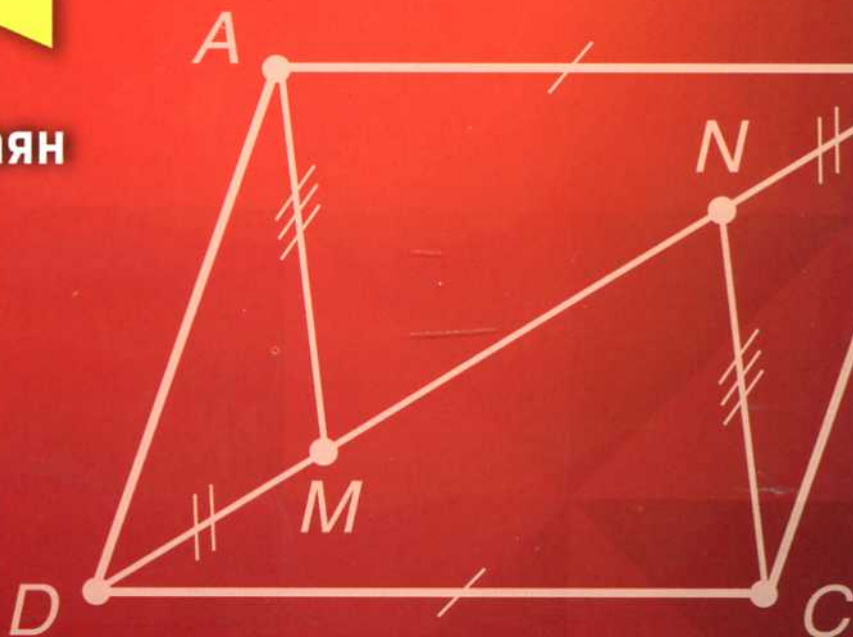


**8**  
класс



Э.Н. Балаян



# ГЕОМЕТРИЯ

РЕШЕБНИК К КНИГЕ Э.Н. БАЛАЯНА

.....  
Геометрия. Задачи на готовых чертежах  
для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ (7–9 классы)

**Э.Н. Балаян**

# **ГЕОМЕТРИЯ**

**Решебник**

**к книге Э.Н. Балаяна**

**ГЕОМЕТРИЯ**

*Задачи на готовых чертежах*

*для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ (7–9 классы)*

**8 класс**

Ростов-на-Дону

**Феникс**  
2019

**УДК 373.167.1:51**  
**ББК 22.1я72**  
**КТК 444**  
**Б20**

**Балаян Э.Н.**

**Б20** Геометрия : решебник к книге Э.Н. Балаяна «Геометрия : задачи на готовых чертежах для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ : 7–9 классы». 8 класс / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2019. — 191 с. : ил. — (Большая перемена).

**ISBN 978-5-222-31529-3**

В предлагаемом пособии приводятся полные решения всех без исключения задач для 8-го класса из книги «Геометрия: задачи на готовых чертежах для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ: 7–9 классы».

Некоторые задачи решены различными способами, чтобы читатель имел возможность ознакомиться с сущностью рационального решения.

Ученикам будет целесообразно обращаться к «решебнику» уже после того, как они самостоятельно решат задачи, или же тогда, когда они убедятся в том, что не в силах самостоятельно справиться с заданием.

Кроме того, приводятся краткие теоретические сведения по курсу геометрии 7–9 классов, сопровождаемые определениями, теоремами, основными свойствами и необходимыми справочными материалами.

Пособие адресовано учащимся общеобразовательных школ, лицеев, колледжей, а также начинающим учителям математики, студентам — будущим учителям и репетиторам.

**ISBN 978-5-222-31529-3**

**УДК 373.167.1:51**  
**ББК 22.1я72**

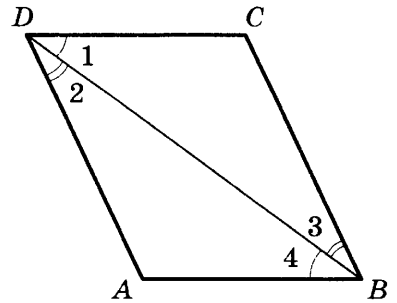
© Балаян Э.Н., 2018  
© Оформление, ООО «Феникс», 2018

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

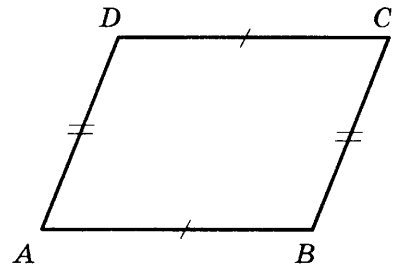
Докажите, что  $ABCD$  — параллелограмм.

1. Так как по условию  $\angle 1 = \angle 4$  и эти углы внутренние накрест лежащие, то  $AB \parallel CD$ . Аналогично, из того, что  $\angle 2 = \angle 3 \Rightarrow AD \parallel BC$ .

Выходит, что  $ABCD$  — параллелограмм (по признаку параллелограмма).

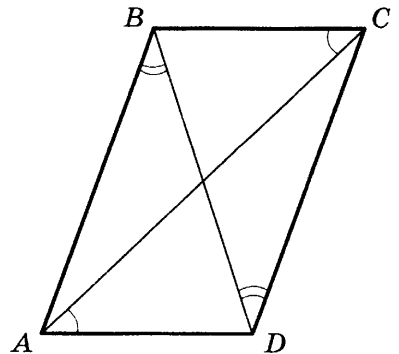


2. Поскольку  $AD = BC$  и  $AB = DC$  (по условию), то  $ABCD$  — параллелограмм (по признаку).



3. По условию задачи  $\angle ABD = \angle CDB$ , и так как они накрест лежащие, то  $AB \parallel CD$ .

Аналогично, по условию,  $\angle ACB = \angle CAD$ , тогда  $AD \parallel BC$ . Значит,  $ABCD$  — параллелограмм (по признаку).



4. По условию  $\angle BAC = \angle ACD$ , и так как они накрест лежащие, то  $AB \parallel CD$ .

Кроме того,  $AB = CD$  (по условию).

Выходит, что в четырехугольнике  $ABCD$  противоположные стороны равны и параллельны.

Значит,  $ABCD$  — параллелограмм (по признаку параллелограмма).

5. Так как в четырехугольнике  $ABCD$   $AO = OC$  и  $OD = OB$ , то  $ABCD$  — параллелограмм (по признаку параллелограмма).

6. По условию  $\triangle ABD = \triangle CDB$ , тогда  $AB = DC$ ,  $AD = BC$ . Следовательно,  $ABCD$  — параллелограмм (по признаку параллелограмма).

*Замечание.* Задачу можно решить разными способами.

7. Заметим, что  $\triangle ADC$  — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника). Тогда  $AD = DC$ .

Аналогично в  $\triangle ABC$   $AB = BC$ .

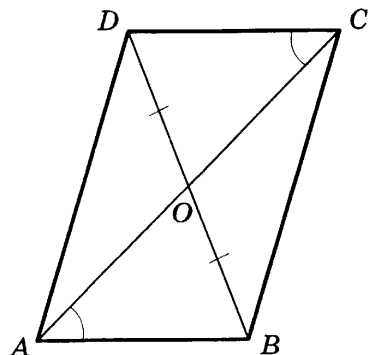
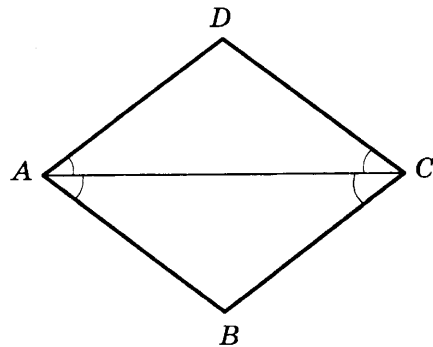
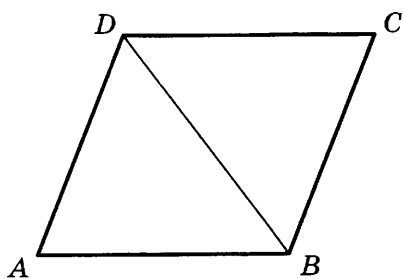
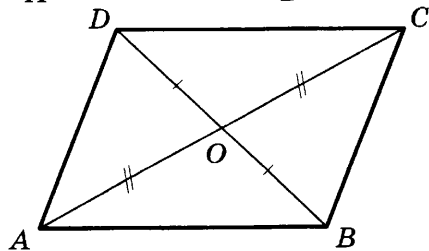
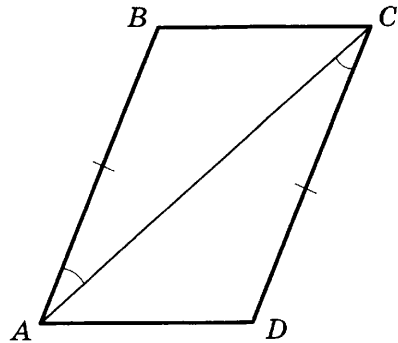
Так как по условию  $\angle DAC = \angle DCA = \angle BAC = \angle BCA$ , то  $AB = BC = CD = AD$ , т. е.  $ABCD$  — параллелограмм (по признаку параллелограмма).

*Замечание.* Задачу можно решить разными способами.

8. Так как  $\angle ACD = \angle BAC$  (по условию) и они внутренние накрест лежащие, то  $AB \parallel DC$ . Но тогда  $\angle BDC = \angle ABD$ .

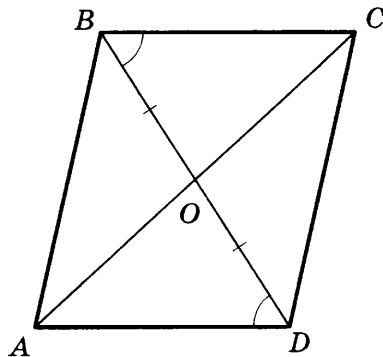
Кроме того,  $\angle DOC = \angle AOB$  — как вертикальные, тогда  $\triangle DOC = \triangle AOB$  (по II признаку равенства треугольников).

Из равенства этих треугольников следует, что  $DC = AB$ . А так как в четырехугольнике  $ABCD$   $AB = CD$  и  $AB \parallel CD$ , то  $ABCD$  — параллелограмм (по признаку параллелограмма).



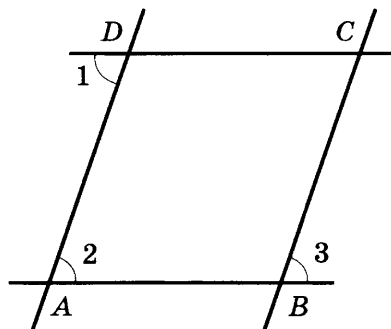
9. По условию  $\angle CBD = \angle ADB$ , и так как эти углы накрест лежащие, то  $BC \parallel AD$ .

Кроме того,  $\angle BOC = \angle AOD$  — как вертикальные, тогда  $\triangle BOC = \triangle AOD$  (по II признаку). Из равенства этих треугольников следует, что  $BC = AD$ , тогда  $ABCD$  — параллелограмм (по признаку параллелограмма).



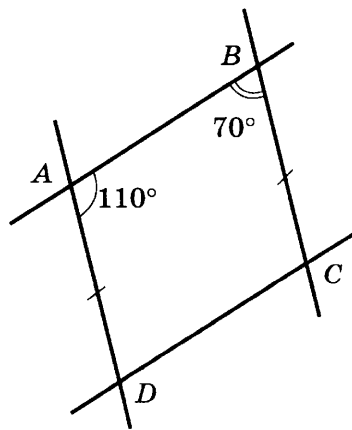
10. Так как по условию  $\angle 1 = \angle 2$  и они внутренние накрест лежащие, то  $AB \parallel DC$  (по признаку параллельности прямых).

$\angle 2 = \angle 3$  — как соответственные, тогда  $AD \parallel BC$ . Следовательно,  $ABCD$  — параллелограмм (по признаку).

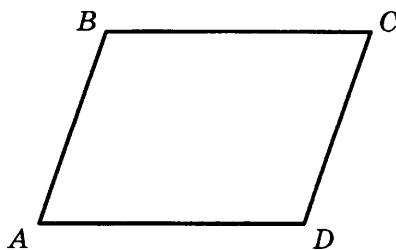


11. Заметим, что  $110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$ .

Так как эти углы внутренние односторонние и их сумма равна  $180^\circ$ , то  $AD \parallel BC$  (по признаку параллельности прямых). Кроме того, по условию задачи  $AD = BC$ . А если в четырехугольнике противоположные стороны  $AD$  и  $BC$  равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм (по признаку параллелограмма).



12. Так как по условию задачи  $\angle A + \angle D = 180^\circ$  и эти углы внутренние односторонние, кроме того,  $AD \parallel BC$  (по условию), то  $ABCD$  — параллелограмм (по признаку параллелограмма).

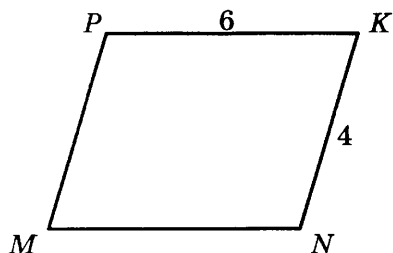


# СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

Найдите периметр параллелограмма.

1. Если  $P_{MNKP}$  — периметр параллелограмма, то  $P_{MNKP} = 2 \cdot (6 + 4) = 2 \cdot 10 = 20$ .

Ответ: 20.

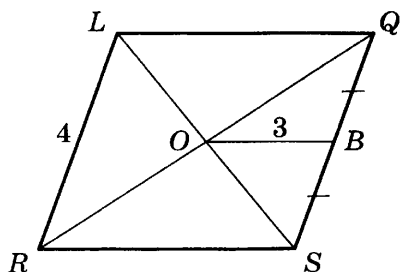


2. Так как  $LQSR$  — параллелограмм (по условию), то точка  $O$  — середина  $RQ$ . Кроме того, по условию задачи  $QB = BS$ .

Следовательно,  $OB$  — средняя линия  $\triangle RSQ$ , значит,  $RS = 2 \cdot OB = 6$ , тогда периметр

$$P_{RLQS} = 2 \cdot (LR + RS) = 2 \cdot (4 + 6) = 20.$$

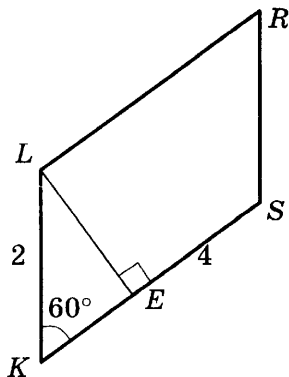
Ответ: 20.



3. В  $\triangle LKE$ , где  $\angle LEK = 90^\circ$  и  $\angle K = 60^\circ$ ,  $\angle KLE = 30^\circ$ . Тогда  $KE = \frac{1}{2}LK = 1$  (по свойству катета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ), тогда  $KS = 1 + 4 = 5$ .

Значит,  $P_{KLRS} = 2 \cdot (2 + 5) = 14$ .

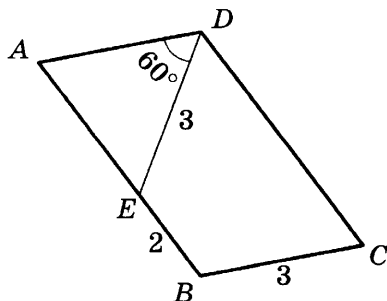
Ответ: 14.



4. Так как  $ABCD$  — параллелограмм, то  $BC = AD = 3$  (по свойству параллелограмма).

Тогда  $\triangle ADE$  — равнобедренный (по определению) и  $\angle DAE = \angle AED = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$ . Выходит, что  $\triangle ADE$  — равносторонний, т. е.  $AE = AD = DE = 3$ . Значит, периметр  $P_{ABCD} = 2(BC + AB)$ , где  $AB = AE + EB = 3 + 2 = 5$ .  $P_{ABCD} = 2 \cdot (3 + 5) = 16$ .

Ответ: 16.



5. В  $\triangle DNR$ , где  $\angle DRN = 30^\circ$  и  $\angle NDR = 90^\circ$ ,  $DN = \frac{1}{2}NR$  (по свойству катета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ), тогда  $NR = 2 \cdot DN = 6$ .

