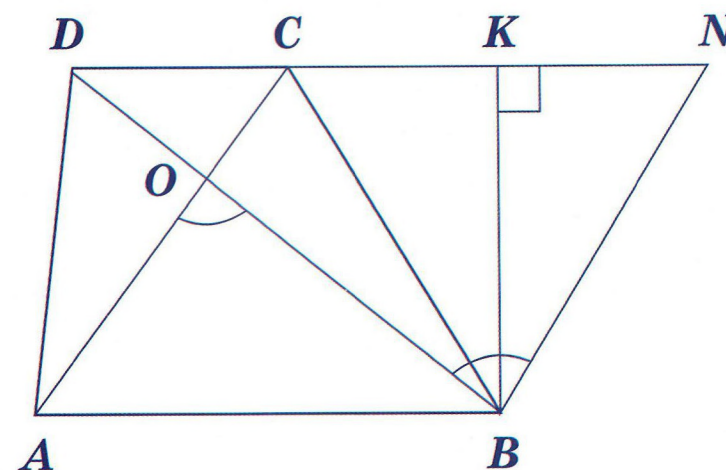


# Математика

## Подготовка к ЕГЭ

### Планиметрия. Стереометрия

#### РАЗБОР ЗАДАНИЙ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ



#### ПРОФИЛЬНЫЙ УРОВЕНЬ

- 150 задач с решением
- 200 задач для самостоятельного решения
- Краткие теоретические сведения

# 10–11

## классы

Предлагаемая мини-серия состоит из пособий, содержащих разбор заданий с кратким и развернутым ответами, предназначенных для подготовки к ЕГЭ. Каждое из пособий представляет тему или комплект тем, соответствующих профильному уровню. Каждая тема сопровождается краткой теорией, справочными материалами, образцами разнообразных примеров с подробными решениями и обоснованиями. В каждой теме приводятся примеры для самостоятельного решения, а в конце пособия — ответы для контроля правильности решения. Пособия предназначены старшеклассникам для эффективной подготовки и успешной сдачи экзамена, учителям математики и репетиторам.



ИЗДАТЕЛЬСТВО  
**ФЕНИКС**  
ХОРОШИЕ КНИГИ





**Э. Н. Балаян**

# **МАТЕМАТИКА**

## **ПОДГОТОВКА К ЕГЭ**

### **ПЛАНИМЕТРИЯ. СТЕРЕОМЕТРИЯ**

*Разбор заданий с развернутым ответом*

**10–11 классы**

*Профильный уровень*

- ◆ 150 задач с решениями
- ◆ 200 задач для самостоятельного решения
- ◆ Краткие теоретические сведения

Ростов-на-Дону

 **еникс**  
2024

**УДК 373.167.1:51**

**ББК 22.1я72**

**КТК 444**

**Б20**

**Балаян Э. Н.**

**Б20 Математика. Подготовка к ЕГЭ. Планиметрия. Стереометрия : разбор заданий с развернутым ответом : 10–11 классы : профильный уровень / Э. Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2024. — 223 с. : ил. — (Большая перемена).**

**ISBN 978-5-222-41787-4**

В предлагаемом пособии представлен материал профильного уровня для эффективной подготовки старшеклассников и выпускников к ЕГЭ по математике.

Это задания по планиметрии и стереометрии, содержащие задачи повышенного и высокого уровней сложности, предназначенные для выпускников, поступающих в престижные вузы.

На многочисленных примерах даны подробные решения и обоснования задач, как и требуется на экзамене, рассмотрены различные типы и методы их решения.

В конце каждого параграфа приведены задачи для самостоятельного решения. Почти все задачи по планиметрии — авторские.

Рассмотрены задачи на применение метода координат.

Пособие адресовано учащимся старших классов, абитуриентам, учителям математики, слушателям подготовительных отделений вузов, студентам — будущим учителям математики, методистам и репетиторам.

**УДК 373.167.1:51**

**ISBN 978-5-222-41787-4**

**ББК 22.1я72**

© Балаян Э. Н., 2024

© Оформление: ООО «Феникс», 2024

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие посвящено решению задач профильного уровня. Задачи охватывают основные разделы планиметрии и стереометрии.

Пособие состоит из четырех разделов.

В разделе 1 представлен материал из планиметрии. Здесь рассмотрены подробные решения задач на вписанные и описанные окружности, связанные с треугольниками и четырехугольниками, способы нахождения различных элементов геометрических фигур — высот, медиан, биссектрис, радиусов вписанных и описанных окружностей.

В разделе 2 приводятся задачи по стереометрии, вызывающие наибольшие затруднения у старшеклассников и абитуриентов.

Следует отметить, что многие выпускники, как правило, обходят решения геометрических задач. Сложности вызывают прежде всего выполнение чертежа, построение, не говоря уже о трудностях при нахождении идеи решения.

В этом разделе приводятся также решения задач на применение метода координат, который в обычных школах не изучается.

В конце каждого параграфа приведены задачи для самостоятельного решения, а ответы к ним — в конце пособия.

В разделах 3, 4 приводятся краткие теоретические сведения по курсу геометрии для 7–11 классов, сопровождаемые определениями, теоремами, основными свойствами и необходимыми справочными материалами.



# ПЛАНИМЕТРИЯ

## § 1. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

### 1.1. Треугольники

**Пример 1.** В  $\triangle ABC$  известно, что  $AC + BC = 28$ ,  $S_{\triangle ABC} = 98$ .

а) Докажите, что  $\triangle ABC$  — прямоугольный.

б) Найдите сторону квадрата, вписанного в  $\triangle ABC$ , если две его вершины лежат на стороне  $AB$ .

*Решение.*

а) По условию задачи  $AC + BC = 28$ .

Пусть  $AC = x$ , тогда  $BC = 28 - x$ .

Так как  $S_{\triangle ABC} = 98$ , получим

$$\frac{1}{2} AC \cdot BC \sin \angle C = 98,$$

$$\frac{1}{2} x(28 - x) \sin \angle C = 98,$$

$$x^2 - 28x + \frac{196}{\sin \angle C} = 0.$$

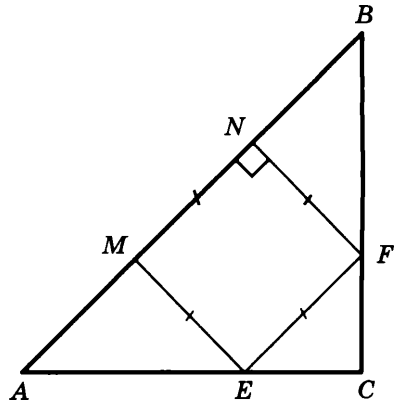
$$\frac{D}{4} = 14^2 - \frac{196}{\sin \angle C} \geq 0, \quad 196 \left( 1 - \frac{1}{\sin \angle C} \right) \geq 0,$$

$$1 - \frac{1}{\sin \angle C} \geq 0, \quad \sin \angle C \neq 0, \quad \sin \angle C \geq 1, \quad \text{откуда } \sin \angle C = 1, \text{ т. е. } \angle C = 90^\circ.$$

Значит,  $\triangle ABC$  — прямоугольный.

б) Так как  $\sin \angle C = 1$ , то  $\frac{D}{4} = 0$ , тогда  $AC = BC = 28 : 2 = 14$ ,

т. е.  $\triangle ABC$  — равнобедренный и прямоугольный. Если  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ , то  $\angle AEM = \angle BFN = \angle CEF = \angle EFC = 45^\circ$ , тогда  $AM = MN = NB$ .



$$\text{Но } AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{14^2 + 14^2} = 14\sqrt{2}.$$

$$\text{Значит, } MN = \frac{1}{3}AB = \frac{14\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{14\sqrt{2}}{3}.$$

**Пример 2.** В равнобедренном  $\triangle ABC$  ( $AB = BC$ ) проведены биссектрисы  $AN$ ,  $CM$ ,  $BD$ .

а) Докажите, что  $\triangle DMN$  — равнобедренный.

б) Найдите  $S_{\triangle DMN}$ , если  $S_{\triangle ABC} = 121$ ,

$$\cos \angle BAC = \frac{3}{5}.$$

*Решение.*

а) Рассмотрим  $\triangle MAC$  и  $\triangle NAC$ .  $\angle MAC = \angle ACN$  (по свойству равнобедренного  $\triangle ABC$ ),  $AC$  — общая сторона,  $\angle ACM = \angle CAN$ , так как  $AN$  и  $CM$  — биссектрисы (по условию).

Значит,  $\triangle MAC = \triangle ACN$  по II признаку (по стороне и прилежащим к ней углам). Тогда  $AM = CN$ . Заметим, что  $\triangle MAD = \triangle NCD$  по I признаку (по двум сторонам и углу между ними),  $AM = CN$  (по доказанному),  $\angle MAD = \angle NCD$  и  $AD = DC$ , так как в равнобедренном  $\triangle ABC$  биссектриса  $BD$ , проведенная к основанию  $AC$ , является медианой и высотой. Тогда  $DM = DN$ , т. е.  $\triangle DMN$  — равнобедренный с основанием  $MN$ , ч. т. д.

б) По условию  $\cos \angle BAC = \frac{3}{5}$ .

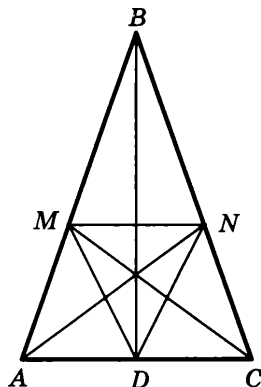
Пусть  $AD = 3x$ ,  $AB = 5x$ . Так как  $AN$  — биссектриса, то по свойству биссектрисы  $\frac{AB}{AC} = \frac{BN}{NC}$ , где  $AC = 2AD = 6x$ ,  $NC = BC - BN = 5x - BN$ .

$$\text{Тогда получим } \frac{5x}{6x} = \frac{BN}{5x - BN}, \text{ или } \frac{BN}{5x - BN} = \frac{5}{6}, \text{ или}$$

$$6BN = 25x - 5BN, \text{ или } 11BN = 25x, \text{ откуда } BN = \frac{25}{11}x.$$

$$\text{Так как } \triangle BMN \sim \triangle ABC \text{ (по двум углам), то } \frac{BN}{BC} = k = \frac{25}{11}x : 5x = \frac{5}{11},$$

где  $k$  — коэффициент подобия.



Но отношение площадей подобных треугольников равно  $k^2$ ,

т. е.  $S_{\Delta BMN} = \left(\frac{5}{11}\right)^2$ ,  $S_{\Delta ABC} = \frac{25}{121} \cdot 121 = 25$ .

Пусть  $\angle BAC = \angle BCA = \alpha$ .

$$S_{\Delta AMD} = S_{\Delta CND} = \frac{1}{2} AM \cdot AD \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} (AB - BM) \cdot 3x \cdot \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2} \left( 5x - \frac{25}{11}x \right) \cdot 3x \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{30}{11}x \cdot 3x \cdot \sin \alpha = \frac{45}{11}x^2 \sin \alpha.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 5x \cdot 6x \cdot \sin \alpha = 15x^2 \sin \alpha.$$

По условию задачи  $S_{\Delta ABC} = 121$ , тогда  $15x^2 \sin \alpha = 121$ , откуда

$$\sin \alpha = \frac{121}{15}x^2.$$

Следовательно,  $\frac{S_{\Delta AMD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\frac{45}{11}x^2 \sin \alpha}{15x^2 \sin \alpha} = \frac{45}{11 \cdot 15} = \frac{3}{11} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_{\Delta AMD} = S_{\Delta CND} = S_{\Delta ABC} - 2S_{\Delta AMD} - S_{\Delta BMN} = 121 - 2 \cdot 33 - 25 = 30.$$

Ответ: б) 30.

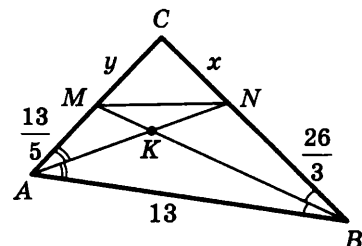
**Пример 3.** Биссектрисы  $AN$  и  $BM$   $\Delta ABC$  пересекаются в точке  $K$ .

а) Докажите, что  $\Delta ABC$  — прямоугольный, если  $AB = 13$ ,  $AM = \frac{13}{5}$ ,  $BN = \frac{26}{3}$ .

б) Найдите длину  $MN$ .

*Решение.*

а) Пусть  $CN = x$ ,  $CM = y$ . По свойству биссектрисы угла треуголь-



ника имеем  $\frac{AC}{AB} = \frac{CN}{BN}$ , или  $\frac{y + \frac{13}{5}}{13} = \frac{x}{\frac{26}{3}}$ , или  $y + \frac{13}{5} = \frac{3x}{2}$ .

Аналогично  $\frac{BC}{AB} = \frac{CM}{AM}$ , или  $\frac{x + \frac{26}{3}}{13} = \frac{y}{\frac{13}{5}}$ , или  $x + \frac{26}{3} = 5y$ .



Полученные равенства решаем как систему способом подстановки:

$$\begin{cases} y + \frac{13}{5} = \frac{3x}{2}, \\ x + \frac{26}{3} = 5y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{3x}{2} - \frac{13}{5}, \\ x + \frac{26}{3} = 5\left(\frac{3x}{2} - \frac{13}{5}\right). \end{cases}$$

Упростим II уравнение полученной системы:

$$x + \frac{26}{3} = \frac{15}{2}x - 13, \text{ или } \frac{15}{2}x - x = 13 + \frac{26}{3}, \text{ или } \frac{13}{2}x = \frac{65}{3}, \text{ или } \frac{1}{2}x = \frac{5}{3},$$

откуда  $x = \frac{10}{3}$ .

Тогда из I уравнения системы находим

$$y = \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{3} - \frac{13}{5} = 5 - \frac{13}{5} = \frac{12}{5}.$$

Значит,  $AC = AM + MC = \frac{13}{5} + \frac{12}{5} = 5$ ,  $BC = x + \frac{26}{3} = \frac{36}{3} = 12$ .

Так как  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , т. е.  $13^2 = 5^2 + 12^2$ , то  $\triangle ABC$  — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора).

б) Из прямоугольного  $\triangle MCN$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) имеем

$$MN = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2}, \text{ или}$$

$$MN = \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{3796}{9 \cdot 25}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 949}{9 \cdot 25}} = \frac{2}{15} \sqrt{949}.$$

Ответ: б)  $\frac{2}{15} \sqrt{949}$ .

**Пример 4.** В остроугольном  $\triangle ABC$  проведены высоты  $AN$  и  $BM$ .

а) Докажите, что  $\triangle CMN \sim \triangle ABC$ .

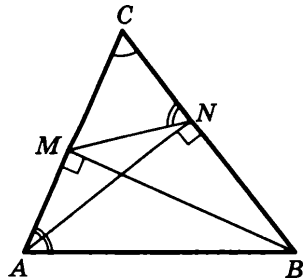
б) Найдите отношение радиусов окружностей, описанных около  $\triangle ABC$  и  $\triangle CMN$ , если  $S_{\triangle ABC} = 27$ ,  $S_{\triangle CMN} = 3$  и  $MN = 3\sqrt{2}$ .

*Решение.*

а) Так как  $\angle AMB = \angle ANB = 90^\circ$ , то  $AB$  — диаметр окружности, описанной около четырехугольника  $AMNB$ .

Тогда  $\angle MAB + \angle BNM = 180^\circ$ .

Значит,  $\angle MAB = \angle CAB = 180^\circ - \angle BNM = \angle CNM$ .



Выходит, что  $\triangle CMN \sim \triangle ABC$  — по двум углам ( $\angle C$  — общий,  $\angle CAB = \angle CNM$  по доказанному), ч. т. д.

б) Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, т. е.  $\frac{S_{\triangle CMN}}{S_{\triangle ABC}} = k^2 = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$ , откуда  $k = \frac{1}{3}$ .

Значит,  $AB = 3MN = 3 \cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ .

С другой стороны,  $k = \frac{CN}{AC} = \cos \angle C$  (из  $\triangle ACN$ ), тогда  $\cos \angle C = \frac{1}{3}$ ,

$$\sin \angle C = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Пусть  $R_1$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ ,  $R_2$  — около  $\triangle CMN$ .

$$\text{По теореме синусов } R_1 = \frac{AB}{2\sin \angle C} = \frac{9\sqrt{2} \cdot 3}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{27}{4}.$$

$$\text{Аналогично } R_2 = \frac{MN}{2\sin \angle C} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 3}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{9}{4}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{R_1}{R_2} = \frac{27}{4} \cdot \frac{4}{9} = 3.$$

Ответ: б) 3.

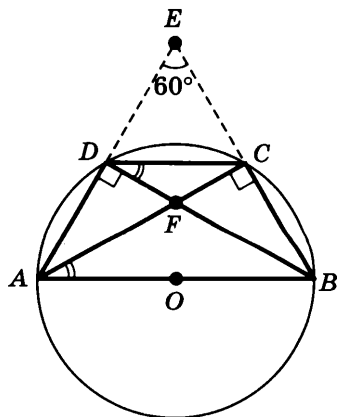
**Пример 5.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность, где  $AB$  — диаметр. Угол между прямыми  $AD$  и  $BC$  равен  $60^\circ$ .

а) Докажите, что  $\angle CFB = 60^\circ$ .

б) Найдите отношение  $CD : AB$ .

*Решение.*

а) Проведем диагонали  $AC$  и  $BD$  четырехугольника  $ABCD$ . Пусть  $F$  — точка их пересечения, а  $E$  — точка пересечения прямых  $AD$  и  $BC$ . Поскольку  $AB$  — диаметр окружности, то  $\triangle ACB$  и  $\triangle ADB$  — прямоугольные ( $\angle ADB$  и  $\angle ACB$  — вписанные, опирающиеся на диаметр).



Значит,  $\angle AFB + \angle CFB = \angle DFC + \angle CFB = 180^\circ$ , откуда  $\angle CFB = 180^\circ - \angle DFC$ .

В четырехугольнике  $DECF$   $\angle EDF = \angle ECF = 90^\circ$ ,  $\angle E = 60^\circ$ , тогда  $\angle DFC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

Значит,  $\angle CFB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ , ч. т. д.

б) Заметим, что  $\angle CAB = \angle BDC$  — как вписанные, опирающиеся на одну и ту же  $\cup CB$ ,  $\angle AFD = \angle CFB$  — как вертикальные, тогда  $\triangle AFB \sim \triangle DFC$  (по двум углам), причем коэффициент подобия  $k = \frac{CF}{BF} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ .

Следовательно,  $CD : AB = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ .

Ответ: б) 1 : 2.

**Пример 6.** В прямоугольном  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $AC = 12$ ,  $BC = 5$ , проведены медиана  $AM$  и биссектриса  $CD$ , пересекающиеся в точке  $E$ .

а) Докажите, что  $\frac{AE}{EM} = \frac{24}{5}$ .

б) Найдите  $S_{\triangle CEM}$ .

*Решение.*

а) Так как  $AC = 12$ ,  $BC = 5$  и  $\angle ACB = 90^\circ$ , то  $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ .

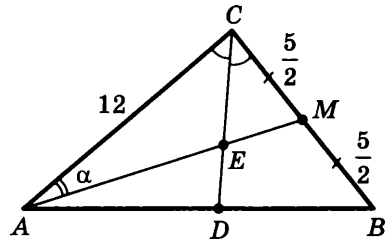
По условию задачи  $CD$  — биссектриса, тогда  $\angle ACD = \angle BCD = 45^\circ$ . Пусть  $\angle CAM = \alpha$ . Поскольку  $AM$  — медиана  $\triangle ABC$ , то  $CM = MB = \frac{5}{2}$ .

Из  $\triangle ACM$  имеем  $AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{144 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{601}}{2}$ .

Тогда  $\cos \alpha = \frac{AC}{AM} = \frac{24}{\sqrt{601}}$ .

По свойству биссектрисы  $\frac{AC}{CM} = \frac{AE}{EM} = \frac{12}{2,5} = \frac{24}{5}$ .

Значит,  $\frac{AE}{EM} = \frac{24}{5}$ , ч. т. д.





б) Так как  $AM = AE + EM = \frac{\sqrt{601}}{2}$  и  $\frac{AE}{EM} = \frac{24}{5}$  (по доказанному),

то получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{AE}{EM} = \frac{24}{5}, \\ AE + EM = \frac{\sqrt{601}}{2}. \end{cases}$$

Пусть  $AE = x$ ,  $EM = y$ .

$$\text{Имеем } \begin{cases} 5x = 24y, \\ y = \frac{\sqrt{601}}{2} - x; \end{cases} \quad 5x = 24 \cdot \left( \frac{\sqrt{601}}{2} - x \right), \text{ или } 5x = 12\sqrt{601} - 24x,$$

или  $29x = 12\sqrt{601}$ , откуда  $x = \frac{12\sqrt{601}}{29}$ . Для нахождения искомой

площади  $\triangle CEM$  остается найти длину  $CE$ . Из  $\triangle AEC$  (по теореме косинусов) имеем  $CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2AC \cdot AE \cdot \cos \alpha$ , или

$$CE^2 = 12^2 + \left( \frac{12\sqrt{601}}{29} \right)^2 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{12\sqrt{601}}{29} \cdot \frac{24}{\sqrt{601}},$$

$$CE^2 = 12^2 \cdot \left( 1 + \frac{601}{841} \right) - \frac{6912}{29},$$

$$CE^2 = 144 \cdot \frac{1442}{841} - \frac{6912}{29} = \frac{7200}{841}, \text{ откуда } CE = \frac{60\sqrt{2}}{29}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle CEM} = \frac{1}{2} CE \cdot CM \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{60\sqrt{2}}{29} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{75}{29}.$$

Ответ: б)  $\frac{75}{29}$ .

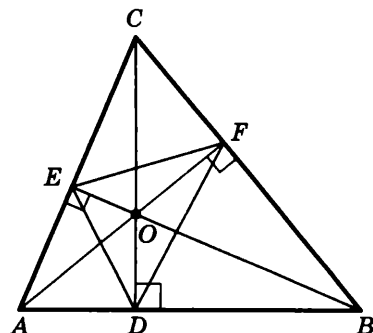
**Пример 7.** Основания высот остроугольного  $\triangle ABC$  служат вершинами другого  $\triangle DEF$ , периметр которого равен 8.

а) Докажите, что  $\triangle ABC \sim \triangle BDF$ .

б) Найдите  $S_{\triangle ABC}$ , если  $R = 3,5$ , где  $R$  — радиус описанной около  $\triangle ABC$  окружности.

*Решение.*

а) Пусть  $D$ ,  $E$  и  $F$  — основания высот  $\triangle ABC$ .



Так как  $\angle ODF = \angle OBF = \frac{\pi}{2} - \angle BCE$ , тогда  $\angle BDF = \frac{\pi}{2} - \angle ODF = \angle BCE$ , кроме того,  $\angle ABC$  — общий.

Значит,  $\triangle ABC \sim \triangle BDF$ , ч. т. д.

б) Пусть  $R$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ ,  $R_1$  — около  $\triangle BDF$ , тогда  $\frac{AC}{DF} = \frac{R}{R_1}$ , откуда  $DF = \frac{AC \cdot R_1}{R}$ , где  $R = 3,5$  (по условию задачи).

$$R_1 = \frac{1}{2}OB \text{ (} OB \text{ — диаметр), тогда } DF = \frac{AC \cdot OB}{2R} = \frac{AC \cdot (BE - OE)}{2R} = \frac{AC \cdot BE - AC \cdot OE}{2R}.$$

Но  $AC \cdot BE = 2S_{\triangle ABC}$ ,  $AC \cdot OE = 2S_{\triangle AOC}$ .

Значит,  $DF = \frac{1}{R}(S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AOC})$ . Аналогично  $EF = \frac{1}{R}(S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AOB})$  и

$$DE = \frac{1}{R}(S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BOC}).$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } DF + EF + DE &= \frac{1}{R}(3S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle AOC} + S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC})) = \\ &= \frac{1}{R}(3S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABC}) = \frac{2}{R}S_{\triangle ABC}. \end{aligned}$$

По условию задачи  $R = 3,5$ ,  $P_{\triangle DEF} = 8$ , тогда получим  $\frac{2}{3,5}S_{\triangle ABC} = 8$ ,

откуда  $S_{\triangle ABC} = 3,5 \cdot 4 = 14$ .

Ответ: б) 14.

**Пример 8.** В  $\triangle ABC$   $\angle A = 45^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $CD$ ,  $BM$  и  $AN$  — высоты треугольника.

а) Докажите, что  $\triangle BDN \sim \triangle ABC$ .

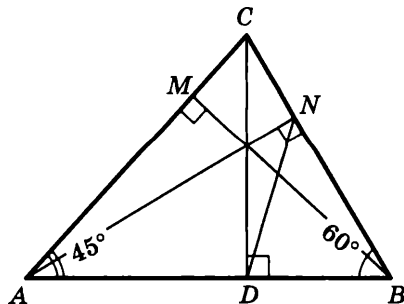
б) Найдите длину  $AB$ , если

$$AC = 6(\sqrt{3} - 1).$$

Решение.

а) Из  $\triangle BCD$ , где  $CD$  — высота, имеем  $BD = BC \cos 60^\circ = \frac{1}{2}BC$ .

Аналогично из  $\triangle ABN$  находим  $BN = AB \cos 60^\circ = \frac{1}{2}AB$ .



$$\text{Значит, } \frac{BD}{BN} = \frac{\frac{1}{2}BC}{\frac{1}{2}AB} = \frac{BC}{AB}.$$

Следовательно,  $\triangle BDN \sim \triangle ABC$  (по II признаку подобия), ч. т. д.

б) Из подобия треугольников следует, что  $k = \frac{BN}{AB} = \frac{1}{2}$ , тогда

$$DN = \frac{1}{2}AC.$$

Аналогично доказываем, что  $\triangle AMD \sim \triangle ABC$ , где коэффициент подобия  $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Значит,  $MD = \frac{\sqrt{2}}{2}BC$ . По теореме синусов имеем  $\frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ}$ ,

$$\text{или } \frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

По условию задачи  $AC = 6(\sqrt{3} - 1)$ , тогда  $BC = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}AC = \frac{6\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3}}$ .

Так как  $\angle C = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$ , то по теореме косинусов найдем длину  $AB$ :  $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos 75^\circ$ .

$$\text{Но } \cos 75^\circ = \cos (45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1).$$

Пусть для краткости  $AC = a$ ,  $BC = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a$ .

$$\begin{aligned} \text{Получим } AB^2 &= a^2 + \frac{2}{3}a^2 - 2a \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1) = \\ &= \frac{5}{3}a^2 - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}a^2 = a^2 \cdot \left( \frac{5}{3} - \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3} \right) = \frac{2+\sqrt{3}}{3}a^2, \text{ откуда } AB = a\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{3}}, \end{aligned}$$

где  $a = AC = 6(\sqrt{3} - 1)$  (по условию задачи).

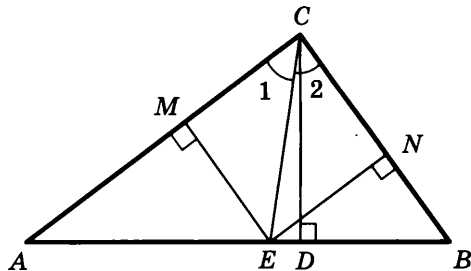
$$\text{Но } 2 + \sqrt{3} = \frac{1}{2}(1 + 2\sqrt{3} + 3) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)^2.$$

$$\text{Следовательно, } AB = 6(\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{6}} = \frac{6 \cdot (3 - 1)}{\sqrt{6}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = \frac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}.$$

Ответ: б)  $2\sqrt{6}$ .



**Пример 9.** В прямоугольном  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) из вершины  $C$  на гипотенузу  $AB$  опущены высота  $CD$  и биссектриса  $CE$ , длины которых равны соответственно 6 и 8. Из точки  $E$  опущены перпендикуляры  $EM$  и  $EN$ .



а) Докажите, что  $CMEN$  — квадрат.

б) Найдите  $S_{\triangle ABC}$ .

*Решение.*

а) По условию задачи  $EM \perp AC$  и  $EN \perp BC$ ,  $\angle 1 = \angle 2$ , так как  $CE$  — биссектриса,  $CE$  — общая сторона (гипотенуза).

Значит,  $\triangle CME = \triangle CNE$  (по гипотенузе и острому углу). Из равенства треугольников следует, что  $ME = NE$ , т. е.  $CMEN$  — квадрат, ч. т. д.

б) Из  $\triangle CME$ , где  $CE = 8$ ,  $MC = ME$ , имеем  $ME = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ ,

$$ME = NE = 4\sqrt{2}.$$

Пусть  $BC = x$ ,  $AC = y$ , тогда

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACE} + S_{\triangle CEB} = \frac{1}{2}y \cdot 4\sqrt{2} + \frac{1}{2}x \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(x + y).$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}xy.$$

$$\text{Значит, } 2\sqrt{2}(x + y) = \frac{1}{2}xy, \text{ или } 4\sqrt{2}(x + y) = xy.$$

Возведем обе части полученного равенства в квадрат:

$$32(x + y)^2 = x^2y^2.$$

$$\text{Наконец, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \cdot 6 = 3\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}xy, \text{ откуда } 36(x^2 + y^2) = x^2y^2.$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 32(x + y)^2 = x^2y^2, \\ 36(x^2 + y^2) = x^2y^2; \end{cases} \quad \begin{cases} (x + y)^2 = \frac{x^2y^2}{32}, \\ x^2 + y^2 = \frac{x^2y^2}{36}; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{x^2y^2}{32} - 2xy, \\ x^2 + y^2 = \frac{x^2y^2}{36}. \end{cases}$$

$$\text{Следовательно, } \frac{x^2y^2}{32} - 2xy = \frac{x^2y^2}{36}, \text{ или } x^2y^2 \left( \frac{1}{32} - \frac{1}{36} \right) = 2xy.$$

Так как  $x > 0$ ,  $y > 0$ , то получим  $xy \cdot \frac{36-32}{32 \cdot 36} = 2$ , или  $\frac{4}{32 \cdot 36} xy = 2$ ,

откуда  $xy = 2 \cdot 8 \cdot 36$ .

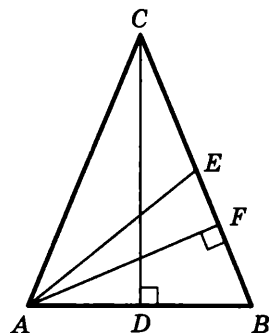
Значит,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8 \cdot 36 = 8 \cdot 36 = 288$ .

Ответ: б) 288.

**Пример 10.** В равнобедренном  $\triangle ABC$  длины высот  $CD$  и  $AF$ , опущенных на основание и боковую сторону, равны соответственно 24 и 13,44.

а) Докажите, что  $\frac{AB}{BC} = \frac{14}{25}$ .

б) Найдите длину медианы  $AE$ , опущенной на боковую сторону  $BC$ .



*Решение.*

а) Пусть  $AC = BC = x$ ,  $AB = y$ ,  $CD = m$ ,  $AF = n$ .

Заметим, что  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$ , или

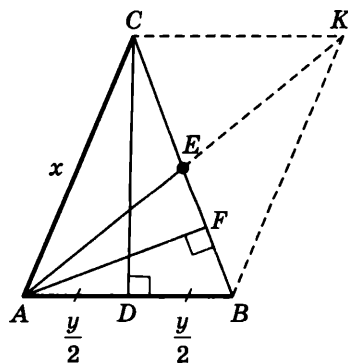
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} my. \quad (1)$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} CD \cdot AF = \frac{1}{2} nx. \quad (2)$$

Сравнивая правые части равенств (1) и (2), имеем  $\frac{1}{2} my = \frac{1}{2} nx$ , или  $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ .

По условию  $CD = m = 24$ ,  $AF = n = 13,44$ .

$$\begin{aligned} \text{Значит, } \frac{AB}{BC} &= \frac{y}{x} = \frac{13,44}{24} = 0,56 = \\ &= \frac{56}{100} = \frac{14}{25}, \text{ ч. т. д.} \end{aligned}$$



б) Построим  $\triangle ABC$  до параллелограмма  $ACKB$ . Пусть  $AE = EK = z$ . По свойству параллелограмма имеем  $AK^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2)$ , где  $AK = 2z$ ,  $BC = x$ ,  $AB = y$ ,  $AC = x$ , тогда  $4z^2 + x^2 = 2(x^2 + y^2)$ , или  $4z^2 = x^2 + 2y^2$ .

Из  $\triangle ADC$  по теореме Пифагора  $x^2 = \frac{1}{4} y^2 + m^2$ , или  $x^2 = \frac{1}{4} y^2 + 576$ .

Кроме того,  $\frac{y}{x} = \frac{14}{25}$ , откуда  $y = \frac{14}{25}x$ .

Получим систему уравнений 
$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{4}y^2 + 576, \\ y = \frac{14}{25}x. \end{cases}$$

Решая способом подстановки, имеем

$$x^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{14}{25}x\right)^2 + 576, \text{ или } x^2 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{14}{25}x\right)^2 = 576, \text{ или}$$

$$\left(x - \frac{7}{25}x\right)\left(x + \frac{7}{25}x\right) = 576, \text{ или } \frac{18}{25}x \cdot \frac{32}{25}x = 24^2, \text{ или}$$

$$\frac{2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 16}{25^2}x^2 = 24^2, \text{ или } \frac{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2}{25^2}x^2 = 24^2, \text{ или}$$

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{25}x = 24, \text{ откуда } x = \frac{25 \cdot 24}{24} = 25, \text{ тогда } y = \frac{14}{25} \cdot 25 = 14.$$

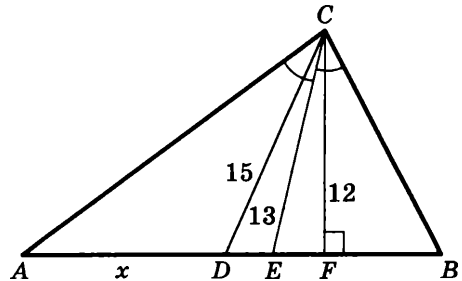
Следовательно,  $4z^2 = x^2 + 2y^2$ , или  $4z^2 = 25^2 + 2 \cdot 14^2$ ,

$$4z^2 = 625 + 392, 4z^2 = 1017, z^2 = \frac{1017}{4}, z = \frac{3\sqrt{113}}{2}.$$

Значит,  $AE = \frac{3\sqrt{113}}{2}$ .

Ответ: б)  $\frac{3\sqrt{113}}{2}$ .

**Пример 11.** В  $\triangle ABC$  из вершины  $C$  на сторону  $AB$  проведены медиана, биссектриса и высота, длины которых равны соответственно 15, 13 и 12.



а) Докажите, что  $P_{\triangle CDE} : P_{\triangle CEF} = 16 : 15$ .

б) Найдите длину  $AB$ .

*Решение.*

а) Пусть в  $\triangle ABC$   $CD = 15$  — медиана,  $CE = 13$  — биссектриса,  $CF = 12$  — высота.

Обозначим  $AD = BD = x$ , тогда  $AF = x + DF$ ,  $FB = x - DF$ ,  $AE = x + DE$ ,  $BE = x - DE$ .

Поскольку  $CE$  — биссектриса, то имеем  $\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}$ .



$$\text{Из } \triangle CEF \quad EF = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5;$$

$$\text{из } \triangle CDF \quad DF = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9, \text{ тогда } DE = DF - EF = 9 - 5 = 4.$$

$$\text{Следовательно, } P_{\triangle CDE} = 15 + 13 + 4 = 32, P_{\triangle CEF} = 13 + 5 + 12 = 30.$$

$$\text{Значит, } P_{\triangle CDE} : P_{\triangle CEF} = 32 : 30 = 16 : 15, \text{ ч. т. д.}$$

$$\text{б) } AF = x + 9, FB = x - 9, AE = x + 4, BE = x - 4.$$

$$\text{Кроме того, из } \triangle ACF \quad AC^2 = (x + 9)^2 + 12^2,$$

$$\text{а из } \triangle CBF \quad BC^2 = (x - 9)^2 + 12^2.$$

$$\text{Но } \frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}, \text{ или } \frac{AE^2}{BE^2} = \frac{AC^2}{BC^2}, \text{ или } \frac{(x+4)^2}{(x-4)^2} = \frac{(x+9)^2 + 12^2}{(x-9)^2 + 12^2}. \quad (1)$$

Вычитая по единице из обеих частей равенства (1), получим

$$\frac{(x+4)^2 - (x-4)^2}{(x-4)^2} = \frac{(x+9)^2 + 144 - (x-9)^2 - 144}{(x-9)^2 + 144}, \text{ или}$$

$$\frac{16x}{(x-4)^2} = \frac{36x}{(x-9)^2 + 144}, \quad x \neq 0.$$

$$\frac{4}{(x-4)^2} = \frac{9}{(x-9)^2 + 144}, \text{ или } 4(x-9)^2 + 576 = 9(x-4)^2.$$

Полученное уравнение запишем в виде

$$9(x-4)^2 - 4(x-9)^2 = 576, \text{ или}$$

$$(3x-12-2x+18)(3x-12+2x-18) = 576, \text{ или}$$

$$(x+6)(5x-30) = 576, \text{ или } 5(x+6)(x-6) = 576,$$

$$5(x^2 - 36) = 576, \quad x^2 - 36 = \frac{576}{5}, \text{ или } x^2 = 36 + \frac{576}{5} = \frac{756}{5},$$

$$\text{откуда } x = \sqrt{\frac{756}{5}} = 6\sqrt{\frac{21}{5}}, \quad x > 0, \text{ или } x = \frac{6}{5}\sqrt{105}, \quad AB = 2x = \frac{12}{5}\sqrt{105}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{12}{5}\sqrt{105}.$$

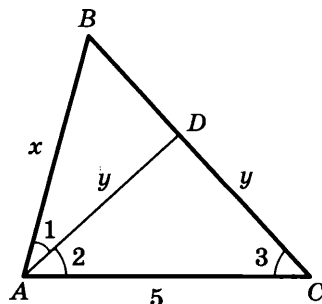
**Пример 12.** В  $\triangle ABC$   $\angle A = 2\angle C$ , сторона  $BC$  на 2 больше  $AB$ , а  $AC = 5$ .

а) Докажите, что  $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ .

б) Найдите отношение  $\frac{P_{\triangle ABD}}{P_{\triangle ADC}}$ .

*Решение.*

а) Проведем биссектрису  $AD$   $\angle A$ , тогда  $\angle 1 = \angle 2$ , а так как  $\angle A = 2\angle C$ , то  $\angle 2 = \angle 3$ .



Значит,  $\triangle ADC$  — равнобедренный с основанием  $AC = 5$ . Тогда  $\triangle ABD \sim \triangle ABC$  — по двум углам ( $\angle B$  — общий,  $\angle 1 = \angle 2$ ), ч. т. д.

б) Пусть  $AB = x$ ,  $AD = DC = y$ , тогда  $BC = x + 2$ ,  $BD = BC - DC = x + 2 - y$ .

Из подобия  $\triangle ABD$  и  $\triangle ABC$  имеем  $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}$ , или

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}.$$

Для нахождения  $x$  и  $y$  имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{x+2} = \frac{y}{5}, \\ \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x = xy + 2y, \\ 5x + 10 - 5y = xy, \end{cases} \quad \text{откуда, вычитая из I уравнения II,}$$

получим  $5y - 10 = 2y$ , или  $3y = 10$ ,  $y = \frac{10}{3}$ , тогда  $5x = \frac{10}{3}x + \frac{20}{3}$ , или  $15x - 10x = 20$ , или  $5x = 20$ , откуда  $x = 4$ .

Следовательно,  $P_{\triangle ABD} = 4 + \frac{8}{3} + \frac{10}{3} = 10$ ,

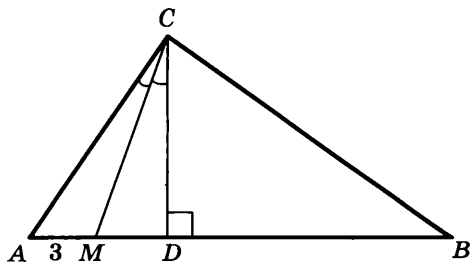
$$P_{\triangle ADC} = \frac{10}{3} + \frac{10}{3} + 5 = \frac{35}{3}, \text{ тогда } \frac{P_{\triangle ABD}}{P_{\triangle ADC}} = 10 \cdot \frac{3}{35} = \frac{6}{7}.$$

Ответ: б)  $\frac{6}{7}$ .

**Пример 13.** В прямоугольном  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ) из вершины  $C$  проведена высота  $CD$ , а в  $\triangle ADC$  проведена биссектриса  $CM$  так, что  $AM = 3$ ,  $MB = 12$ .

а) Докажите, что  $BC = BM$ .

б) Найдите длину биссектрисы  $CM$ .



*Решение.*

а) Так как  $\triangle ABC$  — прямоугольный и  $CD$  — высота, то  $\angle B = \angle ACD$ . Пусть  $\angle B = \alpha$ . По условию  $CM$  — биссектриса  $\angle ACD$ , тогда  $\angle ACM = \angle MCD = \frac{\alpha}{2}$ .

Значит,  $\angle MCB = \angle MCD + \angle DCB = \frac{\alpha}{2} + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$ .

$$\text{В } \triangle MCD \angle CMD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Выходит, что  $\angle MCB = \angle CMB$ , т. е.  $\triangle CBM$  — равнобедренный. Значит,  $BC = BM$ , ч. т. д.

б) Так как  $MB = 12$ , то  $BC = BM = 12$ .

Пусть в  $\triangle CMD$   $CM = x$ ,  $MD = y$ ,  $CD = h$ . Из  $\triangle CDB$  по теореме Пифагора имеем

$$h^2 = 12^2 - (12 - y)^2. \quad (1)$$

По свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, получим

$$CD^2 = AD \cdot BD, \text{ или } h^2 = (3 + y)(12 - y). \quad (2)$$

Сравнивая правые части равенств (1) и (2), имеем

$$12^2 - (12 - y)^2 = (3 + y)(12 - y), \text{ или } y(24 - y) = 36 + 9y - y^2, \text{ или}$$

$$24y = 36 + 9y, \text{ или } 15y = 36, \text{ откуда } y = \frac{12}{5}.$$

$$\text{Тогда } h^2 = \left(3 + \frac{12}{5}\right)\left(12 - \frac{12}{5}\right) = \frac{27}{5} \cdot \frac{48}{5}, \quad h = \frac{\sqrt{3 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 16}}{5} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 4}{5} = \frac{36}{5}.$$

$$\text{Из } \triangle CMD \text{ находим } x^2 = h^2 + y^2, \text{ или } x^2 = \left(\frac{36}{5}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = \frac{1440}{25},$$

$$x = \frac{12\sqrt{10}}{5}, \text{ т. е. } CM = \frac{12\sqrt{10}}{5}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{12\sqrt{10}}{5}.$$

**Пример 14.** Через точку  $M$ , взятую на стороне  $AB$   $\triangle ABC$ , проведена прямая  $ME \parallel AC$  так, что  $BE : CE = 1 : 3$ .

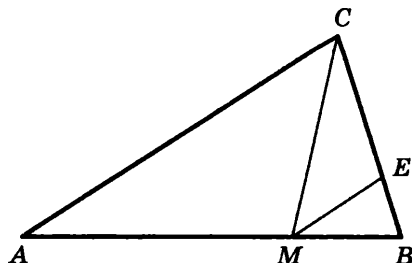
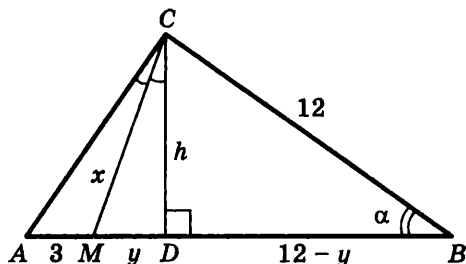
а) Докажите, что  $\triangle MEB \sim \triangle ABC$ .

б) Найдите отношение

$$S_{\triangle CEM} : S_{\triangle ABC}.$$

*Решение.*

а) Из точки  $M$  проведем прямую параллельно  $BC$  до пересечения со стороной  $AC$  в точке  $F$ .



Так как  $ME \parallel AC$  (по условию) и  $MF \parallel BC$  (по построению), то  $FCEM$  — параллелограмм (по определению). Тогда  $CM$  — диагональ и  $\triangle CFM = \triangle CEM$  (по трем сторонам).

$\triangle MEB \sim \triangle ABC$  (по двум углам), так как  $\angle B$  — общий и  $\angle A = \angle BME$  — как соответственные при параллельных прямых  $AC$  и  $ME$  и секущей  $AB$ , ч. т. д.

$$б) S_{\triangle AFM} + S_{\triangle MEB} = S_{\triangle ABC} - 2S_{\triangle CEM}. \quad (1)$$

По условию задачи  $\frac{CE}{BE} = 3$ . Согласно теореме Фалеса имеем

$$\frac{CE}{BE} = \frac{AM}{BM} = 3.$$

Из подобия  $\triangle AFM$  и  $\triangle ABC$  (по двум углам) и  $\triangle MEB$  и  $\triangle ABC$  имеем

$$\frac{BC}{MF} = \frac{AB}{AM} = \frac{AM + MB}{AM} = 1 + \frac{MB}{AM} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3};$$

$$\frac{AC}{ME} = \frac{AB}{MB} = \frac{AM + MB}{MB} = \frac{AM}{MB} + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Известно, что площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон, тогда получим

$$\frac{S_{\triangle AFM}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{FM^2}{BC^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \quad \text{и} \quad \frac{S_{\triangle MEB}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{ME^2}{AC^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}.$$

$$\text{Значит, } S_{\triangle AFM} + S_{\triangle MEB} = \frac{9}{16} S_{\triangle ABC} + \frac{1}{16} S_{\triangle ABC} = \frac{5}{8} S_{\triangle ABC}.$$

$$\text{Учитывая равенство (1), имеем } S_{\triangle ABC} - 2S_{\triangle CEM} = \frac{5}{8} S_{\triangle ABC}, \text{ или}$$

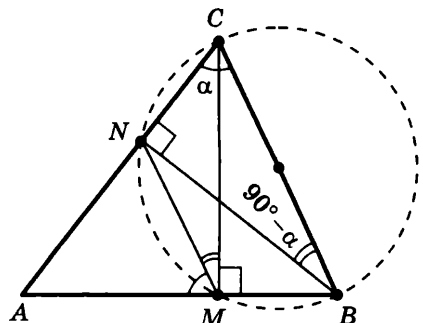
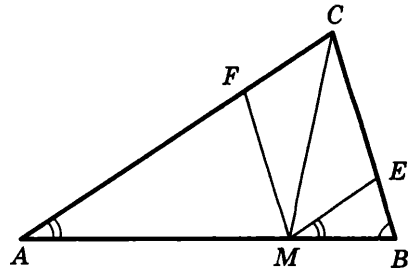
$$\frac{3}{8} S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle CEM}, \text{ откуда } S_{\triangle CEM} : S_{\triangle ABC} = 3 : 16.$$

Ответ: б) 3 : 16.

**Пример 15.** В остроугольном  $\triangle ABC$  проведены высоты  $CM$  и  $BN$ .

а) Докажите, что  $\angle ACB = \angle AMN$ .

б) Найдите длину  $BC$ , если  $P_{\triangle ABC} = 25$ ,  $P_{\triangle AMN} = 20$ , а радиус окружности, описанной около  $\triangle AMN$ , равен 4.



*Решение.*

а) Так как  $\triangle BCM$  и  $\triangle BCN$  — прямоугольные и  $BC$  — общая гипотенуза, то точки  $B, C, N, M$  лежат на одной окружности.

Пусть  $\angle ACB = \alpha$ , тогда  $\angle CBN = 90^\circ - \alpha$  (по свойству прямоугольного треугольника).

Заметим, что  $\angle CBN = \angle CMN = 90^\circ - \alpha$  (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу  $CN$ ). Тогда  $\angle AMN = 90^\circ - \angle CMN = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$ . Следовательно,  $\angle ACB = \angle AMN$ , ч. т. д.

б)  $\triangle AMN \sim \triangle ABC$  (по II признаку).

$$\text{Тогда } \frac{P_{\triangle AMN}}{P_{\triangle ABC}} = k = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Кроме того, } \frac{AM}{AC} = \cos \angle A = k = \frac{4}{5}.$$

Пусть  $R$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle AMN$ . По теореме синусов  $\frac{MN}{\sin \angle A} = 2R$ . Но  $R = 4$  (по условию), тогда  $MN = 8 \sin \angle A$ .

$$\text{Так как } \cos \angle A = \frac{4}{5}, \text{ то } \sin \angle A = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Значит, } MN = 8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{5}, \text{ тогда } BC = \frac{5}{4} MN = \frac{5}{4} \cdot \frac{24}{5} = 6.$$

*Ответ:* б) 6.

**Пример 16.** Около  $\triangle ABC$  описана окружность с центром в точке  $O_1$ , а в  $\triangle ABC$  вписана окружность с центром в точке  $O$ . Прямая  $CO$  пересекает описанную окружность в точке  $M$ .

а) Докажите, что  $\triangle AMO$  — равнобедренный.

б) Найдите расстояние от точки  $M$  до прямой  $AB$ , если известно, что  $\angle ACB = 120^\circ$ , а радиус описанной окружности равен 10.

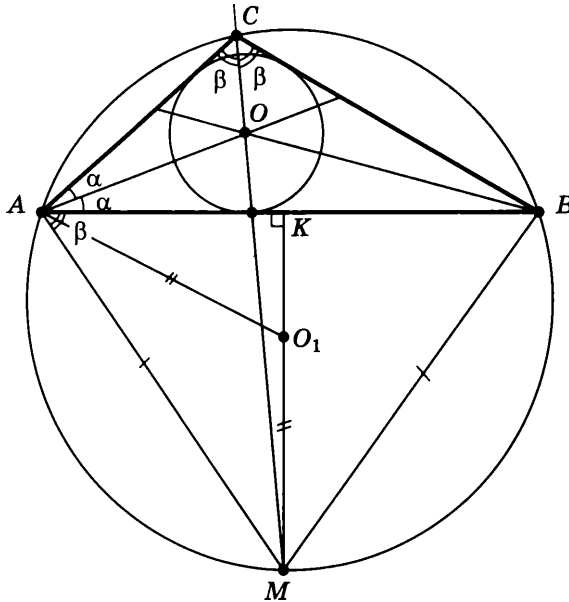
*Решение.*

а) Так как окружность вписана в  $\triangle ABC$ , то  $O$  — точка пересечения биссектрис.

Пусть  $\angle CAO = \angle BAO = \alpha$ ,  $\angle ACO = \angle BCO = \beta$ , тогда  $\angle AOM = \alpha + \beta$  (внешний угол  $\triangle AOC$ ).

Кроме того,  $\angle MAB = \angle BCM = \beta$  (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу  $BM$ ).

Значит,  $\angle MAO = \alpha + \beta$  и  $\angle AOM = \alpha + \beta$  (по доказанному)  $\Rightarrow \angle MAO = \angle AOM$ , т. е.  $\triangle AMO$  — равнобедренный, ч. т. д.



б) Заметим, что  $\angle ACM = \angle ABM = \beta$  (как вписанные, опирающиеся на дугу  $AM$ ). Так как  $\angle MAB = \angle ABM = \beta$ , то  $\triangle AMB$  — равнобедренный с основанием  $AB$ . Тогда  $MK$  — высота,  $\angle AO_1M = \angle AMB$ ,  $\angle ACM = \frac{1}{2} \angle AMB = \beta$ .

Значит,  $\angle AO_1M = 2\beta = \angle ACB = 120^\circ$  (по условию), тогда  $\angle AO_1K = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$  (по свойству смежных углов).

В  $\triangle AO_1K$   $\angle O_1AK = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow O_1K = \frac{1}{2}AO_1 = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$ . Сле-

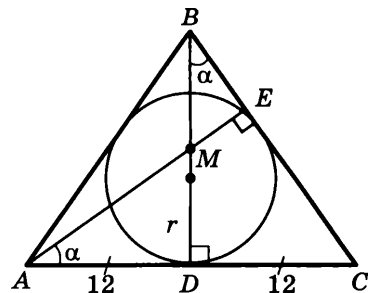
довательно, искомое расстояние от точки  $M$  до прямой  $AB$  равно высоте  $MK$   $\triangle AMB$ , т. е.  $MK = MO_1 + O_1K = AO_1 + O_1K = 10 + 5 = 15$ .

Ответ: б) 15.

**Пример 17.** В равнобедренном остроугольном  $\triangle ABC$  основание  $AC = 24$ , а расстояние от вершины  $B$  до точки  $M$  пересечения высот равно 7.

а) Докажите, что  $\triangle BCD \sim \triangle AEC$ .

б) Найдите радиус окружности, вписанной в  $\triangle ABC$ .



*Решение.*

а) Заметим, что в  $\triangle BCD$  и  $\triangle AEC$   $\angle C$  — общий,  $\angle BDC = \angle AEC = 90^\circ$ .  
Значит,  $\triangle BCD \sim \triangle AEC$  (по двум углам), ч. т. д.

б) I способ

Пусть  $\angle CBD = \angle CAE = \alpha$ . Из  $\triangle AEC$ , где  $AC = 24$ , имеем  
 $EC = AC \sin \alpha = 24 \sin \alpha$ .

С другой стороны,  $EC = BC - BE$ , где  $BC = \frac{DC}{\sin \alpha} = \frac{12}{\sin \alpha}$ ,

$BE = 7 \cos \alpha$ .

Значит,  $EC = \frac{12}{\sin \alpha} - 7 \cos \alpha$ . Так как  $EC = 24 \sin \alpha$ , то получим урав-

нение  $24 \sin \alpha = \frac{12}{\sin \alpha} - 7 \cos \alpha$ , или  $24 \sin^2 \alpha + 7 \sin \alpha \cos \alpha - 12 = 0$ .

Поскольку  $12 = 12 \cdot 1 = 12(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$ , то получим  
 $24 \sin^2 \alpha + 7 \sin \alpha \cos \alpha - 12(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 0$ , или  
 $12 \sin^2 \alpha + 7 \sin \alpha \cos \alpha - 12 \cos^2 \alpha = 0$  — однородное уравнение II степени.

Разделив обе части полученного уравнения на  $\cos^2 \alpha \neq 0$ , получим  
 $12 \operatorname{tg}^2 \alpha + 7 \operatorname{tg} \alpha - 12 = 0$  — квадратное уравнение относительно  $\operatorname{tg} \alpha$ .  
Решая полученное уравнение, находим  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$  (не подходит, так как  $0 < \alpha < 90^\circ$  и  $\operatorname{tg} \alpha > 0$ ).

Из  $\triangle AMD$  имеем  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{MD}{AD} = \frac{3}{4}$ , где  $AD = 12$ , тогда  $MD = \frac{3}{4} \cdot 12 = 9$ ,  
высота  $BD = 7 + 9 = 16$ .

Значит,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 16 = 192$ .

С другой стороны,  $S_{\triangle ABC} = p \cdot r$ , где  $p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$ ,

$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 20$  (из  $\triangle ABD$ ),  $r = MD$ .

Следовательно,  $p = \frac{1}{2}(20 + 20 + 24) = 32$ ,  $r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} = \frac{192}{32} = 6$ .

Ответ: б) 6.

II способ

Из  $\triangle ABD$  имеем  $AB^2 = AD^2 + BD^2$ .

Пусть  $AB = y$ ,  $MD = x$ , тогда  $y^2 = (7 + x)^2 + 144$ .

Из подобия  $\triangle AEC$  и  $\triangle BDC$  имеем

$$\frac{CE}{AC} = \frac{CD}{BC}, \text{ или } \frac{CE}{24} = \frac{12}{y}.$$

Но  $CE = y - BE$ , тогда  $\frac{y - BE}{24} = \frac{12}{y}$ . (1)

Заметим, что  $\frac{BE}{BM} = \frac{BD}{y}$ , или  $BE = \frac{7}{y} \cdot (7 + x)$ , тогда

$$y - BE = y - \frac{7}{y} \cdot (7 + x) = \frac{1}{y}(y^2 - 49 - 7x). \quad (2)$$

Учитывая равенство (1), имеем  $\frac{y^2 - 49 - 7x}{24y} = \frac{12}{y}$ , или  $y^2 = 7x + 337$ .

Но  $y^2 = (7 + x)^2 + 144$ , тогда получим  $(7 + x)^2 + 144 = 7x + 337$ , или  $x^2 + 7x - 144 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = -16$  (не подходит, так как  $x > 0$ ). Если  $x = 9$ , то  $BD = 7 + 9 = 16$ , и т. д. (см. I способ).

**Ответ:** б) 6.

**Пример 18.** Точки  $D$  и  $E$  — соответственно середины сторон  $AC$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ . Окружность, описанная около  $\triangle CDE$ , проходит через точку  $M$  пересечения медиан  $\triangle ABC$ .

а) Докажите, что  $\triangle CDM = \triangle CEM$ .

б) Найдите  $S_{\triangle ABC}$ , если  $AB = 10$ ,  $AE = BD$ .

**Решение.**

а) Так как  $AE = BD$  (по условию), то  $AC = BC$ . Но тогда  $CD = CE$ , а по свойству медиан  $MD = ME = \frac{1}{3}AE = \frac{1}{3}BD$ .

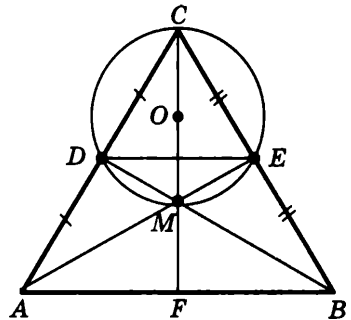
Значит,  $\triangle CDM = \triangle CEM$ , ч. т. д.

б) Из равенства треугольников следует, что  $\angle CDM = \angle CEM$ . По свойству четырехугольника  $CDME$ , вписанного в окружность, имеем  $\angle CDM + \angle CEM = 180^\circ \Rightarrow \angle CDM = \angle CEM = 90^\circ$ .

Следовательно,  $\triangle CDB = \triangle ABD$  (по двум катетам).

Но тогда  $AB = BC$ , т. е.  $\triangle ABC$  — равнобедренный, значит,  $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ , где  $a = 10$  — сторона  $\triangle ABC$ , т. е.  $S_{\triangle ABC} = 25\sqrt{3}$ .

**Ответ:** б)  $25\sqrt{3}$ .





**Пример 19.** Из точки  $M$ , лежащей вне окружности с центром  $O$  и радиусом  $R = 6$ , проведены касательные  $MB$  и  $MC$ . Отрезок  $OM$  делится окружностью пополам.

- а) Докажите, что  $AO = 2R$ .  
 б) Найдите радиус  $r$  окружности, вписанной в  $\triangle AMC$ .

*Решение.*

а) Пусть  $N$  — середина  $OM$ , тогда  $OM = 2 \cdot ON = 2R$ . Так как  $MC$  — касательная к окружности, то  $MC \perp OC$ , значит,  $\triangle COM$  и  $\triangle ACM$  — прямоугольные, где  $OC = R$ ,  $OM = 2R$ ,  $\angle OCM = 90^\circ$ .

Значит,  $\angle OMC = 30^\circ$ , а так как  $MO$  — биссектриса  $\angle AMC$  (по свойству касательных), то  $\angle AMC = 60^\circ$ , тогда  $\angle A = 30^\circ$ . Выходит, что  $\triangle AOM$  — равнобедренный с основанием  $AM$ . Следовательно,  $OM = OA = 2R$ , ч. т. д.

б) Известно, что в прямоугольном треугольнике  $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ , где  $a$  и  $b$  — катеты,  $c$  — гипотенуза. Так как  $OC = R$ ,  $AO = 2R$ , то  $AC = 3R$ .

$$\text{Из } \triangle MOC \text{ } MC = \sqrt{(2R)^2 - R^2} = R\sqrt{3}.$$

$$\text{Из } \triangle AMC \text{ находим } AM = \sqrt{(3R)^2 + (R\sqrt{3})^2} = \sqrt{12R^2} = 2R\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } r &= \frac{1}{2}(3R + R\sqrt{3} - 2R\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(3R - R\sqrt{3}) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot R\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1) = 3\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1), \text{ где } R = 6 \text{ (по условию).} \end{aligned}$$

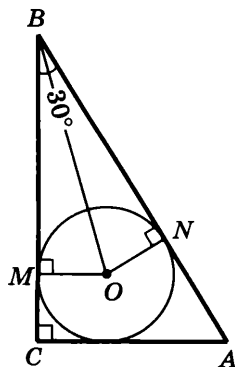
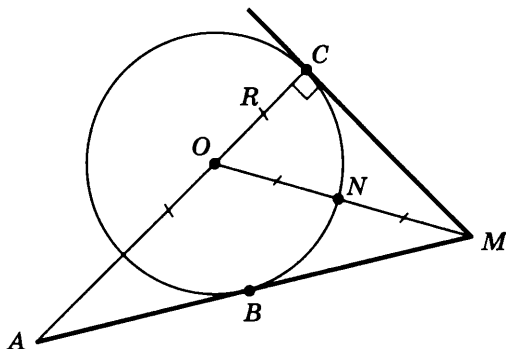
*Ответ:* б)  $3\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)$ .

**Пример 20.** В прямоугольном  $\triangle ABC$   $\angle B = 30^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ .

- а) Докажите, что  $BO$  — биссектриса угла  $B$ .  
 б) Найдите отношение радиусов описанной и вписанной окружностей.

*Решение.*

а) По свойству касательных  $BM = BN$ ,  $OM = ON = r$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности.



Кроме того,  $OM \perp BM$  и  $ON \perp BN$  (касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания).

Значит,  $\triangle BMO = \triangle BNO$  (по двум катетам).

Из равенства треугольников следует, что  $\angle OBM = \angle OBN$ , т. е.  $BO$  — биссектриса  $\angle B$ , ч. т. д.

б) Из  $\triangle BMO$ , где  $\angle MBO = 15^\circ$ , имеем  $BM = r \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ$ , тогда  $BC = BM + r = r \cdot \operatorname{ctg} 15^\circ + r = r \cdot (1 + \operatorname{ctg} 15^\circ)$ .

Так как  $\angle C = 90^\circ$ , то  $AB = 2R$ , где  $R$  — радиус описанной окружности.

По условию  $\angle B = 30^\circ$ , тогда  $BC = 2R \cos 30^\circ$ .

Значит,  $r(1 + \operatorname{ctg} 15^\circ) = 2R \cos 30^\circ$ , откуда

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + \operatorname{ctg} 15^\circ}{2 \cos 30^\circ} = \frac{1 + \operatorname{ctg} 15^\circ}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Но } \operatorname{ctg} 15^\circ &= \operatorname{ctg} (45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + 1}{\operatorname{ctg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ} = \frac{1 \cdot \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \\ &= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \frac{R}{r} = \frac{1 + (2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1.$$

Ответ: б)  $\sqrt{3} + 1$ .

**Пример 21.** Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности его катетов.

а) Докажите, что углы треугольника  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $90^\circ$ .

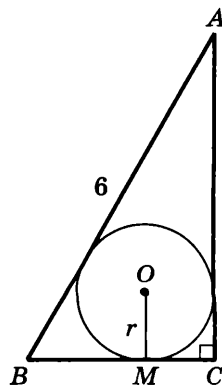
б) Найдите радиус вписанной окружности, если длина гипотенузы равна 6.

*Решение.*

а) Пусть  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ . Пусть для определенности  $b > a$ .

Согласно условию задачи  $r = \frac{1}{2}(b - a)$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности.

С другой стороны,  $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$ .



Следовательно,  $\frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(a + b - c)$ , или  $b - a = a + b - c$ , откуда  $c = 2a$ .

Значит,  $\angle A = 30^\circ$  (по свойству),  $\angle C = 90^\circ$  (по условию), тогда  $\angle B = 60^\circ$ , ч. т. д.

б) Так как  $\angle A = 30^\circ$ , то  $BC = \frac{1}{2}AB = 3$ , т. е.  $a = 3$

и  $AC = b = c \cdot \cos 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ .

Значит,  $r = \frac{1}{2}(b - a) = \frac{1}{2}(3\sqrt{3} - 3) = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1)$ .

Ответ: б)  $\frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1)$ .

**Пример 22.** Центр окружности, касающейся катетов  $BC$  и  $AC$  соответственно в точках  $D$  и  $E$ , лежит на гипотенузе.

а) Докажите, что  $BD \cdot AE = r^2$ , где  $r = OE$  — радиус окружности.

б) Найдите радиус  $r$ , если  $7r = AC + BC$  и  $S_{\triangle ABC} = 56$ .

*Решение.*

а) Пусть точка  $O$  — центр окружности, касающейся катетов  $AC$  и  $BC$  соответственно в точках  $E$  и  $D$ .

Пусть  $AC = x$ ,  $BC = y$ ,  $AE = b$ ,  $BD = a$ . Так как  $BC \perp OD$ ,  $AC \perp OE$  и  $OE = OD = r$ , то  $CDOE$  — квадрат, тогда  $AC = b + r$ ,  $BC = a + r$ , т. е.  $x = b + r$ ,  $y = a + r$ .

Заметим, что  $\triangle BOD \sim \triangle ABC$  — как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle B$ . Тогда  $\frac{a}{r} = \frac{a+r}{b+r}$ , или  $ab + ar = ar + r^2$ , откуда  $r^2 = ab$ ,

т. е.  $BD \cdot AE = r^2$ , ч. т. д.

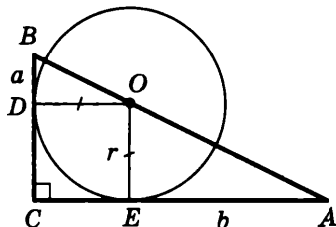
б) По условию задачи  $S_{\triangle ABC} = 56$ , или  $\frac{1}{2}AC \cdot BC = 56$ , или

$(a + r)(b + r) = 112$ , или  $ab + (a + b)r + r^2 = 112$ .

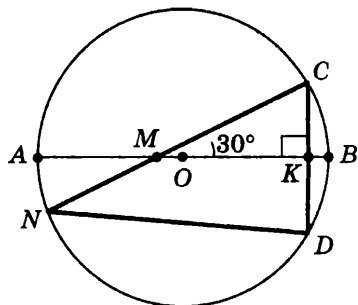
Но  $ab = r^2$  (по доказанному) и  $7r = x + y$  (по условию).

Получим  $r^2 + 5r^2 + r^2 = 112$ , или  $7r^2 = 112$ , откуда  $r^2 = 16$ ,  $r = 4$ .

Ответ: б) 4.



**Пример 23.** Хорда  $NC$  пересекает диаметр  $AB$  в точке  $M$  под углом  $30^\circ$ . Через точку  $C$  проведена хорда  $CD \perp AB$ . Известно, что  $MN : MC = 1 : 3$ , а радиус окружности  $R = 3$ .



а) Докажите, что  $NC : CD = 4 : 3$ .

б) Найдите  $S_{\Delta NCD}$ .

*Решение.*

а) Пусть  $MN = x$ ,  $MC = 3x$ . Так как  $CD \perp AB$ , то  $\Delta MCK$  — прямоугольный, где  $\angle CMK = 30^\circ$ .

Тогда  $CK = \frac{1}{2}MC = \frac{3x}{2}$ ,  $NC = 4x$ ,  $CD = 2CK = 3x$ .

Из  $\Delta NCD$  по теореме синусов имеем  $\frac{ND}{\sin \angle C} = 2R$ , где  $R = 3$ ,  $\angle C = 60^\circ$ . Значит,

$$ND = 2 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

С другой стороны, по теореме косинусов  $ND^2 = CN^2 + CD^2 - 2CN \cdot CD \cdot \cos \angle C$ , или

$$ND^2 = 16x^2 + 9x^2 - 2 \cdot 4x \cdot 3x \cdot \frac{1}{2} = 25x^2 - 12x^2 = 13x^2,$$

откуда  $ND = x\sqrt{13}$ .

