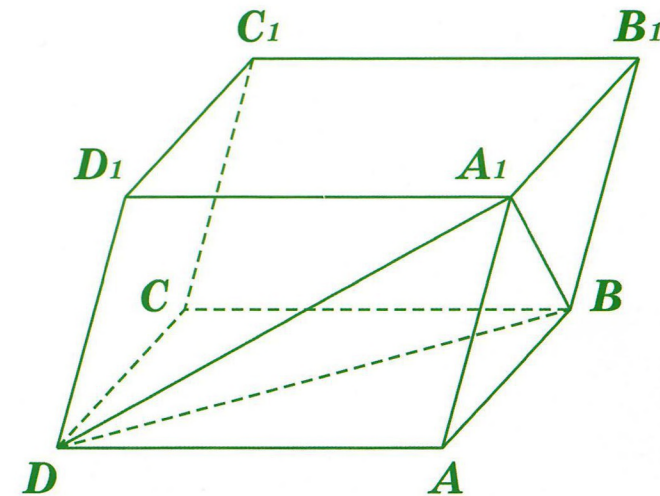


ЭДУАРД БАЛАЯН | автор более 200 книг

# Математика

Пособие для подготовки к ЕГЭ  
и дополнительному экзамену



ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

- Более 1000 задач
- Решение наиболее трудных задач
- Ответы ко всем заданиям

10–11  
классы

ЭДУАРД БАЛАЯН

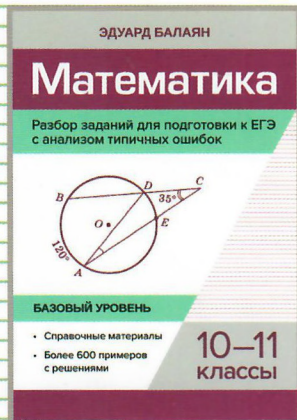
Математика

Пособие для подготовки к ЕГЭ  
и дополнительному экзамену

10–11 классы  
профильный уровень



Предлагаемое пособие написано в соответствии с ныне действующей программой по математике, содержит 10 вариантов тренировочных тестов профильного уровня, из которых вариант 1 дан с подробным решением и обоснованием, а также 200 вариантов заданий, разделенных на 3 части в порядке возрастания степени сложности. В заключительной части для удобства пользования книгой приводятся справочные материалы. Пособие предназначено старшеклассникам, абитуриентам, слушателям подготовительных отделений вузов, учителям математики, репетиторам, для самообразования с целью подготовки к дополнительным экзаменам в вузы с различным уровнем требований к математической подготовке, а также для сдачи ЕГЭ по математике.



ISBN 978-5-222-41776-8



9

ИЗДАТЕЛЬСТВО  
**ФЕНИКС**  
ХОРОШИЕ КНИГИ





**Э. Н. Балаян**

# **МАТЕМАТИКА**

**Пособие для подготовки к ЕГЭ  
и дополнительному экзамену**

***10–11 классы***

***Профильный уровень***

- ◆ Более 1000 задач
- ◆ Три уровня сложности
- ◆ 200 вариантов заданий
- ◆ Решение наиболее трудных задач
- ◆ 10 вариантов для подготовки к ЕГЭ
- ◆ Подготовка к олимпиадам
- ◆ Ответы ко всем заданиям
- ◆ Справочные материалы

Ростов-на-Дону

 **Феникс**  
2024

**УДК 373.167.1:51**

**ББК 22.1я72**

**КТК 444**

**Б20**

**Балаян Э. Н.**

**Б20 Математика : пособие для подготовки к ЕГЭ и дополнительному экзамену : 10–11 классы : профильный уровень / Э. Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2024. — 404, [2] с. — (Большая перемена).**

**ISBN 978-5-222-41776-8**

Предлагаемое пособие написано в соответствии с ныне действующей программой по математике, содержит 10 вариантов тренировочных тестов профильного уровня, из которых вариант 1 дан с подробным решением и обоснованием, а также 200 вариантов заданий, разделенных на 3 части в порядке возрастания степени сложности.

Все разделы содержат подробные решения и обоснования наиболее сложных нечетных вариантов, причем многие задания решены различными способами, что способствует творческой активности учащихся, повышению качества знаний, необходимых при поступлении в вузы.

В заключительной части для удобства пользования книгой приводятся справочные материалы.

Пособие предназначено старшеклассникам, абитуриентам, слушателям подготовительных отделений вузов, учителям математики, репетиторам, для самообразования с целью подготовки к дополнительным экзаменам в вузы с различным уровнем требований к математической подготовке, а также для сдачи ЕГЭ по математике.

**УДК 373.167.1:51**

**ISBN 978-5-222-41776-8**

**ББК 22.1я72**

© Балаян Э. Н., 2024

© Оформление: ООО «Феникс», 2024

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Основная цель предлагаемой книги — дать возможность старшеклассникам и выпускникам наиболее эффективно подготовиться к сдаче ЕГЭ, олимпиадам и письменным экзаменам в вузы.

Книга представляет собой сборник, состоящий из более 1000 задач, скомпонованных в 200 вариантов заданий, разделенных на 3 части в порядке возрастания степени сложности.

В части 1 (варианты 1–70) приводятся задания базового и среднего уровней, поэтому умения их решать достаточно для получения положительной оценки на экзаменах. Количество задач в каждом варианте варьируется от 3 до 10, что позволяет учителю проводить самостоятельные, проверочные и контрольные работы, а также использовать материал книги на итоговой аттестации.

Задачи части 2 (варианты 71–140) являются более сложными и направлены на выработку умений и навыков на высоком уровне программных требований. Эти задачи рассчитаны на учащихся и абитуриентов, проявляющих повышенный интерес к изучению математики. Задачи этой части примерно соответствуют уровню требований технического вуза.

В части 3 (варианты 141–200) содержатся в основном «нестандартные» задачи повышенной сложности (типа С в ЕГЭ).

Решение этих задач требует сообразительности, хорошего владения некоторыми разделами элементарной математики, психологической подготовки и, конечно, высокой логической культуры. Количество задач в частях 2 и 3 в вариантах 71–200 — от 4 до 6.

Часть 3 автор рекомендует изучать на завершающей стадии подготовки к экзаменам, так как она рассчитана на учащихся старших классов, собирающихся поступать в вузы, в которых предъявляются достаточно высокие требования к математической подготовке абитуриентов. Задания этой части предназначены для тех немногих абитуриентов и старшеклассников, которые имеют исключительно высокий уровень математической подготовки и позволяют им в полной мере продемонстрировать свои глубокие знания.



Часть 4 содержит подробные решения и обоснования почти всех нечетных вариантов с тем, чтобы учащийся мог решить остальные, четные, варианты самостоятельно. Следует отметить, что приведенные решения и обоснования ни в коей мере не могут служить эталоном, ибо такого эталона нет и не может быть.

Подробные решения, а также различные способы помогут ознакомиться с сущностью рациональности решения.

Часть 5 содержит 10 вариантов тренировочных тестов профильного уровня, из которых вариант 1 дан с подробным решением и обоснованием.

Автор рекомендует читателю приступить к решению предлагаемых задач и примеров после того, как будут проработаны теоретические вопросы программы по математике, а затем выбрать для себя тот раздел, который соответствует уровню его подготовки.

При составлении вариантов автор попытался сделать весь набор задач достаточно разнообразным как по содержанию, так и по приемам решения. При этом решение задач не требует знаний, выходящих за рамки школьной программы, хотя постановка некоторых из них может оказаться непривычной.

В дополнение к этой книге и для самостоятельной подготовки к ЕГЭ, ГИА и олимпиадам автор рекомендует использовать вышедшие в издательстве «Феникс» книги автора: «Репетитор по математике для старшеклассников и поступающих в вузы» (12-е издание) и серию книг «Математика. Задачи типа C1–C6».

# ЗАДАЧИ БАЗОВОГО И СРЕДНЕГО УРОВНЕЙ СЛОЖНОСТИ

## Вариант 1

1 | Упростите выражение

$$\left(1 + \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right) : \left(1 - \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right), \text{ где } a > b > 0.$$

2 | Решите уравнение

$$\sin 5x + \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) - \sin 3x = 0.$$

3 | Решите уравнение

$$\log_3(2^x - 1) + \log_3(2^x - 3) = 1.$$

4 | В какой точке графика функции  $f(x) = x^2 + 4x + 3$  касательная наклонена к оси  $Ox$  под углом  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ?

5 | В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки 5 см и 12 см. Найдите катеты треугольника.

## Вариант 2

6 | Упростите выражение

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}} + \sqrt{1-a}\right) : \left(\sqrt{1-a^2} + 1\right), \text{ где } -1 < a \leq 1.$$

7 | Решите уравнение

$$\cos x + \sin\left(\frac{5\pi}{2} + 7x\right) - \cos 4x = 0.$$

8 | Решите уравнение

$$\log_2(3^x - 1) + \log_2(3^x - 2) = 1.$$

**9 |** В какой точке графика функции  $f(x) = 2x^2 + \sqrt{3x} + 1$  касательная наклонена к оси  $Ox$  под углом  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ?

**10 |** Найдите длину основания равнобедренного треугольника, площадь которого равна  $25 \text{ см}^2$ , а углы  $\alpha$  при основании таковы, что  $\operatorname{tg} \alpha = 4$ .

### Вариант 3

**11 |** Докажите тождество

$$\frac{1 - \cos 2\alpha - \sin(2\alpha + \pi)}{1 - \cos(2\alpha - \pi) + \sin(2\alpha + 4\pi)} = \operatorname{tg} \alpha.$$

**12 |** Решите неравенство

$$4^x + 2^{x+3} > 20.$$

**13 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_4(x^2 + y^2) = 2, \\ x - \sqrt{3}y = 0. \end{cases}$$

**14 |** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$  на отрезке  $[0; 3]$ .

**15 |** Площадь осевого сечения цилиндра равна  $\frac{6}{\pi} \text{ м}^2$ . Найдите площадь его боковой поверхности.

### Вариант 4

**16 |** Докажите тождество

$$\frac{1 + \cos(2\alpha + 630^\circ) + \sin(2\alpha + 810^\circ)}{1 - \cos(2\alpha - 630^\circ) + \sin(2\alpha + 630^\circ)} = \operatorname{ctg} \alpha.$$

**17 |** Решите неравенство

$$9^{x+1} - 2 \cdot 3^x < 7.$$

**18 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3(x^2 + y^2) = 2, \\ y - 2\sqrt{2y} = 0. \end{cases}$$



**19 |** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1,5x + 30$  на отрезке  $[-3; 3]$ .

**20 |** Высота конуса составляет  $\frac{2}{3}$  от диаметра его основания.

Найдите отношение площади основания конуса к площади его боковой поверхности.

### Вариант 5

**21 |** Вычислите

$$\frac{\left(1\frac{1}{25} \cdot 4 - 4,41\right) : 0,5 + 0,5}{20,5 \cdot 2,18}.$$

**22 |** Решите неравенство

$$\sqrt{(x+3)(x-8)} > x+2.$$

**23 |** Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^3$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$ .

**24 |** Даны вершины треугольника  $ABC$ :  $A(-1; -2; 4)$ ,  $B(-4; -2; 0)$  и  $C(3; -2; 1)$ . Определите его внутренний угол при вершине  $B$ .

**25 |** В конус, осевое сечение которого есть равносторонний треугольник, вписан шар. Найдите объем конуса, если объем шара равен  $32/3$ .

### Вариант 6

**26 |** Вычислите

$$\frac{\left(2\frac{1}{10} : 2 - 1,8\right) \cdot 0,4 + 0,3}{3,15 : 22,5}.$$

**27 |** Решите неравенство

$$\sqrt{(x-2)(x+1)} \leq x-1.$$

**28** Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^3$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

**29 |** Даны координаты вершин  $\triangle ABC$ :  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 1)$  и  $C(-1; 1)$ . Из вершины  $B$  на сторону  $AC$  опущен перпендикуляр  $BD$ . Найдите координаты точки  $D$ .

**30 |** Найдите боковую поверхность правильной четырехугольной пирамиды, если ее объем равен  $\frac{4}{\sqrt{3}}$ , а двугранный угол при основании равен  $60^\circ$ .

### Вариант 7

**31 |** Решите уравнение

$$3 + 5\sin 3x = \cos 6x.$$

**32 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy = 10, \\ x^3 + x^2y = 20. \end{cases}$$

**33 |** Решите уравнение

$$\log_{0,5}^2(1 - x^2) = 4.$$

**34 |** Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - x + 23} < 5.$$

**35 |** Найдите функцию  $F(x)$ , если  $F'(x) = x^3 - 4x^2$  и  $F(-1) = 3$ .

### Вариант 8

**36 |** Решите уравнение

$$\cos 2x + 2\cos 4x = 1.$$

**37 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy = 2, \\ y^2 + xy = 2. \end{cases}$$

**38 |** Решите уравнение

$$\log_4^2(1 + x^2) = 0,25.$$

**39 |** Решите неравенство

$$3 + \sqrt{12 - x - x^2} \geq 0.$$

**40** | Найдите функцию  $F(x)$ , если  $f(x) = (2x + 5)^{-2}$  и  $F(-2) = \frac{1}{2}$ .

### Вариант 9

**41** | Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = 2^{x+3}$  в точке  $A(-3; 1)$ .

**42** | Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - x}.$$

**43** | Решите уравнение

$$3(1 - \sin x) = 1 + \cos 2x.$$

**44** | Решите неравенство

$$(0,5)^{\frac{2x-7}{x+3}} > 2^{-3}.$$

**45** | В какой круг можно вписать прямоугольник наибольшей площади с периметром, равным 56 см?

### Вариант 10

**46** | Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = e^{3x-1}$  в точке с абсциссой  $x_0 = \frac{1}{3}$ .

**47** | Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{x^2 - 2x - 3}.$$

**48** | Решите неравенство

$$\left(\frac{29}{30}\right)^{\frac{9x-18}{6-x}} > 1.$$

**49** | Решите уравнение

$$3 \sin 2x + \cos 2x = 1.$$

**50** | Среди всех прямоугольников, вписанных в окружность радиуса 10 дм, найдите прямоугольник с наибольшей площадью.



## Вариант 11

**51 |** При каком отношении радиуса основания к высоте цилиндр с данной площадью поверхности имеет наибольший объем?

**52 |** Решите неравенство

$$\log_2 \frac{x^2 + 3}{x + 3} > 1.$$

**53 |** Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x.$$

**54 |** Вычислите интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \frac{x}{2} dx.$$

## Вариант 12

**55 |** Вокруг шара радиуса  $R$  описано множество конусов. Найдите конус наименьшего объема.

**56 |** Решите неравенство

$$\log_{0,5} \frac{x^2 - 4}{x + 10} < -1.$$

**57 |** Решите уравнение

$$\cos x - \sin x = 1 - \sin 2x.$$

**58 |** Вычислите интеграл

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

## Вариант 13

**59 |** Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен  $\alpha$ , а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно  $d$ . Определите объем пирамиды.

**60 |** Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{1 + \sin \frac{x}{2}} = -2 \cos \frac{x}{2}.$$

**61** | Решите уравнение

$$\log_4(\sin^2 x + 1,5) = 0,5.$$

**62** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3, \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} = 5. \end{cases}$$

### Вариант 14

**63** | Найдите объем правильной треугольной пирамиды, боковая грань которой наклонена к плоскости основания под углом  $\alpha$  и удалена от противоположной вершины на расстояние  $m$ .

**64** | Решите уравнение

$$\frac{\sin 4x}{1 - \cos 2x} = 2 \sin 2x.$$

**65** | Решите уравнение

$$\log_9(\cos^2 x + 2,5) = 0,5.$$

**66** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3y-x} + x + y = 2, \\ \sqrt{8y-x} + x = 2. \end{cases}$$

### Вариант 15

**67** | Найдите сумму значений  $x$  и  $y$ , при которых векторы  $\vec{a}\{4; 3; -x\}$  и  $\vec{b}\{y; 15; 30\}$  коллинеарны.

**68** | Решите неравенство

$$\log_8(x^2 - 4x + 3) < 1.$$

**69** | Решите уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = 1.$$

**70** | Какой должна быть высота конуса с образующей, равной 20, чтобы его объем был наибольшим?

## Вариант 16

**71 |** Даны векторы  $\vec{a}\{m; 2; n\}$ ,  $\vec{b}\{2; 3; -2\}$  и  $\vec{c}\{1; -4; 0\}$ . Вектор  $\vec{a}$  перпендикулярен двум другим векторам. Найдите произведение  $m \cdot n$ .

**72 |** Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x - 8) \leq -4.$$

**73 |** Решите уравнение

$$\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x + \sin^2 4x.$$

**74 |** Периметр осевого сечения цилиндра равен 6. При каком радиусе основания цилиндра его объем будет наибольшим?

## Вариант 17

**75 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{y-2} = 4, \\ x^{2y-3} = 64. \end{cases}$$

**76 |** Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \sin x, y = 2\sin x, x = \frac{5\pi}{4}, x = 0.$$

**77 |** Постройте график функции  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  с помощью производной.

**78 |** Катеты прямоугольного треугольника равны  $a$  и  $b$ . Найдите длину биссектрисы прямого угла.

## Вариант 18

**79 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^y = 4^6, \\ y = 1 + \log_4 x. \end{cases}$$

**80 |** Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \cos x, y = 0, x = -\frac{\pi}{4}, x = \frac{\pi}{4}.$$



**81 |** Постройте график функции  $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$  с помощью производной.

**82 |** Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 18 и 24 см.

### Вариант 19

**83 |** Найдите значение  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ , если  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$ .

**84 |** Найдите область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x+12-x^2}}{x^2-9}.$$

**85 |** Товар, стоивший 100 руб., дважды понижался в цене на одно и то же количество процентов и стал стоить 64 руб. На сколько процентов каждый раз происходило снижение цены?

**86 |** В квадрате со стороной  $a$  середины двух смежных сторон соединены между собой и с противоположной вершиной квадрата. Вычислите площадь полученного треугольника.

### Вариант 20

**87 |** Найдите значение  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ , если  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,5$ .

**88 |** Найдите область определения функции

$$y = \sqrt[6]{3^{\frac{x-1}{x+1}}} - 81.$$

**89 |** При выполнении работы по математике 12 % учеников класса вовсе не решили задачи, 32 % решили с ошибками, остальные 14 человек решили верно. Сколько учеников было в классе?

**90 |** В равнобедренной трапеции средняя линия равна  $m$ , а диагонали взаимно перпендикулярны. Вычислите площадь трапеции.

## Вариант 21

**91 |** Велосипедист и пешеход вышли из пунктов  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми 12 км, и встретились через 20 мин. Пешеход прибыл в пункт  $A$  на 1 ч 36 мин позже, чем велосипедист в  $B$ . Найдите скорость пешехода.

**92 |** Исследуйте функцию  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  с помощью производной и постройте ее график.

**93 |** Найдите  $x$  из уравнения  $1 + 4 + 7 + \dots + x = 117$ .

## Вариант 22

**94 |** Моторная лодка прошла 5 км по течению и 6 км против течения реки, затратив на весь путь 1 ч. Скорость течения реки равна 3 км/ч. Найдите скорость лодки по течению.

**95 |** Исследуйте функцию  $f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$  с помощью производной и постройте ее график.

**96 |** При каком значении  $x$  последовательность  $\sqrt{x-5}$ ,  $\sqrt[4]{10x+4}$ ,  $\sqrt{x+2}$  образует геометрическую прогрессию?

## Вариант 23

**97 |** Вычислите интеграл

$$\int_0^{\pi} (\sin^4 x - \cos^4 x) dx.$$

**98 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x \cdot 5^y = 40, \\ \log_{\sqrt{2}}(x - y) = 2. \end{cases}$$

**99 |** В правильной пирамиде  $МABCD$   $МО$  — высота пирамиды. Объем пирамиды равен  $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ . Найдите наименьшую площадь боковой поверхности пирамиды.

## Вариант 24

**100** | Вычислите интеграл

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{2dx}{\sin^2 x}.$$

**101** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x-y} - 2^{\frac{x-y}{2}} = 12, \\ 3^{\log(2y-x)} = 1. \end{cases}$$

**102** | Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна  $2\sqrt{3}$ , а высота может принимать любые значения, принадлежащие отрезку  $[1; 3]$ . Найдите наибольший объем пирамиды.

## Вариант 25

**103** | Прямоугольный треугольник с катетами 12 см и 5 см вращается вокруг гипотенузы. Найдите площадь поверхности полученного тела.

**104** | Решите уравнение

$$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_2 x} = 162.$$

**105** | Найдите три числа, образующих возрастающую геометрическую прогрессию, зная, что их сумма равна 26, а сумма квадратов этих чисел — 364.

## Вариант 26

**106** | Вычислите  $\log_{49} 16$ , если  $\log_{14} 28 = a$ .

**107** | Равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 6 см, вращается вокруг одной из боковых сторон. Найдите объем тела вращения, если угол при вершине треугольника равен  $30^\circ$ .

**108** | Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 32, а сумма ее первых пяти членов равна 31. Найдите первый член прогрессии.



## Вариант 27

**109** | Биссектриса угла  $A$  параллелограмма  $ABCD$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $E$ . Найдите периметр параллелограмма, если  $BE = 12$  см,  $EC = 9$  см.

**110** | Вычислите  $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7$ .

**111** | При каких значениях  $a$  прямая  $y = ax - 5$  касается кривой  $y = 3x^2 - 4x - 2$ ?

## Вариант 28

**112** | Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной  $a$  и острым углом в  $60^\circ$ . Определите объем параллелепипеда.

**113** | Решите уравнение

$$\sqrt{\lg(-x)} = \lg \sqrt{x^2}.$$

**114** | Упростите выражение

$$\left( \frac{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) : (a - b) + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}.$$

## Вариант 29

**115** | Самая большая диагональ правильной шестиугольной призмы, имеющая длину  $m$ , составляет с боковым ребром призмы угол  $\alpha$ . Определите объем призмы.

**116** | Решите уравнение

$$\lg \sqrt{8x+8} - \frac{1}{2} \lg(x-13) = 3 \lg 2.$$

**117** | Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{x} + 1}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}} : \frac{1}{x^2 - \sqrt{x}}, \quad x > 0, x \neq 1.$$

## Вариант 30

**118** | Из всех прямоугольников, площадь которых равна  $9 \text{ см}^2$ , найдите прямоугольник с наименьшим периметром.

**119** | Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 3x - x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$ .

**120** | Найдите область определения функции

$$y = \sqrt[6]{3^{\frac{x-1}{x+1}} - 81}.$$

## Вариант 31

**121** | В параллелограмме  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) биссектриса тупого угла  $B$  пересекает сторону  $AD$  в точке  $F$ . Найдите периметр параллелограмма, если длина  $AB = 12$  и  $AF : FD = 4 : 3$ .

**122** | Найдите  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4}$ .

**123** | Решите уравнение  $\lg^2(100x) - \lg^2(10x) + \lg x = 9$ .

**124** | Вычислите значение  $10^x$  при  $x = \lg 12 + (\log_4 10)^{-1}$ .

**125** | Восьмой член арифметической прогрессии равен 2, одиннадцатый член равен 11. Сколько членов прогрессии, начиная с первого, надо взять, чтобы их сумма была равна 30?

**126** | Найдите число  $x$ , если

$$\frac{\sqrt[3]{9^2} \cdot (1/3)^6}{(\sqrt[3]{3})^{-1} \cdot 27^{-2/3}} = \frac{x}{3(\sqrt[3]{3})^4}.$$

## Вариант 32

**127** | Диагонали ромба относятся как 4 : 3. Определите отношение площади ромба к площади круга, вписанного в ромб.

**128** | Найдите  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , если  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\frac{\pi}{\alpha} < \alpha < \pi$ .

**129** | Решите уравнение

$$\lg(3x+4) = 2\lg\left(\frac{x}{2}-6\right) + \lg(\sin 90^\circ).$$

**130** | Вычислите

$$0,375\left(1+4^{\log_5^2}\right)\frac{4\sqrt{2}}{13}.$$

**131** | Найдите третий член бесконечной геометрической прогрессии, сумма которой равна 1,6, а второй член равен  $-0,5$ .**132** | Вычислите значение  $x$ , если  $x = 100^{\frac{1}{2}-\lg \sqrt[4]{4}}$ .

### Вариант 33

**133** | Основание равнобедренного треугольника равно 30, а высота, проведенная к боковой стороне, равна 24. Найдите длину боковой стороны.**134** | Найдите наименьшее отрицательное решение неравенства

$$\sqrt{\frac{3+2x}{4-x}} > -\sqrt{3}.$$

**135** | Найдите значение выражения

$$81\cos^2\left(6\alpha - \frac{3\pi}{2}\right), \text{ если } \cos 3\alpha = \frac{2}{3}.$$

**136** | Решите уравнение

$$2\sqrt{x-2} - 15 = \sqrt[4]{x-2}.$$

**137** | Найдите  $x$  в градусах, если

$$0^\circ < x < 270^\circ \text{ и } \sin(90^\circ + 2x) + \sin x = 0.$$

**138** | Вычислите  $f'(\pi/2)$ , если  $f(x) = 0,5 \sin x \operatorname{tg} 2x + 2,5 \cos x$ .

### Вариант 34

**139** | Найдите площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10 см, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12 см.

**140** | Найдите наибольшее положительное целое решение неравенства  $\sqrt{x+14} \leq x+2$ .

**141** | Найдите значение выражения  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$ , если  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 0,5$ .

**142** | Решите уравнение

$$\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2.$$

**143** | Сколько корней имеет уравнение  $2 \sin x = 3 \cos x + \cos 3x$ , если  $0 \leq x \leq 3\pi$ ?

**144** | Вычислите  $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ , если  $f(x) = \frac{\sqrt{3} \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{\sin 2x}$ .

### Вариант 35

**145** | Металлический шар радиуса  $R = \sqrt[3]{2}$  переплавлен в конус, площадь боковой поверхности которого в 3 раза больше площади основания. Найдите высоту конуса.

**146** | Решите уравнение

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{x+24} = 14.$$

**147** | Найдите больший корень уравнения

$$\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg \frac{1}{x}.$$

**148** | Найдите значение  $\cos^2 \alpha$ , если  $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{3}{4}$  и  $0 < \alpha < \pi/2$ .

**149** | Сколько корней уравнения  $\sin x + \cos x = 1$  принадлежит промежутку  $-\pi \leq x \leq 3\pi$ ?

**150** | Найдите квадрат наибольшего значения функции

$$f(x) = \sin x + \cos x.$$

### Вариант 36

**151** | Металлический цилиндр с диаметром основания  $d = 4$  см и высотой  $h = 4$  см переплавлен в шар. Вычислите радиус этого шара (считать  $\sqrt[3]{12} \approx 2,3$ ).

**152** | Решите уравнение

$$2\sqrt{4x+5} - \sqrt{7-8x} = 1.$$

**153** | Найдите меньший корень уравнения

$$\log_{\frac{1}{4}}^2 x - 3\log_2 x + 5 = 0.$$

**154** | Найдите значение  $13 \cos 3\alpha$ , если  $\operatorname{tg} \frac{3\alpha}{2} = 5$ .**155** | Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$25^{-x} - 5^{1-x} \geq 50.$$

**156** | Какое число в сумме со своим квадратом дает этой сумме наименьшее значение?**Вариант 37****157** | Решите уравнение

$$\frac{x-1}{x} - \frac{3}{2x-2} = -\frac{5}{2}.$$

**158** | Решите уравнение

$$2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-3} = 448.$$

**159** | Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{x-1}{7-x} > -1.$$

**160** | Вычислите  $A = 5^B$ , где  $B = 2\log_{25} 8 + \log_{\frac{1}{5}} 5$ .**161** | Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x^4} + 16 = 8\sqrt[3]{x^2}, \quad x > 0.$$

**162** | В квадрате  $ABCD$  точка  $E$  — середина стороны  $BC$ , а точка  $F$  — середина стороны  $CD$ . Найдите тангенс угла  $EAF$ .**Вариант 38****163** | Решите уравнение

$$\frac{3x^2 - 5x}{3x - 2} - 1 = \frac{2}{2 - 3x}.$$

**164** | Решите уравнение

$$4^{x-1} + 4^x + 4^{x+1} = 84.$$

**165** | Найдите наибольшее целое  $x$ , удовлетворяющее неравенству  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x+2}{3x+15} < 0$ .

**166** | Вычислите значение  $A = 2^B - 10^C$ , где  $B = \frac{1}{\log_6 2}$ ,  $C = \frac{2}{\log_2 10}$ .

**167** | Решите уравнение

$$\sqrt{2,1x+1} = x-1.$$

**168** | В равнобедренном треугольнике высота относится к основанию как 3 : 4, а боковая сторона равна  $2\sqrt{39}$  см. Найдите площадь треугольника.

### Вариант 39

**169** | Найдите число  $2x$ , если

$$\frac{x+5,5}{14} (4+\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})}{8^{2/3}-2^{1/2}}.$$

**170** | Найдите значение выражения  $x^2 - y$ , если  $2x - 5y = 0$ ,  $x + 10y = 2$ .

**171** | Найдите значение  $A$ , если  $A = 2^B + 6^C$ , где  $B = \frac{2}{\log_{\sqrt{3}} 2}$  и

$$C = \frac{1}{\log_2 6}.$$

**172** | Вычислите длину отрезка, на котором выполняется неравенство  $x^2 - x \leq 6$ .

**173** | Найдите  $\sin \alpha$ , если  $\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = 3$ .

**174** | Осевое сечение конуса — равносторонний треугольник. Найдите отношение объема конуса к объему вписанного в него шара.

## Вариант 40

**175 |** Найдите значение  $x$ , если

$$\left( \frac{0,3x + 4,05}{x} - 3\frac{3}{20} \right) \cdot \frac{2}{7} = 1,5.$$

**176 |** Найдите значение выражения  $x^2 + y^2$ , если  $2x + y = 2$ ,  $x + 3y = 3$ .

**177 |** Найдите значение  $A$ , если  $A = 4^B$ , где  $B = \log_2 5 + \log_{1/4} 10$ .

**178 |** Сколько целых значений  $x$  удовлетворяет неравенству  $x^2 + 8x < 20$ ?

**179 |** Найдите  $\cos(\alpha - 45^\circ)$ , если  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ ,  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ .

**180 |** Площадь боковой поверхности конуса равна 36, расстояние от центра основания до образующей конуса равно 7. Найдите объем конуса.

## Вариант 41

**181 |** Из точки, отстоящей от плоскости на расстояние  $5\sqrt{2}$ , проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в  $45^\circ$ , а между собой угол  $60^\circ$ . Найдите расстояние между основаниями наклонных.

**182 |** Найдите наибольшее значение  $x$ , при котором верно неравенство  $2x - 5\sqrt{x} + 2 \leq 0$ .

**183 |** Вычислите значение выражения

$$49 : \operatorname{tg}^2 \left( \alpha + \frac{5\pi}{2} \right), \text{ если } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}.$$

**184 |** Найдите число целых решений неравенства

$$5 + \frac{17}{x-2} < \frac{2}{x+3}.$$

**185 |** Найдите число решений уравнения  $\sin 3x - \cos 3x = 0$  на отрезке  $[0; \pi]$ .

**186 |** Найдите два числа, если их среднее арифметическое на 16 меньше большего из этих чисел, а среднее геометрическое на 8 больше меньшего из них.

**187** | Решите уравнение

$$0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left( \frac{0,25}{\sqrt{2}} \right)^{-x}$$

### Вариант 42

**188** | Из данной точки к плоскости проведены две наклонные, разность длин которых равна 6 см. Их проекции на эту плоскость равны 27 см и 15 см. Найдите расстояние от данной точки до плоскости.

**189** | Найдите наибольшее целое положительное решение неравенства  $-x^2 + 7x - 12 < 0$ .

**190** | Вычислите значение  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$ , если  $\operatorname{tg} x = 2$ .

**191** | Найдите наименьшее натуральное решение неравенства

$$\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x}.$$

**192** | Найдите корни уравнения  $\sin x = \sin 3x$  на промежутке  $(0^\circ; 90^\circ)$ .

**193** | Среднее арифметическое двух чисел равно 7, а разность квадратов — 14. Найдите сумму квадратов этих чисел.

**194** | Решите уравнение

$$\sqrt{2} = 4^{x^2 - \sqrt{x^2 - 9} - 20,75}.$$

### Вариант 43

**195** | Основанием прямой призмы служит ромб. Меньшая диагональ призмы равна 4 и составляет с плоскостью основания угол  $30^\circ$ . Найдите объем призмы, если один из углов ромба равен  $60^\circ$ .

**196** | Найдите область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{1+2x}}{\lg(x^2+1)}.$$



**197** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 0, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

**198** | Решите уравнение

$$\cos x - \cos 2x = \sin 3x.$$

**199** | Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^3, y = 2x - x^2.$$

**200** | Решите неравенство

$$\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1.$$

**201** | Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов членов этой же прогрессии равна 40,5. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

### Вариант 44

**202** | Найдите объем пирамиды, высота которой равна 6 см, а основанием служит ромб со стороной 4 см и углом  $60^\circ$ .

**203** | Найдите область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}{\lg(x+1)}.$$

**204** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\log_{25} x + \log_5 y = 1, \\ y - 6x = 1. \end{cases}$$

**205** | Решите уравнение

$$\cos 2x + \sin 3x = \sin x.$$

**206** | Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{4}{x}, y = x, x = 4.$$

**207** | Решите неравенство

$$\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}.$$

**208** | Найдите три первых члена бесконечной геометрической прогрессии, сумма которой равна 6, а сумма пяти первых членов равна 93/16.

### Вариант 45

**209** | В треугольнике с основанием 15 см проведен отрезок, параллельный основанию. Площадь полученной трапеции составляет 75 % площади треугольника. Найдите длину этого отрезка.

**210** | Решите уравнение

$$\frac{6-x}{1-x^2} - \frac{x+3}{x(1-x)} = \frac{x+5}{x(1+x)}.$$

**211** | Найдите сумму корней уравнения

$$2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01(10^{x-1})^3.$$

**212** | Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{3}{x}$ ,

$$y = 4 - x.$$

**213** | Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} \geq 0, \\ \frac{1}{x-2} \geq 1. \end{cases}$$

**214** | Найдите наименьший корень уравнения  $2 \cos^2 x - 3 \sin x = 0$ , лежащий в интервале  $(0^\circ; 90^\circ)$ . Ответ запишите в градусах.

**215** | Найдите сумму квадратов наибольшего и наименьшего значений функции  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$  на отрезке  $[-1; 2]$ .

### Вариант 46

**216** | Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10. Один из катетов составляет 75 % другого. Найдите больший из катетов.

**217** | Решите уравнение

$$\frac{2x+19}{5x^2-5} - \frac{17}{x^2-1} - \frac{3}{1-x} = 0.$$

**218 |** Найдите сумму корней уравнения

$$3^{4x+8} - 4 \cdot 32^{x+5} + 27 = 0.$$

**219 |** Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $xy = 4$ ;  $x = 1$ ;  $x = 4$ ;  $y = 0$ .**220 |** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{5x-4}{2x-3} > 2, \\ |5x-3| \leq 7. \end{cases}$$

**221 |** Найдите количество различных корней уравнения  $\operatorname{tg} x = \sin 2x$  в промежутке  $0^\circ \leq x < 360^\circ$ .**222 |** Найдите сумму наибольшего и наименьшего значений функции  $f(x) = 2\sqrt{x} - x$  на отрезке  $[0; 9]$ .

## Вариант 47

**223 |** Моторная лодка прошла 60 км против течения реки и 60 км по течению, затратив на путь против течения на 50 мин больше, чем на путь по течению. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде равна 21 км/ч.**224 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$$

**225 |** Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{5 - x - \frac{6}{x}}.$$

**226 |** Решите уравнение  $f'(x) = g'(x)$ , если

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad g(x) = -\frac{x}{2} - 2 \cos x.$$

**227 |** Вычислите

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3n}{4n+3} - \frac{5n^2}{7n^2+1} \right).$$

**228** | Решите неравенство

$$3 \cdot 4^x - 2^x - 1 \leq 0.$$

**229** | Шестой член арифметической прогрессии в 4 раза меньше девятого члена, а их сумма равна 20. Найдите сумму девяти первых членов прогрессии.

### Вариант 48

**230** | Моторная лодка прошла 45 км по течению реки и 22 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде, зная, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

**231** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

**232** | Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{\frac{1}{4}}(3x-8)}.$$

**233** | Найдите наибольшее  $x$ , удовлетворяющее неравенству  $f'(x) \leq g'(x)$ , если  $f(x) = x^2 + x - 1$ ,  $g(x) = 5x + x^{-1}$ .

**234** | Вычислите

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 4} \right).$$

**235** | Решите неравенство

$$4^{2x} + 4^x - 6 \leq 0.$$

**236** | Сумма первых четырех членов арифметической прогрессии равна 9, а сумма шести первых членов равна 22,5. Найдите разность этой прогрессии.

### Вариант 49

**237** | В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна  $4\sqrt{10}$ , а длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна  $3\sqrt{10}$ . Найдите длину основания треугольника.

**238** | Вычислите значение выражения

$$4 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right), \text{ если } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}.$$

**239** | Решите уравнение

$$\sqrt{42-x} = 2 + \sqrt{6-x}.$$

**240** | Найдите наибольшее значение  $x$ , при котором верно неравенство

$$\frac{x^2 + x - 45}{x - 6} \geq \frac{3x + 1}{2}.$$

**241** | Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$\log_{1/3}(2x - 1) > -2.$$

**242** | Три целых положительных числа образуют геометрическую прогрессию. Найдите третий член прогрессии, если ее второй член на 1 больше первого члена.**243** | Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{2-x} \geq 1, \\ 2 \cdot 4^{2x} \geq 32^x. \end{cases}$$

**Вариант 50****244** | В равнобедренном треугольнике основание равно  $\sqrt{21}$ , угол при основании —  $30^\circ$ . Найдите длину медианы, проведенной к боковой стороне.**245** | Вычислите значение выражения

$$\frac{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}, \text{ если } \cos \alpha = \frac{1}{5}.$$

**246** | Решите уравнение

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+13} = 7.$$

**247** | Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{8x+31}{x+7} < \frac{9}{1-x}.$$

**248** | Найдите наибольшее целое значение  $x$ , удовлетворяющее неравенству

$$\log_{\sqrt{3}}(2x-3) \leq 4.$$

**249** | Геометрическая прогрессия состоит из 5 членов. Ее первый член на единицу меньше знаменателя. Сумма равна 31. Найдите знаменатель прогрессии.

**250** | Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 > 0, \\ x^2 < 16. \end{cases}$$

### Вариант 51

**251** | При выполнении работы по математике 12 % учеников класса вовсе не решили задачи, 32 % — решили с ошибками, остальные 14 человек решили верно. Сколько учеников было в классе?

**252** | Не решая уравнение  $x^2 - 5x + 6 = 0$ , вычислите сумму кубов его корней.

**253** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 5, \\ 2^{x+y} = 4. \end{cases}$$

**254** | Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + 2x - 2} + \sqrt{x^2 + 7x - 4} = 3.$$

**255** | Решите неравенство

$$|4x - 3| \leq |2x + 3|.$$

**256** | Решите уравнение

$$\log_6 \sqrt{x-2} + \frac{1}{2} \log_6 (x-11) = 1.$$

**257** | Запишите число 50 в виде суммы двух положительных чисел, сумма кубов которых наименьшая.

## Вариант 52

**258** | Высота прямоугольника составляет 75 % его основания. Найдите периметр этого прямоугольника, если площадь прямоугольника равна  $48 \text{ м}^2$ .

**259** | Не решая уравнение  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , найдите сумму квадратов его корней.

**260** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 12, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

**261** | Решите уравнение

$$\sqrt{-x^2 + 6x + 4} = x + 2.$$

**262** | Решите неравенство  $|2x + 3| > |4x - 3|$  и укажите наименьшее целое положительное решение.

**263** | Решите уравнение

$$\lg(2 - x) + 2\lg\sqrt{1 - x} = \lg 12.$$

**264** | Представьте число 3 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма утроенного первого слагаемого и куба второго была наименьшей.

## Вариант 53

**265** | В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 24 см и 10 см. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в  $45^\circ$ . Найдите боковое ребро параллелепипеда.

**266** | Найдите угол между векторами  $\vec{a} \{2; -2; 0\}$  и  $\vec{b} \{3; 0; -3\}$ .

**267** | Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 15, а сумма квадратов этих же чисел равна 93. Найдите эти числа.

**268** | Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2, y = 2x - x^2, y = 0.$$

**269** | Для функции  $f(x) = x^2$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $A(2; 1)$ .

**270** | Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\lg \sin x}.$$

**271** | Решите уравнение

$$\sqrt{3} \sin x \cos x - \cos^2 x = 0.$$

### Вариант 54

**272** | В основании прямого параллелепипеда лежит прямоугольник, стороны которого равны 2 и 3. Вычислите полную поверхность параллелепипеда, если длина диагонали равна  $\sqrt{29}$ .

**273** | Вектор  $\vec{a}$  коллинеарен вектору  $\vec{c} \{2; -1; -3\}$ , а вектор  $\vec{c}$  перпендикулярен вектору  $\vec{a} + 2\vec{b}$ , где  $\vec{b} \{-1; 0; 4\}$ . Найдите вектор  $\vec{a}$ .

**274** | Разность между четвертым и первым членами геометрической прогрессии равна 78, а сумма первых трех членов прогрессии равна 39. Найдите сумму первых четырех членов этой прогрессии.

**275** | Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{x^2}, y = 0, x = 0,5; x = 2,5.$$

**276** | Найдите функцию  $F(x)$ , если  $F'(x) = x^2 - 2x + 3$  и  $F(-2) = 3$ .

**277** | Найдите область определения функции

$$y = \frac{1}{\ln\left(3 - \frac{12}{x+1}\right)}.$$

**278** | Решите уравнение

$$2 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + 4 \cos^2 x = 1.$$

### Вариант 55

**279** | Сторона основания правильной треугольной призмы равна 16 см, боковое ребро равно 12 см. Найдите площадь сечения, прохо-



дящего через сторону верхнего основания и противоположащую вершину нижнего основания.

**280** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$$

**281** | Решите уравнение

$$3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2.$$

**282** | Решите неравенство

$$x^3 \geq 9x.$$

**283** | Решите уравнение

$$5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250.$$

**284** | Упростите выражение

$$\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

**285** | Найдите множество значений функции

$$y = 6 + \sin x \cos x.$$

## Вариант 56

**286** | В основании прямой призмы, объем которой равен 1, лежит ромб со стороной, равной 4. Площадь боковой поверхности призмы —  $\sqrt{2}$ . Найдите острый угол между сторонами ромба.

**287** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

**288** | Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7.$$

**289** | Решите неравенство

$$x^3 - x > x - x^2.$$

**290** | Решите уравнение

$$3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0,2.$$

**291** | Упростите выражение

$$\frac{1 + 2\cos\alpha + \cos 2\alpha}{1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha}.$$

**292** | Найдите множество значений функции

$$y = 3 - \frac{1}{3} \cos \frac{x}{3}.$$

### Вариант 57

**293** | Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна 16, а диагональ равна 20.

**294** | Найдите длину отрезка, на котором выполняется неравенство  $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x} \leq 6$ .

**295** | Найдите целое число, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(2x-3) > -3, \\ x^2 - 4x > 0. \end{cases}$$

**296** | Сумма четвертого и пятого членов геометрической прогрессии равна 20, а сумма третьего и четвертого членов равна 5. Найдите шестой член этой прогрессии.

**297** | Решите уравнение

$$2(\arcsin x)^2 + \pi^2 = 3\pi \arcsin x.$$

**298** | Найдите корни уравнения

$$2^{1+\log_2 x} + 4^{1+\log_2 x} = 110.$$

**299** | Сколько корней уравнения  $\cos^2 2x + \cos^2 6x = 1$  находится в промежутке  $[-\pi/8; \pi/2]$ ?

### Вариант 58

**300** | Найдите меньшее основание равнобедренной трапеции, если ее большее основание равно 26, боковая сторона равна  $8\sqrt{2}$ , а угол между ними составляет  $45^\circ$ .

**301** | Найдите длину отрезка, на котором выполняется неравенство

$$\sqrt{1-x} \leq \sqrt[4]{5+x}.$$

**302** | Найдите целое число, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{cases} \log_{0,5}(3x-4) < \log_{0,5}(x-2), \\ x(x-3) \leq 0. \end{cases}$$

**303** | Четвертый член геометрической прогрессии больше второго члена на 24, а сумма второго и третьего членов равна 6. Найдите знаменатель прогрессии.

**304** | Решите уравнение

$$\frac{4}{3} + \sin(\arcsin 2x) = 6x^2.$$

**305** | Найдите корни уравнения

$$6^{\lg x} - 6^{\lg x - 1} = 30.$$

**306** | Сколько корней уравнения  $\cos 3x + \sin 2x - \sin 4x = 0$  находится в промежутке  $(0^\circ; 90^\circ)$ ?

## Вариант 59

**307** | Среднее пропорциональное двух чисел на 12 больше меньшего из этих чисел, а среднее арифметическое тех же чисел на 24 меньше большего из чисел. Найдите эти числа.

**308** | Упростите выражение

$$\left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} + \operatorname{tg} 2\alpha\right) \left(1 - \frac{1}{\cos 2\alpha} + \operatorname{tg} 2\alpha\right).$$

**309** | Решите уравнение

$$\frac{6}{x^2-1} - \frac{3}{x+1} = \frac{2}{x-1} - 1.$$

**310** | Решите уравнение

$$\log_{1/2}(\log_2 x - 1) = -1.$$

**311** | Найдите  $f'(\pi/4)$ , если  $f(x) = 2\sqrt{2} \sin^3 x$ .

**312** | Вектор  $\vec{a}(x; -1; 2)$  перпендикулярен вектору  $\vec{b}(1; 2; 0)$ .  
Найдите модуль вектора  $\vec{a}$ .

**313** | Площадь равнобедренной трапеции  $180 \text{ см}^2$ . Длина средней линии равна  $45 \text{ см}$ ; длина боковой стороны —  $5 \text{ см}$ . Найдите длину меньшего основания трапеции.

### Вариант 60

**314** | Одно из чисел меньше другого в 4 раза. Найдите большее число, если их среднее арифметическое равно  $15$ .

**315** | Упростите выражение

$$\frac{\sin 2\alpha - 2\sin \alpha}{\sin 2\alpha + 2\sin \alpha} + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

**316** | Решите уравнение

$$\frac{x+6}{x^2-7x} - \frac{4}{(7-x)^2} = \frac{1}{x-7}.$$

**317** | Решите уравнение

$$\log_4 \log_2 \log_{\sqrt{5}} x = 0,5.$$

**318** | Найдите  $y'(1)$ , если  $y = 3x^2 - \ln x$ .

**319** | Найдите длину вектора  $\vec{a}\{x; 3; y\}$ , перпендикулярного векторам  $\vec{b}\{-1; 1; 2\}$  и  $\vec{c}\{2; -2; -1\}$ .

### Вариант 61

**320** | Высота и диагональ равнобедренной трапеции равны соответственно  $5$  и  $13$ . Найдите площадь трапеции.

**321** | Решите уравнение

$$4 \operatorname{arctg} \frac{3x-1}{x+3} = \pi.$$

**322** | Решите уравнение

$$\frac{1}{2x} \lg 2 = \lg(2^{1/x} - 2).$$

**323** | Сумма седьмого и одиннадцатого членов арифметической прогрессии равна 10, а сумма пятого и десятого членов равна 1. Найдите сумму двадцати первых членов.

**324** | Вычислите  $f'(1)$ , если  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} - \sqrt{x}$ .

**325** | Найдите все целые значения  $x$ , удовлетворяющие неравенству

$$\frac{4-x}{x-5} \geq 1 - \frac{4}{x}.$$

**326** | Найдите координату середины отрезка, на котором справедливо неравенство

$$\log_{0,1}(x^2 - x + 8) \geq -1.$$

**327** | Разбейте число 26 на такие два слагаемых, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

**328** | Решите уравнение

$$2\sqrt[3]{3x+0,1} = 3\sqrt{3x+0,1} - 1.$$

**329** | Вычислите

$$(0,001^{\lg 3 - 1} + 0,01^{\lg 0,3 + 0,5}) \cdot 2,7.$$

## Вариант 62

**330** | Диагональ равнобедренной трапеции равна 10, а площадь — 48. Найдите высоту трапеции.

**331** | Решите уравнение

$$\operatorname{arctg}(x^2 - 3x + 3) = \frac{\pi}{4}.$$

**332** | Найдите наибольший корень уравнения

$$\log_2 \left( 64 \cdot \sqrt[24]{2^{x^2 - 40x}} \right) = 0.$$

**333** | Найдите средний член геометрической прогрессии, состоящий из трех чисел, если их произведение равно 64, а сумма — 14.

**334** | Найдите  $y'(0)$ , если  $y = \frac{4x-7}{x^2+4}$ .

**335** | Решите неравенство  $\frac{3x-9}{x+7} < 2x+9$  и укажите наименьшее

целое решение.

**336** | Найдите наибольшее целое значение  $x$ , удовлетворяющее неравенству

$$\log_2(x^2 - 6x + 24) < 4.$$

**337** | Сумма двух целых чисел равна 24. Найдите эти числа, если известно, что их произведение принимает наибольшее значение.

**338** | Найдите больший корень уравнения

$$\sqrt[3]{x+1} = \sqrt{x+1} + 2.$$

**339** | Вычислите

$$\frac{2}{11} \left( \log_{12} 3 + \log_{12} 4 + 7^{\log_7 4} \right)^{2 \log_5 11}.$$

### Вариант 63

**340** | Высота правильной треугольной пирамиды равна  $H$ , а двугранный угол при стороне основания равен  $45^\circ$ . Найдите площадь поверхности пирамиды.

**341** | Решите уравнение

$$\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x-15} = 4.$$

**342** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy = -8, \\ y^2 + xy = 12. \end{cases}$$

**343** | Решите уравнение

$$|5x - 2| = |x + 10|.$$

**344** | Решите неравенство

$$\frac{(x-1)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{2})}{(2x+1)(5x-7)} > 0.$$

**345** | Решите уравнение

$$4^x \cdot 5^{x+1} = 5 \cdot 20^{2-x}.$$

**346** | Докажите тождество

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha), \quad \alpha \neq 45^\circ + 180^\circ \cdot n.$$

**347** | Найдите область определения функции  $y = \sin 5x + \operatorname{tg} 4x$ .

**348** | Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x - 4}.$$

**349** | Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9, а сумма квадратов ее членов равна 40,5. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

## Вариант 64

**350** | Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной четырехугольной пирамиды, равна ее боковому ребру и равна  $2\sqrt{3}$ . Найдите полную поверхность этой пирамиды.

**351** | Решите уравнение

$$3\sqrt[4]{x} - 2\sqrt{x} - 1 = 0.$$

**352** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + xy + y = 9. \end{cases}$$

**353** | Решите уравнение

$$|x^2 - x| = -|x| + 1.$$

**354** | Решите неравенство

$$\frac{(x-3)(x-x^2-1)}{x^2-2x+1} \leq 0.$$

**355** | Решите уравнение

$$8^x - 4^x = 2^{x+1}.$$

**356** | Докажите тождество

$$\sin \alpha \left( 1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right) = \operatorname{tg} \alpha.$$

**357** | Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2}.$$

**358** | Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 11x + 6}.$$

**359** | Сумма трех первых членов геометрической прогрессии равна 62, а сумма их десятичных логарифмов — 3. Найдите эти числа.

### Вариант 65

**360** | В равнобедренной трапеции основания равны 24 и 10, а радиус описанной около нее окружности равен 13. Найдите высоту трапеции при условии, что центр описанной окружности лежит вне трапеции.

**361** | Решите уравнение

$$x^2 \cdot 5^{\sqrt{3x-2}} + 5^{2+x} = 5^{\sqrt{3x-2}+2} + x^2 \cdot 5^x.$$

**362** | Упростите выражение

$$\left( \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \sin(45^\circ - \alpha)}{2 \sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3} \cos \alpha} \right)^6.$$

**363** | Найдите наименьшее положительное целое  $x$ , удовлетворяющее неравенству  $\sqrt{0,8^{x(x-3)}} > 0,64$ .

**364** | Найдите корни уравнения

$$\cos^2(180^\circ + x) + 3\cos^2(90^\circ + x) = 2$$

на промежутке  $(180^\circ; 360^\circ)$ .

**365** | Решите уравнение

$$\lg(\lg x) + \lg(\lg x^3 - 2) = 0.$$

**366** | Найдите сумму корней уравнения  $F(x) = F'(x)$ , если

$$F(x) = \frac{x}{2-x} + 2.$$

**367** | Найдите значение выражения

$$\operatorname{tg}^2 15^\circ + 4 \operatorname{tg} 60^\circ.$$



**368** | Найдите точки экстремума функции  $f(x) = x \ln x$ .

**369** | Вычислите значение  $5^x$ , если

$$x = \log_4 16 + 1,5 \log_{1/3} 3 - \lg \sqrt{5} - \lg \sqrt{2}.$$

## Вариант 66

**370** | Найдите площадь равнобедренной трапеции, у которой основания имеют длины 12 см и 20 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.

**371** | Решите уравнение

$$4^{\sqrt{2x-1}} - 3 \cdot 2^{1+\sqrt{2x-1}} - 16 = 0.$$

**372** | Упростите выражение

$$1 + \cos(\pi - \alpha) \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}.$$

**373** | Найдите наименьшее целое  $x$ , удовлетворяющее неравенству  $\sqrt[3]{0,008^{2x-1}} < 5 \cdot (0,2)^{7-\frac{3}{x}}$ .

**374** | Сколько корней имеет уравнение

$$2\sin^2(\pi - x) + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 4$$

на промежутке  $(-90^\circ; 0^\circ)$ ?

**375** | Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_2 x + \log_2 \log_2 (2\sqrt{2x}) = 1.$$

**376** | Решите уравнение  $F(x) = -\frac{3}{2}$ , если

$$F'(x) = 3 \cos x + \sin 2x \text{ и } F(0) = \frac{1}{2}.$$

**377** | Вычислите

$$\sqrt{3}(\operatorname{ctg} 70^\circ + 4 \cos 70^\circ).$$

**378** | Найдите точки экстремума функции  $y(x) = x^2 e^x$ .

**379** | Вычислите

$$49^{\log_7 2} \cdot (81^{0,25-0,5 \log_9 4} + 25^{\log_{125} 8}).$$

## Вариант 67

**380** | В тупоугольном равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 1, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

Найдите площадь треугольника.

**381** | Найдите область определения функции

$$y = \frac{1}{\cos x + \sin x}.$$

**382** | Для функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M(1; -2)$ .

**383** | Решите неравенство

$$x^{\frac{\lg x + 5}{3}} < 10^{\lg x + 1}.$$

**384** | Известно, что  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 + 3x + m = 0$ . При каком значении  $m$  разность корней данного уравнения будет равна 6?

**385** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 65, \\ (x-y)(x^2-y^2) = 5. \end{cases}$$

**386** | Решите неравенство

$$\left| \frac{2x-5}{x+1} \right| \geq 1.$$

**387** | Решите уравнение

$$2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6.$$

**388** | Вычислите

$$\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3.$$

**389** | Найдите третий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна 1,6, а второй член равен  $(-0,5)$ .

## Вариант 68

**390** | Длины сторон треугольника равны 11 см, 13 см и 12 см. Найдите медиану, проведенную к большей стороне.

**391** | Найдите область определения функции

$$y = \frac{6x}{2\sin x - 1}.$$

**392** | Найдите функцию  $F(x)$ , если

$$F'(x) = 12x^3 + 9x^2 - 11 \text{ и } F(-1) = 5.$$

**393** | Решите неравенство

$$x^{\lg^2 x - 3\lg x + 3} > 10.$$

**394** | При каком значении  $a$  корни уравнения

$$x^2 - 3x + 2a + 3 = 0$$

удовлетворяют условию  $5x_1 + 3x_2 = 23$ ?

**395** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 152, \\ x^2y + xy^2 = 120. \end{cases}$$

**396** | Решите неравенство

$$\left| \frac{x+2}{x-5} \right| \leq 1.$$

**397** | Найдите больший корень уравнения

$$7^x \left( \sqrt{2} \right)^{2x^2-6} - \left( \frac{7}{4} \right)^x = 0.$$

**398** | Вычислите

$$\sin \left( 3 \operatorname{arctg} \sqrt{3} + 2 \arccos \frac{1}{2} \right).$$

**399** | Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой первый член равен 66, а сумма прогрессии — 110.

## Вариант 69

**400** | Основаниями усеченной пирамиды являются правильные треугольники со сторонами 10 см и 6 см. Одно из боковых ребер пер-

пендикулярно к плоскости основания и равно 2 см. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

**401 |** Векторы  $\overrightarrow{AB} = -4\vec{j} + 5\vec{k}$  и  $\overrightarrow{AC} = 3\vec{j} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$  служат сторонами треугольника  $ABC$ . Найдите длину медианы  $AM$ .

**402 |** Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = x^2 - 3x$  в точке с абсциссой  $x_0 = 1$ .

**403 |** Найдите область определения функции  $y = \sqrt{1 - 2\sin x}$ .

**404 |** Решите неравенство

$$x^{\log_2 x} + 2x^{-\log_2 x} < 3.$$

**405 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 4, \\ 2x - y = 17. \end{cases}$$

**406 |** Гипотенуза прямоугольного треугольника равна  $3\sqrt{5}$  м. Определите катеты, если известно, что после того как один из них увеличить на  $133\frac{1}{3}$ , а другой на  $16\frac{2}{3}$ , сумма длин сделается равной 14 м.

**407 |** Решите уравнение

$$(6x^2 - 7x)^2 - 2(6x^2 - 7x) - 3 = 0.$$

**408 |** При каком значении  $x$  последовательность  $\sqrt{x-5}$ ,  $\sqrt[4]{10x+4}$ ,  $\sqrt{x+2}$  образует геометрическую прогрессию?

**409 |** Вычислите

$$3\left(\frac{2}{\sqrt{10}+5} + \frac{5}{\sqrt{10}-2} - \frac{7}{\sqrt{10}}\right).$$

### Вариант 70

**410 |** Определите объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 9 см, а стороны оснований — 7 см и 5 см.

**411 |** Найдите косинус угла между векторами  $\vec{a} - \vec{b}$  и  $\vec{a} + \vec{b}$ , если  $\vec{a} \in \{-1; 0; -1\}$  и  $\vec{b} \in \{0; -1; 1\}$ .

**412 |** Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = x^2 - 2x$  в точке  $x_0 = 3$ .

**413 |** Найдите наибольшее целое отрицательное значение  $x$  из области определения функции

$$y = \sqrt{1 - \frac{15}{x+2}}.$$

**414 |** Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$x^{0,5 \log_{0,5} x - 3} \geq 0,5^{3 - 2,5 \log_{0,5} x}.$$

**415 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{3}{2}, \\ xy = 4. \end{cases}$$

**416 |** Поезд проходит расстояние  $AB$  за 10,5 ч. За какое время он пройдет то же расстояние, если его скорость возрастет на 20 %?

**417 |** Решите уравнение

$$(x+1)^4 + x^2 + 2x + 1 = 0.$$

**418 |** Найдите  $x$ , если

$$(x+1) + (x+4) + (x+7) + \dots + (x+28) = 155.$$

**419 |** Вычислите

$$\frac{3}{\sqrt{7} - \sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6} - \sqrt{3}} - \frac{3}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}.$$

# ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

## Вариант 71

**420** | Упростите выражение

$$\left( \frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}} + \frac{x-a}{\sqrt{x^2+a^2}-x-a} \right) : \sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}, \quad x > a > 0.$$

**421** | Решите уравнение

$$(\operatorname{tg} x + 1) \left( 2 \cos \frac{x}{2} - \sqrt{2} \right) = 0.$$

**422** | Решите уравнение

$$(x+1)^{\lg(x+1)} = 100(x+1).$$

**423** | Решите неравенство

$$\frac{(1/3)^{8+x} - 81}{x^2 + 2x + 5} < 0.$$

**424** | В правильной четырехугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найдите площадь сечения, если сторона основания призмы равна 4 см, а ее высота — 8 см.

## Вариант 72

**425** | Упростите выражение

$$\left( \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}} \right) : \left( 1 + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right).$$

**426** | Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x (\sin x - 1) = 0.$$

**427** | Найдите больший корень уравнения

$$1,25^{1-\log_2^2 x} \geq 0,64^{2+\log_{\sqrt{2}} x}.$$

**428** | Решите неравенство

$$\log_x \frac{2x + \frac{2}{5}}{5(1-x)} > 0.$$

**429** | Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 15, высота равна 20. Найдите кратчайшее расстояние от стороны основания до непересекающей ее диагонали призмы.

### Вариант 73

**430** | Упростите выражение

$$\left( \frac{(\sqrt[4]{a^3} + \sqrt[4]{b^3})(\sqrt[4]{a^3} - \sqrt[4]{b^3})}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}, \quad a > 0, b > 0, a \neq b.$$

**431** | Решите уравнение

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x.$$

**432** | Решите неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1.$$

**433** | Вычислите интеграл

$$\int_4^5 \frac{x^2 - 6x + 10}{x - 3} dx.$$

**434** | Через вершину конуса и хорду основания, стягивающую дугу в  $120^\circ$ , проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол в  $45^\circ$ . Найдите площадь сечения, если радиус основания равен 8 см.

### Вариант 74

**435** | Упростите выражение

$$\left( \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{a - \sqrt{a^2 - 4}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{a + \sqrt{a^2 - 4}} \right) : \frac{a\sqrt{a^2 - 4}}{4}, \quad |a| > 2.$$

**436** | Решите уравнение

$$\cos^3\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos x.$$

**437** | Решите неравенство

$$\log_x(x^3 + 1) \cdot \log_{x+1} x > 2.$$

**438** | Вычислите интеграл

$$\int_2^3 \frac{(x^2 - 4)(x^2 - 1)}{x^2 + x - 2} dx.$$

**439** | Через вершину конуса под углом в  $45^\circ$  к основанию проведена плоскость, отсекающая четверть окружности основания. Высота конуса равна 10 см. Определите площадь сечения.

### Вариант 75

**440** | Докажите тождество

$$\frac{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{ctg}^4 \alpha.$$

**441** | Решите уравнение

$$\sqrt[3]{7-x} = \sqrt{x+3} - 2.$$

**442** | Решите неравенство

$$|x^2 - 4x + 3| \leq 3x - x^2.$$

**443** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[y]{4^x} = 32\sqrt{x}8^y, \\ \sqrt[y]{3^x} = 3\sqrt{x}9^{1-y}. \end{cases}$$

**444** | Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными  $a$ , и углом между ними, равным  $\alpha$ . Все боковые ребра наклонены к основанию под углом  $\beta$ . Определите объем пирамиды.

### Вариант 76

**445** | Докажите тождество

$$\cos 4\alpha = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1.$$



**446** | Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{10+x}{x}} + \sqrt{\frac{10-x}{x}} = \sqrt{6}.$$

**447** | Решите неравенство  $|x^2 + x - 20| \leq x^2 + x - 20$  и укажите наибольшее целое положительное решение.**448** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x-y} + \frac{1}{2}\sqrt{x+y} = \frac{26-y}{\sqrt{x-y}}, \\ 10^{3-\lg(x-y)} = 250. \end{cases}$$

**449** | Ребро куба равно  $5\sqrt{2}$ . Найдите расстояние от плоскости диагонального сечения до пересекающего его ребра.**Вариант 77****450** | Вычислите  $\log_{12} 60$ , если  $\log_6 30 = a$ ,  $\log_{15} 24 = b$ .**451** | Решите уравнение

$$\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0.$$

**452** | Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x - 2|x| > 1, \\ |x - 3| < 5. \end{cases}$$

**453** | Решите уравнение

$$2^x - 3^x = \sqrt{6^x - 9^x}.$$

**454** | В прямоугольном треугольнике высота, проведенная к гипотенузе, делит ее в отношении 1 : 3. Найдите площадь треугольника, если один из катетов равен 5 см.**Вариант 78****455** | Вычислите  $\log_{25} 12$ , если  $\log_5 4 = m$ ,  $\log_5 3 = n$ .**456** | Решите уравнение

$$\sin^3 x + 12 \cos^2 x + 4 = 3 \sin x.$$

**457** | Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6, \\ |x + 1| \leq 1. \end{cases}$$

**458** | Решите уравнение

$$\sqrt{2^{2x+3} - 2^{x+1}} = 2^{x+1}.$$

**459** | В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36 см, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2 : 3. Найдите меньшую сторону треугольника.

### Вариант 79

**460** | Упростите выражение

$$\left( \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}} \right) : \left( \frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}} - \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}} \right) - \frac{1}{a}.$$

**461** | Решите уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0,5.$$

**462** | Решите неравенство

$$\log_{1/3} \log_{1/2} \frac{x+4}{2x-3} < 0.$$

**463** | Составьте уравнение касательной, проведенной к графику функции  $f(x) = -x^2 + 4$  параллельно прямой  $y = -2x + 6$ .

**464** | Равнобедренная трапеция, у которой угол при основании равен  $60^\circ$ , описана около окружности. В каком отношении прямая, соединяющая точки касания окружности с боковыми сторонами, делит площадь трапеции?

### Вариант 80

**465** | Упростите выражение

$$\left( \frac{x - x^{1/3}}{x^{2/3} - 1} - 2x^{1/3} + 1 \right) \cdot \frac{1 + x^{1/3}}{1 - x^{2/3}}.$$

**466** | Решите уравнение

$$\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12 \cos^4 x.$$

**467** | Найдите наименьшее целое значение  $x$ , удовлетворяющее неравенству

$$\log_{\sqrt{5}} \log_{1/32} \frac{x-4}{1-x} \geq -2.$$

**468** | Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке с абсциссой  $x_0$ :  $f(x) = \ln(2x) + x^{-2}$ ,  $x_0 = 0,5$ .

**469** | Середины сторон основания правильной четырехугольной пирамиды объемом 36 служат вершинами основания правильной треугольной призмы объемом 54. Найдите объем общей части призмы и пирамиды.

## Вариант 81

**470** | Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 15. Если к ним прибавить соответственно числа 1, 4 и 19, то получатся три числа, составляющих геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

**471** | Решите уравнение

$$\sqrt[6]{\frac{1}{2} - \cos x} + \sqrt[6]{\frac{1}{2} + \cos x} = 1.$$

**472** | Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = 2\cos x + x$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**473** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2y + y^2x = 20. \end{cases}$$

**474** | Цену товара сперва снизили на 20 %, затем новую цену снизили еще на 15 % и, наконец, после перерасчета произвели снижение ее на 10 %. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

## Вариант 82

**475** | Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 30. Если от первого числа вычесть 5, от второго — 4,

а третье число оставить без изменения, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

**476** | Решите уравнение

$$\sin^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos x.$$

**477** | Найдите наибольшее и наименьшее значения функции  $y = \sin x + \cos x$  на  $[0; \pi]$ .

**478** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 341, \\ x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 330. \end{cases}$$

**479** | Цена товара со 100 000 руб. выросла дважды, каждый раз на 20 %. Какова окончательная стоимость товара?

### Вариант 83

**480** | Смешали 30 %-й раствор соляной кислоты с 10 %-м и получили 600 г 15 %-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

**481** | Решите неравенство

$$(x-3)^{2x^2-7x} > 1.$$

**482** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \sin y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 3. \end{cases}$$

**483** | Найдите координаты точек касания, в которых касательные к графику функции  $y = \frac{2(x-1)}{x+1}$  имеют угловой коэффициент, равный 4.

**484** | Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 5 + 4x - x^2, 2x - y - 3 = 0.$$

## Вариант 84

**485** | Смешали 30 %-й и 50 %-й растворы серной кислоты и получили 45 %-й раствор. Найдите отношение масс первоначально взятых растворов.

**486** | Найдите наименьшее целое значение  $x$ , удовлетворяющее неравенству  $(x+2)^{x^2-16} > 1$ .

**487** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \cos x \cos y = 0,5. \end{cases}$$

**488** | Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции  $y = 2 + x - x^2$  параллельна прямой  $y = 2x + 3$ .

**489** | Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = e^x$ ,  $x = 2$ ,  $x + 2y = 2$ .

## Вариант 85

**490** | Из всех прямоугольников с диагональю 4 дм найдите тот, у которого площадь наибольшая.

**491** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 10^{1-\lg(3x-y)} = 2, \\ 4x^2 - y - 15 = 0. \end{cases}$$

**492** | Докажите, что если  $\cos \alpha + \cos \beta = a$  и  $\sin \alpha + \sin \beta = b$ , то

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2ab}{a^2 - b^2}.$$

**493** | Найдите геометрическую прогрессию, состоящую из 6 членов, зная, что сумма трех первых членов равна 168, а сумма трех последних — 21.

**494** | Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{2 - x - x^2}.$$

## Вариант 86

**495** | Найдите наибольшую из площадей равнобедренных треугольников, вписанных в окружность радиуса 4 дм.

**496** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}, \\ xy = 16. \end{cases}$$

**497** | Докажите тождество

$$3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha = 8 \sin^4 \alpha.$$

**498** | Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый член относится к сумме всех последующих членов как 2 к 3.

**499** | Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}.$$

## Вариант 87

**500** | Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания, равной  $a$ , двугранным углом при основании, равным  $2\alpha$ , пересечена плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании. Найдите площадь сечения.

**501** | Компланарны ли векторы  $\vec{a} \{2; 0; 4\}$ ,  $\vec{b} \{2; 2; -2\}$  и  $\vec{c} \{-2; 0; 4\}$ ?

**502** | Решите неравенство

$$\log_x \frac{3x-1}{x^2+1} > 0.$$

**503** | Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}}.$$

**504** | Решите уравнение

$$\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x = \frac{1}{4} \sin 12x.$$

## Вариант 88

**505 |** Определите высоту правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине —  $60^\circ$ , а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно  $2\sqrt{6}$ .

**506 |** Вектор  $c$  перпендикулярен векторам  $\vec{a} \{2; 2; 1\}$  и  $\vec{b} \{2; -1; 2\}$ . Найдите координаты вектора  $\vec{c}$ , если  $|\vec{c}| = 1$ .

**507 |** Найдите наименьшее целое значение  $x$ , удовлетворяющее неравенству

$$\log_{0,5} \left( \frac{x+3}{3-x} \right)^2 > 2.$$

**508 |** Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{0,3} \frac{x-1}{x+5}}.$$

**509 |** Решите уравнение

$$\cos 2x \cdot \sin 3x = (1 + \cos x) \cdot \sin x.$$

## Вариант 89

**510 |** В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 12, а сумма радиусов вписанной и описанной окружностей равна  $83/8$ . Найдите стороны треугольника.

**511 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^3 + 1)(y^3 + 1) = 18, \\ xy + x + y = 5. \end{cases}$$

**512 |** Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+3} = \sqrt[3]{12(x+1)}.$$

**513 |** Решите уравнение  $2(\sin 2x + \cos 2x) + \sin 4x + 1 = 0$ .

**514 |** Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 1 - x$ ,  $y = 4 - 3x - x^2$ .

## Вариант 90

**515** | В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен  $36^\circ$ , а основание равно 6. Найдите боковые стороны треугольника.

**516** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2 - y} + x = 3, \\ \frac{1}{x^2 - y} = 2. \end{cases}$$

**517** | Найдите больший корень уравнения

$$2\sqrt{x^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 1.$$

**518** | Решите уравнение

$$\sqrt{3} \sin x + 4 \cos x \cos 2x = \cos x.$$

**519** | Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = x^2 - 6x + 10$ ,  $y = 10 - 2x$ .

## Вариант 91

**520** | Имеется кусок сплава меди с оловом массой 12 кг, содержащий 45 % меди. Сколько чистого олова надо прибавить к этому сплаву, чтобы получившийся новый сплав содержал 40 % меди?

**521** | Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{2x+3}} = 2 + \frac{3x-16}{\sqrt{2x^2+5x+3}}.$$

**522** | Решите неравенство

$$|x^2 - 4x| + 3 \geq x^2 + |x + 5|.$$

**523** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ 3 \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$$

**524** | Решите неравенство

$$(x^2 - 4x)^{x+2} \leq 1.$$



## Вариант 92

**525** | Имеется два разных сплава серебра: первый, весом 25 кг, содержит 84 % серебра, второй, весом 12,5 кг, содержит 72 % серебра. Какой процент серебра получится, если сплавить эти два сплава?

**526** | Решите уравнение

$$\sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x}.$$

**527** | Решите неравенство  $|x - 6| > |x^2 - 5x + 9|$  и укажите наибольшее целое положительное решение.

**528** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

**529** | Найдите наименьшее целое значение  $x$ , удовлетворяющее неравенству  $(x-3)^{x^2-9} > 1$ .

## Вариант 93

**530** | Стороны треугольника  $a = 13$  см,  $b = 14$  см,  $c = 15$  см. Две из них ( $a$  и  $b$ ) служат касательными к кругу, центр которого лежит на третьей стороне. Определите радиус круга.

**531** | При каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} x + (a-1)y = a+3, \\ (a+2)x + 2ay = 6a+8 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений?

**532** | Не решая уравнения  $4x^2 - \sqrt{85}x + 5\frac{1}{4} = 0$ , вычислите разность кубов его корней.

**533** | Решите уравнение

$$\sqrt{3\sin^2 x - 2} = 1 - 3\cos x.$$

**534** | Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = -3x^2 + 6x + 1$  в точке пересечения этого графика с осью ординат.

### Вариант 94

**535** | Угол при основании равнобедренного треугольника равен  $30^\circ$ . Найдите отношение радиуса вписанной к радиусу описанной в треугольник окружности.

**536** | При каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} 4x - ay = -1 - a, \\ (a + 6)x + 2ay = a + 3 \end{cases}$$

не имеет решения?

**537** | Не решая уравнения  $3x^2 - 5x - 2 = 0$ , найдите сумму кубов его корней.

**538** | Решите уравнение

$$\sin 4x + \sin^2 x = \sin^2 5x.$$

**539** | Напишите уравнения касательных к графику функции  $y = 9 - x^2$  в точках его пересечения с осью абсцисс.

### Вариант 95

**540** | В треугольной пирамиде две боковые грани — прямоугольные равнобедренные треугольники, гипотенузы которых равны  $a$  и образуют между собой угол  $\alpha$ . Найдите объем пирамиды.

**541** | Решите уравнение

$$x^{\log_x(x^2-1)} = 5.$$

**542** | Решите уравнение

$$2\sin^2 x + \sin x + \frac{1}{\sin x} + \frac{2}{\sin^2 x} = 6.$$

**543** | Докажите, что функция  $y = 4 \cos x + \sin 3x - 8x$  убывает на всей числовой прямой.

**544** | В круговой сектор, дуга которого содержит  $60^\circ$ , вписан круг. Найдите отношение площади сектора к площади этого круга.

### Вариант 96

**545** | Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом  $\alpha$ . Каждое боковое ребро равно  $m$  и наклонено к основанию под углом  $\beta$ . Найдите объем пирамиды.

**546** | Решите уравнение

$$6 - \sqrt{\log_3 x} = 2\log_3 \sqrt{x}.$$

**547** | Решите уравнение

$$\cos 3x + 2 \cos x = 0.$$

**548** | Докажите, что функция  $y = 2x^5 + 4x^3 - 1$  возрастает на всей числовой прямой.

**549** | Общей хордой двух кругов стягиваются круги  $60^\circ$  и  $120^\circ$ . Найдите отношение площадей большего и меньшего кругов.

### Вариант 97

**550** | Найдите точки экстремума функции

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8.$$

**551** | Решите уравнение

$$\sin 9x + 2 \cos 6x = 2.$$

**552** | Решите неравенство

$$(x^2 - x + 1)^x < 1.$$

**553** | Решите уравнение

$$16x^2 + 9x + 117 = 24x\sqrt{x+3}.$$

**554** | В прямоугольном треугольнике острый угол равен  $\alpha$ , а длина биссектрисы другого острого угла равна  $l$ . Найдите периметр треугольника.

## Вариант 98

**555** | Найдите точки экстремума функции

$$y = 2x^3 - 15x^2 + 36x.$$

**556** | Решите уравнение

$$\sin 2x + \cos 2x = 1 + \sqrt{6} \sin x.$$

**557** | Решите неравенство  $(x+1)^{x^2-4} \geq 1$  и найдите наименьшее целое решение.

**558** | Найдите больший корень уравнения

$$4x^2 + \sqrt{4x^2 - 6x + 5} = 6x + 7.$$

**559** | Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, равна 2. Разность между проекциями катетов на гипотенузу равна 3. Найдите площадь треугольника.

## Вариант 99

**560** | В прямоугольном  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) разность между длинами медианы и высоты равна 7 см. Найдите отношение  $R/r$ , где  $R$  и  $r$  — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей, если  $S_{\triangle ABC} = 144 \text{ см}^2$ .

**561** | Середина отрезка  $MN$  лежит на оси  $Ox$ . Найдите  $m$  и  $n$ , если  $M(-2; m; 3)$ ,  $N(4; -3; n)$ .

**562** | Найдите область определения функции

$$y = \frac{4}{2\sin^2 x - \sin x}.$$

**563** | Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x^2 + 5x| < 6, \\ |x + 1| \leq 1. \end{cases}$$

**564** | Решите уравнение

$$\sqrt{8 \cdot 3^{x+2} - 23} = 2 - 3^{x+1}.$$

## Вариант 100

**565 |** Высота треугольника равна 6 см и делит угол в отношении  $2 : 1$ , а основание треугольника — на отрезки, меньший из которых равен 3 см. Найдите большую сторону треугольника.

**566 |** Найдите координату  $x$  точки  $M$ , лежащей на оси  $Ox$  и одинаково удаленной от точек  $A(1; 2; 3)$  и  $B(-3; 3; 2)$ .

**567 |** Найдите сумму целых значений  $x$  из области определения функции

$$y = \frac{\log_2 x}{\arcsin(x-3)}.$$

**568 |** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x^2 - 4x| < 5, \\ |x + 1| < 3. \end{cases}$$

**569 |** Решите уравнение

$$\sqrt{3 - 2^{x+2}} = 2^{x+1}.$$

## Вариант 101

**570 |** Найдите двузначное число, если известно, что цифра его единиц на 2 больше цифры десятков и произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144.

**571 |** Найдите множество значений функции

$$y = \frac{1 + 4\cos^2 x}{2}.$$

**572 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 y^2 - 2x^2 + 3xy = 36, \\ 4x^2 y^2 - x^2 - 2xy = 123. \end{cases}$$

**573 |** Решите уравнение

$$\cos 3x \cos x = \cos 2x.$$

## Вариант 102

**574** | Найдите двузначное число, у которого число единиц на 3 меньше числа десятков, а произведение цифр на 36 больше удвоенного числа его десятков.

**575** | Найдите множество значений функции

$$y = 10 - 9 \sin^2 3x.$$

**576** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3xy - x^2 - y^2 = 1, \\ 3x^2 + 3y^2 - xy = 13. \end{cases}$$

**577** | Решите уравнение

$$4 \sin x \cos 2x = \sin 3x.$$

## Вариант 103

**578** | Две параллельные хорды равны 14 м и 40 м, а расстояние между ними — 39 м. Определите радиус круга.

**579** | Найдите промежутки монотонности функции

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2}.$$

**580** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 1, \\ xy = -8. \end{cases}$$

**581** | Вычислите  $x_1^3 + x_2^3$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения

$$x^2 - 2x - 9 = 0.$$

## Вариант 104

**582** | В окружности по разные стороны от центра проведены параллельные хорды длиной 12 и 16. Расстояние между ними равно 14. Найдите радиус окружности.

**583** | Найдите промежутки возрастания и убывания функции

$$y = \frac{x^2}{x - 2}.$$

**584** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5\sqrt{xy} - x = 4y, \\ \frac{y-2}{2-x} = \frac{1}{14}. \end{cases}$$

**585** | Вычислите  $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 + x - 4 = 0$ .**Вариант 105****586** | Вершины  $ABC$  лежат на сфере радиуса 26 см. Найдите расстояние от центра сферы до плоскости треугольника, если  $AB = 12$  см,  $BC = 16$  см,  $AC = 20$  см.**587** | Упростите выражение

$$\left( \frac{a^{3/2} + b^{3/2}}{a-b} - \frac{a-b}{a^{1/2} + b^{1/2}} \right) \frac{a-b}{\sqrt{ab}}, \text{ где } a > 0, b > 0, a \neq b.$$

**588** | Найдите корни уравнения

$$5\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x \cos x + 6\cos^2 x = 5$$

на промежутке  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .**589** | Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов — 192. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.**Вариант 106****590** | На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними 6 см, 8 см и 10 см. Радиус шара — 13 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти три точки.**591** | Упростите выражение

$$\left( \frac{a^{1/2} + 1}{a^{1/2} - 1} - \frac{a^{1/2} - 1}{a^{1/2} + 1} - \frac{4}{a-1} \right)^{-3}, \text{ } a \geq 0, a \neq 1.$$

**592** | Найдите корни уравнения  $1 + \sin 2x = (\cos 3x + \sin 3x)^2$  на промежутке  $(0^\circ; 45^\circ)$ .

**593** | Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 30, а сумма их квадратов равна 340. Найдите эти числа.

### Вариант 107

**594** | Образующая усеченного конуса  $l$  составляет с плоскостью нижнего основания угол  $\alpha$  и перпендикулярна к прямой, соединяющей верхний ее конец с нижним концом противоположной образующей. Найдите боковую поверхность усеченного конуса.

**595** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x+y}{5} = \frac{x+z}{6} = \frac{y+z}{7}, \\ (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 = 110. \end{cases}$$

**596** | Решите неравенство

$$|x^2 - 1| + |x^2 - 9| < 8.$$

**597** | Найдите множество значений функции

$$y = \frac{10}{\pi} \arccos(0,5(\cos x - \sin x)).$$

### Вариант 108

**598** | В правильной четырехугольной усеченной пирамиде апофема и стороны оснований относятся как  $5 : 8 : 2$ , а объем равен  $\frac{7}{4} \text{ м}^3$ .

Определите ее полную поверхность.

**599** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{3x} - \frac{1}{2y} = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{9x^2} - \frac{1}{4y^2} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$



**600** | Решите неравенство  $|x| + |x - 1| < 5$  и укажите наибольшее целое положительное решение.

**601** | Найдите множество значений функции

$$y = \log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin x - \cos x + 3\sqrt{2}).$$

### Вариант 109

**602** | Две бригады должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы первая бригада получила другое задание, поэтому вторая бригада закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. На сколько дней вторая бригада убрала бы весь урожай быстрее первой, если бы каждая бригада работала отдельно?

**603** | Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}.$$

**604** | Решите уравнение

$$(x^2 + x)^2 + |x^2 + x| - 2 = 0.$$

**605** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{3}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

### Вариант 110

**606** | Время работы одного землекопа относится ко времени работы другого как 2 : 3. Второй работал на 3 ч больше первого. Сколько времени работал первый?

**607** | Найдите больший корень уравнения

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} - \frac{2}{x\sqrt[3]{x-2}} = \frac{3}{\sqrt[3]{3x}}.$$

**608** | Решите уравнение

$$x|x| + 2|x-2| = 3.$$

**609** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = 2, \\ x + y = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

### Вариант 111

**610** | В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой касаются конус и шар, равен  $r$ . Найдите объем конуса, если угол между его высотой и образующей равен  $\alpha$ .

**611** | Решите неравенство

$$x^{\lg^2 x - \lg x + 1} > 10.$$

**612** | Найдите корни уравнения  $\sqrt{1 - \cos x} = \sin x$  на отрезке  $[\pi; 3\pi]$ .

**613** | При каком значении  $m$  векторы

$$\vec{a} \{-4; 2; -1\} \text{ и } \vec{b} \{m; -8; 4\}$$

параллельны?

### Вариант 112

**614** | Конус вписан в шар, радиус которого равен 17. Найдите радиус основания конуса, если угол при вершине его осевого сечения равен  $30^\circ$ .

**615** | Решите неравенство

$$5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} < 10.$$

**616** | Найдите корни уравнения  $\cos 3x \sin 7x = \cos 2x \sin 8x$  на промежутке  $(0^\circ; 30^\circ)$ .

**617** | При каком значении  $x$  векторы

$$\vec{a} \{-1; 1; 2\} \text{ и } \vec{b} \{x^2; x - 2; x^2 - 12\}$$

коллинеарны?

### Вариант 113

**618** | В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания окружности делит гипотенузу на отрезки 6 см и 9 см. Найдите больший катет.

**619** | Сократите дробь

$$\frac{2 - 5m - 2n + 5mn}{10m^2 - 9m + 2}.$$

**620** | Решите уравнение

$$\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = 2.$$

**621** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x \cos y = -0,5, \\ \cos x \sin y = 0,5. \end{cases}$$

### Вариант 114

**622** | Расстояние от боковой стороны равнобедренного треугольника, равной 16, до центра описанной около него окружности равно 6. Найдите радиус этой окружности.

**623** | Сократите дробь

$$\frac{a^2 + b^4 \sqrt{b}}{\sqrt[3]{a^2 + b} \sqrt{b}}.$$

**624** | Решите уравнение

$$\sqrt{x - \sqrt{1-x}} + \sqrt{x} = 1.$$

**625** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin y = 1, \\ \cos^2 x + \cos y = 1. \end{cases}$$

### Вариант 115

**626** | Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели — соответственно числам 1, 3, 7. Среднее арифметическое этих дробей равно  $\frac{200}{441}$ . Найдите эти дроби.

**627** | Найдите сумму целых значений  $x$  из области определения функции

$$y = \frac{\log_2 x}{\arcsin(x-5)}.$$

**628** | Определите, при каких  $x$  три числа  $a_1, a_2, a_3$ , взятые в указанной последовательности, образуют арифметическую прогрессию, если  $a_1 = \lg 2$ ,  $a_2 = \lg(3^x - 3)$ ,  $a_3 = \lg(3^x + 9)$ .

**629** | Решите уравнение

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0.$$

### Вариант 116

**630** | Сумма цифр двузначного числа равна 6. Если цифры этого числа переставить, то получится число, составляющее  $4/7$  первоначального. Найдите это число.

**631** | Найдите сумму целых значений  $x$  из области определения функции

$$y = \sqrt{\lg \frac{1-x}{x+3}}.$$

**632** | При каких  $x$  числа 2,  $x - 2$ ,  $\sqrt{x+11}$ , взятые в указанном порядке, являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

**633** | Решите уравнение

$$x^4 - 5x^3 + 10x^2 - 10x + 4 = 0.$$

### Вариант 117

**634** | Острый угол параллелограмма равен  $60^\circ$ . Определите отношение длин сторон, если отношение квадратов длин диагоналей параллелограмма равно  $19/7$ .

**635** | Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

**636** | Решите уравнение

$$x^{2\lg^2 x} = 10x^3.$$

**637** | Решите уравнение

$$\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}.$$

**Вариант 118**

**638** | В параллелограмм, одна из сторон которого равна  $7\sqrt{2}$  м, вписана окружность радиуса  $3\sqrt{3}$  м. Найдите площадь параллелограмма.

**639** | Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{5 - x}}{1 - \sqrt{2 - x}}.$$

**640** | Найдите произведение корней уравнения

$$\log_x 9x^2 \cdot \log_3^2 x = 4.$$

**641** | Решите уравнение  $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cos x$ .**Вариант 119**

**642** | Найдите объем фигуры, полученной при вращении прямоугольника со сторонами  $a$  и  $b$  вокруг оси, которая лежит в плоскости этого прямоугольника, перпендикулярна к его диагонали и проходит через ее конец.

**643** | Найдите множество значений функции

$$y = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{9 - x^2}{1 + x^2}}.$$

**644** | Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $y = x^2 - 2x + 1$ ,  $y > 0$ .

**645** | Решите уравнение

$$\sin \frac{5x}{4} + \cos x = 2.$$

## Вариант 120

**646 |** Прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см вращается вокруг внешней оси, которая параллельна большому катету и отстоит от него на 3 см. Определите объем и поверхность тела вращения.

**647 |** Найдите наименьшее целое значение  $x$  из множества значений функции

$$y = \arcsin \sqrt{\frac{2-x^2}{1+x^2}}.$$

**648 |** Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = |x|$ ,  $y = -|x| + 2$ .

**649 |** Решите уравнение

$$\cos 3x = 4 \sin \frac{x}{2} + \cos x.$$

## Вариант 121

**650 |** Найдите длину поезда, зная, что он проходил с постоянной скоростью мимо неподвижного наблюдателя в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

**651 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} + xy = 10, \\ \frac{y^3}{x} + xy = 2,5. \end{cases}$$

**652 |** Решите уравнение

$$x = 2\sqrt{x-3} + \sqrt[4]{x^3-3x^2}.$$

**653 |** Решите неравенство

$$\frac{(x+1)(x^2+1)}{(x-3)(2-x)(-4-x^2)} \geq 0.$$

**654 |** Решите уравнение

$$1 + \log_2(x-1) = \log_{(x-1)} 4.$$

**655** | Между числами 7 и 35 вставьте 6 чисел так, чтобы они вместе с данными числами составили арифметическую прогрессию.

### Вариант 122

**656** | Сестра старше брата на 6 лет, а через год будет старше его в два раза. Сколько лет брату?

**657** | Среди решений  $(x; y)$  системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x^3 + 3xy^2 = 260 \end{cases}$$

найдите те, для которых сумма  $(x + y)$  максимальна.

**658** | Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + 5x - 6} \leq 1.$$

**659** | Решите уравнение

$$(2x + 1)(x + 2) - 3 = \sqrt{2x^2 + 5x + 1}.$$

**660** | Решите уравнение

$$\log_2(x^2 - 4) + \log_{0,5} \frac{x - 2}{x + 6} = 5.$$

**661** | Между числами 1 и 16 вставьте три числа так, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию.

### Вариант 123

**662** | В равнобедренной трапеции, диагонали которой взаимно перпендикулярны, известны боковая сторона и высота, соответственно 13 см и 12 см. Найдите периметр трапеции.

**663** | Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x + 3}{3 - x} < 2, \\ x^3 < 16x, \\ 4 > x^2. \end{cases}$$

**664** | Решите уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

**665** | Найдите наименьшее значение  $x$ , принадлежащее области определения функции

$$y = \frac{\sqrt{4x - x^2}}{\log_3 |x - 4|}.$$

**666** | Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12,5, а сумма первого и второго ее членов — 12. Найдите эту прогрессию.

**667** | Даны векторы  $\vec{a} \{-2; 4; 0\}$ ,  $\vec{b} \{0; -10; -4\}$  и  $\vec{c} \{4; 2; -6\}$ . Найдите координаты вектора  $\vec{p} = 6\vec{c} - 4\vec{b} + 2\vec{a}$ .

## Вариант 124

**668** | В равнобедренной трапеции площадью  $27\sqrt{3}$  диагонали пересекаются под углом  $60^\circ$ . Найдите длину средней линии трапеции.

**669** | Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{3x}{4-x} \geq -\frac{1}{3}, \\ 6x - 5 - x^2 < 0. \end{cases}$$

**670** | Решите уравнение

$$\sin 8x \cdot \sin 4x + \sin 3x \cdot \sin x = 0.$$

**671** | Найдите сумму целых значений  $x$  из области определения функции

$$y = \frac{\sqrt{6x - x^2 - 5}}{5^{x-2} - 1}.$$

**672** | Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 5 дают остаток, равный 4.

**673** | Найдите вектор  $\vec{a}$ , коллинеарный вектору  $\vec{b} \{1; -2; 0\}$  и имеющий длину  $|\vec{a}| = \sqrt{5}$ .



## Вариант 125

**674** | Антикварный магазин, купив два предмета за 225 000 руб., продал их, получив 40 % прибыли. Сколько стоил магазину каждый предмет, если на первом получено 25 % прибыли, а на втором — 50 %?

**675** | Решите уравнение

$$\frac{16}{2 + \log_3 x} - 4 = 3 \log_3 x.$$

**676** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sqrt{3}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

**677** | Исследуйте функцию  $y = x^4 - 4x^2$  и постройте ее график.

**678** | Решите неравенство

$$36^x - 2 \cdot 18^x - 8 \cdot 9^x > 0.$$

**679** | Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 6x^2 + 8x}{\sqrt{5+x} - 1}.$$

## Вариант 126

**680** | При соединении двух сплавов с содержанием цинка 30 % и 60 % получили сплав, содержащий 40 % цинка. Найдите отношение масс исходных сплавов.

**681** | Решите уравнение

$$(4 \lg^2 x - 1)(\lg^2 x^2 + 1) = 15.$$

**682** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

**683** | Исследуйте функцию  $y = x^4 - 8x^2 - 9$  и постройте ее график.

**684** | Решите неравенство

$$5 \cdot 4^x - 7 \cdot 10^x + 2 \cdot 25^x < 0.$$

**685** | Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

### Вариант 127

**686** | В параллелограмме  $ABCD$  луч, проведенный из вершины  $A$ , делит сторону  $BC$  в отношении  $3 : 5$  ( $BC > AB$ ). В каком отношении луч делит диагональ  $BD$ ?

**687** | Решите уравнение

$$\sin 3x - \sin 2x + \sin x - \sin 4x = 0.$$

**688** | Найдите множество значений функции  $y = 1 - 6 \cos 2x$ .

**689** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 13, \\ 3x + y + z = 8, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

**690** | Решите неравенство

$$\log_4 x - \log_x 4 \leq \frac{3}{2}.$$

**691** | При каких значениях  $x$  бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем  $q = x^2 + x + 1$  имеет сумму?

### Вариант 128

**692** | Вокруг параллелограмма, одна из диагоналей которого равна 7 м, описана окружность. Найдите площадь круга.

**693** | Решите уравнение

$$\cos 2x + \sin 2x = \cos x + \sin x.$$

**694** | Найдите множество значений функции

$$y = \operatorname{arccotg}(2x - x^2).$$

**695** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 9, \\ x + y + z = 2, \\ 3x + y + z = 4. \end{cases}$$

**696** | Решите неравенство

$$\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 \leq 1.$$

**697** | Сколько ударов сделают часы в течение суток, если они отбивают только число целых часов от 1 до 12?**Вариант 129****698** | Площадь основания цилиндра равна  $M$ , а площадь его осевого сечения равна  $Q$ . Найдите объем цилиндра.**699** | Решите уравнение

$$(x+2)^{x^2-4} = (x+2)^{3x}.$$

**700** | Решите уравнение

$$\cos x + \cos \frac{3x}{4} = 2.$$

**701** | Решите неравенство

$$\frac{2x^2 - 5x - 2}{3x - x^2 - 7} \leq 1.$$

**702** | Для функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $A(-1; 5)$ .**703** | Упростите выражение

$$\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

при  $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}$ ,  $a > b > 0$ .**Вариант 130****704** | В правильной четырехугольной пирамиде плоскость сечения, параллельного основанию, разделила высоту пополам. Найдите сторону основания пирамиды, если площадь сечения равна 36.**705** | Решите уравнение

$$(1-x)^{x^2-x} = (1-x)^{4x-4}.$$

**706** | Решите уравнение  $\sin 5x \cdot \sin x = 1$ .

**707** | Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{(2-x)(x^2+2x+1)}{x^2+x+1} > 0.$$

**708** | Для функции  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M(-1; 1)$ .

**709** | Упростите выражение

$$\left( \frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9} : \frac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27} \right)^{0,5} - x^{0,5}.$$

### Вариант 131

**710** | Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника равны соответственно 2 и 5. Найдите больший катет треугольника.

**711** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \\ \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = \frac{35}{216}. \end{cases}$$

**712** | Решите уравнение

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{x+6} + 2\sqrt{(x-2)(x+6)} = 2(8-x).$$

**713** | Решите неравенство

$$\frac{(6x-5)(2+x^2)}{(4-x^2)x} \leq 0.$$

**714** | Решите уравнение

$$\int_x^{x+1} \cos t dt = \sin 0,5.$$

**715** | Вычислите

$$\cos 10^\circ \sin 20^\circ \sin 70^\circ - \frac{1}{4} \cos 40^\circ.$$

### Вариант 132

**716** | В прямоугольном треугольнике с катетами 18 и 24 найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

**717** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = -217, \\ x + y = -7. \end{cases}$$

**718** | Найдите больший корень уравнения

$$\sqrt{3x^2 - 2x + 15} + \sqrt{3x^2 - 2x + 8} = 7.$$

**719** | Решите неравенство

$$\frac{x^2 - 8x + 7}{x^2 + 9x - 10} \leq 1.$$

**720** | Решите уравнение

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+4x}} dx = 2.$$

**721** | Вычислите

$$\sin 40^\circ + 2\sin 20^\circ - \sqrt{3} \cos 40^\circ.$$

### Вариант 133

**722** | Известно, что в  $\triangle ABC$   $\angle A = 2\angle C$ , сторона  $BC$  на 2 см больше стороны  $AB$ , а  $AC = 5$  см. Найдите  $AB$  и  $BC$ .

**723** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17. \end{cases}$$

**724** | Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0.$$

**725** | Решите уравнение

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4.$$

**726** | Решите неравенство

$$\left| \log_3 x \right| < \left| \log_3 \frac{x}{9} \right|.$$

**727** | Найдите число, 7,5 % которого равны выражению

$$\frac{\left(8\frac{7}{55} - 6\frac{17}{110}\right) \cdot 1\frac{3}{217}}{\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{20}\right) : 1\frac{7}{8}}.$$

### Вариант 134

**728** | В равнобедренном треугольнике угол при основании равен  $30^\circ$ . Высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанной окружности на 2. Найдите основание треугольника.

**729** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7x^2 + 8xy + 7y^2 = 43, \\ 6xy - 5x^2 - 5y^2 = -29. \end{cases}$$

**730** | Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x = \sin 4x.$$

**731** | Решите уравнение

$$\left(4 - \sqrt{15}\right)^x + \left(4 + \sqrt{15}\right)^x = 62.$$

**732** | Решите неравенство

$$|\log_3 x| < |\log_3 x - 2|.$$

**733** | Вычислите

$$\frac{\left(9\frac{39}{50} : 3 - 3,05\right) : 0,2 - 1,05}{12,5 \cdot 8,02}.$$

### Вариант 135

**734** | Угол при вершине осевого сечения конуса равен  $2\alpha$ , а сумма длин его высоты и образующей равна  $m$ . Найдите объем и полную поверхность конуса.

**735** | При каком значении параметра  $a$  уравнение

$$(2 + \log_2 a)x^2 + 6 \log_2 a \cdot x + 4 \log_2 a + 1 = 0$$

имеет один корень?

**736** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7, \\ 3x+2y = 23. \end{cases}$$

**737** | Решите неравенство

$$|x+1| - |x-2| < 3.$$

**738** | Решите уравнение

$$(x^2 + x - 7)^{x^2+3} = (x^2 + x - 7)^{4x}.$$

**739** | Найдите область определения функции  $y = \sqrt{\sin x}$ .**Вариант 136****740** | Найдите объем шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания  $a$  и плоским углом при вершине, равным  $\alpha$ .**741** | Найдите значение параметра  $a$ , при котором корни уравнения  $\lg(ax) = 2 \lg(x+1)$  меньше 3.**742** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\sqrt[3]{xy} + 2\sqrt{xy} = 5, \\ x^2 + y^2 - 3xy = 1 + x + y. \end{cases}$$

**743** | Решите неравенство

$$\left| \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 4} \right| \leq 1$$

и укажите наибольшее целое положительное решение.

