y)^2) : 6xy.$$

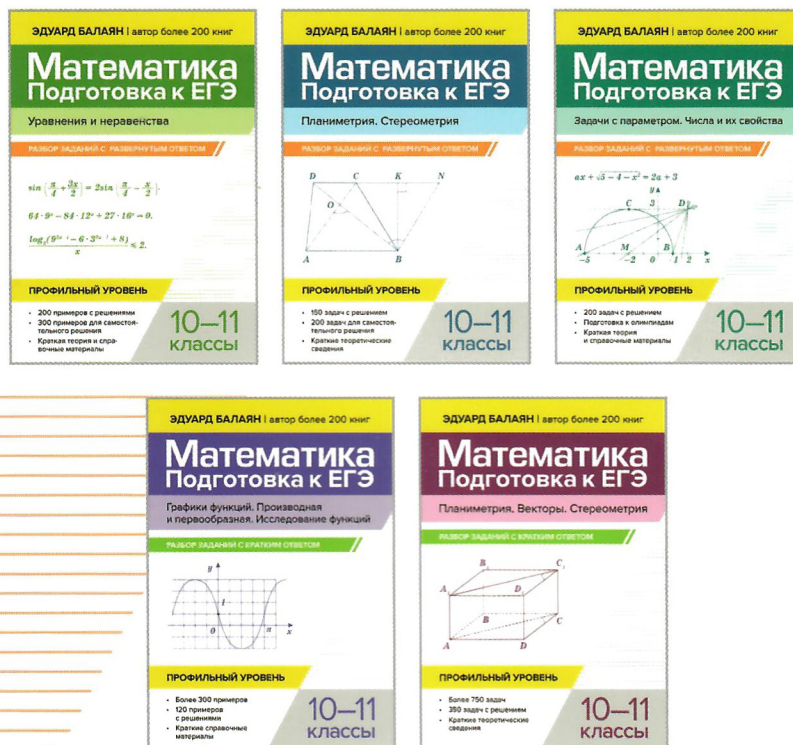
$$\frac{16x^2 + y^2 - (4x - y)^2}{xy}.$$

ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

- 300 задач с решением
- 550 задач для самостоятельного решения
- Краткие справочные материалы

10–11
классы

Предлагаемая мини-серия состоит из пособий, содержащих разбор заданий с кратким и развернутым ответами, предназначенных для подготовки к ЕГЭ. Каждое из пособий представляет тему или комплект тем, соответствующих профильному уровню. Каждая тема сопровождается краткой теорией, справочными материалами, образцами разнообразных примеров с подробными решениями и обоснованиями. В каждой теме приводятся примеры для самостоятельного решения, а в конце пособия — ответы для контроля правильности решения. Пособия предназначены старшеклассникам для эффективной подготовки и успешной сдачи экзамена, учителям математики и репетиторам.



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФЕНИКС
ХОРОШИЕ КНИГИ



ЭДУАРД БАЛАЯН | автор более 200 книг
Математика Подготовка к ЕГЭ
ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ
Вычисления и преобразования

Э. Н. Балаян

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ.

ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ.

ЗАДАЧИ С ПРИКЛАДНЫМ СОДЕРЖАНИЕМ

Разбор заданий с кратким ответом

10–11 классы

Профильный уровень

- ◆ 300 задач с решениями
- ◆ 550 задач для самостоятельного решения
- ◆ Краткие справочные материалы

Ростов-на-Дону



2025

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я72

КТК 444

Б20

Балаян Э. Н.

Б20 Математика. Подготовка к ЕГЭ. Простейшие уравнения. Вычисления и преобразования. Текстовые задачи. Задачи с прикладным содержанием : разбор заданий с кратким ответом : 10–11 классы : профильный уровень / Э. Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2025. — 140 с. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-42893-1

Предлагаемое пособие содержит подробное решение заданий I части ЕГЭ с кратким ответом по темам «Простейшие уравнения», «Вычисления и преобразования», «Текстовые задачи», «Задачи с прикладным содержанием».

В конце каждого параграфа даны задачи для самостоятельного решения, а в конце книги — ответы к ним.

Для удобства пользования пособием приводятся краткие справочные материалы по курсу математики 7–11 классов.

Пособие адресовано старшеклассникам и абитуриентам для самостоятельной подготовки к ЕГЭ, учителям математики, слушателям подготовительных отделений вузов и репетиторам.

УДК 373.167.1:51

ISBN 978-5-222-42893-1

ББК 22.1я72

© Балаян Э. Н., 2024

© Оформление ООО «Феникс», 2024

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие состоит из четырех параграфов, из которых § 1–3 разбиты на пункты, что дает возможность быстро найти нужную информацию.

§ 1 посвящен простейшим уравнениям: линейным, рациональным, квадратным, иррациональным, показательным, логарифмическим и тригонометрическим.

Каждый пункт сопровождается подробными решениями и обоснованиями примеров, встречающихся на экзамене.

§ 2 посвящен вычислениям и преобразованиям различных выражений: рациональных, алгебраических, иррациональных, степенных, логарифмических и тригонометрических.

§ 3 содержит текстовые задачи, вызывающие наибольшие затруднения у абитуриентов и старшеклассников. Причина затруднений, по-видимому, заключается в том, что учитель старается обучить решению каждого типа задач в отдельности, а не сформировать у ученика способность анализировать всякую задачу (что крайне важно) вне зависимости от ее разновидности.

Задачи, рассмотренные в пособии, посвящены темам на числовые зависимости, на движение, совместную работу, сплавы и смеси, на проценты, на разбавление и прогрессии.

Задачам с прикладным содержанием посвящен заключительный § 4. Рассмотренные задачи носят прикладной характер и связаны с различными областями науки. Формулы для решения задач приводятся в самих заданиях, остается лишь подставить значения и найти результат.

В конце пособия приводятся ответы ко всем заданиям и необходимые справочные материалы.

§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ

Здесь предлагается решить простейшие уравнения базового уровня, которые подразделяются на несколько видов:

- 1) линейные, квадратные, кубические уравнения;
- 2) рациональные уравнения;
- 3) иррациональные уравнения;
- 4) показательные и логарифмические уравнения;
- 5) тригонометрические уравнения.

1.1. Линейные уравнения

Найдите корень уравнения.

Пример 1. $\frac{4}{5}x = 14\frac{2}{5}.$

Решение.

$$14\frac{2}{5} = \frac{14 \cdot 5 + 2}{5} = \frac{72}{5}, \text{ тогда получим } \frac{4}{5}x = \frac{72}{5}, \text{ или } 4x = 72, \text{ откуда}$$
$$x = 72 : 4 = 18.$$

Ответ: 18.

Пример 2. $\frac{5}{7}x = -9\frac{2}{7}.$

Решение.

$$9\frac{2}{7} = \frac{9 \cdot 7 + 2}{7} = \frac{65}{7}, \text{ тогда получим } \frac{5}{7}x = -\frac{65}{7}, \text{ или } 5x = -65,$$

$$x = -\frac{65}{5} = -13.$$

Ответ: -13.

Пример 3. $8\frac{3}{4}x = -7.$

Решение.

$$8\frac{3}{4} = \frac{8 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{35}{4}, \text{ тогда получим } \frac{35}{4}x = -7, \text{ откуда } x = -7 : \frac{35}{4},$$

$$x = -7 \cdot \frac{7}{35} = -\frac{4}{5} = -0,8.$$

Ответ: $-0,8$.

Пример 4. $18\frac{3}{4}x = -22\frac{1}{2}$.

Решение.

$$18\frac{3}{4} = \frac{18 \cdot 4 + 3}{4} = \frac{75}{4}, \quad 22\frac{1}{2} = \frac{22 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{45}{2}, \quad \text{тогда } \frac{75}{4}x = -\frac{45}{2}, \quad \text{откуда}$$

$$x = -\frac{45}{2} \cdot \frac{4}{75}, \quad \text{или } x = -\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 5} = -\frac{6}{5} = -1,2.$$

Ответ: $-1,2$.

Пример 5. $\frac{256}{x+9} = 16$.

Решение.

$$\frac{256}{x+9} = 16, \quad \text{откуда } x + 9 = 256 : 16, \quad \text{или } x + 9 = 16, \quad x = 16 - 9 = 7.$$

Ответ: 7 .

Пример 6. $\frac{2x-1}{31} = 9$.

Решение.

$$2x - 1 = 31 \cdot 9, \quad \text{или } 2x - 1 = 279, \quad 2x = 280, \quad \text{откуда } x = 280 : 2 = 140.$$

Ответ: 140 .

Пример 7. $x - \frac{7}{15} = \frac{1}{3} + \frac{3}{5}$.

Решение.

$$x = \frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \frac{7}{15}, \quad x = \frac{5}{15} + \frac{9}{15} + \frac{7}{15}, \quad x = \frac{21}{15} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Ответ: $1,4$.

Пример 8. $18\frac{5}{14} - x = 9\frac{13}{21}$.

Решение.

Чтобы найти вычитаемое, надо из уменьшаемого вычесть разность: $x = 18\frac{5^3}{14} - 9\frac{13^2}{21}$.

НОК(14; 21) = 42. Тогда получим $x = 18\frac{15}{42} - 9\frac{26}{42}$, или

$$x = 17\frac{42+15}{42} - 9\frac{26}{42}, \text{ или } x = 8\frac{57-26}{42} = 8\frac{31}{42}.$$

Ответ: $8\frac{31}{42}$.

Пример 9. $5\frac{1}{4} : x = \frac{7}{16}$.

Решение.

Запишем уравнение в виде пропорции:

$$5\frac{1}{4} : x = \frac{7}{16} : 1, \text{ тогда } x = 5\frac{1}{4} \cdot 1 : \frac{7}{16}, \text{ или } x = \frac{21}{4} \cdot \frac{16}{7} = \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 1} = 12.$$

Ответ: 12.

Пример 10. $x : 2\frac{3}{4} = 6\frac{1}{2} : 3\frac{1}{4}$.

Решение.

Чтобы найти неизвестный крайний член пропорции, надо перемножить средние члены и разделить на известный крайний член:

$$x = 2\frac{3}{4} \cdot 6\frac{1}{2} : 3\frac{1}{4}, \text{ или } x = \frac{11}{4} \cdot \frac{13}{2} \cdot \frac{4}{13}, \text{ или } x = \frac{11}{2} = 5,5.$$

Ответ: 5,5.

Пример 11. $\frac{x}{0,6} = \frac{27}{1,5}$.

Решение.

Умножим обе части уравнения на 10:

$$\frac{x}{6} = \frac{27}{15}, \text{ или } \frac{x}{6} = \frac{9}{5}, \text{ откуда } x = \frac{6 \cdot 9}{5} = \frac{54}{5} = \frac{54 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{108}{10} = 10,8.$$

Ответ: 10,8.

Пример 12. $x : 2\frac{13}{36} = \frac{27}{85} : \frac{3}{4}$.

Решение.

$$x \cdot \frac{3}{4} = 2\frac{13}{36} \cdot \frac{27}{85}, \text{ или } x \cdot \frac{3}{4} = \frac{85}{36} \cdot \frac{27}{85}, \text{ или } x \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{4}, \text{ откуда } x = \frac{3}{4} : \frac{3}{4} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 13. $4\frac{1}{11}:10 = 4,5 : (6x + 5).$

Решение.

$$4\frac{1}{11} \cdot (6x + 5) = 10 \cdot 4,5, \text{ или } \frac{45}{11} \cdot (6x + 5) = 45, \text{ или } \frac{1}{11} \cdot (6x + 5) = 1,$$

$$6x + 5 = 11, 6x = 11 - 5 = 6, \text{ откуда } x = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 14. $\frac{13,5}{x} = \frac{12,5}{4}.$

Решение.

Умножим обе части уравнения на 10: $\frac{135}{x} = \frac{125}{4}.$

Теперь разделим обе части уравнения на 5:

$$\frac{27}{x} = \frac{25}{4}, \text{ откуда } x = \frac{27 \cdot 4}{25} = \frac{108}{25} = \frac{108 \cdot 4}{25 \cdot 4}, x = \frac{432}{100} = 4,32.$$

Ответ: 4,32.

1.2. Рациональные уравнения

Найдите корень уравнения.

Пример 15. $\frac{2x+9}{x-3} = 4.$

Решение.

$$2x + 9 = 4 \cdot (x - 3), \text{ или } 2x + 9 = 4x - 12, \text{ или } 4x - 2x = 9 + 12,$$

$$2x = 21, \text{ откуда } x = 10,5.$$

Ответ: 10,5.

Пример 16. $\frac{32-4x}{x+1} = 5.$

Решение.

$$32 - 4x = 5(x + 1), \text{ или } 32 - 4x = 5x + 5, 32 - 5 = 5x + 4x, 27 = 9x,$$

$$x = 27 : 9 = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 17. $\frac{x-10}{x+1} = -2\frac{2}{3}.$

Решение.

$$\frac{x-10}{x+1} = -\frac{8}{3}, \text{ или } 3(x-10) = -8(x+1), \text{ или } 3x-30 = -8x-8,$$

$$3x+8x = 30-8, 11x = 22, x = 22:11 = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 18. $\frac{2-3x}{2-x} = 2,6.$

Решение.

$$2,6 = \frac{26}{10} = \frac{13}{5}, \text{ тогда получим } \frac{2-3x}{2-x} = \frac{13}{5}, \text{ или } 5(2-3x) = 13(2-x),$$

$$\text{или } 10-15x = 26-13x, \text{ или } 10x-26 = 15x-13x, 2x = -16, x = -8.$$

Ответ: -8.

Пример 19. $\frac{2x-1}{3x+5} = \frac{2}{5}.$

Решение.

$$2(3x+5) = 5(2x-1), \text{ или } 6x+10 = 10x-5, \text{ или } 10+5 = 10x-6x,$$

$$\text{или } 15 = 4x, \text{ откуда } x = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} = 3,75.$$

Ответ: 3,75.

Пример 20. $\frac{71-3x}{6x-9} = \frac{1}{3}.$

Решение.

$$3(71-3x) = 6x-9, \text{ или } 3(71-3x) = 3(2x-3).$$

Разделим обе части уравнения на 3:

$$71-3x = 2x-3, \text{ или } 71+3 = 2x+3x, \text{ или } 74 = 5x, \text{ откуда}$$

$$x = \frac{74}{5} = \frac{148}{10} = 14,8.$$

Ответ: 14,8.

Пример 21. $\frac{5x}{10x-13} = \frac{3}{2}.$

Решение.

$$3 \cdot (10x - 13) = 2 \cdot 5x, \text{ или } 30x - 39 = 10x, \text{ или } 30x - 10x = 39, \\ 20x = 39, x = \frac{39}{20} = \frac{39 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{195}{10} = 1,95.$$

Ответ: 1,95.

Пример 22. $\frac{x-3}{8x+5} = \frac{x-3}{5x+4}.$ В ответе запишите больший из корней.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$\frac{x-3}{8x+5} - \frac{x-3}{5x+4} = 0.$$

Вынесем общий множитель $(x-3)$ за скобки:

$$(x-3) \left(\frac{1}{8x+5} - \frac{1}{5x+4} \right), \text{ откуда } x-3=0, \text{ или } \frac{1}{8x+5} - \frac{1}{5x+4} = 0.$$

Если $x-3=0$, то $x=3$.

$$\text{Если } \frac{1}{8x+5} - \frac{1}{5x+4} = 0, \text{ то } \frac{1}{8x+5} = \frac{1}{5x+4}, \text{ или } 8x+5 = 5x+4, \text{ или}$$

$$8x - 5x = 4 - 5, 3x = -1, x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: 3.

Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

Пример 23. $x = \frac{6}{x-1}.$

Решение.

$x(x-1) = 6$, или $x^2 - x - 6 = 0$, откуда по теореме, обратной теореме Виета, имеем $x_1 = 3$, $x_2 = -2$.

Тогда $x = -2$ — меньший корень уравнения.

Ответ: -2.

Пример 24. $x = \frac{-3x+4}{x-3}$.

Решение.

$x(x-3) = -3x+4$, или $x^2 - 3x + 3x = 4$, $x^2 = 4$, откуда $x_{1,2} = \pm 2$.

Тогда $x = -2$ — меньший корень уравнения.

Ответ: -2 .

Пример 25. $x = -\frac{2x+18}{x-13}$.

Решение.

$x(x-13) = -(2x+18)$, или $x^2 - 13x + 2x + 18 = 0$, или $x^2 - 11x + 18 = 0$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = 8$.

Значит, $x = 3$ — меньший корень уравнения.

Ответ: 3 .

Пример 26. $x = -\frac{8x+3}{x-4}$.

Решение.

$x(x-4) = -(8x+3)$, или $x^2 - 4x + 8x + 3 = 0$, $x^2 + 4x + 3 = 0$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = -3$ — меньший корень уравнения.

Ответ: -3 .

Пример 27. $x = \frac{8}{x+2}$.

Решение.

$x(x+2) = 8$, или $x^2 + 2x - 8 = 0$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -4$ — меньший корень уравнения.

Ответ: -4 .

Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите бо́льший из них.

Пример 28. $x = \frac{-3x+1}{x-3}$.

Решение.

$x(x-3) = -3x+1$, или $x^2 - 3x = -3x+1$, $x^2 = 1$,

откуда $x_{1,2} = \pm 1$, тогда $x = 1$ — бо́льший корень.

Ответ: 1 .

Пример 29. $x = -\frac{4x+14}{x+5}.$

Решение.

$$x(x+5) = -(4x+14), \text{ или } x^2 + 5x + 4x + 14 = 0,$$

$$x^2 + 9x + 14 = 0, \text{ откуда } x_1 = -2, x_2 = -7.$$

$x = -2$ — бо́льший корень уравнения.

Ответ: -2 .

Пример 30. $x = \frac{6+5x}{1+2x}.$

Решение.

$$x(1+2x) = 6+5x, \text{ или } x + 2x^2 - 5x - 6 = 0, \text{ или}$$

$$2x^2 - 4x - 6 = 0, x^2 - 2x - 3 = 0, x_1 = 3, x_2 = -1.$$

Значит, $x = 3$ — бо́льший корень.

Ответ: 3 .

Пример 31. $x = \frac{5x+16}{x+5}.$

Решение.

$$x(x+5) = 5x+16, \text{ или } x^2 + 5x = 5x + 16, \text{ или } x^2 = 16, \text{ откуда}$$

$$x_{1,2} = \pm 4. \text{ Тогда } x = 4 \text{ — бо́льший корень уравнения.}$$

Ответ: 4 .

Пример 32. $x = \frac{x-10}{x+8}.$

Решение.

$$x(x+8) = x-10, \text{ или } x^2 + 8x = x-10, \text{ или } x^2 + 8x - x + 10 = 0, \text{ или}$$

$$x^2 + 7x + 10 = 0, \text{ откуда } x_1 = -5, x_2 = -2 \text{ — бо́льший корень уравнения.}$$

Ответ: -2 .

Пример 33. $\frac{7}{x^2-18} = 1.$

Решение.

$$x^2 - 18 = 7, \text{ или } x^2 = 25, x_{1,2} = \pm 5.$$

$x = 5$ — бо́льший корень уравнения.

Ответ: 5 .

1.3. Квадратные уравнения

Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Пример 34. $x^2 - 6x + 5 = 0$.

Решение.

По теореме, обратной теореме Виета, имеем $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

$x = 1$ — меньший корень.

Ответ: 1.

Пример 35. $5x^2 + 6x - 11 = 0$.

Решение.

Так как $5 + 6 - 11 = 0$, то $x_1 = 1$, тогда $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{11}{5} = -2,2$.

Значит, $x = -2,2$ — меньший корень уравнения.

Ответ: $-2,2$.

Пример 36. $x^2 + 4x - 96 = 0$.

Решение.

По теореме, обратной теореме Виета, находим $x_1 = 8$, $x_2 = -12$ — меньший корень уравнения.

Ответ: -12 .

Пример 37. $6x^2 + 7x + 1 = 0$.

Решение.

Заметим, что $x_1 = -1$ — корень уравнения. Тогда $x_2 = -\frac{c}{a} = -\frac{1}{6}$.

Значит, $x = -1$ — меньший корень уравнения.

Ответ: -1 .

Пример 38. $6x^2 + x - 1 = 0$.

Решение.

$D = 1 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 25 = 5^2 > 0$, $x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{12}$,

откуда $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = -\frac{1}{2} = -0,5$ — меньший корень уравнения.

Ответ: $-0,5$.

Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

Пример 39. $x^2 + 14x + 48 = 0$.

Решение.

По теореме, обратной теореме Виета, имеем $x_1 = -6$, $x_2 = -8$.

Тогда $x = -6$ — больший корень уравнения.

Ответ: -6 .

Пример 40. $3x^2 + 32x + 80 = 0$.

Решение.

$$D/4 = 16^2 - 3 \cdot 80 = 16 = 4^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-16 \pm 4}{3}, \quad x_1 = -4, \quad x_2 = -\frac{20}{3}.$$

$x = -4$ — больший корень уравнения.

Ответ: -4 .

Пример 41. $14x^2 - 5x - 1 = 0$.

Решение.

$$D = 25 - 4 \cdot 14 \cdot (-1) = 25 + 56 = 81 = 9^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 9}{28}, \quad x_1 = -\frac{1}{7}, \quad x_2 = \frac{1}{2} = 0,5.$$

$x = 0,5$ — больший корень уравнения.

Ответ: $0,5$.

Пример 42. $x^2 + 3x - 54 = 0$.

Решение.

По теореме, обратной теореме Виета, имеем $x_1 = -9$, $x_2 = 6$ — больший корень уравнения.

Ответ: 6 .

Пример 43. $4x^2 - 36x + 77 = 0$.

Решение.

$$a = 4, \quad b = -36, \quad c = 77.$$

$$D/4 = 324 - 4 \cdot 77 = 324 - 308 = 16 = 4^2 > 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{18 \pm 4}{4}, \quad \text{откуда } x_1 = \frac{18-4}{4} = 3,5, \quad x_2 = \frac{18+4}{4} = \frac{11}{2} = 5,5 \text{ — боль-}$$

ший корень.

Ответ: $5,5$.

Пример 44. $3x^2 + 10x + 3 = 0$.

Решение.

Так как $a = c = 3$, $b = a^2 + 1$, то $x_1 = a$, $x_2 = \frac{1}{a}$.

Значит, $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$, где $x = 3$ — больший корень уравнения.

Ответ: 3.

1.4. Иррациональные уравнения

Найдите корень уравнения.

Пример 45. $\sqrt{16 + 3x} = 5$.

Решение.

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$16 + 3x = 25$, $3x = 25 - 16$, $3x = 9$, $x = 9 : 3 = 3$.

Ответ: 3.

Пример 46. $\sqrt{-2 - 9x} = 4$.

Решение.

$-2 - 9x = 16$, $9x = -2 - 16$, $9x = -18$, $x = -2$.

Ответ: $x = -2$.

Пример 47. $\sqrt{\frac{5}{11x + 26}} = \frac{1}{5}$.

Решение.

$\frac{5}{11x + 26} = \frac{1}{25}$, или $11x + 26 = 125$, $11x = 99$, $x = 9$.

Ответ: 9.

Пример 48. $\sqrt{79 - 6x} = 7$.

Решение.

$79 - 6x = 49$, $6x = 79 - 49$, $6x = 30$, $x = 5$.

Ответ: 5.

Пример 49. $\sqrt{\frac{4-11x}{5}} = \frac{1}{2}.$

Решение.

$$\frac{4-11x}{5} = \frac{1}{4}, \text{ или } 4(4-11x) = 5, 16-44x = 5, 44x = 16-5, 44x = 11,$$

$$\text{откуда } x = \frac{11}{44} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Пример 50. $\sqrt{7x-6} = x.$

Решение.

ОДЗ: $x \geq 0.$

Возведем обе части уравнения в квадрат: $7x-6 = x^2$, или $x^2 - 7x + 6 = 0$, откуда находим $x_1 = 1$, $x_2 = 6$. Оба корня удовлетворяют ОДЗ, значит, являются корнями исходного уравнения.

Тогда $x = 1$ — меньший корень уравнения.

Ответ: 1.

Пример 51. $\sqrt{42-x} = -x.$

Решение.

ОДЗ: $x \leq 0.$

$42-x = (-x)^2$, или $x^2 + x - 42 = 0$, откуда $x_1 = -7$, $x_2 = 6$. Корень $x = 6$ не удовлетворяет ОДЗ.

Значит, $x = -7$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: -7.

Пример 52. $\sqrt{x+1} = 11-x.$

Решение.

ОДЗ: $x \leq 11.$

$x+1 = (11-x)^2$, или $x+1 = 121-22x+x^2$, или $x^2-23x+120 = 0$, откуда находим $x_1 = 15$, $x_2 = 8$. Так как $x \leq 11$, то корень $x = 15$ не удовлетворяет ОДЗ.

Значит, $x = 8$ — единственный корень данного уравнения.

Ответ: 8.

Пример 53. $4\sqrt{x+6} = x+1$.

Решение.

ОДЗ: $x \geq -1$.

$16(x+6) = (x+1)^2$, или $16x+96 = x^2+2x+1$, или $x^2-14x-95=0$, откуда находим $x_1 = -19$, $x_2 = 5$. Так как по ОДЗ $x \geq -1$, то $x = 5$ — единственный корень уравнения.

Ответ: 5.

Пример 54. $\sqrt{\frac{6-2x}{5+x}} = \sqrt{2}$.

Решение.

Возведем обе части уравнения в квадрат: $\frac{6-2x}{5+x} = 2$, или

$6-2x = 2(5+x)$, $6-2x = 10+2x$, $6-10 = 2x+2x$, $4x = -4$, $x = -1$.

Ответ: -1.

Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

Пример 55. $\sqrt{x} = x-2$.

Решение.

ОДЗ: $x-2 \geq 0$, т. е. $x \geq 2$.

$x = (x-2)^2$, или $x^2-4x+4 = x$, или $x^2-5x+4 = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Так как $x \geq 2$, то корень $x = 1$ не удовлетворяет ОДЗ.

Значит, $x = 4$ — единственный корень исходного уравнения.

Ответ: 4.

Пример 56. $\sqrt{6x+7} = 4x-7$.

Решение.

ОДЗ: $4x-7 \geq 0$, т. е. $x \geq \frac{7}{4}$.

$6x+7 = (4x-7)^2$, или $6x+7 = 16x^2-56x+49$, или

$16x^2-62x+42 = 0$, или $8x^2-31x+21 = 0$,

$D = 961 - 4 \cdot 8 \cdot 21 = 961 - 672 = 289 = 17^2 > 0$,

$x_{1,2} = \frac{31 \pm 17}{16}$, откуда $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{14}{16} = \frac{7}{8}$.

ОДЗ удовлетворяет корень $x = 3$.

Ответ: 3.

Пример 57. $\sqrt{16x+32} = 12 - 2x$.

Решение.

ОДЗ: $12 - 2x \geq 0$, $x \leq 6$.

$\sqrt{16(x+2)} = 2(6-x)$, или $2\sqrt{x+2} = 6-x$, или $4(x+2) = (6-x)^2$, или $4x+8 = 36-12x+x^2$, или $x^2-16x+28=0$, откуда $x_1=2$, $x_2=14$.

Корень $x=14$ не удовлетворяет ОДЗ.

Ответ: 2.

Пример 58. $\sqrt{20-x^2} = 2x$.

Решение.

ОДЗ: $x \geq 0$.

$20-x^2 = 4x^2$, или $5x^2 = 20$, $x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$.

Так как $x \geq 0$, то $x=2$ — корень уравнения.

Ответ: 2.

Пример 59. $\sqrt{3x^2+4} = 2x$.

Решение.

ОДЗ: $x \geq 0$.

$3x^2+4 = 4x^2$, или $x^2 = 4$, $x_{1,2} = \pm 2$.

Так как $x \geq 0$, то $x=2$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 2.

1.5. Показательные уравнения

Найдите корень уравнения.

Пример 60. $4^{-9+x} = 16$.

Решение.

Так как $16 = 4^2$, то получим $4^{-9+x} = 4^2$, или $-9+x=2$, откуда $x=11$.

Ответ: 11.

Пример 61. $3^{7-x} = 27$.

Решение.

$3^{7-x} = 3^3$, или $7-x=3$, откуда $x=4$.

Ответ: 4.

Пример 62. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+5} = 16.$

Решение.

Так как $\frac{1}{4} = 4^{-1}$ и $16 = 4^2$, то получим $(4^{-1})^{x+5} = 4^2$, или $-(x + 5) = 2$,
 $x + 5 = -2$, $x = -7$.

Ответ: -7 .

Пример 63. $\left(\frac{1}{16}\right)^{3-x} = 256^{-x}.$

Решение.

$$\frac{1}{16} = 16^{-1}, \quad 256 = 16^2.$$

Получим уравнение $(16^{-1})^{3-x} = (16^2)^{-x}$, или $-(3 - x) = -2x$,
 $3 - x = 2x$, $3x = 3$, $x = 1$.

Ответ: 1 .

Пример 64. $2^{4-x} = 0,4 \cdot 5^{4-x}.$

Решение.

Разделим обе части уравнения на $5^{4-x} \neq 0$.

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{4-x} = \frac{4}{10}, \text{ или } \left(\frac{2}{5}\right)^{4-x} = \frac{2}{5}, \text{ т. е. } 4 - x = 1, x = 3.$$

Ответ: 3 .

Пример 65. $9^{3-x} = \sqrt{3}.$

Решение.

Так как $9 = 3^2$ и $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$, то получим уравнение $(3^2)^{3-x} = 3^{\frac{1}{2}}$, или
 $2(3-x) = \frac{1}{2}$, $3-x = \frac{1}{4}$, $x = 3 - \frac{1}{4} = 2,75$.

Ответ: $2,75$.

Пример 66. $\left(\frac{1}{12}\right)^{x-18} = 144^x.$

Решение.

$$\frac{1}{12} = 12^{-1}, \quad 144 = 12^2.$$

Уравнение запишется в виде $(12^{-1})^{x-18} = 12^{2x}$, или $-x + 18 = 2x$,
 $3x = 18$, $x = 6$.

Ответ: 6.

Пример 67. $\left(\frac{1}{19}\right)^{4-3x} = 361^{-x}$.

Решение.

Так как $\frac{1}{19} = 19^{-1}$ и $361 = 19^2$, то получим $(19^{-1})^{4-3x} = (19^2)^{-x}$, или

$$-(4 - 3x) = -2x, \text{ или } 4 - 3x = 2x, 4 = 5x, \text{ откуда } x = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Ответ: 0,8.

Пример 68. $6^{2x-5} = 36\sqrt{6}$.

Решение.