Так как  $MNRK$  — параллелограмм, то  $MN = KR = 5$  и  $NR = MK = 6$  (по свойству параллелограмма), тогда  $P_{MNRK} = 2 \cdot (6 + 5) = 22$ .

Ответ: 22.

6. Так как  $ABCD$  — параллелограмм, то  $AB = DC = 6$ .

Заметим, что  $\angle DEC = \angle ECB$  как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $CE$ .

Но  $\angle DCE = \angle BCE$ , тогда  $\angle DEC = \angle DCE$ , т. е.  $\triangle DEC$  — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника).

Тогда  $DC = DE = 6$  и  $AD = AE + DE = 8$ .

Значит,  $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 2 \cdot (6 + 8) = 28$ .

Ответ: 28.

7. Так как  $ABCD$  — параллелограмм, то  $P_{ABCD} = 2 \cdot (5 + 6) = 22$ .

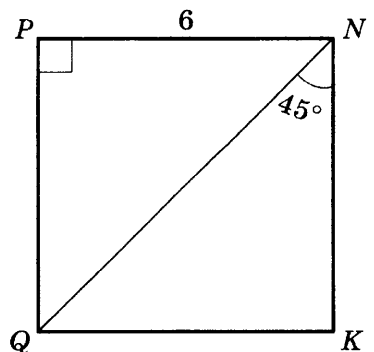
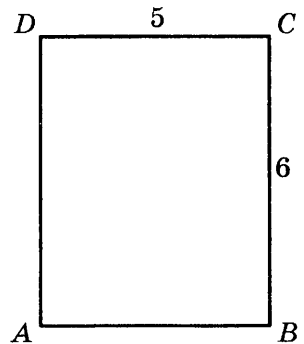
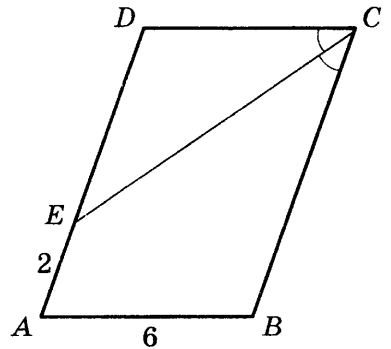
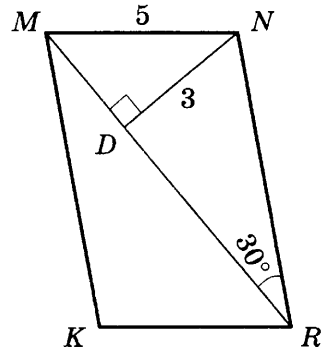
Ответ: 22.

8. По условию задачи  $PNKQ$  — параллелограмм и  $\angle P = 90^\circ$ , тогда  $\angle K = \angle P = 90^\circ$  (по свойству параллелограмма).

Но  $\angle P + \angle PQK = 180^\circ$  (сумма односторонних углов), откуда  $\angle PQK = 90^\circ$ .

$\angle PQK = \angle PNK = 90^\circ$ , значит, параллелограмм  $PNKQ$  — прямоугольник. Так как в  $\triangle QKN$   $\angle QNK = 45^\circ$ , то  $\angle NQK = 45^\circ$ , т. е.  $\triangle QKN$  — равнобедренный. Тогда  $NK = QK = PN = 6$  и  $P_{QPNK} = 4 \cdot PN = 6 \cdot 4 = 24$ .

Ответ: 24.





9. Периметр  $P_{FLKE} = 2(FE + FL)$ , где  $FE = 7$  (по условию).

Так как  $\angle LCK = 90^\circ$ , то  $\angle FCL = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$  (сумма смежных углов равна  $180^\circ$ ).

Значит,  $\triangle FCL$  — прямоугольный, где  $\angle FLC = 30^\circ$ , тогда  $FC = \frac{1}{2}LF$  (по свой-

ству катета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ), и так как  $FC = 2$  (по условию), то  $LF = 2 \cdot 2 = 4$ .

Следовательно,  $P_{FLKE} = 2 \cdot (7 + 4) = 22$ .

Ответ: 22.

10. Заметим, что параллелограмм  $ABCD$  является прямоугольником, так как  $\angle D = 90^\circ$  (см. № 8).

$\angle BAC = 60^\circ$  (по условию), тогда  $\angle ACB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ , значит,  $AB = \frac{1}{2}AC$  (по свойству катета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ), и так как  $AC = 15$  (по условию), то  $AB = \frac{1}{2} \cdot 15 = 7,5$ ,

тогда  $P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + BC) = 2 \cdot (7,5 + 8,5) = 32$ .

Ответ: 32.

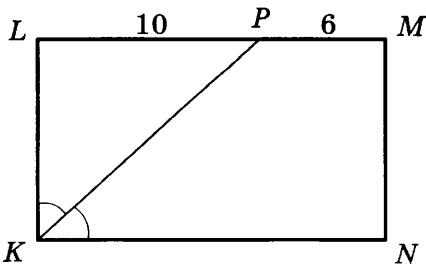
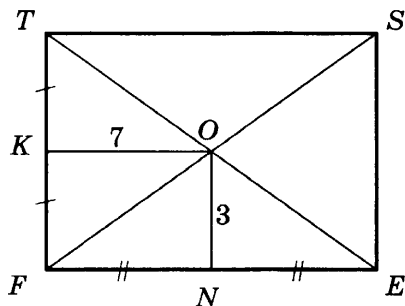
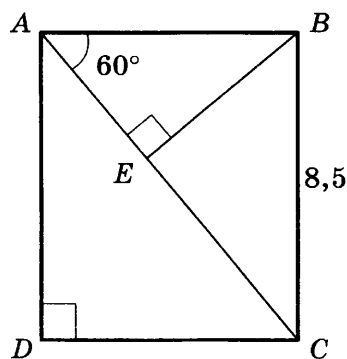
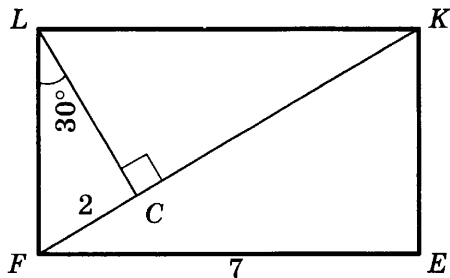
11. По условию задачи точки  $K$  и  $N$  — соответственно середины сторон  $TF$  и  $FE$ , кроме того,  $O$  — середина диагонали  $TE$  (диагонали параллелограмма пересекаются и в точке пересечения делятся пополам). Значит,  $KO$  — средняя линия  $\triangle FTS$  (и  $\triangle TFE$ ); аналогично  $ON$  — средняя линия  $\triangle TFE$ , тогда  $KO = \frac{1}{2}TS$  и  $ON = \frac{1}{2}TF$ .

Но  $KO = 7$  и  $ON = 3$ , значит,  $TS = 2 \cdot KO = 14$ ,  $TF = 2 \cdot ON = 6$ . Следовательно,  $P_{FTSE} = 2 \cdot (14 + 6) = 40$ .

Ответ: 40.

12. Поскольку  $KP$  — биссектриса, то  $\angle LKP = \angle PKN$ .

Но  $\angle PKN = \angle LPK$  — как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых  $LM$  и  $KN$  и секущей  $KP$ . Значит,  $\triangle LKP$  — равнобедренный (по признаку



равнобедренного треугольника). Так как по условию задачи  $LP = 10$ , то  $LK = LP = 10$  и  $LM = KN = 10 + 6 = 16$ .

Тогда  $P_{LMNK} = 2 \cdot (10 + 16) = 52$ .

Ответ: 52.

**13.** Так как  $ABCD$  — параллелограмм и  $BC = DC$  (по условию), то  $ABCD$  — ромб, где сторона ромба  $AB = 15$ , тогда  $P_{ABCD} = 4 \cdot AB = 15 \cdot 4 = 60$ .

Ответ: 60.

**14.** В параллелограмме  $MSLK$   $SL = LK$  (по условию), значит,  $MSLK$  — ромб (по определению).

Так как  $\angle MKS = 60^\circ$  и  $MK = MS$ , то  $\triangle KMS$  — равнобедренный (по определению), тогда  $\angle MKS = \angle MSK = 60^\circ$  (по свойству). Но тогда  $\angle M = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$ , т. е.  $\triangle MSK$  — равносторонний и  $MS = MK = SK = 8$ .

Значит,  $P_{MSLK} = 4 \cdot MS = 8 \cdot 4 = 32$ .

Ответ: 32.

**15.** В параллелограмме  $RMNQ$   $MN = QN$  (по условию), значит,  $RMNQ$  — ромб (по определению).

Так как  $QD \perp RM$ , то  $\triangle RDQ$  — прямоугольный, где  $\angle R = 60^\circ$ , тогда  $\angle RQD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow RD = \frac{1}{2} RQ$  (по свойству

катета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ).

Поскольку  $RD = 6$ , то  $RQ = 2 \cdot RD = 12$ .

Тогда  $P_{RMNQ} = 4 \cdot RQ = 12 \cdot 4 = 48$ .

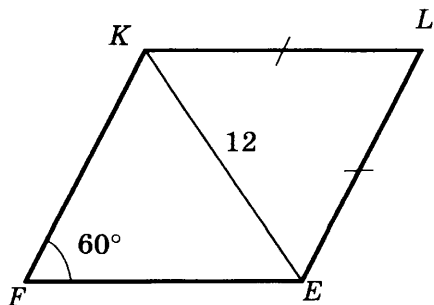
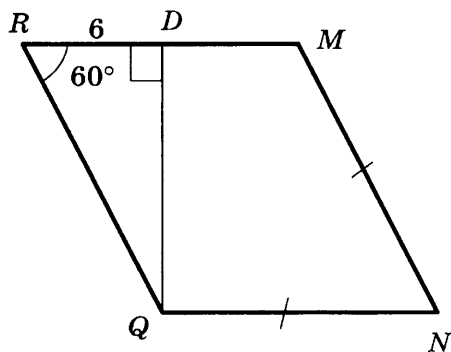
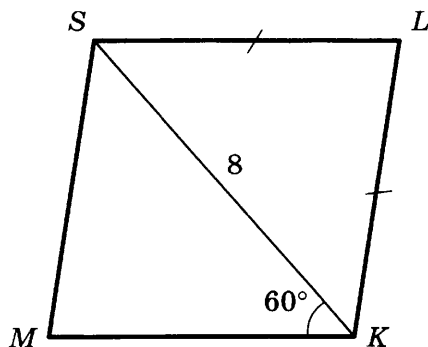
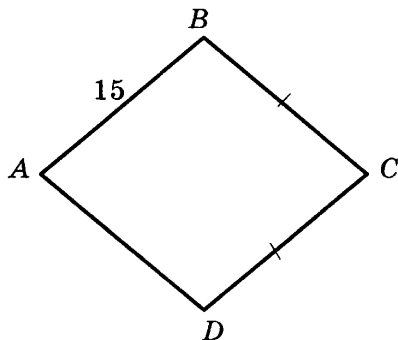
Ответ: 48.

**16.** Так как  $KL = LE$ , то  $KLEF$  — ромб (см. № 15), тогда  $\angle F = \angle L = 60^\circ$ .

$\triangle KLE$  — равнобедренный, тогда  $\angle LKE = \angle KEL = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$ , т. е.  $\triangle KLE$  — равносторонний,  $KL = LE = 12$ .

Значит,  $P_{KLEF} = 4 \cdot KL = 12 \cdot 4 = 48$ .

Ответ: 48.



**17.** В  $\triangle ACD$   $OD$  — медиана ( $AO = OC$ ) и высота ( $AC \perp OD$ ), значит,  $\triangle ACD$  — равнобедренный (по свойству), тогда  $AD = DC$ , т. е.  $ABCD$  — ромб (по определению). По условию  $\angle B = 120^\circ$ , тогда  $\angle ADO = \angle CDO = 60^\circ$  (по свойству ромба).

Значит, в  $\triangle AOD$   $\angle OAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow OD = \frac{1}{2}AD$  (по свойству катета,

лежащего против угла в  $30^\circ$ ), тогда  $AD = 2 \cdot OD = 16$ .

Следовательно,  $P_{ABCD} = 4 \cdot AD = 64$ .

**Ответ:** 64.

**18.** Так как  $MELS$  — параллелограмм (по условию), то  $\angle ROE = \angle SON$  как вертикальные. Но  $\angle ROE = \angle MSO$  (по условию), значит,  $\angle MSO = \angle OSN$ , т. е.  $SE$  — биссектриса  $\angle MSL$ . Так как  $O$  — середина  $ML$ , то биссектриса  $SO$  является и медианой (по свойству равнобедренного треугольника).

Значит,  $MS = SL$  и  $ME = EL$ , т. е.  $MELS$  — ромб.

Но диагонали ромба взаимно перпендикулярны, и  $MO = OL = OE = OS$ , т. е. ромб  $MELS$  — квадрат. По условию  $RE = 2$ , тогда  $ME = 4$  и  $P_{MELS} = 4 \cdot 4 = 16$ .

**Ответ:** 16.

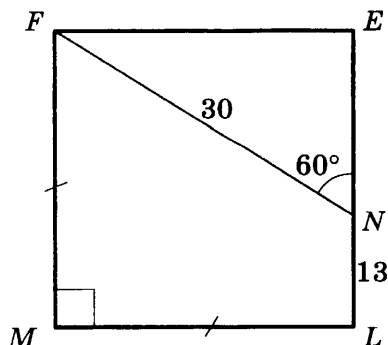
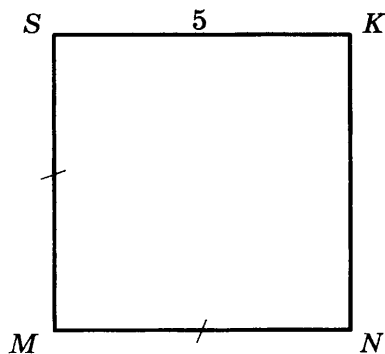
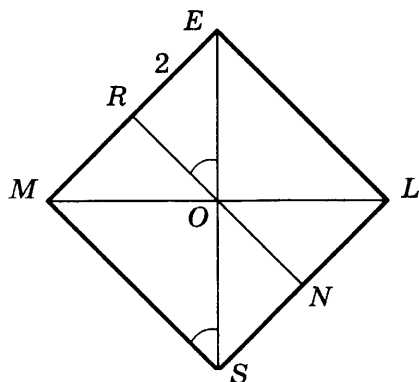
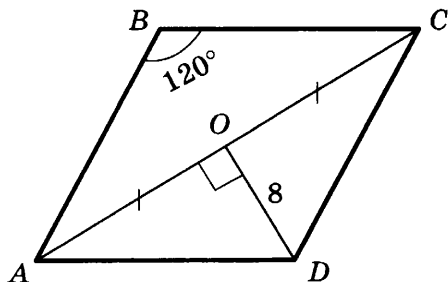
**19.** Так как  $SMNK$  — параллелограмм и  $SM = MN$ , то  $SMNK$  — ромб, тогда  $P_{SMNK} = 4 \cdot SK = 5 \cdot 4 = 20$ .

**Ответ:** 20.

**20.** Так как  $MFEL$  — параллелограмм и  $FM = ML$ , то  $MFEL$  — ромб.

По условию  $FM \perp ML$ , значит, ромб  $MFEL$  — квадрат.

В  $\triangle FEN$   $\angle E = \angle M = 90^\circ$ ,  $\angle FNE = 60^\circ$  (по условию), тогда  $\angle ENF = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow EN = \frac{1}{2}FN = 15$  (по свойству ка-



тета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ). Тогда  $EL = EN + NL = 15 + 13 = 28$  и  $P_{MFEL} = 4 \cdot EL = 28 \cdot 4 = 112$ .

Ответ: 112.

**21.** Так как  $\angle BCA = \angle DCA$ , то  $CA$  — биссектриса, тогда  $\angle BAC = \angle DAC$ , значит,  $AB = BC$  и  $AD = DC$ , т. е.  $ABCD$  — ромб. По условию  $AK = KD$  и  $O$  — середина  $AC$  и  $BD$ , тогда  $KO$  — средняя линия  $\triangle ABD$ , значит,  $KO = \frac{1}{2}AB$ , откуда  $AB = 2 \cdot KO = 9 \cdot 2 = 18$ .