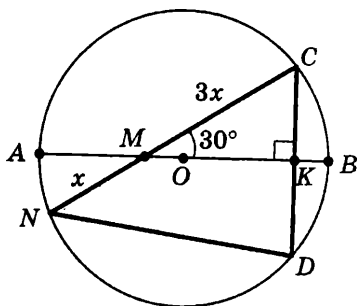
Но  $ND = 3\sqrt{3}$ , значит,  $x\sqrt{13} = 3\sqrt{3}$ , откуда  $x = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{39}}{13}$ .

$NC = 4x = \frac{12\sqrt{39}}{13}$ ,  $CD = 3x = \frac{9\sqrt{39}}{13}$ , тогда

$$NC : CD = \frac{12\sqrt{39}}{13} : \frac{9\sqrt{39}}{13} = 12 : 9 = 4 : 3, \text{ ч. т. д.}$$

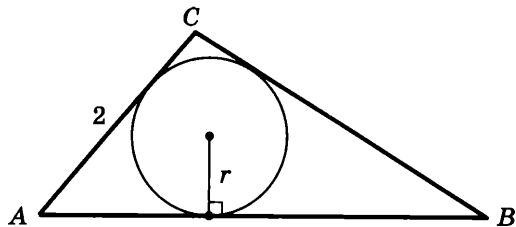
$$\begin{aligned} \text{б) } S_{\Delta NCD} &= \frac{1}{2} NC \cdot CD \cdot \sin \angle C = \frac{1}{2} \cdot \frac{12\sqrt{39}}{13} \cdot \frac{9\sqrt{39}}{13} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{12 \cdot 39 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 9 \cdot \sqrt{3}}{13} = \frac{81\sqrt{3}}{13}. \end{aligned}$$

Ответ: б)  $\frac{81\sqrt{3}}{13}$ .



**Пример 24.** Углы треугольника относятся как  $1 : 5 : 6$ . Длина наименьшей стороны равна 2.

а) Докажите, что треугольник — прямоугольный.



б) Найдите радиус вписанной окружности.

*Решение.*

а) Пусть  $\angle B = x$  — меньший угол  $\triangle ABC$ ,  $\angle A = 5x$ ,  $\angle C = 6x$ . Следовательно,  $x + 5x + 6x = 180$ , или  $12x = 180$ , откуда  $x = 15$ .

Итак,  $\angle B = 15^\circ$ ,  $\angle A = 5x = 75^\circ$ ,  $\angle C = 6x = 90^\circ$ . Значит,  $\triangle ABC$  — прямоугольный, где  $\angle C = 90^\circ$ , ч. т. д.

б) Пусть  $AC = 2$  — длина наименьшей стороны,  $r$  — радиус вписанной окружности.

Так как  $\triangle ABC$  — прямоугольный, то  $r = \frac{1}{2}(AC + BC - AB)$ , или

$$r = \frac{1}{2}(BC - AB + 2).$$

$$\text{Но } AB = \frac{AC}{\sin \angle B} = \frac{2}{\sin 15^\circ}, \text{ где } \sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ) =$$

$$= \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1).$$

$$\text{Тогда } AB = \frac{8}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)}. \text{ По теореме Пифагора}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2}, \text{ или } BC = \sqrt{\frac{64}{2(4 - 2\sqrt{3})}} - 4 = \sqrt{\frac{16}{2 - \sqrt{3}}} - 4 =$$

$$= \sqrt{\frac{16(2 + \sqrt{3})}{4 - 3}} - 4 = \sqrt{28 + 16\sqrt{3}} = 2\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = 2\sqrt{(2 + \sqrt{3})^2} = 2(2 + \sqrt{3}).$$

$$\text{Следовательно, } r = \frac{1}{2} \left( 2(2 + \sqrt{3}) - \frac{8}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} + 2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( 6 + 2\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} \right) = \frac{1}{2} (6 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)) =$$

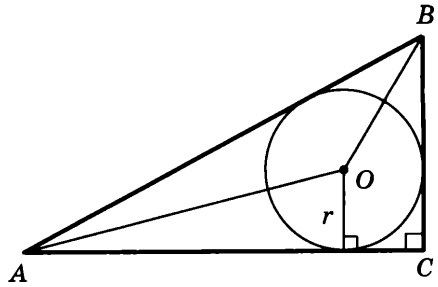
$$= \frac{1}{2} (2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1) - 2\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)) = (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 1).$$

*Ответ:* б)  $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + 1)$ .

**Пример 25.** Площадь прямоугольного  $\triangle ABC$  с гипотенузой  $AB$  равна 30, а площадь  $\triangle AOB$  — 13.

а) Докажите, что  $R : r = 13 : 4$ , где  $R$  и  $r$  — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

б) Найдите периметр  $\triangle ABC$ .



*Решение.*

а) Пусть  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ , тогда  $S_{\triangle ABC} = p \cdot r$ , где  $S_{\triangle ABC} = 30$  (по условию),  $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ .

$$\text{Значит, } \left( \frac{a+b+c}{2} \right) r = 30, \text{ или } (a + b + c)r = 60. \quad (1)$$

Кроме того,  $S_{\triangle AOB} = 13$ , или  $\frac{1}{2}cr = 13$ ,  $cr = 26$ , откуда  $r = \frac{26}{c}$ . Тогда равенство (1) примет вид  $\frac{(a+b+c) \cdot 26}{c} = 60$ , или  $26(a + b) + 26c = 60c$ , или  $13(a + b) = 17c$ , откуда

$$a + b = \frac{17}{13}c. \quad (2)$$

Известно, что в прямоугольном треугольнике  $r = \frac{a+b-c}{2}$ . Учитывая равенство (2), имеем

$$r = \frac{a+b}{2} - \frac{c}{2} = \frac{17}{26}c - \frac{c}{2} = \frac{4c}{26} = \frac{2c}{13}. \quad (3)$$

Но  $r = \frac{26}{c}$ , тогда, учитывая равенство (3), получим  $\frac{26}{c} = \frac{2c}{13}$ , или  $c^2 = 13^2$ ,  $c = 13$ , тогда  $r = \frac{26}{13} = 2$ .

Кроме того,  $AB = 2R = c = 13$ , т. е.  $R = \frac{13}{2}$ .

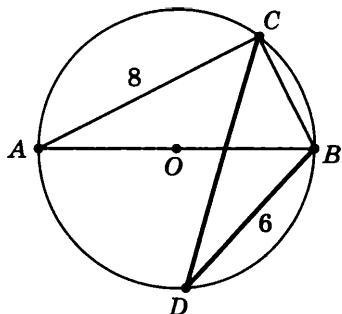
Тогда  $R : r = \frac{13}{2} : 2 = 13 : 4$ , ч. т. д.

б)  $P_{\triangle ABC} = a + b + c = (a + b) + c$ , где  $a + b = \frac{17}{13}c = \frac{17}{13} \cdot 13 = 17$ .

Значит,  $P_{\triangle ABC} = 17 + 13 = 30$ .

*Ответ:* б) 30.

**Пример 26.** Точки  $C$  и  $D$  расположены по разные стороны от гипотенузы  $AB$  прямоугольного  $\triangle ABC$  так, что  $AC = 8$ ,  $BD = 6$ , причем  $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle BCD} = 25 : 18$ .



а) Докажите, что  $\angle CAB = \angle CDB$ .

б) Найдите радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

*Решение.*

а) Заметим, что  $\angle CAB$  и  $\angle CDB$  — вписанные, опирающиеся на одну и ту же  $\cup BC$ . Значит,  $\angle CAB = \angle CDB$ , ч. т. д.

б) Пусть  $\angle CAB = \angle CDB = \alpha$ .

Согласно условию задачи  $18S_{\triangle ABC} = 25S_{\triangle BCD}$ , или

$$18 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin \alpha = 25 \cdot \frac{1}{2} CD \cdot BD \cdot \sin \alpha, \text{ или } 9AC \cdot AB = \frac{25}{2} CD \cdot BD.$$

Пусть  $AO = OB = R$  — радиус описанной окружности, тогда  $18AC \cdot 2R = 25CD \cdot BD$ , где  $AC = 8$ ,  $BD = 6$  (по условию).

$$\text{Значит, } CD = \frac{36 \cdot 8 \cdot R}{25 \cdot 6} = \frac{48R}{25}.$$

Из  $\triangle BCD$  по теореме косинусов имеем

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 - 2CD \cdot BD \cdot \cos \alpha.$$

$$\text{Из } \triangle ABC \cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{R}, \quad BC = 2R \sin \alpha.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } BC^2 &= 4R^2 \sin^2 \alpha = 4R^2 \cdot (1 - \cos^2 \alpha) = 4R^2 \cdot \left(1 - \frac{16}{R^2}\right) = \\ &= 4R^2 - 64. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } 4R^2 - 64 &= \left(\frac{48R}{25}\right)^2 + 36 - \left(\frac{48}{5}\right)^2, \text{ или } 4R^2 - \left(\frac{48R}{25}\right)^2 = \\ &= 100 - \left(\frac{48}{5}\right)^2. \end{aligned}$$

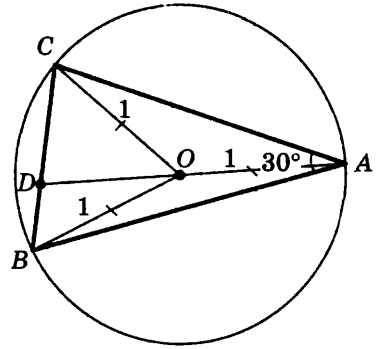
Применяя формулу разности квадратов, получим

$$\left(2R - \frac{48R}{25}\right) \left(2R + \frac{48R}{25}\right) = \left(10 - \frac{48}{5}\right) \left(10 + \frac{48}{5}\right), \text{ или } \frac{2R}{25} \cdot \frac{98R}{25} = \frac{2}{5} \cdot \frac{98}{5},$$

$$\text{откуда } \frac{R^2}{25} = 1, \quad R^2 = 25, \text{ т. е. } R = 5.$$

**Ответ:** б) 5.

**Пример 27.** В круг единичного радиуса вписан остроугольный  $\triangle ABC$ , где  $\angle A = 30^\circ$ . Отрезок, соединяющий вершину этого угла и проходящий через центр круга, делит противоположную сторону  $BC$  в отношении  $BD : CD = 1 : 2$ .



а) Докажите, что  $\triangle COB$  — равнобедренный.

б) Найдите длину отрезка  $AD$ .

*Решение.*

а) Пусть  $O$  — центр круга, где  $AO = BO = CO = R$  — радиус описанной окружности; пусть  $BD = x$ , тогда  $CD = 2x$ . По следствию из теоремы синусов имеем  $\frac{BC}{\sin \angle A} = 2R$ , где  $R = 1$ ,  $\angle A = 30^\circ$ , тогда

$$BC = 2R \sin \angle A = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Выходит, что  $BC = R = 1$ , т. е.  $\triangle BOC$  — равнобедренный, ч. т. д.

б)  $BC = BD + CD = x + 2x = 3x = 1$ , откуда  $x = \frac{1}{3}$ .

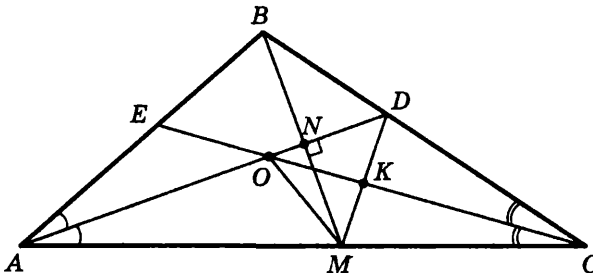
Из  $\triangle BOD$ , где  $BO = 1$ ,  $BD = x = \frac{1}{3}$ ,  $\angle OBD = 60^\circ$ , по теореме косинусов имеем  $OD^2 = BO^2 + BD^2 - 2BO \cdot BD \cdot \cos 60^\circ$ , или

$$OD^2 = 1 + \frac{1}{9} - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}, \text{ или } OD^2 = \frac{10}{9} - \frac{1}{3} = \frac{7}{9}, \text{ откуда } OD = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Тогда  $AD = AO + OD = 1 + \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{1}{3}(3 + \sqrt{7})$ .

Ответ: б)  $\frac{1}{3}(3 + \sqrt{7})$ .

**Пример 28.** В  $\triangle ABC$  известно, что  $AB = 18$ ,  $BC = 15$ ,  $AC = 27$ ,  $AD$  — биссектриса,  $AD \perp BM$ .

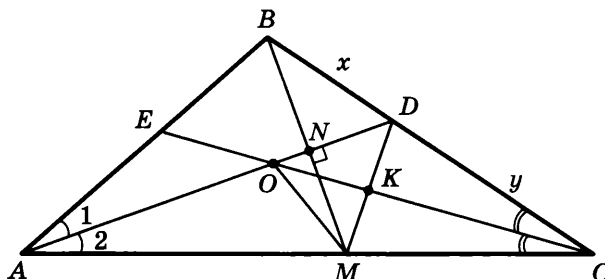




а) Докажите, что биссектриса  $CE$  делит  $DM$  пополам.

б) Найдите отношение  $AO : OM$ , если  $O$  — точка пересечения биссектрис  $AD$  и  $CE$ .

*Решение.*



а) По условию задачи  $AD$  — биссектриса, значит,  $\angle 1 = \angle 2$ . Кроме того,  $AD \perp BM$ , т. е. биссектриса  $AN$  является высотой.

Следовательно,  $\triangle ABM$  — равнобедренный, тогда  $AB = AM$ .

В равнобедренном  $\triangle ABM$  биссектриса  $AN$  — медиана, т. е.  $BN = MN$ ,  $AB = AM = 18$ ,  $MC = AC - AM = 27 - 18 = 9$ .

Известно, что биссектриса делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}.$$

Пусть  $BD = x$ ,  $CD = y$ , тогда  $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ . Но  $x + y = 15$ , значит,

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 15 - x, \\ 3x = 2y; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 2(15 - x), \\ y = 15 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x = 30, \\ y = 15 - x; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6, \\ y = 9. \end{cases}$$

Значит,  $BD = 6$ ,  $CD = 9$ . Выходит, что  $MC = CD = 9$ , т. е.  $\triangle CMD$  — равнобедренный с основанием  $MD$ .

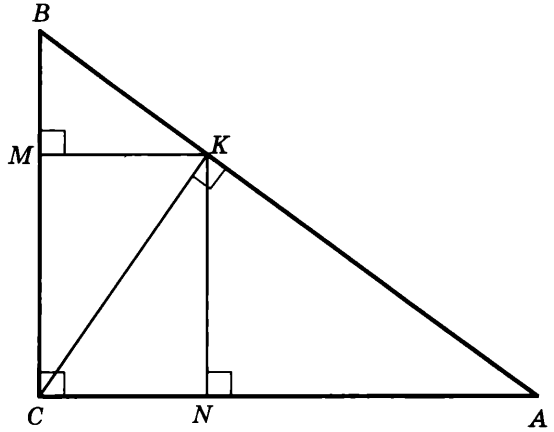
Следовательно, в равнобедренном  $\triangle CMD$  биссектриса  $CE$  является медианой, т. е.  $MK = DK$ , ч. т. д.

б) В  $\triangle MOD$   $OK \perp MD$  и  $MK = DK$  (по доказанному),  $OM = OD$  и  $AO : OD = AO : OM$ .

Заметим, что в  $\triangle ADC$   $CO$  — биссектриса, значит,  $AO : OD = AO : OM = AC : CD = 27 : 9 = 3 : 1$ .

*Ответ:* б) 3 : 1.

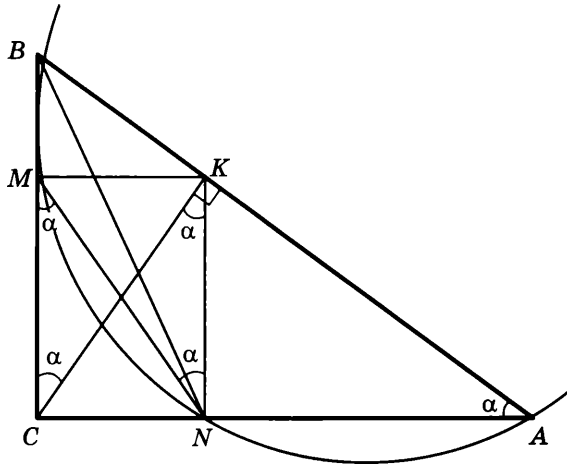
**Пример 29.** На гипотенузу  $AB$  из вершины  $C$  опущена высота  $CK$ , а из точки  $K$  на катеты  $BC$  и  $AC$  — соответственно перпендикуляры  $KM$  и  $KN$ .



а) Докажите, что точки  $A$ ,  $B$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если  $AB = 15$ ,  $CK = 8$ .

*Решение.*



а) Соединим точки  $M$  и  $N$ , тогда  $MN$  — гипотенуза  $\triangle MCN$ . Пусть  $\angle A = \alpha$ , тогда  $\angle CKN = \alpha$ , значит,  $\triangle ABC \sim \triangle MCN$  (по двум углам).

В четырехугольнике  $ABMN$  имеем  $\angle ANM = \angle ANK + \angle MNK = 90^\circ + \alpha$ ,  $\angle B = 90^\circ - \alpha$ .

Значит,  $\angle ANM + \angle B = 90^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ$ .

Так как в четырехугольнике  $ABMN$  сумма противоположных углов равна  $180^\circ$ , то  $ABMN$  — вписанный в окружность, т. е. точки  $A$ ,  $B$ ,  $M$  и  $N$  лежат на одной окружности, ч. т. д.

б) По теореме синусов  $\frac{AB}{\sin \angle ANB} = 2R$ . Но  $\sin \angle ANB = \sin \angle BNC$

(синусы смежных углов равны). Значит,  $\frac{AB}{\sin \angle ANB} = \frac{AB}{\sin \angle BNC} = 2R$ .

Из подобия  $\triangle CKN$  и  $\triangle ABC$  (по двум углам) имеем  $\frac{BC}{AB} = \frac{CN}{CK}$ , откуда

$$CN = \frac{BC \cdot CK}{AB} = \frac{8BC}{15}.$$

Из  $\triangle BCN$  по теореме Пифагора имеем  $BN^2 = CN^2 + BC^2 =$   
 $= \left(\frac{8BC}{15}\right)^2 + BC^2 = \frac{289}{225}BC^2$ , откуда  $BN = \frac{17}{15}BC$ .

Но  $\sin \angle BNC = \frac{BC}{BN} = \frac{15}{17}$ . Так как  $\frac{AB}{\sin \angle BNC} = 2R$ ,  $AB = 15$ , то

$$2R = \frac{15}{\frac{15}{17}} = 17, \text{ откуда } R = \frac{17}{2} = 8,5.$$

Ответ: б) 8,5.

**Пример 30.** В  $\triangle ABC$  точка  $O$  — центр вписанной окружности. На продолжении  $BO$  за точку  $O$  отмечена точка  $M$  так, что  $OM = AM$ .

а) Докажите, что четырехугольник  $ABCM$  — вписанный.

б) Найдите длину  $BO$ , если  $r = 3$ ,  $R = 12$ ,  $OM = 6$ , где  $r$  и  $R$  — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.

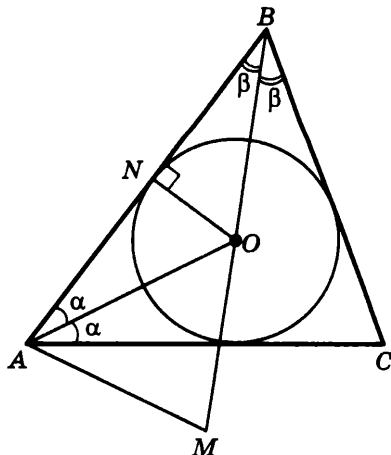
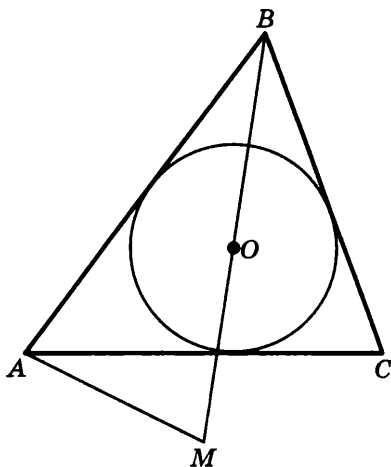
*Решение.*

а) Пусть  $\angle A = 2\alpha$ ,  $\angle B = 2\beta$ . По условию задачи  $O$  — центр вписанной окружности, значит,  $AO$  и  $BO$  — биссектрисы.

Тогда  $\angle BAO = \angle OAC = \alpha$ ,  
 $\angle ABO = \angle OBC = \beta$ .

Заметим, что  $\angle AOM$  — внешний угол  $\triangle AOB$ , поэтому  $\angle AOM = \alpha + \beta$ . Так как  $AM = OM$  (по условию), то  $\angle MAO = \angle AOM = \alpha + \beta$ .

Значит,  $\angle MAC = \angle AOM - \angle CAO =$   
 $= \alpha + \beta - \alpha = \beta$ .



Но  $\angle MAC$  и  $\angle MBC$  опираются на отрезок  $MC$ , следовательно,  $\angle MAC = \angle MBC = \beta$ . Значит, точки  $A, B, C$  и  $M$  лежат на одной окружности, т. е. четырехугольник  $ABCM$  — вписанный, ч. т. д.

б) Из центра  $O$  опустим перпендикуляр  $ON$  на сторону  $AB$ .

Из  $\triangle BON$   $BO = \frac{ON}{\sin \beta} = \frac{r}{\sin \beta}$ . Так как точки  $A, B, C$  и  $M$  лежат на

одной окружности, то радиус окружности, описанной около  $\triangle ABM$ , равен радиусу окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

Из  $\triangle ABC$  по теореме синусов имеем  $\frac{AM}{\sin \beta} = 2R$ , откуда  $\sin \beta = \frac{AM}{2R}$ .

Но  $BO = \frac{r}{\sin \beta}$ , тогда  $\sin \beta = \frac{r}{BO}$ .

Значит,  $\frac{AM}{2R} = \frac{r}{BO}$ , откуда  $BO = \frac{2R \cdot r}{AM} = \frac{2R \cdot r}{OM} = \frac{2 \cdot 12 \cdot 3}{6} = 12$ .

Ответ: б) 12.

**Пример 31.** Окружность с центром  $O_1$  вписана в равнобедренный  $\triangle ABC$  и касается боковой стороны  $AB$  в точке  $M$ , а основания  $AC$  — в точке  $K$ . Окружность с центром  $O_2$  касается основания  $AC$  и продолжений боковых сторон.

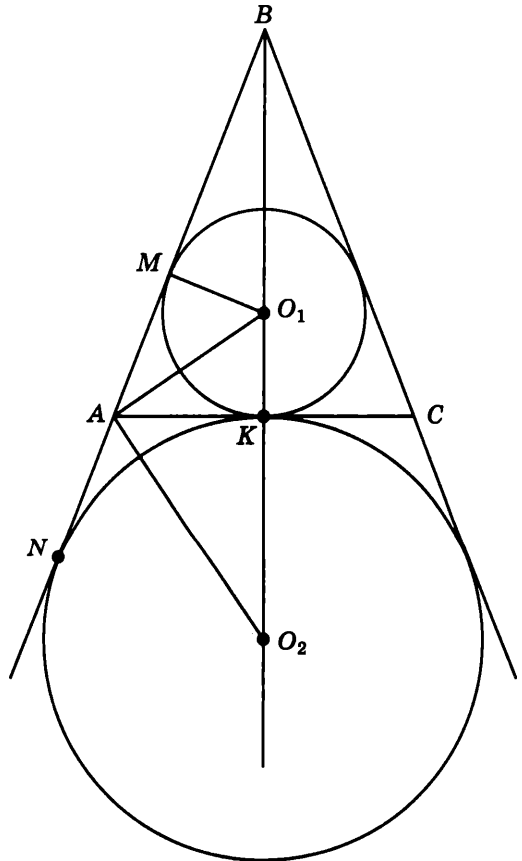
а) Докажите, что  $\triangle O_1AO_2$  — прямоугольный.

б) Найдите  $O_2K$ , если  $O_1K = 7,5$  и  $BK = 20$ .

*Решение.*

а) Пусть окружность с центром  $O_2$  касается продолжения  $BA$  в точке  $N$ . Так как  $O_1$  и  $O_2$  — центры вписанных окружностей, то  $AO_1$  и  $AO_2$  — биссектрисы смежных углов  $BAC$  и  $NAC$ .

Значит,  $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$ , т. е.  $\triangle O_1AO_2$  — прямоугольный.



б) Заметим, что  $\triangle BAK \sim \triangle BMO$  — как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle ABK$ . Тогда  $\frac{AK}{BK} = \frac{O_1M}{BM}$ , откуда  $AK = \frac{BK \cdot O_1M}{BM}$ .

Из  $\triangle BO_1M$  по теореме Пифагора имеем  $BM = \sqrt{BO_1^2 - O_1M^2}$ , где  $BO_1 = BK - O_1K = 12,5$  и  $O_1M = O_1K = 7,5$ .

Значит,  $BM = \sqrt{12,5^2 - 7,5^2} = \sqrt{100} = 10$ . Тогда  $AK = \frac{20 \cdot 7,5}{10} = 15$ .

Так как  $\triangle ABC$  — равнобедренный (по условию), то точка  $K$  лежит на отрезке  $O_1O_2$ . По свойству перпендикуляра  $AK$ , опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу  $O_1O_2$ , имеем  $AK^2 = O_1K \cdot O_2K$ , откуда находим  $O_2K = \frac{AK^2}{O_1K} = \frac{15^2}{7,5} = \frac{15 \cdot 15 \cdot 2}{7,5 \cdot 2} = 15 \cdot 2 = 30$ .

Ответ: б) 30.

**Пример 32.** В  $\triangle ABC$  вписана окружность радиуса 3, касающаяся  $AB$  в точке  $D$ , причем  $AD = 6$ ,  $BD = 9$ .

а) Докажите, что  $\triangle ABC$  — прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей  $\triangle ABC$ .

*Решение.*

а) Пусть  $M$  — точка касания стороны  $BC$  с окружностью. Обозначим  $MC = x$ .

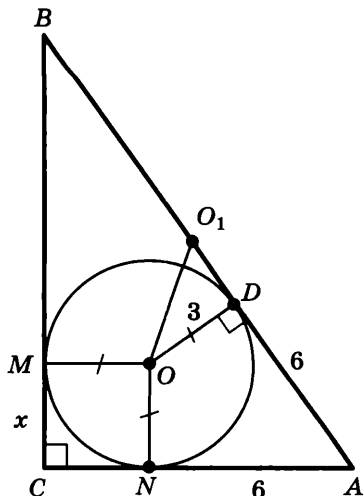
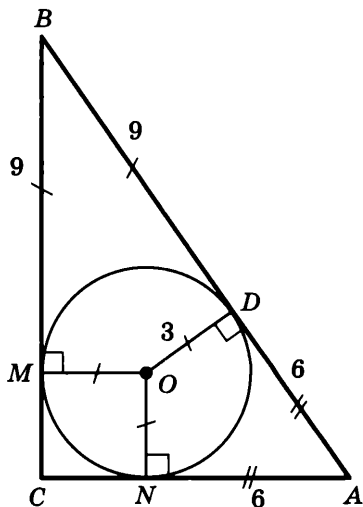
$S_{\triangle ABC} = p \cdot r$ , где  $r = 3$ ,

$$p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(15 + 9 + x + 6 + x) = 15 + x, S_{\triangle ABC} = 3(15 + x).$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } a = BC = 9 + x, b = AC = 6 + x, c = AB = 15.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } S_{\triangle ABC} &= \sqrt{(15+x) \cdot 6 \cdot 9 \cdot x} = \\ &= 3\sqrt{6x(15+x)}. \text{ Получим уравнение} \\ 3(15+x) &= 3\sqrt{6x(15+x)}, \text{ или } 15+x = 6x, \\ \text{откуда } x &= 3. \end{aligned}$$



Следовательно,  $BC = 9 + x = 12$ ,  $AC = 6 + x = 9$ ,  $AB = 15$ .

Так как  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , то  $\triangle ABC$  — прямоугольный, где  $\angle C = 90^\circ$ .

б) Так как  $\triangle ABC$  — прямоугольный, то  $O_1$  — центр описанной окружности, тогда  $BO_1 = AO_1 = \frac{1}{2}AB = \frac{15}{2}$ ,  $O_1D = AO_1 - AD = \frac{15}{2} - 6 = \frac{3}{2}$ .

Искомое расстояние  $OO_1$  найдем из  $\triangle OO_1D$  по теореме Пифагора:

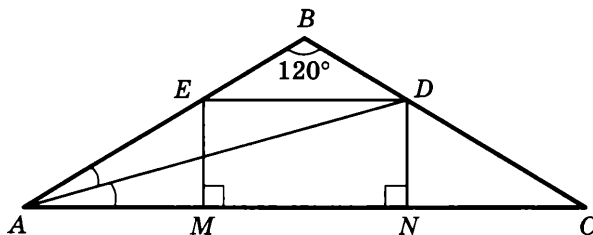
$$OO_1 = \sqrt{OD^2 + O_1D^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{9 + \frac{9}{4}} = \sqrt{9 \cdot \frac{5}{4}} = \sqrt{9 \cdot \frac{5}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: б)  $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ .

**Пример 33.** В  $\triangle ABC$   $AB = BC$ ,  $\angle B = 120^\circ$ ,  $AD$  — биссектриса.  $DEMN$  — прямоугольник, вписан в  $\triangle ABC$  так, что сторона  $MN$  лежит на стороне  $AC$ , а вершина  $E$  — на  $AB$ .

а) Докажите, что  $MN = 2DN$ .

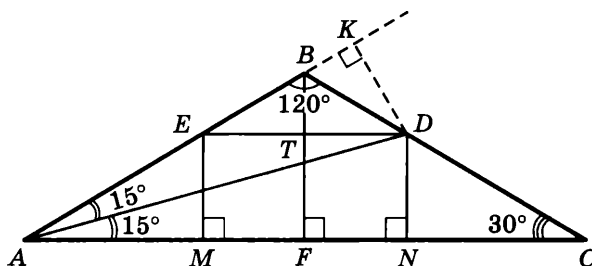
б) Найдите  $S_{DEMN}$ , если  $AB = 6$ .



*Решение.*

І способ

а) Из точки  $D$  опустим перпендикуляр на продолжение  $AB$  к точке  $K$ .



Заметим, что  $\triangle ADK = \triangle ADN$  — по гипотенузе  $AD$  и острому углу в  $15^\circ$  ( $AD$  — биссектриса,  $\angle A = \angle C = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$ ). Значит,  $DK = DN$ . Кроме того,  $\angle A = \angle BED = 30^\circ$  — как соответственные углы. Тогда в  $\triangle EKD$   $KD = \frac{1}{2}ED$ . Но  $KD = DN$  (по доказанному), следовательно,  $DN = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}MN$ , откуда  $MN = 2DN$ .

б) Проведем высоту  $BF$  к основанию  $AC$ .

Так как  $AB = 6$  и  $\angle A = 30^\circ$ , то  $BF = \frac{1}{2}AB = 3$ . Из  $\triangle ABF$  имеем  $AF = AB \cos 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ . Значит,  $AC = 2AF = 6\sqrt{3}$ .

Пусть  $DN = EM = x$ . Заметим, что  $\triangle ABC \sim \triangle BED$  (по двум углам). Тогда  $\frac{AC}{ED} = \frac{BF}{BT}$ , или  $\frac{6\sqrt{3}}{2x} = \frac{3}{3-x}$ , или  $2x = 2\sqrt{3}(3-x)$ ,  $x = 3\sqrt{3} - \sqrt{3}x$ , откуда  $x = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ .

Следовательно,  $S_{DEMN} = MN \cdot DN = 2x \cdot x = 2x^2 = 2 \cdot \left( \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \right)^2 = 2 \cdot \frac{27}{4+2\sqrt{3}} = \frac{27}{2+\sqrt{3}} = \frac{27(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = 27(2-\sqrt{3})$ .

Ответ: б)  $27(2-\sqrt{3})$ .

## II способ

а) По условию задачи  $\triangle ABC$  — равнобедренный и  $\angle ABC = 120^\circ$ , тогда  $\angle A = \angle C = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$ . Так как  $AD$  — биссектриса, то  $\angle BAD = \angle CAD = 15^\circ$ . Но  $\angle CAD = \angle ADE = 30^\circ$  — как накрест лежащие.

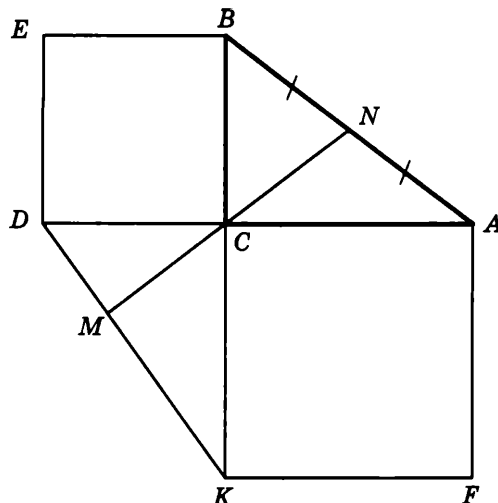
Выходит, что  $\angle BAD = \angle ADE = 30^\circ$ , т. е.  $\triangle AED$  — равнобедренный. Тогда  $AE = DE$ .

Пусть  $ME = x$ . Из  $\triangle AEM$ , где  $\angle A = 30^\circ \Rightarrow AE = 2x$ , значит,  $DE = 2x$ , т. е.  $DE = MN = 2DN$ .

б)  $S_{DEMN} = MN \cdot DN = 2x^2$ , где  $x = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$ , и т. д. (см. I способ).

Ответ: б)  $27(2-\sqrt{3})$ .

**Пример 34.** На катетах  $AC$  и  $BC$  прямоугольного  $\triangle ABC$  построены квадраты  $BCDE$  и  $ACKF$ . Точка  $N$  — середина  $AB$ ,  $M$  — точка пересечения прямых  $CN$  и  $DK$ .

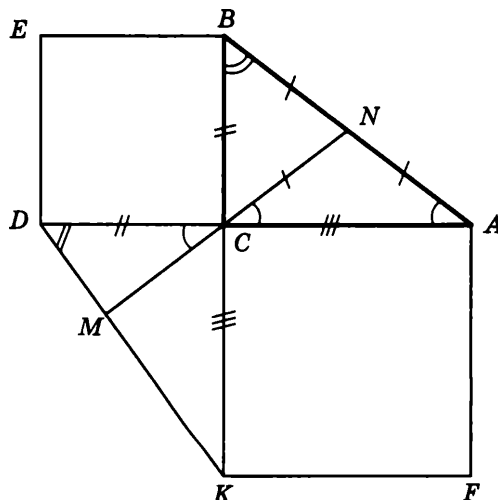


а) Докажите, что  $CN \perp DK$ .

б) Найдите длину  $MN$ , если  $AC = 21$ ,  $BC = 20$ .

*Решение.*

а) Так как  $N$  — середина  $AB$ , то  $CN$  — медиана прямоуугольного  $\triangle ABC$ . Значит,  $AN = BN = CN$ .



Тогда  $\angle CAN = \angle ACN$  и  $\angle ACN = \angle MCD$  — как вертикальные.

Заметим, что  $\triangle ABC = \triangle DCK$  (по двум катетам), тогда  $\angle ABC = \angle KDC$ . Значит,  $\triangle ABC \sim \triangle CDM$  (по двум углам). Следовательно,  $\triangle CDM$  — прямоуугольный и  $NM \perp DK$ ,  $CN \perp DK$ .

б) Из  $\triangle ABC$ , где  $AC = 21$ ,  $BC = 20$ , находим  $AB = \sqrt{21^2 + 20^2} = \sqrt{841} = 29$ , тогда  $CN = \frac{1}{2} AB = \frac{29}{2}$ .



В  $\triangle DCK$   $CD^2 = DK \cdot DM$ , где  $CD = 20$ ,  $DK = AB = 29$ .

Тогда  $DM = \frac{20^2}{29} = \frac{400}{29}$  и  $MK = DK - DM = 29 - \frac{400}{29} = \frac{841 - 400}{29} = \frac{441}{29}$ .

По свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, имеем  $CM = \sqrt{DM \cdot MK} = \sqrt{\frac{400}{29} \cdot \frac{441}{29}} = \frac{20 \cdot 21}{29} = \frac{420}{29}$ .

Тогда  $MN = CN + CM = \frac{29}{2} + \frac{420}{29} = \frac{1681}{58}$ .

Ответ: б)  $\frac{1681}{58}$ .

**Пример 35.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $M$  — середина  $AB$ . Прямая, проходящая через точку  $M$ , перпендикулярна  $CM$  и пересекает  $AC$  в точке  $N$ , причем  $AN : CN = 1 : 2$ .

а) Докажите, что  $\triangle BCM$  — правильный.

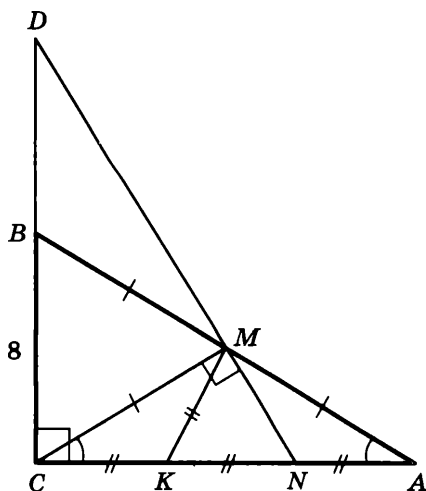
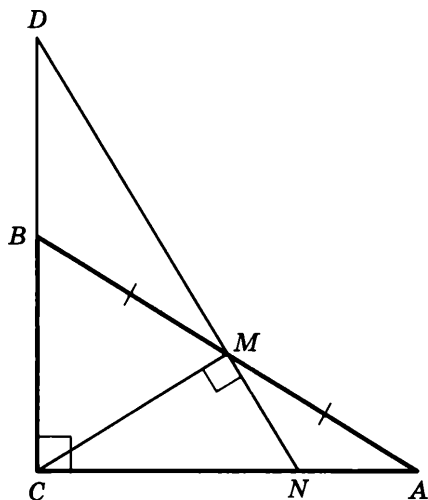
б) Найдите  $S_{\triangle AMC}$ , если  $BC = 8$ .

*Решение.*

а) По условию задачи  $M$  — середина гипотенузы  $AB$ , тогда  $CM$  — медиана.

Известно, что медиана, проведенная к гипотенузе, равна ее половине, т. е.  $CM = BM = AM$ . Значит,  $\triangle BMC$  и  $\triangle AMC$  — равнобедренные. Пусть  $K$  — середина  $CN$ . Так как  $AN : CN = 1 : 2$ , то  $AN = KN = CK$ . Но  $DN \perp CM$  (по условию), значит,  $\triangle CMN$  — прямоугольный, где  $MK$  — медиана, тогда  $MK = CK = KN = \frac{1}{2} AK$ .

Выходит, что  $\triangle AMK = \triangle CMN$  и тоже прямоугольный. Следовательно,  $\angle A = 30^\circ$  — как угол в прямоугольном треугольнике, лежащий напротив катета, который в 2 раза меньше гипотенузы.



Если  $\angle A = 30^\circ$ , то  $\angle B = 60^\circ$ , и так как  $\triangle BMC$  — равнобедренный, то  $\angle B = \angle BMC = 60^\circ$ .

Тогда  $\angle BMC = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$ , т. е.  $\triangle BMC$  — правильный.

б) Так как  $CM$  — медиана  $\triangle ABC$ , то  $S_{\triangle AMC} = S_{\triangle BCM}$ , где  $BC = BM = CM = 8$ .

Площадь правильного треугольника  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ , где  $a$  — сторона,

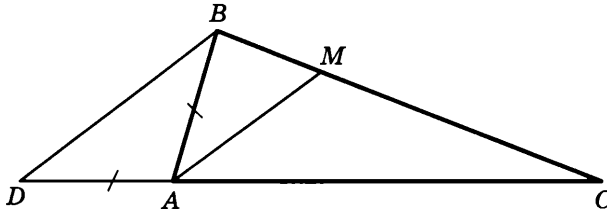
тогда  $S_{\triangle AMC} = S_{\triangle BCM} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$ .

Ответ: б)  $16\sqrt{3}$ .

**Пример 36.** В  $\triangle ABC$  сторона  $CA$  продолжена за точку  $A$  на расстояние  $AD = AB$ . Прямая  $AM \parallel BD$ ,  $M \in BC$ .

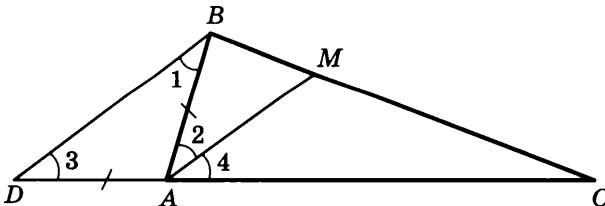
а) Докажите, что  $AM$  — биссектриса  $\angle BAC$ .

б) Найдите  $S_{\triangle AMC}$ , если  $S_{\triangle ABC} = 96$  и  $AC : AB = 3 : 1$ .



*Решение.*

а) Так как  $AM \parallel BD$ , то  $\angle 1 = \angle 2$  — как накрест лежащие. По условию задачи  $AB = AD$ , значит,  $\triangle ABD$  — равнобедренный, тогда  $\angle 1 = \angle 3$ . Но  $\angle 3 = \angle 4$  — как соответственные. Выходит, что  $\angle 2 = \angle 4$ , т. е.  $AM$  — биссектриса  $\angle BAC$ .



б) По условию задачи  $AC : AB = 3 : 1$ .

Так как  $AB = AD$ , то  $AC : AD = 3 : 1$  и  $AC : DC = 3 : 4$ .

Значит,  $\triangle AMC \sim \triangle BCD$ , где  $k = \frac{3}{4}$  — коэффициент подобия.

Тогда  $S_{\triangle AMC} : S_{\triangle BCD} = 9 : 16$ . Так как  $AM$  — биссектриса, то имеем  $BM : MC = AB : AC = 1 : 3$ , следовательно,  $S_{\triangle AMC} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{3}{4} \cdot 96 = 72$ .

Ответ: б) 72.

**Пример 37.** В остроугольном  $\triangle ABC$   $BM$  — высота, точка  $O$  — центр описанной окружности.

а) Докажите, что  $\angle ABM = \angle OBC$ .

б) Найдите  $BM$ , если  $AB = 25$ ,  $BC = 32$ ,  $BO = BM$ .

*Решение.*

а) Из центра  $O$  окружности опустим перпендикуляр  $OK$  на сторону  $BC$ . Тогда  $BM = BO$  (по условию) и  $BO = OC = R$ , где  $R$  — радиус описанной около  $\triangle ABC$  окружности, где  $OK$  — высота, медиана и биссектриса равнобедренного  $\triangle BOC$ . Так как  $\angle BOC$  — центральный, а  $\angle BAC$  — вписанный, то  $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle BOK = \angle COK$ . Выходит, что  $\triangle ABM \sim \triangle BOK = \triangle COK$  (по катету и острому углу).

Следовательно,  $\angle ABM = \angle OBK = OBC$ , ч. т. д.

б) Заметим, что из подобия  $\triangle ABM$  и  $\triangle BOK \Rightarrow \frac{BM}{AB} = \frac{BK}{BO}$ , или

$$\frac{R}{25} = \frac{16}{R}, \text{ или } R^2 = 25 \cdot 16, \text{ откуда } R = 5 \cdot 4 = 20.$$

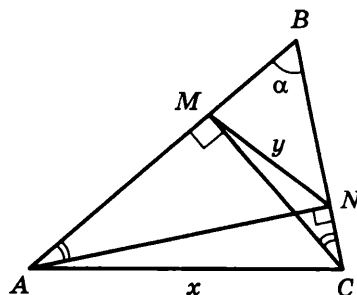
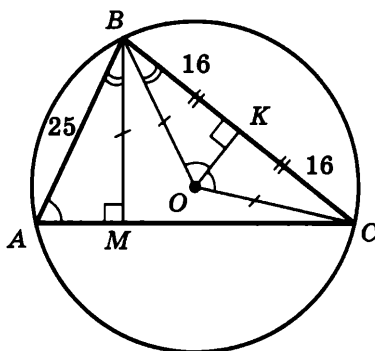
Значит,  $BM = R = 20$ .

Ответ: б) 20.

**Пример 38.** В  $\triangle ABC$  из вершин  $A$  и  $C$  опущены высоты  $AN$  и  $CM$  соответственно на стороны  $BC$  и  $AB$ .

а) Докажите, что  $\angle MAN = \angle MON$ .

б) Найдите сторону  $AC$ , если известно, что  $P_{\triangle ABC} = 12$ ,  $P_{\triangle BMN} = 9$ , а радиус окружности, описанной около  $\triangle BMN$ , равен 1,5.



*Решение.*

а) Так как по условию задачи  $AN$  и  $CM$  — высоты, то вокруг четырехугольника  $AMNC$  можно описать окружность, тогда  $\angle MAN = \angle MCN$  — как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу  $MN$ .

б) Заметим, что  $\frac{BM}{BC} = \frac{BN}{AB} = \cos \alpha$  (из  $\triangle BMC$  и  $\triangle ABN$ ). Кроме того,

$$\triangle BMN \sim \triangle ABC, \text{ где } k = \frac{BM}{BC} = \cos \alpha. \text{ Значит, } k = \frac{P_{\triangle BMN}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{4}, \text{ тогда } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Пусть  $MN = y$ , тогда из  $\triangle BMN$  по теореме синусов имеем  $\frac{y}{\sin \alpha} = 2R$ , откуда  $y = 2R \sin \alpha$ , где  $R = 1,5$  (по условию).

$$\text{Значит, } y = 2 \cdot 1,5 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{4}. \text{ Но } \frac{y}{x} = k = \frac{3}{4}, x = y : \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{4}{3} = \sqrt{7}.$$

*Ответ:* б)  $\sqrt{7}$ .

**Пример 39.** В равнобедренном  $\triangle ABC$ , где  $AB = BC = 25$ ,  $AC = 14$ , проведены медиана  $AM$  и биссектриса  $AN$ .

а) Докажите, что  $\operatorname{tg} \angle BAN = \frac{3}{4}$ .

б) Найдите расстояние между точками  $M$  и  $K$ .

*Решение.*

а) Из  $\triangle ABD$ , где  $AB = 25$ ,  $AD = \frac{1}{2}AC = 7$ , по

$$\text{теореме Пифагора имеем } BD = \sqrt{25^2 - 7^2} = \sqrt{676} =$$

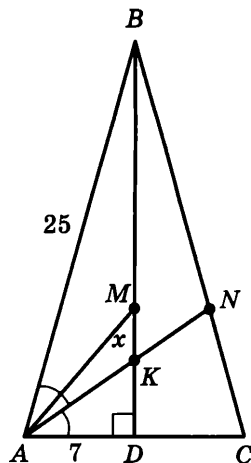
$$= 24. \text{ По условию задачи } AN — \text{ биссектриса,}$$

тогда  $\angle BAN = \angle NAC = \alpha$ . Значит,  $\operatorname{tg} \angle BAN = \operatorname{tg} \angle NAC = \operatorname{tg} \alpha$ .

По свойству биссектрисы  $\frac{BK}{KD} = \frac{AB}{AD} = \frac{25}{7}$ . Пусть  $BK = a$ ,  $KD = b$ ,

тогда  $\frac{a}{b} = \frac{25}{7}$ . Но  $a + b = BD = 24$ . Получим систему уравнений

$$\begin{cases} a + b = 24, \\ \frac{a}{b} = \frac{25}{7}; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 24 - b, \\ 7a = 25b; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 24 - b, \\ 7(24 - b) = 25b. \end{cases}$$



$168 - 7b = 25b$ ,  $32b = 168$ , откуда  $b = \frac{168}{32} = \frac{21}{4}$ . Из прямоугольного

$\triangle AKD$  находим  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{KD}{AD} = \frac{21}{4} : 7 = \frac{21}{4 \cdot 7} = \frac{3}{4}$ , ч. т. д.

б) По свойству медиан треугольника  $BM = \frac{2}{3}BD = 16$ .

Пусть  $MK = x$  — искомое расстояние между точками  $M$  и  $K$ .

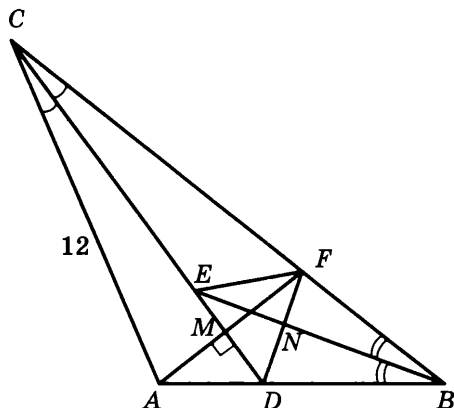
Заметим, что  $MD = \frac{1}{2}BM = 8$ . Тогда  $MK = x = MD - KD = 8 - b =$   
 $= 8 - \frac{21}{4} = \frac{11}{4} = 2,75$ .

Ответ: б) 2,75.

**Пример 40.** В  $\triangle ABC$  проведена биссектриса  $CD$ . Прямая, проходящая через вершину  $A$  перпендикулярно  $CD$ , пересекает сторону  $BC$  в точке  $F$ ;  $AC = 12$ ,  $AB = 10$ ,  $BC = 18$ .

а) Докажите, что биссектриса угла  $B$  делит отрезок  $DF$  пополам.

б) Пусть  $E$  — точка пересечения биссектрис  $\triangle ABC$ . Найдите отношение  $CE : EF$ .



*Решение.*

а) Так как  $CD$  — биссектриса, то по свойству биссектрисы имеем

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}.$$

Так как  $AB = 10 = AD + DB$ , то  $AD = 2x$ ,  $DB = 3x$ .

Значит,  $2x + 3x = 10$ ,  $5x = 10$ ,  $x = 2$ , тогда  $AD = 4$ ,  $DB = 6$ .

В  $\triangle ACF$  биссектриса  $CM \perp AF$ , значит,  $\triangle ACF$  — равнобедренный. Тогда  $AC = CF = 12$  и  $BF = BC - CF = 6$ . Но  $DB = 6$ , т. е.  $\triangle BDF$  — равнобедренный, где биссектриса  $BE$  является медианой. Значит,  $DN = NF$ , ч. т. д.

б) Так как  $BE$  — биссектриса  $\triangle BCD$  (по доказанному), то

$$\frac{CE}{DE} = \frac{BC}{BD} = \frac{18}{6} = 3. \text{ Но } DE = FE, \text{ тогда } \frac{CE}{FE} = \frac{CE}{DE} = 3.$$

Ответ: б) 3.

**Пример 41.** В  $\triangle ABC$  вписана окружность радиуса  $r$ , касающаяся стороны  $AC$  в точке  $K$ , причем  $CK = r$ .

а) Докажите, что  $\triangle ABC$  — прямоугольный.

б)  $M$  и  $N$  — точки касания вписанной окружности. Найдите  $S_{\triangle BMN}$ , если известно, что  $r = 3$  и  $AK = 5$ .

*Решение.*

а) Пусть  $O$  — центр вписанной в  $\triangle ABC$  окружности. Заметим, что  $CK = OK = r$ , значит,  $\triangle COK$  — равнобедренный и прямоугольный, т. е.  $\angle OCK = 45^\circ$ . Поскольку центр вписанной окружности лежит на биссектрисе этого угла, то  $CO$  — биссектриса  $\angle ACB$  и  $\angle OCM = \angle OCK = 45^\circ$ , тогда  $\angle ACB = 90^\circ$ , т. е.  $\triangle ABC$  — прямоугольный, ч. т. д.

б) Пусть  $BN = x$ , тогда  $BM = BN = x$  (по свойству касательных, проведенных к окружности из точки  $B$ ). Кроме того,  $CK = CM = r = 3$  (по условию),  $AN = AK = 5$  и  $AB = x + 5$ ,  $BC = x + 3$ ,  $AC = 8$ .

Из  $\triangle ABC$  по теореме Пифагора имеем  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , или  $(x + 5)^2 = 8^2 + (x + 3)^2$ , или  $x^2 + 10x + 25 = 64 + x^2 + 6x + 9$ , или  $4x = 48$ , откуда  $x = 12$ .

Тогда  $AB = x + 5 = 17$ ,  $\sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{17}$ .

Следовательно,  $S_{\triangle BMN} = \frac{1}{2} BM \cdot BN \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \frac{8}{17} = \frac{576}{17}$ .

Ответ: б)  $\frac{576}{17}$ .

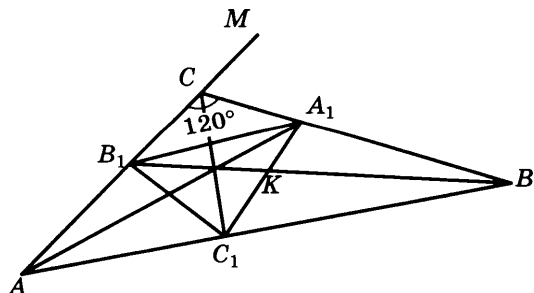
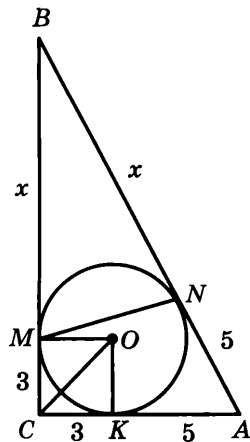
**Пример 42.** В  $\triangle ABC$ , где  $\angle C = 120^\circ$ , проведены биссектрисы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ .

а) Докажите, что  $\triangle A_1B_1C_1$  — прямоугольный.

б) Найдите  $\angle C_1B_1B$ .

*Решение.*

а) Пусть точка  $M$  лежит на продолжении стороны  $AC$ . Заметим, что  $CB$  — биссектриса  $\angle MCC_1$ , так как  $\angle ACC_1 = \angle BCC_1 = \angle BCM = 60^\circ$ . Точка  $A_1$  (точка пересечения биссектрис  $AA_1$  и  $CB$ ) — центр вне вписанной окружности, касающейся стороны  $CC_1$  и продолжений сторон



$AC$  и  $AC_1 \triangle ACC_1$ . Значит,  $C_1A_1$  — биссектриса  $\angle CC_1B$ . Аналогично  $B_1$  — центр вне вписанной окружности, касающейся стороны  $CC_1$  и продолжений сторон  $BC$  и  $BC_1 \triangle CC_1B$ . Следовательно,  $B_1C_1$  — биссектриса  $\angle AC_1C$ , тогда  $\angle A_1C_1B_1 = 90^\circ$ , ч. т. д.

б) Пусть  $K$  — точка пересечения биссектрис углов  $CC_1B$  и  $CBC_1$ . Тогда  $\angle BKC_1 = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle BCC_1 = 120^\circ$ . Поскольку для прямоугольного  $\triangle B_1C_1K \angle C_1KB$  — внешний, то  $\angle C_1B_1B = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ .

Ответ: б)  $30^\circ$ .

**Пример 43.** В равнобедренном  $\triangle ABC$  на боковой стороне  $BC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  так, что  $MN = NC = 2$ ,  $AN = 5$  и  $AM = \sqrt{33}$ .

а) Докажите, что  $\triangle ABC \sim \triangle ANC$ .

б) Найдите периметр  $\triangle ABC$ .

*Решение.*

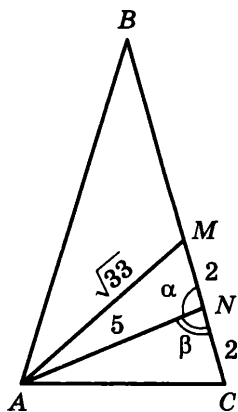
а) Пусть  $\angle ANM = \alpha$ ,  $\angle ANC = \beta$ . Из  $\triangle AMN$  по теореме косинусов имеем  $AM^2 = AN^2 + MN^2 - 2AN \cdot MN \cdot \cos \alpha$ , или  $33 = 25 + 4 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \cos \alpha$ , или  $20 \cos \alpha = -4$ , откуда  $\cos \alpha = -\frac{1}{5}$ .

Так как  $\beta = 180^\circ - \alpha$ , то  $\cos \beta = \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha = \frac{1}{5}$ .

Из  $\triangle ANC$  по теореме косинусов находим  $AC^2 = AN^2 + CN^2 - 2AN \cdot CN \cdot \cos \beta$ , или  $AC^2 = 25 + 4 - 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5} = 25$ ,  $AC = 5$ . Так как  $AC = AN = 5$ , то  $\triangle ACN$  — равнобедренный с основанием  $CN$ . Выходит, что  $\triangle ABC \sim \triangle ANC$  (по двум углам), ч. т. д.

б) Из подобия  $\triangle ABC$  и  $\triangle ANC$  следует, что  $k = \frac{AC}{CN} = \frac{5}{2}$ . Известно, что отношение периметров подобных треугольников равно  $k$ , т. е.  $P_{\triangle ABC} = k \cdot P_{\triangle ANC} = \frac{5}{2} \cdot (5 + 5 + 2) = \frac{5}{2} \cdot 12 = 30$ .

Ответ: б) 30.



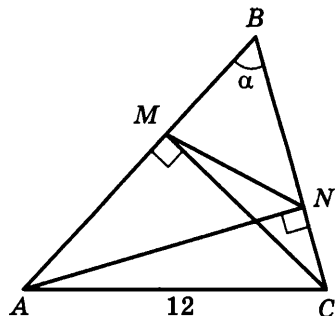
**Пример 44.** В остроугольном  $\triangle ABC$   $AC = 12$ ,  $AN$  и  $CM$  — высоты, опущенные соответственно на стороны  $BC$  и  $AB$ .

а) Докажите, что вокруг четырехугольника  $AMNC$  можно описать окружность.

б) Найдите  $S_{AMNC}$ , если известно, что

$$S_{\triangle MBN} = \frac{35\sqrt{3}}{4}, \text{ а радиус окружности, опи-}$$

санной около  $\triangle ABC$ , равен  $4\sqrt{3}$ .



*Решение.*

а) По условию задачи  $AN$  и  $CM$  — высоты  $\triangle ABC$ , тогда  $\angle AMC = \angle ANC = 90^\circ$ . Значит, вокруг четырехугольника  $AMNC$  можно описать окружность, где  $AC$  — диаметр описанной окружности.

б) Пусть  $AB = x$ ,  $BC = y$ ,  $BM = a$ ,  $BN = b$ .

Так как  $S_{\triangle MBN} = \frac{35\sqrt{3}}{4}$ , то получим  $S_{\triangle MBN} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \alpha$ , где

$$\alpha = \angle ABC, \text{ тогда } \frac{1}{2}ab \cdot \sin \alpha = \frac{35\sqrt{3}}{4}, \text{ или } ab \sin \alpha = \frac{35\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}xy \sin \alpha.$$

С другой стороны,  $S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$ , где  $AB = x$ ,  $BC = y$ ,  $AC = 12$ ,  $R = 4\sqrt{3}$ .

$$\text{Значит, } \frac{xy \cdot 2}{4 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{1}{2}xy \cdot \sin \alpha, \text{ откуда } \sin \alpha = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 60^\circ. \text{ Тогда } ab \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{35\sqrt{3}}{2}, \text{ откуда } ab = 35.$$

Так как  $\angle B = 60^\circ$ , то  $\angle MON = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow \angle AOM = 60^\circ$ .

$$\text{Тогда } S_{AMNC} = \frac{1}{2}AN \cdot MC \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4}AN \cdot MC.$$

$$\text{Из } \triangle ABN \text{ имеем } AN = x \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x;$$

$$\text{из } \triangle CBM \text{ } CM = y \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}y.$$

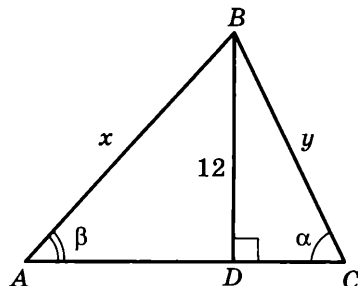


Следовательно,  $S_{AMNC} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} y = \frac{3\sqrt{3}}{16} xy$ . Но  $x = 2b$ ,  $y = 2a$ ,

тогда  $xy = 4ab = 4 \cdot 35 = 140$ , т. е.  $S_{AMNC} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot 140 = \frac{105\sqrt{3}}{4}$ .

Ответ: 6)  $\frac{105\sqrt{3}}{4}$ .

**Пример 45.** В  $\triangle ABC$  высота  $BD = 12$ ,  $R = \frac{65}{8}$ ,  $r = 4$ , где  $R$  и  $r$  — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.



а) Докажите, что  $AB + BC = 2AC$ .

б) Найдите стороны  $\triangle ABC$ .

*Решение.*

а) Пусть  $AB = x$ ,  $BC = y$ ,  $\angle C = \alpha$ ,  $\angle A = \beta$ . По теореме синусов  $\frac{x}{\sin \alpha} = 2R = \frac{65}{4} \Rightarrow x = \frac{65}{4} \sin \alpha$ ,  $\frac{y}{\sin \beta} = 2R = \frac{65}{4} \Rightarrow y = \frac{65}{4} \sin \beta$ .

Из  $\triangle ABD$   $x = \frac{12}{\sin \beta}$ ; из  $\triangle BCD$   $y = \frac{12}{\sin \alpha}$ .

Следовательно,  $\frac{65}{4} \sin \alpha = \frac{12}{\sin \beta}$  и  $\frac{65}{4} \sin \beta = \frac{12}{\sin \alpha}$ .

Значит,  $65 \sin \alpha \cdot \sin \beta = 48$ , откуда  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{48}{65}$ .

Так как  $x = \frac{65}{4} \sin \alpha$ ,  $y = \frac{65}{4} \sin \beta$ , то  $xy = \left(\frac{65}{4}\right)^2 \sin \alpha \sin \beta = \left(\frac{65}{4}\right)^2 \cdot \frac{48}{65} = 195$ .

Заметим, что  $S_{\triangle ABC} = p \cdot r = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ , или  $\frac{x+y+z}{2} \cdot 4 = \frac{1}{2} z \cdot 12$ , или  $x + y + z = 3z$ , откуда  $x + y = 2z$ , где  $z = AC$ .

Следовательно,  $AB + BC = 2AC$ , ч. т. д.

б) В  $\triangle ABC$   $\angle A = \beta$ ,  $\angle C = \alpha$ , тогда  $\angle ABC = 180^\circ - (\alpha + \beta)$ .

По теореме косинусов  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle B$ , или  $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos (180^\circ - (\alpha + \beta)) = x^2 + y^2 + 2xy \cos (\alpha + \beta)$ .

Значит,  $x^2 + y^2 = 4z^2 - 390$ , тогда  $z^2 = 4z^2 - 390 + 2 \cdot 195 \cos(\alpha + \beta)$ , или  $z^2 = 4z^2 - 390 + 390 \cos(\alpha + \beta)$ .

Из  $\triangle ABC$  по теореме синусов имеем  $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$ , или

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{z}{2R} \Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \sin^2(\alpha + \beta)}, \text{ или}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \sqrt{1 - \frac{z^2}{4R^2}} = \frac{1}{2R} \sqrt{4R^2 - z^2}, \text{ или}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{4}{65} \sqrt{4 \cdot \left(\frac{65}{8}\right)^2 - z^2} = \frac{4}{65} \sqrt{\left(\frac{65}{4}\right)^2 - z^2}.$$

Следовательно, получим уравнение

$$z^2 = 4z^2 - 390 + 390 \cdot \frac{4}{65} \sqrt{\left(\frac{65}{4}\right)^2 - z^2}, \text{ или}$$

$$390 - 3z^2 = 24 \sqrt{\left(\frac{65}{4}\right)^2 - z^2}, \text{ или } 130 - z^2 = 8 \sqrt{\left(\frac{65}{4}\right)^2 - z^2}.$$

Возведем обе части полученного уравнения в квадрат:

$$(130 - z^2)^2 = 64 \left( \left(\frac{65}{4}\right)^2 - z^2 \right), \text{ или } 16\,900 - 260z^2 + z^4 = 16\,900 - 64z^2,$$

$$\text{или } z^4 - 196z^2 = 0, z^2(z^2 - 196) = 0.$$

Так как  $130 - z^2 \geq 0$ ,  $z > 0$ , то  $z = 14$ .

Но  $x + y = 2z$  и  $xy = 195$ , тогда получим

$$\begin{cases} x + y = 28, & \begin{cases} x_1 = 15, \\ xy = 195; \end{cases} & \begin{cases} x_2 = 13, \\ y_2 = 15. \end{cases} \end{cases}$$

Следовательно, стороны треугольника  $AB = x = 15$ ,  $BC = y = 13$ ,  $AC = z = 14$ .

Теорема Пифагора для  $\triangle ABD$  и  $\triangle BDC$  выполняется, если  $x = 15$ ,  $y = 13$ . В этом случае  $AD = 9$ ,  $CD = 5$ . Если  $x = 13$ , то  $y = 15$ .

Ответ: 1)  $AB = 15$ ,  $BC = 13$ ,  $AC = 14$ ; 2)  $AB = 13$ ,  $BC = 15$ ,  $AC = 14$ .

**Пример 46.** В равнобедренном  $\triangle ABC$  со сторонами  $AB = BC = 13$  и  $AC = 10$  проведены высоты  $BD$  и  $AF$ . Прямая  $FD$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $E$ .

а) Докажите, что  $\triangle BED \cup \triangle AEF$ .

б) Найдите длину  $AE$ .

*Решение.*

а) Пусть  $\angle ABD = \alpha$ , тогда в  $\triangle ABD$  имеем  $\angle BAO + \angle OAD + \alpha = 90^\circ$ . В  $\triangle ABF$ , где  $\angle ABO = \angle OBF = \alpha$ , находим  $\angle BAF + \angle ABF = 90^\circ$ , или  $\angle BAF + 2\alpha = 90^\circ$ .

Значит,  $\angle BAO + \alpha = 90^\circ - \angle OAD$  и  $\alpha + (\alpha + \angle BAF) = 90^\circ$ , или  $\alpha + 90^\circ - \angle OAD = 90^\circ$ , т. е.  $\angle OAD = \alpha$ .

Так как  $\triangle AFC$  — прямоугольный,  $D$  — середина  $AC$ , то  $FD$  — медиана прямоугольного треугольника.

Тогда  $FD = \frac{1}{2}AC = AD = DC$ .

Значит,  $\triangle ADF$  — равнобедренный, тогда  $\angle FAD = \angle AFD = \alpha$ . Выходит, что  $\triangle BED \cup \triangle AEF$  (по двум углам), так как  $\angle E$  — общий,  $\angle EBD = \angle AFE = \alpha$ , ч. т. д.

б) Из подобия  $\Rightarrow \frac{BD}{AF} = \frac{DE}{AE} = \frac{BE}{EF}$ .

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2}AF \cdot BC$ , где  $AC = 10$ ,  $BC = AB = 13$ .

Из  $\triangle ABD$  по теореме Пифагора  $BD = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ .

Получим  $10 \cdot 12 = AF \cdot 13$ , откуда  $AF = \frac{120}{13}$ .

Пусть  $AE = x$ , тогда  $\frac{BD}{AF} = \frac{DE}{AE}$ , или  $12 : \frac{120}{13} = \frac{DE}{x}$ , или  $\frac{DE}{x} = \frac{13}{10}$ ,

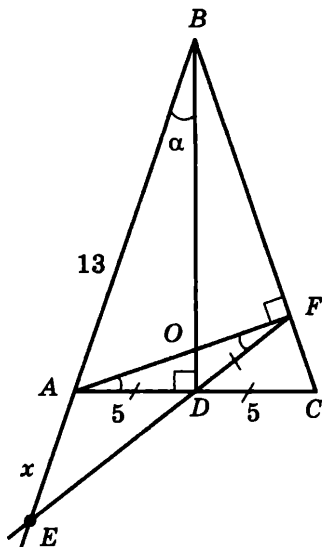
$\frac{BE}{EF} = \frac{13}{10}$ , где  $BE = 13 + x$ ,  $EF = ED + DF = ED + AD = \frac{13}{10}x + 5$ .

