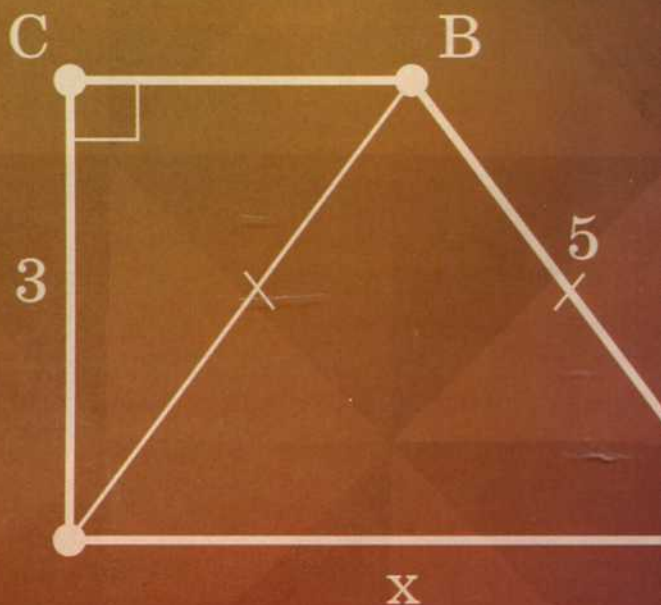


7
класс



Э.Н. Балаян



ГЕОМЕТРИЯ

РЕШЕБНИК К КНИГЕ Э.Н. БАЛАЯНА

.....
Геометрия. Задачи на готовых чертежах
для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ (7-9 классы)

Большая перемена

Э.Н. Балаян

ГЕОМЕТРИЯ

Решебник

к книге Э.Н. Балаяна

ГЕОМЕТРИЯ

Задачи на готовых чертежах

для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ (7–9 классы)

7 класс

Ростов-на-Дону

 **Феникс**
2019

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.

Б20 Геометрия : решебник к книге Э.Н. Балаяна «Геометрия. Задачи на готовых чертежах для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ : 7–9 классы». 7 класс / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2019. — 46, [1] с. : ил. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-31526-2

В предлагаемой книге приводятся подробные решения всех без исключения задач из книги Э.Н. Балаяна «Геометрия. Задачи на готовых чертежах для 7–9 классов».

Сложные задачи отмечены значком *, а наиболее трудные — **.

Книга адресована в первую очередь учащимся, испытывающим трудности в решении задач. Ученикам будет целесообразно обращаться к решебнику для проверки решенных задач или в случае невозможности самостоятельного решения той или иной задачи.

Кроме того, приводятся краткие теоретические сведения по курсу геометрии 7 класса, сопровождаемые определениями, теоремами, основными свойствами.

Пособие предназначено для учащихся общеобразовательных школ, лицеев, колледжей, а также будет интересно и учителям.

ISBN 978-5-222-31526-2

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

© Балаян Э.Н., 2018
© Оформление, ООО «Феникс», 2018

К таблице 1

СМЕЖНЫЕ УГЛЫ

1. Пусть $\angle cb = x$, тогда $\angle ac = x + 25$.

Так как сумма смежных углов равна 180° , то получим уравнение:

$$x + x + 25 = 180, 2x = 180 - 25, 2x = 155,$$

откуда $x = 155 : 2 = 77,5$. Значит, $\angle cb = 77,5^\circ = 77^\circ 30'$, тогда $\angle ac = 77,5^\circ + 25^\circ = 102,5^\circ = 102^\circ 30'$.

Ответ: $\angle ac = 102^\circ 30'$, $\angle cb = 77^\circ 30'$.

2. Пусть $\angle kn = x$, тогда $\angle mk = 8x$. Получим уравнение: $x + 8x = 180$, $9x = 180$, $x = 180 : 9 = 20$.

Значит, $\angle mk = 20^\circ \cdot 8 = 160^\circ$, $\angle kn = 20^\circ$.

Ответ: $\angle mk = 160^\circ$, $\angle kn = 20^\circ$.

3. Пусть $\angle CDB = 4x$, тогда $\angle ADC = 5x$.

Получим уравнение: $4x + 5x = 180$, $9x = 180$, откуда $x = 180 : 9 = 20$.

Значит, $\angle CDB = 20^\circ \cdot 4 = 80^\circ$, $\angle ADC = 20^\circ \cdot 5 = 100^\circ$.

Ответ: $\angle ADC = 100^\circ$, $\angle CDB = 80^\circ$.

4. Пусть $\angle KPN = x$, тогда $\angle MPK = 2,6x$.

Имеем уравнение: $x + 2,6x = 180$, или $3,6x = 180$, откуда $x = 180 : 3,6 = 50$.

Тогда $\angle KPN = 50^\circ$, $\angle MPK = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$
(или $\angle MPK = 50^\circ \cdot 2,6 = 130^\circ$).

Ответ: $\angle MPK = 130^\circ$, $\angle KPN = 50^\circ$.

5. $80\% = 80 : 100 = 0,8$.

Пусть $\angle PLR = x$, тогда $\angle RLS = 0,8x$.

Так как $\angle PLR$ и $\angle RLS$ смежные, то получим уравнение:

$$x + 0,8x = 180, \text{ или } 1,8x = 180, \text{ откуда } x = 180 : 1,8 = 100.$$

Значит, $\angle PLR = 100^\circ$, $\angle RLS = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

Ответ: $\angle PLR = 100^\circ$, $\angle RLS = 80^\circ$.

6. Так как $\angle PKN = 40^\circ$ (по условию), то $\angle MKP = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ (по свойству смежных углов).

По условию задачи KS — биссектриса угла PKN , тогда $\angle PKS = \angle SKN = 40^\circ : 2 = 20^\circ$.

Значит, $\angle MKS = \angle MKP + \angle PKS = 140^\circ + 20^\circ = 160^\circ$.

Ответ: $\angle MKS = 160^\circ$.

7. По условию $\angle BCD = 120^\circ$, тогда $\angle ACD = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Так как CE — биссектриса $\angle ACD$, то $\angle DCE = \angle ACE = 60^\circ : 2 = 30^\circ$.
Значит, $\angle BCE = 120^\circ + 30^\circ = 150^\circ$.

Ответ: $\angle BCE = 150^\circ$.

8. По условию OS — биссектриса $\angle POT$, OQ — биссектриса $\angle TOR$.
Пусть $\angle POS = \angle SOT = x$, $\angle TOQ = \angle QOR = y$.

Так как $\angle POR = 180^\circ$, то получим $x + x + y + y = 180$, или
 $2x + 2y = 180$, откуда $x + y = 90$.

Значит, $\angle SOQ = x + y = 90^\circ$.

Ответ: $\angle SOQ = 90^\circ$.

9. Поскольку LT — биссектриса $\angle KLR$ (по условию), то
 $\angle KLT = \angle TLR = 40^\circ : 2 = 20^\circ$.

Значит, $\angle TLN = 180^\circ - \angle KLT = 180^\circ - 20^\circ = 160^\circ$.

Ответ: $\angle TLN = 160^\circ$.

10. Так как $\angle COB = 90^\circ$ и $\angle BOE = 30^\circ$ (по условию), то
 $\angle COE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Если $\angle COB = 90^\circ$, то $\angle AOC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ (смежные углы равны, если они оба прямые).

Так как OD — биссектриса $\angle AOC$, то $\angle AOD = \angle DOC = 90^\circ : 2 = 45^\circ$,
тогда $\angle DOE = \angle DOC + \angle COE = 45^\circ + 60^\circ = 105^\circ$.

Ответ: $\angle DOE = 105^\circ$.

11. $\angle MSN = 180^\circ$ (развернутый угол).

Кроме того, $\angle KSP = 90^\circ$ (по условию), тогда $\angle MSK + \angle PSN = 180^\circ -$
 $-\angle KSP = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Так как $\angle MSP = \angle NSK$ (по условию), то $\angle MSK = \angle PSN = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

Значит, $\angle MSP = \angle MSK + \angle KSP = 45^\circ + 90^\circ = 135^\circ$.

Ответ: $\angle MSP = 135^\circ$.

12*. По условию MN — биссектриса $\angle CMD$.

Пусть $\angle AMC = \angle BMD = x$, $\angle CMN = \angle DMN = y$.

Так как $\angle AMB = 180^\circ$, то получим уравнение $x + y + y + x = 180$, или
 $2x + 2y = 180$, откуда $x + y = 90$. Значит, $\angle AMN = \angle BMN = x + y = 90^\circ$.

Ответ: $\angle AMN = \angle BMN = 90^\circ$.

К таблице 2

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

1. $\angle ab = \angle a_1b_1 = 120^\circ$ как вертикальные, $\angle ab_1 = 180^\circ - \angle ab = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ (по свойству смежных углов).

Ответ: $\angle a_1b_1 = 120^\circ$, $\angle ab_1 = 60^\circ$.

2. По условию задачи $\angle 1 + \angle 3 = 70^\circ$.

Но $\angle 1 = \angle 3$ как вертикальные, значит, $\angle 1 = \angle 3 = 70^\circ : 2 = 35^\circ$.

Кроме того, $\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные, тогда $\angle 2 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$, $\angle 2 = \angle 4 = 145^\circ$ как вертикальные.

Ответ: $\angle 2 = \angle 4 = 145^\circ$.

3. $\angle mn + \angle nm_1 = 180^\circ$ и $\angle mn_1 + \angle n_1m_1 = 180^\circ$ (по свойству смежных углов).

По условию задачи $\angle mn_1 + \angle m_1n_1 + \angle m_1n = 240^\circ$, тогда $\angle mn = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$.

Ответ: $\angle mn = 120^\circ$.

4. Пусть $\angle 2 = x$, тогда $\angle 1 = 120 + x$.

Но $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (по свойству смежных углов).

Тогда получим уравнение $120 + x + x = 180$, или $2x = 180 - 120$, $2x = 60$, $x = 30$.

Значит, $\angle 2 = 30^\circ$, тогда $\angle 4 = \angle 2 = 30^\circ$ (как вертикальные), $\angle 3 = 180^\circ - \angle 2 = 150^\circ$.

Ответ: $\angle 3 = 150^\circ$, $\angle 4 = 30^\circ$.

5. Пусть $\angle 1 = \angle 3 = x$, $\angle 2 = \angle 4 = y$ (по свойству вертикальных углов), тогда получим $2 \cdot (x + x) = y + y$, или $4x = 2y$, откуда $y = 2x$.

Но $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (по свойству смежных углов).

Значит, $x + y = 180$. Так как $y = 2x$, то $x + 2x = 180$, $3x = 180$, $x = 60$, тогда $y = 60 \cdot 2 = 120$.

Итак, $\angle 1 = \angle 3 = 60^\circ$, $\angle 2 = \angle 4 = 120^\circ$.

Ответ: $\angle 1 = \angle 3 = 60^\circ$, $\angle 2 = \angle 4 = 120^\circ$.

6*. Так как $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ и $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$, то $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360^\circ - \angle 4$. Но $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 5 \cdot \angle 4$ (по условию), тогда получим $5 \cdot \angle 4 = 360^\circ - \angle 4$, или $6 \cdot \angle 4 = 360^\circ$, откуда $\angle 4 = 360^\circ : 6 = 60^\circ$.

Ответ: $\angle 4 = 60^\circ$.

7*. Заметим, что $\angle 2 = \angle 3$ как вертикальные. Пусть $\angle 2 = \angle 3 = x$, тогда $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$ (по условию), или $\angle 1 = 2x$. Но $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, значит, $2x + x = 180$, $3x = 180$, $x = 60$.

Следовательно, $\angle 1 = 2x = 60^\circ \cdot 2 = 120^\circ$, $\angle 2 = \angle 3 = 60^\circ$.

Ответ: $\angle 1 = 120^\circ$, $\angle 2 = \angle 3 = 60^\circ$.

8. Так как $AB \perp CD$, то $\angle COB = \angle AOC = \angle AOD = \angle BOD = 90^\circ$. По условию OE — биссектриса $\angle COB$, тогда $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ : 2 = 45^\circ$.

Значит, $\angle AOE = \angle AOC + \angle 1 = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$.

Ответ: $\angle AOE = 135^\circ$.

9. По условию $\angle 1 = 40^\circ$, тогда $\angle 3 = \angle 1 = 40^\circ$ как вертикальные; $\angle 2 = 90^\circ - \angle 3 = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$, $\angle 4 = 90^\circ$.

Ответ: $\angle 2 = 50^\circ$, $\angle 3 = 40^\circ$, $\angle 4 = 90^\circ$.

10. Так как $\angle 1 = 125^\circ$, то $\angle 3 = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$.

Но $\angle 3 = \angle 2 = 55^\circ$ как вертикальные, тогда $\angle 4 = 90^\circ - \angle 3 = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$.

Ответ: $\angle 2 = \angle 3 = 55^\circ$, $\angle 4 = 35^\circ$.

11*. Пусть $\angle 2 = \angle 3 = x$, тогда $\angle 1 = 180^\circ - (\angle 2 + \angle 3) = 180^\circ - 2x$.

По условию $\angle 1 - \angle 2 = 75^\circ$, значит, $180 - 2x - x = 75$, или $3x = 180 - 75 = 105$, откуда $x = 105 : 3 = 35$, т. е. $\angle 2 = \angle 3 = 35^\circ$, $\angle 1 = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ (по свойству смежных углов).

Ответ: $\angle 1 = 110^\circ$, $\angle 2 = \angle 3 = 35^\circ$.

12. Заметим, что $\angle bc = \angle 2$, тогда $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle bc + \angle 3 = 180^\circ$.

Ответ: 180° .

13*. $\angle COE = \angle FOD = 30^\circ$ как вертикальные; $\angle COB = \angle COE + \angle EOB = 30^\circ + 40^\circ = 70^\circ$, тогда $\angle AOC = 180^\circ - \angle COB = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ (по свойству смежных углов).

Ответ: $\angle AOC = 110^\circ$.

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Так как $BC = BD$ и $\angle ABC = \angle ABD$ (по условию), AB — общая сторона, то $\triangle ABC = \triangle ABD$ (по первому признаку равенства треугольников), что и требовалось доказать.