Следовательно,  $P_{ABCD} = 18 \cdot 4 = 72$ .

Ответ: 72.

*Замечание.* Можно доказать, что  $ABCD$  — квадрат.

**22.** По условию  $KM = 21$ , тогда  $KD = DC = CM = 21 : 3 = 7$ .

$\angle N = 90^\circ$  и  $\angle K = \angle M$ , значит,  $\triangle KNM$  — равнобедренный и прямоугольный, тогда  $\angle K + \angle M = 90^\circ$ , откуда  $\angle K = \angle M = 45^\circ$ .

В  $\triangle KDA$   $\angle K = 45^\circ$  и  $\angle KDA = 90^\circ$ , тогда  $\angle KAD = 45^\circ$ .

Значит,  $KD = AD = 7$ ;  $P_{ABCD} = 7 \cdot 4 = 28$ .

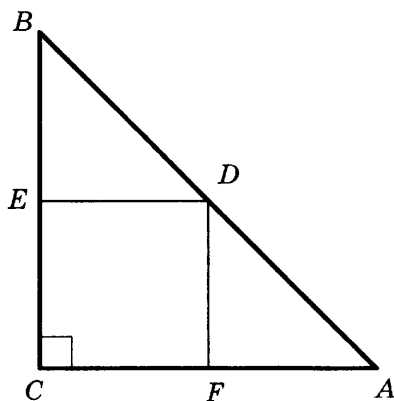
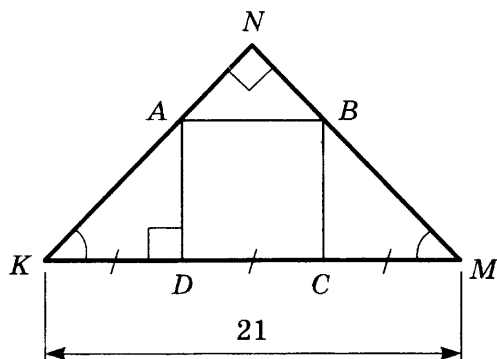
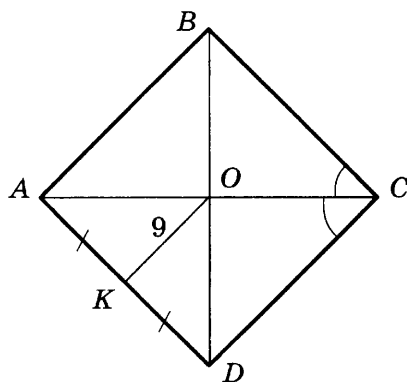
Ответ: 28.

**23.** Так как  $AC = BC = 30$  и  $\angle C = 90^\circ$ , то  $\triangle ABC$  — равнобедренный и прямоугольный, тогда  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ .

$CEDF$  — прямоугольник, тогда  $\triangle BED$  — прямоугольный; так как  $\angle B = 45^\circ$ , то  $\angle BDE = 45^\circ$ .

Значит,  $BE = ED = EC = CF = DF$ , т. е.  $CEDF$  — квадрат. Так как  $ED$  — средняя линия  $\triangle ABC$ , то  $ED = \frac{1}{2}CA = 15$  и  $P_{CEDF} = 15 \cdot 4 = 60$ .

Ответ: 60.

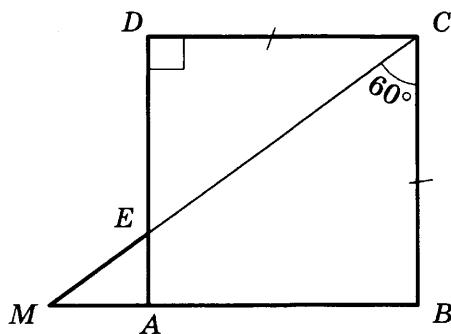


**24.** В параллелограмме  $ABCD$   $\angle D = \angle B = 90^\circ$ , тогда  $\angle A = \angle DCB = 90^\circ$ , т. е.  $ABCD$  — прямоугольник, и так как  $DC = CB$ , то  $ABCD$  — квадрат.

Поскольку  $\angle MCB = 60^\circ$  и  $\angle B = 90^\circ$ , то  $\angle CMB = 30^\circ$ , тогда  $CB = \frac{1}{2}MC = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9$  (по свойству катета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ).

Следовательно,  $P_{ABCD} = 9 \cdot 4 = 36$ .

*Ответ:* 36.



# СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

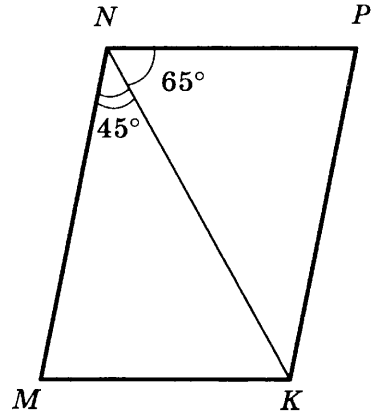
Найдите неизвестные углы.

1.  $\angle N = 45^\circ + 65^\circ = 110^\circ$ .

Так как  $MNPK$  — параллелограмм, то  $\angle N = \angle MKP = 110^\circ$  (противоположные углы равны).

Кроме того,  $\angle M + \angle MNP = 180^\circ$  (сумма односторонних углов), тогда  $\angle M = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$  и  $\angle P = \angle M = 70^\circ$ ,  $\angle PKN = \angle MNK = 45^\circ$ ,  $\angle MKN = \angle PNK = 65^\circ$ .

Ответ:  $\angle M = \angle P = 70^\circ$ ,  $\angle MNP = \angle MKP = 110^\circ$ ,  $\angle MKN = 65^\circ$ ,  $\angle PKN = 45^\circ$ .



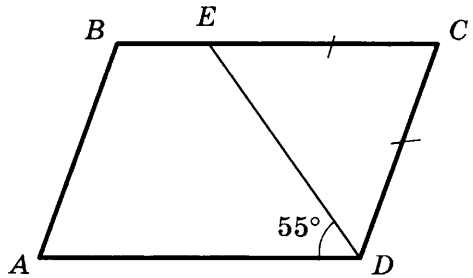
2. Так как  $ABCD$  — параллелограмм,  $\angle ADE = \angle DEC = 55^\circ$  (как накрест лежащие при параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $DE$ ).

По условию задачи  $CE = CD$ , значит,  $\triangle CED$  — равнобедренный (по определению).

Тогда  $\angle CED = \angle CDE = 55^\circ$ . Значит,  $\angle C = 180^\circ - (55^\circ + 55^\circ) = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$  и  $\angle C = \angle A = 70^\circ$  (по свойству параллелограмма).

Так как  $\angle A + \angle B = 180^\circ$  (как сумма односторонних углов при параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $AB$ ) и  $\angle A = 70^\circ$ , то  $\angle B = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ = \angle ADC$ ,  $\angle BED = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$ .

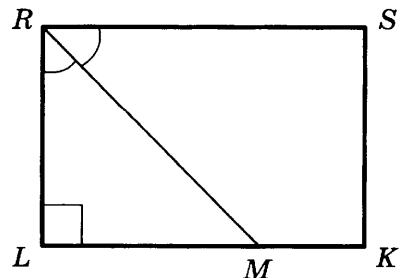
Ответ:  $\angle A = \angle C = 70^\circ$ ,  $\angle B = \angle ADC = 110^\circ$ ,  $\angle CDE = \angle CED = 55^\circ$ ,  $\angle BED = 125^\circ$ .



3. По условию задачи  $RM$  — биссектриса  $\angle LRS$ , тогда  $\angle LRM = \angle MRS$ . Так как  $LRSK$  — параллелограмм и  $\angle L = 90^\circ$ , то  $\angle LRM = \angle MRS = 45^\circ$ .

$\angle L = \angle S = 90^\circ = \angle K = 90^\circ$ ,  $\angle LMR = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$  и  $\angle RMK = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ .

Ответ:  $\angle L = \angle S = \angle K = \angle LRS = 90^\circ$ ,  $\angle RML = \angle MRL = \angle MRS = 45^\circ$ ,  $\angle RMK = 135^\circ$ .

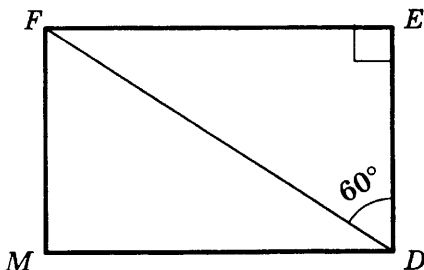


4. Так как  $MFED$  — параллелограмм и  $\angle E = 90^\circ$ , то  $\angle E = \angle M = 90^\circ$  (по свойству параллелограмма).

$\angle MFE = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$  (сумма односторонних углов равна  $180^\circ$ ).  $\angle MFE = \angle MDE = 90^\circ$ .

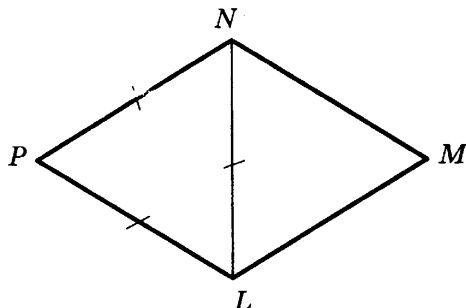
Так как  $\angle FDE = 60^\circ$  (по условию), то  $\angle DFE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = \angle FDM$ ;  $\angle MFD = \angle FDE = 60^\circ$ .

Ответ:  $\angle M = \angle E = \angle MFE = \angle MDE = 90^\circ$ ;  $\angle MFD = 60^\circ$ ;  $\angle DFE = \angle FDM = 30^\circ$ .



5. По условию  $PN = NL = PL$ , значит,  $\triangle PNL$  — равносторонний, тогда  $\angle P = \angle PNL = \angle PLN = 60^\circ$ . Так как  $PNML$  — параллелограмм, то  $\angle P = \angle M = 60^\circ$ ,  $PL = MN = ML$ , тогда  $\angle LNM = \angle NML = \angle MLN = 60^\circ$  и  $\angle PNM = \angle PLM = 120^\circ$ .

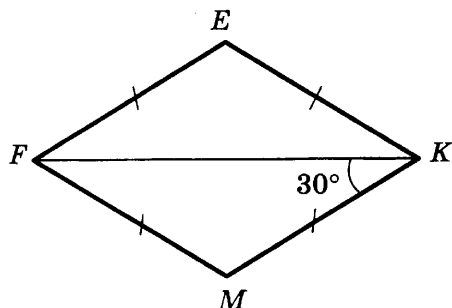
Ответ:  $\angle P = \angle M = 60^\circ$ ;  $\angle PNM = \angle PLM = 120^\circ$ ;  $\angle PNL = \angle PLN = \angle LNM = \angle NLM = 60^\circ$ .



6. Так как  $FE = EK = KM = MF$ , то  $FEKM$  — ромб (по определению), тогда  $KF$  — биссектриса  $\angle EKM$  (по свойству ромба).

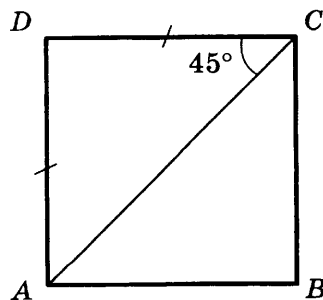
Значит,  $\angle EKM = \angle EFM = 60^\circ$ ,  $\angle E = \angle M = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ,  $\angle EKF = \angle MKF = \angle MFK = \angle EFK = 30^\circ$ .

Ответ:  $\angle E = \angle M = 120^\circ$ ;  $\angle EFM = \angle EKM = 60^\circ$ ;  $\angle EKF = \angle EFK = \angle MKF = \angle MFK = 30^\circ$ .



7.  $AD = DC$ , значит,  $\triangle ADC$  — равнобедренный, тогда  $\angle DAC = \angle DCA = 45^\circ$  (по свойству равнобедренного треугольника);  $\angle D = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ = \angle B$ ;  $\angle ACB = \angle DAC = \angle CAB = 45^\circ$ .

Ответ:  $\angle D = \angle B = 90^\circ$ ;  $\angle DAB = \angle DCB = 90^\circ$ ;  $\angle ACB = \angle CAB = \angle DAC = 45^\circ$ .



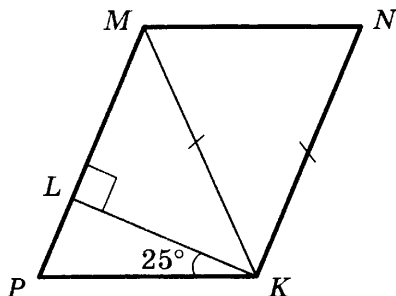
8. Так как  $\angle MLK = 90^\circ$ , то  $\angle PLK = 90^\circ$ , значит,  $\triangle PLK$  — прямоугольный.

Тогда  $\angle P = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$ . Но  $\angle P = \angle N = 65^\circ$  (по свойству параллелограмма).

По условию задачи  $MK = NK$ , тогда  $\angle N = \angle KMN = 65^\circ$  (по свойству равнобедренного треугольника);  $\angle MKN = 180^\circ - (65^\circ + 65^\circ) = 50^\circ$ .

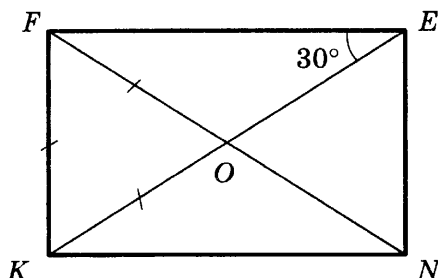
$\angle MKN = \angle PMK = 50^\circ$  (как накрест лежащие при параллельных прямых  $MP$  и  $NK$  и секущей  $MK$ );  $\angle MKL = 90^\circ - \angle LMK = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$ ;  $\angle PMN = \angle PKN = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ .

Ответ:  $\angle P = \angle N = \angle KMN = 65^\circ$ ;  $\angle PMN = \angle PKN = 115^\circ$ ;  $\angle PMK = \angle MKN = 50^\circ$ ;  $\angle MKL = 40^\circ$ .



9. По условию  $FO = KO = FK$ , значит,  $\triangle KOF$  — равносторонний, тогда  $\angle KFO = \angle FKO = \angle FOK = \angle EON = 60^\circ$ .

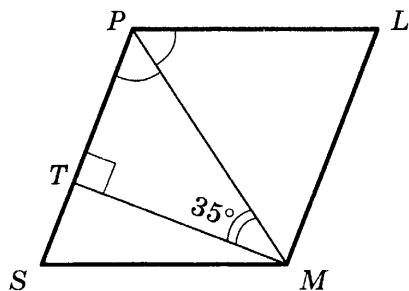
Так как  $KFEN$  — параллелограмм, то  $FK = EN$  (по свойству) и  $OE = OK = OF = ON$ , т. е.  $\triangle ONE$  также равносторонний, т. е.  $\angle OEN = \angle ONE = 60^\circ$ . Кроме того,  $\angle OEF = \angle OKN = 30^\circ$  и  $\angle OFE = \angle ONK = 30^\circ$ ;  $\angle KFE = \angle FEN = \angle ENK = \angle NKF = 90^\circ$ ,  $\angle FOE = \angle KON = 120^\circ$ .



Ответ:  $\angle FEN = \angle ENK = \angle NKF = \angle KFE = 90^\circ$ ;  $\angle KFO = \angle FKO = \angle FOK = \angle EON = \angle OEN = \angle ONE = 60^\circ$ ;  $\angle OKN = \angle ONK = \angle OFE = 30^\circ$ ;  $\angle FOE = \angle KON = 120^\circ$ .