$36 = 6^2$, $\sqrt{6} = 6^{\frac{1}{2}}$, тогда получим $6^{2x-5} = 6^2 \cdot 6^{\frac{1}{2}}$, или

$$2x - 5 = 2 + \frac{1}{2}, 2x = 7\frac{1}{2}, \text{ или } 2x = \frac{15}{2}, \text{ откуда } x = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} = 3,75.$$

Ответ: 3,75.

Пример 69. $0,2^{7-x} = \sqrt{125}$.

Решение.

Так как $0,2 = \frac{1}{5} = 5^{-1}$ и $\sqrt{125} = \sqrt{5^3} = 5^{\frac{3}{2}} = 5^{1,5}$, то получим $(5^{-1})^{7-x} = 5^{1,5}$,

или $x - 7 = 1,5$, откуда $x = 1,5 + 7 = 8,5$.

Ответ: 8,5.

Пример 70. $3^{4+x} = 0,6 \cdot 5^{4+x}$.

Решение.

Так как $5^{4+x} > 0$, то, разделив обе части уравнения на $5^{4+x} \neq 0$,

получим $\frac{3^{4+x}}{5^{4+x}} = 0,6 = \frac{3}{5}$, или $\left(\frac{3}{5}\right)^{4+x} = \left(\frac{3}{5}\right)^1$, откуда $4 + x = 1$, $x = -3$.

Ответ: -3.

1.6. Логарифмические уравнения

Найдите корень уравнения.

Пример 71. $\log_3 (4 + x) = 1$.

Решение.

По определению логарифма получим $4 + x = 3^1$, $x = 3 - 4 = -1$.

Ответ: -1 .

Пример 72. $\log_4 (-2 + x) = 0$.

Решение.

$-2 + x = 4^0 = 1$, $x = 1 + 2 = 3$.

Ответ: 3 .

Пример 73. $\log_{\frac{1}{3}} (6 - x) = -1$.

Решение.

$6 - x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, $6 - x = 3$, откуда $x = 6 - 3 = 3$.

Ответ: 3 .

Пример 74. $\log_6 (5 - x) = 4 \log_6 2$.

Решение.

Так как $4 \log_6 2 = \log_6 2^4 = \log_6 16$, то получим $\log_6 (5 - x) = \log_6 16$, откуда $5 - x = 16$, $x = 5 - 16 = -11$.

Ответ: -11 .

Пример 75. $\log_{\frac{1}{3}} (2 - x) = -3$.

Решение.

$2 - x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$, или $2 - x = 27$, откуда $x = 2 - 27 = -25$.

Ответ: -25 .

Пример 76. $\log_2 (3 - x) = 4$.

Решение.

$3 - x = 2^4 = 16$, откуда $x = 3 - 16 = -13$.

Ответ: -13 .

Пример 77. $\log_{\frac{1}{4}}(1-x) = -2$.

Решение.

$$1-x = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}, \text{ или } 1-x = 4^2 = 16, \text{ откуда } x = -15.$$

Ответ: -15 .

Пример 78. $\log_5(x+4) = \log_5(3x-10)$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x+4 > 0, \\ 3x-10 > 0; \end{cases} \begin{cases} x > -4, \\ x > \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow x > \frac{10}{3}.$$

Имеем $x+4 = 3x-10$, или $3x-x = 4+10$, $2x = 14$, $x = 7$.

Ответ: 7 .

Пример 79. $\log_{x-3} 25 = 2$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-3 > 0, \\ x-3 \neq 1; \end{cases} \begin{cases} x > 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

По определению логарифма получим $(x-3)^2 = 25$, или $x-3 = \pm 5$.

Так как $x > 3$ (по ОДЗ), то $x-3 = 5$. $x = 8$ — корень уравнения.

Ответ: 8 .

Пример 80. $\log_7(x^2+3x) = \log_7(x^2+9)$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2+9 > 0, \\ x^2+3x > 0, \end{cases} \text{ откуда } x^2+3x > 0, \text{ так как } x^2+9 > 0 \text{ при всех}$$

$x \in \mathbb{R}$.

Получим уравнение $x^2+3x = x^2+9$, или $3x = 9$, откуда $x = 3$ — корень уравнения.

Ответ: 3 .

1.7. Тригонометрические уравнения

Найдите корень уравнения. В ответе запишите наименьший положительный корень.

Пример 81. $\cos \frac{\pi(x+1)}{3} = \frac{1}{2}.$

Решение.

$$\frac{\pi(x+1)}{3} = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\pi(x+1)}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, x+1 = \pm 1 + 6n, \text{ откуда } x_1 = 6n, n \in \mathbb{Z},$$

$$x_2 = 6n - 2, n \in \mathbb{Z}.$$

При $n = 1, x = 4$ — наименьший положительный корень уравнения.

Ответ: 4.

Пример 82. $\cos \frac{\pi(4x-5)}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Решение.

$$\frac{\pi(4x-5)}{4} = \pm \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\pi(4x-5)}{4} = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) + 2\pi n, \frac{\pi(4x-5)}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$4x - 5 = \pm 3 + 8n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$1) 4x - 5 = 3 + 8n; \quad 2) 4x - 5 = -3 + 8n;$$

$$4x = 8 + 8n;$$

$$4x = 2 + 8n;$$

$$x = 2 + 2n.$$

$$x = 0,5 + 2n.$$

$$\text{При } n = 0, x = 2.$$

$$\text{При } n = 0, x = 0,5.$$

Значит, $x = 0,5$ — наименьший положительный корень уравнения.

Ответ: 0,5.

Пример 83. $\cos \frac{\pi(2x+9)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Решение.

$$\frac{\pi(2x+9)}{6} = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\pi(2x+9)}{6} = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \text{ или } 2x+9 = \pm 1 + 12n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{array}{ll} 1) 2x+9 = 1 + 12n; & 2) 2x+9 = -1 + 12n; \\ 2x = 12n - 8; & 2x = 12n - 10; \\ x_1 = 6n - 4. & x_2 = 6n - 5, n \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

При $n = 1$ получим $x_1 = 2, x_2 = 1$.

Ответ: 1.

Пример 84. $\cos \frac{\pi(x-2)}{3} = -\frac{1}{2}.$

Решение.

$$\frac{\pi(x-2)}{3} = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) + 2\pi n, \quad \frac{\pi(x-2)}{3} = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad x-2 = \pm 2 + 6n,$$

$n \in \mathbb{Z}.$

$$\begin{array}{ll} 1) x-2 = 2 + 6n, & 2) x-2 = -2 + 6n, \\ x = 4 + 6n. & x = 6n. \end{array}$$

При $n = 0, x_1 = 4$; при $n = 1, x_2 = 6$.

Значит, $x = 4$ — наименьший положительный корень.

Ответ: 4.

Найдите корень уравнения. В ответе запишите наибольший отрицательный корень уравнения.

Пример 85. $\cos \frac{\pi(2x+8)}{3} = -1.$

Решение.

$$\frac{\pi(2x+8)}{3} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2x+8 = 3 + 6n, 2x = 6n - 5, \text{ откуда } x = 3n - 2,5, n \in \mathbb{Z}.$$

При $n = 0, x = -2,5$ — наибольший отрицательный корень уравнения.

Ответ: $-2,5$.

Пример 86. $\sin \frac{\pi(x-1)}{6} = \frac{1}{2}.$

Решение.

$$\frac{\pi(x-1)}{6} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$x-1 = (-1)^n + 6n, n \in \mathbb{Z}.$$

1) $n = 2k$ — четное, тогда $x - 1 = 1 + 6n$, $x = 2 + 6n$, откуда $x = -4$ при $n = -1$;

2) $n = 2k + 1$ — нечетное, тогда $x - 1 = -1 + 6(2k + 1)$, или $x = 6 + 12k$, $k \in \mathbb{Z}$. При $k = -1$, $x = -6$.

Значит, $x = -4$ — наибольший отрицательный корень.

Ответ: -4 .

Пример 87. $\sin \frac{\pi(2x-5)}{4} = -1$.

Решение.

$$\frac{\pi(2x-5)}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$2x - 5 = -2 + 8n$, $2x = 3 + 8n$, откуда $x = 1,5 + 4n$, $n \in \mathbb{Z}$.

При $n = -1$, $x = -2,5$ — наибольший отрицательный корень.

Ответ: $-2,5$.

Пример 88. $\operatorname{tg} \frac{\pi(x-2)}{4} = -1$.

Решение.

$$\frac{\pi(x-2)}{4} = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$x - 2 = -1 + 4n$, $x = 1 + 4n$, $n \in \mathbb{Z}$.

При $n = -1$, $x = -3$ — наибольший отрицательный корень.

Ответ: -3 .

Пример 89. $\cos \frac{\pi(2x-5)}{3} = \frac{1}{2}$.

Решение.

$$\frac{\pi(2x-5)}{3} = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\pi(2x-5)}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, 2x - 5 = \pm 1 + 6n, n \in \mathbb{Z}.$$

1) $2x - 5 = 1 + 6n$,

$x = 3 + 3n$.

2) $2x - 5 = -1 + 6n$,

$x = 2 + 3n$.

При $n = -2$, $x = -3$.

При $n = -1$, $x = -1$.

Значит, $x = -1$ — наибольший отрицательный корень уравнения.

Ответ: -1 .

Пример 90. $\cos \frac{\pi(4x-7)}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Решение.

$$\frac{\pi(4x-7)}{6} = \pm \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\frac{\pi(4x-7)}{6} = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, 4x - 7 = \pm 5 + 12n.$$

1) $4x - 7 = 5 + 12n, n \in \mathbb{Z}.$

$$4x = 12 + 12n;$$

$$x = 3 + 3n, n \in \mathbb{Z}.$$

2) $4x - 7 = -5 + 12n,$

$$4x = 2 + 12n;$$

$$x = 0,5 + 3n, n \in \mathbb{Z}.$$

При $n = -2, x = -3.$

При $n = -1, x = -2,5.$

Значит, $x = -2,5$ — наибольший отрицательный корень уравнения.

Ответ: $-2,5.$

Пример 91. $\operatorname{tg} \frac{\pi(2x-5)}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$

Решение.

$$\frac{\pi(2x-5)}{6} = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2x - 5 = 1 + 6n, 2x = 6 + 6n, x = 3 + 3n, n \in \mathbb{Z}.$$

При $n = -2, x = -3$ — наибольший отрицательный корень.

Ответ: $-3.$

Пример 92. $\cos^2 \frac{\pi(2x-7)}{6} = 1.$

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$1 - \cos^2 \frac{\pi(2x-7)}{6} = 0, \text{ или } \sin^2 \frac{\pi(2x-7)}{6} = 0, \sin \frac{\pi(2x-7)}{6} = 0,$$

$$\frac{\pi(2x-7)}{6} = \pi n, 2x - 7 = 6n, 2x = 7 + 6n, \text{ откуда } x = 3,5 + 3n, n \in \mathbb{Z}.$$

При $n = -2, x = -2,5$ — наибольший отрицательный корень уравнения.

Ответ: $-2,5.$

Пример 93. $\sin^2 \frac{\pi(2x-7)}{6} = 1.$

Решение.

$$1 - \sin^2 \frac{\pi(2x-7)}{6} = 0, \text{ или } \cos^2 \frac{\pi(2x-7)}{6} = 0, \cos \frac{\pi(2x-7)}{6} = 0,$$

$$\frac{\pi(2x-7)}{6} = \frac{\pi}{2} + \pi n, 2x - 7 = 3 + 6n, 2x = 10 + 6n, n \in \mathbb{Z}, \text{ откуда}$$

$$x = 5 + 3n, n \in \mathbb{Z}.$$

При $n = -2$, $x = -1$ — наибольший отрицательный корень.

Ответ: -1 .

Пример 94. $\cos^2 \frac{\pi(x+1)}{3} = \frac{1}{2}.$

Решение.

Известно, что $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$, тогда получим уравнение

$$\frac{1 + \cos \frac{2\pi(x+1)}{3}}{2} = \frac{1}{2}, \text{ или } \cos \frac{2\pi(x+1)}{3} = 0, \frac{2\pi(x+1)}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4(x+1) = 3 + 6n, \text{ откуда } x = \frac{6n-1}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

При $n = 0$, $x = -0,25$ — наибольший отрицательный корень уравнения.

Ответ: $-0,25$.

Пример 95. $\sin^2 \frac{\pi(x-4)}{3} = \frac{1}{2}.$

Решение.

Известно, что $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, тогда получим уравнение

$$\frac{1 - \cos \frac{2\pi(x-4)}{3}}{2} = \frac{1}{2}, \text{ или } \cos \frac{2\pi(x-4)}{3} = 0, \frac{2\pi(x-4)}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4(x-4) = 3 + 6n, 4x = 19 + 6n, x = \frac{19+6n}{4}, n \in \mathbb{Z}.$$

При $n = -4$ получим $x = \frac{19-24}{4} = -\frac{5}{4} = -1,25$ — наибольший отри-

цательный корень уравнения.

Ответ: $-1,25$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите корень уравнения.

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\frac{3}{5}x = 13\frac{1}{5}.$ | 2. $\frac{6}{7}x = -12\frac{6}{7}.$ | 3. $-\frac{2}{5}x = 11\frac{3}{5}.$ |
| 4. $-\frac{1}{3}x = -13\frac{2}{3}.$ | 5. $3\frac{1}{3}x = -5.$ | 6. $3\frac{3}{4}x = 11\frac{1}{4}.$ |
| 7. $10\frac{2}{9}x = -5\frac{1}{9}.$ | 8. $-1\frac{4}{5}x = -3\frac{3}{5}.$ | 9. $\frac{3}{7}x = -12\frac{6}{7}.$ |
| 10. $-\frac{3}{5}x = 21\frac{3}{5}.$ | 11. $\frac{3}{16}x = -7\frac{7}{8}.$ | 12. $-\frac{5}{14}x = 7\frac{6}{7}.$ |
| 13. $\frac{2}{9}x = -12\frac{2}{3}.$ | 14. $\frac{5}{9}x = 21\frac{2}{3}.$ | 15. $1\frac{3}{10}x = -15\frac{3}{5}.$ |
| 16. $-4\frac{4}{9}x = -16\frac{2}{3}.$ | 17. $11\frac{1}{4}x = -13\frac{1}{2}.$ | 18. $-3\frac{5}{8}x = 14\frac{1}{2}.$ |
| 19. $2\frac{5}{6}x = 11\frac{1}{3}.$ | 20. $1\frac{2}{11}x = -1\frac{21}{44}.$ | |

Найдите корень уравнения.

- | | | |
|---|--|---------------------------------------|
| 21. $\frac{x-4}{x-16} = -3.$ | 22. $\frac{x-30}{x+5} = -4.$ | 23. $\frac{x+11}{x-7} = 7.$ |
| 24. $\frac{x+44}{x+4} = 6.$ | 25. $\frac{2x+9}{x-3} = 4.$ | 26. $\frac{3x-16}{x+2} = -2.$ |
| 27. $\frac{3x-21}{x+9} = -5.$ | 28. $\frac{2x-37}{x-8} = 9.$ | 29. $\frac{32-4x}{x+1} = 2.$ |
| 30. $\frac{11-5x}{x-1} = -2.$ | 31. $\frac{x+1}{x-1} = 1\frac{1}{2}.$ | 32. $\frac{x+5}{x-2} = 3\frac{1}{3}.$ |
| 33. $\frac{x-10}{x+1} = -2\frac{2}{3}.$ | 34. $\frac{x-8}{x+2} = -2\frac{1}{3}.$ | 35. $\frac{x+3}{x-3} = 2,5.$ |
| 36. $\frac{x-3}{x+3} = 3,5.$ | 37. $\frac{1-2x}{1-x} = 1,2.$ | 38. $\frac{1+2x}{1+x} = 1,2.$ |
| 39. $\frac{2-3x}{2-x} = 2,6.$ | 40. $\frac{2+3x}{2-x} = -2,6.$ | |

Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

41. $x = \frac{6}{x+1}.$

42. $x = \frac{6}{x-1}.$

43. $x = \frac{8}{x+2}.$

44. $x = \frac{8}{x-2}.$

45. $x = \frac{-5x+1}{x-5}.$

46. $x = \frac{-7x+1}{x-7}.$

47. $x = \frac{-3x+4}{x-3}.$

48. $x = \frac{-4x+9}{x-4}.$

49. $x = \frac{-2x+18}{x-13}.$

50. $x = \frac{6x-15}{x-2}.$

51. $x = \frac{4x+40}{x+7}.$

52. $x = \frac{2x+20}{x+3}.$

53. $x = \frac{-6x+12}{x-10}.$

54. $x = \frac{-8x+2}{x-9}.$

55. $x = \frac{5x+4}{x+2}.$

56. $x = \frac{4x+18}{x-3}.$

57. $x = \frac{-8x+35}{x+4}.$

58. $x = \frac{-8x+3}{x-4}.$

59. $x = \frac{2x-8}{x+8}.$

60. $x = \frac{2x-9}{x-8}.$

Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший из них.

61. $x = \frac{12}{x+1}.$

62. $x = \frac{12}{x-1}.$

63. $x = \frac{-2x+1}{x-2}.$

64. $x = \frac{-3x+1}{x-3}.$

65. $x = \frac{-9x+4}{x-9}.$

66. $x = \frac{-7x+4}{x-7}.$

67. $x = \frac{-x+9}{x-1}.$

68. $x = \frac{-4x+9}{x-4}.$

69. $x = \frac{x+16}{x+1}.$

70. $x = \frac{5x+16}{x+5}.$

71. $x = \frac{3x-64}{x-17}.$

72. $x = \frac{3x+51}{x+17}.$

73. $x = \frac{x+28}{x-13}.$

74. $x = \frac{x+45}{x+13}.$

75. $x = \frac{4x+14}{x+5}.$

76. $x = \frac{4x-14}{x-5}.$

77. $x = \frac{x+35}{x+3}.$

78. $x = \frac{x+32}{x-3}.$

79. $x = \frac{x-10}{x+8}.$

80. $x = \frac{x+10}{x-8}.$

Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

81. $x^2 - 4x + 3 = 0$.

82. $x^2 - 5x + 6 = 0$.

83. $x^2 + 2x - 3 = 0$.

84. $x^2 - 2x - 3 = 0$.

85. $x^2 + 2x - 24 = 0$.

86. $x^2 - 6x + 5 = 0$.

87. $x^2 + 8x - 9 = 0$.

88. $x^2 - 14x + 33 = 0$.

89. $x^2 + 4x - 96 = 0$.

90. $x^2 - 4x - 45 = 0$.

91. $2x^2 - x - 1 = 0$.

92. $4x^2 + 7x - 2 = 0$.

93. $5x^2 + 6x - 11 = 0$.

94. $5x^2 - 4x - 1 = 0$.

95. $4x^2 - 8x + 3 = 0$.

96. $6x^2 + x - 1 = 0$.

97. $2x^2 - 5x + 2 = 0$.

98. $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

99. $2x^2 - 7x + 6 = 0$.

100. $4x^2 + x - 18 = 0$.

Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

101. $x^2 - 4x - 12 = 0$.

102. $x^2 - 7x - 8 = 0$.

103. $x^2 - 9x + 14 = 0$.

104. $x^2 - 9x + 18 = 0$.

105. $x^2 + 5x - 14 = 0$.

106. $x^2 + 3x - 18 = 0$.

107. $x^2 + 13x + 40 = 0$.

108. $x^2 + 10x + 24 = 0$.

109. $x^2 - 6x - 55 = 0$.

110. $x^2 + 3x - 54 = 0$.

111. $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

112. $4x^2 - 11x + 6 = 0$.

113. $4x^2 + 4x - 3 = 0$.

114. $5x^2 - 26x + 5 = 0$.

115. $3x^2 + 2x - 16 = 0$.

116. $4x^2 - 36x + 77 = 0$.

117. $3x^2 + 32x + 80 = 0$.

118. $15x^2 + 22x - 37 = 0$.

119. $14x^2 - 5x - 1 = 0$.

120. $4x^2 + x - 33 = 0$.

Найдите корень уравнения.

121. $\sqrt{82-x} = 9$.

122. $\sqrt{-7+7x} = 7$.

123. $\sqrt{10+3x} = 4$.

124. $\sqrt{13-2x} = 3$.

125. $\sqrt{69-4x} = 7$.

126. $\sqrt{41-4x} = 5$.

127. $\sqrt{7x+9} = 10$.

128. $\sqrt{7x-10} = 9$.

129. $\sqrt{-2-6x} = 8$.

130. $\sqrt{6x-2} = 8$.

131. $\sqrt{\frac{3}{5x+13}} = \frac{1}{4}$.

132. $\sqrt{\frac{5}{11x+26}} = \frac{1}{5}$.

133. $\frac{1}{\sqrt{5x-1}} = \frac{1}{8}$.

134. $\frac{1}{\sqrt{5x+4}} = \frac{1}{7}$.

135. $\frac{3}{\sqrt{-3-7x}} = \frac{1}{3}$.

136. $\frac{6}{\sqrt{-3+7x}} = \frac{2}{3}.$

137. $\sqrt{\frac{5x-12}{3}} = 11.$

138. $\sqrt{\frac{5x+12}{3}} = 5.$

139. $\sqrt{\frac{4-11x}{5}} = \frac{1}{2}.$

140. $\sqrt{\frac{21x-4}{5}} = \frac{1}{2}.$

Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

141. $\sqrt{-36+15x} = x.$

142. $\sqrt{-45+14x} = x.$

143. $\sqrt{72+6x} = x.$

144. $\sqrt{-6+7x} = x.$

145. $\sqrt{24+5x} = -x.$

146. $\sqrt{40+3x} = -x.$

147. $\sqrt{72+x} = -x.$

148. $\sqrt{42-x} = -x.$

149. $\sqrt{x+1} = x-1.$

150. $\sqrt{x+1} = 11-x.$

151. $\sqrt{4-x} = x+2.$

152. $\sqrt{7-x} = x-1.$

153. $x-5 = \sqrt{x+1}.$

154. $\sqrt{x-2} = x-4.$

155. $\sqrt{1+5x} = 1-x.$

156. $\sqrt{2x-7} = x-21.$

157. $2\sqrt{x+5} = x+2.$

158. $4\sqrt{x+6} = x+1.$

159. $\sqrt{\frac{2+x}{2x+1}} = \sqrt{3}.$

160. $\sqrt{\frac{6-2x}{5+x}} = \sqrt{2}.$

Найдите корень уравнения. Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

161. $\sqrt{x+2} = -x.$

162. $\sqrt{12-x} = -x.$

163. $\sqrt{x} = x-2.$

164. $\sqrt{x} = x-6.$

165. $\sqrt{2-x} = -x.$

166. $\sqrt{2-x} = x.$

167. $\sqrt{x-1} = x-3.$

168. $\sqrt{7-x} = 2x+1.$

169. $\sqrt{6x+7} = 4x-7.$

170. $\sqrt{10x+11} = 2x-5.$

171. $\sqrt{x+5} = x-1.$

172. $\sqrt{2x-3} = 3-x.$

173. $\sqrt{4x+53} = 2x-5.$

174. $\sqrt{16x+32} = 12-2x.$

175. $\sqrt{6+x} = 3-2x.$

176. $\sqrt{2x-1} = x-2.$

177. $\sqrt{20-x^2} = 2x.$

178. $\sqrt{90-x^2} = 3x.$

179. $\sqrt{2x^2-1} = x.$

180. $\sqrt{3x^2+4} = 2x.$

Найдите корень уравнения.

181. $5^{3-x} = 25.$

182. $4^{-9+x} = 16.$

183. $4^{-4+x} = 64.$

184. $8^{-5-x} = 64.$

185. $3^{7-x} = 27.$

186. $2^{6-x} = 16.$

187. $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2-x} = 36.$

188. $\left(\frac{1}{7}\right)^{-2+x} = 49.$

189. $\left(\frac{1}{8}\right)^{4-x} = 64.$

190. $\left(\frac{1}{5}\right)^{4+x} = 125.$

191. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2} = 3^x.$

192. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+5} = 16.$

193. $\left(\frac{1}{10}\right)^{x+9} = 100^x.$

194. $\left(\frac{1}{12}\right)^{x-18} = 144^x.$

195. $\left(\frac{1}{14}\right)^{2x-1} = 196^x.$

196. $\left(\frac{1}{15}\right)^{-4-x} = 225^x.$

197. $\left(\frac{1}{16}\right)^{3-x} = 256^{-x}.$

198. $\left(\frac{1}{17}\right)^{5+x} = 289^{-x}.$

199. $\left(\frac{1}{18}\right)^{6-2x} = 324^{-x}.$

200. $\left(\frac{1}{19}\right)^{4-3x} = 361^{-x}.$

Найдите корень уравнения.

201. $\log_2(6+x) = 1.$

202. $\log_3(4+x) = 1.$

203. $\log_4(1-x) = 2.$

204. $\log_5(2-x) = 2.$

205. $\log_3(5-x) = 3.$

206. $\log_4(1+x) = 0.$

207. $\log_5(-1+x) = 2.$

208. $\log_7(-3+x) = 1.$

209. $\log_3(-5-x) = 3.$

210. $\log_8(-6-x) = 2.$

211. $\log_7(x+3) = \log_7(3x-15).$

212. $\log_6(x+4) = \log_6(5x-16).$

213. $\log_{\frac{1}{2}}(5-x) = -2.$

214. $\log_{\frac{1}{3}}(2-x) = -3.$

215. $\log_{\frac{1}{4}}(4-x) = -1.$

216. $\log_{\frac{1}{3}}(10-x) = -2.$

217. $\log_2(7-x) = 4 \log_2 3.$

218. $\log_2(2-x) = 3 \log_2 5.$

219. $\log_6(x+3) = \log_6(3x-15).$

220. $\log_7(x+7) = \log_7(2x-13).$

Найдите корень уравнения. В ответе запишите наименьший положительный корень.

221. $\cos \frac{\pi(2x-3)}{3} = \frac{1}{2}.$

222. $\cos \frac{\pi(x-5)}{3} = \frac{1}{2}.$

223. $\cos \frac{\pi(x-4)}{3} = \frac{1}{2}.$

224. $\cos \frac{\pi(x+1)}{3} = \frac{1}{2}.$

225. $\cos \frac{\pi(2x-1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

226. $\cos \frac{\pi(2x-3)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$$227. \cos \frac{\pi(2x-5)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$228. \cos \frac{\pi(4x+1)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$229. \cos \frac{\pi(2x+9)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$230. \cos \frac{\pi(4x-6)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$231. \cos \frac{\pi(2x-4)}{3} = -\frac{1}{2}.$$

$$232. \cos \frac{\pi(x-4)}{3} = -\frac{1}{2}.$$

$$233. \cos \frac{\pi(x+1)}{3} = -\frac{1}{2}.$$

$$234. \cos \frac{\pi(x-2)}{3} = -\frac{1}{2}.$$

$$235. \cos \frac{\pi(2x+7)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$236. \cos \frac{\pi(4x+3)}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$237. \cos \frac{\pi(4x-7)}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$238. \cos \frac{\pi(4x-5)}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$239. \cos \frac{\pi(2x+8)}{3} = 1.$$

$$240. \cos \frac{\pi(2x-5)}{5} = -1.$$

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

.....

Задания этого параграфа подразделяются на несколько видов:

- 1) преобразования числовых рациональных выражений;
- 2) преобразования алгебраических выражений и дробей;
- 3) преобразования числовых буквенных иррациональных выражений;
- 4) действия со степенями;
- 5) преобразования логарифмических выражений;
- 6) преобразования числовых буквенных тригонометрических выражений.

2.1. Преобразования числовых рациональных выражений

Пример 1. $\left(5\frac{2}{3} + \frac{3}{8}\right) \cdot 120.$

Решение.

І способ

$$1) 5\frac{2}{3} + \frac{3}{8} = 5\frac{2 \cdot 8 + 3 \cdot 3}{24} = 5\frac{16 + 9}{24} = 5\frac{25}{24} = 6\frac{1}{24}.$$

$$2) 6\frac{1}{24} \cdot 120 = \left(6 + \frac{1}{24}\right) \cdot 120 = 6 \cdot 120 + \frac{1}{24} \cdot 120 = 720 + 5 = 725.$$

Ответ: 725.

ІІ способ

$$\begin{aligned} \left(5\frac{2}{3} + \frac{3}{8}\right) \cdot 120 &= 5\frac{2}{3} \cdot 120 + \frac{3}{8} \cdot 120 = \frac{17}{3} \cdot 120 + 3 \cdot 15 = 17 \cdot 40 + 45 = \\ &= 680 + 45 = 725. \end{aligned}$$

Ответ: 725.

Пример 2. $\left(3\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right) \cdot 200.$

Решение.

$$\left(3\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right) \cdot 200 = \frac{7}{2} \cdot 200 - \frac{5}{8} \cdot 200 = 7 \cdot 100 - 5 \cdot 25 = 700 - 125 = 575.$$

Ответ: 575.

Пример 3. $\left(7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3}\right) \cdot 1,2.$

Решение.

І способ

$$1) 7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3} = 9\frac{3+2}{6} = 9\frac{5}{6}.$$

$$2) 9\frac{5}{6} \cdot 1,2 = \left(9 + \frac{5}{6}\right) \cdot 1,2 = 9 \cdot 1,2 + \frac{5}{6} \cdot 1,2 = 10,8 + 5 \cdot 0,2 = 10,8 + 1 = 11,8.$$

Ответ: 11,8.

ІІ способ

$$\left(7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3}\right) \cdot 1,2 = \frac{15}{2} \cdot 1,2 + \frac{7}{3} \cdot 1,2 = 15 \cdot 0,6 + 7 \cdot 0,4 = 9 + 2,8 = 11,8.$$

Ответ: 11,8.

Пример 4. $\left(2\frac{5}{7} - 3\frac{3}{5}\right) \cdot 21.$

Решение.

І способ

$$\begin{aligned} \left(2\frac{5}{7} - 3\frac{3}{5}\right) \cdot 21 &= \left(\frac{19}{7} - \frac{18}{5}\right) \cdot 21 = \frac{19}{7} \cdot 21 - \frac{18}{5} \cdot 21 = 19 \cdot 3 - \frac{36}{10} \cdot 21 = \\ &= 57 - 3,6 \cdot 21 = 57 - 75,6 = -18,6. \end{aligned}$$

Ответ: -18,6.