**744** | Решите уравнение

$$(x^2 - x - 1)^{x^2-1} = 1.$$

**745** | Найдите область определения функции  $y = \sqrt{\lg \cos(2\pi x)}$ .**Вариант 137****746** | Выпуклый четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность так, что диагональ  $BD$  является биссектрисой  $\angle ABC$  и пересекает

ся с диагональю  $AC$  в точке  $E$ , причем  $BE = 6,4$  см. Найдите радиус окружности, вписанной в  $\triangle BCD$ , если длина отрезка  $CD = 6$  см и  $BC = 8$  см.

**747** | Решите неравенство

$$25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25.$$

**748** | Решите уравнение

$$1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12x}.$$

**749** | Решите уравнение

$$\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}.$$

**750** | Найдите сумму первых двадцати членов арифметической прогрессии  $(a_n)$ , если  $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$ .

**751** | Упростите выражение

$$\left( \frac{a - 4b}{a + (ab)^{1/2} - 6b} - \frac{a - 9b}{a + 6(ab)^{1/2} + 9b} \right) \cdot \frac{b^{-\frac{1}{2}}}{a^{1/2} - 3b^{1/2}},$$

где  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq 9b$ .

## Вариант 138

**752** | Около окружности радиуса 5 описана равнобедренная трапеция. Расстояние между точками касания боковых сторон равно 8. Найдите площадь трапеции.

**753** | Найдите наименьшее целое значение  $x$ , удовлетворяющее неравенству  $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x \leq 5 \cdot 36^x$ .

**754** | Решите уравнение

$$\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} = x^2.$$

**755** | Решите уравнение

$$\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{4}.$$

**756** | Найдите сумму всех трехзначных чисел, кратных 7.



**757** | Упростите выражение

$$\frac{1}{2} \left( \frac{3x^{-1}}{x^2 - x^{-1}} - \frac{x}{x^4 - x} \right) \cdot (x^2 + x + 1), \quad x \neq 0, x \neq 1.$$

**Вариант 139**

**758** | Правильная треугольная пирамида вписана в сферу радиуса  $R$ . Найдите объем пирамиды, если угол между ее высотой и боковым ребром равен  $\alpha$ .

**759** | Решите неравенство

$$\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} > 1.$$

**760** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos x = 1 + \cos y, \\ \sqrt{2} \sin x = \sin y. \end{cases}$$

**761** | Решите неравенство

$$(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3.$$

**762** | Тангенсы половинных углов прямоугольного треугольника составляют арифметическую прогрессию. Найдите углы треугольника.

**763** | Найдите функцию  $F(x)$ , если  $F'(x) = 2 \sin x + \cos 3x$  и  $F(0) = 0$ .

**Вариант 140**

**764** | Радиус шара 9 дм. В него вписана правильная четырехугольная призма, высота которой 14 дм. Найдите сторону основания призмы.

**765** | Решите неравенство

$$\sqrt{\frac{4}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{2}{x} - \frac{1}{2}.$$

**766** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sin y, \\ \sqrt{2} \cos x = \sqrt{3} \cos y. \end{cases}$$

**767 |** Найдите наименьшее целое значение  $x$ , удовлетворяющее неравенству  $2^{\sqrt{x+1}} - 3 \cdot 2^{2-\sqrt{x+1}} < 1$ .

**768 |** В геометрической прогрессии  $1, x, x^2, \dots, x^{2n}$  произведение членов с нечетными номерами равно 64, а произведение членов с четными номерами равно 32. Найдите  $n$  и  $x$ .

**769 |** Для функции  $f(x) = 8 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$  найдите первообразную, график которой проходит через точку  $M\left(\frac{\pi}{3}; 3\right)$ .

## «НЕСТАНДАРТНЫЕ» ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ

### Вариант 141

**770** | Выработка продукции за год работы предприятия возросла на  $p$  %, а за следующий год она возросла на 10 % больше, чем за предыдущий. На сколько процентов увеличилась выработка продукции за первый год, если за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59 %?

**771** | По двум сторонам  $a$  и  $b$  треугольника найдите радиус описанной окружности, если известно, что угол, лежащий против третьей стороны, в 2 раза больше угла, лежащего против стороны  $b$ .

**772** | Решите уравнение

$$x^4 + 12x + 3 = 0.$$

**773** | Решите уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

### Вариант 142

**774** | Прирост продукции на заводе по сравнению с предыдущим годом за первый год составлял 5 %, а за второй по сравнению с первым — 3 %. Каким оказался процент прироста продукции за три года, если процент прироста продукции за третий год по сравнению со вторым был равен 2 %?

**775** | В прямоугольном треугольнике известны не перпендикулярные друг другу высоты  $m$  и  $n$  ( $m < n$ ). Вычислите длину радиуса описанной около треугольника окружности.

**776** | Решите уравнение

$$x^4 + 26x^2 - x + 182 = 0.$$

**777** | Решите уравнение

$$\sin^3\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos x.$$

### Вариант 143

**778** | Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен  $90^\circ$ , а расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно  $a$ .

**779** | В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, в 2 раза больше высоты, опущенной на боковую сторону. Найдите отношение  $R/r$ , где  $R$  и  $r$  — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

**780** | Решите уравнение

$$(2x - 1)(\sqrt{x} + 4x - 2) = x.$$

**781** | Решите уравнение

$$50 \cdot 505^x + 121 \cdot 212^x = 131 \cdot 313^x.$$

### Вариант 144

**782** | Правильная треугольная пирамида вписана в сферу радиуса  $R$ . Найдите объем пирамиды, если угол между ее высотой и боковым ребром равен  $\alpha$ .

**783** | Угол при основании равнобедренного треугольника равен  $\alpha$ . Найдите отношение основания к медиане, проведенной к боковой стороне.

**784** | Решите уравнение

$$\sqrt{x+1}(x^2 + x + 4) = 4 - 2x.$$

**785** | Решите уравнение

$$27^x - 3 \cdot 18^x - 12^x + 3 \cdot 8^x = 0.$$

### Вариант 145

**786** | Две автомашины, выехав одновременно из городов  $A$  и  $B$  навстречу друг другу, встретились через 6 ч. Первой машине, чтобы пройти  $2/5$  пути от  $A$  до  $B$ , требуется на 2 ч больше, чем второй для того, чтобы пройти  $2/15$  пути от  $B$  до  $A$ . За сколько часов проходит расстояние между городами  $A$  и  $B$  каждая машина?

**787** | Острый угол прямоугольного треугольника равен  $15^\circ$ , а длина медианы другого острого угла равна 1. Найдите длину гипотенузы.

**788** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 + 3x^2y^2 + y^4 = 29, \\ x^3y + xy^3 = 10. \end{cases}$$

**789** | Решите уравнение

$$\log_{x+2}(x^3 - 6x + 4) \cdot \log_{x-2}(x + 2) = 3.$$

### Вариант 146

**790** | Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из двух пунктов, расстояние между которыми 90 км, и встретились через 3 ч. Найдите скорость каждого из них, если первый проехал до встречи расстояние в 2 раза больше, чем второй.

**791** | Отношение площади прямоугольного треугольника к площади квадрата, построенного на его гипотенузе, равно  $1 : 3$ . Найдите сумму тангенсов острых углов.

**792** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^4 - x^2y^2 + y^4 = 13, \\ x^2 - \sqrt{3}xy + y^2 = 1. \end{cases}$$

**793** | Решите уравнение

$$\log_2 x \cdot \log_2(x - 3) + 1 = \log_2(x^2 - 3x).$$

### Вариант 147

**794 |** Найдите угол между образующей и основанием усеченного конуса, полная поверхность которого втрое больше поверхности вписанного в него шара.

**795 |** В равнобедренную трапецию вписан круг. Определите радиус этого круга, если боковая сторона делится точкой касания на отрезки длиной  $m$  и  $n$ .

**796 |** Решите уравнение

$$x^2(x+1)^2 - 3x(x^2-1) = 4(x-1)^2.$$

**797 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - x^3 = 1, \\ y - 3\log_3(4-x) = -1. \end{cases}$$

### Вариант 148

**798 |** Объем шара, вписанного в конус, равен  $4\pi\sqrt{3}/27$ . Угол при вершине осевого сечения конуса —  $60^\circ$ . Найдите площадь боковой поверхности конуса.

**799 |** Найдите площадь равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, если основания трапеции равны  $a$  и  $b$ .

**800 |** Решите уравнение

$$x^2(1+x)^2 + x^2 = 8(1+x)^2.$$

**801 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + x = 2^y + y, \\ x^2 + xy + y^2 = 12. \end{cases}$$

### Вариант 149

**802 |** Из города  $A$  в город  $B$  с интервалом в 10 мин отправились три рейсовых автобуса. Первый автобус шел со скоростью на 5 км/ч меньше положенной, второй — сохранял положенную скорость, а третий — превышал ее на 6 км/ч. В результате все три автобуса

пришли в  $B$  одновременно. Определите расстояние между городами  $A$  и  $B$ .

**803** | В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к основанию и боковой стороне, соответственно равны  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ). Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник.

**804** | Решите уравнение

$$\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1} = 1.$$

**805** | Решите неравенство

$$5^{\log_{\sqrt{5}}(x-1)} \leq \frac{\cos^4 x}{16} + \frac{\sin^2 x}{8} - \frac{\sin^4 x}{16}.$$

### Вариант 150

**806** | Три велосипедиста выехали из пункта  $A$  друг за другом через равные промежутки времени в одном направлении. Третий и второй одновременно догнали первого, после чего первый повернул обратно в  $A$ , а второй и третий продолжили движение. Когда первый прибыл в  $A$ , оказалось, что третий обогнал второго на расстояние, в  $3/2$  раза большее, чем расстояние от  $A$  до места их встречи. Найдите скорости второго и третьего велосипедистов, если скорость первого составляет 8 км/ч.

**807** | Сумма двух неравных высот равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине —  $\alpha$ . Найдите боковую сторону.

**808** | Решите уравнение

$$4 \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg} 2x = 4\sqrt{2} \operatorname{ctg} 2x.$$

**809** | Решите неравенство

$$\sqrt{1 - 4x + 4x^2} < \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}.$$

### Вариант 151

**810** | В равнобедренной трапеции острый угол между диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен  $\alpha$ . При каком значении  $\alpha$  диагональ трапеции в 2 раза больше высоты?

**811** | Двое рабочих, работая одновременно, выполнили задание за 5 дней. Если бы первый рабочий работал в 2 раза быстрее, а второй в 2 раза медленнее, то они выполнили бы задание за 4 дня. За сколько дней выполнил бы задание один первый рабочий?

**812** | Решите уравнение

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{7}{8}.$$

**813** | Решите уравнение

$$\cos^4 14x - 2 \cos^2 14x + \cos^2 7x = -1.$$

### Вариант 152

**814** | В равнобедренную трапецию с боковой стороной  $a$  и высотой  $b$  вписана окружность. Найдите основания трапеции.

**815** | Две бригады вместе могут выполнить заказ за 12 дней. Если одна бригада сделает половину работы, а затем вторая — вторую половину, то вся работа будет закончена за 25 дней. Сколько дней нужно каждой бригаде в отдельности для выполнения всей работы?

**816** | Решите уравнение

$$\frac{3x^2 + 4}{(x+2)^3} = \frac{38}{27}.$$

**817** | Решите уравнение

$$\sin^2 4x + \cos^2 x = 2 \sin 4x \cos^4 x.$$

### Вариант 153

**818** | Шар, поверхность которого равна  $S$ , вписан в усеченный конус. Угол образующей конуса с большим основанием равен  $\alpha$ . Вычислите боковую поверхность этого конуса.

**819** | На основании равнобедренного треугольника построен правильный треугольник, площадь которого в 3 раза больше площади данного. Найдите углы треугольника.



**820** | Решите уравнение

$$\sqrt{2 + \sin^2 4x} = \sin 3x - \cos 3x.$$

**821** | Решите уравнение

$$(\sqrt{12})^{2x} + 5^x = 13^x.$$

**Вариант 154**

**822** | Найдите отношение полной поверхности конуса к поверхности вписанного в него шара, если угол при вершине осевого сечения конуса равен  $2\alpha$ .

**823** | В равнобедренном треугольнике угол при основании равен  $\alpha$ . Высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на 1. Найдите стороны треугольника.

**824** | Решите уравнение

$$\sqrt{6 - \sin x - 7 \cos^2 x} + \sin x = 0.$$

**825** | Решите уравнение

$$2^x \sqrt[3]{27^{x-1}} = 72.$$

**Вариант 155**

**826** | В усеченный конус вписан шар. Сумма длин диаметров верхнего и нижнего оснований конуса в 5 раз больше длины радиуса шара. Найдите угол между образующей усеченного конуса и плоскостью основания.

**827** | Найдите площадь сегмента, если его периметр равен  $p$ , а дуга содержит  $120^\circ$ .

**828** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + 8y^3 = 27, \\ x^2 + 4y^2 = 9. \end{cases}$$

**829** | Решите уравнение

$$(3x+1)^2 = 8\sqrt{x}(3x-2\sqrt{x}+1).$$

## Вариант 156

**830** | В наклонной треугольной призме площадь одной из боковых граней —  $m^2$ , а расстояние ее от противоположного ребра —  $2a$ . Найдите объем призмы.

**831** | В квадрат  $ABCD$  вписан равнобедренный  $\triangle AKM$  так, что точка  $K$  лежит на стороне  $BC$ , точка  $M$  — на  $CD$  и  $AM = AK$ . Найдите  $\angle MAD$ , если известно, что  $\operatorname{tg} \angle AKM = 3$ .

**832** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 + 13(x - y) = 0. \end{cases}$$

**833** | Решите уравнение

$$(6x - 1)^2 = \sqrt{x}(18x - 2\sqrt{x} - 3).$$

## Вариант 157

**834** | Каждому из трех экскаваторов для того, чтобы вырыть котлован, требуется определенное время, причем третий экскаватор вырыл бы котлован на 1 ч 36 мин быстрее второго. Работая все вместе, они выполняют задание за 1 ч. Если первый экскаватор проработает 1 ч, а затем третий еще 1,6 ч, то они вместе также выкопают весь котлован. За какое время может вырыть весь котлован каждый из экскаваторов, работая самостоятельно?

**835** | На гипотенузе прямоугольного треугольника взята точка, равноудаленная от обоих катетов. Эта точка делит гипотенузу на отрезки 30 см и 40 см. Найдите длины катетов.

**836** | Решите уравнение

$$\sqrt{7}(y - 2x) = x^2 + y^2 + \frac{35}{4}.$$

**837** | Решите уравнение

$$\sqrt{\log_2(2x^2) \cdot \log_4(16x)} = \log_4 x^3.$$

## Вариант 158

**838** | Трем бригадам поручена некоторая работа. Известно, что первая и вторая бригады, работая вместе, могут выполнить ее за 55 дней. Известно также, что третья бригада затратила бы на эту работу на 15 дней больше, чем вторая. Найдите наибольший и наименьший возможный срок, за который выполнят эту работу три бригады, работая все вместе.

**839** | Найдите отношение большего основания трапеции к меньшему, если средняя линия делится диагоналями на 3 равные части.

**840** | Решите уравнение

$$(x^2 + 8x + 17)(y^2 - 2y + 8) = 7.$$

**841** | Решите уравнение

$$\log_3(x-2) + \sqrt{4-x} \cdot 4^{\log_2 x} = 9, \quad x \in \mathbb{Z}.$$

## Вариант 159

**842** | Полная поверхность прямого кругового конуса в 2 раза больше поверхности вписанного в него шара. Найдите угол наклона образующей к плоскости его основания.

**843** | В квадрат вписан прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ) так, что одна из вершин совпадает с вершиной квадрата, а две другие расположены на сторонах квадрата, не содержащих данную вершину квадрата. Найдите площадь квадрата.

**844** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = xy + 61, \\ x^2 + y^2 = xy + 13. \end{cases}$$

**845** | Решите уравнение

$$\arccos x + \arccos \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

## Вариант 160

**846** | Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 2. Через вершину конуса проведено сечение, образующее угол  $\alpha$  с плоскостью основания. Найдите площадь сечения.

**847** | Гипотенуза прямоугольного треугольника служит стороной квадрата, расположенного вне треугольника. Найдите расстояние между вершиной прямого угла треугольника и центром квадрата, если сумма катетов треугольника равна  $d$ .

**848** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 17, \\ y^2 - x^2 = 16. \end{cases}$$

**849** | Решите уравнение

$$2\arcsin x + \arccos \sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

## Вариант 161

**850** | В усеченный конус вписан шар. Сумма длин диаметров верхнего и нижнего оснований конуса в 5 раз больше длины радиуса шара. Найдите  $\operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между образующей усеченного конуса и плоскостью основания.

**851** | В окружность вписан равнобедренный треугольник, боковая сторона которого в 2 раза больше основания. Найдите радиус описанной окружности, если радиус вписанной окружности равен  $r$ .

**852** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3y - xy^3 = 24, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

**853** | Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x-2} \cdot \sqrt[3]{x-9} = \sqrt{x^2 - 11x + 10} + 2.$$

**854** | При каких значениях параметра  $a$  сумма кубов корней уравнения  $x^2 + (6 - a - a^2)x - a^2 = 0$  равна нулю?

## Вариант 162

**855** | В конус вписана полусфера, больший круг которой лежит на основании конуса. Определите угол при вершине конуса, если полная поверхность конуса относится к боковой поверхности полусферы как  $18 : 5$ .

**856** | В треугольник со сторонами 5, 6 и 9 см вписана окружность. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания.

**857** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 + y^2) \frac{x}{y} = 6, \\ (x^2 - y^2) \frac{y}{x} = 1. \end{cases}$$

**858** | Решите уравнение

$$\sqrt[3]{3x^2 + 1} + 2\sqrt[3]{x^2 + 1} = \sqrt[3]{11x^2 + 27}.$$

**859** | Найдите все значения параметра  $a$ , при которых сумма корней уравнения  $x^2 - a(2x - 3) - 2 = 0$  равна сумме кубов корней.

## Вариант 163

**860** | Две автомашины выехали одновременно из одного пункта в другой в одном и том же направлении. Одна машина идет со скоростью 50 км/ч, другая — 40 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехала третья машина, которая обогнала первую машину на 1,5 ч позже, чем вторую. Найдите скорость третьей машины.

**861** | Найдите длину медианы равнобедренного треугольника, опущенную на боковую сторону, если длины высот, опущенных на основание и боковую сторону, равны соответственно  $m$  и  $n$ .

**862** | Решите уравнение

$$x^3 + 8 = 9\sqrt[3]{9x - 8}.$$

**863** | Решите уравнение

$$8^{\frac{x-1}{x}} \cdot 5^x = 500.$$

**864** | Решите неравенство

$$\sin ax \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

### Вариант 164

**865** | Два стрелка выстрелили из лука по мишеням 56 раз каждый, причем вместе они сделали 22 промаха. Сколько раз поразил мишень второй из них, если известно, что отношение числа попаданий к числу промахов у первого вдвое больше, чем у второго?

**866** | Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, равна  $h$  и вдвое больше своей проекции на боковую сторону. Найдите площадь треугольника.

**867** | Решите уравнение

$$\left(\frac{x+8}{16}\right)^3 = \sqrt[3]{x-1}.$$

**868** | Решите уравнение

$$5^{x^2-7x+12} = 3^{x-3}.$$

**869** | При каком значении параметра  $a$  неравенство

$$(a-2)\sin x > 3a+4$$

не имеет решений?

### Вариант 165

**870** | Пароход идет из пункта  $A$  в пункт  $B$  в течение двух суток, обратно — в течение трех суток. Определите, сколько времени будет плыть плот из  $A$  в  $B$ .

**871** | Боковая сторона равнобедренной трапеции в 3 раза больше меньшего из оснований. Биссектрисы тупых углов этой трапеции пересекаются в точке, лежащей на основании. Найдите отношение площади трапеции к площади треугольника, образованного меньшим основанием и биссектрисами.

**872** | Решите в целых числах уравнение

$$71x + 13y = xy - 14.$$

**873** | Докажите, что

$$\log_2 3 + \log_3 4 + \dots + \log_7 8 < 7.$$

**874** | При каких целых значениях параметра  $a$  уравнение

$$\cos ax = 1 + 3 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$

имеет решения? Найдите эти решения.

### Вариант 166

**875** | Из пункта  $A$  вниз по реке вышел плот. Через час вслед за ним вышел катер, догнал плот и вернулся обратно, затратив на весь путь 24 мин. Найдите скорость катера в спокойной воде, если известно, что скорость течения реки равна 3 км/ч.

**876** | Основания равнобедренной трапеции относятся как 1 : 5, высота равна 4. Найдите площадь трапеции, если боковая сторона равна длине перпендикуляра, проведенного к ней из вершины нижнего основания.

**877** | Решите в целых числах уравнение  $x^3 + 8 = y^2$ .

**878** | Докажите, что  $x^{16} - x^{12} + x^8 - x + 1 > 0$  при любом  $x \in \mathbb{R}$ .

**879** | Найдите наибольшее положительное  $m$ , при котором уравнение  $2 \cos^2 x + \cos x = m$  имеет решение.

### Вариант 167

**880** | Сумма двух натуральных чисел равна 2024. Если у одного из них зачеркнуть последнюю цифру, то получится второе число. Найдите все такие числа.

**881** | В равнобедренном  $\triangle ABC$  с основанием  $AB$  проведена биссектриса  $AD$ . Через точку  $D$  провели прямую, перпендикулярную  $AD$  и пересекающую  $AB$  в точке  $F$ . Найдите радиус окружности, описанной около  $\triangle ADF$ , если  $BD = a$ .

**882** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 28, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

**883** | Решите уравнение

$$(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)=2x.$$

**884** | При каком целом значении  $a$  уравнения

$$4x^2 - (2a + 1)x - 2 = 0 \quad \text{и} \quad 7x^2 + (3a - 1)x - 44 = 0$$

имеют общий корень?

### Вариант 168

**885** | Если к задуманному двузначному числу приписать справа и слева цифру 4, то полученное четырехзначное число будет больше первоначального в 54 раза. Какое число задумано?

**886** | Найдите угол при вершине равнобедренного треугольника, если медиана, проведенная к боковой стороне, образует с основанием угол  $\arcsin \frac{3}{5}$ .

**887** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^3y^2 - y^3x^2 = 36, \\ 2x^2y - y^2x = 6. \end{cases}$$

**888** | Решите уравнение

$$\sqrt{10-x^2} \left( x + \sqrt{10-x^2} \right) = \frac{12}{x}.$$

**889** | В зависимости от значений параметра  $a$  найдите наименьший корень уравнения

$$x^3 + 2ax^2 - (a+1)^2x - 2a(a+1)^2 = 0.$$

### Вариант 169

**890** | Имеется два сплава золота и серебра; в одном количество этих металлов находится в отношении 2 : 3, в другом — в отношении 3 : 7. Сколько нужно взять от каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5 : 11?



**891** | В тупоугольном треугольнике острые углы равны  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha > \beta$ ). Из вершины тупого угла на основание опущены высота длиной  $a$  и медиана. Найдите площадь треугольника, заключенного между медианой и высотой.

**892** | Решите уравнение

$$4x^4 - 49x^2 - 4x + 14 = 0.$$

**893** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y - \frac{12}{x - y} = \sqrt{\frac{x + y}{x - y}}, \\ xy = 15. \end{cases}$$

**894** | Решите уравнение

$$a \lg^2(x^2 + 10) + 2 \lg(x^2 + 10) + 8a = 0.$$

### Вариант 170

**895** | Некоторый сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1 : 3, а другой содержит те же металлы в отношении 2 : 3. Сколько частей каждого сплава нужно взять, чтобы получить третий сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 : 27?

**896** | В тупоугольном треугольнике острые углы равны  $\alpha$  и  $\beta$  ( $\alpha > \beta$ ). Из вершины тупого угла на основание опущены высота длиной  $a$ , медиана и биссектриса. Найдите площадь треугольника, заключенного между биссектрисой и медианой.

**897** | Решите уравнение

$$2x^3 + 6x + 3 = 0.$$

**898** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - y + \sqrt{\frac{5(x - y)}{3(x + y)}} = \frac{10}{x + y}, \\ x^2 + y^2 = 17. \end{cases}$$

**899** | При каких значениях параметра  $m$  уравнение

$$\lg(x^2 + 6x + 8) = \lg(m - 3x)$$

имеет единственное решение?

## Вариант 171

**900** | Углы треугольника относятся как 1 : 5 : 6. Длина наименьшей стороны равна 2. Найдите радиус вписанной окружности.

**901** | Докажите, что если  $x^2 + 2y^2 = 2004$ , то справедливо неравенство  $x^2y^2 - x^4 - y^2 < 2003$ .

**902** | Решите уравнение

$$4x^2 + \frac{10}{3x} = \frac{61}{9}.$$

**903** | Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x+15} = (x-1)^3 - 6.$$

**904** | Найдите наименьшее натуральное  $n \in N$ , которое надо прибавить к выражению  $(x+2)(x+5)(x+8)(x+11)$ , чтобы полученная сумма была полным квадратом при любом  $x \in R$ .

## Вариант 172

**905** | Две биссектрисы в треугольнике делятся в точке пересечения 2 : 1 и 3 : 1 (считая от вершины). Найдите, в каком отношении делится точкой пересечения третья биссектриса.

**906** | Докажите, что выражение  $9 \cdot 3^{3n+1} - 8^{n+1}$  кратно 19 при любом целом  $n \geq 0$ .

**907** | Решите уравнение

$$\frac{1}{3}x^3 = x^2 - x + a.$$

**908** | Решите уравнение

$$\frac{x^2 - 4x + 9}{\sqrt{x}} = 3(x - 3).$$

**909** | Найдите наименьшее значение выражения

$$x^2 + 4xy + 16y^2 - 2x - 16y + 9.$$

## Вариант 173

**910 |** Площадь квадрата, построенного на боковой стороне равнобедренного треугольника, в 4 раза больше площади треугольника. Найдите  $R/r$ , где  $R$  и  $r$  — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

**911 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x = xy + y^2, \\ 4y = x^2 + 2x. \end{cases}$$

**912 |** Решите уравнение

$$8^{x+1} + 11 = 12\sqrt[3]{24 \cdot 2^x - 11}.$$

**913 |** Решите уравнение

$$x^2 - 2x \sin(x - y) + 1 = 0.$$

**914 |** При каких значениях параметра  $a$  неравенство

$$\frac{x^2 + a^2}{a(x + 6)} \geq 1$$

выполняется для всех  $x \in (-1; 1)$ ?

## Вариант 174

**915 |** Дан квадрат  $ABCD$  со стороной  $a = 1$ . Найдите радиус окружности, проходящей через середину стороны  $AB$ , центр квадрата и вершину  $C$ .

**916 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x = x^2 - 2y, \\ y = x^2 - 2x. \end{cases}$$

**917 |** Решите уравнение

$$2^{6x-7} \cdot 3^{7x-9} \cdot 7^{5x-5} = 735^{x-2}.$$

**918 |** Решите уравнение

$$3 \cos^2 x + 5 \cos^2 7x = 8.$$

**919 |** При каких значениях параметра  $a$  больший корень уравнения  $x^2 - a(a + 2)x + 2a^3 = 0$  больше  $1/4$ ?

## Вариант 175

**920** | На высоте конуса, равной  $H$ , как на диаметре, описан шар. Определите объем части шара, лежащей вне конуса, если угол между образующей и высотой равен  $\alpha$ .

**921** | Решите уравнение

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10 \left( \frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right).$$

**922** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x + 3 = 28 \cdot 3^y, \\ \sqrt{2x + y^2} = y - x. \end{cases}$$

**923** | Решите уравнение

$$\cos^2 \left( \frac{2\pi}{3} \cos x - \frac{4\pi}{3} \right) = 1.$$

**924** | Решите неравенство

$$19 \cdot 7^{\sqrt{4-x}} + a \cdot 7^{x-3} > 7^{x+\sqrt{4-x}-3} + 19a.$$

## Вариант 176

**925** | Дана правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны 1. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

**926** | Решите уравнение

$$\frac{x^2}{25} + \frac{36}{x^2} = \frac{16}{5} \left( \frac{x}{5} - \frac{6}{x} \right).$$

**927** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4^x + 2^y = 12, \\ \sqrt{3x - 2y} = \sqrt{5 + x - 3y}. \end{cases}$$

**928** | Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 5x - 2 \operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg}^2 3x.$$

**929** | Решите неравенство

$$(a - 6) \cdot 2^{\sqrt{x-3}} < a - 2.$$

## Вариант 177

**930** | Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна  $H$ , боковое ребро и диагональ пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углами  $\alpha$  и  $\beta$ . Найдите ее боковую поверхность.

**931** | Решите уравнение

$$\log_2(x-3) = 3\log_3(14-x).$$

**932** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5\sin 2x \operatorname{tg} y = 12, \\ 5\sin 2y \operatorname{tg} x = 6. \end{cases}$$

**933** | Разложите на множители многочлен

$$(1 + 4x^2)y^2 + 2(2x - y)(1 + 2xy) + 1.$$

**934** | При каком значении параметра  $p$  уравнение

$$px^{-2} + 3 = 5p - 4x^{-2}$$

не имеет корней?

## Вариант 178

**935** | Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно  $2/3$ . Найдите отношение объема шара к объему конуса.

**936** | Решите уравнение

$$\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} + \log_x 5 = 0.$$

**937** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin x = \sin(2x + 3y), \\ \cos y = \sqrt{2} \cos(x + 2y). \end{cases}$$

**938** | Разложите на множители многочлен  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ .

**939** | При всех значениях параметра  $a$  укажите наименьший корень уравнения  $x^3 + 3ax^2 - (a-1)^2x + 3a(a-1)^2 = 0$ .

## Вариант 179

**940 |** Рабочий изготовил в назначенный ему срок некоторое количество одинаковых деталей. Если бы он ежедневно изготавливал их на 10 штук более, то выполнил бы эту работу на 4,5 дня раньше срока, а если бы он делал в день на 5 деталей меньше, то опоздал бы на 3 дня. Сколько деталей и в какой срок он изготовил?

**941 |** В круг единичного радиуса вписан треугольник с острым углом  $30^\circ$ . Отрезок, соединяющий вершину этого угла и проходящий через центр круга, делит противоположную сторону в отношении  $1 : 2$ . Найдите длину этого отрезка.

**942 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 10(y - x) = x^4 + 9, \\ \sqrt{y} + \sqrt{y - 2x} = \sqrt{2}. \end{cases}$$

**943 |** Решите уравнение

$$\log_2(4x^2 + 1) - \log_2 x = 8x(1 - x).$$

**944 |** При каких значениях параметра  $a$  неравенство

$$x^2 + 5|x - a| \geq a^2$$

справедливо для всех значений  $x$ ?

## Вариант 180

**945 |** Половину пути мотоциклист ехал со скоростью 45 км/ч, затем задержался у переезда на 10 мин, после чего он увеличил скорость на 15 км/ч, чтобы наверстать потерянное время. Какое расстояние проехал мотоциклист?

**946 |** В  $\triangle ABC$  вписана окружность, касающаяся сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  в точках  $N$ ,  $K$  и  $M$ . Найдите длину отрезка  $NK$ , если  $AM = 2$ ,  $AC = 7$  и  $\angle ABC = 60^\circ$ .

**947 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{2x - 1} + \sqrt{y + 3} = 3, \\ 2xy + 6x = y + 7. \end{cases}$$

**948** | Решите уравнение

$$\log_2 \left( \frac{1}{\sqrt{\log_2 x}} \right) = \log_4 \left( \log_4 \frac{x}{2} \right).$$

**949** | При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$x|x + 2a| = a - 1$$

имеет только один корень?

### Вариант 181

**950** | Две автомашины выехали одновременно из одного пункта и идут в одном направлении. Скорость первой машины 50 км/ч, а скорость второй составляет 120 % скорости первой. Через 30 мин из того же пункта и в том же направлении выехала третья машина, которая догнала вторую на 1 ч позже, чем первую. Определите скорость третьей машины.

**951** | Стороны  $\triangle ABC$  равны соответственно  $AC = a$ ,  $BC = b$ , а медианы  $AM$  и  $BN$  взаимно перпендикулярны. Найдите длину третьей стороны  $AB$ .

**952** | Докажите, что  $\operatorname{tg}^2 72^\circ \cdot \operatorname{ctg}^2 54^\circ = 5$ .**953** | Решите уравнение

$$\log_{0,5} x^2 - 14 \log_{16x} x^3 + 40 \log_{4x} \sqrt{x} = 0.$$

**954** | Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{3x^2 + 4}}{x - 1} \geq 4.$$

**955** | В зависимости от значений параметра  $a$  решите уравнение

$$\sqrt[3]{2-x} + \sqrt[3]{2+x} = a.$$

### Вариант 182

**956** | Бассейн наполняется из двух труб за 7,5 ч. Если открыть только первую трубу, то бассейн заполнится на 8 ч быстрее, чем если открыть только вторую трубу. Сколько времени будет наполняться бассейн второй трубой?

**957 |** В треугольнике известны длины двух сторон — 6 см и 3 см. Найдите длину третьей стороны, если полусумма высот, проведенных к данным сторонам, равна третьей высоте.

**958 |** Докажите тождество  

$$2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) - 3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) + 1 = 0.$$

**959 |** Найдите произведение корней уравнения  

$$\sqrt{1+2\log_9 x} + \sqrt{4-\log_3 x} = 3.$$

**960 |** Найдите наибольшее целое решение неравенства  

$$\frac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+2} < 1.$$

**961 |** При каком значении  $a$  уравнение  $\sqrt{2a|x|-x^2} = x+3$  имеет два корня?

### Вариант 183

**962 |** Объем правильной треугольной усеченной пирамиды в три раза больше объема вписанного в нее шара. Найдите угол между боковой гранью пирамиды и плоскостью ее основания.

**963 |** Точка  $K$  — середина стороны  $AD$  прямоугольника  $ABCD$ . Найдите угол между  $BK$  и диагональю  $AC$ , если известно, что  $AD:AB = \sqrt{2}$ .

**964 |** Решите неравенство  

$$\frac{(x-2)^3(x+1)^4(x+3)^5(x-6)}{x^2(x-4)^3} \leq 0.$$

**965 |** Решите уравнение  

$$(6-\sqrt{35})^x + (6+\sqrt{35})^x = 142.$$

**966 |** Вычислите без таблиц  

$$\sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16}.$$



**967** | При каких значениях параметра  $a$  система уравнений

$$\begin{cases} (6+a)x + 2y = 3+a, \\ -4x + ay = 1+a \end{cases}$$

не имеет решений?

### Вариант 184

**968** | Высота пирамиды равна 5, а основанием служит треугольник со сторонами 7, 8 и 9. Некоторая сфера касается плоскостей всех боковых граней пирамиды в точках, лежащих на сторонах основания. Найдите радиус сферы.

**969** | Определите вид треугольника, если известно, что его медианы связаны равенством  $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$ .

**970** | Решите неравенство

$$\frac{15}{x^2} + \frac{16}{x^4} > 1.$$

**971** | Решите уравнение

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4.$$

**972** | Упростите выражение

$$3(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) - 2(\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha).$$

**973** | Найдите все значения параметра  $m$ , при которых система

$$\begin{cases} x^2 - (3m+1)x + 2m^2 + 2m < 0, \\ x + m^2 = 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

### Вариант 185

**974** | От двух кусков сплава с различным процентным содержанием меди, имеющих массу  $m_1$  кг и  $m_2$  кг, отрезано по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Какова была масса каждого из отрезанных кусков?

**975 |** Докажите, что площадь прямоугольного треугольника можно определить по формуле  $S = (2R + r)r$ , где  $R$  и  $r$  — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

**976 |** Решите в целых числах уравнение  $x^4 = y^4 + 2y^2 + 157$ .

**977 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 8\sqrt{x^2 - 6y + 1} - x^2 + 6y = 17, \\ \frac{x^2 y - 5}{49} + \frac{12}{x^2} = \frac{2}{y} + \frac{4}{9}. \end{cases}$$

**978 |** Решите уравнение

$$7 \operatorname{tg}^3 x - 6 = \sqrt[3]{\frac{1}{7}(\operatorname{tg} x + 6)}.$$

**979 |** При каком наименьшем целом значении параметра  $a$  уравнение  $x^4 - 8x^2 - a = 0$  имеет ровно 4 корня?

### Вариант 186

**980 |** Имеются три куска сплава меди с никелем в отношениях  $2 : 1$ ,  $3 : 1$  и  $5 : 1$  по массе. Из них сплавлен кусок массой 12 кг с отношением содержания меди и никеля  $4 : 1$ . Найдите массу каждого исходного куска, если масса первого из них вдвое больше массы второго.

**981 |** Докажите, что площадь равнобедренной трапеции определяется по формуле  $S = \frac{1}{2} m^2 \sin \alpha$ , где  $m$  — длина диагонали,  $\alpha$  — угол между ними.

**982 |** Решите в целых числах уравнение  $x^3 - y^3 = 1951$ .

**983 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 12y + 8\sqrt{x^2 - 12y + 1} = x^2 + 17, \\ \frac{x}{8y} + \frac{y}{2x} + \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{x}{3y} + \frac{1}{4}}. \end{cases}$$

**984 |** Решите уравнение

$$\sqrt{7 - 4 \operatorname{tg} x} = \sqrt{3}(2 \operatorname{tg} x - 1).$$

**985** | Найдите наибольшее целое  $k$ , при котором уравнение  $x^4 - 8x^2 - k = 0$  имеет ровно 3 корня.

### Вариант 187

**986** | В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  отношение высоты  $BD$  основания  $ABC$  к апофеме пирамиды равно  $k$ . Конус с вершиной  $B$  и образующей  $BD$  касается своей боковой поверхностью основания  $ABC$  и боковых граней  $AMB$  и  $CMB$  пирамиды. Найдите отношение площади боковой поверхности конуса к площади основания пирамиды.

**987** | В равнобедренном треугольнике из вершин нижнего основания опущены высоты на боковые стороны. Найдите длину отрезка, соединяющего их концы, если середина отрезка является центром описанной окружности радиуса  $R = \sqrt{\sqrt{5} + 2}$ .

**988** | Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{9}{x} - x + 8} - \sqrt{\frac{3}{x} + x + 5} = 1.$$

**989** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ xy(x^2 + y^2) = 30. \end{cases}$$

**990** | Решите уравнение

$$(x+2)^{x^2+x} = (x+2)^2.$$

**991** | При каких значениях параметра  $a$  корни уравнения

$$x^3 - 9x^2 + ax - 15 = 0$$

образуют арифметическую прогрессию?

### Вариант 188

**992** | Определите угол при вершине осевого сечения конуса, если его объем в 3 раза больше объема вписанного в него шара.

**993** | В равнобедренном треугольнике с основанием  $a$  острый угол между высотами, проведенными к боковым сторонам, равен  $\alpha$ . Найдите радиус описанной окружности.

**994** | Решите уравнение

$$\sqrt{12 - \frac{12}{x^2}} + \sqrt{x^2 - \frac{12}{x^2}} = x^2.$$

**995** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \left(\frac{y-x}{x}\right)^2 = 1, \\ 2y^2 - x^2 = 1. \end{cases}$$

**996** | Решите уравнение

$$(x+5)^{x^2-x-1} = (x+5)^{2x+3}.$$

**997** | При каком значении параметра  $a$  корни уравнения

$$x^4 + (a-3)x^2 + (a+10)^2 = 0$$

образуют арифметическую прогрессию?

### Вариант 189

**998** | Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала открыли первый кран на  $1/3$  часть того времени, за которое наполняет бассейн один второй кран. Затем был открыт один второй кран на  $1/2$  часть того времени, за которое наполняет бассейн первый кран. После этого оказалось, что уже заполнено  $5/6$  объема бассейна. За какое время наполняет бассейн каждый кран в отдельности, если открытые вместе они наполняют бассейн за 2,4 ч?

**999** | Докажите, что в прямоугольном треугольнике

$$r = \frac{1}{2}(a+b-c),$$

где  $a$  и  $b$  — катеты,  $c$  — гипотенуза,  $r$  — радиус вписанной окружности.

**1000** | Решите уравнение

$$x\sqrt{2(5-8x^2)} + 240\sqrt{1+x^2} = \sqrt{26(x^2+255)}.$$

**1001** | Решите уравнение

$$\frac{\lg(x^2)}{(\lg x)^2} + \frac{\lg(x^3)}{(\lg x)^3} + \frac{\lg(x^4)}{(\lg x)^4} + \dots = 16.$$

**1002** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{5}{12}xy, \\ \frac{xy + 1}{xy - 1} = \frac{2x}{3y}. \end{cases}$$

**1003** | При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$(a - 2)x^2 - 4ax + 3 - 2a = 0$$

имеет единственное решение, удовлетворяющее неравенству  $x > 2$ ?**Вариант 190**

**1004** | Бассейн наполняется водой из труб за 3 ч 45 мин. Если бассейн заполнить наполовину, открыв только первую трубу, а оставшуюся часть — открыв только вторую, то на это потребуется 8 ч. За какое время наполнит бассейн каждая из труб по отдельности?

**1005** | Из точки  $M$ , лежащей вне окружности, проведены к ней касательная  $MA$  и секущая, пересекающая окружность в точках  $B$  и  $C$ , считая от точки  $M$ . Докажите, что  $MA^2 = MB \cdot MC$ .

**1006** | Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1} = 1.$$

**1007** | Решите уравнение

$$2 \log_{4x-11}(4x^2 - 19x + 22) = \log_{x-2}(4x - 11) + 1.$$

**1008** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x(x+y^2)}{x^3-y^3} = \frac{6}{7}, \\ \frac{y(x^2+y)}{x^3-y^3} = \frac{5}{7}. \end{cases}$$

**1009** | Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство  $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$  выполнено для всех  $x > 0$ .

## Вариант 191

**1010** | Из середины высоты правильной четырехугольной пирамиды проведены два перпендикуляра: один — длиной 1,4 к боковому ребру, другой — длиной 1 к боковой грани. Найдите объем пирамиды.

**1011** | Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит один из катетов на отрезки длиной  $m$  и  $n$  ( $m > n$ ). При каких целых значениях  $m$  и  $n$  площадь треугольника представляет наименьший полный куб (число, из которого извлекается точный кубический корень)?

**1012** | Решите уравнение

$$3^x + 3\left(\sqrt[3]{36^x}\right) + \left(\sqrt[3]{48^x}\right) = 7 \cdot 4^x.$$

**1013** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \lg \frac{y}{x}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x-y} = 4. \end{cases}$$

**1014** | Решите уравнение

$$16 \sin^3 x = 14 + \sqrt[3]{\sin x + 7}.$$

**1015** | При каком значении параметра  $a$  уравнение

$$|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a$$

имеет больше трех корней?

## Вариант 192

**1016** | Площадь боковой поверхности треугольной пирамиды равна 6, двугранные углы при основании равны  $60^\circ$ . Радиус шара, вписанного в пирамиду, равен  $r$ . Найдите объем пирамиды.

**1017** | В прямоугольном треугольнике  $ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ),  $BC = a$ ,  $AC = b$  ( $a \neq b$ ) проведена прямая, касающаяся описанной около этого треугольника окружности в точке  $C$  и пересекающая продолжение  $AB$  в точке  $D$ . Найдите  $CD$ .

**1018** | Решите уравнение

$$2^{3x} - \frac{8}{2^{3x}} - 6\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = 1.$$

**1019 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x|\sqrt{4x^2 - y^2} = 0, \\ x - y + \sqrt{4x^2 - y^2} = 1. \end{cases}$$

**1020 |** Решите уравнение

$$\sqrt{\sin^8 x + \cos^8 x} = \cos 2x.$$

**1021 |** При каком значении параметра  $a$  уравнение

$$|2x + 2| = ax^2 + 4$$

имеет ровно 2 корня?

### Вариант 193

**1022 |** Два мотоциклиста выехали одновременно в одном направлении из пунктов  $A$  и  $B$ , расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли в пункт  $C$ . Если бы один из них увеличил скорость на 25 км/ч, а другой — на 20 км/ч, то они также прибыли бы одновременно в пункт  $C$ , но на 2 ч раньше. Найдите скорости мотоциклистов.

**1023 |** Основания трапеции равны  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). Определите длину отрезка, параллельного основаниям и делящего площадь трапеции в отношении 1 : 2.

**1024 |** Докажите, что если  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}$ , то  $\frac{a+c}{a-c} + \frac{b+c}{b-c} = -2$ .

**1025 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x, \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x. \end{cases}$$

**1026 |** Решите уравнение  $xy - x = y^5 + y^3 - 7$ , где  $x \in N, y \in N$ .

**1027 |** При каких значениях параметра  $a$  каждое решение неравенства

$$(0,6)^{x^2+1} \geq \left(\frac{25}{9}\right)^{a-4x}$$

является решением неравенства  $x^2 - 16x + 13 < a^2$ ?

## Вариант 194

**1028** | Из города  $A$  в город  $B$  выехала машина, а через  $t_1$  ч выехала другая машина из  $B$  в  $A$ . Они встретились через  $t_2$  ч после выезда машины из  $B$ . Найдите время каждой из них, если скорость у них постоянная и прибыли они в пункты назначения одновременно.

**1029** | Высота треугольника делит его угол в отношении  $2 : 1$ . Отношение суммы длин боковых сторон к длине высоты равно  $m$ . Найдите возможные значения  $m$ .

**1030** | Докажите, что если  $ax + c^2y + b^3z = 0$ ,  $cx + b^2y + a^3z = 0$  и  $bx + a^2y + c^3z = 0$ , то справедливо равенство

$$a^6 + b^6 + c^6 = abc(ab^2 + bc^2 + ca^2).$$

**1031** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2\sin x \operatorname{ctg} y + 1 = 0, \\ \sqrt{1 + \sin x \sin y} = \cos x. \end{cases}$$

**1032** | Решите уравнение

$$x^6 + y^6 + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6} = 4.$$

**1033** | При каком наибольшем целом значении параметра  $m$  неравенство  $\log_{\frac{m}{m+1}}(x^2 + 2) > 1$  выполняется для всех  $x \in \mathbb{R}$ ?

## Вариант 195

**1034** | Поезд  $A$ , скорость которого  $V_1$  км/ч, выходит после поезда  $B$ , скорость которого  $V_2$  км/ч. Задержка выхода поезда  $A$  рассчитана так, чтобы оба поезда одновременно прибыли к месту назначения. Поезд  $B$ , пройдя  $\frac{2}{3}$  пути, вынужден был наполовину уменьшить скорость. Вследствие этого поезда встретились за  $S$  км до места назначения. Определите длину пути до станции назначения.

**1035** | В равнобедренном треугольнике с острым углом при вершине угол при основании равен  $2\alpha$ . Найдите отношение  $r/R$ , где  $r$  и  $R$  — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.



**1036 |** Докажите, что если  $\sin x + \sin y = a$ ,  $\cos x + \cos y = b$ , то

$$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{(a^2 + b^2 + 2b)(a^2 + b^2 - 2b)}{(a^2 + b^2 + 2a)(a^2 + b^2 - 2a)}.$$

**1037 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{7-y^2}{x^2-13} = 2, \\ x^3 + 33y = y^3 + 24x. \end{cases}$$

**1038 |** Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} - \frac{12}{7(7x+2)} = \frac{53}{28}.$$

**1039 |** При каких значениях параметра  $a$  система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0, \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

## Вариант 196

**1040 |** Двое рабочих, работая одновременно, выполняют работу за  $m$  дней. Работая отдельно, первый сделает работу на  $n$  дней быстрее второго. За сколько дней выполнит всю работу второй рабочий, работая отдельно?

**1041 |** В  $\triangle ABC$  медианы  $m_a$  и  $m_c$  образуют с основанием  $AC$  углы, сумма которых равна  $45^\circ$ . Известно, что  $m_a \cdot m_c = 3\sqrt{2}$ . Найдите площадь  $\triangle ABC$ .

**1042 |** Докажите, что если  $7 \sin \beta = \sin(2\alpha + \beta)$ , то

$$3 \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 4 \operatorname{tg} \alpha.$$

**1043 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x-y)^2, \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x-y). \end{cases}$$

**1044 |** Решите уравнение

$$\frac{x+1}{x^2+3} = \frac{\sqrt{x-3}+1}{x}.$$

**1045** | При каких значениях параметра  $a$  система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leq a, \\ x^2 - 2x - 3 \leq -6a \end{cases}$$

имеет единственное решение?

### Вариант 197

**1046** | Для разгрузки баржи имеется три крана. Первому крану для разгрузки всей баржи требуется времени в 4 раза меньше, чем второму, и на 9 ч больше, чем третьему. Три крана, работая вместе, разгрузили бы баржу за 18 ч, но по условиям эксплуатации одновременно могут работать только два крана. Определите наименьшее время (в часах), необходимое для разгрузки баржи (производительность каждого крана постоянна в течение всей работы).

**1047** | Прямоугольный треугольник с катетами  $a$  и  $b$  ( $a > b$ ) вписан в окружность. Биссектриса острого угла соединена с точкой, взятой на большем катете. Через эту точку проведена хорда так, что она делится точками пересечения на 3 равные части. Найдите длину хорды.

**1048** | Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^{x+y} = y^{24}, \\ y^{x+y} = x^6. \end{cases}$$

**1049** | Решите уравнение

$$x^3 - 3x + (3+x)\sqrt{x} - 1 = 0.$$

**1050** | Найдите наименьшее целое значение функции

$$y = \sqrt{25 - 16 \cdot 2^{-|x|}}.$$

**1051** | Найдите все значения  $a$ , при которых область определения функции

$$y = \log_{13+a} \left( \ln \frac{a-19x}{3x+a} \right)$$

содержит отрезок длиной 2, состоящий из положительных чисел.

## Вариант 198

**1052 |** Автомобилист проехал расстояние между двумя городами за 3 дня. В первый день он проехал  $\frac{1}{5}$  всего пути и еще 60 км, во второй он проехал  $\frac{1}{4}$  всего пути и еще 20 км, а в третий день он проехал  $\frac{23}{80}$  всего пути и оставшиеся 25 км. Найдите расстояние между городами.

**1053 |** В треугольник  $ABC$  вписан ромб  $ADEF$  так, что  $\angle A$  у них общий, а вершина  $E$  находится на стороне  $BC$ . Найдите сторону ромба, если  $AB = c$ ,  $AC = b$ .

**1054 |** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_4 y \cdot \log_y (y - 3x) = 1, \\ x^{5/2} = yx^{\log_y x}. \end{cases}$$

**1055 |** Решите уравнение

$$(x+3)\sqrt{x-3} = (x-1)\sqrt{x+3}.$$

**1056 |** При каких значениях  $a$  функция  $y = \log_{\sqrt{2}}(4x^2 - ax + 7)$  имеет минимум при  $x = \frac{1}{4}$ ?

**1057 |** Найдите все значения  $a$ , при которых область определения функции

$$y = \log_{19+a} \left( \ln \frac{a-x}{7x+a} \right)$$

содержит отрезок длиной 4, состоящий из положительных чисел.

## Вариант 199

**1058 |** В усеченном конусе радиусы оснований относятся как 1 : 3. В него вписан другой конус. Основание этого конуса совпадает с меньшим основанием усеченного конуса, а вершина лежит в центре большего основания усеченного конуса. Плоскость, параллельная основаниям конусов, делит их высоту в отношении 3 : 4, считая от

большого основания усеченного конуса. Определите отношение  $V_1$  к  $V_2$ , где  $V_1$  — объем части вписанного конуса, которая отсекается от него этой плоскостью и прилегает к его основанию, а  $V_2$  — объем части усеченного конуса, которая отсекается от него той же плоскостью и прилегает к его большему основанию.

**1059** | Окружность, центр которой лежит на гипотенузе  $AB$   $\triangle ABC$ , касается катетов  $AC$  и  $BC$  соответственно в точках  $M$  и  $N$  и пересекает гипотенузу в точках  $K$  и  $L$ . Найдите площадь четырехугольника  $KMNL$ , если  $AM = a$ ,  $NB = b$ .

**1060** | Исключив  $x$  и  $y$  из равенств  $x - y = a$ ,  $x^3 - y^3 = b$ ,  $x^5 - y^5 = c$ , найдите зависимость между  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

**1061** | Решите уравнение

$$2x + \frac{4}{x}(2x-7)^3 = \sqrt{x} + 7.$$

**1062** | Решите уравнение

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 3} \arctg(2x + 1) + \sqrt{x^2 - 4x + 6} \arctg(2 - x) = 0.$$

**1063** | Найдите все значения параметра  $m$ , при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-m}{1+m}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2, \end{cases}$$

имеет решение.

## Вариант 200

**1064** | Сфера проходит через вершины одной грани куба и касается сторон противоположной грани куба. Найдите отношение объемов шара и куба.

**1065** | В четырехугольнике  $ABCD$   $AB = a$ ,  $AD = b$ , стороны  $BC$ ,  $CD$  и  $AD$  касаются некоторой окружности, центр которой находится в середине  $AB$ . Найдите  $BC$ .

**1066 |** Докажите, что если  $\frac{\sin^4 x}{a} + \frac{\cos^4 x}{b} = \frac{1}{a+b}$ , где  $ab > 0$ , то

$$\frac{\sin^{2008} x}{a^{1003}} + \frac{\cos^{2008} x}{b^{1003}} = \frac{1}{(a+b)^{1003}}.$$

**1067 |** Решите уравнение

$$x + \frac{4}{x^2} = 1 + \frac{4}{x} \sqrt{x-1}.$$

**1068 |** Решите уравнение

$$\arcsin(1 + |\sin x|) = \arccos\left(1 + \cos \frac{x}{10}\right).$$

**1069 |** При каких значениях параметра  $a$  система неравенств

$$\begin{cases} \frac{x-y}{x+3y} \geq 0, \\ y(y-2) + x^2 \leq a^2 - 1 \end{cases}$$

не имеет решений?

## РЕШЕНИЯ

### 2 | Решение.

Так как  $\cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x$ , то уравнение примет вид

$$\sin 5x + \sin x - \sin 3x = 0.$$

Применяя формулу суммы синусов, получим

$$2\sin\frac{5x+x}{2}\cos\frac{5x-x}{2} - \sin 3x = 0,$$

или  $2\sin 3x \cos 2x - \sin 3x = 0$ ,  $\sin 3x(2\cos 2x - 1) = 0$ , откуда имеем:

$$\text{а) } \sin 3x = 0, 3x = \pi n, x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } 2\cos 2x - 1 = 0, \cos 2x = \frac{1}{2}, 2x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n;$$

$$2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi n}{3}; \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

### 3 | Решение.

ОДЗ:  $2^x - 1 > 0$ ,  $2^x - 3 > 0$ , откуда  $2^x - 3 > 0$ .

Потенцируя левую часть уравнения, имеем  $\log_3(2^x - 1)(2^x - 3) = 1$ .

По определению логарифма  $(2^x - 1)(2^x - 3) = 3$ .

Пусть  $2^x = t$ , где  $t > 0$ , тогда  $(t - 1)(t - 3) = 3$ ,  $t^2 - t - 3t + 3 = 3$ ,  $t^2 - 4t = 0$ ,  $t(t - 4) = 0$ ,  $t \neq 0$ , тогда  $t - 4 = 0$ ,  $t = 4$ .

Если  $t = 4$ , то  $2^x = 4$ ,  $x = 2$  — корень исходного уравнения, удовлетворяющий ОДЗ.

Ответ:  $x = 2$ .

### 4 | Решение.

Известно, что  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона между касательной к графику функции в точке  $(x_0; y_0)$  и положительным направлением оси  $Ox$ .

$f'(x) = (x^2 + 4x + 3)' = 2x + 4$ ; так как  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , то  $\operatorname{tg} \alpha = 1$  и

$$2x + 4 = 1, 2x = -3, x = -\frac{3}{2}, \text{ тогда } y = f(x_0) = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{3}{2}\right) + 3 =$$

$$= \frac{9}{4} - 6 + 3 = \frac{9-12}{4} = -\frac{3}{4}.$$

Ответ:  $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right)$ .

## 5 | Решение.

Пусть в  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $AM = 12$  см,  $MB = 5$  см. Точки  $M$ ,  $N$  и  $D$  — точки касания вписанной окружности и сторон треугольника.

По свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки, имеем  $AN = AM$ ,  $BM = BD$  и  $CN = CD$ .

Пусть  $CN = CD = x$ , тогда  $AC = AN + NC = 12 + x$ ,

$BC = BD + DC = 5 + x$ ,  $AB = 12 + 5 = 17$  (см).

По теореме Пифагора получим

$$AC^2 + BC^2 = AB^2, \text{ или } (12 + x)^2 + (5 + x)^2 = 17^2,$$

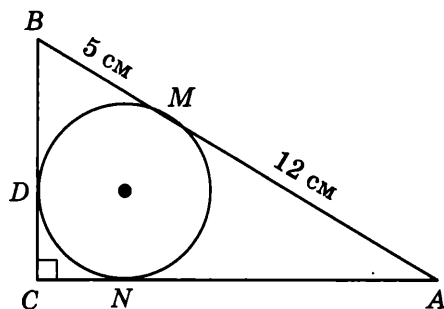
$$144 + 24x + x^2 + 25 + 10x + x^2 = 289,$$

$$2x^2 + 34x - 120 = 0, x^2 + 17x - 60 = 0,$$

откуда по теореме, обратной теореме Виета, находим  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -20$  (не подходит, так как  $x > 0$ ).

Итак,  $AC = 12 + x = 15$  (см),  $BC = 5 + x = 8$  (см).

Ответ: 15 см, 8 см.



## 11 | Решение.

Упростим левую часть тождества, применив формулы приведения:

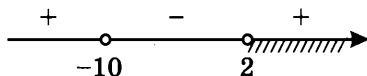
$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 2\alpha - \sin(2\alpha + \pi)}{1 - \cos(2\alpha - \pi) + \sin(2\alpha + 4\pi)} &= \frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \\ &= \frac{2\sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha}{2\cos^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{2\sin \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{2\cos \alpha (\cos \alpha + \sin \alpha)} = \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

## 12 | Решение.

Так как  $4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$  и  $2^{x+3} = 2^x \cdot 2^3 = 8 \cdot 2^x$ , то неравенство запишется в виде  $(2^x)^2 + 8 \cdot 2^x - 20 > 0$ .

Пусть  $2^x = t$ , где  $t > 0$ , тогда получим неравенство  $t^2 + 8t - 20 > 0$ , которое решим методом интервалов:



$$t_1 = -10, t_2 = 2.$$

Так как  $t > 0$ , то  $t > 2$ , или  $2^x > 2$ , откуда  $x > 1$ , т. е.  $(1; +\infty)$ .

Ответ:  $(1; +\infty)$ .

## 22 | Решение.

$$\sqrt{(x+3)(x-8)} > x+2.$$

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$1) \begin{cases} (x+3)(x-8) \geq 0, \\ x+2 \geq 0, \\ (x+3)(x-8) > (x+2)^2. \end{cases}$$

Решением I неравенства является

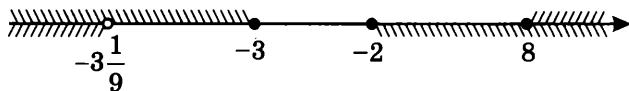
$$x \leq -3; x \geq 8.$$

Из II неравенства имеем  $x \geq -2$ .

Решая III неравенство, находим

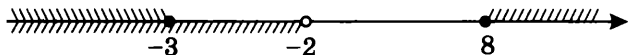
$$x^2 + 3x - 8x - 24 > x^2 + 4x + 4, \text{ или } 9x < -28, \text{ откуда } x < -3\frac{1}{9}.$$

Тогда решением системы неравенств будет пересечение полученных множеств:



Как видим, система 1) не имеет решений.

$$2) \begin{cases} (x+3)(x-8) \geq 0, \\ x+2 < 0. \end{cases}$$





Следовательно, решением системы неравенств 2), а значит, и исходного неравенства является промежуток  $(-\infty; -3]$ .

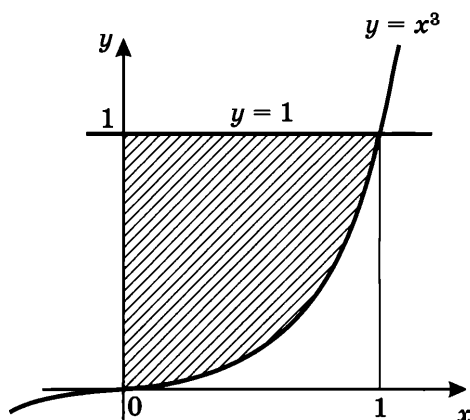
Ответ:  $(-\infty; -3]$ .

### 23 | Решение.

Изобразим фигуру, ограниченную данными линиями:

$$\begin{aligned} \text{Тогда } S_{\Phi} &= S_{\text{кв}} = \\ &= -\int_0^1 x^3 dx = 1 \cdot 1 - \frac{1}{4} x^4 \Big|_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{4} \cdot 1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

Ответ: 0,75.



### 24 | Решение.

По условию задачи  $A(-1; -2; 4)$ ,  $B(-4; -2; 0)$  и  $C(3; -2; 1)$ .

Нам надо найти величину угла  $B$ . Найдем координаты векторов  $\overrightarrow{BA}$  и  $\overrightarrow{BC}$ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} &\{-1 - (-4); -2 - (-2); 4 - 0\} = \\ &= \{3; 0; 4\}, \\ \overrightarrow{BC} &\{3 - (-4); -2 - (-2); 1 - 0\} = \\ &= \{7; 0; 1\}. \end{aligned}$$

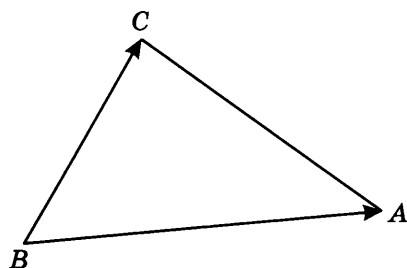
Теперь найдем длины векторов  $\overrightarrow{BA}$  и  $\overrightarrow{BC}$ :

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{BA}| &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{3^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \\ |\overrightarrow{BC}| &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \sqrt{7^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } \cos \angle B = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{3 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{5 \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

откуда  $\angle B = 45^\circ$ .

Ответ:  $45^\circ$ .



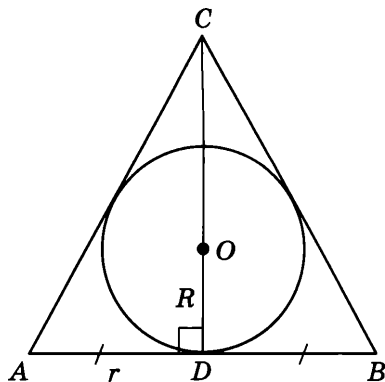
### 25 | Решение.

Пусть  $ABC$  — осевое сечение конуса,  $OD = R$  — радиус вписанного шара,  $AD = r$  — радиус основания конуса.

Сечение шара является вписанным кругом. Известно, что  $R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ , где  $a$  — сторона правильного треугольника.

Заметим, что радиус основания конуса  $r = \frac{1}{2}a$ , тогда из  $\triangle ADC$  имеем  $H^2 = a^2 - r^2$ , где  $H = CD$ .

$$H = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$



$$\text{Следовательно, } V_{\kappa} = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3\pi}{24}.$$

Объем шара  $V_{\text{ш.}} = \frac{4}{3}\pi R^3$ . Так как  $a = 2\sqrt{3}R$ , то

$$V_{\kappa} = \frac{\sqrt{3}\pi}{24} \cdot (2\sqrt{3}R)^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{24} \cdot 8 \cdot 3\sqrt{3}R^3 = 3\pi R^3.$$

По условию  $V_{\text{ш.}} = \frac{32}{3}$ , тогда  $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32}{3}$ , откуда  $\pi R^3 = 32 : 4 = 8$ .

Значит,  $V_{\kappa} = 3 \cdot \pi R^3 = 3 \cdot 8 = 24$  (куб. ед.).

Ответ: 24.

### 31 | Решение.

$$3 + 5 \sin 3x = \cos 6x.$$

Так как  $\cos 6x = 1 - 2 \sin^2 3x$ , то получим

$$3 + 5 \sin 3x = 1 - 2 \sin^2 3x, \text{ или } 2 \sin^2 3x + 5 \sin 3x + 2 = 0.$$

Пусть  $\sin 3x = t$ , где  $|t| \leq 1$ , тогда  $2t^2 + 5t + 2 = 0$ ,

$$D = 25 - 16 = 9 = 3^2 > 0, \quad t_{1,2} = \frac{-5 \pm 3}{4}, \quad t_1 = -\frac{1}{2}, \quad t_2 = -2.$$

Если  $t_1 = -\frac{1}{2}$ , то  $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ ,  $3x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Если  $t = -2$ , то  $\sin 3x = -2$  — нет корней.

Ответ:  $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

**32 | Решение.**

$$\begin{cases} x^2 + xy = 10, \\ x^3 + x^2y = 20; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x+y) = 10, \\ x^2(x+y) = 20. \end{cases}$$

Заметим, что  $x \neq 0$  и  $y \neq 0$ , так как в противном случае не будут выполняться уравнения системы. Разделив обе части второго уравнения полученной системы на первое, получим  $x = 2$ , тогда из первого уравнения имеем  $2(2+y) = 10$ ,  $2+y = 5$ ,  $y = 3$ .

Итак, пара чисел  $(2; 3)$  является решением исходной системы уравнений.

Ответ:  $(2; 3)$ .

**33 | Решение.**

$$\log_{0,5}^2(1-x^2) = 4, \text{ откуда } \log_{0,5}(1-x^2) = \pm 2.$$

$$\text{Если } \log_{0,5}(1-x^2) = 2, \text{ то } 1-x^2 = (0,5)^2 > 0, x^2 = 1-0,25,$$

$$x^2 = 0,75 = \frac{3}{4}, x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2};$$

если  $\log_{0,5}(1-x^2) = -2$ , то  $1-x^2 = (0,5)^{-2}$ , или  $1-x^2 = 4$ ,  $x^2 = -3$  — нет действительных корней.

$$\text{Итак, исходное уравнение имеет два корня: } x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

**35 | Решение.**

$$\text{Если } F'(x) = x^3 - 4x^2, \text{ то } F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + C, \text{ где } C — \text{ постоянная.}$$

По условию  $F(-1) = 3$ , тогда получим

$$3 = \frac{(-1)^4}{4} - \frac{4(-1)^3}{3} + C, \text{ или } 3 = \frac{1}{4} + \frac{4}{3} + C,$$

$$\text{откуда } C = 3 - \frac{1}{4} - \frac{4}{3}, C = \frac{1}{12}(36 - 3 - 16) = \frac{17}{12}.$$

$$\text{Значит, } F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{17}{12}.$$

$$\text{Ответ: } F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{17}{12}.$$

#### 41 | Решение.

Известно, что уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(x_0; y_0)$  имеет вид  $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ .

По условию  $x_0 = -3$ ,  $y_0 = 1$ .

Так как  $y' = 2^{x+3} \ln 2$ , то  $y'(-3) = 2^{-3+3} \ln 2 = \ln 2$ .

Тогда уравнение касательной примет вид

$$y - 1 = \ln 2 \cdot (x + 3), \text{ или } y = x \ln 2 + 3 \ln 2 + 1.$$

Ответ:  $y = x \ln 2 + 3 \ln 2 + 1$ .

#### 42 | Решение.

Если  $x > 2$ , то знаменатель дроби обращается в ноль.

Поэтому умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x+2} - x} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + x)}{(\sqrt{x+2} - x)(\sqrt{x+2} + x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + x)}{x+2 - x^2} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + x)}{(x-2)(x+1)} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 2x + 4)(\sqrt{x+2} + x)}{x+1} = -\frac{(4+4+4)(2+2)}{2+1} = -\frac{12 \cdot 4}{3} = -16. \end{aligned}$$

Ответ:  $-16$ .

#### 44 | Решение.

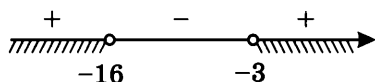
$$(0,5)^{\frac{2x-7}{x+3}} > 2^{-3}.$$

Так как  $0,5 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$ , то неравенство примет вид  $2^{\frac{7-2x}{x+3}} > 2^{-3}$ .

Показательная функция  $y = 2^t$  является возрастающей, так как  $2 > 1$ , тогда получим равносильное неравенство

$$\frac{7-2x}{x+3} > -3, \text{ или } \frac{7-2x}{x+3} + 3 > 0, \frac{7-2x+3x+9}{x+3} > 0, \frac{x+16}{x+3} > 0.$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, находим  $x_1 = -16$ ,  $x_2 = -3$ .



$$x < -16; x > -3$$

Ответ:  $(-\infty; -16) \cup (-3; +\infty)$ .

#### 45 | Решение.

Пусть прямоугольник  $ABCD$  вписан в круг радиуса  $R$ . Пусть  $AB = x$ ,  $CB = y$ , где  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

По условию периметр  $P = 2(x + y) = 56$ , или  $x + y = 28$ , откуда  $y = 28 - x$ , тогда  $S = xy = x(28 - x)$ .

Итак,  $S = S(x) = x(28 - x)$ , где  $x \in (0; 28)$ .

Исследуем функцию  $S(x)$  на промежутке  $[0; 28]$ :

$$S'(x) = (28x - x^2)' = 28 - 2x, S'(x) = 0, 28 - 2x = 0, 2x = 28,$$

$$x = 14 \in [0; 28],$$

$$y = 28 - x = 14.$$

$$S(0) = S(28) = 0; S(14) = 14 \cdot (28 - 14) = 196.$$

Следовательно, наибольшее значение функции  $S(x)$  достигается в стационарной точке  $x = 14$  и равно 196.

$$\text{Из } \triangle ABC \quad AC^2 = x^2 + y^2, \quad AC = 14\sqrt{2}.$$

$$\text{Но } AC = 2R, \text{ тогда } 2R = 14\sqrt{2}, \quad R = 7\sqrt{2}.$$

Таким образом, прямоугольник будет иметь наибольшую площадь, если радиус круга будет равен  $7\sqrt{2}$  см.

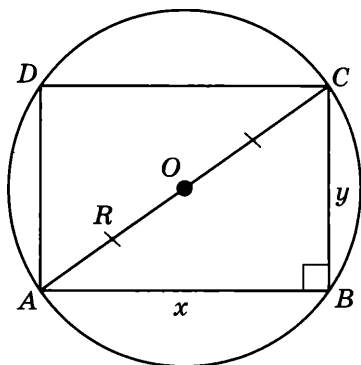
Ответ:  $7\sqrt{2}$  см.

#### 51 | Решение.

Пусть  $x$  — радиус основания цилиндра,  $y$  — высота цилиндра,  $S$  — заданная площадь полной поверхности, тогда  $S = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$ ,

$$\text{где } S_{\text{бок.}} = 2\pi xy, S_{\text{осн.}} = \pi x^2, \text{ тогда } 2\pi xy + 2\pi x^2 = S, \text{ откуда } y = \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x}.$$

$$\text{Следовательно, } V = \pi x^2 y = \pi x^2 \cdot \frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x} = \frac{1}{2}(Sx - 2\pi x^3).$$



Итак,  $V = V(x) = \frac{1}{2}(Sx - 2\pi x^3)$ .

По смыслу задачи  $x > 0$ ,  $y > 0$ , т. е.  $S - 2\pi x^2 > 0$ ,  $x^2 < \frac{S}{2\pi}$ ,

т. е.  $x \in \left(0; \sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right)$ .

Нам надо найти наибольшее значение функции  $V(x)$  на промежутке  $\left(0; \sqrt{\frac{S}{2\pi}}\right)$ .

$$V'(x) = \frac{1}{2}(Sx - 2\pi x^3)' = \frac{1}{2}(S - 6\pi x^2); \quad V'(x) = 0, \text{ или } S - 6\pi x^2 = 0,$$

$$x^2 = \frac{S}{6\pi}, \quad x > 0, \text{ тогда } x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}.$$

Так как  $V'(x) > 0$  при  $0 < x < \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$  и  $V'(x) < 0$  при  $\sqrt{\frac{S}{6\pi}} < x < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ ,

то наибольшее значение функции  $V(x)$  достигается в точке  $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ .

При этом отношение радиуса основания к высоте будет равно

$$\frac{x}{y} = \frac{x}{\frac{S - 2\pi x^2}{2\pi x}} = \frac{2\pi x^2}{S - 2\pi x^2} = \frac{2\pi \cdot \frac{S}{6\pi}}{S - 2\pi \cdot \frac{S}{6\pi}} = \frac{S/3}{S - S/3} = \frac{S}{3S - S} = \frac{S}{2S} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 1 : 2.

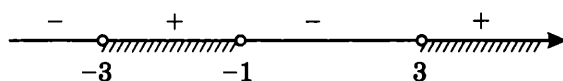
## 52 | Решение.

Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 3}{x + 3} > 2, \\ \frac{x^2 + 3}{x + 3} > 0, \end{cases}$$

откуда  $\frac{x^2 + 3}{x + 3} > 2$ , или  $\frac{x^2 + 3}{x + 3} - 2 > 0$ ,  $\frac{x^2 + 3 - 2x - 6}{x + 3} > 0$ ,  $\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 3} > 0$ .

Корни квадратного трехчлена  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -1$ . Решим полученное неравенство методом интервалов:



$$-3 < x < -1, x > 3.$$

Ответ:  $(-3; -1) \cup (3; +\infty)$ .

### 53 | Решение.

Так как  $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$  и  $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ , то уравнение примет вид  $\sin x + \cos x = (\sin 2x + \cos x)^2$ ,

откуда имеем две возможности:

1)  $\sin x + \cos x = 0$  — однородное уравнение I степени. Так как  $\cos x \neq 0$ , то, разделив обе части полученного уравнения на  $\cos x \neq 0$ ,

получим  $\operatorname{tg} x + 1 = 0$ ,  $\operatorname{tg} x = -1$ ,  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

2)  $\sin x + \cos x = 1$ , или  $\sin x = 1 - \cos x$ ,

$$2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2\sin^2 \frac{x}{2}, \quad \sin \frac{x}{2} \left( \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) = 0, \text{ откуда}$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0, \quad \frac{x}{2} = \pi n, \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \text{ или } \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} = 0, \quad 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0,$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

### 67 | Решение.

Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны, то их соответствующие координаты пропорциональны, т. е.  $\frac{4}{y} = \frac{3}{15} = \frac{-x}{30}$ , или  $\frac{4}{y} = \frac{3}{15}$ , откуда

$$y = \frac{4 \cdot 15}{3} = 20 \text{ и } \frac{3}{15} = \frac{-x}{30}, \text{ откуда } x = -6.$$

Тогда  $x + y = -6 + 20 = 14$ .

Ответ: 14.

### 69 | Решение.

Используя формулу  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$  понижения степени, имеем

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} = 1, \text{ или } 1 - \cos 2x + 1 - \cos 4x = 2, \text{ или}$$

$$\cos 4x + \cos 2x = 0.$$

$$2 \cos \frac{4x+2x}{2} \cos \frac{4x-2x}{2} = 0, \cos 3x \cos x = 0, \text{ откуда имеем:}$$

$$\text{а) } \cos 3x = 0, 3x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } \cos x = 0, x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что все корни уравнения  $\cos x = 0$  содержатся среди корней уравнения  $\cos 3x = 0$ , поэтому в ответ запишем лишь корни уравнения а).

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

### 75 | Решение.

Область определения:  $x > 0$ .

Прологарифмировав обе части каждого из уравнений системы по основанию 2, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x^{y-2} = \log_2 4, & \begin{cases} (y-2)\log_2 x = 2, \\ (2y-3)\log_2 x = 6. \end{cases} \\ \log_2 x^{2y-3} = \log_2 64; \end{cases}$$

Разделив первое уравнение полученной системы на второе, получим  $\frac{y-2}{2y-3} = \frac{1}{3}$ , или  $3y - 6 = 2y - 3$ , откуда  $y = 3$ .

Подставив значение  $y = 3$  в одно из уравнений последней системы, например в первое, получим  $(3 - 2)\log_2 x = 2$ ,

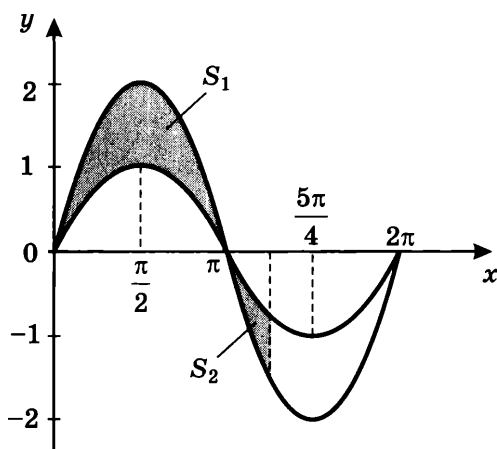
$$\log_2 x = 2, x = 4.$$

Ответ: (4; 3).

### 76 | Решение.

Искомая площадь  $S$  равна сумме  $S_1$  и  $S_2$  двух фигур, первая из которых ограничена линиями  $y = \sin x$ ,  $y = 2 \sin x$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pi$ , а вторая — линиями  $y = \sin x$ ,  $y = 2 \sin x$ ,  $x = \pi$  и  $x = \frac{5\pi}{4}$ .





$$S_1 = \int_0^{\pi} (2\sin x - \sin x) dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = 2,$$

$$S_2 = \int_{\pi}^{5\pi/4} (\sin x - 2\sin x) dx = - \int_{\pi}^{5\pi/4} \sin x dx = \cos x \Big|_{\pi}^{5\pi/4} =$$

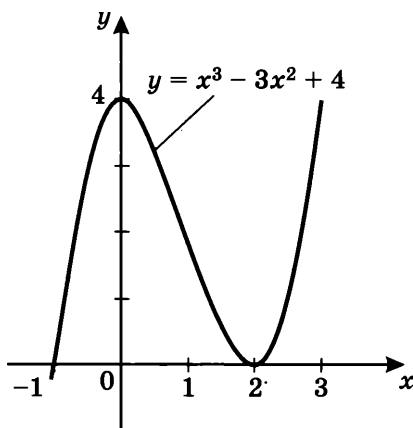
$$= \cos \frac{5\pi}{4} - \cos \pi = \cos \left( \pi + \frac{\pi}{4} \right) + 1 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } S = S_1 + S_2 = 2 + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(6 - \sqrt{2}) \text{ (кв. ед.)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{1}{2}(6 - \sqrt{2}).$$

## 77 | Решение.

1. Найдем область определения функции:  $D(y) = R$ , так как  $y$  — многочлен.



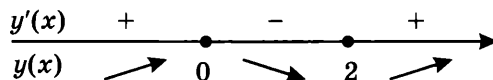
2. Найдем производную:

$$y'(x) = (x^3 - 3x^2 + 4)' = 3x^2 - 6x.$$

3. Решая уравнение  $3x^2 - 6x = 0$ , находим стационарные точки:

$$3x(x - 2) = 0, \text{ откуда } x = 0 \text{ и } x = 2.$$

4. Найдем промежутки монотонности функции:



при  $x < 0$   $y'(x) > 0$ , значит, на промежутке  $(-\infty; 0]$  функция возрастает;

при  $0 < x < 2$   $y'(x) < 0$ , значит, на промежутке  $[0; 2]$  функция убывает;

при  $x > 2$   $y'(x) > 0$ , значит, на промежутке  $[2; +\infty)$  функция возрастает.

5. Найдем точки экстремума и значения функции в этих точках.

Стационарная точка  $x = 0$  является точкой максимума, так как при переходе через эту точку производная меняет знак с «+» на «-»;  $y(0) = 4$ . Точка  $x = 2$  — точка минимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «-» на «+»;  $y(2) = 0$ .

6. Найдем точки пересечения графика данной функции с осями координат:

а) пересечение с осью  $Ox$ :

$$y = 0, x^3 - 3x^2 + 4 = 0, x^2(x - 2) - (x^2 - 4) = 0, (x - 2)(x^2 - x - 2) = 0, (x - 2)(x - 2)(x + 1) = 0, \text{ откуда получим две точки: } (2; 0) \text{ и } (-1; 0);$$

б) пересечение с осью  $Oy$ :

$$x = 0, y = 4, \text{ т. е. } (0; 4).$$

7. Дополнительные точки:

$$\text{при } x = 1, y = 2,$$

$$\text{при } x = 3, y = 4.$$

8. На основании данных исследований строим график.

## 78 | Решение.

Условие этой задачи заимствовано из книги *Е. А. Островского* и др. «Задачи по математике на вступительных экзаменах в вузах» (изд. 2-е. — Минск: Высшая школа, 1993. № 271. С. 94).

Приведем другие, более простые способы решения.

## I способ

Из точки  $D$  опустим перпендикуляр  $DE$  на катет  $AC = b$ . Тогда  $\angle CDE = 45^\circ$ , т. е.  $CE = DE = m$ . Из  $\triangle CED$   $CD = m\sqrt{2}$ .

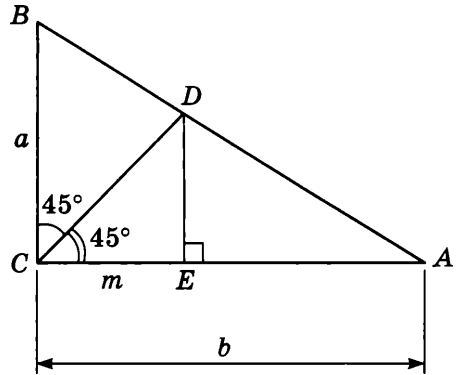
Заметим, что  $\triangle AED \sim \triangle ACB$  (как прямоугольные с общим углом  $A$ ).

$$\text{Тогда } \frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}, \text{ или } \frac{m}{b-m} = \frac{a}{b},$$

$$\text{откуда } m = \frac{ab}{a+b}.$$

$$\text{Значит, } CD = m\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}.$$



## II способ

Пусть  $BD = x > 0$ ,  $AD = y > 0$ . По свойству биссектрисы треугольника

$$\text{имеем } \frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$$

С другой стороны, из  $\triangle ACB$  имеем  $(x+y)^2 = a^2 + b^2$ .

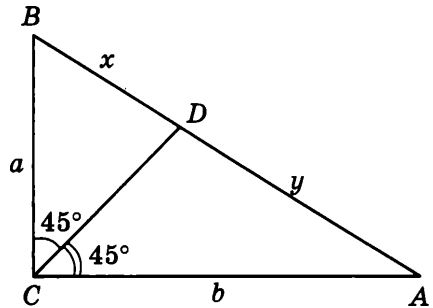
Полученные уравнения образуют систему

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{a}{b}, \\ (x+y)^2 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

$$y = \frac{b}{a}x, \text{ тогда второе уравнение примет вид } \left(x + \frac{b}{a}x\right)^2 = a^2 + b^2,$$

$$\text{откуда } x^2 = \frac{(a^2 + b^2)a^2}{(a+b)^2}.$$

(1)



Из  $\triangle BCD$  по теореме косинусов имеем  $x^2 = a^2 + CD^2 - 2a \cdot CD \cdot \cos 45^\circ$ ,  
или, учитывая (1), получим  $\frac{(a^2 + b^2)a^2}{(a+b)^2} = a^2 + CD^2 - \sqrt{2}a \cdot CD$ , или

$$CD^2 - \sqrt{2}a \cdot CD + \frac{2a^3b}{(a+b)^2} = 0 \text{ — квадратное уравнение относительно } CD.$$

$$\text{Решая уравнение, находим } CD = \frac{\sqrt{2}(a+b) \pm \sqrt{2}(a-b)}{2(a+b)}.$$

$$\text{Если } a > b, \text{ то } CD = \frac{\sqrt{2}a(a+b+a-b)}{2(a+b)} = \frac{\sqrt{2}a^2}{a+b}.$$

$$\text{Если } a < b \text{ (как в нашем случае), то } CD = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2}a^2}{a+b}, \text{ если } a > b; \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}, \text{ если } a < b.$$

### III способ

(рис. см. II способ)

Пусть  $\angle A = \alpha$ , тогда из  $\triangle BCD$  по теореме синусов имеем

$$\frac{CD}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{x}{\sin 45^\circ}, \text{ или } \frac{CD}{\cos \alpha} = \sqrt{2}x. \quad (2)$$

Кроме того,  $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$ . Из  $\triangle ACB$  имеем  $(x+y)^2 = a^2 + b^2$ , откуда

$$(x+y) = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{b}{a}x, \text{ тогда } x + \frac{b}{a}x = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ откуда}$$

$$x = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{a+b}.$$

$$\text{Учитывая (1), получим } \frac{CD}{\cos \alpha} = \frac{a\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{a+b}, \quad CD = \frac{a\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{a+b} \cos \alpha.$$

$$\text{Но } \cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{x+y} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ значит, } CD = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}.$$

**83 | Решение.**

$$\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -(\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha) =$$

$$= -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = -1 \cdot \cos 2\alpha = -\cos 2\alpha.$$

Далее находим  $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha / 2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha / 2} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5}$ , тогда

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = \frac{18}{25} - 1 = -\frac{7}{25}.$$

Значит,  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = -\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$ .

Ответ: 7/25.

**85 | Решение.**

Пусть товар снижался каждый раз в цене на  $x$  %, тогда после первого снижения стоимость товара стала  $(100 - x)$  руб. При втором снижении цена товара уменьшилась на  $x \cdot (100 - x) : 100$  руб. и стала равной  $100 - x - (100x - x^2) : 100$  руб. Так как после второго снижения товар стоил 64 руб. (по условию), то получим уравнение

$$100 - x - (100x - x^2) : 100 = 64, \text{ или}$$

$$10\,000 - 100x - 100x + x^2 = 6400, x^2 - 200x + 3600 = 0,$$

откуда находим  $x_1 = 20$ ,  $x_2 = 180$  (не подходит, так как цену товара нельзя снижать больше чем на 100 %).

Ответ: снижение цен происходило каждый раз на 20 %.

**91 | Решение.**

Обозначим через  $x$  км/ч скорость пешехода. Тогда расстояние 12 км из пункта  $A$  в пункт  $B$  пешеход пройдет за  $\frac{12}{x}$  ч, а велосипедист это же расстояние из  $A$  в  $B$  на 1 ч 36 мин = 1,6 ч быстрее, т. е. за

$$\left(\frac{12}{x} - 1,6\right) \text{ ч со скоростью } 12 : \left(\frac{12}{x} - 1,6\right) = \frac{12x}{12 - 1,6x} = \frac{3x}{3 - 0,4x} \text{ (км/ч)}.$$

Велосипедист и пешеход, двигаясь навстречу друг другу, расстояние 12 км прошли за 20 мин =  $\frac{1}{3}$  ч.

Составим уравнение  $\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{3x}{3 - 0,4x} = 12$ , или

$$0,4x^2 - 20,4x + 108 = 0, x^2 - 51x + 270 = 0, \text{ откуда } x_1 = 6, x_2 = 45.$$

Значение  $x = 45$  невозможно, так как  $x$  — скорость пешехода.

Ответ: 6 км/ч.

### 103 | Решение.

Пусть в  $\triangle ACB$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 12$  см,  $BC = 5$  см,  $AB$  — ось вращения.

При вращении  $\triangle ACB$  вокруг гипотенузы  $AB$  получим два конуса с общим основанием. Площадь поверхности тела вращения будет равна сумме площадей боковых поверхностей конусов  $ACC_1$  и  $BCC_1$ .

$S_{\text{бок.}} = \pi r l$ , где  $r = OC$  — радиус основания.

Из  $\triangle ACB$  найдем гипотенузу

$$AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = \sqrt{144 + 25} = 13 \text{ (см)}.$$

Тогда  $S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} AC \cdot CB = \frac{1}{2} AB \cdot CO$ , откуда

$$CO = r = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{12 \cdot 5}{13} = \frac{60}{13} \text{ (см)}.$$

Теперь находим площадь поверхности тела вращения:

$$\begin{aligned} S_{\text{т.в.}} &= S_{ACC_1} + S_{BCC_1} = \pi \cdot OC \cdot AC + \pi \cdot OC \cdot BC = \pi \cdot OC \cdot (AC + BC) = \\ &= \pi \cdot \frac{60}{13} \cdot 17 = \frac{1020}{13} \pi = 78 \frac{6}{13} \pi \text{ (см}^2\text{)}. \end{aligned}$$

Ответ:  $78 \frac{6}{13} \pi$  (см<sup>2</sup>).

### 104 | Решение.

$$3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162.$$

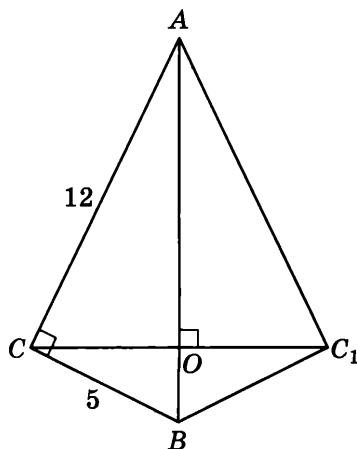
Запишем уравнение в виде  $(3^{\log_3 x})^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162$ , где  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ .

Далее имеем  $x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 162$ ,  $2x^{\log_3 x} = 162$ , или  $x^{\log_3 x} = 81$ .

Прологарифмировав обе части полученного уравнения по основанию 3, получим  $\log_3 x \cdot \log_3 x = \log_3 81$ , или  $(\log_3 x)^2 = 4$ ,  $\log_3 x = \pm 2$ , тогда  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = 1/9$ .

Оба корня удовлетворяют условиям  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ .

Ответ:  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = 1/9$ .



**105 | Решение.****I способ**

Пусть  $b_1, b_2, b_3$  — искомые числа, образующие возрастающую геометрическую прогрессию. Согласно условию имеем систему

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 26, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \frac{b_1(1-q^3)}{1-q} = 26, \\ \frac{b_1^2(1-q^6)}{1-q^2} = 364. \end{cases} \quad (1)$$

Разделим почленно второе уравнение полученной системы на первое:

$$\frac{b_1(1+q^3)}{1+q} = 14.$$

А теперь разделим первое уравнение системы на полученное:

$$\frac{(1-q^3)(1+q)}{(1+q^3)(1-q)} = \frac{13}{7}, \text{ или } \frac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \frac{13}{7}, \text{ или}$$

$$7 + 7q + 7q^2 = 13 - 13q + 13q^2, \quad 6q^2 - 20q + 6 = 0, \text{ или}$$

$$3q^2 - 10q + 3 = 0, \text{ откуда находим } q_1 = 3, \quad q_2 = \frac{1}{3}.$$

Из первого уравнения системы (1) имеем

$$b_1 = \frac{26(1-q)}{1-q^3}, \text{ тогда } (b_1)_1 = \frac{26(1-3)}{1-27} = 2,$$

$$(b_1)_2 = \frac{26\left(1-\frac{1}{3}\right)}{1-\frac{1}{27}} = \frac{26 \cdot 2/3}{26/27} = 18.$$

Так как прогрессия возрастающая, то  $b_1 = 2, q = 3$ , тогда  $b_2 = b_1q = 6; b_3 = b_2q = 18$ .

**Ответ:**  $b_1 = 2, b_2 = 6, b_3 = 18$ .

**II способ**

**Решение.**

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 26, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 26, \\ b_1^2(1+q^2+q^4) = 364; \end{cases} \quad \begin{cases} b_1^2(1+q+q^2) = 676, \\ b_1^2(1+q^2+q^4) = 364. \end{cases}$$

Разделим почленно первое уравнение на второе:

$$\frac{1+q+q^2}{1+q^2+q^4} = \frac{13}{7}. \quad (2)$$

Заметим, что  $1 + q^2 + q^4 = (1 + q^2)2 - q^2 = (1 + q^2 + q)(1 + q^2 - q)$ .

Тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{1+q+q^2}{1+q^2-q} = \frac{13}{7}, \text{ или } 6q^2 - 20q + 6 = 0, \text{ или } 3q^2 - 10q + 3 = 0,$$

откуда находим  $q_1 = 3, q_2 = \frac{1}{3}$ .

Поскольку прогрессия возрастающая (по условию), то  $q = 3$ , тогда

$$b_1 = \frac{26}{1+q+q^2} = 2, b_2 = b_1q = 6, b_3 = b_2q = 18.$$

Ответ:  $b_1 = 2, b_2 = 6, b_3 = 18$ .

### III способ

Решение.

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 26, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases} \quad \begin{cases} (b_1 + b_2 + b_3)^2 = 676, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364; \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) = 676, \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 364. \end{cases}$$

$$364 + 2(b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3) = 676, \text{ или } b_1b_2 + b_1b_3 + b_2b_3 = 156.$$

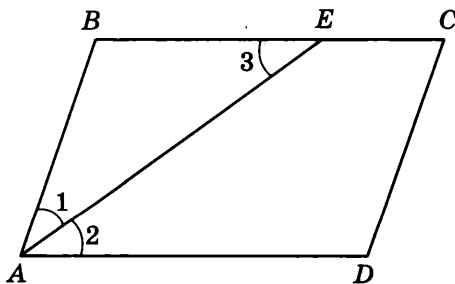
Но  $b_2^2 = b_1b_3$ , тогда  $b_1b_2 + b_2^2 + b_2b_3 = 156$ , или  $b_2(b_1 + b_2 + b_3) = 156$ .

Так как  $b_1 + b_2 + b_3 = 26$ , то  $b_2 = 156 : 26 = 6$  и т. д.

Ответ:  $b_1 = 2, b_2 = 6, b_3 = 18$ .

### 109 | Решение.

Так как по условию  $AE$  — биссектриса  $\angle A$ , то  $\angle 1 = \angle 2$ . Так как  $AD = BC$  (по свойству параллелограмма) и  $AD \parallel BC$ , то  $\angle 2 = \angle 3$  как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых и секущей  $AE$ . Тогда  $\angle 1 = \angle 3$ . Значит,  $\triangle ABE$  — равнобедренный (если в



треугольнике два угла равны, то он равнобедренный). По условию задачи  $BE = 12$  см, значит,  $AB = 12$  см.

Следовательно,  $BC = BE + EC = 12 + 9 = 21$  (см).

Если  $P$  — периметр  $ABCD$ , то  $P = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (12 + 21) = 66$  (см).

Ответ: 66 см.



**110 | Решение.**

Приведем логарифмы к основанию 2:

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 4} \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 5} \cdot \frac{\log_2 5}{\log_2 6} \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 7} \cdot \frac{\log_2 7}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2}{\log_2 8} = \frac{1}{3}.$$

Ответ:  $1/3$ .

*Замечание.* Известно, что  $\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$ . (1)

Если поставить в соответствие логарифму  $\log_a b$  дробь  $\frac{b}{a}$  и то же сделать для других логарифмов, то равенству (1) можно поставить в соответствие равенство  $\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ , которое означает обычное сокращение на  $a$ .

В нашем случае имеем после сокращений дробь  $\frac{2}{8}$ , которой соответствует  $\log_8 2 = \frac{1}{3}$ . (См. Шарыгин И. Ф. Математика для поступающих в вузы. М.: Дрофа, 1997. С. 139–140.)

**111 | Решение.**

Для того чтобы прямая  $y = ax - 5$  касалась кривой  $y = 3x^2 - 4x - 2$  в точке с абсциссой  $x_0$ , необходимо и достаточно, чтобы значения обеих функций при  $x = x_0$  совпадали и значение  $a$  (угловой коэффициент прямой) было равно значению производной функции  $y = 3x^2 - 4x - 2$  при  $x = x_0$ . Производная  $y' = 6x - 4$ , значит, искомые значения  $a$  должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} ax_0 - 5 = 3x_0^2 - 4x_0 - 2, \\ a = 6x_0 - 4, \end{cases} \quad \text{откуда, решая систему подстановкой, имеем}$$

$$(6x_0 - 4)x_0 - 5 = 3x_0^2 - 4x_0 - 2, \text{ или } 6x_0^2 - 4x_0 - 5 = 3x_0^2 - 4x_0 - 2, \quad 3x_0^2 = 3,$$

$$(x_0)_1 = 1, (x_0)_2 = -1.$$

$$\text{Тогда } a_1 = 6 \cdot 1 - 4 = 2, a_2 = 6 \cdot (-1) - 4 = -10.$$

Ответ: при  $a = 2$ ,  $a = -10$ .

**115 | Решение.**

Заметим, что из каждой вершины призмы, например из вершины  $D_1$ , можно провести три диагонали:  $D_1A$ ,  $D_1F$  и  $D_1B$ . Они проецируются на плоскость основания  $ABCDEF$  диагоналями основания  $AD$ ,  $FD$  и  $BD$ .

Из приведенных трех наклонных  $D_1A$ ,  $D_1F$  и  $D_1B$  та больше, у которой проекция больше.

Следовательно, наибольшая наклонная будет  $AD_1$ .

Так как призма правильная, то  $DD_1 \perp (ABCDEF) \Rightarrow DD_1 \perp AD$ . Из  $\triangle ADD_1$ , где  $AD_1 = m$  и  $\angle AD_1D = \alpha$ , находим  $D_1D = H = m \cos \alpha$  и  $AD = m \sin \alpha$ . Так как диагонали основания  $AD$ ,  $BD$  и  $CE$  делят правильный шестиугольник на 6 правильных треугольников, то

$$S_{\triangle AOB} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}, \text{ где } a = AB = AO =$$

$$= BO, \text{ тогда } S_{\text{осн.}} = 6 \cdot \frac{(AO)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2} \sqrt{3} \cdot \left( \frac{AD}{2} \right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{8} m^2 \sin^2 \alpha.$$

$$\text{Следовательно, } V = S_{\text{осн.}} \cdot H, \text{ или } V = \frac{3\sqrt{3}}{8} m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \text{ (куб. ед.).}$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\sqrt{3}}{8} m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha \text{ (куб. ед.).}$$

**122 | Решение.**

$$\operatorname{tg} \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{1 + \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$\text{По условию } \operatorname{tg} \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{3}{4}, \text{ тогда получим } \frac{\operatorname{tg} \alpha - 1}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \frac{3}{4}, \text{ или}$$

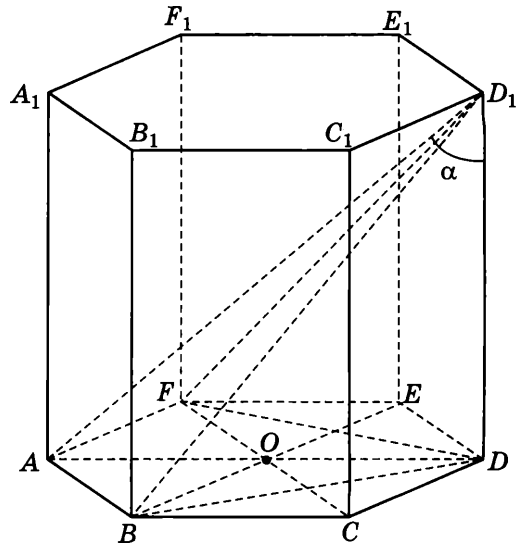
$$4 \operatorname{tg} \alpha - 4 = 3 + 3 \operatorname{tg} \alpha, \operatorname{tg} \alpha \neq -1.$$

$$4 \operatorname{tg} \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha = 3 + 4, \operatorname{tg} \alpha = 7.$$

Ответ: 7.