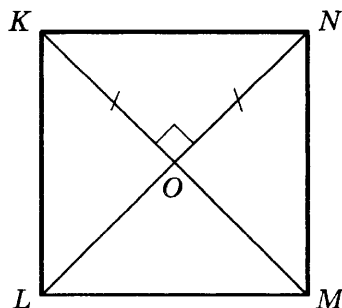
10. По условию задачи  $\angle PTM = 90^\circ$ ,  $\angle PMT = 35^\circ$ , тогда  $\angle TPM = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ . Так как  $PM$  — биссектриса, то  $\angle MPL = 55^\circ = \angle SMP$  (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых  $PL$  и  $SM$  и секущей  $PM$ ). По условию  $SPLM$  — параллелограмм, тогда  $\angle SPL = \angle SML = 55^\circ + 55^\circ = 110^\circ$ ; значит,  $\angle L = \angle S = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$  и  $\angle SMT = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ .

Ответ:  $\angle S = \angle L = 70^\circ$ ;  $\angle SPL = \angle SML = 110^\circ$ ;  $\angle TPM = \angle PML = \angle MPL = 55^\circ$ ;  $\angle SMT = 20^\circ$ .



11. Так как в параллелограмме  $LKNM$   $KM \perp LN$ , то  $LKNM$  — ромб.

По условию  $KO = ON$ , тогда  $ON = OL = OM$ . Значит, ромб  $LKNM$  — квадрат. Следовательно,  $\angle LKN = \angle KNM = \angle NML = \angle MLK = 90^\circ$ , и так как диагонали  $KM$  и

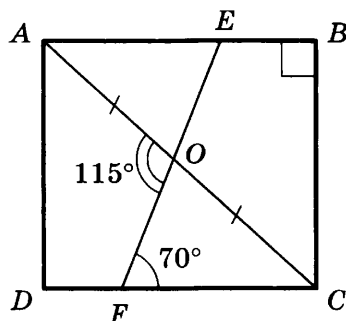




$LN$  являются биссектрисами углов квадрата, то углы между диагоналями и сторонами квадрата равны по  $45^\circ$ .

*Ответ:* углы квадрата равны по  $90^\circ$ ; углы между диагоналями и сторонами квадрата равны по  $45^\circ$ .

**12.** Так как  $ABCD$  — параллелограмм и  $\angle B = 90^\circ$ , то  $\angle D = \angle B = 90^\circ$ , тогда  $\angle BAD = \angle BCD = 90^\circ$ , т. е.  $ABCD$  — прямоугольник;  $\angle FOC = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ = \angle AOE$  (как вертикальные). В  $\triangle FOC$   $\angle FCO = 180^\circ - (70^\circ + 65^\circ) = 45^\circ = \angle OAE$  — как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых  $DC$  и  $AB$  и секущей  $AC$ . Аналогично  $\angle OFC = \angle AEO = 70^\circ$ ;  $\angle DFO = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ = \angle BEO$ ;  $\angle DAO = 90^\circ - \angle OAE = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ = \angle ACB$ ;  $\angle EOC = \angle AOF = 115^\circ$  — как вертикальные.

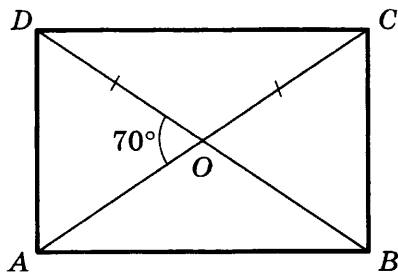


*Ответ:*  $\angle B = \angle D = \angle DAB = \angle BCD = 90^\circ$ ;  $\angle FOC = \angle AOE = 65^\circ$ ;  $\angle COE = 115^\circ$ ;  $\angle DAO = \angle BCO = \angle OAE = \angle FCO = \angle BCO = 45^\circ$ ;  $\angle DFO = \angle BEO = 110^\circ$ .

*Замечание.*  $\angle FCO = \angle AOF - \angle OFC$  (по свойству внешнего угла треугольника).

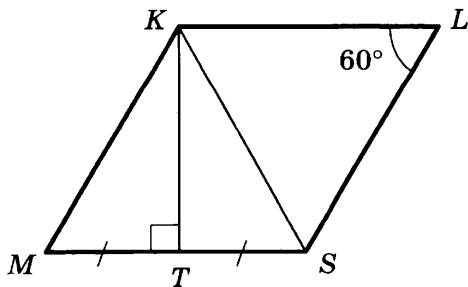
**13.** Так как  $ABCD$  — параллелограмм, то  $AO = OC$  и  $DO = OB$  (по свойству). Но  $DO = CO$  (по условию), тогда  $DO = OC = OA = OB$ , значит,  $AC = BD$ .

Но тогда  $ABCD$  — прямоугольник (по признаку прямоугольника), т. е.  $\angle ADC = \angle DCB = \angle CBA = \angle DAB = 90^\circ$ . Так как  $\angle AOD = 78^\circ$ , то  $\angle COB = 78^\circ$  (как вертикальные углы). Значит,  $\angle DOC = \angle AOB = 180^\circ - 78^\circ = 102^\circ$ . В равнобедренном  $\triangle DOC$ , где  $\angle DOC = 102^\circ$ ,  $\angle ODC = \angle OCD = (180^\circ - 102^\circ) : 2 = 39^\circ$ ;  $\angle ODC = \angle OBA = \angle OAB = 39^\circ$ ;  $\angle DAO = \angle ADO = \angle OCB = \angle OBC = 90^\circ - 39^\circ = 51^\circ$ .



*Ответ:*  $\angle ADC = \angle DCB = \angle CBA = \angle DAB = 90^\circ$ ;  $\angle COB = 78^\circ$ ;  $\angle DOC = \angle AOB = 102^\circ$ ;  $\angle ODC = \angle OBA = \angle OAB = \angle OCD = 39^\circ$ ;  $\angle DAO = \angle ADO = \angle OCB = \angle OBC = 51^\circ$ .

**14.** По условию  $MT = TS$  и  $KT \perp MS$ , тогда  $\triangle KTM = \triangle KTS$  (по двум катетам), значит,  $KM = KS = SL$ . Так как  $\angle L = \angle M = 60^\circ$ , то  $\angle SKL = 60^\circ$ , тогда  $\triangle KSL$  — равносторонний и  $\angle KSL = 60^\circ$ .  $\angle MKL = \angle MSL = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ ;  $\angle MKT = \angle SKT = 30^\circ$ .



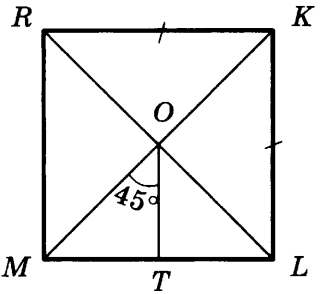
Ответ:  $\angle M = 60^\circ$ ;  $\angle MKL = \angle MSL = 120^\circ$ ;  $\angle KSL = \angle LKS = \angle MKS = \angle KSM = 60^\circ$ .

15. В параллелограмме  $MRKL$   $RK = KL$ , тогда  $RK = ML = KL = RM$ , значит,  $MRKL$  — ромб.

В равнобедренном  $\triangle RKL$   $OK$  — медиана (точка  $O$  — середина диагоналей), значит,  $OK$  — высота, тогда  $RL \perp MK$ , т. е.  $MRKL$  — квадрат.

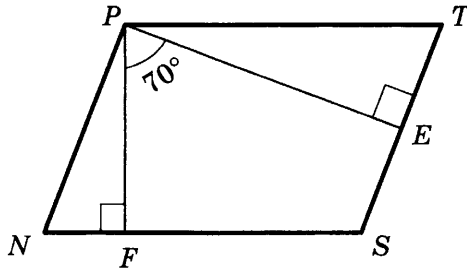
Значит, углы квадрата — прямые, а диагонали являются биссектрисами его углов.

Ответ:  $\angle MRK = \angle RKL = \angle KLM = \angle LMR = 90^\circ$ ;  $\angle OMR = \angle ORM = \angle ORK = \angle OKR = \angle OKL = \angle OLM = \angle OML = 45^\circ$ ;  $\angle TOL = 45^\circ$ .



16. В  $\triangle PET$   $\angle PET = 90^\circ$ . Так как  $PF \perp NS$  и  $PT = NS$ , то  $\angle FPT = 90^\circ$ , тогда  $\angle EPT = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$ , значит,  $\angle T = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ = \angle N$ .

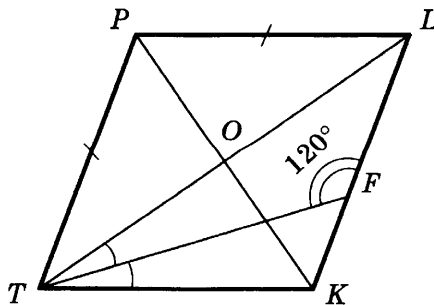
Но  $\angle N + \angle S = 180^\circ$  (сумма односторонних углов), тогда  $\angle S = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ = \angle NPT$ . В  $\triangle NPF$   $\angle NPF = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ = \angle EPT$ .



Ответ:  $\angle N = \angle T = 70^\circ$ ;  $\angle S = \angle NPT = 110^\circ$ ;  $\angle NPF = \angle EPT = 20^\circ$ .

17. Так как  $TP = PL$  (по условию), то  $TPLK$  — ромб (по определению).

По условию  $TF$  — биссектриса  $\angle LTK$ , т. е.  $\angle KTF = \angle FTL = x$ , тогда  $\angle TLF = 2x$  ( $\triangle TKL$  — равнобедренный, так как  $TK = KL$ ).



Имеем уравнение

$$x + 2x + 120 = 180, 3x = 60, x = 20,$$

т. е.  $\angle KTF = \angle FTL = 20^\circ$ , тогда  $\angle TLF = 40^\circ$ . Так как диагонали ромба являются биссектрисами его углов, то  $\angle PLK = \angle PTK = 80^\circ$ , тогда  $\angle TPL = \angle TKL = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ ;  $\angle TFK = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

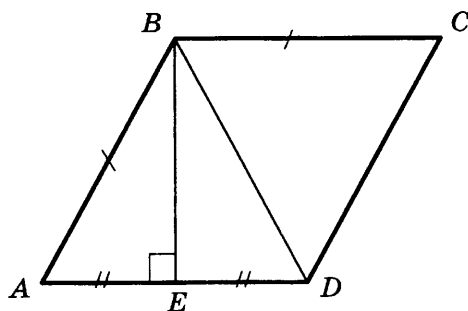
Ответ:  $\angle PLK = \angle PTK = 80^\circ$ ;  $\angle TPL = \angle TKL = 100^\circ$ ;  $\angle KTF = \angle FTL = 20^\circ$ ;  $\angle TFK = 60^\circ$ .

**18.**  $ABCD$  — ромб (см. № 17).

Проведем диагональ  $BD$ .

$\triangle ABE = \triangle BED$  (по двум катетам), тогда  $AB = BD$ , и так как  $AB = BC$ , то  $\triangle ABD$  — равносторонний, т. е.  $\angle A = \angle ABD = \angle ADC = \angle C = \angle CBD = \angle CDB = 60^\circ$ , тогда  $\angle ABC = \angle ADC = 120^\circ$ .

Ответ:  $\angle A = \angle C = 60^\circ$ ;  $\angle ABC = \angle ADC = 120^\circ$ ;  $\angle ABE = \angle EBD = 30^\circ$ ;  $\angle ABD = \angle ADB = \angle BDC = \angle DBC = 60^\circ$ .



# ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Найдите углы параллелограмма.

1. Так как  $MNRP$  — параллелограмм, то  $\angle M = \angle R = 140^\circ : 2 = 70^\circ$  (по свойству параллелограмма).

Тогда  $\angle P = \angle N = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ .

Ответ:  $\angle M = \angle R = 70^\circ$ ;  $\angle P = \angle N = 110^\circ$ .

2. Пусть в параллелограмме  $ABCD$   $\angle A = x$ , тогда  $\angle B = 60 + x$ .

Так как  $\angle A + \angle B = 180^\circ$  (сумма односторонних углов), то получим уравнение  $x + (60 + x) = 180$ ,  $2x = 180 - 60$ ,  $2x = 120$ ,  $x = 60$ .

Значит,  $\angle A = \angle C = 60^\circ$ ,  $\angle B = \angle D = 120^\circ$ .

Ответ:  $\angle A = \angle C = 60^\circ$ ;  $\angle B = \angle D = 120^\circ$ .

3. Пусть  $\angle L = x$ , тогда  $\angle S = 2x$ .

Так как  $\angle L + \angle S = 180^\circ$  (см. № 2), то получим уравнение  $x + 2x = 180^\circ$ ,  $3x = 180^\circ$ ,  $x = 60$ .

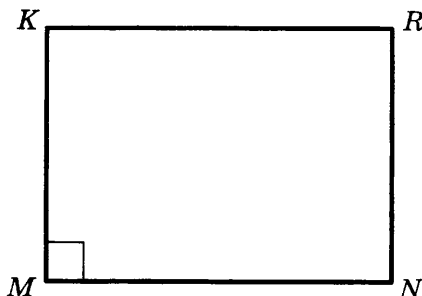
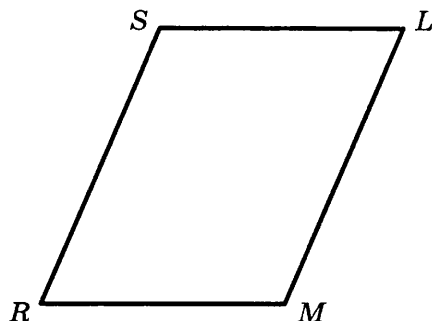
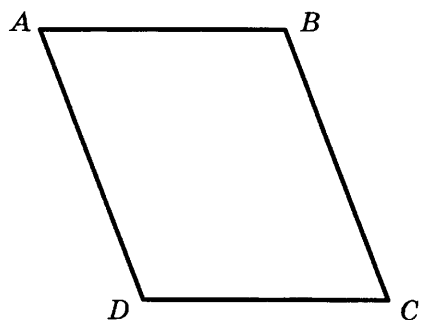
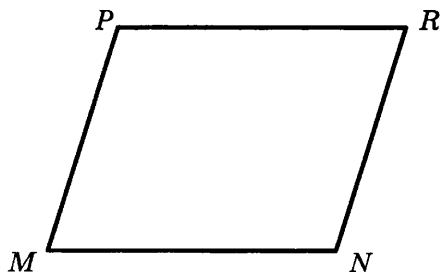
Значит,  $\angle L = \angle R = 60^\circ$ , тогда  $\angle S = \angle M = 60^\circ \cdot 2 = 120^\circ$ .

Ответ:  $\angle R = \angle L = 60^\circ$ ;  $\angle S = \angle M = 120^\circ$ .

4. По условию задачи  $\angle M = 90^\circ$ , тогда  $\angle R = \angle M = 90^\circ$  (по свойству параллелограмма).

Но  $\angle K + \angle R = 180^\circ$  (сумма односторонних углов при параллельных прямых  $KM$  и  $RN$  и секущей  $KR$ ). Значит,  $\angle K = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ,  $\angle K = \angle N = 90^\circ$ .

Ответ:  $\angle M = \angle R = \angle K = \angle N = 90^\circ$ .



5. Пусть  $\angle 2 = x$ , тогда  $\angle 1 = 2x$ .

По условию  $\angle 1 - \angle 2 = 30^\circ$ , т. е.  $2x - x = 30^\circ$ , откуда  $x = 30$ , тогда  $\angle 2 = 30$ ,  $\angle 1 = 60$ .

Значит,  $\angle P = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ = \angle S$  и  $\angle T = \angle K = 90^\circ$ .

Ответ:  $\angle P = \angle S = \angle T = \angle K = 90^\circ$ .

6. Поскольку  $AD = DC$ , то  $ABCD$  — ромб (по определению), тогда  $AC \perp BD$  (по свойству ромба) и  $AC$  и  $BD$  являются биссектрисами углов ромба.

Так как  $\angle ODC = 60^\circ$ , то  $\angle ADC = 120^\circ = \angle ABC$  и  $\angle DAB = \angle DCB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ; 60^\circ; 120^\circ; 120^\circ$ .

7. Если  $RO = MO = OK = OL$ , то  $ML = RK$ .

Параллелограмм, у которого диагонали равны, — прямоугольник.

Значит,  $\angle RMK = \angle MKL = \angle KLR = \angle LRM = 90^\circ$ .

Ответ:  $MRLK$  — прямоугольник.

8. Так как  $SFTM$  — параллелограмм и  $SF = SM$  (по условию), то  $SFTM$  — ромб, тогда  $ST \perp FM$  и диагонали  $ST$  и  $FM$  ромба являются биссектрисами его углов.