2. По условию $MN = PK$, $\angle NMK = \angle MKP$, MK — общая сторона. Значит, $\triangle MNK = \triangle MPK$ (по первому признаку равенства треугольников).

3. По условию $RO = OT$, $OP = OS$. Кроме того, $\angle ROS = \angle POT$ (как вертикальные).

Тогда $\triangle ROS = \triangle POT$ (по первому признаку).

4. Так как $EO = ON$, $\angle E = \angle N$ (по условию) и $\angle EOF = \angle MON$ (как вертикальные), то $\triangle EOF = \triangle MON$ по стороне и прилежащим к ней углам (т. е. по второму признаку равенства треугольников).

5. По условию $\angle Q = \angle FPM$ и $QM = MP$.

Кроме того, $\angle QMK = \angle FMP$ как вертикальные.

Значит, $\triangle QMK = \triangle FMP$ (по второму признаку равенства треугольников).

6. Поскольку $\angle DAC = \angle DCA$ (по условию) и $\angle BAC = \angle DCA$ (по условию), AC — общая сторона, то $\triangle BAC = \triangle DAC$ (по второму признаку).

Из равенства треугольников следует, что $AB = DC$, $\angle B = \angle D$. Кроме того, $\angle BAO = \angle DCO$, тогда $\triangle BAO = \triangle DCO$ (также по второму признаку).

7. По условию $ME = NF$, $\angle EMN = \angle FNM$, MN — общая сторона. Значит, $\triangle MEN = \triangle NFM$ (по первому признаку равенства треугольников).

Из равенства треугольников следует, что $\angle E = \angle F$, $\angle FMN = \angle ENM$, тогда $\angle EMP = \angle FNP$.

Следовательно, $\triangle MEP = \triangle NFP$ по стороне и прилежащим к ней углам, т. е. по второму признаку равенства треугольников.

8. По условию $AB = AD$, $BC = CD$, AC — общая сторона. Значит, $\triangle ABC = \triangle ADC$ по трем сторонам, т. е. по третьему признаку равенства треугольников.

9. По условию $\angle ROP = \angle SOP$, $\angle RPO = \angle SPO$, OP — общая сторона. Значит, $\triangle ROP = \triangle SOP$ (по второму признаку равенства треугольников).

10. По условию $OC = OD$, $\angle ODA = \angle OCB$, $\angle O$ — общий, тогда $\triangle ODA = \triangle OCB$ (по второму признаку). Из равенства треугольников сле-

дует, что $\angle A = \angle B$, $AC = BD$ (так как $OA = OB$ и $OC = OD$, то $AC = BD$). Кроме того, $\angle ACB = \angle ADB$ (как углы смежные, соответственно $\angle OCB$ и $\angle ODA$). Значит, $\triangle ACM = \triangle BMD$ (по второму признаку), где M — точка пересечения BC и AD .

11. Так как $KM = KN$, $\angle MKP = \angle NKP$ (по условию) и KP — общая сторона, то $\triangle MKP = \triangle NKP$ по первому признаку равенства треугольников.

12. Так как $AB = CD$, $BC = AD$ (по условию) и AC — общая сторона, то $\triangle ABC = \triangle ADC$ (по третьему признаку равенства треугольников).

13. По условию $\angle ACD = \angle BCD$, $\angle ADC = \angle BDC$, CD — общая сторона. Значит, $\triangle ACD = \triangle BCD$ (по второму признаку).

14. $\angle PRQ = \angle SQR$, $\angle PQR = \angle SRQ$ (по условию), RQ — общая сторона, тогда $\triangle PRQ = \triangle SRQ$ (по второму признаку).

15. По условию задачи $\angle ADB = \angle CBD$, $\angle ADC = \angle ABC$, тогда $\angle CDB = \angle ABD$. Кроме того, BD — общая сторона, тогда $\triangle ABD = \triangle BCD$ (по второму признаку).

16. Заметим, что $\triangle KTM = \triangle STP$ (по первому признаку равенства треугольников), так как $KT = TP$, $MT = ST$ (по условию), $\angle KTM = \angle STP$ как вертикальные.

17. Так как $AC = BD$, $BC = AD$ (по условию) и AB — общая сторона, то $\triangle ACB = \triangle ADB$ (по третьему признаку). Из равенства треугольников следует, что $\angle C = \angle D$ и так как $BC = AD$, $AO = BO$, то $CO = OD$. Кроме того, $\angle AOC = \angle BOD$ (как вертикальные). Значит, $\triangle AOC = \triangle BOD$ (по второму признаку).

Замечание. $\triangle ACB = \triangle ADB$ также по первому признаку, так как $AC = BD$, $\angle CAB = \angle ABD$ и AB — общая сторона.

18. $\triangle ACB = \triangle BEC$ (по третьему признаку), так как $AC = BE$, $AB = CE$ (по условию), CB — общая сторона. Кроме того, $\triangle ACD = \triangle ECB$ (по стороне и прилежащим к ней углам), т. е. по второму признаку, так как AC — общая сторона, $\angle DAC = \angle CAB$ и $\angle ACD = \angle ECB$ (по условию).

19. $\triangle PQT = \triangle PRS$ (по второму признаку), так как $PS = PT$, $\angle PSR = \angle PTQ$ (по условию) и $\angle P$ — общий.

Из равенства треугольников следует, что $PQ = PR$, и так как $PS = PT$ (по условию), то $SQ = TR$. Кроме того, $\angle QSM = \angle RTM$ как углы, смежные равным углам $\angle PSR$ и $\angle PTQ$.

Выходит, что $\triangle QSM = \triangle RTM$ (по второму признаку).

20. Так как $\angle BED = \angle CED$, то $\angle AEB = \angle AEC$ (как смежные соответственно данным).

Кроме того, $BE = EC$ (по условию), AE — общая сторона, значит, $\triangle AEB = \triangle AEC$ (по первому признаку).

21. 1) $\triangle CFP = \triangle EKP$ (по второму признаку), так как $\angle C = \angle E$, $CP = EP$ (по условию), $\angle CPF = \angle EPK$ как вертикальные.

2) Из равенства этих треугольников следует, что $PF = PK$ (а значит, $CK = EF$) и $CF = EK$, тогда $CD = ED$. Следовательно, $\triangle CDK = \triangle EDF$ (по первому признаку).

22. Так как $\angle MEP = \angle KFN$ (по условию), то $\angle PEN = \angle KFM$ (как смежные соответственно данным). Кроме того, $\angle K = \angle P$ и $KF = PE$ (по условию). Значит, $\triangle MKF = \triangle PEN$ (по второму признаку).

23. 1) $\triangle AED = \triangle BED$ (по первому признаку), так как $AE = BE$, $\angle AED = \angle BED$ (по условию) и DE — общая сторона. Из равенства этих треугольников следует, что $AD = DB$.

2) Так как $\angle AED = \angle BED$, то $\angle AEC = \angle BEC$ (как смежные соответственно данным), $AE = BE$ (по условию), CE — общая сторона. Значит, $\triangle AEC = \triangle BEC$ (по первому признаку).

Из равенства этих треугольников следует, что $AC = BC$.

3) $\triangle ADC = \triangle BDC$ (по третьему признаку), так как DC — общая сторона, $AD = BD$, $AC = BC$ (по доказанному).

24. 1) По условию задачи $\angle KML = \angle PML$, тогда $\angle KMO = \angle PMO$ (как углы, соответственно смежные данным). Кроме того, $KM = PM$, MO — общая сторона, значит, $\triangle KOM = \triangle POM$ по первому признаку (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства этих треугольников следует, что $KO = OP$.

2) $\triangle MNK = \triangle MNP$ (по первому признаку), так как $KM = MP$ (по условию), $\angle KMN = \angle PMN$ (по доказанному) и MN — общая сторона. Из равенства этих треугольников следует, что $KN = PN$.

3) $\triangle KON = \triangle PON$ (по третьему признаку).

25. 1) $\triangle BDC = \triangle FBC$ (по второму признаку), так как $\angle BDC = \angle BCF$, $\angle DCB = \angle CBF$ (по условию) и BC — общая сторона. Из равенства этих треугольников следует, что $BD = FC$, $BF = DC$.

2) $\triangle ABE = \triangle DBC$ (по первому признаку), так как $AB = BC$, $BE = BD$ (по условию), $\angle ABE = \angle DBC$ как вертикальные. Из равенства треугольников следует, что $AE = DC$.

3) $\triangle AEB = \triangle CBF$ (по третьему признаку).

26. 1) $\triangle AMB = \triangle CND$ (по третьему признаку), так как $AB = DC$, $AM = CN$ (по условию) и $BM = DN$ (MN — общая часть, $DM = BN$ (по условию)). Из равенства треугольников следует, что $\angle ABM = \angle CDN$.

2) $\triangle ABD = \triangle BDC$ (по первому признаку), так как $AB = DC$ по условию, $\angle ABM = \angle CDN$ (по доказанному) и BD — общая сторона. Тогда $AD = BC$.

3) $\triangle AMD = \triangle BNC$ (по третьему признаку), так как $AM = CN$, $DM = BN$ (по условию), $AD = BC$ по доказанному.

27*. 1) $\triangle EOD = \triangle COF$ (по первому признаку), так как $OE = OF$, $OD = OC$ (по условию), $\angle EOD = \angle FOC$ как вертикальные, тогда $\angle D = \angle C$.

2) $\triangle AOD = \triangle BOC$ (по второму признаку), так как $OD = OC$, $\angle AOD = \angle BOC$ как вертикальные и $\angle D = \angle C$ (по доказанному).

3) $\triangle AOE = \triangle BOF$ (по второму признаку), так как $OE = OF$, $\angle AEO = \angle BFO$ (по условию) и $\angle AOE = \angle BOF$ как вертикальные.

28*. 1) $\triangle ADC = \triangle ABC$ (по третьему признаку), так как $DC = AB$, $AD = BC$ (по условию), AC — общая сторона. Из равенства треугольников следует, что $\angle DAC = \angle ACB$ и $\angle ACD = \angle CAB$.

2) $\triangle ADE = \triangle CBF$ (по первому признаку), так как $AD = BC$, $AE = CF$ (по условию) и $\angle DAE = \angle BCF$ (по доказанному).

3) $\triangle DEC = \triangle AFB$ (по первому признаку), так как $DC = AB$, $CE = AF$ (так как $AE = CF$, EF — общая часть), $\angle DCE = \angle BAF$ (по доказанному).

29*. 1) Так как $CE = AF$ и EF — общая часть, то $AE = FC$, тогда $\triangle AEB = \triangle CFD$ (по третьему признаку), так как $AB = CD$, $BE = DF$ (по условию), $AE = FC$ (по доказанному). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle BAE = \angle FCD$.

2) $\triangle ABC = \triangle ACD$ (по первому признаку), так как $AB = DC$, AC — общая сторона, $\angle BAE = \angle FCD$ (по доказанному). Из равенства этих треугольников следует, что $BC = AD$.

3) $\triangle BEC = \triangle AFD$ (по третьему признаку).

30*. 1) $\triangle KMN = \triangle KLN$ (по третьему признаку), так как $MN = KL$, $KM = LN$ (по условию), KN — общая сторона. Из равенства треугольников следует, что $\angle MKN = \angle LNK$ и $\angle LKN = \angle MNK$, $\angle M = \angle L$.

2) $\triangle KPL = \triangle MSN$ (по второму признаку), так как $KL = MN$, $\angle PKL = \angle SNM$ (по доказанному), $\angle KLP = \angle SMN$ (так как $\angle M = \angle L$ по доказанному, LP и MS — биссектрисы по условию).

Из равенства этих треугольников следует, что $PL = SM$ и $KP = NS$.

3) $\triangle KMS = \triangle LPN$ (по любому из трех признаков равенства треугольников).

31*. 1) По условию $\angle MKC = \angle NPC$, тогда $\angle CKR = \angle CPS$ (как смежные данным). Кроме того, $KR = SP$ и $KC = CN$, значит, $\triangle CKR = \triangle CPS$ (по первому признаку). Из равенства треугольников следует, что $CR = CS$.

2) $\triangle KCS = \triangle PCR$ (по первому признаку), так как $KC = PC$ (по условию), $\angle SKC = \angle RPC$ и $CR = CS$ (по доказанному).

32*. 1) $\triangle DOE = \triangle COF$ (по первому признаку), так как $OE = OF$, $DO = CO$ (по условию), $\angle DOE = \angle COF$ (как вертикальные). Из равенства треугольников следует, что $DE = CF$.

2) $\triangle DEF = \triangle CFE$ (по третьему признаку), так как EF — общая сторона, $DE = CF$ (по доказанному), $DF = CE$ (по условию). Из равенства треугольников следует, что $\angle DFE = \angle CEF$.

3) $\triangle PAF = \triangle CBE$ (по первому признаку), так как $DF = CE$ (по условию), $AF = BE$ ($AE = BF$, EF — общая часть), $\angle DFA = \angle CEB$ (по доказанному).

Из равенства треугольников следует, что $AD = BC$.

4) $\triangle AED = \triangle BFC$ (по третьему признаку).

ПЕРИМЕТР РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Пусть $AB = x$, тогда $AC = BC = 2x$. Так как $P = 20$ см, то получим уравнение: $x + 2x + 2x = 20$, $5x = 20$, $x = 4$.

Значит, $AB = 4$, $AC = BC = 4 \cdot 2 = 8$.

Ответ: $AC = BC = 8$, $AB = 4$.

2. В $\triangle KMN$ $\angle M = \angle N$ (по условию), значит, $\triangle KMN$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника). Пусть $MN = x$, тогда $KM = KN = 10 + x$. Так как $P = 26$, то получим уравнение:

$$x + 2(10 + x) = 26; \quad 3x = 26 - 20; \quad 3x = 6, \quad x = 2.$$

Значит, $MN = 2$, $MK = NK = 10 + 2 = 12$.

Ответ: $MK = KN = 12$, $MN = 2$.

3. $RS = ST$ (по условию), значит, $\triangle RST$ — равнобедренный (по определению). Пусть $RS = ST = x$.