**125 | Решение.**

$$\text{По условию } a_8 = 2, a_{11} = 11, \text{ тогда } \begin{cases} a_1 + 7d = 2, \\ a_1 + 10d = 11. \end{cases}$$



Вычитая из второго уравнения первое, получим  $10d - 7d = 9$ ,  $3d = 9$ ,  $d = 3$ , тогда  $a_1 = 2 - 7 \cdot 3 = -19$ .

Следовательно,  $S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$ , или  $\frac{-38 + (n-1)3}{2} \cdot n = 30$ ,

$$(-38 + (n-1)3) \cdot n = 60, (-38 + 3n - 3) \cdot n = 60,$$

$$(3n - 41) \cdot n = 60, 3n^2 - 41n - 60 = 0,$$

$$D = 41^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-60) = 1681 + 720 = 2401 = 49^2 > 0,$$

$$n = \frac{41 \pm 49}{6}, n_1 = \frac{90}{6} = 15, n_2 = -\frac{4}{3} \text{ (не подходит, так как } n \in \mathbb{N}\text{)}.$$

Ответ: 15.

## 126 | Решение.

Упростим числитель дроби:

$$\sqrt[3]{9^2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 3^{\frac{4}{3}} \cdot 3^{-6} = 3^{\frac{4}{3}-6}.$$

Упростим знаменатель дроби:

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^{-1} \cdot 27^{-2/3} = 3^{-1/3} \cdot (3^3)^{-2/3} = 3^{-1/3} \cdot 3^{-2} = 3^{-\frac{1}{3}-2}.$$

$$\text{Следовательно, получим } \frac{3^{\frac{4}{3}-6}}{3^{-\frac{1}{3}-2}} = \frac{x}{3 \cdot 3^{4/3}},$$

$$\text{или } 3^{\frac{4}{3}-6+\frac{1}{3}+2} = \frac{x}{3^{1+\frac{4}{3}}},$$

$$\text{откуда } x = 3^{\frac{4}{3}-6+\frac{1}{3}+2+1+\frac{4}{3}}, x = 3^{3-6+3}, x = 3^0 = 1.$$

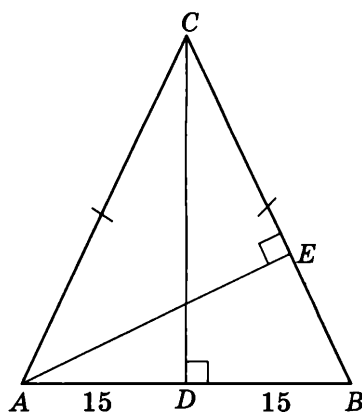
Ответ:  $x = 1$ .

## 133 | Решение.

I способ

Пусть  $AC = BC = x$ , тогда  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} BC \cdot AE$ , или

$$AB \cdot CD = BC \cdot AE, 30 \cdot CD = x \cdot 24, \text{ или } 5 \cdot CD = 4x, CD = \frac{4}{5}x.$$



Из  $\triangle ADC$   $CD^2 = x^2 - 15^2$ , или  $\left(\frac{4}{5}x\right)^2 = x^2 - 15^2$ ,

$$x^2 - \frac{16}{25}x^2 = 15^2, \quad \frac{9}{25}x^2 = 15^2, \quad \frac{3}{5}x = 15 \quad (x > 0), \text{ откуда } x = 25.$$

Следовательно,  $AC = BC = 25$ .

Ответ: 25.

II способ  
(рис. тот же)

Пусть  $\angle B = \angle A = \alpha$ , тогда из  $\triangle AEB$   $\sin \alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$ ;

из  $\triangle CDB$   $\cos \alpha = \frac{DB}{CB} = \frac{15}{x}$ , откуда  $x = \frac{15}{\cos \alpha}$ .

Так как  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , то  $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$  ( $\cos \alpha > 0$ ),

тогда  $x = \frac{15}{3/5} = \frac{15 \cdot 5}{3} = 25$ .

Ответ: 25.

**135 | Решение.**

$$\begin{aligned} 81 \cos^2 \left( 6\alpha - \frac{3\pi}{2} \right) &= 81 \cos^2 \left( \frac{3\pi}{2} - 6\alpha \right) = 81 \sin^2 6\alpha = 81 (\sin 6\alpha)^2 = \\ &= 81 (2 \sin 3\alpha \cos 3\alpha)^2 = 81 \left( \frac{4}{3} \sin 3\alpha \right)^2 = 81 \cdot \frac{16}{9} \sin^2 3\alpha = 9 \cdot 16 \cdot (1 - \cos^2 3\alpha) = \\ &= 9 \cdot 16 \cdot \left( 1 - \frac{4}{9} \right) = 9 \cdot 16 \cdot \frac{5}{9} = 16 \cdot 5 = 80. \end{aligned}$$

Ответ: 80.

**137 | Решение.**

Так как  $\sin(90^\circ + 2x) = \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$ , то данное уравнение примет вид  $1 - 2 \sin^2 x + \sin x = 0$ , или  $2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ .

Заменой  $\sin x = t$  сводится к квадратному  $2t^2 - t - 1 = 0$ ,

$$D = 1 + 8 = 3^2 > 0, \quad t_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4}, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = -\frac{1}{2}.$$

Имеем две возможности:

1)  $\sin x = 1$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

По условию  $0^\circ < x < 270^\circ$ , тогда  $0^\circ < 90^\circ + 360^\circ n < 270^\circ$ ,  
или  $-90^\circ < 360^\circ n < 180^\circ$ ,  $-\frac{1}{4} < n < \frac{1}{2}$ , откуда  $n = 0$ , тогда  $x = 90^\circ$ .

$$2) \sin x = -\frac{1}{2}, \quad x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При  $n = 0$ ,  $x = -30^\circ \notin (0^\circ; 270^\circ)$ ;

при  $n = 1$ ,  $x = \frac{\pi}{6} + \pi = 210^\circ \in (0^\circ; 270^\circ)$ .

При других значениях  $n$  нет корней на заданном промежутке.  
Итак, данное уравнение имеет на заданном промежутке 2 корня.

Ответ:  $90^\circ$ ;  $120^\circ$ .

### 145 | Решение.

Пусть  $l$ ,  $r$  и  $H$  — соответственно образующая, радиус основания и высота конуса.

По условию задачи  $S_{\text{бок.к.}} = 3S_{\text{осн.}}$ , или  $\pi r l = 3\pi r^2$ ,  $l = 3r$ .

Кроме того,  $l^2 = r^2 + H^2$ , или  $9r^2 = r^2 + H^2$ ,  $8r^2 = H^2$ ,

$$r^2 = \frac{H^2}{8}.$$

Из условия задачи следует, что  $V_{\text{ш.}} = V_{\text{к.}}$ ,

т. е.  $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 H$ , или  $4R^3 = r^2 H$ , где  $R$  — радиус шара.

Так как  $r^2 = \frac{H^2}{8}$ , то  $4R^3 = \frac{H^2}{8} \cdot H$ , или  $H^3 = 32R^3$ , где  $R = \sqrt[3]{2}$ .

Тогда  $H^3 = 32 \cdot (\sqrt[3]{2})^3 = 32 \cdot 2 = 64$ , откуда  $H = 4$ .

Ответ: 4.

### 147 | Решение.

ОДЗ:  $x > 0$ .

Запишем уравнение в виде

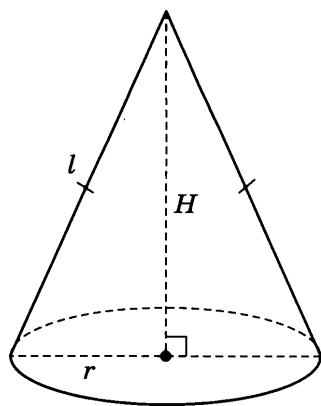
$$(\lg 100 + \lg x)^2 + (\lg 10 + \lg x)^2 = 14 + \lg x^{-1}, \text{ или}$$

$$(2 + \lg x)^2 + (1 + \lg x)^2 = 14 - \lg x,$$

$$4 + 4 \lg x + \lg^2 x + 1 + 2 \lg x + \lg^2 x - 14 + \lg x = 0,$$

$$2 \lg^2 x + 7 \lg x - 9 = 0,$$

$$D = 49 + 72 = 11^2 > 0,$$



$$(\lg x)_{1,2} = \frac{-7 \pm 11}{4}, \lg x = 1, x_1 = 10;$$

$$\lg x = -\frac{9}{2}, x_2 = 10^{-\frac{9}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10^9}}.$$

Следовательно,  $x = 10$  — больший корень уравнения.

Ответ:  $x = 10$ .

### 160 | Решение.

Вычислим значение  $B$ :

$$B = 2 \log_{25} 8 + \log_{1/5} 5 = 2 \log_{5^2} 8 + \log_{5^{-1}} 5 = 2 \cdot \frac{1}{2} \log_5 8 - \log_5 5 =$$

$$= \log_5 8 - \log_5 5 = \log_5 8 - 1, \text{ тогда}$$

$$A = 5^{\log_5 8 - 1} = 5^{\log_5 8} \cdot 5^{-1} = 8 \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{5} = 1,6.$$

Ответ: 1,6.

### 161 | Решение.

Запишем уравнение в виде  $\sqrt[3]{x^4} - 8\sqrt[3]{x^2} + 16 = 0$ , или

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2 - 8\sqrt[3]{x^2} + 16 = 0, \text{ где } x > 0.$$

Левая часть полученного уравнения — квадрат разности, т. е. имеем

$$\left(\sqrt[3]{x^2} - 4\right)^2 = 0, \sqrt[3]{x^2} - 4 = 0, \sqrt[3]{x^2} = 4, x^2 = 4^3, x = 8 \text{ (так как } x > 0 \text{ по условию).}$$

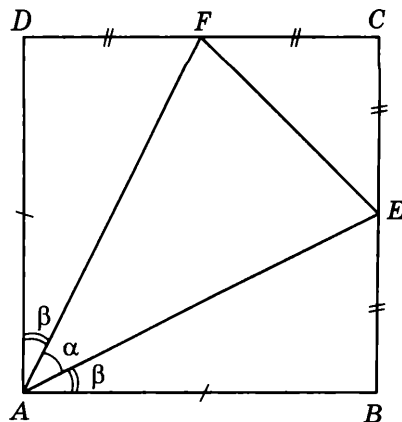
Ответ:  $x = 8$ .

### 162 | Решение.

I способ

Пусть в квадрате  $ABCD$  точка  $E$  — середина  $BC$ ,  $F$  — середина  $CD$ ,  $\angle EAF = \alpha$ . Так как  $F$  и  $E$  — середины сторон квадрата, то  $\triangle ADF = \triangle ABE$  (по двум катетам).

Тогда  $\angle DAF = \angle BAE = \beta$ ,  
 $\angle DAB = 2\beta + \alpha = 90^\circ$ , откуда  
 $\alpha = 90^\circ - 2\beta$ . Тогда  $\operatorname{tg} \alpha =$   
 $= \operatorname{tg} (90^\circ - 2\beta) = \operatorname{ctg} 2\beta$ .



Из  $\triangle ADF$  находим  $\operatorname{ctg} \beta = \frac{AD}{DF} = 2$ .

Но  $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$ , тогда  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} 2\beta = \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta - 1}{2 \operatorname{ctg} \beta} = \frac{4 - 1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$ .

Итак,  $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$ .

Ответ: 0,75.

### II способ

Пусть  $AB = 2x$ , тогда  $FC = EC = x$ .

Из  $\triangle FCE$   $FE^2 = x^2 + x^2$ ,  $FE^2 = 2x^2$ .

Из  $\triangle ABE$   $AE^2 = (2x)^2 + x^2$ ,  $AE^2 = 5x^2$ .

$$AE = AF = x\sqrt{5}.$$

Из  $\triangle AFE$  по теореме косинусов имеем

$$FE^2 = AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cos \alpha, \text{ или } 2x^2 = 5x^2 + 5x^2 - 2 \cdot 5x^2 \cos \alpha,$$

$$10x^2 \cos \alpha = 8x^2, x > 0, \cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Известно, что } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ или } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{25}{16}, \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{9}{16},$$

откуда  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75$ , где  $0 < \alpha < 90^\circ$ .

Ответ: 0,75.

### III способ

$$S_{\triangle AFE} = S_{ABCD} - 2S_{\triangle ABE} - S_{\triangle FCE}, \text{ или}$$

$$\frac{1}{2} AF \cdot AE \sin \alpha = AB^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BE - \frac{1}{2} CE \cdot CF,$$

$$\frac{1}{2} 5x^2 \sin \alpha = 4x^2 - 2x^2 - \frac{1}{2} x^2, \frac{1}{2} 5x^2 \sin \alpha = \frac{3}{2} x^2, \text{ откуда } \sin \alpha = \frac{3}{5},$$

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} \text{ и } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ и т. д. (см. II способ).}$$

## 169 | Решение.

Нетрудно заметить, что числитель дроби в правой части уравнения представляет собой разность кубов чисел  $\sqrt[3]{3}$  и  $\sqrt[3]{2}$ , т. е. имеем

$$(\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = 3 - 2 = 1, \text{ тогда уравнение запишется в виде}$$

$$\frac{x+5,5}{14} (4+\sqrt{2}) = \frac{1}{(2^3)^{2/3} - \sqrt{2}}, \text{ или } \frac{x+5,5}{14} (4+\sqrt{2}) = \frac{1}{4-\sqrt{2}}, \text{ или}$$

$$(x+5,5)(4+\sqrt{2})(4-\sqrt{2})=14, (x+5,5)(16-2)=14, x+5,5=1,$$

откуда  $x = 1 - 5,5 = -4,5$ . Тогда  $2x = -9$ .

Ответ:  $-9$ .

### 173 | Решение.

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

$$\text{Но } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}, \text{ значит, } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{По условию } \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=3, \text{ тогда получим } \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=3, \text{ или}$$

$$1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3-3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad 4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2, \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}.$$

$$\text{Известно, что } \sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \text{ значит, } \sin\alpha=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}}=\frac{1}{5/4}=\frac{4}{5}=0,8.$$

Ответ:  $0,8$ .

### 223 | Решение.

Пусть  $x$  км/ч — скорость течения реки, где  $x > 0$ , тогда  $(21+x)$  км/ч — скорость лодки по течению реки, а  $(21-x)$  — скорость лодки против течения реки.

$$\frac{60}{21+x} \text{ ч — время, затраченное по течению реки,}$$

$$\frac{60}{21-x} \text{ ч — против течения реки.}$$

$$\frac{60}{21-x} > \frac{60}{21+x};$$

$$50 \text{ мин} = \frac{50}{60} \text{ ч} = \frac{5}{6} \text{ ч.}$$



Согласно условию задачи имеем уравнение

$$\frac{60}{21-x} - \frac{60}{21+x} = \frac{5}{6}, \text{ или } \frac{12}{21-x} - \frac{12}{21+x} = \frac{1}{6}, \text{ где } 0 < x < 21.$$

$$12 \cdot \left( \frac{1}{21-x} - \frac{1}{21+x} \right) = \frac{1}{6}, \quad \frac{21+x-21+x}{441-x^2} = \frac{1}{72},$$

$2x \cdot 72 = 441 - x^2$ ,  $x^2 + 144x - 441 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -147$  (не подходит, так как  $0 < x < 21$ ).

Следовательно, скорость течения реки 3 км/ч.

Ответ: 3 км/ч.

## 224 | Решение.

$$\begin{cases} x+y=\frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y=\frac{\pi}{4}-x, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right) = 1. \end{cases}$$

Упростим второе уравнение системы:

$$\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \operatorname{tg} x} = 1, \text{ или } \operatorname{tg} x + \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 1,$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}^2 x + 1 - \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg} x, \operatorname{tg} x \neq -1.$$

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0, \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x - 1) = 0, \text{ откуда } \operatorname{tg} x = 0, \text{ или } \operatorname{tg} x = 1.$$

Если  $\operatorname{tg} x = 0$ ,  $x_1 = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; если  $\operatorname{tg} x = 1$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Так как  $y = \frac{\pi}{4} - x$ , то  $y_1 = \frac{\pi}{4} - \pi n$ ,  $y_2 = \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} + \pi n\right) = -\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\left(\pi n, \frac{\pi}{4} - \pi n\right)$ ,  $\left(\frac{\pi}{4} + \pi n, -\pi n\right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 226 | Решение.

$$f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad g(x) = -\frac{x}{2} - 2 \cos x.$$

$$f'(x) = \frac{1}{2} (\sin 2x)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos 2x = \cos 2x, \quad g'(x) = -\frac{1}{2} + 2 \sin x.$$

Согласно условию имеем уравнение  $f'(x) = g'(x)$ , или

$$\cos 2x = -\frac{1}{2} + 2 \sin x.$$

Но  $\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 4x$ , тогда

$$1 - 2 \sin^2 x = -\frac{1}{2} + 2 \sin x, \text{ или } 4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0.$$

Пусть  $\sin x = t$ , где  $|t| \leq 1$ , тогда  $4t^2 + 4t - 3 = 0$ ,  $(2t + 1)^2 = 4$ ,

$2t + 1 = \pm 2$ , откуда  $t_1 = \frac{1}{2}$ ,  $t_2 = -\frac{3}{2}$  (не подходит, так как  $|t| \leq 1$ ).

Если  $t = \frac{1}{2}$ , то  $\sin x = \frac{1}{2}$ ,  $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 227 | Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n}{4n+3} - \frac{5n^2}{7n^2+1} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n+3} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2}{7n^2+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n}{n}}{\frac{4n+3}{n}} - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{7n^2+1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4+\frac{3}{n}} - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{7+\frac{1}{n^2}} = \\ &= \frac{3}{4+\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n}} - 5 \cdot \frac{1}{7+\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \frac{3}{4+0} - \frac{5}{7+0} = \frac{3}{4} - \frac{5}{7} = \frac{21-20}{28} = \frac{1}{28}. \end{aligned}$$

Ответ:  $1/28$ .

## 229 | Решение.

Согласно условию  $a_9 = 4a_6$  и  $a_6 + a_9 = 20$ , тогда  $a_6 + 4a_6 = 20$ ,  $5a_6 = 20$ ,  $a_6 = 4$ , значит,  $a_9 = 4 \cdot 4 = 16$ .

Имеем систему  $\begin{cases} a_6 = 4, \\ a_9 = 16; \end{cases} \begin{cases} a_1 + 5d = 4, \\ a_1 + 8d = 16, \end{cases}$  откуда  $3d = 16 - 4$ ;  $3d = 12$ ,

$d = 4$ , тогда  $a_1 = 4 - 5 \cdot 4 = -16$ .

Так как по условию  $n = 9$ , то

$$S_9 = \frac{2a_1 + (9-1)d}{2} \cdot 9 = \frac{2 \cdot (-16) + 8 \cdot 4}{2} \cdot 9 = \frac{-32 + 32}{2} \cdot 9 = 0 \cdot 9 = 0.$$

Ответ: 0.

**237 | Решение.**

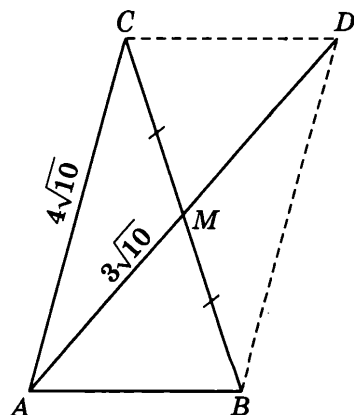
По условию задачи  $AC = BC = 4\sqrt{10}$ ,  
 $AM = 3\sqrt{10}$ , где  $AM$  — медиана.

Достроим  $\triangle ABC$  до параллелограмма  $ABCD$ , тогда по свойству параллелограмма имеем  $AD^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$ , или

$$(6\sqrt{10})^2 + (4\sqrt{10})^2 = 2(AB^2 + (4\sqrt{10})^2),$$

$$360 + 160 = 2(AB^2 + 160), AB^2 + 160 = 260, AB^2 = 100, AB = 10.$$

Ответ: 10.

**242 | Решение.**

По условию  $b_1 > 0$ ,  $b_2 > 0$ ,  $b_3 > 0$ .

Кроме того,  $b_2 = b_1 + 1$ , или  $b_1 q = b_1 + 1$ ,  $b_1(q - 1) = 1$ , откуда

$$b_1 = \frac{1}{q-1}. \text{ И так как } b_1 \text{ — целое, то это возможно, если } q - 1 = 1,$$

т. е. при  $q = 2$ . В этом случае  $b_1 = 1$  и  $b_3 = b_1 \cdot q^2 = 4$ .

Ответ: 4.

**280 | Решение.**

Эта система допускает различные способы решения.

**I способ**

Возведем в квадрат обе части второго уравнения системы, тогда получим

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^2 y^2 = 9. \end{cases} \quad (1)$$

Заметим, что  $x^2$  и  $y^2$  можно считать корнями квадратного уравнения вида  $t^2 - 10t + 9 = 0$ .

Следовательно,  $x^2 = 9$ ,  $y^2 = 1$ , или  $x^2 = 1$ ,  $y^2 = 9$ .

Таким образом, система (1) имеет всего 8 решений:

$(3; 1)$ ,  $(3; -1)$ ,  $(-3; 1)$ ,  $(-3; -1)$ ,  $(1; 3)$ ,  $(1; -3)$ ,  $(-1; 3)$ ,  $(-1; -3)$ .

Так как  $xy = 3 > 0$ , то  $x$  и  $y$  имеют одинаковые знаки.

Тогда исходной системе будут удовлетворять всего 4 пары решений.

Ответ:  $(3; 1)$ ,  $(-3; -1)$ ,  $(1; 3)$ ,  $(-1; -3)$ .

### II способ

Запишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ 2xy = 6. \end{cases} \quad (2)$$

Сложим и вычтем уравнения системы (2):

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 16, \\ (x-y)^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y = \pm 4, \\ x-y = \pm 2. \end{cases}$$

Получим всего 4 системы линейных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x+y=4, \\ x-y=2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x+y=-4, \\ x-y=2; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x+y=4, \\ x-y=-2; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x+y=-4, \\ x-y=-2. \end{cases}$$

Складывая и вычитая левые и правые части полученных систем, получим 4 пары решений: (3; 1), (-1; -3), (1; 3), (-3; -1).

### III способ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ 2xy = 6. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, имеем

$x^2 + 2xy + y^2 = 16$ ,  $(x+y)^2 = 16$ ,  $x+y = \pm 4$ , тогда получим системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x+y=4, \\ xy=3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x+y=-4, \\ xy=3. \end{cases}$$

Откуда по теореме, обратной теореме Виета, находим

$$\begin{cases} x_1=3, \\ y_1=1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=1, \\ y_2=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=-3, \\ y_3=-1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=-1, \\ y_4=-3. \end{cases}$$

### IV способ

Выразим  $x^2 + y^2$  через  $x+y$  и  $xy$ :  $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ , тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 10, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Пусть  $x+y=a$ ,  $xy=b$ , тогда имеем

$$\begin{cases} a^2 - 2b = 10, \\ b = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = 16, \\ b = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \pm 4, \\ b = 3. \end{cases}$$

Следовательно, получим системы:  $\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3; \end{cases} \begin{cases} x+y=-4, \\ xy=3. \end{cases}$  и т. д.

(см. III способ).

#### V способ

Из исходной системы следует, что  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$ . Тогда, разделив первое уравнение исходной системы на второе, получим

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{10}{3}.$$

Пусть  $\frac{x}{y} = t$ , тогда имеем уравнение  $t + \frac{1}{t} = \frac{10}{3}$ , или  $3t^2 - 10t + 3 = 0$ ,

откуда находим  $t_1 = 3$ ,  $t_2 = \frac{1}{3}$ .

Учитывая подстановку и второе уравнение исходной системы, получим:

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{x}{y} = 3, \\ xy = 3. \end{cases}$$

Перемножая левые и правые части уравнений системы, получим  $x^2 = 9$ ,  $x_{1,2} = \pm 3$ , тогда  $y = \frac{3}{x}$ , или  $y_{1,2} = \pm 1$ .

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{3}, \\ xy = 3; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 1, \\ xy = 3; \end{cases} \begin{cases} x_{3,4} = \pm 1, \\ y_{3,4} = \pm 3. \end{cases}$$

Всего исходная система имеет 4 пары решений.

Ответ: (3; 1), (-3; -1), (1; 3), (-1; -3).

### 281 | Решение.

$$3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2.$$

Понятно, что уединение радикала и возведение обеих частей полученного уравнения в квадрат привело бы к довольно громоздкому уравнению, решить которое было бы весьма затруднительно.

Вместе с тем, если записать данное уравнение в виде

$$3(x^2 + 5x + 1) + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 5,$$

то, обозначив  $\sqrt{x^2+5x+1}=y$ , где  $y \geq 0$ , получим квадратное уравнение  $3y^2 + 2y - 5 = 0$ , корни которого  $y_1 = 1$ ,  $y_2 = -5/3$ .

Так как  $y \geq 0$ , то  $y_2$  не подходит.

Если  $y = 1$ , то  $\sqrt{x^2+5x+1}=1$ ,  $x^2 + 5x = 0$ ,  $x(x + 5) = 0$ , откуда  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -5$ .

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -5$ .

### 283 | Решение.

Запишем уравнение в виде  $5^{2x} \cdot 5^{-1} + 5^x \cdot 5 = 250$ , или

$$\frac{1}{5}(5^x)^2 + 5 \cdot 5^x - 250 = 0.$$

Пусть  $5^x = t$ , где  $t > 0$ , тогда получим уравнение

$$\frac{1}{5}t^2 + 5t - 250 = 0;$$

$$D = 25 + 200 = 225 = 15^2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{-5 \pm 15}{2/5}, \quad t_1 = 25, \quad t_2 = -50 \text{ (не удовлетворяет условию } t > 0 \text{)}.$$

Значит,  $5^x = 25$ ,  $x = 2$ .

Ответ:  $x = 2$ .

### 285 | Решение.

Заметим, что  $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(2 \sin x \cos x) = \frac{1}{2} \sin 2x$ , тогда

$$y = 6 + \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Так как  $|\sin 2x| \leq 1$ , т. е.  $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ , то

$$-1 \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2x \leq 1 \cdot \frac{1}{2}, \text{ или } -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2}.$$

Прибавляя к обеим частям полученного неравенства по 6, имеем

$$-\frac{1}{2} + 6 \leq 6 + \frac{1}{2} \sin 2x \leq \frac{1}{2} + 6, \text{ или } 5,5 \leq y \leq 6,5.$$

Следовательно,  $E(y) = [5,5; 6,5]$ .

Ответ:  $E(y) = [5,5; 6,5]$ .

**293** | Решение.

I способ

Пусть  $AB = 2x$ ,  $DC = 2y$ , тогда

$$S_{ABCD} = \frac{2x+2y}{2} \cdot 16 = (x+y) \cdot 16.$$

Так как трапеция равнобедренная,

$$\text{то } AE = \frac{1}{2}(AB - DC) = \frac{1}{2}(2x - 2y) = x - y,$$

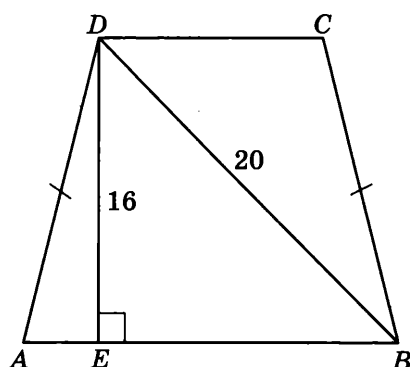
$$\text{тогда } BE = AB - AE = 2x - (x - y) = x + y.$$

Следовательно,  $S_{ABCD} = 16 \cdot BE$ ,

$$BE = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12.$$

$$S_{ABCD} = 16 \cdot 12 = 192 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: 192.



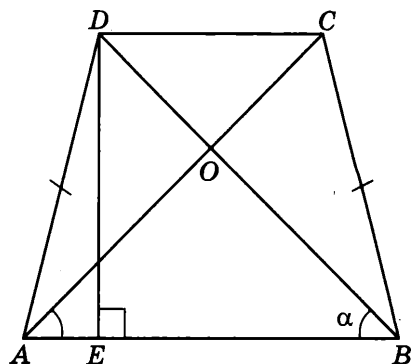
II способ

Пусть  $\angle CAB = \angle DBA = \alpha$ , тогда  $\angle AOB = 180^\circ - 2\alpha$ .Так как  $ABCD$  — равнобедренная трапеция, то  $AC = BD$ , тогда

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \angle AOB = \\ &= \frac{1}{2} BD^2 \sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2} BD^2 \sin 2\alpha = \\ &= 200 \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Из } \triangle DEB \sin \alpha = \frac{DE}{DB} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}, \text{ тогда}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - 16/25} = \sqrt{9/25} = 3/5,$$

где  $0 < \alpha < 90^\circ$ .

$$\text{Тогда } S_{ABCD} = 200 \cdot \sin 2\alpha = 200 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = 200 \cdot 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} =$$

$$= 16 \cdot 12 = 192 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: 192.

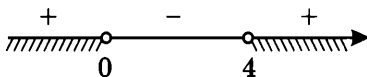
**295** | Решение.Упростим первое неравенство системы:  $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) > -3$ ; так как
 $0 < \frac{1}{2} < 1$ , это неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} 2x-3 < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}, \\ 2x-3 > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-3 < 8, \\ 2x > 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 5,5, \\ x > 1,5, \end{cases}$$

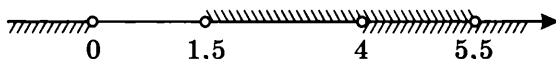
откуда  $1,5 < x < 5,5$ .

Упростим второе неравенство исходной системы:

$$x^2 - 4x > 0, x(x - 4) > 0, x_1 = 0, x_2 = 4.$$



Тогда решением исходной системы неравенств будет пересечение полученных множеств решений:



Следовательно,  $4 < x < 5,5$ , откуда  $x = 5$  — единственное целое число, удовлетворяющее исходной системе.

Ответ: 5.

### 297 | Решение.

$$2(\arcsin x)^2 + \pi^2 = 3\pi \arcsin x.$$

Пусть  $\arcsin x = t$ , где  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $2t^2 - 3\pi t + \pi^2 = 0$ ,

$$D = 9\pi^2 - 8\pi^2 = \pi^2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{3\pi \pm \pi}{4}, \quad t_1 = \pi, \quad t_2 = \frac{\pi}{2}.$$

Условию  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  удовлетворяет значение  $t_2 = \frac{\pi}{2}$ , тогда

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2}, \text{ откуда } \sin \frac{\pi}{2} = x, \text{ т. е. } x = 1.$$

Ответ:  $x = 1$ .

### 307 | Решение.

Пусть  $x$  — меньшее, а  $y$  — большее число. Пусть для определенности  $x < y$ , тогда первое условие задачи дает  $\sqrt{xy} = x + 12$ , а второе

условие дает  $\frac{x+y}{2} = y - 24$ , или  $x + y = 2y - 48$ ,  $y - x = 48$ .



Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{xy} = x + 12, \\ y - x = 48; \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{x(x+48)} = x + 12, \\ y = x + 48. \end{cases}$$

Решим первое уравнение полученной системы, возведя обе части в квадрат:  $x^2 + 48x = x^2 + 24x + 144$ , или  $24x = 144$ , откуда  $x = 6$ , тогда  $y = 6 + 48 = 54$ .

Найденная пара (6; 54) удовлетворяет уравнениям системы.

Следовательно, искомые числа 6 и 54.

Ответ: 6 и 54.

### 308 | Решение.

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{\cos 2\alpha} + \operatorname{tg} 2\alpha\right) \left(1 - \frac{1}{\cos 2\alpha} + \operatorname{tg} 2\alpha\right) = \\ & = \left((1 + \operatorname{tg} 2\alpha) + \frac{1}{\cos 2\alpha}\right) \left((1 + \operatorname{tg} 2\alpha) - \frac{1}{\cos 2\alpha}\right) = \\ & = (1 + \operatorname{tg} 2\alpha)^2 - \frac{1}{\cos^2 2\alpha} = 1 + 2\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}^2 2\alpha - (1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha) = \\ & = 1 + 2\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg}^2 2\alpha - 1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha = 2\operatorname{tg} 2\alpha. \end{aligned}$$

Ответ:  $2\operatorname{tg} 2\alpha$ .

### 321 | Решение.

$$\operatorname{arctg} \frac{3x-1}{x+3} = \frac{\pi}{4}, \text{ или } \frac{3x-1}{x+3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}, \frac{3x-1}{x+3} = 1, 3x-1 = x+3, \text{ откуда}$$

$$2x = 4, x = 2.$$

Ответ: 2.

### 346 | Решение.

#### І способ

Применяя формулы приведения, преобразуем левую часть тождества:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} &= \frac{\sin(90^\circ - \alpha) + \sin \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \sin \alpha} = \frac{2\sin 45^\circ \cdot \cos(45^\circ - \alpha)}{2\cos 45^\circ \cdot \sin(45^\circ - \alpha)} = \\ &= \frac{\cos(45^\circ - \alpha)}{\sin(45^\circ - \alpha)} = \operatorname{ctg}(45^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}(90^\circ - (45^\circ - \alpha)) = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Замечание.** Решение относительно упрощается при замене  $\cos \alpha$  на  $\sin(90^\circ + \alpha)$ .

## II способ

*Решение.*

Если использовать формулу  $a \sin x + b \cos x = c$  введением вспомогательного угла, то получим

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin(45^\circ + \alpha)}{\sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha)} = \frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos(45^\circ + \alpha)} = \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha).$$

## III способ

*Решение.*

Разделим числитель и знаменатель данной дроби на  $\cos \alpha \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} &= \frac{\cos \alpha / \cos \alpha + \sin \alpha / \cos \alpha}{\cos \alpha / \cos \alpha - \sin \alpha / \cos \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha). \end{aligned}$$

## IV способ

*Решение.*

Преобразуем правую часть тождества:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) &= \frac{\sin(45^\circ + \alpha)}{\cos(45^\circ + \alpha)} = \frac{\sin 45^\circ \cos \alpha + \cos 45^\circ \sin \alpha}{\cos 45^\circ \cos \alpha - \sin 45^\circ \sin \alpha} = \\ &= \frac{1/\sqrt{2} \cdot (\cos \alpha + \sin \alpha)}{1/\sqrt{2} \cdot (\cos \alpha - \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}, \end{aligned}$$

т. е. получим левую часть тождества.

## V способ

*Решение.*

$$\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \cdot \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha \cdot (1 + \operatorname{tg} \alpha)}{\cos \alpha \cdot (1 - \operatorname{tg} \alpha)} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha},$$

ч. т. д.

## 347 | Решение.

Нам надо выяснить, при каких значениях  $x$  выражение  $\sin 5x + \operatorname{tg} 4x$  имеет смысл.

Выражение  $\sin 5x$  имеет смысл при всех  $x \in R$ , а выражение  $\operatorname{tg} 4x$  — при  $\cos 4x \neq 0$ , т. е.  $4x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in Z$ , или  $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$ ,  $n \in Z$ .

Следовательно, областью определения данной функции является множество действительных чисел  $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$ ,  $n \in Z$ .

*Ответ:*  $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$ ,  $n \in Z$ .

**348 | Решение.**

Заметим, что при  $x = 4$  числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, значит, применить известную теорему о пределе частного нельзя. Упростим дробь, для чего умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 - 7} - 3}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x^2 - 7} - 3)(\sqrt{x^2 - 7} + 3)}{(x - 4)(\sqrt{x^2 - 7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7 - 9}{(x - 4)(\sqrt{x^2 - 7} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)(\sqrt{x^2 - 7} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x + 4}{\sqrt{x^2 - 7} + 3} = \frac{4 + 4}{\sqrt{9 + 3}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{4}{3}$ .

**349 | Решение.**

Согласно условию задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 9, \\ \frac{b_1^2}{1-q^2} = 40,5; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 9, \\ \frac{b_1}{1-q} \cdot \frac{b_1}{1+q} = 40,5; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b_1}{1-q} = 9, \\ \frac{b_1}{1+q} = 4,5. \end{cases}$$

Разделим первое уравнение полученной системы на второе:

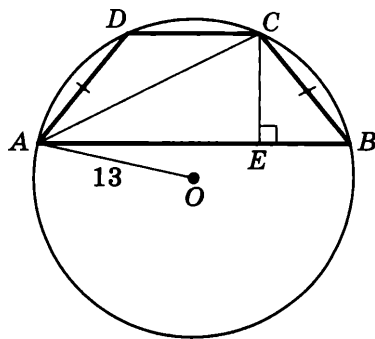
$$\frac{b_1}{1-q} \cdot \frac{1+q}{b_1} = 2, \text{ или } 1+q = 2-2q; 3q = 1, \text{ откуда } q = \frac{1}{3}.$$

Так как  $\frac{b_1}{1-q} = 9$  и  $q = \frac{1}{3}$ , то  $b_1 = 9 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 9 - 3 = 6$ .

Ответ:  $b_1 = 6$ ,  $q = \frac{1}{3}$ .

**360 | Решение.**

Пусть в равнобедренной трапеции  $ABCD$   $AD = CB$ ,  $AB = 24$ ,  $DC = 10$ , радиус описанной окружности  $AO = 13$ , где  $O$  — центр окружности, лежащий вне трапеции. Заметим, что окружность, описанная около трапеции  $ABCD$ , описана и около  $\triangle ACB$ , причем такая окружность единственна.



Известно, что  $S_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$ , где  $a, b, c$  — стороны треугольника,  $R$  —

радиус описанной окружности, тогда  $S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$ , или

$$S_{\Delta ABC} = \frac{24 \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot 13} = \frac{6 \cdot BC \cdot AC}{13}.$$

Но  $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot CE = 12 \cdot CE$ , тогда  $12 \cdot CE = \frac{6 \cdot BC \cdot AC}{13}$ ,

или  $BC \cdot AC = 26 \cdot CE$ ,  $BC^2 \cdot AC^2 = 676 \cdot CE^2$ . (1)

Так как трапеция  $ABCD$  — равнобедренная, то

$$BE = \frac{1}{2}(AB - DC) = \frac{1}{2}(24 - 10) = 7, \text{ тогда } AE = 24 - BE = 17.$$

Из  $\Delta AEC$   $AC^2 = 289 + CE^2$ ;

из  $\Delta CEB$   $BC^2 = 49 + CE^2$ .

Учитывая (1), имеем  $(49 + CE^2)(289 + CE^2) = 676 \cdot CE^2$ , или

$$289 \cdot 49 + 49 \cdot CE^2 + 289 \cdot CE^2 + CE^4 = 676 \cdot CE^2, \text{ или}$$

$$CE^4 - 338 \cdot CE^2 + 289 \cdot 49 = 0,$$

$$D/4 = 28\,561 - 14\,161 = 14\,400 = 120^2 > 0;$$

$$CE^2 = 169 \pm 120,$$

$$(CE^2)_1 = 289, (CE^2)_2 = 49, \text{ откуда } CE = 17 \text{ или } CE = 7.$$

Так как  $R > CE$  (что следует из условия задачи), то  $CE = 17$  не подходит.

Следовательно, высота трапеции  $CE = 7$ .

Ответ: 7.

### 361 | Решение.

ОДЗ:  $3x - 2 \geq 0$ .

Запишем уравнение в виде

$$x^2 \cdot 5^{\sqrt{3x-2}} - 5^{\sqrt{3x-2}+2} = x^2 \cdot 5^x - 5^{2+x}, \text{ или } 5^{\sqrt{3x-2}}(x^2 - 5^2) = 5^x(x^2 - 5^2),$$

$$(x^2 - 25)(5^{\sqrt{3x-2}} - 5^x) = 0, \text{ откуда:}$$

а)  $x^2 - 25 = 0$ ,  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = -5$  (не удовл. ОДЗ);

б)  $5^{\sqrt{3x-2}} - 5^x = 0$ , или  $5^{\sqrt{3x-2}} = 5^x$ ,  $\sqrt{3x-2} = x$ ,  $3x - 2 = x^2$ ,

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \text{ откуда находим } x_3 = 1, x_4 = 2.$$

Найденные корни удовлетворяют ОДЗ, значит, являются корнями исходного уравнения.

Ответ: 1; 2; 5.

**362 | Решение.**

$$\left( \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \sin(45^\circ - \alpha)}{2 \sin(60^\circ + \alpha) - \sqrt{3} \cos \alpha} \right)^6 = \left( \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \alpha + 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha} \right)^6 =$$

$$= \left( \frac{\sqrt{2} \cos \alpha - \sqrt{2} \cos \alpha + \sqrt{2} \sin \alpha}{\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha} \right)^6 = \left( \frac{\sqrt{2} \sin \alpha}{\sin \alpha} \right)^6 = (\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8.$$

Ответ: 8.

**364 | Решение.**

Так как  $\cos^2(180^\circ + x) = \cos^2 x$  и  $\cos^2(90^\circ + x) = \sin^2 x$ , то данное уравнение примет вид  $\cos^2 x + 3 \sin^2 x = 2$ , или  $1 - \sin^2 x + 3 \sin^2 x = 2$ ,  $2 \sin^2 x = 1$ , или  $1 - 2 \sin^2 x = 0$ ,

$$\cos 2x = 0, \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

По условию  $180^\circ < x < 360^\circ$ , или  $180^\circ < 45^\circ + 90^\circ \cdot n < 360^\circ$ ,  $135^\circ < 90^\circ \cdot n < 315^\circ$ ,  $3 < 2n < 7$ ,  $1,5 < n < 3,5$ , откуда  $n = 2, n = 3$ .

Если  $n = 2$ , то  $x_1 = 45^\circ + 180^\circ = 225^\circ$ ;

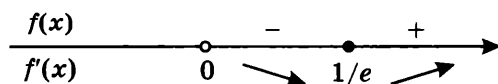
если  $n = 3$ , то  $x_2 = 45^\circ + 270^\circ = 315^\circ$ .

Ответ:  $225^\circ; 315^\circ$ .

**368 | Решение.**

$f(x) = x \ln x$ , тогда  $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$ , где  $x > 0$ .

$$f'(x) = 0, \quad \ln x + 1 = 0, \quad \ln x = -1, \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$



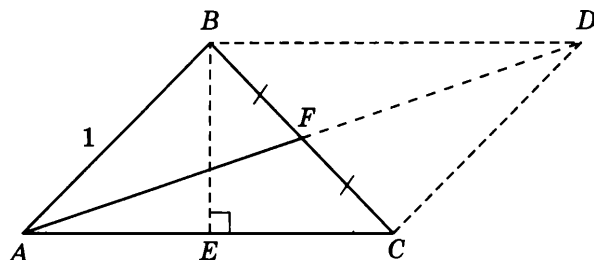
Так как при переходе через стационарную точку  $x = \frac{1}{e}$  производ-

ная меняет знак с «-» на «+», то  $x = \frac{1}{e}$  — точка минимума функции,

$$\text{тогда } f_{\min} = f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}.$$

Ответ:  $y_{\min} = -\frac{1}{e}$  при  $x = \frac{1}{e}$ .

### 380 | Решение.



Пусть в  $\triangle ABC$   $AB = BC = 1$ ,  $\angle B > 90^\circ$ ,  $AF$  — медиана, проведенная к боковой стороне,  $AF = \sqrt{5}/2$ . Проведем высоту  $BE$  к основанию  $AC$ . Построим  $\triangle ABC$  до параллелограмма  $ABCD$ , тогда по свойству параллелограмма имеем

$$BC^2 + AD^2 = 2(AB^2 + AC^2), \text{ или } 1 + (\sqrt{5})^2 = 2(1 + AC^2),$$

откуда  $6 = 2(1 + AC^2)$ ,  $1 + AC^2 = 3$ ,  $AC^2 = 2$ ,  $AC = \sqrt{2}$ , тогда

$$AE = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из  $\triangle AEB$  по теореме Пифагора

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2}, \text{ или } BE = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ следовательно,}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Итак,  $S_{\triangle ABC} = 0,5$  (кв. ед.).

Ответ: 0,5.

### 382 | Решение.

Всякая первообразная данной функции  $f(x)$  имеет вид

$$F(x) = 2\sqrt{x} + C, \quad (1)$$

где  $C$  — постоянная. Координаты точки  $M$  графика искомой первообразной, согласно условию, должны удовлетворять уравнению (1):

$$2 \cdot 1 + C = -2, \text{ откуда } C = -4.$$

Следовательно,  $F(x) = 2\sqrt{x} - 4$  есть искомая первообразная.

Ответ:  $F(x) = 2\sqrt{x} - 4$ .

**383 | Решение.**

Так как  $x > 0$ , то, прологарифмировав обе части неравенства по основанию 10, получим

$$\frac{\lg x + 5}{3} \cdot \lg x < \lg x + 1, \text{ или } \lg^2 x + 2 \lg x - 3 < 0.$$

Пусть  $\lg x = t$ , тогда  $t^2 + 2t - 3 < 0$ , откуда имеем  $-3 < t < 1$ .

Учитывая подстановку, получим  $-3 < \lg x < 1$ , откуда  $0,001 < x < 10$ .

Ответ: (0,001; 10).

**384 | Решение.**

По теореме Виета  $x_1 + x_2 = -3$ ,  $x_1 \cdot x_2 = m$ .

Пусть  $x_1 > x_2$ , тогда, согласно условию,  $x_1 - x_2 = 6$ .

Для нахождения значения  $m$  нам надо найти  $x_1$  и  $x_2$  из системы

уравнений 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3, \\ x_1 - x_2 = 6. \end{cases}$$

Складывая и вычитая почленно левые и правые части, имеем

$$\begin{cases} 2x_1 = -3 + 6, \\ 2x_2 = -3 - 6; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}, \\ x_2 = -\frac{9}{2}, \end{cases}$$

тогда  $m = x_1 \cdot x_2$ , или  $m = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{27}{4}$ .

Ответ:  $m = -\frac{27}{4}$ .

**385 | Решение.****I способ**

Хотя левая часть каждого из уравнений системы разложена на множители, есть смысл записать систему в другом виде:

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 65, \\ (x+y)(x-y)^2 = 5. \end{cases}$$

Пусть  $(x-y)^2 = a$ ,  $x+y = b$ .

Так как  $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}((x-y)^2 + (x+y)^2) = \frac{1}{2}(a + b^2)$ , то последняя систе-

ма примет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(a+b^2)b=65, \\ ab=5; \end{cases} \quad \begin{cases} ab+b^3=130, \\ ab=5; \end{cases} \quad \begin{cases} b^3=125, \\ ab=5; \end{cases} \quad \begin{cases} b=5, \\ a=1. \end{cases}$$

С учетом подстановок имеем систему  $\begin{cases} x+y=5, \\ (x-y)^2=1, \end{cases}$

которая равносильна двум линейным системам:

$$1) \begin{cases} x+y=5, \\ x-y=1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x=6, \\ 2y=4; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ y=2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x+y=5, \\ x-y=-1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x=4, \\ 2y=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$$

Ответ: (3; 2), (2; 3).

II способ

Решение.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2)=65, \\ (x+y)(x-y)^2=5. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{x^2+y^2}{(x-y)^2}=13, \text{ или } x^2+y^2=13(x-y)^2.$$

Упростив полученное уравнение, имеем

$$6x^2-13xy+6y^2=0, \text{ или } 6x^2-4xy-9xy+6y^2=0, \text{ или}$$

$$2x(3x-2y)-3y(3x-2y)=0, \text{ или } (3x-2y)(2x-3y)=0, \text{ откуда}$$

$$3x-2y=0, \text{ или } 2x-3y=0.$$

Получим две системы уравнений:

$$1) \begin{cases} 3x-2y=0, \\ (x+y)(x^2+y^2)=65; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{2}{3}y, \\ \frac{5}{3}y\left(\frac{4}{9}y^2+y^2\right)=65; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{2}{3}y, \\ \frac{5}{3}y \cdot \frac{13}{9}y^2=65; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{2}{3}y, \\ y^2=27; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$$



$$2) \begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ (x + y)(x^2 + y^2) = 65. \end{cases}$$

Решая аналогично, находим  $x = 3, y = 2$ .

Ответ: (3; 2), (2; 3).

### III способ

Решение.

Запишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = 65, \\ x^3 - x^2y - xy^2 + y^3 = 5. \end{cases}$$

Складывая и вычитая левые и правые части полученной системы, имеем

$$\begin{cases} 2x^3 + 2y^3 = 70, \\ 2x^2y + 2xy^2 = 60; \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ xy(x + y) = 30; \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ 3xy(x + y) = 90. \end{cases}$$

Вновь складывая уравнения полученной системы, находим

$(x + y)^3 = 125, x + y = 5$ , тогда  $xy = 30 : 5 = 6$ .

Имеем равносильную систему  $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6, \end{cases}$  откуда  $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = 2. \end{cases}$

Ответ: (3; 2), (2; 3).

### IV способ

(см. II способ)

Решение.

Уравнение  $\frac{x^2 + y^2}{(x - y)^2} = 13$  запишем в виде

$$\frac{(x - y)^2}{x^2 + y^2} = \frac{1}{13}, \text{ или } \frac{(x^2 + y^2) - 2xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{13}, \text{ или}$$

$$1 - \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{13}, \text{ откуда } \frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{12}{13}, \text{ или}$$

$$\frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{13}{6}, \text{ или } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}.$$

Пусть  $\frac{x}{y} = t$ , тогда получим  $t + \frac{1}{t} = \frac{13}{6}$ , или  $6t^2 - 13t + 6 = 0$ , откуда

$$t_1 = \frac{2}{3}, t_2 = \frac{3}{2}, \text{ т. е. } \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \text{ и } \frac{x}{y} = \frac{3}{2} \text{ и т. д.}$$

V способ

Пусть  $y = tx$ , тогда исходная система запишется в виде

$$\begin{cases} (x+tx)(x^2+t^2x^2)=65, & \begin{cases} x^3(1+t)(1+t^2)=65, \\ (x+tx)(x-tx)^2=5; \end{cases} \\ \end{cases} \quad \begin{cases} x^3(1+t)(1-t)^2=5. \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим  $\frac{1+t^2}{(1-t)^2}=13$ , или

$$1+t^2=13(1-t)^2, \text{ или } 1+t^2=13-26t+13t^2, \text{ или}$$

$$12t^2-26t+12=0, \text{ или } 6t^2-13t+6=0, \text{ и т. д. (см. IV способ).}$$

Ответ: (3; 2), (2; 3).

### 386 | Решение.

$$\left| \frac{2x-5}{x+1} \right| \geq 1.$$

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\left( \frac{2x-5}{x+1} \right)^2 \geq 1, \text{ или } \left( \frac{2x-5}{x+1} \right)^2 - 1 \geq 0.$$

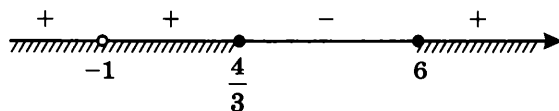
Разлагая левую часть на множители, имеем

$$\left( \frac{2x-5}{x+1} - 1 \right) \left( \frac{2x-5}{x+1} + 1 \right) \geq 0, \text{ или } \left( \frac{x-6}{x+1} \right) \left( \frac{3x-4}{x+1} \right) \geq 0,$$

$$\frac{3\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-6)}{(x+1)^2} \geq 0.$$

Решая полученное неравенство методом интервалов, находим

$$x_1 = \frac{4}{3}, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = -1$$



$$x < -1; \quad -1 < x \leq \frac{4}{3}, \quad x \geq 6.$$

Ответ:  $(-\infty; -1) \cup (-1; 4/3] \cup [6; +\infty)$ .

**388** | Решение.

Пусть  $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = x$ , тогда  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3) =$   

$$= \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) + \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3)}{1 - \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2) \cdot \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3)} = \frac{2+3}{1-2 \cdot 3} = \frac{5}{1-6} = \frac{5}{-5} = -1.$$

Так как  $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 2 < \frac{\pi}{2}$  и  $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg} 3 < \frac{\pi}{2}$ , то  $\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 < \pi$ ,

т. е.  $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ , тогда  $x = \frac{3\pi}{4}$ .

Ответ:  $\frac{3\pi}{4}$ .

**400** | Решение.

Пусть в усеченной пирамиде  $ABCA_1B_1C_1$   $\triangle ABC$  и  $\triangle A_1B_1C_1$  — правильные. По условию задачи  $AC = 10$  см,  $A_1C_1 = 6$  см,  $CC_1 = 2$  см.

Так как  $CC_1 \perp (ABC)$ , то  $CC_1 \perp CD \perp CA \perp CB$ , тогда трапеции  $AA_1C_1C$  и  $BB_1C_1C$  равны ( $AC = CB$  и  $A_1C_1 = C_1B_1$ ).

Следовательно,  $S_{ACC_1A_1} = S_{BCC_1B_1}$ .

Так как  $AA_1 = BB_1$  и  $AB \parallel A_1B_1$ , то грань  $ABB_1A_1$  — равнобедренная трапеция.

Следовательно,  $S_{\text{бок.}} = 2S_{ACC_1A_1} + S_{ABB_1A_1}$ ;

$$S_{ACC_1A_1} = \frac{1}{2}(AC + A_1C_1) \cdot CC_1 = \frac{1}{2}(10 + 6) \cdot 2 = 16 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{ABB_1A_1} = \frac{1}{2}(AB + A_1B_1) \cdot M_1D = \frac{1}{2}(10 + 6) \cdot M_1D = 8 \cdot M_1D.$$

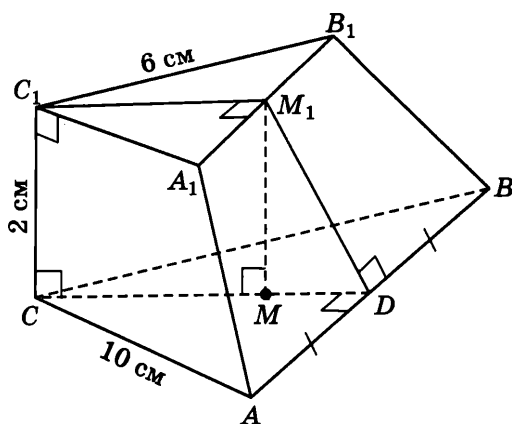
Высоту боковой грани  $M_1D$  найдем из  $\triangle M_1MD$ , где  $MM_1 = C_1C = 2$  см,  $MD = CD - CM = CD - C_1M_1$ .

Из  $\triangle ADC$ , где  $AC = 10$  см,  $AD = 5$  см, имеем

$$CD = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

Аналогично из  $\triangle A_1M_1C_1$   $C_1M_1 = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ , тогда

$$MD = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3} \text{ (см)}.$$



Значит,  $S_{ABB_1A_1} = 8 \cdot \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 8\sqrt{4+12} = 8 \cdot 4 = 32 \text{ (см}^2\text{)}.$

Следовательно,  $S_{\text{бок.}} = 2 \cdot 16 + 32 = 64 \text{ (см}^2\text{)}.$

Ответ: 64 см<sup>2</sup>.

#### 401 | Решение.

Так как  $AM$  — медиана  $\triangle ABC$ , то  $M$  — середина стороны  $BC$ , тогда

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \text{ или } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\{-4+3; 0-4; 5+2\} = \left\{-\frac{1}{2}; -2; \frac{7}{2}\right\}.$$

Тогда  $|\overrightarrow{AM}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-2)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 + \frac{49}{4}} = \sqrt{\frac{50}{4} + 4} = \frac{\sqrt{66}}{2}.$

Ответ:  $\frac{\sqrt{66}}{2}.$

#### 431 | Решение.

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin 5x.$$

Разделим обе части уравнения на  $\sqrt{2}$ :  $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x = \sin 5x,$

или  $\cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x = \sin 5x, \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin 5x,$  или

$\sin 5x - \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0, 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = 0,$  откуда:

1)  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) = 0, 2x - \frac{\pi}{8} = \pi n, x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$

2)  $\cos\left(3x + \frac{\pi}{8}\right) = 0, 3x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n,$  откуда  $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$

#### 432 | Решение.

I способ

$$\log_{2x+3} x^2 < 1.$$

Данное неравенство равносильно совокупности систем:

$$1) \begin{cases} 2x+3 > 1, \\ 0 < x^2 < 2x+3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 0 < 2x+3 < 1, \\ x^2 > 2x+3. \end{cases}$$

Решая систему 1), получим

$$\begin{cases} x > -1, \\ x \neq 0, \\ (x-3)(x+1) < 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x > -1, \\ -1 < x < 3, \text{ откуда } -1 < x < 3, x \neq 0. \\ x \neq 0, \end{cases}$$

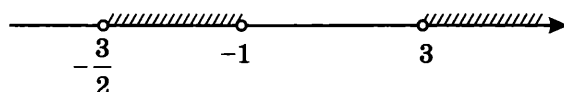
Решая систему 2), получим

$$\begin{cases} -\frac{3}{2} < x < -1, \\ (x-3)(x+1) > 0. \end{cases}$$

Полученная система равносильна совокупности двух систем:

$$\text{а) } \begin{cases} -\frac{3}{2} < x < -1, \\ x > 3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} -\frac{3}{2} < x < -1, \\ x < -1. \end{cases}$$

Система а) не имеет решений:



Решением системы б) будет

$$-\frac{3}{2} < x < -1.$$



Ответ:  $\left(-\frac{3}{2}; 1\right) \cup (-1; 0) \cup (0; 3).$

II способ

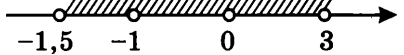
Решение.

Решим данное неравенство методом рационализации, учитывая ОДЗ.

Так как  $1 = \log_{2x+3}(2x+3)$ ,  $2x+3 > 0$ ,  $2x+3 \neq 1$ ,  $x \neq 0$ , то получим систему неравенств

$$\begin{cases} \log_{2x+3} x^2 < \log_{2x+3}(2x+3), \\ 2x+3 > 0; 2x+3 \neq 1, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2 - 2x - 3)(2x+3-1) < 0, \\ x > -1,5; x \neq -1, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-3)(x+1)(2x+2) < 0, \\ x > -1,5; x \neq -1, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-3)(x+1)^2 < 0, \\ x > -1,5; x \neq -1, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x-3 < 0, \\ x > -1,5; x \neq -1, \\ x \neq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3, \\ x > -1,5; x \neq -1, \\ x \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -1,5 < x < 3, \\ x \neq -1, x \neq 0. \end{cases}$$


Ответ:  $(-1,5; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 3)$ .

### 433 | Решение.

$$\begin{aligned} \int_4^5 \frac{x^2 - 6x + 10}{x-3} dx &= \int_4^5 \frac{(x-3)^2 + 1}{x-3} dx = \int_4^5 \left( x-3 + \frac{1}{x-3} \right) dx = \\ &= \int_4^5 (x-3) dx + \int_4^5 \frac{dx}{x-3} = \left( \frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_4^5 + \ln|x-3| \Big|_4^5 = \\ &= \frac{25}{2} - 15 - 8 + 12 + \ln 2 - \ln 1 = 12,5 - 11 + \ln 2 = 1,5 + \ln 2. \end{aligned}$$

Ответ:  $1,5 + \ln 2$ .

### 434 | Решение.

Пусть в конусе  $DB$  — хорда основания,  $\angle CEO = 45^\circ$ ,  $OB = 8$  см — радиус основания,  $\angle DmB = 120^\circ$ , тогда  $\angle DOB = 120^\circ$ .

$\triangle CDB$  — сечение, где  $CD = CB$  как образующие конуса. Проведем высоту  $CE$  сечения.

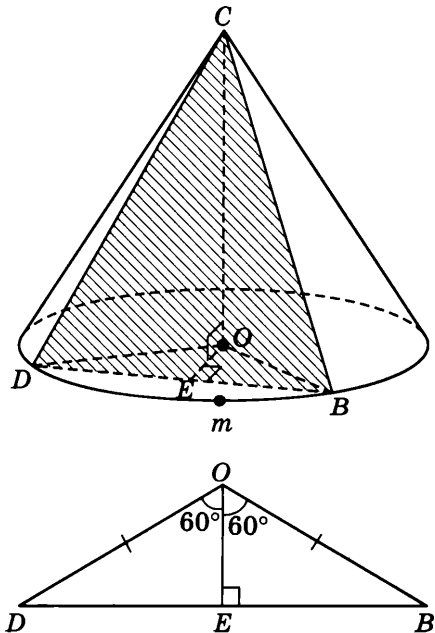
Заметим, что  $CE$  — высота и медиана равнобедренного  $\triangle CDB$ , тогда

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} DB \cdot CE. \quad (1)$$

Из  $\triangle DOB$  по теореме синусов имеем

$$\begin{aligned} \frac{DB}{\sin \angle DOB} &= \frac{OB}{\sin \angle ODB}, \text{ или} \\ \frac{DB}{\sin 120^\circ} &= \frac{8}{\sin 30^\circ}, \text{ откуда} \end{aligned}$$

$$DB = \frac{8 \cdot \sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{8 \cdot \sin(90^\circ + 30^\circ)}{\frac{1}{2}} = 16 \cos 30^\circ = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \text{ (см).}$$



В  $\triangle DEO$   $\angle ODE = 30^\circ$ , тогда  $OE = \frac{1}{2}OD = 4$  (см).

По условию  $\angle CEO = 45^\circ$ , значит,  $CE = \frac{OE}{\sin 45^\circ} = 4\sqrt{2}$  (см).

Учитывая (1), находим площадь искомого сечения:

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{6} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Ответ:  $16\sqrt{6}$  см<sup>2</sup>.

## 440 | Решение.

### I способ

Упростим числитель дроби:

$$\begin{aligned} 3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha &= (4 + 4 \cos 2\alpha) - (1 - \cos 4\alpha) = \\ &= 4(1 + \cos 2\alpha) - 2 \sin^2 2\alpha = 4 \cdot 2 \cos^2 \alpha - 2(\sin 2\alpha)^2 = \\ &= 8 \cos^2 \alpha - 2(2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = 8 \cos^2 \alpha - 8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= 8 \cos^2 \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) = 8 \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 8 \cos^4 \alpha. \end{aligned}$$

Аналогично упростим знаменатель дроби:

$$\begin{aligned} 3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha &= (4 - 4 \cos 2\alpha) - (1 - \cos 4\alpha) = \\ &= 4(1 - \cos 2\alpha) - 2 \sin^2 2\alpha = 8 \sin^2 \alpha - 8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= 8 \sin^2 \alpha \cdot (1 - \cos^2 \alpha) = 8 \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha = 8 \sin^4 \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \frac{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{8 \cos^4 \alpha}{8 \sin^4 \alpha} = \operatorname{ctg}^4 \alpha.$$

Тождество доказано.

### II способ

*Решение.*

Упростим числитель дроби:

$$\begin{aligned} 3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha &= (1 + \cos 4\alpha) + (2 + 4 \cos 2\alpha) = \\ &= 2 \cos^2 2\alpha + 4 \cos 2\alpha + 2 = 2(1 + \cos 2\alpha)^2 = 2(2 \cos^2 \alpha)^2 = 8 \cos^4 \alpha. \end{aligned}$$

Аналогично упростим знаменатель дроби:

$$\begin{aligned} 3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha &= (1 + \cos 4\alpha) + (2 - 4 \cos 2\alpha) = \\ &= 2 \cos^2 2\alpha + 2 - 4 \cos 2\alpha = 2(1 - \cos 2\alpha)^2 = 2(2 \sin^2 \alpha)^2 = 8 \sin^4 \alpha. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \frac{3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 - 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{8 \cos^4 \alpha}{8 \sin^4 \alpha} = \operatorname{ctg}^4 \alpha, \text{ ч. т. д.}$$

### III способ

*Решение.*

$$\begin{aligned} 3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha &= 3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 2 \cdot (2\alpha) = \\ &= 3 + 4(2 \cos^2 \alpha - 1) + 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 3 + 8 \cos^2 \alpha - 4 + 2(2 \cos^2 \alpha - 1)^2 - \\ &- 1 = -2 + 8 \cos^2 \alpha + 2(2 \cos^2 \alpha - 1)^2 = -2 + 8 \cos^2 \alpha + 8 \cos^4 \alpha + 2 = \\ &= 8 \cos^4 \alpha. \end{aligned}$$

Аналогично упрощаем знаменатель дроби и т. д.

### IV способ

*Решение.*

$$\begin{aligned} 3 + 4 \cos 2\alpha + \cos 4\alpha &= 3 + 4 \cos 2\alpha + (2 \cos^2 2\alpha - 1) = \\ &= 2 + 4 \cos 2\alpha + 2 \cos^2 2\alpha = 2(1 + \cos 2\alpha)^2 = 2 \cdot (2 \cos^2 \alpha)^2 = 8 \cos^4 \alpha, \\ &\text{и т. д. (см. I способ).} \end{aligned}$$

## 441 | Решение.

$$\sqrt[3]{7-x} = \sqrt{x+3} - 2.$$

Пусть  $\sqrt[3]{7-x} = a$ ,  $\sqrt{x+3} = b$ , где  $b \geq 0$ , тогда  $7-x = a^3$  и  $x+3 = b^2$ .

Складывая полученные равенства, имеем  $a^3 + b^2 = 10$ . (1)

Учитывая подстановки, данное уравнение примет вид

$$a = b - 2, \text{ или } b = a + 2. \quad (2)$$

Полученные равенства (1) и (2) решаем как систему:

$$\begin{cases} a^3 + b^2 = 10, \\ b = a + 2. \end{cases}$$

Подставим значение  $b$  из второго уравнения системы в первое:

$$a^3 + (a + 2)^2 = 10, \text{ или } a^3 + a^2 + 4a - 6 = 0.$$

Заметим, что  $a = 1$  — корень полученного уравнения, тогда  $a^2(a-1) + 2a(a-1) + 6(a-1) = 0$ ,  $(a-1)(a^2 + 2a + 6) = 0$ , откуда  $a = 1$ , или  $a^2 + 2a + 6 = 0$  — нет корней, так как  $D = -20 < 0$ .

Если  $a = 1$ , то  $b = 1 + 2 = 3$ .

Так как  $7-x = a^3$ , то  $x = 7 - 1 = 6$ .

Найденный корень удовлетворяет исходному уравнению.

*Ответ:*  $x = 6$ .

## 442 | Решение.

### I способ

$$|x^2 - 4x + 3| \leq 3x - x^2.$$

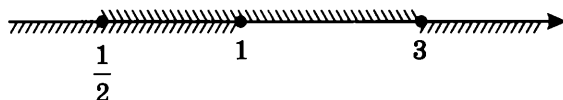
Рассмотрим два случая:

$$1) x^2 - 4x + 3 \geq 0; \quad 2) x^2 - 4x + 3 < 0.$$



В первом случае имеем систему

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \leq 3x - x^2, \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 - 7x + 3 \leq 0, \\ x^2 - 4x + 3 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right) \leq 0, \\ (x-3)(x-1) \geq 0. \end{cases}$$



Следовательно,  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ;  $x = 3$ .

Во втором случае имеем систему

$$\begin{cases} -(x^2 - 4x + 3) \leq 3x - x^2, \\ x^2 - 4x + 3 < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 3, \\ (x-3)(x-1) < 0, \end{cases} \quad \text{откуда } 1 < x < 3.$$

Объединяя найденные решения, получим  $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$ .

Ответ:  $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ .

## II способ

*Решение.*

Запишем исходное неравенство в виде  $3x - x^2 \geq |x^2 - 4x + 3| \geq 0$ , откуда  $3x - x^2 \geq 0$ .

Но тогда обе части данного неравенства неотрицательны, и мы можем возвести их в квадрат, в результате получим систему неравенств

$$\begin{cases} 3x - x^2 \geq 0, \\ |x^2 - 4x + 3|^2 \leq (3x - x^2)^2. \end{cases}$$

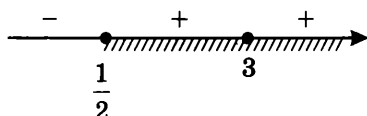
Решим первое неравенство системы методом интервалов:

$$x(3 - x) \geq 0, \text{ откуда } 0 \leq x \leq 3.$$

Решим второе неравенство системы:

$$\begin{aligned} (x^2 - 4x + 3)^2 &\leq (3x - x^2)^2, \text{ или} \\ (x^2 - 4x + 3 - 3x + x^2)(x^2 - 4x + 3 + 3x - x^2) &\leq 0, \\ (2x^2 - 7x + 3)(-x + 3) &\leq 0, (2x^2 - 7x + 3)(x - 3) \geq 0, \\ 2(x-3)\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3) &\geq 0, \text{ или } (x-3)^2\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0, \end{aligned}$$

$$x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{2}.$$



Значит,  $x \geq \frac{1}{2}$ .

Итак, для первого неравенства системы получим  $0 \leq x \leq 3$ , а для второго имеем  $x \geq \frac{1}{2}$ .

Тогда решением системы неравенств, а значит, и исходного неравенства будет  $\frac{1}{2} \leq x \leq 3$ .

Ответ:  $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ .

#### 451 | Решение.

Запишем уравнение в виде  $\sin x (1 + \sin x) + \cos x (1 - \sin^2 x) = 0$ , или  $(1 + \sin x) (\sin x + \cos x - \sin x \cos x) = 0$ , откуда имеем:

1)  $1 + \sin x = 0$ ,  $\sin x = -1$ ,  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

2)  $\sin x + \cos x - \sin x \cos x = 0$ .

Пусть  $\sin x + \cos x = t$ , тогда  $t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$ , откуда

$\sin x \cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$ , и последнее уравнение примет вид

$$t - \frac{1}{2}(t^2 - 1) = 0, \text{ или } t^2 - 2t - 1 = 0,$$

$$D/4 = 2 > 0, t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2},$$

тогда  $\sin x + \cos x = 1 \pm \sqrt{2}$ .

Но  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$  и  $|t| \leq \sqrt{2}$ , так что значение  $t = 1 + \sqrt{2}$

не подходит.

Остается  $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$ ,  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ , откуда

$$x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \arcsin \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \pi n,$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ;  $x = (-1)^n \arcsin \frac{1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$ .

### 452 | Решение.

Возможны 3 случая:

1)  $x \geq 3$ , тогда имеем систему

$$\begin{cases} x - 2x > 1, \\ x - 3 < 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1, \\ x < 8, \end{cases} \quad \text{откуда } x < -1 \text{ — нет решений.}$$

2)  $0 \leq x < 3$ , тогда

$$\begin{cases} x - 2x > 1, \\ -x + 3 < 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1, \\ x > -2, \end{cases} \quad \text{откуда } -2 < x < -1 \text{ — не принадлежит проме-}$$

жутку  $0 \leq x < 3$ , т. е. решений нет.

3)  $x < 0$ , тогда имеем систему неравенств

$$\begin{cases} x + 2x > 1, \\ -x + 3 < 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{3}, \\ x > -2, \end{cases} \quad \text{или } x > \frac{1}{3} \text{ — нет решений, так как } x < 0.$$

Следовательно, исходная система не имеет решений.

Ответ: решений нет.

### 453 | Решение.

Запишем уравнение в виде

$$2^x - 3^x = \sqrt{3^x(2^x - 3^x)} = 0, \quad \text{или } \sqrt{2^x - 3^x} \cdot (\sqrt{2^x - 3^x} - \sqrt{3^x}) = 0,$$

откуда имеем:

$$1) \sqrt{2^x - 3^x} = 0, \quad 2x = 3x, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1, \quad x_1 = 0.$$

$$2) \sqrt{2^x - 3^x} = \sqrt{3^x}, \quad 2x - 3^x = 3^x, \quad 2^x = 2 \cdot 3^x \quad \text{или} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2, \quad \text{или, пролога-}$$

рифмировав обе части по основанию 2, получим

$$\log_2 \left( \frac{2}{3} \right)^x = \log_2 2, \text{ или } x(\log_2 2 - \log_2 3) = 1, \text{ откуда } x_2 = \frac{1}{1 - \log_2 3}.$$

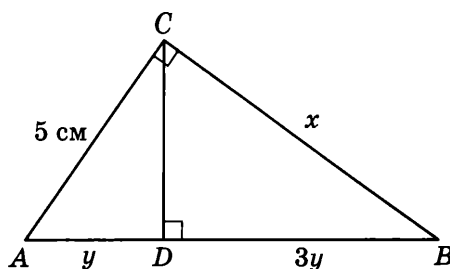
$$\text{Ответ: } x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{1 - \log_2 3}.$$

**454 | Решение.**

Пусть в  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,

$$AC = 5 \text{ см}, \frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}.$$

Пусть  $AD = y$ ,  $BC = x$ , тогда  $DB = 3y$ ,  $AB = 4y$ .



$$\text{Из } \triangle ABC \text{ по теореме Пифагора имеем } x^2 + 25 = 16y^2. \quad (1)$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot x = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot 4y, \text{ или } 5x = 4y \cdot CD.$$

Но  $CD^2 = AD \cdot DB$  (по свойству перпендикуляра  $CD$ , опущенного из вершины прямого угла  $C$  на гипотенузу  $AB$ ).

Значит,  $CD^2 = 3y^2$ ,  $CD = \sqrt{3}y$ , тогда  $5x = 4y \cdot \sqrt{3}y$ , или

$$5x = 4\sqrt{3}y^2. \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) рассматриваем как систему

$$\begin{cases} x^2 + 25 = 16y^2, \\ 5x = 4\sqrt{3}y^2. \end{cases}$$

Так как  $x > 0$ ,  $y > 0$ , то, разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{x^2 + 25}{5x} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \text{ или } \sqrt{3}x^2 - 20x + 25\sqrt{3} = 0,$$

$$D/4 = 100 - 75 = 25 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 5}{\sqrt{3}}, \text{ откуда } x_1 = 5\sqrt{3}, \quad x_2 = \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Корень  $x_2 = \frac{5}{\sqrt{3}}$  — не подходит, так как  $x = CB > AC$ .

$$\text{Значит, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{25\sqrt{3}}{2} \text{ см}^2.$$

**461** | *Решение.*

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0,5.$$

Упростим левую часть уравнения, используя основное тригонометрическое тождество  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ; тогда

$$\begin{aligned}\sin^4 x + \cos^4 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \\ &= 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}(4\sin^2 x \cos^2 x) = 1 - \frac{1}{2}(\sin 2x)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.\end{aligned}$$

Тогда данное уравнение примет вид

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \sin 2x - 0,5, \text{ или}$$

$\sin^2 2x + 2\sin 2x - 3 = 0$  — квадратное уравнение относительно  $\sin 2x$ .

$$D/4 = 1 + 3 = 4 = 2^2 > 0,$$

$$(\sin 2x)_{1,2} = -1 \pm 2, \text{ откуда } \sin 2x = 1, \sin 2x = -3.$$

Если  $\sin 2x = 1$ , то  $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , откуда  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

уравнение  $\sin 2x = -3$  не имеет корней, так как  $|\sin 2x| \leq 1$ .

*Ответ:*  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**462** | *Решение.*

$$\log_{1/3} \log_{1/2} \frac{x+4}{2x-3} < 0.$$

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \frac{x+4}{2x-3} > 0, \\ \log_{\frac{1}{2}} \frac{x+4}{2x-3} > \left(\frac{1}{3}\right)^0. \end{cases}$$

Заметим, что при этом условии  $\log_{1/2} \frac{x+4}{2x-3} > 0$  выполняется автоматически.

Далее система примет вид

$$\begin{cases} \frac{x+4}{2x-3} > 0, \\ \frac{x+4}{2x-3} < \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{x+4}{2x-3} > 0, \\ \frac{2x+8-2x+3}{2(2x-3)} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x+4}{2x-3} > 0, \\ \frac{11}{2(2x-3)} < 0. \end{cases}$$

Из второго неравенства полученной системы следует, что  $2x - 3 < 0$ , тогда первое неравенство системы примет вид  $x + 4 < 0$ .

Следовательно, имеем равносильную систему

$$\begin{cases} 2x - 3 < 0, & \begin{cases} x < 3/2, \\ x < -4, \end{cases} \\ x + 4 < 0; \end{cases}$$

откуда  $x < -4$  — решение системы, а значит, и данного неравенства.

Ответ:  $(-\infty; 4)$ .

### 463 | Решение.

Так как касательная параллельна прямой  $y = -2x + 6$ , то ее угловой коэффициент  $k = -2$ . С другой стороны,  $k = f'(x_0)$ . Абсциссу точки касания  $x_0$  находим из условия  $f'(x_0) = -2$ .

Так как  $f'(x) = (-x^2 + 4)' = -2x$ , то  $-2x_0 = -2$ , откуда  $x_0 = 1$ .

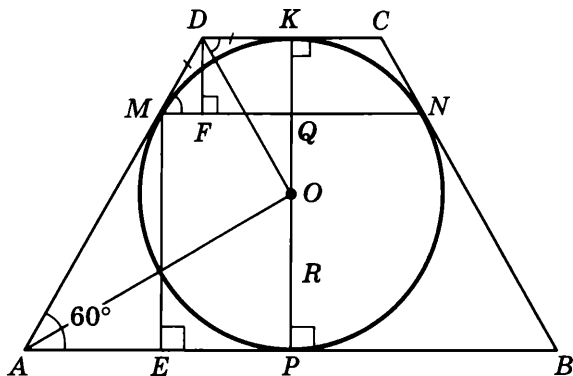
Тогда уравнение касательной к графику функции  $f(x)$  в его точке с абсциссой  $x_0$  примет вид

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

где  $x_0 = 1$ ,  $y_0 = -1 + 4 = 3$ , тогда  $y - 3 = -2 \cdot (x - 1)$ , откуда  $y = -2x + 5$ .

Ответ:  $y = -2x + 5$ .

### 464 | Решение.



Пусть равнобедренная трапеция  $ABCD$ , у которой  $AD = BC$ ,  $\angle A = \angle B = 60^\circ$ , описана около окружности  $(O; R)$ . Проведем отрезок  $MN$ , где точки  $M$  и  $N$  — точки касания с окружностью. Центр  $O$  окружности соединим с вершинами  $A$  и  $D$  трапеции. Проведем диаметр  $KP$  окружности и  $DF \perp MN$ ,  $ME \perp AB$ .

По условию задачи  $\angle A = \angle B = 60^\circ$ .

Заметим, что  $\angle DMF = \angle A = 60^\circ$  (как соответственные углы при параллельных прямых и секущей  $AD$ ).

Так как  $\angle A + \angle ADC = 180^\circ$ , то  $\angle ADC = 120^\circ$ , тогда  $\angle ODC = \frac{1}{2} \angle ADC = 60^\circ$  ( $DO$  — биссектриса  $\angle ADC$ ). Пусть  $AP = x$ ,  $DK = y$ ,  $MQ = z$ ,  $DF = h$ ,  $ME = H$ , тогда  $MD = DK = y$ ,  $AM = AP = x$  (по свойству касательных, проведенных к окружности из точки, взятой вне ее).

Из прямоугольных треугольников  $DOK$ ,  $AOP$ ,  $MFD$  и  $AEM$  находим

$$DK = y = R \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{R}{\sqrt{3}};$$

$$AP = x = R \operatorname{ctg} 30^\circ = R\sqrt{3};$$

$$MQ = z = MF + FQ = y \cos 60^\circ + y = \frac{1}{2}y + y = \frac{3}{2}y = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{R\sqrt{3}}{2};$$

$$DF = h = y \cdot \sin 60^\circ = \frac{R}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}R;$$

$$ME = H = x \cdot \sin 60^\circ = R\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}R.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{S_{MDCN}}{S_{AMNB}} = \frac{(y+z)h}{(x+z)H}. \quad (1)$$

$$\text{Но } y+z = \frac{R}{\sqrt{3}} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{2R+3R}{2\sqrt{3}} = \frac{5R}{2\sqrt{3}}, \quad h = \frac{1}{2}R,$$

$$x+z = R\sqrt{3} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}R\sqrt{3}, \quad H = \frac{3}{2}R.$$

Тогда соотношение (1) примет вид

$$\frac{S_{MDCN}}{S_{AMNB}} = \frac{\frac{5R}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}R}{\frac{3}{2}R\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}R} = \frac{\frac{5}{4\sqrt{3}}}{\frac{9\sqrt{3}}{4}} = \frac{5}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{9\sqrt{3}} = \frac{5}{27}.$$

Ответ:  $5/27$ .

## 470 | Решение.

Согласно условию имеем  $a_1 + a_2 + a_3 = 15$ .

Но  $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$ , тогда  $2a_2 = a_1 + a_3$ , или  $3a_2 = 15$ ,  $a_2 = 5$ .

Значит,  $a_1 + d = 5$ ,  $a_1 = 5 - d$ ,  $a_3 = 5 + d$ .

По условию задачи  $b_1 = a_1 + 1 = 6 - d$ ,  $b_2 = a_2 + 4 = 9$ ,

$b_3 = a_3 + 19 = 5 + d + 19 = 24 + d$ .

Но  $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$ , или  $(6 - d)(24 + d) = 9^2$ , или  $144 - 24d + 6d - d^2 = 81$ ,  
 $d^2 + 18d - 63 = 0$ , откуда  $d_1 = 3$ ,  $d_2 = -21$ , тогда  $a_1 = 2$  или  $a_1 = 26$ .  
 В итоге получим две тройки чисел: 2; 5; 8 и 26; 5; -16.  
 Ответ: 2; 5; 8 и 26; 5; -16.

**471 | Решение.**

$$\sqrt[6]{\frac{1}{2} - \cos x} + \sqrt[6]{\frac{1}{2} + \cos x} = 1.$$

I способ

Легко заметить, что  $\cos x = \pm \frac{1}{2}$  удовлетворяет данному уравнению,

тогда  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$  и  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

При других возможных значениях слева имеем сумму двух иррациональных чисел, а справа — число 1.

Следовательно, других решений данное уравнение не имеет.

Объединяя оба решения, ответ можно записать в виде  $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$ ,

$k \in \mathbb{Z}$ .

II способ

*Решение.*

Область определения уравнения равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \cos x \geq 0, \\ \frac{1}{2} + \cos x \geq 0; \end{cases} \begin{cases} \cos x \leq \frac{1}{2}, \\ \cos x \geq -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq \frac{1}{2}.$$

При  $\cos x = \pm \frac{1}{2}$ ,  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$  и  $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

При других значениях  $\cos x$  слева имеем сумму двух иррациональных чисел, справа — число 1.

III способ

*Решение.*

Пусть  $\sqrt[6]{\frac{1}{2} - \cos x} = \mu$ ,  $\sqrt[6]{\frac{1}{2} + \cos x} = \nu$ , где  $\mu \geq 0$ ,  $\nu \geq 0$ .

Тогда  $\frac{1}{2} - \cos x = \mu^6$ ,  $\frac{1}{2} + \cos x = \nu^6$ ; кроме того, исходное уравнение примет вид  $\mu + \nu = 1$ .



Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \mu + \nu = 1, \\ \frac{1}{2} - \cos x = \mu^6, \\ \frac{1}{2} + \cos x = \nu^6, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} \mu + \nu = 1, \\ \mu^6 + \nu^6 = 1. \end{cases}$$

Заметим, что если  $\mu$  и  $\nu$  — дробные числа, то  $\mu^6 < \mu$  и  $\nu^6 < \nu$ , значит,  $\mu$  и  $\nu$  — целые числа. Тогда имеем две возможности:

$$1) \begin{cases} \mu = 0, \\ \nu = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \mu = 1, \\ \nu = 0. \end{cases}$$

Следовательно,  $\cos x = \frac{1}{2}$ , или  $\cos x = -\frac{1}{2}$ , откуда

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \text{ и } x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \text{ и т. д. (см. I и II способы).}$$

Ответ:  $\frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 472 | Решение.

1) Найдем производную функции  $y' = (2 \cos x + x)' = -2 \sin x + 1$ .

2) Производная существует в любой точке  $x$ , значит, критических точек нет, а стационарные найдем из условия  $y' = 0$ .

Имеем  $-2 \sin x + 1 = 0$ ,  $\sin x = \frac{1}{2}$ , откуда  $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Из бесконечного числа стационарных точек надо выбрать те из них, которые принадлежат отрезку  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Такая точка (как легко проверить) всего одна:  $x = \frac{\pi}{6}$ , при  $n = 0$ .

3) Найдем значения функции в точках

$$x = \frac{\pi}{6}, \quad x = -\frac{\pi}{2}, \quad x = \frac{\pi}{2};$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cos \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}; \quad y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \text{ и } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,  $y_{\text{наим.}} = y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ,  $y_{\text{наиб.}} = y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$ .

Ответ:  $y_{\text{наим.}} = -\frac{\pi}{2}$ ;  $y_{\text{наиб.}} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$ .

# 473 | Решение.

І способ

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2y + y^2x = 20. \end{cases}$$

Пусть  $\sqrt{x} = \mu$ ,  $\sqrt{y} = \nu$ , где  $\mu \geq 0$ ,  $\nu \geq 0$ , тогда  $x = \mu^2$ ,  $y = \nu^2$ , и данная система примет вид

$$\begin{cases} \mu^2\nu + \mu\nu^2 = 6, \\ \mu^4\nu^2 + \mu^2\nu^4 = 20; \end{cases} \quad \begin{cases} \mu\nu(\mu + \nu) = 6, \\ \mu^2\nu^2(\mu^2 + \nu^2) = 20. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть  $\begin{cases} \mu + \nu = a, \\ \mu\nu = b, \end{cases}$  где  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , тогда система (1) примет вид

$$\begin{cases} ab = 6, \\ b^2(a^2 - 2b) = 20. \end{cases}$$

Упростим второе уравнение полученной системы, учитывая, что  $ab = 6$ :  $a^2b^2 - 2b^3 = 20$ , или  $36 - 2b^3 = 20$ ,  $2b^3 = 16$ ,  $b^3 = 8$ ,  $b = 2$ , тогда  $a = \frac{6}{2} = 3$ .

Следовательно,  $\begin{cases} \mu + \nu = 3, \\ \mu\nu = 2, \end{cases}$  откуда  $\begin{cases} \mu = 2, \\ \nu = 1, \end{cases}$  или  $\begin{cases} \mu = 1, \\ \nu = 2. \end{cases}$

Таким образом,  $\begin{cases} x = 2^2 = 4, \\ y = 1^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1^2 = 1, \\ y = 2^2 = 4. \end{cases}$

Обе пары удовлетворяют исходной системе.

Ответ: (4; 1), (1; 4).

ІІ способ

Пусть  $x\sqrt{y} = \mu$ ,  $y\sqrt{x} = \nu$ , где  $\mu \geq 0$ ,  $\nu \geq 0$ , тогда  $\mu^2 = x^2y$ ,  $\nu^2 = xy^2$ , и данная система запишется в виде

$$\begin{cases} \mu + \nu = 6, \\ \mu^2 + \nu^2 = 20; \end{cases} \quad \begin{cases} \mu + \nu = 6, \\ \left(\frac{\mu - \nu}{2}\right)^2 = 20; \end{cases} \quad \begin{cases} \mu + \nu = 6, \\ 36 - 2\mu\nu = 20; \end{cases} \quad \begin{cases} \mu + \nu = 6, \\ \mu\nu = 8, \end{cases}$$

откуда имеем две пары решений:  $\mu_1 = 2$ ,  $\nu_1 = 4$ , или  $\mu_1 = 4$ ,  $\nu_1 = 2$ .

Учитывая подстановки, имеем две системы:

$$1) \begin{cases} x\sqrt{y} = 2, \\ y\sqrt{x} = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2y = 4, \\ xy^2 = 16. \end{cases}$$

Перемножая уравнения системы, получим  $x^3y^3 = 64$ , откуда  $xy = 4$ , тогда из первого уравнения  $x^2y = 4$  находим

$$x \cdot (xy) = 4, 4x = 4, x = 1, \text{ тогда } y = 4.$$

$$2) \begin{cases} x\sqrt{y} = 4, \\ y\sqrt{x} = 2. \end{cases}$$

Решая аналогично, получим  $x = 4, y = 1$ .

Ответ: (4; 1), (1; 4).

### III способ

Решение.

$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x^2y + y^2x = 20. \end{cases}$$

Возведем первое уравнение в квадрат:

$$x^2y + y^2x + 2xy\sqrt{xy} = 36.$$

Учитывая второе уравнение системы, получим  $20 + 2xy\sqrt{xy} = 36$ , или  $(xy\sqrt{xy})^2 = 64$ , или  $(xy)^3 = 64$ , откуда  $xy = 4$ .

Так как  $x^2y + y^2x = 20$ , т. е.  $xy(x + y) = 20$ , то имеем  $4(x + y) = 20$ , откуда  $x + y = 5$ .

Получим систему уравнений  $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4, \end{cases}$  откуда имеем две пары ре-

шений  $\begin{cases} x = 4, \\ y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1, \\ y = 4. \end{cases}$

Ответ: (4; 1), (1; 4).

### 474 | Решение.

Пусть  $x$  руб. — первоначальная цена товара, что соответствует 100 %. Тогда после первого снижения цена товара будет  $x - 0,2x = 0,8x$  (руб.).

После второго снижения получим  $0,8x - 0,15 \cdot 0,8x = 0,68x$  (руб.), а после третьего снижения  $0,68x - 0,68x \cdot 0,1 = 0,612x$  (руб.).

Всего цена товара снизилась на  $x - 0,612x = 0,388x$  (руб.).

Итак,  $x - 100 \%$ ,

$$0,388x - y,$$

откуда  $y = (0,388x \cdot 100 \%) : x = 38,8 \%$ .

Таким образом, первоначальную цену товара снизили всего на 38,8 %.

Ответ: на 38,8 %.

### 491 | Решение.

Область определения системы:  $3x - y > 0$ . Упростим первое уравнение системы, используя основное логарифмическое тождество:

$$10 \cdot 10^{-\lg(3x-y)} = 2, \text{ или } 10^{\lg(3x-y)^{-1}} = \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{3x-y} = \frac{1}{5},$$

откуда  $3x - y = 5$ .

Имеем равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 - y = 15, \\ 3x - y = 5. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим  $4x^2 - 3x - 10 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = -5/4$ , тогда

$$y = 3x - 5, \text{ или } y_1 = 3 \cdot 2 - 5 = 1, \quad y_2 = 3 \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) - 5 = -\frac{35}{4}.$$

Обе пары удовлетворяют условию  $3x - y > 0$ .

Ответ: (2; 1),  $(-5/4; -35/4)$ .

### 492 | Решение.

Так как  $\cos \alpha + \cos \beta = a$ , то, применяя формулу суммы косинусов, получим  $2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = a$ .

Аналогично  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = b$ .

Разделив обе части второго равенства на первое, получим

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{b}{a}. \quad (1)$$

Известно, что  $\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ , тогда  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{(\alpha + \beta)}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{(\alpha + \beta)}{2}}$ ,

или, учитывая (1), имеем  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2 \cdot \frac{b}{a}}{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{2 \cdot \frac{b}{a}}{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$ , ч. т. д.

**493 | Решение.**

Имеем систему уравнений 
$$\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 168, \\ b_4 + b_5 + b_6 = 21. \end{cases}$$

Заметим, что  $b_4 + b_5 + b_6 = b_1q^3 + b_2q^3 + b_3q^3 = q^3(b_1 + b_2 + b_3)$ .

Учитывая первое уравнение системы, получим  $168q^3 = 21$ ,

$$q^3 = \frac{1}{8}, \quad q = \frac{1}{2}.$$

Упростим первое уравнение системы:  $b_1 + b_1q + b_1q^2 = 168$ , или

$$b_1(1 + q + q^2) = 168; \text{ так как } q = \frac{1}{2}, \text{ то } b_1 = 168 : \frac{7}{4} = 96.$$

Следовательно,  $b_2 = b_1q = 96 \cdot \frac{1}{2} = 48$ ,  $b_3 = 24$ ,  $b_4 = 12$ ,  $b_5 = 6$ ,  $b_6 = 3$ .

Ответ: 96; 48; 24; 12; 6; 3.

**494 | Решение.**

Разложим числитель и знаменатель дроби на множители:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = x^2(x - 1) - (x - 1) = (x^2 - 1)(x - 1) = (x - 1)^2(x + 1);$$

$$2 - x - x^2 = -(x + 2)x + (x + 2) = -(x + 2)(x - 1).$$

$$\text{Следовательно, } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{2 - x - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2(x + 1)}{-(x + 2)(x - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x)(x + 1)}{x + 2} = \frac{0}{3} = 0.$$

Ответ: 0.

**500 | Решение.**

Пусть в правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$   $AB = a$ ,  $\angle OFM = 2\alpha$ ,  $\angle EFP = \angle PFM = \alpha$ .

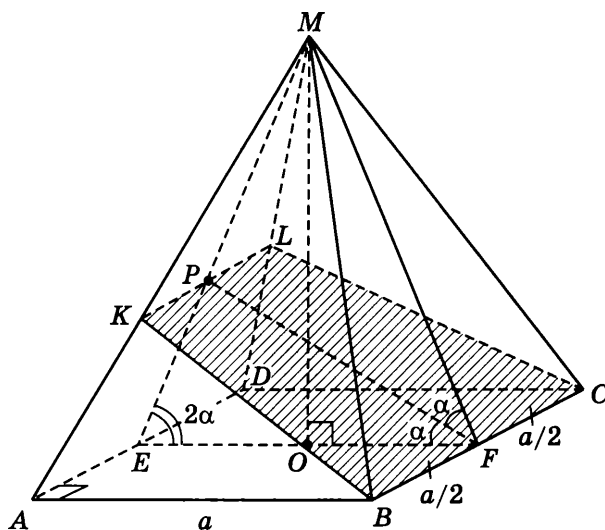
Пусть  $KLBC$  — данное сечение. Проведем  $(MFE) \perp BC$ . По условию  $\angle MEF = \angle MFE = 2\alpha$ ,  $\angle EFP = \angle MFP = \alpha$ ,  $BC = AD = EF = a$ .

$$\text{Тогда } S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2}(KL + BC) \cdot PF, \text{ или } S_{\text{сеч.}} = (BF + KP) \cdot PF.$$

$$\text{Из } \triangle EPF \quad \angle EPF = 180^\circ - (2\alpha + \alpha) = 180^\circ - 3\alpha.$$

По теореме синусов имеем  $\frac{PF}{\sin 2\alpha} = \frac{EF}{\sin(180^\circ - 3\alpha)}$ , откуда

$$PF = \frac{a \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}.$$



Из подобия  $\triangle MKP$  и  $\triangle MAE$  имеем  $\frac{KP}{AE} = \frac{MP}{ME}$ , откуда  $KP = \frac{AE \cdot MP}{ME}$ .

Далее из  $\triangle MOE$  находим  $ME = \frac{EO}{\cos 2\alpha}$ , или  $ME = \frac{a}{2 \cos 2\alpha}$ .

Так как  $MF = ME$  и  $\angle MPF = 180^\circ - \angle EPF = 180^\circ - (180^\circ - 3\alpha) = 3\alpha$ , то из  $\triangle MPF$  по теореме синусов имеем

$$\frac{MP}{\sin \alpha} = \frac{MF}{\sin 3\alpha}, \text{ откуда } MP = \frac{MF \cdot \sin \alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{a \sin \alpha}{2 \cos 2\alpha \sin 3\alpha}.$$

$$\text{Следовательно, } KP = \frac{a}{2} \cdot \frac{a \sin \alpha}{2 \cos 2\alpha \sin 3\alpha} : \frac{a}{2 \cos 2\alpha} = \frac{a \sin \alpha}{2 \sin 3\alpha}.$$

$$\begin{aligned} \text{Итак, } S_{\text{сеч.}} &= \left( \frac{a}{2} + \frac{a \sin \alpha}{2 \sin 3\alpha} \right) \cdot \frac{a \sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2 \sin^2 3\alpha} \cdot (\sin 3\alpha + \sin \alpha) = \\ &= \frac{a^2 \sin 2\alpha}{2 \sin^2 3\alpha} \cdot 2 \sin 2\alpha \cdot \cos \alpha = \frac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos \alpha}{\sin^2 3\alpha} \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos \alpha}{\sin^2 3\alpha}.$$

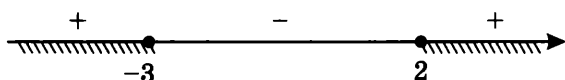
### 503 | Решение.

Нахождение области определения данной функции сводится к решению смешанной системы

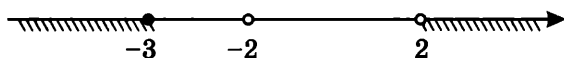
$$\begin{cases} x^2 + x - 6 \geq 0, \\ x^2 - 4 \neq 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} (x+3)(x+2) \geq 0, \\ x \neq \pm 2. \end{cases}$$

Неравенство  $(x + 3)(x - 2) \geq 0$  решим методом интервалов:

$$x_1 = -3, x_2 = 2.$$



Исключая точки 2 и -2, имеем



$$x \leq -3, x > 2.$$

Ответ:  $D(y) = (-\infty; -3] \cup (2; +\infty)$ .

### 504 | Решение.

Умножив обе части уравнения на 4 и используя формулу  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ , получим  $2 \cdot (2 \sin x \cos x) \cos 2x \cos 8x = \sin 12x$ , или  $2 \sin 2x \cos 2x \cos 8x = \sin 12x$ ,  $\sin 4x \cos 8x = \sin 12x$ .

Теперь используем формулу  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)$ .

Имеем  $\frac{1}{2}(\sin(-4x) + \sin 12x) = \sin 12x$ , или

$$\sin 12x - \sin 4x = 2 \sin 12x, \text{ или } \sin 12x + \sin 4x = 0, \text{ или}$$

$$2 \sin 8x \cos 4x = 0, \sin 8x \cos 4x = 0, \text{ откуда:}$$

а)  $\sin 8x = 0, 8x = \pi n, x = \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}$ .

б)  $\cos 4x = 0, 4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$ .

Заметим, что корни уравнения  $\cos 4x = 0$  содержатся среди корней уравнения  $\sin 8x = 0$ , тогда корни уравнения  $\sin 8x = 0$  являются и корнями исходного уравнения.

Ответ:  $\frac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}$ .

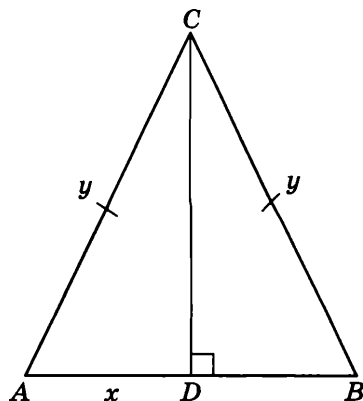
### 510 | Решение.