Получим уравнение  $\frac{13+x}{\frac{13}{10}x+5} = \frac{13}{10}$ , или  $\frac{10(13+x)}{13x+50} = \frac{13}{10}$ , или

$1300 + 100x = 169x + 650$ , или  $69x = 650$ , откуда  $x = \frac{650}{69}$ .

Значит,  $AE = x = \frac{650}{69}$ .

Ответ: б)  $\frac{650}{69}$ .



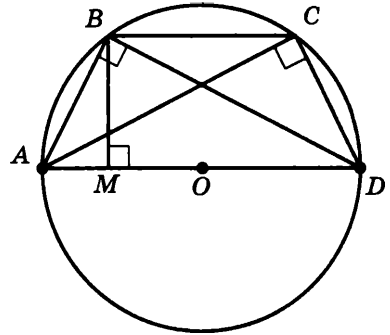
## 1.2. Четырехугольники

**Пример 47.** В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  углы  $ABD$  и  $ACD$  прямые.

- Докажите, что  $AB = CD$ .
- Найдите  $AD$ , если  $AB = 6$ ,  $BC = 14$ .

*Решение.*

а) Известно, что если вписанный угол — прямой, то он опирается на диаметр. Значит, точки  $B$  и  $C$  лежат на окружности с диаметром  $AD$ .



Поскольку трапеция вписана в окружность, то она — равнобедренная, т. е.  $AB = CD$ , ч. т. д.

б) Проведем высоту  $BM$  трапеции. Пусть  $AD = x$ , тогда

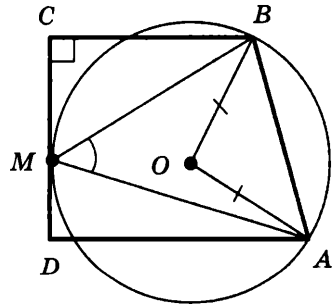
$AM = \frac{1}{2}(AD - BC)$ , или  $AM = \frac{1}{2}(x - 14)$ . В  $\triangle ABD$   $BM$  — высота, опущенная из вершины прямого угла  $ABD$  на гипотенузу  $AD$ .

Значит,  $AB^2 = AM \cdot AD$ , или  $6^2 = \frac{1}{2}(x - 14) \cdot x$ , или  $x^2 - 14x = 2 \cdot 36$ , или  $x^2 - 14x - 72 = 0$ , откуда  $x_1 = 18$ ,  $x_2 = -4$ . Так как  $x = AD > 0$ , то  $AD = 18$ .

*Ответ:* б) 18.

**Пример 48.** Окружность с центром  $O$ , расположенным внутри прямоугольной трапеции  $ABCD$ , проходит через вершины  $A$  и  $B$  большей боковой стороны и касается боковой стороны  $CD$  в точке  $M$ .

- Докажите, что  $\angle AOB = 2\angle AMB$ .
- Найдите расстояние от точки  $M$  до  $AB$ , если  $AD = 16$ ,  $BC = 9$ .



*Решение.*

а) Поскольку точки  $O$  и  $M$  расположены по одну сторону от прямой  $AB$ , то  $\angle AOB = 2\angle AMB$  ( $\angle AOB$  — центральный, а  $\angle AMB$  — вписанный).

б) Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке  $N$ , а из точки  $M$  опустим перпендикуляр  $MK$  на боковую сторону  $AB$ .

Пусть  $MN = x$ ,  $AN = y$ ,  $BN = z$ . Заметим, что  $\triangle NCB \cup \triangle NMK \cup \triangle AND$  (как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle N = \alpha$ ).

Тогда  $\frac{9}{BN} = \frac{MK}{MN} = \frac{16}{AN}$ , или  $\frac{9}{z} = \frac{MK}{x} = \frac{16}{y}$ . (1)

Кроме того, по теореме о касательной и секущей имеем

$$MN^2 = AN \cdot BN, \text{ или } x^2 = yz. \quad (2)$$

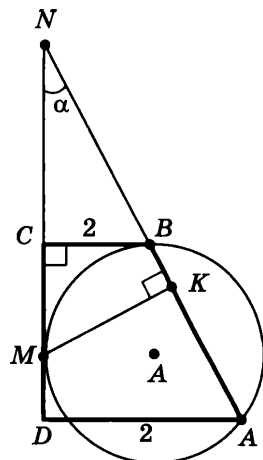
Из (1) получим  $\frac{z}{y} = \frac{9}{16}$ . (3)

Перемножив равенства (2) и (3), имеем

$$\frac{z}{y} \cdot yz = \frac{9}{16} \cdot x^2, \text{ или } z^2 = \frac{9}{16} \cdot x^2, \text{ откуда } z = \frac{3}{4}x,$$

или  $\frac{z}{x} = \frac{3}{4}$ . Но  $\frac{z}{x} = \frac{9}{MK} = \frac{3}{4}$ , т. е.  $MK = \frac{9 \cdot 4}{3} = 12$ .

Ответ: б) 12.



**Пример 49.** В трапеции  $ABCD$   $AB + CD = 17$ ,  $AC = 8$ ,  $BD = 15$ .

а) Докажите, что  $AC \perp BD$ .

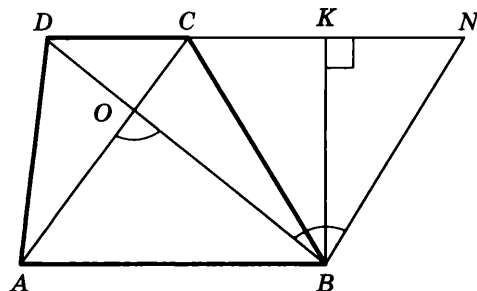
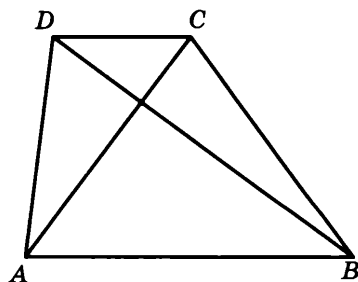
б) Найдите высоту  $ABCD$ .

*Решение.*

а) Через вершину  $B$  проведем прямую параллельно  $AC$  до пересечения с основанием  $DC$  в точке  $N$ . Тогда  $ABNC$  — параллелограмм (по построению), значит,  $AC = BN = 8$ ,  $AB = CN$  и  $\angle AOB = \angle DBN$  — как накрест лежащие при параллельных прямых  $AC$  и  $BN$  и секущей  $BD$ .

Заметим, что в  $\triangle DBN$   $BD = 15$ ,  $BN = AC = 8$  и  $DN = DC + CN = DC + AB = 17$ .

По теореме, обратной теореме Пифагора, имеем  $17^2 = 15^2 + 8^2$ . Следовательно,  $\triangle DBN$  — прямоугольный, где  $\angle DBN = \angle AOB = 90^\circ$ . Значит,  $AC \perp BD$ , ч. т. д.



б) Проведем высоту  $BK$ . Тогда  $S_{\triangle DBN} = \frac{1}{2} DN \cdot BK$ . С другой стороны,  $S_{\triangle DBN} = \frac{1}{2} BD \cdot BN$ . Значит,  $DN \cdot BK = BD \cdot BN$ , или  $17 \cdot BK = 15 \cdot 8$ , откуда  $BK = \frac{120}{17}$ .

Ответ: б)  $\frac{120}{17}$ .

**Пример 50.** Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность радиуса  $R = 4$ . Известно, что  $AD = DC = BC = 6$ .

а) Докажите, что прямые  $AB$  и  $CD$  параллельны.

б) Найдите  $AB$ .

*Решение.*

а) Заметим, что  $\angle CAB = \angle ACD$  — как вписанные, опирающиеся на равные дуги  $AD$  и  $BC$ . Значит,  $\angle CAB = \angle ACD$ , ч. т. д.

б) Поскольку  $AD = CD$  (по условию), то  $\triangle ACD$  — равнобедренный. Тогда  $\angle CAD = \angle ACD$ . Пусть  $\angle CAB = \alpha$ . Из  $\triangle ABC$  по теореме синусов имеем  $\frac{BC}{\sin \alpha} = 2R$ , или  $\sin \alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{6}{2 \cdot 4} = \frac{3}{4}$ .

Если  $\angle CAD = \angle ACD = \alpha$  (по доказанному), то  $AB \parallel CD$ , значит,  $ABCD$  — равнобедренная трапеция,  $\angle DAB = \angle B = 2\alpha$ , тогда  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{8} = -\frac{1}{8} < 0 \Rightarrow \angle DAB = \angle B > 90^\circ$ ,

т. е. углы при основании  $AB$  — тупые.

Проведем высоту  $AM$  трапеции. В  $\triangle ADM$   $AD = 6$ ,  $\angle D = 180^\circ - \angle DAB = 180^\circ - 2\alpha$ .

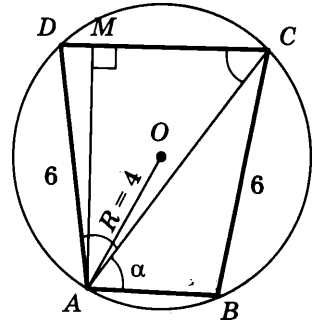
Тогда  $DM = AD \cos \angle D = 6 \cdot \cos(180^\circ - 2\alpha) = -6 \cos 2\alpha$ .

Но  $\cos 2\alpha = -\frac{1}{8}$ , значит,  $DM = -6 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}$ .

С другой стороны,  $DM = \frac{1}{2}(CD - AB)$ , или  $\frac{1}{2}(6 - AB) = \frac{3}{4}$ , или

$2(6 - AB) = 3$ , или  $12 - 2AB = 3$ , или  $2AB = 9$ ,  $AB = 4,5$ .

Ответ: б) 4,5.



**Пример 51.** Квадрат  $ABCD$  вписан в окружность. Хорда  $BE$  пересекает диагональ  $AC$  в точке  $F$ .

а) Докажите, что  $S_{ABCD} = BF \cdot BE$ .

б) Найдите отношение  $BF : FE$ , если  $\angle ABE = 15^\circ$ .

*Решение.*

а) Соединим точки  $D$  и  $E$  и точки  $A$  и  $E$ . Заметим, что  $\angle ADB = \angle AEB = 45^\circ$  — как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу  $AB$ .

Так как  $ABCD$  — квадрат, то  $\cup AB = \cup BC$ , тогда  $\angle ADB = \angle AEB = \angle FAB = 45^\circ$ . Следовательно,  $\triangle AFB \sim \triangle AEB$  (по двум углам).

Из подобия треугольников следует  $AB : BE = BF : AB$ , откуда  $AB^2 = BE \cdot BF = S_{ABCD}$ , ч. т. д.

б) Пусть  $O$  — центр,  $R$  — радиус окружности. Поскольку  $\angle BED$  — вписанный, опирающийся на диаметр  $BD$ , то  $\angle BED = 90^\circ$ .

Но  $\angle ABD = 45^\circ$ ,  $\angle ABE = 15^\circ$  (по условию), тогда  $\angle DBE = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$ . Из  $\triangle DBE$ , где  $\angle BED = 90^\circ$ ,  $\angle DBE = 30^\circ$ , имеем  $BE = BD \cdot \cos 30^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ . Из  $\triangle BOF$ , где  $\angle BOF = 90^\circ$ ,  $\angle OBF = 30^\circ$ ,

находим  $BF = BO : \cos 30^\circ$ , или  $BF = R : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ .

$$\text{Значит, } BF : BE = \frac{2R}{\sqrt{3}} : 2\sqrt{3} = \frac{2R}{\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}} = \frac{2}{3}.$$

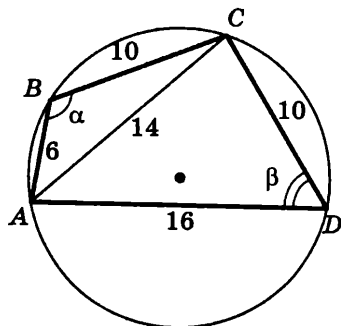
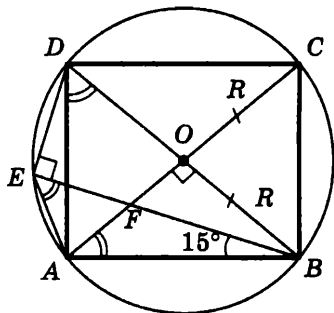
Тогда  $BF : BE = BF : (BF + FE) = 2 : 3$ , или  $3BF = 2(BF + FE)$ , или  $BF = 2FE$ , откуда  $BF : FE = 2 : 1$ .

*Ответ:* б)  $2 : 1$ .

**Пример 52.** В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  известны стороны  $AB = 6$ ,  $BC = CD = 10$ ,  $AD = 16$  и диагональ  $AC = 14$ .

а) Докажите, что вокруг этого четырехугольника можно описать окружность.

б) Найдите диагональ  $BD$ .



Решение.

I способ

а) По теореме косинусов из  $\triangle ABC$  и  $\triangle ADC$  имеем  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \alpha$ , где  $\angle ABC = \alpha$ .

$$14^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \cos \alpha, \text{ откуда } \cos \alpha = \frac{6^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 6 \cdot 10} = \frac{-60}{2 \cdot 60} = -\frac{1}{2}.$$

Значит,  $\alpha = 120^\circ$ .

Аналогично из  $\triangle ACD$  получим  $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2 \cdot AD \cdot CD \cdot \cos \beta$ , где  $\angle ADC = \beta$ .  $14^2 = 16^2 + 10^2 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot \cos \beta$ , откуда  $\cos \beta = \frac{16^2 + 10^2 - 14^2}{2 \cdot 16 \cdot 10} = \frac{160}{2 \cdot 160} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = 60^\circ$ .

Так как  $\alpha + \beta = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ , то вокруг четырехугольника  $ABCD$  можно описать окружность, ч. т. д.

б) Пусть  $\angle BAC = \angle CAD = \alpha$  — как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги  $BC$  и  $CD$ .

Из  $\triangle ADC$ , где  $AC = 14$ ,  $AD = 16$ ,  $CD = 10$ , по теореме косинусов имеем  $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos \alpha$ , откуда

$$\cos \alpha = \frac{196 + 256 - 100}{2 \cdot 14 \cdot 16} = \frac{352}{2 \cdot 14 \cdot 16} = \frac{22}{2 \cdot 14} = \frac{11}{14}.$$

$$\text{Значит, } \angle BAD = 2\alpha, \text{ тогда } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \frac{121}{196} - 1 = \frac{121}{98} - 1 = \frac{23}{98}.$$

Из  $\triangle ABD$  по теореме косинусов имеем  $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 2\alpha$ , или  $BD^2 = 36 + 256 - 2 \cdot 6 \cdot 16 \cdot \frac{23}{98}$ , или

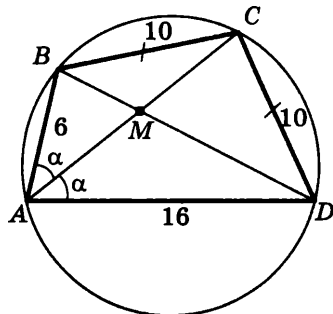
$$BD^2 = 292 - \frac{2208}{49} = \frac{12100}{49}, \text{ откуда } BD = \frac{110}{7}.$$

Ответ: б)  $\frac{110}{7}$ .

II способ

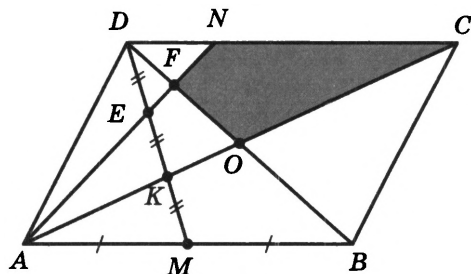
Известно, что для вписанного четырехугольника произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея), т. е.  $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ , или  $14 \cdot BD = 6 \cdot 10 + 10 \cdot 16$ , или  $14 \cdot BD = 220$ , откуда  $BD = \frac{110}{7}$ .

Ответ: б)  $\frac{110}{7}$ .





**Пример 53.** В параллелограмме  $ABCD$  точка  $M$  — середина  $AB$ . Из вершины  $A$  проведены два луча, которые разбивают отрезок  $DM$  на три равные части.



а) Докажите, что один из лучей содержит диагональ  $AC$  параллелограмма.

б) Найдите  $S_{FNCO}$ , если  $S_{ABCD} = 80$ .

*Решение.*

а) Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма,  $K$  — точка пересечения  $DM$  и  $AC$ . Заметим, что  $\triangle AKM \cup \triangle DKC$  (по двум углам), тогда  $\frac{MK}{DK} = \frac{AM}{CD} = \frac{1}{2}$ . Так как  $DE = EK = KM$  (по усло-

вию), то  $MK = \frac{1}{3}DM$ . Пусть точка  $E$  — середина  $DK$ , тогда один из лучей, проведенных из вершины  $A$  и разбивающих отрезок  $DM$  на три равные части, содержит диагональ  $AC$  параллелограмма, ч. т. д.

б) Пусть  $S_{ABCD} = S$ , тогда  $S_{\triangle COD} = \frac{1}{4}S$ . Поскольку  $\triangle AEM \cup \triangle DEN$  (по двум углам), то  $\frac{DN}{AM} = \frac{DE}{ME} = \frac{1}{2}$ , откуда  $DN = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{4}CD$ . Анало-

гично из подобия  $\triangle AFB$  и  $\triangle DNF$  имеем  $\frac{DF}{BF} = \frac{DN}{AB} = \frac{1}{4}$ , откуда

$$DF = \frac{1}{4}FB = \frac{1}{5}BD = \frac{2}{5}DO.$$

$$\text{Так как } \frac{S_{\triangle DFN}}{S_{\triangle COD}} = \frac{\frac{1}{2}DN \cdot FD \cdot \sin \angle FDN}{\frac{1}{2}CD \cdot DO \cdot \sin \angle FDN} = \frac{DN}{CD} \cdot \frac{FD}{DO} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}, \text{ откуда}$$

$$S_{\triangle DFN} = S_{\triangle COD} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{4}S \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{40}S.$$

$$\text{Следовательно, } S_{FNCO} = S_{\triangle COD} - S_{\triangle DFN} = \frac{1}{4}S - \frac{1}{40}S = \frac{9}{40}S.$$

$$\text{По условию } S_{ABCD} = S = 80. \text{ Значит, } S_{FNCO} = \frac{9}{40} \cdot 80 = 18.$$

*Ответ:* б) 18.

**Пример 54.** В трапеции  $ABCD$  точка  $E$  — середина  $AB$ ,  $F$  — середина  $AD$ . Отрезки  $CF$  и  $DE$  пересекаются в точке  $M$ .

а) Докажите, что  $S_{AEMF} = S_{\Delta CMD}$ .

б) Найдите  $S_{AEMF} : S_{ABCD}$ , если  $BC = 6$ ,  $AD = 8$ .

*Решение.*

а) Пусть  $CN = h$  — высота трапеции,

тогда  $EK = \frac{1}{2}h$ , так как  $E$  — середина  $AB$  (по условию).

$$S_{\Delta CFD} = \frac{1}{2}FD \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}AD \cdot h = \frac{1}{4}AD \cdot h, S_{\Delta AED} = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{4}AD \cdot h.$$

Значит,  $S_{\Delta CFD} = S_{\Delta AED}$ . Заметим, что  $\Delta MFD$  — их общая часть, т. е.  $S_{AEMF} = S_{\Delta CMD}$ .

б) Продолжим прямые  $BC$  и  $DE$  до пересечения в точке  $L$ . Заметим, что  $\Delta AED = \Delta LBE$  по стороне и двум прилежащим к ней углам (по II признаку равенства треугольников:  $\angle 1 = \angle 2$  — как вертикальные,  $\angle 3 = \angle 4$  — как накрест лежащие при параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $AB$ ).

Следовательно,  $AD = LB = 8$ ,  $CL = BC + LB = 6 + 8 = 14$ .

$\Delta LCM \cup \Delta MFD$  (по двум углам), тогда  $\frac{CM}{MF} = \frac{CL}{DF} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$ .

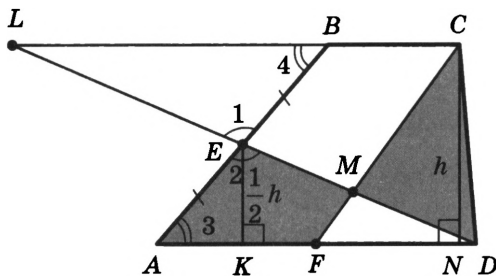
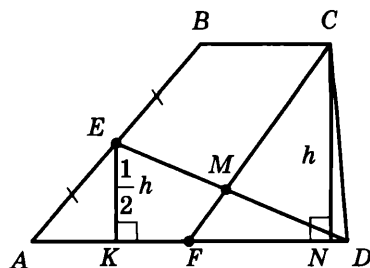
$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot h = 7h, S_{\Delta CFD} = \frac{1}{2}FD \cdot CN = 2h.$$

Значит,  $S_{\Delta CFD} = \frac{2}{7}S_{ABCD}$ . Но  $\frac{CM}{MF} = \frac{7}{2} \Rightarrow CM = \frac{7}{9}CF$ .

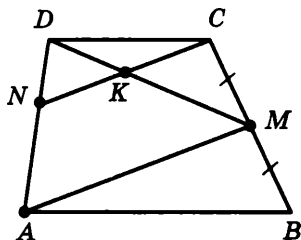
$$\text{Тогда } S_{AEMF} = S_{\Delta CMD} = \frac{7}{9}S_{\Delta CFD} = \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{7}S_{ABCD} = \frac{2}{9}S_{ABCD}.$$

Следовательно,  $S_{AEMF} : S_{ABCD} = 2 : 9$ .

*Ответ:* б) 2 : 9.



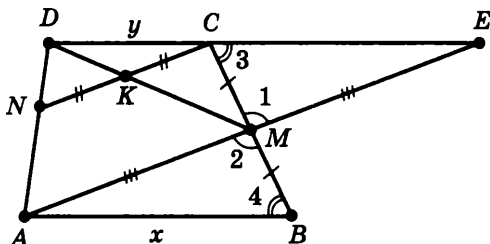
**Пример 55.** В трапеции  $ABCD$  точка  $M$  — середина  $BC$ . На стороне  $AD$  отмечена точка  $N$  так, что  $NC \parallel AM$ .  $K$  — точка пересечения  $DM$  и  $NC$ .



- а) Докажите, что  $CK = NK$ .  
 б) Найдите отношение  $CD : AB$ , если  $S_{\triangle CDN} = \frac{9}{25} S_{ABCD}$ .

*Решение.*

а) Продолжим прямые  $AM$  и  $DC$  до пересечения в точке  $E$ . Заметим, что  $\triangle AMB = \triangle CME$  по стороне ( $CM = MB$  по условию) и двум прилежащим к ней углам ( $\angle 1 = \angle 2$  — как вертикальные и  $\angle 3 = \angle 4$  — как накрест лежащие при параллельных прямых  $CE$  и  $AB$  и секущей  $BC$ ). Значит,  $AM = ME$ , т. е.  $DM$  — медиана  $\triangle ADE$ .



По условию задачи  $NC \parallel AM$ , тогда  $DK$  — медиана  $\triangle CDN$ , т. е.  $CK = NK$ , ч. т. д.

б) Пусть  $AB = x$ ,  $CD = y$ . Так как  $\triangle AMB = \triangle CME$  (по доказанному), то  $S_{\triangle ADE} = S_{ABCD}$ , значит,  $S_{\triangle CDN} = \frac{9}{25} S_{\triangle ADE}$ , где коэффициент подобия

$$k = \frac{3}{5}.$$

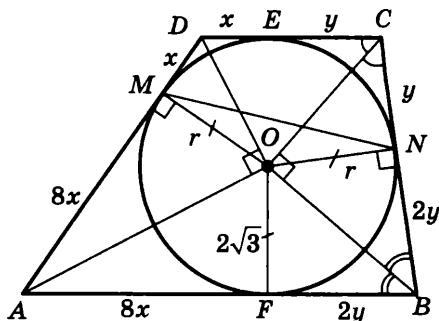
$$\text{Следовательно, } \frac{DC}{DE} = \frac{3}{5} = \frac{DC}{DC + CE} = \frac{DC}{DC + AB} = \frac{y}{y + x}, \text{ или } \frac{x + y}{y} = \frac{5}{3},$$

$$\text{или } \frac{x}{y} + 1 = \frac{5}{3}, \text{ откуда } \frac{x}{y} = \frac{2}{3}. \text{ Значит, } CD : AB = y : x = 3 : 2.$$

*Ответ:* б) 3 : 2.

**Пример 56.** Окружность, вписанная в трапецию  $ABCD$ , касается ее боковых сторон  $AD$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, причем  $AM = 8MD$  и  $BN = 2CN$ .

- а) Докажите, что  $AB = 4CD$ .  
 б) Найдите  $MN$ , если  $r = 2\sqrt{3}$ .



*Решение.*

а) Пусть  $O$  — центр окружности,  $r = 2\sqrt{3}$  — радиус,  $E$  и  $F$  — точки касания окружности с основаниями  $AB$  и  $CD$ . Пусть  $MD = x$ ,  $AM = 8x$ ,  $CN = y$ ,  $BN = 2y$ . Так как  $BO$  и  $CO$  — биссектрисы углов  $B$  и  $C$  трапеции, то  $\triangle BOC$  — прямоугольный ( $\angle B + \angle C = 180^\circ$ ),  $ON$  — его высота. По свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, имеем  $ON^2 = CN \cdot BN$ , или  $r^2 = 2y^2$ . Аналогично из  $\triangle AOD$  находим  $r^2 = 8x^2$ . Тогда  $2y^2 = 8x^2$ , откуда  $y = 2x$ .  $AB = AF + BF = AM + BN = 8x + 2y = 8x + 4x = 12x$ .  $CD = DE + CE = MD + CN = x + y = x + 2x = 3x$ . Так как  $AB = 12x$  и  $CD = 3x$ , то  $AB = 4CD$ , ч. т. д.

б) Пусть прямые  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $K$ . Заметим, что  $\triangle CDK \sim \triangle AKB$ , где  $k = \frac{CD}{AB} = \frac{1}{4}$  (коэффициент подобия), тогда  $\frac{KC}{KB} = \frac{1}{4}$ ,  $KC = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3} \cdot 3y = y = 2x$ . Аналогично  $DK = \frac{1}{3}AD = \frac{1}{3} \cdot 9x = 3x$ .

Так как  $CD = 3x$  и  $DK = 3x$ , то  $\triangle CDK$  — равнобедренный.

Пусть  $\angle DKC = \alpha$ , тогда  $\cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}KC}{DK} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$ .

Значит,  $KN = KM = 4x$ .

По теореме косинусов имеем  $MN^2 = KM^2 + KN^2 - 2KM \cdot KN \cdot \cos \alpha$ , или  $MN^2 = 16x^2 + 16x^2 - 2 \cdot 4x \cdot 4x \cdot \frac{1}{3} = 32x^2 - \frac{32}{3}x^2 = \frac{64}{3}x^2$ , откуда

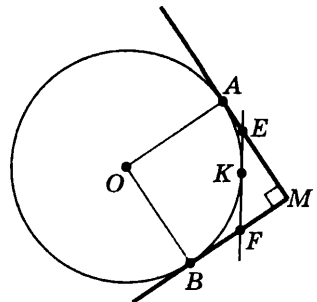
$$MN = \frac{8}{\sqrt{3}}x.$$

Из  $\triangle AOD$  получим  $8x \cdot x = AM \cdot MD = r^2 = 12$ , т. е.  $x^2 = \frac{12}{8} = \frac{6}{4}$ ,  $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . Значит,  $MN = \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = 4\sqrt{2}$ .

*Ответ:* б)  $4\sqrt{2}$ .

**Пример 57.** Радиус окружности равен 10. Из точки  $M$ , взятой вне окружности, проведены касательные  $MA$  и  $MB$  ( $A$  и  $B$  — точки касания),  $AM \perp MB$ .  $FE$  — также касательная к окружности, причем  $E \in AM$ ,  $F \in BM$ .

а) Докажите, что  $AOBM$  — квадрат.



б) Найдите периметр  $\triangle MEF$ .

*Решение.*

а) Так как  $MA$  и  $MB$  — касательные к окружности, то  $MA \perp AO$  и  $MB \perp BO$ . Кроме того,  $AM \perp MB$  (по условию) и  $OA = OB = R$ .

Значит,  $AOBM$  — квадрат.

б)  $P_{\triangle MEF} = ME + FM + EF$ . Пусть  $K$  — точка касания  $EF$  к окружности, тогда  $AE = EK$  и  $KF = BF$  (по свойству касательных).

Так как  $AOBM$  — квадрат, то  $P_{\triangle MEF} = ME + FM + (EK + KF) = ME + FM + AE + FB = (ME + AE) + (MF + FB) = AM + MB = 10 + 10 = 20$ .

*Ответ:* б) 20.

**Пример 58.** В квадрате  $ABCD$  точки  $M, E, F$  — середины сторон  $BC, AB$  и  $CD$  соответственно,  $K$  — точка пересечения  $AM$  и  $DE$ ,  $T$  —  $MD$  и  $AF$ ,  $N$  —  $AF$  и  $DE$ .

а) Докажите, что точки  $M, K, N$  и  $T$  лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в четырехугольник  $MKNT$ , если  $AB = 16$ .

*Решение.*

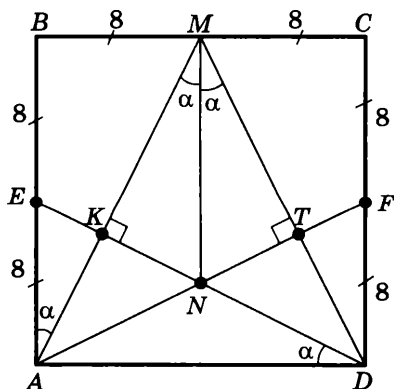
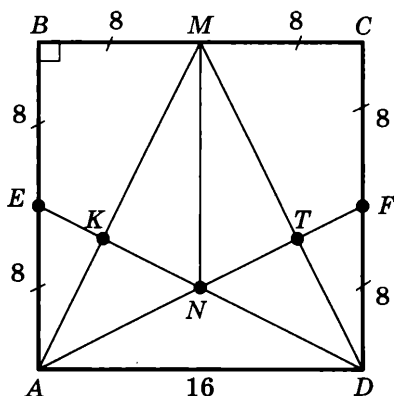
а) Так как  $ABCD$  — квадрат, точки  $E, M$  и  $F$  — середины сторон  $AB, BC$  и  $CD$  соответственно, то  $\triangle ABM = \triangle DAE$  (по двум катетам). Тогда  $\angle BAM = \angle ADE = \alpha$ .

Так как  $\triangle EAD$  — прямоугольный, то  $\angle AED = 90^\circ - \angle ADE = 90^\circ - \alpha$ .

В  $\triangle AEK$   $\angle AKE = 180^\circ - (\angle EAK + \angle AEK) = 180^\circ - (\alpha + 90^\circ - \alpha) = 90^\circ$ . Значит,  $\triangle AEK$  — прямоугольный. Аналогично  $\triangle DFT$  — прямоугольный.

Выходит, что в четырехугольнике  $MKNT$   $\angle MKN = \angle MTN = 90^\circ$ . Следовательно, вершины треугольников, имеющих общую гипотенузу  $MN$ , лежат на одной окружности, где  $MN$  — диаметр.

Итак, точки  $K, M, T, N$  лежат на одной окружности.



б) Известно, что площадь четырехугольника, описанного около окружности, определяется по формуле  $S = p \cdot r$ , где  $p$  — полупериметр,  $r$  — радиус вписанной окружности.

$$\text{В } \triangle ABM \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{2}.$$

Известно, что  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ , или  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{5}{4}$ , откуда  $\cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$ ,

$$\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\cos \alpha > 0).$$

$$\text{Из } \triangle AEK \quad \cos \alpha = \frac{AK}{AE} \Rightarrow AK = AE \cdot \cos \alpha = 8 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Из } \triangle ABM \quad \cos \alpha = \frac{BM}{AM} \Rightarrow AM = \frac{8\sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{5}.$$

$$\text{Тогда } MK = AM - AK = 4\sqrt{5} - \frac{16}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Так как точка  $M$  — середина  $BC$ , то  $MN$  — биссектриса  $\angle AMD$ , тогда  $\angle BAM = \angle AMN$  (как накрест лежащие).

$$\text{Из } \triangle MKN \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{KN}{MK} \Rightarrow KN = MK \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$S_{MKNT} = 2S_{\triangle MKN} = 2 \cdot \frac{1}{2} MK \cdot KN = \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{8}{5}.$$

$$p = \frac{2MK + 2KN}{2} = MK + KN = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Следовательно, } r = \frac{S_{MKNT}}{p} = \frac{8}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{4\sqrt{5}}{15}.$$

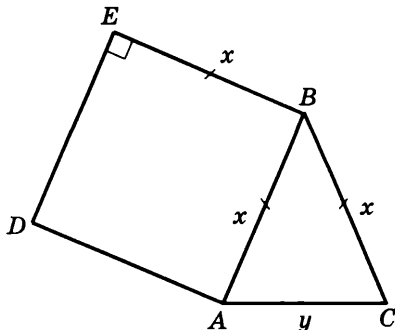
$$\text{Ответ: б) } \frac{4\sqrt{5}}{15}.$$

**Пример 59.** Площадь квадрата  $ABED$ , построенного на стороне равнобедренного  $\triangle ABC$  с острым углом  $B$ , в 4 раза больше площади  $\triangle ABC$ .

а) Докажите, что  $\angle ABC = 30^\circ$ .

б) Найдите  $\frac{R}{r}$ , где  $R$  и  $r$  — соответ-

ственно радиусы описанной и вписанной окружностей.



*Решение.*

а) Пусть  $AB = BC = BE = x$ ,  $AC = y$ .

По условию задачи  $x^2 = 4S_{\triangle ABC}$ .

$$\text{Но } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC \cdot \sin \angle ABC = \frac{1}{2}x^2 \sin \angle ABC.$$

Следовательно,  $x^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 \sin \angle ABC$ , или  $x^2 = 2x^2 \sin \angle ABC$ , отку-

$$\text{да } \sin \angle ABC = \frac{1}{2}.$$

Значит,  $\angle ABC = 30^\circ$ , ч. т. д.

б) По следствию из теоремы синусов имеем  $\frac{AC}{\sin \angle ABC} = 2R$ , откуда

$$R = \frac{y}{2 \sin 30^\circ} = \frac{y}{2 \cdot \frac{1}{2}} = y.$$

Итак,  $R = y = AC$ .

Известно, что  $S_{\triangle} = p \cdot r$ , где  $p = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(2x + y)$ , тогда

$$r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}x^2 \cdot \sin 30^\circ}{\frac{1}{2} \cdot (2x + y)} = \frac{x^2}{2(2x + y)}, \text{ значит, } \frac{R}{r} = \frac{2y(2x + y)}{x^2}.$$

Но  $\cos \angle BAC = \cos 75^\circ$ , или  $y = 2x \cos 75^\circ$ ,

$$\text{т. е. } \frac{R}{r} = \frac{4x \cos 75^\circ \cdot (2x + 2x \cos 75^\circ)}{x^2} = 8 \cos 75^\circ \cdot (1 + \cos 75^\circ).$$

$$\text{Но } \cos 75^\circ = \cos (30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ = \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1).$$

$$\text{Тогда } \frac{R}{r} = 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1) \right) = \\ = 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \frac{1}{4} \cdot (4 + \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} - 1)) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot (4 + \sqrt{6} - \sqrt{2}) = \\ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{2}(2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1) = (\sqrt{3} - 1) \cdot (2\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1) = \\ = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 4 = 2\sqrt{3}(\sqrt{2} - 1) + 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1).$$

Ответ: б)  $2(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 1)$ .

**Пример 60.** В параллелограмме  $ABCD$  стороны  $AB = 6$ ,  $AD = 4$ , точка  $E$  — середина  $AB$ . Известно, что  $AC \perp DE$ ,  $M$  — точка их пересечения.

а) Докажите, что  $\triangle AME \sim \triangle DMC$ .

б) Найдите  $S_{ABCD}$ .

*Решение.*

а) Проведем  $BF \parallel DE$ , тогда  $DEBF$  — параллелограмм. По условию точка  $E$  — середина  $AB$ , тогда  $F$  — середина  $CD$  (по теореме Фалеса).

Заметим, что  $\angle CAB = \angle ACD$  и  $\angle AED = \angle CDE$  (как накрест лежащие при параллельных прямых и секущей).

Тогда  $\triangle AME \sim \triangle DMC$  (по двум углам или как прямоугольные, имеющие общий острый угол), ч. т. д.

б) Значит,  $\frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$ , тогда  $\frac{DM}{ME} = \frac{2}{1}$ .

Пусть  $ME = x$ ,  $AM = y$ ,  $MD = 2x$ ,  $MC = 2y$ .

Из прямоугольных треугольников  $AME$  и  $AMD$  имеем  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 4x^2 + y^2 = 16, \end{cases}$

или, вычитая из II уравнения I, получим  $3x^2 = 7$ ,  $x^2 = \frac{7}{3}$ , откуда

$$x = \sqrt{\frac{7}{3}}. \text{ Тогда } y^2 = 9 - x^2 = 9 - \frac{7}{3} = \frac{20}{3}, y = \sqrt{\frac{20}{3}}.$$

Так как диагональ  $AC$  делит параллелограмм  $ABCD$  на два равных треугольника, то  $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ADC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot DM = 3y \cdot 2x = 6xy$ , или

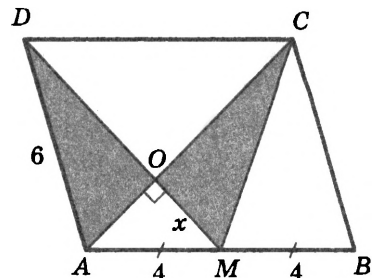
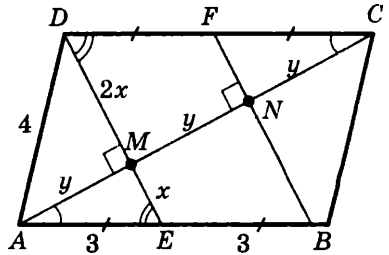
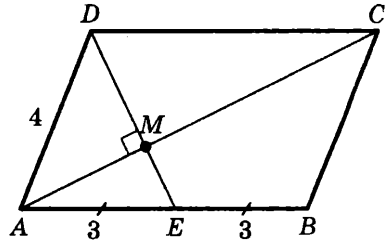
$$S_{ABCD} = 6 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{\frac{20}{3}} = 2\sqrt{7 \cdot 20} = 4\sqrt{35}.$$

*Ответ:* б)  $4\sqrt{35}$ .

**Пример 61.** В параллелограмме  $ABCD$  точка  $M$  — середина  $AB$ . Прямые  $AC$  и  $DM$  пересекаются в точке  $O$ .

а) Докажите, что  $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COM}$ .

б) Найдите  $S_{ABCD}$ , если  $AB = 8$ ,  $AD = 6$ .





**Решение.**

а) Заметим, что  $S_{\triangle ADM} = S_{\triangle ACM}$ , так как  $AM$  — общее основание, а высоты равны,  $\triangle AOM$  — общая часть. Значит,  $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COM}$ , ч. т. д.

б) В прямоугольном  $\triangle AOM$   $AM = \frac{1}{2}AB = 4$ . Пусть  $OM = x$ , тогда

$$AO = \sqrt{AM^2 - OM^2} = \sqrt{16 - x^2}.$$

$$\text{Из } \triangle AOD \text{ имеем } OD = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{36 - (16 - x^2)} = \sqrt{x^2 + 20}.$$

Так как  $\triangle AOM \sim \triangle DOC$  (по двум углам), то  $k = \frac{DC}{AM} = 2$ , где  $k$  — ко-

эффициент подобия. Значит,  $\frac{DC}{AM} = \frac{OD}{OM} = 2$ , или  $\frac{\sqrt{x^2 + 20}}{x} = 2$ , или

$$\frac{x^2 + 20}{x^2} = 4, \quad 3x^2 = 20, \quad \text{откуда } x = \sqrt{\frac{20}{3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } DM &= OD + OM = \sqrt{x^2 + 20} + x = \sqrt{\frac{20}{3} + 20} + \sqrt{\frac{20}{3}} = \sqrt{\frac{80}{3}} + \sqrt{\frac{20}{3}} = \\ &= \sqrt{\frac{20}{3}}(\sqrt{4} + 1) = 3\sqrt{\frac{20}{3}}. \end{aligned}$$

Теперь, зная стороны  $\triangle ADM$ , найдем  $\angle DAM$ .

Пусть  $\angle DAM = \alpha$ , тогда по теореме косинусов имеем

$$DM^2 = AD^2 + AM^2 - 2AD \cdot AM \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

$$\left(3\sqrt{\frac{20}{3}}\right)^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos \alpha, \text{ или } 2 \cdot 6 \cdot 4 \cos \alpha = 52 - 9 \cdot \frac{20}{3},$$

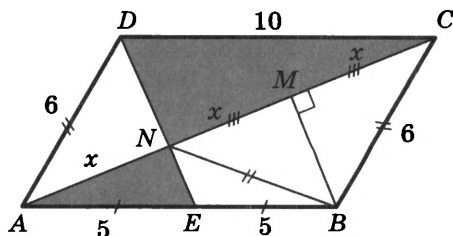
$$\text{или } 2 \cdot 6 \cdot 4 \cos \alpha = -8, \text{ откуда } \cos \alpha = -\frac{1}{6}.$$

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{35}}{6}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \alpha = 8 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{35}}{6} = 8\sqrt{35}.$$

**Ответ:** б)  $8\sqrt{35}$ .

**Пример 62.** В параллелограмме  $ABCD$  точка  $E$  — середина  $AB$ ,  $N$  — точка пересечения  $AC$  и  $DE$ ,  $AD = BN$ .



а) Докажите, что  $DE \perp AC$ .

б) Найдите  $S_{ABCD}$ , если  $AB = 10$ ,  $AD = 6$ .

*Решение.*

а) Пусть точка  $M$  — середина  $NC$ . Так как  $AD = BN$  (по условию задачи) и  $BC = AD$  (по свойству параллелограмма), то  $BC = BN$ , т. е.  $\triangle CBN$  — равнобедренный, тогда медиана  $BM$  является высотой, т. е.  $BM \perp AC$ .

Заметим, что  $\triangle ANE \sim \triangle DNC$  (по I признаку), тогда  $k = \frac{DC}{AE} = \frac{10}{5} = 2$ ,

где  $k$  — коэффициент подобия. Пусть  $AN = x$ , тогда  $NM = MC = x$ ,  $NC = 2x$ .

Кроме того,  $\triangle ANE \sim \triangle AMB$ , так как  $\frac{AN}{AE} = \frac{AM}{AB}$ , тогда  $\angle ANE = \angle AMB$ . Поскольку  $BM \perp AC$ , то  $NE \perp AC$ , ч. т. д.

б) Пусть  $NE = y$ , тогда  $DN = 2y$  (так как  $k = 2$ ).

В  $\triangle AND$   $x^2 = 6^2 - (2y)^2$ , или  $x^2 = 36 - 4y^2$ .

В  $\triangle ANE$   $x^2 = 5^2 - y^2$ , или  $x^2 = 25 - y^2$ .

Сравнивая правые части полученных равенств, имеем  $36 - 4y^2 = 25 - y^2$ , или  $3y^2 = 11$ ,  $y^2 = \frac{11}{3}$ ,  $y = \sqrt{\frac{11}{3}}$ .

Тогда  $x^2 = 25 - y^2 = 25 - \frac{11}{3} = \frac{64}{3}$ , откуда  $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$ .

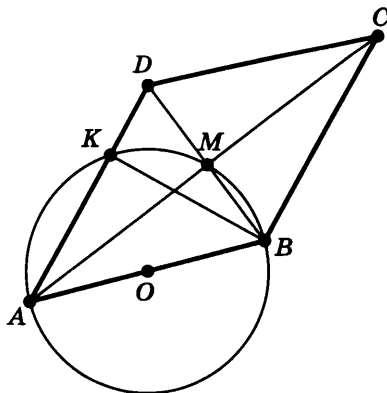
Следовательно,  $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ADC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot DN = 3x \cdot 2y = 6xy = 6 \cdot \frac{8}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{11}{3}} = \frac{6 \cdot 8 \cdot \sqrt{11}}{3} = 16\sqrt{11}$ .

Ответ: б)  $16\sqrt{11}$ .

**Пример 63.** Окружность с центром  $O$ , построенная на стороне  $AB$  параллелограмма  $ABCD$  как на диаметре, проходит через точку  $M$ .

а) Докажите, что  $ABCD$  — ромб.

б) Найдите  $AC$ , если  $AB = 3\sqrt{2}$  и  $AK : KD = 3 : 1$ , где  $K$  — точка пересечения окружности со стороной  $AD$ .



*Решение.*

а) Поскольку  $AB$  — диаметр и  $\angle AMB$  — вписанный, то  $\triangle AMB$  — прямоугольный.

Значит,  $AC \perp BD$ , т. е. параллелограмм  $ABCD$  является ромбом, ч. т. д.

б) По условию  $AB = 3\sqrt{2}$  и  $AB = AD$ .

Пусть  $KD = x$ , тогда  $AK = 3x$  и  $AD = 4x$ .

Значит,  $4x = 3\sqrt{2}$ ,  $x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ .

Тогда  $KD = x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ ,  $AK = 3x = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ .

Заметим, что  $\triangle ABK$  — прямоугольный ( $\angle KVB = \angle AMB = 90^\circ$  — как вписанные, опирающиеся на диаметр  $AB$ ).

$$KB = \sqrt{AB^2 - AK^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - \left(\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{18 - \frac{162}{16}} = \sqrt{\frac{126}{16}} = \frac{3\sqrt{14}}{4}.$$

Из прямоугольного  $\triangle BDK$  ( $\angle DKB = \angle KVB = 90^\circ$ ) найдем

$$BD = \sqrt{DK^2 + BK^2}, \text{ или } BD = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{126}{16}} = \sqrt{\frac{18}{16} + \frac{126}{16}} = \\ = \sqrt{\frac{144}{16}} = \frac{12}{4} = 3.$$

Тогда  $DM = \frac{1}{2}BD = \frac{3}{2}$ .

$$\text{Из } \triangle AMD \text{ найдем } AM = \sqrt{AD^2 - MD^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \\ = \sqrt{18 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{63}{4}} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

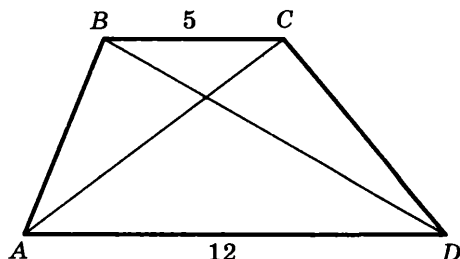
Следовательно,  $AC = 2AM = 3\sqrt{7}$ .

Ответ: б)  $3\sqrt{7}$ .

**Пример 64.** В трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) основания  $AD = 12$ ,  $BC = 5$ , а диагонали  $AC = 8$ ,  $BD = 15$ .

а) Докажите, что  $AC \perp BD$ .

б) Найдите высоту трапеции.



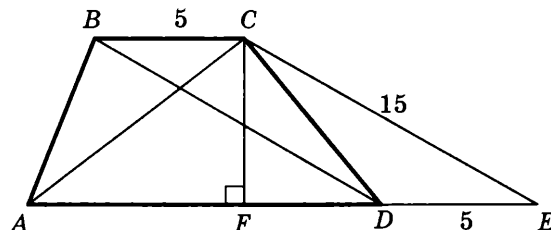
*Решение.*

а) Из точки  $C$  проведем прямую параллельно диагонали  $BD$  до пересечения с основанием  $AD$  в точке  $E$ . Тогда четырехугольник  $BCED$  — параллелограмм (по признаку параллелограмма).

Заметим, что в  $\triangle ACE$   $AC = 8$ ,  $CE = 15$ ,  $AE = AD + DE = AD + BC = 12 + 5 = 17$ .

Так как  $AE^2 = AC^2 + CE^2$ , т. е.  $17^2 = 8^2 + 15^2$ , то  $\triangle ACE$  — прямоугольный (по теореме, обратной теореме Пифагора).

Тогда  $\angle ACE = 90^\circ$ , т. е.  $AC \perp BD$ , ч. т. д.



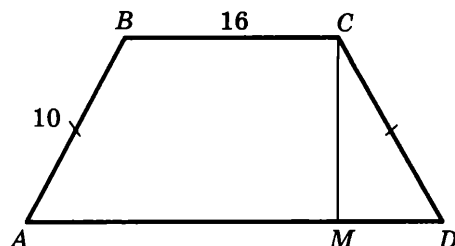
б) Проведем высоту  $CF$   $\triangle ACE$ , которая является и высотой трапеции  $ABCD$ .

Так как  $S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2}AE \cdot CF = \frac{1}{2}AC \cdot CE$ , то  $CF = \frac{AC \cdot CE}{AE} = \frac{8 \cdot 15}{17} = \frac{120}{17}$ .

Ответ: б)  $\frac{120}{17}$ .

**Пример 65.** В равнобедренной трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) известно, что  $AD = 2BC$ .

а) Докажите, что высота  $CM$  трапеции делит основание  $AD$  на отрезки, один из которых втрое больше другого.

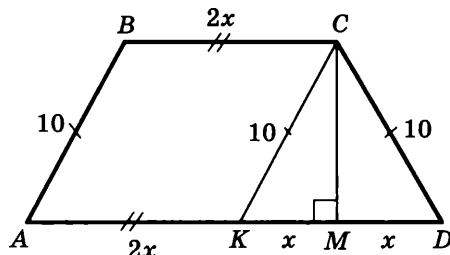


б) Найдите площадь трапеции, если  $AB = 10$ ,  $BC = 16$ .

*Решение.*

а) Проведем  $CK \parallel AB$ .

Тогда  $ABCK$  — параллелограмм и  $AB = CK$ . Так как трапеция — равнобедренная, то  $AB = CD$ , тогда  $CD = CK$ , где высота  $CM$  является медианой  $\triangle CKD$ .



По условию задачи  $AD = 2BC$ . Пусть  $MD = KM = x$ , тогда  $KD = 2x$ ,  $AD = 2BC = 4x$ ,  $AM = 3x$ . Значит,  $AM = 3MD$ , т. е. высота  $CM$  трапеции делит основание  $AD$  на отрезки  $AM$  и  $MD$ , где  $AM = 3MD$ , ч. т. д.

б) Так как  $BC = 2x = 16$ , то  $x = 8$ , т. е.  $MD = 8$ .

Тогда из  $\triangle CMD$   $CM = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ .

Следовательно,  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CM$ , где  $AD = 4x = 8 \cdot 4 = 32$ ,

$BC = 16$ ,  $CM = 6$ .

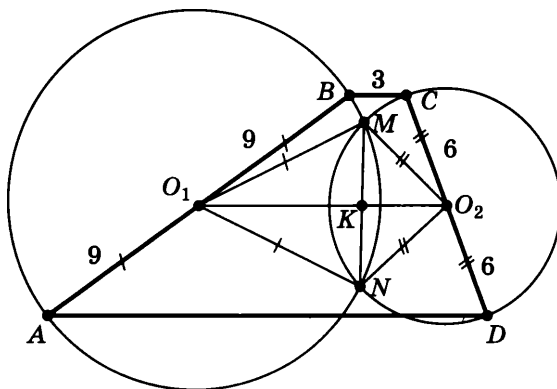
$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(32 + 16) \cdot 6 = 144.$$

Ответ: б) 144.

**Пример 66.** В трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ) окружности, построенные на боковых сторонах как на диаметрах, пересекаются в точках  $M$  и  $N$ .

а) Докажите, что  $MN \perp AD$ .

б) Найдите  $MN$ , если  $AD = 21$ ,  $BC = 3$ ,  $AB = 18$ ,  $CD = 12$ .



*Решение.*

а) Так как  $AB$  и  $CD$  — диаметры, то точки  $O_1$  и  $O_2$  — середины  $AB$  и  $CD$  соответственно. Тогда  $O_1O_2$  — средняя линия трапеции  $ABCD$ , т. е.  $O_1O_2 \parallel BC \parallel AD$ .

Заметим, что  $\triangle O_1MO_2 = \triangle O_1NO_2$  (по III признаку), так как  $O_1M = O_1N$ ,  $MO_2 = NO_2$  — как радиусы окружностей и  $O_1O_2$  — общая сторона. Тогда  $\angle MO_1K = \angle NO_1K$ , т. е. в равнобедренном  $\triangle MO_1N$   $O_1K$  — биссектриса и высота. Значит,  $O_1O_2 \perp MN$ , и так как  $BC \parallel AD \parallel O_1O_2$ , то  $MN \perp AD$ , ч. т. д.

б) Найдём длину средней линии трапеции:

$$O_1O_2 = \frac{AD + BC}{2} = \frac{21 + 3}{2} = 12.$$

В  $\triangle O_1MO_2$   $O_1M = O_1B = 9$ ,  $MO_2 = CO_2 = 6$ , тогда

$$S_{\triangle O_1MO_2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{1}{2}(9 + 6 + 12) = \frac{27}{2};$$

$$p - a = \frac{27}{2} - O_1M = \frac{27}{2} - 9 = \frac{9}{2}; \quad p - b = \frac{27}{2} - MO_2 = \frac{27}{2} - 6 = \frac{15}{2};$$

$$p - c = \frac{27}{2} - 12 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle O_1MO_2} = \sqrt{\frac{27}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{27 \cdot 27 \cdot 15}{2^4}} = \frac{27\sqrt{15}}{4}.$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\triangle O_1MO_2} = \frac{1}{2} O_1O_2 \cdot MK.$$

$$\text{Значит, } \frac{27\sqrt{15}}{4} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot MK, \text{ откуда } 6MK = \frac{27\sqrt{15}}{4}, \text{ или}$$

$$MK = \frac{27\sqrt{15}}{6 \cdot 4} = \frac{9\sqrt{15}}{8}.$$

$$\text{Тогда } MN = 2MK = \frac{9\sqrt{15}}{4}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{9\sqrt{15}}{4}.$$

**Пример 67.** В равнобедренную трапецию  $ABCD$  вписана окружность радиуса  $r = 2\sqrt{3}$ ,  $F$  — точка касания окружности с основанием  $CD$ . Отрезок  $AF$  пересекает окружность в точке  $M$  так, что  $AM : MF = 2 : 6$ .

а) Докажите, что  $DF = AM$ .

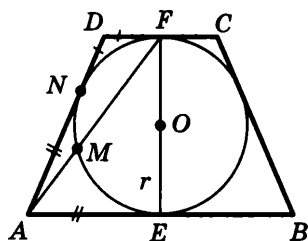
б) Найдите периметр трапеции.

*Решение.*

а) Пусть  $AM = 2x$ , тогда  $MF = 6x$ ,  $AF = 8x$ ,  $DF = y$ . По свойству касательных  $DF = DN = y$ ,  $AN = AE$ . По свойству касательной и секущей  $AE^2 = AF \cdot AM$ , откуда  $AE = \sqrt{8x \cdot 2x} = 4x$ . Так как  $AE = 4x$ ,  $AF = 8x$ , то  $\angle AFE = 30^\circ$ , тогда  $\angle AFD = \angle FAE = 60^\circ$ .

Из  $\triangle ADF$ , где  $DF = y$ ,  $AD = AN + ND = AE + DF = 4x + y$ , по теореме косинусов имеем  $(4x + y)^2 = (8x)^2 + y^2 - 2 \cdot 8x \cdot y \cdot \cos 60^\circ$ , или  $16x^2 + 8xy + y^2 = 64x^2 + y^2 - 8xy$ , или  $48x^2 = 16xy$ ,  $x \neq 0$ , откуда  $y = 2x$ .

Но  $y = DF$ ,  $2x = AM$ , т. е.  $DF = AM$ , ч. т. д.



б) Если  $y = 2x$ , то  $DC = 2y = 4x$ ,  $AB = 2AE = 8x$ .

Из  $\triangle AEF$  имеем  $AF^2 - AE^2 = FE^2$ , или

$$(8x)^2 - (4x)^2 = (2r)^2, \text{ или } 12x^2 = r^2, \text{ откуда } 2x\sqrt{3} = r.$$

По условию задачи  $r = 2\sqrt{3}$ . Значит,  $2x\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ , откуда  $x = 1$ .

Следовательно,  $AB = 8x = 8$ ,  $CD = 4$ . Но  $AB + CD = AD + BC$  (по свойству описанного четырехугольника), тогда периметр трапеции  $P = (8 + 4) \cdot 2 = 24$ .

Ответ: б) 24.

**Пример 68.** В равнобедренную трапецию  $TMNK$ , площадь которой равна 125, вписана окружность радиуса  $r$ .  $E$  и  $F$  — соответственно точки касания боковых сторон  $MT$  и  $NK$  с окружностью,  $EF = 8$ .

а) Докажите, что  $r^2 = ME \cdot TE$ .

б) Найдите площадь круга.

*Решение.*

а) Проведем диаметр  $AB$  окружности. По условию  $TM = KN$ . Пусть  $ME = m$ ,  $TE = n$ ,  $EO = BO = r$ ,  $AB = 2r$ . Заметим, что  $MO$  и  $TO$  — биссектрисы соответственно углов  $TMN$  и  $MTK$ .

Кроме того,  $\angle TMN + \angle MTK = 180^\circ$ , тогда  $\angle TMO + \angle MTO = 90^\circ$ ,  $\angle TOM = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ , т. е.  $\triangle MOT$  — прямоугольный. Так как  $OE = r$ , то  $OE \perp MT$ . Значит,  $OE$  — высота прямоугольного  $\triangle MOT$ .

По свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, имеем  $OE^2 = mn$ , или  $r^2 = ME \cdot TE$ , ч. т. д.

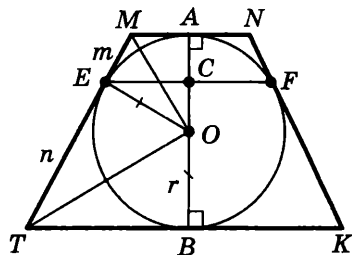
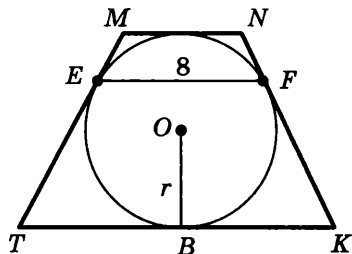
б) По условию  $EF = 8$ , тогда  $CE = CF = 4$ . Из  $\triangle OEC$   $OC = \sqrt{r^2 - 16}$ , тогда  $AC = AO - OC = r - \sqrt{r^2 - 16}$ ,  $BC = BO + OC = r + \sqrt{r^2 - 16}$ .

Значит,  $ME : ET = AC : BC$ , или

$$m : n = (r - \sqrt{r^2 - 16}) : (r + \sqrt{r^2 - 16}).$$

По условию  $S_{TMNK} = 125$ , или  $\frac{1}{2}(MN + TK) \cdot AB = 125$ . По свойству описанного четырехугольника  $MN + TK = 2MT = 2(m + n)$ .

$$\text{Значит, } \frac{1}{2} \cdot 2MT \cdot AB = 125, \text{ или } (m + n) \cdot 2r = 125.$$



Получим систему уравнений

$$\begin{cases} m:n = (r - \sqrt{r^2 - 16}) : (r + \sqrt{r^2 - 16}), \\ mn = r^2, \\ 2(m+n)r = 125. \end{cases}$$

Пусть для краткости  $r - \sqrt{r^2 - 16} = \alpha$ ,  $r + \sqrt{r^2 - 16} = \beta$ , тогда  $m = \frac{\alpha}{\beta}n$ ,

и II уравнение системы примет вид  $\frac{\alpha}{\beta} \cdot n^2 = r^2$ , следовательно,

III уравнение преобразуется к виду

$$2\left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot n + n\right) \cdot r = 125, \text{ или } 2nr\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) = 125.$$

Но  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = r$ ,  $n = \frac{r}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}$ , значит,  $2r^2\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) = 125\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ .

Так как  $\frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{r - \sqrt{r^2 - 16}}{r + \sqrt{r^2 - 16}} + 1 = \frac{2r}{r + \sqrt{r^2 - 16}}$ ,  $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} = \frac{4}{r + \sqrt{r^2 - 16}}$ .

Следовательно,  $2r^2 \cdot \frac{2r}{r + \sqrt{r^2 - 16}} = 125 \cdot \frac{4}{r + \sqrt{r^2 - 16}}$ ,

или  $r^3 = 125$ , откуда  $r = 5$ , тогда  $S_{\text{кр.}} = \pi r^2 = 25\pi$ .

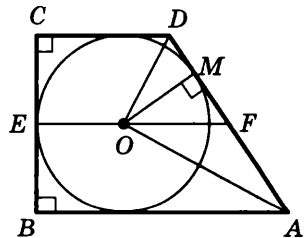
Ответ: б)  $25\pi$ .

**Пример 69.** В прямоугольную трапецию  $ABCD$  вписана окружность, центр  $O$  которой удален от концов боковой стороны на расстояния  $OD = 9$  и  $OA = 12$ .

- Докажите, что  $\triangle AOD$  — прямоугольный.
- Найдите периметр трапеции.

*Решение.*

а) Так как  $ABCD$  — трапеция, то  $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$  (сумма односторонних углов при параллельных прямых  $AB$  и  $CD$  и секущей  $AD$ ). По условию в прямоугольную трапецию вписана окружность, тогда  $AO$  и  $DO$  — биссектрисы соответственно углов  $BAD$  и  $ADC$ . Значит,  $\angle OAF = \frac{1}{2}\angle BAD$  и  $\angle ODA = \frac{1}{2}\angle ADC$ , тогда  $\angle OAF + \angle ODA = 90^\circ$ , т. е.  $\triangle AOD$  — прямоугольный, ч. т. д.





б) По свойству описанного четырехугольника  $AB + CD = BC + AD$ .

Так как  $O$  — центр окружности, то  $EF$  — средняя линия трапеции, тогда  $AB + CD = 2EF$ .

Периметр трапеции будет равен  $P = (AB + CD) + (BC + AD) = 2EF + 2EF = 4EF$ , где  $EF = EO + OF$ ,  $EO = OM$  — радиус вписанной окружности. Так как  $OD = 9$  и  $OA = 12$  (по условию), то из  $\triangle AOD$  по теореме Пифагора  $AD = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15$ . Но точка  $F$  — середина  $AD$ , тогда  $OF$  — медиана  $\triangle AOD$ , а точка  $F$  — центр окружности, описанной около прямоугольного  $\triangle AOD$ , т. е.  $OF = \frac{1}{2}AD = \frac{15}{2}$ .

Заметим, что  $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}AD \cdot OM = \frac{1}{2}AO \cdot DO$ , откуда

$$OM = \frac{AO \cdot OD}{AD} = \frac{36}{5}.$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } P &= 4EF = 4 \cdot (EO + OF) = 4(OM + OF) = 4\left(\frac{36}{5} + \frac{15}{2}\right) = \\ &= 4(7,2 + 7,5) = 4 \cdot 14,7 = 58,8. \end{aligned}$$

Ответ: б) 58,8.

**Пример 70.** В прямоугольной трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ )  $EF$  — средняя линия,  $BC : CD = 1 : 2$ ,  $AC \perp BD$ .

а) Докажите, что

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD.$$

б) Найдите  $BC$ , если  $EF = 20$ .

*Решение.*

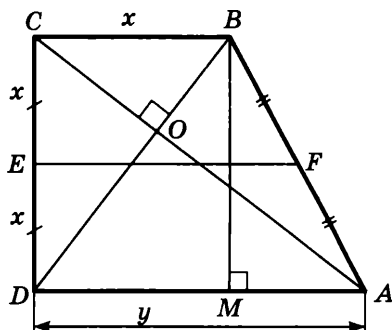
а) Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ .

$$\begin{aligned} \text{По условию } AC \perp BD, \text{ тогда } S_{ABCD} &= S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC} = \frac{1}{2}AC \cdot BO + \\ &+ \frac{1}{2}AC \cdot DO = \frac{1}{2}AC \cdot (BO + DO) = \frac{1}{2}AC \cdot BD, \text{ ч. т. д.} \end{aligned}$$

б) Пусть в трапеции  $ABCD$   $BC = x$ ,  $CD = 2x$ ,  $AD = y$ , тогда

$$EF = \frac{1}{2}(x + y) = 20, \text{ или } x + y = 40.$$

$$\text{Из } \triangle ADC \quad AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{4x^2 + y^2}.$$



Проведем высоту  $BM$ , тогда из  $\triangle DMB$  имеем  $BD = \sqrt{BM^2 + DM^2}$ , где  $BM = CD = 2x$ ,  $DM = BC = x$ .

Значит,  $BD = \sqrt{4x^2 + x^2} = \sqrt{5}x$ .

Так как  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$  (по доказанному), то

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + y^2} \cdot \sqrt{5}x.$$

С другой стороны,  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BM = \frac{1}{2}(x + y) \cdot 2x$ .

Следовательно,  $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + y^2} \cdot \sqrt{5}x = \frac{1}{2}(x + y) \cdot 2x$ , или

$\sqrt{5(4x^2 + y^2)} = 2(x + y)$ ,  $x \neq 0$ . Но  $x + y = 40$ , тогда получим

$\sqrt{5(4x^2 + y^2)} = 80$ , или  $4x^2 + y^2 = 1280$ .

Получим систему уравнений 
$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1280, \\ x + y = 40; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1280, \\ y = 40 - x. \end{cases}$$

$4x^2 + (40 - x)^2 = 1280$ , или  $4x^2 + 1600 - 80x + x^2 - 1280 = 0$ , или

$5x^2 - 80x + 320 = 0$ , или  $x^2 - 16x + 64 = 0$ , или  $(x - 8)^2 = 0$ ,

откуда  $x = 8$ . Значит,  $BC = x = 8$ .

Ответ: б) 8.

**Пример 71.** Трапеция  $MEQT$  ( $MT \parallel EQ$ ) вписана в окружность радиуса  $OQ = 8$ ,  $MQ$  — биссектриса  $\angle EMT$ ,  $\angle MQE = 30^\circ$ .

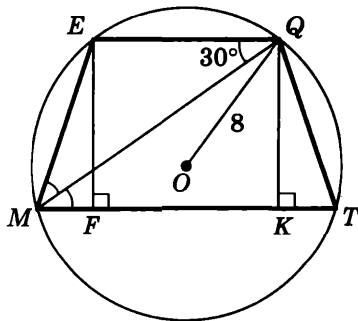
а) Докажите, что  $\triangle MEQ$  — равнобедренный.

б) Найдите  $S_{MEQT}$ .

*Решение.*

а) По условию задачи  $MQ$  — биссектриса  $\angle EMT$ , значит,  $\angle EMQ = \angle QMT$ . Но  $\angle QMT = \angle MQE$  — как накрест лежащие при параллельных прямых  $MT$  и  $EQ$  и секущей  $MQ$ . Выходит, что  $\angle EMQ = \angle MQE = \angle QMT = 30^\circ$ , т. е.  $\triangle MEQ$  — равнобедренный, ч. т. д.

б) Проведем высоты  $EF$  и  $QK$  трапеции, где  $EM = QT$ . Пусть  $EQ = 2x$ ,  $MT = 2y$ ,  $ME = EQ = 2x$ .