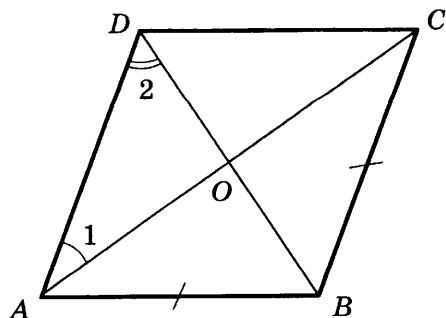
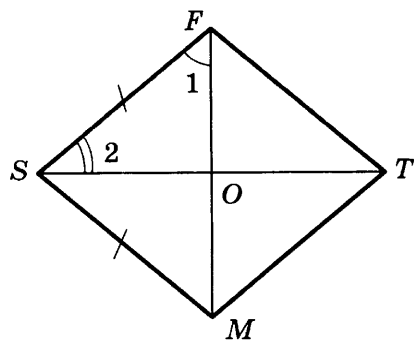
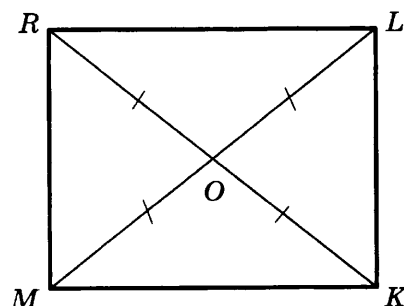
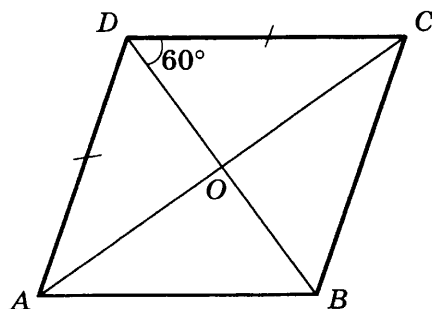
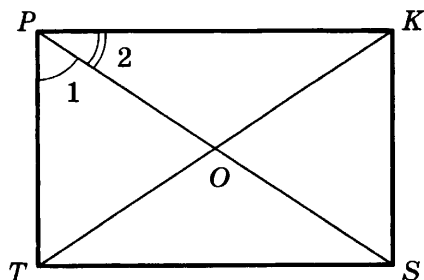
Пусть  $\angle 2 = x$ , тогда  $\angle 1 = 10 + x$ , значит,  $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ , или  $10 + x + x = 90$ ,  $2x = 80$ ,  $x = 40$ , т. е.  $\angle 2 = 40^\circ$  и  $\angle 1 = 10^\circ + 40^\circ = 50^\circ$ , тогда  $\angle FSM = \angle FTM = 80^\circ$ ;  $\angle SFT = \angle SMT = 100^\circ$ .

Ответ:  $80^\circ; 80^\circ; 100^\circ; 100^\circ$ .

9. Параллелограмм  $ABCD$  является ромбом, так как  $AB = BC$ , тогда  $AC \perp BD$ , а диагонали ромба  $AC$  и  $BD$  являются биссектрисами его углов. Пусть  $\angle 1 = x$ , тогда  $\angle 2 = 4x$ , значит,  $\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$  (из  $\triangle AOD$ ), или  $x + 4x = 90$ ,  $5x = 90$ ,  $x = 18$ , т. е.  $\angle 1 = 18^\circ$ ,  $\angle 2 = 72^\circ$ .

Следовательно,  $\angle DAB = 2x = 36^\circ = \angle DCB$  и  $\angle ADC = \angle ABC = 72^\circ \cdot 2 = 144^\circ$ .

Ответ:  $36^\circ; 36^\circ; 144^\circ; 144^\circ$ .



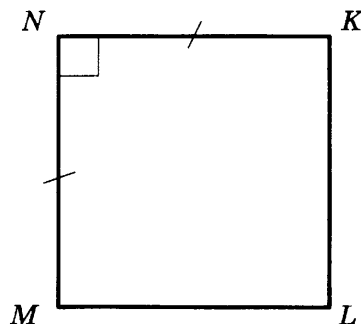
# ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

Найдите стороны параллелограмма, если его периметр  $P = 36$  м.

1. Так как в параллелограмме  $NM = NK$ , то  $MNKL$  — ромб. По условию  $\angle N = 90^\circ$ , тогда ромб с прямым углом — квадрат.

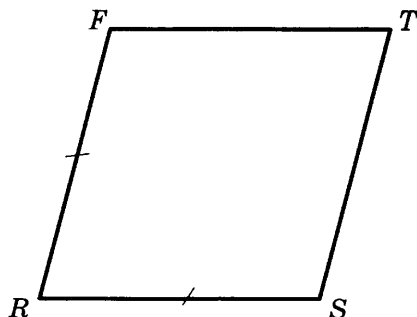
Если периметр квадрата  $P = 36$ , то стороны его будут равны по  $36 : 4 = 9$ .

Ответ: квадрат со стороной 9.



2. В параллелограмме  $RFTS$   $FR = RS$ , тогда  $RFTS$  — ромб, и так как  $P = 36$  (по условию), то сторона ромба равна  $36 : 4 = 9$ .

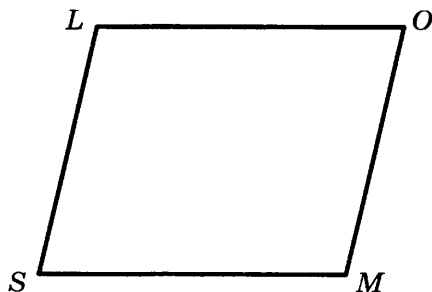
Ответ: ромб со стороной 9.



3. По условию  $SLOM$  — параллелограмм,  $LO - LS = 1$  и  $P = 36$ .

Пусть  $LS = OM = x$ , тогда  $LO = SM = x + 1$ , и так как  $P = 36$ , то получим уравнение  $2(LO + LS) = 36$ , или  $LO + LS = 18$ ;  $x + 1 + x = 18$ ;  $2x = 17$ , откуда  $x = 8,5$ , тогда  $LS = 8,5$  и  $LO = x + 1 = 9,5$ .

Ответ: 8,5; 8,5; 9,5; 9,5.



4. Так как в параллелограмме  $\angle A = 90^\circ$ , то  $ABCD$  — прямоугольник.

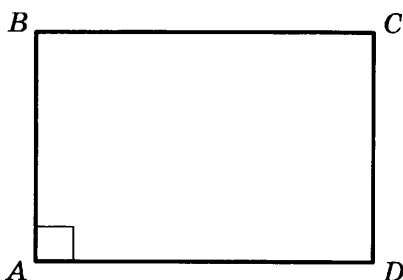
По условию задачи  $P = 36$  и  $AB : BC = 2 : 3$ .

Пусть  $AB = 2x$ , тогда  $BC = 3x$ . Имеем уравнение  $2(2x + 3x) = 36$ ;  $2x + 3x = 18$ ;

$5x = 18$ , откуда  $x = 3,6$ .

Значит,  $AB = CD = 2x = 7,2$  и  $BC = AD = 3x = 3,6 \cdot 3 = 10,8$ .

Ответ: 7,2; 7,2; 10,8; 10,8.



5. В параллелограмме  $NQLM$   $\angle Q = 90^\circ$ , значит,  $NQLM$  — прямоугольник. Так как  $LN$  — биссектриса  $\angle L$ , то  $NQLM$  — квадрат. Так как периметр  $P = 36$ , то сторона квадрата равна  $36 : 4 = 9$ .

Ответ: квадрат со стороной 9.

6. Пусть в параллелограмме  $KMLF$   $KF = x$ , тогда  $KM = 2x$ , так как по условию  $KM = 2 \cdot KF$ .

По условию задачи  $P = 36$ , тогда получим уравнение  $2(x + 2x) = 36$ ,  
 $x + 2x = 18$ ,  $3x = 18$ ,  $x = 6$ .

Значит,  $KF = ML = 6$ ,  $KM = FL = 6 \cdot 2 = 12$ .

Ответ: 6; 6; 12; 12.

7. Пусть  $AB = x$ , тогда  $BC = 2x$ .

Так как  $P = 36$ , то имеем

$$2(x + 2x) = 36, 3x = 18, x = 6.$$

Тогда  $AB = CD = 6$ ,  $BC = AD = 12$ .

Ответ: 6; 6; 12; 12.

8. В параллелограмме  $RQTM$   $TN$  — биссектриса  $\angle T$ , тогда  $\angle 1 = \angle 2$ .

Но  $\angle 2 = \angle 3$  — как накрест лежащие при параллельных прямых  $QR$  и  $TM$  и секущей  $TN$ . Значит,  $\angle 1 = \angle 3$ , т. е.  $\triangle NQT$  — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника). Пусть  $RN = x$ , тогда  $RM = QT = QN = 1,5x$ , т. е.  $RQ = 1,5x + x = 2,5x$ .

Так как  $P = 36$ , то получим уравнение  $2(2,5x + 1,5x) = 36$ , или  $4x = 18$ , откуда  $x = 4,5$ , тогда  $RM = QT = 1,5x = 4,5 \cdot 1,5 = 6,75$  и  $QR = TM = 2,5x = 4,5 \cdot 2,5 = 11,25$ .

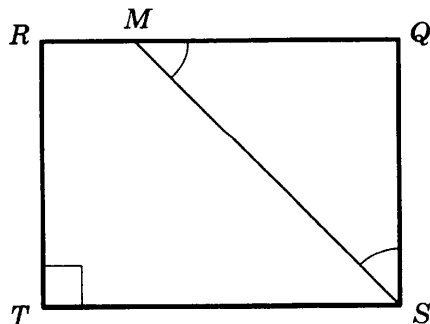
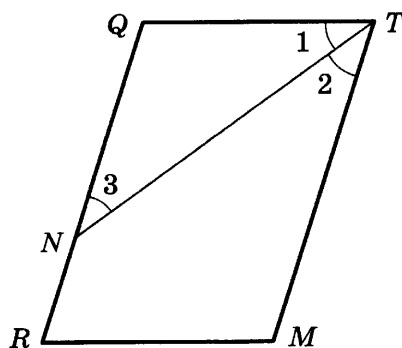
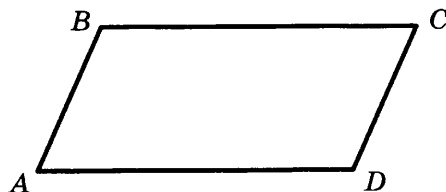
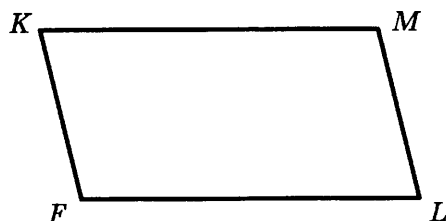
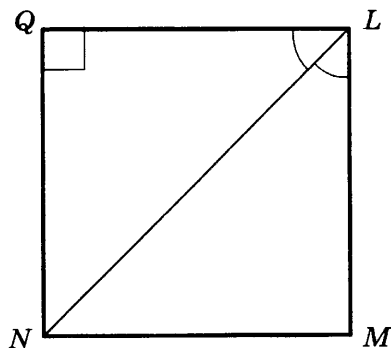
Ответ: 6,75; 6,75; 11,25; 11,25.

9. Так как в параллелограмме  $TRQS$   $\angle T = 90^\circ$ , то  $TRQS$  — прямоугольник.

По условию  $\angle QMS = \angle QSM$ , значит,  $\triangle MQS$  — равнобедренный.

Пусть  $MQ = QS = x$ , тогда получим уравнение  $2(10 + x) = 36$ , или  $10 + x = 18$ , откуда  $x = 8$ , т. е.  $QS = 8$ .

Ответ: 8; 8; 10; 10.



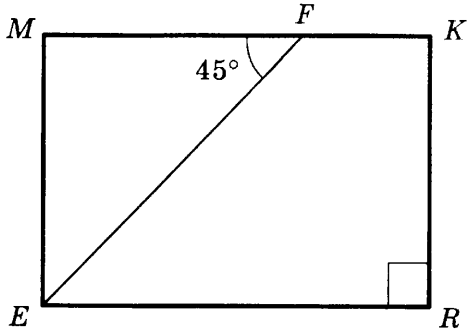
**10.** В параллелограмме  $\angle R = 90^\circ$ ,  $M$  значит,  $EMKR$  — прямоугольник.

Так как  $\angle EFM = 45^\circ$  и  $\angle R = \angle M = 90^\circ$ , то в  $\triangle EMF$   $\angle MEF = 45^\circ$ , т. е.  $\triangle EMF$  — равнобедренный и  $ME = MF$ . Пусть  $FK = x$ , тогда  $ME = MF = x + 6$  и  $MK = MF + FK = 2x + 6$ . По условию задачи  $P = 36$ , тогда имеем уравнение  $2((x + 6) + (2x + 6)) = 36$ , или

$$3x + 12 = 18, 3x = 6, x = 2.$$

Значит,  $ME = KR = x + 6 = 8$ ;  $MK = ER = 2x + 6 = 10$ .

Ответ: 8; 8; 10; 10.



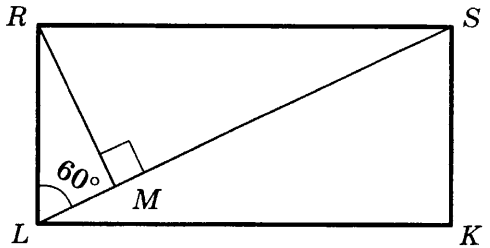
**11.** В  $\triangle RML$   $\angle RML = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$  и  $\angle RLM = 60^\circ$  (по условию), тогда  $\angle LRM = 30^\circ$ , и так как  $LM = 2$  (по условию), то  $RL = 2 \cdot LM = 4$ .

Кроме того,  $P = 36$ , значит,

$$2(RL + RS) = 36, \text{ или } 4 + RS = 18, RS = 14.$$

Итак,  $RL = SK = 4$ ;  $RS = LK = 14$ .

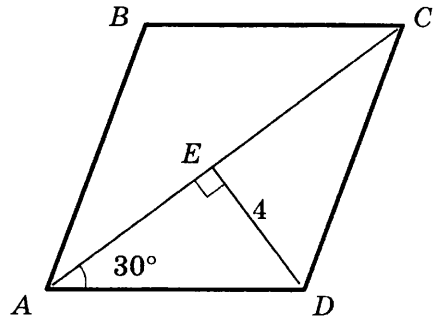
Ответ: 4; 4; 14; 14.



**12.** В  $\triangle ADE$   $\angle AED = 90^\circ$ ,  $\angle EAD = 30^\circ$  и  $ED = 4$  (по условию), тогда  $AD = 2 \cdot DE = 8$ ;  $AD = BC = 8$ .

Так как периметр  $P = 36$ , то получим  $2(AB + AD) = 36$ , или  $AB + 8 = 18$ , откуда  $AB = 10$ ,  $AB = CD = 10$ .

Ответ: 8; 8; 10; 10.





# ТРАПЕЦИЯ

Найдите углы трапеции.

1. Так как  $ABCD$  — трапеция, то  $AD \parallel BC$ , тогда  $\angle A + \angle B = 180^\circ$  и  $\angle C + \angle D = 180^\circ$  (сумма односторонних углов при параллельных прямых и секущей).

Значит,  $\angle B = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$  и  $\angle C = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ .

Ответ:  $\angle B = 110^\circ$ ;  $\angle C = 130^\circ$ .