Пусть  $AC = BC = y, AB = 2x$ . По условию  $CD = 12$ , тогда из  $\triangle ADC$  получим

$$y^2 - x^2 = 144. \quad (1)$$

Известно, что  $S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$ , где  $a = b = y$ ,

$c = AB = 2x$ , тогда



$$S_{\triangle ABC} = \frac{xy^2}{2R}. \quad (2)$$

С другой стороны,  $S_{\triangle ABC} = p \cdot r = \frac{1}{2}(2y + 2x)r = (y + x)r$ ,

$$S_{\triangle ABC} = (x + y)r. \quad (3)$$

Кроме того,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD = 12x$ . (4)

Учитывая (4), соотношения (2) и (3) примут вид

$$\frac{xy^2}{2R} = 12x, \text{ или } y^2 = 24R, \text{ откуда } R = \frac{y^2}{24}. \quad (5)$$

Аналогично из (3) имеем  $(x + y)r = 12x$ , откуда  $r = \frac{12x}{x + y}$ . (6)

По условию задачи  $R + r = 83/8$ , тогда, складывая (5) и (6), получим  $\frac{12x}{x + y} + \frac{y^2}{24} = \frac{83}{8}$ , или, учитывая (1), имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{12x}{x + y} + \frac{y^2}{24} = \frac{83}{8}, \\ y^2 - x^2 = 144. \end{cases}$$

Заметим, что решение полученной системы обычным способом, например подстановкой, приводит к большим техническим сложностям. Приведем другой способ решения с помощью подстановки:

$$y = tx, \text{ где } t > 0.$$

$$\begin{cases} \frac{12x}{x + y} + \frac{t^2x^2}{24} = \frac{83}{8}, \\ t^2x^2 - x^2 = 144; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{12}{1 + t} + \frac{t^2x^2}{24} = \frac{83}{8}, \\ x^2 = \frac{144}{t^2 - 1}. \end{cases}$$

Подставив значение  $x^2$  в первое уравнение полученной системы, получим после упрощения  $35t^2 - 96t + 13 = 0$ , откуда находим

$$t_1 = \frac{13}{5}, \quad t_2 = \frac{1}{7}.$$

Учитывая подстановку  $y = tx$ , получим две системы:

$$1) \begin{cases} y = \frac{13}{5}x, \\ y^2 - x^2 = 144; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = \frac{1}{7}x, \\ y^2 - x^2 = 144. \end{cases}$$



Из системы 1) имеем  $x = 5, y = 13$ .

Система 2) не имеет решений.

Итак,  $x = 5, y = 13$ , тогда  $AB = 2x = 10$  и  $AC = BC = 13$ .

Ответ: 13; 13; 10.

### 511 | Решение.

Упростим первое уравнение системы:

$$x^3y^3 + x^3 + y^3 + 1 = 18, \quad x^3y^3 + (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 17.$$

Пусть  $x + y = a, xy = b$ , тогда имеем систему

$$\begin{cases} b^3 + a^3 - 3ab = 17, & \begin{cases} (a+b)^3 - 3ab(a+b) - 3ab = 17, \\ a+b = 5; \end{cases} \\ a+b = 5; & \begin{cases} a+b = 5; \\ ab = 6, \end{cases} \end{cases}$$

откуда по теореме, обратной теореме Виета, имеем  $\begin{cases} a = 2, \\ b = 3; \end{cases} \begin{cases} a = 3, \\ b = 2. \end{cases}$

Учитывая подстановки, получим две системы:

$$\text{а) } \begin{cases} x+y=2, \\ xy=3, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x=2-y, \\ y(2-y)=3; \end{cases} \begin{cases} x=2-y, \\ y^2-2y+3=0. \end{cases}$$

Уравнение  $y^2 - 2y + 3 = 0$  не имеет действительных корней, так как  $D < 0$ , значит, система а) не имеет решений.

$$\text{б) } \begin{cases} x+y=3, \\ xy=2, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x=2, \\ y=1; \end{cases} \begin{cases} x=1, \\ y=2. \end{cases}$$

Следовательно, решением исходной системы будет решение системы б).

Ответ: (2; 1), (1; 2).

### 512 | Решение.

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+3} = \sqrt[3]{12(x+1)}.$$

Возведем обе части уравнения в куб, применив формулу куба суммы двух чисел в виде  $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ , тогда получим

$$x + 2x + 3 + 3\sqrt[3]{x(2x+3)}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+3}) = 12(x+1). \quad (1)$$

По условию  $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x+3} = \sqrt[3]{12(x+1)}$ , тогда

$$\sqrt[3]{x(2x+3)12(x+1)} = 3(x+1). \quad (2)$$

Вновь возведем в куб обе части уравнения (2):

$$12x(x+1)(2x+3) = 27(x+1)^3, \text{ или}$$

$$(x+1)(12x(2x+3) - 27(x+1)^2) = 0, \text{ откуда } x_1 = -1, \text{ или}$$

$$12x(2x+3) - 27(x+1)^2 = 0, 24x^2 + 36x - 27x^2 - 54x - 27 = 0,$$

$$3x^2 + 18x + 27 = 0, x^2 + 6x + 9 = 0, (x+3)^2 = 0,$$

откуда  $x_2 = -3$ . Проверка показывает, что найденные корни удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ:  $x_1 = -1, x_2 = -3$ .

### 513 | Решение.

$$2(\sin 2x + \cos 2x) + \sin 4x + 1 = 0.$$

Пусть  $\sin 2x + \cos 2x = t$ , тогда  $t^2 = 1 + \sin 4x$ , и данное уравнение примет вид  $2t + t^2 = 0$ , или  $t(t+2) = 0$ , откуда  $t_1 = 0, t_2 = -2$ , так что данное уравнение равносильно совокупности уравнений:

1)  $\sin 2x + \cos 2x = 0$  — однородное уравнение I степени. Так как  $\cos 2x \neq 0$ , то получим  $\operatorname{tg} 2x + 1 = 0, \operatorname{tg} 2x = -1$ ;

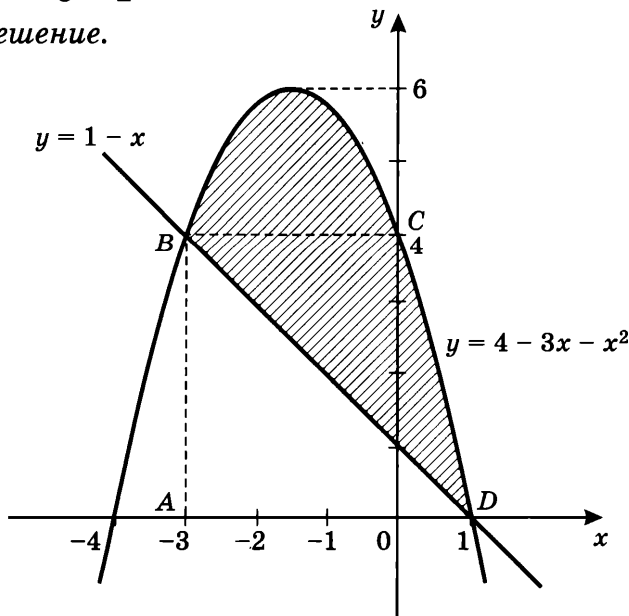
$$2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

2)  $\sin 2x + \cos 2x = -2$  — нет корней, так как

$$|\sin \alpha + \cos \alpha| = \sqrt{2} \left| \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}. \text{ Так что } |t| \leq \sqrt{2}.$$

Ответ:  $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ .

### 514 | Решение.



$y = 1 - x$  — прямая,  $y = 4 - 3x - x^2$  — парабола. Найдем абсциссы точек пересечения графиков данных функций (пределы интегрирования), для чего решим уравнение:

$$1 - x = 4 - 3x - x^2, \text{ или } x^2 + 2x - 3 = 0, \text{ откуда } x_1 = -3, x_2 = 1.$$

Следовательно, площадь искомой фигуры равна разности площадей криволинейной трапеции  $ABCD$  и  $\triangle ABD$ :

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= \int_{-3}^1 (4 - 3x - x^2) dx = \left( 4x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_{-3}^1 = \\ &= \left( 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left( -12 - \frac{27}{2} + 9 \right) = 4 + 3 - \frac{3}{2} + \frac{27}{2} - \frac{1}{3} = 18\frac{2}{3}; \end{aligned}$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

$$\text{Тогда } S = 18\frac{2}{3} - 8 = 10\frac{2}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

$$\text{Ответ: } 10\frac{2}{3}.$$

## 520 | Решение.

Пусть  $x$  кг — масса олова, которую надо добавить к сплаву. Тогда получится сплав массой  $(12 + x)$  кг, содержащий 40 % меди. Значит, в новом сплаве имеется  $\frac{12+x}{100} \cdot 40$  кг меди. Исходный сплав массой

12 кг содержал 45 % меди, т. е. меди в нем было  $\frac{12}{100} \cdot 45$  кг.

Так как масса меди и в первоначальном, и в новом сплаве одна и та же, то получим уравнение  $\frac{12+x}{100} \cdot 40 = \frac{12}{100} \cdot 45$ , или  $(12 + x)8 = 12 \cdot 9$ ,

откуда находим  $12 + x = 13,5$ ;  $x = 1,5$ .

Следовательно, к исходному сплаву надо добавить 1,5 кг олова.

Ответ: 1,5 кг.

## 521 | Решение.

Область определения уравнения:  $x + 1 > 0$ ,  $2x + 3 > 0$ , откуда  $x > -1$ .

Так как  $2x^2 + 5x + 3 = (x + 1)(2x + 3)$ , то исходное уравнение примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} + \frac{1}{\sqrt{2x+3}} = 2 + \frac{3x-16}{(x+1)(2x+3)}. \quad (1)$$

Пусть  $\begin{cases} \sqrt{x+1}=a, \\ \sqrt{2x+3}=b, \end{cases}$  где  $a > 0, b > 0$ , тогда  $\begin{cases} x+1=a^2, \\ 2x+3=b^2, \end{cases}$  или, складыв-

вая левые и правые части полученной системы, имеем

$$3x + 4 = a^2 + b^2, \text{ или } 3x = a^2 + b^2 - 4,$$

тогда (1) примет вид

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2 + \frac{a^2 + b^2 - 20}{ab}, \text{ или } a + b = 2ab + a^2 + b^2 - 20,$$

$$(a + b)^2 - (a + b) - 20 = 0, \text{ откуда } a + b = 5, \text{ или } a + b = -4.$$

Учитывая подстановки, получим два уравнения:

$$1) \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 5, \sqrt{2x+3} = 5 - \sqrt{x+1},$$

$$2x + 3 = 25 - 10\sqrt{x+1} + x + 1, \text{ или } \begin{cases} 10\sqrt{x+1} = 23 - x, \\ x \leq 23, \end{cases}$$

$$100(x + 1) = 529 - 46x + x^2, \text{ или } x^2 - 146x + 429 = 0,$$

откуда находим  $x_1 = 3, x_2 = 143$ .

Корень  $x_2 = 143$  не удовлетворяет условию  $x \leq 23$ , значит, не является корнем исходного уравнения.  $x_1 = 3$  — корень данного уравнения.

$$2) \sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = -4 \text{ — нет корней, так как } a + b > 0.$$

Итак, исходное уравнение имеет единственный корень  $x = 3$ .

Ответ:  $x = 3$ .

## 542 | Решение.

Запишем уравнение в виде  $\left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right) + 2\left(\sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) = 6$ .

$$\text{Пусть } \sin x + \frac{1}{\sin x} = t, \text{ тогда } \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} = t^2 - 2,$$

$$t + 2(t^2 - 2) = 6, 2t^2 + t - 10 = 0,$$

$$\text{откуда находим } t_1 = 2, t_2 = -\frac{5}{2}.$$

Учитывая подстановку, получим два уравнения:

$$1) \sin x + \frac{1}{\sin x} = 2, \text{ или } \sin^2 x - 2\sin x + 1 = 0,$$

$$(\sin x - 1)^2 = 0, \sin x = 1, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin x + \frac{1}{\sin x} = -\frac{5}{2}, \quad 2 \sin^2 x + 5 \sin x + 2 = 0, \text{ откуда находим}$$

$$\sin x = -2, \quad \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Если  $\sin x = -2$ , то корней нет, так как  $|\sin x| \leq 1$ ;

$$\text{если } \sin x = -\frac{1}{2}, \text{ то } x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

### 543 | Решение.

Найдем производную данной функции:

$$y' = (4 \cos x + \sin 3x - 8x)' = -4 \sin x + 3 \cos x - 8.$$

Заметим, что  $y' < 0$ , так как  $-4 \sin x \leq 4$ ,  $3 \cos x \leq 3$ , тогда  $-4 \sin x + 3 \cos x \leq 7$ , значит,  $-4 \sin x + 3 \cos x - 8 \leq -1$ , и тем более меньше 0.

Итак,  $-4 \sin x + 3 \cos x - 8 < 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , а это означает, что функция убывает на всей числовой прямой.

### 544 | Решение.

$OA \perp O_1A$  и  $O_1B \perp OB$  — по свойству касательной. Заметим, что  $\triangle OBO_1 = \triangle OAO_1$  (по гипотенузе и катету).

$$\text{Следовательно, } \angle O_1OA = \frac{1}{2} \angle AOB,$$

$$\text{т. е. } \angle O_1OA = 30^\circ.$$

$$\text{Отсюда } O_1A = OO_1 \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot OO_1;$$

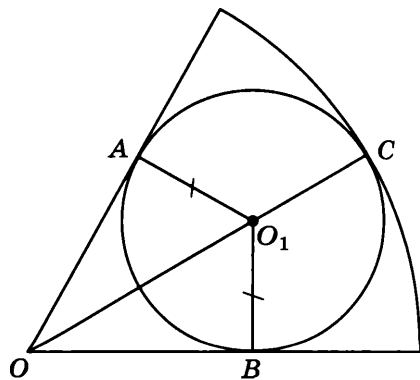
$$OC = OO_1 + O_1C.$$

Пусть  $O_1A = O_1B = r$ ,  $OC = R$  — радиус кругового сектора. Так как  $\angle O_1OA = 30^\circ$ , то  $OO_1 = 2r$ , тогда  $OC = R = 3r$ .

$$\text{Известно, что } S_{\text{кр.}} = \pi r^2, \text{ тогда } S_{\text{сект.}} = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi r^2 = \frac{1}{6} \pi (3r)^2 = \frac{3}{2} \pi r^2.$$

$$\text{Значит, } \frac{S_{\text{кр.}}}{S_{\text{сект.}}} = \frac{\frac{3}{2} \pi r^2}{\pi r^2} = \frac{3}{2}.$$

Ответ: 3 : 2.



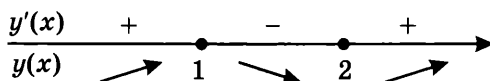
### 550 | Решение.

$$y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8.$$

Найдем производную  $y' = (2x^3 - 9x^2 + 12x - 8)' = 6x^2 - 18x + 12$ .

Найдем стационарные точки, решив уравнение  $y' = 0$ :

$6x^2 - 18x + 12 = 0$ , или  $x^2 - 3x + 2 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ .



Заметим, что в стационарных точках данная функция непрерывна, поэтому эти точки включаем в промежутки монотонности. Так как производная  $y'(x)$  при переходе через стационарную точку  $x = 1$  меняет знак с плюса на минус, то  $x = 1$  — точка максимума функции. Аналогично  $x = 2$  — точка минимума функции. В точке максимума  $x = 1$  имеем  $y(1) = -3$ , в точке минимума  $x = 2$  имеем  $y(2) = -4$ .

Ответ:  $x = 1$  — точка максимума,

$x = 2$  — точка минимума.

### 551 | Решение.

I способ

$$\sin 9x + 2 \cos 6x = 2.$$

Пусть  $3x = y$ , тогда уравнение примет вид  $\sin 3y + 2 \cos 2y = 2$ .

Но  $\sin 3y = 3 \sin y - 4 \sin^3 y$  и  $\cos 2y = 1 - 2 \sin^2 y$ , тогда получим уравнение  $3 \sin y - 4 \sin^3 y + 2(1 - 2 \sin^2 y) = 2$ ,

$\sin y \cdot (3 - 4 \sin^2 y - 4 \sin y) = 0$ , откуда имеем:

$$1) \sin y = 0, y = \pi n, \text{ т. е. } 3x = \pi n, x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$2) 3 - 4 \sin^2 y - 4 \sin y = 0, 4 \sin^2 y + 4 \sin y - 3 = 0.$$

Решая полученное уравнение, находим  $\sin y = \frac{1}{2}$ ,  $\sin y = -1,5$ .

Если  $\sin y = \frac{1}{2}$ , то  $y = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , или  $3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,

откуда  $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Если  $\sin y = -1,5$ , то корней нет, так как  $|\sin y| \leq 1$ .

Ответ:  $x = \frac{\pi n}{3}$ ,  $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

## II способ

*Решение.*

$$\sin 9x + 2 \cos 6x = 2.$$

Запишем уравнение в виде  $\sin 9x = 2(1 - \cos 6x)$ .

Так как  $1 - \cos 6x = 2 \sin^2 3x$ , то получим  $\sin 9x = 4 \sin^2 3x$ , или  $\sin 9x - \sin 3x = \sin 3x(4 \sin 3x - 1)$ .

Используя формулу  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ , имеем

$$2 \sin 3x \cos 6x = \sin 3x(4 \sin 3x - 1), \text{ откуда:}$$

$$1) \sin 3x = 0, 3x = \pi n, x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2 \cos 6x - 4 \sin 3x + 1 = 0.$$

Но  $\cos 6x = \cos 2 \cdot (3x) = 1 - 2 \sin^2 3x$ , тогда получим уравнение

$$2(1 - 2 \sin^2 3x) - 4 \sin 3x + 1 = 0, \text{ или } 4 \sin^2 3x + 4 \sin 3x - 3 = 0,$$

откуда находим  $\sin 3x = -1,5$  — нет корней,

$$\sin 3x = \frac{1}{2}, 3x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z},$$

$$3x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi n}{3}, \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

*Замечание.* Уравнение  $\sin 3x = \frac{1}{2}$  можно записать в виде

$$3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \text{ или } x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

## III способ

Данное уравнение можно решить, используя ограниченность функций  $\sin x$  и  $\cos x$ . Левая часть уравнения не превосходит 2 и рав-

на 2, если  $\begin{cases} \sin 9x = 0, \\ \cos 6x = 1, \end{cases}$  и т. д.

**552** | *Решение.*

$$(x^2 - x + 1)^x < 1.$$

Заметим, что  $x^2 - x + 1 > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , так как дискриминант  $D < 0$  и  $a = 1 > 0$ .

Запишем данное неравенство в виде

$$(x^2 - x + 1)x < (x^2 - x + 1)^0. \quad (1)$$

При этом возможны два случая:

$$1) 0 < x^2 - x + 1 < 1; \quad 2) x^2 - x + 1 > 1.$$

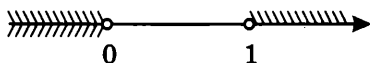
Следовательно, неравенство (1) равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x^2 - x + 1 < 1, \\ x > 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x(x-1) < 0, \\ x > 0. \end{cases}$$



$$0 < x < 1.$$

$$2) \begin{cases} x^2 - x + 1 > 1, \\ x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-1) > 0, \\ x < 0. \end{cases}$$



$$x < 0.$$

Объединяя оба случая, получим ответ.

Ответ:  $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$ .

### 553 | Решение.

$$\text{Запишем уравнение в виде } 16x^2 - 24x\sqrt{x+13} + 9(x+13) = 0. \quad (1)$$

Полученное уравнение можно решить разными способами.

І способ

(выделение в левой части полного квадрата)

$$(4x)^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3\sqrt{x+13} + 3^2(x+13) = 0, \quad \text{или} \quad (4x - 3\sqrt{x+13})^2 = 0,$$

$$4x = 3\sqrt{x+13},$$

$x > 0$  — следует из условия исходного уравнения, так как

$$16x^2 + 9x + 117 > 0 \text{ при любом } x \in \mathbb{R} \text{ и } x + 13 \geq 0.$$

Далее имеем  $16x^2 = 9(x+13)$ , или  $16x^2 - 9x - 117 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -78/32$  (не удовл.).

Найденный корень  $x = 3$  удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ:  $x = 3$ .



**II способ**  
(замена переменной)

*Решение.*

Заметим, что при  $x = 0$  и при  $x = -13$  равенство (1) не выполняется, тогда, разделив обе части (1) на  $x\sqrt{x+13} \neq 0$ , получим

$$16 \cdot \frac{x}{\sqrt{x+13}} + 9 \cdot \frac{\sqrt{x+13}}{x} - 24 = 0. \quad (2)$$

Пусть  $\frac{x}{\sqrt{x+13}} = y$ , где  $x > 0$ , тогда  $y > 0$  и

$$16y + \frac{9}{y} - 24 = 0, \quad 16y^2 - 24y + 9 = 0, \quad (4y - 3)^2 = 0, \quad 4y - 3 = 0, \quad y = \frac{3}{4}.$$

Тогда  $\frac{x}{\sqrt{x+13}} = \frac{3}{4}$ ,  $4x = 3\sqrt{x+13}$  и т. д. (см. I способ).

**III способ**  
(приведение к однородному)

Пусть  $\sqrt{x+13} = y$ , тогда  $9x + 117 = 9(x + 13) = 9y^2$ , и данное уравнение примет вид  $16x^2 - 24xy + 9y^2 = 0$ .

Это однородное уравнение II степени.

Вместе с тем полученное уравнение можно представить так:  $(4x - 3y)^2 = 0$  и т. д., аналогично II способу.

*Ответ:*  $x = 3$ .

**554 | Решение.**

**I способ**

Пусть в  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = \alpha$ ,  $BD = l$  — биссектриса  $\angle B$ , тогда в  $\triangle ADB$

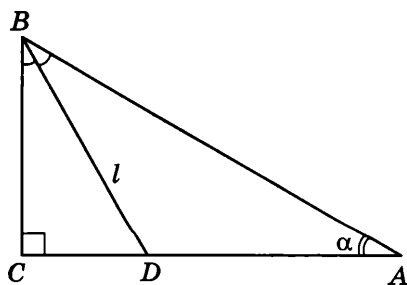
$$\angle ABD = \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \text{ и}$$

$$\angle ADB = 180^\circ - \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} + \alpha\right) = 180^\circ - \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Сторону  $AB$  найдем по теореме синусов из  $\triangle ADB$ :

$$\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{BD}{\sin \alpha}, \text{ откуда } AB = \frac{BD \cdot \sin \angle ADB}{\sin \alpha}, \text{ или}$$

$$AB = \frac{l \sin \left(180^\circ - \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\sin \alpha} = \frac{l \sin \left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \alpha}.$$



Стороны  $AC$  и  $BC$  найдем из  $\triangle ACB$ :  $BC = AB \sin \alpha$ ,  $AC = AB \cos \alpha$ , тогда периметр  $P$  будет равен

$$P = AB + BC + AC = AB + AB \sin \alpha + AB \cos \alpha = AB(1 + \sin \alpha + \cos \alpha).$$

Упростим выражение в скобке:

$$\begin{aligned} (1 + \cos \alpha) + \sin \alpha &= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left( \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \sin \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cos \frac{\alpha}{2} 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = 2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } P = \frac{l \sin \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha} \cdot 2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) =$$

$$= \frac{l \sin \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \cdot 2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \left( 90^\circ - \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2} l \sin \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cdot \sin \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{\sqrt{2} l \sin^2 \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

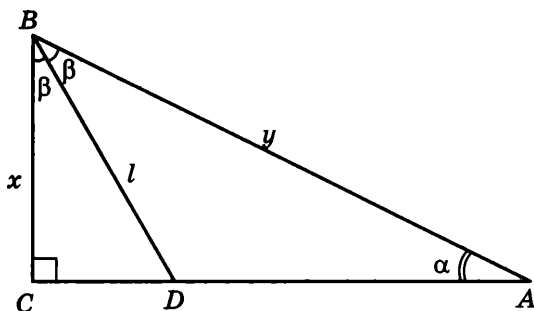
$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2} l \sin^2 \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

## II способ

**Решение.**

Пусть  $BC = x$ ,  $AB = y$ ,  
 $\angle CBD = \angle ABD = \beta$ .

В  $\triangle ABD$  по теореме синусов  
 имеем  $\frac{y}{\sin \angle ADB} = \frac{l}{\sin \alpha}$ , где  
 $\angle ADB = 90^\circ + \beta$  (внешний  
 угол  $\triangle BCD$ ).



Значит,  $\frac{y}{\sin(90^\circ + \beta)} = \frac{l}{\sin \alpha}$ , или  $\frac{y}{\cos \beta} = \frac{l}{\sin \alpha}$ .

Из  $\triangle ABC$   $y = \frac{x}{\sin \alpha}$ , откуда  $x = y \sin \alpha$ . Из  $\triangle BCD$   $l = \frac{x}{\cos \beta}$ .

Так как  $\alpha + 2\beta = 90^\circ$ , то  $\beta = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}$ , тогда

$$x = l \cos \beta = l \cos \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right), \quad y = \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{l \cos \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha}.$$

Из  $\triangle ABC$   $AC = y \cos \alpha = l \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$ .

Следовательно,  $P = BC + AB + AC$ , или

$$\begin{aligned} P &= l \cos \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{l \cos \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \alpha} + l \operatorname{ctg} \alpha \cdot \cos \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= l \cos \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \left( 1 + \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right) = l \cos \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \left( \frac{1 + \cos \alpha + \sin \alpha}{\sin \alpha} \right). \end{aligned}$$

Но  $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ ,  $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ , тогда получим

$$\begin{aligned} P &= l \cos \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{где } \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} = \\ &= \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \sin \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \sqrt{2} \cos \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Значит,  $P = \frac{\sqrt{2} l \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ .

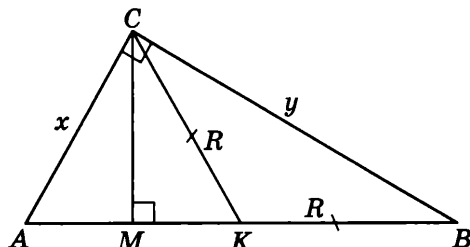
Так как  $\cos \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)$ , то  $P = \frac{\sqrt{2} l \sin^2 \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ .

Ответ:  $\frac{\sqrt{2} l \sin^2 \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$ .

### 560 | Решение.

Пусть в  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  
 $CK - CM = 7$  см, где  $CK$  — медиана,  
 $CM$  — высота  $\triangle ABC$ .

Так как  $\triangle ABC$  — прямоугольный, то  $AB = 2R$  — диаметр описанной окружности, где  $CK = AK = KB = R$ .



Пусть  $AC = x$ ,  $BC = y$ , где  $x > 0$ ,  $y > 0$ , тогда  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}xy = pr = 144$ ,  
откуда  $xy = 288$ ;

$$p = \frac{1}{2}(x + y + 2R), \text{ или } \frac{1}{2}(x + y + 2R)r = 144,$$

$$r = \frac{288}{x + y + 2R}, \text{ тогда } \frac{R}{r} = \frac{2R}{x + y - 2R}, \text{ где } r = \frac{x + y - 2R}{2}.$$

По условию  $CK - CM = 7$  см, или  $R - CM = 7$ .

$$\text{Но } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot CM, \text{ или } xy = 2R \cdot CM, \text{ откуда } CM = \frac{xy}{2R} = \frac{144}{R}.$$

$$\text{Следовательно, имеем уравнение } R - \frac{144}{R} = 7, \text{ или } R^2 - 7R - 144 = 0,$$

откуда находим  $R = 16$ ,  $R = -9$  (не подходит, так как  $R > 0$ ).

Итак,  $R = 16$ . Кроме того, из  $\triangle ABC$   $x^2 + y^2 = 4R^2$ , или  $x^2 + y^2 = 1024$ ,  
и так как  $xy = 288$ , то получим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1024, \\ xy = 288, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1024, \\ 2xy = 576. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы и учитывая, что  $x + y > 0$ , имеем

$$(x + y)^2 = 1600, x + y = 40, \text{ тогда } \frac{R}{r} = \frac{2R}{x + y - 2R} = \frac{32}{40 - 32} = \frac{32}{8} = 4.$$

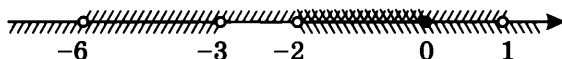
Ответ: 4.

### 563 | Решение.

Данная система равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} -6 < x^2 + 5x < 6, \\ -1 < x + 1 \leq 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2 + 5x < 6, \\ x^2 + 5x > -6, \\ x + 1 \leq 1, \\ x + 1 \geq -1; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 5x - 6 < 0, \\ x^2 + 5x + 6 > 0, \\ x \leq 0, \\ x \geq -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-1)(x+6) < 0, \\ (x+2)(x+3) > 0, \\ -2 \leq x \leq 0; \end{cases} \begin{cases} -6 < x < 1, \\ -2 \leq x \leq 0, \\ x > -2, \\ x < -3, \end{cases} \text{ откуда находим } -2 < x \leq 0.$$



Ответ:  $(-2; 0]$ .

### 564 | Решение.

$$\sqrt{8 \cdot 3^{x+2} - 23} = 2 - 3^{x+1}.$$

Пусть  $3^{x+1} = t$ , где  $t > 0$ , тогда  $3^{x+2} = 3t$ , и данное уравнение примет вид  $\sqrt{24t - 23} = 2 - t$ , или  $24t - 23 = 4 - 4t + t^2$ ,  $t^2 - 28t + 27 = 0$ , откуда  $t_1 = 1$ ,  $t_2 = 27$ .

Так как  $2 - t \geq 0$ , то корень  $t = 27$  не подходит.

Тогда  $t = 1$  и  $3^{x+1} = 1$ ,  $x + 1 = 0$ ,  $x = -1$ .

Ответ:  $x = -1$ .

### 570 | Решение.

Всякое двузначное число можно записать в виде  $\overline{xy} = 10x + y$ , где  $x$  — цифра десятков,  $y$  — цифра единиц.

Кроме того,  $0 < x \leq 9$ ,  $0 \leq y \leq 9$ .

Если цифра единиц на 2 больше цифры десятков, то получим  $y - x = 2$ .

Так как по условию задачи произведение искомого числа на сумму его цифр равно 144, то получим  $(10x + y)(x + y) = 144$ .

Следовательно, имеем систему уравнений 
$$\begin{cases} y - x = 2, \\ (10x + y)(x + y) = 144. \end{cases}$$

Решая эту систему подстановкой, имеем

$$y = x + 2,$$

$$(10x + x + 2)(x + x + 2) = 144, (11x + 2)(2x + 2) = 144, \text{ или}$$

$$(11x + 2)(x + 1) = 72, 11x^2 + 13x - 70 = 0,$$

$$D = 169 + 3080 = 57^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm 57}{22}, x_1 = 2, x_2 = -\frac{35}{11} \text{ — (не подходит).}$$

Если  $x = 2$ , то  $y = 2 + 2 = 4$ .

Значит, искомое число 24.

Ответ: 24.

### 571 | Решение.

Заметим, что  $0 \leq \cos^2 x \leq 1$ , тогда  $0 \leq 4 \cos^2 x \leq 4$ ,  $1 \leq 1 + 4 \cos^2 x \leq 5$ .

Разделив обе части полученного неравенства на 2, получим

$$\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{5}{2}.$$

Следовательно,  $E(y) = [0,5; 2,5]$ .

Ответ:  $[0,5; 2,5]$ .

### 572 | Решение.

$$\begin{cases} x^2 y^2 - 2x^2 + 3xy = 36, \\ 4x^2 y^2 - x^2 - 2xy = 123. \end{cases}$$

Как видно из условия, левые части уравнений системы содержат одни и те же комбинации неизвестных. Поэтому представляется целесообразным исключить из системы одно из неизвестных, а именно  $x^2$ , для чего умножим обе части второго уравнения на  $-2$  и сложим с первым:  $-7x^2 y^2 + 7xy = -210$ , или  $(xy)^2 - xy - 30 = 0$  — квадратное уравнение относительно  $xy$ .

Следовательно,  $xy = 6$ , или  $xy = -5$ .

Таким образом, исходная система распадается на две:

$$1) \begin{cases} xy = 6, \\ x^2 y^2 - 2x^2 + 3xy = 36; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 6, \\ 36 - 2x^2 + 18 = 36; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 6, \\ x^2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 6, \\ x = \pm 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 3, \\ y = \pm 2. \end{cases}$$

Пары чисел  $(-3; -2)$  и  $(3; 2)$  удовлетворяют исходной системе.

$$2) \begin{cases} xy = -5, \\ x^2 y^2 - 2x^2 + 3xy = 36; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = -5, \\ -2x^2 = 26; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = -5, \\ x^2 = -13. \end{cases}$$

Уравнение  $x^2 = -13$  не имеет действительных корней, значит, система 2) не имеет решений.

Следовательно, решением исходной системы является решение системы 1).

Ответ:  $(-3; -2)$  и  $(3; 2)$ .

**573 | Решение.**

$$\cos 3x \cos x = \cos 2x.$$

Заметим, что  $\cos 2x = \cos(3x - x) = \cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x$ ,

тогда данное уравнение примет вид  $\sin x \sin 3x = 0$ , откуда имеем:

1)  $\sin x = 0, x = \pi n, n \in \mathbb{Z};$

2)  $\sin 3x = 0, 3x = \pi n, x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$

Нетрудно увидеть, что числа вида  $x = \pi n$  содержатся среди чисел вида  $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$ , так как если  $n = 3k$ , то  $\frac{\pi n}{3} = \pi k$ .

Значит, первая серия корней содержится во второй.

Ответ:  $x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$

**595 | Решение.**

$$\begin{cases} \frac{x+y}{5} = \frac{x+z}{6} = \frac{y+z}{7}, \\ (x+y)^2 + (x+z)^2 + (y+z)^2 = 110. \end{cases}$$

Пусть  $\frac{x+y}{5} = \frac{x+z}{6} = \frac{y+z}{7} = t$ , тогда  $x+y = 5t, x+z = 6t, y+z = 7t$ ,

и второе уравнение исходной системы примет вид

$$25t^2 + 36t^2 + 49t^2 = 110, \text{ или } 110t^2 = 110, t^2 = 1, t = \pm 1.$$

Учитывая подстановки, имеем две системы:

1) 
$$\begin{cases} x+y=5, \\ x+z=6, \\ y+z=7. \end{cases}$$

Складывая уравнения полученной системы, имеем

$$2(x+y+z) = 18, x+y+z = 9, \text{ тогда } z = 9 - 5 = 4, y = 9 - 6 = 3, x = 9 - 7 = 2.$$

2) 
$$\begin{cases} x+y=-5, \\ x+z=-6, \\ y+z=-7. \end{cases}$$

Аналогично решая, получим  $x = -2, y = -3, z = -4$ .

Ответ:  $(-2; -3; -4), (2; 3; 4).$

### 596 | Решение.

Пусть  $x^2 = t$ , где  $t \geq 0$ , тогда данное неравенство примет вид  
 $|t - 1| + |t - 9| < 8$ .

Возможны случаи:

- 1)  $0 \leq t \leq 1$ , тогда  $1 - t - t + 9 < 8$ , или  $t > 1$  — решений нет;
- 2)  $1 < t < 9$ , тогда  $t - 1 - t + 9 < 8$ , или  $8 < 8$  — решений нет;
- 3)  $t \geq 9$ , тогда  $t - 1 + t - 9 < 8$ , или  $t < 9$  — решений нет.

Следовательно, исходное неравенство не имеет решений.

Ответ: решений нет.

### 597 | Решение.

$$y = \frac{10}{\pi} \arccos(0,5(\cos x - \sin x)).$$

Пусть  $t = 0,5(\cos x - \sin x)$ , или

$$t = \frac{1}{2} \left( \cos x - \cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right) = \frac{1}{2} \left( -2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - x \right).$$

$$\text{Итак, } E(t) = \left[ -\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right].$$

Заметим, что функция  $y = \frac{10}{\pi} \arccos t$  — убывающая и непрерывная,

$$\text{тогда } E(y) = \left[ \frac{10}{\pi} \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{10}{\pi} \arccos \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right] = \left[ \frac{10}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4}; \frac{10}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4} \right] = \left[ \frac{5}{2}; \frac{15}{2} \right].$$

Итак,  $E(y) = [2,5; 7,5]$ .

Ответ:  $[2,5; 7,5]$ .

### 602 | Решение.

Обозначим весь урожай через 1. Пусть первая бригада может убрать весь урожай за  $x$  дней, а вторая — за  $y$  дней. Тогда производительность труда первой бригады будет  $\frac{1}{x}$ , а второй —  $\frac{1}{y}$  — это часть

урожая, которую убирает каждая бригада ежедневно.

Согласно условию задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ 8 \cdot \frac{1}{12} + 7 \cdot \frac{1}{y} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}, \\ \frac{7}{y} = \frac{1}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{28}, \\ y = 21; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 28, \\ y = 21. \end{cases}$$



Итак, первая бригада уберет весь урожай за 28 дней, а вторая — за 21 день, т. е. вторая бригада уберет весь урожай на 7 дней быстрее первой.

*Ответ:* 7 дней.

### 603 | Решение.

$$\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}.$$

Возведем обе части уравнения в куб, применив формулу

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

Тогда получим

$$x+1+3x+1+3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)}(\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[3]{x+1})=x-1. \quad (1)$$

По условию  $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-1}$ , тогда (1) примет вид

$$4x+2+3\sqrt[3]{(x+1)(3x+1)} \cdot \sqrt[3]{x-1} = x-1, \text{ или} \\ \sqrt[3]{(x+1)(x-1)(3x+1)} = -(x+1). \quad (2)$$

Вновь возведем в куб обе части уравнения (2):

$$(x+1)(x-1)(3x+1) = -(x+1)^3.$$

Следовательно, либо  $x+1=0$ , т. е.  $x_1=-1$ , либо

$$(x-1)(3x+1) = -(x+1)^2, \text{ или } 3x^2 - 3x + x - 1 = -x^2 - 2x - 1, \\ \text{или } 4x^2 = 0, x^2 = 0, \text{ откуда } x_2 = 0.$$

Подставляя найденные значения в исходное уравнение, убеждаемся, что корень  $x_2 = 0$  уравнению не удовлетворяет. Значит, данное уравнение имеет единственный корень.

*Ответ:*  $x = -1$ .

*Замечание.* Известно, что при возведении обеих частей уравнения в нечетную степень не нарушается равносильность уравнения, тогда, казалось бы, найденные корни можно не проверять. Однако это не так. Объясняется это тем, что при переходе от уравнения (1) к уравнению (2) мы заменили  $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{3x+1}$  выражением  $\sqrt[3]{x-1}$ , и если всякий корень уравнения (1) является и корнем уравнения (2), то обратное, вообще говоря, неверно. Следовательно, уравнение (2) является следствием уравнения (1).

Вот почему необходима проверка корней.

### 604 | Решение.

$$(x^2 + x)^2 + |x^2 + x| - 2 = 0.$$

Так как  $(x^2 + x)^2 = |x^2 + x|^2$ , то, обозначив  $|x^2 + x| = t$ , где  $t \geq 0$ , получим  $t^2 + t - 2 = 0$ , откуда  $t_1 = -2$ ,  $t_2 = 1$ .

Так как  $t > 0$ , то  $t = 1$ , тогда  $|x^2 + x| = 1$ , откуда имеем:

$$1) x^2 + x = 1, x^2 + x - 1 = 0, D = 5 > 0, x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$2) x^2 + x = -1, \text{ или } x^2 + x + 1 = 0 \text{ — нет действительных корней.}$$

$$\text{Ответ: } x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

**605 | Решение.**

$$\begin{cases} \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{3}{2}, \\ x + y = \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Известно, что если  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , то  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ , тогда первое уравнение системы можно записать так:

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{5}{1}, \text{ или } \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}} = 5, \text{ или } \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = 5.$$

Учитывая второе уравнение системы, получим

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = 5, \text{ или } \operatorname{ctg} \frac{x-y}{2} = 5.$$

Следовательно,  $x - y = 2 \operatorname{arctg} 5 + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{По условию } x + y = \frac{\pi}{2}.$$

Имеем систему

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ x - y = 2 \operatorname{arctg} 5 + 2\pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arctg} 5 + 2\pi n, \\ 2y = \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} 5 + 2\pi n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 5 + \pi n, \\ y = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 5 + \pi n; \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left( \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 5 + \pi n; \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 5 + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

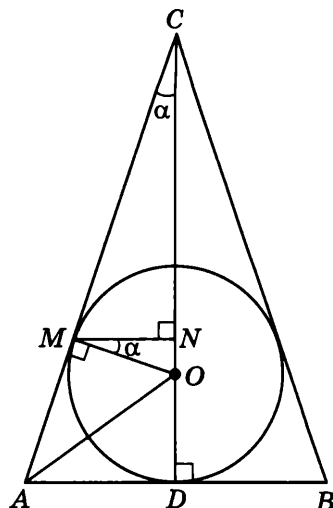
**610 | Решение.**

Пусть  $CAB$  — осевое сечение конуса. Проведем  $MO \perp AC$  и  $MN \perp CD$ . Согласно условию  $MN = r$ ,  $\angle ACD = \alpha$ , тогда  $\angle MOC = 90^\circ - \alpha$ , откуда  $\angle OMN = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$ .

Так как  $AM = AD$  — как отрезки касательных к окружности, проведенных из точки  $A$ , то  $AO$  — биссектриса  $\angle CAB$ , тогда

$$\angle OAD = \frac{1}{2}(90^\circ - \alpha) = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Значит, объем конуса  $V = \frac{1}{3}\pi \cdot AD^2 \cdot CD$ .



Далее из  $\triangle OMN$  имеем  $MO = \frac{r}{\cos \alpha}$ ,

и так как  $OM = OD$  — как радиусы шара, то из  $\triangle ADO$  получим

$$AD = OD \cdot \operatorname{ctg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{r}{\cos \alpha} \operatorname{ctg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Из  $\triangle ADC$  находим

$$CD = AD \operatorname{ctg} \alpha = \frac{r}{\cos \alpha} \operatorname{ctg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \alpha} \operatorname{ctg} \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right).$$

Следовательно,  $V = \frac{\pi r^3 \operatorname{ctg}^3 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}$  (куб. ед.).

Ответ:  $V = \frac{\pi r^3 \operatorname{ctg}^3 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)}{3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}.$

**611 | Решение.**

$$x^{\lg^2 x - \lg x + 1} > 10.$$

Так как  $x > 0$ , то имеем равносильное неравенство

$$(\lg^2 x - \lg x + 1) \lg x > 1, \text{ или } \lg^2 x (\lg x - 1) + (\lg x - 1) > 0,$$

$(\lg x - 1)(\lg^2 x + 1) > 0$ , откуда  $\lg x - 1 > 0$  (ввиду того, что  $\lg^2 x + 1 > 0$  при всех  $x > 0$ ), тогда  $\lg x > 1$ , откуда  $x > 10$ .

Ответ:  $(10; +\infty)$ .

**612 | Решение.**

$$\sqrt{1 - \cos x} = \sin x, \quad x \in [\pi; 3\pi].$$

Область определения уравнения:  $\begin{cases} 1 - \cos x \geq 0, \\ \sin x \geq 0. \end{cases}$

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$1 - \cos x = \sin^2 x$ , или  $1 - \cos x = 1 - \cos^2 x$ ,  $\cos^2 x - \cos x = 0$ ,  
 $\cos x(\cos x - 1) = 0$ , откуда:

1)  $\cos x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

2)  $\cos x = 1$ ;  $x = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Так как  $\sin x \geq 0$  и  $x \in [\pi; 3\pi]$ , то подходят лишь значения  $x = 2\pi$  и  $x = \frac{5\pi}{2}$ .

Ответ:  $x = 2\pi$ ;  $x = \frac{5\pi}{2}$ .

**613 | Решение.**

$$\vec{a} \{-4; 2; -1\}, \vec{b} \{m; -8; 4\}.$$

Известно, что если ненулевые векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны (параллельны), то необходимо и достаточно, чтобы существовало число  $\lambda$ , такое, что  $\vec{a} = \lambda \vec{b}$ .

Следовательно, имеем систему  $\begin{cases} -4 = \lambda m, \\ 2 = -8\lambda, \\ -1 = 4\lambda; \end{cases}$

$$\lambda = -\frac{1}{4}, \quad m = -\frac{4}{\lambda} = -\frac{4}{-\frac{1}{4}} = 16.$$

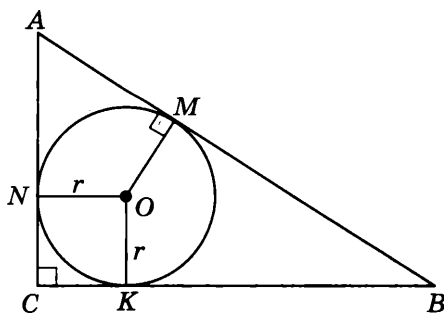
Ответ:  $m = 16$ .

**618 | Решение.**

Пусть в  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $M$ ,  $N$  и  $K$  — точки касания вписанной окружности.

$AM = AN$ ,  $BM = BK$  — как касательные, проведенные к окружности из одной точки.

$ON = OK = r$ ;  $ON \perp AC$ ;  $OK \perp CB$ , тогда  $CNOK$  — квадрат со стороной  $r$ .



Так как по условию задачи  $AM = 6$  см,  $MB = 9$  см, то  $AB = 6 + 9 = 15$  (см), тогда  $AC = AN + NC = AM + r = 6 + r$  и  $CB = CK + KB = r + BM = r + 9$ .

По теореме Пифагора  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , или  $(6 + r)^2 + (9 + r)^2 = 15^2$ ;  $2r^2 + 30r - 108 = 0$ ,  $r^2 + 15r - 54 = 0$ , откуда  $r_1 = 3$ ;  $r_2 = -18 < 0$ .

Итак, больший катет  $CB = 9 + 3 = 12$  (см).

Ответ: 12 см.

## 620 | Решение.

$$\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = 2.$$

Умножим обе части уравнения на выражение, сопряженное левой части:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2})(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}) = \\ & = 2(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}), \text{ или} \\ & 1+x+x^2 - (1-x+x^2) = 2(\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}), \\ & \text{или } \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} = x. \end{aligned} \quad (1)$$

Уравнение (1) вместе с данным решаем как систему:

$$\begin{cases} \sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2} = 2, \\ \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2} = x. \end{cases}$$

Складывая левые и правые части полученной системы, имеем

$$\begin{aligned} 2\sqrt{1+x+x^2} &= 2+x, \text{ или } 4(1+x+x^2) = 4+4x+x^2, \\ 4x^2 - x^2 &= 0, 3x^2 = 0, x^2 = 0, \text{ откуда } x = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что  $x = 0$  — корень исходного уравнения.

Ответ:  $x = 0$ .

## 626 | Решение.

Пусть  $x, 2x, 5x$  — числители дробей (согласно условию задачи),  $y, 3y, 7y$  — знаменатели дробей.

Тогда искомые дроби имеют вид  $\frac{x}{y}, \frac{2x}{3y}, \frac{5x}{7y}$ .

Из условия задачи имеем  $\left(\frac{x}{y} + \frac{2x}{3y} + \frac{5x}{7y}\right) : 3 = \frac{200}{441}$ , или

$$\frac{21x+14x+15x}{21y} : 3 = \frac{200}{441}, \quad \frac{50x}{63y} = \frac{200}{441},$$

откуда  $\frac{x}{y} = \frac{200}{441} \cdot \frac{63}{50}$ , или  $\frac{x}{y} = \frac{4}{7}$  — первая дробь,  $\frac{2x}{3y} = \frac{8}{21}$  — вторая

дробь и  $\frac{5x}{7y} = \frac{20}{49}$  — третья дробь.

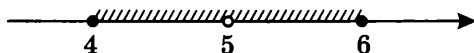
Ответ:  $\frac{4}{7}; \frac{8}{21}; \frac{20}{49}$ .

### 627 | Решение.

Область определения данной функции сводится к решению смешанной системы:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \arcsin(x-5) \neq 0, \text{ или } \\ -1 \leq x-5 \leq 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 5, \\ 4 \leq x \leq 6. \end{cases}$$

Следовательно,  $\begin{cases} x \neq 5, \\ 4 \leq x \leq 6. \end{cases}$



Целые значения  $x$  будут 4 и 6, а их сумма равна  $4 + 6 = 10$ .

Ответ: 10.

### 628 | Решение.

Если тройка чисел  $a_1, a_2, a_3$  образует арифметическую прогрессию, то согласно характеристическому свойству имеем

$$2 \lg(3^x - 3) = \lg 2 + \lg(3^x + 9), \text{ или } \lg(3^x - 3)^2 = \lg(2 \cdot 3^x + 18),$$

$$\text{или } (3^x - 3)^2 = 2 \cdot 3^x + 18, (3^x)^2 - 6 \cdot 3^x + 9 = 2 \cdot 3^x + 18,$$

$$(3^x)^2 - 8 \cdot 3^x - 9 = 0, \text{ откуда находим } 3^x = 9, 3^x = -1.$$

Если  $3^x = 9$ , то  $x = 2$ ; если  $3^x = -1$ , то корней нет, так как  $3^x > 0$  при любом  $x \in \mathbb{R}$ .

Ответ: при  $x = 2$ .

### 629 | Решение.

Если данное уравнение имеет целый корень (корни), то он содержится среди делителей свободного члена 24.

Однако уравнение допускает более короткое и изящное решение:

$$(x^4 - 10x^3 + 25x^2) + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0, \text{ или}$$

$(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$  — квадратное уравнение относительно  $x^2 - 5x$ .

По теореме, обратной теореме Виета, находим  $x^2 - 5x = -4$ , или  $x^2 - 5x = -6$ .

Если  $x^2 - 5x = -4$ , то  $x^2 - 5x + 4 = 0$ ,  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 4$ ;

если  $x^2 - 5x = -6$ , то  $x^2 - 5x + 6 = 0$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 3$ .

Ответ:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 4$ ,  $x_3 = 2$ ,  $x_4 = 3$ .

### 634 | Решение.

Пусть в параллелограмме

$ABCD$   $AD = x$ ,  $AB = y$ .

По условию  $\angle A = 60^\circ$ .

Из  $\triangle ABD$  по теореме косинусов имеем

$$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ.$$

$$BD^2 = x^2 + y^2 - xy.$$

Так как  $\angle BAD = 60^\circ$ , то  $\angle ADC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

Тогда из  $\triangle ADC$  аналогично находим  $AC^2 = x^2 + y^2 + xy$ .

Так как  $AC > BD$ , то данное отношение  $19/7$  равно  $AC^2/BD^2$  (а не  $BD^2/AC^2$ ).

Имеем уравнение  $\frac{x^2 + y^2 + xy}{x^2 + y^2 - xy} = \frac{19}{7}$ , или

$$7x^2 + 7y^2 + 7xy = 19x^2 + 19y^2 - 19xy, \quad 13xy = 6x^2 + 6y^2, \text{ или}$$

$$6x^2 - 9xy - 4xy + 6y^2 = 0, \quad 3x(2x - 3y) - 2y(2x - 3y) = 0,$$

$$(2x - 3y)(3x - 2y) = 0, \text{ откуда } 2x - 3y = 0, \text{ или } 3x - 2y = 0.$$

Если  $2x - 3y = 0$ , то  $2x = 3y$ ,  $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ ;

если  $3x - 2y = 0$ , то  $3x = 2y$ ,  $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ .

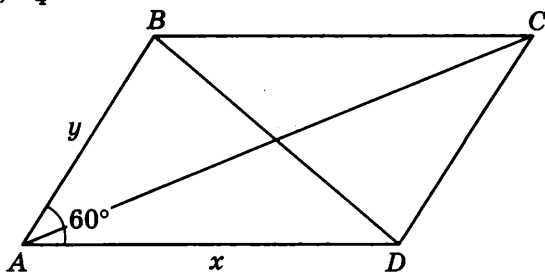
Заметим, что оба значения удовлетворяют условию задачи, так как дают фактически один и тот же параллелограмм.

Ответ:  $3 : 2$ .

### 635 | Решение.

Заметим, что при  $x > 4$  числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль.

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражения, сопряженные числителю и знаменателю:



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x}-3) \cdot (\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)} = \\ &= 2 \cdot \frac{2+2}{\sqrt{1+8}+3} = \frac{2 \cdot 4}{6} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Ответ:  $4/3$ .

### 637 | Решение.

$$\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}.$$

Используя формулу понижения степени  $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos \alpha}{2}$ , имеем

$$\frac{1+\cos 6x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2} + \frac{1+\cos 10x}{2} = \frac{3}{2}, \text{ или}$$

$\cos 6x + \cos 8x + \cos 10x = 0$ ,  $\cos 8x + (\cos 10x + \cos 6x) = 0$ ,  
 $\cos 8x + 2 \cos 8x \cos 2x = 0$ ,  $\cos 8x(1 + 2 \cos 2x) = 0$ , откуда:

а)  $\cos 8x = 0$ ,  $8x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

б)  $1 + 2 \cos 2x = 0$ ,  $\cos 2x = -\frac{1}{2}$ ,  $2x = \pm \left( \pi - \arccos \frac{1}{2} \right) + 2\pi n$ ,

$$2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \text{ откуда } x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $\frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$ ,  $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

### 642 | Решение.

Пусть прямоугольник  $ABCD$  вращается вокруг оси  $MN$ .

По условию  $BC = a$ ,  $DC = b$ ;  $AC \perp MN$ .

Пусть  $AC = x$ ,  $\angle BAC = \alpha$ .

Из  $\triangle ABC$   $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $AK = x \operatorname{ctg} \alpha$ .

Аналогично  $b = x \cos \alpha$ ,  $BP = b \cos \alpha = x \cos^2 \alpha$ ,  $AF = x \operatorname{tg} \alpha$ ,  
 $a = x \sin \alpha$ ,  $DE = a \sin \alpha = x \sin^2 \alpha$ .

Следовательно, искомый объем  $V = V_{ABC} + V_{ACD}$ .



$$\begin{aligned} \text{Ho } V_{ABC} &= V_{AKC} - V_{AKB} = \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot AK - \\ &- \frac{1}{3} \pi \cdot BP^2 \cdot AK = \frac{1}{3} \pi x^3 \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{3} \pi x^3 \operatorname{ctg} \alpha (1 + \cos^2 \alpha) \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{1}{3} \pi x^3 \sin \alpha \cos \alpha (1 + \cos^2 \alpha) = \frac{1}{3} \pi xab(1 + \cos^2 \alpha). \end{aligned}$$

Аналогично находим, что

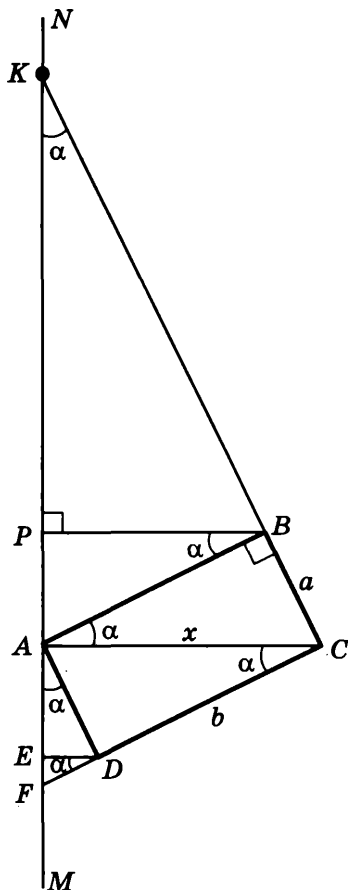
$$V_{ACD} = V_{AFC} - V_{AFD} = \frac{1}{3} \pi x a b (1 + \sin^2 \alpha).$$

$$\begin{aligned} \text{Таким образом, } V &= V_{ABC} + V_{ACD} = \\ &= \frac{1}{3}\pi xab(1 + \cos^2 \alpha) + \frac{1}{3}\pi xab(1 + \sin^2 \alpha) = \\ &= \frac{1}{3}\pi xab(2 + \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = \frac{1}{3}\pi xab \cdot 3 = \pi xab. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ , получим

$$V = \pi ab\sqrt{a^2 + b^2} \text{ (куб. ед.)}.$$

Ответ:  $\pi ab\sqrt{a^2 + b^2}$ .



**643** | *Решение.*

$$y = \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{9-x^2}{1+x^2}}.$$

Пусть  $y = a$ , тогда  $\sqrt{\frac{9-x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{3^a}$ , или  $\frac{9-x^2}{1+x^2} = \frac{1}{3^{2a}}$ ,  
 $3^{2a} \cdot (9-x^2) = 1+x^2$ , или  $3^{2a+2} - 3^{2a} \cdot x^2 = 1+x^2$ ,  
 $3^{2a+2} - 1 = (1+3^{2a}) \cdot x^2$ , откуда  $x^2 = \frac{3^{2a+2} - 1}{1+3^{2a}}$ .

Так как  $9 - x^2 > 0$ , то  $x^2 < 9$ ,  $0 \leq \frac{3^{2a+2} - 1}{1 + 3^a} < 9$ , откуда имеем

$$\begin{cases} 3^{2a+2} - 1 \geq 0, \\ \frac{3^{2a+2} - 1}{1 + 3^{2a}} < 9. \end{cases}$$

Из первого неравенства имеем  $3^{2a+2} \geq 3^0$ , т. е.  $2a + 2 \geq 0$ , откуда  $a \geq -1$ .

Из второго неравенства имеем  $3^{2a+2} - 1 < 9 + 3^{2a+2}$ ,  $9 > -1$  — верно при любых  $a$ .

Следовательно,  $a \geq -1$ , т. е.  $E(y) = [-1; +\infty)$ .

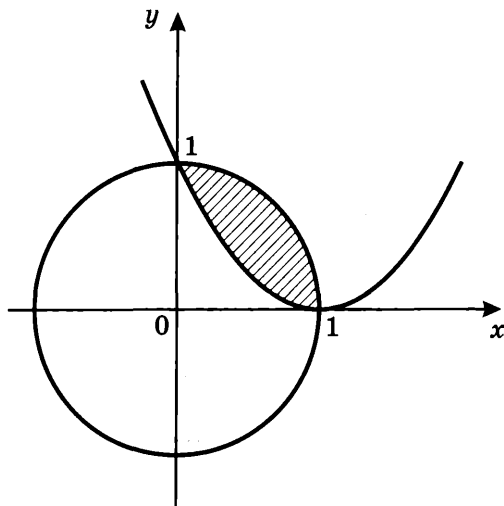
Ответ:  $E(y) = [-1; +\infty)$ .

#### 644 | Решение.

$x^2 + y^2 = 1$  — уравнение окружности радиуса  $r = 1$  с центром в начале координат.

$y = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$  — парабола.  $(1; 0)$  — координаты вершины параболы;  $(0; 1)$  — точка пересечения параболы с осью  $Oy$ .

Искомая площадь равна разности площадей четверти круга и площади криволинейной трапеции, т. е.



$$S = \underbrace{\frac{1}{4} S_{\text{кр.}}}_{\text{четверть круга}} - \int_0^1 (x-1)^2 dx = \frac{1}{4} \pi \cdot 1^2 - \left. \frac{1}{3} (x-1)^3 \right|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} = \frac{1}{12} (3\pi - 4).$$

Итак,  $S = \frac{1}{12} (3\pi - 4)$  (кв. ед.).

Ответ:  $\frac{1}{12} (3\pi - 4)$ .

#### 645 | Решение.

$$\sin \frac{5x}{4} + \cos x = 2.$$

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin \frac{5x}{4} = 1, \\ \cos x = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = 2\pi k; \end{cases} \quad 2\pi k = \frac{2\pi}{5} + \frac{8\pi n}{5}, \text{ откуда } k = \frac{1}{5} (4n + 1).$$

Так как  $k \in \mathbb{Z}$ , то  $n = 1 + 5m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , и тогда  $x = 2\pi + 8\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $x = 2\pi + 8\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

**650 | Решение.**

Пусть  $x$  — длина поезда, тогда скорость поезда мимо неподвижного пассажира  $\frac{x}{7}$  м/с, а скорость поезда мимо платформы будет равна

$$\frac{x+378}{25} \text{ м/с.}$$

Согласно условию задачи эти скорости равны, т. е. имеем уравнение  $\frac{x}{7} = \frac{x+378}{25}$ , или  $25x - 7x = 378 \cdot 7$ ,  $18x = 378 \cdot 7$ , откуда  $x = 147$ .

Следовательно, длина поезда 147 м.

Ответ: 147 м.

**651 | Решение.**

I способ

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} + xy = 10, \\ \frac{y^3}{x} + xy = 2,5. \end{cases}$$

Перемножив уравнения системы, получим

$$x^2y^2 + y^4 + x^4 + x^2y^2 = 25, \text{ или } x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 25, (x^2 + y^2)^2 = 25.$$

Так как  $x^2 + y^2 > 0$  при всех  $x \neq 0$ ,  $y \neq 0$  (что следует из условия), то

$$x^2 + y^2 = 5. \quad (1)$$

Исходную систему запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{x}{y} \cdot (x^2 + y^2) = 10, \\ \frac{y}{x} \cdot (x^2 + y^2) = \frac{5}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Разделив почленно первое уравнение системы (2) на второе, имеем

$$\frac{x^2}{y^2} = 4, \text{ или } x^2 = 4y^2. \quad (3)$$

Из соотношений (1) и (3) получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ x^2 = 4y^2; \end{cases} \quad \begin{cases} 4y^2 + y^2 = 5, \\ x^2 = 4y^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 4y^2, \\ y^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Итак, исходная система имеет две пары решений.

Ответ:  $(-2; -1)$ ,  $(2; 1)$ .

## II способ

*Решение.*

Запишем данную систему в виде

$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = 10y, \\ y^3 + x^2y = 2,5x; \end{cases} \quad \begin{cases} x(x^2 + y^2) = 10y, \\ y(x^2 + y^2) = 2,5x, \end{cases} \quad \text{где } x \neq 0, y \neq 0.$$

Разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{x}{y} = \frac{10y}{2,5x}, \text{ или } \frac{x}{y} = \frac{4y}{x}, \text{ или } x^2 = 4y^2, \text{ откуда } x = \pm 2y.$$

Получим две системы уравнений:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} x = 2y, \\ x^3 + xy^2 = 10y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ 8y^3 + 2y^3 = 10y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ 10y(y^2 - 1) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = \pm 1. \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} x = -2y, \\ -8y^3 - 2y^3 = 10y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2y, \\ y^2 = -1 \end{cases} \text{ — нет корней,} \end{aligned}$$

значит, система 2) не имеет решений.

*Ответ:*  $(-2; -1), (2; 1)$ .

### 674 | *Решение.*

Пусть первый предмет куплен за  $x$  руб., тогда второй куплен за  $(225\,000 - x)$  руб.

При продаже первого предмета получено 25 % прибыли. Значит, он продан за  $1,25x$  руб.

Второй предмет, на котором получено 50 % прибыли, продан за  $1,5(225\,000 - x)$  руб.

По условию общий процент прибыли (по отношению к покупной цене 225 000 руб.) составлял 40 %.

Значит, общая сумма выручки была  $1,40 \cdot 225\,000 = 315\,000$  руб.

Имеем уравнение  $1,25x + 1,5 \cdot (225\,000 - x) = 315\,000$ .

Умножая обе части уравнения на 4, получим

$$5x + 6 \cdot (225\,000 - x) = 315\,000 \cdot 4, \text{ или}$$

$$6x - 5x = 6 \cdot 225\,000 - 4 \cdot 315\,000,$$

откуда  $x = 90\,000$ , тогда  $225\,000 - x = 135\,000$ .

Итак, первый предмет куплен за 90 000 руб., второй — за 135 000 руб.

*Ответ:* 90 000 руб., 135 000 руб.

**676** | *Решение.*

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sqrt{3}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Упростим первое уравнение системы, применив формулу суммы косинусов:  $2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = \sqrt{3}$ , или, учитывая второе уравнение системы, получим

$$2\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{x-y}{2} = \sqrt{3}, \quad 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\frac{x-y}{2} = \sqrt{3},$$

откуда  $\cos\frac{x-y}{2} = 1$ ,  $x - y = 4\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

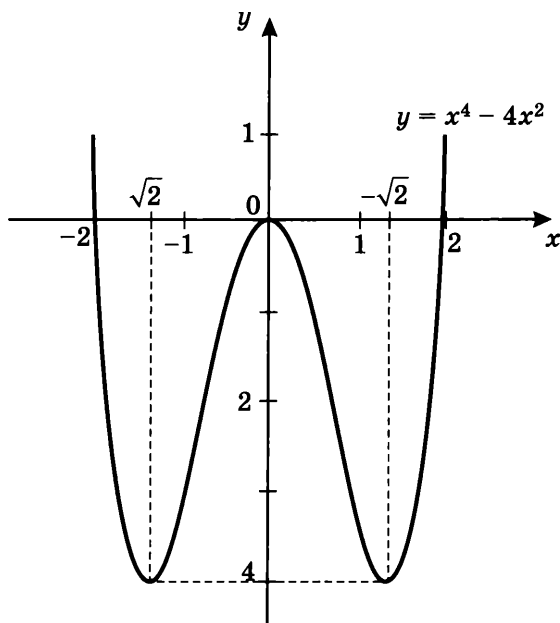
Имеем равносильную систему  $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ x - y = 4\pi n. \end{cases}$

Складывая и вычитая уравнения полученной системы, находим

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + 4\pi n, \\ 2y = \frac{\pi}{3} - 4\pi n; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ y = \frac{\pi}{6} - 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*Ответ:*  $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} - 2\pi n\right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

677 | Решение.



1)  $D(y) = R$ , так как  $y$  — многочлен;

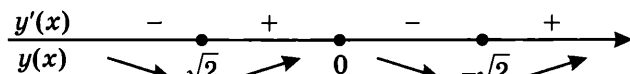
2)  $y(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2 = y(x)$  — четная. Значит, график функции симметричен относительно оси ординат;

3)  $y' = (x^4 - 4x^2)' = 4x^3 - 8x$ ;

4)  $y' = 0$ ,  $4x(x^2 - 2) = 0$ , откуда  $x = 0$ ,  $x = \sqrt{2}$ ,  $x = -\sqrt{2}$ ;

5)  $y(0) = 0$ ,  $y(\pm\sqrt{2}) = 4 - 4 \cdot 2 = -4$ ;

6) промежутки монотонности и экстремумы функции:



$y \downarrow (-\infty; \sqrt{2}]$  и на  $[0; \sqrt{2}]$ ;

$y \uparrow [-\sqrt{2}; 0]$  на  $[\sqrt{2}; +\infty)$ .

$x = \pm\sqrt{2}$  — точки минимума функции,  $y(\pm\sqrt{2}) = -4$ ;

$x = 0$  — точка максимума,  $y(0) = 0$ ;

7)  $(0; 0)$  — точка пересечения с осью  $Ox$  (график проходит через начало координат);  $(-2; 0)$  и  $(2; 0)$  — точки пересечения с осью  $Oy$ ;

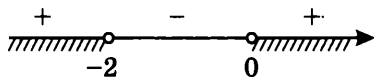
8) дополнительная точка при  $x = 1$ ,  $y = -3$ ;

9) строим график.

**678** | Решение.

$$36^x - 2 \cdot 18^x - 8 \cdot 9^x > 0.$$

Так как  $9^x > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , то, разделив обе части неравенства на  $9^x$ , получим равносильное неравенство  $\left(\frac{36}{9}\right)^x - 2\left(\frac{18}{9}\right)^x - 8 > 0$ , или  $4^x - 2 \cdot 2^x - 8 > 0$ . Пусть  $2^x = t$ ,  $t > 0$ , тогда  $t^2 - 2t - 8 > 0$ ,  $t_1 = 4$ ,  $t_2 = -2$ .



Так как  $t > 0$ , то  $t > 4$ , или  $2^x > 4$ , откуда  $x > 2$ .

Ответ:  $(2; +\infty)$ .

**679** | Решение.

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 6x^2 + 8x}{\sqrt{5+x} - 1}.$$

Так как при  $x \rightarrow -4$  числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то получим неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ .

Заметим, что  $x^3 + 6x^2 + 8x = x(x^2 + 6x + 8) = x(x+2)(x+4)$ , где  $-2$  и  $-4$  — корни трехчлена  $x^2 + 6x + 8$ .

Умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное знаменателю:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 6x^2 + 8x}{\sqrt{5+x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x(x+2)(x+4)(\sqrt{5+x} + 1)}{(\sqrt{5+x} - 1)(\sqrt{5+x} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x(x+2)(x+4)(\sqrt{5+x} + 1)}{5+x-1} = \lim_{x \rightarrow -4} x(x+2)(\sqrt{5+x} + 1) = \\ &= -4 \cdot (-4+2)(\sqrt{5-4} + 1) = -4 \cdot (-2) \cdot 2 = 16. \end{aligned}$$

Ответ: 16.

**686** | Решение.

По условию задачи  $BE : EC = 3 : 5$  ( $BC > AB$ ).

Заметим, что  $\triangle AKD \sim \triangle EKD$  (по двум углам:  $\angle 1 = \angle 2$  — как вертикальные и  $\angle 3 = \angle 4$  — как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $AE$ ).

$$\text{Из подобия треугольников имеем } \frac{BK}{KD} = \frac{BE}{AD}. \quad (1)$$

Но  $BE : EC = 3 : 5$  (по условию), или

$$\frac{BE}{BC - BE} = \frac{3}{5}.$$

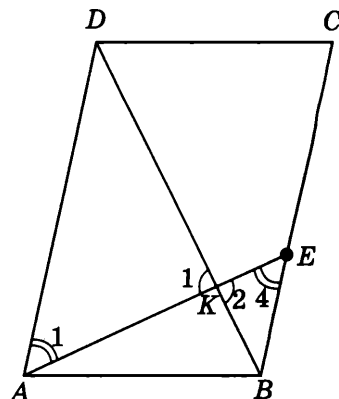
Так как  $BC = AD$ , то  $\frac{BE}{AD - BE} = \frac{3}{5}$ , или

$$\frac{AD - BE}{BE} = \frac{5}{3}, \quad \frac{AD}{BE} - 1 = \frac{5}{3}, \quad \frac{AD}{BE} = \frac{8}{3}, \quad \text{откуда}$$

$$\frac{BE}{AD} = \frac{3}{8}.$$

Учитывая (1), имеем  $\frac{BK}{KD} = \frac{3}{8}$ .

Ответ: 3 : 8.



**689** | Решение.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 13, \\ 3x + y + z = 8, \\ x + y + z = 6. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения системы третье:

$$3x + y + z - (x + y + z) = 8 - 6, \quad \text{или} \quad 3x - x = 2, \quad 2x = 2, \quad x = 1.$$

Подставим значение  $x = 1$  в третье и первое уравнения, тогда получим равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} 2 + y + 3z = 13, \\ 1 + y + z = 6; \end{cases} \quad \begin{cases} y + 3z = 11, \\ y + z = 5. \end{cases}$$

Теперь вычтем из первого уравнения полученной системы второе:

$$y + 3z - (y + z) = 11 - 5, \quad \text{или} \quad 2z = 6, \quad z = 3, \quad \text{тогда} \quad y = 5 - z, \quad y = 5 - 3 = 2.$$

Итак, тройка чисел (1, 2, 3) является решением исходной системы.

Ответ: (1; 2; 3).

**690** | Решение.

$$\log_4 x - \log_x 4 \leq \frac{3}{2}.$$

Заметим, что  $\log_x 4 = \frac{1}{\log_4 x}$ , тогда данное неравенство можно записать в виде

$$\log_4 x - \frac{1}{\log_4 x} \leq \frac{3}{2}.$$

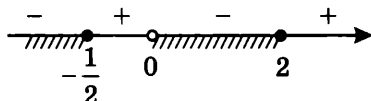


Пусть  $\log_4 x = t$ , тогда  $t - \frac{1}{t} \leq \frac{3}{2}$ , или  $\frac{2t^2 - 3t - 2}{2t} \leq 0$ , или

$$\frac{2(t-2)\left(t+\frac{1}{2}\right)}{2t} \leq 0, \quad \frac{(t-2)\left(t+\frac{1}{2}\right)}{t} \leq 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:

$$t_1 = 2, \quad t_2 = -\frac{1}{2}, \quad t_3 = 0.$$



$$t \leq -\frac{1}{2}, \quad 0 < t \leq 2.$$

Учитывая подстановку, имеем:

$$1) \log_4 x = -\frac{1}{2}, \quad 0 < x \leq 4^{-1/2}, \quad 0 < x \leq \frac{1}{2}.$$

$$2) 0 < \log_4 x \leq 2, \text{ или } 1 < x \leq 16.$$

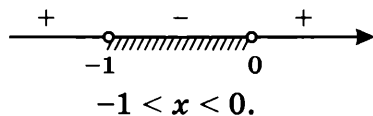
$$\text{Ответ: } \left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; 16].$$

### 691 | Решение.

$q = x^2 + x + 1$  — знаменатель прогрессии.

Так как  $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$  при любом  $x \in \mathbb{R}$ , то достаточно

решить неравенство  $q < 1$ , или  $x^2 + x + 1 < 1$ ,  $x^2 + x < 0$ ,  $x(x + 1) < 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -1$ .



Ответ:  $(-1; 0)$ .

### 699 | Решение.

$$(x+2)^{x^2-4} = (x+2)^{3x}.$$

Возможны случаи:

1)  $x + 2 = 1$ , т. е.  $x = -1$ , тогда получим  $1^{-3} = 1^{-3}$  — верное равенство, значит,  $x = -1$  — корень данного уравнения;

2)  $x + 2 = -1$ , т. е.  $x = -3$ , тогда уравнение примет вид

$$(-1)^{x^2-4} = (-1)^{3x}.$$

Этому уравнению могут удовлетворять только те значения  $x$ , при которых  $x^2 - 4$  и  $3x$  — целые числа (так как число  $(-1)$  можно возводить лишь в целую степень) одинаковой четности, т. е. либо оба четные, либо оба нечетные.

При  $x = -3$  имеем  $(-1)^5 = (-1)^{-9}$  — верно, значит,  $x = -3$  — корень данного уравнения;

3)  $x + 2 = 0$ , откуда  $x = -2$ . В этом случае исходное уравнение имеет вид  $0^{x^2-4} = 0^{3x}$ , и так как выражение  $0^r$  имеет смысл лишь при  $r > 0$ , то значение  $x = -2$  не подходит, т. е.  $x = -2$  не является корнем данного уравнения;

4)  $x + 2 > 0$  и  $x + 2 \neq 1$ , то из данного уравнения имеем  $x^2 - 4 = 3x$ , или  $x^2 - 3x - 4 = 0$ , откуда  $x = 4$ ,  $x = -1$ .

При  $x = 4$  получим  $6^{12} = 6^{12}$  — верное равенство. Значит,  $x = 4$  — корень исходного уравнения.

При  $x = -1$  имеем  $1^{-3} = 1^{-3}$  — верно, значит,  $x = -1$  — корень исходного уравнения.

Итак, данное уравнение имеет 3 корня.

Ответ:  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -3$ ,  $x_3 = 4$ .

## 700 | Решение.

$$\cos x + \cos \frac{3x}{4} = 2.$$

Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos \frac{3x}{4} = 1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 = \frac{\pi k}{2}, & k \in \mathbb{Z}, \\ x_2 = \frac{8\pi n}{3}, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Найдем пересечение полученных серий:  $\frac{\pi k}{2} = \frac{8\pi n}{3}$ , или  $3k = 16n$ .

Следовательно,  $k = 16t$ , где  $t \in \mathbb{Z}$ . Тогда  $x = 8\pi t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $8\pi t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ .

**701 | Решение.**

$$\frac{2x^2 - 5x - 2}{3x - x^2 - 7} \leq 1.$$

Перенесем 1 из правой части в левую и упростим полученную дробь:

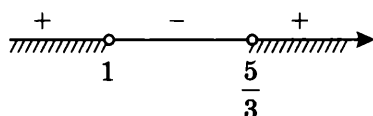
$$\frac{2x^2 - 5x - 2}{3x - x^2 - 7} - 1 \leq 0, \text{ или } \frac{2x^2 - 5x - 2 - 3x + x^2 + 7}{3x - x^2 - 7} \leq 0, \text{ или } \frac{3x^2 - 8x + 5}{-(x^2 - 3x - 7)} \leq 0,$$

$$\frac{3x^2 - 8x + 5}{x^2 - 3x + 7} \geq 0.$$

Заметим, что  $x^2 - 3x + 7 > 0$  при любом  $x \in R$ , так как дискриминант  $D < 0$  и  $a = 1 > 0$ , тогда имеем равносильное неравенство

$$3x^2 - 8x + 5 \geq 0, D/4 = 16 - 15 = 1 > 0, x_{1,2} = \frac{4 \pm 1}{3}, \text{ откуда } x_1 = \frac{5}{3},$$

$$x_2 = 1.$$



$$x \leq 1; x \geq 5/3.$$

Ответ:  $(-\infty; 1] \cup [5/3; +\infty)$ .

**702 | Решение.**

Заметим, что если  $F(x)$  есть первообразная для функции  $f(x)$ , а  $k$  и  $b$  — постоянные величины, то  $\frac{1}{k}F(kx+b)$  есть первообразная для

$f(kx+b)$ . Для данной функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1/2}$  первообразной будет

$$\text{функция } \frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}, \text{ где } x > 0.$$

Так как  $\frac{1}{\sqrt{3-x}} = f(kx+b)$  при  $k = -1$  и  $b = 3$ , то любая первообразная

для функции  $\frac{1}{\sqrt{3-x}}$  примет вид  $F(x) = -2\sqrt{3-x} + C$ , где  $x < 3$ .

Согласно условию график первообразной проходит через точку  $A(-1; 5)$ , т. е.  $F(-1) = 5$ , тогда имеем  $5 = -2 \cdot \sqrt{3+1} + C$ , откуда  $C = 9$ .

Следовательно, первообразная примет вид  $F(x) = 9 - 2\sqrt{3-x}$ ,  $x < 3$ .

Ответ:  $F(x) = 9 - 2\sqrt{3-x}$ ,  $x < 3$ .

### 703 | Решение.

Вычислим значение

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2-1} &= \sqrt{\frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2} - 1 = \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{a}{b} + 2 + \frac{b}{a} \right)} - 1 = \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{a}{b} - 2 + \frac{b}{a} \right)} = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\left( \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)^2} = \frac{1}{2} \left| \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right|.\end{aligned}$$

Согласно условию  $a > b > 0$ , тогда  $\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} > 0$ , значит,

$$\left| \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right| = \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

$$\text{Следовательно, } \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right).$$

Теперь упростим данное выражение:

$$\begin{aligned}\frac{2b\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}} &= \frac{2b \cdot \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right)}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{b}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b}{a}}} = \frac{b \left( \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right)}{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}} = \frac{b \cdot (a-b)}{\sqrt{ab} \cdot \sqrt{\frac{b}{a}}} = \\ &= \frac{b \cdot (a-b)}{b} = a-b.\end{aligned}$$

Ответ:  $a - b$ .

### 710 | Решение.

Пусть  $r = 2$  и  $R = 5$  — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.

Пусть  $x$  — больший катет,  $y$  — меньший катет.

Известно, что в прямоугольном треугольнике  $r = \frac{1}{2}(x+y-z)$ , где

$z = AB$  — диаметр описанной окружности.

Значит,  $z = 2R = 10$ ,  $x + y - z = 2r$ , или  $x + y = 14$ .

Кроме того, по теореме Пифагора  $x^2 + y^2 = 100$ .

Имеем систему уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ x + y = 14. \end{cases}$$

Так как нам надо найти больший катет  $x$ , то, выразив из II уравнения  $y$  через  $x$  и подставив в I уравнение системы, получим

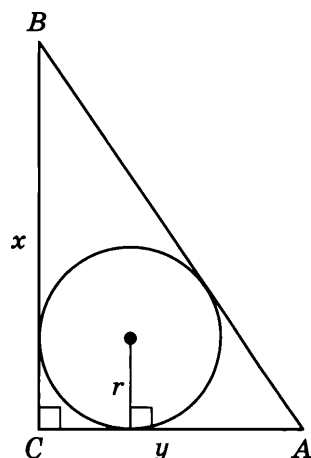
$$y = 14 - x, \quad x^2 + (14 - x)^2 = 100,$$

$$x^2 + 196 - 28x + x^2 = 100,$$

$$2x^2 - 28x + 96 = 0, \quad x^2 - 14x + 48 = 0, \quad \text{откуда } x_1 = 6, \quad x_2 = 8.$$

Значит,  $x = 8$  и  $BC = 8$  — больший катет.

Ответ: 8.



## 722 | Решение.

I способ

Проведем биссектрису  $AD$  угла  $A$ , тогда  $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ .

В  $\triangle ADC$  углы при основании равны, т. е.  $\angle 2 = \angle 3$  и  $AD = DC$ .

Пусть  $AB = x$ ,  $AD = DC = y$ , тогда  $BC = x + 2$ ,  $BD = x + 2 - y$ .

Заметим, что  $\triangle ABD \sim \triangle ABC$  по двум углам ( $\angle B$  — общий,  $\angle 1 = \angle 3$ ).

Из подобия имеем  $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}$ , или  $\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}$ .

Итак, для нахождения  $x$  и  $y$  имеем систему уравнений

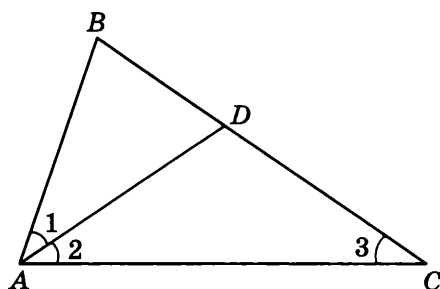
$$\begin{cases} \frac{x}{x+2} = \frac{y}{5}, \\ \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x = xy + 2y, \\ 5x + 10 - 5y = xy, \end{cases}$$

откуда, вычитая из первого уравнения второе, получим  $5y - 10 = 2y$ ,

$$3y = 10, \quad y = \frac{10}{3}, \quad \text{тогда } 5x = \frac{10}{3}x + \frac{20}{3}, \quad 15x - 10x = 20, \quad 5x = 20, \quad x = 4.$$

Итак,  $AB = 4$  см,  $BC = 6$  см.

Ответ:  $AB = 4$  см,  $BC = 6$  см.



## II способ

*Решение.*

Пусть  $\angle C = \alpha$ , тогда  $\angle A = 2\alpha$  и  $\angle B = 180^\circ - 3\alpha$ .

Полагая  $AB = x$ ,  $BC = x + 2$ , по теореме синусов имеем

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{x+2}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\sin(180^\circ - 3\alpha)}, \text{ или } \begin{cases} \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{x+2}{\sin 2\alpha}, \\ \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{5}{\sin 3\alpha}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим  $\frac{x+2}{x} = \frac{\sin \alpha}{\sin 2\alpha}$ , или

$$1 + \frac{2}{x} = 2 \cos \alpha. \quad (1)$$

Из второго уравнения системы получим  $x = \frac{5 \sin \alpha}{\sin 3\alpha}$ .

Так как  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ , то  $x = \frac{5}{3 - 4 \sin^2 \alpha}$ .

Подставив значение  $x$  в (1), получим уравнение

$$1 + \frac{6 - 8 \sin^2 \alpha}{5} = 2 \cos \alpha, \text{ или } 5 + 6 - 8(1 - \cos 2\alpha) = 10 \cos \alpha, \text{ или}$$

$$8 \cos^2 \alpha - 10 \cos \alpha + 3 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно  $\cos \alpha$ , находим  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ .

Если  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ , то, учитывая (1), находим  $x = 4$ .

Если  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ , то получим  $1 + \frac{2}{x} = 1$ , что невозможно.

Итак,  $AB = 4$  см, тогда  $BC = x + 2 = 6$  (см).

*Замечание.* Если  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ , то  $\alpha = 60^\circ$ , тогда  $\angle C = 60^\circ$ ,  $\angle A = 120^\circ$ ,

что не может быть.

*Ответ:*  $AB = 4$  см,  $BC = 6$  см.

## III способ

(см. II способ)

*Решение.*

Так как  $1 + \frac{2}{x} = 2 \cos \alpha$ , то  $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 = 4 \cos^2 \alpha$ , или  $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 = 4(1 - \sin^2 \alpha) = 4 - 4 \sin^2 \alpha$ .

Кроме того,  $x = \frac{5}{3 - 4\sin^2 \alpha}$ , откуда  $4\sin^2 \alpha = 3 - \frac{5}{x}$ .

Следовательно,  $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 = 4 - \left(3 - \frac{5}{x}\right)$ , или  $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 = 1 + \frac{5}{x}$ .

Далее  $\frac{1}{x} = t$ ,  $t > 0$ ,  $(1 + 2t)^2 = 1 + 5t$ , или  $4t^2 - t = 0$ ,  $t = \frac{1}{4}$ , т. е.  $x = 4$

и т. д.

Ответ:  $AB = 4$  см,  $BC = 6$  см.

## 723 | Решение.

І способ

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17. \end{cases}$$

Пусть  $x = ty$ , тогда данная система примет вид

$$\begin{cases} y^2(3t^2 + 2t + 1) = 11, \\ y^2(t^2 + 2t + 3) = 17. \end{cases} \quad (1)$$

Разделим почленно первое уравнение системы (1) на второе:

$$\frac{3t^2 + 2t + 1}{t^2 + 2t + 3} = \frac{11}{17}, \text{ или } 17(3t^2 + 2t + 1) = 11(t^2 + 2t + 3), \text{ или}$$

$$51t^2 + 34t + 17 = 11t^2 + 22t + 33, 10t^2 + 3t - 4 = 0, \text{ откуда}$$

$$t_1 = -\frac{4}{5}, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

1) Если  $t_1 = -\frac{4}{5}$ , то из второго уравнения системы (1) имеем

$$y^2\left(\frac{16}{25} - \frac{8}{5} + 3\right) = 17, \text{ или } y^2 = \frac{25}{3}, \quad y_{1,2} = \pm \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Так как } x = ty, \text{ то } x_{1,2} = -\frac{4}{5} \cdot \left(\pm \frac{5}{\sqrt{3}}\right) = \mp \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

2) Если  $t_2 = \frac{1}{2}$ , то  $y^2\left(\frac{1}{4} + 1 + 3\right) = 17$ , или  $y^2 = 4$ , откуда  $y_{3,4} = \pm 2$  и

$$x_{3,4} = \frac{1}{2} \cdot (\pm 2) = \pm 1.$$

Итак, исходная система имеет 4 пары решений.

Ответ:  $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{5}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{\sqrt{3}}\right), (1; 2), (-1; -2).$

II способ

Решение.

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17, \end{cases} \begin{cases} \cdot 17 \\ \cdot 11 \end{cases} \begin{cases} 51x^2 + 34xy + 17y^2 = 11 \cdot 17, \\ 11x^2 + 22xy + 33y^2 = 17 \cdot 11. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$40x^2 + 12xy - 16y^2 = 0, \text{ или } 10x^2 + 3xy - 4y^2 = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) является однородным уравнением II степени, которое можно решить разными способами:

- 1) разложением левой части на множители;
- 2) делением обеих частей уравнения на  $x^2 \neq 0$  или  $y^2 \neq 0$ ;
- 3) рассматривать полученное уравнение как квадратное относительно  $x^2$  или  $y^2$ .

Решим полученное уравнение разложением левой части на множители:  $10x^2 + 3xy - 4y^2 = 0$ , или  $10x^2 - 5xy + 8xy - 4y^2 = 0$ .

Теперь применим способ группировки:  $5x(2x - y) + 4y(2x - y) = 0$ , или  $(2x - y)(5x + 4y) = 0$ , откуда  $2x - y = 0$ , или  $5x + 4y = 0$ .

Имеем две системы уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x - y = 0, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17; \end{cases} \begin{cases} y = 2x, \\ x^2 + 4x^2 + 12x^2 = 17; \end{cases} \begin{cases} y = 2x, \\ x^2 = 1; \end{cases} \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \pm 2. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 5x + 4y = 0, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17; \end{cases} \begin{cases} y = -\frac{5}{4}x, \\ x^2 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{75}{16}x^2 = 17; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{4}x, \\ 16x^2 - 40x^2 + 75x^2 = 17 \cdot 16; \end{cases} \begin{cases} y = -\frac{5}{4}x, \\ 51x^2 = 17 \cdot 16; \end{cases} \begin{cases} y = -\frac{5}{4}x, \\ 3x^2 = 16; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{5}{4}x, \\ x^2 = \frac{16}{3}; \end{cases} \begin{cases} x = \pm \frac{4}{\sqrt{3}}, \\ y = \mp \frac{5}{\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Ответ:  $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{5}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{\sqrt{3}}\right), (1; 2), (-1; -2).$



**724** | Решение.

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = 0.$$

Используя формулу суммы тангенсов, преобразуем уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} = 0, \text{ откуда } \begin{cases} \sin 3x = 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \cos 2x \neq 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = \frac{\pi n}{3}, \\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Остается сделать проверку:

а)  $\frac{\pi n}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , при  $2n = 3(2n + 1)$ , что невозможно;

б)  $\frac{\pi n}{3} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ , при  $4n = 3(2n + 1)$ , что также невозможно.

Значит, посторонних корней нет.

Ответ:  $\frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**725** | Решение.

I способ

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4.$$

Заметим, что  $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x \cdot \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = \left(\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\right)^x =$   
 $= \left(\sqrt{4-3}\right)^x = 1$ , тогда  $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = \frac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x}$ .

Пусть  $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = t$ , тогда получим уравнение  $\frac{1}{t} + t = 4$ ,  $t > 0$  или  
 $t^2 - 4t + 1 = 0$ ,  $t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ .

1) Если  $t = 2 + \sqrt{3}$ , то  $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 2 + \sqrt{3}$ ,  $x_1 = 2$ .

2) Если  $t = 2 - \sqrt{3}$ , то  $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x = 2 - \sqrt{3}$ , или  $\left(2 + \sqrt{3}\right)^x = \left(2 + \sqrt{3}\right)^{-1}$ ,

откуда  $x_2 = -2$ .

Итак, исходное уравнение имеет два корня  $x_{1,2} = \pm 2$ .

Ответ:  $x_{1,2} = \pm 2$ .

II способ

*Решение.*

$$\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 4.$$

Пусть  $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = a$ ,  $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = b$ , где  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

Тогда  $a \cdot b = \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x \cdot \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = \left(\sqrt{4-3}\right)^x = 1$ .

Исходное уравнение примет вид  $a + b = 4$ .

Следовательно, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a + b = 4, \\ ab = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 4 - a, \\ a(4 - a) = 1. \end{cases}$$

Решив второе уравнение системы, имеем

$$a^2 - 4a + 1 = 0, D/4 = 3, a_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}, \text{ тогда } b = 4 - a = 2 \mp \sqrt{3}.$$

Учитывая, что  $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = a$ , получим:

1)  $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2 + \sqrt{3}$ , или  $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = (2 - \sqrt{3})^{-1}$ , откуда находим  $x_1 = -2$ .

2)  $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 2 - \sqrt{3}$ ,  $x_2 = 2$ .

Значения  $b = 2 \mp \sqrt{3}$  дают те же корни.

Следовательно, исходное уравнение имеет 2 корня.

Ответ:  $x_{1,2} = \pm 2$ .

**726** | *Решение.*

$$|\log_3 x| < \left| \log_3 \frac{x}{9} \right|.$$

Заметим, что  $\log_3 \frac{x}{9} = \log_3 x - \log_3 9 = \log_3 x - 2$ .

Поскольку обе части данного неравенства неотрицательны при всех  $x > 0$ , то после возведения в квадрат получим равносильное неравенство  $\log_3^2 x - (\log_3 x - 2)^2 < 0$ , или  $4 \log_3 x - 4 < 0$ ,  $\log_3 x < 1$ , откуда  $0 < x < 3$ .

Ответ:  $(0; 3)$ .

**727 | Решение.**

$$1) 8\frac{7}{55} - 6\frac{17}{110} = \left(8 + \frac{7}{55}\right) - \left(6 + \frac{17}{110}\right) = 2 + \frac{7}{55} - \frac{17}{110} =$$

$$= 2 + \frac{14}{110} - \frac{17}{110} = 2 - \frac{3}{110} = 1\frac{110}{110} - \frac{3}{110} = 1\frac{107}{110} = \frac{217}{110};$$

$$2) \frac{217}{110} \cdot 1\frac{3}{217} = \frac{217 \cdot 220}{110 \cdot 217} = 2;$$

$$3) \frac{2}{5} - \frac{3}{20} = \frac{8-3}{20} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4};$$

$$4) \frac{1}{4} : 1\frac{7}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{15} = \frac{2}{15};$$

$$5) 2 : \frac{2}{15} = 2 \cdot \frac{15}{2} = 15.$$

Если 7,5 % — 15, то 100 % —  $x$ , тогда  $x = \frac{100 \cdot 15}{7,5} = 200$ .

Ответ: 200.

**734 | Решение.**

Пусть в конусе  $ABC$   $\angle ACB = 2\alpha$ ,  $AO = R$  — радиус основания,  $CO = H$  — высота,  $AC = CB = l$  — образующая.

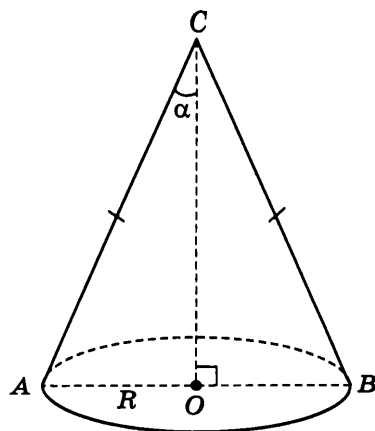
По условию задачи  $l + H = m$ . (1)

Из  $\triangle AOC$ , где  $\angle ACO = \alpha$ , имеем

$H = l \cos \alpha$ ,  $R = l \sin \alpha$ , тогда (1) примет вид  $l + l \cos \alpha = m$ ,  $l(l + \cos \alpha) = m$ , откуда

$$l = \frac{m}{1 + \cos \alpha} = \frac{m}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ тогда}$$

$$R = l \sin \alpha = \frac{m \sin \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}.$$



$$\text{Теперь находим } S_{\text{полн.}} = \pi R(R + l) = \frac{\pi m \sin \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \left( \frac{m \sin \alpha}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{m}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) =$$

$$= \frac{\pi m^2 \sin \alpha}{4 \cos^4 \frac{\alpha}{2}} (1 + \sin \alpha).$$

Но  $1 + \sin \alpha = 1 + \cos(90^\circ - \alpha) = 2\cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$ , тогда

$$S_{\text{полн.}} = \frac{\pi m^2 \sin \alpha \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^4 \frac{\alpha}{2}} \text{ (кв. ед.)}.$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{m^2 \sin^2 \alpha}{4\cos^4 \frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{m \cos \alpha}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{24\cos^6 \frac{\alpha}{2}} \text{ (куб. ед.)}.$$

$$\text{Ответ: } S_{\text{полн.}} = \frac{\pi m^2 \sin \alpha \cos^2\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos^4 \frac{\alpha}{2}}, \quad V = \frac{\pi m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{24\cos^6 \frac{\alpha}{2}}.$$

### 735 | Решение.

Уравнение имеет один корень, если  $2 + \log_2 a = 0$  или дискриминант  $D = 0$ . В первом случае имеем  $\log_2 a = -2$ , откуда  $a = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ ; во

втором случае  $D = 36\log_2^2 a - 4(2 + \log_2 a)(4\log_2 a + 1) = 0$ , или

$$9\log_2^2 a - (8\log_2 a + 4\log_2^2 a + 2 + \log_2 a) = 0, \quad 5\log_2^2 a - 9\log_2 a - 2 = 0,$$

$$D = 81 + 40 = 121 > 0.$$

$$\log_2 a = \frac{9 \pm 11}{10}, \text{ откуда находим } \log_2 a = 2, \quad a = 2^2 = 4, \quad \log_2 a = -\frac{1}{5},$$

$$a = 2^{-1/5} = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

Итак, исходное уравнение имеет один корень, если  $a = \frac{1}{4}$ ,  $a = 4$ ,

$$a = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

$$\text{Ответ: при } a = \frac{1}{4}, 4, \frac{1}{\sqrt[5]{2}}.$$

### 736 | Решение.

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7, \\ 3x+2y = 23. \end{cases}$$

Пусть  $\sqrt{x+y} = u$ ,  $\sqrt{2x+y+2} = v$ , где  $u \geq 0$ ,  $v \geq 0$ .

Тогда  $x + y = u^2$ ,  $2x + y + 2 = v^2$ , значит,  $u^2 + v^2 = 3x + 2y + 2$ .

Но  $3x + 2y = 23$ , тогда  $u^2 + v^2 = 25$ . Кроме того, первое уравнение исходной системы с учетом подстановок примет вид  $u + v = 7$ .

Следовательно, для нахождения  $u$  и  $v$  имеем систему уравнений

$$\begin{cases} u + v = 7, \\ u^2 + v^2 = 25. \end{cases}$$

Полученную систему можно решать способом подстановки или так:  $u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv$ , или  $25 = 49 - 2uv$ .

Откуда  $uv = 12$ . Получим равносильную систему уравнений

$$\begin{cases} u + v = 7, \\ uv = 12; \end{cases} \quad \begin{cases} u = 3, \\ v = 4; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u = 4, \\ v = 3. \end{cases}$$

Учитывая подстановки, получим две системы:

$$1) \begin{cases} x + y = 9, \\ 2x + y + 2 = 16. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, находим  $x + 2 = 16 - 9$ ,  $x_1 = 5$ , тогда  $y_1 = 4$ .

$$2) \begin{cases} x + y = 16, \\ 2x + y + 2 = 9. \end{cases}$$

Аналогично находим  $x + 2 = -7$ , откуда  $x_2 = -9$ ,  $y_2 = 16 - (-9) = 25$ .

Найденные пары удовлетворяют исходной системе.

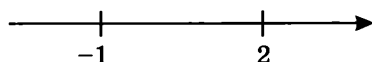
**Ответ:** (5; 4), (-9; 25).

### 737 | Решение.

$$|x + 1| - |x - 2| < 3.$$

При  $x = -1$ ,  $|x + 1| = 0$ ; при  $x = 2$ ,  $|x - 2| = 0$ .

Точки -1 и 2 разбивают числовую прямую на три промежутка:



Решим данное неравенство на каждом из промежутков:

1)  $x < -1$ , тогда имеем  $-x - 1 + x - 2 < 3$ , или  $-3 < 3$ ; значит,  $x \in R$  и данное неравенство выполняется при  $x < -1$ ;

2)  $-1 \leq x < 2$ , тогда  $x + 1 + x - 2 < 3$ ,  $2x < 4$ . Откуда  $x < 2$ .

Значит,  $-1 \leq x < 2$ ;

3)  $x > 2$ , тогда  $x + 1 - x + 2 < 3$ ,  $3 < 3$  — неверно, значит, при  $x > 2$  данное неравенство не имеет решений.

Объединяя полученные решения, имеем  $x < 2$ .

**Ответ:**  $(-\infty; 2)$ .

# 738 | Решение.

$$(x^2 + x - 7)^{x^2+3} = (x^2 + x - 7)^{4x}.$$

Возможны случаи:

1)  $x^2 + x - 7 = 1$ , т. е.  $x^2 + x - 8 = 0$ . В этом случае уравнение примет вид  $1^{x^2+3} = 1^{4x}$ , т. е.  $1 = 1$  — верное равенство.

Значит, корни уравнения  $x^2 + x - 8 = 0$  являются корнями исходного уравнения.

$$\begin{aligned} x^2 + x - 8 &= 0, \\ D &= 1 + 32 = 33 > 0, \\ x_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}. \end{aligned}$$

2)  $x^2 + x - 7 = -1$ , т. е.  $x^2 + x - 6 = 0$ . В этом случае данное уравнение имеет вид  $(-1)^{x^2+3} = (-1)^{4x}$ .

Этому уравнению удовлетворяют лишь те значения  $x$ , при которых  $x^2 + 3$  и  $4x$  — целые числа одинаковой четности. Из уравнения  $x^2 + x - 6 = 0$  находим  $x = -3$ ,  $x = 2$ .

Значение  $x = -3$  удовлетворяет уравнению  $(-1)^{x^2+3} = (-1)^{4x}$ , а значение  $x = 2$  не удовлетворяет. Значит,  $x = -3$  — корень данного уравнения.