Так как $RT = 1,3$ и $P = 2,5$, то получим $1,3 + 2x = 2,5$; $2x = 1,2$, $x = 0,6$.

Значит, $RS = ST = 0,6$.

Ответ: $RS = ST = 0,6$.

4. $\angle Q = \angle E$ (по условию), значит, $\triangle QRE$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника). Пусть $QE = x$, тогда $RQ = RE = 3,5x$. Так как $P = 6,4$, то получим уравнение:

$$x + 2 \cdot 3,5x = 6,4; \quad x + 7x = 6,4; \quad 8x = 6,4, \quad x = 0,8.$$

Значит, $QE = 0,8$, $QR = RE = 0,8 \cdot 3,5 = 2,8$.

Ответ: $QR = RE = 2,8$, $QE = 0,8$.

5. $\angle E = \angle F$, т. е. $\triangle MEF$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника).

Пусть $EF = 3x$, $FM = EM = 2x$. Так как $P = 35$, то получим уравнение:

$$3x + 2x + 2x = 35; \quad 7x = 35, \quad x = 5.$$

Тогда $EF = 5 \cdot 3 = 15$, $EM = MF = 5 \cdot 2 = 10$.

Ответ: $EF = 15$, $EM = MF = 10$.

6. $BC = AC$, значит, $\triangle ABC$ — равнобедренный (по определению). Так как $P = 3,4$ и $BC = AC = 1,3$, то $AB = P - 2BC = 3,4 - 2,6 = 0,8$.

Ответ: $AB = 0,8$.

7. $ME = EN$, значит, $\triangle MEN$ — равнобедренный (по определению). Пусть $ME = EN = x$, тогда $2,3 - x = 1$, $x = 1,3$, т. е. $ME = EN = 1,3$.

Так как $MN = 2,3$, то $P = MN + 2ME = 2,3 + 2,6 = 4,9$.

Ответ: $P = 4,9$.

8*. $\angle M = \angle N$ (по условию), тогда $\triangle MKN$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника). По условию $KM + MR = 25$, тогда $P = KM + KN + MR + RN$. Но $KN = KM$ и $RN = MR$, значит, $P = 2KM + 2MR = 2(KM + MR) = 50$.

Ответ: $P = 50$.

9*. $\angle D = \angle E$, т. е. $\triangle DFE$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника).

Так как $DF + FM + DM = 28$, то $FM = 28 - (DF + DM)$. По условию $P = 36$, или $FD + FE + DE = 36$; $FE = FD$ и $DE = 2 \cdot DM$, тогда $2FD + 2DM = 36$, или $FD + DM = 18$, значит, $FM = 28 - 18 = 10$.

Ответ: $FM = 10$.

10. $RT = ST$, т. е. $\triangle RST$ — равнобедренный.

Пусть $RT = ST = 4x$, $RS = 7x$. Так как $P = 45$, то $4x + 4x + 7x = 45$, или $15x = 45$; $x = 3$.

Значит, $RS = 7x = 21$, $TS = TR = 4x = 12$.

Ответ: $RT = TS = 12$, $RS = 21$.

11.** $AC = BC$, т. е. $\triangle ABC$ — равнобедренный (по определению); $CD = DB$ (по условию).

Пусть $AC = 2x$, $CD = DB = x$, $AB = 8$. Тогда $P_1 = 2x + x + AD = 3x + AD$; $P_2 = AB + AD + DB = 8 + AD + x$.

По условию $P_1 - P_2 = 2$, значит, $3x + AD - (8 + AD + x) = 2$, или $2x - 8 = 2$, откуда $2x = 10$, т. е. $AC = 10$, $BC = AC = 10$.

Ответ: $AC = BC = 10$.

12.** Аналогично № 11 имеем:

$AC = BC = 2x$, $CD = DB = x$, $AB = 8$.

$P_1 = AC + CD + AD = 2x + x + AD = 3x + AD$;

$P_2 = AB + AD + DB = 8 + AD + x$.

По условию $P_2 - P_1 = 2$, или $8 + AD + x - (3x + AD) = 2$.

$8 - 2x = 2$, $2x = 6$, т. е. $AC = BC = 6$.

Ответ: $AC = BC = 6$.

13.** Аналогично № 11 имеем:

$MK = KN = 12$, $P_1 = MK + KS + MS = 12 + 6 + MS = 18 + MS$;
 $P_2 = MS + SN + MN = MS + 6 + MN$.

По условию $P_1 - P_2 = 3$ или $18 + MS - (MS + 6 + MN) = 3$, $12 - MN = 3$, откуда $MN = 9$.

Ответ: $MN = 9$.

14.** Аналогично № 13 имеем:

$P_1 = MK + KS + MS = 12 + 6 + MS = 18 + MS$;

$P_2 = MS + SN + MN = MS + 6 + MN$.

По условию $P_2 - P_1 = 3$, или $MS + 6 + MN - (18 + MS) = 3$, $MN - 12 = 3$, откуда $MN = 15$.

Ответ: $MN = 15$.

СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

.....

Найдите $\angle CBA$.

1. $AC = BC$, значит, $\triangle ABC$ — равнобедренный (по определению), тогда $\angle CBA = \angle CAB = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$.

Ответ: 75° .

2. $AB = BD$ (по условию), значит, $\triangle ABD$ — равнобедренный (по определению); $\angle A = \angle D = 70^\circ$ (как углы при основании), тогда $\angle CBA = \angle A + \angle D = 140^\circ$ (как внешний угол $\triangle ABD$).

Ответ: 140° .

3. Аналогично № 2 имеем:

$\angle M = \angle N = 75^\circ$, тогда $\angle MBN = 180^\circ - (75^\circ + 75^\circ) = 30^\circ$. Но $\angle MBN = \angle CBA = 30^\circ$ — как вертикальные.

Ответ: 30° .

4. $AB = BD$ (по условию), значит, $\triangle ABD$ — равнобедренный (по определению). Медиана BM является и биссектрисой, и высотой. Так как $\angle A = \angle D = 45^\circ$, то $\angle ABD = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$, тогда $\angle ABM = 90^\circ : 2 = 45^\circ$ и $\angle CBA = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

Ответ: 135° .

Замечание. $\angle CBA$ — внешний угол $\triangle ABD$, тогда $\angle CBA = \angle A + \angle D = 90^\circ$ (это свойство изучается позднее, в § 1, п. 30: Л.С. Атанесян и др. Геометрия 7–9).

5. Аналогично № 4 имеем:

$\angle D = \angle C = 40^\circ$, тогда $\angle DBC = 180^\circ - (40^\circ + 40^\circ) = 100^\circ$.

Значит, $\angle CBA = 100^\circ : 2 = 50^\circ$.

Ответ: 50° .

6. Аналогично № 4 имеем:

$\angle BCD = 30^\circ \cdot 2 = 60^\circ$, тогда $\angle CBD = \angle D = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$.

Значит, $\angle CBA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Ответ: 120° .

7. Аналогично № 4 имеем:

в равнобедренном $\triangle ACD$ медиана AB является и высотой.

Значит, $\angle CBA = 90^\circ$.

Ответ: 90° .

8. Аналогично № 4 имеем:

$\angle E = \angle D = 70^\circ$, тогда $\angle EBD = 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ) = 40^\circ = \angle CBA$ — как вертикальные.

Ответ: 40° .

9. $AB = BC$ (по условию), значит, $\triangle ABC$ — равнобедренный (по определению) и $\angle A = \angle ACB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Тогда $\angle CBA = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

10. Аналогично № 4 имеем:

AB — медиана, высота и биссектриса равнобедренного $\triangle CBD$. Заметим, что $\angle BDC = \angle C = 60^\circ$, тогда $\angle CBD = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$ и $\angle CBA = 60^\circ : 2 = 30^\circ$.

Ответ: 30° .

11. Так как $\angle A = \angle B$ (по условию), то $\triangle ABC$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника). $\angle ACB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$. Тогда $\angle CBA = (180^\circ - 100^\circ) : 2 = 40^\circ$.

Ответ: 40° .

12. $BC = AB$ (по условию), тогда $\triangle ABC$ — равнобедренный (по определению) и $\angle A = \angle ACB$ — по свойству. По условию CD — биссектриса $\angle ACB$.

Пусть $\angle A = 2x$, тогда $\angle ACD = x$, значит, $2x + x + 60 = 180$; $3x = 120$, $x = 40$, $\angle A = \angle ACB = 2x = 80^\circ$, тогда $\angle CBA = 180^\circ - (80^\circ + 80^\circ) = 20^\circ$.

Ответ: 20° .

13. $DE = BE$ (по условию), значит, $\triangle DEB$ — равнобедренный (по определению); $\angle D = \angle EBD = 60^\circ$ (как углы при основании), тогда $\angle EBC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Так как BA — биссектриса $\angle CBE$, то $\angle CBA = 120^\circ : 2 = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

14. В равнобедренном $\triangle ABD$ ($AB = BD$ — по условию) высота BC является биссектрисой, тогда $\angle BDA = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ = \angle A$.

Значит, $\angle ABD = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$ и $\angle CBA = 120^\circ : 2 = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

15. В равнобедренном $\triangle ABD$ ($AB = BD$) медиана BC является биссектрисой, $\angle ABD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, тогда $\angle CBA = 120^\circ : 2 = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

16. $CB = CD$ (по условию), значит, $\triangle CBD$ — равнобедренный и $\angle CDB = \angle CBD = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. Тогда $\angle CBA = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Ответ: 110° .

Замечание. Внешние углы при основании равнобедренного треугольника равны.

17*. В равнобедренном $\triangle AMC$ ($AM = MC$) медиана MN является биссектрисой, тогда $\angle AMC = 50^\circ \cdot 2 = 100^\circ$, а $\angle CMB = \angle CBA = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ ($CB = CM$ — по условию).

Ответ: 80° .

18.** Аналогично № 17 имеем:

CE — биссектриса равнобедренного $\triangle ACD$ ($AC = CD$, CE — медиана, по условию), тогда $\angle ACD = 50^\circ$.

Но $\angle ACD = \angle CBA$ (как углы при основании равнобедренного $\triangle ABC$ ($AB = AC$ — по условию)).

Значит, $\angle CBA = 50^\circ$.

Ответ: 50° .

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Укажите пары параллельных прямых (отрезков) и докажите их параллельность.

1. По условию $\angle ACB = \angle CAD$, тогда $AD \parallel BC$ (по I признаку параллельности прямых).

2. $a \parallel b$, так как накрест лежащие углы равны по 70° (по I признаку параллельности прямых).

3. $m \parallel n$, так как соответственные углы равны (оба по 90°) — по II признаку параллельности прямых.

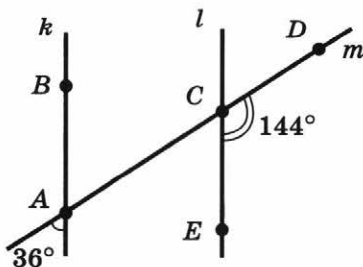
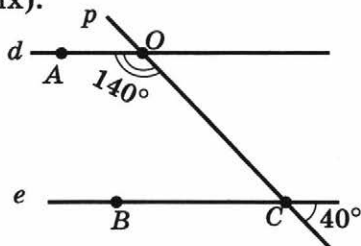
4. $\triangle MON = \triangle KOP$ (по I признаку равенства треугольников), так как $MO = OP$, $NO = KO$ (по условию) и $\angle MON = \angle KOP$ (как вертикальные). Из равенства треугольников следует, что $\angle M = \angle P$ (и $\angle N = \angle K$), а так как они накрест лежащие, то $MN \parallel KP$ (по I признаку параллельности прямых).

5. $\angle S = \angle P = 90^\circ$ (по условию), и так как они накрест лежащие, то $SR \parallel TR$ (по I признаку параллельности прямых).

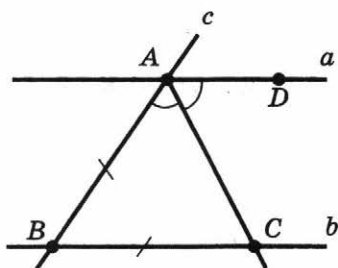
6. Заметим, что $\angle BCO = 40^\circ$, и так как $\angle AOC + \angle BCO = 180^\circ$, то $d \parallel e$ (по III признаку параллельности прямых).

7. $\triangle RMS = \triangle MQS$ (по I признаку равенства треугольников), так как $RS = MQ$, $\angle RSM = \angle QMS$ и MS — общая сторона. Тогда $\angle RMS = \angle QSM$. Значит, $RS \parallel MQ$ и $RM \parallel SQ$ (по I признаку параллельности прямых).

8. $\angle BAC = 36^\circ$ — как вертикальный с данным. Так как $\angle BAC + \angle ECD = 36^\circ + 144^\circ = 180^\circ$, то $k \parallel l$ (по III признаку параллельности прямых).



9. По условию $AB = BC$, значит, $\triangle ABC$ — равнобедренный (по определению), тогда $\angle BAC = \angle BCA$ (по свойству). Но $\angle BAC = \angle CAD$. Значит, $\angle CAD = \angle BCA$, и так как они накрест лежащие, то $a \parallel b$ (по I признаку параллельности прямых).



10. По условию $\angle QPN = \angle MNP$, и так как они накрест лежащие, то $PQ \parallel MN$ (по I признаку параллельности прямых).

Кроме того, $\triangle QPN = \triangle MNP$ (по I признаку равенства треугольников), так как $PQ = MN$, $\angle QPN = \angle MNP$ и PN — общая сторона. Из равенства треугольников следует, что $\angle MPN = \angle PNQ$, тогда $PM \parallel QN$ (также по I признаку параллельности прямых).

11. $\triangle ABE = \triangle CDE$ (по I признаку равенства треугольников), так как $BE = EC$; $AE = ED$ (по условию) и $\angle AEB = \angle CED$ (как вертикальные).

Из равенства треугольников следует, что $\angle B = \angle DCB$, и так как они накрест лежащие, то $AB \parallel CD$.

12. Решается аналогично № 9.