Из  $\triangle MEF$   $MF = \frac{1}{2}ME = x$  ( $\angle MEF = 30^\circ$ ),

$EF = \sqrt{ME^2 - MF^2} = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}$ ; из  $\triangle MQK$   $MQ = 2 \cdot QK = 2 \cdot EF = 2x\sqrt{3}$  ( $\angle QMK = 30^\circ$ ).

$$S_{\triangle MQT} = \frac{1}{2}MT \cdot QK = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot x\sqrt{3} = \sqrt{3}xy.$$

С другой стороны,  $S_{\triangle MQT} = \frac{abc}{4R}$ , где  $a = MQ$ ,  $b = QT$ ,  $c = MT$ ,

$$R = QO = 8 \text{ (по условию)}, \text{ тогда } S_{\triangle MQT} = \frac{2x\sqrt{3} \cdot 2x \cdot 2y}{4 \cdot 8} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2y.$$

Значит,  $\sqrt{3}xy = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2y$ ,  $xy \neq 0$ , откуда  $x = 4$ .

$$\text{Следовательно, } S_{MTQE} = \frac{1}{2}(MT + QE) \cdot EF = (x + y) \cdot x\sqrt{3}.$$

Но  $MT = 2MF + FK = 2MF + EQ = 2x + 2x = 4x$ , или  $2y = 4x$ ,  $y = 2x$ . Но  $x = 4$ , тогда  $y = 8$ .

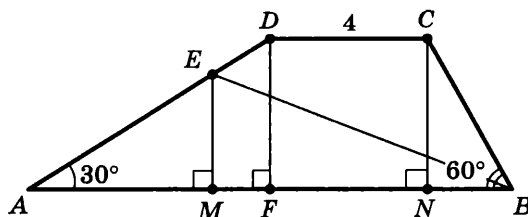
$$S_{MTQE} = (4 + 8) \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}.$$

Ответ: б)  $48\sqrt{3}$ .

**Пример 72.** В трапеции  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ )  $AB = 12$ ,  $CD = 4$ ,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ . Прямая, проходящая через точку  $B$  и точку  $E$ , взятую на стороне  $AD$ , делит трапецию на две равновеликие части. Из точек  $D$  и  $E$  опустили перпендикуляры  $DF$  и  $EM$  на основание  $AB$  трапеции.

а) Докажите, что  $DF : EM = 3 : 2$ .

б) Найдите длину отрезка  $BE$ .



**Решение.**

а) Проведем высоту  $CN$  трапеции  $ABCD$ . Пусть  $CN = DF = h$  — высоты трапеции,  $EM = h_1$  — высота  $\triangle AEB$ .

По условию задачи  $S_{\triangle AEB} = S_{BCDE}$ , тогда

$$S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2}S_{ABCD}. \text{ Но } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot DF = 8h.$$

Так как  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ , то из  $\triangle ADF$  имеем  $AF = h \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}h$ . Аналогично из  $\triangle CNB$  находим  $BN = h \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}}$ .

Высоту трапеции  $DF = h$  найдем из соотношения  $AF + BN = AB - FN = AB - CD = 8$ , или  $\sqrt{3}h + \frac{h}{\sqrt{3}} = 8$ ,  $\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)h = 8$ ,  $\frac{4}{\sqrt{3}}h = 8$ ,  $h = 2\sqrt{3}$ .

Следовательно,  $S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 4h = 8\sqrt{3}$ .

С другой стороны,  $S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2}AB \cdot ME = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h_1 = 6h_1$ .

Значит,  $6h_1 = 8\sqrt{3}$ , откуда  $h_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ .

Тогда  $DF : EM = h : h_1 = 2\sqrt{3} : \frac{4\sqrt{3}}{3} = 6 : 4 = 3 : 2$ , ч. т. д.

б) Из  $\triangle AEM$  находим  $AM = h_1 \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 4$ ,

$MB = AB - AM = 12 - 4 = 8$ .

Наконец, из  $\triangle BME$  получим

$$BE = \sqrt{BM^2 + ME^2} = \sqrt{64 + \frac{16}{3}} = \sqrt{16 \cdot \left(4 + \frac{1}{3}\right)} = 4\sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{39}.$$

Ответ: б)  $\frac{4}{3}\sqrt{39}$ .

**Пример 73.** Основания трапеции  $ABCD$  равны 4 и 16. В нее вписана и около нее описана окружность.

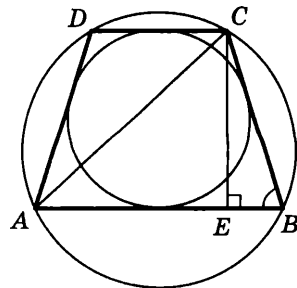
а) Докажите, что  $\sin \angle B = 0,8$ .

б) Найдите произведение радиусов описанной и вписанной окружностей.

*Решение.*

а) Согласно условию задачи около трапеции можно описать окружность. Но тогда  $ABCD$  — равнобедренная трапеция, т. е.  $AD = BC$ .

Поскольку в трапецию также можно вписать окружность, то  $AD + BC = AB + CD = 20$ , тогда  $AD = BC = 10$ .



Проведем высоту  $CE$  трапеции. Пусть  $\angle B = \alpha$ . Так как трапеция — равнобедренная, то  $BE = \frac{1}{2}(AB - CD) = \frac{1}{2}(16 - 4) = 6$ . Из  $\triangle CEB$  по теореме Пифагора  $CE = \sqrt{BC^2 - BE^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ . Но  $CE = 2r$ , где  $r$  — радиус вписанной в трапецию окружности, т. е.  $2r = 8$ ,  $r = 4$ .

$$\cos \alpha = \frac{BE}{BC} = 0,6, \sin \alpha = \frac{CE}{BC} = 0,8, \text{ ч. т. д.}$$

б) Из  $\triangle ACB$  по теореме косинусов имеем  $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \alpha$ , или  $AC^2 = 256 + 100 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot 0,6 = 164$ , откуда  $AC = 2\sqrt{41}$ . Так как по условию окружность описана около трапеции  $ABCD$ , то она описана и около  $\triangle ABC$ . Тогда по теореме синусов имеем  $\frac{AC}{\sin \alpha} = 2R$ , откуда  $R = \frac{2\sqrt{41}}{2 \cdot 0,8} = \frac{5\sqrt{41}}{4}$ , тогда  $R \cdot r = \frac{5\sqrt{41}}{4} \cdot 4 = 5\sqrt{41}$ .

Ответ: б)  $5\sqrt{41}$ .

**Пример 74.** В трапеции  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ )  $AC = 5$ ,  $BD = 13$ ,  $MN = 6$  — отрезок, соединяющий середины оснований.

а) Докажите, что  $AC \perp MN$ .

б) Найдите  $S_{ABCD}$ .

*Решение.*

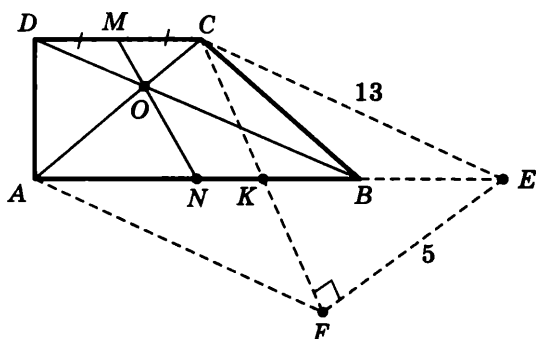
а) Через вершину  $C$  проведем прямую, параллельную диагонали  $BD$ , до пересечения с продолжением  $AB$  в точке  $E$  и прямую, параллельную  $MN$ , до пересечения с основанием  $AB$  в точке  $K$ .

Тогда  $AK = AN + NK = AN + MC = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}(AB + DC)$ . Так как  $DCEB$  — параллелограмм (по построению), то  $DC = BE$ . Значит,  $AK = \frac{1}{2}(AB + BE) = \frac{1}{2}AE$ . Выходит, что в  $\triangle ACE$   $CK$  — медиана.

Тогда  $CK = MN = 6$ ,  $AC = 5$ ,  $CE = DB = 13$ ,  $S_{ABCD} = S_{\triangle ACE}$ .

Продолжим медиану  $CK$  и отложим отрезок  $KF = CK$ .

В  $\triangle CFE$  имеем  $CF = 2CK = 12$ ,  $CE = BD = 13$ ,  $FE = AC = 5$ .



Выходит, что  $\triangle CFE$  — прямоугольный, так как  $13^2 = 5^2 + 12^2$  (по обратной теореме Пифагора), тогда  $\angle CFE = \angle ACF = \angle AON$ , т. е.  $AC \perp MN$ , ч. т. д.

$$\text{б) } S_{\triangle CFE} = \frac{1}{2} CF \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30.$$

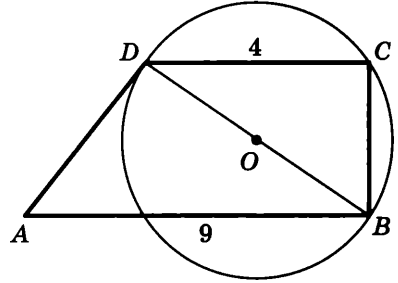
Значит,  $S_{ABCD} = S_{\triangle ACE} = S_{\triangle CFE} = 30$ .

Ответ: б) 30.

**Пример 75.** В трапеции  $ABCD$  основания  $AB = 9$ ,  $CD = 4$ . Окружность, проходящая через вершины  $B$ ,  $C$  и  $D$ , касается стороны  $AD$ , диагональ  $BD$  проходит через центр  $O$  окружности.

а) Докажите, что  $\triangle ADB \sim \triangle BCD$ .

б) Найдите высоту трапеции.



*Решение.*

а) По условию задачи окружность с центром  $O$  проходит через вершины  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и касается стороны  $AD$ , где  $D$  — точка касания. Тогда  $AD \perp BD$ , т. е.  $\triangle ADB$  — прямоугольный. Но  $BD$  проходит через центр  $O$  окружности, значит,  $\triangle BCD$  — прямоугольный, т. е.  $\angle BCD = 90^\circ$ . Кроме того,  $\angle BDC = \angle ABD$  — как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых  $AB$  и  $CD$  и секущей  $BD$ .

Значит,  $\triangle ADB \sim \triangle BCD$  (по двум углам), ч. т. д.

б) Из подобия  $\triangle ADB$  и  $\triangle BCD$  следует  $\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{BD}$ , откуда

$$BD^2 = AB \cdot CD, \text{ или } BD = \sqrt{9 \cdot 4} = 6.$$

Из  $\triangle BCD$  по теореме Пифагора находим искомую высоту:

$$BC = \sqrt{BD^2 - CD^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Ответ: б)  $2\sqrt{5}$ .

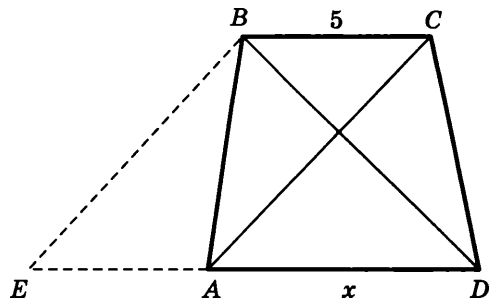
**Пример 76.** В трапеции  $ABCD$   $AD \parallel BC$ ,  $BC = 5$ ,  $AC = 9$ ,  $BD = 12$ . Известно, что  $S_{ABCD} = 54$ .

а) Докажите, что  $AC \perp BD$ .

б) Найдите  $AD$ .

*Решение.*

а) Известно, что если  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали четырехугольника и



$\alpha$  — угол между ними, то  $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$ . По условию задачи  $AC = 9$ ,

$BD = 12$  и  $S_{ABCD} = 54$ . Тогда получим  $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \cdot \sin \alpha = 54$ , или

$54 \sin \alpha = 54$ , откуда  $\sin \alpha = 1$ , т. е.  $\alpha = 90^\circ$ . Значит,  $AC \perp BD$ , ч. т. д.

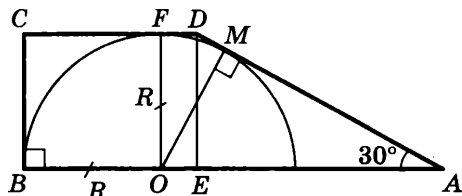
б) Из точки  $B$  проведем прямую параллельно  $AC$  до пересечения с продолжением основания  $AD$  в точке  $E$ . Тогда  $ACBE$  — параллелограмм (по определению) и  $AE = BC = 5$ .

Так как  $BD \perp AC$  (по доказанному) и  $AC \parallel BE$  (по построению), то  $\triangle BDE$  — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора), тогда  $BD^2 + BE^2 = DE^2$ , или  $12^2 + 9^2 = (x + 5)^2$ , где  $x = AD$ .

$(x + 5)^2 = 225$ , откуда  $x + 5 = 15$ ,  $x = 10$ . Значит,  $AD = 10$ .

Ответ: б) 10.

**Пример 77.** В прямоугольной трапеции  $ABCD$  острый угол равен  $30^\circ$ . Окружность с центром  $O$  на большем основании касается трех остальных сторон.



а) Докажите, что  $AB = 3R$ .

б) Найдите  $S_{ABCD}$ , если  $R = 6$ .

*Решение.*

а) Пусть  $CD = x$ , тогда  $AB = BE + EA = CD + EA = x + EA$ .

Из  $\triangle AED$ , где  $ED = OF = R$  и  $\angle A = 30^\circ$ , имеем  $R = \frac{1}{2} AD \Rightarrow AD = 2R$ ,

тогда  $AE = 2R \cos 30^\circ = R\sqrt{3}$ .

Значит,  $AB = x + R\sqrt{3}$ . Из  $\triangle AOM$ , где  $\angle A = 30^\circ$ ,  $OM = R$ , находим  $AO = 2R$ , тогда  $AB = AO + OB = 2R + R = 3R$ , ч. т. д.

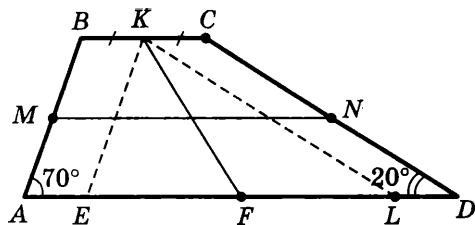
б) Так как  $AB = x + R\sqrt{3}$ , где  $R = 6$ , то  $AB = x + 6\sqrt{3}$ .

Но  $AB = 3R = 18$ , тогда  $x + 6\sqrt{3} = 18$ , откуда  $x = 6(3 - \sqrt{3})$ .

Следовательно,  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + CD) \cdot FO = \frac{1}{2} (x + 3R) \cdot R = \frac{1}{2} (6(3 - \sqrt{3}) + 18) \cdot 6 =$   
 $= 3 \cdot (36 - 6\sqrt{3}) = 18 \cdot (6 - \sqrt{3})$ .

Ответ: б)  $18 \cdot (6 - \sqrt{3})$ .

**Пример 78.** В трапеции  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ )  $\angle A = 70^\circ$ ,  $\angle D = 20^\circ$ ,  $MN = 4$  — средняя линия трапеции,  $KF = 2$ , где  $K$  и  $F$  — соответственно середины  $BC$  и  $AD$ .



а) Докажите, что

$$KF = \frac{1}{2}(AD - BC).$$

б) Найдите длины оснований  $AD$  и  $BC$ .

*Решение.*

а) Пусть  $AD = 2x$ ,  $BC = 2y$ . Проведем  $KE \parallel AB$  и  $KL \parallel CD$ . Заметим, что  $\angle KEF = \angle A = 70^\circ$  и  $\angle KLF = \angle D = 20^\circ$  (как соответственные углы), тогда  $\angle EKL = 90^\circ$ , т. е.  $\triangle EKL$  — прямоугольный и  $KF$  — медиана  $\triangle EKL$ , значит,  $FE = FL = KF = \frac{1}{2}(AD - BC)$ , ч. т. д.

б) Следовательно,  $\frac{1}{2}(2x - 2y) = 2$ , или  $x - y = 2$ .

Кроме того,  $MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 4$ , или  $x + y = 4$ .

Решая систему уравнений  $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2 \end{cases}$  способом сложения, находим

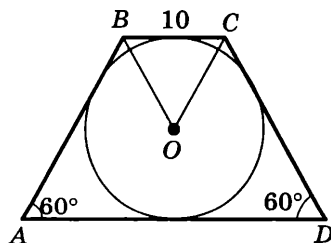
$$2x = AD = 6, 2y = BC = 2.$$

*Ответ:* б)  $AD = 6$ ,  $BC = 2$ .

**Пример 79.** Меньшее основание равнобедренной трапеции  $ABCD$  равно 10, а острый угол равен  $60^\circ$ .

а) Докажите, что  $\triangle BOC$  — равносторонний.

б) Найдите длину отрезка, соединяющего центр вписанной окружности с вершиной меньшего основания.



*Решение.*

а) Так как  $ABCD$  — трапеция, то  $AD \parallel BC$ , тогда  $\angle A + \angle B = 180^\circ$  и  $\angle D + \angle C = 180^\circ$ , откуда  $\angle B = \angle C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ . По условию задачи окружность вписана в трапецию, тогда  $BO$  и  $CO$  — биссектрисы углов  $ABC$  и  $BCD$ .



Значит,  $\angle OBC = \frac{1}{2} \angle ABC = 60^\circ$  и  $\angle BCO = 60^\circ$ . Выходит, что  $\angle BOC = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$ , т. е.  $\triangle BOC$  — равносторонний.

б) Поскольку  $\triangle BOC$  — равносторонний, то  $BO = OC = BC = 10$ .

Ответ: б) 10.

**Пример 80.** В трапеции  $ABCD$  меньшая диагональ  $BD$  перпендикулярна основаниям  $AD$  и  $BC$ ,  $\angle A + \angle C = 90^\circ$ ,  $AD = 9$ ,  $BC = 16$ .

а) Докажите, что  $\triangle ABD \sim \triangle BCD$ .

б) Найдите  $P_{ABCD}$ .

*Решение.*

а) По условию задачи  $\angle A + \angle C = 90^\circ$ .

В  $\triangle BDC$   $\angle BDC + \angle C = 90^\circ$ . Значит,  $\angle A = \angle BDC$ .

Тогда  $\triangle ABD \sim \triangle BCD$  (по двум углам), ч. т. д.

б) Из подобия следует, что  $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{BC}$ , или  $BD^2 = AD \cdot BC$ , откуда

$$BD = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12.$$

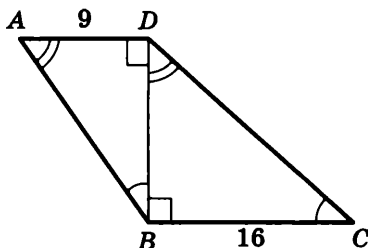
$$\text{Из } \triangle ABD \text{ } AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15.$$

Аналогично находим сторону  $CD$  из  $\triangle BCD$ :

$$CD = \sqrt{BC^2 + BD^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20.$$

Следовательно,  $P_{ABCD} = 15 + 16 + 20 + 9 = 60$ .

Ответ: б) 60.



## Задачи для самостоятельного решения

1. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  известно, что  $AB = 7$ ,  $BC = 24$ ,  $AD = 20$ ,  $CD = 15$ ,  $AC = 25$ .

а) Докажите, что около четырехугольника  $ABCD$  можно описать окружность.

б) Найдите угол между его диагоналями.

2. Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит ее на отрезки длиной 5 и 20.

3. В  $\triangle ABC$  проведены медианы  $AA_1$  и  $BB_1$ , причем  $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$ .

а) Докажите, что  $AC = BC$ .

б) Найдите длину  $AB_1$ , если радиус описанной окружности вокруг четырехугольника  $ABA_1B_1$  равен  $\frac{9\sqrt{34}}{8}$ , а  $\sin \angle CAA_1 = \frac{8}{3\sqrt{34}}$ .

4. Высоты  $BB_1$  и  $CC_1$  остроугольного  $\triangle ABC$  пересекаются в точке  $H$ .

а) Докажите, что  $\angle AHB_1 = \angle ACB$ .

б) Найдите  $BC$ , если  $AH = 21$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ .

5. В  $\triangle ABC$  проведены биссектрисы  $AA_1$  и  $CC_1$ . Точки  $K$  и  $M$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $B$  на прямые  $AA_1$  и  $CC_1$ .

а) Докажите, что  $MK \parallel AC$ .

б) Найдите  $S_{\triangle KBM}$ , если  $AC = 13$ ,  $BC = 5$ ,  $AB = 12$ .

6. В  $\triangle ABC$   $AC = 12$ ,  $AB = BC = 10$ . Биссектриса угла  $BAC$  пересекает сторону  $BC$  в точке  $D$  и описанную около треугольника окружность в точке  $M$ .

а) Докажите, что  $\angle ABM = \angle BDM$ .

б) Найдите отношение площадей  $\triangle ADM$  и  $\triangle BDM$ .

7. В  $\triangle ABC$  вписана окружность радиуса  $R$ , касающаяся стороны  $AC$  в точке  $M$ , причем  $AM = R$ .

а) Докажите, что  $\triangle ABC$  — прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон  $AB$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$ . Найдите  $S_{\triangle BEF}$ , если известно, что  $R = 2$ ,  $CM = 10$ .

8. Диагонали выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ ,  $AB = AD$ ,  $AC$  — биссектриса угла  $C$ .

а) Докажите, что четырехугольник  $ABCD$  — вписанный.

б) Найдите  $\angle CDB$ , если  $\angle BAD = 140^\circ$ ,  $\angle BOA = 110^\circ$ .

9. Окружности с центрами  $O_1$  и  $O_2$  разных радиусов пересекаются в точках  $M$  и  $N$ . Хорда  $MC$  большей окружности пересекает меньшую в точке  $E$  и делится пополам.

а) Докажите, что проекция отрезка  $O_1O_2$  на прямую  $MC$  в 4 раза меньше  $MC$ .

б) Найдите  $O_1O_2$ , если известно, что радиусы окружностей равны 5 и 17, а  $MC = 16$ .

**10.** Биссектриса угла  $ADC$  параллелограмма  $ABCD$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $K$ . В  $\triangle ADK$  вписана окружность, касающаяся стороны  $AK$  в точке  $E$  и стороны  $AD$  в точке  $F$ .

а) Докажите, что прямые  $EF$  и  $DK$  параллельны.

б) Найдите  $\angle BAD$ , если известно, что  $AD = 8$ ,  $EF = 4$ .

**11.** В параллелограмме  $ABCD$   $AB = 2$ ,  $BC = 3$ . Точка  $E$  — середина  $AD$ ,  $AC \perp BE$ ,  $P$  — точка пересечения прямых  $AC$  и  $BE$ .

а) Докажите, что  $\triangle APE \sim \triangle BPC$ .

б) Найдите  $S_{ABCD}$ .

**12.** В остроугольном  $\triangle ABC$  проведены высоты  $CD$  и  $AM$ . Известно, что  $AC = 2$  и площадь круга, описанного около  $\triangle DBM$ , равна  $\frac{\pi}{3}$ .

а) Докажите, что  $\triangle BDM \sim \triangle ABC$ .

б) Найдите угол между высотой  $CD$  и стороной  $BC$ .

**13.** Биссектрисы  $AN$  и  $BM$  треугольника  $ABC$  пересекают стороны  $BC$  и  $AC$  в точках  $N$  и  $M$  соответственно. Известно, что  $AB = 13$ ,

$$AM = \frac{13}{5}, \quad BN = \frac{26}{3}.$$

а) Докажите, что  $\triangle ABC$  — прямоугольный.

б) Найдите длину  $MN$ .

**14.** В равнобедренном  $\triangle ABC$  с основанием  $AB = 10$  разность двух неравных высот равна отношению периметра к боковой стороне.

а) Докажите, что  $\angle EAB = \angle BCD$ , где  $AE$  — высота, проведенная к  $BC$ .

б) Найдите длину  $BC$ .

**15.** Точки  $C$  и  $D$  расположены по разные стороны от гипотенузы  $AB$  прямоугольного  $\triangle ABC$  так, что  $AC = 8$ ,  $BD = 6$ , причем  $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle CBD} = 25 : 18$ .

а) Докажите, что  $\angle CAB = \angle CDB$ .

б) Найдите радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

**16.** В остроугольном  $\triangle ABC$   $AB = 18$ ,  $S_{\triangle ABC} = 24$ , а радиус описанной окружности равен  $\frac{27}{5}$ .

- а) Докажите, что  $\triangle ABC \sim \triangle CED$ , если  $AD$  и  $BE$  — высоты  $\triangle ABC$ .
- б) Найдите площадь четырехугольника  $ABDE$ .

**17.** Центр  $O$  окружности лежит на гипотенузе прямоугольного  $\triangle ABC$ , а катеты  $AC$  и  $BC$  касаются окружности в точках  $E$  и  $D$  соответственно.

- а) Докажите, что  $\triangle BDO \sim \triangle ABC$ .
- б) Найдите радиус окружности, если он в 7 раз меньше суммы катетов, а  $S_{\triangle ABC} = 56$ .

**18.** В остроугольном  $\triangle ABC$   $AC = 20$ ,  $BC = 13$ . Радиус описанного около треугольника круга равен  $\frac{65}{6}$ ,  $CE$  — диаметр круга.

- а) Докажите, что  $\triangle ACE \sim \triangle CAB$ .
- б) Найдите длину  $AB$ .

**19.** В равнобедренном  $\triangle ABC$  основание  $AC = 12$ ,  $O$  — точка пересечения биссектрис,  $AO = 3\sqrt{5}$ ,  $ON \perp AB$ .

- а) Докажите, что  $\triangle BON \sim \triangle ABD$ , где  $D$  — середина  $AC$ .
- б) Найдите радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

**20.** В прямоугольном  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ )  $\angle B = 30^\circ$ .

а) Докажите, что  $BO$  — биссектриса  $\angle B$ , где  $O$  — центр вписанной окружности.

б) Найдите отношение  $\frac{R}{r}$ , где  $R$  и  $r$  — радиусы описанной и вписанной окружностей.

**21.** В круг единичного радиуса вписан  $\triangle ABC$  с острым  $\angle A = 30^\circ$ . Отрезок  $AD$ , соединяющий вершину этого угла и проходящий через центр круга, делит сторону  $BC$  в отношении 1 : 2, считая от точки  $C$ .

- а) Докажите, что  $\triangle COB$  — равносторонний.
- б) Найдите длину  $AD$ .

**22.** В остроугольном  $\triangle ABC$  одна из сторон в 2 раза больше другой,  $\angle A = 2\angle B$ .

- а) Докажите, что  $\triangle ABC$  — прямоугольный.

б) Найдите отношение  $\frac{R}{r}$ , где  $R$  и  $r$  — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

**23.** В равнобедренном  $\triangle ABC$  с основанием  $AB$  проведена биссектриса  $AD$ . Через точку  $D$  проведена прямая, перпендикулярная  $AD$  и пересекающая  $AB$  в точке  $F$ .

а) Докажите, что  $\triangle AED$  — равнобедренный, где  $DE \parallel AC$ .

б) Найдите радиус окружности, описанной около  $\triangle ADF$ , если  $BD = 10$ .

**24.** Площадь квадрата, построенного на боковой стороне  $AD$  равнобедренного  $\triangle ADM$  с острым углом при вершине, в 4 раза больше площади треугольника.

а) Докажите, что  $\angle ADM = 30^\circ$ .

б) Найдите отношение  $\frac{R}{r}$ , где  $R$  и  $r$  — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

**25.** В равнобедренном  $\triangle ABC$  из вершин нижнего основания  $AB$  опущены высоты  $AF$  и  $BE$  на боковые стороны.

а) Докажите, что  $\triangle ABC \sim \triangle CEF$ .

б) Найдите длину  $EF$ , если середина отрезка является центром описанной окружности радиуса  $R = \sqrt{\sqrt{5} + 2}$ .

**26.** Окружность, центр которой лежит на гипотенузе  $AB$   $\triangle ABC$ , касается катетов  $AC$  и  $BC$  соответственно в точках  $M$  и  $N$  и пересекает гипотенузу в точках  $K$  и  $L$ .

а) Докажите, что  $MONC$  — квадрат, где  $O$  — центр окружности.

б) Найдите площадь четырехугольника  $KMNL$ , если  $AM = 4$ ,  $NB = 9$ .

**27.** В квадрат  $ABCD$  вписан прямоугольный  $\triangle AEF$  так, что вершина  $A$  совпадает с вершиной квадрата,  $E \in DC$ ,  $F \in BC$ .

а) Докажите, что  $\triangle ABF \sim \triangle FCE$ .

б) Найдите площадь квадрата, если  $AF = 4$ ,  $EF = 3$ .

**28.** Углы  $\triangle ABC$  относятся как  $1 : 5 : 6$ . Длина меньшей стороны  $BC = 2$ .

а) Докажите, что  $\triangle ABC$  — прямоугольный.

б) Найдите радиус вписанной окружности.

**29.** Через точку  $M$ , взятую на стороне  $AB$   $\triangle ABC$ , проведена прямая параллельно стороне  $AC$  до пересечения в точке  $E$  так, что  $BE : EC = 1 : 3$ .

- а) Докажите, что  $\triangle ABC \sim \triangle MEB$ .
- б) Найдите отношение  $S_{\triangle CEM} : S_{\triangle ABC}$ .

**30.** Основания высот остроугольного  $\triangle ABC$  служат вершинами другого  $\triangle DEF$ , где  $D \in AB$ ,  $E \in AC$ ,  $F \in BC$ . Периметр  $\triangle DEF$  равен 8.

- а) Докажите, что  $\triangle ABC \sim \triangle BDF$ .
- б) Найдите  $S_{\triangle ABC}$ , если  $R = 3,5$ , где  $R$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

**31.** Медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$   $\triangle ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $AB = 3 \cdot OC$ .

- а) Докажите, что  $\triangle ABC$  — прямоугольный.
- б) Найдите  $AA_1^2 + BB_1^2$ , если  $AB = 8$ .

**32.** Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  — основания высот остроугольного  $\triangle ABC$ .

- а) Докажите, что  $\triangle AB_1C_1$ ,  $\triangle A_1C_1B$  и  $\triangle A_1B_1C$  подобны  $\triangle ABC$ .
- б) Найдите углы  $\triangle ABC$ , если углы  $\triangle A_1B_1C_1$  равны  $90^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $30^\circ$ .

**33.** Высоты  $CD$  и  $BE$  остроугольного  $\triangle ABC$  пересекаются в точке  $O$ .

- а) Докажите, что  $\angle ABC = \angle AOD$ .
- б) Найдите  $BC$ , если  $AO = 6$  и  $\angle BAC = 60^\circ$ .

**34.** В  $\triangle ABC$   $AC = BC$ ,  $\angle ACB = 120^\circ$ ,  $CD$  — высота,  $BM$  — биссектриса  $\angle ABC$ . В  $\triangle ABC$  вписан прямоугольник  $MEFN$  так, что сторона  $EF$  лежит на основании  $AB$ , а точка  $N \in BC$ .

- а) Докажите, что  $EF = 2 \cdot ME$ .
- б) Найдите  $S_{MEFN}$ , если  $AC = 6$ .

**35.** Около остроугольного  $\triangle ABC$  описана окружность с центром  $O$ . На продолжении  $AO$  за точку  $O$  отмечена точка  $D$  так, что  $\angle BAC + \angle ADB = 90^\circ$ .

- а) Докажите, что четырехугольник  $OCDB$  — вписанный.
- б) Найдите радиус окружности, описанной около  $OCDB$ , если  $\cos \angle BAC = \frac{4}{5}$ ,  $BC = 36$ .

**36.** В ромбе  $ABCD$   $AC : BD = 3 : 2$ ,  $O$  — точка пересечения диагоналей,  $OE \perp AB$ .

а) Докажите, что  $\triangle AOE \sim \triangle AOB$ .

б) Найдите  $S_{ABCD}$ , если  $S_{\triangle AOE} = 27$ .

**37.** Биссектрисы углов трапеции делят каждое из ее оснований на 3 равные части.

а) Докажите, что трапеция — равнобедренная.

б) Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 1.

**38.**  $AB$  — диаметр четырехугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность,  $F$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ .

а) Докажите, что  $\triangle AFB \sim \triangle DFC$ .

б) Найдите отношение  $DC : AB$ , если угол между прямыми  $AD$  и  $BC$  равен  $60^\circ$ .

**39.** В прямоугольную трапецию  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ), где  $AB \perp BC$ , вписана окружность, центр  $O$  которой удален от концов боковой стороны  $AD$  на расстояния 9 и 12.

а) Докажите, что  $\triangle AOD$  — прямоугольный.

б) Найдите периметр трапеции.

**40.** Основания трапеции равны 4 и 16. В нее вписана и около нее описана окружность.

а) Докажите, что трапеция — равнобедренная.

б) Найдите произведение  $R \cdot r$ , где  $R$  и  $r$  — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

**41.** В трапеции  $ABCD$   $AD = BC$ . Диагональ  $AC$  пересекается с высотой  $DE$  в точке  $F$ . Известно, что  $AF : FC = 1 : 4$ .

а) Докажите, что  $\triangle AFE \sim \triangle DCF$ .

б) Найдите отношение площадей  $\triangle ADC$  и  $\triangle ABC$ .

**42.** В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AB$  и  $CD$   $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ .

а) Докажите, что  $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COB}$ .

б) Найдите  $S_{ABCD}$ , если  $S_{\triangle AOB} = 16$ ,  $S_{\triangle COD} = 4$ .

**43.** В равнобедренной трапеции  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) боковая сторона  $AD = 3CD$ , где  $CD$  — меньшее основание. Биссектрисы тупых углов трапеции пересекаются в точке  $E$ , лежащей на основании.

а) Докажите, что  $\triangle DEC$  — равнобедренный.

б) Найдите отношение  $S_{ABCD} : S_{\triangle DEC}$ .

**44.** В ромбе  $ABCD$  из вершины  $D$  тупого угла проведены высоты  $DE$  и  $DF$ . В получившийся четырехугольник  $DEBF$  вписана окружность радиуса 2.

а) Докажите, что  $\triangle DEB = \triangle DFB$ .

б) Найдите сторону ромба, если  $\angle ADC = 2 \arctg 2$ .

**45.** В трапеции  $ABCD$  известны длины оснований:  $AB = 6$ ,  $CD = 2$ ,  $\angle A = \arctg 2$ ,  $\angle B = \arctg 3$ .

а) Докажите, что  $\triangle DOC \sim \triangle AOB$ .

б) Найдите радиус окружности, вписанной в  $\triangle DOC$ , где  $O$  — точка пересечения диагоналей.

**46.** В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AB$  и  $CD$  известно, что  $AB = 10$ , диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $E$  так, что  $AE = 4$ ,  $BE = 8$ .

а) Докажите, что  $\triangle DEC \sim \triangle AEB$ .

б) Найдите  $S_{ABCD}$ , если диагональ  $AC$  является биссектрисой  $\angle BAD$ .

**47.** Трапеция вписана в окружность.

а) Докажите, что трапеция — равнобедренная.

б) Найдите высоту трапеции, если ее основания равны 18 и 80, а центр окружности радиуса 41 лежит внутри трапеции.

**48.** В трапеции  $ABCD$  известно, что площадь  $S = 50$ , диагонали  $AC \perp BD$ ,  $\angle DAC = \angle CBD$ . Продолжения боковых сторон  $AD$  и  $BC$  пересекаются в точке  $M$ .

а) Докажите, что трапеция — равнобедренная.

б) Найдите  $S_{\triangle AMB}$ , если  $\angle M = 30^\circ$  и  $AB > CD$ .

**49.** В параллелограмме  $ABCD$  точка  $M$  — середина  $AB$ . Прямые  $DM$  и  $AC$  взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке  $K$ .

а) Докажите, что  $S_{\triangle AKD} = S_{\triangle CKM}$ .

б) Найдите  $S_{ABCD}$ , если  $AD = 6$ ,  $CD = 8$ .

**50.** В четырехугольнике  $ABCD$  биссектриса угла  $A$  пересекает сторону  $CD$  в точке  $F$ , а биссектриса угла  $C$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $E$ . Известно, что  $AFCE$  — параллелограмм.

а) Докажите, что  $ABCD$  — параллелограмм.

б) Найдите  $S_{ABCD}$ , если  $DF = 6$ ,  $AE = 4$ ,  $\angle COB = 60^\circ$ .



**51.** Точка  $M$  делит сторону  $AB$  в отношении  $AM : MB = 1 : 2$ .

а) Докажите, что в  $\triangle ACM$  найдется медиана, равная одной из медиан  $\triangle MBC$ .

б) Найдите длину этой медианы, если известно, что  $AC = 7$ ,  $BC = 8$  и  $AB = 9$ .

**52.** В  $\triangle ABC$  на биссектрисе  $BK$  отмечена точка  $M$ . Через точку  $M$  проведены прямые  $CM$  и  $AM$ , пересекающие стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$  соответственно. Известно, что  $S_{\triangle ABF} : S_{\triangle AFC} = AB : AC$ .

а) Докажите, что  $CE$  — биссектриса  $\angle ACB$ .

б) Найдите длину отрезка  $EF$ , если  $AC = 2$ ,  $BC = 4$  и

$$\cos \angle ACB = \frac{11}{16}.$$

**53.** Две окружности разного радиуса касаются внешним образом в точке  $M$ . Через точку  $M$  проведена прямая, пересекающая меньшую окружность в точке  $N$ , а большую — в точке  $K$ .

а) Докажите, что  $\triangle NO_2M \cup \triangle O_1MK$ , где  $O_1$  и  $O_2$  — центры большей и меньшей окружностей соответственно.

б) Найдите  $MK$ , если  $NK = 3\sqrt{2}$ , а радиусы окружностей равны 2 и 4.

**54.** Через вершины  $B$  и  $C$   $\triangle ABC$  проведена окружность, пересекающая стороны  $AC$  и  $AB$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно.

а) Докажите, что  $\triangle ABC \cup \triangle AMN$ .

б) Найдите длину  $MN$  и радиус данной окружности, если  $BC = 4$ ,  $\angle A = 45^\circ$  и  $S_{MNBC} = 7S_{\triangle AMN}$ .

**55.** Известно, что  $S_{\triangle ABC} = 10$ ,  $S_{\triangle ADB} = 8$ , где  $D$  — точка пересечения высот. На отрезке  $CD$  взята такая точка  $M$ , что  $\triangle ABM$  — прямоугольный.

а) Докажите, что  $S_{\triangle ABC} \cdot S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABM}^2$ .

б) Найдите  $S_{\triangle ABM}$ .

**56.** В  $\triangle ABC$ , где  $\angle BAC = 45^\circ$ ,  $AB = 12\sqrt{2}$ , высоты пересекаются в точке  $M$  и  $CM = 4\sqrt{2}$ , а медианы — в точке  $K$ .

а) Докажите, что  $MK \parallel AC$ .

б) Найдите  $S_{\triangle BCN}$ , где  $N$  — середина  $MK$ .

**57.** В  $\triangle ABC$  медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $O$ . Известно, что  $AC = 3BO$ .

- а) Докажите, что  $\triangle ABC$  — прямоугольный.
- б) Найдите значение  $AA_1^2 + CC_1^2$ , если  $AC = 8$ .

**58.** В  $\triangle ABC$  проведены медианы  $AA_1$  и  $BB_1$  так, что  $AA_1 \perp BB_1$  и  $M$  — точка пересечения медиан.

- а) Докажите, что  $CM = AB$ .
- б) Найдите  $S_{\triangle ABC}$ , если  $AC = 3$ ,  $BC = 4$ .

**59.** В  $\triangle ABC$  вписана окружность радиуса  $r$ , касающаяся стороны  $AC$  в точке  $D$ , причем  $CD = r$ .

- а) Докажите, что  $\triangle ABC$  — прямоугольный.
- б) Вписанная окружность касается сторон  $BC$  и  $AB$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Найдите  $S_{\triangle BMN}$ , если известно, что  $r = 5$  и  $AD = 15$ .

**60.** Точка  $D$  на стороне  $AB$  является основанием высоты  $\triangle ABC$ . Окружность, описанная около  $\triangle BCD$ , пересекает  $AC$  в точке  $E$ , отличной от точек  $A$  и  $C$ .

- а) Докажите, что  $\angle ACB = \angle ADE$ .
- б) Найдите длину  $DE$ , если  $BC = 2$ ,  $AC = 3$ ,  $CE : AC = 2 : 5$ .

**61.** В прямоугольнике  $ABCD$   $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ , причем  $\angle CAD = 30^\circ$ . Точка  $M$  лежит вне прямоугольника так, что  $\angle CMD = 120^\circ$ .

- а) Докажите, что  $\angle CDM = \angle COM$ .
- б) Прямая  $OM$  пересекает сторону  $AB$  прямоугольника в точке  $T$ . Найдите длину  $MT$ , если  $MD = 40$ ,  $MC = 24$ .

**62.** Две окружности касаются внешним образом, а третья окружность касается первых двух и их линии центров.

- а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трех окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.
- б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

**63.** Две окружности пересекаются в точках  $M$  и  $N$ .

- а) Докажите, что общая хорда  $MN$  окружностей перпендикулярна их линии центров.
- б) Найдите расстояние между центрами окружностей, если  $MN = 18$ , а их радиусы равны 15 и 41.

**64.** Дан четырехугольник  $ABCD$ .

а) Докажите, что отрезки  $MN$  и  $EF$ , соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите  $S_{ABCD}$ , если  $MF = 3\sqrt{3}$ ,  $EF = 6\sqrt{3}$ ,  $\angle EFN = 60^\circ$ .

**65.** Биссектриса  $\angle ADC$  параллелограмма  $ABCD$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $K$ . В  $\triangle ADK$  вписана окружность, касающаяся стороны  $AK$  в точке  $N$  и стороны  $AD$  в точке  $M$ .

а) Докажите, что  $DK \parallel MN$ .

б) Найдите  $\angle A$ , если  $AD = 8$  и  $MN = 4$ .

**66.** В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  проведены диагонали  $AC$  и  $BD$ ,  $E$  — середина  $AC$ ,  $F$  — середина  $BD$ . Известно, что  $EF = 5$ ,  $AB = 6$ ,  $CD = 8$ .

а) Докажите, что прямые, содержащие боковые стороны, перпендикулярны.

б) Найдите  $S_{EMFN}$ , где  $M$  и  $N$  — середины оснований  $BC$  и  $AD$  соответственно.

**67.** Около остроугольного  $\triangle ABC$  описана окружность с центром  $O$ . На продолжении отрезка  $AO$  за точку  $O$  отмечена точка  $M$  так, что  $\angle A + \angle AMB = 90^\circ$ .

а) Докажите, что четырехугольник  $OBMC$  — вписанный.

б) Найдите радиус окружности, описанной около четырехугольника  $OBMC$ , если  $BC = 48$ ,  $\cos \angle A = 0,6$ .

**68.** В остроугольном  $\triangle ABC$  проведены высоты  $CC_1$  и  $BB_1$ , пересекающиеся в точке  $M$ .

а) Докажите, что  $\angle CC_1B_1 = \angle CAM$ .

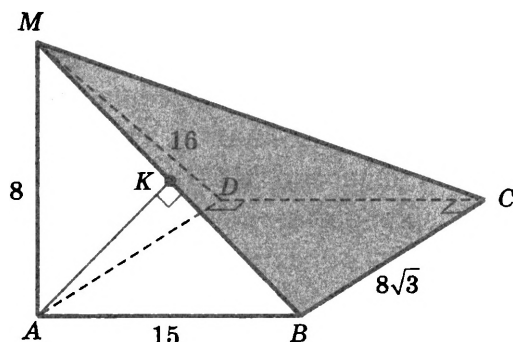
б) Найдите расстояние от центра  $O$  описанной окружности около  $\triangle ABC$  до  $BC$ , если  $B_1C_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}$  и  $\angle BAC = 45^\circ$ .

# СТЕРЕОМЕТРИЯ

## § 2. ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

### 2.1. Пирамида

**Пример 1.** В основании четырехугольной пирамиды  $MABCD$  лежит прямоугольник  $ABCD$ , где  $AB = 15$ ,  $BC = 8\sqrt{3}$ . Длины боковых ребер  $MA = 8$ ,  $MB = 17$ ,  $MD = 16$ .



а) Докажите, что  $MA$  — высота пирамиды.

б) Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $MBC$ .

*Решение.*

а) Поскольку  $MA^2 + AB^2 = MB^2$ , т. е.  $8^2 + 15^2 = 17^2$ , и  $MA^2 + AD^2 = MD^2$ , т. е.  $8^2 + (8\sqrt{3})^2 = 16^2$ , то  $MA \perp AB$  и  $MA \perp AD \Rightarrow MA \perp (ABC)$ .

Значит,  $MA$  — высота пирамиды, ч. т. д.

б) Из точки  $A$  опустим перпендикуляр на  $MB$ . Заметим, что  $AK \perp BC$ , так как  $(MAB) \perp BC$  ( $ABCD$  — прямоугольник по условию задачи),  $AB \perp BC$  и  $MA \perp AB \Rightarrow MA \perp BC$ . Следовательно,  $AK$  — расстояние от точки  $A$  до  $(MBC)$ .

$S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} MA \cdot AB$ , с другой стороны,  $S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} MB \cdot AK$ . Значит,

$$MA \cdot AB = MB \cdot AK, \text{ откуда } AK = \frac{MA \cdot AB}{MB} = \frac{8 \cdot 15}{17} = \frac{120}{17}.$$

Ответ: б)  $\frac{120}{17}$ .

**Пример 2.** В пирамиде  $MAVC$ 

$$MB = MC = AC = AB = \sqrt{19},$$

$$MA = BC = 2\sqrt{7}.$$

а) Докажите, что  $MA \perp BC$ .

б) Найдите расстояние между  $MA$  и  $BC$ .

*Решение.*

а) По условию задачи  $MB = MC$  и  $AC = AB$ , значит,  $\triangle MBC = \triangle ABC$  (по трем сторонам) ( $BC$  — общая сторона). Заметим, что  $MD$  и  $AD$  — соответственно медианы и высоты  $\triangle MBC$  и  $\triangle ABC$ . Значит, прямая  $BC$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $MD$  и  $AD$  плоскости  $MAD \Rightarrow BC \perp (MAD)$ .

Но тогда прямая  $BC$  перпендикулярна ко всякой прямой, лежащей в плоскости  $MAD$ , а значит,  $BC \perp MA$ , ч. т. д.

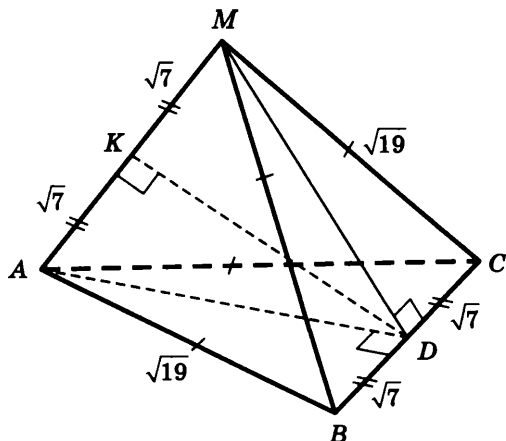
б) В плоскости  $MAD$  проведем высоту  $DK$  — искомое расстояние между скрещивающимися прямыми  $MA$  и  $BC$ . Но  $AD = MD$  (как высоты равных треугольников).

$$\text{Значит, } AD = MD = \sqrt{19 - 7} = \sqrt{12}.$$

Из прямоугольного  $\triangle ADK$  найдем искомое расстояние

$$DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{12 - 7} = \sqrt{5}.$$

*Ответ:* б)  $\sqrt{5}$ .



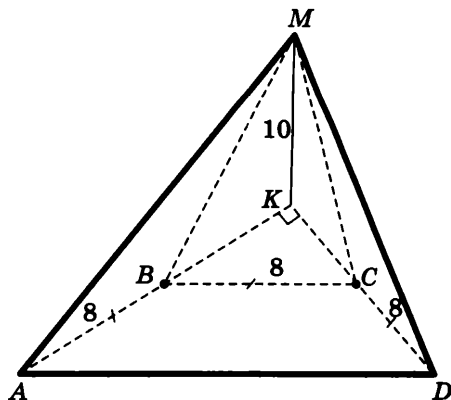
**Пример 3.** В основании четырехугольной пирамиды  $MAVC$  лежит трапеция  $ABCD$  ( $AD \parallel BC$ ). Известно, что  $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$ ,  $(MAB) \perp (ABC)$  и  $(MCD) \perp (ABC)$ ,  $AB \cap CD = K$ .

а) Докажите, что  $(MAB) \perp (MCD)$ .

б) Найдите объем пирамиды  $MBKC$ , если  $AB = BC = CD = 8$ ,  $MK = 10$  — высота пирамиды  $MAVC$ .

*Решение.*

а) Так как  $(MAB) \perp (ABC)$  и  $(MCD) \perp (ABC)$ , то  $MK$  — высота пирамиды  $MAVC$ . По условию задачи  $\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$ , тогда



$\angle AKD = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ , т. е.  $\triangle AKD$  — прямоугольный. Тогда  $AK \perp MK$  и  $AK \perp KD$ , т. е.  $AK$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости  $MCD$ .

Выходит, что  $AK \perp (MCD)$ . Следовательно, плоскость  $MAK$  проходит через прямую, перпендикулярную плоскости  $MCD$ , т. е.  $AK \perp (MCD)$ . Тогда плоскость  $MAK$  проходит через прямую, перпендикулярную плоскости  $MCD$ . Значит,  $(MAK) \perp (MCD)$ , ч. т. д.

б) По условию  $AB = BC = CD$ , тогда  $\frac{AB}{CD} = \frac{BK}{KC} = 1$ , т. е.  $\triangle BKC$  — равнобедренный и прямоугольный.

$$\text{Так как } BC = 8, \text{ то } BK = CK = \frac{BC}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } V_{MKBC} &= \frac{1}{3} S_{\triangle BKC} \cdot MK = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BK \cdot KC \cdot MK = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 10 = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 10 = \frac{160}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{160}{3}.$$

**Пример 4.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  через середину ребра  $AB$  и точку  $C$  проведена плоскость перпендикулярно основанию.

а) Докажите, что плоскость делит ребро  $MB$  в отношении  $2 : 1$ , считая от точки  $B$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, если  $MA = 12$ ,  $AB = 6\sqrt{2}$ .

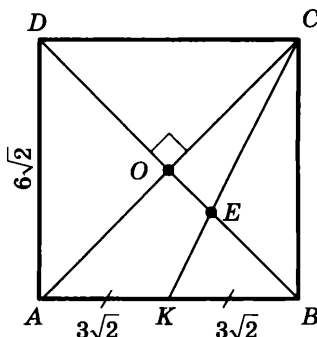
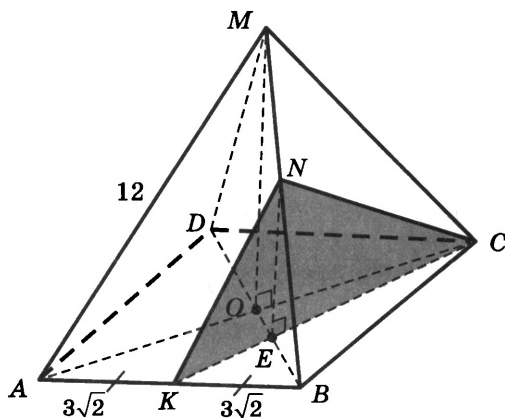
*Решение.*

а) Пусть  $K$  — середина  $AB$ ,  $E$  — точка пересечения  $CK$  с диагональю  $BD$ .

Так как пирамида — правильная, то высота  $MO \perp (ABCD)$  и  $(NKC) \perp (ABCD)$  (по условию).

Значит,  $(NKC) \perp (ABCD) \Rightarrow (NKC) \perp MO$ .

Следовательно,  $(NKC)$  пересечет  $(MBD)$  по прямой  $NE \parallel MO$ . Сечение  $NKC$  — искомое.





По свойству медиан треугольника  $AO = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ .

Из  $\triangle AOM$  высота пирамиды  $MO = \sqrt{AM^2 - AO^2}$ , или

$$MO = \sqrt{(3\sqrt{6})^2 - \left(\frac{8\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{54 - \frac{64}{3}} = \sqrt{\frac{98}{3}} = \frac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{6}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } S_{\text{сеч.}} = S_{\triangle AMD} &= \frac{1}{2}AD \cdot MO = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{7\sqrt{6}}{3} = \frac{28\sqrt{18}}{2 \cdot 3} = \\ &= \frac{28 \cdot 3\sqrt{2}}{2 \cdot 3} = 14\sqrt{2}. \end{aligned}$$

б) Заметим, что по признаку перпендикулярности двух плоскостей  $\Rightarrow (ABC) \perp (AMD)$ , так как  $(AMD)$  содержит прямую  $MO \perp (ABC)$ , тогда косинус угла между плоскостью основания и сечением равен нулю.

Ответ: а)  $14\sqrt{2}$ ; б) 0.

**Пример 6.** В основании правильной треугольной пирамиды лежит  $\triangle ABC$  со стороной  $AB = 12$ . Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом  $\alpha = \arccos 0,8$ . В данную пирамиду вписана сфера, касающаяся грани  $MAV$  в точке  $K$ .

а) Докажите, что  $\triangle MOE \sim \triangle MKO_1$ , где  $O_1$  — центр сферы.

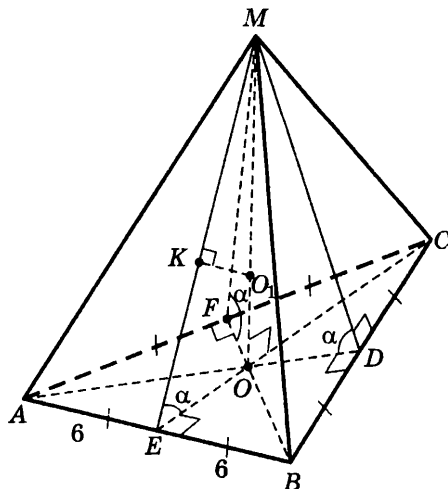
б) Найдите радиус сферы.

*Решение.*

а) Так как пирамида  $MAVC$  — правильная, то  $\triangle ABC$  — равносторонний и точка  $O$  — центр вписанной и описанной окружностей,  $MO$  — высота пирамиды. По условию задачи  $K$  — точка касания сферы, вписанной в пирамиду.

$O_1K = O_1O = R$  — радиус сферы, где  $O_1K \perp ME$  и  $MO \perp (ABC) \Rightarrow MO \perp CE$ . Значит,  $\triangle MOE \sim \triangle MKO_1$  — как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle EMO$ , ч. т. д.

б)  $\angle MEO = \angle MDO = \angle MFO = \alpha$  — угол наклона боковых граней к плоскости основания.





Поскольку  $O$  — точка пересечения медиан  $\triangle ABC$ , то по свойству медиан  $CO : OE = 2 : 1$ , тогда  $OE = \frac{1}{3} CE$ . Из прямоугольного  $\triangle BCE$ , где

$$BC = AB = 12, BE = \frac{1}{2} AB = 6, \text{ имеем } CE = \sqrt{12^2 - 6^2} = \sqrt{144 - 36} = \\ = \sqrt{108} = \sqrt{36 \cdot 3} = 6\sqrt{3}. \text{ Значит, } OE = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

По условию  $\alpha = \arccos 0,8$ , т. е.  $\cos \alpha = 0,8$ .

$$\text{В } \triangle MOE \cos \alpha = \frac{EO}{ME} = \frac{4}{5}, \text{ или } \frac{2\sqrt{3}}{ME} = \frac{4}{5}, \text{ откуда } ME = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Из  $\triangle MOE$  по теореме Пифагора находим

$$MO = \sqrt{ME^2 - OE^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{75}{4} - 12} = \sqrt{\frac{75 - 48}{4}} = \\ = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{По доказанному: } \triangle MOE \sim \triangle MKO_1 \Rightarrow \frac{ME}{OE} = \frac{MO_1}{KO_1}, \text{ где } ME = \frac{5\sqrt{3}}{2},$$

$$OE = 2\sqrt{3}, MO_1 = MO - O_1O = \frac{3\sqrt{3}}{2} - R, KO_1 = R.$$

$$\text{Тогда получим уравнение } \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2} - R}{R}, \text{ или } \frac{5\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3} - 2R}{2R},$$

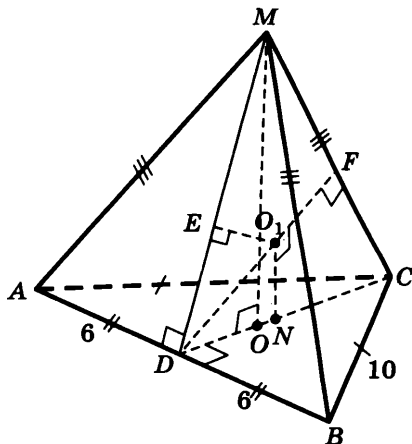
$$\text{или } \frac{5}{2} = \frac{3\sqrt{3} - 2R}{R}, \text{ или } 5R = 6\sqrt{3} - 4R, \text{ или } 9R = 6\sqrt{3}, \text{ откуда } R = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

**Пример 7.** В основании пирамиды  $MABC$  лежит равнобедренный  $\triangle ABC$  с основанием  $AB$ . Все боковые ребра пирамиды равны. В пирамиду вписана сфера.

а) Докажите, что точка касания сферы с гранью  $MAB$  лежит на прямой  $MD$ , где  $D$  — середина  $AB$ .

б) Найдите радиус сферы, если  $AB = 12, AC = BC = 10, MD = 8$ .



*Решение.*

а) По условию задачи все боковые ребра пирамиды равны, значит,  $\triangle MAB$  — равнобедренный, где  $MD$  — медиана и высота.

Так как  $AC = BC$ , то  $CD$  — высота, медиана и биссектриса  $\triangle ABC$ .

Точка  $O_1$  — центр вписанной сферы, лежит в плоскости  $MDC$ . Точка  $O$  — центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$  ( $AO = BO = CO$ ).

Заметим, что  $(MDC) \perp (MAB)$ , так как  $AB \perp (MDC)$  (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости).

$E$  — точка касания сферы с гранью  $MAB$ , тогда  $O_1E \perp (MAB)$ , т. е. точка  $E$  лежит на прямой  $MD$ , ч. т. д.

б) Известно, что объем пирамиды, в которую вписана сфера радиуса  $r$ , определяется по формуле  $V = \frac{1}{3} S \cdot r$ , где  $S$  — площадь поверхности пирамиды.

Если  $R$  — радиус окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , то

$$S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}, \text{ где } a = b = 10, c = 12, S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD.$$

$$\text{Из } \triangle BCD \quad CD = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

$$\text{Тогда } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48.$$

$$\text{Значит, } \frac{10 \cdot 10 \cdot 12}{4R} = 48, \text{ откуда } R = \frac{25}{4}, OD = CD - OC = 8 - R = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4}.$$

Так как апофема  $MD = 8$  (по условию), то из  $\triangle MOD$  находим высоту пирамиды

$$MO = \sqrt{MD^2 - OD^2} = \sqrt{8^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \sqrt{64 - \frac{49}{16}} = \sqrt{\frac{975}{16}} = \frac{5\sqrt{39}}{4}.$$

$$\text{Тогда } V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot MO = \frac{1}{3} \cdot 48 \cdot \frac{5\sqrt{39}}{4} = 20\sqrt{39}.$$

$$S_{MABC} = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle MAB} + 2S_{\triangle MBC}, \text{ где } S_{\triangle ABC} = 48,$$

$$S_{\triangle MAB} = \frac{1}{2} AB \cdot MD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48.$$

$$\text{В } \triangle MBD \text{ находим } MB = \sqrt{BD^2 + MD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

Так как  $MB = MC = BC = 10$ , то  $\triangle MBC$  — правильный.



б) Найдем объем пирамиды  $KABC$  с основанием  $ABC$ :

$$V_{KABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot KD, \text{ где } KD \text{ — высота.}$$

Заметим, что  $AD : AN = AK : AM = 1 : 4$  и  $KD = \frac{1}{4} MN$ .

$$\text{Из } \Delta AMN \quad MN = AM \cdot \sin 60^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}.$$

$$\text{Значит, } KD = \frac{1}{4} \cdot 6\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \text{ (площадь правильного треугольника), где } a = AB = 4\sqrt{3}.$$

$$\text{Тогда } S_{\Delta ABC} = \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{16 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}.$$

$$\text{Итак, } V_{KABC} = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = 18.$$

Теперь найдем объем пирамиды  $MABC$ :

$$V_{MABC} = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot MN = \frac{1}{3} \cdot 12\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{3} = 72.$$

$$\text{Следовательно, } V_{MBCK} = V_{MABC} - V_{KABC} = 72 - 18 = 54.$$

Ответ: б) 54.

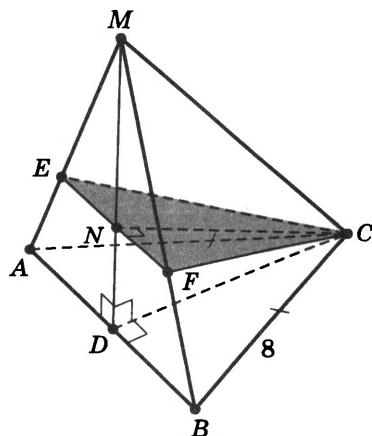
**Пример 9.** В основании пирамиды  $MABC$  лежит равнобедренный  $\Delta ABC$ , в котором  $AC = BC = 8$ ,  $\angle ACB = 120^\circ$ . Известно, что боковая грань  $MAB$  перпендикулярна плоскости основания  $ABC$ ,  $MA = MB$ , высота  $MD = 2\sqrt{2}$ . На ребрах  $MA$  и  $MB$  отмечены соответственно точки  $E$  и  $F$  так, что  $ME : EA = MF : FB = 3 : 2$ .

а) Докажите, что сечением пирамиды плоскостью  $CEF$  является прямоугольный треугольник.

б) Найдите объем пирамиды  $CABFE$ .

*Решение.*

а) По условию  $(MAB) \perp (ABC)$ ,  $AC = BC$ , значит,  $\Delta ABC$  — равнобедренный,  $CD$  — биссектриса, медиана и высота. Так как  $MA = MB$ , то  $MD$  — высота пирамиды  $MABC$  и грани  $MAB$ .



В  $\triangle BCD$   $\angle BCD = 60^\circ \Rightarrow \angle CBD = 30^\circ$ , тогда  $CD = \frac{1}{2}BC = 4$ .

По теореме Пифагора  $BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ ,  $AB = 8\sqrt{3}$ .

Так как  $ME : EA = MF : FB = 3 : 2$ , то  $\triangle MEF \sim \triangle MAB$  (по двум углам), тогда коэффициент подобия  $k = \frac{ME}{MA} = \frac{EF}{AB} = \frac{3}{5}$ , откуда

$$EF = \frac{3}{5}AB = \frac{3}{5} \cdot 8\sqrt{3} = \frac{24\sqrt{3}}{5}.$$

$$MN = k \cdot MD = \frac{3}{5} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{6\sqrt{2}}{5}, \quad ND = \frac{2}{5} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{4\sqrt{2}}{5}.$$

Из  $\triangle CND$ , где  $CD = 4$ ,  $ND = \frac{4\sqrt{2}}{5}$ , имеем

$$CN = \sqrt{CD^2 + ND^2} = \sqrt{16 + \frac{16 \cdot 2}{25}} = \sqrt{16 \cdot \left(1 + \frac{2}{25}\right)} = 4\sqrt{\frac{27}{25}} = \frac{4 \cdot 3\sqrt{3}}{5} = \frac{12\sqrt{3}}{5}.$$

Поскольку  $CN$  — медиана  $\triangle CEF$  и  $CN = \frac{1}{2}EF$ , то  $\triangle CEF$  — прямоугольный, ч. т. д.

б) Объем пирамиды  $CABFE$  равен разности объемов пирамид  $CAMB$  и  $CMEF$ , т. е.  $V_{CABFE} = V_{CAMB} - V_{CMEF}$ .

$$V_{CMEF} = \frac{1}{3}S_{\triangle MEF} \cdot CD. \text{ Но } S_{\triangle MEF} : S_{\triangle MAB} = k^2 = \frac{9}{25}.$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } V_{CMEF} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{25} \cdot S_{\triangle MAB} \cdot CD = \frac{3}{25} \cdot \frac{1}{2}AB \cdot MD \cdot CD = \\ &= \frac{3}{25} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 = \frac{96\sqrt{6}}{25}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{CAMB} &= \frac{1}{3}S_{\triangle MAB} \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}AB \cdot MD \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4 = \\ &= \frac{32\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } V_{CABFE} &= \frac{32\sqrt{6}}{3} - \frac{96\sqrt{6}}{25} = 32\sqrt{6} \left( \frac{1}{3} - \frac{3}{25} \right) = \\ &= 32\sqrt{6} \cdot \frac{16}{3 \cdot 25} = \frac{512\sqrt{6}}{75}. \end{aligned}$$

Ответ: б)  $\frac{512\sqrt{6}}{75}$ .

**Пример 10.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  сторона основания  $AB = 8\sqrt{2}$ , а боковое ребро  $MA = 24$ .

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку  $A$  и середину ребра  $MC$ .

б) Найдите площадь полученного сечения.

*Решение.*

а) Пусть  $F$  — середина ребра  $MC$ .

По условию задачи пирамида — правильная,  $O$  — точка пересечения диагоналей основания,  $MO$  — высота пирамиды. Прямая  $AF$  пересекает высоту  $MO$  в точке  $K$  ( $AMC$  — диагональное сечение).

В плоскости  $MBD$  через точку  $K$  проведем прямую, параллельную  $BD$ . Она пересечет боковые ребра  $MD$  и  $MB$  в точках  $E$  и  $N$  соответственно. Тогда четырехугольник  $AEFN$  — искомое сечение.

б) Так как  $MO \perp (ABC)$ , то  $MO \perp AC$ ,  $MO \perp BD$ ,  $AC \perp BD$ , тогда  $AK \perp BD$ . По построению  $BD \parallel NE$ , тогда  $AF \perp NE$ . Выходит, что у четырехугольника  $AEFN$  диагонали взаимно перпендикулярны. Следовательно,

$$S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} AF \cdot EN.$$

$AO$  — радиус описанной около квадрата  $ABCD$  окружности,  $AB = a = R\sqrt{2}$ , откуда  $R = AO = 8$ .

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle AMO, \text{ где } AM = 24, \text{ получим } MO &= \sqrt{24^2 - 8^2} = \sqrt{(24-8)(24+8)} = \\ &= \sqrt{16 \cdot 32} = \sqrt{16 \cdot 16 \cdot 2} = 16\sqrt{2}. \end{aligned}$$

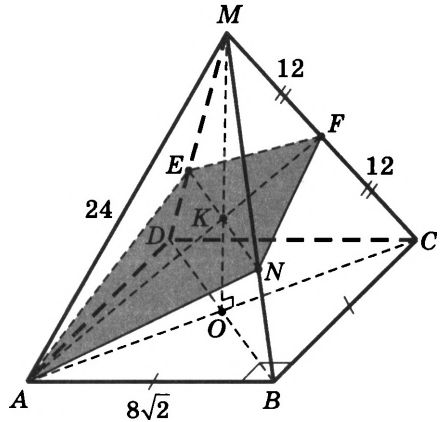
Пусть  $\angle AMC = \alpha$ , тогда из  $\triangle AMC$  по теореме синусов имеем

$$AC^2 = AM^2 + MC^2 - 2AM \cdot MC \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

$$16^2 = 24^2 + 24^2 - 2 \cdot 24 \cdot 24 \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

$$16^2 = 24^2 \cdot 2(1 - \cos \alpha), \text{ откуда } 1 - \cos \alpha = \frac{16^2}{24^2 \cdot 2}, \text{ или}$$

$$1 - \cos \alpha = \frac{2}{9}, \cos \alpha = \frac{7}{9}.$$



Аналогично из  $\triangle AMF$   $AF^2 = 24^2 + 12^2 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \cos \alpha$ , или

$$AF^2 = 576 + 144 - 2 \cdot 24 \cdot 12 \cdot \frac{7}{9} = 720 - 448 = 272, \text{ откуда}$$

$$AF = \sqrt{272} = \sqrt{4 \cdot 68} = \sqrt{4 \cdot 4 \cdot 17} = 4\sqrt{17}.$$

Пусть  $AK = x$ ,  $KF = y$ , тогда  $x + y = 4\sqrt{17}$ .