ІІ способ

$$\begin{aligned} 1) 2\frac{5}{7} - 3\frac{3}{5} &= \left(2 + \frac{5}{7}\right) - \left(3 + \frac{3}{5}\right) = 2 - 3 + \frac{5}{7} - \frac{3}{5} = -1 + \frac{25-21}{35} = \\ &= \frac{4}{35} - \frac{35}{35} = -\frac{31}{35}. \end{aligned}$$

$$2) -\frac{31}{35} \cdot 21 = -\frac{31 \cdot 3}{5} = -\frac{93}{5} = -\frac{186}{10} = -18,6.$$

Ответ: -18,6.

Пример 5. $\left(2\frac{5}{6} - 3\frac{1}{5}\right) : \frac{5}{96}.$

Решение.

$$1) 2\frac{5}{6} - 3\frac{1}{5} = \frac{17}{6} - \frac{16}{5} = \frac{85 - 96}{30} = -\frac{11}{30}.$$

$$2) -\frac{11}{30} : \frac{5}{96} = -\frac{11 \cdot 96}{30 \cdot 5} = -\frac{11 \cdot 32}{10 \cdot 5} = -\frac{11 \cdot 16}{25} = -\frac{176}{25} = -7,04.$$

Ответ: $-7,04.$

Пример 6. $\left(-5\frac{2}{3} - 1\frac{5}{7}\right) \cdot 3,15.$

Решение.

$$1) -5\frac{2}{3} - 1\frac{5}{7} = -\left(5\frac{2}{3} + 1\frac{5}{7}\right) = -6\frac{14+15}{21} = -6\frac{29}{21} = -7\frac{8}{21}.$$

$$2) -7\frac{8}{21} \cdot 3,15 = -\frac{155}{21} \cdot \frac{315}{100} = -\frac{31 \cdot 15}{1 \cdot 20} = -\frac{93}{4} = -23,25.$$

Ответ: $-23,25.$

Пример 7. $\left(-1\frac{1}{9} - \frac{3}{4}\right) \cdot 7,2.$

Решение.

$$\left(-1\frac{1}{9} - \frac{3}{4}\right) \cdot 7,2 = \left(-\frac{10}{9} - \frac{3}{4}\right) \cdot 7,2 = -\frac{10}{9} \cdot 7,2 - \frac{3}{4} \cdot 7,2 =$$

$$= -10 \cdot 0,8 - 3 \cdot 1,8 = -8 - 5,4 = -13,4.$$

Ответ: $-13,4.$

2.2. Преобразования алгебраических выражений и дробей

Пример 8. $(7x - 16)(7x + 16) - 49x^2 - 4x + 25$ при $x = 80.$

Решение.

$$(7x - 16)(7x + 16) - 49x^2 - 4x + 25 = 49x^2 - 256 - 49x^2 - 4x + 25 =$$

$$= -4x - 231.$$

При $x = 80$ получим $-4 \cdot 80 - 231 = -320 - 231 = -551.$

Ответ: $-551.$

Пример 9. $\frac{(13a)^2 - 13a}{13a^2 - a}$.

Решение.

$$\frac{(13a)^2 - 13a}{13a^2 - a} = \frac{13a(13a - 1)}{a(13a - 1)} = 13.$$

Ответ: 13.

Пример 10. $\frac{16x^2 - 9}{4x + 3} - 4x$.

Решение.

$$\frac{16x^2 - 9}{4x + 3} - 4x = \frac{(4x - 3)(4x + 3)}{4x + 3} - 4x = 4x - 3 - 4x = -3.$$

Ответ: -3.

Пример 11. Найдите $p(x) + p(4 - x)$, если $p(x) = \frac{x(4 - x)}{x - 2}$ при $x \neq 2$.

Решение.

$$\begin{aligned} p(x) + p(4 - x) &= \frac{x(4 - x)}{x - 2} + \frac{(4 - x)(4 - (4 - x))}{(4 - x) - 2} = \frac{x(4 - x)}{x - 2} + \frac{(4 - x) \cdot x}{2 - x} = \\ &= \frac{x(4 - x)}{x - 2} - \frac{x(4 - x)}{x - 2} = 0. \end{aligned}$$

Ответ: 0.

Пример 12. Найдите значение $\frac{x}{y}$, если $\frac{4x + 5y}{5x + 4y} = 1$.

Решение.

Если $\frac{4x + 5y}{5x + 4y} = 1$, то $4x + 5y = 5x + 4y$, откуда $y = x$, тогда $\frac{x}{y} = 1$.

Ответ: 1.

Пример 13. Найдите значение выражения $23x - 3y + 20$, если $\frac{3x - 8y + 6}{7x - 2y + 6} = 7$.

Решение.

Если $\frac{3x-8y+6}{7x-2y+6} = 7$, то $3x - 8y + 6 = 7(7x - 2y + 6)$, или

$$46x - 6y + 36 = 0, \text{ или } 23x - 3y + 18 = 0, \text{ тогда}$$

$$23x - 3y + 20 = (23x - 3y + 18) + 2 = 0 + 2 = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 14. $\frac{16x^2 + y^2 - (4x - y)^2}{xy}.$

Решение.

$$\frac{16x^2 + y^2 - (16x^2 - 8xy + y^2)}{xy} = \frac{8xy}{xy} = 8.$$

Ответ: 8.

Пример 15. $\frac{(x+6y)^2 - x^2 - 36y^2}{3xy}.$

Решение.

$$\frac{x^2 + 12xy + 36y^2 - x^2 - 36y^2}{3xy} = \frac{12xy}{3xy} = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 16. $\frac{(5x-2y)^2 - (5x+2y)^2}{8xy}.$

Решение.

$$\frac{25x^2 - 20xy + 4y^2 - (25x^2 + 20xy + 4y^2)}{8xy} = \frac{-40xy}{8xy} = -5.$$

Ответ: -5.

Пример 17. Известно, что $6x + 2y = 11$, $10z + 4y = 13$. Найдите значение выражения $3x + 3y + 5z$.

Решение.

Складывая почленно данные равенства, получим

$$6x + 6y + 10z = 24, \text{ или } 3x + 3y + 5z = 24 : 2 = 12.$$

Ответ: 12.

Пример 18. Найдите значение выражения $2x + 3y$, если $2x - 7y = 19$, $6x - y = 29$.

Решение.

Вычитая из II равенства I, получим $6x - y - (2x - 7y) = 10$, или $4x + 6y = 10$, откуда $2x + 3y = 10 : 2 = 5$.

Ответ: 5.

Замечание. Данные равенства можно решить как систему линейных уравнений.

Пример 19. Найдите значение выражения $7p(a) - 63a + 29$, если $p(a) = 9a - 4$.

Решение.

$$7p(a) - 63a + 29 = 7(9a - 4) - 63a + 29 = 63a - 28 - 63a + 29 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 20. Найдите значение выражения $p(x - 3) - p(x + 3)$, если $p(x) = 5x$.

Решение.

$$p(x - 3) - p(x + 3) = 5(x - 3) - 5(x + 3) = 5x - 15 - 5x - 15 = -30.$$

Ответ: -30.

Пример 21. $\frac{(4a^3)^2 \cdot (7b)^2}{(28a^3b)^2}$.

Решение.

$$\frac{(4a^3)^2 \cdot (7b)^2}{(28a^3b)^2} = \frac{4^2 \cdot a^6 \cdot 7^2 b^2}{28^2 \cdot a^6 \cdot b^2} = \frac{(4 \cdot 7)^2}{28^2} = \frac{28^2}{28^2} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 22. Найдите значение выражения

$$(9a^2 - 25) \cdot \left(\frac{1}{3a-5} - \frac{1}{3a+5} \right).$$

Решение.

$$1) \left(\frac{1}{3a-5} - \frac{1}{3a+5} \right) = \frac{3a+5-(3a-5)}{9a^2-25} = \frac{10}{9a^2-25}.$$

$$2) (9a^2 - 25) \cdot \frac{10}{9a^2 - 25} = 10.$$

Ответ: 10.

Пример 23. Найдите значение выражения

$$\frac{a+16b+24}{a+4b+8}, \text{ если } \frac{a}{b} = 2.$$

Решение.

Если $\frac{a}{b} = 2$, то $a = 2b$, тогда получим

$$\frac{a+16b+24}{a+4b+8} = \frac{2b+16b+24}{2b+4b+8} = \frac{18b+24}{6b+8} = \frac{3 \cdot (6b+8)}{6b+8} = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 24. Найдите значение выражения

$$\frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)}, \text{ если } p(b) = \left(b + \frac{4}{b}\right)\left(4b + \frac{1}{b}\right), \text{ где } b \neq 0.$$

Решение.

$$p\left(\frac{1}{b}\right) = \left(\frac{1}{b} + 4b\right)\left(\frac{4}{b} + b\right) = p(b), \text{ значит, } \frac{p(b)}{p\left(\frac{1}{b}\right)} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 25. Найдите значение выражения

$$p(x-11) + p(19-x), \text{ если } p(x) = 2x + 7.$$

Решение.

Заменяя x на $x-11$ и $19-x$, получим

$$p(x-11) + p(19-x) = 2(x-11) + 7 + 2(19-x) + 7 = \\ = 2x - 22 + 7 + 38 - 2x + 7 = -22 + 52 = 30.$$

Ответ: 30.

Пример 26. Найдите значение выражения

$$(9x^2 + y^2 - (3x - y)^2) : xy.$$

Решение.

Используя формулу $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, получим

$$(9x^2 + y^2 - (3x - y)^2) : xy = (9x^2 + y^2 - 9x^2 + 6xy - y^2) : xy = \\ = 6xy : xy = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 27. Найдите значение выражения

$$\frac{13a^2xy - (-5xya^2)}{9ya^2x}.$$

Решение.

$$\frac{13a^2xy - (-5xya^2)}{9ya^2x} = \frac{18a^2xy}{9a^2xy} = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 28. Найдите значение выражения

$$(9x^2 + 16y^2 - (3x + 4y)^2) : 6xy, \text{ если } x = 13\frac{5}{7}, y = \sqrt{101}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} & (9x^2 + 16y^2 - (3x + 4y)^2) : 6xy = \\ & = (9x^2 + 16y^2 - 9x^2 - 24xy - 16y^2) : 6xy = -24xy : 6xy = -4. \end{aligned}$$

Ответ: -4.

2.3. Преобразования числовых иррациональных выражений

Пример 29. $\sqrt{113^2 - 112^2}.$

Решение.

$$\sqrt{113^2 - 112^2} = \sqrt{(113 - 112)(113 + 112)} = \sqrt{1 \cdot 225} = 15.$$

Ответ: 15.

Пример 30. $\sqrt{962^2 - 720^2}.$

Решение.

$$\begin{aligned} & \sqrt{962^2 - 720^2} = \sqrt{(962 - 720)(962 + 720)} = \sqrt{242 \cdot 1682} = \sqrt{2 \cdot 121 \cdot 2 \cdot 841} = \\ & = 2 \cdot 11 \cdot 29 = 638. \end{aligned}$$

Ответ: 638.

Пример 31. $\sqrt{\frac{26^2 - 10^2}{25}}.$

Решение.

$$\sqrt{\frac{26^2 - 10^2}{25}} = \frac{\sqrt{(26-10)(26+10)}}{5} = \frac{\sqrt{16 \cdot 36}}{5} = \frac{4 \cdot 6}{5} = \frac{24}{5} = 4,8.$$

Ответ: 4,8.

Пример 32. $\frac{(6\sqrt{10})^2}{18}.$

Решение.

$$\frac{(6\sqrt{10})^2}{18} = \frac{36 \cdot 10}{18} = 2 \cdot 10 = 20.$$

Ответ: 20.

Пример 33. $\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5}}{\sqrt{5}}.$

Решение.

$$\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[6]{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{6}}}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{5^{\frac{3}{6}}}{5^{\frac{1}{2}}} = \frac{5^{\frac{1}{2}}}{5^{\frac{1}{2}}} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 34. $\frac{\sqrt[6]{20} \cdot \sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{5}}.$

Решение.

$$\frac{\sqrt[6]{20} \cdot \sqrt[6]{16}}{\sqrt[6]{5}} = \sqrt[6]{\frac{20 \cdot 16}{5}} = \sqrt[6]{4 \cdot 16} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 2^4} = \sqrt[6]{2^6} = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 35. $\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[6]{36}.$

Решение.

$$\sqrt[3]{36} \cdot \sqrt[6]{36} = 36^{\frac{1}{3}} \cdot 36^{\frac{1}{6}} = 36^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 36^{\frac{3}{6}} = 36^{\frac{1}{2}} = (6^2)^{\frac{1}{2}} = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 36. $13 \cdot \sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[6]{49}$.*Решение.*

$$13 \cdot \sqrt[3]{49} \cdot \sqrt[6]{49} = 13 \cdot 49^{\frac{1}{3}} \cdot 49^{\frac{1}{6}} = 13 \cdot 49^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 13 \cdot 49^{\frac{1}{2}} = 13 \cdot (7^2)^{\frac{1}{2}} = 13 \cdot 7 = 91.$$

Ответ: 91.**Пример 37.** $\frac{\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{4,8}}{\sqrt{0,18}}$.*Решение.*

$$\frac{\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{4,8}}{\sqrt{0,18}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 48}{18}} = \sqrt{\frac{24 \cdot 24}{9}} = \frac{24}{3} = 8.$$

Ответ: 8.**Пример 38.** $(\sqrt{19} - \sqrt{5})(\sqrt{19} + \sqrt{5})$.*Решение.*Используя формулу $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, имеем

$$(\sqrt{19} - \sqrt{5})(\sqrt{19} + \sqrt{5}) = 19 - 5 = 14.$$

Ответ: 14.**Пример 39.** Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{9\frac{1}{7}} - \sqrt{2\frac{2}{7}} \right) : \frac{2}{3\sqrt{7}}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{9\frac{1}{7}} - \sqrt{2\frac{2}{7}} \right) : \frac{2}{3\sqrt{7}} &= \left(\sqrt{\frac{64}{7}} - \sqrt{\frac{16}{7}} \right) \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} = \\ &= \left(\frac{8}{\sqrt{7}} - \frac{4}{\sqrt{7}} \right) \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} = \frac{4}{\sqrt{7}} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} = 6. \end{aligned}$$

Ответ: 6.**Пример 40.** Найдите значение выражения

$$\frac{(\sqrt{11} + \sqrt{5})^2}{8 + \sqrt{55}}.$$

Решение.

$$\frac{(\sqrt{11} + \sqrt{5})^2}{8 + \sqrt{55}} = \frac{11 + 5 + 2\sqrt{55}}{8 + \sqrt{55}} = \frac{16 + 2\sqrt{55}}{8 + \sqrt{55}} = \frac{2 \cdot (8 + \sqrt{55})}{8 + \sqrt{55}} = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 41. Найдите значение выражения

$$(\sqrt{180} - \sqrt{125}) \cdot \sqrt{45}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} (\sqrt{180} - \sqrt{125}) \cdot \sqrt{45} &= (\sqrt{36 \cdot 5} - \sqrt{25 \cdot 5}) \cdot \sqrt{9 \cdot 5} = (6\sqrt{5} - 5\sqrt{5}) \cdot 3\sqrt{5} = \\ &= \sqrt{5} \cdot 3\sqrt{5} = 3 \cdot 5 = 15. \end{aligned}$$

Ответ: 15.

2.4. Преобразования буквенных иррациональных выражений

Пример 42. $a + \sqrt{a^2 - 6a + 9}$ при $a \leq 3$.

Решение.

$$a + \sqrt{a^2 - 6a + 9} = a + \sqrt{(a-3)^2} = a + |a-3|.$$

$$\text{Так как по условию } a \leq 3, \text{ то } |a-3| = 3-a, \text{ тогда } a + |a-3| =$$

$$= a + 3 - a = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 43. $\sqrt{(a-4)^2} + \sqrt{(a-13)^2}$ при $4 \leq a \leq 13$.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{Так как } 4 \leq a \leq 13, \text{ то } \sqrt{(a-4)^2} + \sqrt{(a-13)^2} = \\ = |a-4| + |a-13| = a-4 - (a-13) = a-4-a+13 = 9. \end{aligned}$$

Ответ: 9.

Пример 44. $\frac{6\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{x}.$

Решение.

$$\frac{6\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{x} = 6 + \frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{3}{\sqrt{x}} = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 45. $\frac{3\sqrt{x}}{x} - \frac{8\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} + 11x - 5$ при $x = 3$.

Решение.

$$\frac{3\sqrt{x}}{x} - \frac{8\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} + 11x - 5 = \frac{3}{\sqrt{x}} - 8 - \frac{3}{\sqrt{x}} + 11x - 5 = 11x - 13.$$

При $x = 3$ получим $11 \cdot 3 - 13 = 20$.

Ответ: 20.

Пример 46. $g(7+x) + g(7-x)$, если $g(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-14}$.

Решение.

$$g(7+x) + g(7-x) = \sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{x+7-14} + \sqrt[3]{7-x} + \sqrt[3]{7-x-14} = \\ = \sqrt[3]{x+7} + \sqrt[3]{x-7} - \sqrt[3]{x-7} - \sqrt[3]{x+7} = 0.$$

Ответ: 0.

Пример 47. $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[18]{a}}$ при $a = 512$.

Решение.

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[18]{a}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{6}} \cdot a^{\frac{1}{18}}} = a^{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{18}} = a^{\frac{6-3-1}{18}} = a^{\frac{2}{18}} = a^{\frac{1}{9}}.$$

При $a = 512 = 2 \cdot 256 = 2 \cdot 16^2 = 2 \cdot (2^4)^2 = 2 \cdot 2^8 = 2^9$ получим $a^{\frac{1}{9}} = (2^9)^{\frac{1}{9}} = 2$.

Ответ: 2.

Пример 48. $\frac{19^4 \sqrt[30]{x} - 11^8 \sqrt[15]{x}}{4^{40} \sqrt[3]{x}}$ при $x > 0$.

Решение.

$$\frac{19^4 \sqrt[30]{x} - 11^8 \sqrt[15]{x}}{4^{40} \sqrt[3]{x}} = \frac{19^{120} \sqrt{x} - 11^{120} \sqrt{x}}{4^{120} \sqrt{x}} = \frac{8^{120} \sqrt{x}}{4^{120} \sqrt{x}} = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 49. $\frac{\sqrt{36\sqrt[8]{a}}}{\sqrt[8]{\sqrt{a}}}$ при $a > 0$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{36\sqrt[8]{a}}}{\sqrt[8]{\sqrt{a}}} = \frac{6\sqrt[16]{a}}{\sqrt[16]{a}} = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 50. $\frac{\sqrt{121\sqrt[9]{b}}}{2\sqrt[18]{b}}$ при $b > 0$.

Решение.

$$\frac{\sqrt{121\sqrt[9]{b}}}{2\sqrt[18]{b}} = \frac{11\sqrt[18]{b}}{2\sqrt[18]{b}} = \frac{11}{2} = 5,5.$$

Ответ: 5,5.

2.5. Вычисление значений степенных выражений

Пример 51. $6^{0,36} \cdot 36^{0,32}$.

Решение.

$$6^{0,36} \cdot 36^{0,32} = 6^{0,36} \cdot (6^2)^{0,32} = 6^{0,36} \cdot 6^{0,64} = 6^{0,36 + 0,64} = 6^1 = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 52. $8^{\frac{4}{9}} \cdot 64^{\frac{5}{18}}$.

Решение.

$$8^{\frac{4}{9}} \cdot 64^{\frac{5}{18}} = 8^{\frac{4}{9}} \cdot (8^2)^{\frac{5}{18}} = 8^{\frac{4}{9}} \cdot 8^{\frac{5}{9}} = 8^{\frac{4}{9} + \frac{5}{9}} = 8^1 = 8.$$

Ответ: 8.

Пример 53. $\frac{2^{3,5} \cdot 3^{6,5}}{6^{4,5}}$.

Решение.

$$\frac{2^{3,5} \cdot 3^{6,5}}{6^{4,5}} = \frac{2^{3,5} \cdot 3^{6,5}}{2^{4,5} \cdot 3^{4,5}} = \frac{3^{6,5-4,5}}{2^{4,5-3,5}} = \frac{3^2}{2^1} = \frac{9}{2} = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

Пример 54. $\left(\frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{3}} \right)^2$.

Решение.

$$\left(\frac{3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{4}}}{\sqrt[12]{3}} \right)^2 = \left(3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}} \right)^2 = \left(3^{\frac{4+3-1}{12}} \right)^2 = \left(3^{\frac{1}{2}} \right)^2 = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 55. $0,8^{\frac{1}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7}} \cdot 20^{\frac{6}{7}}$.

Решение.

$$0,8^{\frac{1}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7}} \cdot 20^{\frac{6}{7}} = (0,8 \cdot 5^2 \cdot 20^6)^{\frac{1}{7}} = \left(\frac{4}{5} \cdot 5^2 \cdot 20^6 \right)^{\frac{1}{7}} = (20 \cdot 20^6)^{\frac{1}{7}} = (20^7)^{\frac{1}{7}} = 20.$$

Ответ: 20.

Пример 56. $2^9 \cdot 25^9 : 50^7$.

Решение.

$$\frac{2^9 \cdot 25^9}{50^7} = \frac{(2 \cdot 25)^9}{50^7} = \frac{50^9}{50^7} = 50^2 = 2500.$$

Ответ: 2500.

Пример 57. $2^{10} \cdot 9^{11} : 18^8$.

Решение.

$$\frac{2^{10} \cdot 9^{11}}{18^8} = \frac{2^{10} \cdot 9^{11}}{(2 \cdot 9)^8} = \frac{2^{10} \cdot 9^{11}}{2^8 \cdot 9^8} = 2^2 \cdot 9^3 = 4 \cdot 729 = 2916.$$

Ответ: 2916.

Пример 58. $3^9 \cdot 7^{10} : 21^8$.

Решение.

$$\frac{3^9 \cdot 7^{10}}{21^8} = \frac{3^9 \cdot 7^{10}}{3^8 \cdot 7^8} = 3 \cdot 7^2 = 3 \cdot 49 = 147.$$

Ответ: 147.

Пример 59. $4^8 \cdot 121^7 : 484^7$.

Решение.

$$\frac{4^8 \cdot 121^7}{484^7} = \frac{4^8 \cdot 1}{4^7} = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 60. $11^4 \cdot 25^4 : 275^3$.

Решение.

$$\frac{11^4 \cdot 25^4}{275^3} = \frac{(11 \cdot 25)^4}{275^3} = \frac{275^4}{275^3} = 275.$$

Ответ: 275.

Пример 61. $5^{\sqrt{5}+6} \cdot 5^{-3-\sqrt{5}}$.

Решение.

$$5^{\sqrt{5}+6} \cdot 5^{-3-\sqrt{5}} = 5^{\sqrt{5}+6-3-\sqrt{5}} = 5^{6-3} = 5^3 = 125.$$

Ответ: 125.

Пример 62. $7^{\sqrt{13}+7} \cdot 7^{-4-\sqrt{13}}$.

Решение.

$$7^{\sqrt{13}+7} \cdot 7^{-4-\sqrt{13}} = 7^{\sqrt{13}+7-4-\sqrt{13}} = 7^{7-4} = 7^3 = 343.$$

Ответ: 343.

Пример 63. $\frac{4^{6,5}}{16^{2,25}}$.

Решение.

$$\frac{4^{6,5}}{16^{2,25}} = \frac{4^{6,5}}{(4^2)^{2,25}} = \frac{4^{6,5}}{4^{4,5}} = 4^{6,5-4,5} = 4^2 = 16.$$

Ответ: 16.

Пример 64. $28^{-3,7} \cdot 4^{5,7} : 7^{-4,7}$.

Решение.

$$28^{-3,7} \cdot 4^{5,7} : 7^{-4,7} = 7^{-3,7} \cdot 4^{-3,7} \cdot 4^{5,7} : 7^{-4,7} = (7^{-3,7} : 7^{-4,7}) \cdot (4^{-3,7} \cdot 4^{5,7}) =$$

$$= 7^{-3,7+4,7} \cdot 4^{-3,7+5,7} = 7^1 \cdot 4^2 = 7 \cdot 16 = 112.$$

Ответ: 112.

Пример 65. $\frac{\left(3^{\frac{3}{5}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{15^8}$.

Решение.

$$\frac{\left(3^{\frac{3}{5}} \cdot 5^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{15^8} = \frac{\left(3^{\frac{3}{5}}\right)^{15} \cdot \left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{15}}{3^8 \cdot 5^8} = \frac{3^9 \cdot 5^{10}}{3^8 \cdot 5^8} = 3^1 \cdot 5^2 = 75.$$

Ответ: 75.

Пример 66. $(4^{14})^3 : 4^{43}$.*Решение.*

$$(4^{14})^3 : 4^{43} = 4^{42} : 4^{43} = 4^{-1} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.**Пример 67.** $(64^3)^6 : (8^3)^{12}$.*Решение.*

$$(64^3)^6 : (8^3)^{12} = ((8^2)^3)^6 : (8^3)^{12} = 8^{36} : 8^{36} = 1.$$

Ответ: 1.**Пример 68.** $7^{4\sqrt{3}-1} \cdot 7^{1-\sqrt{3}} : 7^{3\sqrt{3}-1}$.*Решение.*

$$7^{4\sqrt{3}-1} \cdot 7^{1-\sqrt{3}} : 7^{3\sqrt{3}-1} = 7^{4\sqrt{3}-1+1-\sqrt{3}-3\sqrt{3}+1} = 7^1 = 7.$$

Ответ: 7.**Пример 69.** $3^{3\sqrt{5}-1} \cdot 27^{1-\sqrt{5}}$.*Решение.*

$$3^{3\sqrt{5}-1} \cdot 27^{1-\sqrt{5}} = 3^{3\sqrt{5}-1} \cdot (3^3)^{1-\sqrt{5}} = 3^{3\sqrt{5}-1} \cdot 3^{3-3\sqrt{5}} = 3^{3\sqrt{5}-1+3-3\sqrt{5}} = 3^2 = 9.$$

Ответ: 9.**Пример 70.** $\frac{7^{\sqrt{2}} \cdot 8^{\sqrt{2}}}{56^{\sqrt{2}-1}}$.*Решение.*

$$\frac{7^{\sqrt{2}} \cdot 8^{\sqrt{2}}}{56^{\sqrt{2}-1}} = \frac{(7 \cdot 8)^{\sqrt{2}}}{56^{\sqrt{2}-1}} = \frac{56^{\sqrt{2}}}{56^{\sqrt{2}-1}} = 56^{\sqrt{2}-(\sqrt{2}-1)} = 56.$$

Ответ: 56.**Пример 71.** $\frac{\sqrt[10]{7} \cdot 7 \cdot \sqrt[15]{7}}{\sqrt[6]{7}}$.*Решение.*

$$\frac{\sqrt[10]{7} \cdot 7 \cdot \sqrt[15]{7}}{\sqrt[6]{7}} = 7^{\frac{1}{10}+1+\frac{1}{15}-\frac{1}{6}} = 7^{\frac{1}{30}(3+30+2-5)} = 7^{\frac{1}{30} \cdot 30} = 7^1 = 7.$$

Ответ: 7.

Пример 72. $6^{-0,6} \cdot 6^{1,4} \cdot 36^{0,6}$.

Решение.

$$6^{-0,6} \cdot 6^{1,4} \cdot 36^{0,6} = 6^{-0,6} \cdot 6^{1,4} \cdot 6^{1,2} = 6^{-0,6+1,4+1,2} = 6^{0,8+1,2} = 6^2 = 36.$$

Ответ: 36.

Пример 73. $(\sqrt{x} : x^{\frac{1}{3}})^2$ при $x = 27$.

Решение.

$$(\sqrt{x} : x^{\frac{1}{3}})^2 = (x^{\frac{1}{2}} : x^{\frac{1}{3}})^2 = (x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}})^2 = (x^{\frac{1}{6}})^2 = x^{\frac{1}{3}}.$$

При $x = 27$ получим $27^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3$.

Ответ: 3.

2.6. Действия со степенями

Пример 74. $\frac{17(x^6)^5 + 10(x^{10})^3}{(3x^{10})^3}$.

Решение.

$$\frac{17(x^6)^5 + 10(x^{10})^3}{(3x^{10})^3} = \frac{17x^{30} + 10x^{30}}{27x^{30}} = \frac{27x^{30}}{27x^{30}} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 75. $\frac{a^5 b^{-8}}{(4a)^3 b^{-3}} \cdot \frac{32}{a^2 b^{-5}}$.

Решение.

$$\frac{a^5 b^{-8}}{(4a)^3 b^{-3}} \cdot \frac{32}{a^2 b^{-5}} = \frac{32a^5 b^{-8}}{64a^3 b^{-3} \cdot a^2 \cdot b^{-5}} = \frac{a^5 b^{-8}}{2a^5 b^{-8}} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

Пример 76. $\frac{x^5 \cdot x^6}{x^7}$ при $x = 3$.

Решение.

$$\frac{x^5 \cdot x^6}{x^7} = x^{5+6-7} = x^4 = 3^4 = 81.$$

Ответ: 81.

Пример 77. $\frac{x^{-14} \cdot x^{-3}}{x^{-20}}$ при $x = 4$.

Решение.

$$\frac{x^{-14} \cdot x^{-3}}{x^{-20}} = x^{-14-3+20} = x^3 = 4^3 = 64.$$

Ответ: 64.

Пример 78. $\frac{(5x)^2 \cdot x^{-10}}{x^{-13} \cdot 2x^5}$.

Решение.

$$\frac{(5x)^2 \cdot x^{-10}}{x^{-13} \cdot 2x^5} = \frac{25x^2 \cdot x^{-10}}{2x^{-13+5}} = \frac{25x^{-8}}{2x^{-8}} = \frac{25}{2} = 12,5.$$

Ответ: 12,5.

Пример 79. $((2x^4)^3 - (x^3)^4) : (7x^{12})$.

Решение.

$$((2x^4)^3 - (x^3)^4) : (7x^{12}) = (8x^{12} - x^{12}) : (7x^{12}) = (7x^{12}) : (7x^{12}) = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 80. $24x^9 \cdot x^{11} : (2x^{10})^2$.

Решение.

$$24x^9 \cdot x^{11} : (2x^{10})^2 = 24x^{20} : 4x^{20} = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 81. $\frac{5a^3b^6 - (2ab^2)^3}{12a^3b^4}$ при $b = 3$.

Решение.

$$\frac{5a^3b^6 - (2ab^2)^3}{12a^3b^4} = \frac{5a^3b^6 - 8a^3b^6}{12a^3b^4} = \frac{-3a^3b^6}{12a^3b^4} = -\frac{b^2}{4} = -\frac{3^2}{4} = -\frac{9}{4} = -2,25.$$

Ответ: -2,25.

Пример 82. $\frac{11a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{20}} \cdot a^{\frac{1}{5}}}$ при $a > 0$.