3)  $x^2 + x - 7 = 0$ . В этом случае имеем  $0^{x^2+3} = 0^{4x}$ .

Этому уравнению удовлетворяют лишь значения  $x$ , при которых  $x^2 + 3 > 0$  (что верно при всех  $x \in R$ ) и  $4x > 0$ , и в этом случае уравнение  $0^{x^2+3} = 0^{4x}$  примет вид  $0 = 0$  (где  $0^r$  имеет смысл при  $r > 0$ ).

Корни уравнения  $x^2 + x - 7 = 0$  будут  $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{29}}{2}$ , из которых

значение  $x_1 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{29})$  не удовлетворяет условию  $4x > 0$ ,

а  $x_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{29})$  удовлетворяет.

Значит,  $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{29})$  — корень исходного уравнения.

4)  $x^2 + x - 7 > 0$  и  $x^2 + x - 7 \neq 1$ , тогда данное уравнение примет вид  $x^2 + 3 = 4x$ , или  $x^2 - 4x + 3 = 0$ , откуда  $x = 1$ ,  $x = 3$ .

Если  $x = 1$ , то данное уравнение примет вид  $(-5)^4 = (-5)^4$  — верное равенство, значит,  $x = 1$  — корень данного уравнения.

Если  $x = 3$ , то имеем  $5^{12} = 5^{12}$  — верно, т. е.  $x = 3$  — также корень данного уравнения. Таким образом, исходное уравнение имеет 6 корней.

Ответ:  $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{33})$ ,  $x_3 = -3$ ,  $x_4 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{29})$ ,  $x_5 = 1$ ,  $x_6 = 3$ .

**739** | Решение.

$$y = \sqrt{\sin x}.$$

Заметим, что  $\sin x \geq 0$ . На периоде  $T = 2\pi$  решением этого неравенства являются  $0 \leq x \leq \pi$ .

Учитывая периодичность функции  $\sin x$ , имеем

$$2\pi n \leq x \leq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно,  $D(y) = [2\pi n; \pi + 2\pi n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**746** | Решение.

Пусть четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность,  $AC$  и  $BD$  — диагонали,  $E$  — точка их пересечения. Так как  $BD$  — биссектриса  $\angle ABC$ , то  $\angle 1 = \angle 2$ .

Кроме того,  $\angle ABD = \angle ACD = \angle CBD$  — как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу  $AD$  ( $\cup AD = \cup DC$ ).

Тогда  $\triangle BCD \sim \triangle CDE$  (по двум углам).

Следовательно,  $CD : DE = BD : CD$ , или  $CD^2 = DE \cdot BD$ .

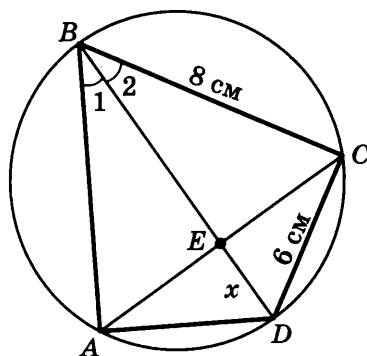
Пусть  $DE = x$ ,  $x > 0$ , тогда  $x(x + 6,4) = 36$ , или  $x^2 + 6,4x - 36 = 0$ ,  $5x^2 + 32x - 180 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 3,6$ ,  $x_2 = -10$  (не подходит).

Итак,  $DE = 3,6$  см, тогда  $BD = 6,4 + 3,6 = 10$  (см).

Выходит, что  $\triangle BCD$  — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора), так как  $10^2 = 6^2 + 8^2$ .

Значит,  $r = \frac{1}{2}(BC + CD - BD) = 2$ , где  $r$  — радиус окружности, вписанной в  $\triangle BCD$ .

Ответ: 2 см.



### 747 | Решение.

$$25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25.$$

Применяя способ группировки, получим

$$(25 \cdot 2^x - 25) - (10^x - 5^x) > 0, \text{ или } 25(2^x - 1) - 5^x(2^x - 1) > 0, \\ (2^x - 1)(25 - 5^x) > 0.$$

Полученное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$1) \begin{cases} 2^x - 1 > 0, \\ 25 - 5^x > 0; \end{cases} \begin{cases} 2^x > 1, \\ 5^x < 25; \end{cases} \begin{cases} x > 0, \\ x < 2; \end{cases} \text{ или } 0 < x < 2.$$

$$2) \begin{cases} 2^x - 1 < 0, \\ 25 - 5^x < 0; \end{cases} \begin{cases} x < 0, \\ x > 2; \end{cases} \text{ — нет решений.}$$

Итак, решением исходного неравенства будет решение системы 1).

Ответ: (0; 2).

### 770 | Решение.

Пусть  $S$  — количество продукции, выработанное предприятием за предыдущий год. Согласно условию задачи имеем уравнение

$$S \left( 1 + \frac{p}{100} \right) \left( 1 + \frac{p+10}{100} \right) = S \left( 1 + \frac{48,59}{100} \right), \text{ или}$$

$$\left( 1 + \frac{p}{100} \right) \left( 1 + \frac{p+10}{100} \right) = 1 + \frac{48,59}{100},$$

$$1 + \frac{p}{100} + \frac{p+10}{100} + \frac{p}{100} \cdot \frac{p+10}{100} = 1 + \frac{48,59}{100},$$

$$100p + 100(p+10) + p(p+10) = 4859,$$

$$p^2 + 210p - 3859 = 0,$$

$$D/4 = 105^2 + 3859 = 11\,025 + 3859 = 14\,884 = 122^2 > 0.$$

$$p = -105 \pm 122, p_1 = 17, p_2 = -227 \text{ (не подходит).}$$

Итак, за первый год выработка продукции увеличилась на 17 %.

Ответ: 17 %.

### 771 | Решение.

I способ

По условию задачи  $BC = a$ ,  $AC = b$ .

Пусть  $AB = c$ ,  $BD = x$ , тогда  $AD = c - x$ .

По условию задачи  $\angle C = 2\angle B$ . Если  $\angle B = \alpha$ , то  $\angle C = 2\alpha$ .



Проведем биссектрису  $CD$ , тогда  $\angle BCD = \angle CBD = \alpha$ , т. е.  $\triangle CDB$  — равнобедренный и  $BD = CD = x$ . По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника имеем  $\frac{c-x}{b} = \frac{x}{a}$ ,

$ac - ax = bx$ , откуда

$$c = \frac{a+b}{a}x. \quad (1)$$

Заметим, что  $\triangle ACD \sim \triangle ABC$  (по двум углам:  $\angle A$  — общий и  $\angle ACD = \angle CBD$ ), тогда  $\frac{c}{a} = \frac{b}{CD}$ ,

или  $\frac{c}{a} = \frac{b}{x}$ , откуда  $x = \frac{ab}{c}$ , тогда (1) примет вид

$$c = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{ab}{c}, \quad c^2 = b(a+b), \quad c = \sqrt{b(a+b)}.$$

Пусть  $R$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

Известно, что  $R = \frac{abc}{4S}$ , где  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ,

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(a+b+\sqrt{b(a+b)}), \quad p-a = \frac{1}{2}(-a+b+\sqrt{b(a+b)}),$$

$$p-b = \frac{1}{2}(a-b+\sqrt{b(a+b)}), \quad p-c = \frac{1}{2}(a+b-\sqrt{b(a+b)}).$$

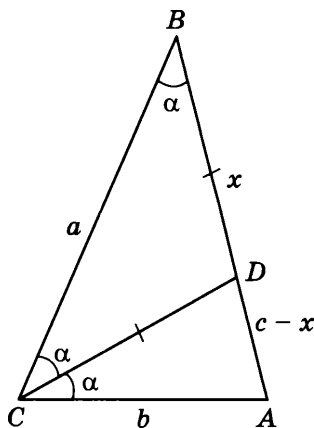
$$\begin{aligned} \text{Тогда } S^2 &= \frac{1}{2^4} (a+b+\sqrt{b(a+b)}) (-a+b+\sqrt{b(a+b)}) (a-b+\sqrt{b(a+b)}) \times \\ &\times (a+b-\sqrt{b(a+b)}) = \frac{1}{2^4} ((a+b)^2 - b(a+b)) (b(a+b) - (a-b)^2) = \\ &= \frac{1}{2^4} (a^2 + ab) (3ab - a^2) = \frac{1}{2^4} a^2 (a+b) (3b-a), \end{aligned}$$

откуда  $S = \frac{a}{4} \sqrt{(a+b)(3b-a)}$ , тогда

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{ab\sqrt{b(a+b)}}{4 \cdot \frac{a}{4} \sqrt{(a+b)(3b-a)}} = \frac{b\sqrt{b(a+b)}}{\sqrt{(a+b)(3b-a)}} = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{3b-a}}, \quad \text{где } 3b-a > 0,$$

т. е.  $a < 3b$ .

$$\text{Ответ: } \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{3b-a}} \text{ при } a < 3b.$$



II способ

*Решение.*

По свойству биссектрисы угла треугольника имеем

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{c-x}. \quad (1)$$

По теореме синусов получим  $\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \angle BDC}$ , где  $\angle BDC = 180^\circ - 2\alpha$ ,  $\sin \angle BDC = \sin (180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$ .

Следовательно,  $\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{a}{2\sin \alpha \cos \alpha}$ , или  $x = \frac{a}{2\cos \alpha}$ , тогда

$$c - x = c - \frac{a}{2\cos \alpha} = \frac{2c\cos \alpha - a}{2\cos \alpha}.$$

Учитывая равенство (1), имеем  $a(c - x) = bx$ , или

$$a \cdot \frac{2c\cos \alpha - a}{2\cos \alpha} = \frac{ab}{2\cos \alpha}, \text{ или } 2c\cos \alpha - a = b, \text{ откуда } \cos \alpha = \frac{a+b}{2c}. \quad (2)$$

По теореме синусов  $\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin 2\alpha}$ , или

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{c}{2\sin \alpha \cos \alpha}, \text{ откуда } c = 2b \cos \alpha. \quad (3)$$

Учитывая соотношения (2) и (3), находим  $\cos \alpha = \frac{a+b}{4b\cos \alpha}$ , или

$$\cos^2 \alpha = \frac{a+b}{4b}, \text{ тогда } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{3b-a}{4b}, \text{ откуда}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3b-a}{b}}.$$

$$\text{Но } \frac{b}{\sin \alpha} = 2R, \text{ тогда } R = \frac{b}{2\sin \alpha} = b : 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3b-a}{b}} = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{3b-a}}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{3b-a}}.$$

## 772 | Решение.

$$x^4 + 12x + 3 = 0.$$

Легко проверить, что корни данного уравнения (если они существуют) не содержатся среди делителей свободного члена уравнения —  $3(\pm 1, \pm 3)$ .

Запишем уравнение в виде  $x^4 + 6x^2 + 9 = 6x^2 - 12x + 6$ , или  $(x^2 + 3)^2 = 6(x - 1)^2$ , откуда  $x^2 + 3 = \pm\sqrt{6}(x - 1)$ .

Следовательно, получим два квадратных уравнения:

$$1) x^2 + 3 = \sqrt{6}(x - 1), \text{ или } x^2 - \sqrt{6}x + (3 + \sqrt{6}) = 0,$$

$$D = 6 - 4(3 + \sqrt{6}) = -(6 + 4\sqrt{6}) < 0 \text{ — нет корней;}$$

$$2) x^2 + 3 = -\sqrt{6}(x - 1), \quad x^2 + \sqrt{6}x + (3 - \sqrt{6}) = 0,$$

$$D = 6 - 4(3 - \sqrt{6}) = 4\sqrt{6} - 6 > 0, \quad x_{1,2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{6} \pm \sqrt{4\sqrt{6} - 6}).$$

$$\text{Ответ: } x_{1,2} = \frac{1}{2}(-\sqrt{6} \pm \sqrt{4\sqrt{6} - 6}).$$

### 794 | Решение.

Пусть  $ABCD$  — осевое сечение усеченного конуса и вписанного в него шара.

Пусть  $MN = DE = 2R$ , где  $R$  — радиус шара,  $AN = r_1$ ,  $DM = r_2$ , где  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы оснований усеченного конуса.

По свойству описанного четырехугольника имеем

$$2AD = AB + DC, \text{ или } 2AD = 2r_1 + 2r_2, \text{ откуда } AD = r_1 + r_2. \quad (1)$$

Заметим, что  $AE = AN - EN = AN - DM = r_1 - r_2$ .

$$\text{Из } \triangle AED \Rightarrow AD^2 = AE^2 + DE^2, \text{ или } AD^2 = (r_1 - r_2)^2 + 4R^2.$$

Учитывая (1), находим  $(r_1 + r_2)^2 = (r_1 - r_2)^2 + 4R^2$ , или

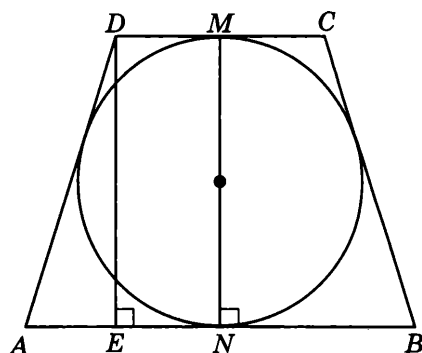
$$r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 = r_1^2 - 2r_1r_2 + r_2^2 + 4R^2, \quad 4r_1r_2 = 4R^2, \text{ откуда } r_1r_2 = R^2. \quad (2)$$

Согласно условию задачи  $S_{\text{полн. ус. к.}} = 3 \cdot S_{\text{ш.}}$ .

Но  $S_{\text{полн. ус. к.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2 = \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$ , где  $l = AD$  — образующая усеченного конуса,  $S_{\text{ш.}} = 4\pi R^2$ .

$$\text{Имеем } \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = 3 \cdot 4\pi R^2, \quad (r_1 + r_2)l + r_1^2 + r_2^2 = 12R^2.$$

Учитывая соотношения (1) и (2), получим  $l^2 + r_1^2 + r_2^2 = 12R^2$ , но  $r_1^2 + r_2^2 = (r_1 + r_2)^2 - 2r_1r_2 = l^2 - 2R^2$ , тогда  $l^2 + l^2 - 2R^2 = 12R^2$ ,  $l^2 = 7R^2$ , откуда  $l = R\sqrt{7}$ .



Пусть  $\angle DAE = \alpha$ , тогда из  $\triangle AED$   $\sin \alpha = \frac{DE}{AD} = \frac{2}{\sqrt{7}}$ , откуда

$$\alpha = \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Ответ:  $\alpha = \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}}$ .

**796 | Решение.**

І способ

$$x^2(x+1)^2 - 3x(x^2-1) = 4(x-1)^2.$$

Заметим, что  $x = 1$  не является корнем уравнения, поэтому при делении обеих частей уравнения на  $(x-1)^2 \neq 0$  получим равносиль-

ное уравнение  $x^2 \left( \frac{x+1}{x-1} \right)^2 - 3x \frac{x^2-1}{(x-1)^2} = 4$ , или

$$\left( \frac{x^2+x}{x-1} \right)^2 - 3 \cdot \frac{x^2+x}{x-1} = 4. \quad (1)$$

Пусть  $\frac{x^2+x}{x-1} = y$ , тогда (1) примет вид  $y^2 - 3y - 4 = 0$ , откуда

$$y_1 = -1, y_2 = 4.$$

Если  $y = -1$ , то  $\frac{x^2+x}{x-1} = -1$ , или  $x^2 + 2x - 1 = 0$ ,  $D/4 = 2 > 0$ ,

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Если  $y = 4$ , то  $\frac{x^2+x}{x-1} = 4$ , или  $x^2 - 3x + 4 = 0$  — нет корней, так как

$$D = 9 - 16 = -7 < 0.$$

Итак, исходное уравнение имеет два корня.

Ответ:  $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$ .

ІІ способ

Решение.

$$x^2(x+1)^2 - 3x(x^2-1) = 4(x-1)^2.$$

Пусть  $x(x+1) = a$ ,  $x-1 = b$ , тогда уравнение запишется в виде  $a^2 - 3ab - 4b^2 = 0$  — однородное уравнение ІІ степени, которое можно решить разными способами (см. № 723).

$$a^2 - 4ab + ab - 4b^2 = 0, \text{ или } a(a-4b) + b(a-4b) = 0, \text{ или}$$

$$(a-4b)(a+b) = 0, \text{ откуда } a-4b = 0, \text{ или } a+b = 0.$$

1) Если  $a - 4b = 0$ , то, учитывая замены, получим

$x(x + 1) - 4(x - 1) = 0$ ,  $x^2 - 3x + 4 = 0$  — нет корней, так как  $D < 0$ .

2) Если  $a + b = 0$ , то получим уравнение  $x(x + 1) + x - 1 = 0$ , или  $x^2 + 2x - 1 = 0$ , откуда находим  $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$ .

Ответ:  $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$ .

### 797 | Решение.

$$\begin{cases} y - x^3 = 1, \\ y - 3\log_3(4 - x) = -1. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем  $y = x^3 + 1$ , тогда второе уравнение примет вид

$$x^3 + 1 = 3\log_3(4 - x) - 1. \quad (1)$$

Пусть  $f(x) = x^3 + 1$ ,  $g(x) = 3\log_3(4 - x) - 1$ .

Функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены на промежутке  $(-\infty; 4)$ .

Заметим, что функция  $f(x) = x^3 + 1$  монотонно возрастает на этом промежутке, а функция  $g(x) = 3\log_3(4 - x) - 1$  — убывает.

Следовательно, уравнение (1) на промежутке  $(-\infty; 4)$  имеет не более одного корня. Нетрудно увидеть, что  $f(1) = g(1) = 2$ . Значит,  $x = 1$  — единственный корень уравнения (1). Учитывая первое уравнение исходной системы, находим  $y = 1^3 + 1 = 2$ . Итак, пара  $(1; 2)$  является решением данной системы уравнений.

Ответ:  $(1; 2)$ .

### 802 | Решение.

Пусть  $S$  — искомое расстояние от  $A$  до  $B$ ,  $x$  (км/ч) — первоначально предполагаемая скорость рейсовых автобусов. Согласно условию задачи имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{S}{x-5} - \frac{S}{x} = \frac{1}{6}, \\ \frac{S}{x} - \frac{S}{x+6} = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\frac{S}{x-5} - \frac{2S}{x} + \frac{S}{x+6} = 0, \quad S \neq 0, \quad \text{тогда} \quad \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+6} - \frac{2}{x} = 0, \quad x > 5,$$

$$x(x+6) + x(x-5) - 2(x-5)(x+6) = 0,$$

$$x^2 + 6x + x^2 - 5x - 2x^2 + 10x - 12x + 60 = 0, \quad -x + 60 = 0, \quad x = 60.$$

Подставим значение  $x$ , например в первое уравнение системы:

$$\frac{S}{x-5} - \frac{S}{x} = \frac{1}{6}, \quad \frac{S}{55} - \frac{S}{60} = \frac{1}{6}, \quad S \left( \frac{1}{55} - \frac{1}{60} \right) = \frac{1}{6}, \quad \frac{60-55}{55 \cdot 60} \cdot S = \frac{1}{6}, \quad \frac{5}{55 \cdot 10} \cdot S = 1,$$

$$S = 11 \cdot 10 = 110 \text{ (км)}.$$

Итак, расстояние между городами 110 км.

Ответ: 110 км.

### 803 | Решение.

І способ

Пусть  $CD = a$ ,  $AE = b$ , где  $a > b$  (по условию),  $r$  — радиус вписанной окружности.

Пусть  $AB = 2x$ ,  $AC = BC = y$ .

$\triangle AEB \sim \triangle CDB$  (как прямоугольные, имеющие общий  $\angle B$ ). Из подобия этих треугольников получим

$$\frac{CB}{AB} = \frac{CD}{AE}, \text{ или } \frac{y}{2x} = \frac{a}{b}. \quad (1)$$

$$\text{Кроме того, из } \triangle ADC \quad y^2 - x^2 = a^2. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) рассматриваем как систему:

$$\begin{cases} \frac{y}{2x} = \frac{a}{b}, \\ y^2 - x^2 = a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2a}{b} \cdot x, \\ \frac{4a^2}{b^2} \cdot x^2 - x^2 = a^2. \end{cases}$$

Упростим второе уравнение системы:  $x^2(4a^2 - b^2) = a^2b^2$ , откуда

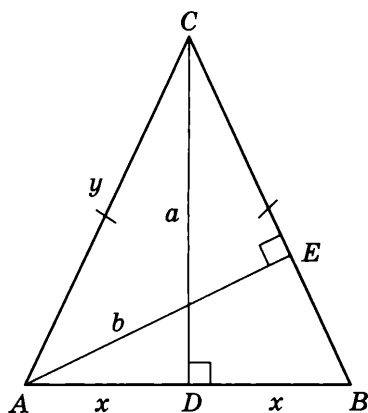
$$x^2 = \frac{a^2b^2}{4a^2 - b^2}, \quad x = \frac{ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}}, \text{ где } b < 2a, \text{ тогда первое уравнение систе-}$$

$$\text{мы примет вид } y = \frac{2a}{b} \cdot x = \frac{2a}{b} \cdot \frac{ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}} = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

$$\text{Значит, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot a = ax = \frac{a^2b}{\sqrt{4a^2 - b^2}}. \quad (3)$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\triangle ABC} = pr = \frac{1}{2} \cdot 2(x+y)r = (x+y)r =$$

$$= \left( \frac{ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}} + \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}} \right) r = \frac{(2a+b)a}{\sqrt{4a^2 - b^2}} r.$$



$$\text{Итак, } S_{\triangle ABC} = \frac{(2a+b)a}{\sqrt{4a^2-b^2}} r. \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), получим  $\frac{(2a+b)a}{\sqrt{4a^2-b^2}} r = \frac{a^2b}{\sqrt{4a^2-b^2}}$ , откуда

$$r = \frac{a^2b}{(2a+b)a} = \frac{ab}{2a+b}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{ab}{2a+b}.$$

### II способ

*Решение.*

По условию  $\triangle ABC$  — равнобедренный, где высота  $CD$  является биссектрисой и медианой.

Пусть  $\angle ACD = \angle BCD = \alpha$ . Из  $\triangle ACD$  имеем

$$\cos \alpha = \frac{a}{y}, \text{ тогда } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{y}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} y^2 \sin 2\alpha = y^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = a \sqrt{y^2 - a^2}.$$

С другой стороны,  $S_{\triangle ABC} = p \cdot r = (x + y)r$ .

Следовательно,  $(x + y)r = a \sqrt{y^2 - a^2}$ .

Но  $y^2 - a^2 = x^2$ , тогда  $(x + y)r = ax$ .

Так как  $\frac{y}{2x} = \frac{a}{b}$  (см. I способ), то  $y = \frac{2ax}{b}$ .

Получим  $\left(x + \frac{2ax}{b}\right)r = ax$ , или  $\left(1 + \frac{2a}{b}\right)r = a$ , откуда находим

$$r = \frac{a}{1 + \frac{2a}{b}} = \frac{ab}{2a+b}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{ab}{2a+b}.$$

### III способ

*Решение.*

Из  $\triangle ACD$  имеем  $x = y \sin \alpha$ . Но  $\frac{y}{2x} = \frac{a}{b}$  (см. I способ), откуда  $\frac{y}{x} = \frac{2a}{b}$ .

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \frac{x}{y} = \frac{b}{2a}.$$

Кроме того,  $(x + y)r = ax$  (см. II способ).

Так как  $y = \frac{2a}{b}x$ , то получим

$$\left(x + \frac{2a}{b}x\right)r = ax, \text{ или } \left(1 + \frac{2a}{b}\right)r = a,$$

откуда  $r = \frac{a}{1 + \frac{2a}{b}} = \frac{ab}{2a + b}$ .

Ответ:  $\frac{ab}{2a + b}$ .

**804** | Решение.

$$\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x - 1} = 1.$$

Из условия следует, что  $\operatorname{tg} x - 1 > 0$  и  $\cos x \neq 0$ .

Тогда, разделив обе части данного уравнения на  $\cos^2 x \neq 0$ , получим  $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} = \frac{1}{\cos^2 x}$ .

Но  $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ , или  $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ . (1)

Кроме того,  $1 + \operatorname{tg}^2 x > 1$ , а  $\operatorname{tg} x - 1 > 0$ , т. е.  $\operatorname{tg} x > 1$ .

Заметим, что при любом  $\operatorname{tg} x > 1$ ,  $1 + \operatorname{tg}^2 x > \sqrt{\operatorname{tg} x - 1}$ , так что уравнение (1), а значит, и исходное корней не имеет.

Ответ: нет корней.

**805** | Решение.

$$5^{\log_{\sqrt{5}}(x-1)} \leq \frac{\cos^4 x}{16} + \frac{\sin^2 x}{8} - \frac{\sin^4 x}{16}.$$

ОДЗ:  $x > 1$ .

$$5^{\log_{\sqrt{5}}(x-1)} = (\sqrt{5})^{2\log_{\sqrt{5}}(x-1)} = (\sqrt{5})^{\log_{\sqrt{5}}(x-1)^2} = (x-1)^2.$$

Данное неравенство примет вид

$$(x-1)^2 \leq \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{16} + \frac{2\sin^2 x}{16},$$

$$(x-1)^2 \leq \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin^2 x}{16},$$

$$(x-1)^2 \leq \frac{1}{16}(\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin^2 x),$$



$$(x-1)^2 \leq \frac{1}{16}(\cos^2 x + \sin^2 x), \quad (x-1)^2 \leq \frac{1}{16},$$

$$|x-1| \leq \frac{1}{4}, \text{ или } -0,25 \leq x-1 \leq 0,25,$$

$0,75 \leq x \leq 1,25$ , и так как  $x > 1$ , то  $1 < x \leq 1,25$ .

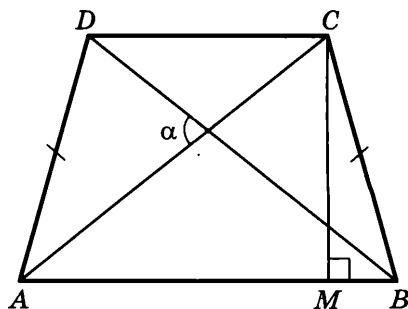
Ответ:  $(1; 1,25]$ .

### 810 | Решение.

Пусть в равнобедренной трапеции  $ABCD$   $AD = BC$ ,  $DC = 2x$ ,  $AB = 2y$ .

Известно, что  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}d^2 \sin \alpha$ , где

$d = AC = BD$  — диагонали трапеции,  $\alpha$  — угол между ними.



$$\text{С другой стороны, } S_{ABCD} = \frac{AB+DC}{2} \cdot CM = \frac{2x+2y}{2} \cdot h = (x+y) \cdot h,$$

откуда, сравнивая полученные выражения, имеем

$$\frac{1}{2}d^2 \sin \alpha = (x+y) \cdot h, \text{ или } d^2 \sin \alpha = 2(x+y) \cdot h. \quad (1)$$

По условию задачи  $d = 2h$ , тогда (1) примет вид

$$4h^2 \sin \alpha = 2(x+y) \cdot h, \quad h \neq 0, \text{ тогда } 2h \sin \alpha = x+y. \quad (2)$$

$$\text{Но } MB = \frac{1}{2}(AB - DC) = \frac{1}{2}(2y - 2x) = y - x;$$

$$AM = AB - MB = 2y - (y - x) = y + x. \quad (3)$$

Из  $\triangle AMC$   $d^2 = AM^2 + h^2$ , или, учитывая (3), имеем

$$4h^2 = (x+y)^2 + h^2, \quad 4h^2 = 4h^2 \sin^2 \alpha + h^2, \quad 3h^2 = 4h^2 \sin^2 \alpha, \quad \sin^2 \alpha = \frac{3}{4},$$

$$\text{откуда } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (\sin \alpha > 0), \text{ тогда } \alpha = 60^\circ.$$

Ответ:  $60^\circ$ .

### 811 | Решение.

Пусть  $V$  — объем всего задания;  $x$  — производительность труда (т. е. количество изделий, производимых за 1 день) первого и  $y$  — второго рабочих. Согласно условию имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 5(x+y) = V, \\ 4\left(2x + \frac{1}{2}y\right) = V. \end{cases}$$

Сравнивая левые части системы, получим  $5x + 5y = 8x + 2y$ , или  $3y = 3x$ , т. е.  $y = x$ , тогда первое уравнение примет вид  $5(x + x) = V$ ,  $10x = V$ , откуда  $\frac{V}{x} = 10$ .

Так как по условию задачи нам надо найти  $\frac{V}{x}$ , то первый рабочий выполнит задание за 10 дней.

Ответ: за 10 дней.

## 812 | Решение.

I способ

$$\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{7}{8}.$$

Понятно, что освобождение дробей от знаменателей ни к чему «хорошему» не приводит.

Пусть  $\frac{1}{x} = a$ ,  $\frac{1}{x+1} = b$ .

При таких обозначениях получим  $x = \frac{1}{a}$ ,  $x+1 = \frac{1}{b}$ , тогда

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = 1.$$

Исходное уравнение сводится к системе уравнений

$$\begin{cases} a^3 - b^3 = \frac{7}{8}, \\ \frac{a-b}{ab} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} (a-b)^3 + 3ab(a-b) = \frac{7}{8}, \\ a-b = ab. \end{cases}$$

Решив полученную систему способом подстановки, имеем

$$(ab)^3 + 3(ab)^2 = \frac{7}{8}, \text{ или } 8(ab)^3 + 24(ab)^2 = 7, (2ab)^3 + 6 \cdot (2ab)^2 - 7 = 0.$$

Пусть  $2ab = t$ , тогда получим кубическое уравнение  $t^3 + 6t^2 - 7 = 0$ .

Очевидно, что  $t = 1$  — корень полученного уравнения, значит,

$$t^2(t-1) + 7(t^2-1) = 0, (t-1)(t^2+7t+7) = 0,$$

откуда  $t = 1$  или  $t^2 + 7t + 7 = 0$ .

1)  $t_1 = 1$ , тогда  $2ab = 1$ ,  $ab = \frac{1}{2}$ .

2)  $t_{2,3} = \frac{-7 \pm \sqrt{21}}{2} = k \Rightarrow x^2 + x - 2/k = 0$  — нет корней.

Но  $a = \frac{1}{x}$ ,  $b = \frac{1}{x+1}$ , значит,  $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$ , откуда

$$\begin{cases} x(x+1)=2, \\ x \neq 0, \quad x \neq -1. \end{cases}$$

Решая уравнение системы  $x^2 + x - 2 = 0$ , находим  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ . Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ:  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ .

## II способ

*Решение.*

Приведем левую часть уравнения к общему знаменателю:

$$\frac{(x+1)^3 - x^3}{x^3(x+1)^3} = \frac{7}{8}, \text{ или } \frac{3x(x+1)+1}{(x(x+1))^3} = \frac{7}{8}.$$

Далее замена  $x(x+1) = y$  приводит к уравнению  $\frac{3y+1}{y^3} = \frac{7}{8}$ , или

$$7y^3 - 24y - 8 = 0. \quad (1)$$

Заметим, что  $y = 2$  — корень уравнения (1), тогда получим  $7y(y^2 - 4) + 4(y - 2) = 0$ , или  $(y - 2)(7y^2 + 14y + 4) = 0$ , откуда  $y - 2 = 0$ ,  $y = 2$ , или  $7y^2 + 14y + 4 = 0$  — нет действительных корней ( $D < 0$ ).

Если  $y = 2$ , то, учитывая замену, получим уравнение  $x(x+1) = 2$ , или  $x^2 + x - 2 = 0$ , откуда  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ .

Ответ:  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 1$ .

## 813 | Решение.

$$\cos^4 14x - 2 \cos^2 14x + \cos^2 7x = -1.$$

Запишем уравнение в виде  $(1 - 2 \cos^2 14x + \cos^4 14x) + \cos^2 7x = 0$ , или  $(1 - \cos^2 14x)^2 + \cos^2 7x = 0$ ,  $\sin^4 14x + \cos^2 7x = 0$ . (1)

Но сумма квадратов двух действительных чисел равна нулю в том и только в том случае, когда каждое из слагаемых равно нулю. Следовательно, уравнение (1) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \sin 14x = 0, \\ \cos 7x = 0. \end{cases}$$

Так как  $\sin 14x = 2 \sin 7x \cos 7x$ , то всякое решение уравнения  $\cos 7x = 0$  является решением уравнения  $\sin 14x = 0$ .

Следовательно, полученная система равносильна уравнению

$$\cos 7x = 0, \text{ откуда } 7x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, \quad n \in \mathbb{Z}.$

### 819 | Решение.

Пусть в равнобедренном  $\triangle ABC$

$$AC = BC = y, \quad AB = 2x.$$

По условию задачи  $S_{\triangle ABD} = 3S_{\triangle ABC}$ .

Так как  $\triangle ABD$  — правильный, то

$$S_{\triangle ABD} = \frac{(AB)^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}x^2. \quad (1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CK = x \cdot CK. \quad (2)$$

$$\text{Из } \triangle AKC \quad CK = \sqrt{y^2 - x^2}. \quad (3)$$

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle ABC} = x\sqrt{y^2 - x^2}.$$

Так как  $S_{\triangle ABD} = 3S_{\triangle ABC}$ , то, учитывая (1), (2) и (3), получим

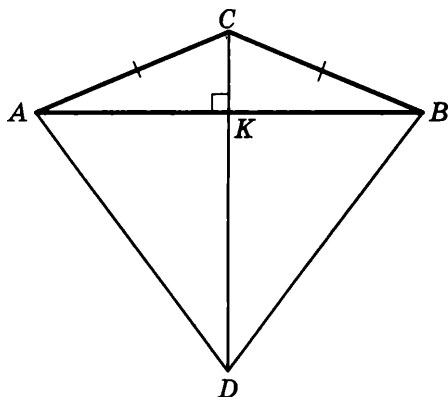
$$\sqrt{3}x^2 = 3x\sqrt{y^2 - x^2}, \text{ или } 3x^2 = 9(y^2 - x^2), \quad x > 0, \quad 4x^2 = 3y^2, \quad 2x = \sqrt{3}y,$$

$$\text{откуда } \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ и так как } \cos \angle CAK = \frac{x}{y}, \text{ то } \cos \angle CAK = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

т. е.  $\angle CAK = 30^\circ$ , тогда  $\angle CBK = 30^\circ$  и  $\angle C = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$ .

Итак, углы  $\triangle ABC$  равны  $30^\circ, 30^\circ$  и  $120^\circ$ .

Ответ:  $30^\circ, 30^\circ$  и  $120^\circ$ .



### 820 | Решение.

$$\sqrt{2 + \sin^2 4x} = \sin 3x - \cos 3x.$$

Заметим, что  $\sqrt{2 + \sin^2 4x} \geq \sqrt{2}$ , а  $\sin 3x - \cos 3x =$

$$= \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x \right) = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \sin 3x - \sin \frac{\pi}{4} \cos 3x \right) =$$

$$= \sqrt{2} \sin \left( 3x - \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}.$$

Следовательно, имеем систему

$$\begin{cases} \sqrt{2 + \sin^2 4x} = \sqrt{2}, \\ \sin 3x - \cos 3x = \sqrt{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \sin^2 4x = 0, \\ \sin \left( 3x - \frac{\pi}{4} \right) = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x = \pi n, \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi n}{4}, \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}, \end{cases} \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

Найдем общее решение полученной системы, для чего решим уравнение  $\frac{\pi n}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{3}$  в целых числах:  $3\pi n = 3\pi + 8\pi k$ ,  $n = 1 + \frac{8k}{3}$ .

Тогда  $k = 3m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$  и  $n = 1 + 8m$ ,  $x = \frac{\pi}{4} \cdot (8m + 1)$ , или  $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{4} + 2\pi m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

**821** | Решение.

$$(\sqrt{12})^{2x} + 5^x = 13^x.$$

Запишем уравнение в виде  $12^x + 5^x = 13^x$ .

Так как  $13^x > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , то, разделив обе части на  $13^x \neq 0$ , получим уравнение

$$\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x = 1. \quad (1)$$

Заметим, что сумма убывающих функций  $y_1 = \left(\frac{12}{13}\right)^x$  и  $y_2 = \left(\frac{5}{13}\right)^x$  есть убывающая функция. Следовательно, уравнение (1), а значит, и исходное может иметь не более одного корня и  $x = 2$  — корень уравнения.

Ответ:  $x = 2$ .

**836** | Решение.

$$\sqrt{7}(y - 2x) = x^2 + y^2 + \frac{35}{4}.$$

Запишем данное уравнение в виде  $x^2 + 2\sqrt{7}x + y^2 - \sqrt{7}y + 7 + \frac{7}{4} = 0$ ,

$$\text{или } (x^2 + 2\sqrt{7}x + 7) + \left(y^2 - \sqrt{7}y + \frac{7}{4}\right) = 0, \quad (x + \sqrt{7})^2 + \left(y - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = 0. \quad (1)$$

Так как  $(x + \sqrt{7})^2 \geq 0$  и  $\left(y - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \geq 0$ , то равенство (1) выполняется,

если  $x + \sqrt{7} = 0$  и  $y - \frac{\sqrt{7}}{2} = 0$ , откуда  $x = -\sqrt{7}$ ,  $y = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

Ответ:  $x = -\sqrt{7}$ ,  $y = \frac{\sqrt{7}}{2}$ .

**837 | Решение.**

$$\sqrt{\log_2(2x^2) \cdot \log_4(16x)} = \log_4 x^3.$$

Данное уравнение равносильно смешанной системе

$$\begin{cases} \log_2(2x^2) \cdot \log_4(16x) = \log_4^2 x^3, \\ \log_4 x^3 \geq 0. \end{cases}$$

Упростим уравнение системы, используя формулу перехода от основания 4 к основанию 2:

$$(\log_2 2 + \log_2 x^2) \cdot (\log_4 4^2 + \log_{2^2} x) = (\log_{2^2} x^3)^2,$$

$$(1 + 2\log_2 x) \left(2 + \frac{1}{2}\log_2 x\right) = \frac{9}{4}\log_2^2 x,$$

$$2 + 4\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \log_2^2 x = \frac{9}{4}\log_2^2 x,$$

$$5\log_2^2 x - 18\log_2 x - 8 = 0, \quad x > 0.$$

Обозначив  $\log_2 x = t$ , получим  $5t^2 - 18t - 8 = 0$ ,

$$D/4 = 81 + 40 = 11^2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm 11}{5}, \text{ откуда } t_1 = 4, \quad t_2 = -\frac{2}{5}.$$

Так как  $\log_4 x^3 = \frac{3}{2}\log_2 x \geq 0$  и  $\log_2 x = t$ , то  $t \geq 0$ .

Значит, корень  $t_2 = -\frac{2}{5}$  — не подходит.

Если  $\log_2 x = 4$ , то  $x = 2^4 = 16$  — единственный корень исходного уравнения.

Ответ:  $x = 16$ .

**842 | Решение.**

Рассмотрим осевое сечение конуса и вписанного шара.

Пусть  $AO = r$  — радиус основания конуса,  $OO_1 = R$  — радиус вписанного шара,  $AC = l$  — образующая конуса.

По условию задачи  $S_{\text{полн.к.}} = 2S_{\text{ш.}}$ .

Так как  $S_{\text{полн.к.}} = \pi r(l + r)$  и  $S_{\text{ш.}} = 4\pi R^2$ , то получим  $\pi r(l + r) = 8\pi R^2$ , или

$$r(l + r) = 8R^2. \quad (1)$$

Из  $\triangle AOO_1$ , где  $\angle O_1AO = \alpha/2$ , имеем

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{OO_1}{AO} = \frac{R}{r}, \text{ откуда } R = r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Из  $\triangle AOC$   $\cos \alpha = \frac{AO}{AC} = \frac{r}{l}$ , откуда  $l = \frac{r}{\cos \alpha}$ .

Тогда равенство (1) примет вид  $r \left( \frac{r}{\cos \alpha} + r \right) = 8 \left( r \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right)^2$ , или

$$r^2 \left( \frac{1}{\cos \alpha} + 1 \right) = 8r^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}, \quad r > 0, \quad \frac{1}{\cos \alpha} + 1 = 8 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (2)$$

Известно, что  $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ , тогда (2) преобразуется к виду

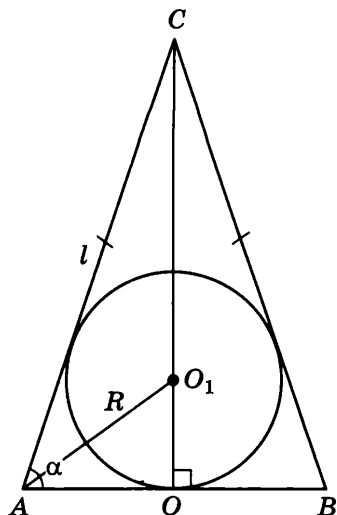
$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + 1 = 8 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) : \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 8 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \left( 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) = 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}, \quad 4 \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2} - 4 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 1 = 0, \quad \left( 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 \right)^2 = 0,$$

$$2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 0, \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}, \text{ и так как } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0, \text{ то получим } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{откуда } \alpha = 2 \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ:  $\alpha = 2 \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$ .



**843 | Решение.**

Пусть в квадрат  $ABCD$  вписан  $\triangle AFE$  ( $\angle AFE = 90^\circ$ ), где  $AF = a$ ,  $EF = b$ .

Пусть  $CF = x$ ,  $FB = y$ , тогда  $AB = x + y$ .

Из подобия  $\triangle ABF$  и  $\triangle FCE$  имеем

$$\frac{AB}{AF} = \frac{CF}{EF}, \text{ или } \frac{x+y}{a} = \frac{x}{b},$$

$$ax = bx + by, \text{ откуда } x = \frac{b}{a-b}y. \quad (1)$$

Из  $\triangle ABF$   $(x+y)^2 + y^2 = a^2$ , или, учитывая (1), получим

$$\left(\frac{b}{a-b}y + y\right)^2 + y^2 = a^2, \quad y^2\left(\frac{b}{a-b} + 1\right)^2 + y^2 = a^2,$$

$$\left(\frac{a^2}{(a-b)^2} + 1\right)y^2 = a^2, \quad y^2 = \frac{a^2(a-b)^2}{a^2 + (a-b)^2},$$

$$\text{тогда } S_{ABCD} = (x+y)^2 = a^2 - y^2 = a^2 - \frac{a^2(a-b)^2}{a^2 + (a-b)^2} =$$

$$= a^2 \left(1 - \frac{(a-b)^2}{a^2 + (a-b)^2}\right) = a^2 \left(1 - \frac{(a-b)^2}{a^2 + (a-b)^2}\right) = a^2 \cdot \frac{a^2 + (a-b)^2 - (a-b)^2}{a^2 + (a-b)^2} =$$

$$= \frac{a^4}{a^2 + (a-b)^2}.$$

$$\text{Итак, } S_{ABCD} = \frac{a^4}{a^2 + (a-b)^2} \text{ (кв. ед.).}$$

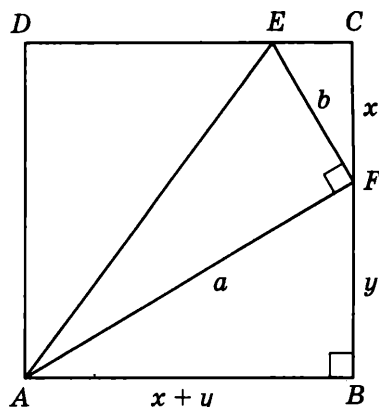
$$\text{Ответ: } \frac{a^4}{a^2 + (a-b)^2}.$$

**844 | Решение.**

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = xy + 61, \\ x^2 + y^2 = xy + 13. \end{cases}$$

$$\text{Пусть } \begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases}$$

$$\text{Тогда } x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy).$$





Учитывая уравнения исходной системы, имеем

$$xy + 61 = (x + y)(xy + 13 - xy), \text{ или } 13(x + y) = xy + 61. \quad (1)$$

Второе уравнение исходной системы запишем в виде

$$(x + y)^2 - 2xy = xy + 13, (x + y)^2 = 3xy + 13.$$

Учитывая (1), имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 13(x + y) = xy + 61, \\ (x + y)^2 = 3xy + 13; \end{cases} \quad \begin{cases} 13a = b + 61, \\ a^2 = 3b + 13. \end{cases} \quad (2)$$

Умножим обе части первого уравнения системы (2) на 3, а затем вычтем из второго уравнения полученное:

$$\begin{cases} 39a = 3b + 183, \\ a^2 = 3b + 13. \end{cases}$$

$a^2 - 39a + 170 = 0$ , откуда находим  $a_1 = 5$ ,  $a_2 = 34$ . Тогда из первого уравнения системы (2) получим  $b_1 = 13 \cdot 5 - 61 = 4$ ,  $b_2 = 13 \cdot 34 - 61 = 381$ .

Учитывая (1), имеем две системы:

$$1) \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$$

По обратной теореме Виета находим  $\begin{cases} x_1 = 4, \\ y_1 = 1; \end{cases} \begin{cases} x_2 = 1, \\ y_2 = 4. \end{cases}$

$$2) \begin{cases} x + y = 34, \\ xy = 381. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений, так как  $xy = 381 > 0$ , т. е.  $x > 0$ ,  $y > 0$ , или  $x < 0$ ,  $y < 0$ . Но тогда уравнение  $x + y = 34$  не выполняется. Итак, решением исходной системы является решение системы 1).

Ответ: (4; 1), (1; 4).

## 845 | Решение.

$$\arccos x + \arccos \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Возьмем косинус от обеих частей уравнения:

$$\cos\left(\arccos x + \arccos \frac{x}{2}\right) = \cos \frac{\pi}{2}, \text{ или } \cos\left(\arccos x + \arccos \frac{x}{2}\right) = 0.$$

Так как  $\sin(\arccos \alpha) = \sqrt{1 - \alpha^2}$ , то имеем уравнение

$$x \cdot \frac{x}{2} - \sqrt{1 - x^2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = 0, \quad \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{(1 - x^2)(4 - x^2)} = 0,$$



Аналогично  $\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{OE}$ , откуда  $CD = \frac{AD \cdot CE}{OE}$ , или

$$CD = \frac{\frac{1}{2}x \cdot x}{\frac{1}{4}R} = \frac{2x^2}{R}. \quad (1)$$

Из прямоугольного  $\triangle CEO$  ( $OE$  — высота равнобедренного  $\triangle AOC$ ) имеем  $x^2 = R^2 - OE^2$ , или  $x^2 = R^2 - \left(\frac{1}{4}R\right)^2$ ,  $x^2 = \frac{15}{16}R^2$ , тогда (1) примет

$$\text{вид } CD = \frac{2}{R} \cdot \frac{15}{16}R^2 = \frac{15}{8}R; \quad CD = \frac{15}{8}R. \quad (2)$$

$$\text{С другой стороны, } CD = CO_1 + O_1D = CO_1 + r. \quad (3)$$

$$\text{Сравнивая (2) и (3), имеем } \frac{15}{8}R = CO_1 + r, \text{ откуда } CO_1 = \frac{15}{8}R - r.$$

$$\text{Из подобия } \triangle COE \text{ и } \triangle CO_1F \text{ получаем } \frac{CO_1}{O_1F} = \frac{CO}{OE}, \text{ или } \frac{\frac{15}{8}R - r}{r} = \frac{R}{\frac{1}{4}R},$$

$$\frac{15}{8}R - r = 4r, \quad \frac{15}{8}R = 5r, \text{ откуда } R = \frac{8}{3}r.$$

$$\text{Ответ: } R = \frac{8}{3}r.$$

**852 | Решение.**

І способ

$$\begin{cases} x^3y - xy^3 = 24, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Возведем обе части второго уравнения в квадрат:

$$(x^2 + y^2)^2 = 100, \text{ или } x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 100, \text{ тогда получим систему}$$

$$\begin{cases} x^3y - xy^3 = 24, \\ x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 100. \end{cases} \quad (1)$$

Уравняем правые части (1), для чего умножим обе части первого уравнения на 25, а второго — на 6:

$$\begin{cases} 25x^3y - 25xy^3 = 600, \\ 6x^4 + 6y^4 + 12x^2y^2 = 600. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения полученной системы первое:

$$6x^4 + 6y^4 + 12x^2y^2 - 25x^3y + 25xy^3 = 0.$$

Разделим обе части полученного уравнения IV степени на  $x^2y^2 \neq 0$ :

$$6 \cdot \frac{x^2}{y^2} + 6 \cdot \frac{y^2}{x^2} + 12 - 25 \cdot \frac{x}{y} - 25 \cdot \frac{y}{x} = 0, \text{ или}$$

$$6 \cdot \left( \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) - 25 \cdot \left( \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right) + 12 = 0. \quad (2)$$

Пусть  $\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = t$ , тогда  $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = \left( \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right)^2 + 2 = t^2 + 2$ , тогда (2) примет

$$\text{вид } 6(t^2 + 2) - 25t + 12 = 0, \text{ или } 6t^2 - 25t + 24 = 0,$$

$$D = 625 - 576 = 49 = 7^2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{25 \pm 7}{12}, \quad t_1 = \frac{8}{3}, \quad t_2 = \frac{3}{2}.$$

Учитывая подстановку, получим два уравнения:

$$1) \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Пусть } \frac{x}{y} = t, \text{ тогда } t - \frac{1}{t} = \frac{8}{3}, \quad 3t^2 - 8t - 3 = 0,$$

$$D/4 = 16 + 9 = 5^2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 5}{3}, \quad t_1 = 3, \quad t_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Значит, } \frac{x}{y} = 3 \text{ и } \frac{x}{y} = -\frac{1}{3}.$$

Учитывая второе уравнение исходной системы, получим две системы уравнений:

$$а) \begin{cases} \frac{x}{y} = 3, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ 10y^2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3y, \\ y^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 3, \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Полученные пары (3; 1) и (-3; -1) удовлетворяют исходной системе.

$$б) \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{1}{3}, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3x, \\ 10x^2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -3x, \\ x^2 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \mp 3, \\ x = \pm 1. \end{cases}$$

Пары чисел (1; -3) и (-1; 3) также удовлетворяют исходной системе.

$$2) \frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{3}{2}.$$

$$t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2},$$

$$2t^2 - 3t - 2 = 0,$$

$$D = 9 + 16 = 25 = 5^2 > 0,$$

$$t_{3,4} = \frac{3 \pm 5}{4}, \quad t_3 = 2, \quad t_4 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{x}{y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ 5y^2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2y, \\ y^2 = 2; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -2x, \\ x^2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \mp 2\sqrt{2}, \\ x = \pm \sqrt{2}. \end{cases}$$

Найденные пары чисел также удовлетворяют исходной системе. Следовательно, данная система имеет всего 8 пар решений.

**Ответ:**  $(\pm 3; \pm 1), (\pm 1; \mp 3), (\pm 2\sqrt{2}; \pm \sqrt{2}), (\pm \sqrt{2}; \mp 2\sqrt{2})$ .

## II способ

**Решение.**

$$\begin{cases} xy(x^2 - y^2) = 24, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Возведем обе части первого уравнения в квадрат:

$$x^2y^2(x^2 - y^2)^2 = 576, \text{ или } x^2y^2((x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2) = 576.$$

Учитывая второе уравнение системы, имеем

$$x^2y^2(100 - 4x^2y^2) = 576, \text{ или } x^2y^2(25 - x^2y^2) = 144.$$

Пусть  $x^2y^2 = a$ , где  $a > 0$ , тогда получим квадратное уравнение  $a^2 - 25a + 144 = 0$ , откуда  $a_1 = 9$ ,  $a_2 = 16$ .

Учитывая замену, получим две системы уравнений:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = \pm 3; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = \pm 4. \end{cases}$$

Система 1) имеет решения  $(\pm 3; \pm 1), (\pm 1; \mp 3)$ , а система 2) —  $(\pm 2\sqrt{2}; \pm \sqrt{2}), (\pm \sqrt{2}; \mp 2\sqrt{2})$ .

**Ответ:**  $(\pm 3; \pm 1), (\pm 1; \mp 3), (\pm 2\sqrt{2}; \pm \sqrt{2}), (\pm \sqrt{2}; \mp 2\sqrt{2})$ .

### III способ

*Решение.*

Запишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ x^2 - y^2 = \frac{24}{xy}. \end{cases}$$

Складывая и вычитая почленно левые и правые части полученной системы уравнений, имеем

$$\begin{cases} 2x^2 = 10 + \frac{24}{xy}, \\ 2y^2 = 10 - \frac{24}{xy}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 = 5 + \frac{12}{xy}, \\ y^2 = 5 - \frac{12}{xy}. \end{cases}$$

Теперь перемножим уравнения системы:

$$(xy)^2 = \left(5 + \frac{12}{xy}\right)\left(5 - \frac{12}{xy}\right), \text{ или } (xy)^2 = 25 - \frac{144}{(xy)^2}.$$

Пусть  $xy = t$ , тогда получим  $t^2 = 25 - \frac{144}{t^2}$ , или  $t^4 - 25t^2 + 144 = 0$ ,

откуда находим  $(t^2)_1 = 9$ ,  $(t^2)_2 = 16$ .

Учитывая замену  $xy = t$  и уравнение  $x^2 + y^2 = 10$ , получим две системы уравнений:  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = \pm 3; \end{cases}$  и  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = \pm 4. \end{cases}$  (см. I способ).

### IV способ

*Решение.*

Пусть  $y = tx$ , где  $x \neq 0$ , тогда исходная система примет вид

$$\begin{cases} tx^2(x^2 - t^2x^2) = 24, \\ x^2 + t^2x^2 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} tx^4(1 - t^2) = 24, \\ x^2(1 + t^2) = 10. \end{cases}$$

Возведем обе части второго уравнения в квадрат:

$$x^4(1 + t^2)^2 = 100.$$

Теперь разделим уравнение  $tx^4(1 - t^2) = 24$  на полученное:

$$\frac{tx^4(1 - t^2)}{x^4(1 + t^2)^2} = \frac{24}{100}, \text{ или после упрощений имеем}$$

$$6t^4 + 25t^2 - 25t + 6 = 0.$$

Разделим обе части уравнения на  $t^2 \neq 0$ :

$$6t^2 + 25t + 12 - 25 \cdot \frac{1}{t} + 6 \cdot \frac{1}{t^2} = 0, \text{ или } 25\left(t - \frac{1}{t}\right) + 6\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) + 12 = 0.$$

Пусть  $t - \frac{1}{t} = a$ , тогда  $t^2 + \frac{1}{t^2} = a^2 + 2$ .

Получим  $25a + 6(a^2 + 2) + 12 = 0$ , или  $6a^2 + 25a + 24 = 0$ , откуда  $a_1 = -\frac{3}{2}$ ,  $a_2 = -\frac{8}{3}$ .

Учитывая замену, получим:

$$1) t - \frac{1}{t} = \frac{3}{2}, \text{ или } 2t^2 - 3t - 2 = 0, \text{ откуда } t_1 = -2, t_2 = \frac{1}{2};$$

$$2) t - \frac{1}{t} = -\frac{8}{3}, \text{ или } 3t^2 + 8t - 3 = 0, t_3 = -3, t_4 = \frac{1}{3}.$$

Так как  $y = tx$ , то  $y_1 = -2x$ ,  $y_2 = \frac{1}{2}x$ ,  $y_3 = -3x$ ,  $y_4 = \frac{1}{3}x$ .

Учитывая, что  $x^2 + y^2 = 10$ , получим 4 системы уравнений:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ y = -2x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 4x^2 = 10, \\ y = -2x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 2, \\ y = -2x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm\sqrt{2}, \\ y = \mp 2\sqrt{2}; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ y = \frac{1}{2}x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + \frac{1}{4}x^2 = 10, \\ y = \frac{1}{2}x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 8, \\ y = \frac{1}{2}x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 2\sqrt{2}, \\ y = \pm\sqrt{2}; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ y = -3x; \end{cases} \quad \begin{cases} 10x^2 = 10, \\ y = -3x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 1, \\ y = -3x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \mp 3; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ y = \frac{1}{3}x; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 9, \\ y = \frac{1}{3}x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 3, \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Ответ:  $(\pm 3; \pm 1)$ ,  $(\pm 1; \mp 3)$ ,  $(\pm 2\sqrt{2}; \pm\sqrt{2})$ ,  $(\pm\sqrt{2}; \mp 2\sqrt{2})$ .

### 853 | Решение.

$$\sqrt[3]{x-2} \cdot \sqrt[3]{x-9} = \sqrt{x^2 - 11x + 10} + 2.$$

$$\text{Пусть } \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} = a, \\ \sqrt[3]{x-9} = b; \end{cases} \quad \begin{cases} x-2 = a^3, \\ x-9 = b^3. \end{cases}$$

$$\text{Кроме того, } x^2 - 11x + 10 = (x-2)(x-9) - 8 = a^3b^3 - 8. \quad (1)$$

Тогда исходное уравнение примет вид  $ab = \sqrt{a^3b^3 - 8} + 2$ .

$$\text{Пусть } ab = y, \text{ тогда } y = \sqrt{y^3 - 8} + 2, \quad y - 2 = \sqrt{y^3 - 8}, \quad \begin{cases} (y-2)^2 = y^3 - 8, \\ y \geq 2. \end{cases}$$

$$(y-2)^2 = (y-2)(y^2 + 2y + 4), \text{ или } (y-2)(y^2 + 2y + 4 - y + 2) = 0, \\ (y-2)(y^2 + y + 6) = 0, \text{ откуда } y = 2.$$

Уравнение  $y^2 + y + 6 = 0$  не имеет действительных корней, так как  $D = -23 < 0$ .

Итак,  $y = 2$ , и так как  $y = ab$ , то  $ab = 2$  и из (1) получим  $x^2 - 11x + 10 = 0$ , откуда  $x_1 = 1, x_2 = 10$ .

Оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ:  $x_1 = 1, x_2 = 10$ .

### 854 | Решение.

$$x^2 + (6 - a - a^2) \cdot x - a^2 = 0.$$

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни квадратного уравнения, тогда по теореме Виета имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a^2 + a - 6, \\ x_1 x_2 = -a^2. \end{cases} \quad (1)$$

Значит,  $x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$ , или, учитывая (1), получим  $x_1^3 + x_2^3 = (a^2 + a - 6)^3 + 3a^2(a^2 + a - 6)$ .

По условию задачи  $x_1^3 + x_2^3 = 0$ , или  $(a^2 + a - 6)^3 + 3a^2(a^2 + a - 6) = 0$ ,  $(a^2 + a - 6)((a^2 + a - 6)^2 + 3a^2) = 0$ , откуда  $a^2 + a - 6 = 0$ , или  $(a^2 + a - 6)^2 + 3a^2 = 0$ .

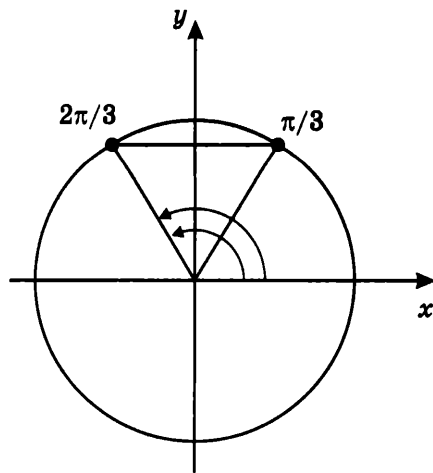
Из первого уравнения находим  $a_1 = -3; a_2 = 2$ . Второе уравнение не имеет действительных корней.

Ответ:  $a_1 = -3; a_2 = 2$ .

### 864 | Решение.

$$\sin ax \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

На единичной окружности с центром в начале координат находятся две точки, ордината каждой из которых равна  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Одна из них является концом каждой из дуг множества





$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ , а другая — концом каждой из дуг множества  $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Как видно из рисунка, данное неравенство справедливо при  $\frac{\pi}{3} + 2\pi n \leq ax \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Следовательно, если  $a > 0$ , то  $\frac{1}{a} \left( \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) \leq x \leq \frac{1}{a} \left( \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

если  $a < 0$ , то  $\frac{1}{a} \left( \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right) \leq x \leq \frac{1}{a} \left( \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

если  $a = 0$ , то решений нет.

Ответ: если  $a > 0$ , то  $\frac{1}{a} \left( \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right) \leq x \leq \frac{1}{a} \left( \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

если  $a < 0$ , то  $\frac{1}{a} \left( \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right) \leq x \leq \frac{1}{a} \left( \frac{\pi}{3} + 2\pi n \right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

если  $a = 0$ , то решений нет.

### 870 | Решение.

Пусть расстояние  $S$  км от  $A$  до  $B$  плот проплывает за  $x$  суток. Тогда его скорость, равная скорости течения, есть  $\frac{S}{x}$  км/сут. По условию скорость парохода, идущего по течению, равна  $\frac{S}{2}$  км/сут.

Следовательно, скорость парохода в стоячей воде будет  $\left( \frac{S}{2} - \frac{S}{x} \right)$  км/сут. А так как скорость движения парохода против течения составляет  $\frac{S}{3}$  км/сут., то скорость его в стоячей воде равна  $\left( \frac{S}{3} + \frac{S}{x} \right)$  км/сут.

Имеем уравнение  $\frac{S}{2} - \frac{S}{x} = \frac{S}{3} + \frac{S}{x}$ , или  $\frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{x}$ ,  $\frac{2}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$ ,

$\frac{2}{x} = \frac{1}{6}$ , откуда  $x = 12$ .

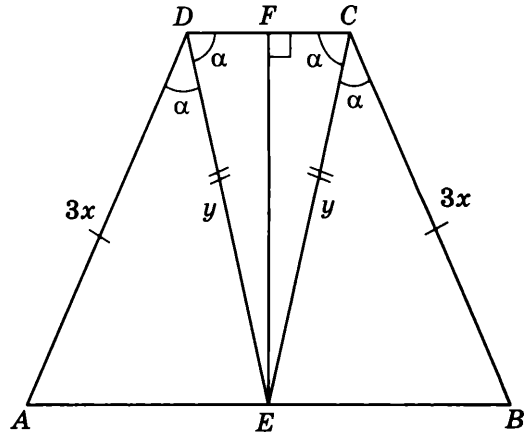
Следовательно, плот будет плыть 12 суток.

**871 | Решение.**

Пусть в трапеции  $ABCD$   $AD = BC$ ;  $DE$  и  $CE$  — биссектрисы тупых углов  $ADC$  и  $BCD$ .

Пусть  $DC = x$ , тогда  $AD = 3x$ . Так как  $\angle EDC = \angle ECD$ , то  $\triangle ECD$  — равнобедренный.

Пусть  $DE = CE = y$ . Заметим, что  $\triangle ADE = \triangle ECB$  (по двум сторонам и углу между ними), тогда



$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ADE} + S_{\triangle DEC}. \quad (1)$$

$$\text{Но } S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AD \cdot DE \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 3xy \sin \alpha. \quad (2)$$

$$S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} DE \cdot CE \sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2} y^2 \sin 2\alpha. \quad (3)$$

С учетом (2) и (3) равенство (1) примет вид

$$S_{ABCD} = 3xy \sin \alpha + \frac{1}{2} y^2 \sin 2\alpha. \quad (4)$$

Из  $\triangle DFE$   $\cos \alpha = \frac{1}{2} x : y = \frac{x}{2y}$ , откуда  $x = 2y \cos \alpha$ , тогда

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= 3 \cdot 2y \cos \alpha \cdot y \sin \alpha + \frac{1}{2} y^2 \sin 2\alpha = 3y^2 \sin 2\alpha + \frac{1}{2} y^2 \sin 2\alpha = \\ &= \frac{7}{2} y^2 \sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Учитывая (3), получим  $S_{ABCD} : S_{\triangle DEC} = \frac{7}{2} y^2 \sin 2\alpha : \frac{1}{2} y^2 \sin 2\alpha = 7$ .

Ответ: 7.

**872 | Решение.**

$$71x + 13y = xy - 14.$$

Запишем уравнение в виде  $71x + 13y + 14 = xy$ , или

$$\begin{aligned} xy - 71x - 13y &= 14, \quad xy - 71x - 13y + 71 \cdot 13 = 14 + 71 \cdot 13, \\ (xy - 13y) - (71x - 71 \cdot 13) &= 937, \quad y(x - 13) - 71(x - 13) = 937, \\ (x - 13)(y - 71) &= 937. \end{aligned} \quad (1)$$

Так как 937 — простое число, то из (1) получим две системы уравнений:

$$1) \begin{cases} x - 13 = 1, \\ y - 71 = 937; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 14, \\ y = 1008. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - 13 = 937, \\ y - 71 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 950, \\ y = 72. \end{cases}$$

Таким образом, исходное уравнение имеет два решения в целых числах.

Ответ: (14; 1008), (950; 72).

### 873 | Решение.

Пусть  $x_1 = \log_2 3 = \frac{\lg 3}{\lg 2}$ ,  $x_2 = \log_3 4 = \frac{\lg 4}{\lg 3}$ ,  $x_3 = \log_4 5 = \frac{\lg 5}{\lg 4}$ , ...,

$x_6 = \log_7 8 = \frac{\lg 8}{\lg 7}$ , где  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ , ...,  $x_6 > 0$ .

Используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для 6 положительных чисел  $x_1, x_2, \dots, x_6$ , имеем

$$\frac{1}{6}(x_1 + x_2 + \dots + x_6) \geq \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_6}.$$

$$\text{Тогда } \sqrt[6]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_6} = \sqrt[6]{\frac{\lg 3 \cdot \lg 4 \cdot \dots \cdot \lg 8}{\lg 2 \cdot \lg 3 \cdot \dots \cdot \lg 7}} = \sqrt[6]{\frac{\lg 8}{\lg 2}} = \sqrt[6]{\frac{3 \lg 2}{\lg 2}} = \sqrt[6]{3}.$$

Так как  $\sqrt[6]{3} > 1,1$ , то  $x_1 + x_2 + \dots + x_6 > 6,6$ , значит,

$\log_2 3 + \log_3 4 + \dots + \log_7 8 < 7$ , ч. т. д.

### 874 | Решение.

$$\cos ax = 1 + 3 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

Так как  $1 + 3 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \geq 1$  при любом значении  $x$ , то данное ра-

венство выполняется лишь при условии, если  $\cos \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) = 0$ , т. е. при

$$\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ откуда } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, получим  $\cos ax = 1$ , т. е.  $ax = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Заметим, что при значениях  $x$ , определяемых формулой  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , значение  $a = 0$  удовлетворяет исходному уравнению.

Пусть теперь  $a \neq 0$ , тогда  $x = \frac{2\pi k}{a}$ .

Учитывая, что  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , получим  $\frac{2\pi k}{a} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ , или  $\frac{2k}{a} = \frac{1}{2} + 2n$ ,

$$a = \frac{2k}{\frac{1}{2} + 2n} = \frac{4k}{1 + 4n}.$$

По условию  $a \in \mathbb{Z}$ , тогда  $k = m(1 + 4n)$ , значит,  $a = 4m$ .

Ответ:  $a = 4m$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

### 880 | Решение.

Пусть  $x$  и  $y$  — данные натуральные числа. Пусть для определенности  $y < x$ , тогда большее число  $x = 10y + k$ , где  $k$  — зачеркнутая цифра, причем  $0 \leq k \leq 9$ .

Согласно условию задачи  $x + y = 10y + k + y = 11y + k$ .

Кроме того,  $x + y = 2024$ , тогда  $11y + k = 2024$ , следовательно,  $k$  — остаток от деления 2024 на 11, т. е.  $k = 0$ , тогда  $11y + 0 = 2024$ ,  $11y = 2024$ ,  $y = 184$  и  $x = 2024 - 184 = 1840$ .

Ответ: 1840 и 184.

### 883 | Решение.

І способ

$$(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1)=2x.$$

Так как  $2x = 2(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)$ , то данное уравнение запишется в виде  $(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1) = 2(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)$ .

Вынесем общий множитель  $\sqrt{1+x}-1$  за скобки:

$$(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1-2\sqrt{1+x}-2)=0, \text{ или}$$

$$(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}-1)=0, \text{ откуда имеем:}$$

$$1) \sqrt{1+x}-1=0, \sqrt{1+x}=1, 1+x=1, x=0.$$

$$2) \sqrt{1-x}-2\sqrt{1+x}=1.$$

Пусть  $\sqrt{1+x} = a$ ,  $a \geq 0$ ;  $\sqrt{1-x} = b$ ,  $b \geq 0$ ;

$$\begin{cases} 1+x = a^2, \\ 1-x = b^2; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 + b^2 = 2, \\ b - 2a = 1, \end{cases}$$

$b = 2a + 1$ , тогда  $a^2 + 4a^2 + 4a + 1 = 2$ , или  $5a^2 + 4a - 1 = 0$ ;

$a_1 = -1$  (не удовлетворяет),  $a_2 = \frac{1}{5}$ , значит,  $x = a^2 - 1 = -\frac{24}{25}$ .

Ответ:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -\frac{24}{25}$ .

## II способ

*Решение.*

$$(\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1) = 2x.$$

Пусть  $\begin{cases} \sqrt{1+x} = a, & a \geq 0, \\ \sqrt{1-x} = b, & b \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1+x = a^2, \\ 1-x = b^2, \end{cases}$  откуда  $a^2 - b^2 = 2x$ .

Исходное уравнение примет вид  $(a-1)(a+1) = a^2 - b^2$ .

Кроме того,  $a^2 + b^2 = 2$ .

Имеем систему уравнений  $\begin{cases} a^2 + b^2 = 2, \\ a^2 - b^2 = (a-1)(b+1). \end{cases}$

Складывая левые и правые части, получим

$2a^2 = 2 + (a-1)(b+1)$ , или  $2(a-1)(a+1) = (a-1)(b+1)$ , или

$(a-1)(2a+2-b-1) = 0$ , откуда  $a = 1$ , тогда  $x_1 = a^2 - 1 = 0$ , или

$2a - b = -1$ .

Учитывая, что  $a^2 + b^2 = 2$ , имеем

$$\begin{cases} 2a - b = -1, \\ a^2 + b^2 = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 2a + 1, \\ a^2 + (2a+1)^2 = 2. \end{cases}$$

$a^2 + 4a^2 + 4a + 1 = 2$ , или  $5a^2 + 4a - 1 = 0$ , откуда находим  $a_1 = -1$

(не удовлетворяет условию  $a \geq 0$ ),  $a_2 = \frac{1}{5}$ , тогда  $x = a^2 - 1 = -\frac{24}{25}$ .

Проверка показывает, что  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -\frac{24}{25}$  — корни исходного

уравнения.

Ответ:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -\frac{24}{25}$ .

### 890 | Решение.

Допустим, что из первого сплава надо взять  $x$  кг, тогда в  $x$  кг первого сплава будет содержаться  $\frac{2}{5}x$  кг золота, а в  $(8 - x)$  кг второго сплава будет  $\frac{3}{10}(8 - x)$  кг золота.

По условию в 8 кг нового сплава должно содержаться золота  $\frac{5}{16} \cdot 8$  кг = 2,5 кг.

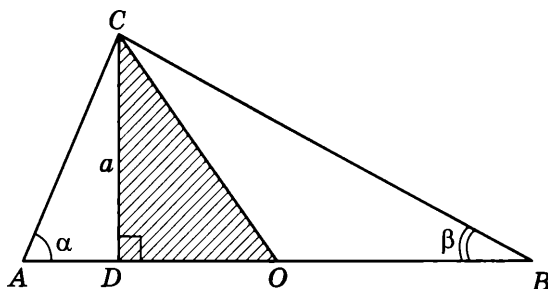
Имеем уравнение  $\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}(8 - x) = 2,5$ ,  $4x + 3 \cdot (8 - x) = 25$ ,

$4x + 24 - 3x = 25$ , откуда  $x = 1$ , тогда  $8 - x = 7$ .

Следовательно, нужно взять 1 кг первого сплава и 7 кг второго.

Ответ: 1 кг первого сплава и 7 кг второго.

### 891 | Решение.



Пусть  $\angle A = \alpha$ ,  $\angle B = \beta$ ,  $CD = a$ , тогда из  $\triangle ADC$   $AD = a \operatorname{ctg} \alpha$ .

Из  $\triangle CDB$   $DB = a \operatorname{ctg} \beta$ , значит,  $AB = AD + DB = a(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)$ .

$AO = \frac{1}{2}AB$ , так как  $CO$  — медиана  $\triangle ABC$ , тогда  $AO = \frac{a}{2}(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)$ .

Кроме того,  $AO = AD + DO$ , откуда  $DO = AO - AD = \frac{a}{2}(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) - a \operatorname{ctg} \alpha = \frac{a}{2}(\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha)$ .

Следовательно,  $S_{\triangle CDO} = \frac{1}{2}CD \cdot DO = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}a(\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha) = \frac{1}{4}a^2(\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha)$ .

Упростим выражение в скобках:

$$\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \beta}{\sin \beta} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Значит,  $S_{\Delta CDO} = \frac{a^2 \sin(\alpha - \beta)}{4 \sin \alpha \sin \beta}$  (кв. ед.).

Ответ:  $\frac{a^2 \sin(\alpha - \beta)}{4 \sin \alpha \sin \beta}$ .

**892** | Решение.

І способ

$$4x^4 - 49x^2 - 4x + 14 = 0.$$

Испытывая делители свободного члена 14, можно убедиться в том, что уравнение не имеет целых корней.

Заметим, что  $x = 0$  не является корнем уравнения, тогда, разделив обе части на  $4x^2 \neq 0$ , получим  $x^2 - \frac{49}{4} = \frac{1}{x} - \frac{7}{2x^2}$ , или

$$\left(x - \frac{7}{2}\right)\left(x + \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{x^2}\left(x - \frac{7}{2}\right), \text{ откуда имеем:}$$

$$1) x - \frac{7}{2} = 0, x_1 = 3,5;$$

$$2) x + \frac{7}{2} = \frac{1}{x^2}, \text{ или } x + 4 - \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2},$$

$$x - \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2} - 4, x - \frac{1}{2} = \frac{1 - 4x^2}{x^2}, \frac{2x - 1}{2} + \frac{4x^2 - 1}{x^2} = 0,$$

$$(2x - 1)\left(\frac{1}{2} + \frac{2x + 1}{x^2}\right) = 0, \text{ откуда } 2x - 1 = 0, x_2 = 0,5, \text{ или } \frac{1}{2} + \frac{2x + 1}{x^2} = 0,$$

$$x^2 + 4x + 2 = 0, D/4 = 2 > 0, x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{2}.$$

Итак, исходное уравнение имеет 4 корня.

Ответ:  $x_1 = 3,5; x_2 = 0,5; x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{2}$ .

ІІ способ

Решение.

Умножим обе части исходного уравнения на 4:

$$16x^4 - 196x^2 - 16x + 56 = 0, \text{ или } (2x)^4 - 49 \cdot (2x)^2 - 8 \cdot (2x) + 56 = 0.$$

Пусть  $2x = y$ , тогда получим уравнение

$$y^4 - 49y^2 - 8y + 56 = 0, \text{ или } y^2(y^2 - 1) - 8(y^2 + y - 7) = 0,$$

$$y^2(y^2 - 1) - 8(y - 1)(6y + 7) = 0, (y - 1)(y^3 + y^2 - 48y - 56) = 0,$$

откуда  $y - 1 = 0$ , или  $y^3 + y^2 - 48y - 56 = 0$ .

1) Если  $y - 1 = 0$ , то  $y = 1$ , т. е.  $2x = 1$ ,  $x_1 = 0,5$ .

2) Если  $y^3 + y^2 - 48y - 56 = 0$ , то получим

$$y^2(y - 7) + 8y(y - 7) + 8(y - 7) = 0, (y - 7)(y^2 + 8y + 8) = 0, \text{ откуда } y_2 = 7, y_{3,4} = -4 \pm 2\sqrt{2}.$$

Если  $y = 7$ , то  $2x = 7$ ,  $x_2 = 3,5$ , если  $y_{3,4} = -4 \pm 2\sqrt{2}$ , то  $2x = -4 \pm 2\sqrt{2}$ , откуда  $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{2}$ .

Ответ:  $x_1 = 0,5$ ;  $x_2 = 3,5$ ;  $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{2}$ .

**893** | Решение.

$$\begin{cases} x + y - \frac{12}{x - y} = \sqrt{\frac{x + y}{x - y}}, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Возможны 2 случая:

1)  $x - y > 0$ , тогда, умножив обе части первого уравнения на  $x - y$ , получим

$$x^2 - y^2 - 12 = \sqrt{x^2 - y^2}. \quad (1)$$

Пусть  $\sqrt{x^2 - y^2} = t$ , где  $t \geq 0$ , тогда (1) примет вид  $t^2 - 12 = t$ , или  $t^2 - t - 12 = 0$ , откуда  $t_1 = 4$ ,  $t_2 = -3$  (не подходит ввиду того, что  $t \geq 0$ ).

Если  $t = 4$ , то  $\sqrt{x^2 - y^2} = 4$ ,  $x^2 - y^2 = 16$ .

Учитывая второе уравнение исходной системы, получим

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ xy = 15; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ x^2 y^2 = 225; \end{cases} \quad \begin{cases} (x^2 - y^2)^2 = 256, \\ 4x^2 y^2 = 900. \end{cases}$$

Складывая обе части уравнений системы, получим

$x^4 - 2x^2 y^2 + y^4 + 4x^2 y^2 = 1156$ ,  $(x^2 + y^2)^2 = 1156$ , откуда  $x^2 + y^2 = 34$ , так как  $x^2 + y^2 > 0$  ( $x \neq y$ ).

Имеем равносильную систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ x^2 - y^2 = 16; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^2 = 50, \\ 2y^2 = 18; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 25, \\ y^2 = 9; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 5, \\ y = \pm 3, \end{cases}$$

откуда  $x = 5$ ,  $y = 3$ .

Вторая пара  $(-5; -3)$  не подходит, так как  $x - y > 0$ .



**Замечание.** Систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 16, \\ xy = 15 \end{cases}$$

можно было решить подстановкой  $y = \frac{15}{x}$  и т. д.

2)  $x - y < 0$ , тогда, умножив обе части первого уравнения исходной системы на  $x - y$ , получим  $x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 - y^2} = 12$ .

Пусть  $\sqrt{x^2 - y^2} = z$ , где  $z \geq 0$ , тогда имеем  $z^2 + z - 12 = 0$ , откуда  $z_1 = 3$ ,  $z_2 = -4$  (не подходит).

Если  $z = 3$ , то получим систему уравнений  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 9, \\ xy = 15. \end{cases}$

Решая аналогично (или способом подстановки), находим еще две пары решений:

$$\left( \sqrt{\frac{9 + \sqrt{981}}{2}}; \sqrt{\frac{-9 + \sqrt{981}}{2}} \right) \text{ и } \left( -\sqrt{\frac{9 + \sqrt{981}}{2}}; -\sqrt{\frac{-9 + \sqrt{981}}{2}} \right).$$

Первая пара чисел не подходит, так как  $x - y < 0$ .

Ответ:  $(5; 3)$ ,  $\left( -\sqrt{\frac{9 + \sqrt{981}}{2}}; -\sqrt{\frac{-9 + \sqrt{981}}{2}} \right)$ .

## 912 | Решение.

$$8^{x+1} + 11 = 12\sqrt[3]{24 \cdot 2^x - 11}.$$

Пусть  $2^x = t$ , где  $t > 0$ , тогда  $8^{x+1} = 2^{3x} \cdot 8 = 8t^3$ , и данное уравнение запишется в виде  $8t^3 + 11 = 12\sqrt[3]{24t - 11}$ , или

$$\frac{8t^3 + 11}{24} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{24t - 11}. \quad (1)$$

Заметим, что функция  $y = f(t) = \frac{8t^3 + 11}{24}$  — возрастающая. Выразим  $t$  через  $y$ :  $8t^3 + 11 = 24y$ ,  $t^3 = \frac{24y - 11}{8}$ , откуда  $t = \sqrt[3]{\frac{24y - 11}{8}}$ .

Следовательно,  $f(t) = g(t)$ , где  $g$  — функция, обратная к  $f$ . Так как графики возрастающей функции и ее обратной могут пересекаться лишь на биссектрисе первого и третьего координатных углов, то

$f(t) = g(t)$ ,  $f(t) = t$ , тогда получим  $\frac{8t^3 + 11}{24} = t$ , или  $8t^3 - 24t + 11 = 0$ .

$$2t(4t^2 - 1) - 11(2t - 1) = 0, (2t - 1)(4t^2 + 2t - 11) = 0,$$

$$\text{откуда } t_1 = \frac{1}{2}, \text{ или } 4t^2 + 2t - 11 = 0,$$

$$D/4 = 1 + 44 = 45 > 0, t_{2,3} = \frac{1}{4}(-1 \pm \sqrt{45}) = \frac{1}{4}(-1 \pm 3\sqrt{5}).$$

Так как  $t > 0$ , то корень  $t = \frac{1}{4}(-1 - 3\sqrt{5})$  не подходит, тогда

$$t = \frac{1}{4}(3\sqrt{5} - 1).$$

Итак, имеем два уравнения:

$$1) 2^x = \frac{1}{2}, x_1 = -1;$$

$$2) 2^x = \frac{1}{4}(3\sqrt{5} - 1).$$

При этом  $24 \cdot 2^x - 11 > 0$ , тогда, логарифмируя обе части полученного уравнения по основанию 2, получим  $x_2 = \log_2 \frac{1}{4}(3\sqrt{5} - 1)$ .

Итак, исходное уравнение имеет два корня.

$$\text{Ответ: } x_1 = -1, x_2 = \log_2 \frac{1}{4}(3\sqrt{5} - 1).$$

**921 | Решение.**

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10 \left( \frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right).$$

Разделим обе части уравнения на 3:  $\frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2} = \frac{10}{3} \left( \frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right)$ , или

$$\left( \frac{x}{3} \right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{4}{x} + \left( \frac{4}{x} \right)^2 = \frac{10}{3} \left( \frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right) - \frac{8}{3},$$

$$\left( \frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right)^2 - \frac{10}{3} \left( \frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right) + \frac{8}{3} = 0. \quad (1)$$

Пусть  $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = y$ , тогда (1) примет вид  $y^2 - \frac{10}{3}y + \frac{8}{3} = 0$ , или

$$3y^2 - 10y + 8 = 0, D/4 = 25 - 24 = 1 > 0, y_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{3}, \text{ откуда } y_1 = 2,$$

$$y_2 = \frac{4}{3}.$$

Следовательно, получим два уравнения:

$$1) \frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2, \quad x^2 - 6x - 12 = 0; \quad D/4 = 21 > 0, \quad \text{тогда } x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{21}.$$

$$2) \frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3}, \quad x^2 - 4x - 12 = 0, \quad \text{откуда } x_3 = -2, \quad x_4 = 6.$$

Итак, исходное уравнение имеет 4 корня.

*Замечание.* Подстановку  $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$  можно было ввести сразу.

*Ответ:*  $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{21}, \quad x_3 = -2, \quad x_4 = 6.$

**922 | Решение.**

$$\begin{cases} 3^x + 3 = 28 \cdot 3^y, \\ \sqrt{2x + y^2} = y - x. \end{cases}$$

Упростим второе уравнение системы:  $\sqrt{2x + y^2} = y - x$ , где  $y \geq x$ .

Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$2x + y^2 = y^2 - 2xy + x^2, \quad \text{или } x^2 - 2xy - 2x = 0, \quad x(x - 2y - 2) = 0,$$

откуда  $x = 0$ , или  $x - 2y - 2 = 0$ .

Если  $x = 0$ , то первое уравнение исходной системы примет вид

$$3^0 + 3 = 28 \cdot 3^y, \quad \text{или } 4 = 28 \cdot 3^y, \quad 3^y = \frac{1}{7}, \quad \text{откуда}$$

$$y = \log_3 \frac{1}{7} = -\log_3 7 < 0 \quad \text{— не подходит, так как } y \geq x.$$

Если  $x - 2y - 2 = 0$ , то  $x = 2y + 2$ , и первое уравнение системы примет вид  $3^{2y+2} + 3 = 28 \cdot 3^y$ ;  $9 \cdot (3^y)^2 - 28 \cdot 3^y + 3 = 0$ .

Пусть  $3^y = t$ , где  $t > 0$ , тогда получим  $9t^2 - 28t + 3 = 0$ ,

$$D/4 = 14^2 - 27 = 13^2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{14 \pm 13}{9}, \quad t_1 = 3, \quad t_2 = \frac{1}{9}.$$

$$\text{Значит, } 3^y = 3, \quad y_1 = 1; \quad 3^y = \frac{1}{9}, \quad y_2 = -2.$$

Так как  $x = 2y + 2$ , то  $x_1 = 3, \quad x_2 = -2$ .

Пара  $(3; 1)$  не удовлетворяет условию  $y \geq x$ , а пара  $(-2; -2)$  удовлетворяет.

Следовательно,  $(-2; -2)$  — решение исходной системы уравнений.

*Ответ:*  $(-2; -2).$

**923** | Решение.

$$\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\cos x - \frac{4\pi}{3}\right) = 1.$$

Запишем уравнение в виде  $1 - \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}\cos x - \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ , или

$$\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}\cos x - \frac{4\pi}{3}\right) = 0, \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\cos x - \frac{4\pi}{3}\right) = 0, \quad \frac{2\pi}{3}\cos x - \frac{4\pi}{3} = \pi k,$$

$$2\pi\cos x - 4\pi = 3\pi k, \text{ откуда } \cos x = \frac{1}{2}(4 + 3k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Так как  $|\cos x| \leq 1$ , то  $\left|\frac{4+3k}{2}\right| \leq 1$ , или  $-1 \leq \frac{4+3k}{2} \leq 1$ ,

$$-2 \leq 4 + 3k \leq 2, \quad -6 \leq 3k \leq -2, \quad -2 \leq k \leq -\frac{2}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Значит,  $k = -2$  и  $k = -1$ .

Если  $k = -2$ , то  $\cos x = \frac{4-6}{2} = -1$ , тогда  $x = \pi + 2\pi n$ ;

если  $k = -1$ , то  $\cos x = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2}$ , откуда  $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Ответ:  $\pi + 2\pi n$ ;  $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**924** | Решение.

$$19 \cdot 7^{\sqrt{4-x}} + a \cdot 7^{x-3} > 7^{x+\sqrt{4-x}-3} + 19a.$$

Запишем неравенство в виде

$$19 \cdot 7^{\sqrt{4-x}} - 7^{x-3} \cdot 7^{\sqrt{4-x}} - 19a + a \cdot 7^{x-3} > 0,$$

$$7^{\sqrt{4-x}}(19 - 7^{x-3}) - a(19 - 7^{x-3}) > 0, \text{ или}$$

$$(19 - 7^{x-3})(7^{\sqrt{4-x}} - a) > 0. \quad (1)$$

Так как  $4 - x \geq 0$ , т. е.  $x \leq 4$ , то  $19 - 7^{x-3} > 0$ , тогда неравенство (1) равносильно неравенству

$$7^{\sqrt{4-x}} - a > 0, \text{ или } 7^{\sqrt{4-x}} > a. \quad (2)$$

Если  $a < 1$ , то  $x \leq 4$ ; если  $a \geq 1$ , то, логарифмируя обе части неравенства (2) по основанию 7, находим  $\sqrt{4-x} > \log_7 a$ , или  $4-x > \log_7^2 a$ , откуда  $x < 4 - \log_7^2 a$ .

Ответ: при  $a \in (-\infty; 1)$ ,  $x \in (-\infty; 4]$ ; при  $a \in [1; +\infty)$ ,  $x \in (-\infty; 4 - \log_7^2 a)$ .

**950 | Решение.**

Найдем скорость второй автомашины:  $\frac{50}{100} \cdot 120 = 60$  (км/ч).

Пусть скорость третьей автомашины  $x$  км/ч,  $t$  ч — время, за которое третья автомашина догонит первую. В момент времени, когда одна автомашина догнала другую, расстояния, пройденные ими, равны. Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} xt = 50(t + 0,5), \\ x(t + 1) = 60(0,5 + t + 1); \end{cases} \quad \begin{cases} xt = 50t + 25, \\ xt + x = 60t + 90. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$x = 10t + 65. \quad (1)$$

Значение (1) подставим в первое уравнение последней системы:

$$(10t + 65)t = 50t + 25, \text{ или } 10t^2 + 65t = 50t + 25;$$

$$10t^2 + 15t - 25 = 0, \quad 2t^2 + 3t - 5 = 0, \quad D = 9 + 40 = 49 = 7^2 > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm 7}{4}, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = -2,5 \text{ (не удовлетворяет, так как } t > 0).$$

Итак,  $t = 1$ , тогда из (1) находим  $x = 10 \cdot 1 + 65 = 75$ .

Значит, скорость третьей машины 75 км/ч.

Ответ: 75 км/ч.

**951 | Решение.**

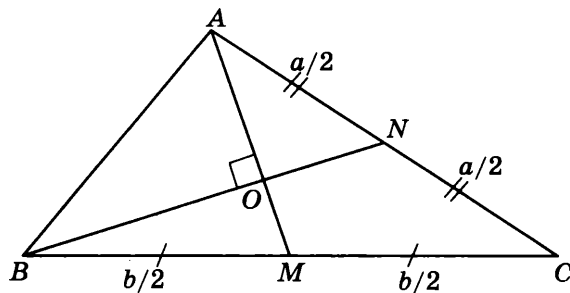
І способ

Используя теорему косинусов для  $\triangle AMC$ ,  $\triangle BNC$  и  $\triangle ACB$ , имеем

$$AM^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab \cos \angle C. \quad (1)$$

$$BN^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2 - ab \cos \angle C. \quad (2)$$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C. \quad (3)$$



Так как по условию задачи  $AM \perp BN$ , то из  $\triangle BOA$  имеем

$$AB^2 = AO^2 + BO^2. \quad (4)$$

По свойству медианы треугольника имеем  $BO = \frac{2}{3}BN$ ,  $AO = \frac{2}{3}AM$ ,

тогда (4) примет вид  $AB^2 = \frac{4}{9}(AM^2 + BN^2).$  (5)

Упростим (5) с учетом (1) и (2):

$$AB^2 = \frac{4}{9} \left( a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab \cos \angle C + b^2 + \frac{1}{4}a^2 - ab \cos \angle C \right), \text{ или}$$

$$AB^2 = \frac{1}{9}(5a^2 + 5b^2 - 8ab \cos \angle C). \quad (6)$$

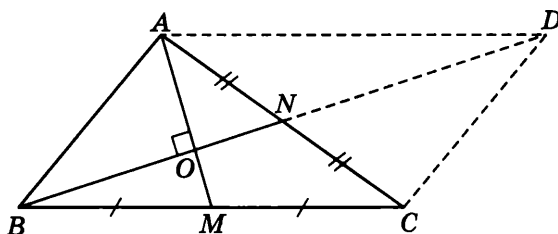
Сравнивая (3) и (6), получим  $4(a^2 + b^2) = 10ab \cos \angle C$ , откуда

$$\cos \angle C = \frac{2(a^2 + b^2)}{5ab}, \text{ тогда (3) примет вид } AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \frac{2(a^2 + b^2)}{5ab},$$

или  $AB^2 = \frac{1}{5}(a^2 + b^2)$ , откуда  $AB = \sqrt{\frac{1}{5}(a^2 + b^2)}.$

Ответ:  $AB = \sqrt{\frac{1}{5}(a^2 + b^2)}.$

II способ



Решение.

Пусть  $BO = 2n$ ,  $ON = n$ ,  $AO = 2m$ ,  $OM = m$  (по свойству медианы). Дополним  $\triangle ABC$  до параллелограмма  $ABCD$ , тогда по свойству последнего имеем  $2(AB^2 + BC^2) = BD^2 + AC^2$ , или, обозначив  $AB = x$ , имеем

$$2(x^2 + b^2) = 36n^2 + a^2. \quad (1)$$

Из  $\triangle AOB$  и  $\triangle AON$   $x^2 = 4m^2 + 4n^2$  и  $4m^2 + n^2 = \frac{1}{4}a^2$ , откуда

$$x^2 - \frac{1}{4}a^2 = 3n^2, \text{ значит, } n^2 = \frac{1}{3} \left( x^2 - \frac{1}{4}a^2 \right). \quad (2)$$

Учитывая (2), равенство (1) примет вид

$$2(x^2 + b^2) = 12\left(x^2 - \frac{1}{4}a^2\right) + a^2, \text{ или } x^2 + b^2 = 6x^2 - a^2,$$

$$5x^2 = a^2 + b^2, \text{ откуда } x = AB = \sqrt{\frac{1}{5}(a^2 + b^2)}.$$

Ответ:  $AB = \sqrt{\frac{1}{5}(a^2 + b^2)}.$

*Замечание.* Задачу можно решить и с применением векторов.

## 952 | Решение.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 72^\circ \cdot \operatorname{ctg}^2 54^\circ &= (\operatorname{tg} 72^\circ \cdot \operatorname{ctg} 54^\circ)^2 = (\operatorname{ctg} 18^\circ \cdot \operatorname{tg} 36^\circ)^2 = \\ &= (\operatorname{ctg} 18^\circ \cdot \operatorname{tg} (2 \cdot 18^\circ))^2 = \left( \operatorname{ctg} 18^\circ \cdot \frac{2 \operatorname{tg} 18^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 18^\circ} \right)^2 = \left( \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2 18^\circ} \right)^2 = \\ &= \frac{4}{(1 - \operatorname{tg}^2 18^\circ)^2}. \end{aligned}$$

Известно, что  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ , тогда  $\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1$ ,

$$\begin{aligned} 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha &= 2 - \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ значит, } 1 - \operatorname{tg}^2 18^\circ = 2 - \frac{1}{\cos^2 18^\circ} = 2 - \frac{16}{10 + 2\sqrt{5}} = \\ &= \frac{4 + 4\sqrt{5}}{10 + 2\sqrt{5}} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} = \frac{2(1 + \sqrt{5})}{\sqrt{5}(1 + \sqrt{5})} = \frac{2}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Следовательно,  $\operatorname{tg}^2 72^\circ \cdot \operatorname{ctg}^2 54^\circ = 4 \cdot \left( \frac{\sqrt{5}}{2} \right)^2 = 5$ , что и требовалось до-

казать.

## 974 | Решение.

Допустим, что масса каждого из отрезанных кусков была  $x$  кг. Из двух вновь полученных слитков первый содержит  $(m_1 - x)$  кг сплава массой  $m_1$  и  $x$  кг сплава  $m_2$ , а второй —  $x$  кг сплава  $m_1$  и  $(m_2 - x)$  кг сплава  $m_2$ . Согласно условию процентное содержание меди в обоих слитках одинаково, что выполняется при условии, если в двух слитках количество сплава  $m_1$  и  $m_2$  пропорционально.

Следовательно, получим уравнение  $\frac{m_1 - x}{x} = \frac{x}{m_2 - x}$ , или

$$x^2 = (m_1 - x)(m_2 - x), x^2 = m_1 m_2 - m_2 x - m_1 x + x^2,$$

$$(m_1 + m_2)x = m_1 m_2, \text{ откуда } x = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Ответ:  $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ .

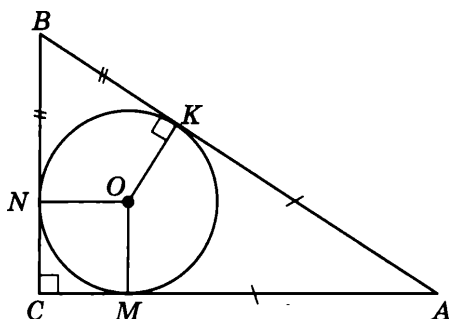
**975** | Решение.

І способ

Пусть в  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ )  $OM = ON = OK = r$  — радиус вписанной окружности. Так как  $\triangle ABC$  прямоугольный, то  $AB$  — диаметр описанной окружности, тогда  $AB = 2R$ .

Известно, что  $S = p \cdot r$ , где

$$p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC).$$



По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем

$$AC + BC = 2r + AB, \text{ тогда } S = \frac{1}{2}(AC + BC + AB)r = \frac{1}{2}(2r + AB + AB)r = (r + AB)r = (r + 2R)r.$$

Итак,  $S = (2R + r)r$ , что и требовалось доказать.

ІІ способ

Решение.

Так как  $\triangle ABC$  прямоугольный, то  $AB = 2R$ , тогда  $S = \frac{1}{2}AC \cdot BC$ .

$$\text{Пусть } AC = x, BC = y, \text{ тогда } S = \frac{1}{2}xy. \quad (1)$$

$$\text{Из } \triangle ABC \quad x^2 + y^2 = 4R^2. \quad (2)$$

Известно, что  $r = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$ , или  $r = \frac{x + y - 2R}{2}$ , откуда

$$x + y = 2(R + r). \quad (3)$$

Из (2) и (3) имеем систему уравнений 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4R^2, \\ x + y = 2(R + r). \end{cases}$$



Представим первое уравнение системы в виде  $(x + y)^2 - 2xy = 4R^2$ , или, учитывая (3), имеем  $4(R + r)^2 - 2xy = 4R^2$ , откуда

$$2xy = 4(R + r)^2 - 4R^2, \text{ или } \frac{1}{2}xy = (R + r)^2 - R^2; \text{ но } \frac{1}{2}xy = S, \text{ тогда}$$

$S = R^2 + 2Rr + r^2 - R^2$ , или  $S = r(2R + r)$ , что и требовалось доказать.

### 976 | Решение.

$$x^4 = y^4 + 2y^2 + 157.$$

Выделим в правой части уравнения полный квадрат:

$$x^4 = (y^2 + 1)^2 + 156, \text{ или } x^4 - (y^2 + 1)^2 = 156. \quad (1)$$

Теперь разложим на множители левую часть уравнения (1):

$$(x^2 + y^2 + 1)(x^2 - y^2 - 1) = 156.$$

$$\text{Но } 156 = 1 \cdot 156 = 2 \cdot 78 = 3 \cdot 52 = 4 \cdot 39 = 6 \cdot 26 = 12 \cdot 13.$$

Кроме того,  $x^2 + y^2 + 1 > 0$  при любых  $x, y \in R$ , и очевидно, что  $x^2 + y^2 + 1 > x^2 - y^2 - 1$ .

Так как по условию  $x \in Z, y \in Z$  и 156 — четное число, то нам надо рассмотреть разложения числа 156 в произведение целых чисел одной четности.

Из указанных пар подходят лишь пары (2; 78) и (6; 26).

С учетом перестановок этих пар и вышеизложенного получим две системы уравнений:

$$1) \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 78, \\ x^2 - y^2 - 1 = 2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 26, \\ x^2 - y^2 - 1 = 6. \end{cases}$$

Заметим, что система 1) не имеет решений в целых числах, так как, складывая уравнения системы, получим  $2x^2 = 80, x^2 = 40$  — не имеет решений в целых числах.

$$\text{Из системы 2) находим } \begin{cases} 2x^2 = 32, \\ 2y^2 = 18. \end{cases}$$

Итак, условию задачи удовлетворяют 4 пары чисел.

Ответ:  $(-4; -3), (-4; 3), (4; -3), (4; 3)$ .