Так как  $\triangle AMC$  — равнобедренный и  $MO$  — высота, то  $MO$  — биссектриса. Из  $\triangle AMF$  по свойству биссектрисы угла треугольника имеем  $\frac{AM}{MF} = \frac{AK}{KF}$ , или  $\frac{24}{12} = \frac{x}{y}$ , откуда  $x = 2y$ .

$$\text{Но } x + y = 4\sqrt{17}, \text{ тогда } 2y + y = 4\sqrt{17}, y = \frac{4\sqrt{17}}{3}, x = 2y = \frac{8\sqrt{17}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle AOK \text{ } OK &= \sqrt{AK^2 - AO^2} = \sqrt{x^2 - 8^2} = \sqrt{\frac{64 \cdot 17}{9} - 64} = \sqrt{64 \left( \frac{17}{9} - 1 \right)} = \\ &= 8\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{16\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } MK = MO - OK = 16\sqrt{2} - \frac{16\sqrt{2}}{3} = \frac{32\sqrt{2}}{3}.$$

Заметим, что  $\triangle MKN \sim \triangle MOB$  — как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle OMB$ .

$$\text{Значит, } \frac{MK}{KN} = \frac{MO}{OB}, \text{ откуда } KN = \frac{MK \cdot OB}{MO} = \frac{32\sqrt{2} \cdot 8}{3 \cdot 16\sqrt{2}} = \frac{16}{3}, \text{ тогда}$$

$$EN = 2 \cdot KN = \frac{32}{3}.$$

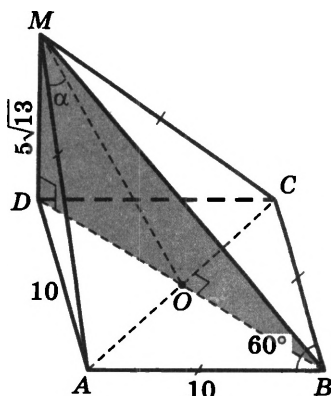
$$\text{Следовательно, } S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} EN \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{32}{3} \cdot 4\sqrt{17} = \frac{64\sqrt{17}}{3}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{64\sqrt{17}}{3}.$$

**Пример 11.** В основании пирамиды  $MABCD$  лежит ромб  $ABCD$ , сторона которого равна 10, а острый угол —  $60^\circ$ . Известно, что  $MD = 5\sqrt{13}$ ,  $MB = 25$ ,  $AM = MC$ .

а) Докажите, что  $MD$  — высота пирамиды.

б) Найдите угол между плоскостью  $MBD$  и ребром  $AM$ .



**Решение.**

а) Так как  $ABCD$  — ромб, то  $AB = BC = CD = AD$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ , тогда  $\angle CAB = \angle ACB = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$ . Значит,  $\triangle ABC$  — равносторонний, т. е.  $AC = 10$ , точка  $O$  — середина диагоналей,  $AO = OC = 5$ .

Поскольку  $AC \perp BD$  (по свойству ромба), то из  $\triangle AOB$  найдем  $BO = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ , тогда  $BD = 10\sqrt{3}$ . По условию  $MB = 25$ .

Заметим, что  $MD^2 + BD^2 = MB^2$ , или  $(5\sqrt{13})^2 + (10\sqrt{3})^2 = 25^2$ .

Значит,  $\triangle BMD$  — прямоугольный (по теореме, обратной теореме Пифагора), т. е.  $MD \perp DB$ . Следовательно,  $MD$  — высота пирамиды.

б) Угол между прямой  $AM$  и плоскостью  $MBD$  — это угол между  $AM$  и ее проекцией на эту плоскость, т. е.  $\angle AMO = \alpha$  — искомый угол. В  $\triangle MDO$   $MD = 5\sqrt{13}$ ,  $OD = \frac{1}{2}BD = 5\sqrt{3}$ .

Тогда  $MO = \sqrt{MD^2 + OD^2} = \sqrt{325 + 75} = \sqrt{400} = 20$ .

По условию задачи  $AM = MC$ , значит,  $\triangle AMC$  — равнобедренный, тогда  $MO$  — медиана, биссектриса и высота. Так как  $AC = 10$ , то  $AO = OC = 5$ . Из  $\triangle AMO$ , где  $MO = 20$  и  $AO = 5$ , имеем  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AO}{MO} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ , откуда  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{4}$ .

**Ответ:** б)  $\operatorname{arctg} \frac{1}{4}$ .

**Пример 12.** В пирамиде  $MABC$  боковые ребра  $MA$ ,  $MB$  и  $MC$  попарно перпендикулярны. Основанием пирамиды является правильный  $\triangle ABC$  со стороной  $6\sqrt{2}$ .

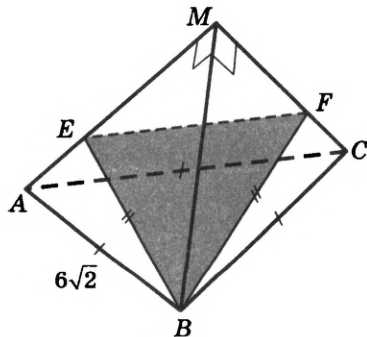
а) Докажите, что пирамида — правильная.

б) Найдите  $S_{\text{сеч.}}$ , если  $E \in AM$ ,  $F \in MC$ , причем  $ME : EA = MF : FC = 3 : 1$ .

**Решение.**

а) Если пирамида правильная, то в ее основании лежит правильный треугольник (по условию), а боковые ребра равны между собой.

По условию задачи  $MA \perp MB \perp MC$ , тогда  $\triangle MAB = \triangle MBC$  по катету и гипотенузе ( $AB = BC$  и  $MB$  — общий катет). Аналогично доказываем, что  $MA = MB$ . Значит,  $MA = MB = MC$ , т. е. пирамида — правильная.





б) Так как по условию  $ME : EA = MF : FC = 3 : 1$  и боковые грани — равные треугольники, то  $BE = BF$ , т. е. сечение — равнобедренный  $\triangle BEF$  с основанием  $EF$ . Кроме того,  $EF \parallel AC$  (по теореме Фалеса). Заметим, что  $\triangle AMC \sim \triangle MEF$  (по двум углам), тогда

$$\frac{EF}{AC} = \frac{ME}{MA} = \frac{3}{4} \Rightarrow EF = \frac{3}{4} AC = \frac{3}{4} \cdot 6\sqrt{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}.$$

Проведем высоту  $BK$  сечения. Так как  $\triangle BEF$  — равнобедренный, то  $BK$  — медиана, тогда  $EK = KF = \frac{1}{2} EF = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ .

В  $\triangle MAB$   $MA = MB$  и  $AB = 6\sqrt{2}$ , значит,  $2MA^2 = AB^2$ , или  $\sqrt{2} MA = AB = 6\sqrt{2}$ , откуда  $MA = 6$ .

В прямоугольном  $\triangle MEB$   $ME = \frac{3}{4} AM = \frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{9}{2}$ .

$$\text{Тогда } BE = \sqrt{ME^2 + BM^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + 6^2} = \sqrt{\frac{81}{4} + 36} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}.$$

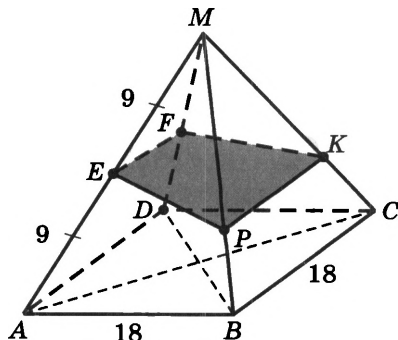
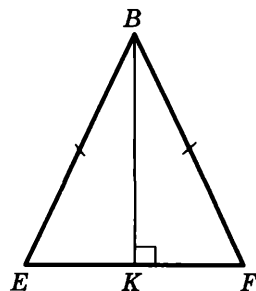
Теперь найдем  $BK$  из  $\triangle BEK$ , где  $EK = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ ,  $BE = \frac{15}{2}$ .

$$\begin{aligned} \text{Получим } BK &= \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - \left(\frac{9\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{225}{4} - \frac{162}{16}} = \\ &= \sqrt{\frac{738}{16}} = \frac{\sqrt{9 \cdot 82}}{4} = \frac{3\sqrt{82}}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } S_{\text{сеч.}} &= \frac{1}{2} EF \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{82}}{4} = \\ &= \frac{27\sqrt{2 \cdot 41}}{2 \cdot 2 \cdot 4} = \frac{27\sqrt{41}}{8}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{27\sqrt{41}}{8}.$$

**Пример 13.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$ , все ребра которой равны 18, точка  $E$  — середина  $MA$ , а точка  $P$  делит боковое ребро  $MB$  в отношении  $3 : 1$ , считая от вершины  $M$ .



а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью, проходящее через точки  $E$  и  $P$  параллельно прямой  $AD$ , является равнобедренной трапецией.

б) Найдите  $S_{\text{сеч.}}$ .

*Решение.*

а) Так как искомая плоскость параллельна  $AD$ , то она пересечет плоскость грани  $AMD$  по прямой, параллельной  $AD$ . Проведем  $EF \parallel AD$ .

По условию задачи пирамида — правильная, значит,  $ABCD$  — квадрат, тогда  $BC$  параллельна плоскости сечения. Проведем  $PK \parallel BC$ , получим сечение  $EFKP$ .

Из построения следует, что  $PK \parallel EF$ , значит, сечение  $EFKP$  — трапеция. Так как боковые грани пирамиды равны, то  $PE = KF$ , т. е. сечение — равнобедренная трапеция, ч. т. д.

б) Заметим, что  $EF$  — средняя линия  $\triangle MAD$ , тогда  $EF = \frac{1}{2}AD = 9$ .

Пусть  $PB = x$ , тогда  $MP = 3x$  (по условию  $MP : PB = 3 : 1$ ). По доказанному  $PK \parallel BC$ , значит,  $\triangle MPK \sim \triangle MBC$  (по двум углам).

Следовательно,  $\frac{MP}{PK} = \frac{MB}{BC}$ , откуда  $PK = \frac{MP \cdot BC}{MB} = \frac{3x \cdot 18}{4x} = \frac{27}{2}$ .

Так как все ребра пирамиды равны 18, то  $\triangle MAB$  — правильный, тогда  $\angle M = 60^\circ$ ,  $ME = \frac{1}{2}MA = 9$ ,  $MP + PB = 4x = 18$ , откуда  $x = \frac{9}{2}$ ,

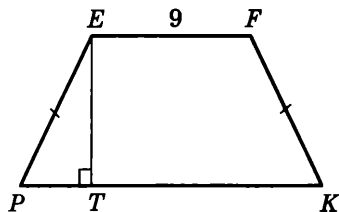
тогда  $MP = 3x = \frac{27}{2}$ .

Из  $\triangle MEP$  по теореме косинусов найдем

$$EP^2 = ME^2 + MP^2 - 2ME \cdot MP \cdot \cos \angle M,$$

или

$$EP^2 = 9^2 + \left(\frac{27}{2}\right)^2 - 2 \cdot 9 \cdot \frac{27}{2} \cdot \cos 60^\circ,$$



$$\begin{aligned} \text{или } EP^2 &= 81 + \frac{729}{4} - 9 \cdot 27 \cdot \frac{1}{2} = 81 + \frac{729}{4} - \frac{243}{2} = 81 + \frac{729 - 486}{4} = \\ &= 81 + \frac{243}{4} = \frac{567}{4}, \text{ откуда } EP = \sqrt{\frac{7 \cdot 81}{4}} = \frac{9\sqrt{7}}{2}. \end{aligned}$$

Проведем высоту  $ET$  равнобедренной трапеции  $PEFK$ . Так как  $EF = 9$ ,  $PK = \frac{27}{2}$ , то  $PT = \frac{1}{2}(PK - EF) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{27}{2} - 9\right) = \frac{9}{4}$ .

Из  $\triangle EPT$  по теореме Пифагора найдем высоту трапеции:

$$ET = \sqrt{EP^2 - PT^2} = \sqrt{\frac{567}{4} - \frac{81}{16}} = \sqrt{\frac{2187}{16}} = \sqrt{\frac{729 \cdot 3}{16}} = \frac{27\sqrt{3}}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } S_{\text{сеч.}} &= \frac{EF + PK}{2} \cdot ET = \frac{9 + \frac{27}{2}}{2} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{4} = \frac{18 + 27}{4} \cdot \frac{27\sqrt{3}}{4} = \\ &= \frac{1215\sqrt{3}}{16}. \end{aligned}$$

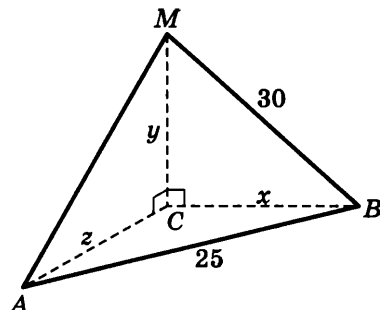
Ответ: б)  $\frac{1215\sqrt{3}}{16}$ .

**Пример 14.** В треугольной пирамиде  $MABC$   $MC$  — высота, ребро  $MA \perp BC$ .

а) Докажите, что  $\triangle ABC$  — прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды  $MABC$ , если  $MB = 30$ ,  $AB = 25$ ,

$$\cos \angle ABM = \frac{96}{125}.$$



*Решение.*

а) Поскольку  $MC$  — высота пирамиды, то  $MC \perp BC$  и  $MC \perp AC$ . По условию задачи наклонная  $MA \perp BC$ , тогда ее проекция  $AC \perp BC$  (по теореме о трех перпендикулярах). Значит,  $\angle ACB = 90^\circ$ , т. е.  $\triangle ABC$  — прямоугольный, ч. т. д.

б) Пусть  $\angle ABM = \alpha$ . По теореме косинусов из  $\triangle MAB$  имеем  $AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos \alpha$ , или

$$AM^2 = 25^2 + 30^2 - 2 \cdot 25 \cdot 30 \cdot \frac{96}{125}, \text{ или}$$

$$AM^2 = 1525 - 1152 = 373, \text{ откуда } AM = \sqrt{373}.$$

Пусть  $BC = x$ ,  $MC = y$ ,  $AC = z$ .

По теореме Пифагора из  $\triangle MCB$ ,  $\triangle MAC$  и  $\triangle ABC$  соответственно имеем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 900, \\ y^2 + z^2 = 373, \\ x^2 + z^2 = 625. \end{cases}$$

Складывая уравнения полученной системы, имеем

$$2(x^2 + y^2 + z^2) = 1898, \text{ или } x^2 + y^2 + z^2 = 949.$$

Теперь вычтем из полученного уравнения каждое уравнение системы:

$$\begin{cases} z^2 = 949 - 900, \\ x^2 = 949 - 373, \\ z^2 = 949 - 625; \end{cases} \begin{cases} z^2 = 49, \\ x^2 = 576, \\ z^2 = 324; \end{cases} \begin{cases} z = 7, \\ x = 24, \\ z = 18. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } V &= \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot MC = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot z \cdot x \cdot y = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 24 \cdot 7 = 3 \cdot 24 \cdot 7 = 504. \end{aligned}$$

Ответ: б) 504.

**Пример 15.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$   $AB = MA$ ,  $F$  — точка пересечения медиан грани  $MBC$ .

- Докажите, что  $AF = AB$ .
- Найдите  $ME$ , где  $E$  — середина  $AF$ ,  $AB = 12$ .

*Решение.*

- По условию пирамида  $MABCD$  — правильная,  $MA = AB$ , значит, боковые грани пирамиды — правильные треугольники.

Пусть  $AB = MA = x$ ,  $MK$  — медиана, высота и биссектриса  $\triangle MBC$ .

Соединим точки  $A$  и  $K$ . Из  $\triangle ABK$ , где  $BK = \frac{x}{2}$ , имеем

$$AK = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} x.$$

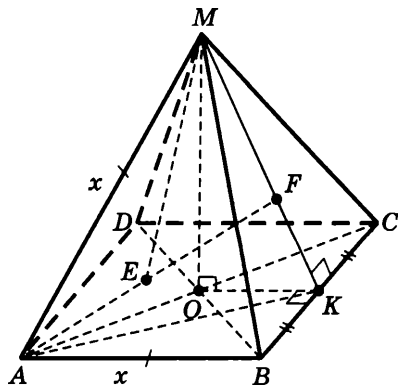
Найдем длину  $MK$  из  $\triangle MBK$ :

$$MK = \sqrt{MB^2 - BK^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} x.$$

По теореме косинусов из  $\triangle MAK$  имеем

$$AK^2 = MA^2 + MK^2 - 2MA \cdot MK \cdot \cos \angle AMK, \text{ или}$$

$$\frac{5}{4} x^2 = x^2 + \frac{3}{4} x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} x \cdot \cos \angle AMK, \text{ или}$$



$$\sqrt{3}x^2 \cdot \cos \angle AMK = x^2 - \frac{1}{2}x^2, \text{ или } \sqrt{3} \cos \angle AMK = \frac{1}{2}, \text{ откуда}$$

$$\cos \angle AMK = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

По условию задачи точка  $F$  является точкой пересечения медиан грани  $MBC$ , поэтому делит медиану  $MK$  в отношении  $2:1$ , считая от вершины  $M$ .

Из  $\triangle MAF$  по теореме косинусов получим

$$AF^2 = MA^2 + MF^2 - 2MA \cdot MF \cdot \cos \angle AMF, \text{ где } MA = x,$$

$$MF = \frac{2}{3}MK = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{\sqrt{3}}{3}x.$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } AF^2 &= x^2 + \frac{1}{3}x^2 - 2 \cdot x \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}x \cdot \cos \angle AMF, \text{ где } \cos \angle AMF = \\ &= \cos \angle AMK = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \text{ тогда } AF^2 = \frac{4}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{3}x^2 - \frac{1}{3}x^2 = x^2, \end{aligned}$$

откуда  $AF = x = AB$ , ч. т. д.

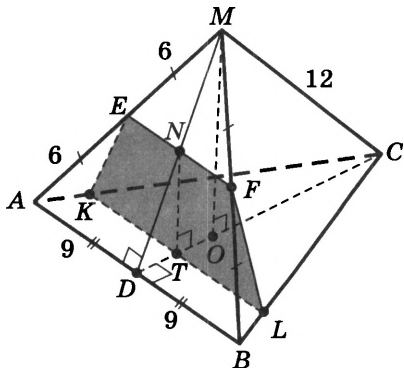
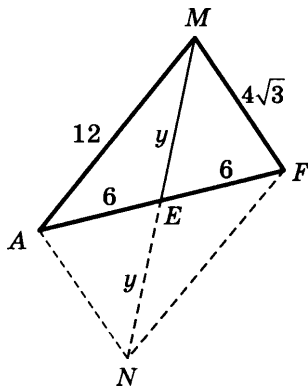
б) Поскольку  $MA = AF = AB = x = 12$ , то  $\triangle MAF$  — равнобедренный с основанием  $MF$ . Достроим  $\triangle AMF$  до параллелограмма  $AMFN$ , где  $AM = NF = 12$ ,  $MF = AN = \frac{\sqrt{3}}{3}x = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 12 = 4\sqrt{3}$ .

Пусть  $ME = EN = y$ , тогда по свойству параллелограмма имеем  $AF^2 + MN^2 = 2 \cdot (AM^2 + MF^2)$ , или  $144 + 4y^2 = 2(144 + 48)$ , или  $36 + y^2 = 72 + 24$ , или  $y^2 = 60$ , откуда  $y = \sqrt{60} = \sqrt{15 \cdot 4} = 2\sqrt{15}$ .

Значит,  $ME = 2\sqrt{15}$ .

Ответ: б)  $2\sqrt{15}$ .

**Пример 16.** В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  сторона основания  $AB = 18$ , боковое ребро  $MA = 12$ . Точки  $E$  и  $F$  — середины ребер  $MA$  и  $MB$  соответственно. Плоскость  $\alpha$  содержит прямую  $EF$  и  $\alpha \perp (ABC)$ .



а) Докажите, что  $CT : TD = 5 : 1$ .

б) Найдите  $S_{\text{сеч.}}$ .

*Решение.*

а) Так как  $E$  — середина  $MA$  и  $F$  — середина  $MB$ , то  $EF$  — средняя линия  $\triangle MAB$ . Значит,  $EF \parallel AB \Rightarrow EF \parallel (ABC)$  и  $EF \parallel KL$ . Пусть  $N$  — точка пересечения  $EF$  и  $MD$ ,  $T$  — точка пересечения  $KL$  и  $CD$ .

Заметим, что  $(MCD) \perp (ABC)$  и плоскость  $(EFL) \perp (ABC)$ , значит, прямая  $NT \perp (ABC) \Rightarrow NT \parallel MO$ . Так как  $N$  — середина  $EF$ , то  $T$  — середина  $OD$ .

В  $\triangle ABC$   $CD$  — медиана и высота, тогда  $CO : OD = 2 : 1$ , значит,  $CT : TD = 5 : 1$ , ч. т. д.

б) Поскольку  $EF \parallel KL$  и  $MABC$  — правильная пирамида, то сечение  $KEFL$  — равнобедренная трапеция. Тогда  $S_{\text{сеч.}} = \frac{EF + KL}{2} \cdot NT$ , где

$$EF = \frac{1}{2}AB = 9, NT = \frac{1}{2}MO.$$

$$\text{В } \triangle CBD \text{ } CD = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{(18-9)(18+9)} = \sqrt{9 \cdot 27} = \sqrt{9 \cdot 9 \cdot 3} = 9\sqrt{3},$$

$$CO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{18}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}.$$

Из  $\triangle MOC$  найдем  $MO = \sqrt{MC^2 - CO^2}$ , или

$$MO = \sqrt{12^2 - (6\sqrt{3})^2} = \sqrt{144 - 108} = \sqrt{36} = 6.$$

$$\text{Следовательно, } NT = \frac{1}{2}MO = 3.$$

Основание  $KL$  сечения найдем из подобия  $\triangle ABC$  и  $\triangle KLC$  (по двум углам):

$$\frac{KL}{CT} = \frac{AB}{CD}.$$

$$\text{Так как } OD = \frac{1}{2}CO = 3\sqrt{3}, \text{ то } OT = \frac{1}{2}OD = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Тогда получим } \frac{KL}{CO + OT} = \frac{18}{9\sqrt{3}}, \text{ или } \frac{KL}{6\sqrt{3} + \frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ или}$$

$$\frac{2KL}{15\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ откуда } KL = 15.$$

Следовательно,  $S_{\text{сеч.}} = \frac{9+15}{2} \cdot 3 = 36$ .

Ответ: б) 36.

**Пример 17.** В правильном тетраэдре  $МABC$  точка  $N$  — середина ребра  $AM$ .

а) Докажите, что  $AM \perp BC$ .

б) Найдите угол между прямыми  $MO$  и  $BN$ .

*Решение.*

а) Так как тетраэдр — правильный, то все его грани — правильные треугольники, а отрезки  $BN$  и  $CN$  — медианы в равносторонних  $\triangle MAB$  и  $\triangle MAC$  соответственно, значит,  $BN \perp AM$  и  $CN \perp AM \Rightarrow AM \perp (BNC)$ . Следовательно,  $AM \perp BC$ , ч. т. д.

б) Проведем медиану  $AF$ . Так как  $N$  — середина  $AM$  (по условию), то  $K$  — середина  $AO$  (по теореме Фалеса). Тогда  $NK$  — средняя линия  $\triangle MAO$ . Следовательно,  $\angle BNK$  — искомый угол. Так как  $MO \perp (ABC)$  и  $NK \parallel MO$ , то  $KN \perp (ABC) \Rightarrow KN \perp KB$ , т. е.  $\triangle NKB$  — прямоугольный.

Пусть  $AB = x$  — ребро тетраэдра.

Из  $\triangle ABF$ , где  $BF = \frac{1}{2}x$ , имеем  $AF = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}x^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ .

Но  $AF = BN = \frac{\sqrt{3}}{2}x$  (как высоты правильных треугольников).

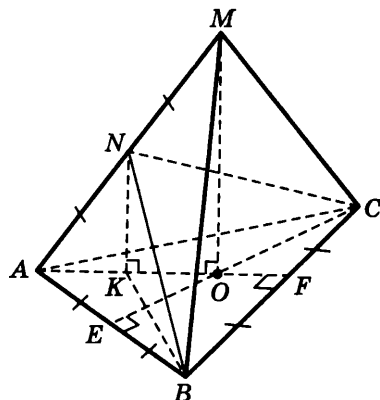
Кроме того,  $AO : OF = 2 : 1$ , точка  $K$  — середина  $AO$ , значит,  $AK = KO = OF = \frac{1}{3}AF = \frac{\sqrt{3}}{6}x$ .

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle ANK \text{ найдем } NK &= \sqrt{AN^2 - AK^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}x\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6}x\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^2} = \sqrt{\frac{1}{6}x^2} = \frac{1}{\sqrt{6}}x. \end{aligned}$$

Наконец, из  $\triangle NKB$  находим искомый угол:

$$\cos \angle BNK = \frac{NK}{BN} = \frac{1}{\sqrt{6}}x : \frac{\sqrt{3}}{2}x = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: б)  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$ .







Значит,  $\frac{KL}{CT} = \frac{AB}{CD}$ ,  $OD = \frac{1}{2}CO = \frac{8}{\sqrt{3}}$ ,  $OT = \frac{1}{2}OD = \frac{4}{\sqrt{3}}$ , тогда

$$\frac{\frac{KL}{\sqrt{3} + \sqrt{3}}}{\frac{16}{\sqrt{3}} + \frac{4}{\sqrt{3}}} = \frac{16}{8\sqrt{3}}, \text{ или } \frac{\sqrt{3}KL}{20} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ откуда } KL = \frac{20 \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{40}{3}.$$

$$\text{Значит, } S_{\text{сеч.}} = \frac{8 + \frac{40}{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{33}}{3} = \frac{64}{3} \cdot \frac{\sqrt{33}}{3} = \frac{64\sqrt{33}}{9}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{сеч.}} \cdot CT = \frac{1}{3} \cdot \frac{64\sqrt{33}}{9} \cdot \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{1280\sqrt{11}}{27}.$$

Ответ: б)  $\frac{1280\sqrt{11}}{27}$ .

**Пример 19.** Основанием пирамиды  $MABC$  служит равнобедренный  $\triangle ABC$  с основанием  $AB$ , площадь которого равна 3, а угол между боковыми сторонами равен  $30^\circ$ .  $O$  — центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

а) Докажите, что  $\triangle AOB$  — правильный.

б) Найдите тангенс угла между боковым ребром и плоскостью основания, если объем пирамиды равен 1.

*Решение.*

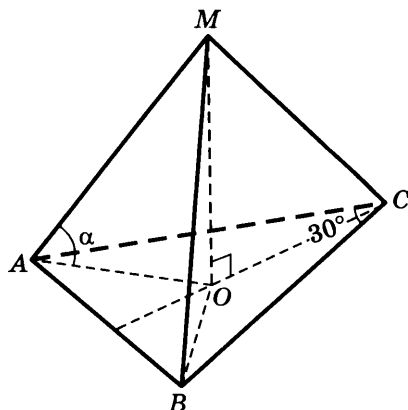
а) Согласно условию задачи  $\triangle ABC$  — равнобедренный ( $AC = BC$ ),  $\angle ACB = 30^\circ$ .

Так как  $O$  — центр описанной окружности, то  $AO = BO = CO = R$  — радиус. Тогда  $MA = MB = MC$  — как наклонные, имеющие равные проекции. Значит,  $\angle MAO = \angle MBO = \angle MCO = \alpha$  — угол между боковым ребром и плоскостью основания.

Пусть  $AC = BC = x$ . Так как  $S_{\triangle ABC} = 3$ , то получим

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle ACB = \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{2} = 3, \text{ или } x^2 = 12, \text{ откуда}$$

$$x = 2\sqrt{3}.$$



По теореме синусов  $\frac{AB}{\sin 30^\circ} = 2R$ , или  $2AB = 2R$ ,  $AB = R$ . Значит,

$AB = AO = BO$ , т. е.  $\triangle AOB$  — правильный, ч. т. д.

б) Сторону  $AB$  найдем по теореме косинусов:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 30^\circ, \text{ или}$$

$$AB^2 = 2x^2 - \sqrt{3}x^2 = x^2(2 - \sqrt{3}).$$

Так как  $x = 2\sqrt{3}$ , то  $AB = 2\sqrt{3(2 - \sqrt{3})}$ .

$$\text{Но } 2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot (4 - 2\sqrt{3}) = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)^2.$$

$$\text{Значит, } AB = 2\sqrt{3 \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)^2} = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{6}.$$

$$\text{Итак, } AB = AO = (\sqrt{3} - 1)\sqrt{6}.$$

Так как объем пирамиды  $V = 1$ , или  $\frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot MO = 1$ , где  $S_{\text{осн.}} = 3$

(по условию), тогда  $MO = 1$ .

Из прямоугольного  $\triangle AMO$  имеем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MO}{AO} = \frac{1}{(\sqrt{3} - 1)\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6} \cdot (\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) \cdot 6} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3} + 1)}{(3 - 1) \cdot 6} = \frac{\sqrt{6}}{12}(\sqrt{3} + 1).$$

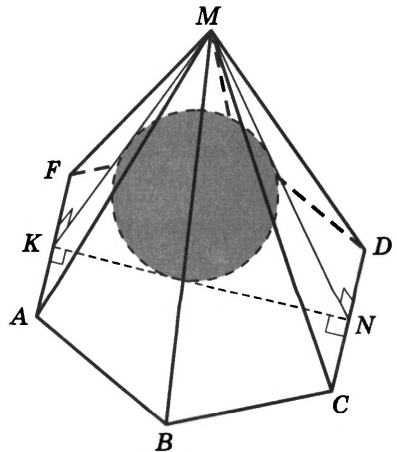
$$\text{Ответ: б) } \frac{\sqrt{6}}{12}(\sqrt{3} + 1).$$

**Пример 20.** В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 13, а высота — 12, вписана сфера, касающаяся всех граней пирамиды. Найдите площадь поверхности сферы.

*Решение.*

Так как сфера вписана в пирамиду, то точки касания сферы лежат на апофемах боковых граней. Сечение сферы плоскостью, проходящей через вершину  $M$  пирамиды, — равнобедренный  $\triangle MKN$ . Пусть  $O$  — центр основания пирамиды (точка касания сферы).

Так как высота  $MO = 12$ , а ребро  $MA = 13$ , то  $AO = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ .



Из  $\triangle AMK$  найдем длину апофемы  $MK = \sqrt{MA^2 - AK^2}$ .

Так как в правильном шестиугольнике  $a = R$ , где  $a = AB = AF$ ,

$R = AO = 5$ , то  $AK = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}AO = \frac{5}{2}$ . Тогда  $MK = \sqrt{13^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2}$ , или

$$MK = \sqrt{\left(13 - \frac{5}{2}\right)\left(13 + \frac{5}{2}\right)} = \sqrt{\frac{21}{2} \cdot \frac{31}{2}} = \frac{\sqrt{651}}{2}.$$

Найдем высоту  $OT$  правильного  $\triangle AOB$  со стороной  $AO = 5$ .

$$\text{Из } \triangle AOT \quad OT = AO \cdot \sin 60^\circ = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2};$$

$$OT = OK = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow KN = 5\sqrt{3}.$$

Зная стороны сечения  $MKN$ , найдем радиус вписанной в  $\triangle MKN$  окружности по формуле

$$S_{\triangle} = p \cdot r; \text{ откуда } r = \frac{S}{p}.$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\triangle MKN} = \frac{1}{2}KN \cdot MO.$$

$$\text{Из } \triangle MKO \quad MO = \sqrt{MK^2 - KO^2}, \quad MO = \sqrt{\frac{651}{4} - \frac{75}{4}} = \sqrt{\frac{576}{4}} = 12.$$

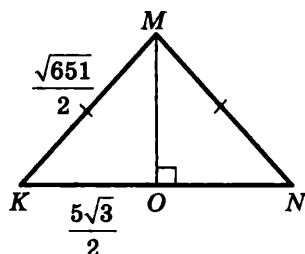
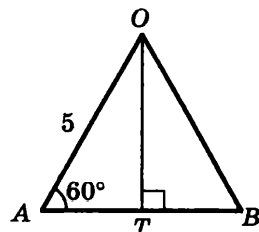
$$S_{\triangle MKN} = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{3} \cdot 12 = 30\sqrt{3}. \quad p = \frac{MK + MN + KN}{2} = \frac{\sqrt{651} + 5\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } r = \frac{30\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{651} + 5\sqrt{3}} = \frac{60\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{217} + 5)} = \frac{60}{\sqrt{217} + 5}.$$

Теперь найдем площадь поверхности сферы:

$$\begin{aligned} S_{\text{сферы}} &= 4\pi r^2 = 4\pi \cdot \left(\frac{60}{\sqrt{217} + 5}\right)^2 = \frac{4\pi \cdot 3600}{217 + 25 + 10\sqrt{217}} = \\ &= \frac{4\pi \cdot 3600}{242 + 10\sqrt{217}} = \frac{7200\pi}{121 + 5\sqrt{217}} = \frac{7200\pi(121 - 5\sqrt{217})}{121^2 - 25 \cdot 217} = \\ &= \frac{7200\pi(121 - 5\sqrt{217})}{9216} = \frac{225\pi(121 - 5\sqrt{217})}{288} = \frac{25\pi(121 - 5\sqrt{217})}{32}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{25\pi(121 - 5\sqrt{217})}{32}.$$



**Пример 21.** В правильном тетраэдре  $МABC$  точка  $E$  — середина ребра  $AM$ .

а) Докажите, что  $AM \perp BC$ .

б) Найдите угол между прямыми  $MO$  и  $BE$ .

*Решение.*

а) Поскольку тетраэдр  $МABC$  — правильный, то все его грани — правильные треугольники. Значит, отрезки  $BE$  и  $CE$  являются медианами в  $\triangle MAB$  и  $\triangle MAC$  соответственно. Следовательно, прямая  $AM$  перпендикулярна этим отрезкам, а значит, и плоскости  $BEC$ . Тогда  $AM \perp BC$ , ч. т. д.

б) По условию задачи точка  $E$  — середина ребра  $AM$ , а  $N$  — середина ребра  $BC$ . По теореме Фалеса  $EF$  — средняя линия  $\triangle MAO$ , тогда  $EF = \frac{1}{2}MO$ ,  $\angle BEF = \alpha$  — искомый угол между прямыми  $MO$  и  $BE$ ,  $\angle EFB = 90^\circ$  ( $EF \perp (ABC) \Rightarrow EF \perp AN, EF \perp FB$ ).

Пусть  $AB = x$ . Из  $\triangle ABN$   $AN = AB \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ ,  $ON = \frac{1}{3}AN = \frac{\sqrt{3}}{6}x$  (по свойству медиан треугольника).

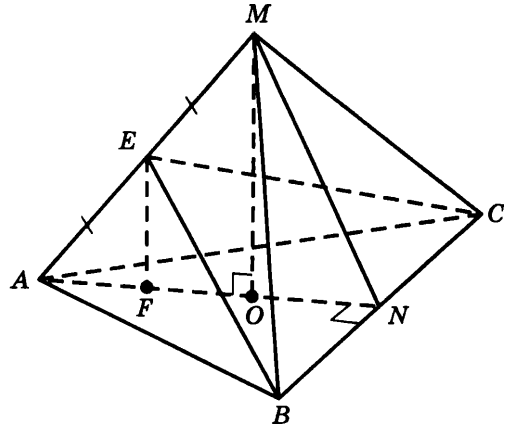
Из  $\triangle MON$  находим  $MO = \sqrt{MN^2 - ON^2} = \sqrt{AN^2 - ON^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{12}x^2} = \sqrt{\frac{8}{12}x^2} = \sqrt{\frac{2}{3}}x = \frac{\sqrt{6}}{3}x$ ,  $EF = \frac{1}{2}MO = \frac{\sqrt{6}}{6}x$ ,

$BE = AN = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ .

Из  $\triangle BEF$  имеем  $\cos \alpha = \frac{EF}{BE} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{6}x}{\frac{\sqrt{3}}{2}x} = \frac{\sqrt{6}}{6} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ , откуда

$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$ .

*Ответ:* б)  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{3}$ .



**Пример 22.** В треугольной пирамиде  $МABC$  двугранные углы при ребрах  $AM$  и  $BC$  равны,  $AB = BM = MC = AC = 10$ .

а) Докажите, что  $AM = BC$ .

б) Найдите  $V_{MABC}$ , если двугранные углы при  $AM$  и  $BC$  равны  $60^\circ$ .

*Решение.*

а) Так как  $AB = AC$ , то  $\triangle ABC$  — равнобедренный с основанием  $BC$ , тогда высота  $AD$  является медианой, т. е.  $D$  — середина  $BC$ . Но  $MB = MC$  (по условию), значит,  $\triangle MBC$  — равнобедренный,  $\angle ADM = \alpha$  — линейный угол двугранного угла при ребре  $BC$ . Аналогично  $\angle BKC = \alpha$  — линейный угол двугранного угла при ребре  $MA$ . Следовательно,  $\triangle ABC = \triangle MBC$  (по трем сторонам)  $\Rightarrow MD = AD$  и  $\angle MAD = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ .

Аналогично  $\triangle MAB = \triangle MAC$  и  $KB = KC$ ,  $\angle KBC = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ .

Заметим, что  $\triangle AKD = \triangle BKD$  — по катету  $KD$  и острому углу ( $\angle MAD = \angle KBC$ )  $\Rightarrow AK = BD$ .

Но  $AK = \frac{1}{2}AM$ ,  $BD = \frac{1}{2}BC$ , значит,  $AM = BC$ , ч. т. д.

б) Поскольку  $\alpha = 60^\circ$ , то  $\triangle AMD$  — равносторонний. Пусть  $AM = AD = MD = BC = x$ , тогда  $BD = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}x$ .

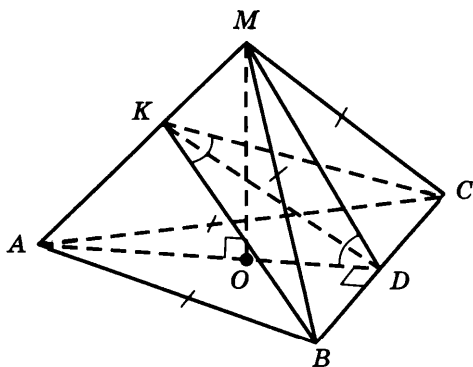
В  $\triangle ADB$  по теореме Пифагора имеем  $x^2 + \frac{x^2}{4} = 100$ , или  $\frac{5}{4}x^2 = 100$ ,  $x^2 = 100 \cdot \frac{4}{5} = 80$ , откуда  $x = 4\sqrt{5}$ .

Следовательно,  $V_{MABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot MO$ .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5} = 40.$$

Из  $\triangle AMO$ , где  $\angle MAO = 60^\circ$ ,  $AM = x = 4\sqrt{5}$ , имеем  $MO = AM \sin 60^\circ = 4\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{15}$ . Значит,  $V_{MABC} = \frac{1}{3} \cdot 40 \cdot 2\sqrt{15} = \frac{80\sqrt{15}}{3}$ .

Ответ: б)  $\frac{80\sqrt{15}}{3}$ .





Следовательно,  $S_{\text{сеч.}} = OT \cdot OK = \frac{1}{2} AB \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$ .

Ответ: б)  $8\sqrt{3}$ .

**Пример 24.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  через середину ребра  $AB$  и точку  $C$  проведена плоскость перпендикулярно основанию.

а) Докажите, что плоскость делит ребро  $MB$  в отношении  $2 : 1$ , считая от точки  $B$ .

б) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, если  $MA = 26$ ,  $AB = 10\sqrt{2}$ .

*Решение.*

а) Пусть точка  $K$  — середина  $AB$ ,  $E$  — точка пересечения  $CK$  и диагонали  $BD$ . Так как пирамида — правильная, то высота  $MO \perp (ABC)$  (по условию).

Значит,  $(NKC) \perp (ABC) \Rightarrow (NKC) \parallel MO$ .

Следовательно,  $(NKC)$  пересечет  $(MBD)$  по прямой  $NE \parallel MO$ .

Сечение  $NKC$  — искомое. Заметим, что

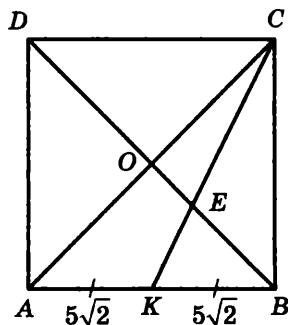
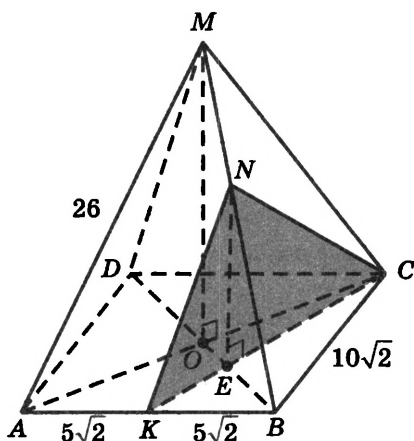
$\triangle KEB \cup \triangle CED$  (по двум углам), где  $\frac{CD}{BK} = k = 2$ , тогда  $\frac{DE}{BE} = 2$ .

Но  $DE = DO + OE = BO + OE = (OE + BE) + OE = BE + 2 \cdot OE$ .

Значит,  $\frac{DE}{BE} = \frac{BE + 2 \cdot OE}{BE} = 2$ , или  $BE + 2 \cdot OE = 2BE$ , откуда  $BE = 2 \cdot OE$ . Тогда  $\frac{BN}{MN} = \frac{BE}{OE} = \frac{2}{1}$ , ч. т. д.

б)  $S_{NKC} = \frac{1}{2} KC \cdot NE$ , где  $NE = \frac{2}{3} MO$ .

Так как  $ABCD$  — квадрат, то  $AB = a = R\sqrt{2}$ , где  $AB = 10\sqrt{2}$  (по условию), тогда  $AO = OB = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 10$ .



По условию задачи  $MA = 26$ ,  $AO = 10$ , следовательно,  
 $MO = \sqrt{MA^2 - AO^2} = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24$ .

$$\text{Значит, } ME = \frac{2}{3}MO = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16.$$

Из  $\triangle СКВ$ , где  $KB = 5\sqrt{2}$ ,  $BC = AB = 10\sqrt{2}$ , по теореме Пифагора находим

$$СК = \sqrt{BK^2 + BC^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2} = \sqrt{50 + 200} = \sqrt{250} = 5\sqrt{10}.$$

$$\text{Тогда } S_{NKC} = \frac{1}{2} KC \cdot NE = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{10} \cdot 16 = 40\sqrt{10}.$$

Ответ: 6)  $40\sqrt{10}$ .

**Пример 25.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  через сторону основания  $BC$  проведено сечение, которое делит пополам двугранный угол, образованный гранью  $MBC$  и основанием. Найдите площадь сечения, если  $AB = 10$ , а объем пирамиды равен 400.

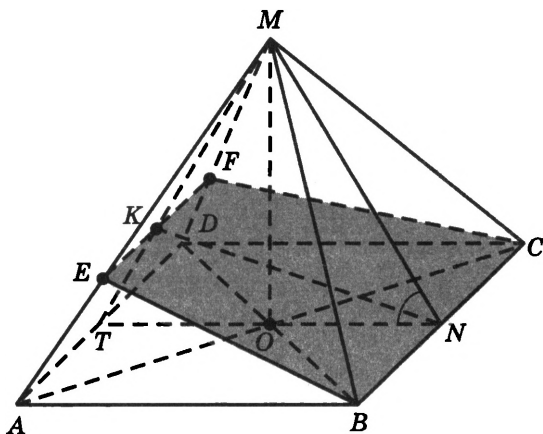
*Решение.*

Как известно, мерой двугранного угла является линейный угол, т. е. угол между перпендикулярами, проведенными в каждой из плоскостей к общей линии пересечения.

Проведем апофему  $MN$  (высоту) грани  $MBC$ . Так как по условию пирамида — правильная, то боковые грани — равные равнобедренные треугольники, значит,  $MN$  — медиана  $\triangle MBC$ . Проведем  $NT \perp BC$ , тогда  $\angle MNT$  — искомый линейный угол.

Заметим, что боковые стороны сечения  $BE$  и  $CF$  равны (как отрезки, проведенные в равных треугольниках). Значит, полученное сечение — равнобедренная трапеция  $BEFC$  с основаниями  $BC$  и  $EF$  ( $BC > EF$ ).

Для нахождения площади сечения необходимо найти ее основание  $EF$  и высоту  $KN$ .





По условию  $V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$ , где  $V_{\text{пир.}} = 400$ ,  $S_{\text{осн.}} = AB^2 = 100$ ,

$$H = OM = \frac{3V_{\text{пир.}}}{S_{\text{осн.}}} = \frac{3 \cdot 400}{100} = 12. \text{ Апофему } MN \text{ найдем из прямоуголь-}$$

ного  $\triangle MON$ , где  $MO = 12$ ,  $ON = \frac{1}{2}AB = 5$ . Имеем  $MN = \sqrt{MO^2 + ON^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$ .

Из  $\triangle MTN$  по теореме косинусов получим  $TN^2 = MT^2 + MN^2 - 2MT \cdot MN \cdot \cos \angle TMN$ , или  $100 = 169 + 169 - 2 \cdot 13 \cdot 13 \cdot \cos \angle TMN$ , или  $100 = 2 \cdot 169 - 2 \cdot 169 \cdot \cos \angle TMN$ , или  $2 \cdot 169 \cdot \cos \angle TMN = 338 - 100$ , откуда  $\cos \angle TMN = \frac{238}{2 \cdot 169} = \frac{119}{169}$ .

Согласно условию задачи  $NK$  — биссектриса  $\angle MNT$ , тогда по свойству биссектрисы имеем  $\frac{MK}{MN} = \frac{KT}{TN}$ , где  $MN = 13$ ,  $TN = AB = 10$ .

Пусть  $MK = x$ , тогда  $KT = MT - MK = MN - MK = 13 - x$ . Следовательно,  $\frac{x}{13} = \frac{13-x}{10}$ , или  $10x = 169 - 13x$ , или  $23x = 169$ ,  $x = \frac{169}{23}$ .

Значит,  $MK = \frac{169}{23}$ , тогда  $KT = 13 - \frac{169}{23} = \frac{130}{23}$ .

Заметим, что  $\triangle MAD \cup \triangle MEF$  (по двум углам), тогда  $\frac{EF}{AD} = \frac{MK}{MT}$ ,

$$\text{откуда } EF = \frac{AD \cdot MK}{MT} = \frac{10 \cdot \frac{169}{23}}{13} = \frac{10 \cdot 169}{23 \cdot 13} = \frac{10 \cdot 13}{23} = \frac{130}{23}.$$

Таким образом,  $S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2}(BC + EF) \cdot KN$ , где  $BC = AB = 10$ ,

$$EF = \frac{130}{23}.$$

Из  $\triangle MKN$  по теореме косинусов найдем  $KN$ :

$KN^2 = MK^2 + MN^2 - 2MK \cdot MN \cdot \cos \angle KMN$ , или

$$KN^2 = \left(\frac{169}{23}\right)^2 + 13^2 - 2 \cdot \frac{169}{23} \cdot 13 \cdot \frac{119}{169} = 13^2 \left(\frac{13^2}{23^2} + 1\right) - \frac{26 \cdot 119}{23} =$$

$$= \frac{169 \cdot 698}{23^2} - \frac{3094}{23} = \frac{117\,962 - 71\,162}{23^2} = \frac{46\,800}{23^2},$$

$$\text{откуда } KN = \frac{10}{23} \sqrt{468} = \frac{60\sqrt{13}}{23}.$$

$$\text{Тогда } S_{\text{сеч.}} = \frac{1}{2} \left( 10 + \frac{130}{23} \right) \cdot \frac{60\sqrt{13}}{23} = \frac{(230 + 130) \cdot 30\sqrt{13}}{529} = \frac{10\,800\sqrt{13}}{529}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{10\,800\sqrt{13}}{529}.$$

## 2.2. Призма

**Пример 26.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все ребра равны 6. Через точки  $B$ ,  $C_1$  и середину  $M$  ребра  $A_1B_1$  проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью, проходящей через указанные точки, — прямоугольный треугольник.

б) Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью  $ABC$ .

*Решение.*

а) Найдем длины сторон  $\triangle BMC_1$ . Из  $\triangle C_1MB_1$ , где  $B_1C_1 = 6$ ,  $MB_1 = \frac{1}{2}A_1B_1 = 3$ , имеем  $MC_1 = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$ .

$$\text{Из } \triangle BMB_1 \text{ } BM = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45}.$$

$$\text{Из } \triangle BB_1C_1 \text{ } BC_1 = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72}.$$

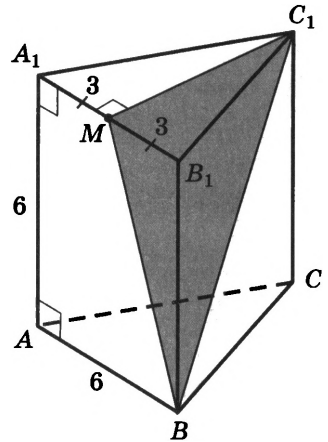
Заметим, что  $(\sqrt{72})^2 = (\sqrt{27})^2 + (\sqrt{45})^2$ , т. е.  $BC_1^2 = MC_1^2 + BM^2$ .

Значит,  $\triangle BMC_1$  — прямоугольный (по теореме, обратной теореме Пифагора), ч. т. д.

б) Так как прямая  $C_1M \perp MB$  и  $C_1M \perp MB_1$ , то  $\angle BMB_1$  — искомый.

$$\text{Тогда } \cos \angle BMB_1 = \frac{MB_1}{MB} = \frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{1}{\sqrt{5}}.$$



**Пример 27.** Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является  $\triangle ABC$ , где  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 24$ . Диагонали боковых граней  $AA_1B_1B$  и  $BB_1C_1C$  равны соответственно 25 и 11.

а) Докажите, что  $\triangle A_1BC_1$  — прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды  $BAA_1C_1$ .

*Решение.*

а) Поскольку  $BB_1 \perp (A_1B_1C_1)$  и  $B_1C_1 \perp A_1C_1$ , то по теореме о трех перпендикулярах следует, что  $BC_1 \perp A_1C_1$ . Значит,  $\triangle A_1BC_1$  — прямоугольный.

б) Заметим, что  $BC \perp AC$  (по условию) и  $BC \perp C_1C$ , тогда  $BC \perp (AA_1C_1)$ , т. е.  $BC$  — высота пирамиды  $BAA_1C_1$  с основанием  $AA_1C_1$ .

Следовательно,  $V_{BAA_1C_1} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H$ , где  $S_{\text{осн.}} = \frac{1}{2} AA_1 \cdot A_1C_1$ .

$$\text{Из } \triangle BA_1C_1 \quad A_1C_1 = \sqrt{25^2 - 11^2} = \sqrt{(25-11)(25+11)} = \sqrt{14 \cdot 36} = 6\sqrt{14}.$$

$$\text{Из } \triangle AA_1B \quad AA_1 = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{(25-24)(25+24)} = \sqrt{1 \cdot 49} = 7.$$

$$\text{Наконец, из } \triangle BCC_1 \quad BC = \sqrt{11^2 - 7^2} = \sqrt{4 \cdot 18} = \sqrt{4 \cdot 9 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

$$\text{Следовательно, } V_{BAA_1C_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 6\sqrt{14} \cdot 6\sqrt{2} = 42\sqrt{28} = 84\sqrt{7}.$$

*Ответ:* б)  $84\sqrt{7}$ .

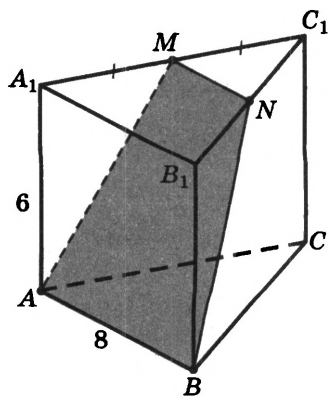
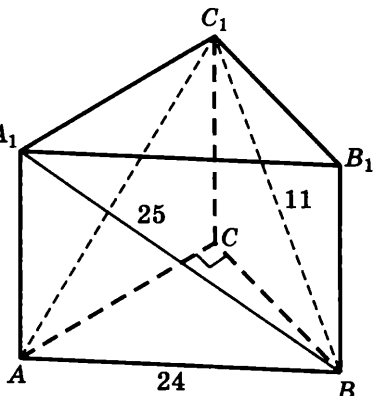
**Пример 28.** В основании правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит треугольник со стороной 8. Высота призмы равна 6. Точка  $M$  — середина  $A_1C_1$ .

а) Постройте сечение призмы плоскостью  $ВAM$ .

б) Найдите периметр сечения.

*Решение.*

а) Через точку  $M$  — середину ребра  $A_1C_1$  проведем прямую  $MN \parallel AB$ . Точки  $A$  и  $M$  лежат в плоскости грани  $AA_1C_1C$ , значит, прямая  $AM$  лежит в этой плоскости. Аналогично прямая  $NB$  лежит в плоскости грани  $BB_1C_1C$ . Поскольку  $MN \parallel AB$ , то  $ABNM$  — трапеция, искомое сечение.



б) Из  $\triangle AA_1M$ , где  $AA_1 = 6$ ,  $A_1M = MC_1 = 4$ , найдем

$$AM = \sqrt{AA_1^2 + A_1M^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Аналогично  $BN = AM = 2\sqrt{13}$  ( $AM = BN$  — следует из равенства прямоугольных  $\triangle AA_1M$  и  $\triangle BB_1N$  по двум катетам).

$MN$  — средняя линия  $\triangle A_1B_1C_1$ , тогда  $MN = \frac{1}{2}A_1B_1 = 4$ . Следовательно-

$$\text{но, } P_{\text{сеч.}} = AB + 2AM + MN = 8 + 4\sqrt{13} + 4 = 12 + 4\sqrt{13} = 4(3 + \sqrt{13}).$$

Ответ: б)  $4(3 + \sqrt{13})$ .

**Пример 29.** В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  сторона основания  $AB = 3$ , а боковое ребро  $AA_1 = 6$ .

а) Докажите, что прямые  $AD$  и  $BF_1$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $AD$  и  $BF_1$ .

*Решение.*

а)  $BF_1$  — наклонная, а ее проекция  $BF \perp AD \Rightarrow BF_1 \perp (ABC)$ , тогда  $AD \perp BF_1$  (по теореме о трех перпендикулярах), ч. т. д.

б) Так как  $AD \perp FF_1$ , то  $AD \perp (BFF_1) \Rightarrow AD \perp KM$  и  $BF_1 \perp KM$ .

В  $\triangle ABM$   $AB = 3$ ,  $\angle ABM = 30^\circ$ , тогда

$$BM = AB \cdot \cos 30^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

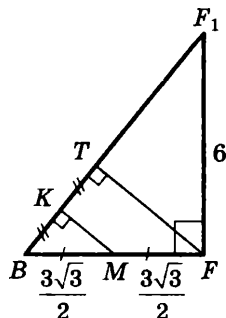
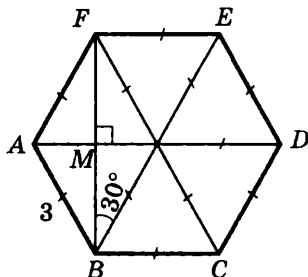
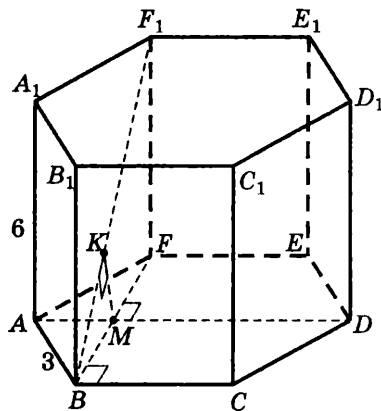
Значит,  $BF = 2BM = 3\sqrt{3}$ .

Проведем  $FT \perp BF_1$ , тогда  $S_{\triangle BFF_1} = \frac{1}{2}BF \cdot FF_1 =$

$$= \frac{1}{2}BF_1 \cdot FT,$$

откуда  $FT = \frac{BF \cdot FF_1}{BF_1}$ , где  $BF = 3\sqrt{3}$ ,  $FF_1 = AA_1 = 6$ .

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle BF_1F \quad BF_1 &= \sqrt{BF^2 + FF_1^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 6^2} = \\ &= \sqrt{27 + 36} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}. \end{aligned}$$



Так как  $M$  — середина  $BF$  и  $MK \perp BF_1$ ,  $FT \perp BF_1$ , то  $MK \parallel FT$ . Значит,  $BK = KT$  (по теореме Фалеса), тогда  $MK$  — средняя линия  $\triangle BFT$ ,  $MK = \frac{1}{2}FT$ .

$$\text{Но } FT = \frac{3\sqrt{3} \cdot 6}{3\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{6\sqrt{21}}{7} \Rightarrow MK = \frac{3\sqrt{21}}{7}.$$

Итак, расстояние между прямыми  $AD$  и  $BF_1$  равно  $MK = \frac{3\sqrt{21}}{7}$ .

Ответ: б)  $\frac{3\sqrt{21}}{7}$ .

**Пример 30.**  $ABCA_1B_1C_1$  — прямая призма.

а) Докажите, что линия пересечения плоскостей  $ABC_1$  и  $A_1B_1C$  параллельна основаниям призмы.

б) Найдите угол между плоскостями  $ABC_1$  и  $A_1B_1C$ , если  $CC_1 = 6$ ,  $AB = 2\sqrt{5}$ ,  $AC = 2$ ,  $BC = 4$ .

*Решение.*

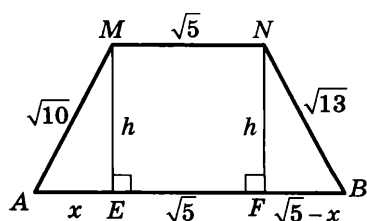
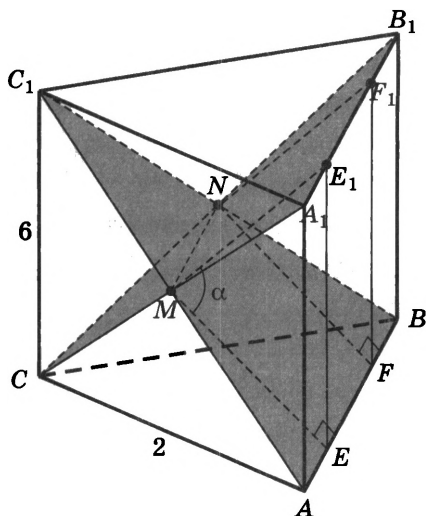
а) Пусть  $M$  — точка пересечения  $AC_1$  с  $A_1C$  и  $BC_1$  пересекается с  $CB_1$  в точке  $N$ .

Тогда  $MN$  — прямая пересечения плоскостей  $ABC_1$  и  $A_1B_1C$ . Боковые грани призмы — прямоугольники,  $M$  — середина  $AC_1$  и  $N$  — середина  $B_1C$  (диагонали прямоугольника равны). Значит,  $MN$  — средняя линия  $\triangle ABC_1$ , т. е.  $MN \parallel AB$  и  $MN = \frac{1}{2}AB \Rightarrow MN \parallel (ABC)$  (по признаку параллельности прямой и плоскости).

Но  $(ABC) \parallel (A_1B_1C_1) \Rightarrow MN \parallel (ABC)$  и  $MN \parallel (A_1B_1C_1)$ , ч. т. д.

б) Так как  $AC_1 = A_1C = B_1C = BC_1$  — как диагонали равных прямоугольников и  $AB$  — общая сторона, то  $\triangle ABC_1 = \triangle A_1B_1C$  (по трем сторонам).

Проведем высоты  $ME$  и  $ME_1$  соответственно трапеций  $AMNB$  и  $A_1MNB_1$ . Заметим, что  $EE_1 \perp (ABC)$ ,  $EM \perp MN$  и



$E_1M \perp MN$ , тогда  $\angle EME_1 = \alpha$  — искомый угол между плоскостями  $ABC_1$  и  $A_1B_1C$ .

$ME = NF$  — как высоты трапеции  $AMNB$ . Аналогично  $ME_1 = NF_1$ .

Пусть  $AE = x$ , тогда  $EF = MN = \frac{1}{2}AB = \sqrt{5}$ ,

$$BF = AB - (AE + EF) = 2\sqrt{5} - (x + \sqrt{5}) = \sqrt{5} - x.$$

Из прямоугольного  $\triangle ACC_1$ , где  $AC = 2$ ,  $CC_1 = 6$ , имеем

$$AC_1 = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Аналогично из  $\triangle BB_1C_1$  находим  $BC_1 = \sqrt{BB_1^2 + B_1C_1^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ .

Так как  $AM = MC_1 = \frac{1}{2}AC_1 = \sqrt{10}$  и  $BN = NC_1 = \frac{1}{2}BC_1 = \sqrt{13}$ , то из  $\triangle AME$  и  $\triangle BNF$ , где  $ME = NF = h$ , получим

$$h^2 = 10 - x^2 \text{ и } h^2 = 13 - (\sqrt{5} - x)^2.$$

Значит,  $10 - x^2 = 13 - (\sqrt{5} - x)^2$ , или  $10 - x^2 = 13 - 5 + 2\sqrt{5}x - x^2$ ,  
или  $2\sqrt{5}x = 2$ , откуда  $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

Тогда  $h^2 = 10 - x^2 = 10 - \frac{1}{5} = \frac{49}{5}$ , т. е.  $h = \frac{7}{\sqrt{5}}$ .

Из  $\triangle EME_1$  по теореме косинусов имеем

$$EE_1^2 = ME^2 + ME_1^2 - 2ME \cdot ME_1 \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

$$6^2 = \frac{49}{5} + \frac{49}{5} - 2 \cdot \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \frac{7}{\sqrt{5}} \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

$$36 = 2 \cdot \frac{49}{5} \cdot (1 - \cos \alpha), \text{ или } 36 = \frac{98}{5} (1 - \cos \alpha),$$

$$\text{или } 1 - \cos \alpha = 36 \cdot \frac{5}{98} = \frac{90}{49}, \text{ откуда } \cos \alpha = -\frac{41}{49}.$$

Поскольку  $\cos \alpha < 0$ , то  $\alpha = \angle EME_1$  является тупым, тогда угол между  $(ABC_1)$  и  $(A_1B_1C)$  равен  $\pi - \alpha$ , т. е.  $\pi - \arccos \frac{41}{49}$ .

Ответ: б)  $\pi - \arccos \frac{41}{49}$ .

**Пример 31.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все ребра равны 6. Точка  $M$  — середина ребра  $AA_1$ .

а) Докажите, что прямые  $CM$  и  $BC_1$  перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми  $CM$  и  $BC_1$ .

*Решение.*

а) Из точки  $C_1$  проведем прямую параллельно  $CM$  до пересечения с продолжением ребра  $AA_1$  в точке  $N$ . Тогда  $MCC_1N$  — параллелограмм, т. е.  $CC_1 = MN = 6$ . Но  $M$  — середина  $AA_1$ . Значит,  $AM = A_1M = A_1N = 3$ . Докажем, что  $BC_1 \perp C_1N$ .

Из  $\triangle BCC_1$  имеем  $BC_1 = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{2 \cdot 6^2} = 6\sqrt{2}$ .

Из  $\triangle AMC$ , где  $AM = 3$ ,  $AC = 6$ , находим

$$MC = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

Из  $\triangle NAB$ , где  $AN = 9$ ,  $AB = 6$ , получим

$$BN = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117} = \sqrt{9 \cdot 13} = 3\sqrt{13}.$$

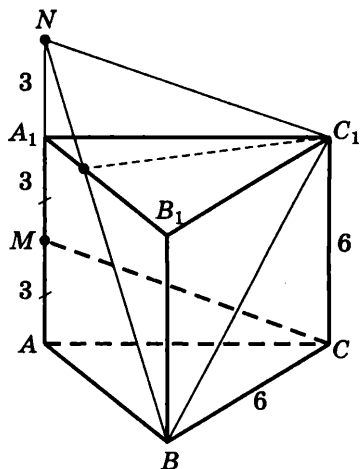
Так как  $(6\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{5})^2 = (3\sqrt{13})^2$ , т. е.  $72 + 45 = 117$  — верно, то по теореме, обратной теореме Пифагора, получим  $BN^2 = BC_1^2 + NC_1^2$ , т. е.  $\angle BC_1N = 90^\circ$ , а так как  $MC \parallel NC_1$ , то  $CM \perp BC_1$ , ч. т. д.

б) Поскольку  $CM \parallel (BNC_1)$ , то искомое расстояние между прямыми  $CM$  и  $BC_1$  есть расстояние от любой точки прямой  $CM$  до  $(BNC_1)$ . Пусть  $d$  — расстояние от точки  $M$  до  $(BNC_1)$ , т. е. длина высоты пирамиды  $MBNC_1$ , где  $M$  — вершина.

$$\text{Но } V_{MBNC_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle BNC_1} \cdot d.$$

С другой стороны,  $V_{MBNC_1} = \frac{1}{3} S_{\triangle MNC_1} \cdot H$ , где  $H$  — высота пирамиды  $MBNC_1$ ,  $B$  — вершина.

$$\text{Значит, } \frac{1}{3} S_{\triangle BNC_1} \cdot d = \frac{1}{3} S_{\triangle MNC_1} \cdot H, \text{ откуда } d = \frac{S_{\triangle MNC_1} \cdot H}{S_{\triangle BNC_1}}.$$



Так как расстояние от точки  $B$  до  $(MNC_1)$  равно длине высоты равностороннего  $\triangle ABC$ , т. е.

$$h_1 = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}, \text{ то}$$

$$d = \frac{\frac{1}{2} MN \cdot A_1C \cdot 3\sqrt{3}}{\frac{1}{2} C_1N \cdot BC_1} = \frac{6 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3}}{3\sqrt{5} \cdot 6\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{15}}{5}.$$

Ответ: б)  $\frac{6\sqrt{15}}{5}$ .

**Пример 32.** Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является  $\triangle ABC$ , где  $\angle C = 90^\circ$ . Известно, что  $A_1B \perp B_1C$ .

а) Докажите, что  $BB_1 = BC$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $A_1B$  и  $B_1C$ , если  $AC = 15$ ,  $BC = 8$ .

*Решение.*

а) По условию в основании прямой призмы лежит прямоугольный  $\triangle ABC$ , где  $\angle C = 90^\circ$ . Значит,  $AC \perp BC$  и  $AC \perp CC_1 \Rightarrow AC \perp (BB_1C_1C)$ . Поскольку  $A_1B$  — наклонная, то  $BC_1$  — проекция этой наклонной на плоскость  $BB_1C_1C$ .

Но  $A_1B \perp B_1C$  (по условию), тогда  $BC_1 \perp B_1C$  (по теореме о трех перпендикулярах). Следовательно, прямоугольник  $BB_1C_1C$ , у которого диагонали перпендикулярны, — квадрат, т. е.  $BB_1 = BC$ , ч. т. д.