Решение.

$$\frac{11a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{20}} \cdot a^{\frac{1}{5}}} = 11a^{\frac{1}{4} - \frac{1}{20} - \frac{1}{5}} = 11a^{\frac{5-1-4}{20}} = 11a^0 = 11.$$

Ответ: 11.

Пример 83. $\frac{(\sqrt[3]{13x^4})^{12}}{x^{16}}$ при $x \neq 0$.

Решение.

$$\frac{(\sqrt[3]{13x^4})^{12}}{x^{16}} = \frac{(13x^4)^{\frac{12}{3}}}{x^{16}} = \frac{(13x^4)^4}{x^{16}} = \frac{13^4 \cdot x^{16}}{x^{16}} = 13^4 = (13^2)^2 = 169^2 =$$

$$= 28\,561.$$

Ответ: 28 561.

Пример 84. $\frac{(25x)^{1,5}}{x\sqrt{x}}$ при $x > 0$.

Решение.

$$\frac{(25x)^{1,5}}{x\sqrt{x}} = \frac{25^{1,5} \cdot x^{1,5}}{x \cdot x^{1/2}} = \frac{(5^2)^{1,5} \cdot x^{1,5}}{x^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{5^3 \cdot x^{1,5}}{x^{1,5}} = 5^3 = 125.$$

Ответ: 125.

Пример 85. $\frac{(\sqrt{5a^2})^2 \cdot \sqrt[5]{a^2}}{a^{4,4}}$ при $a > 0$.

Решение.

$$\frac{(\sqrt{5a^2})^2 \cdot \sqrt[5]{a^2}}{a^{4,4}} = \frac{5a^4 \cdot a^{2/5}}{a^{4,4}} = \frac{5a^{4+0,4}}{a^{4,4}} = \frac{5a^{4,4}}{a^{4,4}} = 5.$$

Ответ: 5.

Пример 86. $x \cdot 4^{3x+2} \cdot 2^{-6x}$ при $x = \frac{1}{4}$.

Решение.

$$x \cdot 4^{3x+2} \cdot 2^{-6x} = x \cdot (2^2)^{3x+2} \cdot 2^{-6x} = x \cdot 2^{6x+4} \cdot 2^{-6x} = x \cdot 2^{6x+4-6x} = x \cdot 2^4 =$$

$$= 16x = 16 \cdot \frac{1}{4} = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 87. $\frac{a^{4,32} \cdot a^{8,47}}{a^{10,79}}$ при $a = 13$.

Решение.

$$\frac{a^{4,32} \cdot a^{8,47}}{a^{10,79}} = \frac{a^{4,32+8,47}}{a^{10,79}} = \frac{a^{12,79}}{a^{10,79}} = a^2 = 13^2 = 169.$$

Ответ: 169.

Пример 88. $\frac{b^{4\sqrt{3}+3}}{(b^{\sqrt{3}})^4}$ при $b = 3$.

Решение.

$$\frac{b^{4\sqrt{3}+3}}{(b^{\sqrt{3}})^4} = \frac{b^{4\sqrt{3}} \cdot b^3}{b^{4\sqrt{3}}} = b^3 = 3^3 = 27.$$

Ответ: 27.

Пример 89. $\frac{\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[10]{a^3}}{a\sqrt{a}}$ при $a = 0,125$.

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[5]{a} \cdot \sqrt[10]{a^3}}{a\sqrt{a}} &= \frac{a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{3}{10}}}{a \cdot a^{\frac{1}{2}}} = a^{\frac{1}{5} + \frac{3}{10} - 1 - \frac{1}{2}} = a^{\left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10} - \frac{1}{2}\right) - 1} = a^{\frac{2+3-5}{10} - 1} = a^{0-1} = a^{-1} = \\ &= \frac{1}{a} = \frac{1}{0,125} = 1 : \frac{1}{8} = 8. \end{aligned}$$

Ответ: 8.

2.7. Преобразования числовых логарифмических выражений

Пример 90. $4^{\log_2 6}$.

Решение.

$$4^{\log_2 6} = 4^{\log_{2^2} 6^2} = 4^{\log_4 36} = 36.$$

Ответ: 36.

Пример 91. $25^{\log_5 \sqrt{8}}$.

Решение.

$$25^{\log_5 \sqrt{8}} = 25^{\log_{25} 8} = 8.$$

Ответ: 8.

Пример 92. $16 \cdot 10^{\lg 2}$.

Решение.

$$16 \cdot 10^{\lg 2} = 16 \cdot 2 = 32.$$

Ответ: 32.

Пример 93. $\log_2 0,25$.

Решение.

$$\log_2 0,25 = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2.$$

Ответ: -2.

Пример 94. $\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5}$.

Решение.

$$\log_{\sqrt{5}} \frac{1}{5} = \log_{5^{\frac{1}{2}}} 5^{-1} = -1 \cdot 2 \cdot \log_5 5 = -1 \cdot 2 = -2.$$

Ответ: -2.

Пример 95. $\log_5^2 25$.

Решение.

$$\log_5^2 25 = (\log_5 5^2)^2 = (2 \log_5 5)^2 = (2 \cdot 1)^2 = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 96. $\log_{0,5}^2 16$.

Решение.

$$\log_{0,5}^2 16 = \left(\log_{\frac{1}{2}} 2^4 \right)^2 = (-4)^2 = 16.$$

Ответ: 16.

Пример 97. $\log_{\frac{1}{16}}^3 4$.

Решение.

$$\log_{\frac{1}{16}}^3 4 = \left(\log_{4^{-2}} 4 \right)^3 = \left(-\frac{1}{2} \cdot 1 \right)^3 = -\frac{1}{8} = -0,125.$$

Ответ: -0,125.

Пример 98. $\sqrt{\log_3 81}$.*Решение.*

$$\sqrt{\log_3 81} = \sqrt{\log_3 3^4} = \sqrt{4 \cdot 1} = 2.$$

Ответ: 2.**Пример 99.** $11^{\log_{\sqrt{11}} 4}$.*Решение.*

$$11^{\log_{\sqrt{11}} 4} = 11^{\log_{11} 4^2} = 4^2 = 16.$$

Ответ: 16.**Пример 100.** $4^{\log_{64} 125}$.*Решение.*

$$4^{\log_{64} 125} = 4^{\log_{4^3} 5^3} = 4^{\log_4 5} = 5.$$

Ответ: 5.**Пример 101.** $\log_{\frac{16}{9}} \log_{27} 81$.*Решение.*

$$\begin{aligned} \log_{\frac{16}{9}} \log_{27} 81 &= \log_{\frac{16}{9}} (\log_{3^3} 3^4) = \log_{\frac{16}{9}} \left(\frac{1}{3} \cdot 4 \log_3 3 \right) = \log_{\frac{16}{9}} \frac{4}{3} = \\ &= \log_{\left(\frac{4}{3}\right)^2} \frac{4}{3} = \frac{1}{2} = 0,5. \end{aligned}$$

Ответ: 0,5.**Пример 102.** $\log_2 \log_{\sqrt{3}} 9$.*Решение.*

$$\log_2 \log_{\sqrt{3}} 9 = \log_2 \left(\log_{\frac{1}{3^2}} 3^2 \right) = \log_2 (2 \cdot 2 \cdot \log_3 3) = \log_2 2^2 = 2.$$

Ответ: 2.**Пример 103.** $81^{\frac{1}{\log_4 9}}$.*Решение.*

$$81^{\frac{1}{\log_4 9}} = 81^{\log_9 4} = 81^{\log_{81} 16} = 16.$$

Ответ: 16.

Пример 104. $25^{\frac{1}{4}\log_5 9}$.

Решение.

$$25^{\frac{1}{4}\log_5 9} = 5^{2 \cdot \frac{1}{4}\log_5 9} = 5^{\frac{1}{2}\log_5 9} = 5^{\frac{1}{2} \cdot 2\log_5 3} = 5^{\log_5 3} = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 105. $\frac{\log_6 125}{\log_6 5}$.

Решение.

$$\frac{\log_6 125}{\log_6 5} = \frac{\log_6 5^3}{\log_6 5} = \frac{3\log_6 5}{\log_6 5} = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 106. $\frac{2\log_{0,2} 16}{\log_{0,2} 32}$.

Решение.

$$\frac{2\log_{0,2} 16}{\log_{0,2} 32} = \frac{2\log_{0,2} 2^4}{\log_{0,2} 2^5} = \frac{2 \cdot 4\log_{0,2} 2}{5\log_{0,2} 2} = \frac{8}{5} = 1,6.$$

Ответ: 1,6.

Пример 107. $\log_6 9 \cdot \log_3 36$.

Решение.

$$\log_6 9 \cdot \log_3 36 = \log_6 3^2 \cdot \log_3 6^2 = 2 \log_6 3 \cdot 2 \log_3 6 =$$

$$= 4(\log_6 3 \cdot \log_3 6) = 4 \cdot 1 = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 108. $(1 - \log_3 18)(1 - \log_6 18)$.

Решение.

$$(1 - \log_3 18)(1 - \log_6 18) = (1 - \log_3 3 - \log_3 6)(1 - \log_6 6 - \log_6 3) =$$

$$= (1 - 1 - \log_3 6)(1 - 1 - \log_6 3) = -\log_3 6 \cdot (-\log_6 3) = \log_3 6 \cdot \log_6 3 = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 109. $\frac{\log_3 135}{3 + \log_3 5}$.

Решение.

$$\frac{\log_3 135}{3 + \log_3 5} = \frac{\log_3 (27 \cdot 5)}{3 + \log_3 5} = \frac{\log_3 27 + \log_3 5}{3 + \log_3 5} = \frac{\log_3 3^3 + \log_3 5}{3 + \log_3 5} = \frac{3 + \log_3 5}{3 + \log_3 5} = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 110. $\frac{\log_2 5}{\log_2 7} + \log_7 0,2$.

Решение.

$$\frac{\log_2 5}{\log_2 7} + \log_7 0,2 = \log_7 5 + \log_7 0,2 = \log_7 (5 \cdot 0,2) = \log_7 1 = 0.$$

Ответ: 0.

Пример 111. $\log_3 4 - 4 \log_3 2 + \log_3 \frac{4}{9}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \log_3 4 - 4 \log_3 2 + \log_3 \frac{4}{9} &= \log_3 4 - \log_3 2^4 + \log_3 \frac{4}{9} = \\ &= \log_3 \left(\frac{4 \cdot 4}{16 \cdot 9} \right) = \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2. \end{aligned}$$

Ответ: -2.

Пример 112. $5^{\log_5 7} + 36^{\log_6 \sqrt{11}}$.

Решение.

$$5^{\log_5 7} + 36^{\log_6 \sqrt{11}} = 7 + 36^{\log_{36} 11} = 7 + 11 = 18.$$

Ответ: 18.

Пример 113. $\log_6 8 \cdot \log_8 36$.

Решение.

$$\log_6 8 \cdot \log_8 36 = \log_6 8 \cdot \log_8 6^2 = \log_6 8 \cdot 2 \log_8 6 = 2 \cdot (\log_6 8 \cdot \log_8 6) = 2 \cdot 1 = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 114. $\log_4 6,4 + \log_4 10$.

Решение.

$$\log_4 6,4 + \log_4 10 = \log_4 (6,4 \cdot 10) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3 \cdot \log_4 4 = 3 \cdot 1 = 3.$$

Ответ: 3.

Пример 115. $3^{2 \log_3 5}$.

Решение.

$$3^{2 \log_3 5} = (3^{\log_3 5})^2 = 5^2 = 25.$$

Ответ: 25.

Пример 116. $6^{2+\log_6 10}$.

Решение.

$$6^{2+\log_6 10} = 6^2 \cdot 6^{\log_6 10} = 36 \cdot 10 = 360.$$

Ответ: 360.

Пример 117. $\log_{\sqrt{5}}^2 25$.

Решение.

$$\log_{\sqrt{5}}^2 25 = (\log_{\sqrt{5}} 25)^2 = (\log_{5^{1/2}} 5^2)^2 = (2 \cdot 2 \cdot \log_5 5)^2 = (4 \cdot 1)^2 = 16.$$

Ответ: 16.

Пример 118. $\log_{0,4} 6 \cdot \log_6 2,5$.

Решение.

И способ

$$\log_{0,4} 6 \cdot \log_6 2,5 = \log_{\frac{2}{5}} 6 \cdot \log_6 \frac{5}{2} = -\log_{\frac{5}{2}} 6 \cdot \log_6 \frac{5}{2} = -1.$$

Ответ: -1.

II способ

Известно, что $\log_a b \cdot \log_c d = \log_a d \cdot \log_c b$.

Тогда получим $\log_{0,4} 6 \cdot \log_6 2,5 = \log_{0,4} 2,5 \cdot \log_6 6 =$

$$= \log_{\frac{2}{5}} \frac{5}{2} \cdot 1 = \log_{\frac{2}{5}} \left(\frac{2}{5} \right)^{-1} \cdot 1 = -1.$$

Ответ: -1.

Пример 119. $\frac{8^{\log_8 72}}{8^{\log_8 2}}$.

Решение.

$$\frac{8^{\log_8 72}}{8^{\log_8 2}} = 8^{\log_8 72} : 8^{\log_8 2} = 8^{\log_8 \frac{72}{2}} = 8^{\log_8 36} = 8^2 = 64.$$

Ответ: 64.

2.8. Вычисление значений тригонометрических выражений

Пример 120. $\operatorname{tg} \alpha$, если $\sin \alpha = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение.

Известно, что $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, тогда $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}$, откуда

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{10}{9} - 1 = \frac{1}{9}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{1}{3}.$$

Поскольку α — угол III четверти, то $\operatorname{ctg} \alpha > 0$, значит, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$ и $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

Ответ: 3.

Замечание. Можно было найти $\cos \alpha$, а затем $\operatorname{tg} \alpha$.

Пример 121. $6\sqrt{2}\sin \alpha$, если $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Решение.

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}.$$

Так как α — угол II четверти, то $\sin \alpha > 0$, тогда

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Значит, } 6\sqrt{2}\sin \alpha = 6\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 8.$$

Ответ: 8.

Пример 122. $5 \cos 2\alpha$, если $\sin \alpha = -0,4$.

Решение.

$$\text{Известно, что } \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha, \text{ тогда } \cos 2\alpha = 1 - 2 \cdot (-0,4)^2 = 1 - 2 \cdot 0,16 = 1 - 0,32 = 0,68.$$

$$\text{Значит, } 5 \cos 2\alpha = 5 \cdot 0,68 = 3,4.$$

Ответ: 3,4.

Пример 123. $\frac{15\sin 8\alpha}{2\cos 4\alpha}$, если $\sin 4\alpha = -0,8$.

Решение.

$$\frac{15\sin 8\alpha}{2\cos 4\alpha} = \frac{15 \cdot 2\sin 4\alpha \cos 4\alpha}{2\cos 4\alpha} = 15 \sin 4\alpha = 15 \cdot (-0,8) = -12.$$

Ответ: -12 .

Пример 124. $\operatorname{ctg}^2 \alpha$, если $17 \sin^2 \alpha + 12 \cos^2 \alpha = 13$.

Решение.

Так как $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$, то данное равенство преобразуется к виду $17 \sin^2 \alpha + 12(1 - \sin^2 \alpha) = 13$, или $5 \sin^2 \alpha = 1$, $\sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$.

Известно, что $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, тогда получим $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 5$, откуда $\operatorname{ctg}^2 \alpha = 4$.

Ответ: 4 .

Пример 125. $\frac{4\cos \alpha - 7\sin \alpha}{3\sin \alpha - 4\cos \alpha}$, если $\operatorname{tg} \alpha = -2$.

Решение.

І способ

Если $\operatorname{tg} \alpha = -2$, то $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2$, откуда $\sin \alpha = -2 \cos \alpha$.

Тогда получим $\frac{4\cos \alpha - 7 \cdot (-2\cos \alpha)}{3 \cdot (-2\cos \alpha) - 4\cos \alpha} = \frac{18\cos \alpha}{-10\cos \alpha} = -1,8$.

Ответ: $-1,8$.

ІІ способ

Разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos \alpha \neq 0$:

$$\frac{4 - 7\operatorname{tg} \alpha}{3\operatorname{tg} \alpha - 4} = \frac{4 - 7 \cdot (-2)}{3 \cdot (-2) - 4} = \frac{4 + 14}{-10} = \frac{18}{-10} = -1,8.$$

Ответ: $-1,8$.

Пример 126. $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\sin \alpha = 0,6$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение.

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Так как α — угол III четверти, то $\cos \alpha < 0$, тогда

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - 0,36} = -\sqrt{0,64} = -0,8.$$

Ответ: $-0,8$.

Пример 127. $\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 0,4$.

Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) &= \operatorname{tg}\left(4\pi - \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \operatorname{tg}\left(4\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{0,4} = -\frac{5}{2} = -2,5. \end{aligned}$$

Ответ: $-2,5$.

Пример 128. $6 \cos(\alpha - 5\pi) - 13 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$, если $\cos \alpha = -\frac{2}{7}$.

Решение.

$$\begin{aligned} 6 \cos(\alpha - 5\pi) - 13 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) &= 6 \cos(5\pi - \alpha) - 13 \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \\ &= -6 \cos \alpha + 13 \cos \alpha = 7 \cos \alpha = 7 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = -2. \end{aligned}$$

Ответ: -2 .

Пример 129. $6\sqrt{2} \cos^2 \frac{13\pi}{8} - 3\sqrt{2}$.

Решение.

Известно, что $2\cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$.

$$\begin{aligned} 6\sqrt{2} \cos^2 \frac{13\pi}{8} - 3\sqrt{2} &= 3\sqrt{2} \left(2\cos^2 \frac{13\pi}{8} - 1\right) = 3\sqrt{2} \cos\left(2 \cdot \frac{13\pi}{8}\right) = \\ &= 3\sqrt{2} \cos \frac{13\pi}{4} = 3\sqrt{2} \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2} \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3. \end{aligned}$$

Ответ: -3 .

Пример 130. $\sqrt{18} \cos^2 \frac{15\pi}{8} - \sqrt{18} \sin^2 \frac{15\pi}{8}.$

Решение.

Известно, что $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha.$

Тогда получим

$$\begin{aligned} & \sqrt{18} \left(\cos^2 \frac{15\pi}{8} - \sin^2 \frac{15\pi}{8} \right) = \sqrt{18} \cos \left(2 \cdot \frac{15\pi}{8} \right) = \sqrt{18} \cos \frac{15\pi}{4} = \\ & = \sqrt{18} \cos \left(4\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{18} \cdot \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{18} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{18 \cdot 2}}{2} = \frac{\sqrt{36}}{2} = \frac{6}{2} = 3. \end{aligned}$$

Ответ: 3.

Пример 131. $\frac{43 \sin 13^\circ}{\cos 77^\circ} + 7.$

Решение.

Заметим, что $\sin 13^\circ = \cos (90^\circ - 77^\circ) = \cos 77^\circ.$

Тогда $\frac{43 \sin 13^\circ}{\cos 77^\circ} + 7 = \frac{43 \cos 77^\circ}{\cos 77^\circ} + 7 = 43 + 7 = 50.$

Ответ: 50.

Пример 132. $\frac{19}{\cos^2 13^\circ + 1 + \cos^2 77^\circ}.$

Решение.

Так как $\cos^2 13^\circ = \sin^2 77^\circ$, то получим

$$\frac{19}{\cos^2 13^\circ + 1 + \cos^2 77^\circ} = \frac{19}{(\sin^2 77^\circ + \cos^2 77^\circ) + 1} = \frac{19}{1 + 1} = 9,5.$$

Ответ: 9,5.

Пример 133. $\frac{9 \sin \alpha + 13 \cos \alpha}{15 \sin \alpha - 26 \cos \alpha} = -2.$ Найдите $\operatorname{tg} \alpha.$

Решение.

І способ

$$9 \sin \alpha + 13 \cos \alpha = -2(15 \sin \alpha - 26 \cos \alpha), \text{ или}$$

$$9 \sin \alpha + 30 \sin \alpha = 52 \cos \alpha - 13 \cos \alpha, \text{ или}$$

$$39 \sin \alpha = 39 \cos \alpha, \sin \alpha = \cos \alpha, \text{ тогда } \operatorname{tg} \alpha = 1.$$

Ответ: 1.

II способ

Разделим числитель и знаменатель дроби на $\cos \alpha$:

$$\frac{9 \operatorname{tg} \alpha + 13}{15 \operatorname{tg} \alpha - 26} = -2, \text{ или } 9 \operatorname{tg} \alpha + 13 = -30 \operatorname{tg} \alpha + 52, \text{ или}$$

$$39 \operatorname{tg} \alpha = 39, \operatorname{tg} \alpha = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 134. $8 \operatorname{tg} (3\pi - \alpha) + 3 \operatorname{tg} (-\alpha)$, если $\operatorname{tg} \alpha = 5$.

Решение.

Так как $\operatorname{tg} (3\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{tg} (-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha$, то получим

$$8 \cdot (-\operatorname{tg} \alpha) + 3 \cdot (-\operatorname{tg} \alpha) = -8 \operatorname{tg} \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha = -11 \operatorname{tg} \alpha = -11 \cdot 5 = -55.$$

Ответ: -55.

Пример 135. Найдите $13 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right)$, если $\cos \alpha = \frac{5}{13}$ и $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi \right)$.

Решение.

$$13 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = 13 \sin \alpha.$$

Так как α — угол IV четверти, то $\sin \alpha < 0$.

$$\begin{aligned} \text{Значит, } 13 \cos \left(\frac{3\pi}{2} + \alpha \right) &= 13 \sin \alpha = -13 \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \\ &= -13 \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13} \right)^2} = -13 \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -13 \sqrt{\frac{144}{169}} = -13 \cdot \frac{12}{13} = -12. \end{aligned}$$

Ответ: -12.

Пример 136. Найдите значение выражения

$$11 \cos (\pi - \beta) - 3 \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \beta \right), \text{ если } \cos \beta = -\frac{1}{4}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} 11 \cos (\pi - \beta) - 3 \sin \left(\frac{3\pi}{2} + \beta \right) &= -11 \cos \beta + 3 \cos \beta = -8 \cos \beta = \\ &= -8 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right) = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

Пример 137. $\frac{19\cos 3^\circ}{\sin 87^\circ} + 7.$

Решение.

Так как $3^\circ + 87^\circ = 90^\circ$, то $\cos 3^\circ = \sin 87^\circ$.

Следовательно, $\frac{19\cos 3^\circ}{\sin 87^\circ} + 7 = \frac{19\sin 87^\circ}{\sin 87^\circ} + 7 = 19 \cdot 1 + 7 = 26.$

Ответ: 26.

2.9. Преобразования числовых тригонометрических выражений

Пример 138. $\frac{4\sin 21^\circ \cdot \cos 21^\circ}{\sin 42^\circ}.$

Решение.

$$\frac{4\sin 21^\circ \cdot \cos 21^\circ}{\sin 42^\circ} = \frac{2(2\sin 21^\circ \cdot \cos 21^\circ)}{\sin 42^\circ} = \frac{2\sin 42^\circ}{\sin 42^\circ} = 2.$$

Ответ: 2.

Пример 139. $\frac{29\sin 106^\circ \cdot \cos 106^\circ}{\sin 212^\circ}.$

Решение.

$$\frac{29\sin 106^\circ \cdot \cos 106^\circ}{\sin 212^\circ} = \frac{14,5(2\sin 106^\circ \cdot \cos 106^\circ)}{\sin 212^\circ} = \frac{14,5\sin 212^\circ}{\sin 212^\circ} = 14,5.$$

Ответ: 14,5.

Пример 140. $\frac{18\sin 16^\circ \cdot \sin 74^\circ}{\sin 32^\circ}.$

Решение.

Так как $\sin 74^\circ = \sin (90^\circ - 16^\circ) = \cos 16^\circ$, то получим выражение

$$\frac{18\sin 16^\circ \cdot \cos 16^\circ}{\sin 32^\circ} = \frac{9 \cdot (2\sin 16^\circ \cdot \cos 16^\circ)}{\sin 32^\circ} = \frac{9\sin 32^\circ}{\sin 32^\circ} = 9.$$

Ответ: 9.

Пример 141. $\frac{33 \cos 87^\circ \cos 177^\circ}{\sin 354^\circ}.$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{33 \cos 87^\circ \cos 177^\circ}{\sin 354^\circ} &= \frac{33 \cos 87^\circ \cos 177^\circ}{2 \sin 177^\circ \cos 177^\circ} = \frac{33 \cos 87^\circ}{2 \sin 177^\circ} = \frac{33 \cos 87^\circ}{2 \sin (90^\circ + 87^\circ)} = \\ &= \frac{33 \cos 87^\circ}{2 \cos 87^\circ} = \frac{33}{2} = 16,5. \end{aligned}$$

Ответ: 16,5.

Пример 142. $\frac{13(\sin^2 13^\circ - \cos^2 13^\circ)}{\cos 26^\circ}.$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{13(\sin^2 13^\circ - \cos^2 13^\circ)}{\cos 26^\circ} &= \frac{-13(\cos^2 13^\circ - \sin^2 13^\circ)}{\cos 26^\circ} = \\ &= \frac{-13 \cos (2 \cdot 13^\circ)}{\cos 26^\circ} = \frac{-13 \cos 26^\circ}{\cos 26^\circ} = -13. \end{aligned}$$

Ответ: -13.

Пример 143. $\frac{2}{\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right) \sin \frac{27\pi}{4}}.$

Решение.

Поскольку $\cos\left(-\frac{31\pi}{4}\right) = \cos \frac{31\pi}{4} = \cos\left(8\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\sin \frac{27\pi}{4} = \sin\left(7\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, то получим $\frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4.$

Ответ: 4.

Пример 144. $\frac{26 \sin 403^\circ}{\sin 43^\circ}.$

Решение.

$$\frac{26 \sin 403^\circ}{\sin 43^\circ} = \frac{26 \sin (360^\circ + 43^\circ)}{\sin 43^\circ} = \frac{26 \sin 43^\circ}{\sin 43^\circ} = 26.$$

Ответ: 26.

Пример 145. $23 \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 103^\circ$.

Решение.

$$23 \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} 103^\circ = 23 \operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{tg} (90^\circ + 13^\circ) = 23 \operatorname{tg} 13^\circ \cdot (-\operatorname{ctg} 13^\circ) = \\ = -23 \cdot (\operatorname{tg} 13^\circ \cdot \operatorname{ctg} 13^\circ) = -23 \cdot 1 = -23.$$

Ответ: -23 .

Пример 146. $\frac{43}{\sin^2 43^\circ + \sin^2 133^\circ}$.

Решение.

$$\frac{43}{\sin^2 43^\circ + \sin^2 133^\circ} = \frac{43}{\sin^2 43^\circ + \sin^2 (90^\circ + 43^\circ)} = \\ = \frac{43}{\sin^2 43^\circ + \cos^2 43^\circ} = \frac{43}{1} = 43.$$

Ответ: 43 .

Пример 147. $18 \sin 120^\circ \cos 150^\circ$.

Решение.

$$\sin 120^\circ = \sin (90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 150^\circ = \cos (180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{тогда } 18 \sin 120^\circ \cos 150^\circ = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -18 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{27}{2} = -13,5.$$

Ответ: $-13,5$.

Задачи для самостоятельного решения

Найдите значение выражения.

241. $\left(3\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) \cdot 0,24.$ 242. $\left(1\frac{3}{5} + \frac{1}{4}\right) \cdot 100.$ 243. $\left(4\frac{1}{3} + \frac{3}{8}\right) \cdot 120.$
 244. $\left(7\frac{1}{2} + \frac{5}{6}\right) \cdot 1,2.$ 245. $\left(3\frac{1}{2} - \frac{5}{8}\right) \cdot 200.$ 246. $\left(8\frac{1}{2} - \frac{7}{8}\right) \cdot 24.$
 247. $\left(6\frac{1}{3} - \frac{3}{8}\right) \cdot 4,8.$ 248. $\left(3\frac{4}{5} - \frac{7}{8}\right) \cdot 80.$ 249. $\left(7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3}\right) \cdot 1,2.$
 250. $\left(2\frac{3}{4} + 5\frac{1}{2}\right) \cdot 40.$ 251. $\left(5\frac{1}{2} + 3\frac{1}{6}\right) \cdot 0,48.$ 252. $\left(1\frac{1}{3} + 1\frac{1}{8}\right) \cdot 9,6.$
 253. $\left(7\frac{1}{2} - 2\frac{1}{6}\right) \cdot 375.$ 254. $\left(2\frac{5}{7} - 3\frac{3}{5}\right) \cdot 21.$ 255. $\left(1\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3}\right) \cdot 2,4.$
 256. $\left(2\frac{5}{6} - 3\frac{1}{5}\right) \cdot 19,2.$ 257. $\left(-6\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot 36.$ 258. $\left(-1\frac{5}{6} - \frac{2}{7}\right) \cdot 8,4.$
 259. $\left(-5\frac{2}{3} - 1\frac{5}{7}\right) \cdot 3,15.$ 260. $\left(-2\frac{1}{9} - 2\frac{5}{6}\right) \cdot 5,4.$ 261. $\left(-8\frac{1}{2} - 1\frac{1}{6}\right) \cdot 3,6.$
 262. $\left(-2\frac{5}{6} - 2\frac{5}{7}\right) \cdot 16,8.$ 263. $\left(-1\frac{1}{9} - \frac{3}{4}\right) \cdot 7,2.$ 264. $\left(-2\frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) \cdot 14,4.$

Найдите значение выражения.

265. $5^{10} \cdot 2^9 : 10^8.$ 266. $2^9 \cdot 25^9 : 50^7.$
 267. $2^8 \cdot 25^4 : 50^3.$ 268. $2^{10} \cdot 9^{11} : 18^8.$
 269. $4^8 \cdot 11^5 : 44^5.$ 270. $11^8 \cdot 2^{13} : 22^8.$
 271. $3^7 \cdot 25^5 : 75^5.$ 272. $7^6 \cdot 5^5 : 35^4.$
 273. $2^{11} \cdot 3^7 : 6^6.$ 274. $7^{10} \cdot 9^{11} : 63^9.$
 275. $4^4 \cdot 5^7 : 20^4.$ 276. $3^9 \cdot 7^{10} : 21^8.$
 277. $49^5 \cdot 4^{10} : 196^5.$ 278. $4^{12} \cdot 49^9 : 196^9.$
 279. $4^8 \cdot 121^7 : 484^7.$ 280. $49^{10} \cdot 5^{13} : 245^{10}.$
 281. $11^4 \cdot 25^4 : 275^3.$ 282. $5^{13} \cdot 4^9 : 20^9.$
 283. $5^{11} \cdot 7^9 : 35^9.$ 284. $4^{14} \cdot 3^{11} : 12^{10}.$

Найдите значение выражения.