### 977 | Решение.

$$\begin{cases} 8\sqrt{x^2 - 6y + 1} - x^2 + 6y = 17, \\ \frac{x^2 y - 5}{49} + \frac{12}{x^2} = \frac{2}{y} + \frac{4}{9}. \end{cases}$$

Пусть  $\sqrt{x^2 - 6y + 1} = t$ , где  $t \geq 0$ , тогда  $x^2 - 6y + 1 = t^2$ , и первое уравнение системы примет вид  $8t - t^2 - 16 = 0$ , или  $t^2 - 8t + 16 = 0$ ,  $(t - 4)^2 = 0$ , откуда  $t = 4$ .

Следовательно,  $x^2 - 6y + 1 = 4^2$ , или  $x^2 - 6y - 15 = 0$ . (1)

Упростим второе уравнение исходной системы:

$$\frac{x^2 y - 5}{49} = \left( \frac{2}{y} - \frac{12}{x^2} \right) + \frac{4}{9}, \text{ или } \frac{x^2 y - 5}{49} = \frac{2(x^2 - 6y)}{x^2 y} + \frac{4}{9}. \quad (2)$$

Учитывая (1), уравнение (2) примет вид

$$\frac{x^2 y - 5}{49} = \frac{2 \cdot 15}{x^2 y} + \frac{4}{9}, \text{ или } \frac{x^2 y - 5}{49} = \frac{30}{x^2 y} + \frac{4}{9}. \quad (3)$$

Пусть  $x^2 y = z$ , тогда (3) преобразуется к виду

$$\frac{z - 5}{49} = \frac{30}{z} + \frac{4}{9}, \text{ или } 9z^2 - 241z - 13\,230 = 0.$$

$$D = 241^2 + 476\,280 = 534\,361 = 731^2 > 0,$$

$$z_{1,2} = \frac{241 \pm 731}{18}, \quad z_1 = 54, \quad z_2 = -\frac{245}{9}.$$

Учитывая (1), имеем две системы уравнений:

$$1) \begin{cases} x^2 - 6y - 15 = 0, & \begin{cases} x^2 = 6y + 15, \\ (6y + 15)y = 54; \end{cases} \end{cases}$$

$$(6y + 15)y = 54, \text{ или } 2y^2 + 5y - 18 = 0,$$

$$D = 25 + 144 = 13^2 > 0, \quad y_{1,2} = \frac{-5 \pm 13}{4},$$

$$y_1 = 2, \quad y_2 = -4,5 \text{ (не удовл., так как } x^2 y = 54 > 0 \text{)}.$$

Если  $y = 2$ , то  $x^2 = 27$ ,  $x_{1,2} = \pm 3\sqrt{3}$ .

Имеем две пары решений:  $(-3\sqrt{3}; 2)$  и  $(3\sqrt{3}; 2)$ .

$$2) \begin{cases} x^2 - 6y - 15 = 0, \\ x^2 y = -\frac{245}{9}. \end{cases}$$

Решая аналогично, убеждаемся, что эта система не имеет действительных решений.

Ответ:  $(-3\sqrt{3}; 2)$ ,  $(3\sqrt{3}; 2)$ .

**978** | Решение.

$$7 \operatorname{tg}^3 x - 6 = \sqrt[3]{\frac{1}{7}(\operatorname{tg} x + 6)}.$$

Пусть  $f(x) = 7 \operatorname{tg}^3 x - 6$ , тогда  $7 \operatorname{tg}^3 x = f(x) + 6$ , или  $\operatorname{tg}^3 x = \frac{1}{7}(f(x) + 6)$ ,

откуда  $\operatorname{tg} x = \sqrt[3]{\frac{1}{7}(f(x) + 6)}$ , т. е.  $g(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{7}(\operatorname{tg} x + 6)}$  — обратная функция (правая часть исходного уравнения).

Тогда  $g(x) = f(x)$ ;  $f(x)$  — монотонно возрастающая на области определения, значит,  $f(x) = g(x) \Rightarrow f(x) = x$ , или  $7 \operatorname{tg}^3 x - 6 = \operatorname{tg} x$ ,

$$7 \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x - 6 = 0. \quad (1)$$

Пусть  $\operatorname{tg} x = y$ , тогда (1) примет вид  $7y^3 - y - 6 = 0$ . (2)

Легко заметить, что  $y = 1$  — корень данного уравнения (2), тогда  $7y(y^2 - 1) + 6(y - 1) = 0$ , или  $(y - 1)(7y^2 + 7y + 6) = 0$ , откуда  $y = 1$ .

Уравнение  $7y^2 + 7y + 6 = 0$  не имеет действительных корней, так как  $D = -119 < 0$ .

Итак,  $y = 1$ , т. е.  $\operatorname{tg} x = 1$ , откуда  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

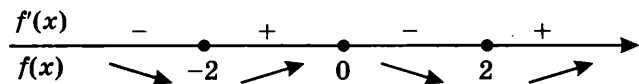
Ответ:  $\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

**979** | Решение.

Запишем уравнение в виде  $x^4 - 8x^2 = a$ .

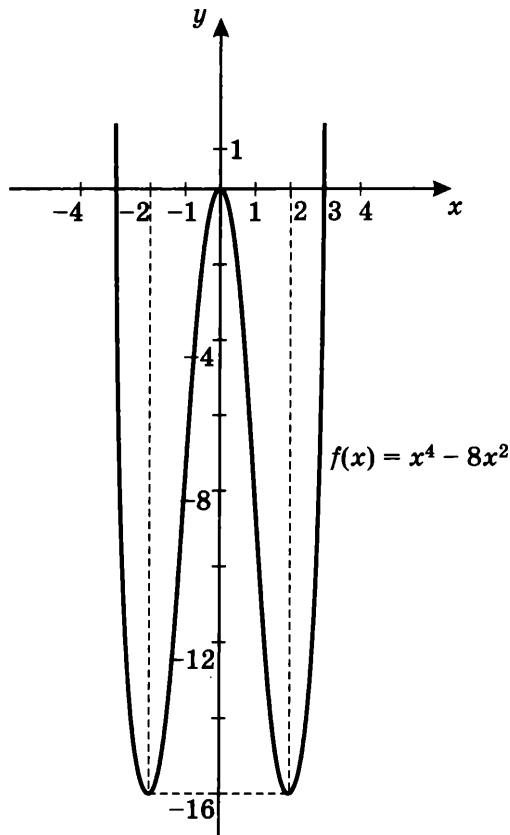
Пусть  $f(x) = x^4 - 8x^2$  — четная функция. Найдём производную функции:  $f'(x) = (x^4 - 8x^2)' = 4x^3 - 16x = 4x(x - 2)(x + 2)$ .

Найдём стационарные точки, для чего решим уравнение  $f'(x) = 0$ , откуда  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = -2$ .



$$f(-2) = f(2) = 16 - 8 \cdot 4 = 16 - 32 = -16, \quad f(0) = 0.$$

Построим схематично график функции  $f(x) = x^4 - 8x^2$ .



Из рисунка видно, что наименьшим целым значением параметра  $a$ , при котором данное уравнение имеет ровно 4 корня, будет значение  $a = -15$ .

Ответ: при  $a = -15$ .

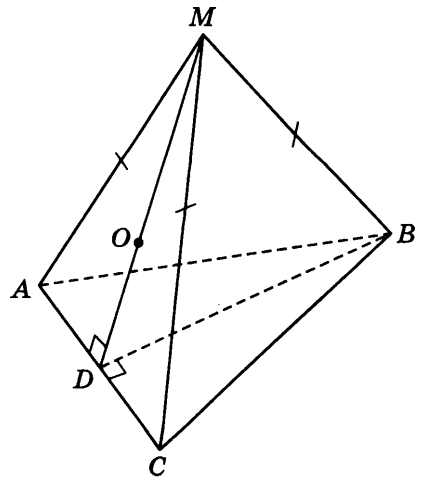
### 986 | Решение.

Пусть  $O$  — центр вписанной в  $\triangle MAC$  окружности. Тогда основание конуса есть круг, вписанный в  $\triangle MAC$ , а высота  $BO \perp (MAC)$ .

Пусть  $AB = x$ ,  $MD = y$ , где  $x > 0$ ,  $y > 0$ , тогда  $\frac{BD}{MD} = k$ , или  $\frac{BD}{y} = k$ .

Из  $\triangle DBC$ , где  $BC = x$ ,  $DC = \frac{1}{2}x$ ,

$\angle BDC = 90^\circ$ , найдем  $BD = \sqrt{BC^2 - DC^2}$ ,



$$BD = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}x^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x, \text{ тогда } k = \frac{x\sqrt{3}}{2y}. \quad (1)$$

Известно, что  $S_{\Delta} = p \cdot r$ , где  $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$  — полупериметр,  $r$  — радиус

вписанной окружности, тогда в  $\Delta MAC$   $r = \frac{S_{\Delta MAC}}{p}$ ,

$$S_{\Delta MAC} = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}x \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2k} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4k}.$$

$$\text{Из } \Delta ADM \text{ } AM = \sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y^2}.$$

$$\text{Значит, } p = \frac{1}{2}(AM + MC + AC) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y^2} + x\right) \text{ и}$$

$$r = \frac{x^2\sqrt{3}}{4k} : \frac{1}{2}\left(2\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y^2} + x\right) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4k} \cdot \frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + y^2} + x}. \quad (2)$$

Из (1) имеем  $y = \frac{x\sqrt{3}}{2k}$ , тогда (2) примет вид

$$\begin{aligned} r &= \frac{x^2\sqrt{3}}{2k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + \frac{3x^2}{4k^2}} + x} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2\sqrt{x^2k^2 + 3x^2} + 2xk} = \frac{x^2\sqrt{3}}{x(2\sqrt{k^2 + 3} + 2k)} = \\ &= \frac{x\sqrt{3}}{2(\sqrt{k^2 + 3} + k)}. \end{aligned}$$

Известно, что  $S_{\text{бок.к.}} = \pi rl$ , где  $l = BD = \frac{x\sqrt{3}}{2}$  — образующая конуса,

тогда  $S_{\text{бок.к.}}/S_{\text{BAC}} = \frac{\pi rl}{x^2\sqrt{3}/4} = \frac{4\pi rl}{x^2\sqrt{3}}$ , где  $S_{\text{BAC}} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$  — площадь правильного треугольника.

$$\text{Значит, } \frac{S_{\text{бок.к.}}}{S_{\text{BAC}}} = \frac{\pi \cdot x\sqrt{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} \cdot 4}{2(\sqrt{3+k^2}+k) \cdot 2x^2\sqrt{3}} = \frac{\pi\sqrt{3}}{\sqrt{3+k^2}+k}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi\sqrt{3}}{\sqrt{3+k^2}+k}.$$

**987 | Решение.**

По условию  $AC = BC$ ,  $AF \perp BC$  и  $BE \perp AC$ ,  $O$  — середина  $EF$  и центр описанной окружности.

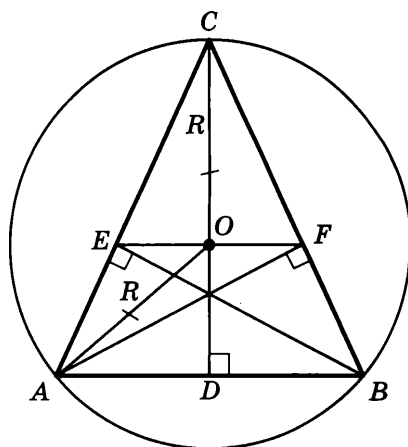
Из  $\triangle ABC$  по следствию из теоремы

синусов имеем  $\frac{AB}{\sin \angle C} = 2R$ , или

$$AB = 2R \sin \angle C. \quad (1)$$

Из  $\triangle AOC$ , где  $AO = OC = R$ ,

$$AC = 2R \cos \frac{\angle C}{2}. \quad (2)$$



Заметим, что  $\triangle ABC \sim \triangle EFC$  ( $\angle C$  — общий,  $AB \parallel EF$ ), тогда

$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EC}, \text{ откуда } EF = \frac{AB \cdot EC}{AC}. \quad (3)$$

Из  $\triangle CEB$   $EC = BC \cos \angle C$ , но  $BC = 2R \cos \frac{\angle C}{2} = AC$ , тогда

$$EC = 2R \cos \frac{\angle C}{2} \cos \angle C \text{ и (3) примет вид}$$

$$EF = \frac{2R \sin \angle C \cdot 2R \cos \frac{\angle C}{2} \cos \angle C}{2R \cos \frac{\angle C}{2}} = 2R \sin \angle C \cos \angle C.$$

$$\text{Итак, } EF = 2R \sin \angle C \cos \angle C. \quad (4)$$

Из  $\triangle ABC$  по теореме косинусов имеем

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos \angle C. \quad (5)$$

Но  $BC \cos \angle C = EC$  (из  $\triangle BEC$ ).

$$\text{Кроме того, из } \triangle EOC \text{ } EC = \frac{R}{\cos \frac{\angle C}{2}}, \text{ тогда } BC \cos \angle C = \frac{R}{\cos \frac{\angle C}{2}}. \quad (6)$$

Равенство (5) с учетом (1), (2) и (6) примет вид

$$4R^2 \sin^2 \angle C = 4R^2 \cos^2 \frac{\angle C}{2} + 4R^2 \cos^2 \frac{\angle C}{2} - 2 \cdot 2R \cos \frac{\angle C}{2} \cdot \frac{R}{\cos \frac{\angle C}{2}},$$

$$4R^2 \sin^2 \angle C = 8R^2 \cos^2 \frac{\angle C}{2} - 4R^2, \quad R \neq 0, \quad \sin^2 \angle C = 2 \cos^2 \frac{\angle C}{2} - 1, \text{ или}$$

$$1 - \cos^2 \angle C = \cos \angle C, \text{ или } \cos^2 \angle C + \cos \angle C - 1 = 0, \quad D = 1 + 4 = 5 > 0,$$

$$(\cos \angle C)_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}), \text{ откуда } \cos \angle C = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$\cos \angle C = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}) \text{ — не удовлетворяет, так как } |\cos \angle C| \leq 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Итак, } \cos \angle C &= \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1), \text{ тогда } \sin \angle C = \sqrt{1 - \frac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5})} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{5} - 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{5} - 1}. \end{aligned}$$

$$\text{По условию задачи } R = \sqrt{\sqrt{5} + 2}.$$

Учитывая значения  $\sin \angle C$  и  $\cos \angle C$ , равенство (4) примет вид

$$\begin{aligned} EF &= 2\sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{5} - 1} \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2(\sqrt{5} - 1)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt{(6 - 2\sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt{2}\sqrt{(3 - \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)} = \\ &= \sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt{3\sqrt{5} - 5 - 3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt{4\sqrt{5} - 8} = 2\sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 2} = \\ &= 2\sqrt{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} = 2\sqrt{5 - 4} = 2. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } EF = 2.$$

Ответ: 2.

## 988 | Решение.

І способ

$$\sqrt{\frac{9}{x} - x + 8} - \sqrt{\frac{3}{x} + x + 5} = 1.$$

$$\text{Запишем уравнение в виде } \sqrt{\frac{9}{x} - x + 8} = \sqrt{\frac{3}{x} + x + 5} + 1. \quad (1)$$

$$\text{Возведем обе части (1) в квадрат: } \frac{9}{x} - x + 8 = \frac{3}{x} + x + 5 + 2\sqrt{\frac{3}{x} + x + 5} + 1,$$

$$\text{или } \frac{6}{x} - 2x + 2 = 2\sqrt{\frac{3}{x} + x + 5}, \quad \frac{3}{x} - x + 1 = \sqrt{\frac{3}{x} + x + 5}.$$

Вновь возведем полученное уравнение в квадрат:

$$\left(\left(\frac{3}{x} - x\right) + 1\right)^2 = \frac{3}{x} + x + 5, \text{ или } \frac{9}{x^2} - 6 + x^2 + \frac{6}{x} - 2x + 1 = \frac{3}{x} + x + 5,$$

$$\frac{9}{x^2} + \frac{3}{x} + x^2 - 3x - 10 = 0, \text{ или } (x^2 - 3x - 9) - \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{9}{x^2}\right) = 0,$$

$$x \left( x - 3 - \frac{9}{x} \right) - \frac{1}{x} \left( x - 3 - \frac{9}{x} \right) = 0, \left( x - 3 - \frac{9}{x} \right) \left( x - \frac{1}{x} \right) = 0, \text{ откуда получим:}$$

$$1) \ x - 3 - \frac{9}{x} = 0, \ x^2 - 3x - 9 = 0, \ x \neq 0, \ D = 45 > 0, \ x_{1,2} = \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Проверка показывает, что найденные корни не удовлетворяют исходному уравнению.

$$2) \ x - \frac{1}{x} = 0, \begin{cases} x^2 - 1 = 0, \\ x \neq 0; \end{cases} \ x^2 = 1, \ x_{3,4} = \pm 1.$$

Корень  $x = -1$  не удовлетворяет исходному уравнению, так как при этом получим  $\sqrt{-9+1+8} - \sqrt{-3-1+5} = 0 - 1 = -1 \neq 1$ .

Корень  $x = 1$  удовлетворяет исходному уравнению. Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень  $x = 1$ .

Ответ:  $x = 1$ .

## II способ

Решение.

$$\sqrt{\frac{9}{x} - x + 8} - \sqrt{\frac{3}{x} + x + 5} = 1.$$

$$\text{Пусть } \begin{cases} \frac{9}{x} - x + 8 = a^2 \\ \frac{3}{x} + x + 5 = b^2 \end{cases} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \end{vmatrix} \quad \begin{cases} \frac{9}{x} - x + 8 = a^2, \\ \frac{9}{x} + 3x + 15 = 3b^2. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$3b^2 - a^2 = 4x + 7, \ 4x = 3b^2 - a^2 - 7.$$

Исходное уравнение примет вид  $a - b = 1$ .

$$\text{Кроме того, } a^2 + b^2 = \frac{12}{x} + 13, \text{ откуда } \frac{12}{x} = a^2 + b^2 - 13.$$

Так как  $4x = 3b^2 - a^2 - 7$ , то, перемножив полученные равенства, имеем  $\frac{12}{x} \cdot 4x = (a^2 + b^2 - 13)(3b^2 - a^2 - 7)$ , или

$$(a^2 + b^2 - 13)(3b^2 - a^2 - 7) = 48.$$

Так как  $a = b + 1$ , то получим

$$(b^2 + 2b + 1 + b^2 - 13)(3b^2 - b^2 - 2b - 1 - 7) = 48,$$

$$(b^2 + b - 6)(b^2 - b - 4) = 12,$$



$$b^4 + b^3 - 6b^2 - b^3 - b^2 + 6b - 4b^2 - 4b + 24 = 12,$$

$$b^4 - 11b^2 + 2b + 12 = 0.$$

Заметим, что  $b = 3$  — корень уравнения, тогда получим

$$b^2(b^2 - 9) - 2b(b - 3) - 4(b - 3) = 0,$$

$$(b - 3)(b^3 + 3b^2 - 2b - 4) = 0,$$

$$(b - 3)(b^2(b + 1) + 2b(b + 1) - 4(b + 1)) = 0,$$

$$(b - 3)(b + 1)(b^2 + 2b - 4) = 0, \text{ откуда } b_1 = 3, b_2 = -1, b^2 + 2b - 4 = 0.$$

1. Если  $b = 3$ , то  $a = 4$ .

$$\frac{3}{x} + x + 5 = 9, x^2 + 5x - 9x + 3 = 0, \text{ или } x^2 - 4x + 3 = 0, \text{ откуда}$$

$x_1 = 1, x_2 = 3$  (не удовлетворяет исходному уравнению).

2. Так как  $b \geq 0$ , то корень  $b = -1$  не подходит.

3. Если  $b^2 + 2b - 4 = 0, D/4 = 5 > 0, b_{1,2} = -1 \pm \sqrt{5}$ , тогда  $b = \sqrt{5} - 1$ ,

$$a = b + 1 = \sqrt{5}.$$

Учитывая замену  $\frac{9}{x} - x + 8 = a^2$ , получим уравнение

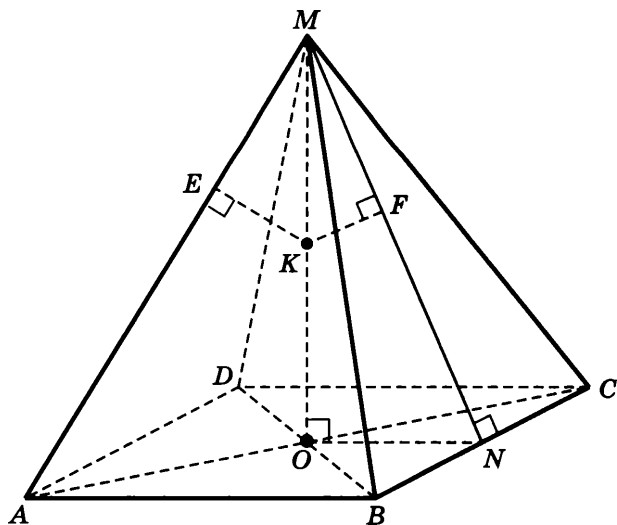
$$x^2 - 3x - 9 = 0, \text{ откуда } x_{2,3} = \frac{3}{2}(1 \pm \sqrt{5}) \text{ — не удовлетворяют исход-$$

ному уравнению.

Следовательно,  $x = 1$  — единственный корень.

Ответ:  $x = 1$ .

**1010 | Решение.**



Пусть в правильной пирамиде  $MABCD$   $K$  — середина высоты  $MO$ ,  $MN$  — апофема,  $MN \perp KF$  и  $KE \perp AM$ .

Заметим, что  $\triangle MON \sim \triangle MKF$  (как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle MFK$ ).

Выразим  $ON$  через  $KF = 1$  и  $MK = \frac{1}{2}H$ , где  $H = MO$  — высота пирамиды. Далее из подобия  $\triangle MOA$  и  $\triangle MEK$  выразим  $AO$  через  $KE = 1,4$ .

Имеем  $ON : MO = KF : MF$ , или  $ON : H = 1 : FM$ ,

$$\text{где } FM = \sqrt{MK^2 - KF^2} = \sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 - 1}.$$

$$\text{Значит, } ON = \frac{H}{MF} = \frac{H}{\sqrt{\left(\frac{H}{2}\right)^2 - 1}} = \frac{2H}{\sqrt{H^2 - 4}}. \quad (1)$$

$$\text{Из } \triangle ONC \text{ имеем } OC^2 = ON^2 + NC^2, \text{ или } OC^2 = 2 \cdot ON^2 = \frac{8H^2}{H^2 - 4}. \quad (2)$$

Теперь из подобия  $\triangle AOM$  и  $\triangle MEK$  имеем  $\frac{AO}{MO} = \frac{EK}{ME}$ , или

$$\frac{OC}{H} = \frac{1,4}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}H\right)^2 - 1,4^2}}, \text{ или } OC = \frac{2,8H}{\sqrt{H^2 - 7,84}}, \text{ т. е.}$$

$$OC^2 = \frac{7,84H^2}{H^2 - 7,84}. \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), получим  $\frac{8H^2}{H^2 - 4} = \frac{7,84H^2}{H^2 - 7,84}$ , или, разделив обе

$$\text{части на } H^2 \neq 0, \text{ имеем } \frac{8}{H^2 - 4} = \frac{7,84}{H^2 - 7,84}, \text{ или } \frac{1}{H^2 - 4} = \frac{0,98}{H^2 - 7,84},$$

$$H^2 - 7,84 = 0,98H^2 - 3,92, 0,02H^2 = 3,92, H^2 = 196, H = 14.$$

Зная значение  $H = 14$ , из соотношения (1) получим

$$ON = \frac{2H}{\sqrt{H^2 - 4}} = \frac{2 \cdot 14}{\sqrt{196 - 4}} = \frac{28}{\sqrt{192}} = \frac{28}{8\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{6}.$$

$$\begin{aligned}\text{Следовательно, } V &= \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot ON)^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \left(2 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{6}\right)^2 \cdot 14 = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{49 \cdot 3}{9} \cdot 14 = \frac{686}{9}.\end{aligned}$$

Итак, объем пирамиды  $V = 686/9$  (куб. ед.).

Ответ:  $686/9$ .

### 1011 | Решение.

Пусть  $M$ ,  $N$  и  $P$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ). По условию задачи  $AM = m$ ,  $CM = n$ , где  $m > n$ .

Пусть  $AB = x$ ,  $x > 0$ , тогда по свойству касательных, проведенных к окружности из некоторой точки, имеем

$$AM = AP = m, BP = BN = x - m, CN = CM = n.$$

$$\text{Из } \triangle ABC \quad AB^2 = AC^2 + BC^2, \text{ или } x^2 = (m + n)^2 + (x - m + n)^2,$$

$$x^2 = m^2 + 2mn + n^2 + x^2 - 2mx + m^2 + 2nx - 2mn + n^2,$$

$$2mx - 2nx = 2m^2 + 2n^2, \text{ или } x(m - n) = m^2 + n^2, \text{ откуда } x = \frac{m^2 + n^2}{m - n}.$$

$$\begin{aligned}\text{Следовательно, } BC &= x - m + n = \frac{m^2 + n^2}{m - n} - (m - n) = \frac{m^2 + n^2 - (m - n)^2}{m - n} = \\ &= \frac{2mn}{m - n}.\end{aligned}$$

$$\text{Значит, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{mn(m + n)}{m - n}.$$

Площадь  $\triangle ABC$  будет наименьшим кубом при  $m = 12$ ,  $n = 6$ .

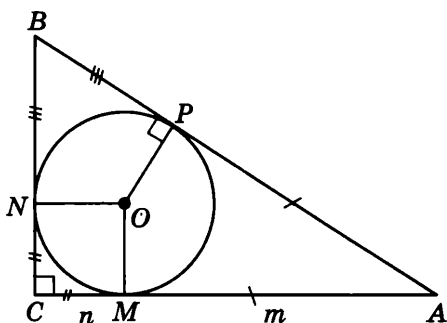
$$\text{При этом } S_{\triangle ABC} = \frac{12 \cdot 6 \cdot 18}{6} = 216 = 6^3.$$

Ответ:  $m = 12$ ,  $n = 6$ .

### 1012 | Решение.

$$3^x + 3\left(\sqrt[3]{36^x}\right) + \left(\sqrt[3]{48^x}\right) = 7 \cdot 4^x.$$

Запишем уравнение в виде  $3^x + 3((12 \cdot 3)^{x/3} + (12 \cdot 4)^{x/3}) = 7 \cdot 4^x$ , или  $3^x + 3 \cdot 12^{x/3}(3^{x/3} + 4^{x/3}) = 7 \cdot 4^x$ ,



$$3^x + 3 \cdot 3^{x/3} \cdot 4^{x/3} \cdot (3^{x/3} + 4^{x/3}) = 7 \cdot 4^x,$$

$$(3^{x/3})^3 + 3 \cdot 3^{x/3} \cdot 4^{x/3} \cdot (3^{x/3} + 4^{x/3}) + (4^{x/3})^3 = 8 \cdot (4^{x/3})^3,$$

где левая часть полученного уравнения — куб суммы двух чисел:  $3^{x/3}$  и  $4^{x/3}$ .

Имеем  $(3^{x/3} + 4^{x/3})^3 = 8 \cdot (4^{x/3})^3$ , или  $3^{x/3} + 4^{x/3} = 2 \cdot 4^{x/3}$ , или  $3^{x/3} = 4^{x/3}$ .

Так как  $4^{x/3} > 0$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ , то получим  $\left(\frac{3}{4}\right)^{x/3} = 1$ , откуда

$\frac{x}{3} = 0$ ,  $x = 0$  — единственный корень уравнения.

Ответ:  $x = 0$ .

### 1013 | Решение.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = \lg \frac{y}{x}, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x-y} = 4. \end{cases}$$

Упростим первое уравнение системы:  $x^2 - y^2 = \lg y - \lg x$ , или  $x^2 + \lg x = y^2 + \lg y$ .

Рассмотрим функцию  $g = f(t)$ , где  $f(t) = t^2 + \lg t$ . Заметим, что  $f(t)$  — возрастающая функция, следовательно, равенство  $f(x) = f(y)$  возможно при условии, если  $x = y$ .

Таким образом, первое уравнение исходной системы можно заменить более простым уравнением  $x = y$ . Тогда второе уравнение примет вид  $\sqrt{x} + \sqrt{x} = 4$ ;  $2\sqrt{x} = 4$ ;  $\sqrt{x} = 2$ ;  $x = 4$ .

Итак,  $x = 4$ ,  $y = 4$ .

Так как  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $x - y \geq 0$ , то найденная пара  $(4; 4)$  является решением исходной системы.

Ответ:  $(4; 4)$ .

### 1014 | Решение.

$$16 \sin^3 x = 14 + \sqrt[3]{\sin x + 7}.$$

Запишем уравнение в виде  $8 \sin^3 x - 7 = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\sin x + 7}$ , или

$$8 \sin^3 x - 7 = \sqrt[3]{\frac{f+7}{8}}, \text{ т. е. } g = \sqrt[3]{\frac{\sin x + 7}{8}}.$$

Имеем уравнение вида  $f(x) = g(x)$ , значит,  $f(x) = x$ , или

$$8 \sin^3 x - 7 = \sin x, \quad 8 \sin^3 x - \sin x - 7 = 0. \quad (1)$$

Заметим, что если  $\sin x = 1$ , то равенство (1) выполняется.

Тогда получим  $8 \sin^2 x (\sin x - 1) + 8 \sin x (\sin x - 1) + 7(\sin x - 1) = 0$ ,  
 $(\sin x - 1)(8 \sin^2 x + 8 \sin x + 7) = 0$ , откуда  $\sin x = 1$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Уравнение  $8 \sin^2 x + 8 \sin x + 7 = 0$  не имеет действительных корней, так как  $D < 0$ .

Ответ:  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

### 1015 | Решение.

$$|x^2 - 6x + 8| + |x^2 - 6x + 5| = a.$$

Если  $x^2 - 6x + 5 \geq 0$ , то уравнение примет вид

$$x^2 - 6x + 8 + x^2 - 6x + 5 = a, \text{ или } 2x^2 - 12x + 13 - a = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) не может иметь больше двух корней ни при каком  $a$ .

Если  $x^2 - 6x + 8 \leq 0$ , то  $x^2 - 6x + 5 < 0$ , тогда получим

$$-x^2 + 6x - 8 - x^2 + 6x - 5 = a, \text{ или } 2x^2 - 12x + 13 + a = 0. \quad (2)$$

Уравнение (2) также не может иметь больше двух корней ни при каком  $a$ .

Если  $x^2 - 6x + 8 \geq 0$ ,  $x^2 - 6x + 5 \leq 0$ , то имеем

$$x^2 - 6x + 8 - x^2 - 6x - 5 = a, \text{ т. е. } a = 3.$$

Следовательно, при  $a = 3$  и выполнении двух последних неравенств получим тождество, т. е. уравнение имеет сколько угодно корней.

Решая систему неравенств  $\begin{cases} x^2 - 6x + 8 \geq 0, \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0, \end{cases}$  находим

$$x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 1, x_4 = 5.$$



$$1 \leq x \leq 2; 4 \leq x \leq 5. \quad (3)$$

Любое значение  $x$  из (3) при  $a = 3$  удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ:  $a = 3$ .

### 1022 | Решение.

Расположим для определенности пункты  $A$ ,  $B$  и  $C$  последовательно в указанном порядке.

Пусть  $S$  — расстояние между пунктами  $B$  и  $C$ , тогда  $(S + 60)$  — расстояние между пунктами  $A$  и  $C$ .

Пусть  $V_1$  и  $V_2$  — скорости соответственно первого и второго мотоциклистов.

При этом первым мотоциклистом будем считать того, который выехал из пункта А.

Ввиду того, что нам неизвестно, какой из мотоциклистов увеличил свою скорость на 20 км/ч, а который — на 25 км/ч, следует рассмотреть два случая:

1) допустим, что первый мотоциклист увеличил свою скорость на 20 км/ч, тогда согласно условию задачи получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{S+60}{V_1} = \frac{S}{V_2}, \\ \frac{S+60}{V_1+20} = \frac{S}{V_2+25}, \\ \frac{S}{V_2} = \frac{S}{V_2+25} + 2. \end{cases}$$

Разделив почленно первое уравнение на второе, имеем

$$\frac{S+60}{V_1} \cdot \frac{V_1+20}{S+60} = \frac{S}{V_2} \cdot \frac{V_2+25}{S}, \text{ или } \frac{V_1+20}{V_1} = \frac{V_2+25}{V_2},$$

$$V_1V_2 + 20V_2 = V_1V_2 + 25V_1, 20V_2 = 25V_1, \text{ откуда } 5V_1 = 4V_2.$$

Полученное равенство не может выполняться, так как выходит, что первоначальная скорость первого мотоциклиста меньше первоначальной скорости второго, что не согласуется с первым уравнением системы. Следовательно, первый мотоциклист увеличил скорость на 25 км/ч.

2) В этом случае имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{S+60}{V_1} = \frac{S}{V_2}, \\ \frac{S+60}{V_1+25} = \frac{S}{V_2+20}, \\ \frac{S}{V_2} = \frac{S}{V_2+20} + 2. \end{cases}$$

Решая аналогично, получим равносильную систему

$$\begin{cases} 4V_1 = 5V_2, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{S+60}{V_1} = \frac{S}{V_2}, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{S}{V_2} = \frac{S}{V_2+20} + 2. \end{cases}$$

Из (1) получим  $V_1 = \frac{5}{4}V_2$ , тогда (2) примет вид

$$\frac{(S+60) \cdot 4}{5V_2} = \frac{S}{V_2}, \text{ или } (S+60) \cdot 4 = 5S,$$

откуда  $S = 240$ ; и уравнение (3) преобразуется к виду

$$\frac{240}{V_2} = \frac{240}{V_2+20} + 2, \text{ или } \frac{120}{V_2} = \frac{120}{V_2+20} + 1, \text{ или}$$

$$120(V_2+20) = 120V_2 + V_2(V_2+20),$$

$$120V_2 + 2400 = 120V_2 + V_2^2 + 20V_2, \quad V_2^2 + 20V_2 - 2400 = 0,$$

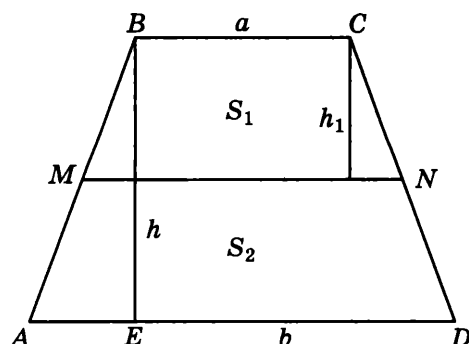
откуда находим  $(V_2)_1 = 40$ ,  $(V_2)_2 = -60$  (не подходит).

Если  $V_2 = 40$ , то из (1) находим  $V_1 = \frac{5}{4}V_2$ , или  $V_1 = \frac{5}{4} \cdot 40 = 50$ .

Итак, скорость первого мотоциклиста 50 км/ч, второго — 40 км/ч.

Ответ: 50 км/ч, 40 км/ч.

### 1023 | Решение.



Пусть в трапеции  $ABCD$   $BC = a$ ,  $AD = b$ ,  $BE = h$ .

Пусть  $S_1$  и  $h_1$  — соответственно площадь и высота трапеции  $MBCN$ ,  $S_2$  — площадь трапеции  $AMND$ . По условию задачи  $S_1 : S_2 = 1 : 2$ , или

$$S_2 = 2S_1. \quad (1)$$

Но  $S_1 = \frac{1}{2}(a+x)h_1$ , где  $x = MN$  и  $S_2 = \frac{1}{2}(x+b)(h-h_1)$ .

Учитывая (1), имеем  $\frac{1}{2}(x+b)(h-h_1) = \frac{1}{2}(x+a)h_1 \cdot 2$ , или

$$2(a+x)h_1 = (x+b)(h-h_1). \quad (2)$$

С другой стороны,  $S = S_1 + S_2 = S_1 + 2S_1 = 3S_1$ , или

$$\frac{1}{2}(a+b)h = \frac{3}{2}(a+x)h_1, \text{ или } (a+b)h = 3(a+x)h_1. \quad (3)$$

Из (2) и (3) имеем систему

$$\begin{cases} 2(a+x)h_1 = (x+b)(h-h_1), & \begin{cases} 2(a+x)h_1 = (x+b)h - (x+b)h_1, \\ 3(a+x)h_1 = (a+b)h; \end{cases} \\ 3(a+x)h_1 = (a+b)h; & \begin{cases} 3(a+x)h_1 = (a+b)h; \\ (3x+2a+b)h_1 = (x+b)h, \\ 3(a+x)h_1 = (a+b)h. \end{cases} \end{cases}$$

Разделив почленно первое уравнение системы на второе, получим

$$\frac{3x+2a+b}{3(a+x)} = \frac{x+b}{a+b},$$

или  $3ax + 2a^2 + ab + 3bx + 2ab + b^2 = 3ax + 3x^2 + 3ab + 3bx$ ,

$$3x^2 = 2a^2 + b^2, \quad x^2 = \frac{1}{3}(2a^2 + b^2), \text{ откуда } x = \sqrt{\frac{1}{3}(2a^2 + b^2)}.$$

$$\text{Итак, } MN = \sqrt{\frac{1}{3}(2a^2 + b^2)}.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{\frac{1}{3}(2a^2 + b^2)}.$$

## 1024 | Решение.

$$\text{Если } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{c}, \text{ то } c = \frac{2ab}{a+b}. \quad (1)$$

$$\text{Тогда } \frac{a+c}{a-c} = \frac{a + \frac{2ab}{a+b}}{a - \frac{2ab}{a+b}} = \frac{a^2 + ab + 2ab}{a^2 + ab - 2ab} = \frac{a^2 + 3ab}{a^2 - ab} = \frac{a(a+3b)}{a(a-b)} = \frac{a+3b}{a-b}.$$

$$\text{Итак, } \frac{a+c}{a-c} = \frac{a+3b}{a-b}. \quad (2)$$



Аналогично

$$\frac{b+c}{b-c} = \left(b + \frac{2ab}{a+b}\right) : \left(b - \frac{2ab}{a+b}\right) = \frac{ab+b^2+2ab}{ab+b^2-2ab} = \frac{b(b+3a)}{b(b-a)} = \frac{b+3a}{b-a}. \quad (3)$$

Складывая почленно (2) и (3), имеем

$$\frac{a+c}{a-c} + \frac{b+c}{b-c} = \frac{a+3b}{a-b} + \frac{b+3a}{b-a} = \frac{a+3b}{a-b} - \frac{b+3a}{a-b} = \frac{2b-2a}{a-b} = -\frac{2(a-b)}{a-b} = -2,$$

что и требовалось доказать.

### 1025 | Решение.

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x, \\ \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x. \end{cases}$$

Так как  $\cos x \geq 0$ , то  $\sin x - \cos y = \cos^2 x$ .

Тогда данная система запишется в виде  $\begin{cases} \cos x + \cos y = \sin^2 x, \\ \sin x - \cos y = \cos^2 x. \end{cases}$

Складывая уравнения полученной системы, имеем

$$\sin x + \cos x = 1. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Но } \sin x + \cos x &= \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \sin x + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Учитывая (1), имеем  $\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , или  $x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Если  $n = 2k$  — четное, то  $x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ , откуда  $x_1 = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

если  $n = 2k + 1$  — нечетное, то  $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$ , или  $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ .

Подставляя найденные значения  $x$  в первое уравнение исходной системы, находим  $\cos y = -1$ ,  $y_1 = 2\pi m + \pi$ ;  $\cos y = 1$ ,  $y_2 = 2\pi p$ .

Итак, исходная система имеет два решения.

Ответ:  $(2\pi k; 2\pi m + \pi)$ ,  $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi p\right)$ ,  $k, m, p \in \mathbb{Z}$ .

### 1026 | Решение.

$xy - x = y^5 + y^3 - 7$ , где  $x \in \mathbb{N}$ ,  $y \in \mathbb{N}$ .

Заметим, что  $y \neq 1$ , так как в противном случае получим  $0 = -5$ .

Запишем уравнение в виде  $x = \frac{y^5 + y^3 - 7}{y - 1}$ , или

$$\begin{aligned} x &= \frac{y^3(y^2 - 1) + 2(y^3 - 1) - 5}{y - 1} = y^3(y + 1) + 2(y^2 + y + 1) - \frac{5}{y - 1} = \\ &= y^4 + y^3 + 2y^2 + 2y + 2 - \frac{5}{y - 1}. \end{aligned}$$

Так как по условию  $x$  и  $y$  — натуральные числа, то  $y - 1 = \pm 5$ .

Если  $y - 1 = 5$ , т. е.  $y = 6$ , то  $x = \frac{6^5 + 6^3 - 7}{6 - 1} = 1597$ ; если  $y - 1 = -5$ , то

$y = -4 \notin \mathbb{N}$ .

Итак, условию задачи удовлетворяет единственная пара чисел (1597; 6).

Ответ:  $x = 1597$ ,  $y = 6$ .

### 1027 | Решение.

Запишем первое неравенство в виде

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2+1} \geq \left(\frac{3}{5}\right)^{8x-2a} \quad (1)$$

Так как  $0 < \frac{3}{5} < 1$ , то неравенство (1) равно-

сильно неравенству

$$x^2 + 1 \leq 8x - 2a, \text{ или } (x - 4)^2 + 2a - 15 \leq 0. \quad (2)$$

Запишем второе неравенство в виде

$$\begin{aligned} x^2 - 16x + 16 - a^2 - 3 < 0, \text{ или} \\ (x - 4)^2 - a^2 - 3 < 0. \end{aligned} \quad (3)$$

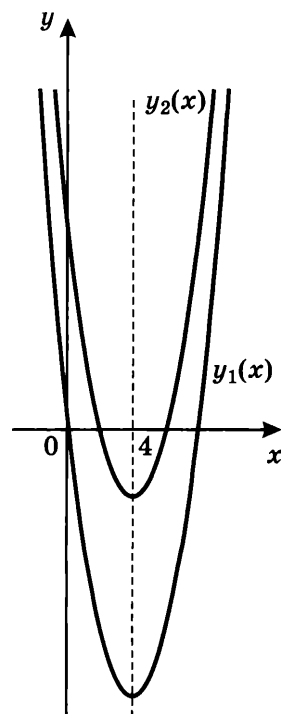
Рассмотрим графики парабол

$$y_1 = (x - 4)^2 - a^2 - 3 \text{ и } y_2 = (x - 4)^2 + 2a - 15.$$

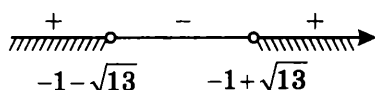
Как видно из рисунка, параболы имеют одну и ту же ось симметрии  $x = 4$ . Учитывая, что пустое множество является подмножеством любого множества, получим, что требования задачи будут удовлетворены только в случае, когда график функции  $y_2$  лежит выше графика функции  $y_1$ , т. е. когда выполняется неравенство

$$-a^2 - 3 < 2a - 15, \text{ или } a^2 + 2a - 12 > 0,$$

откуда, решая методом интервалов, находим



$$D/4 = 13 > 0, a_{1,2} = -1 \pm \sqrt{13}.$$



$$a < -1 - \sqrt{13}; a > -1 + \sqrt{13}.$$

Ответ:  $a \in (-\infty; -1 - \sqrt{13}) \cup (-1 + \sqrt{13}; +\infty)$ .

**1037** | Решение.

$$\begin{cases} \frac{7-y^2}{x^2-13} = 2, \\ x^3 + 33y = y^3 + 24x. \end{cases}$$

Упростим первое уравнение системы:  $7 - y^2 = 2x^2 - 26$ , или  $y^2 = 33 - 2x^2$ , тогда  $y^3 = 33y - 2x^2y$ , и второе уравнение исходной системы примет вид  $x^3 + 33y = 33y - 2x^2y + 24x$ , или  $x^3 = 24x - 2x^2y$ .

Если  $x = 0$ , то  $y^2 = 33 - 0$ ,  $y = \pm\sqrt{33}$ ;

если  $x \neq 0$ , то  $x^2 = 24 - 2xy$ , или  $y = \frac{24 - x^2}{2x}$ .

И уравнение  $y^2 = 33 - 2x^2$  примет вид  $\frac{(24 - x^2)^2}{4x^2} = 33 - 2x^2$ , или

$$(24 - x^2)^2 = 132x^2 - 8x^4, 576 - 48x^2 + x^4 = 132x^2 - 8x^4, \text{ или}$$

$$9x^4 - 180x^2 + 576 = 0, x^4 - 20x^2 + 64 = 0,$$

откуда  $(x^2)_1 = 16$ ,  $(x^2)_2 = 4$ .

$$\text{Если } x^2 = 16, \text{ то } x_{1,2} = \pm 4, y_{1,2} = \frac{24 - 16}{\pm 8} = \pm 1;$$

если  $x^2 = 4$ , то  $x_{3,4} = \pm 2$ ,  $y_{3,4} = \pm 5$ .

Следовательно, исходная система имеет 6 пар решений.

Ответ:  $(0; \pm\sqrt{33})$ ,  $(\pm 4; \pm 1)$ ,  $(\pm 2; \pm 5)$ .

**1038** | Решение.

$$\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} - \frac{12}{7(7x+2)} = \frac{53}{28}.$$

Решение данного уравнения стандартным способом, т. е. уединением радикала и последующим возведением обеих частей уравнения в квадрат, приводит к сложным преобразованиям.

Преобразуем рациональную дробь:

$$\frac{x+2}{7x+2} = \frac{\frac{1}{7}(7x+2) + \frac{12}{7}}{7x+2} = \frac{1}{7} + \frac{12}{7(7x+2)}, \text{ откуда}$$

$$\frac{12}{7(7x+2)} = \frac{x+2}{7x+2} - \frac{1}{7}. \quad (1)$$

Учитывая (1), исходное уравнение примет вид

$$\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} - \frac{x+2}{7x+2} + \frac{1}{7} = \frac{53}{28}, \text{ или } \sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} - \frac{x+2}{7x+2} = \frac{7}{4}. \quad (2)$$

Заменой  $\sqrt{\frac{7x+2}{x+2}} = y$  уравнение (2) сводится к виду

$$y - \frac{1}{y^2} = \frac{7}{4}, \text{ или } 4y^3 - 7y^2 - 4 = 0. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что  $y = 2$  — корень уравнения (3), тогда левую часть уравнения можно разложить на множители по степеням  $y - 2$ , т. е. имеем  $4y^2(y - 2) + (y - 2)(y + 2) = 0$ ,  $(y - 2)(4y^2 + y + 2) = 0$ , откуда  $y = 2$  — единственный корень уравнения, так как уравнение  $4y^2 + y + 2 = 0$  не имеет действительных корней ( $D < 0$ ).

Если  $y = 2$ , то  $\frac{7x+2}{x+2} = 4$ , или  $7x + 2 = 4x + 8$ ,  $3x = 6$ ,  $x = 2$  — корень

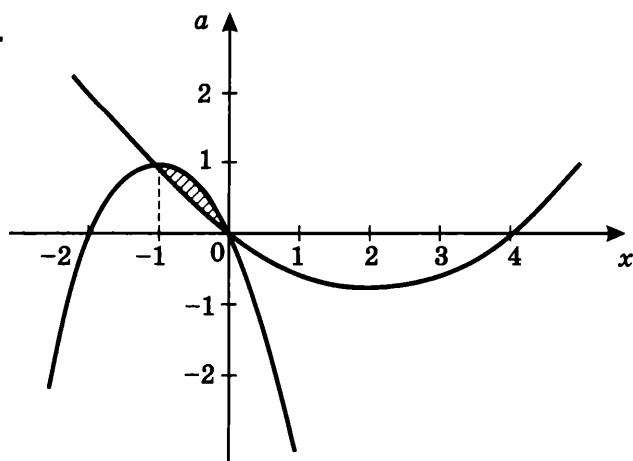
исходного уравнения.

Ответ:  $x = 2$ .

### 1039 | Решение.

На плоскости  $xOa$  изобразим параболы  $a = -x^2 - 2x$  и

$$a = \frac{1}{6}(x^2 - 4x).$$



Как видно из рисунка, точки, координаты которых удовлетворяют данной системе, лежат ниже параболы  $a = -x^2 - 2x$  и выше параболы  $a = \frac{1}{6}(x^2 - 4x)$ .

Решая уравнение  $-x^2 - 2x = \frac{1}{6}(x^2 - 4x)$ , найдем абсциссы точек пересечения парабол:  $-6x^2 - 12x = x^2 - 4x$ , или  $7x^2 + 8x = 0$ ,  $x(7x + 8) = 0$ , откуда  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -\frac{8}{7}$ .

Если  $x_1 = 0$ , то  $a_1 = 0$ ; если  $x_2 = -\frac{8}{7}$ , то

$$a_2 = -\left(\frac{64}{49} - \frac{16}{7}\right) = -\frac{16}{7}\left(\frac{4}{7} - 1\right) = \frac{48}{49}.$$

Итак, параболы  $a = -x^2 - 2x$  и  $a = \frac{1}{6}(x^2 - 4x)$  пересекаются в точках  $O(0; 0)$  и  $A\left(-\frac{8}{7}; \frac{48}{49}\right)$ .

Заметим, что точка  $A$  расположена левее вершины первой параболы  $B(-1; 1)$ .

Горизонтальная прямая пересекает заштрихованную область по единственной точке, если она проходит через точки  $O$  и  $B$ , т. е. при  $a = 0$  и  $a = 1$ .

*Ответ:*  $a = 0$ ,  $a = 1$ .

### **1046** | Решение.

Примем всю работу за 1. Пусть первому крану для выполнения всей работы требуется  $x$  ч, тогда второму —  $4x$  ч, третьему —  $(x - 9)$  ч.

Производительность первого крана —  $\frac{1}{x}$  всей работы в час, второго —  $\frac{1}{4x}$  всей работы в час, третьего крана —  $\frac{1}{x-9}$ , а всех трех вместе будет равна  $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{x-9}\right)$  всей работы в час, или

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{x-9} = \frac{9x-45}{4x(x-9)}.$$

Всю работу три крана выполняют за  $1: \frac{9x-45}{4x(x-9)} = \frac{4x(x-9)}{9x-45}$  ч.

Согласно условию получим уравнение  $\frac{4x(x-9)}{9x-45} = 18$ ,

$$4x(x-9) = 18 \cdot 9(x-5), \text{ или } 2x^2 - 18x - 81x + 81 \cdot 5 = 0,$$

$$2x^2 - 99x + 81 \cdot 5 = 0,$$

$$D = 99^2 - 8 \cdot 81 \cdot 5 = 81 \cdot (11^2 - 40) = 81 \cdot 81 = 81^2 > 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{99 \pm 81}{4}, \quad x_1 = \frac{180}{4} = 45, \quad x_2 = \frac{18}{4} = 4,5.$$

Корень  $x_2 = 4,5$  не подходит, так как один кран не может выполнить всю работу быстрее, чем три крана вместе. Итак, для выполнения всей работы первому крану потребуется 45 ч, второму  $45 - 9 = 36$  ч.

Производительность первого крана  $\frac{1}{45}$ , второго —  $\frac{1}{36}$ , тогда первого и третьего кранов:  $\frac{1}{45} + \frac{1}{36} = \frac{4+5}{180} = \frac{9}{180} = \frac{1}{20}$ ; тогда всю работу первый и третий краны выполняют за  $1: \frac{1}{20} = 20$  ч.

Ответ: 20 ч.

### 1047 | Решение.

Пусть в  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ )  $AC = b$ ,  $BC = a$ , где  $a > b$ ;  $AD$  — биссектриса  $\angle A$ ;  $D \in BC$ . Пусть  $MD = DE = EN = x$ , тогда по свойству пересекающихся хорд имеем

$$BD \cdot DC = MD \cdot ND. \quad (1)$$

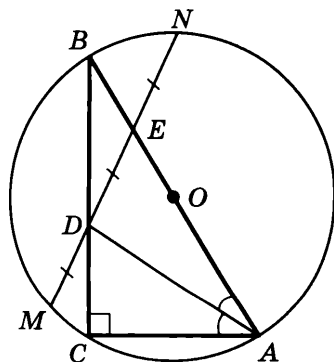
Пусть  $CD = y$ , где  $y > 0$ , тогда  $BD = a - y$ , и (1) примет вид

$$(a - y)y = x \cdot 2x, \text{ или } (a - y)y = 2x^2. \quad (2)$$

Так как  $AD$  — биссектриса  $\angle A$ , то по свойству биссектрисы имеем

$$\frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB}, \text{ или } \frac{y}{a-y} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y\sqrt{a^2+b^2} = ab - by, \text{ или}$$

$$y(\sqrt{a^2+b^2} + b) = ab, \text{ откуда } y = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2} + b}, \text{ тогда } a - y = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2} + b}.$$



Учитывая (2), имеем  $x^2 = \frac{1}{2}(a-y) \cdot y = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+b} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}+b}$ ,

$$x^2 = \frac{a^2 b \sqrt{a^2+b^2}}{2(\sqrt{a^2+b^2}+b)^2}, \quad x = \frac{a\sqrt{2b\sqrt{a^2+b^2}}}{2(\sqrt{a^2+b^2}+b)}.$$

Следовательно,  $MN = 3x = \frac{3a\sqrt{2b\sqrt{a^2+b^2}}}{2(\sqrt{a^2+b^2}+b)}$ .

Ответ:  $\frac{3a\sqrt{2b\sqrt{a^2+b^2}}}{2(\sqrt{a^2+b^2}+b)}$ .

### 1062 | Решение.

$$\sqrt{4x^2+4x+3} \operatorname{arctg}(2x+1) + \sqrt{x^2-4x+6} \operatorname{arctg}(2-x) = 0.$$

Заметим, что  $4x^2+4x+3 = (2x+1)^2+2$  и  $x^2-4x+6 = (2-x)^2+2$ , тогда данное уравнение примет вид

$$\sqrt{(2x^2+1)^2+2} \operatorname{arctg}(2x+1) + \sqrt{(2-x)^2+2} \operatorname{arctg}(2-x) = 0,$$

$$\sqrt{(2x^2+1)^2+2} \operatorname{arctg}(2x+1) = -\sqrt{(2-x)^2+2} \operatorname{arctg}(2-x).$$

Функция  $f(t) = \sqrt{t^2+2} \operatorname{arctg} t$  — монотонно возрастающая. Следовательно, последнее равенство означает, что при  $t_1 = 2x+1$  и при  $t_2 = x-2$  значения функции совпадают, что возможно при условии, если  $t_1 = t_2$ , т. е.  $2x+1 = x-2$ , откуда  $x = -3$ .

Ответ:  $x = -3$ .

### 1063 | Решение.

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-m}{1+m}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2. \end{cases}$$

Умножим обе части первого неравенства на  $(-2)$  и сложим со вторым:

$$\begin{cases} -2x^2 - 4xy + 14y^2 \leq -2\frac{(1-m)}{(1+m)}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2. \end{cases}$$

$$x^2 + 6xy + 9y^2 \leq -\frac{4}{m+1}, \text{ или } (x+3)^2 \leq -\frac{4}{m+1},$$

Следовательно,  $m + 1 < 0$ , т. е.  $m < -1$ .

Пусть  $m_0 < -1$ , тогда  $\frac{1-m_0}{m_0+1} < -1$ .

Значит, если имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 = -1, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 = -2, \end{cases} \quad (1)$$

то имеет решение и исходная система неравенств. Но система (1) имеет решение, например  $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ , которое можно найти, умножив

первое уравнение на  $(-2)$  и сложив со вторым. В этом случае получим однородное уравнение II степени вида  $x^2 + 6xy + 9y^2 = 0$ , или  $(x + 3y)^2 = 0$ ;  $x + 3y = 0$ , откуда  $x = -3y$ .

Подставив значение  $x = -3y$ , например в первое уравнение системы (1), найдем указанную пару чисел.

Итак, исходная система неравенств имеет решение при  $m < -1$ .

Ответ:  $(-\infty; -1)$ .



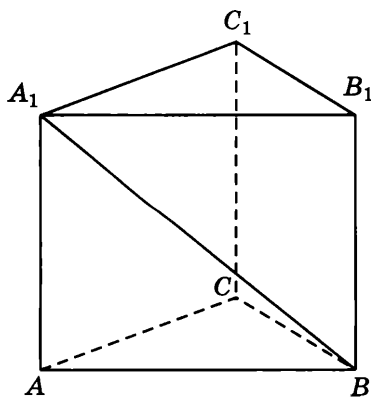
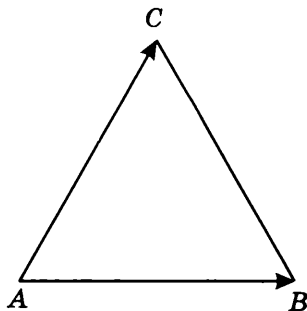
# 10 ВАРИАНТОВ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ. ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

## Вариант 1

**1** | В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \angle A = \frac{2}{21}$ . Найдите  $\sin \angle A$ .

**2** | Стороны правильного  $\triangle ABC$  равны  $5\sqrt{3}$ . Найдите длину вектора  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ .

**3** | В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  сторона основания равна 1, а площадь боковой поверхности —  $3\sqrt{15}$ . Найдите длину диагонали боковой грани призмы.



**4** | На экзамене 50 вопросов. Володя не выучил 7 из них. Найдите вероятность того, что ему попадет выученный вопрос.

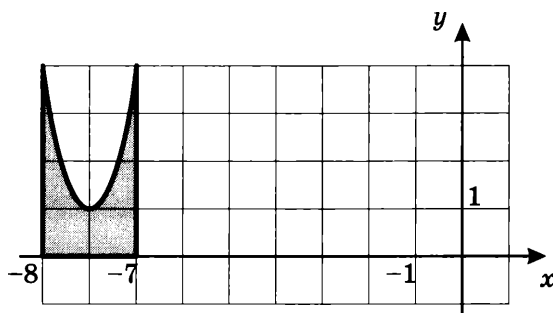
**5** | Симметричную монету бросают 8 раз. Во сколько раз вероятность события «выпадает ровно 5 орлов» больше вероятности события «выпадает ровно 4 орла»?

**6 |** Найдите корень уравнения  $\sin^2 \frac{\pi(x-4)}{3} = \frac{1}{2}$ .

В ответе запишите наибольший отрицательный корень уравнения.

**7 |** Найдите значение выражения  $\left(7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3}\right) \cdot 1,2$ .

**8 |** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ . Функция  $F(x) = x^3 + 24x^2 + 193x - \frac{5}{4}$  — одна из первообразных функции  $y = f(x)$ . Найдите площадь закрашенной фигуры.

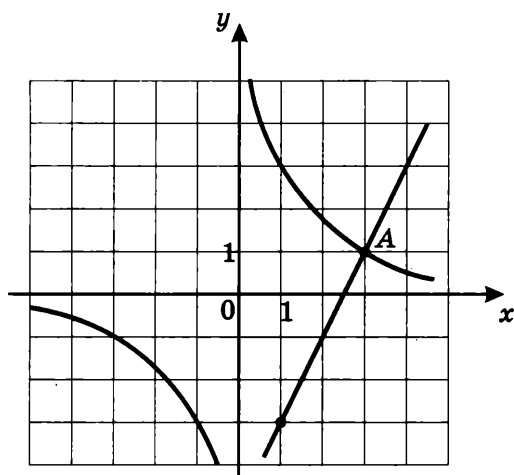


**9 |** Для обогрева помещения, температура в котором  $T_{\text{п}} = 18^\circ\text{C}$ , через радиатор отопления пропускают горячую воду температурой  $T_{\text{в}} = 72^\circ\text{C}$ . Расход проходящей через трубу воды  $m = 1,2$  кг/с. Проходя по трубе расстояние  $x$  (м), вода охлаждается до температуры  $T$  ( $^\circ\text{C}$ ), причем  $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}}$  (м), где  $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$  — теплоем-

кость воды,  $\gamma = 42 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}$  — коэффициент теплообмена,  $\alpha = 0,4$  — постоянная. До какой температуры охладится вода, если длина трубы 96 м?

**10 |** Смешали 30 %-й раствор соляной кислоты с 10 %-м и получили 600 г 15 %-го раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

**11 |** На рисунке изображены графики функций  $f(x) = \frac{k}{x}$  и  $g(x) = ax + b$ , которые пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Найдите абсциссу точки  $B$ .



**12** | Найдите точку максимума функции  $y = x^3 - 27x + 15$ .

**13** | а) Решите уравнение  $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ .

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

**14** | В основании треугольной пирамиды  $MAVC$  лежит правильный  $\triangle ABC$ . Боковая грань  $MBC$  перпендикулярна основанию,  $MB = MC$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро  $BC \perp AM$ .

б) Найдите объем пирамиды  $MBSK$ , где  $K$  — точка пересечения ребра  $AM$  и плоскости сечения, если  $AB = 4\sqrt{3}$ , а угол между боковым ребром  $AM$  и плоскостью основания равен  $60^\circ$ .

**15** | Решите неравенство

$$(3 + 2x - 8x^2) \log_3 \left( 1 - \frac{3}{x^2 + x + 3} \right) \leq 0.$$

**16** | При рытье колодца глубиной свыше 12 м за первый метр заплатили 1000 руб., а за каждый следующий — на 500 руб. больше, чем за предыдущий. Сверх того за весь колодец дополнительно было уплачено 8000 руб. Средняя стоимость 1 м оказалась равной 5250 руб. Чему равна глубина колодца?

**17 |** В прямоугольном  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 12$ ,  $BC = 5$  проведены медиана  $AM$  и биссектриса  $CD$ , пересекающиеся в точке  $E$ .

а) Докажите, что  $\frac{AE}{EM} = \frac{24}{5}$ .

б) Найдите  $S_{\triangle CEM}$ .

**18 |** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$(x^2 - 4|x| + a)^2 + 2(x^2 - 4|x| + a) + 2 = \cos \frac{6\pi}{a}$$

имеет ровно два корня.

**19 |** Коричневый карандаш стоит 19 руб., зеленый — 15 руб. Необходимо купить карандаши, имея в наличии 629 руб. и соблюдая условие: число зеленых карандашей не должно отличаться от числа коричневых карандашей больше, чем на 5.

а) Можно ли купить 36 карандашей?

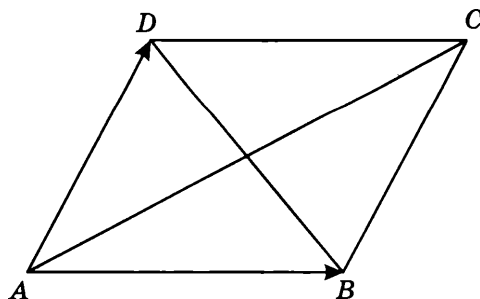
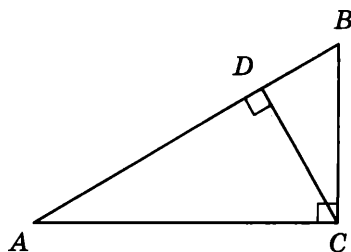
б) Можно ли купить 39 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?

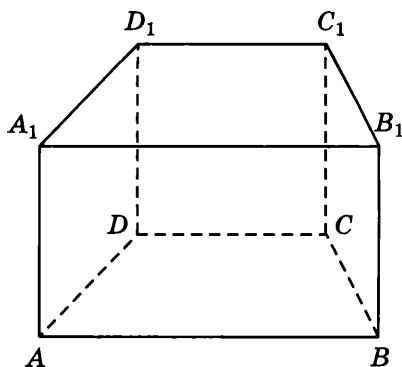
## Вариант 2

**1 |** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $CD$  — высота,  $AC = 15$ ,  $AD = 12$ . Найдите  $\cos \angle B$ .

**2 |** Диагонали ромба  $ABCD$  равны 24 и 18. Найдите длину вектора  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ .



**3 |** Основанием прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является равнобедренная трапеция, боковая сторона которой равна 5, а основания равны 7 и 9. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ее высота равна 12.



**4 |** Из 25 билетов, предлагаемых на экзамене по английскому языку, школьник может ответить только на 20. Какова вероятность того, что школьник не сможет ответить наугад на выбранный билет?

**5 |** Какова вероятность того, что случайно выбранный телефонный номер оканчивается двумя четными цифрами?

**6 |** Найдите корень уравнения  $\log_{\frac{1}{3}}(2-x) = -3$ .

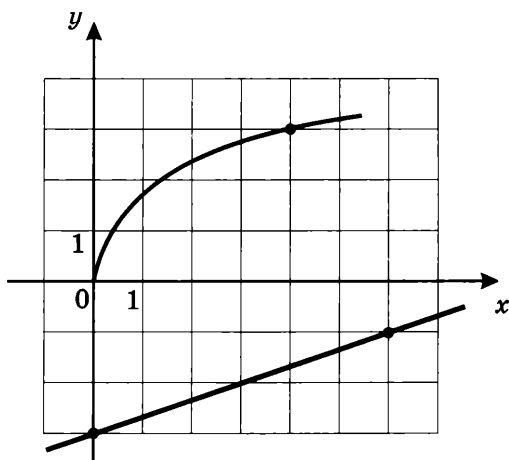
**7 |** Найдите значение выражения  $\frac{16x^2 + y^2 - (4x - y)^2}{xy}$ .

**8 |** Тело движется прямолинейно по закону  $S(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6$  (расстояние измеряется в метрах). Вычислите скорость движения в момент времени  $t = 2$  с.

**9 |** При температуре  $0^\circ\text{C}$  рельс имеет длину  $l_0 = 10$  м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса, и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону  $l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha t^\circ)$ , где  $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-5} (^\circ\text{C})^{-1}$  — коэффициент теплового расширения,  $t^\circ$  — температура ( $^\circ\text{C}$ ). При какой температуре рельс удлинится на 4 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

**10 |** Две бригады должны были закончить уборку урожая за 12 дней. После 8 дней совместной работы I бригада получила другое задание, поэтому II бригада закончила оставшуюся часть работы за 7 дней. На сколько дней II бригада убрала бы весь урожай быстрее I, если бы каждая бригада работала отдельно?

**11 |** На рисунке изображены графики функций  $f(x) = a\sqrt{x}$  и  $g(x) = kx + b$ , которые пересекаются в точке А. Найдите абсциссу точки А.



**12 |** Найдите наименьшее значение функции  $y = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 3$  на отрезке  $[1; 9]$ .

**13 |** а) Решите уравнение

$$4\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 7\cos 4x + \sin 2x + 10.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{\pi}{2}; 3\pi\right]$ .

**14 |** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все ребра равны 6. Через точки А,  $B_1$  и середину М ребра  $A_1C_1$  проведена плоскость.

а) Докажите, что сечением призмы плоскостью  $AB_1M$  является прямоугольный треугольник.

б) Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы.

**15 |** Решите неравенство

$$\left(\frac{5}{6x-11} + \frac{6x-11}{5}\right)^2 \leq \frac{25}{4}.$$

**16 |** Производство  $x$  тыс. единиц продукции обходится в  $q = 2x^2 + 5x + 10$  млн руб. в год. При цене  $p$  тыс. руб. за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн руб.) составляет  $px - q$ . При каком наименьшем значении  $p$  через 12 лет суммарная прибыль может составить не менее 744 млн руб. при некотором значении  $x$ ?

**17 |** В равнобедренном  $\triangle ABC$  ( $AB = BC$ ) проведены биссектрисы  $AN$ ,  $CM$ ,  $BD$ .

а) Докажите, что  $\triangle DMN$  — равнобедренный.

б) Найдите  $S_{\triangle DMN}$ , если  $S_{\triangle ABC} = 121$ ,  $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$ .

**18 |** В зависимости от значений параметра  $a$  решите уравнение

$$x^5 - 5x^3 + 5x = a^5 + \frac{1}{a^5}.$$

**19 |** Сторона квадрата на 3 см больше ширины прямоугольника, а площади этих фигур равны. Длины сторон квадрата и прямоугольника — целые числа.

а) Может ли ширина прямоугольника быть равной 6?

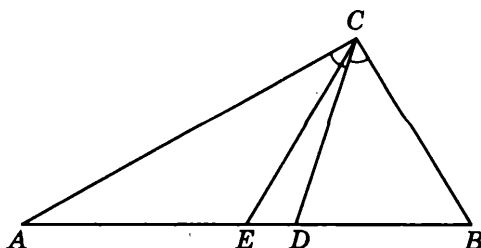
б) Может ли длина прямоугольника быть равной 12?

в) Найдите все возможные варианты таких пар прямоугольников и квадратов.

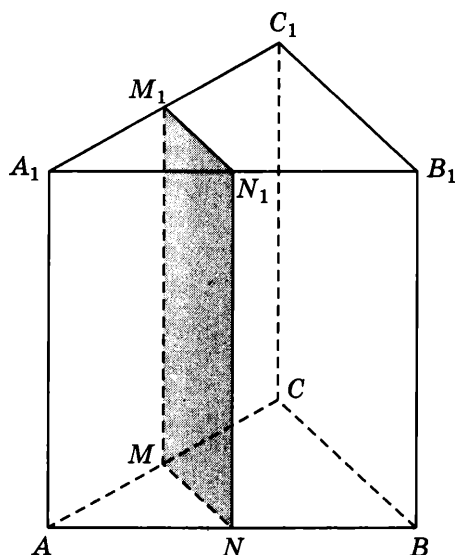
### Вариант 3

**1 |** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 25^\circ$ ,  $\angle B = 65^\circ$ ,  $CE$  — медиана,  $CD$  — биссектриса. Найдите  $\angle ECD$ .

**2 |** Точки  $O(0; 0)$ ,  $A(0; 8)$ ,  $C(8; 3)$  и  $B$  являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки  $B$ .



**3 |** Объем треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  равен 40. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите объем отсеченной треугольной призмы.



**4 |** Имеются 40 карточек, на которых записаны числа от 1 до 40 включительно. Из них наугад выбирают одну карточку. Какова вероятность того, что на выбранной карточке будет число 40 или любое четное число?

**5 |** Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже  $36,7^\circ\text{C}$  равна 0,82. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется  $36,7^\circ\text{C}$  или выше.

**6 |** Найдите корень уравнения  

$$2^{4-x} = 0,4 \cdot 5^{4-x}.$$

**7 |** Найдите  $p(x) + p(4-x)$ , если  $p(x) = \frac{x(4-x)}{x-2}$  при  $x \neq 2$ .

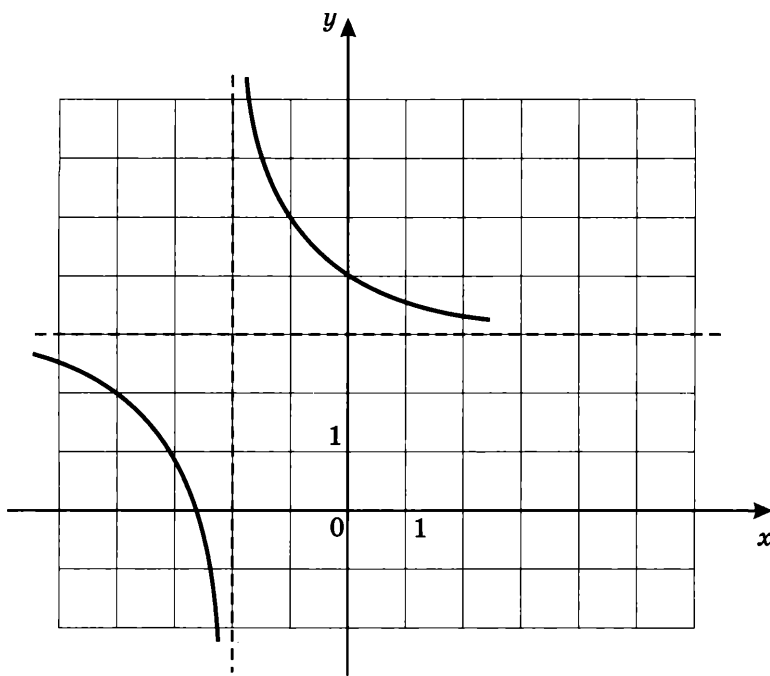
**8 |** Прямая  $y = 2x + 7$  является касательной к графику функций  $f(x) = 5x^2 - 8x + C$ . Найдите значение  $C$ .

**9 |** Камень брошен вниз с высоты 15 м. Высота  $h$ , на которой находится камень во время падения, зависит от времени  $t$ :  $h(t) = 15 - 4t - 4t^2$ . Сколько секунд будет падать камень?

**10 |** Вычислите массу и пробу сплава серебра с медью, зная, что, сплавив его с 3 кг чистого серебра, получили сплав 900-й пробы (т. е. в сплаве 90 % серебра), а сплавив с 2 кг сплава 900-й пробы, получили сплав 840-й пробы.



**11 |** На рисунке изображен график функции вида  $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые числа. Найдите  $b$ .



**12 |** Найдите точку минимума функции

$$y = -\frac{x}{x^2 + 9}.$$

**13 |** а) Решите уравнение

$$\frac{\cos 2x + \sin x}{\sqrt{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}} = 0.$$

б) Найдите все корни уравнения на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ .

**14 |** В правильном тетраэдре  $МABC$  точка  $E$  — середина ребра  $AM$ .

а) Докажите, что  $AM \perp BC$ .

б) Найдите угол между прямыми  $MO$  и  $BE$ .

**15 |** Решите неравенство

$$x^3 + 2x^2 - \frac{7x^2 - 5x + 20}{x - 4} \leq 5.$$

**16 |** 31 декабря 2016 года Максим взял в банке некоторую сумму в кредит под 10 % годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (т. е. увеличивает долг на 10 %), затем Максим переводит в банк 2 928 200 руб. Какую сумму взял Максим в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (т. е. за 4 года)?

**17 |** В остроугольном  $\triangle ABC$  проведены высоты  $AN$  и  $BM$ .

а) Докажите, что  $\triangle CMN \sim \triangle ABC$ .

б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около  $\triangle ABC$  и  $\triangle CMN$ , если  $S_{\triangle ABC} = 27$ ,  $S_{\triangle CMN} = 3$  и  $MN = 3\sqrt{2}$ .

**18 |** Найдите все значения параметра  $a$ , для которых ровно при одном  $x$  из промежутка  $[1; 5]$  значение выражения  $x^4 - x^2 + 5$  равно значению выражения  $a(x^2 - 4)$ .

**19 |** Гриша перемножил несколько различных натуральных чисел из отрезка  $[21; 82]$ . Артур увеличил каждое из чисел на 1 и перемножил все полученные числа.

а) Может ли результат Артура быть вдвое больше, чем у Гриши?

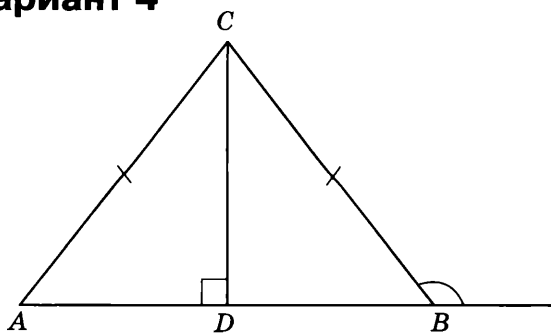
б) Может ли результат Артура быть в 7 раз больше, чем у Гриши?

в) В какое наибольшее целое число раз результат Артура может быть больше, чем у Гриши?

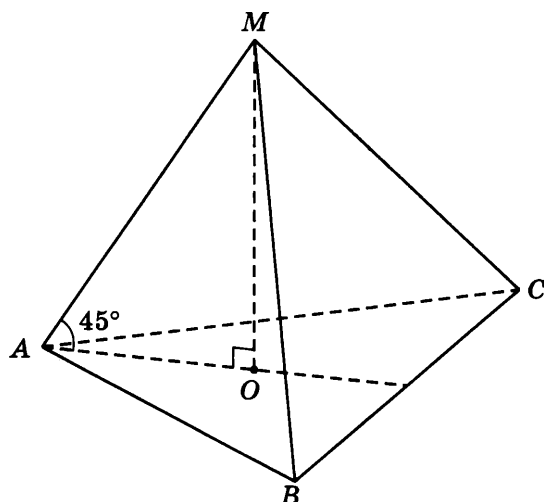
#### Вариант 4

**1 |** В  $\triangle ABC$   $AC = BC$ ,  $AB = 24$ . Найдите синус внешнего угла при вершине  $B$ .

**2 |** Точки  $O(0; 0)$ ,  $A(3; 6)$ ,  $B(9; 8)$  и  $C$  являются вершинами параллелограмма. Найдите ординату точки  $C$ .



**3 |** Страна основания правильной треугольной пирамиды  $MABC$  равна  $10\sqrt{3}$ , а боковое ребро образует с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Найдите высоту пирамиды.



**4 |** На подносе лежат одинаковые на вид пирожки: 5 с мясом, 3 с картошкой и 12 с капустой. Какова вероятность того, что случайно выбранный пирожок будет с мясом или картошкой?

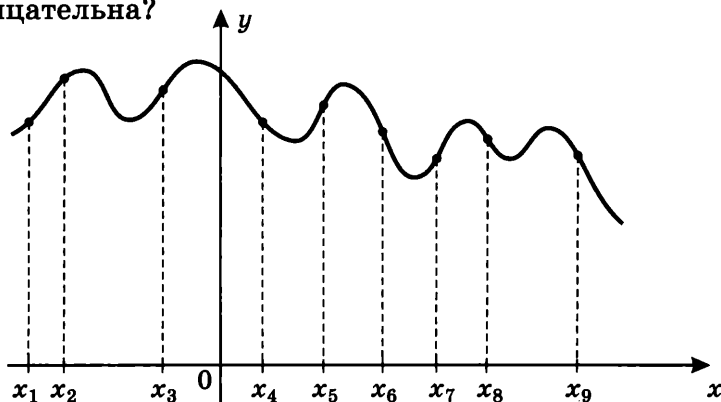
**5 |** Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,05. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две такие батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

**6 |** Найдите корень уравнения

$$\sqrt{\frac{6-2x}{5+x}} = \sqrt{2}.$$

**7 |** Известно, что  $6x + 2y = 11$ ,  $10z + 4y = 13$ . Найдите значение выражения  $3x + 3y + 5z$ .

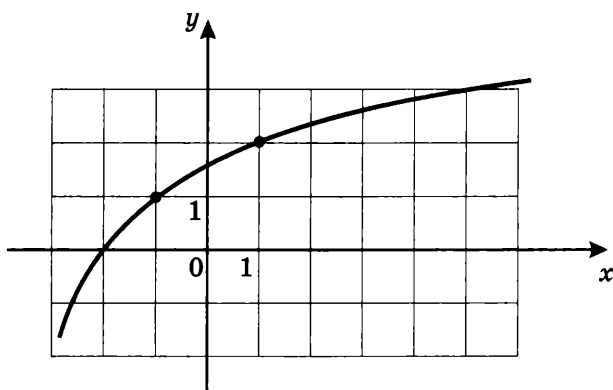
**8 |** На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и 9 точек на оси  $Ox$ :  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$ . В скольких из этих точек производная функции  $f(x)$  отрицательна?



**9 |** Для одного из предприятий зависимость объема спроса на продукцию  $q$  (единиц в месяц) от ее цены  $p$  (тыс. руб.) задается формулой  $q = 160 - 10p$ . Определите максимальный уровень цены  $p$  (в тыс. руб.), при котором значение выручки предприятия за месяц  $r = q \cdot p$  составит не менее 550 тыс. руб.

**10 |** Цену товара сперва снизили на 20 %, затем новую цену снизили еще на 15 % и, наконец, после перерасчета произвели снижение на 10 %. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?

**11 |** На рисунке изображен график функции  $f(x) = \log_a(x + b)$ . Найдите  $f(x)$ .



**12 |** Найдите наибольшее значение функции  $y = (x - 9)e^{x - 8}$  на отрезке  $[7; 9]$ .

**13 |** а) Решите уравнение

$$\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку

$$\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right].$$

**14 |** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  через середину ребра  $AB$  и точку  $C$  проведена плоскость, перпендикулярная основанию.

а) Докажите, что плоскость делит ребро  $MB$  в отношении 2 : 1, считая от точки  $B$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, если  $MA = 26$ ,  $AB = 10\sqrt{2}$ .

**15 |** Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x^3 - 8x^2 + 16x - 9}}{\sqrt{x-1}} > \sqrt{9-x}$$

и укажите сумму целых решений.

**16 |** Сергей взял кредит в банке на срок 7 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 13 %, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Сергеем. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, т. е. на одну и ту же величину. Сколько процентов от суммы кредита составила общая сумма, уплаченная Сергеем банку (сверх кредита)?

**17 |** В равнобедренном остроугольном  $\triangle ABC$  основание  $AC = 24$ , а расстояние от вершины  $B$  до точки  $M$  пересечения высот равно 7.

а) Докажите, что  $\triangle BCD \sim \triangle AEC$ .

б) Найдите радиус окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ .

**18 |** При каком значении параметра  $a$  уравнение

$$(a + 2 - |x + 1|)(a + x^2 + 2x) = 0$$

имеет: 1) 3 корня; 2) 2 корня?

**19 |** Известно, что  $a, b, c$  и  $d$  — попарно различные положительные двузначные числа.

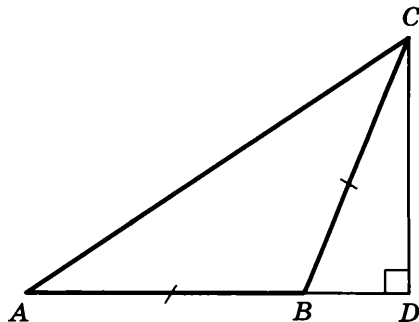
а) Может ли выполняться равенство  $\frac{a+c}{b+d} = \frac{9}{21}$ ?

б) Может ли дробь  $\frac{a+c}{b+d}$  быть в 13 раз меньше, чем сумма  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ ?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь  $\frac{a+c}{b+d}$ , если  $a > 3b$  и  $c > 6d$ ?

### Вариант 5

**1 |** В  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $CD = 32$  — высота,  $AD = 40$ . Найдите  $\operatorname{tg} \angle ACB$ .

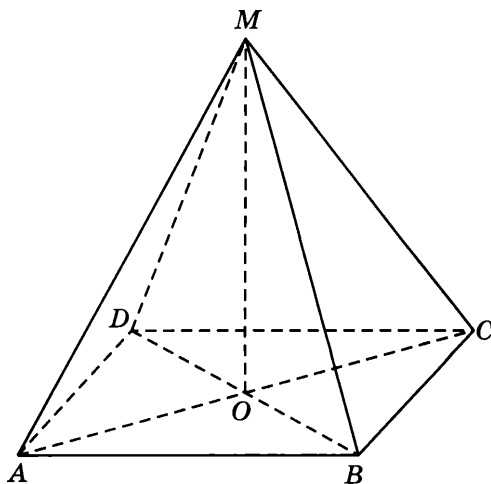


**2 |** Точки  $O(0; 0)$ ,  $A(2; 6)$ ,  $B(10; 4)$  являются вершинами треугольника. Найдите квадрат длины средней линии  $MN$ , если  $MN \parallel OA$ .

**3 |** Объем правильной четырехугольной пирамиды  $MABCD$  равен 48, а высота — 4. Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды.

**4 |** Монету подбрасывают 3 раза подряд. Какова вероятность того, что все 3 раза выпадет орел?

**5 |** В магазине 3 продавца. Каждый из них занят с клиентом с вероятностью 0,4. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени все 3 продавца заняты одновременно.

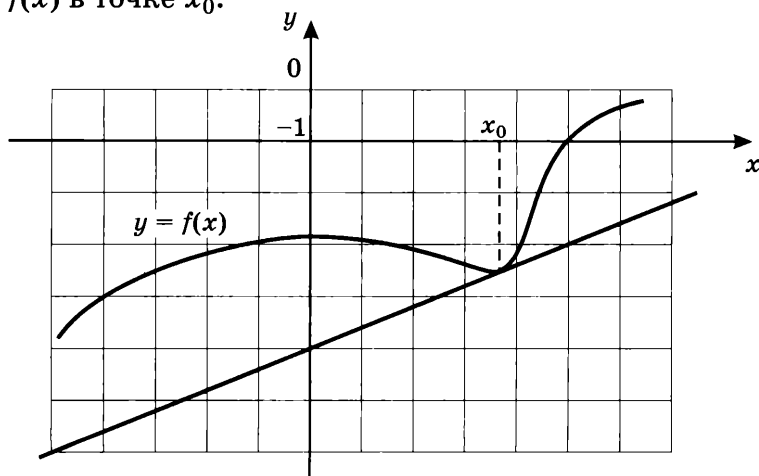


**6 |** Найдите корень уравнения  $\sqrt{42-x} = -x$ . Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

**7 |** Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[5]{5}}{\sqrt{5}}.$$

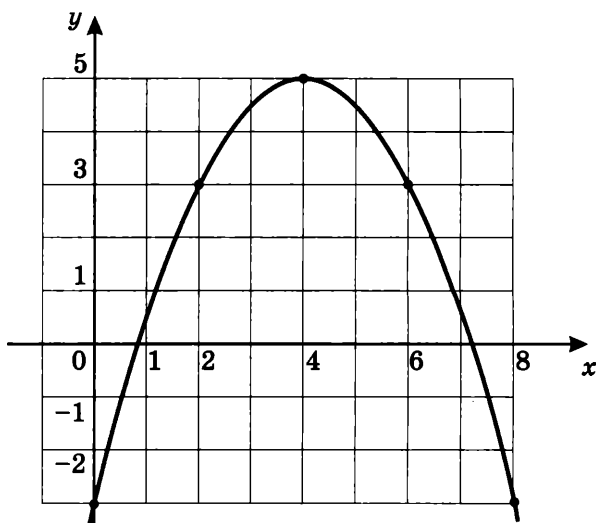
**8 |** На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ . Найдите значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ .



**9 |** Материальная точка движется по координатной прямой по закону  $S(t) = t^3 - 7t^2 + 3t + 1$ . Найдите момент времени, при котором ускорение точки будет равно  $4 \text{ м/с}^2$ .

**10 |** Антикварный магазин, купив два предмета за 225 000 руб., продал их, получив 40 % прибыли. Что стоит магазину каждый предмет, если на первом получено 25 % прибыли, а на втором — 50 %?

**11 |** На рисунке изображен график функции вида  $f(x) = \frac{x^2}{a} + bx + c$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые числа. Найдите значение  $f(0)$ .



**12 |** Найдите точку максимума функции  $y = (2x^2 - 30x + 30)e^{x-30}$ .

**13 |** а) Решите уравнение

$$25^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)} = 5^{1-\cos 2x}.$$

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие промежутку  $(-5\pi; -2\pi)$ .

**14 |** В основании пирамиды  $МАВС$  лежит равнобедренный  $\triangle ABC$  с основанием  $AB$ . Все боковые ребра пирамиды равны. В пирамиду вписана сфера.

а) Докажите, что точка касания сферы с гранью  $МAB$  лежит на прямой  $MD$ , где  $D$  — середина  $AB$ .

б) Найдите радиус сферы, если  $AB = 12$ ,  $AC = BC = 10$ ,  $MD = 8$ .

**15 |** Решите неравенство

$$125^x - 31 \cdot 25^x + 31 \cdot 5^{x+1} - 125 \leq 0.$$

**16 |** В июле планируется взять кредит на сумму 4 468 500 руб. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить некоторую часть долга.

Сколько рублей нужно платить ежегодно, чтобы кредит был полностью погашен тремя равными платежами (т. е. за 3 года)?

**17 |** В квадрате  $ABCD$  точки  $M, E, F$  — середины сторон  $BC, AB$  и  $CD$  соответственно,  $K$  — точка пересечения  $AM$  и  $DE$ ,  $T$  —  $MD$  и  $AF$ ,  $N$  —  $AF$  и  $DE$ .

а) Докажите, что точки  $M, K, N$  и  $T$  лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник  $MKNT$ , если  $AB = 16$ .

**18 |** Найдите все значения параметра  $a$ , при которых неравенство  $\frac{x-2a-4}{x-a+4} < 0$  выполняется для всех  $x \in [2; 3]$ .

**19 |** Квадратное уравнение  $x^2 + px + q = 0$  имеет два различных натуральных корня.

а) Пусть  $q = 14$ . Найдите все возможные значения  $p$ .

б) Пусть  $p + q = 18$ . Найдите возможные значения  $q$ .

в) Пусть  $q^2 - p^2 = 1265$ . Найдите все возможные корни исходного уравнения.

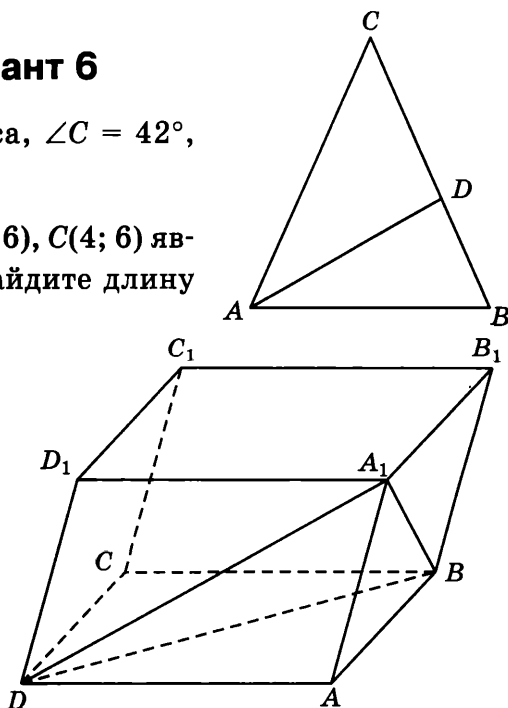
## Вариант 6

**1 |** В  $\triangle ABC$   $AD$  — биссектриса,  $\angle C = 42^\circ$ ,  $\angle CAD = 35^\circ$ . Найдите  $\angle B$ .

**2 |** Точки  $O(0; 0)$ ,  $A(12; 0)$ ,  $B(8; 6)$ ,  $C(4; 6)$  являются вершинами трапеции. Найдите длину ее средней линии  $MN$ .

**3 |** Объем параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равен 18. Найдите объем треугольной пирамиды  $ABDA_1$ .

**4 |** В случайном эксперименте монету бросили 3 раза. Какова вероятность того, что орел выпал ровно 2 раза?





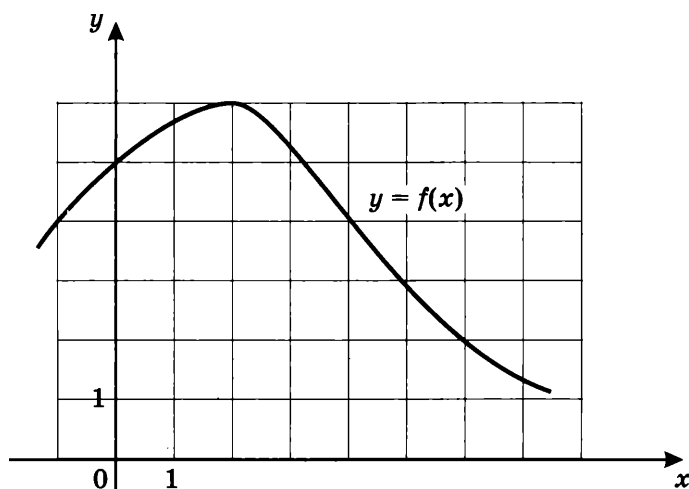
**5 |** Вероятность того, что новый электрический чайник прослужит больше года, равна 0,94. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,88. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

**6 |** Найдите корень уравнения  $5x^2 + 6x - 11 = 0$ . Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

**7 |** Найдите значение выражения

$$\frac{\sqrt{2,4} \cdot \sqrt{4,8}}{\sqrt{0,18}}.$$

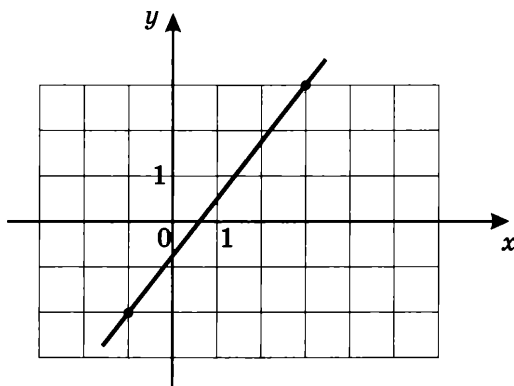
**8 |** На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ . Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = 2x - 3$  или совпадает с ней.



**9 |** Скейтбордист прыгает на стоящую на рельсах платформу со скоростью  $v = 2$  м/с под острым углом  $\alpha$  к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью  $u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha$  (м/с), где  $m = 90$  кг — масса скейтбордиста со скейтом,  $M = 450$  кг — масса платформы. Под каким максимальным углом  $\alpha$  (в градусах) можно прыгать, чтобы разогнать платформу не менее чем до  $\frac{1}{7}$  м/с?

**10 |** Четыре одинаковые рубашки дешевле куртки на 12 %. На сколько процентов пять таких же рубашек дороже куртки?

**11** | На рисунке изображен график функции  $f(x) = kx + b$ . Найдите значение  $x$ , при котором  $f(x) = -7,5$ .



**12** | Найдите наименьшее значение функции  $y = 6x - \ln(x + 4)^6$  на отрезке  $[-3, 5; 0]$ .

**13** | а) Решите уравнение  $x^4 + x^3 - 10x^2 - 2x + 4 = 0$ .

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку  $[2; \sqrt{10}]$ .

**14** | В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  сторона основания  $AB = 8\sqrt{2}$ , а боковое ребро  $MA = 24$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку  $A$  и середину ребра  $MC$ .

б) Найдите площадь полученного сечения.

**15** | Решите неравенство

$$\log_4^2 x + \log_4 \sqrt{x} \geq 1,5.$$

**16** | По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на 20 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает эту сумму на 12 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наибольшее натуральное число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад будет менее выгоден, чем вклад «А».

**17** | В параллелограмме  $ABCD$  стороны  $AB = 6$ ,  $AD = 4$ , точка  $E$  — середина  $AB$ . Известно, что  $AC \perp DE$ ,  $M$  — точка их пересечения.

а) Докажите, что  $\triangle AME \sim \triangle DMC$ .

б) Найдите  $S_{ABCD}$ .

**18 |** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 3x - 7y + 12 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

**19 |** Известно, что квадратное уравнение вида  $x^2 + tx + k = 0$  имеет 2 различных натуральных корня.

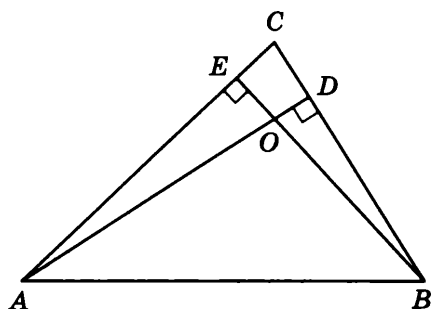
а) Найдите все возможные значения  $k$  при  $t = -8$ .

б) Найдите возможные значения  $t$  при  $k - t = 25$ .

в) Найдите все возможные значения корней уравнения, если  $k^2 - t^2 = 1628$ .

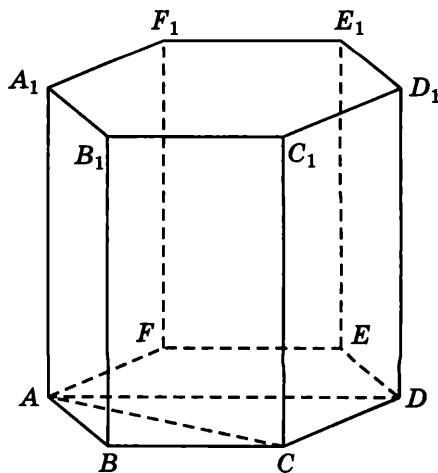
## Вариант 7

**1 |** В  $\triangle ABC$   $\angle A = 35^\circ$ ,  $\angle B = 62^\circ$ ,  $AD$  и  $BE$  — высоты, проведенные к сторонам  $BC$  и  $AC$  соответственно. Найдите  $\angle AOB$ , где  $O$  — точка пересечения высот  $AD$  и  $BE$ .



**2 |** Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника  $ABCD$ , если его вершины имеют координаты  $A(-1; -1)$ ,  $B(7; -1)$ ;  $C(7; 5)$ ,  $D(-1; 5)$ .

**3 |** В правильной шестиугольной призме  $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ , все ребра которой равны 1, найдите  $\angle CAD$ . Ответ укажите в градусах.



**4 |** В соревнованиях по легкой атлетике участвуют 3 спортсмена из Голландии, 5 спортсменов из Германии, 8 спортсменов из Кубы и 9 — из США. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется по жребию. Най-

дите вероятность того, что спортсмен, который выступает последним, окажется из Кубы.

**5 |** В магазине стоят 2 платежных автомата. Каждый из них может быть неисправен с вероятностью 0,06 независимо от другого автомата. Найдите вероятность того, что хотя бы один автомат исправен.

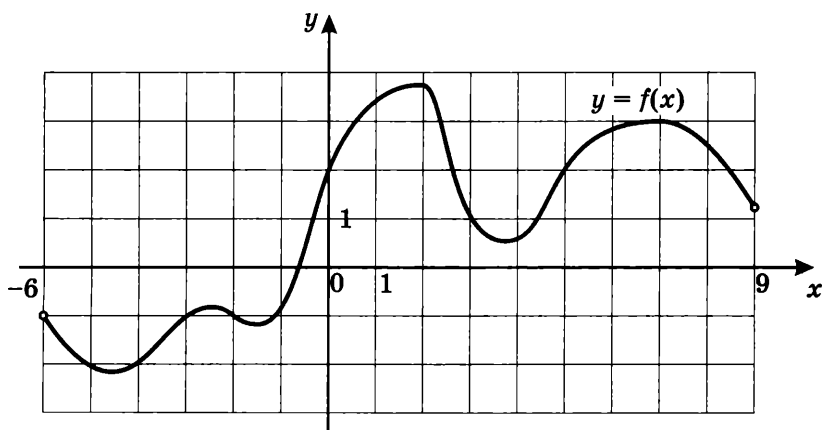
**6 |** Найдите корень уравнения  $14x^2 - 5x - 1 = 0$ .

Если уравнение имеет более одного корня, укажите больший из них.

**7 |** Найдите значение выражения

$$\frac{19\sqrt[4]{30\sqrt{x}} - 11\sqrt[8]{15\sqrt{x}}}{4\sqrt[40]{3\sqrt{x}}}.$$

**8 |** На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ , определенной на интервале  $(-6; 9)$ . Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции  $y = f(x)$  параллельна прямой  $y = x - 2$  или совпадает с ней.

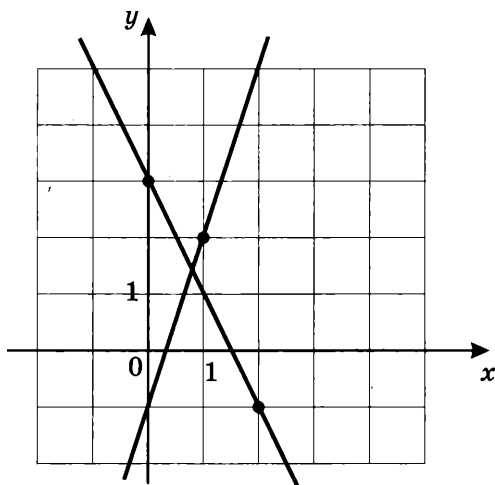


**9 |** При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон  $pV^k = 2,56 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot \text{м}^4$ , где  $p$  — давление газа в паскалях,  $V$  — объем газа ( $\text{м}^3$ ),  $k = \frac{4}{3}$ . Какой объем будет занимать газ при давлении  $p = 6,25 \cdot 10^6 \text{ Па}$ ?