13. $MF = MQ$ (по условию), значит, $\triangle MFQ$ — равнобедренный, тогда $\angle F = \angle Q$. Но $\angle NMQ = \angle F + \angle Q$ и MS — биссектриса $\angle NMQ$, тогда $\angle SMQ = \angle Q$, и так как они накрест лежащие, то $MS \parallel FQ$.

14. $\triangle AOB = \triangle COD$ (по I признаку равенства треугольников), так как $BO = OD$, $AO = OC$ (по условию) и $\angle AOB = \angle COD$ — как вертикальные. Из равенства треугольников следует, что $\angle ABO = \angle CDO$, тогда $AB \parallel CD$ (по I признаку параллельности прямых).

Аналогично из равенства $\triangle BOC$ и $\triangle AOD$ имеем $AD \parallel BC$.

15. $a \parallel b$, так как соответственные углы равны (II признак параллельности прямых); $b \parallel c$, так как внешние (а значит и внутренние) накрест лежащие углы равны. Если $a \parallel b$, $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

Итак, $a \parallel b \parallel c$.

16. $MK = KF$ и $QF = QP$ (по условию), значит, $\triangle MKF$ и $\triangle QFP$ — равнобедренные, тогда $\angle M = \angle MFK$ и $\angle PFQ = \angle P$. Но $\angle MFK = \angle PFQ$ — как вертикальные. Значит, $\angle M = \angle P$, тогда $MK \parallel QP$ (по I признаку параллельности прямых).

17. $AB = BC$, значит, $\triangle ABC$ — равнобедренный, тогда $\angle BAC = \angle BCA$ (по свойству).

Но $\angle BAC = \angle CAD$ (AC — биссектриса), следовательно, $\angle BCA = \angle CAD$, т. е. $BC \parallel AD$ (по I признаку параллельности прямых).

18. $\triangle PLQ$ — равнобедренный ($PL = PQ$), тогда $\angle PLQ = \angle PQL$ (по свойству равнобедренного треугольника). Но $\angle PMR = \angle PLQ$ (по условию), значит, $\angle PMR = \angle PQL$, т. е. $MR \parallel LQ$ (по I признаку параллельности прямых).

19. Так как $\angle CAB = \angle KMN$ (по условию) и они соответственные, то $AC \parallel MK$ (по II признаку параллельности прямых).

$AC = BC$, т. е. $\triangle ABC$ — равнобедренный, тогда $\angle A = \angle B$. Аналогично $\angle M = \angle N$, тогда $\angle B = \angle N$, т. е. $BC \parallel NK$.

20. $SP = ST$, значит, $\triangle PST$ — равнобедренный, тогда $\angle P = \angle STP$ (по свойству).

Аналогично $\angle N = \angle KMN$. Но $\angle P = \angle N$ (по условию), значит, $SP \parallel KN$ и $ST \parallel MK$ (по I признаку параллельности прямых).

21. $\triangle CMN$ — равнобедренный (по условию), тогда $\angle CMN = \angle CNM$ (по свойству).

Так как $\angle MNB = 115^\circ$, то $\angle CNM = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$.

Значит, $\angle CMN = 65^\circ = \angle A$, т. е. $MN \parallel AB$ (по II признаку параллельности прямых).

22. $KM = KN$ (по условию), тогда $\angle M = \angle KNM = 60^\circ$ (по свойству), значит, $\angle KNE = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Но NP — биссектриса $\angle KNE$, тогда $\angle PNE = 60^\circ$. Значит, $MK \parallel NP$ (по II признаку параллельности прямых).

23. $\triangle MFE = \triangle NFE$ (по II признаку равенства треугольников), так как $\angle MEF = \angle NEF$, $\angle MFE = \angle NFE = 90^\circ$ и FE — общая сторона.

Из равенства треугольников следует, что $\angle N = \angle EMF$. Выходит, что $\angle N = \angle SMN$, т. е. $SM \parallel NE$ (по I признаку параллельности прямых).

24. В $\triangle ABC$ высота BD является и медианой (по условию), значит, $\triangle ABC$ — равнобедренный, тогда $\angle BAC = \angle C$. Но $\angle EAC = \angle BAC$, значит, $\angle EAC = \angle C$, т. е. $AE \parallel CB$ (по I признаку параллельности прямых).

25. $MR = NR$ (по условию), значит, $\triangle MRN$ — равнобедренный, т. е. $\angle RMN = \angle RNM = 30^\circ$ (по свойству); $\angle MRN = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, тогда $\angle NRP = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Так как RS — биссектриса $\angle NRP$, то $\angle PRS = 30^\circ$, и так как $\angle M$ и $\angle PRS$ — соответственные и равны, то $MN \parallel RS$.

26. По условию $\angle PTS = \angle MTS$, т. е. TS — биссектриса $\angle PTM$. Но $\triangle PTM$ — равнобедренный, так как $PT = MT$, значит, биссектриса TS является и высотой, т. е. $\angle TSM = 90^\circ$. Но $\angle TSM = \angle QMK = 90^\circ$, и так как эти углы соответственные, то $ST \parallel MQ$.

$$27. \angle QNM = 180^\circ - \angle RNQ = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ.$$

По условию $NQ = NM$, тогда $\triangle NMQ$ — равнобедренный (по определению). Значит, $\angle NMQ = \angle NQM = (180^\circ - 140^\circ) : 2 = 20^\circ$. Но $\angle NQM = \angle QMP = 20^\circ$, и так как они накрест лежащие, то $NQ \parallel MP$ (по I признаку параллельности прямых).

28. Так как $PE = PR$, то $\triangle PER$ — равнобедренный (по определению), тогда $\angle PER = \angle PRE$ (по свойству). Но $\angle PER = \angle REF$ (ER — биссектриса).

Значит, $\angle PRE = \angle REF$, и так как они накрест лежащие, то $PR \parallel EF$ (по I признаку параллельности прямых).

29. Так как $\angle A = \angle B$ и они накрест лежащие, то $AC \parallel BF$ (по I признаку параллельности прямых).

Аналогично $CD \parallel EF$ (так как внешние накрест лежащие углы равны, то и смежные им внутренние накрест лежащие углы равны).

30. 1) $BE \parallel DF$, так как соответственные углы BEF и DFM равны (по II признаку параллельности прямых).

2) $\angle BEA = \angle DFC$ (как смежные данным), тогда $\triangle BAE = \triangle DCF$ (по I признаку равенства треугольников). Из равенства этих треугольников следует, что $\angle A = \angle DCF$, и так как они соответственные, то $BA \parallel DC$ (по II признаку параллельности прямых).

31*. Так как $EO \perp FK$ и $FO = OK$ (по условию), то $\triangle FEK$ — равнобедренный (по свойству), тогда $\angle EFK = \angle EKF$. Но $\angle FKN = \angle EKF$, значит, $\angle EFK = \angle FKN$, т. е. $EF \parallel KN$ (по I признаку параллельности прямых).

32**. $PR = PE$ (по условию), значит, $\triangle PER$ — равнобедренный (по определению), т. е. $\angle PER = \angle PRE$ (по свойству). Но $\angle PER = \angle REF$ (ER — биссектриса), тогда $\angle PRE = \angle REF$, и так как они накрест лежащие, то $PR \parallel EF$ (по I признаку параллельности прямых).

33**. Так как $\triangle QNR$ — равнобедренный ($QN = QR$) и $\angle NQR = 30^\circ$, тогда $\angle RNQ = \angle NRQ = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$, тогда $\angle KNQ = 30^\circ + 75^\circ = 105^\circ$. Но $\angle NQM = 30^\circ + 45^\circ = 75^\circ$, и так как $\angle KNQ + \angle NQM = 105^\circ + 75^\circ = 180^\circ$, то $KN \parallel MQ$ (по III признаку параллельности прямых).

СВОЙСТВА УГЛОВ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

1. Так как $a \parallel b$, то $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (сумма односторонних углов).

Пусть $\angle 2 = x$, тогда $\angle 1 = 32 + x$. Имеем: $32 + x + x = 180$, $2x = 148$, $x = 74$.

Значит, $\angle 2 = 74^\circ$, $\angle 1 = 32^\circ + 74^\circ = 106^\circ$.

Ответ: 106° ; 74° .

2. Пусть $\angle 1 = 3x$, тогда $\angle 2 = 2x$.

Так как $m \parallel n$, то $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ (сумма односторонних углов).

Но $\angle 3 = \angle 2$ (как вертикальные).

Значит, $3x + 2x = 180$, $5x = 180$, $x = 36$.

Тогда $\angle 1 = 3x = 108^\circ$, $\angle 2 = 2x = 72^\circ$.

Ответ: 108° ; 72° .

3. По условию $k \parallel d$, l — секущая, $\angle 1 = \angle 3$ — как вертикальные.

$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ — как сумма односторонних углов.

Пусть $\angle 2 = x$, тогда $\angle 3 = \angle 1 = 2,6x$.

Имеем: $x + 2,6x = 180$; $3,6x = 180$, откуда $x = 50$. Значит, $\angle 2 = 50^\circ$, $\angle 1 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

Ответ: $\angle 1 = 130^\circ$; $\angle 2 = 50^\circ$.

4. $\angle 2 = \angle 3$ и $\angle 1 = \angle 4$ — как вертикальные.

Пусть $\angle 1 = x$, тогда $\angle 2 = \angle 3 = \frac{4}{5}x$.

Так как $a \parallel b$, c — секущая, то $\angle 4 + \angle 3 = 180^\circ$,

или $x + \frac{4}{5}x = 180^\circ$, $\frac{9}{5}x = 180$, $x = 180 \cdot \frac{5}{9} = 100$.

Значит, $\angle 1 = x = 100^\circ$, $\angle 2 = \angle 3 = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$.

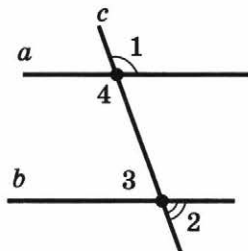
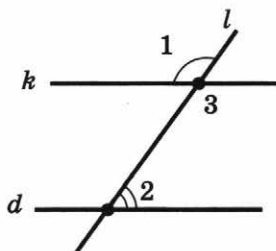
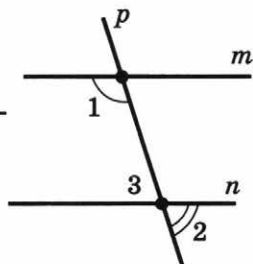
Ответ: $\angle 1 = 100^\circ$, $\angle 2 = 80^\circ$.

5. $60\% = 0,6$. Пусть $\angle 2 = x$, тогда $\angle 1 = 0,6x$.

Так как $m \parallel n$, то $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (сумма внешних односторонних углов). Имеем: $x + 0,6x = 180$, $1,6x = 180$, откуда $x = 112,5$.

Значит, $\angle 2 = 112,5^\circ = 112^\circ 30'$, $\angle 1 = 180^\circ - 112^\circ 30' = 67^\circ 30'$.

Ответ: $\angle 1 = 67^\circ 30'$; $\angle 2 = 112^\circ 30'$.



6. $\angle NKM = 90^\circ$, $\angle NKP = 120^\circ$, тогда $\angle PKM = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$. По условию $KP \parallel NM$, значит, $\angle PKM = \angle M = 30^\circ$ (как накрест лежащие) и $\angle N = 90^\circ - \angle M = 60^\circ$.

Ответ: $\angle N = 60^\circ$; $\angle M = 30^\circ$.

7. Так как $\angle C = 90^\circ$ и $AC \parallel BK$, то $\angle KBC = 90^\circ$, тогда $\angle ABC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ и $\angle A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

Ответ: $\angle A = 60^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$.

Замечание. $\angle A = \angle ABK = 60^\circ$ — как накрест лежащие при параллельных прямых BK и AC и секущей BC .

8. $\angle NPK = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ$, тогда $\angle N = 180^\circ - (25^\circ + 112^\circ) = 43^\circ$. Но $KN \parallel ME$ (по условию), тогда $\angle EMN = \angle N = 43^\circ$ (как накрест лежащие).

Ответ: 43° .

9. По условию $AD \parallel BE$, тогда $\angle EBA = \angle A = 25^\circ$ (как накрест лежащие). Значит, $\angle ACD = 180^\circ - (25^\circ + 43^\circ) = 112^\circ$ и $\angle DCB = 180^\circ - 112^\circ = 68^\circ$.

Ответ: 68° .

Замечание. $\angle DCB = \angle A + \angle D$ (внешний угол $\triangle ACD$).

10. Так как $CE \parallel BA$, то $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$ — как накрест лежащие, тогда $\angle 1 + \angle 2 = 130^\circ$.

Но $\angle 1 = \angle 2$, значит, $\angle 1 = \angle 2 = 130^\circ : 2 = 65^\circ$.

$\angle ACB = \angle 1 = 65^\circ$ — как накрест лежащие при параллельных прямых CE и AB и секущей AC .

Ответ: 65° .

11*. $RF = PF$ (по условию), т. е. $\triangle RFP$ — равнобедренный. Так как $\angle TFR = 30^\circ$, то $\angle TFR = \angle FRP = 30^\circ$ — как накрест лежащие при параллельных прямых TF и RP и секущей RF .

Значит, $\angle P = \angle FRP = 30^\circ$ (углы при основании равнобедренного треугольника).

$\angle SFT = \angle P = 30^\circ$ — как соответственные углы.

Ответ: 30° ; 30° .

12.** $ME = EN$, т. е. $\triangle EMN$ — равнобедренный, тогда $\angle M = \angle MNE = 37^\circ$ (как углы при основании).

ME — биссектриса $\angle MNK$ (по условию), тогда $\angle 1 = \angle 2 = 37^\circ$. Но $NF = FE$, значит, $\angle 2 = \angle NEF = 37^\circ$, тогда $\angle NFE = 180^\circ - (37^\circ + 37^\circ) = 106^\circ$ и $\angle KFE = 180^\circ - 106^\circ = 74^\circ$.

Ответ: 74° .

Замечание. $\angle KFE = \angle 2 + \angle NEF = 37^\circ + 37^\circ = 74^\circ$ (внешний угол $\triangle NEF$).

13.***Способ 1*

$\angle A = \angle 1 + \angle 2 = 60^\circ$, $\angle C = 25^\circ$ (по условию), тогда $\angle B = 180^\circ - (60^\circ + 25^\circ) = 95^\circ$.