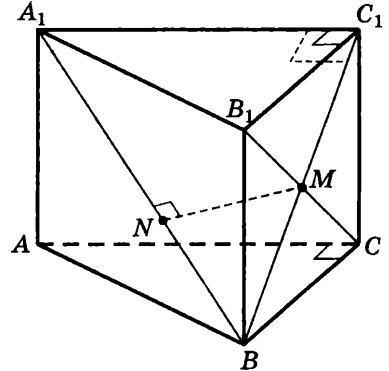
б) Так как по условию задачи  $A_1B \perp B_1C$  и  $\triangle A_1BC_1$  — прямоугольный, то  $MN$  — искомое расстояние между прямыми  $A_1B$  и  $B_1C$ .

Заметим, что  $\triangle A_1BC_1 \sim \triangle BMN$  — как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle A_1BC_1$ . Значит,  $\frac{MN}{BM} = \frac{A_1C_1}{A_1B}$ , откуда  $MN = \frac{BM \cdot A_1C_1}{A_1B}$ , где

$A_1C_1 = AC = 15$ . Так как  $BB_1C_1C$  — квадрат (по доказанному) и  $BC = 8$ , то  $BM = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ .

Из  $\triangle ABC$ , где  $AC = 15$ ,  $BC = 8$ , имеем  $AB = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$ .

$AA_1 = BB_1 = BC = 8$ , тогда из  $\triangle A_1AB$  находим  $A_1B = \sqrt{AA_1^2 + AB^2} = \sqrt{8^2 + 17^2} = \sqrt{353}$ .





$$\text{Следовательно, } MN = \frac{4\sqrt{2} \cdot 15}{\sqrt{353}} = \frac{60\sqrt{706}}{353}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{60\sqrt{706}}{353}.$$

**Пример 33.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  длины всех ребер равны 8. Точки  $M$  и  $N$  — середины ребер  $A_1C_1$  и  $CC_1$  соответственно.

а) Докажите, что  $MN \perp BN$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $BMN$  и  $CBV_1$ .

*Решение.*

а) Проведем высоту  $BE$  к основанию  $\triangle ABC$ . Так как  $\triangle ABC$  — правильный, то  $BE$  — медиана и высота, т. е.  $E$  — середина  $AC$  и  $M$  — середина  $A_1C_1$  (по условию). Тогда  $ME = AA_1 = 8$ .

Из  $\triangle ABE$ , где  $AB = 8$ ,  $AE = 4$ , имеем  $BE = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = 4\sqrt{3}$ .

Так как  $ME \perp (ABC) \Rightarrow ME \perp BE$ , т. е.  $\triangle MBE$  — прямоугольный. Тогда  $BM^2 = ME^2 + BE^2$ , или  $BM^2 = 8^2 + (4\sqrt{3})^2 = 112$ .

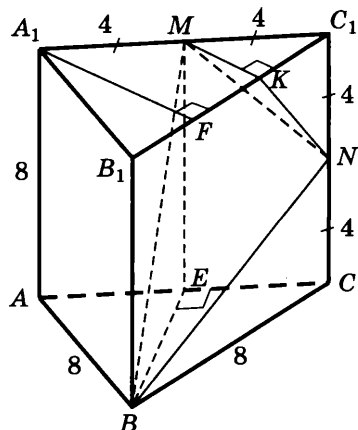
С другой стороны, из  $\triangle BMN$  имеем

$$BN^2 + MN^2 = (8^2 + 4^2) + (4^2 + 4^2) = 80 + 32 = 112.$$

Выходит, что  $\triangle BMN$  — прямоугольный (по теореме, обратной теореме Пифагора). Следовательно,  $MN \perp BN$ , ч. т. д.

б) Из точки  $M$  опустим перпендикуляр  $MK$  на ребро  $B_1C_1$ . Кроме того,  $MK \perp CC_1 \Rightarrow MK \perp (CBV_1)$ . Значит,  $NK$  — проекция  $MN$  на плоскость  $CBV_1$ . Так как  $\triangle BMN$  — прямоугольный, то  $BN \perp NK$  (по теореме о трех перпендикулярах). Значит,  $\angle KNM$  — линейный угол искомого угла. Заметим, что  $MK = \frac{1}{2}A_1F = \frac{1}{2}BE = 2\sqrt{3}$  (по теореме Фалеса).

Из  $\triangle MKN$   $\sin \angle MNK = \frac{MK}{MN} = \frac{2\sqrt{3}}{MN}$ , где  $MN = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$  (из  $\triangle MC_1N$ ).



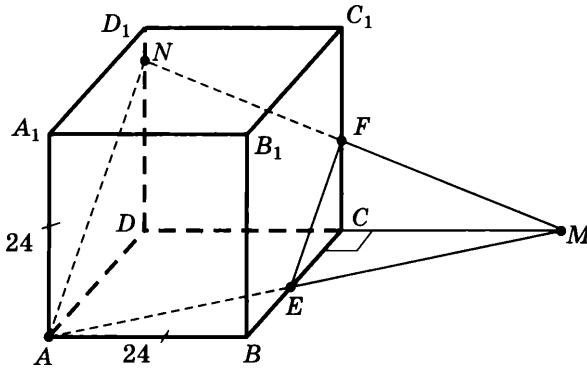
$$\text{Следовательно, } \sin \angle MNK = \frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4},$$

$$\text{откуда } \angle MNK = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

$$\text{Ответ: б) } \arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

**Пример 34.** В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $AA_1 = 24$  на ребрах  $BC$  и  $DD_1$  отмечены точки  $E$  и  $N$  соответственно так, что  $BE = 8$ ,  $D_1 N = 6$ . Плоскость  $AEN$  пересекает ребро  $CC_1$  в точке  $F$ .

- Докажите, что  $F$  — середина ребра  $CC_1$ .
- Найдите расстояние от точки  $C$  до  $(AEN)$ .



*Решение.*

а) Так как боковые грани  $(ADD_1) \parallel (BCC_1)$ , то плоскость  $AEN$  пересечет их по параллельным прямым (если две параллельные плоскости пересечь третьей, то линии их пересечения параллельны). Проведем прямую  $EF \parallel AN$ . Заметим, что  $\triangle ADN \sim \triangle ECF$  (по двум углам), тогда  $\frac{AD}{EC} = \frac{ND}{FC}$ , откуда  $FC = \frac{EC \cdot ND}{AD}$ , где  $EC = BC - BE = 24 - 8 = 16$ ,  $ND = DD_1 - D_1 N = 24 - 6 = 18$ ,  $AD = 24$ .

Значит,  $FC = \frac{16 \cdot 18}{24} = \frac{2 \cdot 18}{3} = 12$ , т. е. точка  $F$  — середина ребра  $CC_1$ , ч. т. д.

б) Расстояние от точки  $C$  до  $(AEN)$  равно высоте пирамиды  $CFEM$ , где  $C$  — вершина пирамиды,  $\triangle FEM$  — основание.

Пусть  $H$  — высота пирамиды  $CFEM$  (искомое расстояние), тогда  $V_{CFEM} = \frac{1}{3} S_{\triangle FEM} \cdot H$ , откуда  $H = \frac{3V_{CFEM}}{S_{\triangle FEM}}$ .

Рассмотрим теперь эту пирамиду с вершиной в точке  $M$  и основанием  $CEF$ . Тогда  $V_{MCEF} = \frac{1}{3} S_{\triangle CEF} \cdot MC = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} CE \cdot CF \cdot MC$ .

Заметим, что  $\triangle MAD \sim \triangle MEC$  — как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle M$ . Тогда  $\frac{MC}{CE} = \frac{MD}{AD}$ .

Так как  $CE = 16$ ,  $MD = MC + CD = MC + 24$ ,  $AD = 24$ , получим  $\frac{MC}{16} = \frac{MC+24}{24}$ , или  $3 \cdot MC = 2 \cdot (MC + 24)$ , откуда  $MC = 48$ .

$$\text{Значит, } V_{MCEF} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 \cdot 48 = 1536.$$

$$\text{Из } \triangle MCE \text{ } ME = \sqrt{MC^2 + CE^2} = \sqrt{48^2 + 16^2} = \sqrt{16^2(3^2 + 1)} = 16\sqrt{10}.$$

$$\text{Из } \triangle FEC \text{ } FE = \sqrt{CE^2 + CF^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{4^2 \cdot (4^2 + 3^2)} = 4\sqrt{25} = 20.$$

$$\text{Из } \triangle FCM \text{ } MF = \sqrt{MC^2 + FC^2} = \sqrt{48^2 + 12^2} = \sqrt{12^2(4^2 + 1)} = 12\sqrt{17}.$$

Зная стороны  $\triangle FEM$ , найдем площадь по формуле Герона:

$$S_{\triangle FEM} = \sqrt{p \cdot (p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{1}{2}(FE + ME + MF) = \\ = \frac{1}{2}(20 + 16\sqrt{10} + 12\sqrt{17}) = 10 + 8\sqrt{10} + 6\sqrt{17};$$

$$p - a = (10 + 8\sqrt{10} + 6\sqrt{17}) - 20 = 8\sqrt{10} + 6\sqrt{17} - 10;$$

$$p - b = (10 + 8\sqrt{10} + 6\sqrt{17}) - 16\sqrt{10} = 10 + 6\sqrt{17} - 8\sqrt{10};$$

$$p - c = (10 + 8\sqrt{10} + 6\sqrt{17}) - 12\sqrt{17} = 10 + 8\sqrt{10} - 6\sqrt{17}.$$

$$\text{Значит, } S_{\triangle FEM} = \sqrt{(10 + 8\sqrt{10} + 6\sqrt{17})(8\sqrt{10} + 6\sqrt{17} - 10) \cdot \\ \cdot \sqrt{(10 + 6\sqrt{17} - 8\sqrt{10})(10 + 8\sqrt{10} - 6\sqrt{17})} = \\ = \sqrt{((8\sqrt{10} + 6\sqrt{17}) + 10)((8\sqrt{10} + 6\sqrt{17}) - 10) \cdot \\ \cdot \sqrt{(10 + (6\sqrt{17} - 8\sqrt{10}))(10 - (6\sqrt{17} - 8\sqrt{10}))} = \\ = \sqrt{((8\sqrt{10} + 6\sqrt{17})^2 - 100) \cdot (100 - (6\sqrt{17} - 8\sqrt{10})^2)} = \\ = \sqrt{(640 + 612 + 96\sqrt{170} - 100)(100 - 612 - 640 + 96\sqrt{170})} = \\ = \sqrt{(1152 + 96\sqrt{170})(96\sqrt{170} - 1152)} = \sqrt{(96\sqrt{170})^2 - 1152^2} = \\ = \sqrt{1\,566\,720 - 1\,327\,104} = \sqrt{239\,616} = \sqrt{16 \cdot 14\,976} = \\ = 4\sqrt{16 \cdot 936} = 16\sqrt{36 \cdot 26} = 96\sqrt{26}. \text{ Итак, } S_{\triangle FEM} = 96\sqrt{26}.$$

$$\text{Следовательно, } H = \frac{3 \cdot 1536}{96\sqrt{26}} = \frac{1536\sqrt{26}}{32 \cdot 26} = \frac{48\sqrt{26}}{26} = \frac{24\sqrt{26}}{13}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{24\sqrt{26}}{13}.$$

**Пример 35.** В основании прямоугольного параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  лежит квадрат  $ABCD$  со стороной  $AB = 6$ . Боковое ребро  $AA_1 = 8$ . На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $M$  так, что  $AM : A_1M = 1 : 3$ .

а) Постройте сечение параллелепипеда плоскостью  $BMD_1$ .

б) Найдите площадь полученного сечения.

*Решение.*

а) Соединим точку  $M$  с точками  $A_1$  и  $B$ . Так как  $AA_1 = 8$ , то  $AM = 2$ ,  $A_1M = 6$  ( $AM : A_1M = 1 : 3$ ). Если две параллельные плоскости пересесть третьей, то линии пересечения параллельны.

Из точки  $B$  проведем  $BN \parallel MD_1$ . Соединив точки  $D_1$  и  $N$ , получим искомое сечение — параллелограмм  $MBND_1$  (по признаку параллелограмма).

б) Пусть  $\angle D_1MB = \alpha$ . Из  $\triangle D_1MB$  по теореме косинусов имеем  $BD_1^2 = MB^2 + MD_1^2 - 2MB \cdot MD_1 \cdot \cos \alpha$ . С другой стороны, по свойству диагонали прямоугольного параллелепипеда имеем

$$BD_1^2 = AB^2 + BC^2 + AA_1^2 = 36 + 36 + 64 = 136.$$

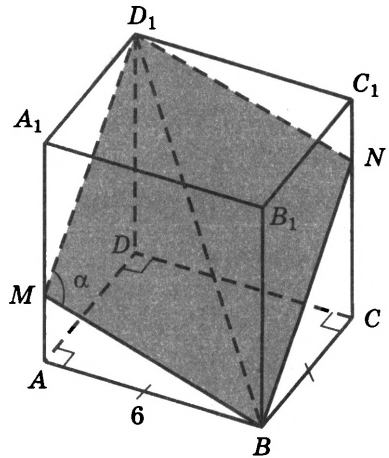
Из прямоугольного  $\triangle AMB$ , где  $AB = 6$ ,  $AM = 2$ , находим  $MB = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ .

Аналогично из  $\triangle MA_1D_1$ , где  $A_1M = 6$ ,  $A_1D_1 = AB = 6$ , имеем  $MD_1 = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ .

Следовательно,  $136 = 40 + 72 - 2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{2} \cos \alpha$ , или

$$24\sqrt{20} \cos \alpha = 112 - 136 = -24, \text{ откуда } \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{20}}, \text{ тогда}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{20}} = \sqrt{\frac{19}{20}}.$$



$$\begin{aligned} \text{Значит, } S_{\text{сеч.}} &= BM \cdot MD_1 \cdot \sin \alpha = 2\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{19}{20}} = \\ &= 12\sqrt{20} \cdot \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{20}} = 12\sqrt{19}. \end{aligned}$$

Ответ: б)  $12\sqrt{19}$ .

**Пример 36.** Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ). Известно, что  $B_1C \perp A_1B$ .

а) Докажите, что  $BB_1 = BC$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $B_1C$  и  $A_1B$ , если  $BC = 7$ ,  $AC = 24$ .

*Решение.*

а) Поскольку  $A_1C_1 \perp B_1C_1$  (по условию) и  $A_1C_1 \perp C_1C$ , то  $A_1C_1 \perp (BB_1C_1C)$ . Следовательно, если  $A_1B$  — наклонная, то  $BC_1$  — проекция этой наклонной на плоскость грани  $BB_1C_1C$ . По условию  $A_1B \perp B_1C$ , тогда по теореме о трех перпендикулярах  $C_1B \perp B_1C$ , следовательно,  $BB_1C_1C$  — прямоугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны. Значит, прямоугольник  $BB_1C_1C$  — квадрат, тогда  $BB_1 = BC$ , ч. т. д.

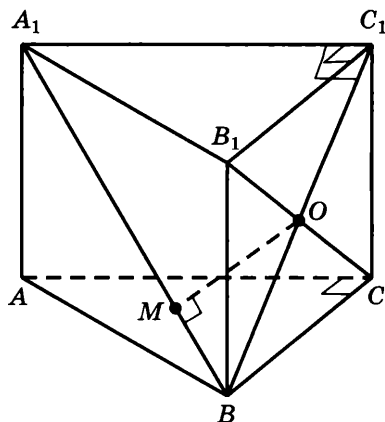
б) Так как  $B_1O \perp A_1B$  и  $B_1O \perp BC_1$ , то  $B_1O \perp (BA_1C_1)$ . Следовательно,  $B_1O$  перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости (по определению перпендикулярности прямой и плоскости). Проведем  $OM \perp A_1B$ , тогда  $OM$  — искомое расстояние между прямыми  $B_1C$  и  $A_1B$ .

Заметим, что  $\triangle BOM \cup \triangle A_1BC_1$  (по двум углам), значит,  $\frac{OM}{A_1C_1} = \frac{OB}{A_1B}$ ,

откуда  $OM = \frac{A_1C_1 \cdot OB}{A_1B}$ , где  $AC = A_1C_1 = 24$ . Так как  $BB_1C_1C$  — ква-

драт (по доказанному), то  $BC = BO\sqrt{2}$ , откуда  $BO = \frac{7}{\sqrt{2}}$ . Из  $\triangle ABC$  по

теореме Пифагора  $AB = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25$ .



Из  $\triangle A_1AB$  имеем  $A_1B = \sqrt{AA_1^2 + AB^2} = \sqrt{7^2 + 25^2} = \sqrt{674}$ , тогда

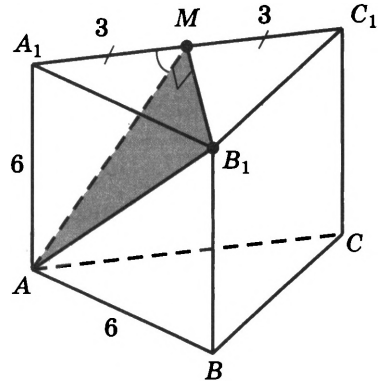
$$OM = \frac{24 \cdot 7}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{674}} = \frac{84}{\sqrt{337}}.$$

Ответ: б)  $\frac{84}{\sqrt{337}}$ .

**Пример 37.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все ребра равны 6. Через точки  $A$ ,  $B_1$  и середину  $M$  ребра  $A_1C_1$  проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью  $AB_1M$  — прямоугольный треугольник.

б) Найдите косинус угла между плоскостью сечения и плоскостью основания призмы.



*Решение.*

а) Найдем длины сторон  $\triangle AB_1M$ .

Из  $\triangle ABB_1$ , где  $AB = BB_1 = 6$  (по условию), имеем

$$AB_1 = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{2 \cdot 6^2} = 6\sqrt{2}.$$

Из  $\triangle AA_1M$ , где  $AA_1 = 6$ ,  $A_1M = \frac{1}{2}A_1C_1 = 3$ , находим

$$AM = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = \sqrt{5 \cdot 9} = 3\sqrt{5}.$$

Аналогично из  $\triangle A_1B_1M$ , где  $A_1B_1 = 6$ ,  $A_1M = 3$ , получим

$$B_1M = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = \sqrt{3 \cdot 9} = 3\sqrt{3}.$$

Поскольку  $AB_1^2 = 72 = 45 + 27 = AM^2 + B_1M^2$ , то  $\triangle AMB_1$  — прямоугольный (по теореме, обратной теореме Пифагора), ч. т. д.

б) Значит,  $AB_1$  — гипотенуза,  $AM$  и  $B_1M$  — катеты.

Тогда  $\cos \angle A_1MA = \frac{A_1M}{AM} = \frac{3}{3\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , где  $\angle A_1MA$  — искомый угол между  $(AMB_1)$  и  $(ABC)$ .

Ответ: б)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ .

**Пример 38.** Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является равнобедренный  $\triangle ABC$ , в котором  $AC = BC = 13$ ,  $AB = 10$ . Боковое ребро призмы  $AA_1 = 24$ . Точка  $M$  — середина ребра  $CC_1$ .

а) Найдите тангенс угла между плоскостями  $A_1B_1C_1$  и  $AMB$ .

б) Найдите расстояние от точки  $C$  до  $(AMB)$ .

*Решение.*

а) Поскольку плоскости оснований призмы параллельны и равны, то тангенс угла между  $(A_1B_1C_1)$  и  $(AMB)$  будет равен тангенсу угла между  $(ABC)$  и  $(AMB)$ . Искомый угол будет равен углу между высотами  $MN$  и  $CN$ . Пусть  $\angle MNC = \alpha$ .

Так как  $M$  — середина ребра  $CC_1$ , то

$$MC = \frac{1}{2}CC_1 = \frac{1}{2}AA_1 = 12.$$

Из  $\triangle CNB$ , где  $BC = 13$ ,  $BN = \frac{1}{2}AB = 5$ , по теореме Пифагора

$$CN = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12. \text{ Тогда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{MC}{CN} = \frac{12}{12} = 1.$$

б) Расстояние от точки  $C$  до  $(AMB)$  — это длина перпендикуляра, опущенного из точки  $C$  на гипотенузу  $MN$ , т. е.  $CK$ .

Так как  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ , то  $\alpha = 45^\circ$ , тогда  $CN = MC = 12$ .

$$\begin{aligned} \text{В } \triangle NKC \angle NCK &= 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ, \text{ т. е. } CK = NK. CK = CN \sin 45^\circ = \\ &= 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}. \end{aligned}$$

*Ответ:* а)  $\operatorname{tg} \alpha = 1$ ; б)  $6\sqrt{2}$ .

**Пример 39.** В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$  стороны основания равны 3, а боковые ребра — 6. Точка  $M$  — середина  $AC$ .

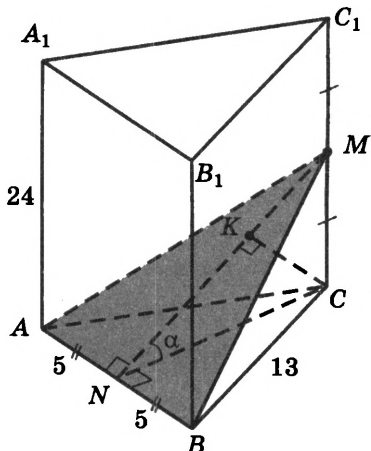
а) Докажите, что плоскость  $A_1MD$  делит сторону  $AB$  основания призмы в отношении 2 : 1.

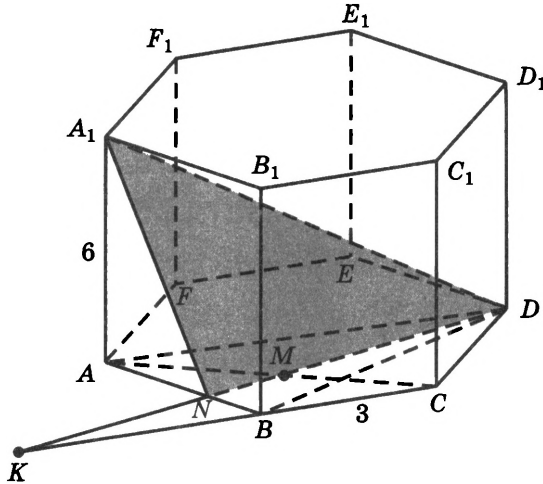
б) Найдите расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $A_1MD$ .

*Решение.*

а) По условию точка  $M$  — середина  $AC$ ,  $DM \cap AB = N$ ,  $DM \cap BC = K$ . Так как призма — правильная, то  $AB = CD$ ,  $AD = 2AB$ ,  $ABCD$  — равнобедренная трапеция, где  $BC \parallel AD$ .

Кроме того,  $\triangle AMD = \triangle CMQ$  (по двум сторонам и углу между ними). Значит,  $AD = CK = 6$ ,  $BK = 3$ . Используя теорему Менелая





для  $\triangle ABC$  и прямой  $DK$ , имеем  $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BK}{KC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$ , или  $\frac{AN}{NB} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{3} = 1$ ,

откуда  $\frac{AN}{NB} = \frac{2}{1}$ , ч. т. д.

б) Искомое расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $A_1MD$  найдем, используя объем пирамиды  $A_1ADN$ .

С одной стороны,  $V_{A_1ADN} = \frac{1}{3} S_{\triangle ADN} \cdot AA_1$ , где  $AA_1$  — высота пирамиды  $A_1ADN$ .

$$\begin{aligned} \text{Значит, } V_{A_1ADN} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} S_{\triangle ABD} \cdot AA_1 = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot AA_1 = \\ &= \frac{1}{9} \cdot 3 \cdot BD \cdot AA_1 = \frac{1}{3} BD \cdot AA_1 = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot BD = 2BD. \end{aligned}$$

Из  $\triangle BCD$ , где  $BC = CD = 3$ ,  $\angle BCD = 120^\circ$ , по теореме косинусов найдем сторону  $BD$ .  $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos 120^\circ = 9 + 9 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = 18 - 18 \cos 120^\circ = 18 - 18 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 18 + 9 = 27$ ,

откуда  $BD = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ .

Следовательно,  $V_{A_1ADN} = 2 \cdot 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ .

С другой стороны,  $V_{A_1ADN} = \frac{1}{3} S_{\triangle A_1DN} \cdot d$ , где  $d$  — искомое расстояние от вершины  $A$  до плоскости  $A_1MD$ . Значит,  $d = \frac{3 \cdot V_{A_1ADN}}{S_{\triangle A_1DN}}$ .



Так как  $AB = BC = 3$  (по условию) и  $AN : NB = 2 : 1$  (по доказанному), то  $BN = 1$ ,  $BD = 3\sqrt{3}$ , тогда из прямоугольного  $\triangle BDN$ , где  $BN \perp BD$ , имеем  $DN = \sqrt{BN^2 + BD^2} = \sqrt{1 + 27} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$ .

Из  $\triangle A_1AN$ , где  $A_1A \perp AN$ , найдем  $A_1N$  по теореме Пифагора:

$$A_1N = \sqrt{AA_1^2 + AN^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Диагональ  $A_1D$  призмы найдем из прямоугольного  $\triangle A_1AD$ , где  $A_1A = 6$ ,  $AD = 2BC = 6$ .  $A_1D = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{2 \cdot 6^2} = 6\sqrt{2}$ .

Пусть в  $\triangle A_1ND$   $\angle NA_1D = \alpha$ , тогда по теореме косинусов имеем  $DN^2 = A_1N^2 + A_1D^2 - 2A_1N \cdot A_1D \cdot \cos \alpha$ , или

$$28 = 40 + 72 - 2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{2} \cos \alpha, \text{ или } 24\sqrt{20} \cos \alpha = 84,$$

$$\text{откуда } \cos \alpha = \frac{84}{24 \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{7}{4\sqrt{5}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{4\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{49}{80}} = \\ = \sqrt{\frac{31}{80}} = \frac{\sqrt{31}}{4\sqrt{5}}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle A_1DN} = \frac{1}{2} A_1N \cdot A_1D \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{31}}{4\sqrt{5}} = \\ = 6\sqrt{20} \cdot \frac{\sqrt{31}}{4\sqrt{5}} = 3\sqrt{31}.$$

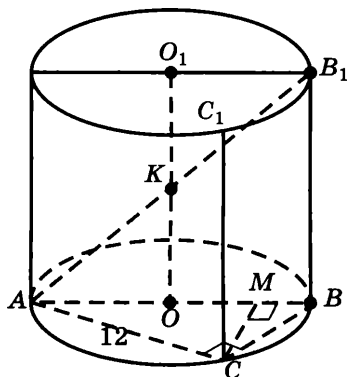
$$\text{Значит, } d = \frac{3 \cdot 6\sqrt{3}}{3\sqrt{31}} = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{31}} = \frac{6\sqrt{93}}{31}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{6\sqrt{93}}{31}.$$

## 2.3. Цилиндр

**Пример 40.** В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки  $A$  и  $C$ , а на окружности верхнего основания —  $B_1$  и  $C_1$  так, что  $CC_1$  является образующей цилиндра, перпендикулярной основаниям, а  $AB_1$  пересекает ось  $OO_1$  цилиндра в точке  $K$ .

а) Докажите, что прямые  $AC$  и  $B_1C_1$  перпендикулярны.



б) Найдите расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $CC_1$ , если  $AC = 12$ ,  $B_1C_1 = 5$ .

*Решение.*

а) По условию диагональ  $AB_1$  пересекает ось  $OO_1$  цилиндра в точке  $K$ , значит,  $AB_1$  и  $O_1O$  лежат в одной плоскости (в плоскости осевого сечения). Значит,  $AB$  — диаметр нижнего основания. Так как  $B_1C_1 \parallel (ABC)$  и  $B_1C_1 = BC$ , то  $\angle ACB = 90^\circ$  — как вписанный, опирающийся на диаметр  $AB$ , т. е.  $AC \perp B_1C_1$ , ч. т. д.

б) Заметим, что прямые  $CC_1$  и  $AB_1$  — скрещивающиеся, так как  $CC_1 \parallel (ABB_1)$ , а  $AB_1 \in (ABB_1)$ .

Тогда расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию от любой точки прямой  $CC_1$  до плоскости  $(ABB_1)$ . Проведем  $CM \perp AB$ . Так как  $OO_1 \perp (ABC) \Rightarrow OO_1 \perp CM$ . Следовательно, в плоскости  $ABB_1$  мы имеем две прямые, которым перпендикулярна  $CM$ , т. е.  $CM$  — расстояние от точки  $C$  до  $(ABB_1)$ . По условию  $B_1C_1 = 5$  и  $B_1C_1 \parallel BC$ , где  $BC$  — проекция  $B_1C_1$  на плоскость нижнего основания. Значит,  $BC = B_1C_1 = 5$ . Из  $\triangle ABC$ , где  $AC = 12$ ,  $BC = 5$ , по теореме Пифагора  $AB = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ .

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} AB \cdot CM, \text{ откуда } CM = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{12 \cdot 5}{13} = \frac{60}{13}.$$

Ответ: б)  $\frac{60}{13}$ .

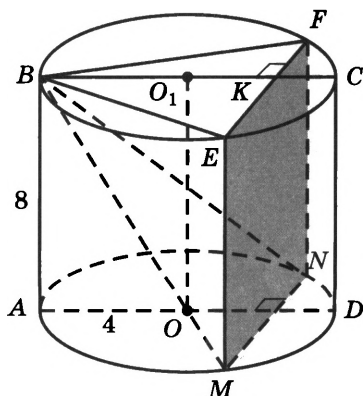
**Пример 41.** В цилиндре  $ABCD$  высота  $AB = 8$ , радиус основания  $AO = 4$ ,  $MN$  — хорда в нижнем основании, причем  $MN = AO$ . В верхнем основании цилиндра проведен диаметр  $BC \perp MN$ . Сечение  $MEFN \perp BC$ .

а) Докажите, что диагонали сечения  $MEFN$  равны.

б) Найдите объем пирамиды  $BMEFN$ .

*Решение.*

а) Поскольку  $ME = NF$  — как образующие цилиндра и  $ME \parallel NF \Rightarrow$  четырехугольник  $MEFN$  — параллелограмм (по признаку параллелограмма). Кроме того,  $BC \perp MN$  (по условию задачи),  $MN \parallel EF \Rightarrow BC \perp EF$ . Выходит, что  $BC \perp (MEFN)$ . Так как  $ME \perp EF$ ,  $ME \perp MN$ ,



то  $MEFN$  — прямоугольник. Тогда его диагонали равны (по свойству прямоугольника), ч. т. д.

б) Так как  $BC \perp (MEFN)$ , то  $BK$  — высота пирамиды, а прямоугольник  $MEFN$  — основание пирамиды.

Найдем высоту  $BK$  пирамиды:  $BK = BO_1 + O_1K$ , где  $BO_1 = AO = 4$ ,  $MN = EF = 4$ .

$\triangle EO_1F$  — равносторонний, так как  $EO_1 = O_1F = EF = 4$ ,  $O_1K$  — медиана и высота,  $EK = KF = 2$ . Из  $\triangle EO_1K$  по теореме Пифагора  $O_1K = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

Тогда  $BK = BO_1 + O_1K = 4 + 2\sqrt{3}$ .  $S_{\text{сеч.}} = S_{MEFN} = MN \cdot ME = 4 \cdot 8 = 32$ .

Следовательно,  $V_{BMEFN} = \frac{1}{3} S_{MEFN} \cdot BK = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot (4 + 2\sqrt{3}) = \frac{64}{3} (2 + \sqrt{3})$ .

Ответ: б)  $\frac{64}{3} (2 + \sqrt{3})$ .

**Пример 42.** В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности нижнего основания выбраны точки  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а на окружности верхнего основания — точка  $B_1$ , причем  $BB_1$  — образующая цилиндра, а  $AB$  — диаметр основания. Известно, что  $AC = 2\sqrt{3}$ ,  $BB_1 = 2\sqrt{6}$ ,  $\angle ABC = 30^\circ$ .

а) Докажите, что угол между прямыми  $AB_1$  и  $BC$  равен  $45^\circ$ .

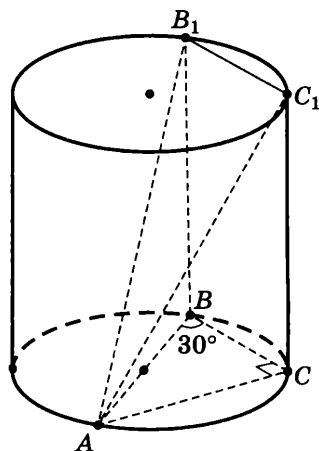
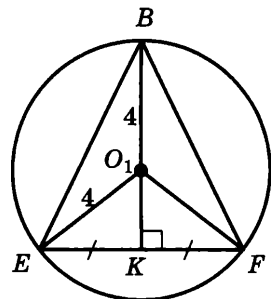
б) Найдите объем цилиндра.

*Решение.*

а) Если две параллельные плоскости пересечь третьей, то линии пересечения параллельны. Значит,  $BC \parallel B_1C_1$ . Тогда угол между  $AB_1$  и  $BC$  равен углу между  $AB_1$  и  $B_1C_1$ .

Так как  $AB$  — диаметр (по условию), то  $\triangle ABC$  — прямоугольный, где  $\angle ABC = 30^\circ$ , тогда  $BC = AC \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 6$ .

$$AC = \frac{1}{2} AB \Rightarrow AB = 2AC = 4\sqrt{3}.$$



Из  $\triangle AB_1B$  по теореме Пифагора имеем

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{48 + 24} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}.$$

Из  $\triangle ACC_1$  находим  $AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2}$ , где  $CC_1 = BB_1 = 2\sqrt{6}$ ;

$$AC_1 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{12 + 24} = \sqrt{36} = 6.$$

Для  $\triangle AB_1C_1$  выполняется равенство  $AC_1^2 + B_1C_1^2 = AB_1^2$ , или  $6^2 + 6^2 = (6\sqrt{2})^2$ .

Значит,  $\triangle AC_1B_1$  — равнобедренный и прямоугольный, т. е. угол между прямыми  $AB_1$  и  $BC$  равен  $45^\circ$ , ч. т. д.

б) Объем цилиндра находим по формуле  $V = \pi R^2 H$ , где

$$R = \frac{1}{2}AB = 2\sqrt{3}, H = BB_1 = 2\sqrt{6}.$$

Следовательно,  $V = \pi \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot 2\sqrt{6} = 24\sqrt{6}\pi$ .

Ответ: б)  $24\sqrt{6}\pi$ .

**Пример 43.** Дан прямой круговой цилиндр высотой 10 и радиусом основания 3. В основании конуса проведена хорда  $CD$ , равная радиусу основания, а в нижнем основании проведен диаметр  $MN \perp CD$ ,  $(ABCD) \perp MN$ . Точка  $M$  и центр  $O$  основания цилиндра лежат по одну сторону от  $(ABCD)$ .

а) Докажите, что  $AC = BD$ .

б) Найдите  $V_{MABCD}$ .

*Решение.*

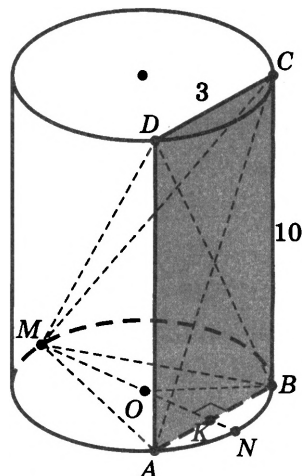
а) Так как  $(ABCD) \perp MN$  (по условию), то  $AD$  и  $BC$  — образующие цилиндра. Значит,  $AD \parallel BC$  и  $AD = BC$ , т. е.  $ABCD$  — параллелограмм. Но  $AD$  и  $BC$  перпендикулярны основаниям цилиндра и  $AD \perp DC$ , а  $BC \perp CD$ . Следовательно, параллелограмм  $ABCD$  является прямоугольником, тогда  $AC = BD$ , ч. т. д.

б)  $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 10 \cdot 3 = 30$ .

Пусть  $K$  — точка пересечения диаметра  $MN$  и хорды  $AB$ . В  $\triangle OKB$

$$OB = MO = AB = 3, KB = \frac{1}{2}AB = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Тогда } OK = \sqrt{OB^2 - KB^2} = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$



$MK$  — высота пирамиды  $MABCD$ , тогда  $MK = MO + OK = 3 + \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3(2+\sqrt{3})}{2}$ .

Следовательно,  $V_{MABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot MK = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot \frac{3(2+\sqrt{3})}{2} = 15(2+\sqrt{3})$ .

Ответ: б)  $15(2+\sqrt{3})$ .

**Пример 44.** В цилиндре образующая перпендикулярна плоскости основания. На окружности нижнего основания отмечены точки  $A$  и  $B$ , а на окружности верхнего — точки  $B_1$  и  $C_1$ , где  $BB_1$  — образующая цилиндра, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось  $OO_1$  в точке  $M$ .

а) Докажите, что  $\angle ABC_1 = 90^\circ$ .

б) Найдите угол между прямыми  $BB_1$  и  $AC_1$ , если  $AB = 5$ ,  $B_1C_1 = 12$ ,  $BB_1 = 18$ .

*Решение.*

а) Точка  $C$  — проекция точки  $C_1$  на плоскость нижнего основания. Наклонная  $AC_1$  пересекает ось цилиндра  $OO_1$  в точке  $M$ , проекцией которой является точка  $O$ . Значит,  $AC$  — диаметр окружности, тогда  $\angle ABC = 90^\circ$  — как вписанный угол, опирающийся на диаметр. Так как  $BC \perp AB$ , то  $BC_1 \perp AB$ , т. е.  $\angle ABC_1 = 90^\circ$  (по теореме о трех перпендикулярах), ч. т. д.

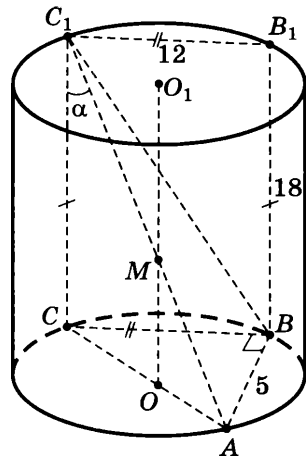
б) Поскольку образующие цилиндра параллельны, т. е.  $CC_1 \parallel BB_1$ , то  $\angle AC_1C = \alpha$  — искомый угол между прямыми  $BB_1$  и  $AC_1$ .

По условию  $B_1C_1 = 12$ ,  $CC_1 = BB_1 = 18$ ,  $BC = B_1C_1 = 12$ .

Из  $\triangle ABC$  имеем  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ .

Из  $\triangle ACC_1$   $\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{CC_1} = \frac{13}{18}$ , откуда  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{13}{18}$ .

Ответ: б)  $\operatorname{arctg} \frac{13}{18}$ .



## 2.4. Конус

**Пример 45.** В конусе  $MAВ$  длина образующей равна 13, а радиус основания — 5. На окружности основания конуса выбраны точки  $B$  и  $C$ , делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 2 : 4.

- а) Докажите, что  $\triangle BOC$  — равносторонний.  
 б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью  $MBC$ .

*Решение.*

а) Пусть  $\cup BC = 2x$ , тогда  $\cup CAB = 4x$ . Получим уравнение  $2x + 4x = 360$ , или  $6x = 360$ , откуда  $x = 60$ .

Значит,  $\cup BC = 60^\circ \Rightarrow \angle BOC = 60^\circ$ . Так как  $BO = CO$ , то  $\angle OBC = \angle OCB = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$ .

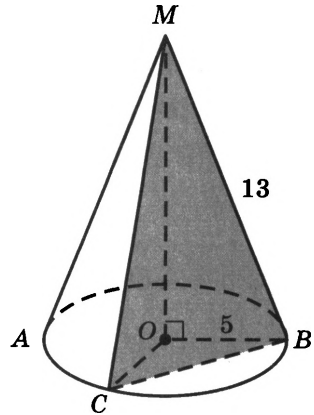
Выходит, что  $\triangle BOC$  — равносторонний, ч. т. д.

б) Сечение  $MBC$  — равнобедренный треугольник, так как  $MC = MB = 13$ ,  $BC = 5$ . По формуле Герона  $S_{\text{сеч.}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ ,

где  $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$  — полупериметр.  $p = \frac{1}{2}(5+13+13) = \frac{31}{2}$ ,  $p-a = p-b = p-c = \frac{31}{2} - 5 = \frac{21}{2}$ .

Следовательно,  $S_{\text{сеч.}} = \sqrt{\frac{31}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{21}{2}} = \frac{5\sqrt{651}}{4}$ .

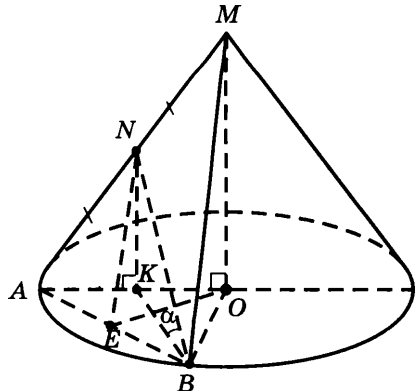
Ответ: б)  $\frac{5\sqrt{651}}{4}$ .



**Пример 46.** Радиус основания конуса с вершиной  $M$  и центром основания  $O$  равен 8, высота конуса  $MO = \sqrt{70}$ . Точка  $N$  — середина образующей  $MA$ , точка  $E \in AB$ , причем  $NE \parallel MB$ .

а) Докажите, что  $OE$  — биссектриса  $\angle AOB$ .

б) Найдите угол между прямой  $BN$  и плоскостью основания конуса, если  $AB = 6\sqrt{3}$ .



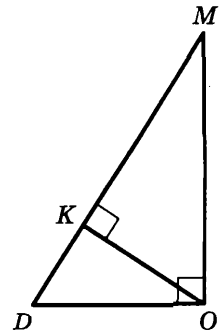


*Решение.*

а) Найдем длину образующей  $MA$  конуса из прямоугольного  $\triangle AMO$ , где  $AO = 15$ ,  $MO = 8$ . По теореме Пифагора  $AM = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{289} = 17$ . Через вершину  $M$  и образующие  $MA$  и  $MC$  проходит сечение конуса  $AMC$ , где  $MA \perp MC$  (по условию задачи). Поскольку  $MA = MC$  (как образующие конуса) и  $MA \perp MC$ , то сечение — равнобедренный прямоугольный  $\triangle AMC$ , который пересекает основание конуса по хорде  $AC$ , где  $AC = \sqrt{17^2 + 17^2} = \sqrt{2 \cdot 17^2} = 17\sqrt{2}$ .

б) Проведем радиус  $OM \perp AC$ , тогда  $AD = DC$  (радиус, перпендикулярный хорде, делит ее пополам). Соединим точки  $M$  и  $D$ . Поскольку  $\triangle AMC$ , где  $AC$  — гипотенуза, — равнобедренный и прямоугольный, то  $MD$  — медиана, а значит, и высота.

Известно, что медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы, т. е.  $MD = AD = DC = \frac{1}{2}AC = \frac{17\sqrt{2}}{2}$ .



Поскольку  $MD \perp AC$  и  $OD \perp AC$ , то плоскость  $(MOD) \perp (AMC)$ . Значит, перпендикуляр, опущенный из точки  $O$  на  $MD$ , будет расстоянием от точки  $O$  до  $(AMC)$ .

Из  $\triangle MOD$ , где  $MO = 8$ ,  $MD = \frac{17\sqrt{2}}{2}$ , по теореме Пифагора найдем катет  $OD = \sqrt{MD^2 - MO^2} = \sqrt{\frac{289}{2} - 64} = \sqrt{\frac{289 - 128}{2}} = \sqrt{\frac{161}{2}}$ .

Проведем  $OK \perp MD$ , тогда  $S_{\triangle MOD} = \frac{1}{2}MO \cdot OD = \frac{1}{2}MD \cdot OK$ , откуда

$$OK = \frac{MO \cdot OD}{MD}, \text{ или } OK = \frac{8 \cdot \sqrt{\frac{161}{2}}}{\frac{17\sqrt{2}}{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{161} \cdot 2}{\sqrt{2} \cdot 17\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{161}}{17}.$$

Ответ: б)  $\frac{8\sqrt{161}}{17}$ .



**Пример 48.** Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на окружности основания конуса, причем  $AB$  — диаметр. Точка  $K$  — середина  $BC$ .

а) Докажите, что прямая  $MK$  образует с плоскостью  $ABC$  угол, равный углу между  $AC$  и плоскостью  $MAC$ .

б) Найдите угол между прямой  $MA$  и  $(MCB)$ , если  $AC = 8$ ,  $BC = 6$ ,  $MA = 4\sqrt{10}$ .

*Решение.*

а) Точка  $O$  — проекция точки  $M$  на плоскость основания конуса. Так как  $MK \perp BC$  ( $MK$  — медиана и высота равнобедренного  $\triangle MBC$ ), то  $\angle MKO$  — угол наклона  $MK$  к  $(ABC)$ .

Но  $OK \parallel AC$ , так как  $OK$  — средняя линия  $\triangle ABC$ . Значит, угол между  $AC$  и  $(MBC)$  равен углу между  $MK$  и  $(ABC)$ , ч. т. д.

б) Так как  $AC = 8$ , то  $OK = \frac{1}{2}AC = 4$ ,  $BK = \frac{1}{2}BC = 3$ ,

$MA = MC = MB = 4\sqrt{10}$ , тогда из  $\triangle MBK$  получим

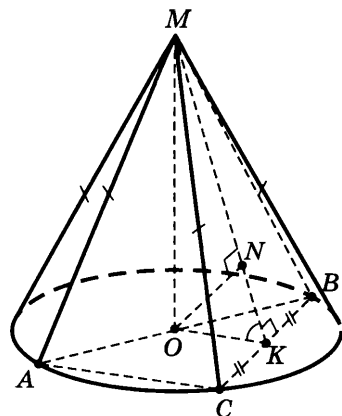
$$MK = \sqrt{MB^2 - BK^2} = \sqrt{(4\sqrt{10})^2 - 3^2} = \sqrt{151}.$$

$$\text{Из } \triangle MOK \text{ } MO = \sqrt{MK^2 - OK^2} = \sqrt{151 - 16} = \sqrt{135} = 3\sqrt{15}.$$

$$S_{\triangle MOK} = \frac{1}{2}MO \cdot OK = \frac{1}{2}MK \cdot ON, \text{ откуда } ON = \frac{MO \cdot OK}{MK} = \\ = \frac{3\sqrt{15} \cdot 4}{\sqrt{151}} = \frac{12\sqrt{15}}{\sqrt{151}}.$$

$$\text{Из } \triangle ONK \sin \angle OKN = \frac{ON}{OK} = \frac{12\sqrt{15}}{\sqrt{151}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{\sqrt{151}}.$$

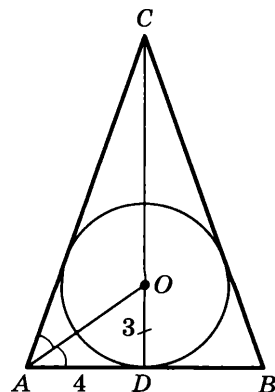
$$\text{Ответ: б) } \arcsin \frac{3\sqrt{15}}{\sqrt{151}}.$$



**Пример 49.** В конус, радиус основания которого равен 4, вписан шар радиуса 3.

а) Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.

б) Найдите отношение площади поверхности конуса к площади поверхности шара.



*Решение.*

а) Так как  $ABC$  — конус, то осевое сечение — равнобедренный  $\triangle ABC$ , где  $AC = BC$  — как образующие конуса,  $AB$  — диаметр конуса. В  $\triangle ABC$  вписана окружность, радиус которой равен радиусу шара.

б) Пусть  $AD = r = 4$  — радиус основания конуса,  $OD = R = 3$  — радиус вписанного в конус шара.

Известно, что  $S_{\text{конуса}} = \pi r(r + l)$ , где  $l = AC$  — образующая конуса.  
 $S_{\text{шара}} = 4\pi R^2$ .

По свойству биссектрисы треугольника  $\frac{OD}{CO} = \frac{AD}{AC}$ , или

$$\frac{3}{CD - 3} = \frac{4}{AC}. \quad (1)$$

Кроме того,  $AC^2 - CD^2 = 16$ . (2)

Из равенства (1) имеем  $3AC = 4CD - 12$ , откуда  $CD = \frac{3AC + 12}{4}$ .

Тогда равенство (2) примет вид  $AC^2 - \frac{9(AC + 4)^2}{16} = 16$ , или

$$16AC^2 - 9(AC + 4)^2 = 256.$$

Раскрыв скобки и упростив выражение, получим уравнение  $7AC^2 - 72AC - 400 = 0$ .

$$\frac{D}{4} = 36^2 + 2800 = 4096 = 64^2.$$

$$AC = l = \frac{36 \pm 64}{7}, \text{ откуда } l = \frac{100}{7} \text{ (так как } l > 0 \text{)}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{S_{\text{конуса}}}{S_{\text{шара}}} = \frac{\pi \cdot 4 \cdot \left(4 + \frac{100}{7}\right)}{4\pi \cdot 9} = \frac{128}{63}.$$

$$\text{Ответ: б) } \frac{128}{63}.$$

*Замечание.* Задача допускает и другие способы решения.

**Пример 50.** Дан конус  $MAV$ . На окружности основания конуса отмечены точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  так, что  $AC = BC$ ,  $N$  — середина образующей  $MB$ .

а) Докажите, что  $\angle NOC = 90^\circ$ .

б) Найдите угол между прямыми  $AN$  и  $MC$ , если  $AM = 8$ ,  $AB = 2\sqrt{6}$ .

*Решение.*

а)  $МAB$  — осевое сечение конуса,  $N$  — середина  $MB$ , тогда медиана  $AN$  пересекает высоту  $MO$  конуса. Значит, плоскость  $МAB$  содержит высоту конуса,  $AB$  — диаметр конуса,  $MO$  — высота.

Так как  $AC = BC$  (по условию), то  $CO$  — высота равнобедренного  $\triangle ABC$ , тогда  $OC \perp AB$ ,  $OC \perp MO \Rightarrow OC \perp (MAB)$ . Значит,  $\angle NOC = 90^\circ$  (по определению перпендикулярности прямой и плоскости), ч. т. д.

б) Пусть  $K$  — середина  $BC$ , тогда  $NK$  — средняя линия  $\triangle MBC \Rightarrow NK \parallel MC$ . Следовательно, угол между скрещивающимися прямыми  $AN$  и  $MC$  равен углу между  $AN$  и  $NK$ .

Заметим, что  $\angle ACB = 90^\circ$  — как вписанный угол, опирающийся на диаметр  $AB$ ,  $\angle CAB = \angle ABC = 45^\circ$ .

$$BC = AC = AB \cdot \sin 45^\circ = 2\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Из } \triangle ACK \text{ } AK = \sqrt{AC^2 + CK^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{15}.$$

$$\text{В } \triangle MOB \cos \angle MBO = \frac{OB}{MB} = \frac{\sqrt{6}}{8}.$$

Из  $\triangle ANB$  по теореме косинусов имеем  $AN^2 = AB^2 + BN^2 - 2AB \cdot BN \cdot \cos \angle ABN$ , или

$$AN^2 = (2\sqrt{6})^2 + 4^2 - 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{6}}{8}, \text{ или}$$

$$AN^2 = 24 + 16 - 12 = 28, \text{ откуда } AN = 2\sqrt{7}.$$

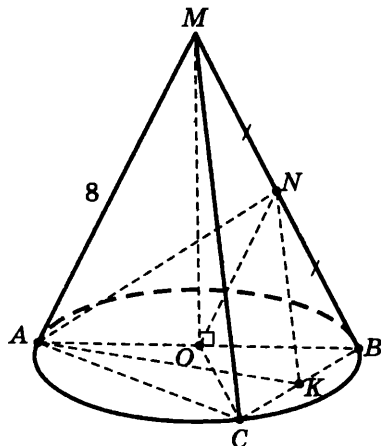
Из  $\triangle ANK$ , где  $\angle ANK = \alpha$ , получим

$$AK^2 = AN^2 + NK^2 - 2AN \cdot NK \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

$$15 = 28 + 16 - 2 \cdot 2\sqrt{7} \cdot 4 \cos \alpha, \text{ откуда}$$

$$16\sqrt{7} \cos \alpha = 29, \cos \alpha = \frac{29}{16\sqrt{7}}, \text{ т. е. } \alpha = \arccos \frac{29}{16\sqrt{7}}.$$

Ответ: б)  $\arccos \frac{29}{16\sqrt{7}}.$



## Задачи для самостоятельного решения

1. В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  с основанием  $ABC$  известны длины ребер:  $AB = 8\sqrt{3}$  и  $MA = 17$ . Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой  $AK$ , где  $K$  — точка пересечения боковой грани  $MBC$ .

2. В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  точка  $K$  — середина ребра  $MC$ ,  $N$  — середина  $AB$ .

а) Докажите, что прямая  $KN$  делит высоту  $MO$  пирамиды в отношении  $1 : 3$ .

б) Найдите угол между прямой  $KN$  и плоскостью основания  $ABC$ , если  $AB = 6$ ,  $MA = 5$ .

3. В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  сторона основания равна  $5\sqrt{2}$ . Тангенс угла между прямыми  $MD$  и  $AK$  равен  $\sqrt{2}$ , где  $K$  — середина  $MB$ . Найдите высоту  $MO$  пирамиды.

4. Образующая цилиндра перпендикулярна плоскости основания. На окружности нижнего основания отмечены точки  $A$  и  $B$ , а верхнего —  $B_1$  и  $C_1$ , где  $BB_1$  — образующая, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что  $\angle ABC_1 = 90^\circ$ .

б) Найдите угол между  $BB_1$  и  $AC_1$ , если  $AB = 6$ ,  $B_1C_1 = 8$ ,  $BB_1 = 15$ .

5. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  длины всех ребер равны 2. Точка  $K$  — середина  $AA_1$ .

а) Докажите, что  $BK \perp B_1C$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $BK$  и  $B_1C$ .

6. Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $O_1$  — центр основания  $ABCD$ , а точка  $O_2$  — центр боковой грани  $CC_1 D_1 D$ .

а) Докажите, что прямые  $A_1 O_1$  и  $B_1 O_2$  — скрещивающиеся.

б) Найдите расстояние между прямыми  $A_1 O_1$  и  $B_1 O_2$ , если длина ребра куба равна 2.

7. Дана прямая треугольная призма  $ABCA_1B_1C_1$ .

а) Докажите, что линия пересечения плоскостей  $ABC_1$  и  $A_1B_1C$  параллельна основаниям призмы.

б) Найдите угол между  $(ABC_1)$  и  $(A_1B_1C)$ , если известно, что  $AA_1 = 3$ ,  $AB = \sqrt{5}$ ,  $BC = 2$ ,  $AC = 1$ .

8. Дан конус с вершиной  $M$ . Высота конуса  $MO = 1$ , образующая равна 2. В основании конуса провели диаметр  $AB$  и перпендикулярную ему хорду  $CD$ . Известно, что расстояние от хорды  $CD$  до центра основания  $O$  равно 1.

а) Докажите, что  $\triangle MCD$  — прямоугольный.

б) Найдите сумму объемов  $ACMB$  и  $BAMD$ .

9. В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  сторона основания  $AB = 2$ , а боковое ребро  $MA = \sqrt{5}$ . Через точки  $M$ ,  $A$  и середину  $BC$  — точку  $E$  проведено сечение.

а) Найдите площадь сечения.

б) Найдите косинус угла между сечением и плоскостью основания  $ABC$ .

10. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$   $O$  — точка пересечения  $A_1 D$  и  $AD_1$ .

а) Докажите, что  $(OB_1 C_1) \perp (CEE_1)$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $A_1 B_1$  и  $BD_1$ , если  $AB = 1$ ,  $AA_1 = 3$ .

11. В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $AA_1 = AB = 6$ ,  $AD = 4$ . Точка  $K$  — середина  $AB$ , точка  $M$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $DM : D_1 D = 2 : 3$ .

а) Докажите, что  $BD_1 \parallel (MKC)$ .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $MKC$ .

12. Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды  $MABCD$  равна 108, а полной поверхности равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину  $M$  этой пирамиды, и диагональ ее основания.

13. В правильной четырехугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  сторона основания  $AB = 8$ , боковое ребро  $AA_1 = 6$ . Через точки  $A$  и  $C$  перпендикулярно  $BD_1$  проведена плоскость  $\alpha$ .

а) Докажите, что плоскость пересекает ребро  $B_1 C_1$  в точке  $K$  так, что  $KB_1 : KC_1 = 7 : 9$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $\alpha$  и  $ACC_1$ .

**14.** В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 5. На ребре  $MC$  отмечена точка  $K$  так, что  $MK : KC = 7 : 18$ .

а) Докажите, что  $(MBC) \perp (ABK)$ .

б) Найдите объем меньшей части пирамиды  $MABC$ , на которые ее делит плоскость  $ABK$ .

**15.** Длины всех ребер правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  равны  $\sqrt{133}$ .

а) Постройте сечение призмы плоскостью  $AFC_1$ .

б) Найдите  $S_{\text{сеч.}}$ .

**16.** Основанием пирамиды  $MABCD$  является трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD = 25$ ,  $BC = 7$  и острым углом  $BAD$ , равным  $\arccos 0,6$ . Каждое боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом  $60^\circ$ .

а) Докажите, что существует точка  $M$ , одинаково удаленная от всех вершин пирамиды (центр описанной сферы).

б) Найдите объем пирамиды.

**17.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $M$  — середина ребра  $C_1 D_1$ ,  $N$  — середина ребра  $AD$ ,  $K$  — середина ребра  $CC_1$ .

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ .

б) Найдите площадь полученного сечения, если ребро куба равно 6.

**18.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Ребро куба равно 4. Через середины ребер  $AB$  и  $BC$  параллельно прямой  $BD_1$  проведена плоскость.

а) Постройте сечение куба этой плоскостью.

б) Найдите площадь полученного сечения.

**19.** Основанием прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является ромб,  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  — боковые ребра. В призму вписан шар радиуса 1.

а) Постройте плоскость, проходящую через вершины  $A$ ,  $B$ ,  $C_1$ .

б) Найдите площадь сечения призмы этой плоскостью, если  $\angle BAD = 60^\circ$ .

**20.** Высота правильной треугольной пирамиды  $MABC$  равна 1. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Через сторону основания  $AB$  и точку  $D$  — середину бокового ребра — проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение — равнобедренный треугольник.

б) Найдите площадь полученного сечения.

**21.** Основанием пирамиды  $MABC$  служит равнобедренный  $\triangle ABC$  с основанием  $AB$ , площадь которого равна 3, а  $\angle ACB = 30^\circ$ .  $MO$  — высота пирамиды. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания одинаковые углы.

а) Докажите, что  $\triangle AOB$  — правильный.

б) Найдите тангенс этого угла, если объем пирамиды равен 1.

**22.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  расстояние от центра основания  $O$  до боковой грани равно  $OK = \sqrt{2}$  и до бокового ребра  $MA$  равно  $OE = \sqrt{3}$ .

а) Докажите, что  $\triangle MEO \sim \triangle AOE$ .

б) Найдите двугранный угол при основании пирамиды.

**23.** Боковые ребра треугольной пирамиды  $MABC$  имеют равные длины и равны 6. Из трех плоских углов, образованных этими ребрами при вершине пирамиды, два содержат по  $45^\circ$ , а третий —  $60^\circ$ . Плоскость, проходящая через  $AB$  и точку  $K \in MC$ , перпендикулярна ребру  $MC$ .

а) Докажите, что  $\triangle AMB$  — прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды.

**24.** Через концы трех ребер, выходящих из вершин  $B$ ,  $D$ ,  $A_1$  и  $C_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , ребро которого равно 2, проведены плоскости.

а) Докажите, что полученная фигура — правильный тетраэдр.

б) Найдите его объем.

**25.** Через сторону основания  $AD$  правильной четырехугольной пирамиды  $MABCD$  проведена плоскость, отсекающая от противоположной грани  $\triangle MEF$ , площадь которого равна 4. Боковая поверхность пирамиды равна 25.

а) Докажите, что  $\triangle MEF \sim \triangle MBC$ .

б) Найдите боковую поверхность пирамиды, которая отсечена проведенной плоскостью от данной пирамиды.

**26.** Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды  $MABCD$  равна 4, боковое ребро составляет с высотой пирамиды угол  $30^\circ$ . Через вершину основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противоположному боковому ребру.

- а) Докажите, что  $\triangle MBD$  — равносторонний.  
 б) Найдите объем части пирамиды, прилегающей к вершине.

**27.** Основанием пирамиды  $MABC$  служит равнобедренный треугольник, где  $AB = AC = 10$ ,  $BC = 12$ . Грань  $MBC$  перпендикулярна основанию и  $MB = MC$ .

- а) Докажите, что  $V = \frac{RS}{3}$ , где  $V$  — объем пирамиды,  $S$  — ее полная поверхность,  $R$  — радиус шара, вписанного в пирамиду.  
 б) Найдите радиус  $R$  шара, если высота пирамиды  $MO = 1,4$ .

**28.** На ребре  $MA$  правильной четырехугольной пирамиды  $MABCD$  с основанием  $ABCD$  отмечена точка  $K$ , причем  $MK : KA = 5 : 1$ . Точки  $E$  и  $F$  — середины ребер  $BC$  и  $AD$  соответственно.

- а) Докажите, что сечение пирамиды плоскостью  $KEF$  — равнобедренная трапеция.  
 б) Найдите отношение объемов многогранников, на которые разбивает пирамиду плоскость  $KEF$ .

**29.** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCA_1B_1C_1D_1$   $M$  — точка пересечения диагоналей грани  $AA_1B_1B$ ,  $N$  — точка пересечения диагоналей грани  $BB_1C_1C$ , точка  $E$  — середина ребра  $CD$ .

- а) Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью  $MNE$  — пятиугольник.  
 б) Найдите отношение длин отрезков, на которые делит плоскость  $MNE$ , если известно, что  $AB = BC = \frac{1}{\sqrt{2}} AA_1$ .

**30.** Основанием прямой четырехугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1D_1$  является квадрат  $ABCD$ , сторона которого равна  $3\sqrt{2}$ . Высота призмы равна  $2\sqrt{7}$ . Точка  $M$  — середина ребра  $BB_1$ . Через точки  $N$  и  $C_1$  проведена плоскость  $\alpha$ , параллельная прямой  $BD_1$ .

- а) Докажите, что сечение призмы плоскостью  $\alpha$  — равнобедренный треугольник.  
 б) Найдите периметр треугольника.

**31.** Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является прямоугольный  $\triangle ABC$ , где  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 25$ . Диагонали боковых граней  $AA_1B_1B$  и  $BB_1C_1C$  равны соответственно 26 и 10.

- а) Докажите, что  $\triangle A_1BC_1$  — прямоугольный.  
 б) Найдите объем пирамиды  $AA_1C_1C$ .



**32.** На окружности основания конуса с вершиной  $M$  отмечены точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  так, что  $AB = BC$ . Медиана  $AK$   $\triangle AMC$  пересекает высоту конуса в точке  $N$ .

а) Докажите, что  $\angle KOB = 90^\circ$ , где точка  $O$  — середина  $AC$ .

б) Найдите угол между прямыми  $AK$  и  $MB$ , если  $MA = 2$ ,  $AC = \sqrt{6}$ .

**33.** Радиус основания конуса с вершиной  $M$  и центром основания  $O$  равен 5, высота конуса  $MO = \sqrt{51}$ . Точка  $K$  — середина образующей  $MA$ , а точки  $N$  и  $B$  лежат в плоскости основания, причем  $KN \parallel MB$ , где  $MB$  — образующая конуса.

а) Докажите, что  $\angle ANO = 90^\circ$ .

б) Найдите угол между  $BK$  и плоскостью основания конуса, если  $AB = 8$ .

**34.** Основание прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  — прямоугольный  $\triangle ABC$  с прямым углом при вершине  $A$ , а боковая грань  $AA_1C_1C$  — квадрат.

а) Докажите, что  $CB_1 \perp AC_1$ .

б) Найдите расстояние между прямыми  $CB_1$  и  $AC_1$ , если  $AC = 2$ ,  $AB_1 = 2\sqrt{3}$ .

**35.** В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной  $M$  стороны основания  $ABCDEF$  равны 6, а боковые ребра равны 12. Точки  $T$  и  $K$  — середины ребер  $MF$  и  $ME$  соответственно.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью  $ВТК$ .

б) Найдите площадь полученного сечения.

**36.** Точки  $E$  и  $F$  — середины ребер соответственно  $CC_1$  и  $B_1C_1$  треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$ .

а) Докажите, что плоскость  $EBA_1$  делит отрезок  $AF$  в отношении 4 : 3, считая от точки  $A$ .

б) В каком отношении плоскость  $EBA_1$  делит объем призмы?

**37.** В окружность основания конуса с вершиной  $M$  вписан правильный шестиугольник  $ABCDEF$ .

а) Докажите, что объем пирамиды  $MABD$  в 2 раза больше объема пирамиды  $MDEF$ .

б) Найдите площадь сечения конуса плоскостью  $ABM$ , если радиус основания конуса равен 6, а длина образующей равна 9.

**38.** Угол при вершине осевого сечения конуса равен  $\arccos \frac{7}{8}$ .

а) Докажите, что площадь полной поверхности конуса в 5 раз больше площади его основания.

б) Найдите угол в развертке боковой поверхности.

**39.** Высота конуса равна 4, а радиус основания равен  $\sqrt{34}$ .

а) Докажите, что наибольшая площадь сечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину, равна 25.

б) Найдите расстояние от центра основания конуса до этой плоскости.

**40.** Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна  $4\sqrt{2}$  и образует с боковыми гранями углы  $30^\circ$  и  $45^\circ$ .

а) Докажите, что одна из этих граней — квадрат.

б) Найдите объем параллелепипеда.

**41.** В основании прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит равнобедренный  $\triangle ABC$ , где  $AB = BC$ . Точки  $E$  и  $F$  — середины ребер  $A_1B_1$  и  $AC$  соответственно.

а) Докажите, что  $EF = BE$ .

б) Найдите угол между прямой  $EF$  и плоскостью  $ABB_1$ , если  $AB = 8$ ,  $AC = 6$  и  $AA_1 = 3$ .

**42.** Образующая цилиндра перпендикулярна плоскости основания. На окружности нижнего основания отмечены точки  $A$  и  $B$ , а на окружности верхнего основания — точки  $B_1$  и  $C_1$ , где  $BB_1$  — образующая цилиндра, а отрезок  $AC_1$  пересекает ось цилиндра.

а) Докажите, что  $\angle ABC_1 = 90^\circ$ .

б) Найдите угол между  $BB_1$  и  $AC_1$ , если  $AB = 6$ ,  $B_1C_1 = 8$ ,  $BB_1 = 15$ .

**43.** Дан конус с вершиной  $M$ . Высота конуса  $MO = 1$ , образующая равна 2. В основании конуса провели диаметр  $AB$  и перпендикулярную ему хорду  $CD$ . Известно, что расстояние от хорды  $CD$  до центра основания  $O$  равно 1.

а) Докажите, что  $\triangle MCD$  — прямоугольный.

б) Найдите сумму объемов  $ACMB$  и  $BAMD$ .

**44.** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $AA_1 = AB = 6$ ,  $AD = 4$ . Точка  $K$  — середина  $AB$ , точка  $M$  делит ребро  $DD_1$  в отношении  $DM : D_1 D = 2 : 3$ .

а) Докажите, что  $BD_1 \parallel (MKC)$ .

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью  $MKC$ .

**45.** Длины всех ребер правильной шестиугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равны  $\sqrt{133}$ .

а) Постройте сечение призмы плоскостью  $AFC_1$ .

б) Найдите  $S_{\text{сеч}}$ .

**46.** Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Точка  $M$  — середина ребра  $C_1 D_1$ ,  $N$  — середина ребра  $AD$ ,  $K$  — середина ребра  $CC_1$ .

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $N$  и  $K$ .