**10 |** Имеется два сплава. I сплав содержит 12 % меди, II — 48 %. Масса II сплава больше массы I на 3 кг. Из этих двух сплавов полу-

чили III сплав, содержащий 36 % меди. Найдите массу III сплава. Ответ дайте в килограммах.

**11 |** На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения.



**12 |** Найдите наибольшее значение функции

$$y = 2x^2 - 9x + 5 \ln x - 13$$

на отрезке  $\left[\frac{1}{10}; \frac{11}{10}\right]$ .

**13 |** а) Решите уравнение

$$4x^2 + 12x + 3\sqrt{x^2 + 3x + 1} = 3.$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[-1; 2]$ .

**14 |** В цилиндре  $ABCD$  высота  $AB = 8$ , радиус основания  $AO = 4$ ,  $MN$  — хорда в нижнем основании, причем  $MN = AO$ . В верхнем основании цилиндра проведен диаметр  $BC \perp MN$ . Сечение  $MEFN \perp BC$ .

а) Докажите, что диагонали сечения  $MEFN$  равны.

б) Найдите объем пирамиды  $BMEFN$ .

**15 |** Решите неравенство

$$\log_{\frac{x-2}{|2x-5|}}(x-2) \leq 2.$$

**16 |** Григорий хочет купить пакет акций быстрорастущей компании. В начале года у Григория не было денег на покупку акций, а пакет стоил 160 000 руб. В середине каждого месяца Григорий откладывает на покупку пакета акций одну и ту же сумму, а в конце ме-

сяца пакет дорожает, но не более чем на 25 %. Какую наименьшую сумму нужно откладывать Григорию каждый месяц, чтобы через некоторое время купить желаемый пакет акций?

**17** | В параллелограмме  $ABCD$  точка  $M$  — середина  $AB$ . Прямые  $AC$  и  $DM$  пересекаются в точке  $O$ .

а) Докажите, что  $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COM}$ .

б) Найдите  $S_{ABCD}$ , если  $AB = 8$ ,  $AD = 6$ .

**18** | На доске написаны 3 различных натуральных числа. Второе число равно сумме цифр первого, а третье равно сумме цифр второго.

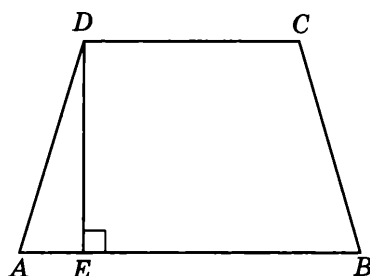
а) Может ли сумма этих чисел быть равной 3456?

б) Может ли сумма этих чисел быть равной 2345?

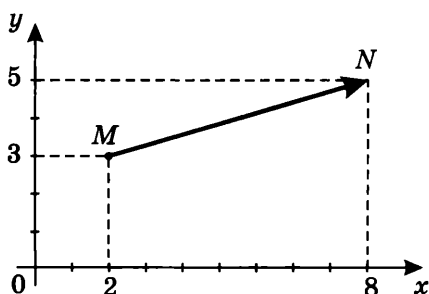
в) В тройке чисел первое число трехзначное, а третье равно 5. Сколько существует таких троек?

## Вариант 8

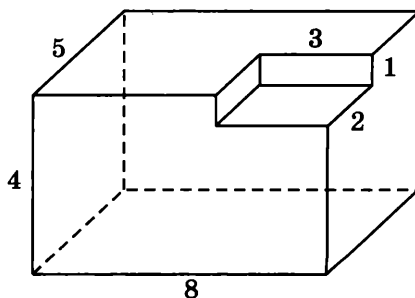
**1** | Основания равнобедренной трапеции равны 28 и 12. Синус острого угла трапеции равен 0,8. Найдите боковую сторону.



**2** | Найдите сумму координат вектора  $\overrightarrow{MN}$ .



**3** | Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



**4 |** В чемпионате Европы по боксу участвуют 20 спортсменов: 6 из Германии, 8 — из Франции, остальные из Италии. Порядок, в котором выступают спортсмены, определяется по жребию. Найдите вероятность того, что боксер, выступающий первым, окажется из Италии.

**5 |** Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 35 % этих стекол, вторая — 45 %. Первая фабрика выпускает 2 % бракованных стекол, а вторая — 1 %. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

**6 |** Найдите корень уравнения

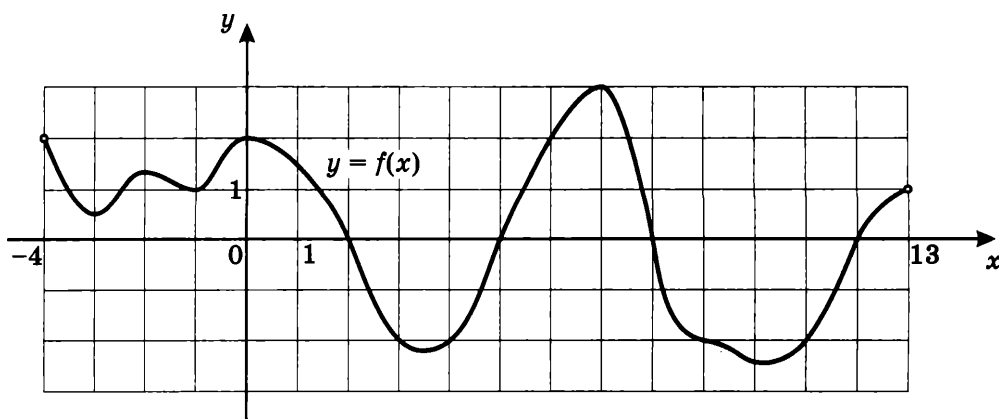
$$x = \frac{5x+6}{2x+1}.$$

Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите больший корень.

**7 |** Найдите значение выражения

$$0,8^{\frac{1}{7}} \cdot 5^{\frac{2}{7}} \cdot 20^{\frac{6}{7}}.$$

**8 |** На рисунке изображен график производной функции  $y = f'(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 13)$ . Найдите количество точек максимума функции  $f(x)$  на отрезке  $[-2; 12]$ .

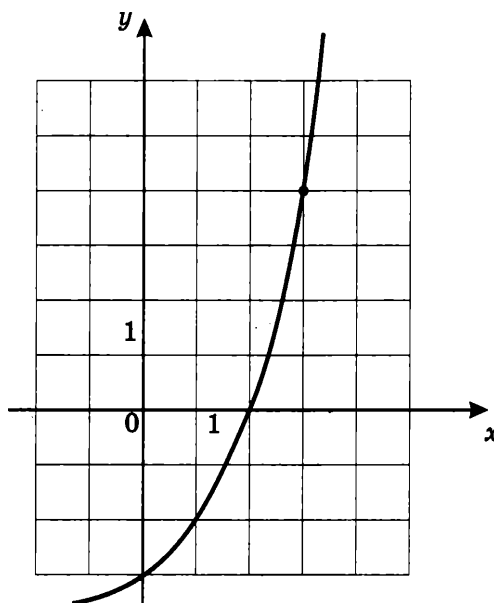


**9 |** Мяч бросили под острым углом  $\alpha$  к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полета мяча (в секундах) определяется по формуле  $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$ . При каком наименьшем значении угла  $\alpha$  (в гра-

дусах) время полета будет не меньше 2 с, если мяч бросают с начальной скоростью  $v_0 = 20$  м/с? Ускорение свободного падения принять  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>.

**10 |** Моторная лодка прошла против течения реки 64 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 ч меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 12 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

**11 |** На рисунке изображен график функции  $f(x) = a^x + b$ . Найдите значение  $x$ , при котором  $f(x) = 28$ .



**12 |** Найдите наименьшее значение функции  $y = 5\sin x + \frac{30}{\pi}x + 3$  на отрезке  $\left[-\frac{5\pi}{6}; 0\right]$ .

**13 |** а) Решите уравнение  $64 \cdot 9 - 84 \cdot 12^x + 27 \cdot 16^x = 0$ .

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку  $\left(1; \frac{7}{3}\right)$ .

**14 |** В конусе  $MAV$  высота  $MO = 8$ , радиус основания  $AO = 15$ .

а) Постройте сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину  $M$  конуса и взаимно перпендикулярные образующие  $MA$  и  $MC$ .



б) Найдите расстояние от плоскости сечения до центра основания конуса.

**15 |** Решите неравенство

$$|x^2 + x - 12| - 45 \leq 9|x - 3| - 5|x + 4|.$$

**16 |** В июле 2024 года планируется взять кредит на 3 года в размере 1200 тыс. руб. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;

— платежи в 2025 и 2026 годах должны быть равными;

— к июлю 2027 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платеж в 2027 году составит 673,2 тыс. руб. Сколько рублей составит платеж в 2025 году?

**17 |** В равнобедренную трапецию  $ABCD$  вписана окружность радиуса  $r = 2\sqrt{3}$ ,  $F$  — точка касания окружности с основанием  $CD$ .

Отрезок  $AF$  пересекает окружность в точке  $M$  так, что  $AM : MF = 2 : 6$ .

а) Докажите, что  $DF = AM$ .

б) Найдите периметр трапеции.

**18 |** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $ax + \sqrt{5 - 4x - x^2} = 2a + 3$  имеет единственный корень.

**19 |** Задуман набор последовательных (идуших подряд) натуральных чисел, сумма которых больше 231 и меньше 245.

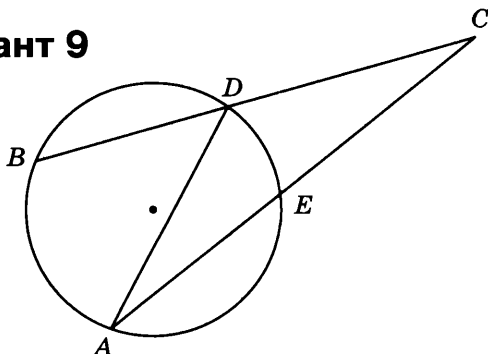
а) Может ли в наборе быть 13 чисел?

б) Может ли в наборе быть 14 чисел?

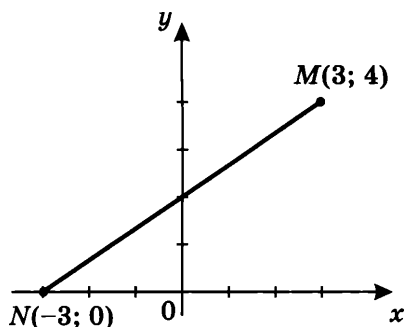
в) Какое наибольшее количество чисел, которые удовлетворяют заданному условию, может быть задумано?

## Вариант 9

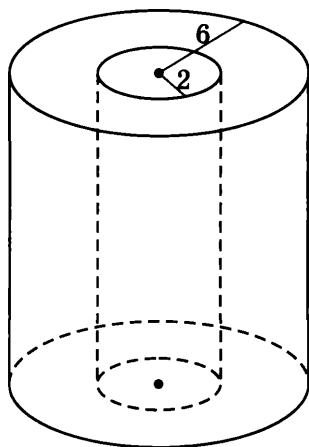
**1 |**  $\angle ACB = 35^\circ$ . Градусная величина дуги  $AB$  окружности, не содержащей точек  $D$  и  $E$ , равна  $120^\circ$ . Найдите  $\angle DAE$ .



**2 |** Найдите ординату точки пересечения отрезка, соединяющего точки  $M(3; 4)$  и  $N(-3; 0)$ .



**3 |** Найдите объем  $V$  части цилиндра, изображенной на рисунке. В ответе укажите  $\frac{V}{\pi}$ .



**4 |** Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо (или вовсе не пишет), равна 0,12. Покупатель выбирает в магазине одну такую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.

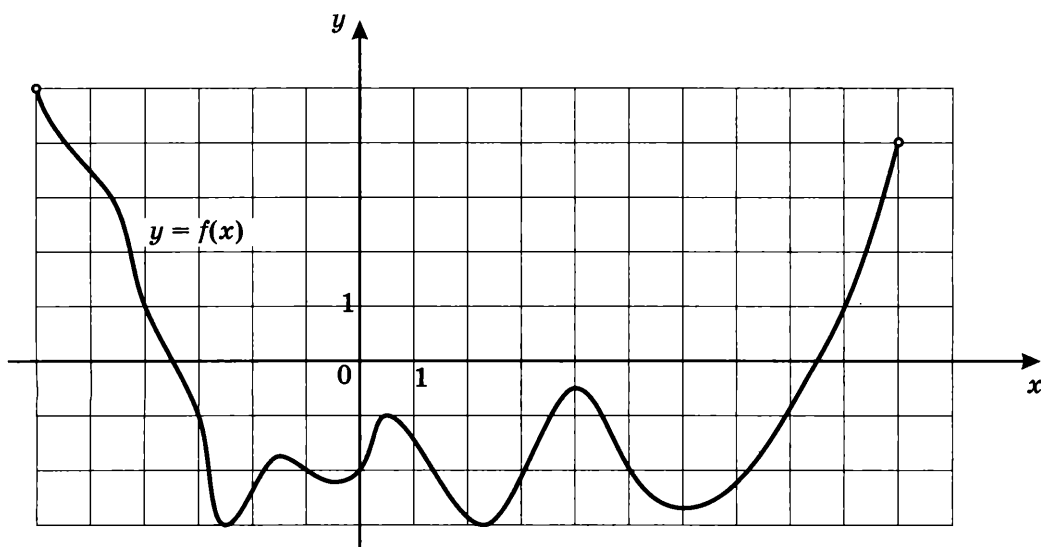
**5 |** Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,75. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (либо первым, либо вторым выстрелом).

**6 |** Найдите корень уравнения  $x = \frac{4-3x}{x-3}$ . Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

**7 |** Найдите значение выражения  $(1 - \log_3 18)(1 - \log_6 18)$ .

**8 |** На рисунке изображен график производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-6; 10)$ . Найдите промежутки убывания

функции  $f(x)$ . В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.



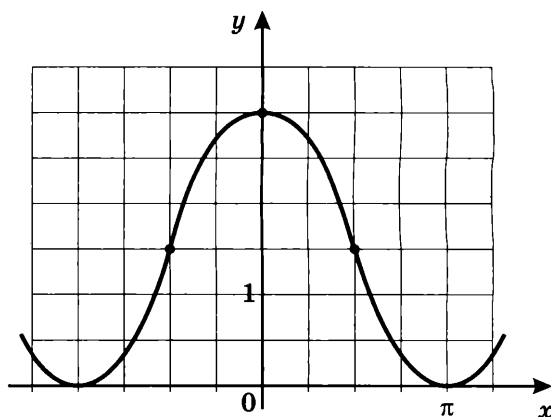
**9 |** Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется по формуле  $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%$ , где  $T_1$  — температура нагревателя,  $T_2$  — температура холодильника (в градусах Кельвина). При какой минимальной температуре нагревателя  $T_1$  КПД этого двигателя будет не меньше 20 %, если температура холодильника  $T_2 = 320$  К? Ответ выразите в градусах Кельвина.

**10 |** I труба пропускает на 2 л воды в минуту меньше, чем II. Сколько литров воды в минуту пропускает I труба, если резервуар объемом 120 л она заполняет на 2 мин дольше, чем II труба?

**11 |** На рисунке изображен график функции  $f(x) = a \sin x + b$ . Найдите  $b$ .

**12 |** Найдите точку максимума функции

$y = (4x - 5) \cos x - 4 \sin x + 7$ , принадлежащую промежутку  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .



**13 |** а) Решите уравнение  $10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20$ .

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[ \lg \frac{1}{12}; \frac{15}{7} \right]$ .

**14 |** В конус, радиус основания которого равен 4, вписан шар радиуса 3.

а) Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.

б) Найдите отношение площади поверхности конуса к площади поверхности шара.

**15 |** Решите неравенство

$$\frac{7|4-x|}{13-|x+3|} - |x-4| \leq 0.$$

**16 |** Оксана хочет взять в кредит 100 000 руб. под 10 % годовых. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. На какое минимальное количество лет Оксана может взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24 тыс. руб.?

**17 |** В прямоугольной трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ )  $EF$  — средняя линия,  $BC : CD = 1 : 2$ ,  $AC \perp BD$ .

а) Докажите, что  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ .

б) Найдите  $BC$ , если  $EF = 20$ .

**18 |** При каких значениях параметра  $a$  уравнение

$$27 \cdot 9^{-x-3/2} - (a+2) \cdot 3^{-x} + (1-a)(2a+1) = 0$$

имеет единственное решение?

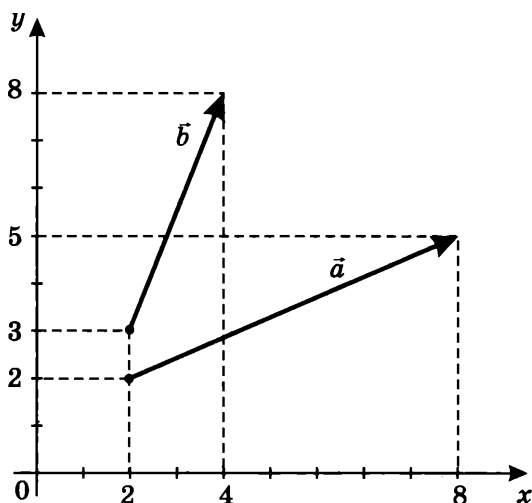
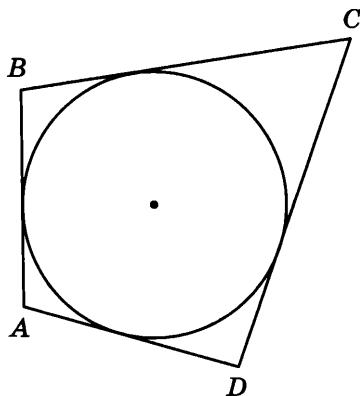
**19 |** Верно ли, что для любого набора положительных чисел, каждое из которых не превосходит 10, а их сумма больше 90, всегда можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма была не больше 90, но больше:

- а) 80;
- б) 82;
- в) 81?

## Вариант 10

**1 |** Периметр четырехугольника, описанного около окружности, равен 48, две его стороны равны 10 и 12. Найдите большую из оставшихся сторон.

**2 |** Найдите сумму координат вектора  $\vec{a} + \vec{b}$ .



**3 |** Высота конуса равна 3, образующая равна 6. Найдите радиус описанного шара.

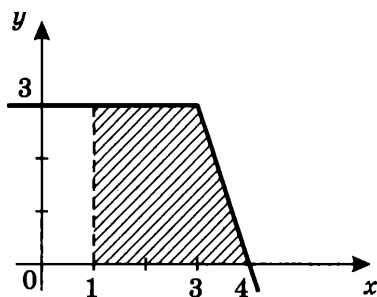
**4 |** На олимпиаде по математике 250 участников разместили в трех аудиториях. В первых двух удалось разместить по 120 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом здании. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник попал в запасную аудиторию.

**5 |** При двукратном бросании игральной кости в сумме выпало 9 очков. Какова вероятность того, что хотя бы раз выпало 5 очков?

**6 |** Найдите корень уравнения  $\frac{3x-2}{x-2} = 2,6$ .

**7 |** Найдите значение выражения  $18 \sin 120^\circ \cos 150^\circ$ .

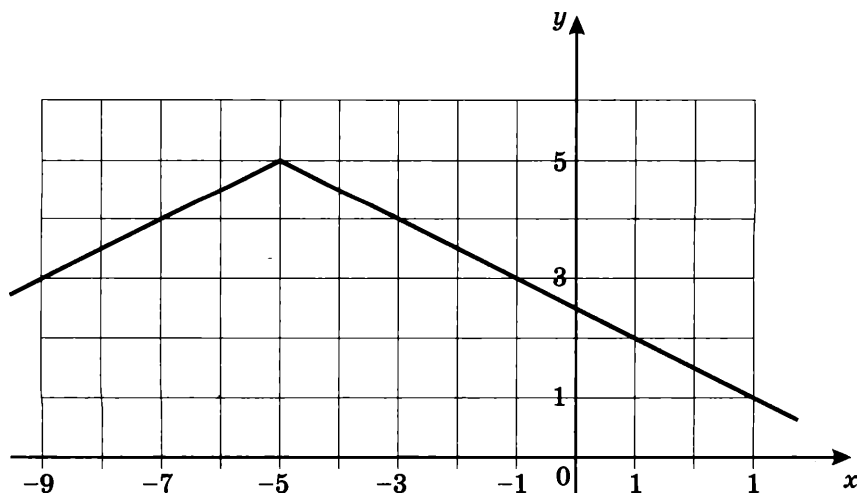
**8 |** На рисунке изображен график некоторой функции  $y = f(x)$ . Пользуясь рисунком, вычислите определенный интеграл  $\int_1^4 f(x)dx$ .



**9 |** Мотоциклист выехал из города со скоростью  $v_0 = 51$  км/ч и сразу начал разгоняться с постоянным ускорением  $a = 12$  км/ч<sup>2</sup>. Расстояние от мотоциклиста до города определяется по формуле  $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$ . Определите наибольшее время, в течение которого мотоциклист будет находиться в зоне функционирования сотовой связи, если оператор гарантирует покрытие на расстоянии не более чем 27 км от города. Ответ выразите в минутах.

**10 |** Бригада маляров красит забор длиной 280 м, ежедневно увеличивая норму покраски на одно и то же число метров. Известно, что за первый и последний день в сумме бригада покрасила 80 м забора. Сколько дней бригада красила весь забор?

**11 |** На рисунке изображен график функции  $f(x) = k|x + a| + b$ . Найдите  $f(7)$ .



**12 |** Найдите наибольшее значение функции  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 4x + 6)$

на отрезке  $[-11; -1]$ .

**13 |** а) Решите уравнение  $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$ .

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $[\log_3 4; \log_3 10]$ .

**14 |** Дан конус  $MAB$ . На окружности основания конуса отмечены точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  так, что  $AC = BC$ ,  $N$  — середина образующей  $MB$ .

а) Докажите, что  $\angle NOC = 90^\circ$ .

б) Найдите угол между прямыми  $AN$  и  $MC$ , если  $AM = 8$ ,  $AB = 2\sqrt{6}$ .

**15 |** Решите неравенство  $\frac{\log_x(x-5) - \log_x(13-x)}{\log_{x-3} x} < 0$ .

Укажите количество целых решений неравенства.

**16 |** Два брокера купили акции одного достоинства на сумму 3640 руб. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму 3927 руб. I брокер продал 75 % своих акций, а II — 80 %. При этом сумма от продажи акций, полученная II брокером, на 140 % превысила сумму, полученную I брокером. На сколько процентов возросла цена одной акции?

**17 |** В трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ )  $\angle A = 70^\circ$ ,  $\angle D = 20^\circ$ ,  $MN = 4$  — средняя линия трапеции,  $KF = 2$ , где  $K$  и  $F$  — соответственно середины  $BC$  и  $AD$ .

а) Докажите, что  $KF = \frac{1}{2}(AD - BC)$ .

б) Найдите длины оснований  $AD$  и  $BC$ .

**18 |** Решите неравенство

$$(4x^2 - x + \sqrt{7}) \cdot \frac{\log_{0.5}(x+1)}{x-a} > 0.$$

**19 |** Шесть различных натуральных чисел таковы, что никакие два из них не имеют общего делителя, большего 1.

а) Может ли сумма этих чисел быть равной 39?

б) Может ли сумма этих чисел быть равной 34?

в) Какова минимальная сумма?

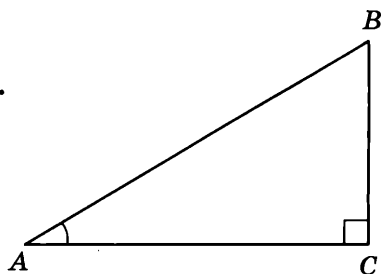
## Решение варианта 1

**1** | Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\operatorname{tg} \angle A = \frac{2}{\sqrt{21}}$ .

Найдите  $\sin \angle A$ .

Решение.

Так как  $\operatorname{tg} \angle A = \frac{2}{\sqrt{21}}$ ,  $\operatorname{ctg} \angle A = \frac{\sqrt{21}}{2}$ .



Известно, что  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ , тогда  $1 + \frac{21}{4} = \frac{1}{\sin^2 \angle A}$ , или

$\sin^2 \angle A = \frac{4}{25}$ , откуда  $\sin \angle A = \frac{2}{5} = 0,4$  (где  $\sin \angle A > 0$ ).

Ответ: 0,4.

**2** | Решение.

Достроим  $\triangle ABC$  до ромба  $ABDC$ .

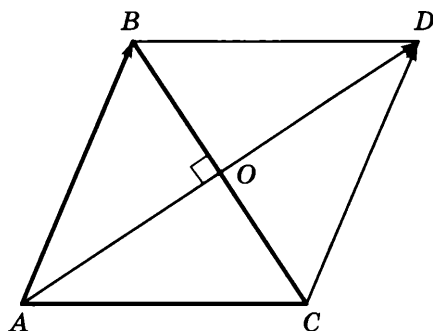
Тогда  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$ .

Но по правилу треугольника

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ .

Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AD$  и  $BC$ , тогда

$AO = \frac{1}{2}AD$ ,  $OC = \frac{1}{2}BC$ ,  $AC = 5\sqrt{3}$  (по условию).



Из прямоугольного  $\triangle AOC$  имеем

$$AO = \sqrt{AC^2 - OC^2} = \sqrt{(5\sqrt{3})^2 - \left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}(5\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2},$$

тогда  $AD = 2 \cdot AO = 15$ , т.е.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 15$ .

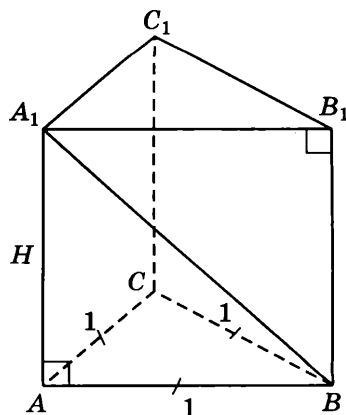
Ответ: 15.

**3** | Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  — правильная треугольная призма.  $AB = BC = AC = 1$ ,  $S_{\text{бок.}} = 3\sqrt{15}$ .  $A_1B$  — диагональ боковой грани.

Найдите длину  $A_1B$ .

Решение.

Пусть  $AA_1 = H$  — высота призмы. По условию  $\triangle ABC$  — равносторонний, тогда периметр  $P = 3AB = 3$ .





Известно, что  $S_{\text{бок.}} = P \cdot H = 3\sqrt{15}$ , или  $3H = 3\sqrt{15}$ , откуда  $H = \sqrt{15}$ .

Так как призма — правильная, то  $AA_1 \perp (ABC)$ , тогда  $AA_1 \perp AB$ , т. е.  $\triangle A_1AB$  — прямоугольный. По теореме Пифагора  $A_1B^2 = AB^2 + AA_1^2$ , или  $A_1B = \sqrt{1+15} = \sqrt{16} = 4$ .

Ответ: 4.

#### 4 | Решение.

Володя выучил всего  $50 - 7 = 43$  вопроса, тогда вероятность того, что на экзамене попадется выученный вопрос, равна

$$\frac{43}{50} = \frac{86}{100} = 0,86.$$

Ответ: 0,86.

#### 5 | Решение.

Количество вариантов, при которых выпадает ровно 5 орлов, равно

$$C_8^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5!}.$$

Количество вариантов, при которых выпадает ровно 4 орла, равно

$$C_8^4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!}.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } \frac{P(A)}{P(B)} &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5!} : \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5!} \cdot \frac{4!}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5} = \\ &= \frac{4 \cdot 4!}{5!} = \frac{4 \cdot 4!}{5 \cdot 4!} = \frac{4}{5} = 0,8. \end{aligned}$$

Ответ: 0,8.

#### 6 | Решение.

$$\sin^2 \frac{\pi(x-4)}{3} = \frac{1}{2}.$$

Известно, что  $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$ , тогда получим

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \cos \frac{2\pi(x-4)}{3} \right) = \frac{1}{2}, \text{ или } \cos \frac{2\pi(x-4)}{3} = 0, \quad \frac{2\pi(x-4)}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$4(x-4) = 3 + 6n, \text{ откуда } x = \frac{1}{4}(6n + 19), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При  $n = -4$  получим  $x = -\frac{5}{4} = -1,25$  — наибольший отрицательный корень уравнения.

Ответ:  $-1,25$ .

**7 | Решение.**

$$\left(7\frac{1}{2} + 2\frac{1}{3}\right) \cdot 1,2 = \frac{15}{2} \cdot 1,2 + \frac{7}{3} \cdot 1,2 = 15 \cdot 0,6 + 7 \cdot 0,4 = 9 + 2,8 = 11,8.$$

Ответ:  $11,8$ .

**8 | Решение.**

І способ

Вычисления можно значительно упростить, если заметить, что в данной функции можно выделить полный куб:

$$F(x) = x^3 + 24x^2 + 193x - \frac{5}{4} = (x^3 + 24x^2 + 192x + 512) + x - 512 - \frac{5}{4} = (x + 8)^3 + x - 512 - \frac{5}{4}.$$

$$\text{Тогда } F(-7) - F(-9) = (-7 + 8)^3 + (-7) - ((-9 + 8)^3 + (-9)) = 1 - 7 - (-1 - 9) = -6 + 10 = 4.$$

Ответ:  $4$ .

ІІ способ

$$f(x) = F'(x) = (x^3 + 24x^2 + 193x - \frac{5}{4})' = 3x^2 + 48x + 193 = 3(x^2 + 16x + 64) + 1 = 3(x + 8)^2 + 1.$$

$$\text{Тогда } S = \int_{-9}^{-7} (3(x+8)^2 + 1) dx = ((x+8)^3 + x) \Big|_{-9}^{-7} = (-7 + 8)^3 - 7 - (-(-9 + 8)^3 - 9) = 1 - 7 - (-1 - 9) = -6 + 10 = 4.$$

Ответ:  $4$ .

ІІІ способ

ІІ способ можно еще упростить, если заметить, что график функции  $f(x) = 3(x + 8)^2 + 1$  получен сдвигом графика функции  $y = 3x^2 + 1$  на 8 единиц влево вдоль оси  $Ox$ . Следовательно, искомая площадь фигуры будет равна площади фигуры, ограниченной графиком функции  $y = 3x^2 + 1$  и отрезком  $[-1; 1]$  оси  $Ox$ .

Учитывая симметрию графика относительно оси  $Oy$ , имеем

$$S = \int_{-1}^1 (3x^2 + 1)dx = 2 \int_0^1 (3x^2 + 1)dx = 2 \left( 3 \cdot \frac{x^3}{3} + x \right) \Big|_0^1 = 2(x^3 + x) \Big|_0^1 = 2(1^3 + 1) = 4.$$

Ответ: 4.

#### IV способ

Этот способ является самым длинным и технически сложным.

$$\begin{aligned} S &= F(-7) - F(-9) = ((-7)^3 + 24 \cdot (-7)^2 + 193 \cdot (-7) - \frac{5}{4}) - ((-9)^3 + \\ &+ 24 \cdot (-9)^2 + 193 \cdot (-9) - \frac{5}{4}) = (-7)^3 - (-9)^3 - 24 \cdot ((-7)^2 - (-9)^2) + \\ &+ 193 \cdot ((-7) - (-9)) = (9^3 - 7^3) - 24 \cdot (9^2 - 7^2) + 193 \cdot (9 - 7). \end{aligned}$$

Далее, применив формулы

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ и } a^2 - b^2 = (a - b)(a + b), \text{ получим}$$

$$\begin{aligned} S &= (9 - 7)(9^2 + 9 \cdot 7 + 7^2) - 24 \cdot (9 - 7)(9 + 7) + 193 \cdot 2 = \\ &= 2 \cdot (81 + 63 + 49) - 24 \cdot 2 \cdot 16 + 386 = 386 - 768 + 386 = \\ &= 772 - 768 = 4. \end{aligned}$$

Ответ: 4.

*Замечание 1.* Подавляющая часть абитуриентов решают этим способом или находят  $F(-7)$  и  $F(-9)$ , а затем  $F(-7) - F(-9)$ , что еще более усложняет решение.

*Замечание 2.* Наконец, самый простой способ (если ученик не может выполнить задание) можно применить, учитывая масштаб на рисунке и тот факт, что ответом является целое число. На глаз можно определить, что  $S = 4$ .

## 9 | Решение.

Задача сводится к решению уравнения  $\alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_B - T_{\Pi}}{T - T_{\Pi}} = 96$  при

$$\text{заданных значениях } c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}, \gamma = 42 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{C}}, \alpha = 0,4,$$

$$T_{\Pi} = 18^\circ\text{C}, T_B = 72^\circ\text{C} \text{ и } m = 1,2 \text{ кг/с:}$$

$$0,4 \cdot \frac{4200 \cdot 1,2}{42} \log_2 \frac{72 - 18}{T - 18} = 96, \text{ или } 4 \cdot 12 \cdot \log_2 \frac{54}{T - 18} = 96, \text{ или}$$

$$\log_2 \frac{54}{T - 18} = 2, \text{ или } \frac{54}{T - 18} = 4, T - 18 = \frac{54}{4} = 13,5, T = 31,5 (^\circ\text{C}).$$

Ответ: 31,5.

### 10 | Решение.

Пусть было взято  $x$  граммов 30 %-го раствора, а 10 %-го —  $y$  граммов, тогда  $x + y = 600$ . Так как первый раствор 30 %-й, то в  $x$  граммах этого раствора содержится  $0,3x$  грамма кислоты. Аналогично в  $y$  граммах 10 %-го раствора содержится  $0,1y$  грамма кислоты.

В полученной смеси по условию задачи содержится  $600 \cdot 0,15 = 90$  г кислоты, следовательно, получим уравнение  $0,3x + 0,1y = 90$ , или  $3x + y = 900$ .

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 600, \\ 3x + y = 900. \end{cases}$$

Вычитая из II уравнения I, получим  $2x = 900 - 600$ , откуда  $x = 150$ , тогда  $y = 600 - 150 = 450$ .

Ответ: 150; 450.

### 11 | Решение.

Найдем значение  $k$ , учитывая, что гипербола проходит через точку  $A(3; 1)$ . Значит,  $f(x) = y = 1$ ,  $x = 3$ , тогда  $k = xy = 3 \cdot 1 = 3$ .

Следовательно,  $f(x) = \frac{3}{x}$ . Поскольку  $a = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона

прямой к положительному направлению оси  $Ox$ , то  $a = \frac{4}{2} = 2$ .

Остается найти значение  $b$ .

Заметим, что  $g(3) = 1$ , тогда  $2 \cdot 3 + b = 1$ , откуда  $b = 1 - 6 = -5$ .

Значит, прямая имеет вид  $y = 2x - 5$ .

Решая уравнение  $\frac{3}{x} = 2x - 5$ , получим  $2x^2 - 5x - 3 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -0,5$ . Следовательно,  $x = -0,5$  — абсцисса точки  $B$ .

Ответ:  $-0,5$ .

### 12 | Решение.

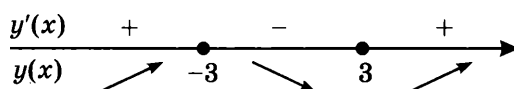
$$y = x^3 - 27x + 15.$$

Найдем производную данной функции:

$$y' = (x^3 - 27x + 15)' = 3x^2 - 27.$$

Найдем стационарные точки из уравнения  $y' = 0$  или  $3x^2 - 27 = 0$ ,  $x^2 = 9$ ,  $x_{1,2} = \pm 3$ .

На числовой прямой определим знаки производной и изобразим поведение функции:



$x = -3$  — точка максимума функции, так как при переходе через нее производная меняет знак с «+» на «-».

Ответ:  $-3$ .

### 13 | Решение

а)  $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ .

Так как  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\cos x \sin x}$ , то уравнение запи-

шется в виде  $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{\cos x \sin x}$ .

Но  $\cos x \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x$ , тогда получим

$$\sqrt{2}(\sin x + \cos x) = \frac{2}{\sin 2x}. \quad (1)$$

Пусть  $\sin x + \cos x = y$ , тогда  $y^2 = 1 + \sin 2x$ , откуда  $\sin 2x = y^2 - 1$ . Следовательно, уравнение (1) примет вид

$$\sqrt{2}y = \frac{2}{y^2 - 1}, \text{ или } \sqrt{2}y^3 - \sqrt{2}y - 2 = 0. \quad (2)$$

Разделив обе части уравнения (2) на  $\sqrt{2}$ , имеем  $y^3 - y - \sqrt{2} = 0$ , или

$$y^3 - 2y + y - \sqrt{2} = 0. \quad (3)$$

Решим уравнение (3) способом группировки:

$$y(y^2 - 2) + (y - \sqrt{2}) = 0, \text{ или } y(y - \sqrt{2})(y + \sqrt{2}) + (y - \sqrt{2}) = 0, \text{ или}$$

$$(y - \sqrt{2})(y^2 + \sqrt{2}y + 1) = 0, \text{ откуда } y = \sqrt{2}.$$

Уравнение  $y^2 + \sqrt{2}y + 1 = 0$  не имеет действительных корней, так как  $D = -2 < 0$ .

Если  $y = \sqrt{2}$ , то, учитывая замену, получим

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}. \quad (4)$$

$$\text{Но } \sin x + \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos x = 2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) =$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Следовательно, уравнение (4) примет вид

$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}, \text{ или } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \text{ откуда}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n, \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{б) } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right], \quad x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Корни, принадлежащие отрезку, найдем с помощью двойного неравенства.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq \frac{3\pi}{2}, \text{ или } -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} + 2n \leq \frac{3}{2}, \text{ или } -\frac{3}{4} \leq 2n \leq \frac{5}{4}, \text{ или}$$

$$-\frac{3}{8} \leq n \leq \frac{5}{8}, \text{ откуда } n = 0, \text{ тогда } x = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: а)  $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{4}$ .

**Замечание 1.** Данное уравнение можно решить иначе, например, записать уравнение (1) в виде

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) = \frac{1}{\sin 2x}, \text{ или } \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x = \frac{1}{\sin 2x}, \text{ или}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \sin x + \cos \frac{\pi}{4} \cos x = \frac{1}{\sin 2x}, \text{ или } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin 2x = 1, \text{ откуда}$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -1 \text{ и } \sin 2x = -1, \text{ или } \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ и } \sin 2x = 1 \text{ и т. д.}$$

**Замечание 2.** Так как  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 2$  и  $\sqrt{2}(\sin x + \cos x) =$

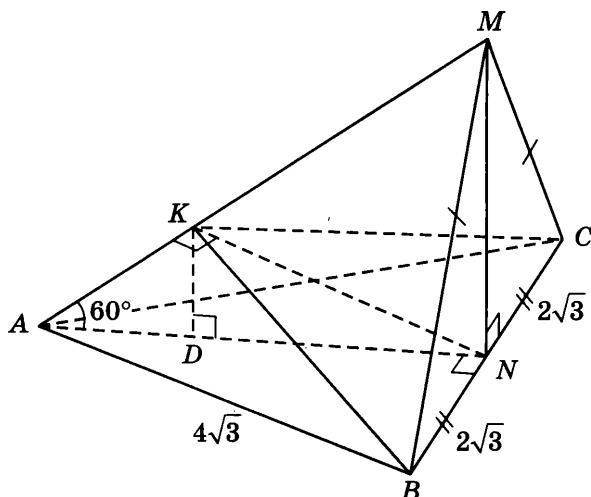
$$= 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 2, \text{ то } \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2, \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1, \end{cases} \text{ и т. д.}$$

## 14 | Решение

а) Так как  $MB = MC$ , то  $\triangle MBC$  — равнобедренный. По условию  $(MBC) \perp (ABC)$ . Проведем апофему (высоту боковой грани  $MBC$ ), тогда  $MN$  — медиана, значит,  $BN = CN = 2\sqrt{3}$ .

Углом между  $AM$  и плоскостью основания пирамиды будет угол между  $AM$  и ее проекцией  $AN$ , т. е.  $\angle MAN = 60^\circ$ .

В плоскости  $AMN$  проведем  $NK \perp AM$ .



Поскольку  $AN \perp BC$  и  $AN$  — проекция наклонной  $AM$ , то  $AM \perp (BKC)$  (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

В прямоугольном  $\triangle MAN$   $\angle MAN = 60^\circ \Rightarrow \angle AMN = 30^\circ$ , тогда  $AN = \frac{1}{2}AM$ .

Из  $\triangle ABN$  найдем  $AN = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{48 - 12} = 6$ .

Значит,  $AM = 2AN = 12$ .

Из  $\triangle AKN$ , где  $AN = 6$ ,  $\angle KAN = 60^\circ$ ,  $AK \perp KN$ , имеем

$\angle ANK = 30^\circ \Rightarrow AK = \frac{1}{2}AN = 3$ , тогда  $AK : AM = 3 : 12 = 1 : 4$ .

б) Найдем объем пирамиды  $KABC$  с основанием  $ABC$ :

$V_{KABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot KD$ , где  $KD$  — высота.

Заметим, что  $AD : AN = AK : AM = 1 : 4$  и  $KD = \frac{1}{4}MN$ .

Из  $\triangle AMN$  имеем  $MN = AM \cdot \sin 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ .

Значит,  $KD = \frac{1}{4} \cdot 6\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

$S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$  (площадь правильного треугольника), где  $a = AB =$

$= 4\sqrt{3}$ . Тогда  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} \cdot (4\sqrt{3})^2 \sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ .

$$\text{Итак, } V_{KABC} = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 18.$$

Теперь найдем объем пирамиды  $MAVC$ :

$$V_{MAVC} = \frac{1}{3} S_{\triangle AVC} \cdot MN = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 72.$$

Следовательно,  $V_{MBCK} = V_{MAVC} - V_{KABC} = 72 - 18 = 54$ .

Ответ: б) 54.

### 15 | Решение.

$$(3 + 2x - 8x^2) \log_3 \left( 1 - \frac{3}{x^2 + x + 3} \right) \leq 0.$$

Поскольку  $3 + 2x - 8x^2 = -8 \left( x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} \right) = -8 \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{3}{4} \right)$ , то

$$\text{получим } -8 \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{3}{4} \right) \log_3 \left( 1 - \frac{3}{x^2 + x + 3} \right) \leq 0.$$

Теперь заменим логарифм на равносильное по знаку выражение, учитывая ОДЗ:

$$\begin{cases} -8 \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{3}{4} \right) (3-1) \left( 1 - \frac{3}{x^2 + x + 3} - 1 \right) \leq 0, \\ 1 - \frac{3}{x^2 + x + 3} > 0; \\ \begin{cases} -16 \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{3}{4} \right) \left( -\frac{3}{x^2 + x + 3} \right) \leq 0, \\ x^2 + x + 3 - 3 > 0, \end{cases} \end{cases}$$

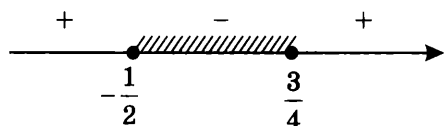
где  $x^2 + x + 3 > 0$  при всех  $x \in R$ , так как  $D < 0$  и  $a = 1 > 0$ .

$$\begin{cases} \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{3}{4} \right) \cdot \frac{1}{x^2 + x + 3} \leq 0, \\ x(x+3) > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{3}{4} \right) \leq 0, \\ x(x+3) > 0. \end{cases} \quad (1)$$

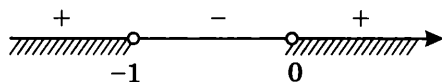
$$1) \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( x - \frac{3}{4} \right) \leq 0, \quad x \in \left[ -\frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right].$$





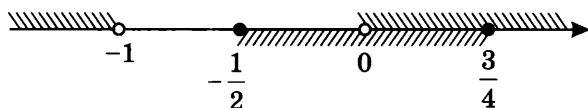
$$x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{4}.$$

$$2) x(x+1) > 0, x_1 = 0, x_2 = -1.$$



$$x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty).$$

Тогда решением системы (1), а значит, и исходного неравенства будет пересечение (общая часть) полученных множеств.



$$x = -1/2, 0 < x \leq \frac{3}{4}.$$

Ответ:  $\left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left(0; \frac{3}{4}\right]$ .

## 16 | Решение

Имеем арифметическую прогрессию, где  $d = 500$ ,  $a_1 = 1000$ .

Пусть  $x$  м — глубина колодца, тогда сумма первых  $x$  членов арифметической прогрессии будет равна

$$\frac{2a_1 + (x-1)d}{2} \cdot x = \frac{2 \cdot 1000 + (x-1) \cdot 500}{2} \cdot x = (1000 + (x-1) \cdot 250)x =$$

$$= (1000 + 250x - 250)x = 250x^2 + 750x.$$

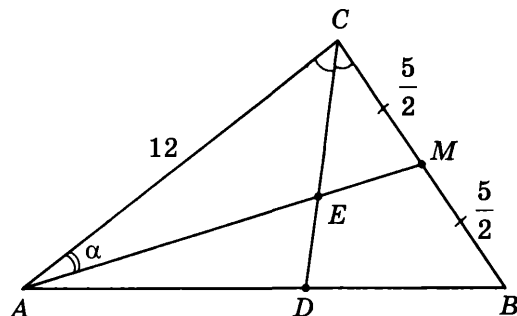
Согласно условию задачи, кроме указанной суммы было уплачено еще 8000 руб., а средняя стоимость 1 м составила 5250 руб.

Учитывая, что глубина колодца свыше 12 м, получим уравнение  $250x^2 + 750x + 8000 = 5250x$ , где  $x > 12$ , или  $250x^2 - 4500x + 8000 = 0$ .

Разделив обе части полученного уравнения на 250, имеем  $x^2 - 18x + 32 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 16$ ,  $x_2 = 2$ . Поскольку  $x > 12$ , подходит корень  $x = 16$ , т. е. глубина колодца 16 м.

Ответ: 16.

**17** | Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  
 $AC = 12$ ,  $BC = 5$ ,  $AM$  — медиана,  
 $CD$  — биссектриса.  $E$  —  
 точка пересечения  $AM$  и  $CD$ .



а) Докажите, что  $\frac{AE}{EM} = \frac{24}{5}$ .

б) Найдите  $S_{\triangle CEM}$ .

Решение.

а) Так как  $AC = 12$ ,  $BC = 5$  и  $\angle ACB = 90^\circ$ , то  $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ .  
 По условию задачи  $CD$  — биссектриса, тогда  $\angle ACD = \angle BCD = 45^\circ$ .  
 Пусть  $\angle CAM = \alpha$ . Поскольку  $AM$  — медиана  $\triangle ABC$ , то  $CM = MB = \frac{5}{2}$ .  
 Из  $\triangle ACM$  имеем  $AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{144 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{601}}{2}$ , тогда

$$\cos \alpha = \frac{AC}{AM} = \frac{24}{\sqrt{601}}.$$

По свойству биссектрисы  $\frac{AC}{CM} = \frac{AE}{EM} = \frac{12}{2,5} = \frac{24}{5}$ . Значит,  $\frac{AE}{EM} = \frac{24}{5}$ ,

ч. т. д.

б) Так как  $AM = AE + EM = \frac{\sqrt{601}}{2}$  и  $\frac{AE}{EM} = \frac{24}{5}$  (по доказанному),

то получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{AE}{EM} = \frac{24}{5}, \\ AE + EM = \frac{\sqrt{601}}{2}. \end{cases}$$

Пусть  $AE = x$ ,  $EM = y$ . Имеем  $\begin{cases} 5x = 24y, \\ y = \frac{\sqrt{601}}{2} - x; \end{cases}$

$$5x = 24 \cdot \left( \frac{\sqrt{601}}{2} - x \right), \text{ или } 5x = 12\sqrt{601} - 24x, \text{ или } 29x = 12\sqrt{601},$$

$$\text{откуда } x = \frac{12\sqrt{601}}{29}.$$

Для нахождения искомой площади  $\triangle CEM$  остается найти длину  $CE$ . Из  $\triangle AEC$  по теореме косинусов имеем

$$CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2AC \cdot AE \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

$$CE^2 = 12^2 + \left( \frac{12\sqrt{601}}{29} \right)^2 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{12\sqrt{601}}{29} \cdot \frac{24}{\sqrt{601}},$$

$$CE^2 = 12^2 \cdot \left( 1 + \frac{601}{841} \right) - \frac{6912}{29}, \quad CE^2 = 144 \cdot \frac{1442}{841} - \frac{6912}{29} = \frac{7200}{841}, \text{ откуда}$$

$$CE = \frac{60\sqrt{2}}{29}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle CEM} = \frac{1}{2} CE \cdot CM \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{60\sqrt{2}}{29} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{75}{29}.$$

Ответ: б)  $\frac{75}{29}$ .

**18 | Решение.**

$$(x^2 - 4|x| + a)^2 + 2(x^2 - 4|x| + a) + 2 = \cos \frac{6\pi}{a}.$$

Запишем уравнение в виде

$$(x^2 - 4|x| + a)^2 + 2(x^2 - 4|x| + a) + 1 + 1 - \cos \frac{6\pi}{a} = 0, \text{ или}$$

$$(x^2 - 4|x| + a + 1)^2 + \left( 1 - \cos \frac{6\pi}{a} \right) = 0.$$

$$\text{Заметим, что } (x^2 - 4|x| + a + 1)^2 \geq 0, \quad 1 - \cos \frac{6\pi}{a} \geq 0.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 4|x| + a + 1 = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - \cos \frac{6\pi}{a} = 0. & (2) \end{cases}$$

Уравнение (1) представим в виде

$$|x|^2 - 4|x| + 4 = 3 - a, \text{ или } (|x| - 2)^2 = 3 - a, \text{ откуда находим}$$

$$|x| = 2 \pm \sqrt{3 - a}.$$

$$\text{Из (2) имеем } \cos \frac{6\pi}{a} = 1, \quad \frac{6\pi}{a} = 2\pi n, \text{ т. е. } a = \frac{3}{n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Итак, имеем } \begin{cases} a \leq 3, \\ |x| = 2 \pm \sqrt{3-a}, \\ a = \frac{3}{n}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Уравнение  $|x| = 2 \pm \sqrt{3-a}$  имеет ровно два корня, если  $\sqrt{3-a} = 0$ , или  $2 - \sqrt{3-a} < 0$ , т. е. при  $a = 3$ , или  $a < -1$ .

Значит,  $a \in (-\infty; -1) \cup \{3\}$ .

Так как  $a = \frac{3}{n}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , то  $a = \pm 3; \pm \frac{3}{2}; \pm 1, \dots$

Тогда  $a = \pm 3, a = -\frac{3}{2}$ .

Ответ:  $\pm 3; -\frac{3}{2}$ .

### 19 | Решение.

а) Можно, например, купить 17 коричневых и 22 зеленых карандаша:  $16 \cdot 19 + 20 \cdot 15 = 604$  (руб.).

б) Дешевле всего 39 карандашей будут стоить, если купить наибольшее возможное количество зеленых карандашей и наименьшее возможное количество коричневых, т. е. если купить 17 коричневых и 22 зеленых, учитывая, что если коричневых меньше 17, то зеленых больше 22.

В этом случае разность между числом коричневых и зеленых карандашей больше, чем 5. Тогда стоимость покупки равна  $17 \cdot 19 + 22 \cdot 15 = 653$  (руб.), что больше, чем имеющаяся сумма 629 руб.

в) Пусть  $a$  и  $b$  — число зеленых и коричневых карандашей соответственно.

Тогда получим

$$\begin{cases} 19b + 15a \leq 629, & (1) \\ |b - a| \leq 5, & (2) \\ b, a = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Пусть  $b + a = k$ , откуда  $a = k - b$ .

В этом случае неравенство (1) примет вид  $19b + 15(k - b) \leq 629$ , или  $4b + 15k \leq 629$ , откуда  $b \leq \frac{1}{4}(629 - 15k)$ .

Следовательно, неравенство (2) преобразуется к виду  $-5 \leq b - a \leq 5$ , или  $-5 \leq b - (k - b) \leq 5$ , или  $k - 5 \leq 2b \leq 5 + 5$ , откуда

$$\frac{1}{2}(k - 5) \leq b \leq \frac{1}{2}(k + 5), b = 0, 1, \dots, k.$$

Значит,  $\frac{1}{2}(k - 5) \leq \frac{1}{4}(629 - 15k)$ , или  $2(k - 5) \leq 629 - 15k$ ,

$$17k \leq 639, \text{ т. е. } k \leq 37\frac{10}{17}.$$

Таким образом, можно купить не более 37 карандашей.

Проверим, возможен ли случай, когда  $k = 37$ .

При  $b = 17$ ,  $a = 20$  имеем  $17 \cdot 19 + 20 \cdot 15 = 623 < 629$ .

Следовательно, наибольшее число карандашей равно 37.

*Ответ:* а) да; б) нет; в) 37.

# ОТВЕТЫ К ЧАСТЯМ 1–3

1.  $\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ . 2.  $\frac{\pi n}{3}; \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ . 3. 2. 4.  $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}\right)$ . 5. 15 см, 8 см.
6.  $\frac{1}{\sqrt{a+1}}$ . 7.  $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}; \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$ . 8. 1. 9. (0; 1). 10. 5 см.
12. (1; +∞). 13.  $(2\sqrt{3}; 2), (-2\sqrt{3}; -2)$ . 14.  $f_{\text{наиб.}} = 42\frac{1}{2}; f_{\text{наим.}} = 1\frac{7}{8}$ .
15. 6 м<sup>2</sup>. 17.  $(-\infty; 0)$ . 18.  $(1; 2\sqrt{2}), (-1; -2\sqrt{2})$ . 19.  $f_{\text{наиб.}} = 115,5;$   
 $f_{\text{наим.}} = -1,5$ . 20. 0,6. 21. 0. 22.  $(-\infty; -3]$ . 23. 0,75. 24. 45°. 25. 24.
26. 0. 27. [2; 3]. 28. 0,25. 29.  $(-0,2; 06)$ . 30. 8. 31.  $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3},$   
 $n \in \mathbb{Z}$ . 32. (2; 3). 33.  $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ . 34.  $(-1; 2)$ . 35.  $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{17}{12}$ .
36.  $\frac{\pi}{2} + \pi n; \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{3}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ . 37.  $(-1; 1), (1; 1)$ . 38.  $\pm 1$ . 39.  $[-4; 3]$ .
40.  $F(x) = -\frac{1}{2(2x+5)} + 1$ . 41.  $y = x \ln 2 + 3 \ln 2 + 1$ . 42. -16.
43.  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n; (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ . 44.  $(-\infty; -16) \cup (-3; +\infty)$ . 45. В круг  
радиуса  $R = 7\sqrt{2}$  см. 46.  $y = 3x$ . 47. -0,25. 48.  $(-\infty; 2) \cup (6; +\infty)$ .
49.  $\pi n; \arctg 3 + \pi n$ . 50.  $10\sqrt{2}$  дм,  $10\sqrt{2}$  дм. 51. 1 : 2.
52.  $(-3; -1) \cup (3; +\infty)$ . 53.  $2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ . 54.  $\frac{\pi+2}{4}$ .
55.  $H = 4R; r = \sqrt{2R}$ . 56.  $(-10; -4) \cup (6; +\infty)$ . 57.  $\frac{\pi}{4} + \pi n, 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,$   
 $n \in \mathbb{Z}$ . 58.  $\frac{\pi+2}{2}$ . 59.  $\frac{d^3}{3(1+\cos\alpha)\sin\alpha/2}$ . 60.  $\pi + 4\pi n, (-1)^{n+1} \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$   
 $n \in \mathbb{Z}$ . 61.  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ . 62.  $(4; 1), \left(\frac{121}{64}; \frac{169}{64}\right)$ . 63.  $\frac{\sqrt{3}m^2}{27\sin^2\alpha\cos^2\alpha}$ .
64.  $\frac{\pi}{2} + \pi n, \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ . 65.  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$ . 66.  $(-1; 1)$ . 67. 14.

68.  $(-1; 1) \cup (3; 5)$ . 69.  $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 70.  $\frac{20}{\sqrt{3}}$ . 71. 88.

72.  $(-\infty; -6] \cup [4; +\infty)$ . 73.  $\frac{\pi n}{2}$ ,  $\frac{\pi n}{5}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 74. 1. 75.  $(4; 3)$ .

76.  $\frac{1}{2}(6 - \sqrt{2})$ . 78.  $\frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$ . 79.  $\left(\frac{1}{64}; -2\right)$ ,  $(16; 3)$ . 80.  $\sqrt{2}$ . 82.  $9\sqrt{5}$  см.

83.  $7/25$ . 84.  $(-3; 3) \cup (3; 4]$ . 85. 20 %. 86.  $\frac{3}{8}a^2$ . 87. 0,28.

88.  $[-5/3; -1)$ . 89. 25. 90.  $m^2$ . 91. 6 км/ч. 93. 25. 94. 15. 96. 14.

97. 0. 98.  $(3; 1)$ . 99.  $4\sqrt{3}$ . 100.  $-\frac{4}{\sqrt{3}}$ . 101.  $(9; 5)$ . 102.  $21\frac{1}{3}$ .

103.  $78\frac{6}{13}\pi$  см<sup>3</sup>. 104.  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = 1/9$ . 105.  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 6$ ,  $b_3 = 18$ .

106.  $\frac{2(a-1)}{2-a}$ . 107.  $18\pi$  см<sup>3</sup>. 108.  $b_1 = 341$ . 109. 66 см. 110.  $\frac{1}{3}$ .

111.  $a = -10$ ,  $a = 2$ . 112.  $\frac{1}{2}a^3\sqrt{2}$ . 113.  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = -10$ .

114.  $1 + \frac{\sqrt{ab}}{a-b}$ . 115.  $\frac{3\sqrt{3}}{8}m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha$ . 116.  $x = 15$ . 117.  $x - 1$ .

118. Квадрат со стороной 3 см. 119.  $19/3$ . 120.  $\left[-\frac{5}{3}; -1\right]$ . 121. 66.

122. 7. 123.  $x = 100$ . 124. 48. 125. 15. 126.  $x = 1$ . 127.  $25/6\pi$ . 128. 3.

129.  $x = 32$ . 130.  $3\sqrt{2}$ . 131.  $1/8$ . 132.  $x = 5$ . 133. 25. 134.  $x = -1,5$ .

135. 80. 136.  $x = 83$ . 137.  $x_1 = 90^\circ$ ;  $x_2 = 120^\circ$ . 138.  $-1,5$ . 139.  $75$  см<sup>2</sup>.

140.  $x = 2$ . 141. 0,28. 142.  $x = 3$ . 143. 3. 144.  $-1$ . 145. 4. 146.  $x = 40$ .

147.  $x = 10$ . 148. 0,8. 149. 4. 150. 2. 151. 2,3. 152.  $-0,25$ . 153.  $x = 4$ .

154.  $-12$ . 155.  $-1$ . 156. 1. 157.  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 0,25$ . 158.  $x = 9$ . 159. 9.

160. 1,6. 161.  $x = 8$ . 162. 0,75. 163.  $x = 2$ . 164.  $x = 2$ . 165.  $x = -6$ .

166. 2. 167.  $x = 1,4$ . 168.  $72$  см<sup>2</sup>. 169.  $-9$ . 170. 0. 171. 5. 172. 5.

173. 0,8. 174. 2,25. 175. 0,5. 176. 1. 177. 2,5. 178. 11. 179.  $\sqrt{2}/10$ .

180. 84. 181. 10. 182. 4. 183. 32. 184. 4. 185. 3. 186. 36 и 4.

187.  $x = 6$ . 188. 36. 189. 2. 190.  $-7$ . 191. 3. 192.  $45^\circ$ . 193. 98,5.

194.  $x_{1,2} = \pm 5$ . 195.  $12\sqrt{3}$ . 196.  $[-0,5; 0) \cup (0; +\infty)$ . 197.  $(1; 1)$ .

198.  $\frac{2}{3}\pi n$ ,  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 199.  $3\frac{1}{12}$ . 200.  $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ .

201.  $b_1 = 6$ ;  $q = 1/3$ . 202.  $16\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>. 203.  $(-1; 0) \cup (0; 2] \cup [3; +\infty)$ .

204.  $\left(\frac{5}{6}; 6\right)$ . 205.  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ ;  $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in Z$ . 206.  $6 - 4 \ln 2$ .

207.  $(1; 3) \cup (3; 5)$ . 208.  $b_1 = 3$ ,  $b_2 = 1,5$ ,  $b_3 = 0,75$ . 209. 7,5 см.

210.  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4$ . 211. 3. 212.  $4 - 3 \ln 3$ . 213.  $(2; 3]$ . 214.  $30^\circ$ . 215. 41.

216. 8. 217.  $x = 3$ . 218.  $-2,5$ . 219.  $8 \ln 2$ . 220.  $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ . 221. 6. 222.  $-2$ .

223. 3 км/ч. 224.  $\left(\pi n, \frac{\pi}{4} - \pi n\right), \left(\frac{\pi}{4} + \pi n, -\pi n\right)$ ,  $n \in Z$ . 225.  $(-\infty; 0) \cup [2; 3]$ .

226.  $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in Z$ . 227.  $1/28$ . 228.  $\left(-\infty, \log_2 \frac{1 + \sqrt{13}}{6}\right)$ . 229. 0.

230. 13 км/ч. 231.  $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} - 2\pi n\right)$ ,  $n \in Z$ . 232.  $(8/3; 3]$ . 233. 2,5.

234.  $7/4$ . 235.  $(-\infty; 0,5]$ . 236. 1,5. 237. 10. 238. 0,5. 239.  $x = -58$ .

240. 12. 241. 10. 242. 4. 243. 1. 244. 3,5. 245. 1,5. 246.  $x = 6$ . 247. 0.

248. 6. 249. 2. 250.  $(-4; 1) \cup (2; 4)$ . 251. 25. 252. 35. 253.  $(2; 0)$ ,  $(0; 2)$ .

254.  $x = 1$ . 255.  $[0; 3]$ . 256.  $x = 14$ . 257.  $50 = 25 + 25$ . 258. 28 м.

259. 5. 260.  $(2; 3)$ ,  $(3; 2)$ . 261.  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = 1$ . 262.  $x = -2$ . 263.  $x = -2$ .

264.  $3 = 2 + 1$ . 265. 26 см. 266.  $60^\circ$ . 267. 2; 5; 8. 268. 1.

269.  $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{3}$ . 270.  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in Z$ . 271.  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in Z$ .

272. 52. 273.  $\bar{a} \{4; -2; -6\}$ . 274. 120. 275. 1,6.

276.  $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x + \frac{47}{3}$ . 277.  $(-\infty; -1) \cup (3; 5) \cup (5; +\infty)$ .

278.  $\frac{\pi}{4} + \pi n, \arctg 3 + \pi n$ ,  $n \in Z$ . 279.  $32\sqrt{21}$  см<sup>2</sup>. 280.  $(3; 1)$ ,  $(-3; -1)$ ,

$(1; 3)$ ,  $(-1; -3)$ . 281.  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -5$ . 282.  $[-3; 0] \cup [3; +\infty)$ . 283.  $x = 2$ .

284.  $\operatorname{ctg}^6 \alpha$ . 285.  $E(y) = [5,5; 6,5]$ . 286.  $45^\circ$ . 287.  $(-1; -2), (2; 1)$ .

288.  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 4$ . 289.  $(-2; 0) \cup (1; +\infty)$ . 290.  $x = 0$ . 291.  $-\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$ .

292.  $\left[\frac{8}{3}; \frac{10}{3}\right]$ . 293. 192. 294. 16. 295. 5. 296. 64. 297.  $x = 1$ .

298.  $x = 5$ . 299. 8. 300. 10. 301. 2. 302. 3. 303. 5. 304.  $-1/3$ .

305.  $x = 100$ . 306. 1. 307. 6 и 54. 308.  $2 \operatorname{tg} 2\alpha$ . 309.  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = 3$ .

310.  $x = 8$ . 311. 3. 312. 3. 313. 42 см. 314. 24. 315. 0. 316.  $x = 21$ .



- 317.**  $x = 25$ . **318.** 5. **319.**  $3\sqrt{2}$ . **320.** 60. **321.**  $x = 2$ . **322.**  $x = 0,5$ .  
**323.** 190. **324.**  $-0,5$ . **325.**  $x = 1; 2; 4$ . **326.**  $0,5$ . **327.**  $26 = 13 + 13$ .  
**328.**  $x = 0,3$ . **329.** 103. **330.** 6; 8. **331.**  $x_1 = 1, x_2 = 2$ . **332.**  $x = 36$ .  
**333.** 4. **334.** 1. **335.**  $x = -6$ . **336.**  $x = 3$ . **337.** 12 и 12. **338.**  $x = 63$ .  
**339.** 22. **340.**  $3\sqrt{3}(\sqrt{2}+1)H^2$ . **341.**  $x_1 = 16, x_2 = 96$ . **342.**  $(-4; 6)$ ,  
 $(4; -6)$ . **343.**  $x_1 = 3, x_2 = -4/3$ . **344.**  $\left(-\sqrt{3}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(1; \frac{7}{5}\right) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$ .  
**345.**  $x = 1$ . **347.**  $x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, n \in Z$ . **348.**  $4/3$ . **349.**  $b_1 = 6, q = \frac{1}{3}$ .  
**350.** 21,9. **351.**  $x_1 = \frac{1}{16}, x_2 = 1$ . **352.**  $(1; 4), (4; 1)$ . **353.**  $x_1 = 1 - \sqrt{2}$ ,  
 $x_2 = 1$ . **354.**  $[0; +\infty)$ . **355.**  $x = 1$ . **357.**  $[-4; -\pi] \cup [0; \pi]$ . **358.** 1. **359.** 2;  
10; 50 или 50; 10; 2. **360.** 7. **361.** 1; 2; 5. **362.** 8. **363.**  $x = 1$ . **364.**  
 $225^\circ; 315^\circ$ . **365.**  $x = 10$ . **366.** 6. **367.** 7. **368.**  $y_{\min} = -\frac{1}{e}$  при  $x = \frac{1}{e}$ .  
**369.** 1. **370.**  $256 \text{ см}^2$ . **371.**  $x = 5$ . **372.** 1. **373.**  $x = 4$ . **374.** 1.  
**375.**  $x = 2\sqrt{2}$ . **376.**  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ . **377.** 3. **378.**  $y_{\max} = y(-2) = 4/e^2$ ,  
 $y_{\min} = y(0) = 0$ . **379.** 19. **380.**  $0,5$ . **381.**  $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ .  
**382.**  $F(x) = 2\sqrt{x} - 4$ . **383.**  $(0,001; 10)$ . **384.**  $m = -\frac{27}{4}$ . **385.**  $(3; 2), (2; 3)$ .  
**386.**  $(-\infty; -1) \cup (-1; 4/3] \cup [6; +\infty)$ . **387.**  $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ . **388.**  $3\pi/4$ .  
**389.**  $b_3 = 0,125$ . **390.** 9,5 см. **391.**  $x \neq (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$ .  
**392.**  $F(x) = 3x^4 + 3x^3 - 11x - 6$ . **393.**  $(10; +\infty)$ . **394.** При  $a = -15,5$ .  
**395.**  $(3; 5), (5; 3)$ . **396.**  $\left[-\infty; \frac{3}{2}\right]$ . **397.**  $x = 1$ . **398.**  $-3\sqrt{2}$ . **399.**  $0,4$ .  
**400.**  $64 \text{ см}^2$ . **401.**  $\sqrt{66}/2$ . **402.**  $y = -x - 1$ . **403.**  $\left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right]$ ,  
 $n \in Z$ . **404.**  $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; 2)$ . **405.**  $(9; 1)$ . **406.** 3 м; 6 м. **407.**  $x_1 = \frac{3}{2}$ ,  
 $x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = 1, x_4 = \frac{1}{6}$ . **408.**  $x = 14$ . **409.** 7. **410.**  $109 \text{ см}^3$ . **411.** 0.

412.  $y = 4x - 9$ . 413.  $-3$ . 414.  $x = 4$ . 415.  $(1; 4), (4; 1)$ . 416. 8 ч 45 мин.  
 417.  $x = -1$ . 418.  $x = 1$ . 419. 0. 420. 1. 421.  $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ . 422.  $x_1 = 99$ ,  
 $x_2 = -0,9$ . 423.  $(-12; +\infty)$ . 424.  $8\sqrt{3}$  см<sup>2</sup>. 425.  $\sqrt{a-1}$ . 426.  $x = \pi n, n \in Z$ .  
 427.  $x = 32$ . 428.  $\left(0; \frac{23}{35}\right)$ . 429. 12. 430.  $\frac{2\sqrt{a+6}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ . 431.  $x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{2}$ ,  
 $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$ . 432.  $\left(-\frac{3}{2}; 1\right) \cup (-1; 3)$ . 433.  $1,5 + \ln 2$ . 434.  $16\sqrt{6}$  см<sup>2</sup>.  
 435. 4. 436.  $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ . 437.  $(2; +\infty)$ . 438.  $11/6$ . 439.  $100\sqrt{2}$  см<sup>2</sup>.  
 441.  $x = 6$ . 442.  $\left[\frac{1}{2}; 3\right]$ . 443. Нет решений. 444.  $\frac{1}{6}a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$ .  
 446.  $x = 6$ . 447.  $x = 4$ . 448.  $(20; 16)$ . 449. 5. 450.  $\frac{2ab+2a-1}{ab+b+1}$ .  
 451.  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n; x = (-1)^n \arcsin \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ . 452. Решений  
 нет. 453.  $x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{1-\log_2 2}$ ; 454.  $\frac{25\sqrt{3}}{2}$  см<sup>2</sup>. 455.  $\frac{1}{2}(m+n)$ .  
 456.  $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ . 457.  $(-2; 0]$ . 458.  $x = -1$ . 459. 9 см. 460. 0,  $|a| < ??$ ,  
 $a \neq 0$ . 461.  $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ . 462.  $(-\infty; -4)$ . 463.  $y = -2x + 5$ . 464.  $5/27$ .  
 465. 1. 466.  $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n$ . 467.  $x = 3$ . 468.  $y = -14x + 11$ . 469. 27. 470. 2; 5;  
 8 и 26; 5; -16. 471.  $\frac{\pi}{3}(3k \pm 1), k \in Z$ . 472.  $y_{\text{наим.}} = -\frac{\pi}{2}, y_{\text{наиб.}} = \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}$ .  
 473.  $(4; 1) (1; 4)$ . 474. На 38,8 %. 475. 8; 10; 12 и 17; 10; 3.  
 476.  $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ . 477.  $y_{\text{наим.}} = 0, y_{\text{наиб.}} = \frac{9}{8}$ . 478.  $(36; 25), (25; 36)$ .  
 479. 144 000 руб. 480. 150 г, 450 г. 481.  $(3; 3,5) \cup (4; +\infty)$ .  
 482.  $\left(\pm \frac{\pi}{3} + \pi(n+k); \pm \frac{\pi}{3} + \pi(n-k)\right), n, k \in Z$ . 483.  $(0; -2)$  и  $(-2; 6)$ .  
 484. 36. 485.  $1 : 3$ . 486.  $x = 5$ . 487.  $\left(\frac{\pi}{4} + \pi m; \pi(2n-m) + \frac{\pi}{4}\right)$ . 488.  $-0,5$ .

489.  $e^2 - 2$ . 490.  $2\sqrt{2}$  дм,  $2\sqrt{2}$  дм. 491.  $(2; 1)$ ,  $(-5/4; -35/4)$ . 493. 96.  
 48, 24, 12, 6, 3. 494. 0. 495.  $12\sqrt{3}$  дм<sup>2</sup>. 496.  $\left(\frac{1}{4}; 64\right)$ . 498.  $3/5$ .
499. 2. 500.  $\frac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos \alpha}{\sin^2 3\alpha}$ . 501. Не компланарны.
502.  $\left(\frac{1}{3}; 1\right) \cup (1; 2)$ ; 503.  $D(y) = (-\infty; -3] \cup (2; +\infty)$ ; 504.  $\frac{\pi n}{8}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
505. 4. 506.  $\left\{\frac{5}{\sqrt{65}}; -\frac{2}{\sqrt{65}}; -\frac{6}{\sqrt{65}}\right\}$  или  $\left\{-\frac{5}{\sqrt{65}}; \frac{2}{\sqrt{65}}; \frac{6}{\sqrt{65}}\right\}$ .
507.  $x = -8$ . 508.  $D(y) = (1; +\infty)$ . 509.  $\frac{\pi n}{3}$ ;  $\pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$ . 510. 13; 13; 10.
511.  $(2; 1), (1; 2)$ . 512.  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -3$ . 513.  $-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
514.  $10\frac{2}{3}$ . 515.  $3(\sqrt{5} + 1)$ . 516.  $\left(\frac{18}{13}; \frac{12}{5}\right)$ . 517.  $x = 4$ . 518.  $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}$ ;
519.  $\frac{32}{3}$ . 520. 1,5 кг. 521.  $x = 3$ . 522.  $(-\infty; -2/3] \cup [1/2; 2]$ .
523.  $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(n+k); \frac{\pi}{3} + \pi(n-k)\right)$ ,  $\left(\frac{\pi}{6} + \pi(n+k); \frac{2\pi}{3} + \pi(n-k)\right)$ ,  $n, k \in \mathbb{Z}$ .
524.  $(-\infty; -2) \cup [2 - \sqrt{5}; 0) \cup (4; 2 + \sqrt{5}]$ . 525. 80 %. 526.  $x_1 = 1$ ;
- $x_{2,3} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ . 527.  $x = 2$ . 528.  $\left(\pi n; \frac{\pi}{4} - \pi n\right)$ ,  $\left(\frac{3\pi}{4} + \pi n; -\frac{\pi}{3} - \pi n\right)$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$ . 529.  $x = 5$ . 530.  $56/9$ . 531. При  $a = 2$  и  $a = -1$ . 532. 1.
533.  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 534.  $y = 6x + 1$ . 535.  $\sqrt{3} - 1,5$ . 536. При  $a = -4$ .
537.  $215/27$ . 538.  $\frac{\pi n}{4}$ ,  $(-1)^n \frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{6}$ ; 539.  $y = -6x + 18$ ,  $y = 6x + 18$ .
540.  $\frac{1}{6}a^3 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}$ . 541.  $x = \sqrt{26}$ . 542.  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  
 $n \in \mathbb{Z}$ . 544.  $3 : 2$ . 549. 3. 550.  $x = 1$  — точка максимума,  $x = 2$  — точка  
 минимума. 551.  $x = \frac{\pi n}{3}$ ,  $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 552.  $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$ .

$$553. x = 3. 554. \frac{\sqrt{2}l \sin^2 \left( 45^\circ + \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}. 555. x = 2 \text{ — точка максимума,}$$

$$x = 3 \text{ — точка минимума. } 556. \pi n; \pm \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. 557. x = 3.$$

$$558. x = 2. 559. 5. 560. 4. 561. m = 3; n = -3. 562. x \neq \pi n;$$

$$x \neq (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. 563. (2; 0]. 564. x = -1. 565. 11 \text{ см. } 566. x = -1.$$

$$567. 6. 568. (-1; 2). 569. x = -1. 570. 24. 571. [0,5; 2,5]. 572. (-3; -2),$$

$$(3; 2). 573. x = \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}. 574. 96. 575. [1; 10]. 576. (\pm 1; \pm 2), (\pm 2; \pm 1).$$

$$577. \pi n, \pm \frac{\pi}{6} + \pi n. 578. 25 \text{ м. } 579. \text{ Убывает на } (-\infty; -1] \text{ и на } (0; 1];$$

$$\text{возрастает на } [-1; 0] \text{ и на } [1; +\infty). 580. (8; -1), (-1; 8). 581. 62.$$

$$582. 10. 583. \text{ Возрастает на } (-\infty; 0] \text{ и на } [4; +\infty) \text{ и убывает на } [0; 2) \text{ и на } (2; 4]. 584. (16; 1). 585. 1/2. 586. 24 \text{ см. } 587. \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

$$588. x = -\frac{\pi}{6}. 589. b_1 = 6, q = -\frac{1}{2}. 590. 12 \text{ см. } 591. 1/8. 592. 22,5^\circ.$$

$$593. 2; 4; 8; 16. 594. S_{\text{бок.}} = \pi l^2 \operatorname{tg} \alpha \sin \alpha. 595. (-2; -3; -4), (2; 3; 4).$$

$$596. \text{ Решений нет. } 597. [2, 5; 7, 5]. 598. 10,5 \text{ м}^2. 599. (2; 2);$$

$$600. x = 2. 601. [1; 2]. 602. 7 \text{ дней. } 603. x = -1. 604. x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$605. \left( \frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 5 + \pi n; \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} 5 + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}. 606. 6 \text{ ч. } 607. x = 1/2.$$

$$608. x_1 = 1, x_2 = -1 - \sqrt{2}. 609. \left( \frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} - \pi n \right). 610. \frac{\pi r^3 \operatorname{ctg}^3 (45^\circ - \alpha)}{3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}.$$

$$611. (10; +\infty). 612. x_1 = 2\pi; x_2 = \frac{5\pi}{2}. 613. m = 16. 614. 8,5.$$

$$615. (0,2; 5). 616. 18^\circ. 617. \text{ При } x = -2. 618. 12 \text{ см. } 619. \frac{n-1}{2m-1}.$$

$$620. x = 0. 621. \left( -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(n-2k); \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(n+2k) \right), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}. 622. 10.$$

$$623. a^3 \sqrt{a} - b^8 \sqrt{a^4 b^3} + b^3. 624. x = 16/25 \text{ при } 0 < x < 1.$$

$$625. \left( \frac{\pi}{2} + \pi n; 2\pi k \right), \left( \pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right), n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}. 626. \frac{4}{7}, \frac{8}{21}, \frac{20}{49}.$$

$$627. 10. 628. \text{ При } x=2. 629. x_1=1, x_2=4, x_3=2, x_4=3. 630. 42.$$

$$631. -3. 632. \text{ При } x=5. 633. x_1=1, x_2=2. 634. 3:2. 635. 4/3.$$

$$636. x_1=0,1, x_{2,3}=10^{0,5(1\pm\sqrt{3})}. 637. \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}, \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$638. 42\sqrt{6} \text{ м}^2. 639. 1/2. 640. 1/3. 641. \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$642. \pi ab \sqrt{a^2 + b^2}. 643. E(y) = [-1; +\infty). 644. \frac{1}{12}(3\pi - 4).$$

$$645. x = 2\pi + 8\pi m, m \in \mathbb{Z}. 646. 280 \pi \text{ см}^3, 270 \pi \text{ см}^2. 647. x = 0.$$

$$648. 2. 649. 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. 650. 147 \text{ м}. 651. (-2; -1), (2; 1). 652. x_1=4,$$

$$x_2=12. 653. [-1; 2) \cup (3; +\infty). 654. x_1=5/4, x_2=3. 655. 11, 15, 19,$$

$$23, 27, 31. 656. 6. 657. 8. 658. -5. 659. x_1=-3; x_2=\frac{1}{2}.$$

$$660. x = -10. 661. 2; 4; 8. 662. 50 \text{ см}. 663. (-\infty; -4) \cup (3; 4).$$

$$664. \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n, (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}. 665. 0. 666. 1) b_1 = 10;$$

$$q = 1/5; 2) b_1 = 15, q = -1/5. 667. \bar{p} \{20; 60; -20\}. 668. 9.$$

$$669. [-1/2; 1). 670. \frac{\pi n}{7}, \frac{\pi n}{5}. 671. 13. 672. 99270. 673. \{1; -2; 0\} \text{ и}$$

$$\{-1; 2; 0\}. 674. 90\,000 \text{ руб.}, 135\,000 \text{ руб.} 675. x_1 = -1, x_2 = -10.$$

$$676. \left( \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} - 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}. 678. (2; +\infty). 679. 16. 680. 2:1.$$

$$681. x_1 = 0,1; x_2 = 10. 682. \left( \pi n; \frac{\pi}{3} - \pi n \right), \left( \frac{\pi}{3} + \pi n; \pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

$$684. (0; 1). 685. 1/12. 686. 3:8. 687. \frac{\pi}{2} + \pi n, 2\pi n, \frac{\pi n}{5} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$688. E(y) = [-5; 7]. 689. (1, 2, 3). 690. \left[ 0; \frac{1}{2} \right] \cup (1; 16].$$

$$691. \text{ При } -1 < x < 0. 692. 98\pi \text{ м}^2. 693. 2\pi n, \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$694. \left[ \frac{\pi}{4}; \pi \right). 695. (1; -2; 3). 696. (0; 1) \cup [4; +\infty). 697. 156.$$

$$698. \frac{Q}{2}\sqrt{\pi M}. 699. x_1 = -1; x_2 = -3; x_3 = 4. 700. 8\pi m, m \in Z.$$

$$701. [-1; 2) \cup \left(\frac{5}{3}; +\infty\right). 702. F(x) = 9 - 2\sqrt{3-x}, x < 3. 703. a - b.$$

$$704. 12. 705. x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4. 706. \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z. 707. 1.$$

$$708. F(x) = -\frac{1}{2}, x < 0. 709. 3 - 2\sqrt{x} \text{ при } 0 \leq x < 9; -3 \text{ при } x > 9.$$

$$710. 8. 711. (2; 3), (3; 2). 712. x = 3. 713. (-\infty; -2) \cup (0; 5/6] \cup (2; +\infty).$$

$$714. \pm \frac{\pi}{3} - 0,5 + 2\pi n, n \in Z. 715. 1/8. 716. 3\sqrt{5}. 717. (-6; -1), (-1; -6).$$

$$718. x = 1. 719. (-10; 1) \cup (1; +\infty). 720. x = 6. 721. 0. 722. AB = 4 \text{ см},$$

$$BC = 6 \text{ см}. 723. \left(-\frac{4}{\sqrt{3}}; \frac{5}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{4}{\sqrt{3}}; -\frac{5}{\sqrt{3}}\right), (1; 2), (-1; -2). 724. \frac{\pi n}{3},$$

$$n \in Z. 725. x_{1,2} = \pm 2. 726. (0; 3). 727. 200. 728. 2(3 + 2\sqrt{3}).$$

$$729. (\pm 2; \pm 3), (\pm 3; \pm 2). 730. \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}. 731. x_{1,2} = \pm 2. 732. (0; 3).$$

$$733. 0. 734. V = \frac{\pi m^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{24 \cos^6 \frac{\alpha}{2}}; S_{\text{полн.}} = \frac{\pi m^2 \sin \alpha \cos^2 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{2 \cos^4 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$735. \text{ При } a = 4; \frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt[5]{2}}. 736. (5; 4), (-9; 25). 737. (-\infty; 2).$$

$$738. x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{33}), x_3 = -3, x_4 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{29}), x_5 = 1, x_6 = 3.$$

$$739. [2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in Z. 740. \frac{1}{6} \pi a^3 \sqrt{\operatorname{tg}^3 \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}. 741. [4; 16/3).$$

$$742. (1; 1), (2; 4). 743. x = 1. 744. x_{1,2} = \pm 1, x_3 = 2. 745. D(y) = n,$$

$$n \in Z. 746. 2 \text{ см}. 747. (0; 2). 748. x_1 = 5/3; x_2 = 5/4. 749. \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},$$

$$n \in Z. 750. 100. 751. \frac{5}{a-9b}. 752. 125. 753. x = 0. 754. x_{1,2} = \pm 2.$$

$$755. \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z. 756. 70 \ 336. 757. \frac{1}{x-1}. 758. \frac{\sqrt{3}}{2} R^3 \sin^2 2\alpha \cos^2 \alpha.$$

$$759. (1; 2) \cup (10; +\infty). 760. \left( \frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right), \left( -\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right),$$

$$n, m \in \mathbb{Z}. 761. (-2; -1] \cup \left[ -\frac{1}{2}; 0 \right]. 762. 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{5} - 2);$$

$$\frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg}(\sqrt{5} - 2), \frac{\pi}{2}. 763. \frac{1}{3} \sin 3x - 2 \cos x + 2. 764. 8 \text{ дм.}$$

$$765. \left( 3; \frac{4}{\sqrt{3}} \right]. 766. \left( \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right), \left( \frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right),$$

$$\left( -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \right), \left( -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \right), n \in \mathbb{Z}. 767. x = -1.$$

$$768. n = 5, x = \sqrt[5]{2}. 769. F(x) = -4 \cos x + 3. 770. 17 \%. 771. \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{3b-a}}$$

$$\text{при } a < 3b. 772. x_{1,2} = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{6} \pm \sqrt{4\sqrt{6} - 6} \right). 773. x = \frac{\pi}{2} - 2\pi n, (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z}. 774. 10,313 \%. 775. \frac{n^2}{2\sqrt{n^2 - m^2}}. 776. \text{Нет корней. } 777. \frac{\pi}{4} + \pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z}. 778. \frac{\sqrt{2}}{3} a^3. 779. 8 : 3. 780. x_1 = \frac{1}{32} (17 + \sqrt{33}), x_2 = \frac{1}{4}.$$

$$781. x = 2. 782. \frac{\sqrt{3}}{8} R^3 \sin^2 2\alpha \cos^2 \alpha. 783. 4 \cos \alpha / \sqrt{1 + 8 \cos^2 \alpha}.$$

$$784. x = 0. 785. x_1 = 0, x_2 = \log_{1,5} 3. 786. \text{За } 10 \text{ и } 15 \text{ ч.}$$

$$787. 4 / \sqrt{10 - 3\sqrt{3}}. 788. (2; 1), (-2; -1), (1; 2), (-1; -2). 789. \text{Нет}$$

$$\text{корней. } 790. 10 \text{ км/ч; } 20 \text{ км/ч. } 791. 1,5. 792. (2; \sqrt{3}), (\sqrt{3}; 2),$$

$$(-\sqrt{3}; -2), (-2; -\sqrt{3}). 793. x = 5. 794. \alpha = \arcsin \frac{2}{\sqrt{7}}. 795. \sqrt{mn}.$$

$$796. x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}. 797. (1; 2). 798. 2\pi. 799. \frac{1}{2} \sqrt{ab} (a + b). 800. x_1 = -2;$$

$$x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}. 801. (-2; -2), (2; 2). 802. 110 \text{ км. } 803. \frac{ab}{2a+b}. 804. \text{Нет}$$

$$\text{корней. } 805. (1; 1,25]. 806. 12 \text{ и } 24 \text{ км/ч. } 807. \frac{1}{\cos \alpha / 2} + \sin \alpha.$$

$$808. \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; (-1)^n \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. 809. [0; 2]. 810. 60^\circ. 811. \text{За } 10 \text{ дней.}$$

**812.**  $x_1 = -2; x_2 = 1$ . **813.**  $\frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z$ . **814.**  $a - \sqrt{a^2 - b^2}, a + \sqrt{a^2 - b^2}$ .

**815.** 20 дней, 30 дней; **816.**  $x = -0,5$ . **817.**  $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ . **818.**  $S/$

$\sin^2 \alpha$ . **819.**  $30^\circ, 30^\circ$  и  $120^\circ$ . **820.**  $\frac{\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z$ . **821.**  $x = 2$ . **822.**

$\frac{(\sin \alpha + 1)^2}{2 \sin 2\alpha \cos \alpha}$ . **823.**  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}, 2 \cos \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ . **824.**  $(-1)^{n+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$ ;

**825.**  $x = 3$ . **826.**  $2 \operatorname{arctg} 0,5$ . **827.**  $S = \frac{3p^2(4\pi - 3\sqrt{3})}{4(2\pi + 3\sqrt{3})^2}$ . **828.**  $(0; 1,5), (3;$

$0)$ . **829.**  $x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{9}$ . **830.**  $am^2$ . **831.**  $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$ . **832.**  $(0; 0), (2; 3),$

$\left(-\frac{26}{5}; -\frac{13}{5}\right)$ . **833.**  $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{1}{18}(4 + \sqrt{7})$ . **834.** 3 ч, 4 ч, 2,4 ч. **835.**

42 см и 56 см. **836.**  $x = -\sqrt{7}, y = \frac{\sqrt{7}}{2}$ . **837.**  $x = 16$ . **838.** 55 и 30 дней.

**839.** 2. **840.**  $x = -4; y = 1$ . **841.**  $x = 3$ . **842.**  $\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ . **843.**

$\frac{a^4}{a^2 + (a-b)^2}$ . **844.**  $(4; 1), (1; 4)$ . **845.**  $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$ . **846.**  $\sqrt{\cos 2\alpha} / \sin^2 \alpha$ . **847.**

$\frac{\sqrt{2}}{2}d$ . **848.**  $(\pm 3; \pm 5), \left(\pm \frac{5}{3}; \pm \frac{13}{3}\right)$ . **849.**  $x = \frac{1}{2}$ . **850.**  $4/3$ . **851.**  $\frac{8}{3}r$ . **852.**

$(\pm 3; \pm 1), (\pm 1, \mp 3), (\pm 2\sqrt{2}; \pm \sqrt{2}), (\pm \sqrt{2}; \mp 2\sqrt{2})$ . **853.**  $x_1 = 1; x_2 = 10$ .

**854.**  $a = -3, a = 2$ . **855.**  $2 \arcsin \frac{5}{6}, 2 \arcsin \frac{1}{6}$ . **856.**  $\frac{40}{27}\sqrt{2} \text{ см}^2$ . **857.**

$(\pm \sqrt[4]{8}; \pm \sqrt[4]{2}), \left(\pm \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ . **858.**  $x = 0$ . **859.**  $a = 0; a = 1; a = 5/4$ .

**860.** 60 км/ч. **861.**  $m\sqrt{\frac{m^2 + 2n^2}{4m^2 - n^2}}$ . **862.**  $x_1 = 1; x_{2,3} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{33})$ .

**863.**  $x_1 = 3, x_2 = -\log_5 2$ . **864.** Если  $a > 0$ ,  $\frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right) \leq x \leq \frac{1}{a}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$ ,



$n \in \mathbb{Z}$ ; если  $a < 0$ ,  $\frac{1}{a}\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right) \leq x \leq \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; если  $a = 0$ , то

решений нет. **865.** 42 раза. **866.**  $\sqrt{3}h^2$ . **867.**  $x_1 = 8$ ,  $x_{2,3} = (-1 \pm \sqrt{5})^3$ .

**868.**  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = \log_5 3 + 4$ . **869.**  $a \in [-1/2; 2)$ . **870.** 12 сушек. **871.** 7.

**872.** (14; 1008), (950; 72). **874.**  $a = 4m$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

**875.** 18 км/ч. **876.** 12 и 48. **877.**  $(-2; 0)$ ,  $(1; -3)$ ,  $(1; 3)$ ,  $(2; -4)$ ,  $(2; 4)$ .

**879.**  $m = 3$ . **880.** 1822 и 182. **881.**  $a$ . **882.**  $(3; 1)$ ,  $(1; 3)$ . **883.**  $x = 0$ .

**884.** При  $a = 3$ . **885.** 91. **886.**  $\arcsin \frac{72}{97}$ . **887.**  $(2; 3)$ ,  $\left(-\frac{3}{2}; -4\right)$ .

**888.**  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ . **889.** Если  $a \leq -1$ , то  $x = a + 1$ ; если  $a \geq 1$ , то

$x = -2a$ ; если  $-1 < a < 1$ , то  $x = -(a + 1)$ . **890.** 1 кг первого сплава и

7 кг второго. **891.**  $\frac{a^2 \sin(\alpha + \beta)}{4 \sin \alpha \sin \beta}$ . **892.**  $x_1 = 3,5$ ;  $x_2 = 0,5$ ;  $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{2}h$ .

**893.**  $(5; 3)$ ,  $\left(-\sqrt{\frac{9 + \sqrt{981}}{2}}; -\sqrt{\frac{-9 + \sqrt{981}}{2}}\right)$ . **894.** Если  $a \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \cup$

$\cup [0; +\infty)$ , то корней нет; если  $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x = 0$ , если  $a \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{2}{9}\right]$ ,

$x_{1,2} = \pm \sqrt{10 \frac{-1 - \sqrt{1 - 8a^2}}{a}} - 10$ ;  $x_{3,4} = \pm \sqrt{10 \frac{-1 + \sqrt{1 - 8a^2}}{a}} - 10$ ; если  $a \in \left(-\frac{2}{9}; 0\right)$ ,

$x_{1,2} = \pm \sqrt{10 \frac{-1 - \sqrt{1 - 8a^2}}{a}} - 10$ . **895.** 9 : 35. **896.**  $\frac{a^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}{2 \sin \alpha \sin \beta}$ .

**897.**  $x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{2}$ . **898.**  $(-4; \pm 1)$ ,  $\left(-\sqrt{\frac{71}{6}}; \pm \sqrt{\frac{31}{6}}\right)$ . **899.**  $m = -49/4$ ,

$m \in [-12; -6]$ . **900.**  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 1)$ . **902.**  $x_1 = \frac{5}{6}$ ,  $x_2 = \frac{2}{3}$ ,  $x_3 = -\frac{3}{2}$ .

**903.**  $x = 3$ . **904.**  $n = 81$ . **905.** 7 : 5. **907.**  $x = 1 + \sqrt[3]{3a - 1}$ . **908.**

$x_1 = \frac{1}{2}(7 + \sqrt{13})$ .  $x_2 = 9$ . **909.** 5. **910.**  $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$ . **911.**  $(0; 0)$ ,

$(-4; 2)$ ,  $(-2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$ ,  $(-2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$ . **912.**  $x_1 = -1$ ;

$$x_2 = \log_2 \frac{1}{4} (3\sqrt{5} - 1). \quad \mathbf{913.} \left( (-1)^{n+1}; (-1)^{n+1} - \frac{\pi}{2} - \pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{914.} a \in \left[ \frac{1}{2} (7 + 3\sqrt{5}); +\infty \right). \quad \mathbf{915.} \sqrt{10}/4. \quad \mathbf{916.} (0; 0), (3; 3),$$

$$\left( \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2} \right). \quad \mathbf{917.} x = 3/4. \quad \mathbf{918.} x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{919.} a < -1/2, \quad a > 2,$$

$$1/8 < a < 2. \quad \mathbf{920.} \frac{1}{6} \pi H^3 \cos^4 \alpha. \quad \mathbf{921.} x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{21}, \quad x_3 = -2; \quad x_4 = 6.$$

$$\mathbf{922.} (-2; -2). \quad \mathbf{923.} \pi + 2\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \mathbf{924.} \text{ При } a \in (-\infty; 1),$$

$$x \in (-\infty; 4]; \text{ при } a \in [1; +\infty), \quad x \in (-\infty; 4 - \log_7^2 a). \quad \mathbf{925.} \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1).$$

$$\mathbf{926.} x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{39}, \quad x_{3,4} = 5 \pm \sqrt{55}. \quad \mathbf{927.} (1, 5; 2); \quad \mathbf{928.} \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{929.} \text{ При } a \in (-\infty; 6], \quad x \in [3; +\infty). \quad \mathbf{930.} S_{\text{бок.}} = 2H^2 \operatorname{ctg} \beta \sqrt{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}.$$

$$\mathbf{931.} x = 11. \quad \mathbf{932.} (\pm \operatorname{arctg} 2 + \pi n; \pm \operatorname{arctg} 3 + \pi k), \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{933.} (2xy - y + 1)(2xy - y + 4x + 1). \quad \mathbf{934.} [-4; 3/5]. \quad \mathbf{935.} 6, 75.$$

$$\mathbf{936.} x = 1/25. \quad \mathbf{937.} \left( \pm \frac{\pi}{4} + \pi k + 2\pi n; \pi k \right),$$

$$\left( \pm \left( \frac{3\pi}{4} + \operatorname{arctg} 2 \right) + 2\pi n + \pi k \mp \operatorname{arctg} 2 + \pi k \right), \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\mathbf{938.} \left( x^2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} x + 1 \right), \left( x^2 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} x + 1 \right). \quad \mathbf{939.} \text{ Если } a \leq -\frac{1}{2}, \text{ то}$$

$$x_{\min} = 3a; \text{ если } -\frac{1}{2} < a < 1, \text{ то } x_{\min} = a - 1; \text{ если } a \geq 1, \text{ то } x_{\min} = 1 - a.$$

$$\mathbf{940.} 1350 \text{ деталей за 27 дней.} \quad \mathbf{941.} \frac{1}{3} (3 + \sqrt{7}). \quad \mathbf{942.} (1; 2), (-1; 0).$$

$$\mathbf{943.} x = \frac{1}{2}. \quad \mathbf{944.} a \in [-2, 5; 2, 5]. \quad \mathbf{945.} 60 \text{ км.} \quad \mathbf{946.} 3. \quad \mathbf{947.} (1; 1),$$

$$\left( \frac{5}{2}; -2 \right). \quad \mathbf{948.} x = 4. \quad \mathbf{949.} \left( -\infty; \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) \cup (1; +\infty). \quad \mathbf{950.} 75 \text{ км/ч.}$$

$$\mathbf{951.} AB = \sqrt{\frac{1}{5} (a^2 + b^2)}. \quad \mathbf{953.} x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_3 = 4. \quad \mathbf{954.} (1; 2].$$

- 955.** Если  $a \in (-\infty; 0) \cup (2\sqrt[3]{2}; +\infty)$ , то корней нет; если,  $a \in (0; 2\sqrt[3]{2}]$ , то  $x_{1,2} = \frac{1}{216a^3} \left( 3a^2 \pm \sqrt{3a(16-a^3)} \right)^3 - 2$ . **956.** 20 г. **957.** 4 см. **959.** 27.
- 960.** 1. **961.**  $a = 3(\sqrt{2} + 1)$ . **962.**  $\arctg \frac{1}{6} \sqrt{3\sqrt{3}(2\pi - \sqrt{3})}$ . **963.**  $90^\circ$ .
- 964.**  $[-3; 0) \cup (0; 2] \cup (4; 6]$ . **965.**  $x_{1,2} = \pm 2$ . **966.** 1,5. **967.**  $a = -4$ . **968.**  $\sqrt{6}$ . **969.** Прямоугольный. **970.**  $(-4; 0) \cup (0; 4)$ . **971.**  $x = \pm 2$ .
- 972.** 1. **973.**  $m \in (-2; 0)$ . **974.** Масса каждого куска  $\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ .
- 976.**  $(-4; -3), (-4; 3), (4; -3), (4; 3)$ . **977.**  $(-3\sqrt{3}; 2), (3\sqrt{3}; 2)$ .
- 978.**  $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ . **979.**  $a = -15$ . **980.** 1,92 кг, 0,96 кг, 9,12 кг.
- 982.**  $x = 26, y = 25$ . **983.**  $\left(5; \frac{5}{6}\right) \cup \left(-3; -\frac{1}{2}\right)$ . **984.**  $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ .
- 985.**  $k = 0$ . **986.**  $\frac{\pi\sqrt{3}}{\sqrt{3+k^2+k}}$ . **987.** 2. **988.**  $x = 1$ . **989.**  $(\pm 1; \pm 3), (\pm 3; \pm 1)$ . **990.**  $x_1 = -1; x_2 = -3; x_3 = -2; x_4 = 1$ . **991.**  $a = 23$ .
- 992.**  $\pi - 2\arccos \frac{5 \pm 2\sqrt{3}}{13}$ . **993.**  $a/2 \sin \alpha$ . **994.**  $x_{1,2} = \pm 2$ . **995.**  $(\pm 1; \pm 1)$ .
- 996.**  $x_{1,2} = \pm 4; x_3 = -1$ . **997.**  $a = -7, a = 109/7$ . **998.** За 4,8 ч каждый или за 4 и 6 ч. **1000.**  $x = 0,75$ . **1001.**  $x = 10^{9/8}$ . **1002.**  $(\pm 3; \pm 1)$ . **1003.**  $(-5/6; 2)$ . **1004.** 6 и 10 ч. **1006.** Нет решений. **1007.**  $x = 5$ .
- 1008.**  $(2; 1), \left(\frac{21}{43}; \frac{35}{43}\right)$ . **1009.**  $(1; +\infty)$ . **1010.**  $686/9$ . **1011.** При  $m = 12, n = 6$ . **1012.**  $x = 0$ . **1013.**  $(4; 4)$ . **1014.**  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ . **1015.** При  $a = 3$ .
- 1016.** 3 ч,  $r \leq \frac{\sqrt[4]{3}}{3}$ . **1017.**  $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{|a^2-b^2|}$ . **1018.**  $x = 1$ . **1019.**  $(-1; -2), \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)$ . **1020.**  $\pi n, n \in Z$ . **1021.**  $a \in (-\infty; 0] \cup (1/6; 1/2)$ . **1022.** 50 км/ч и 40 км/ч. **1023.**  $\sqrt{\frac{1}{3}(2a^2+b^2)}$ . **1025.**  $(2\pi k; 2\pi m + \pi), \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi p\right)$ ,

- $k, m, p \in Z$ . **1026.**  $x = 1597, y = 6$ . **1027.**  $a \in (-\infty; -1 - \sqrt{13}) \cup$   
 $\cup (-1 + \sqrt{13}; +\infty)$ . **1028.**  $t_2 + \sqrt{t_2 + t_1 t_2}; t_1 + t_2 + \sqrt{t_2 + t_1 t_2}$ . **1029.**  $M > 2$ .  
**1031.**  $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{3} + 2\pi m\right), \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z$ . **1032.**  $(-1; -1),$   
 $(-1; 1), (1; -1), (1; 1)$ . **1033.** При  $m = -1$ . **1034.** Длина пути равна  
 $\frac{3S(2V_1 - V_2)}{V_1}$  км, где  $V_2 < 2V_1$ . **1035.**  $\operatorname{tg} \alpha \sin 4\alpha$ . **1037.**  $(0; \pm\sqrt{33}),$   
 $(\pm 4; \pm 1), (\pm 2; \pm 5)$ . **1038.**  $x = 2$ . **1039.** При  $a = 0, a = 1$ . **1040.**  
 $\frac{1}{2}(2m + n + \sqrt{4m^2 + n^2})$  дней. **1041.** 2. **1043.**  $(0; 0), (3; 2), (-2; -3)$ .  
**1044.**  $x = 3$ . **1045.**  $a = 0, a = -1$ . **1046.** 20 ч. **1047.**  $\frac{3a\sqrt{2b\sqrt{a^2 + b^2}}}{2(\sqrt{a^2 + b^2} + b)}$ .  
**1048.**  $(1; 1), (9; 3)$ . **1049.**  $x = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ . **1050.** 3. **1051.**  $(-13; -12) \cup$   
 $\cup (-12; -6)$ . **1052.** 400 км. **1053.**  $\frac{bc}{b+c}$ . **1054.**  $(4; 16)$ .  
**1055.**  $x = 1 + 2\sqrt{2}$ . **1056.** При  $a = 2$ . **1057.**  $(-19; -18) \cup (-18; -12)$ .  
**1058.**  $\frac{316}{144207}$ . **1059.**  $\frac{ab}{2} \left( \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} + 1 \right)$ . **1060.**  $a(a^5 + 9c) = 5b(a^3 + b)$ .  
**1061.**  $x = 4$ . **1062.**  $x = -3$ . **1063.**  $(-\infty; -1)$ . **1064.**  $\frac{41\sqrt{41}}{384}\pi$ .  
**1065.**  $a^2/4b$ . **1067.**  $x = 2$ . **1068.**  $10\pi + 20\pi n, n \in Z$ . **1069.**  $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

# ОТВЕТЫ К ТЕСТАМ

## Вариант 1

1. 0,4. 2. 15. 3. 4. 4. 0,86. 5. 0,8. 6. -1,25. 7. 11,8. 8. 4. 9. 31,5.  
10. 150; 450. 11. -0,5. 12. -3. 13. а)  $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{4}$ . 14. б) 54.  
15.  $\left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup \left(0; \frac{3}{4}\right]$ . 16. 16. 17. б)  $\frac{75}{29}$ . 18.  $\pm 3; -\frac{3}{2}$ . 19. а) да; б) нет;  
в) 37.