Значит, $\angle AEB = 180^\circ - (30^\circ + 95^\circ) = 55^\circ$.

Способ 2

$\angle AEC = 180^\circ - (\angle 2 + \angle C) = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$, тогда
 $\angle AEB = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$.

Ответ: 55° .

Замечание. Задачу можно решить иначе, используя элементы $\triangle ADE$.

УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Пусть $\angle R = 3x$, $\angle P = 7x$, $\angle Q = 2x$.

Сумма углов $\triangle QPR$ равна 180° , тогда $3x + 7x + 2x = 180$, $12x = 180$, $x = 15$.

Значит, $\angle R = 15^\circ \cdot 3 = 45^\circ$, $\angle P = 15^\circ \cdot 7 = 105^\circ$, $\angle Q = 15^\circ \cdot 2 = 30^\circ$.

Ответ: 45° ; 105° ; 30° .

2. $\angle M + \angle N + \angle K = 180^\circ$; по условию $\angle M = 2\angle K$ и $\angle M - \angle N = 20^\circ$, тогда $2\angle K + \angle N + \angle K = 180^\circ$, $3\angle K + \angle N = 180^\circ$ и $2\angle K - \angle N = 20^\circ$, откуда $\angle N = 2\angle K - 20^\circ$, тогда $3\angle K + (2\angle K - 20^\circ) = 180^\circ$, или $5\angle K = 200^\circ$, $\angle K = 40^\circ$, значит, $\angle M = 2\angle K = 80^\circ$, $\angle N = \angle M - 20^\circ = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$.

Ответ: $\angle M = 80^\circ$, $\angle N = 60^\circ$, $\angle K = 40^\circ$.

3. Пусть $\angle S = x$, тогда $\angle P = \angle R = 1,5x$, так как $SP = SR$ и $\angle P = \angle R$. Получим уравнение:

$$x + 1,5x + 1,5x = 180; 4x = 180, x = 45.$$

Значит, $\angle S = 45^\circ$, $\angle P = \angle R = 45^\circ \cdot 1,5 = 67^\circ 30'$.

Ответ: $\angle P = \angle R = 67^\circ 30'$; $\angle S = 45^\circ$.

4. Пусть $\angle L = x$, $\angle Q = 0,4x$.

Но $\angle Q = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$, тогда $0,4x = 40$, $x = 40 : 0,4 = 100$, т. е. $\angle L = 100^\circ$, значит, $\angle M = 180^\circ - (100^\circ + 40^\circ) = 40^\circ$.

Ответ: $\angle Q = 40^\circ$, $\angle M = 40^\circ$, $\angle L = 100^\circ$.

5. Пусть $\angle A = 2x$, $\angle C = 5x$, $\angle B = 40^\circ$ (по условию), тогда $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, или $2x + 40 + 5x = 180$, $7x = 140$, $x = 20$, т. е. $\angle A = 20^\circ \cdot 2 = 40^\circ$, $\angle C = 20^\circ \cdot 5 = 100^\circ$.

Ответ: $\angle A = 40^\circ$, $\angle C = 100^\circ$.

6. Пусть $\angle QPM = x$, тогда $\angle QPK = 3,5x$.

Значит, $x + 3,5x = 180$; $4,5x = 180$, $x = 40$, т. е. $\angle QPM = 40^\circ$. Пусть $\angle M = 3y$, $\angle Q = 4y$, тогда $3y + 4y + 40 = 180$; $7y = 140$, $y = 20$, т. е. $\angle M = 20^\circ \cdot 3 = 60^\circ$, $\angle Q = 20^\circ \cdot 4 = 80^\circ$.

Ответ: $\angle M = 60^\circ$, $\angle Q = 80^\circ$, $\angle QPM = 40^\circ$.

Замечание. Внешний угол $QPK = \angle M + \angle Q$.

7. $\angle STM = \angle R + \angle S$ — по теореме о внешнем угле треугольника. Но $\angle STM = 2\angle S$ (по условию) и $\angle R = 70^\circ$, тогда $2\angle S = 70^\circ + \angle S$, откуда $\angle S = 70^\circ$ и $\angle STR = 180^\circ - \angle STM$, где $\angle STM = 2\angle S = 140^\circ$, тогда $\angle STR = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

Ответ: $\angle R = 70^\circ$, $\angle S = 70^\circ$, $\angle STR = 40^\circ$.

8. Пусть $\angle C = x$, тогда $\angle B = 2x$. Так как $\triangle ADC$ — равнобедренный ($AD = CD$) и AD — биссектриса, то $\angle A = 2x$. Значит, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, или $2x + 2x + x = 180$; $5x = 180$, $x = 36$, т. е. $\angle C = 36^\circ$, $\angle A = \angle B = 72^\circ$.

Ответ: 72° ; 72° ; 36° .

9. $NK = KP$ (по условию) и $\angle NKP = 110^\circ$, тогда $\angle P = \angle PNK = (180^\circ - 110^\circ) : 2 = 35^\circ$.

NK — биссектриса $\angle MNP$, тогда $\angle MNP = 70^\circ$, $\angle M = 180^\circ - (70^\circ + 35^\circ) = 75^\circ$.

Ответ: $\angle M = 75^\circ$; $\angle MNP = 70^\circ$; $\angle P = 35^\circ$.

10*. Так как $RO \perp PS$ и $PO = OS$, то $\triangle PRS$ — равнобедренный, тогда $\angle P = \angle RSP$ (по свойству).

Пусть $\angle TSR = 3x$, $\angle RSP = \angle P = 5x$, тогда $\angle TSP = 3x + 5x = 8x$. Так как $\angle T = 115^\circ$, то получим уравнение $115 + 5x + 8x = 180$, $13x = 65$, $x = 5$, т. е. $\angle P = 5x = 25^\circ$, $\angle TSP = 8x = 40^\circ$.

Ответ: $\angle P = 25^\circ$, $\angle TSP = 40^\circ$.

УГЛЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

Найдите все неизвестные углы треугольника.

1. $\angle N = 180^\circ - (35^\circ + 25^\circ) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Ответ: 120° .

2. $\angle E = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 80^\circ$.

Ответ: 80° .

3. $\angle T = 90^\circ$, так как $ST \perp TM$; $\angle S = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$.

Ответ: $\angle T = 90^\circ$, $\angle S = 60^\circ$.

Замечание. $\angle S + \angle M = 90^\circ$, тогда $\angle S = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

4. $BC = AC$ (по условию), тогда $\angle A = \angle B = 70^\circ$ (по свойству равнобедренного треугольника).

$\angle C = 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ) = 40^\circ$.

Ответ: $\angle B = 70^\circ$, $\angle C = 40^\circ$.

5. $\triangle MQN$ — равносторонний (по условию), тогда $\angle M = \angle N = \angle Q = 180^\circ : 3 = 60^\circ$.

Ответ: $\angle M = \angle N = \angle Q = 60^\circ$.

6. $\angle E = 90^\circ$, так как $KE \perp EP$, тогда $\angle P = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$.

Ответ: $\angle E = 90^\circ$, $\angle P = 30^\circ$.

Замечание. $\angle P + \angle K = 90^\circ$ (по свойству прямоугольного треугольника).

7. $MD = ND$ (по условию), значит, $\triangle MDN$ — равнобедренный (по определению) и $\angle M = \angle N$ (по свойству). Так как $\angle D = 100^\circ$, то $\angle M = \angle N = (180^\circ - 100^\circ) : 2 = 40^\circ$.

Ответ: $\angle M = \angle N = 40^\circ$.

8. $\angle CAB = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$, тогда $\angle C = 180^\circ - (60^\circ + 50^\circ) = 70^\circ$.

Ответ: $\angle CAB = 50^\circ$; $\angle C = 70^\circ$.

9. $\triangle NMK$ — равнобедренный, так как $MN = NK$ (по условию), тогда $\angle K = \angle NMK = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$, значит, $\angle N = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ$.

Ответ: $\angle NMK = \angle K = 50^\circ$, $\angle N = 80^\circ$.

10. $\angle CEF = \angle C + \angle D$ — внешний угол $\triangle CDE$, или $140^\circ = 80^\circ + \angle D$, $\angle D = 60^\circ$, тогда $\angle CED = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

Ответ: $\angle D = 60^\circ$, $\angle CED = 40^\circ$.

11. $\angle BCA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$; $\angle BAD = \angle B + \angle BCA$, или $150^\circ = \angle B + 90^\circ$, откуда $\angle B = 60^\circ$; $\angle BAC = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$.

Ответ: $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle BCA = 90^\circ$.

12. $\angle DAB = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$. Так как $AD = BD$, то $\triangle ADB$ — равнобедренный, тогда $\angle B = \angle DAB = 45^\circ$, $\angle ADB = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$.

Ответ: $\angle BAD = \angle B = 45^\circ$, $\angle ADB = 90^\circ$.

13. $\triangle PMK = \triangle PNK$ (по I признаку), так как $MK = NK$; KP — общая сторона, $\angle PKN = \angle PKM = 90^\circ$.

Значит, $MP = NP$ и $\angle N = \angle M = 60^\circ$, тогда $\angle P = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$.

Ответ: $\angle N = \angle P = 60^\circ$.

14. $SK = PK$ (по условию), значит, $\triangle SKP$ — равнобедренный, тогда высота KT является биссектрисой, т. е. $\angle SKP = 25^\circ \cdot 2 = 50^\circ$. Так как $\angle S = \angle P$ (по свойству равнобедренного треугольника), то $\angle S = \angle P = (180^\circ - 50^\circ) : 2 = 65^\circ$.

Ответ: $\angle S = \angle P = 65^\circ$, $\angle SKP = 50^\circ$.

15. По условию $\angle PQM = \angle RQM$ (QM — биссектриса), $MP = MQ = MR$, тогда $\angle P = \angle R = \angle PQM = \angle RQM$. Пусть $\angle P = x$. Имеем:

$$x + x + 2x = 180, 4x = 180, x = 45.$$

Значит, $\angle P = \angle R = 45^\circ$, $\angle PQR = 90^\circ$.

Ответ: $\angle P = \angle R = 45^\circ$, $\angle PQR = 90^\circ$.

16. В равнобедренном $\triangle DEF$ ($ED = EF$), тогда $\angle D = \angle F$. Так как $ES \perp DF$ и $\angle DES = 45^\circ$, то $\angle D = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle F$. $\angle DEF = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$.

Ответ: $\angle D = \angle F = 45^\circ$, $\angle DEF = 90^\circ$.

17. $\angle BAC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$, $\angle ABC = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$, тогда $\angle ABD = \angle DBC = 15^\circ$ (BD — биссектриса $\angle ABC$);

$\angle BDC = \angle BAD + \angle ABD = 60^\circ + 15^\circ = 75^\circ$, тогда $\angle ADB = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$.

Ответ: $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

18. $\angle MKN = 180^\circ - (65^\circ + 70^\circ) = 45^\circ$.

$\triangle MNK = \triangle NLK$ (по III признаку), так как $MN = KL$, $MK = NL$, NK — общая сторона.

Из равенства треугольников следует, что $\angle M = \angle L = 65^\circ$,

$\angle MKN = \angle KNL = 45^\circ$, $\angle NKL = \angle MNK = 70^\circ$.

Ответ: $\angle L = 65^\circ$, $\angle MKN = \angle KNL = 45^\circ$, $\angle NKL = 70^\circ$.

19. $\angle COB = \angle AOD = 90^\circ$ (как вертикальные).

$\angle D = 180^\circ - (90^\circ + 65^\circ) = 25^\circ$;

$\angle B = 180^\circ - (90^\circ - 25^\circ) = 65^\circ$.

Ответ: $\angle COB = \angle AOD = 90^\circ$, $\angle B = 65^\circ$; $\angle D = 25^\circ$.

Замечание. $\angle A + \angle D = 90^\circ$, $\angle B + \angle C = 90^\circ$.

20. $\angle QOC = \angle MOR = 180^\circ - (80^\circ + 45^\circ) = 55^\circ$ — как вертикальные; $\triangle COQ = \triangle MOR$ (по I признаку), так как $QO = OR$, $CO = OM$ и $\angle QOC = \angle MOR$.

Тогда $\angle M = \angle C = 45^\circ$, $\angle R = \angle Q = 80^\circ$.

Ответ: $\angle QOC = \angle MOR = 55^\circ$, $\angle M = 45^\circ$; $\angle R = 80^\circ$.

21. $\angle KMN = 180^\circ - (\angle K + \angle N) = 70^\circ$; ML — биссектриса $\angle KMN$, тогда $\angle KML = \angle LMN = 35^\circ$; $\angle MLK = 180^\circ - (40^\circ + 35^\circ) = 105^\circ$, тогда $\angle MLN = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$.

Ответ: $\angle KMN = 70^\circ$; $\angle KML = \angle LMN = 35^\circ$, $\angle MLK = 105^\circ$, $\angle MLN = 75^\circ$.

22. PK — биссектриса $\angle APM$, т. е. $\angle APM = 60^\circ$.

Аналогично $\angle PMA = 25^\circ \cdot 2 = 50^\circ$, тогда $\angle A = 180^\circ - (60^\circ + 50^\circ) = 70^\circ$.

Ответ: $\angle PMA = 50^\circ$, $\angle APM = 60^\circ$, $\angle A = 70^\circ$.

23. $\angle SKL = \angle M + \angle MSK$ — внешний угол $\triangle MSL$, тогда $105^\circ = 70^\circ + \angle MSK$, $\angle MSK = 35^\circ$.

SK — биссектриса $\angle MSL$, значит, $\angle MSL = 70^\circ$ и $\angle L = 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ) = 40^\circ$.

Ответ: $\angle MSL = 70^\circ$, $\angle L = 40^\circ$.

24. $\angle MPL = \angle MLP = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$, т. е. $\triangle MPL$ — равнобедренный, тогда $\angle MPK = \angle KPL = \angle PLN = \angle NLM = 30^\circ$;

$\angle PNL = 180^\circ - (60^\circ + 30^\circ) = 90^\circ = \angle MNL$.