б) Найдите площадь полученного сечения, если ребро куба равно 6.

**47.** Высота правильной треугольной пирамиды  $MABC$  равна 1. Боковая грань составляет с плоскостью основания угол  $60^\circ$ . Через сторону основания  $AB$  и точку  $D$  — середину бокового ребра проведена плоскость.

а) Докажите, что сечение — равнобедренный треугольник.

б) Найдите площадь полученного сечения.

**48.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  расстояние от центра основания  $O$  до боковой грани равно  $OK = \sqrt{2}$  и до бокового ребра  $MA$  равно  $OE = \sqrt{3}$ .

а) Докажите, что  $\triangle MEO \cup \triangle AOE$ .

б) Найдите двугранный угол при основании пирамиды.

**49.** Основанием пирамиды  $MABC$  служит равнобедренный треугольник, где  $AB = AC = 10$ ,  $BC = 12$ . Грань  $MBC$  перпендикулярна основанию и  $MB = MC$ .

а) Докажите, что  $V = \frac{RS}{3}$ , где  $V$  — объем пирамиды,  $S$  — ее полная поверхность,  $R$  — радиус шара, вписанного в пирамиду.

б) Найдите радиус  $R$  шара, если высота пирамиды  $MO = 1,4$ .

**50.** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$   $M$  — точка пересечения диагоналей грани  $AA_1 B_1 B$ ,  $N$  — точка пересечения диагоналей грани  $BB_1 C_1 C$ , точка  $E$  — середина ребра  $CD$ .

а) Докажите, что сечение параллелепипеда плоскостью  $MNE$  — пятиугольник.

б) Найдите отношение длин отрезков, на которые делит плоскость  $MNE$ , если известно, что  $AB = BC = \frac{1}{\sqrt{2}} AA_1$ .

**51.** Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1 B_1 C_1$  является прямоугольный  $\triangle ABC$ , где  $\angle C = 90^\circ$ ,  $AB = 25$ . Диагонали боковых граней  $AA_1 B_1 B$  и  $BB_1 C_1 C$  равны соответственно 26 и 10.

а) Докажите, что  $\triangle A_1 B_1 C_1$  — прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды  $AA_1 C_1 C$ .

**52.** На окружности основания конуса с вершиной  $M$  отмечены точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  так, что  $AB = BC$ . Медиана  $AK$   $\triangle AMC$  пересекает высоту конуса в точке  $N$ .

а) Докажите, что  $\angle KOB = 90^\circ$ , где точка  $O$  — середина  $AC$ .

б) Найдите угол между прямыми  $AK$  и  $MB$ , если  $AM = 2$ ,  $AC = \sqrt{6}$ .

**53.** В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной  $M$  стороны основания  $ABCDEF$  равны 6, а боковые ребра равны 12. Точки  $T$  и  $K$  — середины ребер  $MF$  и  $ME$  соответственно.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью  $ВТК$ .

б) Найдите площадь полученного сечения.

**54.** Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна  $4\sqrt{2}$  и образует с боковыми гранями углы  $30^\circ$  и  $45^\circ$ .

а) Докажите, что одна из этих граней — квадрат.

б) Найдите объем параллелепипеда.

**55.** Угол при вершине осевого сечения конуса равен  $\arccos \frac{7}{8}$ .

а) Докажите, что площадь полной поверхности конуса в 5 раз больше площади его основания.

б) Найдите угол в развертке боковой поверхности.

**56.** В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  длина диагонали равна 3. На луче  $A_1 C$  отмечена точка  $M$  так, что  $A_1 M = 4$ .

а) Докажите, что  $MBDC_1$  — правильный тетраэдр.

б) Найдите длину отрезка  $AM$ .

**57.** Основанием прямой треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  является прямоугольный  $\triangle ABC$  ( $\angle C = 90^\circ$ ). Диагонали боковых граней  $AA_1B_1B$  и  $BB_1C_1C$  равны 15 и 9 соответственно,  $AB = 13$ .

а) Докажите, что  $\triangle A_1B_1C_1$  — прямоугольный.

б) Найдите объем пирамиды  $AA_1C_1B$ .

**58.** Основанием прямой четырехугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1D_1$  является ромб  $ABCD$ ,  $AB = AA_1$ .

а) Докажите, что прямые  $A_1C$  и  $BD$  перпендикулярны.

б) Найдите объем призмы, если  $BD = A_1C = 2$ .

**59.** В правильной треугольной пирамиде  $MABC$   $E$  — середина  $AB$ ,  $F$  — середина  $MC$ .

а) Докажите, что проекции отрезков  $EF$  и  $AM$  на плоскость  $ABC$  равны.

б) Найдите объем пирамиды  $MABC$ , если  $AM = 8$ ,  $EF = 5$ .

**60.** В правильной шестиугольной пирамиде  $MABCDEF$  сторона основания  $AB = 7$ , а боковое ребро  $MA = 10$ . Точка  $K$  лежит на ребре  $BC$ , причем  $BK = 4$ , точка  $T$  лежит на ребре  $MC$ , причем  $MT = 7$ .

а) Докажите, что плоскость  $KTD$  перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

б) Найдите объем пирамиды  $CDTK$ .

## § 3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ

### 3.1. Угол между двумя прямыми

Углом между скрещивающимися прямыми называется угол между пересекающимися параллельными им прямыми.

Применяя векторно-координатный способ, надо иметь в виду, что если  $\varphi$  — угол между скрещивающимися прямыми, то  $\cos \varphi = |\cos(\vec{a}, \vec{b})|$ ,

где  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  — векторы, коллинеарные заданным скрещивающимся прямым.

При решении задач указанным методом будем придерживаться следующего алгоритма.

1. Вводим прямоугольную систему координат.
2. Находим координаты направляющих векторов данных прямых.
3. Находим косинус угла между направляющими векторами по формуле

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

где  $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ ,  $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$ .

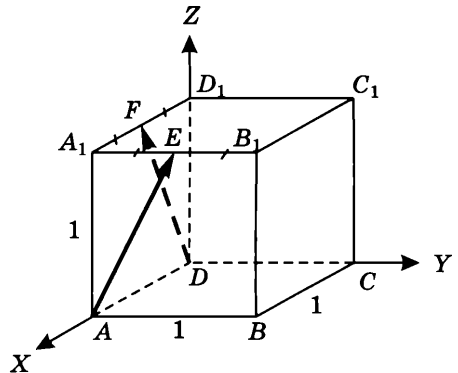
*Замечание.* За угол между прямыми принимают меньший из двух углов, образованный этими прямыми, значит, косинус угла между прямыми должен быть больше нуля, и он равен модулю косинуса угла между направляющими векторами.

Рассмотрим задачи на нахождение угла между прямыми методом координат.

**Пример 1.** В единичном кубе  $A...D_1$  найдите угол между прямыми  $DF$  и  $AE$ , где точки  $F$  и  $E$  — середины ребер соответственно  $A_1D_1$  и  $A_1B_1$ .

*Решение.*

Введем прямоугольную систему координат, приняв точку  $D$  за начало.



Тогда имеем  $D(0; 0; 0)$ ,  $A(1; 0; 0)$ ,  $E\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$ ,  $F\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ .

Теперь запишем координаты векторов  $\overline{AE}$  и  $\overline{DF}$ :  $\overline{AE}\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ ,  $\overline{DF}\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ .

Пусть угол между векторами  $\overline{AE}$  и  $\overline{DF}$  равен  $\alpha$ , тогда

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{DF}}{|\overline{AE}| \cdot |\overline{DF}|}.$$

$$\text{Но } \overline{AE} \cdot \overline{DF} = 0 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1; \quad |\overline{AE}| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$|\overline{DF}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } \cos \alpha = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{4}{5}, \text{ откуда } \alpha = \arccos \frac{4}{5}.$$

Ответ:  $\arccos \frac{4}{5}$ .

**Пример 2.** В прямоугольном параллелепипеде  $A...D_1$   $AB = 2$ ,  $AD = 4$ ,  $AA_1 = 3$ , точка  $K$  — середина ребра  $AB$ . Найдите угол между прямыми  $A_1C_1$  и  $B_1K$ .

*Решение.*

Введем пространственную систему координат, тогда  $A_1(4; 2; 3)$ ,

$C_1(0; 0; 3)$ . Следовательно,  $\overline{A_1C_1}\{-4; -2; 0\}$ .

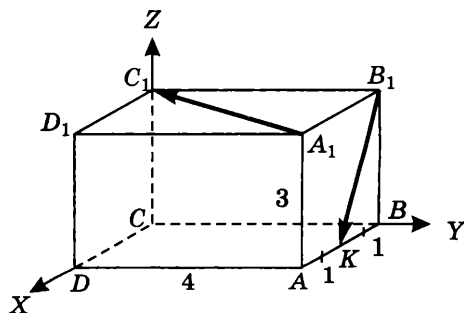
Так как по условию задачи  $K$  — середина  $AB$ , то  $A_1K = KB = 1$ .

Значит,  $K(4; 1; 0)$ ,  $B(4; 0; 3)$ .

Значит,  $\overline{B_1K}\{0; 1; -3\}$ .

Пусть искомым угол между прямыми  $A_1C_1$  и  $B_1K$  равен  $\alpha$ . Учтывая, что  $\cos \alpha \geq 0$ , получим

$$\cos \alpha = \frac{|\overline{A_1C_1} \cdot \overline{B_1K}|}{|\overline{A_1C_1}| \cdot |\overline{B_1K}|}.$$



$$\text{Но } \overrightarrow{A_1C_1} \cdot \overrightarrow{B_1K} = -4 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 + 0 \cdot (-3) = -2;$$

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; \quad \overrightarrow{B_1K} = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}.$$

$$\text{Значит, } \cos \alpha = \frac{2}{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot 10} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}, \text{ откуда } \alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

*Замечание.* Можно показать, что если  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{10}$ , то  $\operatorname{tg} \alpha = 7$  (дока-

зать самостоятельно).

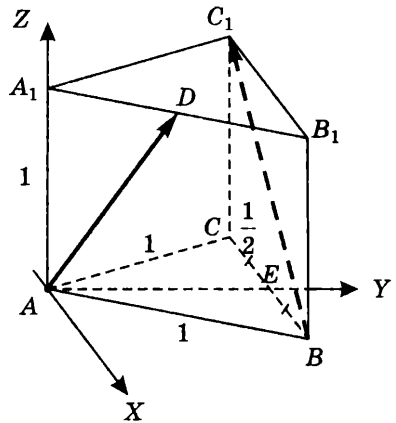
**Пример 3.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $AD$  и  $BC_1$ , где  $D$  — середина ребра  $A_1B_1$ .

*Решение.*

Точку  $A$  поместим в начало прямоугольной системы координат так, чтобы ось  $X$  была параллельна стороне  $BC$ , а ось  $Y$  — перпендикулярна ей.

$AE$  — высота и медиана  $\triangle ABC$ , тогда

$$CE = BE = \frac{1}{2}.$$



$$\text{Значит, } A(0; 0; 0), A_1(0; 0; 1), B\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right),$$

$$B_1\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right), C_1\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right), \text{ где } AE = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Поскольку по условию задачи  $D$  — середина  $A_1B_1$ , то

$$x_D = \frac{x_{A_1} + x_{B_1}}{2} = \frac{0 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}; \quad y_D = \frac{y_{A_1} + y_{B_1}}{2} = \frac{0 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4};$$

$$z_D = \frac{z_{A_1} + z_{B_1}}{2} = \frac{1 + 1}{2} = 1.$$

$$\text{Тогда } D\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1\right).$$



Теперь находим координаты векторов  $\overrightarrow{AD}$  и  $\overrightarrow{BC_1}$ :  $\overrightarrow{AD}\left(\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{4}; 1\right)$ ,

$\overrightarrow{BC_1}(-1; 0; 1)$ .

Пусть  $\alpha$  — искомый угол между прямыми  $AD$  и  $BC_1$ , тогда

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC_1}|}{|\overrightarrow{AD}| \cdot |\overrightarrow{BC_1}|}, \text{ где } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC_1} = \frac{1}{4} \cdot (-1) + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 0 + 1 \cdot 1 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4};$$

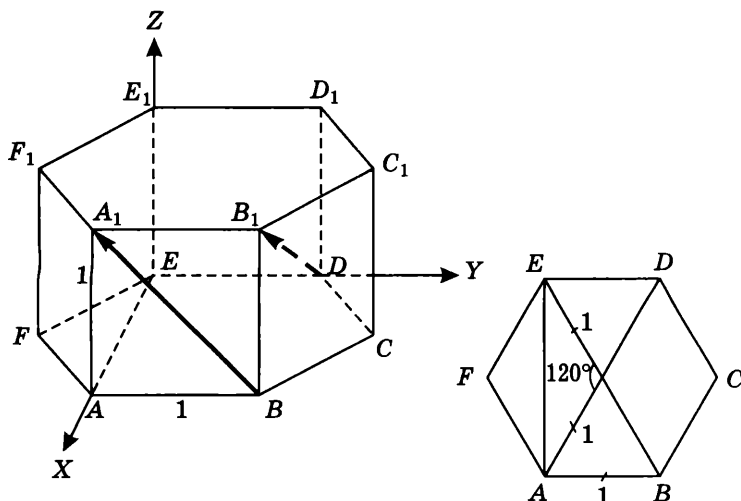
$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{3}{16} + 1} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

$$|\overrightarrow{BC_1}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\text{Следовательно, } \cos \alpha = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{10}}, \text{ откуда } \alpha = \arccos \frac{3}{2\sqrt{10}}.$$

Ответ:  $\arccos \frac{3}{2\sqrt{10}}$ .

**Пример 4.** В правильной шестиугольной призме  $A...F_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $BA_1$  и  $DB_1$ .



**Решение.**

Введем систему координат.

Длину отрезка  $AE$  найдем из  $\triangle AOE$  по теореме косинусов, где  $\angle AOE = 120^\circ$ ,  $AO = OE = AB = 1$ , тогда

$$AE^2 = OA^2 + OE^2 - 2 \cdot OA \cdot OE \cdot \cos 120^\circ, \text{ или}$$

$$AE^2 = 2(1 - \cos 120^\circ) = 4 \sin^2 60^\circ, \text{ откуда } AE = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}.$$

Теперь найдем координаты точек  $A_1$  и  $B$ .

$$A_1(0; \sqrt{3}; 1), B(1; \sqrt{3}; 0).$$

Следовательно,  $\overrightarrow{BA_1}(-1; 0; 1)$ .

Аналогично находим координаты вектора  $\overrightarrow{DB_1}$ , где  $D(1; 0; 0)$ ,  $B_1(1; \sqrt{3}; 1)$ , тогда  $\overrightarrow{DB_1}(0; \sqrt{3}; 1)$ .

Пусть  $\alpha$  — искомый угол между прямыми  $BA_1$  и  $DB_1$ , тогда

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{DB_1}|}{|\overrightarrow{BA_1}| \cdot |\overrightarrow{DB_1}|}.$$

$$\text{Но } \overrightarrow{BA_1} \cdot \overrightarrow{DB_1} = -1 \cdot 0 + 0 \cdot \sqrt{3} + 1 \cdot 1 = 1;$$

$$|\overrightarrow{BA_1}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \quad |\overrightarrow{DB_1}| = \sqrt{0^2 + (\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2.$$

$$\text{Следовательно, } \cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \text{ откуда}$$

$$\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

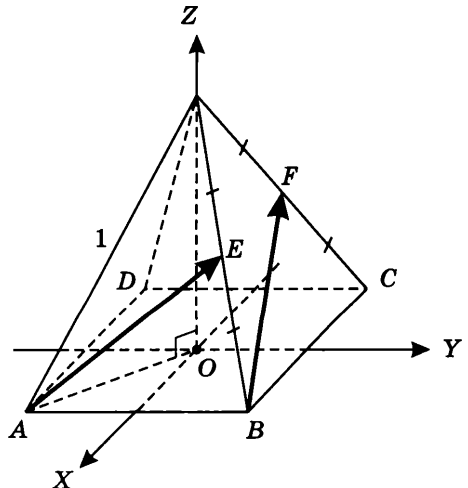
$$\text{Ответ: } \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

**Пример 5.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямыми  $AE$  и  $BF$ , где точки  $E$  и  $F$  — середины ребер  $BM$  и  $CM$  соответственно.

*Решение.*

Поместим начало координат в точке  $O$  — центре основания пирамиды, а оси  $X$  и  $Y$  проведем параллельно сторонам основания. Найдем координаты точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ :

$$A\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right), B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), C\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right).$$



Для нахождения координат вершины  $M$  пирамиды найдем  $OM$  из прямоугольного  $\triangle AOM$ , где  $AO = R = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , тогда

$$MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит,  $M\left(0; 0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .

Поскольку точки  $E$  и  $F$  — середины соответственно отрезков  $MB$  и  $MC$ , то по формулам для нахождения координат середины отрезка имеем  $E\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ ,  $F\left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ .

Теперь найдем координаты векторов  $\overrightarrow{AE}$  и  $\overrightarrow{BF}$ :

$$\overrightarrow{AE}\left(-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right), \quad \overrightarrow{BF}\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Пусть  $\alpha$  — угол между векторами  $\overrightarrow{AE}$  и  $\overrightarrow{BF}$ , тогда  $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{BF}|}$ .

$$\text{Но } \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = -\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \frac{2}{16} = \frac{1}{2};$$

$$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{9}{16} + \frac{2}{16}} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$|\overrightarrow{BF}| = \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } \cos \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}, \text{ откуда } \alpha = \arccos \frac{2}{3}.$$

Ответ:  $\arccos \frac{2}{3}$ .

### 3.2. Угол между прямой и плоскостью

Если прямая  $a$  пересекает плоскость  $\alpha$  и не перпендикулярна  $\alpha$ , то углом между прямой  $a$  и плоскостью  $\alpha$  называется угол между прямой  $a$  и ее проекцией на плоскость  $\alpha$ .

Если  $a \parallel \alpha$ , то угол равен  $0^\circ$ , если  $a \perp \alpha$ , то угол равен  $90^\circ$ .

При решении задач с помощью метода координат нам будут необходимы следующие теоретические сведения:

1. Уравнение плоскости  $ax + by + cz + d = 0$ , где  $a, b, c$  — координаты вектора нормали к плоскости, т. е. вектора, перпендикулярного плоскости.

2. Косинус угла между векторами  $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$  и  $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$  определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \text{ где } \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \text{ — скалярное произведе-}$$

ние векторов,  $\vec{a} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ ,  $\vec{b} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$  — длины (модули) векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

3. Ненулевой вектор  $\vec{M}(a_1; b_1; c_1)$ , лежащий на некоторой прямой  $p$  или параллельный ей, называется *направляющим вектором прямой*.

4. Синус угла  $\beta$  между прямой, направляющий вектор которой имеет координаты  $\vec{M}(a_1; b_1; c_1)$ , и плоскостью, которая задается уравнением  $ax + by + cz + d = 0$ , определяется по формуле

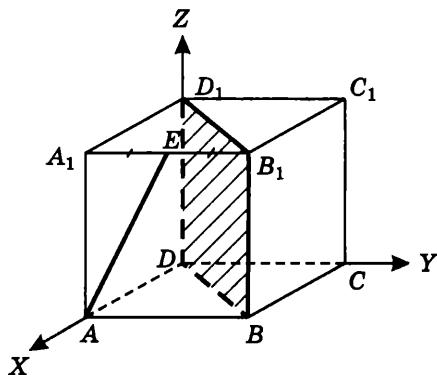
$$\sin \beta = \cos \gamma = \frac{aa_1 + bb_1 + cc_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}}.$$

**Пример 6.** В кубе  $A \dots D_1$  найдите угол между прямой  $AE$  и плоскостью  $BDD_1$ , где  $E$  — середина ребра  $A_1B_1$ .

*Решение.*

Точку  $D$  примем за начало прямоугольной системы координат, а оси  $X, Y$  и  $Z$  направим по ребрам  $DA, DC$  и  $DD_1$ .

Пусть  $\alpha$  — искомый угол между прямой  $AE$  и плоскостью  $BDD_1$ .



Известно, что  $\sin \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{a}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{a}|}$ , где  $\vec{a}$  — вектор, лежащий на прямой  $m$

(или параллельный ей),  $\vec{n}$  — нормаль к плоскости.

Выпишем координаты необходимых вершин куба:  $A(1; 0; 0)$ ,  
 $B(1; 1; 0)$ ,  $C(0; 1; 0)$ ,  $D(0; 0; 0)$ ,  $B_1(1; 1; 1)$ ,  $E\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$ .

Найдем координаты вектора  $\overrightarrow{AE}\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ .

Заметим, что плоскость  $BDD_1$  является диагональным сечением куба, значит, любой вектор, перпендикулярный ей, например,  $\overrightarrow{AC}$ , является нормалью к плоскости  $BDD_1$ , т. е.  $\overrightarrow{AC}(1; -1; 0)$ . Следовательно, искомый угол между прямой  $AE$  и плоскостью  $BDD_1$  будет

$$\text{равен } \sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AE}|},$$

$$\text{где } |\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}| = \left| 1 \cdot 0 + (-1) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 1 \right| = \frac{1}{2};$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}; \quad |\overrightarrow{AE}| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Значит, } \sin \alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \text{ откуда } \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

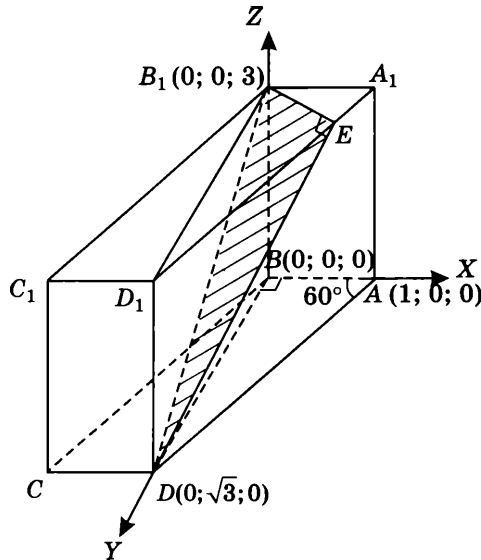
$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

**Пример 7.** В основании прямого параллелепипеда  $A...D_1$  лежит параллелограмм с острым углом  $60^\circ$ . Известно, что  $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 3$ . Найдите угол между прямой  $B_1D$  и плоскостью грани  $AA_1D_1D$ .

*Решение.*

Введем в пространстве прямоугольную систему координат, приняв за начало точку  $B(0; 0; 0)$ .

Так как  $A...D_1$  — прямой параллелепипед, то  $BB_1 \perp BA$ ,  $BB_1 \perp BD$ . Прямые  $BA$  и  $BB_1$  примем соответственно за оси  $B_x$  и  $B_z$ .



Пусть  $AB = a$ , тогда  $AD = 2a$ . Из  $\triangle ABD$  по теореме косинусов имеем  $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos 60^\circ$ , или  $BD^2 = 3a^2$ ,  $BD = a\sqrt{3}$ .

Выходит, что  $AD^2 = AB^2 + BD^2$ , т. е.  $\angle ABD = 90^\circ$ .

Следовательно, прямую  $BD$  можно принять за ось  $B_y$ . Так как  $BD = a\sqrt{3}$  и  $AB : AA_1 = 1 : 3$ , то получим  $A(1; 0; 0)$ ,  $B_1(0; 0; 3)$ ,  $D(0; \sqrt{3}; 0)$ ,  $D_1(0; \sqrt{3}; 3)$ ,  $\overline{B_1D}(0; \sqrt{3}; -3)$ . Пусть  $\vec{n}(n_1; n_2; n_3)$  — нормаль к плоскости  $AA_1D$ . Найдем координаты вектора  $\vec{n}$ .

Так как  $\vec{n} \perp (AA_1D_1)$ , то  $\vec{n} \perp \overline{DD_1}$  и  $\vec{n} \perp \overline{AD}$ .

Поскольку  $\overline{DD_1}(0; 0; 3)$ ,  $\overline{AD}(-1; \sqrt{3}; 0)$ , то получим

$$\begin{cases} 3n_3 = 0, \\ -n_1 + \sqrt{3}n_2 = 0, \end{cases} \quad n_3 = 0, \text{ полагая } n_2 = \sqrt{3}, \text{ имеем } n_1 = 3.$$

Таким образом, в качестве нормального вектора плоскости  $AA_1D$  можно взять вектор  $\vec{n}(3; \sqrt{3}; 0)$ .

Пусть  $\varphi$  — искомый угол, тогда

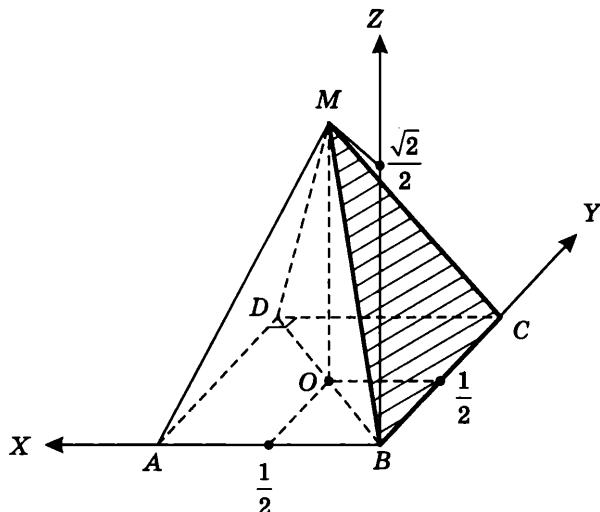
$$\sin \varphi = \left| \cos(\vec{n}, \overline{B_1D}) \right| = \frac{|3|}{\sqrt{3+9} \cdot \sqrt{3+9}} = \frac{3}{\sqrt{12} \cdot \sqrt{12}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}, \text{ откуда}$$

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \arcsin \frac{1}{4}.$$

**Замечание.** Решая задачу обычным классическим методом, получим  $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{15}}$ . Можно показать, что  $\arcsin \frac{1}{4} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{15}}$ .

**Пример 8.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой  $BD$  и плоскостью  $MBC$ .



**Решение.**

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы точка  $B$  являлась ее началом, тогда  $B(0; 0; 0)$ .

Известно, что уравнение плоскости имеет вид  $ax + by + cz + d = 0$ , где  $a, b, c$  — координаты вектора нормали к плоскости (т. е. вектора, перпендикулярного плоскости).

Запишем теперь уравнение плоскости  $MBC$ , для чего найдем координаты точек  $M$  и  $C$ , а затем подставим в уравнение плоскости.

По условию задачи все ребра равны 1, тогда  $C(0; 1; 0)$ . Остается найти координаты точки  $M$ . Для этого сначала находим координаты ее проекции на плоскость основания  $ABCD$ , а затем ее координаты по оси  $OZ$ :  $M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ . Поскольку плоскость  $MBC$  проходит через точку  $B$  (начало координат), то  $d = 0$ .

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} b = 0, \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b + \frac{\sqrt{2}}{2}c = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0, \\ a + \sqrt{2}c = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} b = 0, \\ a = -\sqrt{2}c. \end{cases}$$

Следовательно, уравнение плоскости имеет вид

$$-\sqrt{2}cx + 0 \cdot y + cz = 0, \text{ или } -\sqrt{2}x + z = 0.$$

Итак, вектор нормали к плоскости  $MBC$  имеет координаты  $\vec{n}(-\sqrt{2}; 0; 1)$ . Так как  $B(0; 0; 0)$ ,  $D(1; 1; 0)$ , то  $\overrightarrow{BD}(1; 1; 0)$ .

Пусть  $\alpha$  — искомый угол между прямой  $BD$  и плоскостью  $MBC$ ,

$$\text{тогда } \sin \alpha = \left| \frac{-\sqrt{2} \cdot 1}{\sqrt{(-\sqrt{2})^2 + 1} \cdot \sqrt{1+1}} \right| = \left| \frac{-\sqrt{2} \cdot 1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Ответ: } \alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

### 3.3. Угол между двумя плоскостями

1. Угол между плоскостями равен углу между прямыми, содержащими нормали к этим плоскостям.

2. В уравнении плоскости  $ax + by + cz + d = 0$  коэффициенты  $(a; b; c)$  являются координатами вектора нормали к плоскости.

3. Угол между плоскостями определяется по формуле  $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ .

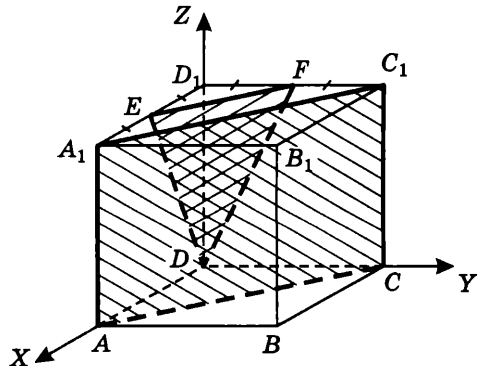
4. Поскольку при пересечении двух плоскостей образуются 4 угла, то необходимо взять меньший из них. В этом случае  $\cos \varphi \geq 0$ .

**Пример 9.** В кубе  $A...D_1$  найдите угол между плоскостями  $DEF$  и  $ACC_1$ , где  $E$  и  $F$  — середины ребер соответственно  $A_1D_1$  и  $D_1C_1$ .

*Решение.*

Очевидно, что плоскости  $AEF$  и  $ACC_1$  пересекаются вне куба. При обычном способе решения нам пришлось бы строить их линию пересечения. Однако векторно-координатный метод значительно упрощает решение.

Для этого точку  $D$  примем за начало координат, а ребра куба  $DA$ ,  $DC$  и  $DD_1$  примем соответственно за оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .





Известно, что угол  $\alpha$  между плоскостями равен углу между нормальными к этим плоскостям, т. е.  $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ .

Поскольку при пересечении двух плоскостей образуются 4 угла, то берем меньший из них. В этом случае косинус угла будет неотрицателен.

Отметим координаты нужных нам точек:  $D(0; 0; 0)$ ,  $B(1; 1; 0)$ ,  $E\left(\frac{1}{2}; 0; 1\right)$ ,  $F\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ , тогда  $\vec{n}_1 = \overrightarrow{DB}(1; 1; 0)$ .

Составим уравнение плоскости  $DEF$ :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Подставим вместо  $x, y, z$  соответствующие координаты точек  $D, E$  и  $F$ :

$$\begin{cases} 0 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C + D = 0, \\ \frac{1}{2} \cdot A + 0 \cdot B + 1 \cdot C + D = 0, \\ 0 \cdot A + \frac{1}{2} \cdot B + 1 \cdot C + D = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} D = 0, \\ \frac{1}{2}A + C = 0, \\ \frac{1}{2}B + C = 0. \end{cases}$$

Удобно взять  $C = -1$ , тогда  $A = B = 2$ . Уравнение плоскости  $DEF$  примет вид  $2x + 2y - z = 0$ , тогда нормаль к плоскости  $DEF$  будет  $\vec{n}_2(2; 2; -1)$ .

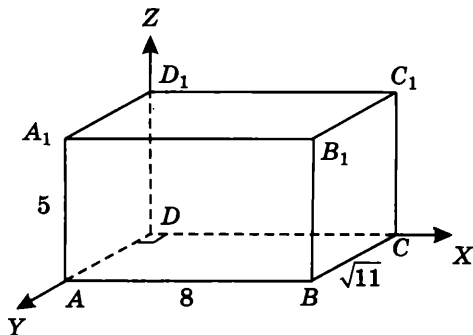
$$\text{Следовательно, } \cos \alpha = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{тогда } \alpha = \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \arccos \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

**Пример 10.** Основанием прямой четырехугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является прямоугольник  $ABCD$ , в котором  $AB = 8$ ,  $BC = \sqrt{11}$ .

Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину



ребра  $AB$  перпендикулярно прямой  $BD_1$ , если расстояние между прямыми  $A_1C_1$  и  $BD$  равно 5.

*Решение.*

Заметим, что прямые  $A_1C_1$  и  $BD$  лежат в параллельных плоскостях  $ABCD$  и  $A_1B_1C_1D_1$ , значит, расстояние между ними равно расстоянию между плоскостями, т. е. высоте призмы. Значит,  $AA_1 = 5$ .

Введем прямоугольную систему координат, приняв точку  $D$  за начало координат. Искомый угол между плоскостями равен углу между прямыми, содержащими нормали к этим плоскостям. Следовательно, нам надо найти угол между вектором  $\overrightarrow{BD_1}$  и вектором  $\overrightarrow{DD_1}$  (это вектор нормали к плоскости основания).

Находим  $D_1(0; 0; 5)$ ,  $B(8; \sqrt{11}; 0)$ ,  $\overrightarrow{BD_1}(8; \sqrt{11}; -5)$ ,  $\overrightarrow{DD_1}(0; 0; -5)$ .

Пусть  $\alpha$  — искомый угол между векторами  $\overrightarrow{BD_1}$  и  $\overrightarrow{DD_1}$ , тогда

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{DD_1}|}{|\overrightarrow{BD_1}| \cdot |\overrightarrow{DD_1}|} = \frac{8 \cdot 0 + \sqrt{11} \cdot 0 + (-5) \cdot (-5)}{\sqrt{8^2 + (\sqrt{11})^2 + (-5)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + (-5)^2}} = \\ &= \frac{25}{\sqrt{64 + 11 + 25} \cdot 5} = \frac{5}{\sqrt{100}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \text{ откуда } \alpha = 60^\circ. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $60^\circ$ .

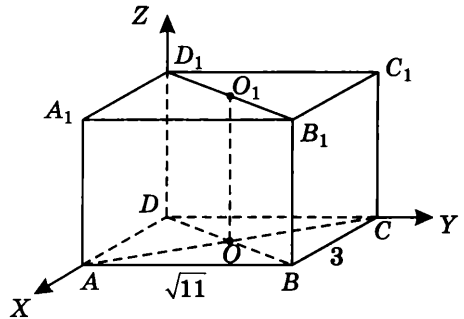
**Пример 11.** Основание прямой четырехугольной призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — прямоугольник  $ABCD$ , где  $AB = \sqrt{11}$ ,  $BC = 3$ .

Найдите угол между плоскостями грани  $DD_1 C_1 C$  и плоскостью, проходящей через середину ребра  $BC \perp A_1 C$ , если известно, что расстояние между прямыми  $D_1 B_1$  и  $AC$  равно  $\sqrt{5}$ .

*Решение.*

Точку  $D$  примем за начало прямоугольной системы координат, т. е.  $D(0; 0; 0)$ . Стороны  $DA$ ,  $DC$  и  $DD_1$  примем соответственно за оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ .

Найдем высоту призмы. По условию задачи расстояние между прямыми  $D_1 B_1$  и  $AC$  равно  $\sqrt{5}$ . Заметим, что прямые  $D_1 B_1$  и  $AC$  — скрещивающиеся, тогда расстояние между ними равно длине их об-



щего перпендикуляра, т. е.  $OO_1$ , где  $O$  и  $O_1$  — точки пересечения соответственно диагоналей нижнего и верхнего оснований призмы.

Итак,  $OO_1 = DD_1 = \sqrt{5}$ .

Заметим, что нормаль к плоскости грани  $DD_1C_1C$  — это любой вектор, перпендикулярный к ней, например,  $\overrightarrow{DA}(3; 0; 0)$ , или вектор  $\overline{n}_1(1; 0; 0)$ . Если плоскость перпендикулярна прямой  $A_1C$ , то  $A_1C$  и есть нормаль к этой плоскости.

Найдем координаты точек  $A_1(3; 0; \sqrt{5})$ ,  $C(0; \sqrt{11}; 0)$ , тогда  $\overline{A_1C}(-3; -\sqrt{11}; -\sqrt{5})$ , где  $\overline{A_1C} = \overline{n}_2$ .

Теперь находим искомый угол:  $\cos \alpha = \frac{|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2|}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|}$ ,

где  $|\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2| = |1 \cdot (-3) + 0 \cdot (-\sqrt{11}) + 0 \cdot (-\sqrt{5})| = |-3| = 3$ ,  $|\overline{n}_1| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$ ,

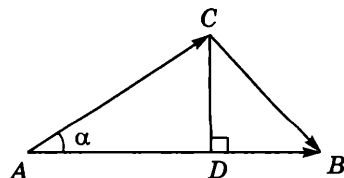
$|\overline{n}_2| = \sqrt{(-3)^2 + (-\sqrt{11})^2 + (-\sqrt{5})^2} = 5$ .

Следовательно,  $\cos \alpha = \frac{3}{1 \cdot 5} = \frac{3}{5}$ , откуда  $\alpha = \arccos \frac{3}{5}$ .

Ответ:  $\arccos \frac{3}{5}$ .

### 3.4. Расстояние от точки до прямой

Для определения расстояния от точки до прямой обычно рассматривают треугольник, одной из вершин которого является данная точка, а две другие лежат на прямой, тогда искомое расстояние находят как высоту этого треугольника.



Пусть вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  имеют координаты  $A(x_A; y_A; z_A)$ ,  $B(x_B; y_B; z_B)$ ,  $C(x_C; y_C; z_C)$ .

Расстояние от точки  $C$  до стороны  $AB$  — это длина перпендикуляра  $CD$ , опущенного из вершины  $C$  на прямую, содержащую сторону  $AB$ .

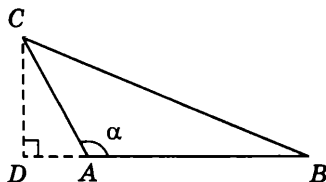
Тогда  $\overline{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$ ,  $\overline{AC}(x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A)$ .

Пусть  $\alpha$  — угол между векторами, тогда  $\cos \alpha = \frac{|\overline{AB} \cdot \overline{AC}|}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}$ .

Значит,  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ .

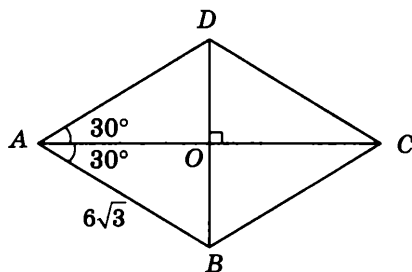
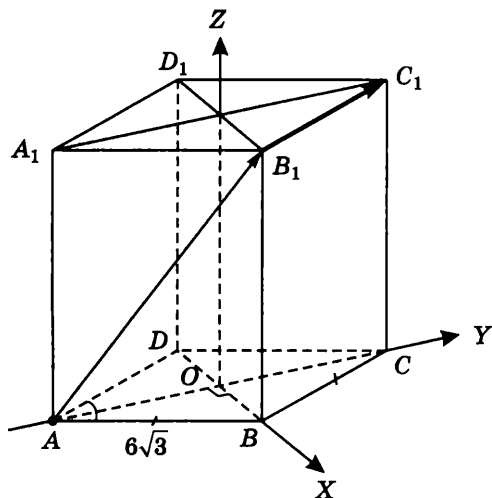
Из  $\triangle ADC$   $CD = AC \sin \alpha = |\overline{AC}| \sin \alpha$ .

Если  $\angle CAB = \alpha > 90^\circ$ , то  $\cos \alpha < 0$ . В этом случае длину  $CD$  находим из  $\triangle CAD$ , где  $\angle CAD$  — искомый угол между  $AC$  и  $AB$ .



**Пример 12.** Основанием прямоугольного параллелепипеда  $A...D_1$  является ромб, сторона которого равна  $6\sqrt{3}$ , а острый угол —  $60^\circ$ .

Найдите расстояние от точки  $A$  до прямой  $B_1C_1$ , если высота параллелепипеда равна 10.



*Решение.*

Поместим начало системы координат в точке  $O$  пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$  ромба  $ABCD$ , а оси направим вдоль диагоналей.

В  $\triangle AOB$   $OB = \frac{1}{2}AB = 3\sqrt{3}$  (по свойству катета, лежащего против угла  $30^\circ$ ).

$$AO = AB \cdot \cos 30^\circ = 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9.$$

Найдем координаты точек  $A$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ :

$A(0; -9; 0)$ ,  $B_1(3\sqrt{3}; 0; 10)$ ,  $C_1(0; 9; 10)$ .

Теперь найдем координаты векторов  $\overline{AB_1}$  и  $\overline{B_1C_1}$ :  $\overline{AB_1}(3\sqrt{3}; 9; 10)$ ,  $\overline{B_1C_1}(-3\sqrt{3}; 9; 0)$ , тогда

$$|\overline{AB_1}| = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 9^2 + 10^2} = \sqrt{27 + 81 + 100} = 4\sqrt{13};$$

$$|\overline{B_1C_1}| = \sqrt{(-3\sqrt{3})^2 + 9^2} = \sqrt{27 + 81} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$$

$$\cos \angle AB_1C_1 = \frac{\overline{AB_1} \cdot \overline{B_1C_1}}{|\overline{AB_1}| \cdot |\overline{B_1C_1}|} = \frac{3\sqrt{3} \cdot (-3\sqrt{3}) + 9 \cdot 9 + 0}{4\sqrt{13} \cdot 6\sqrt{3}} = \frac{54}{24\sqrt{39}} = \frac{9}{4\sqrt{39}}.$$

$$\text{Значит, } \sin \angle AB_1C_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{4\sqrt{39}}\right)^2} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{181}{13}}.$$

Искомое расстояние  $d$  от точки  $A$  до прямой  $B_1C_1$  будет равно

$$d = |\overline{AB_1}| \cdot \sin \angle AB_1C_1 = 4\sqrt{13} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{181}{13}} = \sqrt{181}.$$

*Ответ:*  $\sqrt{181}$ .

### 3.5. Расстояние от точки до плоскости

Для нахождения расстояния от точки до плоскости обычно опускают перпендикуляр из этой точки на данную плоскость и затем находят длину этого перпендикуляра.

Пусть  $\rho$  — расстояние от точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости  $ax + by + cz + d = 0$ , тогда

$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

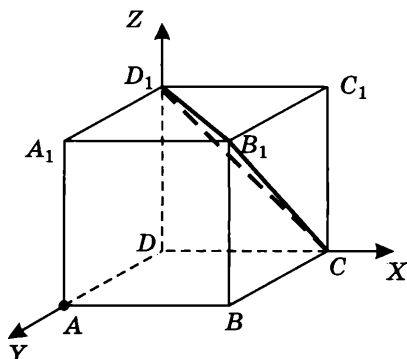
Рассмотрим примеры на нахождение расстояния от точки до плоскости.

**Пример 13.** В единичном кубе  $A...D_1$  найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $CB_1D_1$ .

*Решение.*

Введем прямоугольную систему координат так, чтобы точка  $D$  служила ее началом.

Расстояние от точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости  $ax + by + cz + d$  определяется по формуле



$$\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (1)$$

В данном случае роль точки  $M_0$  играет точка  $A(0; 1; 0)$ , т. е.  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1$ ,  $z_0 = 0$ .

Нам надо найти значения  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  в уравнении  $ax + by + cz + d = 0$  плоскости  $CB_1D_1$ , где  $C(1; 0; 0)$ ,  $B_1(1; 1; 1)$ ,  $D_1(0; 0; 1)$ . Для удобства возьмем  $d = 1$ .

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 0 \cdot a + 0 \cdot b + 1 \cdot c + 1 = 0, \\ 1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c + 1 = 0, \\ 1 \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} c + 1 = 0, \\ a + b + c + 1 = 0, \\ a + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = -1, \\ b = 1, \\ c = -1. \end{cases}$$

Учитывая формулу (1), значения  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и координаты точки  $A(0; 1; 0)$ , находим искомое расстояние от точки  $A$  до плоскости  $CB_1D_1$ :

$$\rho = \frac{|-1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ответ:  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .

**Пример 14.** В основании прямо-угольного параллелепипеда  $ABCA_1B_1C_1D_1$  лежит прямоугольник  $ABCD$ , где  $AB = 3\sqrt{6}$ ,  $BC = \sqrt{6}$ . Высота параллелепипеда  $AA_1 = 4\sqrt{3}$ .

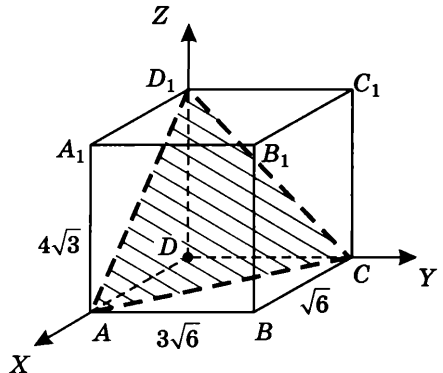
Найдите расстояние от точки  $D$  до плоскости  $AD_1C$ .

*Решение.*

Точку  $D$  примем за начало прямоугольной системы координат, а координатные оси направим по прямым  $DA$ ,  $DC$  и  $DD_1$ , тогда  $D(0; 0; 0)$ ,  $D_1(0; 0; 4\sqrt{3})$ ,  $A(\sqrt{6}; 0; 0)$ ,  $C(0; 3\sqrt{6}; 0)$ .

Запишем уравнение плоскости  $AD_1C$ , для чего подставим координаты точек  $D_1$ ,  $A$  и  $C$  в уравнение плоскости  $ax + by + cz + d = 0$ .

$$\text{Имеем } \begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 4\sqrt{3} + d = 0, \\ a \cdot \sqrt{6} + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = 0, \\ a \cdot 0 + b \cdot 3\sqrt{6} + c \cdot 0 + d = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4\sqrt{3}c + d = 0, \\ \sqrt{6}a + d = 0, \\ 3\sqrt{6}b + d = 0. \end{cases}$$



Выберем для удобства  $d = -\sqrt{6}$ , тогда получим

$$\begin{cases} 4\sqrt{3}c = \sqrt{6}, \\ \sqrt{6}a = \sqrt{6}, \\ 3\sqrt{6}b = \sqrt{6}; \end{cases} \quad \begin{cases} c = \frac{\sqrt{2}}{4}, \\ a = 1, \\ b = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

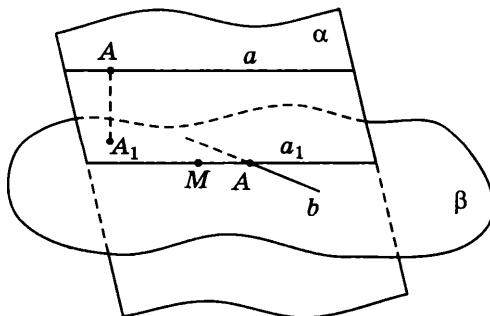
Искомое расстояние  $\rho$  от точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости  $ax + by + cz + d$  находим по формуле  $\rho = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ , где роль точки  $M_0$  играет точка  $D(0; 0; 0)$ , тогда получим

$$\rho = \frac{\left| 1 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot 0 - \sqrt{6} \right|}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{178}} = \frac{12\sqrt{6}}{\sqrt{178}} = \frac{12\sqrt{267}}{89}.$$

Ответ:  $\frac{12\sqrt{267}}{89} \approx 2,2$ .

### 3.6. Расстояние между двумя прямыми

Для определения расстояния между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$  можно поступить так.



Через одну из прямых, например,  $a$ , и некоторую точку  $M$  проведем плоскость  $\alpha$  и в плоскости  $\alpha$  через точку  $M$  проведем прямую  $a_1 \parallel a$ . Теперь через прямые  $a_1$  и  $b$  проведем плоскость  $\beta$ . Поскольку  $a \parallel a_1$ , то  $a \parallel \beta$ . Расстояние  $AA_1$  равно расстоянию между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$ .





Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 0 \cdot a - \frac{1}{2} \cdot b + c + 1 = 0, \\ 0 \cdot a + \frac{1}{2} \cdot b + c + 1 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a + 0 \cdot b + 0 \cdot c + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -\frac{1}{2} \cdot b + c + 1 = 0, \\ \frac{1}{2} \cdot b + c + 1 = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \\ b = 0, \\ c = -1. \end{cases}$$

Подставляя значения  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и координаты точки  $D$  в формулу (1), находим

$$\rho = \frac{\left| -\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 1 \right|}{\sqrt{\frac{4}{3} + 0 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{7}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ .

## Задачи для самостоятельного решения

**1.** Точки  $M$  и  $N$  — середины соответственно ребер  $AA_1$  и  $AD$  куба  $A...D_1$ . Найдите угол между прямыми  $C_1N$  и  $AB_1$ .

**2.** В правильной призме  $ABCA_1B_1C_1$  точка  $M$  — середина ребра  $AC$ ,  $AB : AA_1 = 1 : \sqrt{3}$ . Найдите угол между прямыми  $B_1M$  и  $BA_1$ .

**3.** В основании пирамиды  $MABC$  лежит прямоугольный  $\triangle ABC$ . Ребро  $MC \perp (ABC)$ ,  $MC = AC = BC$ . На ребрах  $MC$ ,  $MB$  и  $BC$  взяты соответственно точки  $E$ ,  $F$  и  $K$  — середины этих ребер. Найдите угол между прямыми  $CF$  и  $AK$ .

**4.** В основании пирамиды  $MABCD$  лежит квадрат  $ABCD$ . Ребро  $MB \perp (ABCD)$ ,  $MB = AB$ ,  $P$  — середина ребра  $MC$ . Найдите угол между прямыми  $AC$  и  $PD$ .

**5.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  все ребра равны 1. На ребрах  $AA_1$  и  $CC_1$  взяты соответственно точки  $M$  и  $N$  — середины этих ребер. Найдите расстояние между прямыми  $AB_1$  и  $BC$ .

**6.** В основании прямого параллелепипеда  $A...D_1$  лежит параллелограмм с острым  $\angle A = 60^\circ$ . Известно, что  $AB : AD : AA_1 = 1 : 2 : 3$ . Найдите угол между прямой  $B_1D$  и плоскостью грани  $AA_1DD_1$ .

**7.** В правильной четырехугольной призме  $A...D_1$  диагональ  $A_1C$  образует с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Найдите угол между прямой  $A_1C$  и плоскостью  $AB_1D_1$ .

**8.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  отношение высоты  $MO$  к стороне основания равно  $2 : 3$ . На диагонали  $AC$  отмечена точка  $K$  такая, что  $AK : AC = 1 : 4$ . Найдите угол между прямой  $MK$  и плоскостью  $MBD$ .

**9.** Точки  $M$  и  $N$  — соответственно середины ребер  $CD$  и  $AD$  куба  $A...D_1$ . Найдите угол между плоскостью диагонального сечения  $AA_1C_1C$  и прямой  $C_1N$ .

**10.** В правильной четырехугольной призме  $A...D_1$  диагональ  $A_1C$  образует с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . Найдите угол между прямой  $A_1C$  и плоскостью  $B_1DE$ , где точка  $E$  — середина  $CC_1$ .

**11.** В правильной четырехугольной пирамиде  $MABCD$  боковое ребро образует с плоскостью основания угол  $45^\circ$ . На высоте  $MO$  пирамиды отмечена точка  $K$  — середина  $MO$ . Найдите угол между прямой  $DK$  и плоскостью  $MBC$ .

**12.** Точка  $M$  — середина ребра  $CC_1$  куба  $A...D_1$ . Найдите угол между плоскостями  $A_1B_1C$  и  $BDM$ .

**13.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями  $BMC_1$  и  $B_1MC_1$ , где  $M$  — середина ребра  $AC$ .

**14.** В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , все ребра которой равны 1, найдите угол между плоскостями  $A_1ED$  и  $AA_1D$ .

**15.** В правильной треугольной пирамиде  $MABC$  высота  $MO = AB$ . Точки  $N$ ,  $K$  и  $P$  — соответственно середины ребер  $MA$ ,  $AC$  и  $MC$ . Найдите угол между плоскостями  $BKP$  и  $BNK$ .

**16.** В основании прямой призмы  $ABCA_1B_1C_1$  лежит прямоугольный  $\triangle ABC$ , где  $AC = BC = AA_1$ . Известно, что  $P$  — середина ребра  $BB_1$ . Найдите угол между плоскостями  $APC_1$  и  $BCC_1$ .

# КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО КУРСУ ПЛАНИМЕТРИИ 7–9 КЛАССОВ

## 1. Углы

**Углом** называется геометрическая фигура (рис. 1), образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

Точка  $O$  — вершина угла, а лучи  $OA$  и  $OB$  — стороны угла.

Обозначение:  $\angle AOB$  или  $\angle ab$ .

Угол в  $90^\circ$  называется **прямым** (рис. 2).

Угол, меньший прямого, называется **острым** (рис. 3).

Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется **тупым** (рис. 4).

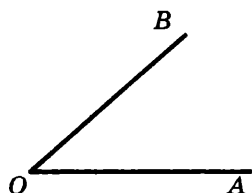


Рис. 1

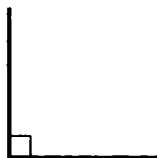


Рис. 2

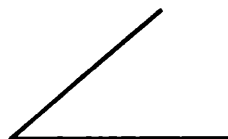


Рис. 3



Рис. 4

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого (рис. 5).

$\angle AOC$  и  $\angle DOB$ ;  $\angle BOC$  и  $\angle AOD$  — вертикальные.

**Вертикальные углы равны:**  $\angle AOC = \angle DOB$  и  $\angle BOC = \angle AOD$ .

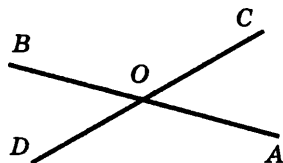


Рис. 5

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию (рис. 6),  $\angle AOC$  и  $\angle BOC$  — смежные.

**Сумма смежных углов равна  $180^\circ$ .**

**Биссектрисой угла** называется луч, проходящий между сторонами угла и делящий его пополам (рис. 7).

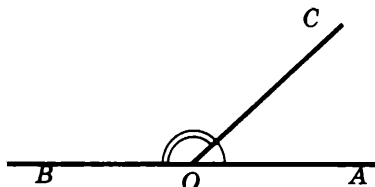


Рис. 6

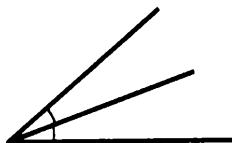


Рис. 7

Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение друг друга (рис. 8).

Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (рис. 9).

При пересечении двух прямых  $a$  и  $b$  третьей  $c$  (секущей) образуются 8 углов (рис. 10):

**соответственные углы:**

$\angle 1$  и  $\angle 5$ ,  $\angle 2$  и  $\angle 6$ ,  $\angle 4$  и  $\angle 8$ ,  $\angle 3$  и  $\angle 7$ ;

**внутренние накрест лежащие:**

$\angle 4$  и  $\angle 6$ ,  $\angle 3$  и  $\angle 5$ ;

**внешние накрест лежащие:**

$\angle 1$  и  $\angle 7$ ,  $\angle 2$  и  $\angle 8$ ;

**внутренние односторонние:**

$\angle 4$  и  $\angle 5$ ,  $\angle 3$  и  $\angle 6$ ;

**внешние односторонние:**

$\angle 1$  и  $\angle 8$ ,  $\angle 2$  и  $\angle 7$ .

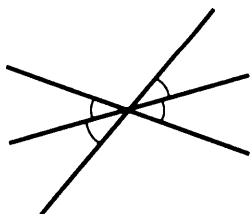


Рис. 8

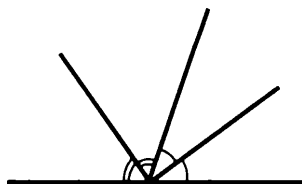


Рис. 9

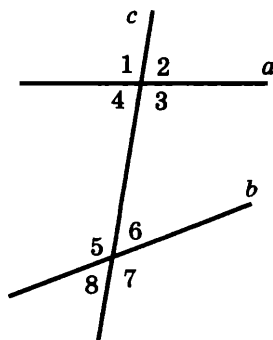


Рис. 10

## 2. Многоугольник

$ABCDE$  — пятиугольник.

Точки  $A, B, C, D, E$  — вершины многоугольника;  $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$  — углы;  $AB, BC, CD$  и т. д. — стороны; отрезки  $AC, AD, BE, BD, CE$  — диагонали;  $P = AB + BC + \dots + EA$  — периметр многоугольника.

Многоугольник называется **выпуклым** (рис. 11), если он целиком расположен по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. В противном случае многоугольник называется **невыпуклым** (рис. 12).

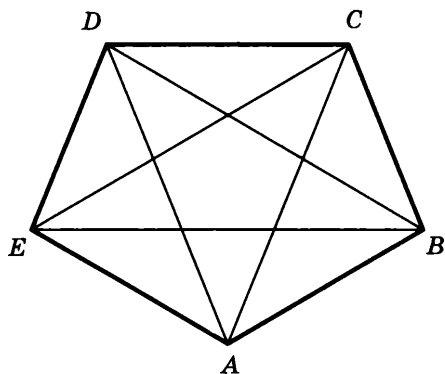


Рис. 11

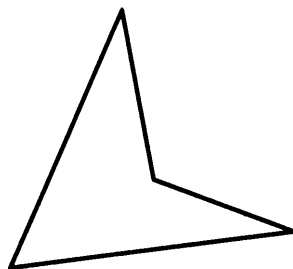


Рис. 12

### Свойства:

1. Сумма внутренних углов произвольного  $n$ -угольника равна  $180^\circ \cdot (n - 2)$ .
2. Сумма внешних углов выпуклого  $n$ -угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна  $360^\circ$ .
3. В выпуклом  $n$ -угольнике из каждой вершины можно провести  $(n - 3)$  диагоналей, которые разбивают  $n$ -угольник на  $(n - 2)$  треугольников.
4. В выпуклом  $n$ -угольнике число диагоналей равно  $\frac{1}{2}n(n - 3)$ .

## 3. Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник, у которого равны все углы и стороны, называется **правильным**.

### Свойства:

1. Каждый угол правильного  $n$ -угольника равен  $\alpha_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$ .
2. Около правильного  $n$ -угольника можно описать окружность, и притом только одну.
3. В правильный  $n$ -угольник можно вписать окружность, и притом только одну.
4. Окружность, вписанная в правильный  $n$ -угольник, касается всех сторон  $n$ -угольника в их серединах.
5. Центр окружности, описанной около правильного  $n$ -угольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же  $n$ -угольник.
6. Длина стороны правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $R$ , равна  $a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$ .
7. Длина стороны правильного  $n$ -угольника, описанного около окружности радиуса  $r$ , равна  $a = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ .

## 4. Треугольник

**Треугольником** называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, последовательно соединяющих эти точки.

Точки  $A, B, C$  — **вершины**  $\triangle ABC$ .

Отрезки  $AB, BC$  и  $AC$  — **стороны**,  $\angle A, \angle B$  и  $\angle C$  — **углы**.

Стороны треугольника часто обозначают малыми буквами (рис. 13):

$$AB = c, \quad BC = a, \quad AC = b.$$

$P = a + b + c$  — **периметр** треугольника.

Треугольник, у которого все углы острые, называется **остроугольным** (рис. 13).

Треугольник, у которого угол прямой, называется **прямоугольным** (рис. 14).

Стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** ( $a$  и  $b$ ), а сторона, лежащая против прямого угла, — **гипотенузой** ( $c$ ).

Треугольник с тупым углом называется **тупоугольным** (рис. 15).

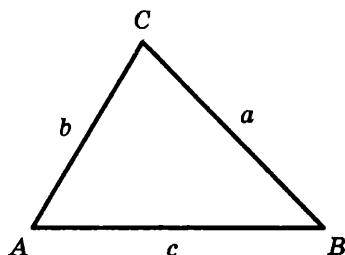


Рис. 13

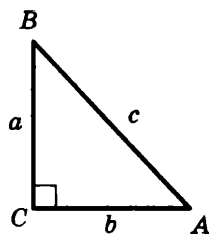


Рис. 14

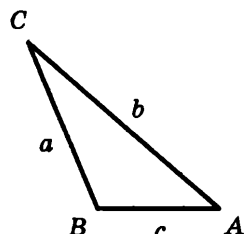


Рис. 15

Треугольник, у которого две стороны равны, называется **равнобедренным** (рис. 16).

Равные стороны называются **боковыми**, а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** (рис. 17).

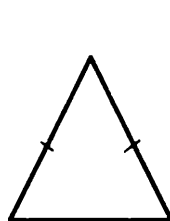


Рис. 16

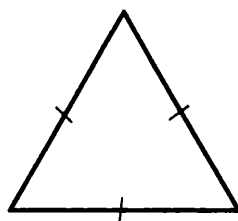


Рис. 17

Каждый угол равностороннего треугольника равен  $60^\circ$ .

#### Свойства равнобедренного треугольника:

1. Углы при основании равны.
2. Биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.
3. Высота, проведенная к основанию, является одновременно медианой и биссектрисой.
4. Медиана, проведенная к основанию, является одновременно высотой и биссектрисой.

**Внешним углом** треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника (рис. 18).

$\angle CBD$  — внешний угол треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (рис. 18).

$$\angle CBD = \angle A + \angle C.$$

Отрезок, соединяющий середины двух сторон, называется **средней линией** треугольника (рис. 19).

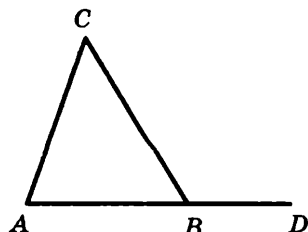


Рис. 18

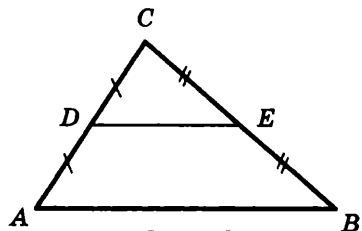


Рис. 19

## 5. Признаки равенства треугольников

**I признак** (*признак равенства по двум сторонам и углу между ними*)

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого, то такие треугольники равны (рис. 20).

$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1.$$

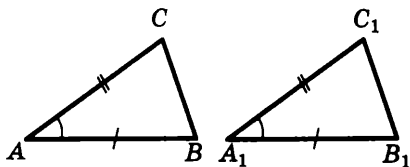


Рис. 20

**II признак** (*признак равенства по стороне и прилежащим к ней углам*)

Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 21).

$$AB = A_1B_1, \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1.$$

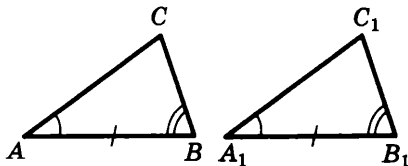


Рис. 21

**III признак** (*признак равенства по трем сторонам*)

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого, то такие треугольники равны (рис. 22).

$$AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, AC = A_1C_1.$$

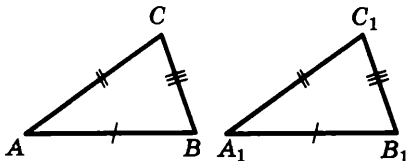


Рис. 22



## 6. Неравенства треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон:

$$a < b + c, b < a + c, c < a + b.$$

## 7. Определение вида треугольника по его сторонам

Пусть  $c$  — наибольшая сторона, тогда:

- а) если  $c^2 < a^2 + b^2$ , то треугольник — остроугольный;
- б) если  $c^2 > a^2 + b^2$ , то треугольник — тупоугольный;
- в) если  $c^2 = a^2 + b^2$ , то треугольник — прямоугольный.

## 8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства)

- 1) Сумма острых углов равна  $90^\circ$  (рис. 23).

$$\angle A + \angle B = 90^\circ.$$

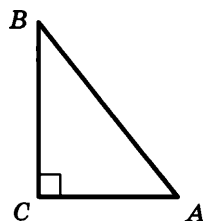


Рис. 23

- 2) Катет, лежащий против угла в  $30^\circ$ , равен половине гипотенузы (рис. 24).

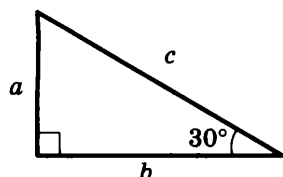


Рис. 24

$$a = \frac{1}{2}c.$$

- 3) Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен  $30^\circ$  (рис. 24).

## 9. Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны (рис. 25).

$$AC = A_1C_1, BC = B_1C_1.$$

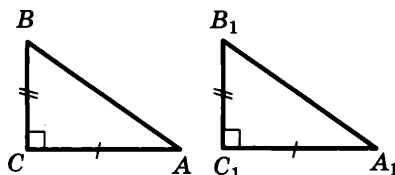


Рис. 25

2. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны (рис. 26).

$$AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1.$$

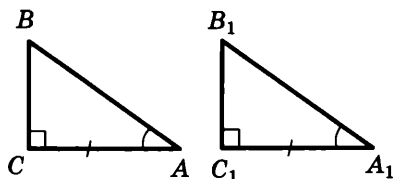


Рис. 26

3. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны (рис. 27).

$$AB = A_1B_1, \angle A = \angle A_1.$$

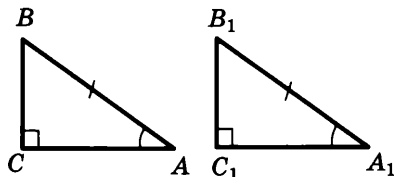


Рис. 27

4. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны (рис. 28).

$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1.$$

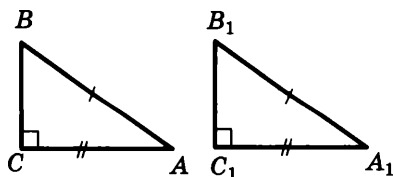


Рис. 28

## 10. Четыре замечательные точки треугольника

С каждым треугольником связаны 4 точки:

- 1) точка пересечения медиан;
- 2) точка пересечения биссектрис;
- 3) точка пересечения высот (или их продолжений);
- 4) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника**.

**Высотой** треугольника называется длина перпендикуляра, опущенного из любой его вершины на противолежащую сторону или ее продолжение.

В *тупоугольном треугольнике* (рис. 29) две высоты падают на продолжение сторон и лежат вне треугольника, а третья — внутри.

В *остроугольном треугольнике* (рис. 30) все три высоты лежат внутри треугольника.

В *прямоугольном треугольнике* катеты одновременно служат и высотами (рис. 31).

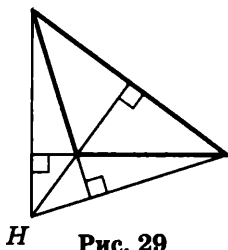


Рис. 29

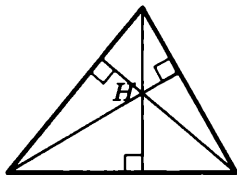


Рис. 30

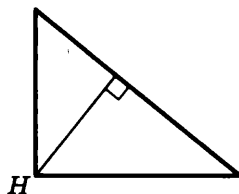


Рис. 31

Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой **ортоцентром**. В *тупоугольном треугольнике* ортоцентр лежит вне треугольника. В *прямоугольном треугольнике* он совпадает с вершиной прямого угла.

**Медианой** треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром тяжести треугольника** (рис. 32).

Эта точка делит каждую медиану в отношении  $2 : 1$  (считая от соответствующей вершины).

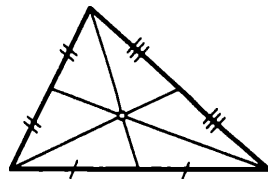


Рис. 32

**Биссектрисой** треугольника называется отрезок биссектрисы угла от вершины до пересечения с противоположащей стороной.

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром вписанного круга** (рис. 33).

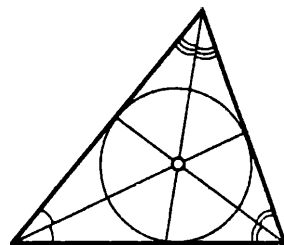


Рис. 33

Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины (рис. 34, 35, 36), пересекаются в одной точке, которая является **центром описанной окружности**.

В *тупоугольном треугольнике* (рис. 34) эта точка лежит **вне** треугольника, в *остроугольном* (рис. 35) — **внутри**, в *прямоугольном* — на **середине гипотенузы**.

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной окружностей совпадают друг с другом только в **равностороннем** треугольнике.