285. $(4x - 3)(4x + 3) - 16x^2 + 8x - 20$ при $x = 30$.
 286. $(5x - 6)(5x + 6) - 25x^2 - 10x - 14$ при $x = 50$.
 287. $(3x - 7)(3x + 7) - 9x^2 + 99$ при $x = 120$.
 288. $(10x - 11)(10x + 11) - 100x^2 + 10x$ при $x = 60$.
 289. $(2x - 5)(2x + 5) - 4x^2 + 6x - 32$ при $x = 70$.
 290. $(9x - 12)(9x + 12) - 81x^2 + 10x - 8$ при $x = 100$.
 291. $(3x - 13)(3x + 13) - 9x^2 + 8x - 7$ при $x = 90$.
 292. $(8x - 3)(8x + 3) - 64x^2 + 9$ при $x = 60$.
 293. $(2x - 15)(2x + 15) - 4x^2 + 3x + 6$ при $x = 90$.
 294. $(7x - 16)(7x + 16) - 49x^2 - 4x + 25$ при $x = 80$.
 295. $(5x - 2)(5x + 2) - 25x^2 + 6x - 44$ при $x = 120$.
 296. $(8x - 1)(8x + 1) - 64x^2 + 9x - 31$ при $x = 140$.
 297. $(4x - 11)(4x + 11) - 16x^2 - 3x - 65$ при $x = 90$.
 298. $(9x - 7)(9x + 7) - 81x^2 + 10x + 30$ при $x = 60$.
 299. $(2x - 15)(2x + 15) - 4x^2 + 8x + 11$ при $x = 50$.
 300. $(4x - 13)(4x + 13) - 16x^2 - 5x - 15$ при $x = 100$.
 301. $(7x - 9)(7x + 9) - 49x^2 - 6x - 32$ при $x = 40$.
 302. $(3x - 9)(3x + 9) - 9x^2 + 7x - 38$ при $x = 110$.
 303. $(4 - 5x)(5x + 4) + 25x^2 + 3x - 7$ при $x = 80$.
 304. $(13 - 7x)(7x + 13) + 49x^2 - 10x + 8$ при $x = 50$.

Найдите значение выражения.

- | | | |
|--|--|-------------------------------|
| 305. $\sqrt{82^2 - 18^2}$. | 306. $\sqrt{313^2 - 312^2}$. | 307. $\sqrt{113^2 - 112^2}$. |
| 308. $\sqrt{65^2 - 63^2}$. | 309. $\sqrt{85^2 - 84^2}$. | 310. $\sqrt{89^2 - 80^2}$. |
| 311. $\sqrt{178^2 - 78^2}$. | 312. $\sqrt{325^2 - 300^2}$. | 313. $\sqrt{582^2 - 390^2}$. |
| 314. $\sqrt{259^2 - 84^2}$. | 315. $\sqrt{169^2 - 120^2}$. | 316. $\sqrt{137^2 - 88^2}$. |
| 317. $\sqrt{164^2 - 160^2}$. | 318. $\sqrt{962^2 - 720^2}$. | 319. $\sqrt{195^2 - 48^2}$. |
| 320. $\sqrt{580^2 - 572^2}$. | 321. $\sqrt{386^2 - 190^2}$. | 322. $\sqrt{610^2 - 272^2}$. |
| 323. $\sqrt{\frac{26^2 - 10^2}{25}}$. | 324. $\sqrt{\frac{81}{13^2 - 12^2}}$. | |

Найдите значение выражения.

- | | | |
|--|--|--|
| 325. $7^{-\sqrt{6}+5} \cdot 7^{-4+\sqrt{6}}$ | 326. $9^{\sqrt{3}+7} \cdot 9^{-5-\sqrt{3}}$ | 327. $2^{\sqrt{5}+6} \cdot 2^{-2-\sqrt{5}}$ |
| 328. $4^{\sqrt{10}+8} \cdot 4^{-5-\sqrt{10}}$ | 329. $5^{\sqrt{5}+6} \cdot 5^{-3-\sqrt{5}}$ | 330. $3^{\sqrt{11}+3} \cdot 3^{-1-\sqrt{11}}$ |
| 331. $8^{\sqrt{3}+10} \cdot 8^{-7-\sqrt{3}}$ | 332. $7^{\sqrt{13}+7} \cdot 7^{-4-\sqrt{13}}$ | 333. $2^{\sqrt{6}+6} \cdot 2^{-3-\sqrt{6}}$ |
| 334. $4^{\sqrt{5}+2} \cdot 4^{1-\sqrt{5}}$ | 335. $5^{\sqrt{3}+9} \cdot 5^{-6-\sqrt{3}}$ | 336. $8^{\sqrt{7}+4} \cdot 8^{-2-\sqrt{7}}$ |
| 337. $9^{\sqrt{5}+10} \cdot 9^{-8-\sqrt{5}}$ | 338. $3^{\sqrt{6}+7} \cdot 3^{-4-\sqrt{6}}$ | 339. $6^{\sqrt{7}+10} \cdot 6^{-6-\sqrt{7}}$ |
| 340. $9^{\sqrt{11}+4} \cdot 9^{-2-\sqrt{11}}$ | 341. $3^{\sqrt{6}+10} \cdot 3^{-6-\sqrt{6}}$ | 342. $4^{\sqrt{8}+4} \cdot 4^{-1-\sqrt{8}}$ |
| 343. $2^{\sqrt{3}+3} \cdot 2^{1-\sqrt{3}}$ | 344. $6^{\sqrt{5}+4} \cdot 6^{-2-\sqrt{5}}$ | |

Найдите значение выражения.

- | | |
|--|--|
| 345. $\frac{x^2 \cdot x^{-7}}{x^{-8}}$ при $x = 5$. | 346. $\frac{x^6 \cdot x^{-9}}{x^{-6}}$ при $x = 4$. |
| 347. $\frac{x^{14} \cdot x^8}{x^{18}}$ при $x = 2$. | 348. $\frac{x^5 \cdot x^6}{x^7}$ при $x = 3$. |
| 349. $\frac{x^{-13} \cdot x^{10}}{x^{-5}}$ при $x = 7$. | 350. $\frac{x^{-14} \cdot x^{-3}}{x^{-20}}$ при $x = 4$. |
| 351. $\frac{x^{-10} \cdot x^{11}}{x^0}$ при $x = 6$. | 352. $\frac{x^5 \cdot x^{-8}}{x^{-6}}$ при $x = 7$. |
| 353. $\frac{x^{17} \cdot x^5}{x^{19}}$ при $x = 4$. | 354. $\frac{x^{-9} \cdot x^{-5}}{x^{-15}}$ при $x = 9$. |
| 355. $\frac{x^{-13} \cdot x^9}{x^{-8}}$ при $x = 2$. | 356. $\frac{x^{19} \cdot x^8}{x^{24}}$ при $x = 5$. |
| 357. $\frac{x^{-2} \cdot x^9}{x^5}$ при $x = 10$. | 358. $\frac{x^{12} \cdot x^0}{x^7}$ при $x = 2$. |
| 359. $\frac{x^{-21} \cdot x^{10}}{x^{-15}}$ при $x = 3$. | 360. $\frac{x^{-4} \cdot x^{-4}}{x^{-9}}$ при $x = 7$. |
| 361. $\frac{x^0 \cdot x^{-3}}{x^{-5}}$ при $x = 10$. | 362. $\frac{x^{-7} \cdot x^9}{x^0}$ при $x = 9$. |
| 363. $\frac{x^{-4} \cdot x^{-8}}{x^{-15}}$ при $x = 6$. | 364. $\frac{x^{-10} \cdot x^0}{x^{-13}}$ при $x = 4$. |

Найдите значение выражения.

365. $9^{\log_3 5}$.

366. $64^{\log_8 6}$.

367. $16^{\log_4 \sqrt{7}}$.

368. $25^{\log_5 \sqrt{8}}$.

369. $4 \cdot 10^{\lg 3}$.

370. $8 \cdot 10^{\lg 5}$.

371. $0,5 \cdot 3^{\log_3 8}$.

372. $0,6 \cdot 5^{\log_5 10}$.

373. $3^{\log_3 16}$.

374. $7^{\log_{49} 25}$.

375. $4^{\log_{16} 49}$.

376. $5^{\log_{25} 81}$.

377. $10 \cdot 3^{\log_3 15}$.

378. $4 \cdot 7^{\log_7 3}$.

379. $11 \cdot 9^{\log_9 10}$.

380. $14 \cdot 12^{\log_{12} 5}$.

381. $\log_2 0,25$.

382. $\log_{\frac{1}{9}} 3$.

383. $\log_{25} 125$.

384. $\log_{\sqrt{6}} \frac{1}{6}$.

385. $\log_3^2 9$.

386. $\log_2^3 8$.

387. $\log_{0,5}^2 4$.

388. $\log_3^4 \frac{1}{9}$.

389. $\log_{\frac{1}{3}}^2 \frac{1}{27}$.

390. $\log_{\frac{1}{32}}^3 4$.

391. $\sqrt{\log_3 81}$.

392. $\sqrt{\lg 10\,000}$.

393. $2^{\log_{\sqrt{2}} 5}$.

394. $7^{\log_{\sqrt{7}} 4}$.

395. $4^{\log_2 \sqrt{7}}$.

396. $2^{\log_4 9}$.

397. $3^{\log_{27} 125}$.

398. $5^{\log_{\frac{1}{5}} 2}$.

399. $\log_{\frac{16}{9}} \log_{27} 81$.

400. $\log_{\frac{1}{2}} \log_2 4$.

401. $\log_2 \log_{\sqrt{3}} 9$.

402. $\log_{\frac{1}{9}} \log_2 8$.

403. $25^{\frac{1}{\log_6 5}}$.

404. $81^{\frac{1}{\log_4 9}}$.

405. $36^{\frac{1}{2} \log_6 18}$.

406. $25^{\frac{1}{4} \log_5 9}$.

407. $121^{\frac{1}{2} \log_{11} 35}$.

408. $64^{\frac{1}{4} \log_8 25}$.

409. $\frac{\log_7 25}{\log_7 5}$.

410. $\frac{\log_4 36}{\log_4 6}$.

411. $\frac{3 \log_{\frac{1}{2}} 9}{\log_{\frac{1}{2}} 27}$.

412. $\frac{6 \log_{0,3} 32}{\log_{0,3} 64}$.

413. $\lg 25 + \lg 4$.

414. $\log_{12} 4 + \log_{12} 36$.

415. $\log_{\frac{1}{8}} 4 + \log_{\frac{1}{8}} 2$.

416. $\log_{12} \frac{1}{2} + \log_{12} \frac{1}{72}$.

417. $\log_2 15 - \log_2 30$.

418. $\log_{0,2} 40 - \log_{0,2} 8$.

419. $\log_2 5 + \log_2 \frac{8}{5}$.

420. $\log_3 8 + 3\log_3 \frac{9}{2}$.

421. $\log_2 27 - 2\log_2 3 + \log_2 \frac{2}{3}$.

422. $\log_2 39 - \log_2 13 - \log_2 24$.

423. $\log_3 4 - 4\log_3 2 + \log_3 \frac{4}{9}$.

424. $\log_4 3 - \log_4 2 + \log_4 \frac{2}{3}$.

Найдите значение выражения.

425. $\frac{6\sin 42^\circ \cdot \cos 42^\circ}{\sin 84^\circ}$.

426. $\frac{11\sin 126^\circ \cdot \cos 126^\circ}{\sin 252^\circ}$.

427. $\frac{28\sin 27^\circ \cdot \cos 27^\circ}{\sin 54^\circ}$.

428. $\frac{36\sin 40^\circ \cdot \cos 40^\circ}{\sin 80^\circ}$.

429. $\frac{40\sin 30^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 60^\circ}$.

430. $\frac{14\sin 9^\circ \cdot \cos 9^\circ}{\sin 18^\circ}$.

431. $\frac{44\sin 86^\circ \cdot \cos 86^\circ}{\sin 172^\circ}$.

432. $\frac{76\sin 58^\circ \cdot \cos 58^\circ}{\sin 116^\circ}$.

433. $\frac{22\sin 176^\circ \cdot \cos 176^\circ}{\sin 352^\circ}$.

434. $\frac{16\sin 58^\circ \cdot \cos 58^\circ}{\sin 116^\circ}$.

435. $\frac{18\sin 42^\circ \cdot \cos 42^\circ}{\sin 84^\circ}$.

436. $\frac{24\sin 176^\circ \cdot \cos 176^\circ}{\sin 352^\circ}$.

437. $\frac{15\sin 34^\circ \cdot \cos 34^\circ}{\sin 68^\circ}$.

438. $\frac{27\sin 46^\circ \cdot \cos 46^\circ}{\sin 92^\circ}$.

439. $\frac{13\sin 1^\circ \cdot \cos 1^\circ}{\sin 2^\circ}$.

440. $\frac{17\sin 2^\circ \cdot \cos 2^\circ}{\sin 4^\circ}$.

441. $\frac{29\sin 43^\circ \cdot \cos 43^\circ}{\sin 86^\circ}$.

442. $\frac{41\sin 116^\circ \cdot \cos 116^\circ}{\sin 232^\circ}$.

443. $\frac{53\sin 109^\circ \cdot \cos 109^\circ}{\sin 218^\circ}$.

444. $\frac{71\sin 210^\circ \cdot \cos 210^\circ}{\sin 420^\circ}$.

Найдите значение выражения.

445. $\frac{12\sin 16^\circ \cdot \sin 74^\circ}{\sin 32^\circ}$.

446. $\frac{18\sin 116^\circ \cdot \sin 26^\circ}{\sin 232^\circ}$.

447. $\frac{46\sin 58^\circ \cdot \sin 32^\circ}{\sin 116^\circ}$.

448. $\frac{10\sin 142^\circ \cdot \sin 52^\circ}{\sin 284^\circ}$.

449. $\frac{8\sin 80^\circ \cdot \sin 10^\circ}{\sin 160^\circ}$.

450. $\frac{26\sin 26^\circ \cdot \sin 64^\circ}{\sin 52^\circ}$.

$$451. \frac{15 \cos 70^\circ \cdot \sin 70^\circ}{\cos 50^\circ}.$$

$$453. \frac{23 \sin 165^\circ \cdot \sin 75^\circ}{\sin 30^\circ}.$$

$$455. \frac{44 \cos 87^\circ \cdot \cos 177^\circ}{\sin 354^\circ}.$$

$$457. \frac{18 \cos 58^\circ \cdot \cos 32^\circ}{\cos 26^\circ}.$$

$$459. \frac{34 \cos 14^\circ \cdot \cos 76^\circ}{\sin 28^\circ}.$$

$$461. \frac{20 \sin 169^\circ \cdot \sin 79^\circ}{\cos 68^\circ}.$$

$$463. \frac{6 \sin 3^\circ \cdot \sin 87^\circ}{\cos 84^\circ}.$$

$$452. \frac{17 \cos 83^\circ \cdot \sin 83^\circ}{\cos 76^\circ}.$$

$$454. \frac{4 \sin 43^\circ \cdot \sin 47^\circ}{\sin 86^\circ}.$$

$$456. \frac{56 \cos 40^\circ \cdot \cos 50^\circ}{\cos 10^\circ}.$$

$$458. \frac{16 \cos 42^\circ \cdot \cos 48^\circ}{\cos 6^\circ}.$$

$$460. \frac{4 \cos 13^\circ \cdot \cos 103^\circ}{\sin 206^\circ}.$$

$$462. \frac{15 \sin 27^\circ \cdot \sin 63^\circ}{\cos 36^\circ}.$$

$$464. \frac{10 \cos 59^\circ \cdot \cos 31^\circ}{\sin 62^\circ}.$$

§ 3. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Решение текстовых задач, пожалуй, является самым трудным для учащихся. Причина затруднений, по-видимому, заключается в том, что учитель старается обучить решению каждого типа задач в отдельности, а не сформировать у ученика способность анализировать всякую задачу (что крайне важно) вне зависимости от ее разновидности.

Задачи, предложенные ниже, заимствованы из различных источников.

Оформлять решение задач можно как в виде таблиц, так и в виде кратких пояснений.

Рассмотрим типовые задачи и их решения.

Эти задачи можно условно разбить на следующие типы.

3.1. Задачи на числовые зависимости

Составление уравнений в задачах данного раздела следует непосредственно из условия задачи.

Пример 1. Найдите двузначное число, если известно, что цифра его единиц на 2 больше цифры десятков и произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

Решение.

Всякое двузначное число можно записать в виде \overline{xy} или в развернутом виде $10x + y$, где x — цифра десятков, y — цифра единиц.

Кроме того, $0 < x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$.

Если цифра единиц на 2 больше цифры десятков, то получим уравнение $y - x = 2$.

Так как по условию задачи произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144, то получим

$$(10x + y)(x + y) = 144.$$

Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = 2, \\ (10x + y)(x + y) = 144. \end{cases}$$

Решая эту систему подстановкой, находим два решения:

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -3\frac{2}{11}, \\ y_2 = -1\frac{2}{11}. \end{cases}$$

Вторая пара не подходит, так как x и y — целые положительные числа. Значит, искомое число 24.

Ответ: 24.

Пример 2. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели — соответственно числам 1, 3, 7.

Среднее арифметическое этих дробей равно $\frac{200}{441}$. Найдите эти дроби.

Решение.

Пусть x , $2x$, $5x$ — числители дробей (согласно условию задачи), y , $3y$, $7y$ — знаменатели. Тогда искомые дроби имеют вид $\frac{x}{y}$, $\frac{2x}{3y}$, $\frac{5x}{7y}$.

Из условия задачи имеем $\left(\frac{x}{y} + \frac{2x}{3y} + \frac{5x}{7y}\right) : 3 = \frac{200}{441}$, или

$$\frac{21x + 14x + 15x}{21y} : 3 = \frac{200}{441}, \quad \frac{50x}{63y} = \frac{200}{441}, \quad \text{откуда} \quad \frac{x}{y} = \frac{200}{441} \cdot \frac{63}{50}, \quad \text{или} \quad \frac{x}{y} = \frac{4}{7} —$$

I дробь, тогда $\frac{2x}{3y} = \frac{8}{21}$ — II дробь и $\frac{5x}{7y} = \frac{20}{49}$ — III дробь.

Ответ: $\frac{4}{7}, \frac{8}{21}, \frac{20}{49}$.

Пример 3. Найдите все трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими свойствами: первая цифра числа в три раза меньше суммы двух других его цифр; разность между самим числом и числом, получающимся из него перестановкой двух последних его цифр, неотрицательна и делится на 81.

Решение.

Пусть $xyz = 100x + 10y + z$ — искомое трехзначное число, где x — цифра сотен, y — десятков, z — единиц. Согласно условию $3x = y + z$ и число $100x + 10y + z - (100x + 10z + y)$ делится на 81. Упрощая,

имеем, что $9(y - z)$ делится на 81, т. е. $y - z$ кратно числу 9. Так как y и z — цифры, то имеем две возможности:

1) $y - z = 0$; 2) $y - z = 9$.

Если $y - z = 0$, то получим систему
$$\begin{cases} 3x = y + z, \\ y - z = 0, \end{cases}$$

откуда $3x = 2y$, что возможно при $x = 2, y = z = 3$, при $x = 4, y = z = 6$ и при $x = 6, y = z = 9$. Соответственно получим числа 233, 466 и 699, удовлетворяющие условию задачи.

Если $y - z = 9$, то получим систему
$$\begin{cases} 3x = y + z, \\ y - z = 9. \end{cases}$$

Заметим, что II уравнение системы возможно лишь при $z = 0, y = 9$; тогда $x = 3$ и искомое число равно 390. Таким образом, получим всего 4 числа.

Ответ: 233, 390, 466, 699.

Пример 4. Среднее пропорциональное двух чисел на 12 больше меньшего из этих чисел, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из чисел. Найдите эти числа.

Решение.

Пусть x — меньшее, а y — большее число. Пусть для определенности $x < y$, тогда первое условие задачи дает $\sqrt{xy} = x + 12$, а второе —

$\frac{x+y}{2} = y - 24$, или $y - x = 48$. Следовательно, имеем систему уравне-

$$\text{ний } \begin{cases} \sqrt{xy} = x + 12, \\ y - x = 48. \end{cases}$$

Решая систему, находим $x = 6, y = 54$.

Так как $x < y$, то найденная пара (6; 54) удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 6 и 54.

Пример 5. Сумма цифр двузначного числа равна 13. Если к этому числу прибавить 45, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке.

Найдите искомое двузначное число.

Решение.

Пусть x — цифра десятков, y — цифра единиц искомого числа. Тогда $10x + y$ — само число.

По условию задачи $x + y = 13$.

Если к искомому числу прибавить 45, то получим $10x + y + 45$. Тогда $10x + y + 45 = 10y + x$, или $9x + 45 = 9y$, или $y = x + 5$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 13, \\ y = x + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x + x + 5 = 13, \\ y = x + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 8, \\ y = x + 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 9. \end{cases}$$

Следовательно, 49 — искомое число.

Ответ: 49.

3.2. Задачи на движение

При решении задач на движение используются известные формулы:

$$S = v \cdot t; \quad v = \frac{S}{t}; \quad t = \frac{S}{v}.$$

При этом надо иметь в виду, что указанные величины должны быть в одной системе единиц, например: если путь в километрах, а время в часах, то скорость в километрах в час.

В задачах на движение по реке необходимо помнить следующие формулы:

$$\begin{aligned} v_{\text{по теч.}} &= v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч.}}, \\ v_{\text{против теч.}} &= v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч.}}, \\ v_{\text{соб.}} &= \frac{1}{2}(v_{\text{по теч.}} + v_{\text{против теч.}}). \end{aligned}$$

Кроме того, заметим, что если два каких-либо тела начинают движение одновременно, то в случае, если они встречаются, каждое с момента выхода и до встречи затрачивает, очевидно, одинаковое время. Точно так же обстоит дело в случае, если одно тело догоняет другое.

Если же тела выходят в разное время, то до момента встречи из них затрачивает времени больше то, которое выходит раньше.

Пример 6. Пешеход, идущий из совхоза на железнодорожную станцию, пройдя за первый час 3 км, рассчитал, что он опоздает к отходу поезда на 40 мин, если будет идти с той же скоростью. Поэтому остальной путь он прошел со скоростью 4 км/ч и прибыл на станцию за 15 мин до отхода поезда. Чему равно расстояние от совхоза до

станции и с какой постоянной на всем пути скоростью пешеход пришел бы на станцию точно к отходу поезда?

Решение.

Составим таблицу.

Пешеход пришел бы на станцию	Расстояние, км	Скорость, км/ч	Время, ч
Точно	x	v	$\frac{x}{v}$
С опозданием	$x - 3$	3	$\frac{x-3}{3}$
С опережением	$x - 3$	4	$\frac{x-3}{4}$

Заметим, что $15 \text{ мин} = \frac{15}{60} \text{ ч} = \frac{1}{4} \text{ ч}$, а $40 \text{ мин} = \frac{2}{3} \text{ ч}$.

Тогда, уравнивая промежутки времени, записанные в I и II, в I и

III строках, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{v} = \frac{x-3}{3} + 1, \\ \frac{x}{v} = \frac{x-3}{4} + 1 + \frac{1}{4}, \end{cases}$$

или, сравнивая правые части уравнений системы, имеем

$$\frac{x-3}{3} + 1 = \frac{x-3}{4} + \frac{5}{4}, \text{ или } 4x - 12 + 4 = 3x - 9 + 15,$$

$$x = 14, \text{ тогда } v = \frac{14}{4} = 3,5 \text{ (км/ч)}.$$

Ответ: 14 км, 3,5 км/ч.

Пример 7. Велосипедист и пешеход вышли из пунктов А и В, расстояние между которыми 12 км, и встретились через 20 мин. Пешеход прибыл в пункт А на 1 ч 36 мин позже, чем велосипедист в пункт В. Найдите скорость пешехода.

Решение.

Обозначим через x км/ч скорость пешехода. Тогда 12 км из пункта В в пункт А пешеход пройдет за $12/x$ ч, а велосипедист это же расстояние из пункта А в пункт В проедет на 1 ч 36 мин = 1,6 ч быстрее, т. е. за $\left(\frac{12}{x} - 1,6\right)$ ч, со скоростью 12: $\left(\frac{12}{x} - 1,6\right) = \frac{12x}{12 - 1,6x} = \frac{3x}{3 - 0,4x}$ км/ч.

Велосипедист и пешеход, двигаясь навстречу друг другу, расстояние 12 км прошли за 20 мин $= \frac{1}{3}$ ч.

Составим уравнение: $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{3 - 0,4x} = 12$, или

$0,4x^2 - 20,4x + 108 = 0$, $x^2 - 51x + 270 = 0$, откуда $x_1 = 6$, $x_2 = 45$.

Значение $x = 45$ не подходит, так как x — скорость пешехода.

Ответ: 6 км/ч.

Пример 8. Найдите длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

Решение.

Пусть x — длина поезда, тогда скорость поезда мимо неподвижного пассажира — $\frac{x}{7}$ м/с, а скорость поезда мимо платформы будет

$$\frac{x+378}{25} \text{ м/с.}$$

Согласно условию задачи эти скорости равны, т. е. имеем уравнение $\frac{x}{7} = \frac{x+378}{25}$, или $25x - 7x = 378 \cdot 7$, $18x = 378 \cdot 7$, откуда $x = 147$.

Следовательно, длина поезда 147 м.

Ответ: 147 м.

Пример 9. Моторная лодка прошла 5 км по течению и 6 км против течения реки, затратив на весь путь 1 ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите скорость лодки по течению.

Решение.

Пусть собственная скорость движения лодки x (км/ч), где $x > 0$. Составим таблицу.

Величины	Процессы движения		Общие показатели
	по течению	против течения	
S , км	5	6	
v , км/ч	$x + 3$?	$x - 3$	
t , ч	$\frac{5}{x+3}$	$\frac{6}{x-3}$	1

$$S = v \cdot t;$$

$$v_{\text{по теч.}} = v_{\text{соб.}} + v_{\text{теч. р.}};$$

$$v_{\text{пр. теч.}} = v_{\text{соб.}} - v_{\text{теч. р.}}$$

Так как на весь путь моторная лодка затратила $\left(\frac{5}{x+3} + \frac{6}{x-3}\right)$ ч,

а по условию на весь путь затрачен 1 ч, то получим уравнение

$$\frac{5}{x+3} + \frac{6}{x-3} = 1, \quad \begin{cases} 5(x-3) + 6(x+3) = x^2 - 9, \\ x \neq \pm 3. \end{cases}$$

$5x - 15 + 6x + 18 = x^2 - 9$, или $x^2 - 11x - 12 = 0$, откуда $x_1 = 12$, $x_2 = -1$ (не подходит, так как $x > 0$).

Если $x = 12$, то $x + 3 = 15$. Итак, скорость лодки по течению реки 15 км/ч.

Ответ: 15 км/ч.

Пример 10. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу и встретились через 3 ч 20 мин. Сколько времени понадобится каждому из них, чтобы пройти все расстояние, если первый пришел в то место, из которого вышел второй, на 5 ч позже, чем второй пришел в то место, откуда вышел первый?

Решение.

Так как в задаче нет никаких данных о пройденном расстоянии, то удобно все расстояние принять за 1. Тогда скорость $v_1 = \frac{1}{x}$, а $v_2 = \frac{1}{y}$,

где x часов — время в пути первого пешехода, а y часов — время второго пешехода.

Согласно условию задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 3\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + 3\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{y} = 1, \\ x - y = 5, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{10}, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Решая полученную систему способом подстановки, получим $x = 10$, $y = 5$.

Ответ: 10 ч, 5 ч.

Пример 11. Из двух городов, расстояние между которыми 720 км, по параллельным путям отправляются навстречу друг другу два поезда и встречаются на середине пути. Второй поезд вышел на 1 ч позже первого со скоростью, на 5 км/ч большей, чем скорость первого поезда. Найдите скорость второго поезда.

Решение.

Пусть скорость первого поезда равна x км/ч, тогда на свой путь потребуется $\frac{360}{x}$ ч. Скорость второго поезда $(x + 5)$ км/ч, а время,

пройденное им, составит $\frac{360}{x+5}$ ч. Так как второй поезд вышел на 1 ч

позже первого, то получим уравнение $\frac{360}{x} = \frac{360}{x+5} + 1$, где $x > 0$.

$360(x + 5) = 360x + x(x + 5)$, или $360x + 1800 = 360x + x^2 + 5x$, или $x^2 + 5x - 1800 = 0$, откуда находим $x_1 = 40$, $x_2 = -45$.

Поскольку $x > 0$, то корень $x = -45$ не подходит. Значит, скорость второго поезда будет равна $x + 5 = 45$ км/ч.

Ответ: 45.

Пример 12. Из городов А и В навстречу друг другу выехали велосипедист и мотоциклист. Мотоциклист приехал в В на 4 ч раньше, чем велосипедист приехал в А, а встретились они через 50 минут после выезда. Сколько часов затратил на весь путь из В в А велосипедист?

Решение.

Пусть расстояние между городами А и В равно 1. Примем время движения велосипедиста за x ч, тогда время движения мотоциклиста будет $(x - 4)$ ч, где $x > 4$ (по смыслу задачи). К моменту встречи они находились в пути $50 \text{ мин} = \frac{5}{6}$ ч.

Следовательно, получим уравнение

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-4}\right) \cdot \frac{5}{6} = 1, \text{ или } \frac{1}{x} + \frac{1}{x-4} = \frac{6}{5}, x > 4.$$

$5(x - 4) + 5x = 6x(x - 4)$, или $6x^2 - 34x + 20 = 0$, или $3x^2 - 17x + 10 = 0$, $D = 289 - 120 = 13^2 > 0$.

$x_{1,2} = \frac{17 \pm 13}{6}$, откуда $x_1 = 5$, $x_2 = \frac{2}{3}$ (не подходит, так как $x > 4$).

Следовательно, велосипедист находился в пути 5 часов.

Ответ: 5.

Пример 13. Первые 180 км автомобиль ехал со скоростью 90 км/ч, следующие 200 км — со скоростью 80 км/ч, а затем 150 км — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.

$$v_{\text{ср.}} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{t_1 + t_2 + t_3}, \text{ где } S_1 = 180 \text{ км, } S_2 = 200 \text{ км, } S_3 = 150 \text{ км.}$$

$$\text{Тогда } t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{180}{90} = 2 \text{ (ч)}, \quad t_2 = \frac{S_2}{v_2} = \frac{200}{80} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ (ч)},$$

$$t_3 = \frac{S_3}{v_3} = \frac{150}{100} = 1,5 \text{ (ч)}.$$

$$\text{Тогда } v_{\text{ср.}} = \frac{180 + 200 + 150}{2 + 2,5 + 1,5} = \frac{540}{6} = 90 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 90.