Аналогично $\angle PKM = \angle PKL = 90^\circ$.

Ответ: $\angle MPL = 60^\circ$, $\angle MLP = 60^\circ$.

25. AD — биссектриса $\angle BAC$, тогда $\angle BAC = 40^\circ$.

Так как $AC \perp BC$, то $\angle C = 90^\circ$ и $\angle B = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ$.

Ответ: $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle A = 40^\circ$.

Замечание. $\angle BAC + \angle B = 90^\circ$ (по свойству прямоугольного треугольника).

26. TQ — биссектриса $\angle PTS$, тогда $\angle PTS = 60^\circ$.

Так как $\angle S = 80^\circ$, то $\angle P = 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ) = 40^\circ$.

Ответ: $\angle P = 40^\circ$, $\angle PTS = 60^\circ$.

27. $\angle T = 180^\circ - (60^\circ + 80^\circ) = 40^\circ$; $\angle RKT = 90^\circ$, тогда $\angle KRT = 180^\circ - (90^\circ + 40^\circ) = 50^\circ$, тогда $\angle MRK = 60^\circ - 50^\circ = 10^\circ$.

Ответ: $\angle T = 40^\circ$, $\angle MRK = 10^\circ$, $\angle KRT = 50^\circ$, $\angle RKT = 90^\circ$.

28. $\angle ABC = 180^\circ - (80^\circ + 60^\circ) = 40^\circ$, $\angle BCD = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, тогда $\angle D = \angle CBD = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$ ($\triangle BCD$ — равнобедренный, значит, $\angle CBD = \angle D$).

Следовательно, $\angle ABD = \angle ABC + \angle CBD = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ$.

Ответ: $\angle ABD = 70^\circ$, $\angle D = \angle CBD = 30^\circ$; $\angle ABC = 40^\circ$; $\angle BCD = 120^\circ$.

29*. $\angle MNP = 100^\circ + 20^\circ = 120^\circ$ — внешний угол $\triangle MKP$. Так как $NP = NM$, то $\triangle MNP$ — равнобедренный, тогда $\angle P = \angle NMP = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$.

Значит, $\angle KMP = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$.

Ответ: $\angle P = \angle NMP = 30^\circ$; $\angle KMP = 50^\circ$; $\angle MNP = 120^\circ$.

30.** $MK = KS$, значит, $\triangle MKS$ — равнобедренный, тогда $\angle M = \angle MSK = 35^\circ$. Аналогично в $\triangle SPN$ $\angle PSN = 25^\circ$. В $\triangle MSN$ $\angle MSN = 180^\circ - (35^\circ + 25^\circ) = 120^\circ$. Следовательно, $\angle KSP = \angle MSN - (\angle MSK + \angle PSN) = 120^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

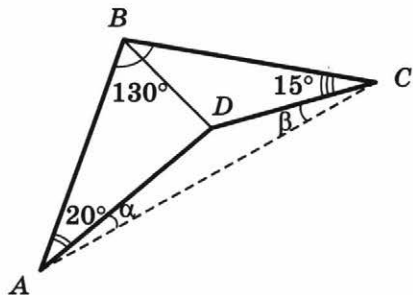
Ответ: 60° .

31.** Соединим точки A и C .

Пусть $\angle DAC = \alpha$, $\angle ACD = \beta$.

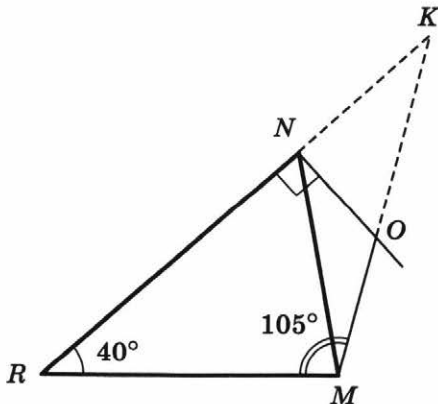
В $\triangle ABC$ $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$, или $20^\circ + \alpha + 130^\circ + 15^\circ + \beta = 180^\circ$, откуда $\alpha + \beta = 15^\circ$. Из $\triangle ADC$ $\angle ADC = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$.

Ответ: 165° .



32.** Продолжим RN и MO до пересечения в точке K . Так как $\angle R = 40^\circ$, $\angle RMO = 105^\circ$, то $\angle K = 180^\circ - (40^\circ + 105^\circ) = 35^\circ$. По условию $RN \perp NO$, т. е. $\angle ONK = 90^\circ$, тогда внешний угол $\angle MON$ $\triangle KON$ будет равен: $\angle MON = \angle K + \angle ONK = 35^\circ + 90^\circ = 125^\circ$.

Ответ: 125° .



НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

1. Так как $\angle A + \angle B = 90^\circ$ и $\angle B = 60^\circ$, то $\angle A = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{1}{2}AB$, или $AB = 2BC$.

По условию $AB + BC = 12$, или $2BC + BC = 12$, $3BC = 12$, $BC = 4$, $AB = 4 \cdot 2 = 8$.

Ответ: $AB = 8$, $BC = 4$.

2. По условию $\angle K = 90^\circ$, тогда $\angle M + \angle N = 90^\circ$. Но $\angle N = 2\angle M$, значит, $\angle M + 2\angle M = 90^\circ$, $3\angle M = 90^\circ$, $\angle M = 30^\circ \Rightarrow KN = \frac{1}{2}MN$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°).

Итак, $MN = 2KN$, и так как $MN - KN = 15$, то $2KN - KN = 15$, $KN = 15$.

Ответ: 15.

3. В $\triangle NKM$ $\angle M = 30^\circ$, $\angle NKM = 90^\circ$, тогда $NK = \frac{1}{2}NM = 18$, $\angle N = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

В $\triangle KNP$ $\angle NKP = 90^\circ - \angle N = 30^\circ \Rightarrow NP = \frac{1}{2}NK = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$, тогда $MP = MN - NP = 36 - 9 = 27$.

Ответ: $MP = 27$, $PN = 9$.

4. В $\triangle PSR$ $\angle P = 60^\circ$, $\angle PSR = 90^\circ$ и $SP = 18$, тогда $\angle PRS = 30^\circ \Rightarrow PS = \frac{1}{2}PR$, значит, $PR = 2PS = 36$. В $\triangle PRQ$ $\angle PRQ = 90^\circ$, $\angle P = 60^\circ$, тогда

$\angle Q = 30^\circ \Rightarrow PR = \frac{1}{2}PQ$, т. е. $PQ = 2PR = 72$.

Значит, $QS = PQ - PS = 72 - 18 = 54$.

Ответ: 54.

5. $\triangle OEC = \triangle ODC$ — по гипотенузе и острому углу (OC — общая сторона, $\angle ODC = \angle OEC = 90^\circ$ и $\angle OCD = \angle OCE$, так как OC — биссектриса). Из равенства треугольников следует, что $OD = OE = 18$.

Ответ: 18.

6. Аналогично № 5 имеем:

$\Delta SPT = \Delta SFT$ (по гипотенузе и острому углу). Из равенства треугольников следует, что $PT = TF = 26$.

Ответ: 26.

7. По условию $AC = BC$, значит, ΔABC — равнобедренный, тогда $\angle A = \angle ABC$.

В ΔABD $\angle ABD = 20^\circ$, $\angle ADB = 90^\circ$, тогда $\angle A = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$ и $\angle ABC = 70^\circ$, значит, $\angle CBE = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

Ответ: 110° .

8. $QM = MR$, т. е. ΔQMR — равнобедренный, тогда $\angle Q = \angle QRM = (180^\circ - 30^\circ) : 2 = 75^\circ$.

В ΔRSM $\angle M = 30^\circ$, $\angle RSM = 90^\circ$, тогда $\angle SRM = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, значит, $\angle QRS = \angle QRM - \angle SRM = 75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$.

Ответ: 15° .

9. ΔBCA — прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), $\angle ABM$ — внешний угол ΔABC , тогда $\angle ABM = \angle A + \angle C$, или $120^\circ = \angle A + 90^\circ$, откуда $\angle A = 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = \frac{1}{2}AB$, т. е. $AB = 2BC$.

Но $BC + AB = 36$ (по условию), $BC + 2BC = 36$; $3BC = 36$; $BC = 12$. Значит, $AB = 12 \cdot 2 = 24$.

Ответ: $AB = 24$, $BC = 12$.

10. ΔMKN — равносторонний (по условию), тогда $\angle K = 60^\circ$; $RK \perp PR$, значит, ΔPRK — прямоугольный, тогда $\angle RPK = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow RK = \frac{1}{2}PK$.

Но $PK = \frac{1}{2}MK = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2} \cdot 13 = 6,5$, т. е. $RK = \frac{13}{4}$ и

$NR = 13 - \frac{13}{4} = 13 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 13 \cdot \frac{3}{4} = \frac{39}{4} = 9,75$.

Ответ: 9,75.

11. ΔPRQ — равнобедренный (по условию), где $\angle PRQ = 120^\circ$, тогда $\angle Q = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$.

Но ΔPSQ — прямоугольный, значит, $PS = \frac{1}{2}PQ$, откуда $PQ = 2PS = 14$.

Ответ: 14.

12. По условию $\triangle ACB$ — равнобедренный, где $AC = BC = 19,6$, $CD = 9,8$, и так как $CD = \frac{1}{2}AC$, то $\angle A = \angle B = 30^\circ$ и $\angle ACB = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Ответ: $\angle A = \angle B = 30^\circ$, $\angle ACB = 120^\circ$.

13. $\angle MON = 130^\circ$ — внешний угол $\triangle PMO$, тогда $130^\circ = \angle MPO + \angle PMO$. Но $\angle PMO = 90^\circ$, значит, $\angle MPO = 130^\circ - 90^\circ = 40^\circ$. В $\triangle TNP$ ($\angle TNP = 90^\circ$) $\angle T = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$. Так как $\triangle PTS$ — равнобедренный ($PT = ST$), то $\angle TPS = \angle TSP = (180^\circ - 50^\circ) : 2 = 65^\circ$.

Ответ: $\angle T = 50^\circ$, $\angle TPS = \angle TSP = 65^\circ$.

Замечание. Так как $\angle TMO + \angle T + \angle TNO + \angle MON = 360^\circ$, то $\angle T + \angle MON = 180^\circ$.

14. $\angle A = 65^\circ$, $\angle B = 53^\circ$, тогда $\angle ACB = 180^\circ - (65^\circ + 53^\circ) = 180^\circ - 118^\circ = 62^\circ$. В $\triangle BEC$ $\angle BEC = 90^\circ$, значит, $\angle CBE = 90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$. В $\triangle CDB$ $\angle DCB = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$. Тогда $\angle MCB + \angle MBC = 37^\circ + 28^\circ = 65^\circ$ и $\angle CMB = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

Ответ: 115° .

Замечание. Аналогично № 13 имеем: $\angle CMB = \angle EMD = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$.

15. Так как $KN \perp PN$, то $\angle KNM = 90^\circ$.

По условию $SK = SP$, т. е. $\triangle KSP$ — равнобедренный, где $\angle KSP = 108^\circ$, тогда $\angle P = \angle SKP = (180^\circ - 108^\circ) : 2 = 36^\circ$. Так как KM — биссектриса, то $\angle MKP = \angle SKM = 18^\circ$; $\angle NKP = 90^\circ - \angle P = 54^\circ$, тогда $\angle NKM = \angle NKP - \angle MKP = 54^\circ - 18^\circ = 36^\circ$ и $\angle KMN = 90^\circ - \angle NKM = 90^\circ - 36^\circ = 54^\circ$.

Ответ: $\angle KMN = 90^\circ$, $\angle NKM = 36^\circ$, $\angle KMN = 54^\circ$.

16. $\angle ABM = 150^\circ$ — внешний угол $\triangle ABC$, где $\angle C = 90^\circ$, тогда $\angle ABC = 30^\circ$ и $\angle CAB = 60^\circ$.

Так как AD — биссектриса, то $\angle CAD = \angle DAB = 30^\circ$.

В $\triangle ACD$ $CD = \frac{1}{2}AD = 9$. В $\triangle ADB$ $\angle DAB = \angle ABC = 30^\circ \Rightarrow AD = DB = 18$, $CB = 9 + 18 = 27$.

Ответ: $CB = 27$, $CD = 9$.

17. В $\triangle RPS$ $\angle P = 90^\circ$, $PS = 7,8$ и $RS = 15,6$, т. е. $PS = \frac{1}{2}RS$.

Значит, $\angle PRS = 30^\circ$, и так как RS — биссектриса (по условию), то $\angle SRQ = 30^\circ$, $\angle PRQ = 60^\circ$, $\angle RQS = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, т. е. $RS = SQ = 15,6$, $\angle RQT = 180^\circ - \angle RQS = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

Ответ: $SQ = 15,6$; $\angle RQT = 150^\circ$.

18*. $\triangle MER = \triangle NER$ (по I признаку), так как $ME = EN$, $\angle MER = \angle NER$ и RE — общая сторона).

Из равенства треугольников следует, что $MR = NR$.

По условию $P_{\triangle MKR} = 32$, или $MK + KR + MR = 32$.

Так как $MR = NR$, то $MK + KR + NR = 32$.

Но $KR + NR = 26$, значит, $MK + 26 = 32$, откуда $MK = 6$.

Ответ: 6.

Замечание. Признаки равенства прямоугольных треугольников изучаются позднее (см. табл. 11).

19*. $\triangle AMN = \triangle BMN$ (по II признаку), тогда $AM = MB$, т. е. $\triangle AMB$ — равнобедренный.

По условию $AC = 24$, $BC = 20$, значит, $P_{\triangle MCB} = MC + CB + MB = MC + AM + CB = AC + CB = 44$.

Ответ: 44.

20.** В $\triangle KMN$ $\angle MKN = 90^\circ - \angle NKM = 55^\circ$, тогда $\angle PKN = 55^\circ - 10^\circ = 45^\circ$, откуда $\angle NPK = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, т. е. $KN = NP$. С другой стороны, $\angle SNK = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$, а из $\triangle NSK$ $\angle NSK = 180^\circ - (70^\circ + 55^\circ) = 55^\circ \Rightarrow NK = NS$.