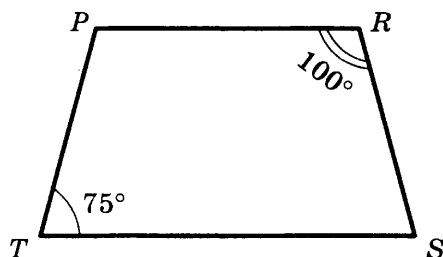
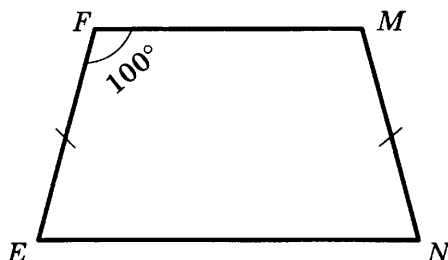
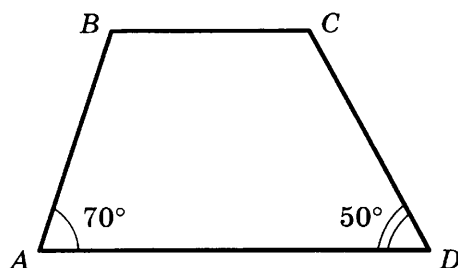
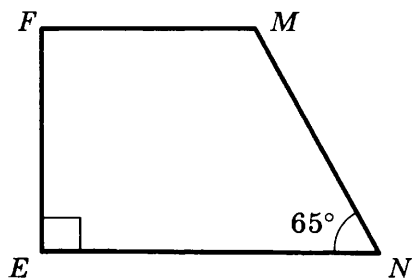
2. В трапеции  $EFMN$   $FE = MN$  (по условию), значит,  $\angle F = \angle M = 100^\circ$  и  $\angle E = \angle N$  (по свойству равнобедренной трапеции).

Но  $\angle E + \angle F = 180^\circ$  и  $\angle M + \angle N = 180^\circ$  (см. № 1), тогда  $\angle E = \angle N = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ .

Ответ:  $\angle E = \angle N = 80^\circ$ ;  $\angle M = 100^\circ$ .

3.  $\angle P = 180^\circ - \angle T = 105^\circ$  (см. № 1) и  $\angle S = 180^\circ - \angle R = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ .

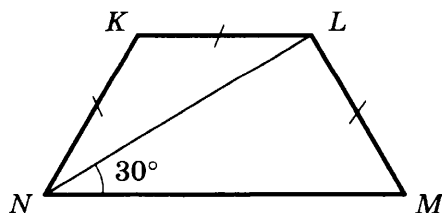
Ответ:  $\angle P = 105^\circ$ ;  $\angle S = 80^\circ$ .



4. Так как в трапеции  $\angle E = 90^\circ$ , то трапеция  $EFMN$  — прямоугольная, тогда  $\angle F = \angle E = 90^\circ$  и  $\angle M = 180^\circ - \angle N = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ .

Ответ:  $\angle E = \angle F = 90^\circ$ ;  $\angle M = 115^\circ$ .

5. По условию задачи  $KN = LM$ , значит, трапеция  $NKLM$  — равнобедренная, тогда  $\angle K = \angle KLM$  и  $\angle KNL = \angle M$ . Кроме того,  $KN = KL$ , значит,  $\triangle KNL$  — равнобедренный, т. е.  $\angle KNL = \angle KLN$  (по свойству равнобедренного треугольника).



Но  $\angle KLN = \angle LNM = 30^\circ$  — как накрест лежащие при параллельных прямых  $KL$  и  $NM$  и секущей  $NL$ .

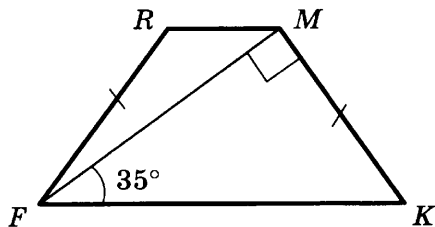
Тогда  $\angle K = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ = \angle KLM$  и  $\angle M = \angle KNM = = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

Ответ:  $\angle K = \angle KLM = 120^\circ$ ;  $\angle M = \angle KNM = 60^\circ$ .

6. По условию задачи  $FR = MK$ , значит, трапеция  $FRMK$  — равнобедренная, т. е.  $\angle R = \angle RMK$  и  $\angle K = \angle RFK$  (см. № 5).

В  $\triangle FMK$ , где  $\angle MFK = 35^\circ$  и  $\angle FMK = = 90^\circ$ ,  $\angle K = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ = \angle RFK$ , тогда  $\angle R = \angle RMK = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$ .

Ответ:  $55^\circ$ ;  $55^\circ$ ;  $125^\circ$ ;  $125^\circ$ .

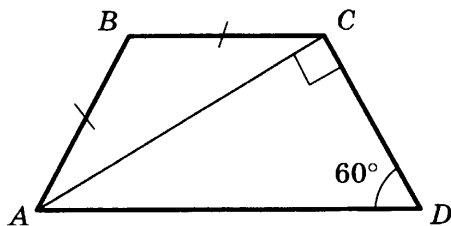


7. Так как  $\triangle ACD$  — прямоугольный ( $\angle ACD = 90^\circ$ ) и  $\angle ADC = 60^\circ$ , то  $\angle CAD = = 30^\circ$ .

В  $\triangle ABC$   $AB = BC$ , т. е.  $\triangle ABC$  — равнобедренный.

Значит,  $\angle BAC = \angle BCA = \angle CAD = = 30^\circ$ , тогда  $\angle B = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = = 120^\circ$  и  $\angle BAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ ;  $\angle BCD = = 90^\circ + \angle BCA = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ .

Ответ:  $\angle BAD = 60^\circ$ ;  $\angle B = \angle BCD = 120^\circ$ .

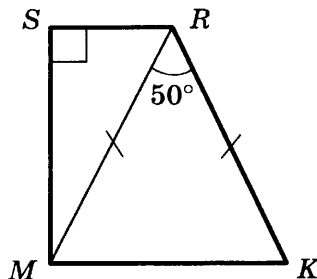


8. По условию  $\angle S = 90^\circ$ , значит, трапеция  $MSRK$  — прямоугольная и  $\angle SMK = \angle S = 90^\circ$ .

Так как  $MR = RK$ , то  $\triangle MRK$  — равнобедренный, тогда  $\angle RMK = \angle K = (180^\circ - 50^\circ) : 2 = 65^\circ$ .

$\angle SRK + \angle K = 180^\circ$  (сумма односторонних углов), откуда  $\angle SRK = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ .

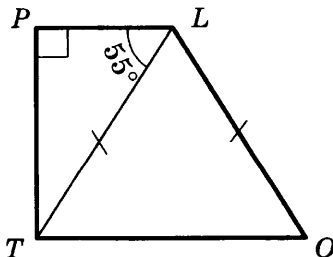
Ответ:  $\angle SMK = 90^\circ$ ;  $\angle K = 65^\circ$ ;  $\angle SRK = 115^\circ$ .



9. Так как  $TPLO$  — прямоугольная трапеция ( $\angle P = 90^\circ$ ), то  $\angle PTO = 90^\circ$ .

$\angle PLT = \angle LTO = 55^\circ$  (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых  $PL$  и  $TO$  и секущей  $TL$ ). По условию задачи  $TL = LO$ , т. е.  $\triangle TLO$  — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), тогда  $\angle LTO = \angle O = = 55^\circ$  и  $\angle PLO = 180^\circ - \angle O = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$ .

Ответ:  $\angle PTO = 90^\circ$ ;  $\angle O = 55^\circ$ ;  $\angle PLO = 125^\circ$ .



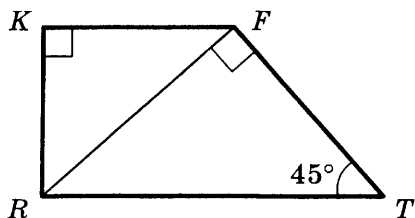
10.  $NE = FM$ , значит, трапеция  $NEFM$  — равнобедренная и  $NF = = ME$  по свойству, тогда  $NO = OM$  (из равенства  $\triangle NOE$  и  $\triangle MOF$ ). Так как  $\angle NOM = 120^\circ$ , то  $\angle ONM = \angle OMN = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$ .

Из  $\triangle NEM$ , где  $\angle NEM = 90^\circ$ , находим  $\angle ENM = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ = \angle FMN$ , тогда  $\angle NEF = 180^\circ - \angle ENM = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ = \angle EFM$ .

Ответ:  $60^\circ; 60^\circ; 120^\circ; 120^\circ$ .

11. Так как  $\angle T = 90^\circ$ , то трапеция  $KTMF$  — прямоугольная, тогда  $\angle TKF = 90^\circ$  и  $\angle TMF = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

Ответ:  $\angle T = \angle TKF = 90^\circ; \angle TMF = 120^\circ$ .



12. Трапеция  $RKFT$  — прямоугольная (см. № 11), тогда  $\angle K = \angle KRT = 90^\circ$ .

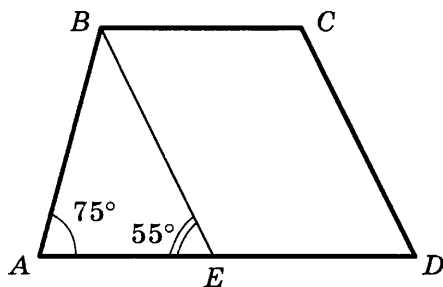
$\angle KFT + \angle T = 180^\circ$  — сумма односторонних углов при параллельных прямых  $KF$  и  $RT$  и секущей  $FT$ .

Тогда  $\angle KFT = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ .

Ответ:  $\angle K = \angle KRT = 90^\circ; \angle KFT = 135^\circ$ .

13. В трапеции  $ABCD$   $BE \parallel CD$  (по условию задачи), тогда  $\angle D = \angle BEA = 55^\circ$  (как соответственные углы при параллельных прямых  $BE$  и  $CD$  и секущей  $DA$ ), тогда  $\angle C = 180^\circ - \angle D = 125^\circ$  и  $\angle ABC = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ .

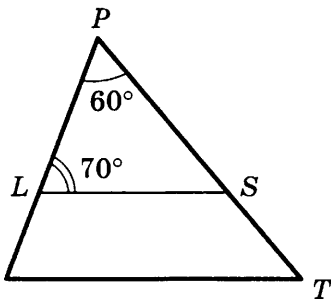
Ответ:  $\angle ABC = 105^\circ; \angle C = 125^\circ; \angle D = 55^\circ$ .



14. Так как  $LS \parallel MT$  (по условию), то  $MLST$  — трапеция, тогда  $\angle PLS = \angle M = 70^\circ$  — как соответственные углы при параллельных прямых  $LS$  и  $MT$  и секущей  $PM$ ;

$\angle T = 180^\circ - (\angle P + \angle M) = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$ ;  $\angle MLS = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$  и  $\angle LST = 180^\circ - \angle T = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ .

Ответ:  $\angle M = 70^\circ; \angle T = 50^\circ; \angle MLS = 110^\circ; \angle LST = 130^\circ$ .



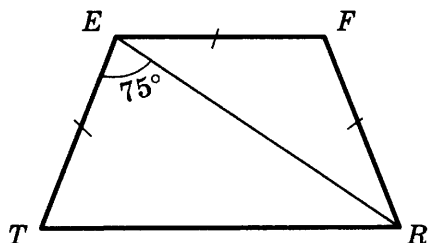
15. По условию трапеция  $TEFR$  — равнобедренная, тогда  $\angle T = \angle FRT$  (как углы при основании).

Так как  $EF = FR$ , то  $\triangle FER$  — равнобедренный, тогда  $\angle FER = \angle FRE = x$ .

Но  $\angle FER = \angle TRE = x$  (как накрест лежащие при параллельных прямых  $EF$  и  $TR$  и секущей  $ER$ ), тогда  $\angle FRT = \angle T = 2x$ .

Так как  $\angle TEF + \angle T = 180^\circ$ , то получим уравнение  $(75 + x) + 2x = 180$ ;  $3x = 105$ ;  $x = 35$ , тогда  $\angle T = \angle FRT = 2x = 70^\circ$  и  $\angle F = \angle TEF = 75^\circ + 35^\circ = 110^\circ$  (или  $\angle F = 180^\circ - \angle R$ ).

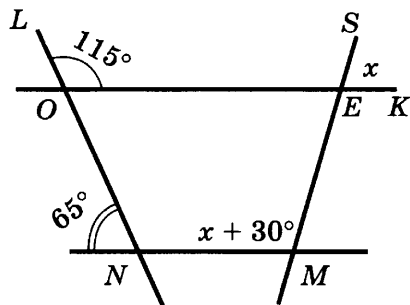
Ответ:  $\angle T = \angle TRF = 70^\circ$ ;  $\angle TEF = \angle F = 120^\circ$ .



**16.**  $\angle LOE$  и  $\angle NOE$  — смежные, тогда  $\angle NOE = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$ , значит,  $\angle ONM = \angle LOE = 115^\circ$  — как соответственные при параллельных прямых  $OE$  и  $NM$  и секущей  $LN$ . Так как  $\angle SEK = \angle OEM = x$  (как вертикальные), то  $\angle OEM + \angle EMN = 180^\circ$ , или  $x + x + 30^\circ = 180^\circ$ ;  $2x = 150$ ;  $x = 75$ .

Итак,  $\angle OEM = 75^\circ$ , тогда  $\angle NME = 75^\circ + 30^\circ = 105^\circ$ .

Ответ:  $\angle NOE = 65^\circ$ ;  $\angle ONM = 115^\circ$ ;  $\angle OEM = 75^\circ$ ;  $\angle NME = 105^\circ$ .

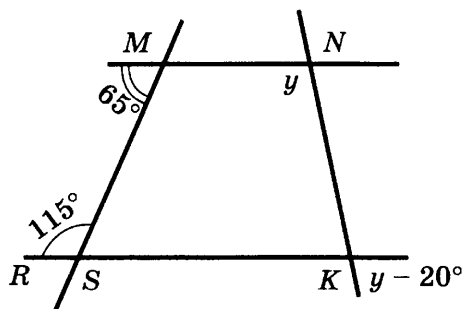


**17.** В трапеции  $MNKS$   $\angle MSK = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$ , тогда  $\angle SMN = \angle RSM = 115^\circ$  (как накрест лежащие углы).

$\angle SKN = y - 20$  (как вертикальные), тогда  $\angle MNK + \angle SKN = 180^\circ$  (сумма односторонних углов). Имеем уравнение  $y + y - 20 = 180$ ;  $2y = 200$ ;  $y = 100$ .

Итак,  $\angle MNK = 100^\circ$ , тогда  $\angle SKN = 80^\circ$ .

Ответ:  $\angle MSK = 65^\circ$ ;  $\angle SMN = 115^\circ$ ;  $\angle MNK = 100^\circ$ ;  $\angle SKN = 80^\circ$ .

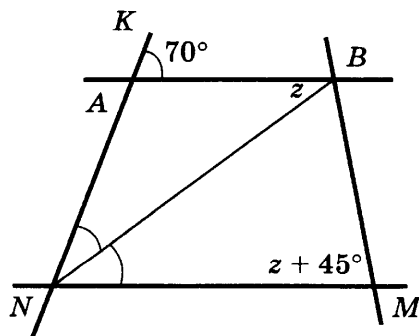


**18.** Так как  $ABMN$  — трапеция, то  $AB \parallel NM$ .

$\angle KAB = \angle ANM = 70^\circ$  — как соответственные углы при параллельных прямых  $AB$  и  $NM$  и секущей  $KN$ ;  $\angle NAB = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ . Так как  $NB$  — биссектриса  $\angle ANM$ , то  $\angle ANB = \angle BNM = 35^\circ$ . Но  $\angle BNM = z = 35^\circ$  — как накрест лежащие углы при параллельных прямых  $AB$  и  $NM$  и секущей  $BN$ , то

гда  $\angle NMB = z + 45^\circ = 80^\circ$  и  $\angle ABM = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ .

Ответ:  $\angle NAB = 110^\circ$ ;  $\angle ANM = 70^\circ$ ;  $\angle ABM = 100^\circ$ ;  $\angle NMB = 80^\circ$ .



# ТРАПЕЦИЯ

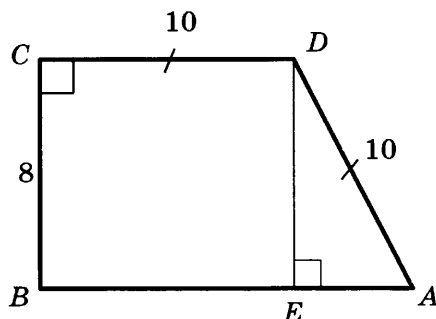
Найдите периметр трапеции  $ABCD$ .

1. Проведем высоту  $DE$  трапеции  $ABCD$ .