Пример 14. Скорость теплохода в неподвижной воде 24 км/ч. Он проходит по течению реки и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 2 км/ч, стоянка длится 3 часа, а в исходный пункт теплоход возвращается через 27 часов после отплытия. Сколько километров прошел теплоход за весь рейс?

Решение.

Пусть весь путь теплохода равен $2x$ км. Время в пути составляет 30 ч, а стоянка — 3 ч, значит, на весь путь ушло $30 - 3 = 27$ ч.

Получим уравнение

$$\frac{x}{24 - 2} + \frac{x}{24 + 2} = 24, \text{ или } \frac{x}{22} + \frac{x}{26} = 24, \text{ или } \frac{26x + 22x}{22 \cdot 26} = 24,$$

$$\frac{12x}{11 \cdot 13} = 24, \text{ откуда } x = 2 \cdot 11 \cdot 13 = 286.$$

Значит, весь путь теплохода составляет $286 \cdot 2 = 572$ км.

Ответ: 572.

3.3. Задачи на совместную работу

Основными компонентами этого типа задач являются: а) работа A ; б) время t ; в) производительность труда (работа в единицу времени).

Пример 15. Две бригады должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы I бригада получила другое задание, поэтому II бригада закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. На сколько дней II бригада убрала бы весь урожай быстрее I, если бы каждая бригада работала отдельно?

Решение.

Обозначим весь урожай через 1. Пусть I бригада может убрать весь урожай за x дней, а II — за y дней. Тогда производительность труда I бригады будет $\frac{1}{x}$, а II — $\frac{1}{y}$ — это часть урожая, которую убирает каждая бригада ежедневно.

Согласно условию задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ \frac{8}{12} + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 7 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{3}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{28}, \\ x = 28, \\ y = 21; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 28, \\ y = 21. \end{cases}$$

Итак, I бригада убереет весь урожай за 28 дней, а II — за 21 день, т. е. II бригада весь урожай убереет на 7 дней быстрее I.

Ответ: 7 дней.

Пример 16. Бассейн наполняется водой двумя трубами, действующими одновременно, за 2 ч. За сколько часов может наполнить бассейн I труба, если она, действуя одна, наполняет бассейн на 3 ч быстрее, чем II?

Решение.

Обозначим через x время наполнения бассейна I трубой. Заметим, что в условии задачи не сказано, в каких единицах измеряется объем бассейна. Следовательно, для решения задачи это неважно, и мы

вместо условных единиц и обозначения V можем принять в принципе любое число, из которого самое удобное — 1.

Составим таблицу.

Величины	Процессы заполнения бассейна		
	I трубой	II трубой	I и II вместе
V	1	1	1
$N, 1/\text{ч}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{3}{x+3}$	$\frac{1}{2}$
$t, \text{ч}$	$x ?$ на 3 ч меньше, чем _____	$x + 3$	2

N — работа в единицу времени;
 $V = N \cdot t$;
 $N_{\text{совм.}} = N_I + N_{II}$;
 $t_{\text{совм.}} < t_I + t_{II}$.

Для составления уравнения используем связь величин во II строке таблицы: $N_I + N_{II} = N_{\text{совм.}}$, т. е. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+3} = \frac{1}{2}$, область определения уравнения: $x \neq 0, x \neq -3$.

Решая уравнение, находим $x_1 = 3, x_2 = -2$.

Заметим, что оба корня удовлетворяют области определения уравнения, но корень $x = -2$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: I труба наполняет бассейн за 3 ч.

Пример 17. Первому трактору на вспашку всего поля требуется на 2 ч меньше, чем третьему, и на 1 ч больше, чем второму. При совместной работе первого и второго тракторов поле может быть вспахано за 1 ч 12 мин. Какое время на вспашку поля будет затрачено при совместной работе всех трех тракторов?

Решение.

Пусть x ч — время, необходимое для вспашки поля I трактору, y ч — II и z ч — III трактору.

Примем площадь всего поля за единицу, тогда $\frac{1}{x}$ — производительность I, $\frac{1}{y}$ — II и $\frac{1}{z}$ — III трактора.

Согласно условию задачи имеем $z - x = 2$ и $x - y = 1$.

Так как 1 ч 12 мин = $\frac{6}{5}$ ч, то за это время I трактор выполнит

$\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{5x}$ часть работы, а II — $\frac{6}{5} \cdot \frac{1}{y} = \frac{6}{5y}$ часть работы.

Следовательно, имеем уравнение $\frac{6}{5x} + \frac{6}{5y} = 1$, или $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}$.

Таким образом, задача сводится к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} z - x = 2, \\ x - y = 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} z = x + 2, \\ y = x - 1, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} = \frac{5}{6}. \end{cases}$$

Решив III уравнение системы, находим $x_1 = 3$, $x_2 = -0,4$ (не удовлетворяет условию задачи, так как $x > 0$).

Если $x = 3$, то $z = 3 + 2 = 5$ и $y = 3 - 1 = 2$.

Следовательно, при совместной работе трех тракторов производительность труда составит $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{31}{30}$, тогда время на вспашку поля тремя тракторами составит $\frac{30}{31}$ ч.

Ответ: $\frac{30}{31}$ ч.

Пример 18. На изготовление 480 деталей первый рабочий тратит на 5 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 546 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 4 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Решение.

Пусть первый рабочий изготавливает за час x деталей, тогда второй рабочий за час изготавливает $(x - 4)$ деталей, где $x > 4$. На изготовление 480 деталей первый рабочий тратит на 5 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 546 таких же деталей. Следовательно, имеем уравнение

$$\frac{480}{x} + 5 = \frac{546}{x-4}, \text{ где } x > 4,$$

$$\frac{480 + 5x}{x} = \frac{546}{x-4}, \text{ или } (480 + 5x)(x - 4) = 546x, \text{ или}$$

$$480x + 5x^2 - 1920 - 20x = 546x, \text{ или } 5x^2 - 86x - 1920 = 0.$$

$$D/4 = 43^2 + 5 \cdot 1920 = 1849 + 9600 = 11\,449 = 107^2 > 0, \quad x_{1,2} = \frac{43 \pm 107}{5},$$

откуда $x_1 = 30$, $x_2 = -12,8$ (не подходит, так как $x > 4$).

Значит, первый рабочий делает 30 деталей в час.

Ответ: 30.

Пример 19. Один мастер может выполнить заказ за 15 часов, а другой — за 7,5 часа. За сколько часов выполнят заказ оба мастера, работая вместе?

Решение.

І способ

Примем всю работу за 1. Тогда первый мастер выполнит $\frac{1}{15}$ часть работы в час, а второй — $\frac{1}{7,5} = \frac{2}{15}$ работы в час. Работая вместе, они выполняют $\frac{1}{15} + \frac{2}{15} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ работы в час.

Следовательно, всю работу они выполнят за $1 : \frac{1}{5} = 5$ часов.

Ответ: 5.

ІІ способ

Два мастера, работая вместе, выполнят заказ за $\frac{1}{\frac{1}{15} + \frac{2}{15}} = \frac{15}{1+2} = 5$ часов.

Ответ: 5.

ІІІ способ

Два мастера, работая вместе, за 15 часов могут выполнить 3 таких заказа, тогда один заказ они смогут выполнить за $15 : 3 = 5$ часов.

Ответ: 5.

Пример 20. Артур и Гриша красят забор за 8 часов, Гриша и Сергей — за 12 часов, а Сергей и Артур — за 24 часа. За сколько часов они покрасят забор, работая вместе?

Решение.

За 1 час Артур и Гриша красят $\frac{1}{8}$ забора, Гриша и Сергей —

$\frac{1}{12}$ забора, а Сергей и Артур — $\frac{1}{24}$ забора.

Работая вместе, за 1 час два Артура, Гриши и Сергея покрасили бы $\frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{3+2+1}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ забора, т. е. они могли бы покрасить забор за 4 часа.

Поскольку каждый из ребят был учтен 2 раза, то они могут покрасить забор за $4 \cdot 2 = 8$ часов.

Ответ: 8.

Пример 21. Плиточник планирует уложить 156 м^2 плитки. Если он будет укладывать на 13 м^2 в день больше, чем запланировал, то закончит работу на 2 дня раньше. Сколько квадратных метров плитки в день планирует укладывать плиточник?

Решение.

Пусть плиточник планирует укладывать $x \text{ м}^2$ плитки за y дней. Если он будет укладывать $(x + 13) \text{ м}^2$ плитки в течение $(y - 2)$ дней, то выполнит ту же работу. По условию задачи надо уложить 156 м^2 плитки. Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} xy = (x + 13)(y - 2), \\ xy = 156; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = xy + 13y - 2x - 26, \\ xy = 156; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = 13y - 26, \\ 2x \cdot y = 312; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 13y - 26, \\ (13y - 26) \cdot y = 312. \end{cases}$$

$(y - 2)y = 24$, $y^2 - 2y - 24 = 0$, откуда $y_1 = 6$, $y_2 = -4$ (не подходит, так как $y > 2$).

Если $y = 6$, то $x = 156 : y = 26$.

Таким образом, плиточник планирует в течение 6 дней укладывать по 26 м^2 плитки в день.

Ответ: 26.

3.4. Задачи на сплавы и смеси

Задачи этого раздела вызывают наибольшие затруднения. Речь в них идет о составлении смесей, сплавов, растворов и т. д. Решение этих задач связано с понятиями «концентрация», «процентное содержание», «влажность» и т. д.

Пример 22. Смешали 30 %-й раствор соляной кислоты с 10 %-м и получили 600 г 15 %-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

Решение.

Пусть было взято x граммов 30 %-го раствора, а 10 %-го — y граммов, тогда $x + y = 600$. Так как первый раствор 30 %-й, то в x граммах этого раствора содержится $0,3x$ грамма кислоты. Аналогично в y граммах 10 %-го раствора содержится $0,1y$ грамма кислоты. В полученной смеси по условию задачи содержится $600 \cdot 0,15 = 90$ г кислоты, следовательно, получим уравнение

$$0,3x + 0,1y = 90, \text{ или } 3x + y = 900.$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 3x + y = 900. \end{cases}$$

Вычитая из II уравнения I, получим $2x = 900 - 600$; откуда $x = 150$, тогда $y = 600 - 150 = 450$.

Ответ: 150 г, 450 г.

Пример 23. Вычислите массу и пробу сплава серебра с медью, зная, что, сплавив его с 3 кг чистого серебра, получили сплав 900-й пробы (т. е. в сплаве 90 % серебра), а сплавив с 2 кг сплава 900-й пробы, получили сплав 840-й пробы.

Решение.

Пусть масса данного сплава x кг, в нем содержится y % серебра: $0,01xy$ кг серебра находится в данном сплаве. $(x + 3)$ кг — масса нового сплава, в нем содержится $(0,01xy + 3)$ кг серебра.

Так как новый сплав 900-й пробы, значит, в нем содержится серебра $0,9(x + 3)$. Следовательно, имеем уравнение

$$0,01xy + 3 = 0,9(x + 3).$$

$(x + 2)$ кг — масса III сплава 840-й пробы. В нем содержится $0,84(x + 2)$ кг серебра. Но этот сплав состоит из x кг данного ($0,01xy$ серебра) и 2 кг 900-й пробы (1,8 кг серебра).

Получим второе уравнение

$$0,01xy + 1,8 = 0,84(x + 2).$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 0,01xy + 3 = 0,9(x + 3), \\ 0,01xy + 1,8 = 0,84(x + 2). \end{cases}$$

Вычитая из I уравнения системы II, получим

$$3 - 1,8 = 0,9(x + 3) - 0,84(x + 2),$$

или, упрощая, находим $x = 3$. Подставив значение $x = 3$ в I уравнение системы, находим $y = 80$.

Значит, данный сплав массой 3 кг содержит 80 % серебра.

Ответ: масса сплава 800-й пробы равна 3 кг.

Пример 24. Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45 % меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому сплаву, чтобы получившийся новый сплав содержал 40 % меди?

Решение.

Пусть x кг — масса олова, которую надо добавить к сплаву. Тогда получится сплав массой $(12 + x)$ кг, содержащий 40 % меди. Значит, в новом сплаве имеется $\frac{12+x}{100} \cdot 40$ кг меди. Исходный сплав массой

12 кг содержал 45 % меди, т. е. меди в нем было $\frac{12}{100} \cdot 45$ кг. Так как

масса меди и в первоначальном, и в новом сплаве одна и та же, то получим уравнение

$$\frac{12+x}{100} \cdot 40 = \frac{12}{100} \cdot 45, \text{ или } (12+x) 8 = 12 \cdot 9,$$

откуда находим $x = 1,5$. Следовательно, к исходному сплаву надо добавить 1,5 кг олова.

Ответ: 1,5 кг.

Пример 25. Имеется два сплава. Первый содержит 10 % никеля, второй — 30 % никеля. Из этих сплавов получили третий сплав массой 240 кг, содержащий 25 % никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Решение.

Пусть масса первого сплава x_1 кг, масса второго — x_2 кг, тогда массовое содержание никеля в первом и втором сплавах будет соответственно $0,1x_1$ и $0,3x_2$. По условию задачи из этих сплавов получили третий сплав массой 240 кг, содержащий 25 % никеля.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 240, \\ 0,1x_1 + 0,3x_2 = 0,25 \cdot 240; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 240, \\ x_1 + 3x_2 = 600. \end{cases}$$

Вычитая из II уравнения I, находим

$$3x_2 - x_2 = 600 - 240, x_2 = 180, \text{ тогда } x_1 = 240 - x_2 = 60.$$

Значит, первый сплав легче второго на $180 - 60 = 120$ кг.

Ответ: 120.

Пример 26. После смешения двух растворов, первый из которых содержал 180 г кислоты, а второй — 90 г такой же кислоты, получили 600 г нового раствора. Найдите концентрацию первого раствора (в процентах), если известно, что она на 30 больше концентрации второго (в процентах).

Решение.

Пусть концентрация первого раствора равна x , тогда концентрация второго раствора $x - 0,3$, где $x > 0,3$. Смешав растворы, получили 600 г смеси. Следовательно, получим уравнение

$$\frac{180}{x} + \frac{90}{x-0,3} = 600.$$

Разделим обе части уравнения на 30:

$$\frac{60}{x} + \frac{3}{x-0,3} = 20, x > 0,3.$$

$$6(x - 0,3) + 3x = 20x(x - 0,3), \text{ или } 9x - 1,8 = 20x^2 - 6x, \text{ или } 20x^2 - 15x + 1,8 = 0.$$

Умножим обе части уравнения на 5:

$$100x^2 - 75x + 9 = 0,$$

$$D = 5625 - 3600 = 45^2 > 0, x_{1,2} = \frac{75 \pm 45}{200}, \text{ откуда } x_1 = 0,6, x_2 = 0,15.$$

Так как $x > 0,3$, то корень $x = 0,15$ не подходит.

Следовательно, концентрация первого раствора равна $100 \% \cdot 0,6 = 60 \%$.

Ответ: 60.

Пример 27. Смешали 3 л 18 %-го водного раствора некоторого вещества с 7 л 28 %-го водного раствора этого же вещества. Сколько % составляет концентрация получившегося раствора?

Решение.

Известно, что $C = \frac{V_{\text{в-ва}}}{V_{\text{р-ра}}} \cdot 100 \%$.

Следовательно, концентрация получившегося раствора равна

$$\frac{0,18 \cdot 3 + 0,28 \cdot 7}{3 + 7} \cdot 100 \% = \frac{18 \cdot 3 + 28 \cdot 7}{10} = \frac{54 + 196}{10} = \frac{250}{10} = 25 \%.$$

Ответ: 25.

3.5. Задачи на проценты

Пример 28. Если из 225 кг руды получается 34,2 кг меди, то каково процентное содержание меди в руде?

Решение.

Если 225 кг руды — 100 %, то

34,2 кг — x %, откуда

$x = 34,2 \cdot 100 : 225$, или $x = 15,2$ %.

Ответ: 15,2 %.

Пример 29. Цену товара сперва снизили на 20 %, затем новую цену снизили еще на 15 % и, наконец, после перерасчета произвели снижение ее на 10 %. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

Решение.

Пусть x руб. — первоначальная цена товара, что соответствует 100 %. Тогда после I снижения цена товара будет

$$x - 0,2x = 0,8x \text{ (руб.)}.$$

После II снижения — $0,8x - 0,15 \cdot 0,8x = 0,68x$ (руб.), а после III — $0,68x - 0,68x \cdot 0,1 = 0,612x$ (руб.).

Всего цена товара снизилась на $x - 0,612x = 0,388x$ (руб.).

Итак, x — 100 %,

$0,388x$ — y %, откуда имеем

$y = (0,388x \cdot 100 \%) : x = 38,8$ %.

Таким образом, первоначальную цену товара снизили всего на 38,8 %.

Ответ: на 38,8 %.

Пример 30. Антикварный магазин, купив два предмета за 225 000 руб., продал их, получив 40 % прибыли. Сколько стоил магазину каждый предмет, если на первом прибыли получено 25 %, а на втором — 50 %?

Решение.

Пусть I предмет куплен за x руб., тогда II — за $(225\,000 - x)$ руб. При продаже I предмета получено 25 % прибыли. Значит, он продан за $1,25x$ руб. Второй предмет, на котором получено 50 % прибыли, продан за $1,5(225\,000 - x)$ руб. По условию общий % прибыли (по отношению к покупной цене 225 000 руб.) составлял 40 %. Значит, общая сумма выручки была $1,40 \cdot 225\,000 = 315\,000$ руб.

Имеем уравнение $1,25x + 1,5(225\,000 - x) = 315\,000$.

Умножая обе части уравнения на 4, получим

$$5x + 6(225\,000 - x) = 315\,000 \cdot 4, \text{ или}$$

$$6x - 5x = 6 \cdot 225\,000 - 4 \cdot 315\,000, \text{ откуда } x = 90\,000, \text{ тогда } 225\,000 - x = 135\,000.$$

Итак, I предмет куплен за 90 000 руб., II — за 135 000 руб.

Ответ: 90 000 руб., 135 000 руб.

Пример 31. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $3\sqrt{5}$ м. Определите катеты, если известно, что после того, как один из них увеличить на $133\frac{1}{3}\%$, а другой — на $16\frac{2}{3}\%$, сумма их длин будет равна 14 м.

Решение.

Пусть длины катетов (в метрах) x и y . Так как гипотенуза равна $3\sqrt{5}$ м, то по теореме Пифагора получим уравнение $x^2 + y^2 = 3\sqrt{5}$, или $x^2 + y^2 = 45$.

После увеличения на $133\frac{1}{3}\%$, т. е. на $133\frac{1}{3}:100 = 1\frac{1}{3}$ своей длины, I катет станет равным $2\frac{1}{3}x$, а II катет после увеличения на $16\frac{2}{3}\%$ будет равен $1\frac{1}{6}y$.

Получим уравнение $2\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{6}y = 14$.

В итоге имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ 2\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{6}y = 14; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ \frac{7}{3}x + \frac{7}{6}y = 14; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ 2x + y = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (12 - 2x)^2 = 45, \\ y = 12 - 2x, \end{cases}$$

откуда находим $x = 3$, $y = 6$. Значит, катеты равны 3 м и 6 м.

Ответ: 3 м, 6 м.

Пример 32. При выполнении работы по математике 12 % учеников класса вовсе не решили задачи, 32 % решили с ошибками, остальные 14 человек решили верно. Сколько учеников было в классе?

Решение.

Верно решившие 14 человек составляют

$100 \% - (12 \% + 32 \%) = 56 \%$ всех учеников класса.

Тогда общее число учеников класса будет равно

$14 \cdot 100 : 56 = 25$ (учеников).

Ответ: 25 учеников.

Пример 33. Пять одинаковых рубашек дешевле куртки на 10 %. На сколько процентов шесть таких же рубашек дороже куртки?

Решение.

Стоимость пяти рубашек составляет $100 \% - 10 \% = 90 \%$ стоимости куртки. Следовательно, стоимость одной рубашки составляет $90 \% : 5 = 18 \%$ стоимости куртки. Значит, стоимость шести рубашек составляет $18 \% \cdot 6 = 108 \%$, что превышает стоимость куртки на $108 \% - 100 \% = 8 \%$.

Ответ: на 8.

Пример 34. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если он, выставленный на продажу за 30 000 руб., через два года был продан за 24 843 руб.

Решение.

Пусть цена холодильника ежегодно снижалась на $p \%$ в год. Тогда за 2 года она снизилась на $(1 - 0,01p)^2$, откуда имеем

$30\,000(1 - 0,01p)^2 = 24\,843$, или

$(1 - 0,01p)^2 = 0,8281$, где $1 - 0,01p > 0$, т. е. $p < 100$.

Следовательно, $1 - 0,01p = 0,91$, или $100 - p = 91$, откуда $p = 100 - 91 = 9$, т. е. цена уменьшалась ежегодно на 9 %.

Ответ: на 9.

3.6. Задачи на разбавление

Пример 35. Из бака, наполненного спиртом, вылили часть спирта и долили водой. Потом из бака вылили столько же литров смеси, после чего в баке осталось 49 л чистого спирта. Сколько литров спирта вылили в первый раз и сколько — во второй, если вместимость бака равна 64 л?

Решение.

Если в первый раз из бака вылили x л спирта, то осталось $(64 - x)$ л спирта. Когда долили бак водой, получили 64 л смеси спирта и воды, в которой содержится $(64 - x)$ л спирта. Затем x л спирта смеси вылили, значит, вылили и спирт.

$\frac{x(64 - x)}{64}$ л спирта — вылили во второй раз,

$(64 - x) - \frac{x(64 - x)}{64}$ л спирта — осталось в баке.

Так как в баке осталось 49 л спирта, то можно составить уравнение: $(64 - x) - \frac{x(64 - x)}{64} = 49$, или

$64(64 - x) - x(64 - x) = 64 \cdot 49$, или

$(64 - x)^2 = 64 \cdot 49$, или $64 - x = \pm 56$, откуда $x_1 = 8$, $x_2 = 120$ (не удовлетворяет условию задачи).

Итак, в первый раз из бака вылили 8 л спирта, а во второй раз — $\frac{8 \cdot (64 - 8)}{64} = \frac{8 \cdot 56}{64} = 7$ (л) спирта.

Ответ: 8 л, 7 л.

Пример 36. Сосуд емкостью 8 л наполнен воздухом, содержащим 16 % кислорода. Из этого сосуда выпускают некоторое количество воздуха и впускают такое же количество азота, после чего опять выпускают такое же, как и в первый раз, количество смеси и опять дополняют таким же количеством азота. В новой смеси оказалось кислорода 9 %. Определите, по сколько литров смеси выпускалось каждый раз из сосуда.

Решение.

Пусть из сосуда выпущено x л воздуха и введено такое же количество азота. В оставшемся количестве $(8 - x)$ л воздуха содержится

$(8 - x) \cdot 0,16$ л кислорода. Это количество приходится на 8 л смеси, так что на 1 л приходится $\frac{(8-x) \cdot 0,16}{8}$ л кислорода. Следовательно, когда вторично x л смеси заменяется x л азота, остающееся количество $(8 - x)$ л смеси содержит $\frac{(8-x) \cdot 0,16}{8} \cdot (8 - x) = (8 - x)^2 \cdot 0,02$ л кислорода.

Значит, по отношению к общему количеству смеси (8 л) содержание кислорода составляет $\frac{(8-x)^2 \cdot 0,02}{8} \cdot 100 = \frac{(8-x)^2}{4}$. Согласно условию получим уравнение $\frac{(8-x)^2}{4} = 9$, откуда $(8 - x)^2 = 36$, $8 - x = \pm 6$, т. е. $x_1 = 2$, $x_2 = 14$.

Очевидно, что 14 л выпустить из сосуда, в котором было 8 л, невозможно.

Значит, каждый раз из сосуда выпускали по 2 л смеси.

Ответ: 2 л.

3.7. Задачи на прогрессии

Пример 37. На зимних каникулах Грише надо решить 360 задач. Ежедневно он решает на одно и то же количество задач больше по сравнению с предыдущим днем. Известно, что за первый день Гриша решил 8 задач. Определите, сколько задач он решил в последний день, если все задачи Гриша решил за 20 дней.

Решение.

В первый день Гриша решил $a_1 = 8$ задач, в последний — a_{20} задач, а всего надо решить $S_{20} = 360$ задач.

Известно, что $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, где $a_1 = 8$, $n = 20$.

Имеем $S_{20} = \frac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20 = 10 \cdot (8 + a_{20})$.

По условию задачи $S_{20} = 360$, тогда получим $10(8 + a_{20}) = 360$, $8 + a_{20} = 36$, откуда $a_{20} = 28$ (задач).

Ответ: 28.

Пример 38. Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла 8 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями 100 м.

Решение.

Пусть улитка проползла в первый день a_1 метров, во второй — a_2 , ..., в последний — a_n метров. Тогда согласно условию задачи имеем $a_1 + a_n = 8$ м.

За n дней улитка проползла $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{8}{2} \cdot n = 4n$, что по условию составляет 100 м. Следовательно, $4n = 100$, откуда $n = 100 : 4 = 25$, т. е. улитка потратила на весь путь 25 дней.

Ответ: 25.

Пример 39. Бригада маляров красит забор длиной 320 метров, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 80 метров забора. Определите, сколько дней бригада маляров красила весь забор.

Решение.

Пусть в первый день бригада покрасила a_1 метров забора, во второй — a_2 , ..., в последний — a_n метров забора.

По условию задачи $a_1 + a_n = 80$ м, а за n дней было покрашено

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{80}{2} \cdot n = 40n \text{ метров забора.}$$

Так как длина забора 320 м, то имеем $40n = 320$, откуда $n = 8$ (дней). Значит, бригада покрасила весь забор за 8 дней.

Ответ: 8.

Задачи для самостоятельного решения

Задачи на составление уравнений I степени

1. Числитель дроби на 3 меньше знаменателя. Если ее числитель и знаменатель увеличить на 4, то получится $\frac{2}{3}$. Найдите дробь.

2. Знаменатель дроби на 5 больше ее числителя. Если к числителю этой дроби прибавить 14, а от знаменателя отнять 1, то получится дробь, обратная данной. Найдите дробь.

3. Участок площадью 864 га разделен на 3 поля так, что третье поле имеет площадь, равную сумме площадей первых двух полей. Определите площадь каждого поля, если известно, что площадь второго поля относится к площади первого как 11 : 5.

4. В одном элеваторе зерна было в 2 раза больше, чем в другом. Из первого элеватора вывезли 750 т зерна, а во второй элеватор привезли 350 т, после чего в обоих элеваторах зерна стало поровну. Сколько зерна было первоначально в каждом элеваторе?

5. Расстояние между городами А и В по шоссе равно 50 км. Из города А в город В отправился велосипедист, а через 1 ч 30 мин вслед за ним выехал мотоциклист, который обогнал велосипедиста и прибыл в город В на 1 ч раньше. Найдите скорость каждого, зная, что мотоциклист двигался со скоростью, в 2,5 раза большей, чем велосипедист.

6. Расстояние между двумя станциями электропоезд проходит за 1 ч 30 мин. Если скорость увеличить на 10 км/ч, то это же расстояние электропоезд пройдет за 1 ч 20 мин. Определите расстояние между станциями.

7. Пассажир, ехавший в поезде со скоростью 40 км/ч, заметил, что встречный поезд проехал мимо за 3 с. Определите скорость встречного поезда, если известно, что длина его 75 м.

8. Переднее колесо повозки на некотором расстоянии сделало на 15 оборотов больше, чем заднее. Окружность переднего колеса равна 2,5 м, а заднего — 4 м. Сколько оборотов сделало каждое колесо и какое расстояние проехала повозка?

9. Заказ по выпуску машин завод должен был выполнить за 15 дней. Но уже за два дня до срока завод не только выполнил план, но и выпустил сверх плана еще 6 машин, так как ежедневно выпу-

скал по 2 машины сверх плана. Сколько машин должен был выпустить завод по плану?

10. Смешивают 2 кг горячей воды и 3 кг воды при температуре 10°C . Температура смеси оказалась равной 40°C . Найдите температуру взятой для смеси горячей воды.

Задачи на составление систем уравнений I степени

11. За три пары лыж и четыре пары коньков уплатили 4700 руб. Сколько стоит пара лыж, а сколько стоит пара коньков, если две пары коньков дороже одной пары лыж на 100 руб.?

12. Пять одинаковых шариковых ручек дороже двух коробок цветных карандашей на 25 руб. 50 коп., а две шариковые ручки дешевле пяти коробок цветных карандашей на 15 руб. Сколько стоят одна шариковая ручка и одна коробка цветных карандашей?

13. Из двух сортов муки ценой 31 руб. и 46 руб. за килограмм составили 50 кг смеси ценой по 40 руб. за килограмм. Сколько килограммов муки каждого сорта входит в смесь?

14. Для технических целей смешали 5 л спирта I сорта и 7 л спирта II сорта и получили спирт крепостью 65° . Если взять 20 л I сорта и 4 л II сорта, то смесь выйдет крепостью 70° . Определите крепость спирта каждого сорта.

15. Из двух городов, расстояние между которыми 650 км, отправляются одновременно навстречу друг другу два поезда. Через 10 ч после отправления поезда встречаются. Если же первый поезд отправится на 4 ч 20 мин раньше второго, то встреча произойдет через 8 ч после отправления второго поезда. Найдите скорость каждого поезда.

16. Две бригады рабочих должны были по плану изготовить за месяц 680 деталей. Первая бригада перевыполнила месячное задание на 20 %, а вторая — на 15 %, и поэтому обеими бригадами было изготовлено сверх плана 118 деталей. Сколько деталей должна была изготовить по плану каждая бригада за месяц?

17. Токарь и ученик должны были изготовить за смену 65 деталей. Благодаря тому что токарь перевыполнил план на 10 %, а ученик — на 20 %, они изготовили 74 детали. Сколько деталей по плану должен был изготовить за смену токарь и сколько — ученик?

18. По окружности, длина которой 999 м, движутся два тела по одному и тому же направлению и встречаются через каждые 37 мин. Определите скорость каждого тела, если известно, что скорость первого в 4 раза больше скорости второго.