Но $KN = NP$, значит, $NP = NS$ и $\angle NSP = (180^\circ - 20^\circ) : 2 = 80^\circ$, следовательно, $\angle PSM = 180^\circ - (55^\circ + 80^\circ) = 45^\circ$.

Ответ: 45° .

21.** В $\triangle AME$ $\angle MAE = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$; в $\triangle BCE$ $\angle CEB = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$; $\angle BEM = 40^\circ$, тогда в $\triangle AEB$ $\angle BEA = 90^\circ + 40^\circ = 130^\circ$, значит, $\angle EBA = 180^\circ - (25^\circ + 130^\circ) = 25^\circ$, т. е. $BE = AE$.

В $\triangle AED$ $\angle DEA = 90^\circ$, $\angle EDA = 45^\circ$, тогда $\angle DAE = 45^\circ$, т. е. $AE = DE$. Следовательно, $BE = DE$, значит, $\triangle BED$ — равнобедренный, где $\angle BED = 40^\circ$, тогда $\angle BDE = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$.

Ответ: 70° .

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Найдите пары равных треугольников и докажите их равенство.

1. $\triangle BAD = \triangle BCD$ — по гипотенузе и катету ($AB = CD$, BD — гипотенуза, является общей).

2. $\triangle MKT = \triangle NKT$ — по двум катетам ($MT = TN$ — по условию, KT — общий катет).

3. По условию $\angle P = \angle R$, значит, $\triangle PSR$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), тогда биссектриса KS является и высотой. Значит, $\triangle PKS = \triangle RKS$ (по гипотенузе и катету).

Замечание. Равенство треугольников следует по любому из признаков равенства.

4. $\triangle FER = \triangle FES$ (по гипотенузе и острому углу), так как $\angle REF = \angle SEF$ (по условию) и гипотенуза EF — общая.

5. 1) $\triangle SPM = \triangle TKM$ (по гипотенузе и катету), так как $SM = MT$ и $SP = TK$ (по условию).

Из равенства треугольников следует, что $PM = MK$.

2) $\triangle PMR = \triangle KMR$ (по гипотенузе и катету), так как $PM = MK$ (по доказанному), гипотенуза RM — общая.

3) $\triangle SMR = \triangle TMR$ (по двум катетам), так как $SM = MT$ (по условию), RM — общий катет.

6. Решается аналогично № 5.

1) $\triangle AED = \triangle BFD$ (по гипотенузе и катету).

2) $\triangle CED = \triangle CFD$ (по гипотенузе и катету).

3) $\triangle ACD = \triangle BCD$ (по двум катетам).

7. $\angle M = \angle N = 90^\circ$, $\angle NRS = \angle MSR$ (по условию) и RS — гипотенуза, является общей. Значит, $\triangle RMS = \triangle RNS$ — по гипотенузе и острому углу.

8. $\angle K = \angle L$, $ML = NK$, MN — гипотенуза, является общей.

Значит, $\triangle MKN = \triangle MLN$ (по гипотенузе и катету, или по гипотенузе и острому углу, или по катету и прилежащему углу).

9. Так как $AD = BF$, $DC = CF$ (по условию), то $\triangle ACB$ — равнобедренный (по определению), тогда $\angle A = \angle B$ (по свойству). Значит, $\triangle AED = \triangle BMF$ (по гипотенузе и острому углу).

10. По условию $AD = BC$, $\angle ADB = \angle DBC = 90^\circ$, DB — общая сторона, является гипотенузой.

Тогда $\triangle ADB = \triangle CDB$ (по двум катетам).

РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ ДО ПРЯМОЙ

Найдите расстояние от точки M до прямой AB .

1. Расстояние от точки M до прямой AB есть длина перпендикуляра MB .

Так как $\angle A = 30^\circ$ и $\angle B = 90^\circ$, то $MB = \frac{1}{2}AM = 13$.

Ответ: 13.

2. $\triangle ABM$ — прямоугольный ($\angle ABM = 90^\circ$), $\angle M = 60^\circ$, тогда

$$\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow MB = \frac{1}{2}AM = 15.$$

Ответ: 15.

3. В $\triangle ABM$ $\angle B = 90^\circ$, $\angle M = 45^\circ$, $AB = 10$, тогда $\angle A = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, т. е. $MB = AB = 10$.

Ответ: 10.

4. Расстоянием от точки M до прямой AB является длина перпендикуляра MK .

Так как $\angle B = 30^\circ$ и $MB = 12$, то $MK = \frac{1}{2}MB = 6$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°).

Ответ: 6.

5. Из точки M опустим перпендикуляр MN на сторону AB , тогда $\triangle AMN$ — прямоугольный, где $AM = 8$, $\angle MAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AM = 4$.

Ответ: 4.

6. $\angle A = \angle B$ (по условию), значит, $\triangle AMB$ — равнобедренный и прямоугольный ($\angle M = 90^\circ$).

Опустим перпендикуляр MN на гипотенузу AB . Тогда MN — высота, медиана и биссектриса, т. е. $AN = NB = 7,5$. Но $\angle A = \angle B = 45^\circ$ и $\angle AMN = \angle BMN = 45^\circ$, т. е. $MN = AN = 7,5$.

Ответ: 7,5.

7. MB — расстояние от точки M до прямой AB , т. е. $\angle ABM = 90^\circ$. Докажем это.

Соединим точку B с центром окружности O .

Так как $AO = BO$ (как радиусы) и $\angle A = 30^\circ$, то $\angle ABO = 30^\circ$, тогда внешний $\angle BOM = 30^\circ + 30^\circ = 60^\circ$. Но $OB = OM = 6$ (как радиусы), тогда $\angle OBM = \angle OMB = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$, т. е. $\triangle BOM$ — равносторонний, тогда $BM = 6$ (или $\angle ABM = 90^\circ$, значит, $BM = \frac{1}{2}AM = 6$).

Ответ: 6.

8. MC — искомое расстояние.

В $\triangle AMC$ $\angle A = 30^\circ$, $AM = 10$ — радиус окружности, тогда

$$MC = \frac{1}{2}AM = 5.$$

Ответ: 5.

9. Соединим точку A с центром O и точкой M , тогда MA — искомое расстояние.

В $\triangle AOB$ ($AO = BO$) $\angle B = \angle OAB = 45^\circ$, тогда $\angle AOB = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$, т. е. $\triangle AOB$ — прямоугольный и равнобедренный, тогда $\angle AOM = 90^\circ$.

Заметим, что $\triangle AOM = \triangle AOB$ (по двум катетам, так как $AO = OB$ и $AO = OM$). Следовательно, $\angle AMO = 45^\circ = \angle OAM$, т. е. $\angle MAB = 90^\circ$.

Из равенства треугольников следует, что $MA = AB = 14$.

Ответ: 14.

10. MB — искомое расстояние, тогда $MB = \frac{1}{2}AM$, или $AM = 2MB$.

Так как $AM - MB = 7$, то $2MB - MB = 7$, $MB = 7$.

Ответ: 7.

11. MD — расстояние от точки M до прямой AB .

По условию $AM = MB = AB$, т. е. $\triangle AMB$ — равносторонний, т. е. $\angle A = 60^\circ$.

Значит, высота MD является биссектрисой, $\angle AMD = 30^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow DE = \frac{1}{2}MD, \text{ тогда } MD = 2DE = 8.$$

Ответ: 8.

12. MD — искомое расстояние. По условию $\angle A = \angle B = \angle C$, т. е. $\triangle ABC$ — равносторонний, тогда BM — биссектриса $\angle B$ и $\angle MBA = 30^\circ$.

В $\triangle MDB$ $MD = \frac{1}{2}MB = 10$ (по свойству катета, лежащего против угла 30°).

Ответ: 10.

13*. MK — искомое расстояние от точки M до прямой AB . Заметим, что $\triangle AMK = \triangle AMC$ (по гипотенузе и острому углу), так как $\angle C = \angle K = 90^\circ$, $\angle MAK = \angle MAC$ и AM — гипотенуза, является общей.

Из равенства этих треугольников следует, что $MK = MC = 13$.

Ответ: 13.

14*. Аналогично № 13 имеем:

MK — искомое расстояние; $\triangle AKM = \triangle AEM$ (по гипотенузе и острому углу), тогда $MK = ME = 13$.

Ответ: 13.

15*. MD — искомое расстояние.

По условию $\angle C = 70^\circ$, $\angle ABC = 80^\circ$, тогда $\angle A = 180^\circ - (70^\circ + 80^\circ) = 30^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow MD = \frac{1}{2} AM = 7.$$

Ответ: 7.

16.** MN — искомое расстояние от точки M до прямой AB . По условию $BC = BM = MA = MC = 8$, значит, $\triangle BCM$ — равносторонний, т. е. $\angle CMB = 60^\circ$, тогда $\angle BMA = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, и так как MN — высота равнобедренного $\triangle AMB$, то MN — биссектриса, т. е. $\angle AMN = 60^\circ$, тогда

$$\angle A = 30^\circ \Rightarrow MN = \frac{1}{2} MA = 4.$$

Ответ: 4.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Планиметрия

1. Углы

Углом называется геометрическая фигура (рис. 1), образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

Точка O — вершина угла, а лучи OA и OB — стороны угла.

Обозначение: $\angle AOB$ или $\angle ab$.

Угол в 90° называется **прямым** (рис. 2).

Угол, меньший прямого, называется **острым** (рис. 3).

Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется **тупым** (рис. 4).

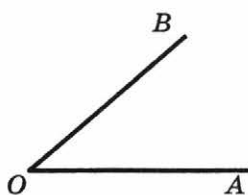


Рис. 1

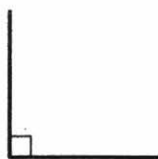


Рис. 2



Рис. 3



Рис. 4

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого (рис. 5).

$\angle AOC$ и $\angle DOB$; $\angle BOC$ и $\angle AOD$ — вертикальные.

Вертикальные углы равны: $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle BOC = \angle AOD$.

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию (рис. 6), $\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные.

Сумма смежных углов равна 180° .

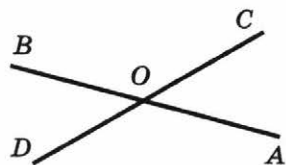


Рис. 5

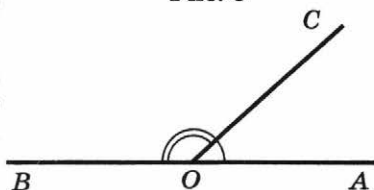


Рис. 6

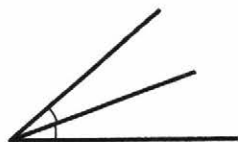


Рис. 7

Биссектрисой угла называется луч, проходящий между сторонами угла и делящий его пополам (рис. 7).

Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение друг друга (рис. 8).

Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (рис. 9).

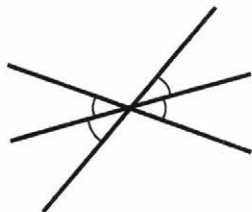


Рис. 8

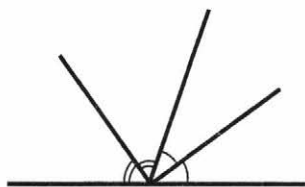


Рис. 9

При пересечении двух прямых a и b третьей c (секущей) образуется 8 углов (рис. 10):

соответственные углы:

$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 7$;

внутренние накрест лежащие:

$\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$;

внешние накрест лежащие:

$\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$;

внутренние односторонние:

$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$;

внешние односторонние:

$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$.

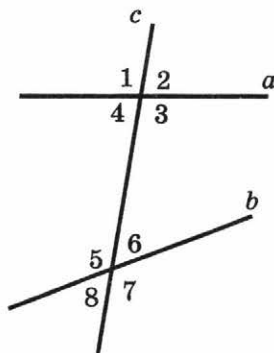


Рис. 10

2. Многоугольник

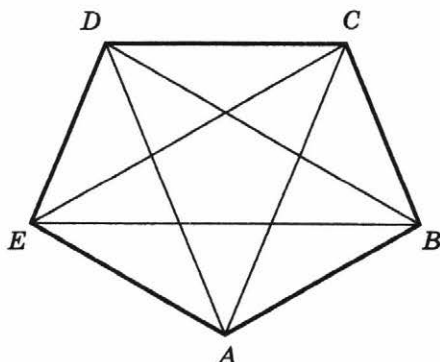


Рис. 11

$ABCDE$ — пятиугольник (рис. 11).

Точки A, B, C, D, E — вершины многоугольника; $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$ — углы; AB, BC, CD и т. д. — стороны; отрезки AC, AD, BE, BD, CE — диагонали; $P = AB + BC + \dots + EA$ — периметр многоугольника.

Многоугольник называется **выпуклым** (см. рис. 11), если он целиком расположен по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две

его соседние вершины. В противном случае многоугольник называется **невыпуклым** (рис. 12).

Свойства

1. Сумма внутренних углов произвольного n -угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.

2. Сумма внешних углов выпуклого n -угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360° .

3. В выпуклом n -угольнике из каждой вершины можно провести $(n - 3)$ диагоналей, которые разбивают n -угольник на $(n - 2)$ треугольников.

4. В выпуклом n -угольнике число диагоналей равно $\frac{1}{2}n(n - 3)$.

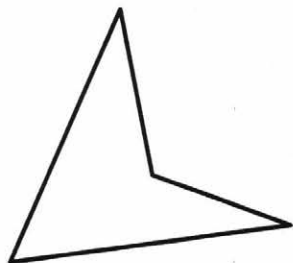


Рис. 12

3. Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник, у которого равны все углы и стороны, называется **правильным**.

Свойства

1. Каждый угол правильного n -угольника равен $\alpha_n = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}$.

2. Около правильного n -угольника можно описать окружность, и притом только одну.

3. В правильный n -угольник можно вписать окружность, и притом только одну.

4. Окружность, вписанная в правильный n -угольник, касается всех сторон n -угольника в их серединах.

5. Центр окружности, описанной около правильного n -угольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же n -угольник.

6. Длина стороны правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R , равна $a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$.