## Вариант 2

1. 9. 2. 18. 3. 312. 4. 0,2. 5. 0,25. 6. -25. 7. 8. 8. 10. 9. 25. 10. 7.  
11. 36. 12. 3. 13. а)  $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}$ . 14. б)  $1/\sqrt{5}$ .  
15.  $\left[\frac{1}{6}; \frac{17}{12}\right] \cup \left[\frac{9}{4}; \frac{7}{2}\right]$ . 16. 29. 17. б) 30. 18. если  $a = -1$ , то  $x = -2$ ;  
если  $a = 0$ , то корней нет; если  $a = 1$ , то  $x = 2$ ; если  $a \neq \pm 1, a \neq 0$ , то  
 $x = a + \frac{1}{a}$ . 19. а) нет; б) да; в)  $4 \times 4$  и  $1 \times 16$ ;  $6 \times 6$  и  $3 \times 12$ ;  $12 \times 12$  и  
 $9 \times 16$ .

## Вариант 3

1. 20. 2. 11. 3. 10. 4. 0,525. 5. 0,18. 6. 3. 7. 0. 8. 12. 9. 1,5. 10. 3 кг  
800-й пробы. 11. 8. 12. 3. 13. а)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2};$   
 $\frac{7\pi}{6}$ . 14. б)  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$ . 15.  $(-\infty; -3] \cup \{0\} \cup (4; 5]$ . 16. 9 282 000.  
17. б) 3. 18.  $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right] \cup \{7 + 2\sqrt{17}\} \cup (20; +\infty)$ . 19. а) да; б) нет; в) 3.

## Вариант 4

1. 0,8. 2. 2. 3. 10. 4. 0,4. 5. 0,9025. 6. -1. 7. 12. 8. 4. 9. 11. 10. 38,8.  
11. 4. 12. 0. 13. а)  $\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}$ .

14.  $40\sqrt{10}$ . 15. 24. 16. 52. 17. б) 6. 18. 3 корня при  $a = 1$ . 19. а) да,  $a = 12, b = 13, c = 15, d = 50$ ; б) нет; в)  $\frac{79}{21}$ .

### Вариант 5

1. 0,8. 2. 10. 3. 60. 4. 0,125. 5. 0,064. 6. -7. 7. 1. 8. 0,4. 9. 3.  
10. 90 000; 135 000. 11. -3. 12. 0. 13. а)  $\pi n$ ;  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-4\pi$ ;  
 $-3\pi$ ;  $-\frac{7\pi}{2}$ . 14. б)  $\frac{30\sqrt{39}}{48+25\sqrt{3}}$ . 15. 3. 16. 1 796 850. 17. б)  $\frac{4\sqrt{5}}{15}$ .  
18.  $\left(-\frac{1}{2}; 6\right)$ . 19. а) -15; -9; б) 40; в) 13 и 3.

### Вариант 6

1. 68. 2. 8. 3. 3. 4. 0,375. 5. 0,06. 6. -2,2. 7. 8. 8. 6. 9. 60. 10. 10.  
11. -5,4. 12. -18. 13. а)  $1 \pm \sqrt{3}$ ;  $\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{17})$ ; б)  $1 + \sqrt{3}$ . 14. б)  $\frac{64\sqrt{17}}{3}$ .  
15.  $\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup [4; +\infty)$ . 16. 37. 17. б)  $4\sqrt{35}$ . 18.  $-1 < a \leq 0$ ;  $0,5 \leq a \leq 1$ .  
19. а) 7 или 12; б) -13; в) 2 и 24.

### Вариант 7

1. 97. 2. 5. 3. 30. 4. 0,32. 5. 0,9964. 6. 0,5. 7. 2. 8. 3. 9. 0,512. 10. 9.  
11. 0,8. 12. -20. 13. а) 0; -3; б) 0. 14. б)  $\frac{64}{3}(2 + \sqrt{3})$ .  
15.  $\left(2; \frac{9}{4}\right] \cup \left(\frac{7}{3}; 2,5\right) \cup (2,5; 3) \cup (3; +\infty)$ . 16. 78 125. 17. б)  $8\sqrt{35}$ .  
18. При  $a \in \left(\frac{16}{33}; \frac{4}{3}\right]$  уравнение не имеет решений. 19. а) да; б) нет;  
в) 85.

### Вариант 8

1. 10. 2. 8. 3. 184. 4. 0,3. 5. 0,0115. 6. 3. 7. 20. 8. 2. 9. 30. 10. 4.  
11. 5. 12. -24,5. 13. а) 1; 2; б) 2. 14.  $8\sqrt{161}/17$ . 15.  $[-13; -2] \cup [5; 8]$ .  
16. 400 000. 17. б) 24. 18.  $\left[-3; -\frac{3}{7}\right)$ ; 0. 19. а) да; б) нет; в) 18.

**Вариант 9**

1. 25. 2. 2. 3. 288. 4. 0,88. 5. 0,9375. 6. -2. 7. 1. 8. 30. 9. 400. 10. 10.  
 11. 1,5. 12. 1,25. 13. а) 0,1; 10; б) 0,1. 14. б)  $128/63$ . 15.  $(-\infty; -16) \cup$   
 $\cup [-9; 3] \cup \{4\} \cup (10; +\infty)$ . 16. 6. 17. б) 8. 18.  $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \{0\} \cup$   
 $\cup [1; +\infty)$ . 19. а) да; б) нет; в) да.

**Вариант 10**

1. 14. 2. 16. 3. 6. 4. 0,04. 5. 0,5. 6. -8. 7. -13,5. 8. 7,5. 9. 30. 10. 7.  
 11. -1. 12. -1. 13. а) 1,5; б) 1,5. 14. б)  $\arccos \frac{29}{16\sqrt{7}}$ . 15. 3. 16. 37,5.  
 17. б)  $AD = 6, BC = 2$ . 18. При  $a \in (-\infty; -1]$ ,  $x \in (-1; 0)$ ; при  $a \in (-1; 0)$ ,  
 $x \in (a; 0)$ ; при  $a = 0$  решений нет; при  $a \in (0; +\infty)$ ,  $x \in (0; a)$ .

# КРАТКИЕ СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА

## 1. Уравнение I степени (линейное)

Общий вид:  $ax + b = 0$ .

- 1) Если  $a \neq 0$ ,  $a \in R$ ,  $b \in R$ , то  $x = -\frac{b}{a}$  (корень уравнения).
- 2) Если  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , то корней нет.
- 3) Если  $a = b = 0$ , то уравнение имеет бесконечно много корней.

## 2. Система линейных уравнений

Пусть дана система вида

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

- 1) Если  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ , то система имеет единственное решение (прямые пересекаются в одной точке).
- 2) Если  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ , то система не имеет решений (прямые не пересекаются, т. е. параллельны).
- 3) Если  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ , то система имеет бесконечное множество решений (прямые совпадают).



### 3. Уравнение II степени (квадратное)

Общий вид:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где  $a \neq 0$ ,  $a$  — I (старший) коэффициент,  $b$  — II коэффициент,  $c$  — свободный член.

$D = b^2 - 4ac$  — дискриминант (различитель).

1) Если  $D > 0$ , то уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}.$$

2) Если  $D = 0$ , то  $x = -\frac{b}{2a}$  — один корень.

3) Если  $D < 0$ , корней нет (действительных).

#### Частные случаи

1) Неполные квадратные уравнения:

а)  $ax^2 + c = 0$ ,  $x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$ , если коэффициенты  $a$  и  $c$  имеют разные

знаки; если коэффициенты  $a$  и  $c$  имеют одинаковые знаки, то корней нет;

б)  $ax^2 + bx = 0$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = -\frac{b}{a}$ ;

в)  $ax^2 = 0$ ,  $x = 0$ .

2) Квадратное уравнение приведенного вида

$$x^2 + px + q = 0, \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

3) Квадратное уравнение вида  $ax^2 + 2kx + c = 0$ ,

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

4) Если в квадратном уравнении  $ax^2 + bx + c = 0$

$a + b + c = 0$ , то  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = \frac{c}{a}$ ;

$a - b + c = 0$ , то  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -\frac{c}{a}$ .

## 4. Теорема Виета

а) Для квадратного уравнения общего вида  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ ;

б) для приведенного вида  $x_1 + x_2 = -p$ ;  $x_1 x_2 = q$ .

### **Теорема, обратная теореме Виета**

Если  $p, q, x_1, x_2$  таковы, что  $x_1 + x_2 = -p$ ;  $x_1 x_2 = q$ , то  $x_1$  и  $x_2$  — корни уравнения  $x^2 + px + q = 0$ .

### **Теорема Виета для кубического уравнения**

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Если  $x_1, x_2, x_3$  — корни уравнения, то  $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ ;

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = b; \quad x_1 x_2 x_3 = -c.$$

## 5. Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ , где  $x_1$  и  $x_2$  — корни трехчлена,  $D > 0$ .

Если  $D = 0$ , то  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ .

## 6. Биквадратное уравнение

Общий вид:  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ ,  $a \neq 0$ .

Заменой  $x^2 = y$  приводят к квадратному виду  $ay^2 + by + c = 0$ .

Корни биквадратного уравнения:

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}},$$

где  $D = b^2 - 4ac$ .

### **Свойства корней**

1. Если биквадратное уравнение имеет корень  $x_0$ , то оно имеет и корень  $-x_0$ .

2. Сумма корней биквадратного уравнения равна нулю (по теореме Виета).

**Замечание.** Для вычисления корней биквадратного уравнения часто удобно воспользоваться *формулой сложного радикала*

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( A + \sqrt{A^2 - B} \right)} \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left( A - \sqrt{A^2 - B} \right)}.$$

Последняя полезна лишь в случае, если  $\sqrt{A^2 - B}$  есть рациональное число.

## 7. Возвратное уравнение IV степени

Общий вид:  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bmx + am^2 = 0, a \neq 0$ .

Приводится к виду  $a \left( x^2 + \frac{m^2}{x^2} \right) + b \left( x + \frac{m}{x} \right) + c = 0$  и заменой  $y = x + \frac{m}{x}$

и  $y^2 - 2m = x^2 + \frac{m^2}{x^2}$  приводится к квадратному уравнению

$$ay^2 + by + (c - 2am) = 0.$$

### Частные случаи

1)  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, (m = 1)$  — симметрическое уравнение I рода.

Решается подстановкой  $y = x + \frac{1}{x}$ ;

2)  $ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0, (m = -1)$  — симметрическое уравнение II рода.

Решается подстановкой  $y = x - \frac{1}{x}$ .

## 8. Свойства степеней

Для любых  $x, y$  и  $a > 0, b > 0$  верны равенства:

$a^0 = 1$  (по определению);

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \quad a^x : a^y = a^{x-y}; \quad (a^x)^y = a^{xy};$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \quad \left( \frac{a}{b} \right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x};$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}.$$

## 9. Формулы сокращенного умножения

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  — разность квадратов;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  — квадрат суммы;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$  — квадрат разности;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$  — куб суммы;

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$  — куб разности;

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$  — сумма кубов;

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$  — разность кубов.

### Дополнительные формулы

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ ;

$(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$ ;

$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = ab$ ;

$a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$ ;

$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$ ;

$a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$ ;

$a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) = (a - b)(a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5)$ ;

$a^6 + b^6 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$ .

## 10. Свойства арифметических корней

Для любых натуральных  $n > 1$  и  $k > 1$  и любых  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  верны равенства:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0); \quad (\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \quad (\sqrt[n]{a})^n = a \quad (a \geq 0);$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ если } 0 \leq a < b; \quad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при } a \geq 0, \\ -a & \text{при } a < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \quad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \geq 0).$$

## 11. Соотношение между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\begin{aligned}\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1; & \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; & \operatorname{ctg} \alpha &= \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}; \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1; & 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha}; & 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha &= \frac{1}{\sin^2 \alpha}; \\ \sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha}; & \operatorname{cosec} \alpha &= \frac{1}{\sin \alpha}.\end{aligned}$$

## 12. Формулы сложения

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta; \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta; \\ \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}; & \operatorname{tg}(\alpha - \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.\end{aligned}$$

### Дополнительные формулы

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}; \quad \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta};$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta + \gamma) &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \\ &- \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma; \\ \cos(\alpha + \beta + \gamma) &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \cos \beta \sin \gamma - \\ &- \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma.\end{aligned}$$

## 13. Формулы двойных и тройных аргументов

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha; \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}; & \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}; \\ \sin 3\alpha &= 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha; \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha; \\ \operatorname{tg} 3\alpha &= \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}; & \operatorname{ctg} 3\alpha &= \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}.\end{aligned}$$

## 14. Формулы половинного аргумента (для функций $\sin$ и $\cos$ — формулы понижения степени)

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2};$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha};$$

$$\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.$$

## 15. Универсальные тригонометрические подстановки

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

## 16. Формулы преобразования суммы в произведение

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta};$$

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\alpha + \varphi), \text{ где}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

### **Дополнительные формулы**

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}; \quad \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta};$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}; \quad \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta};$$

$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \alpha); \quad \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin(45^\circ - \alpha);$$

$$1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right); \quad 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left( 45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right);$$

$$1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha};$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha; \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha.$$

## **17. Формулы преобразования произведения в сумму**

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta);$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta);$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta).$$

### **Дополнительные формулы**

$$\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha;$$

$$\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta.$$

## **18. Радианная и градусная меры углов**

$$1 \text{ рад.} = \left( \frac{180}{\pi} \right)^\circ;$$

$$1 \text{ рад.} \approx 57,3^\circ;$$

$$\alpha \text{ рад.} = \left( \frac{180}{\pi} \cdot \alpha \right)^\circ;$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад.};$$

$$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ рад.};$$

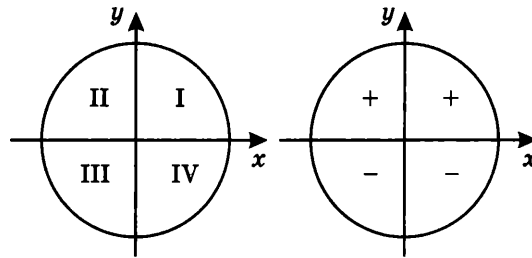
$l = \alpha R$  — длина дуги окружности;

$\alpha$  — угол в радианах;

$R$  — радиус окружности;

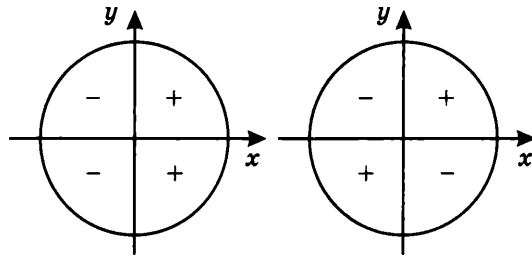
$S = \frac{R^2}{2} \alpha$  — площадь кругового сектора,  $0 < \alpha < \pi$ .

## 19. Знаки тригонометрических функций



Четверти

Знаки  $\sin$



Знаки  $\cos$

Знаки  $\tan$  и  $\cot$

## 20. Формулы приведения

| Функция $\alpha$ | Аргумент $\alpha$        |                          |                |                |                           |                           |                 |                 |
|------------------|--------------------------|--------------------------|----------------|----------------|---------------------------|---------------------------|-----------------|-----------------|
|                  | $\frac{\pi}{2} - \alpha$ | $\frac{\pi}{2} + \alpha$ | $\pi - \alpha$ | $\pi + \alpha$ | $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ | $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ | $2\pi - \alpha$ | $2\pi + \alpha$ |
| $\sin$           | $\cos \alpha$            | $\cos \alpha$            | $\sin \alpha$  | $-\sin \alpha$ | $-\cos \alpha$            | $-\cos \alpha$            | $-\sin \alpha$  | $\sin \alpha$   |
| $\cos$           | $\sin \alpha$            | $-\sin \alpha$           | $-\cos \alpha$ | $-\cos \alpha$ | $-\sin \alpha$            | $\sin \alpha$             | $\cos \alpha$   | $\cos \alpha$   |
| $\tan$           | $\cot \alpha$            | $-\cot \alpha$           | $-\tan \alpha$ | $\tan \alpha$  | $\cot \alpha$             | $-\cot \alpha$            | $-\tan \alpha$  | $\tan \alpha$   |
| $\cot$           | $\tan \alpha$            | $-\tan \alpha$           | $-\cot \alpha$ | $\cot \alpha$  | $\tan \alpha$             | $-\tan \alpha$            | $-\cot \alpha$  | $\cot \alpha$   |



## 21. Значения тригонометрических функций для некоторых углов

| $\alpha$                    | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$      | $180^\circ$ | $270^\circ$      | $360^\circ$ |
|-----------------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-------------|------------------|-------------|
|                             | 0         | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$       | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$      |
| $\sin \alpha$               | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | 0           | -1               | 0           |
| $\cos \alpha$               | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | -1          | 0                | 1           |
| $\operatorname{tg} \alpha$  | 0         | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | -               | 0           | -                | 0           |
| $\operatorname{ctg} \alpha$ | -         | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 0               | -           | 0                | -           |

## 22. Периоды тригонометрических функций

Периоды функций  $y = \sin x$  и  $y = \cos x$  равны  $2\pi$ .

Периоды функций  $y = \operatorname{tg} x$  и  $y = \operatorname{ctg} x$  равны  $\pi$ .

Периоды функций  $y = A \sin(\omega x + \varphi)$  и  $y = A \cos(\omega x + \varphi)$  находят по формуле  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , а функций  $y = A \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$  и  $y = A \operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$  — по

формуле  $T = \frac{\pi}{\omega}$ .

## 23. Обратные тригонометрические функции

| Функция                       | Область определения     | Область значений                           |
|-------------------------------|-------------------------|--|
| $y = \arcsin x$               | $-1 \leq x \leq 1$      | $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ |
| $y = \arccos x$               | $-1 \leq x \leq 1$      | $0 \leq y \leq \pi$                        |
| $y = \operatorname{arctg} x$  | $-\infty < x < +\infty$ | $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$       |
| $y = \operatorname{arcctg} x$ | $-\infty < x < +\infty$ | $0 < y < \pi$                              |

$$\sin(\arcsin x) = x, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x;$$

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\cos(\arccos x) = x, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x;$$

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsin} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 \leq x \leq 1;$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arccos} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \leq x < 0, \quad 0 < x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcsin} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \leq x < 0, \quad 0 < x \leq 1;$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arccos} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1;$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$\operatorname{arcsin}(-x) = -\operatorname{arcsin} x;$$

$$\operatorname{arccos}(-x) = \pi - \operatorname{arccos} x;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = \pi - \operatorname{arctg} x;$$

$$\operatorname{arcsin} x + \operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

## 24. Значения обратных тригонометрических функций некоторых углов

|                           |                 |                 |                      |                      |                 |                  |
|---------------------------|-----------------|-----------------|----------------------|----------------------|-----------------|------------------|
| $x$                       | 0               | $\frac{1}{2}$   | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | -1               |
| $\operatorname{arcsin} x$ | 0               | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $-\frac{\pi}{2}$ |
| $\operatorname{arccos} x$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{6}$      | 0               | $\pi$            |

|                          |                 |   |                 |                 |
|--------------------------|-----------------|---|-----------------|-----------------|
| $x$                      | 0               | $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1               | $\sqrt{3}$      |
| $\operatorname{arctg} x$ | 0               | $\frac{\pi}{6}$                           | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
| $\operatorname{arctg} x$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$                           | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |

## 25. Простейшие тригонометрические уравнения

$\sin x = a$ , где  $|a| \leq 1$ ,  $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$\cos x = a$ ,  $|a| \leq 1$ ,  $x = \pm \arccos a + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$\operatorname{tg} x = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x = \operatorname{arctg} a + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

$\operatorname{ctg} x = a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x = \operatorname{arcctg} a + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

### Частные случаи ( $a = 0$ , $a = 1$ , $a = -1$ )

$\sin x = 0$ ,  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$\cos x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$\operatorname{tg} x = 0$ ,  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$\operatorname{ctg} x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$\sin x = 1$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$\cos x = 1$ ,  $x = 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$\sin x = -1$ ,  $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

$\cos x = -1$ ,  $x = \pi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

## 26. Средние величины

### 1. Среднее арифметическое

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

2. Среднее геометрическое  $G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$ , где  $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ .

### 3. Среднее гармоническое

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}.$$

### 4. Среднее квадратичное

$$K = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.$$

### 5. Среднее взвешенное

$$V = \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}.$$

## 27. Некоторые важные неравенства

1. Неравенство Коши:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \text{ где } x \geq 0, y \geq 0.$$

2. Неравенство треугольника:

$$|x+a| \leq |x| + |a|.$$

3. Неравенство для двух взаимно обратных величин:

$$x + \frac{1}{x} \geq 2, \text{ где } x > 0.$$

$$4. \frac{a^2+1}{2} \geq 2.$$

$$5. \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

## 28. Прогрессии

### 1. Арифметическая прогрессия

( $a_1$  — 1-й член,  $d$  — разность,  
 $n$  — число членов,  $a_n$  —  $n$ -й член,  $S_n$  — сумма  $n$  первых членов).

Определение арифметической прогрессии:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Формула  $n$ -го члена:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

Формула суммы  $n$  первых членов:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Характеристическое свойство:

$$a_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n+1}), \text{ где } n > 1.$$

### 2. Геометрическая прогрессия

( $b_1$  — 1-й член,  $q$  — знаменатель ( $q \neq 0$ ),  $n$  — число членов,  
 $b_n$  —  $n$ -й член,  $S_n$  — сумма  $n$  первых членов).

Определение геометрической прогрессии:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \text{ где } b_1 \neq 0, q \neq 0.$$

Формула  $n$ -го члена:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Формула суммы  $n$  первых членов:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}; S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, \text{ где } q \neq 1.$$

Характеристическое свойство:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Формула суммы членов *бесконечной геометрической прогрессии*:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \text{ где } |q| < 1.$$

## 29. Логарифмы и их свойства

1. Если  $x > 0$ , то  $x = a^{\log_a x}$  — основное логарифмическое тождество.
2.  $\log_a a = 1$ .
3.  $\log_a 1 = 0$ .
4. Если  $x > 0$ ,  $y > 0$ , то  $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$  — логарифм произведения.
5.  $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$  — логарифм частного.
6. Если  $x > 0$ ,  $p \in R$ , то  $\log_a x^p = p \cdot \log_a x$  — логарифм степени.
7. Если  $x > 0$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$ , то  $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$  — формула перехода от основания  $a$  к основанию  $b$ .

В частности, если  $x = b$ , то  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ , или  $\log_a b \cdot \log_b a = 1$ .

8.  $\log_a b = \log_{a^p} b^p = p \log_{a^p} b$  ( $p \in R$ ,  $p \neq 0$ ).
9. Если  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $p \neq 0$ , то  $\log_{a^p} b = \frac{1}{p} \log_a b$ .
10.  $\log_a x \cdot \log_b y = \log_a y \cdot \log_b x$ , где  $x > 0$ ,  $y > 0$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b \neq 1$ .
11.  $c^{\log_a b} = b^{\log_a c}$ ;  $a, b, c > 0$ ,  $a \neq 1$ .

## 30. Неравенства

### 1. Основные свойства числовых неравенств

1. Если  $a > b$ , то  $b < a$ .
2. Если  $a > b$  и  $b > c$ , то  $a > c$ .

3. Если  $a > b$ , то  $a + c > b + c$ ,  $a - c > b - c$  для любого  $c$ .

4.  $ac > bc$  при  $c > 0$ ;  $ac < bc$  при  $c < 0$ .

$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$  при  $c > 0$ ;  $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$  при  $c < 0$ .

5. Если  $0 < a < b$ , то  $a^c < b^c$  при  $c > 0$ ,  $a^c > b^c$  при  $c < 0$ .

6. Если  $a > b$ ,  $c > d$ , то  $a + c > b + d$ ,  $a - d > b - c$ .

7. Если  $a > b > 0$ ,  $c > d > 0$ , то  $ac > bd$ ,  $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ .

8. Если  $a < x < b$ , то  $(x - a)(x - b) < 0$ , и обратно.

## 2. Неравенство I степени (линейное)

Общий вид:  $ax + b > 0$ .

1. Если  $a > 0$ , то  $x > -\frac{b}{a}$ .

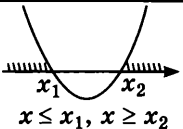
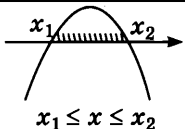
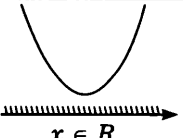

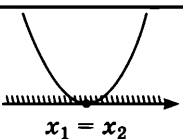
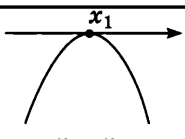
2. Если  $a < 0$ , то  $x < -\frac{b}{a}$ .

3. Если  $a = 0$ , то при  $b > 0$   $x \in R$ , при  $b \leq 0$  решений нет.

## 3. Неравенство II степени (квадратное)

Общий вид:  $ax^2 + bx + c \geq 0$ ,  $a \neq 0$ .

В зависимости от знака  $a$  и знака дискриминанта  $D = b^2 - 4ac$  имеем 6 возможностей:

|         | $a > 0$   | $a < 0$  |
|---------|---|--|
| $D > 0$ | <br>$x \leq x_1, x \geq x_2$ | <br>$x_1 \leq x \leq x_2$ |
| $D < 0$ | <br>$x \in R$                | <br>Решений нет           |
| $D = 0$ | <br>$x_1 = x_2$<br>$x \in R$ | <br>$x = x_1$             |

#### 4. Иррациональные неравенства

1. Иррациональное неравенство  $\sqrt{f(x)} < g(x)$  равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) > 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 < (g(x))^2. \end{cases}$$

2. Иррациональное неравенство  $\sqrt{f(x)} > g(x)$  равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0, \\ (\sqrt{f(x)})^2 > (g(x))^2; \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$$

#### 5. Показательное неравенство

$a^{f(x)} > a^{g(x)}$  при  $a > 1$  равносильно неравенству того же смысла  $f(x) > g(x)$ , а при  $0 < a < 1$  — неравенству  $f(x) < g(x)$ .

При решении показательных неравенств пользуются свойствами неравенств, содержащих степени.

1. При всех допустимых значениях  $a$  и  $b$  справедливы следующие утверждения:

- 1) неравенства  $a^b > 1$  и  $(a - 1)b > 0$  равносильны;
- 2) неравенства  $a^b \geq 1$  и  $(a - 1)b \geq 0$  равносильны;
- 3) неравенства  $a^b < 1$  и  $(a - 1)b < 0$  равносильны;
- 4) неравенства  $a^b \leq 1$  и  $(a - 1)b \leq 0$  равносильны.

2. При всех допустимых значениях  $a$ ,  $b$  и  $c$  справедливы следующие утверждения:

- 1) неравенства  $a^b > a^c$  и  $(a - 1)(b - c) > 0$  равносильны;
- 2) неравенства  $a^b \geq a^c$  и  $(a - 1)(b - c) \geq 0$  равносильны;
- 3) неравенства  $a^b < a^c$  и  $(a - 1)(b - c) < 0$  равносильны;
- 4) неравенства  $a^b \leq a^c$  и  $(a - 1)(b - c) \leq 0$  равносильны.

#### 6. Логарифмическое неравенство

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$  при  $a > 1$  равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) > g(x); \end{cases}$$

а при  $0 < a < 1$  — системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g(x). \end{cases}$$

При решении логарифмических неравенств пользуются следующими свойствами:

1. При всех допустимых значениях  $a$ ,  $b$  и  $c$ , таких, что  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ , справедливы утверждения:

- 1) неравенства  $\log_a b > \log_a c$  и  $(a - 1)(b - c) > 0$  равносильны;
- 2) неравенства  $\log_a b \geq \log_a c$  и  $(a - 1)(b - c) \geq 0$  равносильны;
- 3) неравенства  $\log_a b < \log_a c$  и  $(a - 1)(b - c) < 0$  равносильны;
- 4) неравенства  $\log_a b \leq \log_a c$  и  $(a - 1)(b - c) \leq 0$  равносильны.

2.

1) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c d > 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) > 0$  равносильны;

2) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c d \geq 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) \geq 0$  равносильны;

3) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c d < 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) < 0$  равносильны;

4) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c d \leq 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) \leq 0$  равносильны.

3.

1) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c b > 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) > 0$  равносильны;

2) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c b \geq 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) \geq 0$  равносильны;

3) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c b < 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) < 0$  равносильны;

4) неравенства  $\log_a b \cdot \log_c b \leq 0$  и  $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(c - a) \leq 0$  равносильны.

## 7. Тригонометрические неравенства

$\sin x > a$ ,  $\cos x > a$ ,  $\operatorname{tg} x > a$ ,  $\operatorname{ctg} x > a$  (вместо знака  $>$  могут быть знаки  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ ) решаются графически: находят точки пересечения графика функции с прямой  $y = a$ , расположенной ближе к началу координат, а затем используют периодичность функции.

Тригонометрические неравенства можно решать и с помощью единичного круга.



## 31. Таблица производных и первообразных элементарных и сложных функций

| Функция $f(x)$               | Производная $f'(x)$      | Первообразная $F(x)$                |
|------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|
| $C$ , где $C = \text{const}$ | 0                        | $Cx$                                |
| $Cx$                         | $C$                      | $\frac{1}{2}Cx^2$                   |
| $x^p, p \in R$               | $px^{p-1}$               | $\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$           |
| $ax + b, a \neq 0$           | $a$                      | $\frac{1}{2}ax^2 + bx + C$          |
| $(ax + b)^p$                 | $pa(ax + b)^{p-1}$       | $\frac{(ax + b)^{p+1}}{a(p+1)} + C$ |
| $e^x$                        | $e^x$                    | $e^x$                               |
| $e^{ax+b}, a \neq 0$         | $ae^{ax+b}$              | $\frac{1}{a}e^{ax+b} + C$           |
| $a^x, a > 0, a \neq 0$       | $a^x \ln a$              | $\frac{a^x}{\ln a} + C$             |
| $a^{kx+b}, a > 0, a \neq 0$  | $ka^{kx+b} \ln a$        | $\frac{a^{kx+b}}{k \ln a} + C$      |
| $\ln x, x > 0$               | $\frac{1}{x}$            | $x \ln x - x + C$                   |
| $\ln(ax + b), a \neq 0$      | $\frac{a}{ax+b}$         | —                                   |
| $\log_a x, x > 0, a > 0$     | $\frac{1}{x \ln a}$      | $x \log_a x - \frac{x}{\ln a} + C$  |
| $\log_a(kx + b)$             | $\frac{k}{(kx+b) \ln a}$ | —                                   |
| $\sin x$                     | $\cos x$                 | $-\cos x + C$                       |
| $\sin(ax + b)$               | $a \cos(ax + b)$         | $-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$     |
| $\cos x$                     | $-\sin x$                | $\sin x + C$                        |
| $\cos(ax + b)$               | $-a \sin(ax + b)$        | $\frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$      |
| $\operatorname{tg} x$        | $\frac{1}{\cos^2 x}$     | $-\ln \cos x  + C$                  |
| $\operatorname{ctg} x$       | $-\frac{1}{\sin^2 x}$    | $\ln \sin x  + C$                   |
| $\frac{1}{\cos^2 x}$         | —                        | $\operatorname{tg} x + C$           |
| $\frac{1}{\sin^2 x}$         | —                        | $-\operatorname{ctg} x + C$         |

## 32. Правила дифференцирования

( $u, v$  — функции,  $C$  — const)

$$(Cu)' = Cu'; \quad (u + v)' = u' + v'; \quad (uv)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}; \quad \left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C}{v^2}; \quad \left(\frac{u}{C}\right)' = \frac{u'}{C}.$$

$(g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ , где  $g(f(x))$  — сложная функция.

## 33. Уравнение касательной

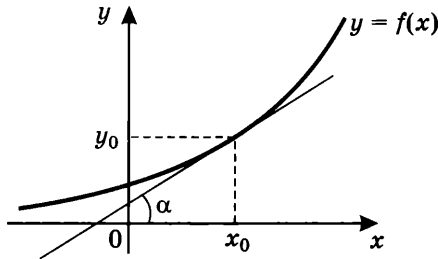
Уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

где  $(x_0, y_0)$  — точка касания.

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0) = k,$$

где  $k$  — угловой коэффициент касательной к графику функции.



## 34. Правила нахождения первообразных

1. Если  $F$  — первообразная для  $f$ , а  $H$  — первообразная для  $h$ , то  $F + H$  есть первообразная для  $f + h$ .

2. Если  $F$  — первообразная для  $f$ , а  $k$  — const, то  $kF$  есть первообразная для  $kf$ .

3. Если  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$ , а  $k$  и  $b$  — постоянные, причем  $k \neq 0$ , то  $\frac{1}{k}F(kx + b)$  есть первообразная для функции  $f(kx + b)$ .

### 35. Формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

#### Свойства

$$1. \int_a^a f(x)dx = 0.$$

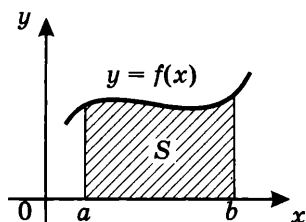
$$2. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \text{ где } a < c < b.$$

### 36. Площадь криволинейной трапеции

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью  $Ox$ , прямыми  $x = a$  и  $x = b$  и графиком неотрицательной функции  $y = f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , находится по формуле

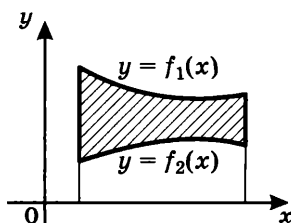
$$S = \int_a^b f(x)dx.$$



### 37. Площадь фигуры, заключенной на отрезке

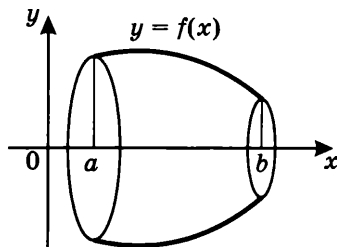
Площадь фигуры, заключенной на отрезке  $[a, b]$  между графиками функций  $y = f_1(x)$  и  $y = f_2(x)$  ( $f_1(x) \geq f_2(x)$ ), находится по формуле

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx.$$



### 38. Объем тела вращения

Объем тела вращения вычисляется по формуле  $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ .



### 39. Формула Лагранжа

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

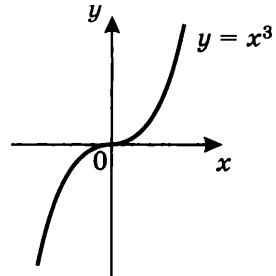
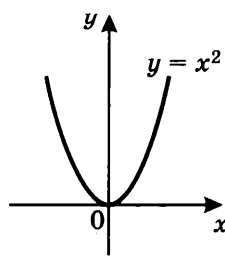
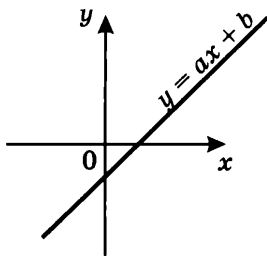
#### Характеристики элементарных функций

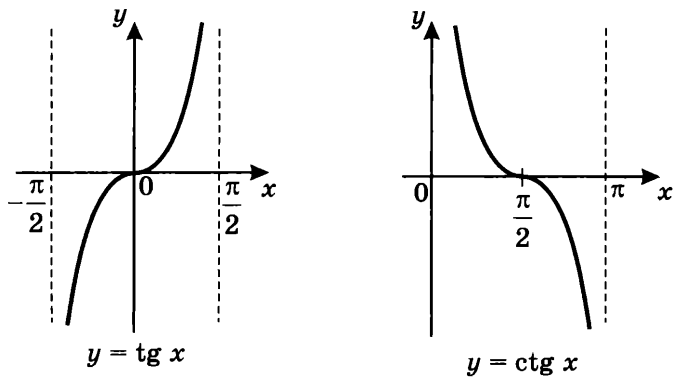
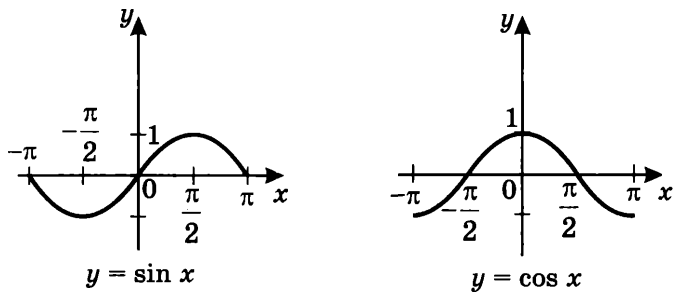
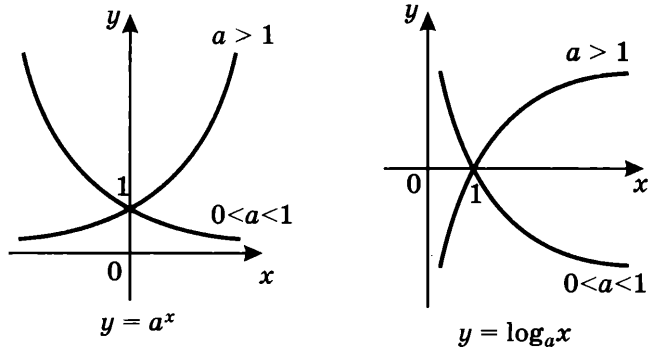
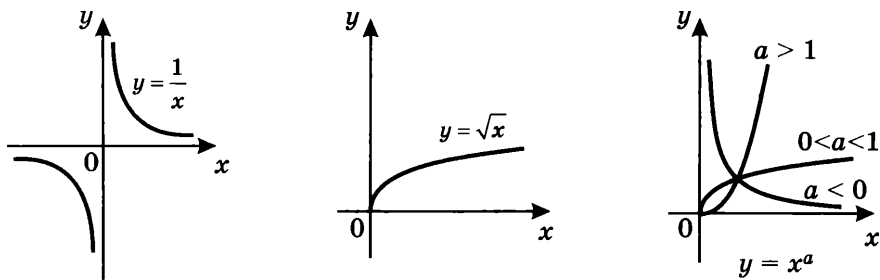
| Функция                    | ООФ*                             | ОЗФ**                            | Период | Четность         | Нули                        |
|----------------------------|----------------------------------|----------------------------------|--------|------------------|-----------------------------|
| $y = ax + b$               | $(-\infty; +\infty)$             | $(-\infty; +\infty)$             | —      | Неч. при $b = 0$ | $x = -\frac{b}{2a}$         |
| $y = x^2$                  | $(-\infty; +\infty)$             | $[0; +\infty)$                   | —      | Чет.             | $x = 0$                     |
| $y = x^3$                  | $(-\infty; +\infty)$             | $(-\infty; +\infty)$             | —      | Неч.             | $x = 0$                     |
| $y = \frac{1}{x}$          | $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ | $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ | —      | Неч.             | Нет                         |
| $y = \sqrt{x}$             | $[0; +\infty)$                   | $[0; +\infty)$                   | —      | —                | $x = 0$                     |
| $y = \sqrt[3]{x}$          | $(-\infty; +\infty)$             | $(-\infty; +\infty)$             | —      | Неч.             | $x = 0$                     |
| $y = x^a, a > 0$           | $[0; +\infty)$                   | $[0; +\infty)$                   | —      | —                | $x = 0$                     |
| $y = x^a, a < 0$           | $(0; +\infty)$                   | $(0; +\infty)$                   | —      | —                | Нет                         |
| $y = a^x$                  | $(-\infty; +\infty)$             | $(0; +\infty)$                   | —      | —                | Нет                         |
| $y = \log_a x$             | $(0; +\infty)$                   | $(-\infty; +\infty)$             | —      | —                | $x = 1$                     |
| $y = \sin x$               | $(-\infty; +\infty)$             | $[-1; 1]$                        | $2\pi$ | Неч.             | $x = \pi n$                 |
| $y = \cos x$               | $(-\infty; +\infty)$             | $[-1; 1]$                        | $2\pi$ | Чет.             | $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ |
| $y = \operatorname{tg} x$  | $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$   | $(-\infty; +\infty)$             | $\pi$  | Неч.             | $x = \pi n$                 |
| $y = \operatorname{ctg} x$ | $x \neq \pi n$                   | $(-\infty; +\infty)$             | $\pi$  | Чет.             | $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ |

Примечание. ООФ — область определения функции.

ОЗФ — область (множество) значений функции.

#### Характеристики элементарных функций





## 40. Комбинаторика. Бином Ньютона

1. *Перестановки* — комбинации, состоящие из одних и тех же элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

*Обозначения:*  $P_n, P(n)$  — число всех возможных перестановок из  $n$  элементов.

Если все  $n$  элементов различны, то число всех *перестановок без повторений* определяется по формуле

$$P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$$

( $n!$  — символ для обозначения произведения  $n$  первых чисел натурального ряда. Читается «эн факториал». По определению считают  $0! = 1$ ).

Если среди  $n$  элементов имеется  $p$  элементов одного вида,  $q$  — другого,  $r$  — третьего и т. д., то число всех *перестановок с повторениями* определяется формулой

$$P_n = (p, q, r, \dots) = \frac{n!}{p!q!r!}.$$

2. *Размещения из  $n$  элементов по  $k$*  — комбинации, составленные из  $n$  данных элементов по  $k$  элементов в каждой; при этом два размещения считаются различными, если они отличаются либо элементами, либо их порядком.

*Обозначение:*  $A_n^k$  — число всех размещений из  $n$  элементов по  $k$ .

Если среди  $n$  элементов нет одинаковых и повторения одного и того же элемента не допускаются, то число *размещений без повторений* определяется формулой

$$A_n^k = A_n^{k-1}(n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!} = n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1).$$

Если все  $n$  элементов различны, но в размещениях допускаются повторения, то число *размещений с повторениями* определяется формулой

$$A_n^{k(\text{повт})} = n^k.$$

3. *Сочетания из  $n$  элементов по  $k$*  — комбинации по  $k$  элементов из данных  $n$ , отличающиеся одна от другой хотя бы одним элементом.

*Обозначения:*  $C_n^k$  или  $\binom{n}{k}$  — число всех сочетаний из  $n$  элементов

по  $k$ .

Для  $k$  различных элементов из  $n$  различных

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}.$$

Для  $k$  с повторениями из  $n$  различных

$$C_n^{k(\text{повт})} = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Соотношения между числом размещений, сочетаний и перестановок

$$C_n^k = \frac{P_n}{P_k P_{n-k}} = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

#### 4. Бином Ньютона

$$(x \pm a)^n = x^n \pm nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}a^3 + \dots + (\pm 1)^n a^n,$$

или

$$(x \pm a)^n = C_n^0 x^n a^0 \pm C_n^1 x^{n-1} a^1 + C_n^2 x^{n-2} a^2 \pm C_n^3 x^{n-3} a^3 + \dots + (\pm 1)^n C_n^n x^0 a^n,$$

или

$$(x \pm a)^n = \binom{n}{0} x^n a^0 \pm \binom{n}{1} x^{n-1} a^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} a^2 \pm \binom{n}{3} x^{n-3} a^3 + \dots + (\pm 1)^n \binom{n}{n} x^0 a^n.$$

Во второй и третьей формулах для симметрии мы определили

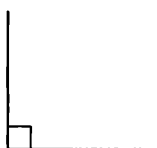
$$C_n^0 = C_n^n = 1.$$

# КРАТКИЕ СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ГЕОМЕТРИИ

Часть 1

## ПЛАНИМЕТРИЯ

### 41. Классификация углов



Прямой угол



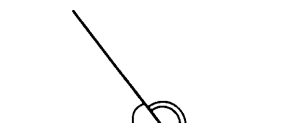
Острый угол



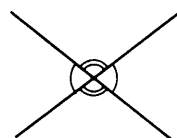
Тупой угол



Развернутый угол



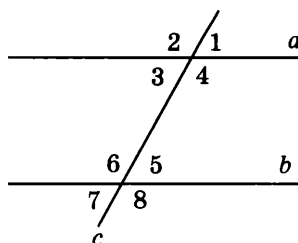
Смежные углы



Вертикальные углы

### 42. Углы при параллельных прямых

( $a \parallel b$ ,  $c$  — секущая)



1. Соответственные углы:  $\angle 1$  и  $\angle 5$ ;  $\angle 2$  и  $\angle 6$ ;  $\angle 3$  и  $\angle 7$ ;  $\angle 4$  и  $\angle 8$ .  
Каждые два соответственных угла равны.
2. Внутренние накрест лежащие углы:  $\angle 3$  и  $\angle 5$ ;  $\angle 4$  и  $\angle 6$ .



3. Внешние накрест лежащие углы:  $\angle 1$  и  $\angle 7$ ;  $\angle 2$  и  $\angle 8$ .

Каждые два накрест лежащих угла равны.

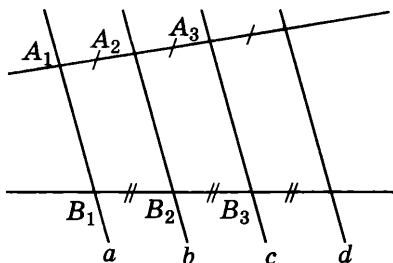
4. Внутренние односторонние углы:  $\angle 3$  и  $\angle 6$ ;  $\angle 4$  и  $\angle 5$ .

5. Внешние односторонние углы:  $\angle 1$  и  $\angle 8$ ;  $\angle 2$  и  $\angle 7$ .

Каждая пара односторонних углов равна в сумме  $180^\circ$ .

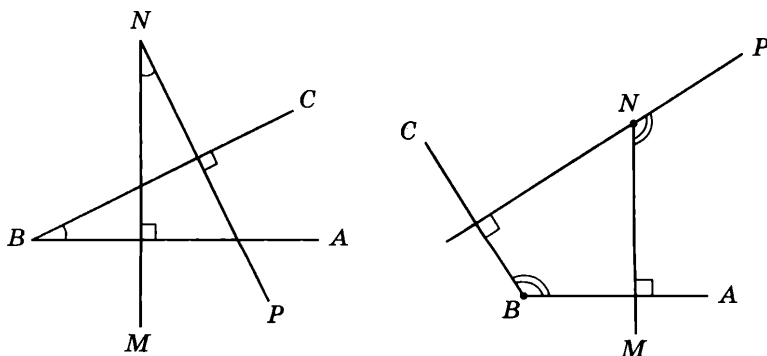
### 43. Теорема Фалеса

$$a \parallel b \parallel c \parallel d$$



Если  $A_1A_2 = A_2A_3 = \dots$ , то  $B_1B_2 = B_2B_3 = \dots$

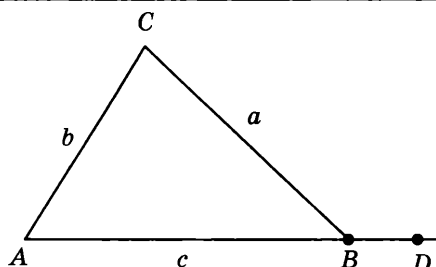
### 44. Равенство углов со взаимно перпендикулярными сторонами



Если  $AB \perp MN$  и  $BC \perp NP$ , то  $\angle ABC = \angle MNP$ .

### 45. Произвольный треугольник

( $a, b, c$  — стороны,  $\alpha, \beta, \gamma$  — противолежащие им углы;  $p$  — полупериметр;  $R$  — радиус описанной окружности;  $r$  — радиус вписанной окружности;  $S$  — площадь;  $h_a$  — высота, проведенная к стороне  $a$ ;  $l_a$  — биссектриса;  $m_a$  — медиана)



1.  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$  — сумма углов  $\triangle ABC$ .

2.  $\angle CBD = \angle A + \angle B$  — внешний угол  $\triangle ABC$ .

3. Неравенства треугольника:

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

4. Определение вида треугольника по его сторонам.

Пусть  $c$  — наибольшая сторона. Тогда:

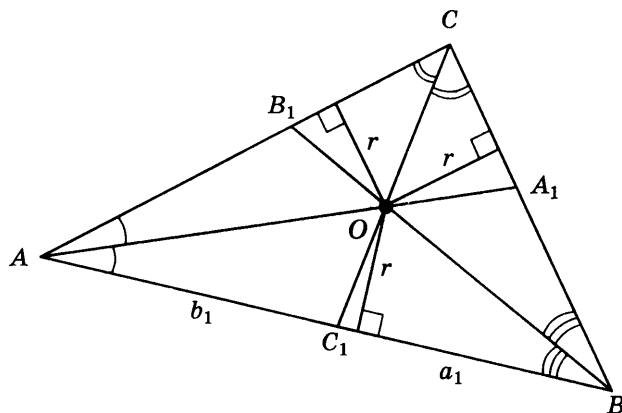
а) если  $c^2 < a^2 + b^2$ , то  $\triangle$  остроугольный;

б) если  $c^2 = a^2 + b^2$ , то  $\triangle$  прямоугольный;

в) если  $c^2 > a^2 + b^2$ , то  $\triangle$  тупоугольный.

5. Биссектрисы треугольника пересекаются в точке  $O$  — центре вписанной окружности.

$$BC = a, \quad AB = c, \quad AC = b.$$



6. Свойство биссектрисы внутреннего угла  $\triangle$ :

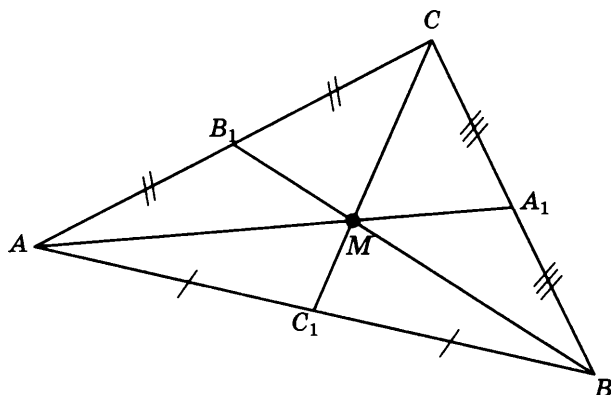
$$\frac{BC}{AC} = \frac{BC_1}{AC_1}, \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

7. Длина биссектрисы:

$$l_c = \sqrt{ab - a_1b_1}; \quad l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

8. Медианы треугольника пересекаются в одной точке (центр тяжести, или центроид  $\Delta$ ) и делятся в этой точке в отношении 2 : 1, считая от вершины:

$$AM : MA_1 = BM : MB_1 = CM : MC_1 = 2 : 1.$$



9. Длина медианы:

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

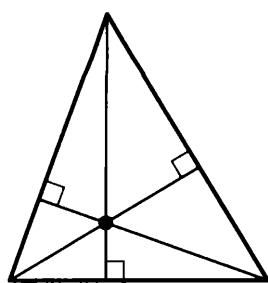
10. Длина высоты:

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

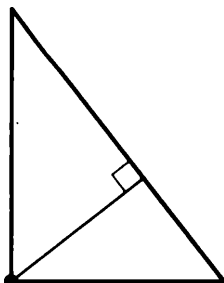
где  $a, b, c$  — стороны треугольника,  $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$  — полупериметр,

$h_c$  — высота, проведенная к стороне  $c$ .

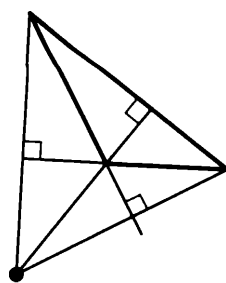
11. Высоты треугольника пересекаются в одной точке (ортоцентре  $\Delta$ ).



Остроугольный



Прямоугольный



Тупоугольный

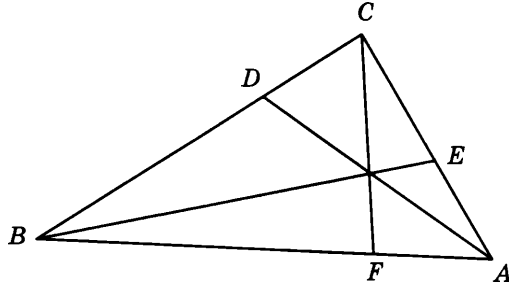
12. Зависимость между сторонами и высотами:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

13. Зависимость между высотами  $h_a$ ,  $h_b$ ,  $h_c$  и радиусом  $r$  вписанной окружности:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

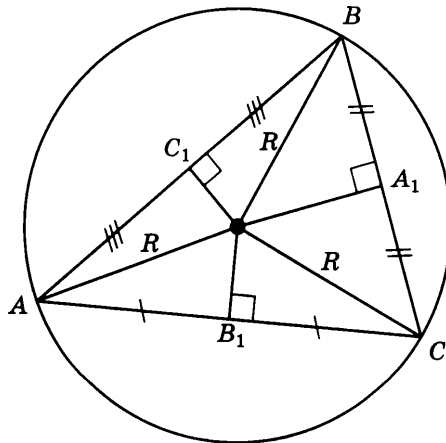
14. Теорема Чевы:



Для того чтобы прямые  $BE$ ,  $AD$  и  $CF$  пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

15. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника.



16. Теорема синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

17. Теорема косинусов:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

## 18. Площадь треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ah_a; S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma;$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ — формула Герона};$$

$$S = p \cdot r, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a+b+c);$$

$$S = \frac{abc}{4R}; S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

## 46. Прямоугольный треугольник

( $a, b$  — катеты;  $c$  — гипотенуза;  $a_c, b_c$  — проекции катетов на гипотенузу)

$$S = \frac{1}{2}ab; S = \frac{1}{2}ch_c;$$

$$r = \frac{1}{2}(a+b-c); R = \frac{1}{2}c;$$

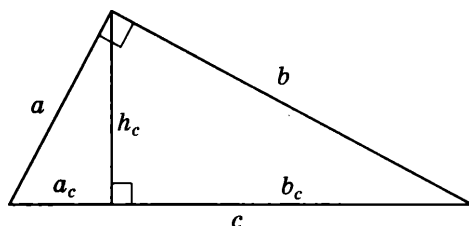
$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (теорема Пифагора);}$$

$$h_c^2 = a_c \cdot b_c; a^2 = a_c \cdot c;$$

$$b^2 = b_c \cdot c;$$

$$a = c \sin \alpha = c \cos \beta = b \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \operatorname{ctg} \beta;$$

$$c = 2m_c, \text{ где } m_c \text{ — медиана.}$$

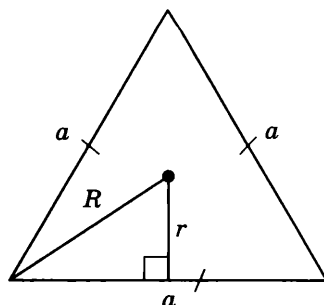


## 47. Равносторонний (правильный) треугольник

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; \quad a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3};$$

$$R = 2r; \quad R = \frac{a}{\sqrt{3}}; r = \frac{a}{2\sqrt{3}};$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

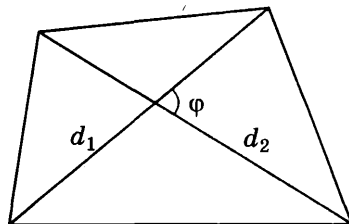


## 48. Четырехугольник

### 1. Произвольный выпуклый

( $d_1$  и  $d_2$  — диагонали,  $\varphi$  — угол между ними).

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$



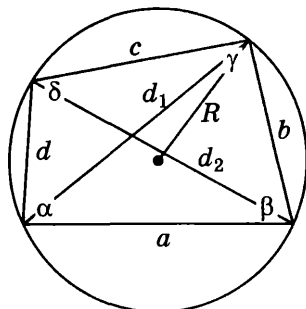
### 2. Вписанный

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ;$$

$ac + bd = d_1 d_2$  (теорема Птолемея).

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

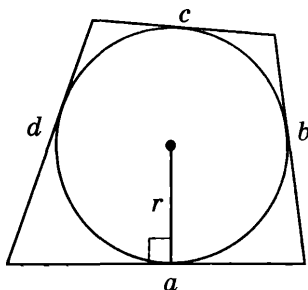
где  $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d)$ .



### 3. Описанный

$a + c = b + d$  — суммы противоположных сторон равны:

$$S = p \cdot r.$$



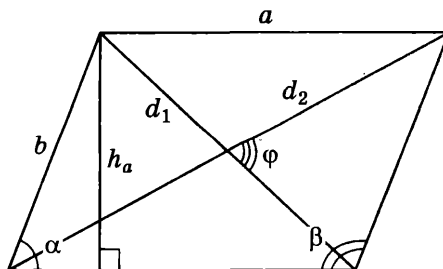
## 49. Параллелограмм

( $a$  и  $b$  — смежные стороны,  $\alpha$  — угол между ними;  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали,  $\varphi$  — угол между ними;  $h_a$  — высота к стороне  $a$ )

$\alpha + \beta = 180^\circ$  — сумма углов, прилежащих к одной стороне.

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$  — зависимость между сторонами и диагоналями.

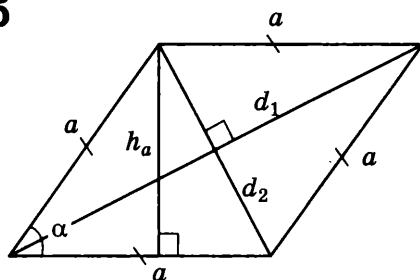
$$S = a \cdot h_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$



**50. Ромб**

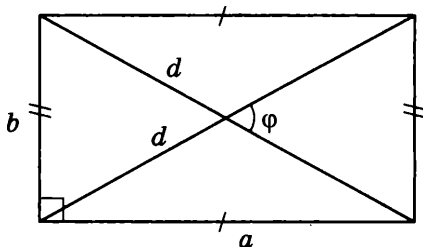
$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2;$$

$$S = ah_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2.$$

**51. Прямоугольник**

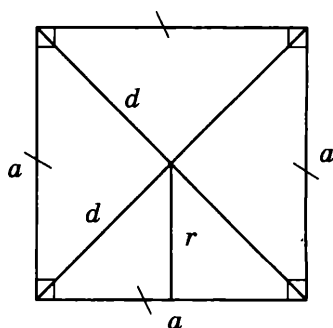
$$d^2 = a^2 + b^2;$$

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi.$$

**52. Квадрат**

$$d = a\sqrt{2}; \quad a = R\sqrt{2} = 2r;$$

$$R = \frac{1}{2}d = \frac{\sqrt{2}}{2}a; \quad S = a^2 = \frac{1}{2}d^2.$$

**53. Трапеция**

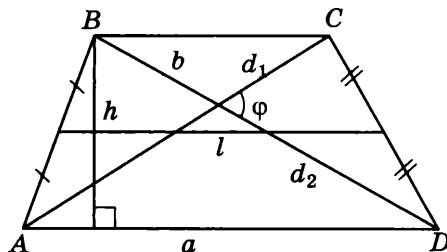
( $a$  и  $b$  — основания;  $h$  — высота;  $l$  — средняя линия;  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали,  $\varphi$  — угол между ними)

$$l = \frac{1}{2}(a + b);$$

$$\angle A + \angle D = 180^\circ;$$

$$\angle B + \angle C = 180^\circ.$$

$$S = lh = \frac{1}{2}(a + b)h = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin \varphi.$$



### 1. Равнобедренная трапеция

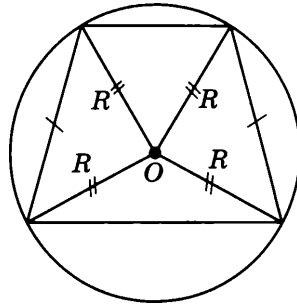
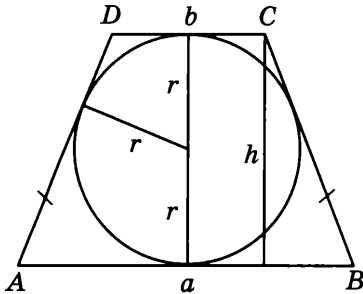
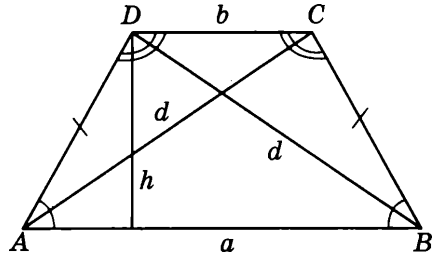
$$AC = BD = d; AD = BC;$$

$$\angle A = \angle B; \angle D = \angle C;$$

$$AE = \frac{1}{2}(a - b).$$

$$\text{Если } AC \perp BD, \text{ то } S = h^2.$$

$$AB + CD = 2AD.$$



$h = 2r$ ,  $r$  — радиус вписанной окружности.

$$h = \sqrt{ab}.$$

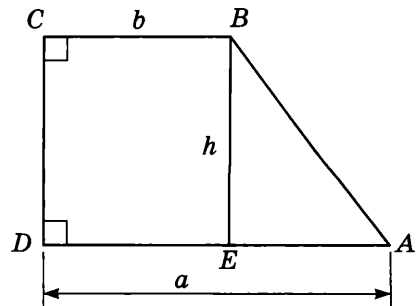
$R$  — радиус описанной окружности;

$O$  — центр окружности, описанной около треугольника, вершины которого совпадают с вершинами трапеции.

### 2. Прямоугольная трапеция

$$AE = a - b; \quad \angle D = \angle C = 90^\circ;$$

$$BE = CD = h \text{ — высота трапеции.}$$





## 54. Многоугольник (выпуклый)

( $n$  — число сторон (углов))

### Основные свойства:

- 1)  $180^\circ(n - 2)$  — сумма внутренних углов;
- 2)  $360^\circ$  — сумма внешних углов;
- 3)  $\frac{1}{2}n(n - 3)$  — число диагоналей.

## 55. Правильный многоугольник

( $a_n$  — сторона;  $R_n$  — радиус описанной окружности;  $r_n$  — радиус вписанной окружности;  $\alpha_n$  — величина угла;  $P_n$  — периметр;  $S_n$  — площадь)

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ; \quad a_n = 2R_n \sin \frac{180^\circ}{n};$$

$$a_n = 2r_n \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}; \quad r_n = R_n \cos \frac{180^\circ}{n};$$

$$P_n = na_n = 2nR_n \sin \frac{180^\circ}{n}; \quad S_n = \frac{1}{2}nR_n^2 \sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{1}{4}na_n^2 \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}.$$

## 56. Длина окружности. Площадь круга и его частей

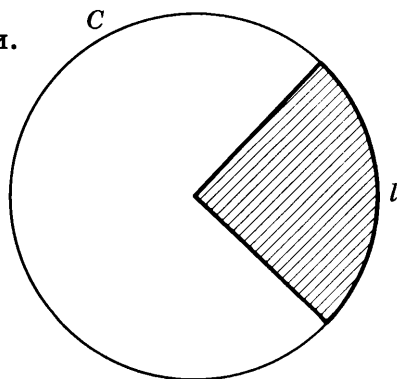
( $R$  — радиус окружности, круга;  $D$  — диаметр;  $C$  — длина окружности;  $l$  — длина дуги;  $\alpha$  — радианная мера центрального угла;  $n^\circ$  — градусная мера;  $S$  — площадь круга;  $S_{\text{сект.}}$  — площадь сектора)

$C = 2\pi R = \pi D$  — длина окружности.

$l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = R\alpha$  — длина дуги окружности.

$$S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2 = \frac{1}{2}CR; \quad \pi = \frac{C}{D} \approx 3,14;$$

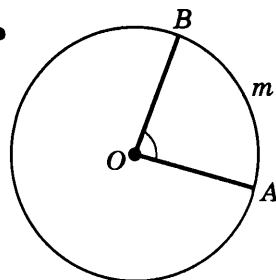
$$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2}R^2 \alpha.$$



## 57. Углы и окружность

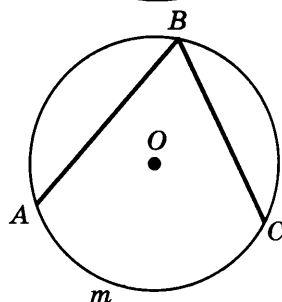
1. **Центральный угол** измеряется дугой, на которую он опирается:

$$\angle AOB = \cup AmB.$$



2. **Вписанный угол** измеряется половиной дуги, на которую он опирается:

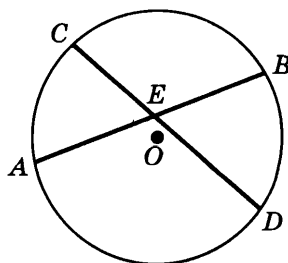
$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AmC.$$



## 58. Метрические отношения в окружности

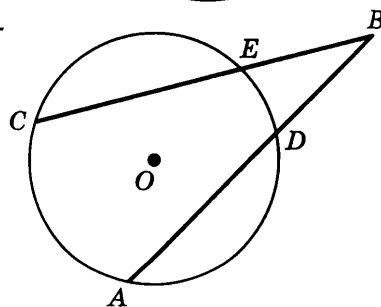
1. Если хорды AB и CD пересекаются в точке E, то

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$



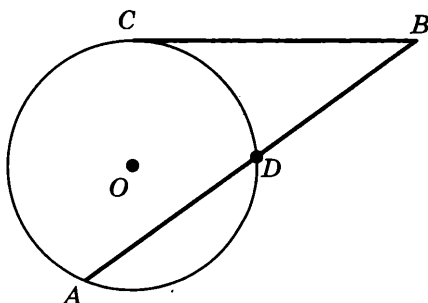
2. Если из точки B к окружности проведены две **секущие**, то

$$DB \cdot AB = EB \cdot CB.$$



3. Если из точки B к окружности проведены **секущая** и **касательная**, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной:

$$AB \cdot DB = BC^2.$$



## 59. Числовое выражение

**Числовое выражение** — запись, которая состоит из чисел, соединенных между собой знаками действий.

Например:  $-3,4 \cdot (-8) + 12 : 0,4$  — числовое выражение.

**Значением числового выражения** называется число, которое получено в результате выполнения действий, указанных в этом выражении.

Например: число 57,2 — значение выражения.

## 60. Стандартный вид числа

**Стандартный вид числа** — представление числа в виде  $a \cdot 10^n$ , где  $1 \leq a < 10$ ,  $n$  — целое число,  $a$  — мантисса числа,  $n$  — порядок числа.

Например:  $342,7 = 3,427 \cdot 10^2$ , т. е.  $a = 3,427$ ,  $n = 2$ ;

$0,009 = 9 \cdot 10^{-3}$ , т. е.  $a = 9$ ,  $n = -3$ .

## 61. Целая часть числа. Дробная часть числа

**Целой частью** числа  $x$  называется наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ , где  $x \in R$ .

**Обозначение:**  $[x]$ .

**Дробной частью** числа  $x$  называется разность между данным числом и его целой частью.

**Обозначение:**  $\{x\}$ , тогда  $\{x\} = x - [x]$ .

Например:  $[2,59] = 2$ ;

$\{2,59\} = 0,59$ ;  $[-8,4] = -9$ ;

$\{-8,4\} = -8,4 - (-9) = 0,6$ .

## 62. Погрешность приближения

**Абсолютная погрешность приближения** — модуль разности между точным значением величины и ее приближенным значением.

**Обозначение:**  $|x - a|$ , где  $x$  — точное,  $a$  — приближенное значение.

Например: запись  $e = 2,71 \pm 0,01$  означает, что  $|e - 2,71| \leq 0,01$ , т. е. число  $e = 2,71$  с точностью до 0,01.

**Относительная погрешность** — частное от деления абсолютной погрешности  $|x - a|$  на модуль приближенного значения величины.

Обозначение:  $\frac{|x-a|}{|a|}$ , где  $x$  — точное значение,  $a$  — приближенное.

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

Например: если  $x = 2,89$ ,  $a = 3$ , то относительная погрешность будет равна  $\frac{|3-2,89|}{|3|} = \frac{0,01}{3} = \frac{1}{300} \approx 0,003$ , или  $0,3\%$ .

### 63. Пропорции. Производные пропорции

Частное двух чисел называется **отношением** этих чисел.

Отношение показывает, во сколько раз I число больше II или какую часть I число составляет от II.

Два числа, произведение которых равно 1, называются **взаимно обратными**.

Например: 5 и  $\frac{1}{5}$ ; 0,4 и 2,5;  $7\frac{3}{4}$  и  $\frac{4}{31}$ .

Равенство двух отношений называется **пропорцией**:

$$a : b = c : d, \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Числа  $a$  и  $d$  называются **крайними членами**, а числа  $b$  и  $c$  — **средними членами** пропорции, где  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $d \neq 0$ .

**Основное свойство пропорции**: произведение крайних членов равно произведению средних.

Верно и обратное утверждение: если  $a : b = c : d$ , то  $a \cdot d = b \cdot c$ .

Если  $a \cdot d = b \cdot c$ , то числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  составляют пропорцию

$$a : b = c : d.$$

#### Производные пропорции

Если  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , то  $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ ;

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}; \quad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d};$$

$$\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}; \quad \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d};$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}.$$

## 64. Периодические дроби

При обращении обыкновенной дроби в десятичную может образоваться **бесконечная десятичная дробь**.

Бесконечная десятичная дробь, которая, начиная с некоторого разряда, образуется последовательным добавлением справа одного и того же числа, называется **периодической**, а повторяющееся число — ее **периодом**.

Периодические дроби, в которых повторение начинается сразу после запятой, называются **чистыми периодическими**.

Например:  $0,333... = 0,(3)$ ;  $21,666... = 21,(6)$ .

Периодические дроби, в которых повторение начинается не сразу после запятой, называются **смешанными периодическими**.

Например:  $7,23444... = 7,23(4)$ ;  $0,19535353... = 0,19(53)$ .

### 1. Обращение чистой периодической дроби в обыкновенную.

В качестве числителя обыкновенной дроби берут период чистой периодической дроби; в знаменателе пишут цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде.

Например:  $0,(8) = \frac{8}{9}$ ;

$$3,(14) = 3\frac{14}{99}.$$

### 2. Обращение смешанной периодической дроби в обыкновенную.

Для этого достаточно из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и полученную разность записать в числитель, а в знаменатель написать цифру 9 столько раз, сколько цифр между запятой и периодом.

Например:

$$2,63(13) = 2\frac{6313-63}{9900} = 2\frac{6250}{9900} = 2\frac{125}{198};$$

$$0,7(4) = \frac{74-7}{90} = \frac{67}{90};$$

$$8,(61) = \frac{861-8}{99} = \frac{853}{99};$$

$$4,3(65) = \frac{4365-43}{990} = \frac{4322}{990} = \frac{2161}{495}.$$

## 65. Проценты

**Процентом** называется сотая часть числа.

*Обозначение* — %.

Например: 3 %, 250 %, 0,02 %.

**Тысячная часть** числа называется **промилле**.

*Обозначение* — ‰.

1. Если данное число принять за 1, то 1 % составляет 0,01 этого числа, 35 % составляют 0,35 числа, или  $\frac{7}{20}$  этого числа, и т. д.

Следовательно, чтобы число процентов выразить в виде дроби, достаточно число процентов разделить на 100.

Например:  $86 \% = 86 : 100 = 0,86$ .

2. **Нахождение процентов данного числа.**

Чтобы найти  $a$  % от числа  $b$ , надо число  $b$  умножить на  $a/100$ .

Например: 24 % от 80 составляют  $\frac{80 \cdot 24}{100} = 19,2$ .

3. **Нахождение числа по его процентам.**

Если известно, что  $a$  % числа  $x$  равно  $b$ , то число  $x$  можно найти по формуле  $x = \frac{b}{a} \cdot 100$ .

Например, если 2 % вклада в сберкассу составляют 120 руб., то этот вклад равен  $\frac{120}{2} \cdot 100 = 6000$  руб.

4. **Нахождение процентного отношения чисел.**

Чтобы найти процентное отношение двух чисел —  $a$  и  $b$ , надо отношение этих чисел умножить на 100 %, т. е. вычислить

$$\left( \frac{a}{b} \right) \cdot 100 \%.$$

5. **Сложные проценты.**

Если в сберегательную кассу внесен вклад в  $a$  рублей и положен на  $p$  процентов годовых (т. е. проценты начисляются один раз в год), то

через  $n$  лет сумма составит  $a \left( 1 + \frac{p}{100} \right)^n$  руб.

**Замечание.** Здесь проценты насчитываются на проценты и поэтому называются сложными.

## 66. Деление числа на части прямо и обратно пропорционально данным

1. Чтобы разделить некоторое число пропорционально данным числам, надо разделить это число на сумму данных чисел и результат умножить на каждое из них.

Например, отрезок длиной 20 см разделить в отношении 2 : 3.

*Решение.*

$$\frac{20}{2+3} \cdot 2 = 8 \text{ (см)}; \quad \frac{20}{2+3} \cdot 3 = 12 \text{ (см)}.$$

2. Чтобы разделить число на части, обратно пропорциональные данным числам, достаточно разделить это число на части, прямо пропорциональные числам, обратным данным.

Например, число 54 разделить обратно пропорционально числам 3 и 6.

*Решение.*

Числа, обратные данным, относятся как  $\frac{1}{3} : \frac{1}{6} = 6 : 3$ . Тогда полу-

чим  $\frac{54}{9} \cdot 6 = 36; \quad \frac{54}{9} \cdot 3 = 18.$

### Часть 2

## СТЕРЕОМЕТРИЯ

### 67. Призма

#### 1. Произвольная призма

( $l$  — боковое ребро;

$P$  — периметр основания;

$S_{\text{осн}}$  — площадь основания;

$H$  — высота;

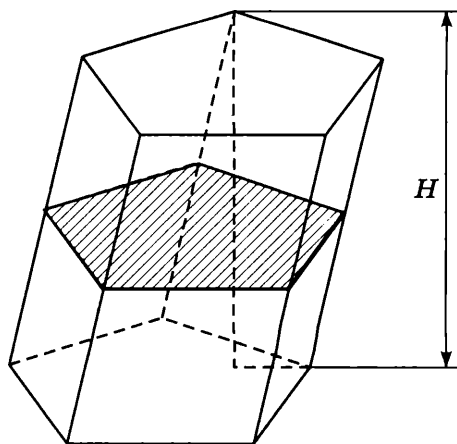
$P_{\text{сеч}}$  — периметр перпендикулярного сечения;

$S_{\text{сеч}}$  — площадь сечения;

$S_{\text{бок}}$  — площадь боковой поверхности;

$V$  — объем)

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{сеч}} \cdot l;$$



$$V = S_{\text{сеч}} \cdot H;$$

$$V = S_{\text{сеч}} \cdot l.$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$

## 2. Прямая призма

$$S_{\text{бок}} = P \cdot H;$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}};$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H.$$

*Замечание.* Для произвольного параллелепипеда справедливы те же формулы.

## 68. Прямоугольный параллелепипед

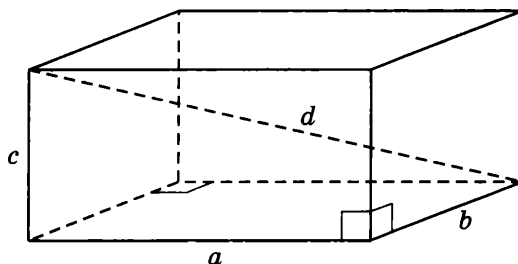
( $a, b, c$  — измерения;  $d$  — диагональ;  $S$  — поверхность)

$$S_{\text{бок}} = P \cdot H;$$

$$V = abc;$$

$$S = 2(ab + bc + ac);$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

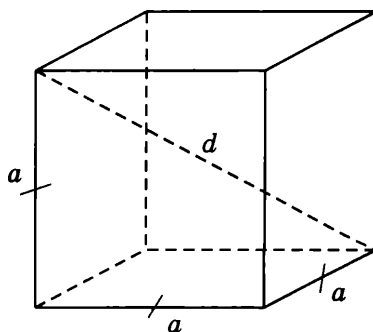


## 69. Куб ( $a$ — ребро)

$$V = a^3;$$

$$d = a\sqrt{3}.$$

$$S = 6a^2.$$



## 70. Пирамида

### 1. Произвольная пирамида

( $S_{\text{осн}}$  — площадь основания;  $H$  — высота;  $V$  — объем)

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$



## 2. Правильная пирамида

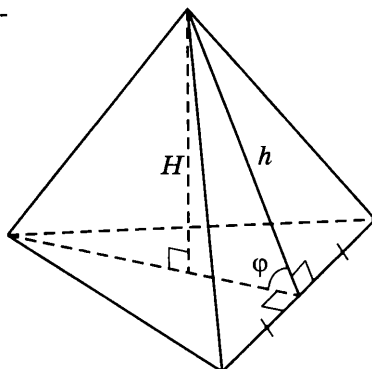
( $h$  — апофема;  $H$  — высота;  $\varphi$  — двугранный угол при основании)

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P \cdot h;$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha};$$

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}};$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H.$$



## 3. Произвольная усеченная пирамида

( $H$  — высота;  $S_1$  и  $S_2$  — площади оснований;  $V$  — объем)

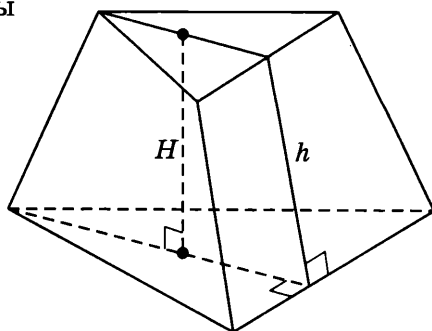
$$V = \frac{H}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

## 4. Правильная усеченная пирамида

( $h$  — апофема;  $P_1$  и  $P_2$  — периметры оснований)

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2) h;$$

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2.$$

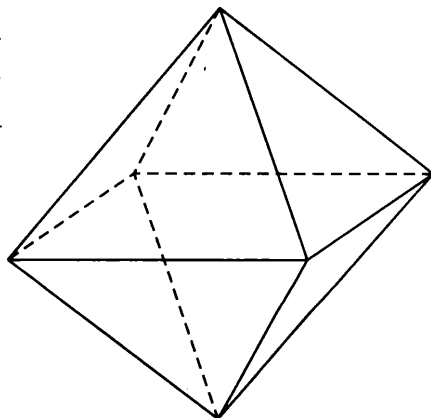


## 71. Октаэдр

Все 8 граней — равносторонние треугольники; 6 вершин, 12 ребер;  $V$  — объем;  $S$  — поверхность;  $a$  — сторона (ребро);  $R$  — радиус описанной сферы;  $r$  — радиус вписанной сферы.

$$V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}; \quad S = 2a^2 \sqrt{3};$$

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}; \quad r = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$



## 72. Цилиндр

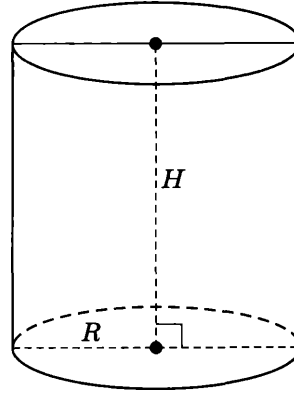
( $H$  — высота;  $R$  — радиус основания)

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH;$$

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}};$$

$$S_{\text{пол}} = 2\pi R(R + H);$$

$$V = \pi R^2 H.$$



## 73. Конус

( $H$  — высота;  $R$  — радиус основания;

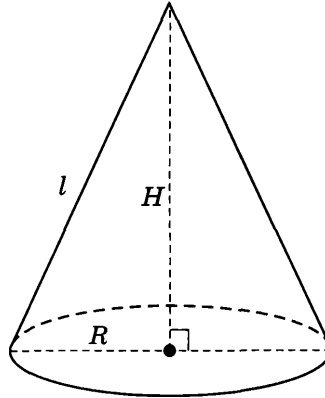
$l$  — образующая)

$$S_{\text{бок}} = \pi Rl;$$

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}};$$

$$S_{\text{пол}} = \pi R(R + l);$$

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$



## Усеченный конус

( $H$  — высота;  $l$  — образующая;

$R$  и  $r$  — радиусы оснований)

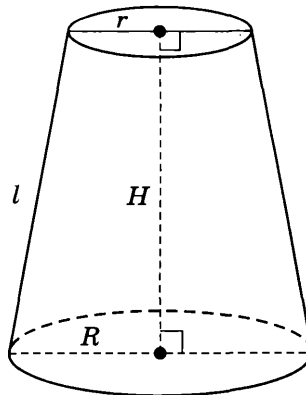
$$S_{\text{бок}} = \pi l(R + r);$$

$$S_{\text{пол}} = S_{\text{бок}} + S_1 + S_2;$$

$$S_1 = \pi R^2;$$

$$S_2 = \pi r^2;$$

$$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2).$$

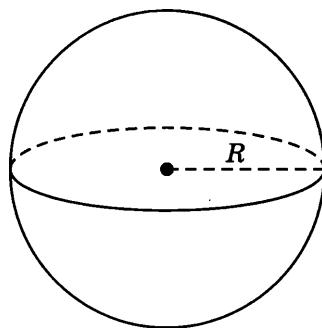


## 74. Шар, сфера

( $R$  — радиус шара;  $S$  — площадь сферической поверхности;  
 $V$  — объем;  $D$  — диаметр)

$$S = 4\pi R^2 = \pi D^2;$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$



## 75. Шаровой сегмент

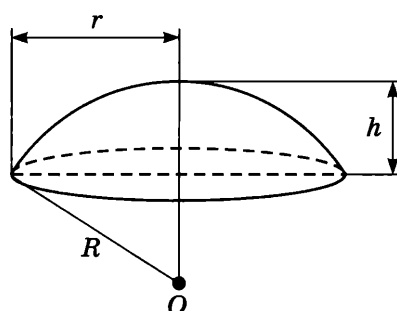
( $R$  — радиус шара;  $h$  — высота сегмента;  $S$  — площадь сферической поверхности сегмента;  $V$  — объем;

$r$  — радиус основания)

$$S = 2\pi Rh = \pi Dh = \pi(r^2 + h^2);$$

$$S_{\text{полн}} = \pi(2Rh + r^2) = \pi(h^2 + 2r^2);$$

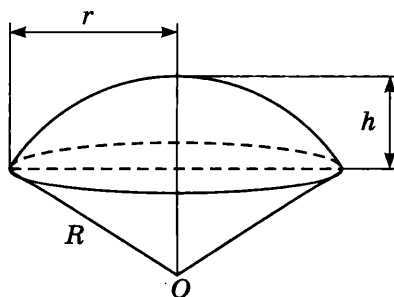
$$V = \pi h^2 \left( R - \frac{1}{3}h \right).$$



## 76. Шаровой сектор

$$S = \pi R(2h + r);$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{6}\pi D^2 h.$$



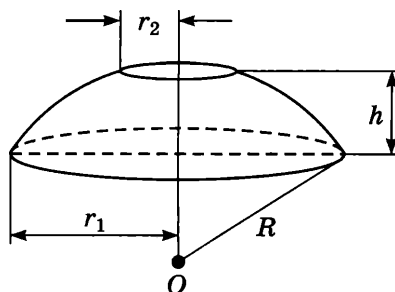
## 77. Шаровой пояс

( $h$  — высота пояса;  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы оснований)

$$S_{\text{бок}} = 2\pi Rh = \pi Dh;$$

$$S = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2);$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2).$$



# Условные обозначения

$N$  — множество натуральных чисел;

$Z$  — множество целых чисел;

$Z_0$  — множество целых неотрицательных чисел;

$Q$  — множество рациональных чисел;

$R$  — множество действительных чисел (числовая прямая);

$C$  — множество комплексных чисел;

$[a; b]$ , или  $a \leq x \leq b$  — замкнутый промежуток (или отрезок) с началом  $a$  и концом  $b$ ;

$(a; b)$ , или  $a < x < b$  — открытый промежуток (или интервал);

$(a; b]$ , или  $a < x \leq b$ ;  $[a; b)$ , или  $a \leq x < b$  — полуоткрытые промежутки (полуинтервалы);

$[a; +\infty)$ , или  $x \geq a$ ;  $(-\infty; b]$ , или  $x \leq b$  — лучи;

$(a; +\infty)$ , или  $x > a$ ;  $(-\infty; b)$ , или  $x < b$  — открытые лучи;

$(-\infty; +\infty) = R$  — числовая прямая;

$a = b$  —  $a$  равно  $b$ ;

$a \neq b$  —  $a$  не равно  $b$ ;

$a \approx b$  —  $a$  приближенно равно  $b$ ;

$a > b$  —  $a$  больше  $b$ ;

$a \geq b$  —  $a$  больше или равно  $b$ ;

$a < b$  —  $a$  меньше  $b$ ;

$a \leq b$  —  $a$  меньше или равно  $b$ ;

$a \in A$  —  $a$  принадлежит множеству  $A$ ;

$a \notin A$  —  $a$  не принадлежит множеству  $A$ ;

$B \subset A$  —  $B$  является подмножеством  $A$ ;

$A \cup B$  — объединение множеств  $A$  и  $B$ ;

$A \cap B$  — пересечение множеств  $A$  и  $B$ ;

$\emptyset$  — пустое множество;

% — процент;

‰ — промилле;

НОД ( $a; b$ ) — наибольший общий делитель чисел  $a$  и  $b$ ;

НОК ( $a; b$ ) — наименьшее общее кратное чисел  $a$  и  $b$ ;

$|a|$  — модуль (абсолютная величина) действительного числа  $a$ ;

$a^n$  —  $n$ -я степень числа  $a$ ;

$\sqrt[n]{a}$  — корень  $n$ -й степени из числа  $a$ ;

$\sqrt{a}$  — арифметический квадратный корень из числа  $a$ ;

$\pi \approx 3,1415$  — отношение длины окружности к диаметру;

$e \approx 2,71828$  — основание натурального логарифма;

$\log_a x$ , где  $x > 0$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$  — логарифм числа  $x$  по основанию  $a$ ;

$\lg x$  — десятичный логарифм числа  $x$ ;

$\ln x$  — натуральный логарифм числа  $x$ ;

$\sin x$  — синус  $x$ ;

$\cos x$  — косинус  $x$ ;

$\operatorname{tg} x$  — тангенс  $x$ ;

$\operatorname{ctg} x$  — котангенс  $x$ ;

$1/\sin x$  — cosecant  $x$ ;

$1/\cos x$  — secant  $x$ ;

$\arcsin x$  — арксинус  $x$ ;

$\arccos x$  — арккосинус  $x$ ;

$\operatorname{arctg} x$  — арктангенс  $x$ ;

$\operatorname{arcctg} x$  — арккотангенс  $x$ ;

$\Delta x$  — приращение аргумента;

$\Delta y$  — приращение функции;

$y', f'(x)$  — производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x$ ;

$y_{\text{наиб.}}, \max_{[a; b]} f(x)$  — наибольшее значение функции на отрезке  $[a; b]$ ;

$y_{\text{наим.}}, \min_{[a; b]} f(x)$  — наименьшее значение функции на отрезке  $[a; b]$ ;

$\int_a^b f(x) dx$  — интеграл функции  $f(x)$  от  $a$  до  $b$ ;

$A$  — точка  $A$ ;

$a, AB$  — прямая  $a$ , прямая  $AB$ ;

$\alpha, ABC$  — плоскость  $\alpha$ , плоскость  $ABC$ ;

$\triangle ABC$  — треугольник  $ABC$ ;

$\angle$  — знак угла, например,  $\angle(a; b)$ ,  $\angle ABC$ ;

$\parallel$  — знак параллельности, например,  $a \parallel b$ ,  $\alpha \parallel \beta$ ;

$\perp$  — знак перпендикулярности, например,  $a \perp b$ ,  $\alpha \perp \beta$ ;

$\cup$  — знак дуги, например,  $\cup AB$ ;

$\sim$  — знак подобия, например,  $\triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$ ;

$M(x)$  — точка  $M$  на координатной прямой имеет координату  $x$ ;

$M(x; y)$  — точка  $M$  в прямоугольной (декартовой) системе координат имеет абсциссу  $x$  и ординату  $y$ ;

$M(x; y; z)$  — точка в пространстве имеет абсциссу  $x$ , ординату  $y$ , аппликату  $z$ .

# Таблицы

## Квадраты натуральных чисел от 10 до 99

|   | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 1 | 100  | 121  | 144  | 169  | 196  | 225  | 256  | 289  | 324  | 361  |
| 2 | 400  | 441  | 484  | 529  | 576  | 625  | 676  | 729  | 784  | 841  |
| 3 | 900  | 961  | 1024 | 1089 | 1156 | 1225 | 1296 | 1369 | 1444 | 1521 |
| 4 | 1600 | 1681 | 1764 | 1849 | 1936 | 2025 | 2116 | 2209 | 2304 | 2401 |
| 5 | 2500 | 2601 | 2704 | 2809 | 2916 | 3025 | 3136 | 3249 | 3364 | 3481 |
| 6 | 3600 | 3721 | 3844 | 3969 | 4096 | 4225 | 4356 | 4489 | 4624 | 4761 |
| 7 | 4900 | 5041 | 5184 | 5329 | 5476 | 5625 | 5776 | 5929 | 6084 | 6241 |
| 8 | 6400 | 6561 | 6724 | 6889 | 7056 | 7225 | 7396 | 7569 | 7744 | 7921 |
| 9 | 8100 | 8281 | 8464 | 8649 | 8836 | 9025 | 9216 | 9409 | 9604 | 9801 |

## Кубы натуральных чисел от 1 до 9

| $n$   | 1 | 2 | 3  | 4  | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   |
|-------|---|---|----|----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $n^3$ | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 |

## Степени некоторых чисел

| $n$ | $n^4$ | $n^5$ | $n^6$  | $n^7$   | $n^8$    |
|-----|-------|-------|--------|---------|----------|
| 1   | 1     | 1     | 1      | 1       | 1        |
| 2   | 16    | 32    | 64     | 128     | 256      |
| 3   | 81    | 243   | 729    | 2187    | 6561     |
| 4   | 256   | 1024  | 4096   | 16384   | 65536    |
| 5   | 625   | 3125  | 15625  | 78125   | 390625   |
| 6   | 1296  | 7776  | 46656  | 279936  | 1679616  |
| 7   | 2401  | 16807 | 117649 | 823543  | 5764801  |
| 8   | 4096  | 32768 | 262144 | 2097152 | 16777216 |
| 9   | 6561  | 59049 | 531441 | 4782969 | 43046721 |

## Простые числа до 997

|     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 2   | 3   | 5   | 7   | 11  | 13  | 17  | 19  | 23  | 29  | 31  | 37  | 41  | 43  |
| 47  | 53  | 59  | 61  | 67  | 71  | 73  | 79  | 83  | 89  | 97  | 101 | 103 | 107 |
| 109 | 113 | 127 | 131 | 137 | 139 | 149 | 151 | 157 | 163 | 167 | 173 | 179 | 181 |
| 191 | 193 | 197 | 199 | 211 | 223 | 227 | 229 | 233 | 239 | 241 | 251 | 257 | 263 |
| 269 | 271 | 277 | 281 | 283 | 293 | 307 | 311 | 313 | 317 | 331 | 337 | 347 | 349 |
| 353 | 359 | 367 | 373 | 379 | 383 | 389 | 397 | 401 | 409 | 419 | 421 | 431 | 433 |
| 439 | 443 | 449 | 457 | 461 | 463 | 467 | 479 | 487 | 491 | 499 | 503 | 509 | 521 |
| 523 | 541 | 547 | 557 | 563 | 569 | 571 | 577 | 587 | 593 | 599 | 601 | 607 | 613 |
| 617 | 619 | 631 | 641 | 643 | 647 | 653 | 659 | 661 | 673 | 677 | 683 | 691 | 701 |
| 709 | 719 | 727 | 733 | 739 | 743 | 751 | 757 | 761 | 769 | 773 | 787 | 797 | 809 |
| 811 | 821 | 823 | 827 | 829 | 839 | 853 | 857 | 859 | 863 | 877 | 881 | 883 | 887 |
| 907 | 911 | 919 | 929 | 937 | 941 | 947 | 953 | 967 | 971 | 977 | 983 | 991 | 997 |

# ЛИТЕРАТУРА

*Балаян Э. Н.* Геометрия. Научись решать задачи различными способами. Профильный уровень. — Ростов н/Д: Феникс, 2023.

*Балаян Э. Н.* Математика. 200 вариантов разноуровневых задач для подготовки к ЕГЭ, олимпиадам. — Ростов н/Д: Феникс, 2014.

*Балаян Э. Н.* Научись решать уравнения различными способами. Профильный уровень. — Ростов н/Д: Феникс, 2022.

*Балаян Э. Н.* Математика. Разбор заданий для подготовки к ЕГЭ с анализом типичных ошибок. 10–11 классы. Профильный уровень. — 2-е изд. — Ростов н/Д: Феникс, 2024.

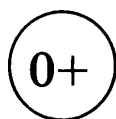
*Балаян Э. Н.* Математика. Решение неравенств повышенной сложности методом рационализации. — Ростов н/Д: Феникс, 2015.

*Балаян Э. Н., Каспаров Г. Л.* Математика. Уравнения и неравенства. Подготовка к ЕГЭ. Профильный уровень. — Ростов н/Д: Феникс, 2020.

# СОДЕРЖАНИЕ

|   |     |
|---|-----|
| Предисловие .....   | 3   |
| <i>Часть 1.</i> Задачи базового и среднего уровней сложности .....                      | 5   |
| <i>Часть 2.</i> Задачи повышенной сложности .....                                       | 45  |
| <i>Часть 3.</i> «Нестандартные» задачи повышенной сложности .....                       | 82  |
| <i>Часть 4.</i> Решения .....   | 117 |
| <i>Часть 5.</i> 10 вариантов для подготовки к ЕГЭ.                                      |     |
| Профильный уровень .....  | 296 |
| Решение варианта 1 .....  | 327 |
| Ответы к частям 1–3 .....   | 341 |
| Ответы к тестам .....   | 356 |
| <i>Приложение 1.</i> Краткие справочные материалы по алгебре<br>и началам анализа ..... | 359 |
| <i>Приложение 2.</i> Краткие справочные материалы по геометрии .....                    | 383 |
| Условные обозначения .....  | 403 |
| Таблицы .....   | 405 |
| Литература .....  | 406 |





*Учебное издание*

**Балаян Эдуард Николаевич**

# **МАТЕМАТИКА**

**Пособие для подготовки к ЕГЭ  
и дополнительному экзамену**

**10–11 классы**

***Профильный уровень***

Ответственный редактор *С. А. Осташов*

Формат 70 100/16. Бумага газетная.

Тираж 3000 экз. Заказ № 4580.

**Издатель и изготовитель:** ООО «Феникс».

Юр. и факт. адрес: 344011, Россия, Ростовская обл.,

г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, д. 150

Тел/факс: (863) 261-89-65, 261-89-50

Изготовлено в России. Дата изготовления: 06.2024. Срок годности не ограничен.

**Отпечатано** в АО «Первая Образцовая Типография»

Филиал «УЛЬЯНОВСКИЙ ДОМ ПЕЧАТИ».

Юр. адрес: 124498, г. Москва, вн. тер. г. муниципальный округ Старое Крюково,

г. Зеленоград, пр-кт Георгиевский, д. 5, помещ. 8/1Т.

Факт. адрес: 432980, Россия, Ульяновская обл., г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14.