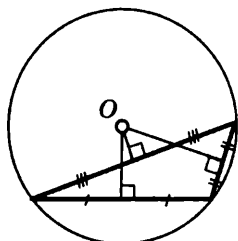


Рис. 34

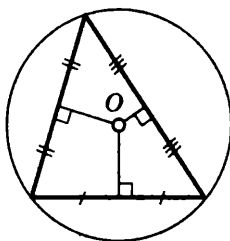


Рис. 35

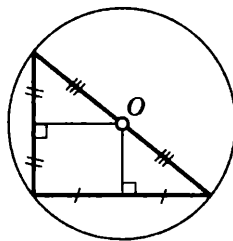


Рис. 36

## 11. Произвольный треугольник

1) **Свойство биссектрисы** (рис. 37) внутреннего угла треугольника:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

2) **Длина биссектрисы:**

$$l_c = \sqrt{ab - a_1 b_1};$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

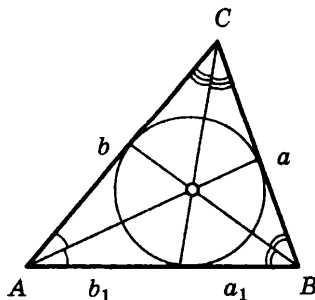


Рис. 37

3) **Длина медианы:**

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

## 4) Длина высоты:

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где  $a, b, c$  — стороны треугольника;

$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$  — полупериметр;

$h_c$  — высота, проведенная к стороне  $c$ .

## 5) Зависимость между сторонами и высотами:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

## 6) Зависимость между высотами и радиусом вписанной окружности:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

## 12. Теорема Чевы

Для того чтобы прямые  $BE$ ,  $AD$  и  $CF$  (рис. 38) пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

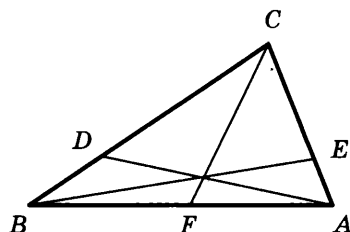


Рис. 38

## 13. Теорема Менелая

Если на сторонах  $BC$ ,  $AB$  и продолжении стороны  $AC$   $\triangle ABC$  за точку  $C$  отмечены соответственно точки  $A_1$ ,  $C_1$  и  $B_1$ , лежащие на одной прямой, то

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1 \quad (\text{рис. 39}).$$

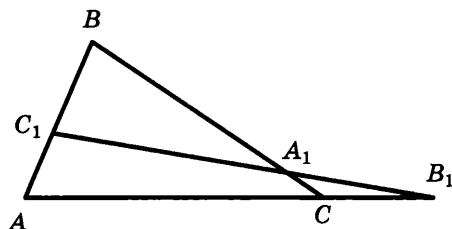


Рис. 39

## 14. Теорема синусов

Во всяком треугольнике стороны относятся как синусы противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где  $R$  — радиус окружности, описанной около треугольника.

## 15. Теорема косинусов

Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

## 16. Площадь треугольника

$$1) S = \frac{1}{2} ah_a;$$

$$2) S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma;$$

$$3) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона);}$$

$$4) S = p r, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a + b + c);$$

$$5) S = \frac{abc}{4R};$$

$$6) S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

## 17. Равносторонний (правильный) треугольник

Треугольник, у которого все стороны равны, называется равносторонним (рис. 40).

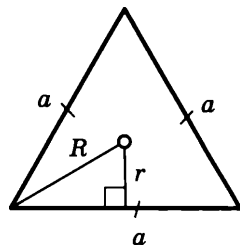


Рис. 40

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3};$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}; r = \frac{a}{2\sqrt{3}}; h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

## 18. Подобные треугольники

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого (рис. 41).

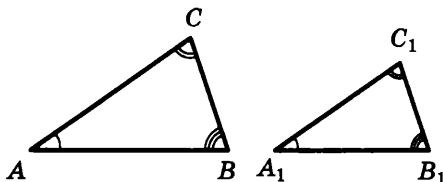


Рис. 41

$AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $AC$  и  $A_1C_1$  — сходственные стороны.

Из подобия треугольников следует:

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1.$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

где  $k$  — коэффициент подобия.

Обозначение:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

Если два треугольника подобны, то отношение их площадей равно  $k^2$ , т. е.  $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle A_1B_1C_1} = k^2$ .

## 19. Признаки подобия треугольников

**I признак:** если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны (рис. 42).

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1.$$

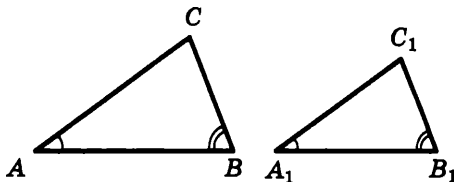


Рис. 42

**II признак:** если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между ними, равны, то такие треугольники подобны (рис. 43).

$$\begin{aligned}\angle A &= \angle A_1, \\ \frac{AB}{A_1B_1} &= \frac{AC}{A_1C_1}.\end{aligned}$$

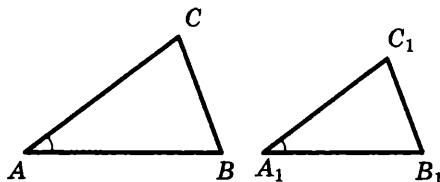


Рис. 43

**III признак:** если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны (рис. 44).

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

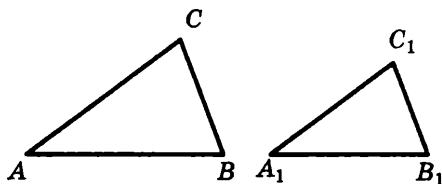


Рис. 44

**Площади подобных фигур** (в частности, многоугольников) пропорциональны квадратам их сходственных сторон.

В частности, **площади кругов** относятся как квадраты радиусов (или диаметров).

## 20. Четырехугольник

**1. Произвольный выпуклый** ( $d_1$  и  $d_2$  — диагонали,  $\varphi$  — угол между ними) (рис. 45).

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

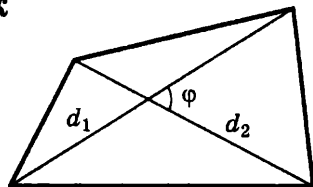


Рис. 45



**2. Вписанный.**

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна  $180^\circ$  (рис. 46). Верно и обратное.

$$ac + bd = d_1 d_2$$

(теорема Птолемея).

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

где  $p = \frac{1}{2}(a + b + c + d).$

**3. Описанный.**

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны (рис. 47).

$$a + c = b + d, \quad S = p \cdot r.$$

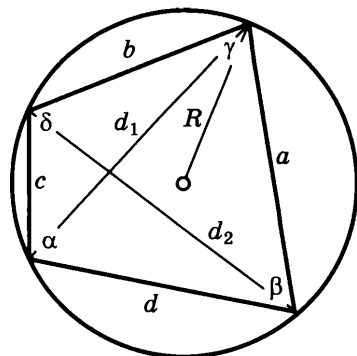


Рис. 46

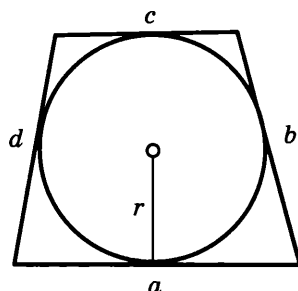


Рис. 47

**21. Параллелограмм**

**Параллелограммом** называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 48).

$$AB \parallel DC, AD \parallel BC$$

( $a$  и  $b$  — смежные стороны;  $\alpha$  — угол между ними;  $h_a$  — высота, проведенная к стороне  $a$ ).

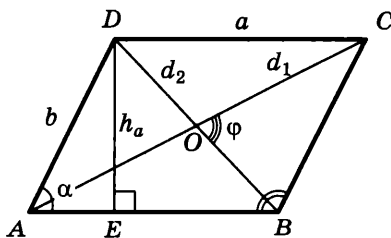


Рис. 48

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2) \text{ — зависимость между сторонами и диагоналями;}$$

$$S = a \cdot h_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi \text{ — площадь параллелограмма.}$$

**Некоторые свойства:**

1. В параллелограмме противоположные стороны и углы равны ( $AB = DC$ ;  $AD = BC$ ;  $\angle A = \angle C$ ;  $\angle B = \angle D$ ).

2. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам ( $AO = OC$ ;  $BO = OD$ ).

3. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна  $180^\circ$  ( $\angle A + \angle B = 180^\circ$  и т. д.).

4. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника ( $\triangle ADC = \triangle ABC$ ;  $\triangle ABD = \triangle BCD$ ).

5. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник (рис. 49).

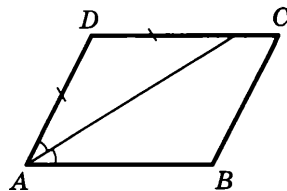


Рис. 49

### Признаки параллелограмма (рис. 48)

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны ( $AB = DC$ ;  $AB \parallel CD$ ), то такой четырехугольник — параллелограмм.

2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны ( $AB = DC$ ;  $AD = BC$ ), то такой четырехугольник — параллелограмм.

3. Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны ( $\angle A = \angle C$ ;  $\angle B = \angle D$ ), то такой четырехугольник — параллелограмм.

4. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — параллелограмм.

## 22. Трапеция

$a$  и  $b$  — основания;  $h$  — высота;  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали;  $\varphi$  — угол между ними (рис. 50).

**Трапецией** называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две не параллельны.

$AB \parallel DC$ ,  $AB$  и  $DC$  — основания трапеции,  $AD$  и  $BC$  — боковые стороны.

Отрезок  $l$ , соединяющий середины боковых сторон, называется **средней линией трапеции**.

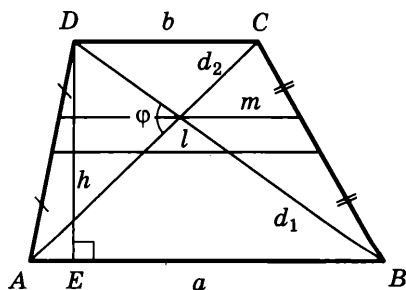


Рис. 50

$l = \frac{1}{2}(a + b)$  — длина средней линии трапеции;

$m \parallel a \parallel b$ ,  $m = \frac{2ab}{a+b}$ ;

$\angle A + \angle D = 180^\circ$ ;  $\angle B + \angle C = 180^\circ$ ;

$$S = l \cdot h = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin \varphi \text{ — площадь трапеции.}$$

### Равнобедренная трапеция

Если у трапеции боковые стороны равны, то такая трапеция называется равнобедренной (рис. 51).

$$AD = BC.$$

В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны ( $\angle A = \angle B$ ;  $\angle C = \angle D$ ) и диагонали равны ( $AC = BD$ ).

$$AE = \frac{1}{2}(a - b).$$

Если  $AC \perp BD$ , то  $S = h^2$ .

$$AB + CD = 2AD \text{ (рис. 52).}$$

$h = 2r$ ;  $r$  — радиус вписанной окружности;  $h = \sqrt{ab}$ .

$R$  — радиус описанной окружности.

Точка  $O$  — центр окружности, описанной около любого треугольника, вершины которого совпадают с вершинами трапеции (рис. 53).

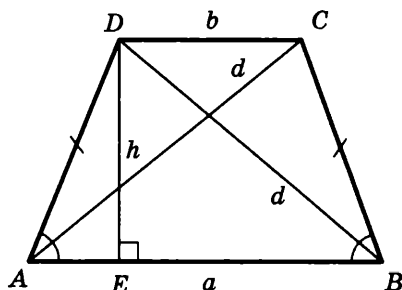


Рис. 51

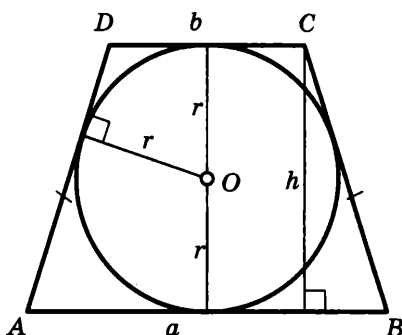


Рис. 52

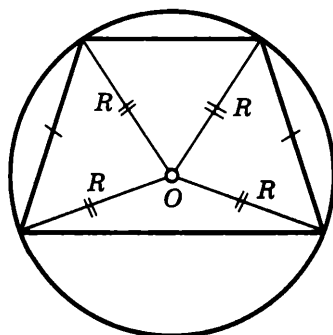


Рис. 53

### Прямоугольная трапеция

Если в трапеции один из углов прямой, то такая трапеция называется прямоугольной (рис. 54).

$$\angle D = \angle C = 90^\circ.$$

$$BE = CD = h \text{ (высота трапеции).}$$

$$AE = a - b.$$

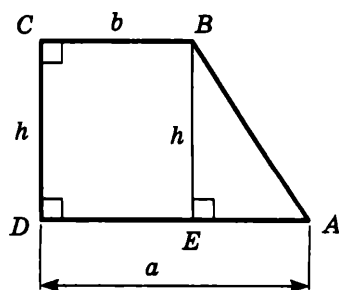


Рис. 54

## 23. Прямоугольник

**Прямоугольником** называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 55).

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, у прямоугольника диагонали равны.

Стороны прямоугольника одновременно являются и высотами.

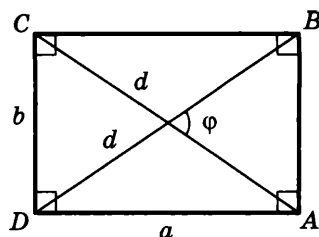


Рис. 55

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

$$S = ab = \frac{1}{2}d^2 \sin \varphi.$$

## 24. Ромб

**Ромбом** называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 56).

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми его свойствами.

Кроме того, *диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.*

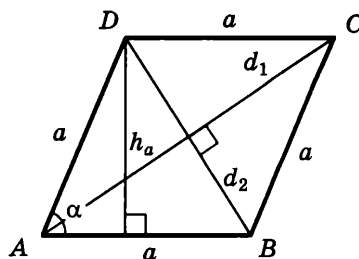


Рис. 56

$$AC \perp BD.$$

$AC$  — биссектриса углов  $A$  и  $C$ ;  $BD$  — биссектриса углов  $B$  и  $D$ .

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

$$S = a \cdot h_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \text{ — площадь ромба.}$$

## 25. Квадрат

**Квадратом** называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 57).

Можно сказать, что квадрат — это ромб с прямым углом.

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

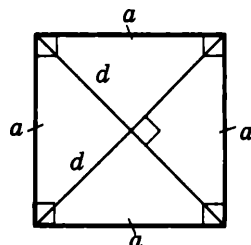


Рис. 57

### Основные свойства:

1. У квадрата все углы прямые.
2. У квадрата диагонали равны, взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

## 26. Окружность

**Окружностью** называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра) (рис. 58).

Отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности, называется **радиусом**.

*Обозначение:*  $r$  или  $R$ .

На рисунке  $OC = OE = OD = R$ .

Часть окружности (например,  $CmD$ ) называется **дугой**.

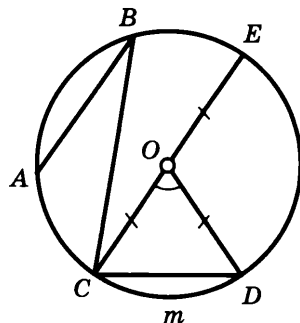


Рис. 58

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**, а хорда, проходящая через центр, — **диаметром**.

$AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $CE$  — хорды окружности;  $CE$  — наибольшая из хорд — диаметр.

*Обозначение:*  $d$  или  $D$ .

$$D = 2R.$$

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом**.

Часть круга, ограниченная дугой ( $CmD$ ) и стягивающей ее хордой ( $CD$ ), называется **сегментом**.

Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, называется **сектором**.

Угол, образованный двумя радиусами, называется **центральный** ( $\angle COD$  на рис. 58).

Угол, у которого вершина лежит на окружности, а стороны являются хордами, называется **вписанным** (например,  $\angle ABC$ ).

## 27. Свойства касательных к окружности

Угол, образованный двумя касательными ( $CA$  и  $CB$ ), исходящими из одной точки, называется **описанным** ( $\angle ACB$  на рис. 59).

1. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

2. Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.

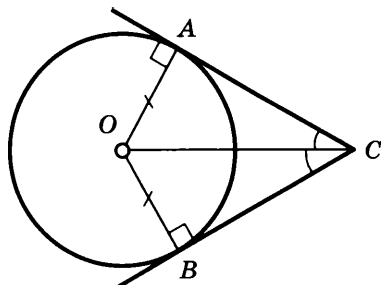


Рис. 59

## 28. Окружность и треугольник

1. Около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам через их середины (рис. 60).

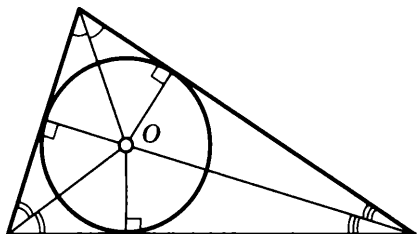


Рис. 61

2. Во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности является точка пересечения биссектрис (рис. 61).

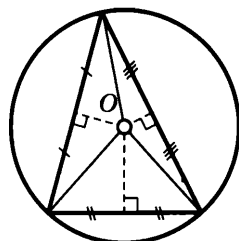


Рис. 60

## 29. Окружность и четырехугольник

1. Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов была равна  $180^\circ$  (рис. 62).

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

2. Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны (рис. 63).

статочного, чтобы суммы противоположных сторон были равны (рис. 63).

$$a + c = b + d.$$

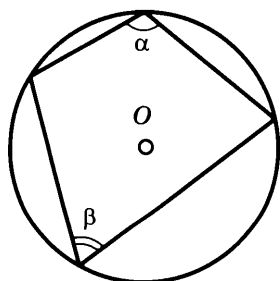


Рис. 62

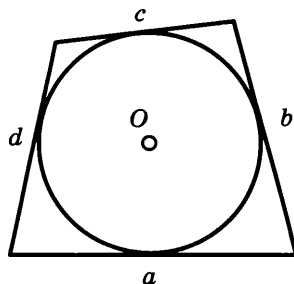


Рис. 63

### 30. Углы и окружность

**Центральный угол** измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 64).

$$\angle AOB = \cup AmB.$$

**Вписанный угол** измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 65).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AmC.$$

**Угол между хордой и касательной** измеряется половиной дуги, заключенной внутри него (рис. 66).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC.$$

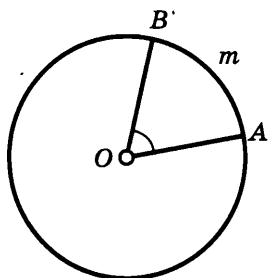


Рис. 64

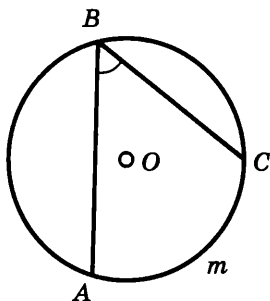


Рис. 65

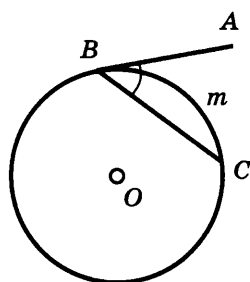


Рис. 66

**Угол между двумя касательными** измеряется полуразностью дуг (рис. 67).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup AnC).$$

**Угол между двумя хордами** измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается (рис. 68).

$$\angle AEC = \frac{1}{2} (\cup AmC + \cup BnD).$$

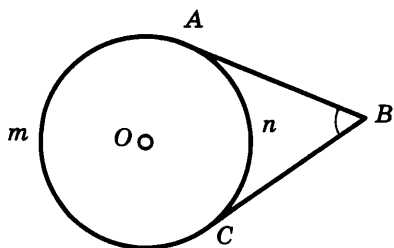


Рис. 67

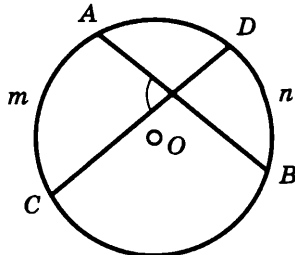


Рис. 68

**Угол между секущими** измеряется полуразностью дуг между ними (рис. 69).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup EnD).$$

**Угол между касательной и секущей** измеряется полуразностью отсекаемых ими дуг, прилежащих к касательной (рис. 70).

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup CnD).$$

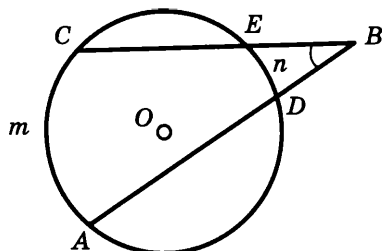


Рис. 69

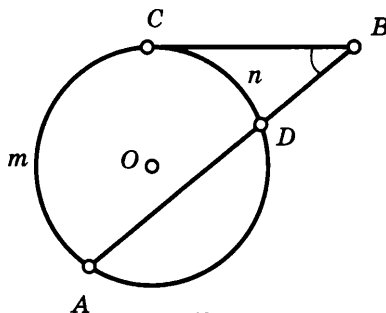


Рис. 70

### 31. Метрические соотношения в окружности

Если хорды  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $E$ , то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой (рис. 71).

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

Если из точки  $B$  к окружности проведены две секущие  $BDA$  и  $BEC$ , то

$$DB \cdot AB = EB \cdot CB \text{ (рис. 72).}$$

Если из точки  $B$  к окружности проведены секущая  $BDA$  и касательная  $BC$ , то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной (рис. 73).

$$AB \cdot DB = BC^2.$$

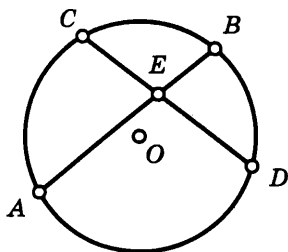


Рис. 71

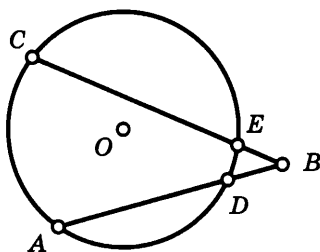


Рис. 72

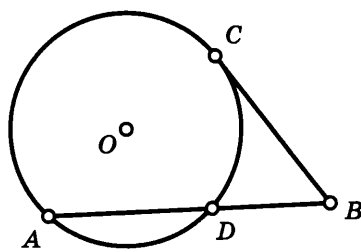


Рис. 73



## 32. Длина окружности. Площадь круга и его частей

$C = 2\pi R = \pi D$  — длина окружности;

$l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = R\alpha$  — длина дуги окружности;

$S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi D^2 = \frac{1}{2} CR$  — площадь круга;

$\pi = \frac{C}{D} \approx 3,14$  — отношение длины окружности к

ее диаметру;

$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n}{360}$  — площадь сектора (рис. 74).

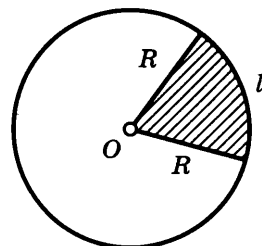


Рис. 74

## 33. Понятие вектора

**Вектором** называется направленный отрезок (рис. 75).

Всякий вектор характеризуется:

- 1) начальной точкой;
- 2) направлением;
- 3) длиной (модулем).

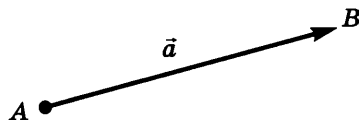


Рис. 75

**Длиной (модулем)** ненулевого вектора  $\overline{AB}$  называется длина отрезка  $AB$  и обозначается  $|\overline{AB}|$  или  $|\vec{a}|$ .

## 34. Равенство векторов

Если ненулевые векторы лежат на одной прямой или параллельных прямых, то они называются **коллинеарными** (рис. 76).

Коллинеарные векторы:

$\vec{a}$ ,  $\vec{m}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{KP}$ ,  $\overline{AA} = \vec{0}$ .

Неколлинеарные векторы:

$\overline{CD}$  и  $\overline{ST}$ ,  $\overline{KP}$  и  $\overline{ST}$ .

Коллинеарные векторы называются **сонаправленными**, если они имеют одинаковые направления.

Например,  $\vec{a} \uparrow \vec{m}$ ,  $\vec{a} \uparrow \overline{KP}$ ,  $\vec{m} \uparrow \overline{KP}$ .

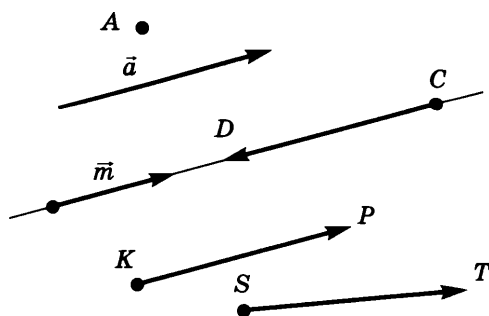


Рис. 76

Коллинеарные векторы называются *противоположно направленными*, если они имеют разные направления.

Например,  $\vec{a}$  и  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\vec{m}$  и  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  и  $\overrightarrow{KP}$ .

Векторы называются *равными*, если они сонаправлены и их длины равны.

## 35. Координаты вектора

Пусть  $A(x_1; y_1)$  — начало вектора  $\vec{a}$ ,  $B(x_2; y_2)$  — конец вектора  $\vec{a}$  (рис. 75).

**Координатами вектора  $\vec{a}$**  называют числа  $a_1 = x_2 - x_1$ ,  $a_2 = y_2 - y_1$  и обозначают  $\vec{a}(a_1; a_2)$ .

Тогда абсолютная величина (модуль) вектора с координатами  $a_1$ ,  $a_2$  равна  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ .

Если векторы равны, то у них равны соответствующие координаты. И обратно, если у векторов равны соответствующие координаты, то векторы равны.

## 36. Действия над векторами

### 1. Сумма двух векторов.

Каковы бы ни были точки  $A, B, C$ , имеет место векторное равенство (рис. 77):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ (правило треугольника),}$$

$$\text{или } \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}.$$

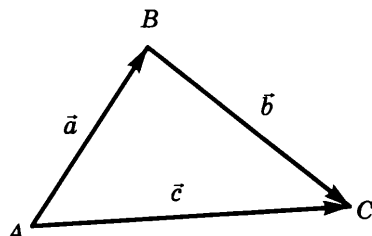


Рис. 77

2. Векторы складываются геометрически по правилу параллелограмма (рис. 78): сумма двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , имеющих общее начало, изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах.

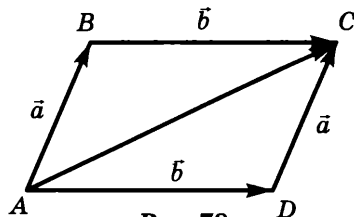


Рис. 78

3. Для векторов справедливы *переместительный* и *сочетательный* законы сложения:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \text{ и } \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

4. Разностью векторов  $\vec{a}(a_1; a_2)$  и  $\vec{b}(b_1; b_2)$  называется такой вектор  $\vec{c}(c_1; c_2)$ , который в сумме с вектором  $\vec{b}$  дает вектор  $\vec{a}$ ,

т. е.  $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$  (рис. 79).

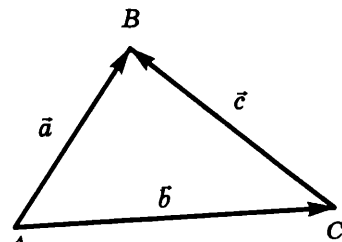


Рис. 79

5. Умножение вектора на число.

Произведением вектора  $\vec{a}(a_1; a_2)$  на число  $k$  называется вектор  $k\vec{a}(ka_1; ka_2)$ .

Из определения следует, что:

- 1) произведение любого вектора на число ноль есть нулевой вектор;
- 2) для любого числа  $k$  и любого вектора  $\vec{a}$  векторы  $\vec{a}$  и  $k\vec{a}$  коллинеарны.

Основные свойства умножения вектора на число:

- 1)  $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$  — сочетательный закон;
- 2)  $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$  — I распределительный закон;
- 3)  $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$  — II распределительный закон.

### 37. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин (модулей) на косинус угла между ними (рис. 80).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha.$$

- 1) Если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\cos \alpha = 0$ , тогда  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

Верно и обратное: если  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , то  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

- 2) Если  $\alpha < 90^\circ$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ; если  $\alpha > 90^\circ$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ .

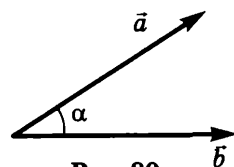


Рис. 80

### 38. Скалярное произведение в координатах

Если  $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ ,  $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ .

Следствие 1.  $\vec{a} \perp \vec{b}$  тогда и только тогда, когда  $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ .

Следствие 2.  $\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$ , где  $\alpha$  — угол между ненулевыми векторами  $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ ,  $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ .

### 39. Свойства скалярного произведения векторов

- 1)  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ ;
- 2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (переместительный закон);

3)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$  (распределительный закон);

4)  $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$  (сочетательный закон).

## 40. Уравнение окружности

Если центром окружности является начало координат (рис. 81), то уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

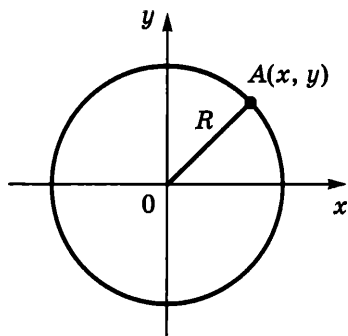


Рис. 81

Если центр окружности  $M(x_0; y_0)$  (рис. 82), то уравнение окружности имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

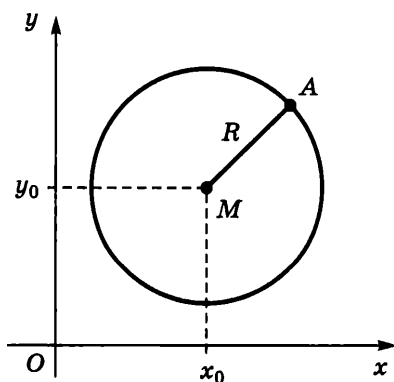


Рис. 82

## 41. Уравнение прямой

1) Любая прямая в декартовых координатах  $x$  и  $y$  задается уравнением вида  $ax + by + c = 0$ , где  $a$  и  $b$  — коэффициенты при неизвестных,  $c$  — свободный член.

2) Если  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , то  $y = -\frac{c}{b}$  — уравнение прямой, параллельной оси  $Ox$  (рис. 83).

3) Если  $b = 0$ ,  $a \neq 0$ , то  $x = -\frac{c}{a}$  — уравнение прямой, параллельной оси  $Oy$  (рис. 84).

4) Если  $c = 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , то  $ax + by = 0$  — уравнение прямой, проходящей через начало координат  $(0; 0)$  (рис. 85).

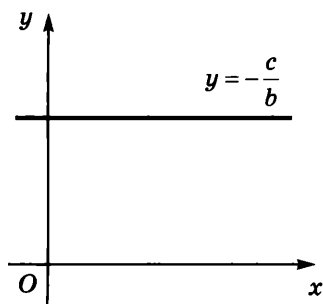


Рис. 83

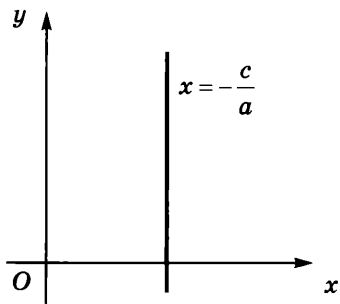


Рис. 84

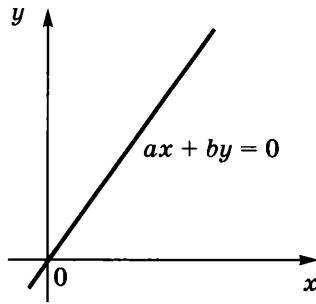


Рис. 85

# **КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО КУРСУ СТЕРЕОМЕТРИИ 10–11 КЛАССОВ**

При решении задач по стереометрии возрастают требования к качеству чертежа и его наглядности.

Освоение принципов и техники построения пространственного чертежа — необходимое условие для успешного решения задач.

Пространственные тела можно условно разделить на удобные для пространственного изображения и неудобные. К первой категории относятся многогранники: параллелепипед, треугольная призма, треугольная и четырехугольная пирамиды. Все остальные будем считать неудобными для изображения.

В некоторых случаях при решении задач можно вообще обойтись одним плоским чертежом или несколькими (в случае необходимости) и не строить пространственное изображение.

Основным средством решения задач является аналитический метод.

## **МНОГОГРАННИКИ**

К этому разделу отнесем два основных типа задач:

- 1) задачи на вычисление;
- 2) задачи на сечения.

К задачам на вычисление относятся те, где требуется найти линейные элементы правильных призм и пирамид, а именно: сторону основания, боковое ребро, апофему и т. д., затем угловые элементы: двугранные углы при основании, линейные углы при вершине; площади боковой и полной поверхностей, основания.

В основе второго типа задач — на построение — лежит умение построить сечение данного многогранника плоскостью и определить вид этого сечения. В задачах этого типа сечение задается точкой и прямой, тремя точками, двумя точками и прямой, параллельной плоскостью сечения и т. д.

**Многогранником** называется тело, граница которого состоит из многоугольников.

Эти многоугольники называются **гранями**, их стороны — **ребрами**, а вершины — **вершинами** многоугольника.

Отрезки, соединяющие две вершины, не лежащие на одной грани, называются **диагоналями** многогранника.

Многогранники бывают **выпуклые** и **невыпуклые**.

Если многогранник целиком расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани, то он называется **выпуклым**.

Например, тетраэдр, октаэдр, параллелепипед — выпуклые многогранники.

Все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками.

В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше  $360^\circ$ .

## 1. Призма

**Призмой** называется многогранник, у которого две грани  $ABCDE$  и  $A_1B_1C_1D_1E_1$  (**основания призмы**) — равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а все остальные грани ( $AA_1B_1B$ ;  $BB_1C_1C$  и т. д.) — параллелограммы, плоскости которых параллельны одной прямой ( $AA_1$ ,  $BB_1$  и т. д.) (рис. 1).

Параллелограммы  $AA_1B_1B$ ,  $BB_1C_1C$  и т. д. называются **боковыми гранями**, а ребра  $AA_1$ ,  $BB_1$  и т. д. — **боковыми**.

Перпендикуляр  $FF_1$ , опущенный из любой точки одного основания на плоскость другого, называется **высотой** призмы.

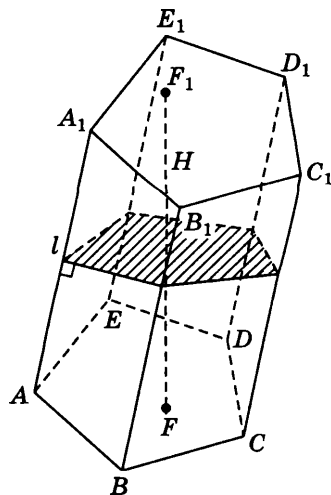


Рис. 1

Если в основании призмы лежит треугольник, четырехугольник и т. д., то призма называется соответственно **треугольной, четырехугольной** и т. д.

Призма называется **прямой**, если боковые ребра перпендикулярны основаниям, в противном случае призма называется **наклонной**.

Если в прямой призме основание — правильный многоугольник, то призма называется **правильной**.

У правильной призмы все боковые грани — **равные прямоугольники**.

Сечение, которое образовано плоскостью, перпендикулярной боковому ребру призмы, называется **перпендикулярным сечением** (см. рис. 1).

### *Произвольная призма*

$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{сеч.}} \cdot l; \quad V = S_{\text{осн.}} \cdot H; \quad V = S_{\text{сеч.}} \cdot l;$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

### *Прямая призма*

$$S_{\text{бок.}} = P \cdot H; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}; \quad V = S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

*Замечание.* Для произвольного параллелепипеда справедливы те же формулы.

## 2. Параллелепипед

**Параллелепипедом** называется призма, основание которой — параллелограмм (рис. 2).

У параллелепипеда **6 граней**, и все они параллелограммы.

Противоположные грани попарно равны и **параллельны**.

Параллелепипед имеет **4 диагонали**, которые пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

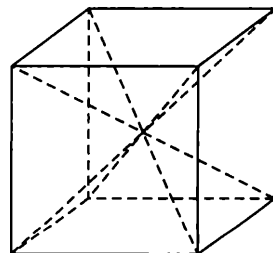


Рис. 2

Любая грань параллелепипеда может быть принята за **основание**.

Параллелепипед, у которого боковые грани — прямоугольники, называется **прямым**.



Прямой параллелепипед, у которого все грани — прямоугольники, называется **прямоугольным** (рис. 3).

Прямоугольный параллелепипед, у которого все грани — квадраты, называется **кубом**.

**Прямоугольный параллелепипед** (см. рис. 3):

$$S_{\text{бок.}} = P \cdot H = 2(a + b)c;$$

$$V = abc;$$

$$S_{\text{полн.}} = 2(ab + bc + ac);$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

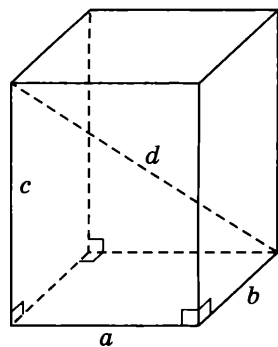


Рис. 3

### Куб

Если  $a$  — ребро куба, то  $V = a^3$ ;  $d = a\sqrt{3}$ ;  $S_{\text{полн.}} = 6a^2$ .

## 3. Пирамида

**Пирамидой** называется многогранник, у которого одна грань — **основание пирамиды** — произвольный многоугольник  $ABCDE$  (рис. 4), а остальные **боковые грани** — треугольники с общей вершиной  $M$ .

Перпендикуляр  $MO$ , опущенный из вершины на основание, называется **высотой пирамиды**.

Если в основании пирамиды треугольник, четырехугольник и т. д., то пирамида называется **треугольной**, **четырёхугольной** и т. д.

**Треугольная пирамида** называется **тетраэдром** (четырёхгранником).

Если в основании пирамиды лежит **правильный** многоугольник, а высота проецируется в **центр** основания, то пирамида называется **правильной** (рис. 5).

В **правильной** пирамиде все боковые ребра равны, все боковые грани — **равнобедренные** треугольники.

Высота боковой грани  $MD$  называется **апофемой** правильной пирамиды.

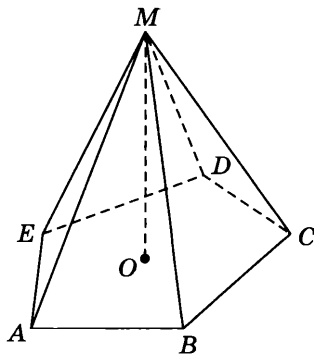


Рис. 4

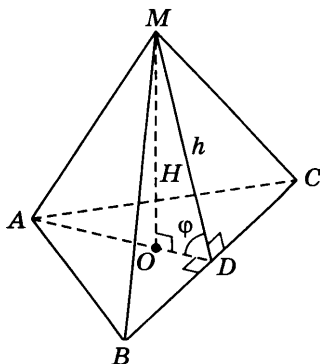


Рис. 5

### Произвольная пирамида

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H.$$

### Правильная пирамида

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} P \cdot h; \quad S_{\text{бок.}} = \frac{S_{\text{осн.}}}{\cos \varphi};$$

$$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}}; \quad V = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot H \text{ (рис. 5).}$$

Если в пирамиде провести сечение, параллельное основанию, то часть пирамиды, заключенная между секущей плоскостью и основанием, называется **усеченной пирамидой** (рис. 6).

Параллельные грани усеченной пирамиды ( $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ ) называются ее **основаниями**, расстояние между ними ( $OO_1$ ) — **высотой**.

Усеченная пирамида называется **правильной**, если пирамида, из которой она получена, была правильной.

Все боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобедренные трапеции.

Высота боковой грани называется **апофемой** правильной усеченной пирамиды.

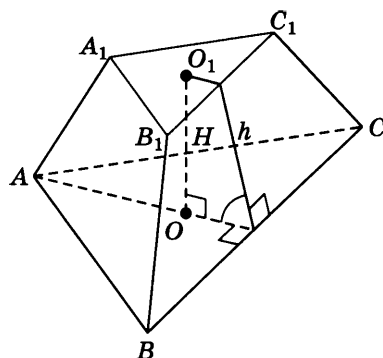


Рис. 6

### Произвольная усеченная пирамида

$$V = \frac{H}{3} (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

### Правильная усеченная пирамида

$$S_{\text{бок.}} = \frac{1}{2} (P_1 + P_2),$$

где  $P_1, P_2$  — периметры оснований.

$S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2$ , где  $S_1, S_2$  — площади оснований (рис. 6).

#### 4. Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды

1. Если в пирамиде  $MA_1A_2...A_n$  все боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы (рис. 7), длины всех боковых ребер равны, то вершина  $M$  пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (эта точка  $O$  является также точкой пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам основания пирамиды).

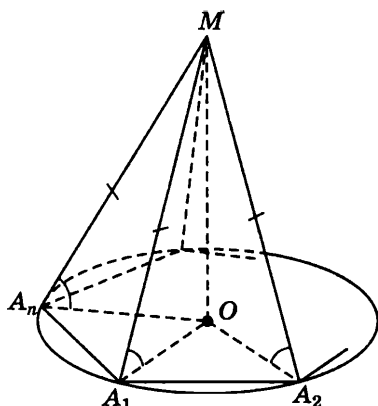


Рис. 7

2. Если в пирамиде  $MA_1A_2...A_n$  все боковые грани образуют с основанием равные углы и длины всех апофем боковых граней равны, то вершина  $M$  пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды. Эта точка является также точкой пересечения биссектрис углов в основании пирамиды (рис. 8).

3. Если высота треугольной пирамиды  $MABC$  проходит через точку пересечения высот  $\triangle ABC$ , лежащего в основании, то противоположные ребра пирамиды перпендикулярны, т. е.  $AM \perp BC$ ,  $MC \perp AB$  и  $MB \perp AC$ . Справедливо и обратное утверждение (рис. 9).

4. Если  $MO$  — высота пирамиды  $MABC$  и  $MA \perp BC$ , то  $(MAO) \perp BC$  (рис. 9).

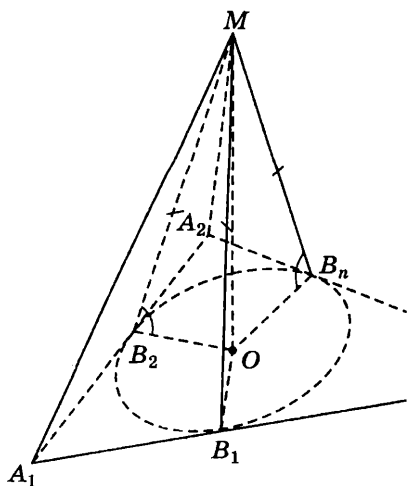


Рис. 8

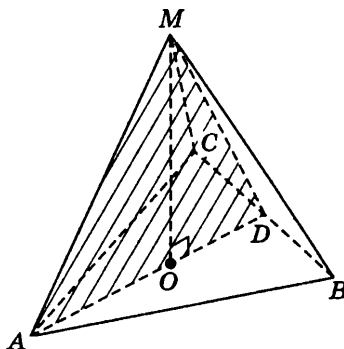


Рис. 9

5. Если в наклонной призме  $A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_n$  боковое ребро  $A_1B_1$  составляет равные углы со сторонами основания, образующими вершину  $A_1$ , то точка  $O$  основания высоты  $B_1O$  лежит на биссектрисе  $\angle A_1$  (рис. 10).

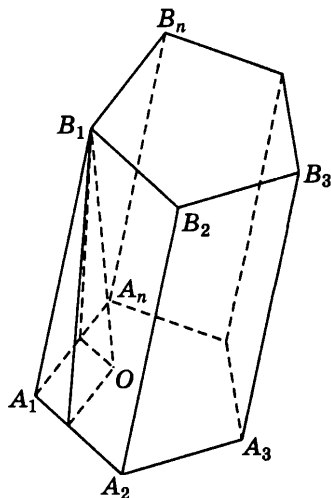


Рис. 10

## КРУГЛЫЕ ТЕЛА

Заметим, что круглые тела по сравнению с многогранниками относительно трудно поддаются изображению. Это замечание прежде всего относится к шару. По этой причине при решении стереометрических задач, как правило, сам шар (а тем более — шары) стараются не изображать, так как многие задачи на круглые тела сводятся к задачам планиметрии.

При решении задач, связанных с цилиндром, используются такие понятия, как высота, образующая, радиус основания, осевое сечение, основание, поверхность (боковая и полная), и соответственно параметры: площадь осевого сечения, площадь боковой и полной поверхностей, площадь основания, объем цилиндра, радиус основания.

Что касается прямого кругового конуса (или просто конуса), то здесь добавляются угол при вершине осевого сечения и угол наклона образующей конуса к плоскости основания.

### 1. Цилиндр

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами  $L$  и  $L_1$ , называется **цилиндром** (рис. 11).

Цилиндрическая поверхность называется **боковой поверхностью цилиндра**, а круги — **основаниями цилиндра**.

Образующие цилиндрической поверхности называются **образующими цилиндра**, а длина образующей — **высотой цилиндра**.

Прямая  $OO_1$  называется **осью цилиндра**.

Всякое сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, представляет собой **прямоугольник**, у которого две стороны — образующие, а две другие — диаметры оснований цилиндра, а само сечение называется **осевым**.

Всякое сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси, является **кругом**.

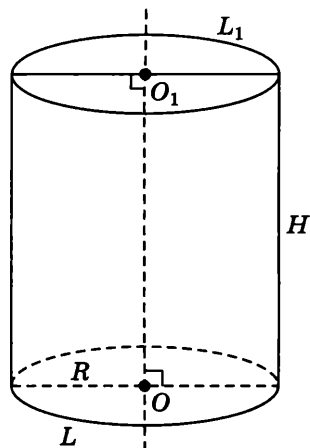


Рис. 11

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi RH; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}};$$

$$S_{\text{полн.}} = 2\pi R(R + H); \quad V = \pi R^2 H.$$

## 2. Конус

**Конусом** называется тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей  $L$  (рис. 12).

Коническая поверхность называется **боковой поверхностью конуса**, а круг — **основанием конуса**.

Точка  $C$  — **вершина конуса**, а образующие конической поверхности — **образующие конуса**.

Прямая  $OC$  называется **осью конуса**, а отрезок  $OC$  называется **высотой конуса**.

Заметим, что конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг любого катета, при этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы, а основание — вращением катета.

Сечение конуса плоскостью, проходящей через ось конуса, называется **осевым**.

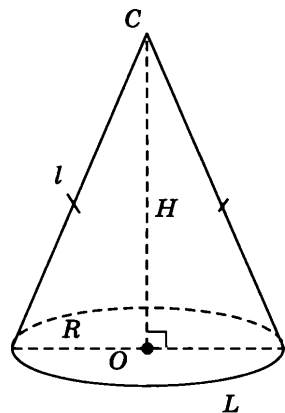


Рис. 12

$$S_{\text{бок.}} = \pi Rl; \quad S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_{\text{осн.}};$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi R(R + l); \quad V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Если конус пересечь плоскостью, перпендикулярной его оси, то та часть конуса, которая заключена между секущей плоскостью и

основанием, называется **усеченным конусом** (рис. 13).

Отрезок, соединяющий центры оснований, называется **высотой** усеченного конуса.

Часть конической поверхности, ограничивающая усеченный конус, называется его **боковой поверхностью**, а отрезки образующих конической поверхности, заключенные между основаниями, называются **образующими** усеченного конуса.

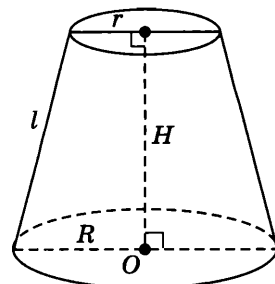


Рис. 13

Усеченный конус может быть получен вращением прямоугольной трапеции вокруг ее боковой стороны, перпендикулярной основаниям.

$$S_{\text{бок.}} = \pi l(R + r); S_{\text{полн.}} = S_{\text{бок.}} + S_1 + S_2; S_1 = \pi R^2;$$

$$S_2 = \pi r^2; V = \frac{\pi H}{3} (R^2 + Rr + r^2).$$

### 3. Шар

**Шаровой**, или **сферической**, **поверхностью** (или просто **сферой**) называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от одной точки — **центра шара** (точка  $O$ , рис. 14).

Тело, ограниченное шаровой поверхностью, называется **шаром**.

Шар можно получить вращением полуокруга (или круга) около его диаметра.

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр  $O$ , представляет собой наибольший круг.

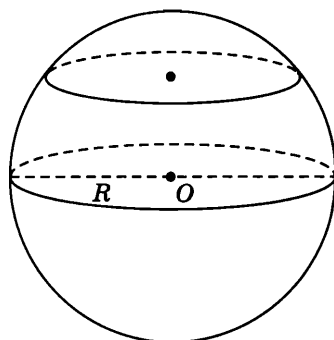


Рис. 14

Если плоскость имеет со сферой только одну общую точку, то она называется **касательной плоскостью к сфере**, а их общая точка — **точкой касания сферы**.

Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен касательной плоскости. Верно и обратное.

Многогранник называется **описанным около сферы** (шара), если сфера касается всех его граней. При этом сфера называется **вписанной в многогранник**.

Многогранник называется **вписанным в сферу**, если все его вершины лежат на сфере. При этом сфера называется **описанной около многогранника**.

$$S_{\text{шара}} = 4\pi R^2 = \pi D^2; \quad V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{6}\pi D^3.$$

### 1. Шаровой сегмент.

Если  $S$  — площадь сферической поверхности сегмента,  $h$  — высота,  $V$  — объем,  $r$  — радиус основания, то

$$S = 2\pi R h = \pi D h = \pi(r^2 + h^2);$$

$$S_{\text{полн.}} = \pi(2Rh + r^2) = \pi(h^2 + 2r^2);$$

$$V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3}h\right) \quad (\text{рис. 15}).$$

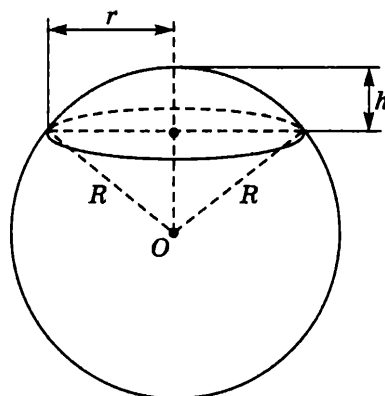


Рис. 15

### 2. Шаровой сектор.

$$S = \pi R(2h + r);$$

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{6}\pi d^2 h \quad (\text{рис. 15}).$$

### 3. Шаровой пояс.

Если  $h$  — высота шарового пояса,  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы оснований, то

$$S_{\text{бок.}} = 2\pi R h = \pi D h;$$

$$S = \pi(2Rh + r_1^2 + r_2^2);$$

$$V = \frac{1}{6}\pi h(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2) \quad (\text{рис. 16}).$$

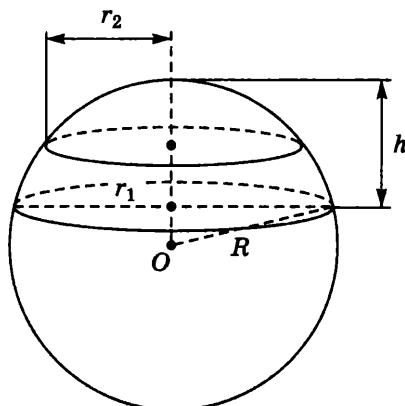


Рис. 16

## ВЕКТОРЫ

### Координаты вектора

1. Если  $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$  — данные векторы, то вектор  $\vec{a} + \vec{b}$  имеет координаты  $\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$ .

2. Если  $\vec{a} \{x_1; y_1; z_1\}$  и  $\vec{b} \{x_2; y_2; z_2\}$  — данные векторы, то вектор  $\vec{a} - \vec{b}$  имеет координаты  $\{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$ .

3. Если  $\vec{a} \{x; y; z\}$  — данный вектор,  $\alpha$  — данное число, то вектор  $\alpha\vec{a}$  имеет координаты  $\{\alpha x; \alpha y; \alpha z\}$ .

**Связь между координатами векторов и координатами точек**

$$\overrightarrow{OB} \{x_2; y_2; z_2\}$$

$$\overrightarrow{OA} \{x_1; y_1; z_1\}$$

Вектор  $\overrightarrow{AB}$  имеет координаты

$$\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}.$$

Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала (рис. 17).

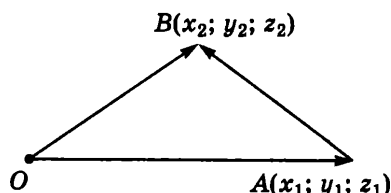


Рис. 17

**Правило треугольника**

Для любых трех точек  $A, B$  и  $C$  имеет место равенство  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  (рис. 18).

**Правило параллелограмма**

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} \text{ (рис. 19).}$$

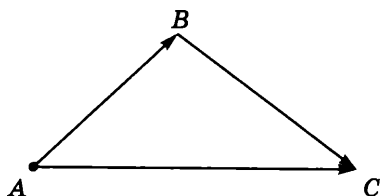


Рис. 18

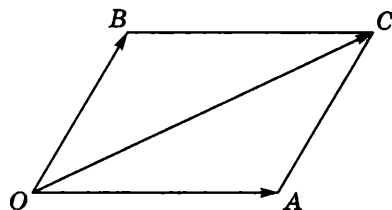


Рис. 19

**Правило многоугольника**

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-1}A_n} = \overrightarrow{A_1A_n},$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$  — произвольные точки.

**Правило параллелепипеда**

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}.$$

$OD$  — диагональ параллелепипеда;

$OA, OB, OC$  — ребра (рис. 20).

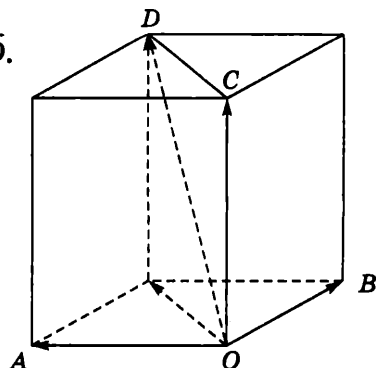


Рис. 20



**Разность векторов**

$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ , где  $A, B, O$  — произвольные точки (рис. 21).

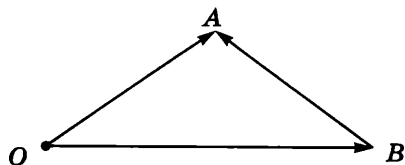


Рис. 21

**Признак коллинеарности двух ненулевых векторов**

$$\vec{b} = k\vec{a}, \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}, \quad \text{где } k \neq 0; \vec{a} \neq 0; \vec{b} \neq 0.$$

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1), \quad \vec{b} = (x_2; y_2; z_2).$$

**Признак компланарности трех векторов**

Если вектор  $\vec{c}$  можно разложить по векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , т. е. представить в виде  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ , где  $x, y$  — числа, то векторы  $\vec{a}, \vec{b}$  и  $\vec{c}$  компланарны.

**Середина отрезка**

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

$O$  — произвольная точка,

$M$  — середина отрезка  $AB$ .

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), \quad z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \quad (\text{рис. 22}).$$

**Точка пересечения медиан треугольника**

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}),$$

$O$  — произвольная точка пространства,

$M$  — точка пересечения медиан  $\triangle ABC$  (рис. 23).

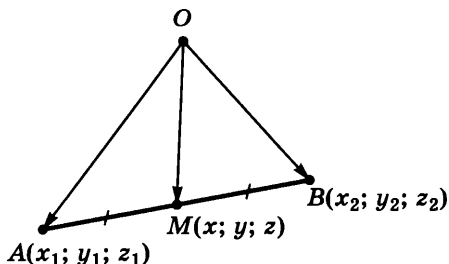


Рис. 22

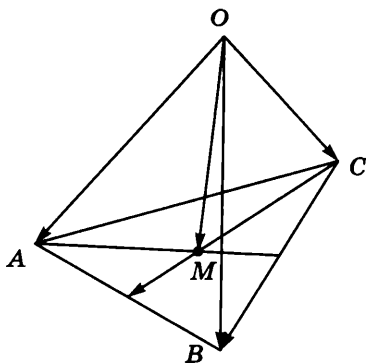


Рис. 23

### Скалярное произведение векторов

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{ab});$$

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,$$

где  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ .

### Признак перпендикулярности двух векторов

Если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\vec{a}\vec{b} = 0$ .

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0,$$

где  $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ .

### Умножение вектора на число

$p\vec{a} = (px; py; pz)$ , где  $p$  — число,  $\vec{a} = (x; y; z)$ .

### Длина вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ где } \vec{a} = (x; y; z).$$

### Угол между ненулевыми векторами

$$\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

### Расстояние между точками

Если  $A(x_1; y_1; z_1)$ ,  $B(x_2; y_2; z_2)$ , то

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

### Уравнение сферы

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

где  $(a, b, c)$  — координаты центра,  $R$  — радиус.

Если  $a = b = c = 0$ , то  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  — уравнение сферы с центром в начале координат.

**Уравнение прямой, проходящей через две точки  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$ .**

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

**Угол между плоскостями**

Если  $\varphi$  — угол между плоскостями, заданными уравнениями  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ , то

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

**Расстояние от точки до плоскости**

Если  $d$  — расстояние от точки  $M_0(x_0; y_0; z_0)$  до плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$ , то

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

# ОТВЕТЫ

.....

## § 1

1.  $\arcsin 0,8$ . 2.  $5\sqrt{53}$ . 3. 9 или  $\frac{\sqrt{306}}{4}$ . 4.  $7\sqrt{3}$ . 5.  $\frac{30}{13}$ . 6.  $\frac{96}{25}$ . 7.  $\frac{54}{13}$ .  
8.  $50^\circ$ . 9.  $2\sqrt{85}$ . 10.  $60^\circ$ . 11.  $\sqrt{35}$ . 12.  $30^\circ$ . 13.  $\frac{2\sqrt{661}}{15}$ . 14. 13.  
15. 5. 16.  $\frac{40}{3}$ . 17. 4. 18. 21. 19. 6,25. 20.  $\sqrt{3}+1$ . 21.  $\frac{1}{3}(3+\sqrt{7})$ .  
22.  $\sqrt{3}+1$ . 23. 10. 24.  $2(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$ . 25. 2. 26.  $18\left(\frac{5}{\sqrt{13}}+1\right)$ .  
27.  $\frac{256}{17}$ . 28.  $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)$ . 29.  $3:16$ . 30. 14. 31. 80. 32.  $45^\circ$ ;  
 $75^\circ$ ;  $60^\circ$ . 33.  $6\sqrt{3}$ . 34.  $27(2-\sqrt{3})$ . 35.  $\frac{75}{4}$ . 36. 156. 37.  $\frac{9}{\sqrt{7}}$ .  
38.  $1:2$ . 39. 58,8. 40.  $5\sqrt{41}$ . 41.  $2:3$ . 42. 36. 43. 7. 44. 4,5.  
45.  $\frac{1}{40}(35-\sqrt{265})$ . 46.  $\frac{169\sqrt{231}}{81}$ . 47. 49. 48. 75. 49.  $8\sqrt{35}$ .  
50.  $32\sqrt{3}$ . 51.  $2\sqrt{5}$ . 52.  $\frac{\sqrt{34}}{5}$ . 53.  $2\sqrt{2}$ . 54.  $MN=\sqrt{2}$ ,  $R=\sqrt{5}$ .  
55.  $4\sqrt{5}$ . 56. 24. 57. 80. 58.  $\sqrt{11}$ . 59. 40. 60.  $\frac{18}{\sqrt{145}}$ . 61. 113. 62. 3.  
63. 56 или 26. 64.  $54\sqrt{3}$ . 65.  $60^\circ$ . 66. 12. 67. 25. 68. 1,5.

## § 2

1.  $\operatorname{arctg} \frac{15}{32}$ . 2.  $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{39}}{12}$ . 3. 5. 4.  $\operatorname{arctg} \frac{2}{3}$ . 5.  $\frac{\sqrt{30}}{5}$ . 6.  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .  
7.  $\arccos \frac{41}{49}$ . 8.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ . 9. а)  $\frac{\sqrt{11}}{2}$ ; б) 0. 10. 1,5. 11.  $3\sqrt{61}$ . 12. 36.  
13.  $\operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{8}$ . 14.  $\frac{21\sqrt{39}}{25}$ . 15. 399. 16.  $800\sqrt{3}$ . 17.  $\frac{21\sqrt{11}}{2}$ .

18.  $7\sqrt{6}$ . 19.  $\frac{16}{\sqrt{6}}$ . 20.  $\frac{\sqrt{57}}{6}$ . 21.  $\frac{\sqrt{6}}{12}(\sqrt{3}+1)$ . 22.  $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$ . 23. 18.
24.  $\frac{8}{3}$ . 25. 20,25. 26.  $\frac{32\sqrt{6}}{9}$ . 27.  $\frac{12}{19}$ . 28.  $17:127$ . 29.  $1:3$ . 30. 16.
31.  $28\sqrt{51}$ . 32.  $\arccos\frac{5}{16}$ . 33.  $30^\circ$ . 34. 1. 35.  $\frac{39\sqrt{39}}{4}$ . 36.  $1:1$ .
37.  $18\sqrt{2}$ . 38.  $90^\circ$ . 39.  $\frac{12}{5}$ . 40. 32. 41.  $\arcsin\frac{3\sqrt{55}}{40}$ . 42.  $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$ .
43.  $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ . 44.  $3\sqrt{61}$ . 45. 399. 46.  $\frac{21\sqrt{11}}{2}$ . 47.  $\frac{\sqrt{57}}{6}$ . 48.  $\arccos\frac{1}{3}$ .
49.  $\frac{12}{19}$ . 50.  $1:3$ . 51.  $28\sqrt{51}$ . 52.  $\arccos\frac{5}{16}$ . 53.  $\frac{39\sqrt{39}}{4}$ . 54. 32.
55.  $90^\circ$ . 56.  $\sqrt{11}$ . 57.  $20\sqrt{14}$ . 58.  $\frac{4\sqrt{6}}{5}$ . 59.  $6\sqrt{39}$ . 60.  $\frac{63\sqrt{17}}{40}$ .

### § 3

1.  $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3}$ . 2.  $\arccos\frac{3\sqrt{15}}{20}$ . 3.  $90^\circ$ . 4.  $\arccos\frac{\sqrt{42}}{21}$ . 5.  $\frac{\sqrt{21}}{7}$ .
6.  $\arcsin\frac{1}{4}$ . 7.  $\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}$ . 8.  $\operatorname{arctg}\frac{3\sqrt{2}}{8}$ . 9.  $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{6}$ . 10.  $30^\circ$ .
11.  $\arcsin\frac{\sqrt{15}}{5}$ . 12.  $\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}$ . 13.  $\arccos\frac{\sqrt{285}}{19}$ . 14.  $\arccos\frac{\sqrt{30}}{10}$ .
15.  $\arccos\frac{3}{5}$ . 16.  $\arccos\frac{2}{3}$ .

# ЛИТЕРАТУРА

*Атанасян Л. С.* Геометрия: учебник для 10–11 классов общеобразовательных учреждений. — М.: Просвещение, 2018.

*Балаян Э. Н.* Математика. Планиметрия. Stereометрия. Задачи для подготовки к ЕГЭ. Профильный уровень. — Ростов н/Д: Феникс, 2021.

*Балаян Э. Н.* Репетитор по геометрии для 10–11 классов. — 3-е изд. — Ростов н/Д: Феникс, 2024.

# СОДЕРЖАНИЕ

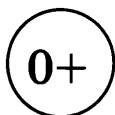
Предисловие .....	3
<b>Раздел 1. Планиметрия .....</b>	<b>4</b>
§ 1. Задачи с решениями.....	4
1.1. Треугольники .....	4
1.2. Четырехугольники .....	51
Задачи для самостоятельного решения.....	80
<b>Раздел 2. Стереометрия .....</b>	<b>91</b>
§ 2. Задачи с решениями .....	91
2.1. Пирамида .....	91
2.2. Призма .....	121
2.3. Цилиндр .....	136
2.4. Конус.....	141
Задачи для самостоятельного решения.....	147
§ 3. Применение метода координат.....	157
3.1. Угол между двумя прямыми .....	157
3.2. Угол между прямой и плоскостью .....	163
3.3. Угол между двумя плоскостями .....	167
3.4. Расстояние от точки до прямой .....	170
3.5. Расстояние от точки до плоскости.....	172
3.6. Расстояние между двумя прямыми .....	174
Задачи для самостоятельного решения.....	176
<b>Раздел 3. Краткие теоретические сведения</b> <b>по курсу планиметрии 7–9 классов .....</b>	<b>178</b>
1. Углы .....	178
2. Многоугольник .....	180
3. Правильные многоугольники.....	180
4. Треугольник .....	181
5. Признаки равенства треугольников .....	183
6. Неравенства треугольника.....	184
7. Определение вида треугольника по его сторонам .....	184
8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства).....	184
9. Признаки равенства прямоугольных треугольников .....	184
10. Четыре замечательные точки треугольника .....	186
11. Произвольный треугольник .....	187
12. Теорема Чевы.....	188
13. Теорема Менелая.....	188
14. Теорема синусов .....	189
15. Теорема косинусов.....	189

16. Площадь треугольника.....	189
17. Равносторонний (правильный) треугольник .....	189
18. Подобные треугольники .....	190
19. Признаки подобия треугольников.....	190
20. Четырехугольник .....	191
21. Параллелограмм.....	192
22. Трапеция.....	193
23. Прямоугольник .....	195
24. Ромб .....	195
25. Квадрат.....	195
26. Окружность .....	196
27. Свойства касательных к окружности .....	196
28. Окружность и треугольник .....	197
29. Окружность и четырехугольник .....	197
30. Углы и окружность.....	198
31. Метрические соотношения в окружности.....	199
32. Длина окружности. Площадь круга и его частей.....	200
33. Понятие вектора.....	200
34. Равенство векторов .....	200
35. Координаты вектора .....	201
36. Действия над векторами.....	201
37. Скалярное произведение векторов .....	202
38. Скалярное произведение в координатах.....	202
39. Свойства скалярного произведения векторов.....	202
40. Уравнение окружности .....	203
41. Уравнение прямой .....	204

#### **Раздел 4. Краткие теоретические сведения**

<b>по курсу стереометрии 10–11 классов.....</b>	<b>205</b>
<b>Многогранники .....</b>	<b>205</b>
1. Призма .....	206
2. Параллелепипед.....	207
3. Пирамида.....	208
4. Дополнительные соотношения между элементами призмы и пирамиды.....	210
<b>Круглые тела .....</b>	<b>211</b>
1. Цилиндр .....	211
2. Конус .....	212
3. Шар .....	213
<b>Векторы .....</b>	<b>214</b>
<b>Ответы .....</b>	<b>219</b>
<b>Литература .....</b>	<b>221</b>





*Учебное издание*

**Балаян Эдуард Николаевич**

# **МАТЕМАТИКА**

**ПОДГОТОВКА К ЕГЭ**

**ПЛАНИМЕТРИЯ. СТЕРЕОМЕТРИЯ**

*Разбор заданий с развернутым ответом*

**10–11 классы**

***Профильный уровень***

Ответственный редактор *С. А. Осташов*

Формат 70 × 100/16. Бумага газетная.

Тираж 3 000 экз. Заказ №0385.

Издатель и Изготовитель: ООО «Феникс»

Юр. и факт. адрес: 344011, Россия, Ростовская обл.,

г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150.

Тел./факс: (863) 261-89-50, 261-89-59.

Изготовлено в России. Дата изготовления: 07.2024.

Срок годности не ограничен.

Отпечатано в ООО «БПК-Групп»

Юр. адрес: 142400, Россия, Московская обл., Ногинский район,

г. Ногинск, ул. Индустриальная, д. 40Б, каб. 106.

Факт. адрес: 142400, Россия, Московская обл., Ногинский район,

г. Ногинск, ул. Индустриальная, д. 40Б.