Тогда  $BCDE$  — прямоугольник, т. е.  $DE = CB = 8$ ,  $CD = BE = 10$ .

Из  $\triangle ADE$ , где  $AD = 10$  и  $DE = 8$ , найдем  $AE = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ , тогда периметр  $P = AB + BC + CD + AD = (10 + 6) + 8 + 10 + 10 = 44$ .

Ответ: 44.



2. Проведем высоту  $DE$  трапеции  $ABCD$ .

В  $\triangle AED$   $\angle A = 60^\circ$  (по условию), тогда  $\angle ADE = 30^\circ \Rightarrow AE = \frac{1}{2}AD$  (по свойству катета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ), и так как  $AD = CB = 20$ , то  $AE = 10$ .

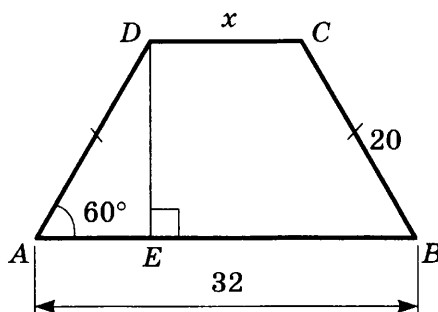
Пусть  $DC = x$ , тогда  $AE = \frac{1}{2}(AB - DC)$ ,

или  $10 = \frac{1}{2}(32 - x)$ , или  $32 - x = 20$ ,

откуда  $x = 12$ .

Итак,  $DC = 12$ , тогда периметр  $P = 2AD + DC + AB = 2 \cdot 20 + 12 + 32 = 84$ .

Ответ: 84.

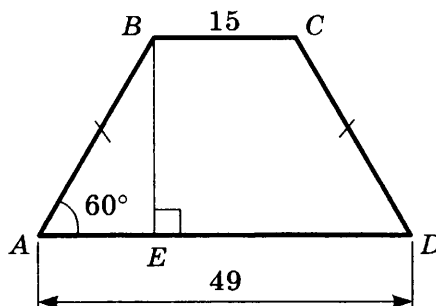


3. Проведем высоту  $BE$  трапеции  $ABCD$ .

В  $\triangle ABE$   $\angle ABE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ , тогда  $AE = \frac{1}{2}AB$ . Но  $AE = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(49 - 15) = 17$ , тогда  $AB = 2AE = 34$ .

Так как  $AB = DC$ , то периметр трапеции  $P = 2 \cdot 34 + 15 + 49 = 132$ .

Ответ: 132.



4. Проведем высоту  $BE$  трапеции  $ABCD$ .

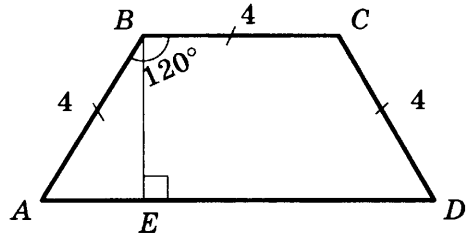
Так как  $\angle ABC = 120^\circ$  (по условию),  
то  $\angle ABE = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow AE = \frac{1}{2}AB = 2$ .

Но  $AE = \frac{1}{2}(AD - BC)$ , или

$\frac{1}{2}(AD - 4) = 2$ , или  $AD - 4 = 4$ , откуда  $AD = 8$ .

Значит, периметр  $P = 2 \cdot AB + BC + AD = 8 + 4 + 8 = 20$ .

Ответ: 20.



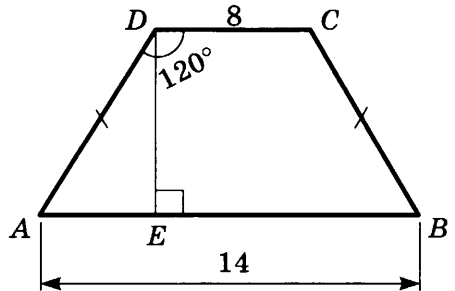
5. В  $\triangle AED$   $\angle ADE = 30^\circ$  (см. № 4),  
тогда  $AE = \frac{1}{2}AD$ .

Но  $AE = \frac{1}{2}(AB - DC) = \frac{1}{2}(14 - 8) = 3$ ,

тогда  $AD = 2 \cdot AE = 6$ .

Значит, периметр  $P = 2 \cdot AD + DC + AB = 12 + 8 + 14 = 34$ .

Ответ: 34.

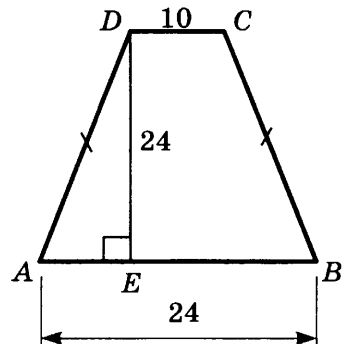


6.  $AE = \frac{1}{2}(AB - DC) = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$  (см. № 4).

Из  $\triangle ADE$  найдем  $AD$  по теореме Пифагора:  
 $AD^2 = 24^2 + 7^2$ , или  $AD^2 = 576 + 49$ , или  
 $AD^2 = 625$ , откуда  $AD = 25$ , тогда  $CB = 25$ .

Значит, периметр трапеции  $P = 2 \cdot AD + DC + AB = 50 + 10 + 24 = 84$ .

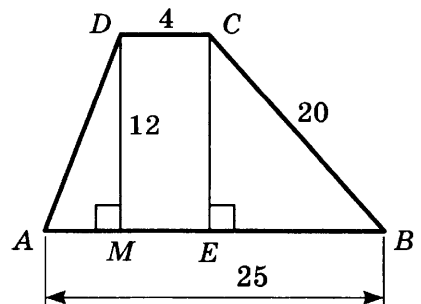
Ответ: 84.



7. Проведем высоту  $CE$  трапеции  $ABCD$ ,  
тогда  $CE = DM = 12$  (как высоты трапеции). Из  $\triangle CEB$  по теореме Пифагора найдем  $BE = \sqrt{20^2 - 12^2}$ ,  $BE = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16$ .

Так как  $DCEM$  — прямоугольник, то  $ME = DC = 4$ , тогда  $AM = AB - (ME + BE) = 25 - (4 + 16) = 5$ .

Из  $\triangle ADM$  найдем  $AD = \sqrt{AM^2 + DM^2}$ ,  
или  $AD = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$ .



Значит, периметр трапеции  $P = AD + DC + BC + AB$ , или  $P = 13 + 4 + 20 + 25 = 62$ .

Ответ: 62.

**8.** Так как  $ABCD$ , трапеция и  $DK \parallel CB$  (по условию), то  $DCBK$  — параллелограмм (по определению), тогда  $DC = KB = 14,15$  (по свойству).

По условию  $AB = 27,65$ , тогда  $AK = AB - KB = 27,65 - 14,15 = 13,5$ .

Так как  $\angle 1 = \angle 2$  и  $\angle 2 = \angle AKD$  (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых  $DC$  и  $AB$  и секущей  $DK$ ), то  $\triangle ADK$  — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника).

Значит,  $AD = AK = 13,5$ , тогда периметр трапеции  $P = AD + DC + CB + AB = 13,5 + 14,15 + 13,5 + 27,65 = 68,8$ .

Ответ: 68,8.

**9.** По условию задачи  $\angle 1 = \angle 2$ .

Так как  $BC \parallel AD$ , то  $\angle 2 = \angle ACB$  (как внутренние накрест лежащие), тогда  $\angle 1 = \angle ACB$ , т. е.  $\triangle ABC$  — равнобедренный (см. № 8), тогда  $AB = BC = 10$ .

Проведем высоту  $CE$  трапеции

$ABCD$ . Поскольку  $\angle D = 60^\circ$ , то  $\angle ECD = 30^\circ$ , тогда  $DE = \frac{1}{2} CD = 5$ .

Следовательно,  $DE = \frac{1}{2}(AD - BC)$ , или  $\frac{1}{2}(AD - 10) = 5$ ;  $AD - 10 = 10$ , откуда  $AD = 20$ .

Значит,  $P = AB + BC + CD + AD = 10 + 10 + 20 = 50$ .

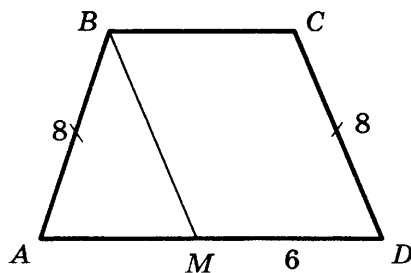
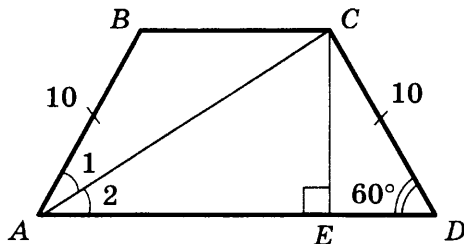
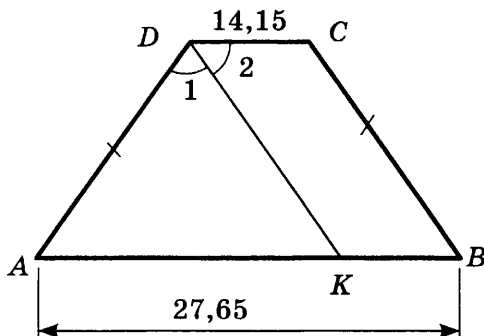
Ответ: 50.

**10.** В равнобедренной трапеции  $ABCD$   $BM \parallel CD$  (по условию), тогда  $BCDM$  — параллелограмм, значит,  $CD = BM = 8$ . По условию  $P_{\triangle ABM} = 20$ , или  $AB + BM + AM = 20$ .

Так как  $AB = 8$ ,  $BM = CD = 8$ , то получим  $8 + 8 + AM = 20$ , откуда  $AM = 4$ .

В трапеции  $ABCD$   $AD = AM + MD = 4 + 6 = 10$ ,  $BC = MD = 6$ , тогда  $P_{ABCD} = 8 + 6 + 8 + 10 = 32$ .

Ответ: 32.

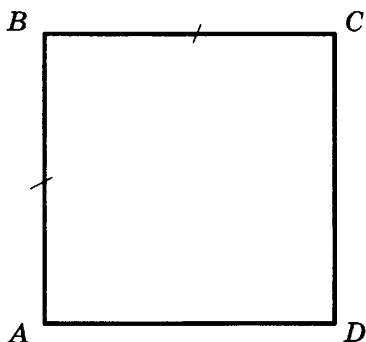
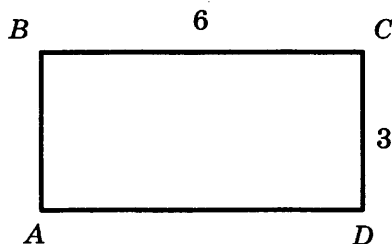


# ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Вычислите площадь прямоугольника  $ABCD$ .

1. Так как  $ABCD$  — прямоугольник, то  
 $S = 3 \cdot 6 = 18$ .

Ответ: 18.



2. Если в прямоугольнике смежные стороны равны, то прямоугольник является квадратом.

По условию периметр  $P = 28$ , тогда сторона  $a = P : 4 = 7$ .

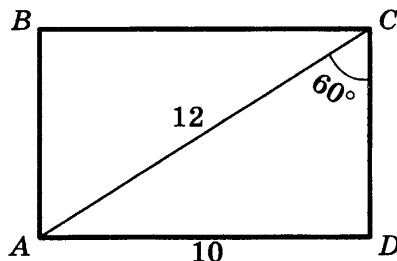
Значит, площадь  $S = a^2 = 7^2 = 49$ .

Ответ: 49.

3. Так как  $ABCD$  — прямоугольник, то  $\triangle ADC$  — прямоугольный, где  $\angle ACD = 60^\circ$ , тогда  $\angle CAD = 30^\circ \Rightarrow CD = \frac{1}{2}AC = 6$  (по свойству катета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ).

Тогда площадь  $ABCD = AD \cdot DC = 10 \cdot 6 = 60$ .

Ответ: 60.

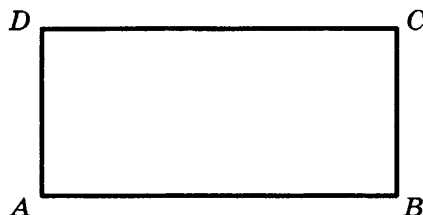


4. Пусть в прямоугольнике  $ABCD$   $BC = x$ , тогда  $AB = 3x$ .

По условию задачи  $AB - BC = 12$ , или  $3x - x = 12$ ,  $2x = 12$ ,  $x = 6$ .

Значит,  $BC = 6$ ,  $AB = 6 \cdot 3 = 18$ , тогда  $S_{ABCD} = 6 \cdot 18 = 108$ .

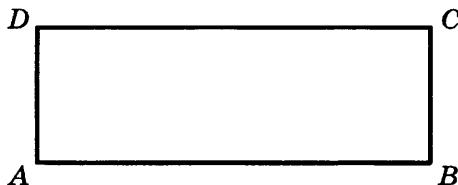
Ответ: 108.



5. Пусть  $BC = x$ , тогда  $AB = 4x$ .

Так как периметр  $P = 30$ , то получим уравнение  $2(x + 4x) = 30$ , или  $5x = 15$ ;  $x = 3$ , тогда  $BC = 3$  и  $AB = 3 \cdot 4 = 12$ . Значит,  $S = 3 \cdot 12 = 36$ .

Ответ: 36.





6. Пусть  $DC = x$ , тогда  $AD = 2x$ .

По условию  $P = 36$ , тогда  $2(x + 2x) = 36$ , или  $3x = 18$ , откуда  $x = 6$ , тогда  $CD = 6$  и  $AD = 6 \cdot 2 = 12$ . Значит,  $S = 6 \cdot 12 = 72$ .

Ответ: 72.

7. В прямоугольнике  $ABCD$   $AD = DC$ , значит,  $ABCD$  — квадрат.

В  $\triangle MDC$   $\angle M = 30^\circ$ ,  $\angle D = 90^\circ$  и  $MC = 20$ , тогда  $CD = \frac{1}{2}MC = 10$ .

Следовательно,  $S_{ABCD} = CD^2 = 100$ .

Ответ: 100.

8. Так как  $ABCD$  — прямоугольник (по условию), то  $\angle B = \angle DCB = \angle MCB = 90^\circ$ .

Заметим, что  $\triangle ABK = \triangle MCK$ , так как  $CK = KB$  (по условию) и  $\angle CKM = \angle AKB$  (как вертикальные). Значит,  $\triangle ABK = \triangle MCK$  (по катету и острому углу). Равные треугольники имеют равные площади (по свойству многоугольника).

Следовательно,  $S_{ABCD} = S_{AMD} = 33$ .

Ответ: 33.

9. В прямоугольнике  $ABCD$   $BK$  — биссектриса, т. е.  $\angle 1 = \angle 2$ .

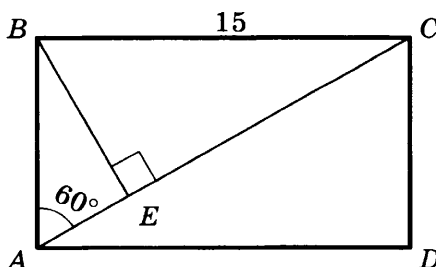
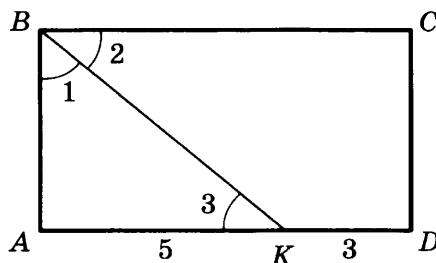
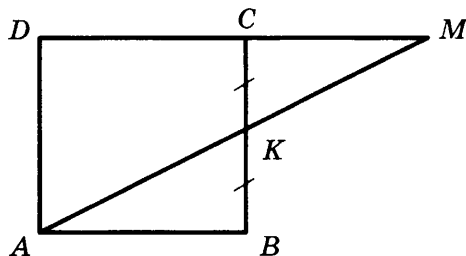
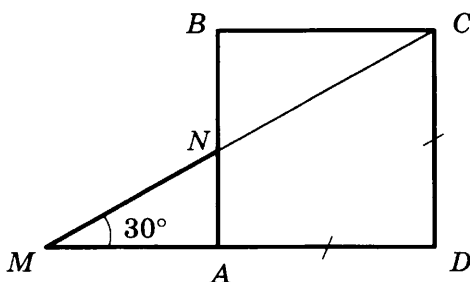
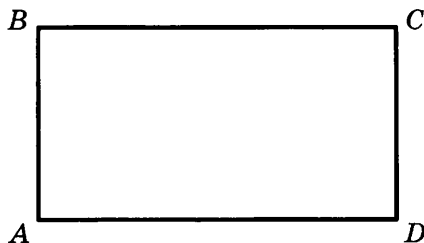
Но  $\angle 2 = \angle AKB$  (как накрест лежащие при параллельных прямых  $BC$  и  $AD$  и секущей  $BK$ ).