7. Длина стороны правильного n -угольника, описанного около окружности радиуса r , равна $a = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$.

4. Треугольник

Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, последовательно соединяющих эти точки.

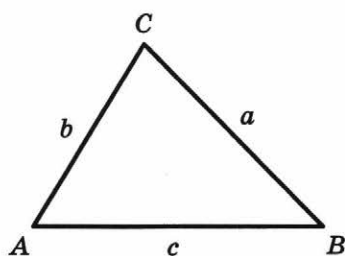


Рис. 13

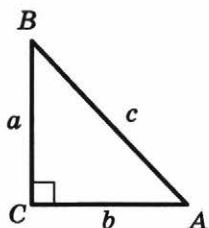


Рис. 14

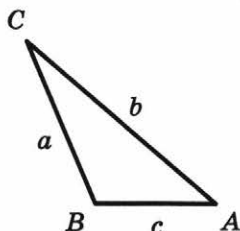


Рис. 15

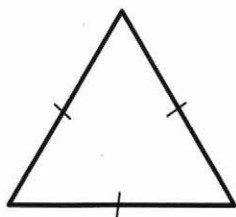


Рис. 17

Точки A, B, C — вершины $\triangle ABC$.

Отрезки AB, BC и AC — стороны, $\angle A, \angle B$ и $\angle C$ — углы. $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

Стороны треугольника часто обозначают малыми буквами (рис. 13):

$$AB = c, BC = a, AC = b.$$

$P = a + b + c$ — периметр треугольника.

Треугольник, у которого все углы острые, называется **остроугольным** (см. рис. 13).

Треугольник, у которого есть прямой угол, называется **прямоугольным** (рис. 14).

Стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** (a и b), а сторона, лежащая против прямого угла, — **гипотенузой** (c).

Треугольник с тупым углом называется **тупоугольным** (рис. 15).

Треугольник, у которого две стороны равны, называется **равнобедренным** (рис. 16).

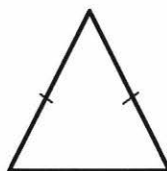


Рис. 16

Равные стороны называются **боковыми**, а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** (рис. 17).

Каждый угол равностороннего треугольника равен 60° .

Свойства равнобедренного треугольника

1. Углы при основании равны.
2. Биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.
3. Высота, проведенная к основанию, является одновременно медианой и биссектрисой.

4. Медиана, проведенная к основанию, является одновременно высотой и биссектрисой.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника (рис. 18).

$\angle CBD$ — внешний угол треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (см. рис. 18): $\angle CBD = \angle A + \angle C$.

Отрезок, соединяющий середины двух сторон, называется **средней линией** треугольника (рис. 19).

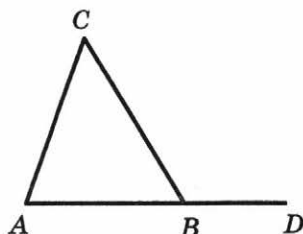


Рис. 18

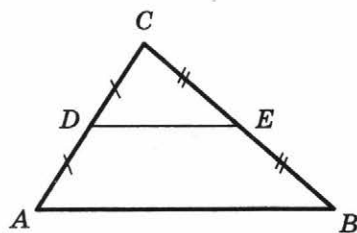


Рис. 19

5. Признаки равенства треугольников

I признак (*признак равенства по двум сторонам и углу между ними*)

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 20).

$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1.$$

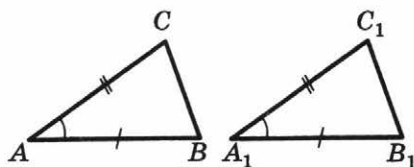


Рис. 20

II признак (*признак равенства по стороне и прилежащим к ней углам*)

Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 21).

$$AB = A_1B_1, \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1.$$

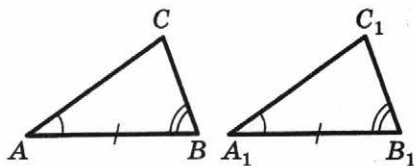


Рис. 21

III признак (*признак равенства по трем сторонам*)

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 22).

$$AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, AC = A_1C_1.$$

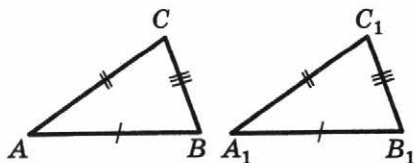


Рис. 22

6. Неравенства треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон:

$$a < b + c, b < a + c, c < a + b.$$

7. Определение вида треугольника по его сторонам

Пусть c — наибольшая сторона, тогда:

а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;

б) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный;

в) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный.

8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства)

1. Сумма острых углов равна 90° (рис. 23).

$$\angle A + \angle B = 90^\circ.$$

2. Катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы (рис. 24).

$$a = \frac{1}{2}c.$$

3. Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° (рис. 24).

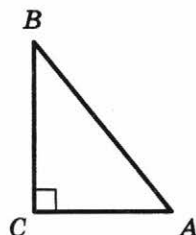


Рис. 23

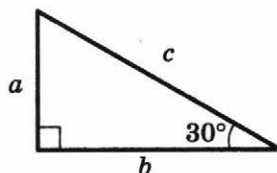


Рис. 24

9. Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны (рис. 25).

$$AC = A_1C_1, BC = B_1C_1.$$

2. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны (рис. 26).

$$AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1.$$

3. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника

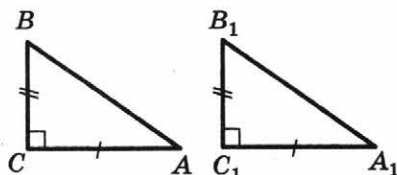


Рис. 25

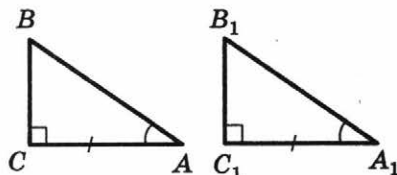


Рис. 26

соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны (рис. 27).

$$AB = A_1B_1, \angle A = \angle A_1.$$

4. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны (рис. 28).

$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1.$$

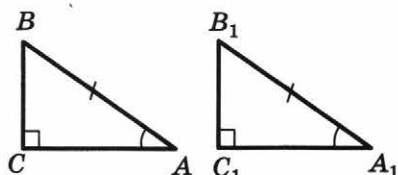


Рис. 27

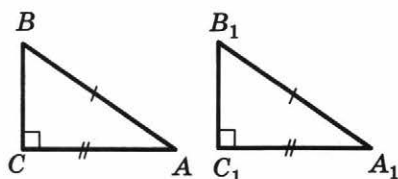


Рис. 28

10. Четыре замечательные точки треугольника

С каждым треугольником связаны 4 точки:

- 1) точка пересечения медиан;
- 2) точка пересечения биссектрис;
- 3) точка пересечения высот (или их продолжений);
- 4) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника**.

Высотой треугольника называется длина перпендикуляра, опущенного из любой его вершины на противоположащую сторону или ее продолжение.

В *тупоугольном треугольнике* (рис. 29) две высоты падают на продолжение сторон и лежат вне треугольника, а третья внутри.

В *остроугольном треугольнике* (рис. 30) все три высоты лежат внутри треугольника.

В *прямоугольном треугольнике* катеты одновременно служат и высотами (рис. 31).

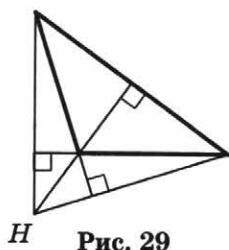


Рис. 29

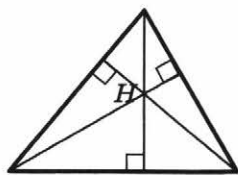


Рис. 30

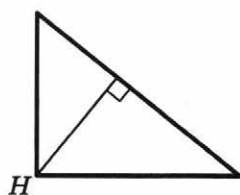


Рис. 31

Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой **ортоцентром**. В тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника. В прямоугольном треугольнике он совпадает с вершиной прямого угла.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

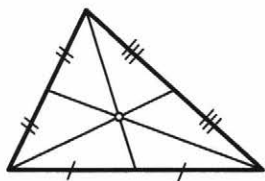


Рис. 32

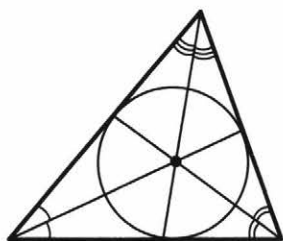


Рис. 33

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром тяжести** треугольника (рис. 32).

Эта точка делит каждую медиану в отношении $2 : 1$ (считая от соответствующей вершины).

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла от вершины до пересечения с противоположащей стороной.

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром вписанного круга** (рис. 33).

Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины (рис. 34, 35, 36), пересекаются в одной точке, которая является **центром описанной окружности**.

В тупоугольном треугольнике (рис. 34) эта точка лежит **вне** треугольника, в остроугольном (рис. 35) — **внутри**, в прямоугольном — **на середине гипотенузы** (рис. 36).

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной окружностей совпадают друг с другом только в **равностороннем** треугольнике.

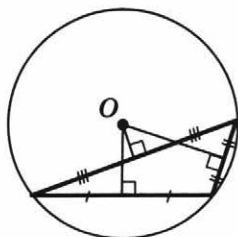


Рис. 34

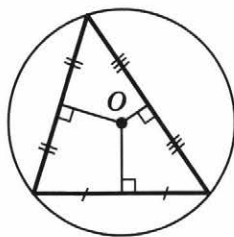


Рис. 35

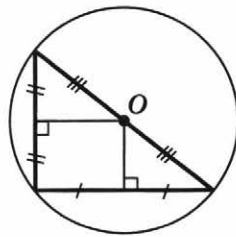


Рис. 36

11. Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра) (рис. 37).

Отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности, называется **радиусом**.

Обозначение: r или R .

На рисунке $OC = OE = OD = R$.

Часть окружности (например, CmD) называется **дугой**.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**, а хорда, проходящая через центр, — **диаметром**.

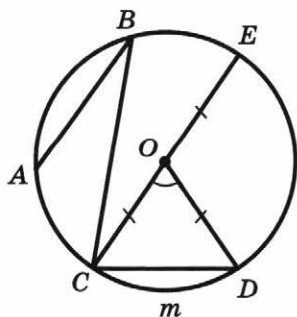


Рис. 37

AB , BC , CD и CE — хорды окружности. CE — наибольшая из хорд — диаметр.

Обозначение: d или D .

$$D = 2R.$$

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом**.

Часть круга, ограниченная дугой (CmD) и стягивающей ее хордой (CD), называется **сегментом**.

Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, называется **сектором**.

Угол, образованный двумя радиусами, называется **центральный** ($\angle COD$ на рис. 37).

Угол, у которого вершина лежит на окружности, а стороны являются хордами, называется **вписанным** (например, $\angle ABC$ на рис. 37).

12. Свойства касательных к окружности

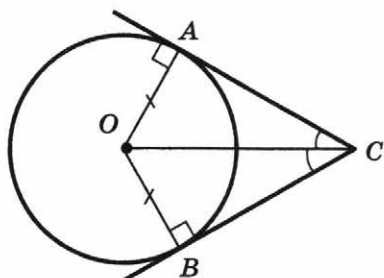


Рис. 38

Угол, образованный двумя касательными (CA и CB), исходящими из одной точки, называется **описанным** ($\angle ACB$ на рис. 38).

1. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

2. Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.

13. Окружность и треугольник

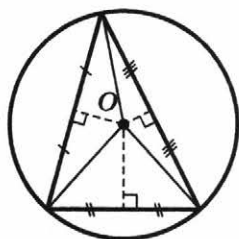


Рис. 39

1. Около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам через их середины (рис. 39).

2. Во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности является точка пересечения биссектрис (рис. 40).

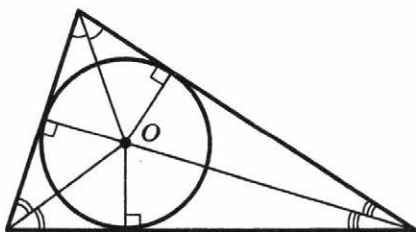
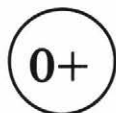


Рис. 40

Содержание

К таблице 1. Смежные углы	3
К таблице 2. Вертикальные углы	5
К таблице 3. Признаки равенства треугольников	7
К таблице 4. Периметр равнобедренного треугольника	12
К таблице 5. Свойства равнобедренного треугольника	14
К таблице 6. Признаки параллельности прямых	17
К таблице 7. Свойства углов при параллельных прямых	21
К таблице 8. Углы треугольника	24
К таблице 9. Углы треугольника	26
К таблице 10. Некоторые свойства прямоугольных треугольников	30
К таблице 11. Признаки равенства прямоугольных треугольников....	34
К таблице 12. Расстояние от точки до прямой.....	35
Краткие теоретические сведения	38
Планиметрия	38
1. Углы	38
2. Многоугольник	39
3. Правильные многоугольники.....	40
4. Треугольник	40
5. Признаки равенства треугольников	42
6. Неравенства треугольника.....	43
7. Определение вида треугольника по его сторонам	43
8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства)	43
9. Признаки равенства прямоугольных треугольников	43
10. Четыре замечательные точки треугольника	44
11. Окружность	45
12. Свойства касательных к окружности.....	46
13. Окружность и треугольник	46

ЕАС



Учебное издание

Балаян Эдуард Николаевич

ГЕОМЕТРИЯ

Решебник

к книге Э.Н. Балаяна

ГЕОМЕТРИЯ

***Задачи на готовых чертежах
для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ (7–9 классы)
7 класс***

Ответственный редактор *С. Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 3,87. Тираж 3000 экз.
Заказ № 1037.

ООО «Феникс»

344011, Россия, Ростовская обл., г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150

Сайт издательства: www.phoenixrostov.ru

Интернет-магазин: www.phoenixbooks.ru

Изготовлено в России. Дата изготовления: 12.2018.

Изготовитель: ООО «Чеховский печатник»

142300, Россия, Московская обл., Чеховский р-н, г. Чехов,
ул. Полиграфистов, д. 1, корп. А, пом. 12, эт. 4