Задачи на составление квадратных уравнений

19. Садовый участок, имеющий форму прямоугольника, одна сторона которого на 10 м больше другой, требуется обнести изгородью. Определите длину изгороди, если известно, что площадь участка равна 1200 м^2 .

20. От листа жести, имеющего форму квадрата, отрезали полосу шириной 3 дм, после чего площадь оставшейся части листа стала равна 10 дм^2 . Определите первоначальные размеры листа жести.

21. В зрительном зале клуба было 320 мест. После того как число мест в каждом ряду увеличили на 4 и добавили еще один ряд, в зрительном зале стало 420 мест. Сколько стало рядов в зрительном зале клуба?

22. Лодка прошла против течения 22,5 км и по течению — 28,5 км, затратив на весь путь 8 ч. Определите скорость лодки в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2,5 км/ч.

23. С аэродрома вылетают одновременно в пункт, отстоящий от него на 3600 км, два самолета. Скорость первого из них на 120 км/ч больше скорости второго, поэтому он прилетает к месту назначения на час раньше второго. Найдите скорость каждого самолета.

24. Из пункта А отправили по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин вслед за плотом из того же пункта вышла моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 м. Найдите скорость плота, если известно, что скорость моторной лодки на 12 км/ч больше скорости плота.

25. Поезд должен был пройти 840 км. В середине пути он был задержан на 30 мин, поэтому, чтобы прибыть вовремя, он должен был увеличить скорость на 2 км/ч. Сколько времени поезд затратил на весь путь?

26. Двое рабочих, работая вместе, выполняют некоторую работу за 8 ч. Работая порознь, первый из них может выполнить всю работу на 12 ч быстрее, чем второй. За сколько часов каждый из них может выполнить всю работу?

27. Бак наполняется двумя кранами. Наполнение бака только через первый кран длится на 22 мин больше, чем наполнение бака водой только через второй кран. Если же открыть оба крана, то бак наполнится водой через 1 ч. За какое время каждый кран в отдельности может наполнить бак?

28. К раствору, содержащему 40 г соли, добавили 200 г воды, после чего его концентрация уменьшилась на 10 %. Сколько воды содержал раствор и какова его концентрация?

29. Сумма двузначного числа с квадратом цифры его десятков равна 100. Найдите это двузначное число, если цифра его десятков на 2 больше цифры единиц.

30. Цифра десятков двузначного числа на 1 больше цифры единиц. Найдите это двузначное число, если произведение цифры его десятков на само число равно 96.

Задачи на составление систем уравнений II степени

31. При одновременном действии двух труб бассейн наполняется водой за 40 ч. Если бы одну треть бассейна наполнила первая труба, а затем остальную часть — вторая труба, то для наполнения бассейна понадобилось бы 78 ч. За сколько времени могла бы наполнить бассейн каждая труба, работая одна?

32. Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов А и В, расстояние между которыми 28 км, и встретились через час. С какой скоростью двигался каждый велосипедист, если один прибыл в пункт В на 35 мин позже, чем другой в пункт А?

33. Два поезда выходят одновременно из пунктов М и N, расстояние между которыми 45 км, и встречаются через 20 мин. Поезд, вышедший из пункта М, прибывает на станцию N на 9 мин раньше, чем другой в пункт М. Какова скорость каждого поезда?

34. Задумано двузначное число. Если к этому числу прибавить удвоенную сумму его цифр, то получится 96. Если же задуманное число умножить на сумму его цифр, то получится 952. Найдите задуманное число.

35. Сумма двух чисел равна 20, а сумма их квадратов — 218. Найдите эти числа.

36. Найдите два числа, сумма, разность и произведение которых находятся в соотношении $5 : 1 : 18$.

37. Двузначное число втрое больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы равен утроенному искомому числу. Найдите это число.

38. Две суммы составляют 10 000 руб. Процентная такса для каждой суммы равна $\frac{1}{1000}$, а общая сумма годового дохода составляет 580 руб. Как велика каждая сумма в отдельности?

39. Периметр прямоугольника равен 14 см, площадь — 12 см^2 . Каковы стороны прямоугольника?

40. Площадь прямоугольного треугольника равна 90 см^2 . Сумма площадей квадратов, построенных на его катетах, — 369 см^2 . Каковы катеты этого треугольника?

§ 4. ЗАДАЧИ С ПРИКЛАДНЫМ СОДЕРЖАНИЕМ

Задачи, представленные в § 4, носят прикладной характер и связаны с различными областями науки. Формулы для решения задач приводятся в самих заданиях, остается лишь подставить значения и найти результат.

Задания подразделяются на несколько видов:

- 1) линейные уравнения и неравенства;
- 2) квадратные и степенные уравнения и неравенства;
- 3) рациональные и иррациональные уравнения и неравенства;
- 4) показательные уравнения и неравенства;
- 5) логарифмические уравнения и неравенства;
- 6) тригонометрические уравнения и неравенства.

Пример 1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ)$, где $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура ($^\circ\text{C}$). При какой температуре рельс удлинится на 4 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Решение.

Согласно условию задачи имеем неравенство $l(t^\circ) - l_0 \geq 4$ мм при $l_0 = 10$ м и $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$.

$$l(t^\circ) - l_0 \geq 4 \cdot 10^{-3}, \text{ или } l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ) - l_0 \geq 4 \cdot 10^{-3},$$

$$l_0 \cdot \alpha \cdot t^\circ \geq 4 \cdot 10^{-3}, 10 \cdot 1,6 \cdot 10^{-5} t^\circ \geq 4 \cdot 10^{-3},$$

$$t^\circ \geq \frac{4 \cdot 10^{-3}}{1,6 \cdot 10^{-4}}, t^\circ \geq \frac{4 \cdot 10}{1,6} = 25^\circ\text{C}.$$

Ответ: 25.

Пример 2. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 15$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 5$ м/с². За t секунд после начала торможения он прошел путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 20 м. Ответ выразите в секундах.

Решение.

Найдем, за какое время t , прошедшее от момента начала торможения, автомобиль проедет 20 м:

$$15t - \frac{5}{2}t^2 = 20, \text{ или } 3t - \frac{1}{2}t^2 = 4, \text{ или } t^2 - 6t + 8 = 0, \text{ откуда } t_1 = 2,$$

$$t_2 = 4.$$

Значит, время, прошедшее от момента начала торможения, равно 2 с, т. е. через 2 с автомобиль проедет 20 м.

Ответ: 2.

Пример 3. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $J = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$, где \mathcal{E} — ЭДС источника (в вольтах), $r = 1$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 25 % от силы тока короткого замыкания $J_{\text{к.з.}} = \frac{\mathcal{E}}{r}$? Ответ выразите в омах.

Решение.

Согласно условию задачи имеем неравенство $J \leq 0,25 J_{\text{к.з.}}$ при $r = 1$, или $\frac{\mathcal{E}}{R+1} \leq 0,25 \cdot \frac{\mathcal{E}}{1}$, или $\frac{1}{R+1} \leq \frac{1}{4}$, $R+1 \geq 4$, $R \geq 3$.

Значит, наименьшее сопротивление цепи составит 3 Ома.

Ответ: 3.

Пример 4. Камень брошен вниз с высоты 15 м. Высота h , на которой находится камень во время падения, зависит от времени t : $h(t) = 15 - 4t - 4t^2$. Сколько секунд камень будет падать?

Решение.

Камень начнет падать, если высота станет равной нулю, т. е. $h(t) = 0$, или $15 - 4t - 4t^2 = 0$,

$$4t^2 + 4t - 15 = 0,$$

$$D/4 = 4 + 4 \cdot 15 = 64 = 8^2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 8}{4}, \quad t_1 = 1,5, \quad t_2 = -2,5.$$

Поскольку t — время, $t > 0$. Значит, $t = 1,5$, т. е. камень будет падать 1,5 с.

Ответ: 1,5.

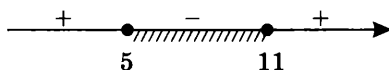
Пример 5. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от ее цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 160 - 10p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 550 тыс. руб.

Решение.

По условию $q = 160 - 10p$, $r = q \cdot p$ и $r \geq 550$ (тыс. руб.), где q — продукция (единиц в месяц), p — цена продукции (в тыс. руб.), r — значение выручки предприятия. Имеем $q \cdot p \geq 550$.

Так как $q = 160 - 10p$, то получим неравенство $(160 - 10p) \cdot p \geq 550$, или $p^2 - 16p + 55 \leq 0$.

Решая полученное неравенство методом интервалов, имеем $p_1 = 5$, $p_2 = 11$.



Следовательно, $5 \leq p \leq 11$ и $p = 11$ — максимальный уровень цены.

Ответ: 11.

Пример 6. Камень брошен вертикально вверх. Зависимость высоты, на которой находится камень (пока он не упал на землю), описывается формулой $h(t) = -t^2 + 8t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее от момента броска). Сколько секунд камень находился на высоте выше 15 м?

Решение.

Если камень находился на высоте выше 15 м, то $h(t) > 15$.

Получим неравенство $-t^2 + 8t > 15$, или $t^2 - 8t + 15 < 0$.

Решая полученное неравенство методом интервалов, находим $3 < t < 5$.

Следовательно, камень будет находиться на высоте выше 15 м с 3-й по 5-ю секунду, т. е. 2 с.

Ответ: 2.

Пример 7. Материальная точка движется по координатной прямой по закону $S(t) = t^3 - 7t^2 + 3t + 1$. Найдите момент времени, при котором ускорение точки будет равно 4 м/с^2 .

Решение.

Известно, что скорость движения есть производная пути S по времени t , т. е. $v(t) = S'(t) = (t^3 - 7t^2 + 3t + 1)' = 3t^2 - 14t + 3$. Аналогично

ускорение $a(t) = v'(t) = (3t^2 - 14t + 3)' = 6t - 14$. По условию задачи $a(t) = 4$, тогда $6t - 14 = 4$, $6t = 18$, $t = 3$.

Ответ: 3.

Пример 8. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Ученик измеряет время падения t небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле $h = 5t^2$, где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах. До дождя время падения камешков составляло 0,8 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

Решение.

Пусть h_1 — расстояние до воды до дождя, h_2 — расстояние до воды после дождя. Поскольку после дождя уровень воды в колодце повысится, расстояние до воды уменьшится, время падения уменьшится и станет равным $t = t_1 - t_2 = 0,8 - 0,2 = 0,6$ с. Тогда уровень воды поднимется на $h_1 - h_2 = 5(0,8^2 - 0,6^2) = 5 \cdot (0,8 - 0,6) \cdot (0,8 + 0,6) = 5 \cdot 0,2 \cdot 1,4 = 1,4$ м.

Ответ: 1,4.

Пример 9. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 9$ м — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{100}$ м/мин² и $b = -\frac{3}{5}$ м/мин — постоянные, t — время в минутах, прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Решение.

По условию задачи $H(t) = 0,01t^2 - 0,6t + 9$. Вода будет вытекать из бака, пока ее начальный уровень не понизится до нуля. Решим уравнение $H(t) = 0$.

$0,01t^2 - 0,6t + 9 = 0$, или $t^2 - 60t + 900 = 0$, $(t - 30)^2 = 0$, $t - 30 = 0$, $t = 30$, т. е. вся вода вытечет из бака через 30 мин.

Ответ: 30.

Пример 10. Мотоциклист выехал из города со скоростью $v_0 = 51$ км/ч и сразу начал разгоняться с постоянным ускорением $a = 12$ км/ч². Расстояние от мотоциклиста до города определяется по формуле $S = v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее время, в течение

которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не более чем 27 км от города. Ответ выразите в минутах.

Решение.

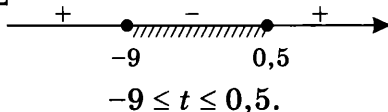
Из условия задачи следует, что $S \leq 27$. При этом мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи.

При заданных значениях $v_0 = 51$ км/ч и $a = 12$ км/ч² имеем

$$51t + \frac{12t^2}{2} \leq 27, \text{ или } 6t^2 + 51t - 27 \leq 0, \text{ или}$$

$$2t^2 + 17t - 9 \leq 0, D = 17^2 + 72 = 361 = 19^2 > 0.$$

$$t_{1,2} = \frac{-17 \pm 19}{4}, t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = -9.$$



Поскольку $t \geq 0$, то $t \leq 0,5$. Значит, наибольшее время составит 0,5 ч = 30 мин.

Ответ: 30.

Пример 11. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 390$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка $f(v)$ больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$, где

c — скорость звука (м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 320$ м/с. Ответ выразите в м/с.

Решение.

Согласно условию имеем неравенство $f(v) - f_0 \geq 10$ при $f_0 = 390$ Гц.

$$f(v) - f_0 \geq 10, \text{ или } \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} - f_0 \geq 10, \text{ или } \frac{390}{1 - \frac{v}{320}} - 390 \geq 10.$$

Разделим обе части неравенства на 10:

$$\frac{39}{1 - \frac{v}{320}} - 39 \geq 1, \quad 1 - \frac{v}{320} \leq \frac{39}{40}, \text{ или } \frac{v}{320} \geq \frac{1}{40}, \quad \frac{v}{8} \geq 1, \text{ т. е. } v \geq 8 \text{ м/с.}$$

Ответ: 8.

Пример 12. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется по формуле $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$, где T_1 — температура нагревателя, T_2 — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 20 %, если температура холодильника $T_2 = 320$ К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

Решение.

Имеем неравенство $\eta \geq 20\%$ при $T_2 = 320$ К (температура холодильника).

$$\frac{T_1 - 320}{T_1} \cdot 100 \geq 20, \text{ или } \frac{T_1 - 320}{T_1} \geq \frac{1}{5},$$

$$5 \cdot (T_1 - 320) \geq T_1, \quad 4T_1 \geq 320 \cdot 5, \text{ откуда } T_1 \geq 400 \text{ К.}$$

Значит, минимальная температура нагревателя должна быть 400 К.

Ответ: 400.

Пример 13. Мяч бросили под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении

угла α (в градусах) время полета будет не меньше 2 с, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с².

Решение.

Согласно условию задачи имеем неравенство $t(\alpha) \geq 2$, если $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ при $v_0 = 20$ м/с и ускорении свободного падения $g = 10$ м/с².

Тогда $\frac{2 \cdot 20 \cdot \sin \alpha}{10} \geq 2$, или $4 \sin \alpha \geq 2$, т. е. $\sin \alpha \geq \frac{1}{2}$, $30^\circ \leq \alpha < 90^\circ$.

Значит, наименьшее значение угла равно 30° .

Ответ: 30.

Пример 14. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = \text{const}$, где p — давление газа в паскалях, V — объем газа в м^3 . В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом $\left(k = \frac{5}{2}\right)$ из начального состояния, в котором $\text{const} = 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$, газ начинают сжимать. Какой наибольший объем V может занимать газ при давлениях $p \geq 3,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$? Ответ выразите в м^3 .

Решение.

При $k = \frac{5}{2}$ и $\text{const} = 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$ имеем неравенство

$$3,2 \cdot 10^6 \cdot V^{\frac{5}{2}} \leq 10^5, \text{ или } V^{\frac{5}{2}} \leq \frac{1}{32}, \quad V \leq \left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5 \cdot 2}{5}} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.

Пример 15. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон $pV^k = 2,56 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot \text{м}^4$, где p — давление газа в паскалях, V — объем газа (м^3), $k = 4/3$.

Какой объем будет занимать газ при давлении $p = 6,25 \cdot 10^6 \text{ Па}$?

Решение.

Так как $pV^k = \text{const}$, а $p \geq 6,25 \cdot 10^6$, то получим уравнение

$$6,25 \cdot 10^6 V^{4/3} = 2,56 \cdot 10^6, \text{ или } V^{4/3} = \frac{256}{625} = \frac{16^2}{25^2} = \left(\frac{16}{25}\right)^2 = \\ = \left(\frac{4^2}{5^2}\right)^2 = \frac{4^4}{5^4} = \left(\frac{4}{5}\right)^4, \text{ тогда } V = \left(\frac{4}{5}\right)^{4 \cdot \frac{3}{4}} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 = 0,8^3 = 0,512 (\text{м}^3).$$

Ответ: 0,512.

Пример 16. Трактор тащит сани с силой $F = 100 \text{ кН}$, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50 \text{ м}$ вычисляется по формуле $A = F \cdot S \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2500 кДж ?

Решение.

Согласно условию задачи $A \geq 2500$ на промежутке $(0^\circ; 90^\circ)$ при значениях $F = 100$ кН и длины пути $S = 50$ м:

$$100 \cdot 50 \cos \alpha \geq 2500, \text{ или } \cos \alpha \geq \frac{1}{2}, \text{ т. е. } 0^\circ < \alpha \leq 60^\circ.$$

Значит, максимальное значение угла $\alpha = 60^\circ$.

Ответ: 60.

Пример 17. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью $v = 2$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$ (м/с), где $m = 90$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, $M = 450$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до $\frac{1}{7}$ м/с?

Решение.

Имеем неравенство $u \geq \frac{1}{7}$ на интервале $(0^\circ; 90^\circ)$ при значениях $m = 90$ кг и $M = 540$ кг.

Следовательно, $\frac{m}{m+M} \cdot v \cos \alpha \geq \frac{1}{7}$, или

$$\frac{90}{90+540} \cdot 2 \cos \alpha \geq \frac{1}{7}, \quad \frac{90 \cdot 2}{680} \cos \alpha \geq \frac{1}{7}, \quad \cos \alpha \geq \frac{1}{2}, \text{ т. е. } 0^\circ < \alpha \leq 60^\circ.$$

Значит, максимальный угол $\alpha = 60^\circ$.

Ответ: 60.

Пример 18. Емкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 6 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 9$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,8$ — постоянная.

Определите (в киловольтах) наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло 48 с. Ответ дайте в киловольтах.

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $t = 48$ при заданных значениях начального напряжения на конденсаторе $U_0 = 9$ кВ, сопротивления резистора $R = 5 \cdot 10^6$ Ом и емкости конденсатора $C = 6 \cdot 10^{-6}$ Ф.

$$\text{Имеем уравнение } 0,8 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot \log_2 \frac{9}{U} = 48, \quad 4,8 \cdot 5 \log_2 \frac{9}{U} = \\ = 48, \quad 5 \log_2 \frac{9}{U} = 10, \quad \log_2 \frac{9}{U} = 2, \quad \text{откуда } \frac{9}{U} = 2^2 = 4, \quad U = \frac{9}{4} = 2,25 \text{ (кВ)}.$$

Ответ: 2,25.

Пример 19. Для обогрева помещения, температура в котором $T_{\Pi} = 18$ °С, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_{\text{В}} = 72$ °С. Расход проходящей через трубу воды $m = 1,2$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры T (°С), причем $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{В}} - T_{\Pi}}{T - T_{\Pi}}$ (м), где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{С}}$ —

теплоемкость воды, $\gamma = 42 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{С}}$ — коэффициент теплообмена, $\alpha = 0,4$ — постоянная. До какой температуры охладится вода, если длина трубы 96 м?

Решение.

Задача сводится к решению уравнения $\alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{В}} - T_{\Pi}}{T - T_{\Pi}} = 96$ при заданных значениях $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{С}}$, $\gamma = 42 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{С}}$, $\alpha = 0,4$, $T_{\Pi} = 18$ °С, $T_{\text{В}} = 72$ °С и $m = 1,2$ кг/с:

$$0,4 \cdot \frac{4200 \cdot 1,2}{42} \log_2 \frac{72 - 18}{T - 18} = 96, \quad \text{или } 4 \cdot 12 \cdot \log_2 \frac{54}{T - 18} = 96, \quad \text{или} \\ \log_2 \frac{54}{T - 18} = 2, \quad \text{или } \frac{54}{T - 18} = 4, \quad T - 18 = \frac{54}{4} = 13,5, \quad \text{откуда } T = 31,5 \text{ (} ^\circ\text{С)}.$$

Ответ: 31,5.

Пример 20. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому

$$P = \sigma S T^4 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}, \quad \text{где } P \text{ — мощность излучения звезды (в ваттах),}$$

$\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — постоянная, S — площадь поверхности звезды (в квадратных метрах), T — температура (в кельвинах). Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{125} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а мощность ее излучения — $2,85 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$. Найдите температуру этой звезды в кельвинах.

Решение.

Так как $P = 2,85 \cdot 10^{25}$, $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$, $S = \frac{1}{125} \cdot 10^{20}$, то получим

уравнение $5,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{125} \cdot 10^{20} \cdot T^4 = 2,85 \cdot 10^{25}$, или

$$5,7 \cdot \frac{1}{125} \cdot T^4 = 2,85 \cdot 10^{13}, \text{ или } \frac{1}{125} \cdot T^4 = 5 \cdot 10^{12}, \text{ или } T^4 = 5^4 \cdot (10^3)^4,$$

откуда $T = 5 \cdot 10^3 = 5000 \text{ (К)}$.

Ответ: 5000.

Пример 21. Сила тока в цепи $I = \frac{U}{R}$, где U — напряжение в вольтах, R — сопротивление электроприбора в омах. Если сила тока превышает 5 А, то предохранитель, включенный в электросеть, плавится. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 В, чтобы сеть продолжала работать. Ответ выразите в омах.

Решение.

Согласно условию $I \leq 5 \text{ А}$, где $I = \frac{U}{R}$, $I = 5$, $U = 220$.

Имеем $\frac{220}{R} \leq 5$, откуда $R \geq \frac{220}{5} = 44 \text{ (Ом)}$.

Ответ: 44.

Пример 22. Автомобиль массой m кг начинает тормозить и проходит путь S м до полной остановки. Сила трения F (в Н), масса автомобиля m (кг), время t (в с) и пройденный путь S (м) определяются равенством $F = \frac{2mS}{t^2}$. Сколько секунд заняло торможение, если известно, что $F = 2000 \text{ Н}$, $m = 1440 \text{ кг}$, $S = 900 \text{ м}$?

Решение.

$$F = \frac{2mS}{t^2}, \text{ или } 2000 = \frac{2 \cdot 1440 \cdot 900}{t^2}, \text{ или } \frac{144 \cdot 9}{t^2} = 1,$$

$$t = \sqrt{144 \cdot 9} = 12 \cdot 3 = 36 \text{ (с)}.$$

Ответ: 36.

Пример 23. Груз массой 0,12 кг колеблется на пружине. Его скорость v меняется по закону $v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}$, где t — время с момента начала колебаний, $T = 2$ с — период колебаний, $v_0 = 0,5$ м/с. Кинетическая энергия E (в джоулях) груза вычисляется по формуле $E = \frac{mv^2}{2}$, где m — масса груза в килограммах, v — скорость груза в м/с. Найдите кинетическую энергию груза через 5 секунд после начала колебаний. Ответ дайте в джоулях.

Решение.

Найдем скорость груза:

$$v = v_0 \cos \frac{2\pi t}{T}, \text{ где } v_0 = 0,5, t = 5, T = 2.$$

$$v = 0,5 \cos \frac{2\pi \cdot 5}{2} = 0,5 \cos (5\pi) = -0,5.$$

Теперь найдем кинетическую энергию груза:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{0,12 \cdot (-0,5)^2}{2} = 0,06 \cdot 0,25 = 0,015 \text{ (Дж)}.$$

Ответ: 0,015.

Задачи для самостоятельного решения

1. Камень брошен вниз с высоты 15 м. Высота h , на которой находится камень во время падения, зависит от времени t : $h(t) = 15 - 4t - 4t^2$. Сколько секунд будет падать камень?

2. Камень брошен вниз с высоты 10 м. Высота h , на которой находится камень во время падения, зависит от времени t : $h(t) = 10 - 3t - t^2$. Сколько секунд камень будет падать?

3. В электросеть включен предохранитель, рассчитанный на силу тока 25 А. Определите, какое минимальное сопротивление должно быть у электроприбора, подключаемого к розетке в 220 В, чтобы сеть продолжала работать. Сила тока в цепи I связана с напряжением U соотношением $I = \frac{U}{R}$, где R — сопротивление электроприбора.

4. Электрическая цепь напряжением 220 В защищена предохранителем, рассчитанным на силу тока 17,6 А. Найдите наименьшее сопротивление, которое может быть у электроприбора, включенного в эту цепь, чтобы предохранитель продолжал работать. Сила тока в цепи I связана с напряжением U соотношением $I = \frac{U}{R}$, где R — сопротивление электроприбора.

5. Высоту над землей подброшенного вверх мяча можно вычислить по формуле $h(t) = 3 + 16t - 5t^2$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска). Сколько секунд мяч будет находиться на высоте более 6 м?

6. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высоту, на которой находится камень, можно найти по формуле $h(t) = -2t^2 + 5t$ (h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска). Сколько секунд камень находился на высоте не менее 3 м.

7. Если наблюдатель находится на небольшой высоте h над поверхностью Земли, то расстояние от него до линии горизонта можно найти по формуле $S = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли.

Найдите наименьшую высоту, с которой должен смотреть наблюдатель, чтобы он видел линию горизонта на расстоянии не менее 16 км. Ответ выразите в метрах.

8. Если наблюдатель находится на небольшой высоте h над поверхностью Земли, то расстояние от него до линии горизонта можно найти по формуле $S = \sqrt{2Rh}$, где $R = 6400$ км — радиус Земли. Найдите наименьшую высоту, с которой должен смотреть наблюдатель, чтобы он видел линию горизонта на расстоянии не менее 4,8 км. Ответ выразите в метрах.

9. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 2$ м — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{72}$ м/мин², $b = -\frac{1}{3}$ м/мин — постоянные. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

10. В боковой стенке цилиндрического бака вблизи дна закреплен кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нем меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 3$ м — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{75}$ м/мин², $b = -\frac{2}{5}$ м/мин — постоянные. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

11. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур дается выражением $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где $T_0 = 1320$ К, $a = -8$ К/мин, $b = 112$ К/мин². Известно, что при температуре нагревателя выше 1640 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

12. Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени (в минутах) для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально и на исследуемом интервале температур дается выражением $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где $T_0 = 1250$ К, $a = -5$ К/мин, $b = 39$ К/мин². Известно, что при температуре нагревателя выше 1400 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключать. Определите (в минутах), через какое наибольшее время после начала работы нужно отключать прибор.

13. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от ее цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 160 - 10p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 480 тыс. руб.

14. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объема спроса на продукцию q (единиц в месяц) от ее цены p (тыс. руб.) задается формулой $q = 160 - 10p$. Определите максимальный уровень цены p (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 550 тыс. руб.

15. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется по формуле $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком минимальном

значении температуры нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 60 %, если температура холодильника $T_2 = 300$ К?

Ответ дайте в градусах Кельвина.

16. Коэффициент полезного действия некоторого двигателя определяется по формуле $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$. При каком минимальном зна-

чении температуры нагревателя T_1 КПД этого двигателя будет не меньше 80 %, если температура холодильника $T_2 = 200$ К?

Ответ дайте в градусах Кельвина.

17. Для определения эффективной температуры звезд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела вычисляется по формуле $P = \sigma ST^4$, где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ — числовой коэффициент, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах.

Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S = \frac{1}{81} \cdot 10^{16}$ м², а излу-

чаемая ею мощность P не менее $9,12 \cdot 10^{21}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды (в градусах Кельвина).

18. Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$, где h — высота пирамиды, S_1 и S_2 — соответственно площади нижнего и верхнего оснований. Определите (в см²)

наименьшую площадь S_2 , чтобы объем пирамиды был не менее $13/3 \text{ см}^3$, если $S_1 = 1 \text{ см}^2$, $h = 1 \text{ см}$.

19. Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$, где h — высота пирамиды, S_1 и S_2 — соответственно площади нижнего и верхнего оснований. Определите (в см^2) наименьшую площадь S_2 , чтобы объем пирамиды был не менее $56/3 \text{ см}^3$, если $S_1 = 4 \text{ см}^2$, $h = 2 \text{ см}$.

20. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 18 \text{ м/с}$ и тормозящий с постоянным ускорением $a = 4 \text{ м/с}^2$, за t секунд после начала торможения проходит путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$. Определите (в секундах) наименьшее время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал не менее 36 м .

21. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 20 \text{ м/с}$ и тормозящий с постоянным ускорением $a = 4 \text{ м/с}^2$, за t секунд после начала торможения проходит путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$. Определите (в секундах) наименьшее время, прошедшее от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал не менее 48 м .

22. Операционная прибыль предприятия в краткосрочном периоде вычисляется по формуле

$$\pi(q) = q(p - v) - f.$$

Компания продает свою продукцию по цене $p = 800$ руб. за штуку, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб. за штуку, постоянные расходы предприятия $f = 600\,000$ руб. в месяц. Определите наименьший месячный объем производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше $500\,000$ руб. в месяц.

23. Операционная прибыль предприятия в краткосрочном периоде вычисляется по формуле

$$\pi(q) = q(p - v) - f.$$

Компания продает свою продукцию по цене $p = 600$ руб. за штуку, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ руб. за штуку, постоянные расходы предприятия

$f = 400\,000$ руб. в месяц. Определите наименьший месячный объем производства q (шт.), при котором прибыль предприятия будет не меньше $300\,000$ руб. в месяц.

24. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 2 + 23t - 10t^2$, где t измеряется в секундах, h — в метрах. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте более 8 м?

25. Высота над землей подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t) = 2 + 11t - 5t^2$, где t измеряется в секундах, h — в метрах. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте более 4 м?

26. Велосипедист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 17$ км/ч, выезжает из него и сразу начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 8$ км/ч². Расстояние от велосипедиста до города определяется по формуле $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$. Определите наибольшее

время (в минутах), в течение которого велосипедист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не далее чем 15 км от города.

27. Автомобиль, движущийся в начальный момент времени со скоростью $v_0 = 18$ м/с и тормозящий с постоянным ускорением $a = 4$ м/с², за t секунд после начала торможения проходит путь

$S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$. Определите (в секундах) наименьшее время, прошедшее

от момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал не менее 40 м.

28. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального — массой $m = 4$ кг и радиусом $R = 4$ см и двух боковых — массой $M = 2$ кг и радиусом $R + h$ каждый. При этом момент инерции катушки (в кг · см²) относительно оси вращения определяется по формуле

$I = \frac{1}{2}(m + 2M)R^2 + M(2Rh + h^2)$. При каком максимальном значении h

(в см) момент инерции катушки не превышает предельных для нее 194 кг · см²?

29. Деталью некоторого прибора является вращающаяся катушка. Она состоит из трех однородных соосных цилиндров: центрального — массой $m = 6$ кг и радиусом $R = 10$ см и двух боковых — массой

$M = 1$ кг и радиусом $R + h$ каждый. При этом момент инерции катушки (в $\text{кг} \cdot \text{см}^2$) относительно оси вращения определяется по формуле

$$I = \frac{1}{2}(m + 2M)R^2 + M(2Rh + h^2).$$

При каком максимальном значении h (в см) момент инерции катушки не превышает предельных для нее $556 \text{ кг} \cdot \text{см}^2$?

30. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на большие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, сила Архимеда, действующая на аппарат, будет определяться по формуле $F_A = \rho g l^3$, где l — линейный размер аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, а $g = 9,8 \text{ Н/кг}$ — ускорение свободного падения.

Каковы могут быть максимальные линейные размеры аппарата (в метрах), чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить $627\,200 \text{ Н}$?

31. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l км с постоянным ускорением a км/ч², вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$. Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав $0,4$ км, приобрести скорость не менее 120 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

32. Автомобиль, масса которого $m = 2400$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остается неизменным, и проходит за это время путь $S = 300$ м. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно $F = \frac{2mS}{t^2}$ (Н).

Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдет указанный путь, если известно, что сила F , приложенная к автомобилю, не меньше 1800 Н. Ответ выразите в секундах.

33. Автомобиль, масса которого $m = 1800$ кг, начинает двигаться с ускорением, которое в течение t секунд остается неизменным, и проходит за это время путь $S = 400$ м. Значение силы (в ньютонах), приложенной в это время к автомобилю, равно $F = \frac{2mS}{t^2}$ (Н).

Определите наибольшее время после начала движения автомобиля, за которое он пройдет указанный путь, если известно, что сила

F , приложенная к автомобилю, не меньше 1800 Н. Ответ выразите в секундах.

34. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t (мин) — прошедшее от начального момента время, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $m_0 = 100$ мг изотопа Z , период полураспада которого $T = 2$ мин. В течение скольких минут масса изотопа будет не меньше 12,5 мг?

35. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t (мин) — прошедшее от начального момента время, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее в начальный момент времени $m_0 = 120$ мг изотопа Z , период полураспада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа будет не меньше 15 мг?

36. Емкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 6 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 9$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 0,8$ — постоянная.

Определите (в киловольтах) наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 48 с.

37. Емкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R = 4 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 12$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha = 1,5$ — постоянная. Определите (в киловольтах) наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 60 с.

38. Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_n = 18^\circ\text{C}$, через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой $T_B = 72^\circ\text{C}$. Расход проходящей через трубу воды $m = 1,2$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температуры T ($^\circ\text{C}$), причем $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_B - T_n}{T - T_n}$ (м), где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоемкость воды, $\gamma = 42 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, $\alpha = 0,4$ — постоянная. До какой температуры охладится вода, если длина трубы 96 м? Ответ выразите в градусах Цельсия.

39. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 6$ молей воздуха объемом $V_1 = 80$ л, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объема V_2 . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется по формуле $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2}$ (Дж), где $\alpha = 18,3$ — постоянная, а $T = 300$ К — температура воздуха. Какой объем V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 32 940 Дж?

40. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 2$ атмосферы, медленно опускают на дно водоема. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ (Дж), где $\alpha = 12,5$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 15 000 Дж? Ответ приведите в атмосферах.

41. Мяч бросили под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полета будет не меньше 1,6 с, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 16$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

42. Мяч бросили под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полета будет не меньше 2 с, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

43. Мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 18$ м/с — начальная скорость мяча, $g = 10$ м/с² — ускорение свободного падения. При каком наименьшем значении угла (в градусах) мяч перелетит реку шириной 16,2 м?

44. Мячик бросают под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Расстояние, которое пролетает мячик, вычисляется по формуле $L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha$ (м), где $v_0 = 22$ м/с — начальная скорость мяча, $g = 10$ м/с² — ускорение свободного падения. При каком наименьшем значении угла (в градусах) мяч перелетит реку шириной 24,2 м?

45. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 50$ м вычисляется по формуле $A = F \cdot S \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 2000 кДж?

46. Трактор тащит сани с силой $F = 100$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора (в килоджоулях) на участке длиной $S = 70$ м вычисляется по формуле $A = F \cdot S \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) совершенная работа будет не менее 3500 кДж?

47. Трактор тащит сани с силой $F = 40$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Мощность (в киловаттах) трактора при скорости $v = 5$ м/с вычисляется по формуле $N = F \cdot v \cos \alpha$. При каком максимальном угле α (в градусах) эта мощность будет не менее 100 кВт?

48. Катер должен пересечь реку шириной $L = 140$ м и со скоростью течения $v = 0,7$ м/с так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Он может двигаться с разными скоростями, при этом время в пути, измеряемое в секундах, определяется выражением $t = \frac{L}{v} \operatorname{ctg} \alpha$, где α — острый угол, задающий направление его движения (отсчитывается от берега). Под каким минимальным углом α (в градусах) нужно плыть, чтобы время в пути было не больше 200 с?

49. Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью $v = 4$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью $u = \frac{m}{m + M} v \cos \alpha$ (м/с), где $m = 80$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, $M = 420$ кг — масса платформы. Под каким максимальным углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до 0,32 м/с?

КРАТКИЕ СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

1. Уравнение I степени (линейное)

Общий вид: $ax + b = 0$.

- 1) Если $a \neq 0$, $a \in R$, $b \in R$, то $x = -\frac{b}{a}$ (корень уравнения).
- 2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то корней нет.
- 3) Если $a = b = 0$, то уравнение имеет бесконечно много корней.

2. Система линейных уравнений

Пусть дана система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

- 1) Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система имеет единственное решение (прямые пересекаются в одной точке).
- 2) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система не имеет решений (прямые не пересекаются, т. е. параллельны).
- 3) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система имеет бесконечное множество решений (прямые совпадают).

3. Уравнение II степени (квадратное)

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где $a \neq 0$, a — I (старший) коэффициент, b — II коэффициент, c — свободный член.

$D = b^2 - 4ac$ — дискриминант (различитель).

1) Если $D > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

2) Если $D = 0$, то $x = -\frac{b}{2a}$ — один корень.

3) Если $D < 0$, то корней нет (действительных).

Частные случаи

1) Неполные квадратные уравнения:

а) $ax^2 + c = 0$, $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$, если коэффициенты a и c имеют разные знаки; если коэффициенты a и c имеют одинаковые знаки, то корней нет;

б) $ax^2 + bx = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$;

в) $ax^2 = 0$, $x = 0$.

2) Квадратное уравнение приведенного вида

$$x^2 + px + q = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

3) Квадратное уравнение вида $ax^2 + 2kx + c = 0$,

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

4) Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$,

$a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$;

$a - b + c = 0$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

4. Теорема Виета

а) Для квадратного уравнения общего вида $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

б) Для приведенного вида $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$.

Теорема, обратная теореме Виета

Если p, q, x_1, x_2 таковы, что $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$, то x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Теорема Виета для кубического уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения, то $x_1 + x_2 + x_3 = -a$;

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = b; \quad x_1 x_2 x_3 = -c.$$

5. Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни трехчлена, $D > 0$.

Если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.

6. Биквадратное уравнение

Общий вид: $ax^4 + bx^2 + c = 0$, $a \neq 0$.

Заменой $x^2 = y$ приводят к квадратному виду $ay^2 + by + c = 0$.

Корни биквадратного уравнения:

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}},$$

где $D = b^2 - 4ac$.

Свойства корней

1. Если биквадратное уравнение имеет корень x_0 , то оно имеет и корень $-x_0$.

2. Сумма корней биквадратного уравнения равна нулю (по теореме Виета).

Замечание. Для вычисления корней биквадратного уравнения часто удобно воспользоваться **формулой сложного радикала**

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(A + \sqrt{A^2 - B} \right)} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(A - \sqrt{A^2 - B} \right)}.$$

Последняя полезна лишь в случае, если $\sqrt{A^2 - B}$ есть рациональное число.

7. Возвратное уравнение IV степени

Общий вид: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bmx + am^2 = 0$, $a \neq 0$.

Приводится к виду $a\left(x^2 + \frac{m^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{m}{x}\right) + c = 0$ и заменой $y = x + \frac{m}{x}$

и $y^2 - 2m = x^2 + \frac{m^2}{x^2}$ приводится к квадратному уравнению

$$ay^2 + by + (c - 2am) = 0.$$

Частные случаи

1) $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$, ($m = 1$) — симметрическое уравнение I рода.

Решается подстановкой $y = x + \frac{1}{x}$.

2) $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0$, ($m = -1$) — симметрическое уравнение II рода.

Решается подстановкой $y = x - \frac{1}{x}$.

8. Свойства степеней

Для любых x , y и $a > 0$, $b > 0$ верны равенства:

$a^0 = 1$ (по определению);

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; $a^x : a^y = a^{x-y}$; $(a^x)^y = a^{xy}$;

$(ab)^x = a^x b^x$; $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$; $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$; $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

9. Формулы сокращенного умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — разность квадратов;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ — квадрат суммы;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — квадрат разности;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — куб суммы;

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб разности;

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ — сумма кубов;

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$ — разность кубов.

Дополнительные формулы

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc;$$

$$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc;$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab;$$

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3);$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4);$$

$$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4);$$

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5);$$

$$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4).$$

10. Свойства арифметических корней

Для любых натуральных $n > 1$ и $k > 1$ и любых $a \geq 0$, $b \geq 0$ верны равенства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad (a \geq 0);$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ если } 0 \leq a < b; \quad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \quad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0).$$

11. Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha};$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

12. Формулы сложения

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Дополнительные формулы

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}; \quad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta};$$

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma;$$

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

13. Формулы двойных и тройных аргументов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha};$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}; \quad \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

14. Формулы половинного аргумента (для функций \sin и \cos — формулы понижения степени)

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

15. Универсальные тригонометрические подстановки

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

16. Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}; \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi), \text{ где } \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Дополнительные формулы

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}; \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}; \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta};$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha); \quad \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha);$$

$$1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right); \quad 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha; \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

17. Формулы преобразования произведения в сумму

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta);$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta);$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta).$$

Дополнительные формулы

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha;$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

18. Радианная и градусная меры углов

$$1 \text{ рад.} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ; \quad 1 \text{ рад.} \approx 57,3^\circ;$$

$$\alpha \text{ рад.} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \alpha \right)^\circ; \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад.};$$

$$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ рад.};$$

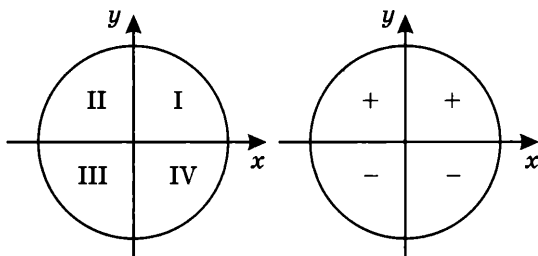
$l = \alpha R$ — длина дуги окружности;

α — угол в радианах;

R — радиус окружности;

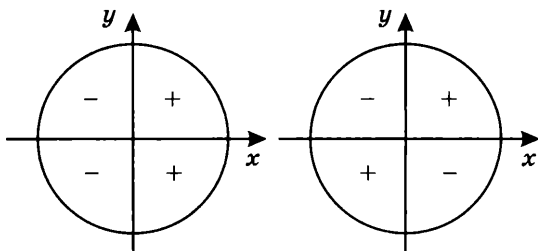
$$S = \frac{R^2}{2} \alpha \text{ — площадь кругового сектора, } 0 < \alpha < \pi.$$

19. Знаки тригонометрических функций



Четверти

Знаки sin



Знаки cos

Знаки tg и ctg

20. Формулы приведения

Функция α	Аргумент α							
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$
\sin	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$
\cos	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
tg	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$
ctg	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$

21. Значения тригонометрических функций для некоторых углов

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0	-

22. Периоды тригонометрических функций

Периоды функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ равны 2π .

Периоды функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ равны π .

Периоды функций $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ и $y = A \cos(\omega x + \varphi)$ находят по формуле $T = \frac{2\pi}{\omega}$, а функций $y = A \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$ и $y = A \operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$ — по

формуле $T = \frac{\pi}{\omega}$.

23. Обратные тригонометрические функции

Функция	Область определения	Область значений
$y = \arcsin x$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
$y = \arccos x$	$-1 \leq x \leq 1$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \operatorname{arctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{arcctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$0 < y < \pi$

$$\sin(\arcsin x) = x, -1 \leq x \leq 1; \quad \cos(\arccos x) = x, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x; \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x;$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}, x \neq 0; \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, x \neq 0;$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1;$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \quad \cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x; \quad \arccos(-x) = \pi - \arccos x;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x; \quad \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}; \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

24. Значения обратных тригонометрических функций некоторых углов

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	-1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	π

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

25. Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a$, где $|a| \leq 1$, $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\cos x = a$, $|a| \leq 1$, $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\operatorname{tg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

$\operatorname{ctg} x = a$, $a \in \mathbb{R}$, $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Частные случаи ($a = 0$, $a = 1$, $a = -1$)

$$\sin x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{tg} x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \operatorname{ctg} x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \cos x = 1, x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\sin x = -1, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \cos x = -1, x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

26. Средние величины

1. Среднее арифметическое

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

2. Среднее геометрическое $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, где $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$.

3. Среднее гармоническое

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

4. Среднее квадратичное

$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

5. Среднее взвешенное

$$V = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

27. Некоторые важные неравенства

1. Неравенство Коши:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \text{ где } x \geq 0, y \geq 0.$$

2. Неравенство треугольника:

$$|x + a| \leq |x| + |a|.$$

3. Неравенство для двух взаимно обратных величин:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \text{ где } x > 0.$$

4. $\frac{a^2 + 1}{2} \geq 2.$

5. $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$

28. Прогрессии

1. Арифметическая прогрессия

(a_1 — 1-й член, d — разность, n — число членов, a_n — n -й член, S_n — сумма n первых членов).

Определение арифметической прогрессии:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Формула n -го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

Формулы суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Характеристическое свойство:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}), \text{ где } n > 1.$$

2. Геометрическая прогрессия

(b_1 — 1-й член, q — знаменатель ($q \neq 0$), n — число членов, b_n — n -й член, S_n — сумма n первых членов).

Определение геометрической прогрессии:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \text{ где } b_1 \neq 0, q \neq 0.$$

Формула n -го члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Формулы суммы n первых членов:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}; \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ где } q \neq 1.$$

Характеристическое свойство:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Формула суммы членов бесконечной геометрической прогрессии:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \text{ где } |q| < 1.$$

29. Логарифмы и их свойства

1. Если $x > 0$, то $x = a^{\log_a x}$ — основное логарифмическое тождество.
2. $\log_a a = 1$.
3. $\log_a 1 = 0$.
4. Если $x > 0$, $y > 0$, то $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ — логарифм произведения.

5. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ — логарифм частного.

6. Если $x > 0$, $p \in R$, то $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$ — логарифм степени.

7. Если $x > 0$, $b > 0$, $b \neq 1$, то $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ — формула перехода от

основания a к основанию b .

В частности, если $x = b$, то $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$, или $\log_a b \cdot \log_b a = 1$.

8. $\log_a b = \log_{a^p} b^p = p \log_{a^p} b$ ($p \in R$, $p \neq 0$).

9. Если $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $p \neq 0$, то $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$.

10. $\log_a x \cdot \log_b y = \log_a y \cdot \log_b x$, где $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

11. $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$; $a, b, c > 0$, $a \neq 1$.

ОТВЕТЫ

§ 1

1. 22. 2. -15. 3. -29. 4. 41. 5. -1,5. 6. 3. 7. -0,5. 8. 2. 9. -30.
10. -36. 11. -42. 12. 22. 13. -57. 14. 39. 15. -12. 16. 3,75. 17. -1,2.
18. -4. 19. 4. 20. -1,25. 21. 13. 22. 2. 23. 10. 24. 4. 25. 10,5.
26. 2,4. 27. -3. 28. 5. 29. 5. 30. 3. 31. 5. 32. 5. 33. 2. 34. 1. 35. 7.
36. -5,4. 37. -0,25. 38. 0,25. 39. -8. 40. 18. 41. -3. 42. -2. 43. -4.
44. -2. 45. -1. 46. -1. 47. -2. 48. -3. 49. 2. 50. 3. 51. -8. 52. -5.
53. -2. 54. -1. 55. -1. 56. -2. 57. -7. 58. -3. 59. -4. 60. 1. 61. 3.
62. 4. 63. 1. 64. 1. 65. 2. 66. 2. 67. 3. 68. 3. 69. 4. 70. 4. 71. 16.
72. 3. 73. 16. 74. 3. 75. -2. 76. 7. 77. 5. 78. 8. 79. -2. 80. 10. 81. 1.
82. 2. 83. -3. 84. -1. 85. -6. 86. 1. 87. -9. 88. 3. 89. -12. 90. -5.
91. -0,5. 92. -2. 93. -2,2. 94. -0,2. 95. 0,5. 96. -0,5. 97. 0,5.
98. -2. 99. 1,5. 100. -2,25. 101. 6. 102. 8. 103. 7. 104. 6. 105. 2.
106. 3. 107. -5. 108. -4. 109. 11. 110. 6. 111. 3. 112. 2. 113. 0,5.
114. 5. 115. 2. 116. 5,5. 117. -4. 118. 1. 119. 0,5. 120. 2,75. 121. 1.
122. 8. 123. 2. 124. 2. 125. 5. 126. 4. 127. 13. 128. 13. 129. -11.
130. 11. 131. 7. 132. 9. 133. 13. 134. 9. 135. -12. 136. 12. 137. 75.
138. 12,6. 139. 0,25. 140. 0,25. 141. 3. 142. 5. 143. 12. 144. 1.
145. -3. 146. -5. 147. -8. 148. -7. 149. 3. 150. 8. 151. 0. 152. 3.
153. 8. 154. 6. 155. 0. 156. 28. 157. 4. 158. 19. 159. -0,2. 160. -1.
161. -1. 162. -4. 163. 4. 164. 9. 165. -2. 166. 1. 167. 5. 168. 0,75.
169. 3. 170. 7. 171. 4. 172. 2. 173. 7. 174. 2. 175. 0,25. 176. 5.
177. 2. 178. 3. 179. 1. 180. 2. 181. 1. 182. 11. 183. 7. 184. -7.
185. 4. 186. 2. 187. 0. 188. 0. 189. 6. 190. -7. 191. 1. 192. -7.
193. -3. 194. 6. 195. 0,25. 196. 4. 197. 1. 198. 5. 199. 1,5. 200. 0,8.
201. -4. 202. -1. 203. -15. 204. -23. 205. -22. 206. 0. 207. 26.
208. 10. 209. -32. 210. -70. 211. 9. 212. 5. 213. 1. 214. -25.
215. 0. 216. 1. 217. -74. 218. -123. 219. 9. 220. 20. 221. 1. 222. 4.
223. 3. 224. 4. 225. 1. 226. 1. 227. 2. 228. 1,5. 229. 1. 230. 1,5.
231. 1. 232. 2. 233. 1. 234. 4. 235. 2. 236. 2. 237. 0,5. 238. 2.
239. 2. 240. 5.

§ 2

241. 1. 242. 185. 243. 565. 244. 10. 245. 575. 246. 183.
247. 28,6. 248. 234. 249. 11,8. 250. 330. 251. 4,16. 252. 23,6.
253. 2000. 254. -18,6. 255. -0,4. 256. -7,04. 257. -249. 258. -17,8.
259. -23,25. 260. -26,7. 261. -34,8. 262. -93,2. 263. -13,4.
264. -42. 265. 50. 266. 2500. 267. 800. 268. 2916. 269. 64. 270. 32.
271. 9. 272. 245. 273. 96. 274. 567. 275. 125. 276. 147. 277. 1024.
278. 64. 279. 4. 280. 125. 281. 275. 282. 625. 283. 25. 284. 768.
285. 211. 286. -550. 287. 50. 288. 479. 289. 363. 290. 848. 291. 544.
292. 0. 293. 51. 294. -551. 295. 672. 296. 1228. 297. -456. 298. 581.
299. 186. 300. -684. 301. -353. 302. 660. 303. 249. 304. -323.
305. 80. 306. 25. 307. 15. 308. 16. 309. 13. 310. 39. 311. 160.
312. 125. 313. 432. 314. 245. 315. 119. 316. 105. 317. 36. 318. 638.
319. 189. 320. 96. 321. 336. 322. 546. 323. 4,8. 324. 1,8. 325. 7.
326. 81. 327. 16. 328. 64. 329. 125. 330. 9. 331. 512. 332. 343.
333. 8. 334. 64. 335. 125. 336. 64. 337. 81. 338. 27. 339. 1296.
340. 81. 341. 81. 342. 64. 343. 16. 344. 36. 345. 125. 346. 64.
347. 16. 348. 81. 349. 49. 350. 64. 351. 6. 352. 343. 353. 64. 354. 9.
355. 16. 356. 125. 357. 100. 358. 32. 359. 81. 360. 7. 361. 100.
362. 81. 363. 216. 364. 64. 365. 25. 366. 36. 367. 7. 368. 8. 369. 12.
370. 40. 371. 4. 372. 6. 373. 4. 374. 5. 375. 7. 376. 9. 377. 150.
378. 12. 379. 110. 380. 70. 381. -2. 382. -0,5. 383. 1,5. 384. -2.
385. 4. 386. 27. 387. 4. 388. 16. 389. 9. 390. -0,064. 391. 2. 392. 2.
393. 25. 394. 16. 395. 7. 396. 3. 397. 5. 398. 0,5. 399. 0,5. 400. -1.
401. 2. 402. -0,5. 403. 36. 404. 16. 405. 18. 406. 3. 407. 35. 408. 5.
409. 2. 410. 2. 411. 2. 412. 5. 413. 2. 414. 2. 415. -1. 416. -2.
417. -1. 418. -1. 419. 3. 420. 6. 421. 1. 422. -3. 423. -2. 424. 0.
425. 3. 426. 5,5. 427. 14. 428. 18. 429. 20. 430. 7. 431. 22. 432. 38.
433. 11. 434. 8. 435. 9. 436. 12. 437. 7,5. 438. 13,5. 439. 6,5.
440. 8,5. 441. 14,5. 442. 20,5. 443. 26,5. 444. 35,5. 445. 6. 446. 9.
447. 23. 448. 5. 449. 4. 450. 13. 451. 7,5. 452. 8,5. 453. 11,5.
454. 2. 455. 22. 456. 28. 457. 9. 458. 8. 459. 17. 460. 2. 461. 10.
462. 7,5. 463. 3. 464. 5.

§ 3

1. $\frac{2}{5}$. 2. $\frac{4}{9}$. 3. 135 га, 297 га, 432 га. 4. 1100 т, 2200 т. 5. 12 км/ч, 30 км/ч. 6. 120 км/ч. 7. 70 км/ч. 8. 40 оборотов, 25 оборотов. 9. 150 машин. 10. 85 °С. 11. 900 руб. и 500 руб. 12. 7 руб. 50 коп. и 6 руб. 13. 20 кг по 31 руб. и 30 кг по 46 руб. 14. 72° и 60°. 15. 30 км/ч, 35 км/ч. 16. 320 дет. и 360 дет. 17. 40 дет. и 25 дет. 18. 36 м/мин и 9 м/мин. 19. 140 м. 20. 5 × 5 дм. 21. 21 ряд. 22. 7 км/ч. 23. 720 км/ч и 600 км/ч. 24. 3 км/ч. 25. 21 ч. 26. 12 ч и 24 ч. 27. 132 мин и 110 мин. 28. 160 ч и 20 %. 29. 64. 30. 32. 31. за 90 ч и 72 ч или за 104 ч и 65 ч. 32. 12 км/ч, 16 км/ч. 33. 75 км/ч и 60 км/ч. 34. 47. 35. 13 и 7. 36. 9 и 6. 37. 27. 38. 7000 и 3000. 39. 4 см и 3 см. 40. 12 см и 15 см.

§ 4

1. 1,5. 2. 2. 3. 8,8. 4. 12,5. 5. 2,8. 6. 0,5. 7. 20. 8. 1,8. 9. 12. 10. 15. 11. 4. 12. 3. 13. 12. 14. 5. 15. 750. 16. 1000. 17. 6000. 18. 9. 19. 16. 20. 3. 21. 4. 22. 2200. 23. 1750. 24. 1,5. 25. 1,8. 26. 48. 27. 4. 28. 5. 29. 6. 30. 4. 31. 18 000. 32. 20. 33. 30. 34. 6. 35. 30. 36. 2,25. 37. 3. 38. 31,5. 39. 40. 40. 8. 41. 30. 42. 30. 43. 15. 44. 15. 45. 60. 46. 60. 47. 60. 48. 45. 49. 60.

ЛИТЕРАТУРА

Балаян Э. Н. Математика. Задачи типа В1, В2, В3, В4, В6, В7, В9, В11, В12, В14, В15. — Ростов н/Д: Феникс, 2014.

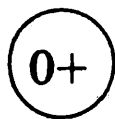
Балаян Э. Н. Математика. Разбор заданий для подготовки к ЕГЭ с анализом типичных ошибок. — 2-е изд. — Ростов н/Д: Феникс, 2024.

Балаян Э. Н. Репетитор по математике для поступающих в вузы. — Ростов н/Д: Феникс, 2021.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|-----------|
| Предисловие | 3 |
| § 1. Простейшие уравнения..... | 4 |
| 1.1. Линейные уравнения | 4 |
| 1.2. Рациональные уравнения | 7 |
| 1.3. Квадратные уравнения | 12 |
| 1.4. Иррациональные уравнения..... | 14 |
| 1.5. Показательные уравнения | 17 |
| 1.6. Логарифмические уравнения | 20 |
| 1.7. Тригонометрические уравнения..... | 22 |
| <i>Задачи для самостоятельного решения</i> | <i>27</i> |
| § 2. Вычисления и преобразования | 33 |
| 2.1. Преобразования числовых рациональных выражений | 33 |
| 2.2. Преобразования алгебраических выражений и дробей | 35 |
| 2.3. Преобразования числовых иррациональных выражений..... | 40 |
| 2.4. Преобразования буквенных иррациональных выражений.... | 43 |
| 2.5. Вычисление значений степенных выражений..... | 45 |
| 2.6. Действия со степенями | 49 |
| 2.7. Преобразования числовых логарифмических выражений | 52 |
| 2.8. Вычисление значений тригонометрических выражений..... | 58 |
| 2.9. Преобразования числовых тригонометрических
выражений | 63 |
| <i>Задачи для самостоятельного решения</i> | <i>66</i> |
| § 3. Текстовые задачи..... | 72 |
| 3.1. Задачи на числовые зависимости | 72 |
| 3.2. Задачи на движение | 75 |
| 3.3. Задачи на совместную работу | 81 |
| 3.4. Задачи на сплавы и смеси | 85 |
| 3.5. Задачи на проценты | 89 |
| 3.6. Задачи на разбавление..... | 92 |

| | |
|---|-----|
| 3.7. Задачи на прогрессии | 93 |
| Задачи для самостоятельного решения | 95 |
| § 4. Задачи с прикладным содержанием | 100 |
| Задачи для самостоятельного решения | 111 |
| Краткие справочные материалы по алгебре и началам анализа | 121 |
| Ответы к задачам | 135 |
| Литература | 138 |



Учебное издание

Балаян Эдуард Николаевич

МАТЕМАТИКА

ПОДГОТОВКА К ЕГЭ

ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ.

ВЫЧИСЛЕНИЯ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯ.

ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ.

ЗАДАЧИ С ПРИКЛАДНЫМ СОДЕРЖАНИЕМ

Разбор заданий с кратким ответом

10–11 классы

Профильный уровень

Ответственный редактор **С. А. Осташов**

Формат 70х100/16. Бумага газетная.

Тираж 3000 экз. Заказ № 4359-2024.

Издатель и изготовитель: ООО «Феникс».

Юр. и факт. адрес: 344011, Россия, Ростовская обл.,

г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, д. 150

Тел/факс: (863) 261-89-65, 261-89-50

Изготовлено в России. Дата изготовления: 09.2024.

Срок годности не ограничен.

Отпечатано в АО «Красная Звезда»

Юр. адрес: 125284, Россия, г. Москва, Хорошевское шоссе д. 38

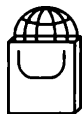
Факт. адрес: 117342, Россия, г. Москва,

Севастопольский проспект, 56/40, стр. 3

ОПЫТ 

32 года
создаём книги

ЭКСПЕРТИЗА
мы знаем о книгах всё



200 000 000
экземпляров наших книг
читают по всему миру

В ТРЕНДЕ
«Феникс» всегда на волне
ваших ожиданий



свыше **700**
книжных новинок
мы выпускаем ежегодно

ЗНАНИЯ
весь опыт наших авторов
воплотился в книгах издательства



Учебная литература
Книги для профессионалов
Прикладная литература
Психология и саморазвитие
Литература для родителей и детей
Книги для дома, досуга, хобби

ВПЕЧАТЛЕНИЯ
книги для хороших людей



Классическая литература
Интеллектуальная проза
Книги для подростков
Детская художественная литература

КАЧЕСТВО
все книги издательства
соответствуют ГОСТам



Нам важна ваша
безопасность!

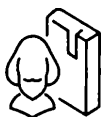


ХОРОШАЯ РАБОТА



Мы предлагаем стабильный доход
от реализации книг нашего издательства.

**344011, Россия, Ростовская обл.,
г. Ростов-на-Дону,
ул. Варфоломеева, 150
(863) 261-89-53**



Вы писатель или художник?
Присылайте свои работы к нам в издательство.
Отдел редакции: **idea@fenixrostov.ru**



Вы блогер и жить не можете без книг? Вы все время
о них пишете? Мы предоставим Вам возможность
писать об интересных проектах издательства!
Отдел маркетинга: **blogger@fenixrostov.ru**

www.phoenixrostov.ru

Вышли в свет

Э. Н. Балаян

**МАТЕМАТИКА.
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ.
10–11 классы. Профильный уровень**

Предлагаемое пособие содержит подробное решение всех заданий ЕГЭ профильного уровня.

Все параграфы разбиты на пункты, сопровождаемые краткой теорией, справочными материалами и многочисленными примерами с подробными решениями и обоснованиями, показаны различные методы и идеи решения уравнений и неравенств.

Приводятся решения неравенств методом рационализации, который стал активно внедряться в ЕГЭ по математике.

Этот метод позволяет значительно упрощать решение многих неравенств с модулем, иррациональных неравенств, а также показательных и логарифмических неравенств как с постоянным, так и с переменным основанием.

Пособие адресовано старшеклассникам и абитуриентам для эффективной подготовки и успешной сдачи экзамена, а также учителям математики, методистам, слушателям подготовительных отделений вузов и репетиторам.