Значит,  $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$ , т. е.  $\triangle ABK$  — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), тогда  $AK = AB = 5$  и площадь  $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 5 \cdot (5 + 3) = 40$ .

Ответ: 40.

10. В  $\triangle ABE$   $\angle BAE = 60^\circ$  (по условию),  $\angle BEA = 90^\circ$ , тогда  $\angle ABE = 30^\circ$ .

$AE = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AB = 2AE = 2,5\sqrt{3} \cdot 2 = 5\sqrt{3}$ .



Значит,  $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 5\sqrt{3} \cdot 15 = 75\sqrt{3}$ .

Ответ:  $75\sqrt{3}$ .

11. В  $\triangle ABC$   $\angle BAC = 60^\circ$ ,  $\angle ABC = 90^\circ$ , тогда  $\angle BCA = 30^\circ \Rightarrow$  в  $\triangle BEC$   $BE = \frac{1}{2}BC$ ,

значит,  $BC = 6 \cdot 2 = 12$ .

Тогда,  $S_{ABCD} = 12 \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ .

Ответ:  $48\sqrt{3}$ .

12. В прямоугольнике  $ABCD$   $AB = BC$  (по условию), значит,  $ABCD$  — квадрат.

Диагональ  $AC$  делит квадрат на 2 равных треугольника, т. е.  $\triangle ABC = \triangle ADC$ . Но  $BC = AD = DE$ , тогда  $\triangle ADC = \triangle EDC$  (по двум катетам). Значит,  $S_{ACE} = S_{ABCD} = 64$ .

Ответ: 64.

13. По условию  $ABCD$  — прямоугольник.

Пусть  $AB = x$ , тогда  $BC = x + 5$ . Так как  $P_{ABCD} = 46$ , то получим уравнение  $2(AB + BC) = 46$ , или  $AB + BC = 23$ , или  $x + x + 5 = 23$ ;  $2x = 18$ ;  $x = 9$ .

Значит,  $AB = 9$ ,  $BC = 9 + 5 = 14$ .

Тогда  $S_{ABCD} = 9 \cdot 14 = 126$ .

Ответ: 126.

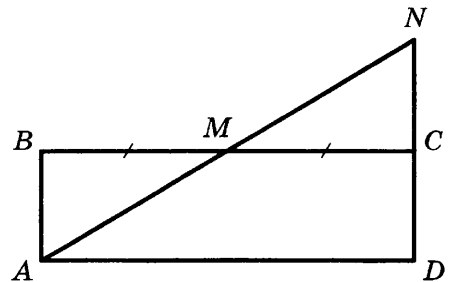
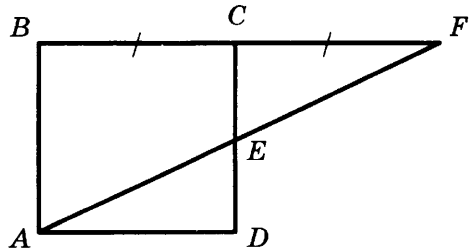
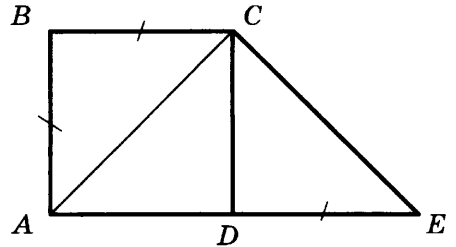
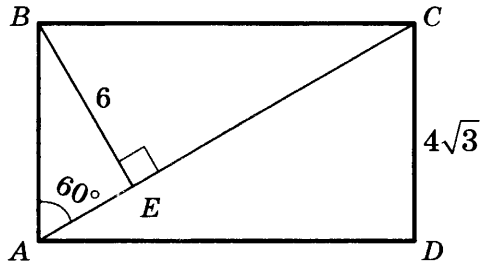
14. По условию  $ABCD$  — прямоугольник,  $\triangle ABM = \triangle MCN$  (по катету и острому углу),  $BM = MC$  (по условию) и  $\angle AMB = \angle NMC$  (как вертикальные). Значит,  $S_{ABM} = S_{MCN} = 27$ .

По условию задачи  $AD = 3 \cdot AB$ .

Пусть  $AB = x$ , тогда  $AD = BC = 2BM = 3x$ , откуда  $BM = \frac{3}{2}x$ .

Так как  $S_{ABM} = \frac{1}{2}AB \cdot BM = 27$ , то

получим  $\frac{1}{2}x \cdot \frac{3}{2}x = 27$ , или  $\frac{3}{4}x^2 = 27$ ;  $x^2 = 27 \cdot \frac{4}{3} = 36$ , откуда  $x = 6$ .



Следовательно,  $S_{ABCD} = AB \cdot BC = x \cdot 3x = 3 \cdot 6^2 = 108$ .

**Ответ:** 108.

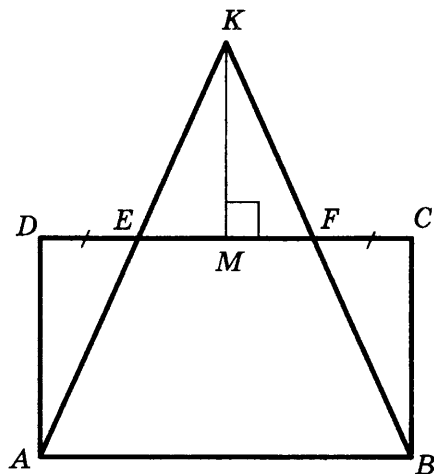
**Замечание.** Можно показать, что  $S_{ABCD} = 4S_{\triangle MNC}$ .

**15.** По условию  $DE = FC = \frac{1}{2}EF$ , т. е.  $EF = 2DE = 2FC$ .

В  $\triangle EKF$  проведем высоту  $KM$ , тогда  $EM = MF = DE = FC$ .

Заметим, что  $\triangle ADE = \triangle KME$  ( $DE = EM$  и  $\angle AED = \angle KEM$ ;  $\angle D = \angle EMK = 90^\circ$ ) и  $\triangle EMK = \triangle FMK$  (по двум катетам).

Аналогично  $\triangle KMF = \triangle FCB$ .



Пусть  $DC = 7x$ , тогда  $AD = 4x$  и  $S_{ABCD} = 7x \cdot 4x = 28x^2$ .

По условию  $S_{\triangle EKF} = 28$ . Но  $EF = DE + FC = \frac{1}{2}DC = \frac{7}{2}x$  и  $KM = AD = 4x$ , тогда  $S_{\triangle EKF} = \frac{1}{2}EF \cdot KM$ , или  $S_{\triangle EKF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{2}x \cdot 4x = 28$ , или  $7x^2 = 28$ ;  $x^2 = 4$ , откуда  $x = 2$ , тогда  $S_{ABCD} = 28x^2 = 28 \cdot 4 = 112$ .

**Ответ:** 112.

**Замечание.** Можно показать, что  $S_{ABCD} = 4S_{\triangle EKF}$ .

# ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

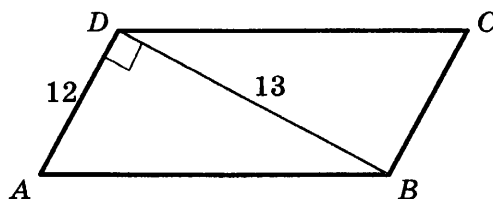
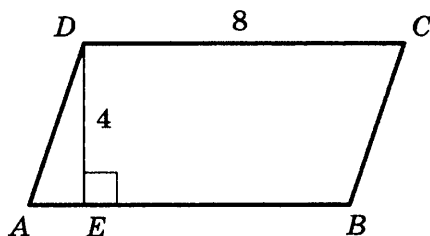
Найдите площадь  $ABCD$ .

$$1. S_{ABCD} = DC \cdot DE = 8 \cdot 4 = 32.$$

Ответ: 32.

2. Если  $AD$  — основание, то  $DB$  — высота параллелограмма  $ABCD$ . Тогда  $S = AD \cdot DB = 12 \cdot 13 = 156$ .

Ответ: 156.



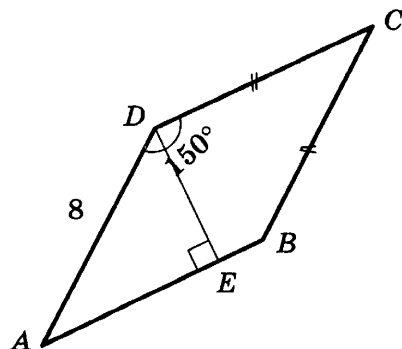
3. Так как в параллелограмме  $ABCD$   $DC = BC$ , то  $ABCD$  — ромб.

Проведем высоту ромба  $DE$ .

$\angle A = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ , тогда  $DE = \frac{1}{2}AD = 4$ . Так как  $AD = AB = 8$ , то  $S_{ABCD} = AB \cdot DE = 8 \cdot 4 = 32$ .

Ответ: 32.

Замечание. Площадь можно найти и по формуле  $S = ab \sin \alpha$ , где  $a = b = 8$  см,  $\alpha = 150^\circ$ .

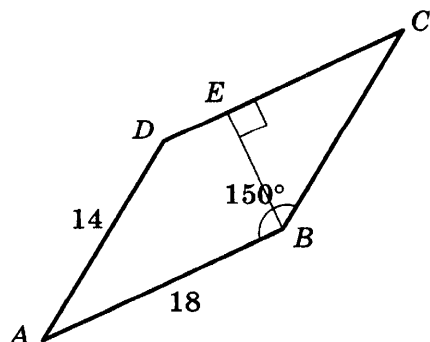


4. Проведем высоту  $BE$  на сторону  $DC$ , тогда  $\angle C = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ , значит,  $BE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = 7$ .

Следовательно,  $S = DC \cdot BE = 18 \cdot 7 = 126$ .

Ответ: 126.

Замечание. Площадь параллелограмма можно найти по формуле  $S = ab \sin \alpha$  (см. № 3).



5. В параллелограмме  $ABCD$   $AB = AD$ , значит,  $ABCD$  — ромб, тогда  $CA$  — биссектриса  $\angle BCD$  (по свойству ромба), т. е.  $\angle BCD = 60^\circ$ .

Но  $S_{ABCD} = ab \sin \alpha$  (площадь параллелограмма по двум сторонам и углу между ними), где  $a = b = CD = 18$ .

$$\alpha = \angle BCD = 60^\circ, \text{ тогда } S_{ABCD} = 18 \cdot 18 \cdot \sin 60^\circ = 18 \cdot 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 162\sqrt{3}.$$

Ответ:  $162\sqrt{3}$ .

Замечание. Площадь ромба можно найти по формуле  $S = ah$ , где  $h$  — высота ромба.

6. Так как  $ABCD$  — параллелограмм, то  $BC \parallel AD$ , тогда  $\angle ACB = \angle CAD = 15^\circ$  (как внутренние накрест лежащие). Значит,  $\angle BAD = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$ . Следовательно,  $S_{ABCD} = ab \sin \alpha = 10 \cdot 12 \sin 60^\circ = 10 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 60\sqrt{3}$ .

Ответ:  $60\sqrt{3}$ .

7. В параллелограмме  $ABCD$   $AB = BC$ , значит,  $ABCD$  — ромб (по определению).

По условию задачи периметр  $P = 48$ , тогда  $AB = 48 : 4 = 12$ , значит,  $S_{ABCD} = AB \cdot BC \sin \angle B = 12 \cdot 12 \sin 150^\circ = 12 \cdot 12 \sin (180^\circ - 30^\circ) = 12 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = 72$ .

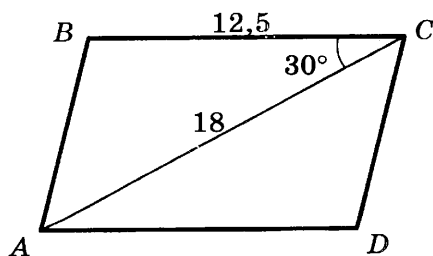
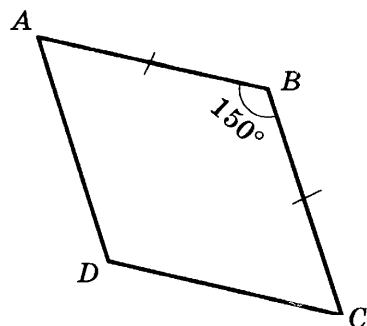
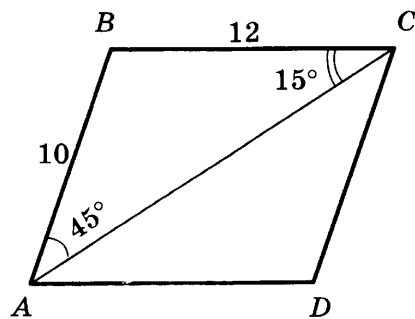
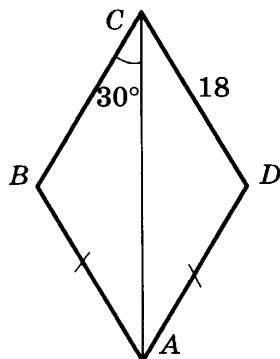
Ответ: 72.

Замечание. Задачу можно решить иначе, например, провести высоту на основание  $AD$  и решать по формуле  $S = ah$ .

8. Так как  $ABCD$  — параллелограмм, то диагональ  $AC$  делит его на два равных треугольника.

Но равные многоугольники имеют равные площади, тогда  $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin \angle ACB = 18 \cdot 12,5 \cdot \frac{1}{2} = 9 \cdot 12,5 = 112,5$ .

Ответ: 112,5.



9. Известно, что площадь ромба

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2, \text{ где } d_1 \text{ и } d_2 — \text{ диагонали}$$

(см. № 476 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

$$\text{Тогда } S = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 36 = 864.$$

Ответ: 864.

10. В  $\triangle ABE$   $\angle ABE = 60^\circ$ ,  $\angle AEB = 90^\circ$ , тогда  $\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow BE = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \cdot 16 = 8.$$

Так как  $AD = BC = 20$ , то  $S = ah = 20 \cdot 8 = 160$ .

Ответ: 160.

Замечание. Площадь параллелограмма можно найти по формуле  $S = ab \sin \alpha$  (см. № 5).

11. В параллелограмме  $ABCD$   $AM$  — высота, проведенная к основанию  $BC$ .

В  $\triangle AMB$   $\angle ABM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow AM = \frac{1}{2} AB$ ; так как  $AB = DC = 8$ , то

$$AM = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4.$$

Тогда  $S = BC \cdot AM = 10 \cdot 4 = 40$ .

Ответ: 40.

12.  $S = AD \cdot BK = (8 + 24) \cdot BK = 32 \cdot BK$ .

В  $\triangle BKD$   $\angle KBD = 45^\circ$ ;  $\angle BKD = 90^\circ$ , тогда  $\angle KDB = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ .

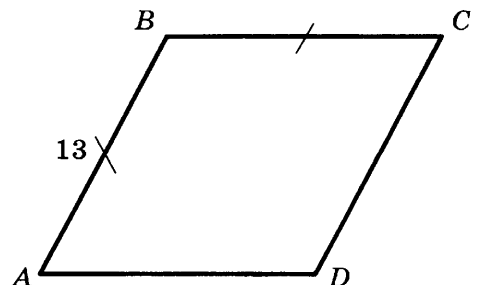
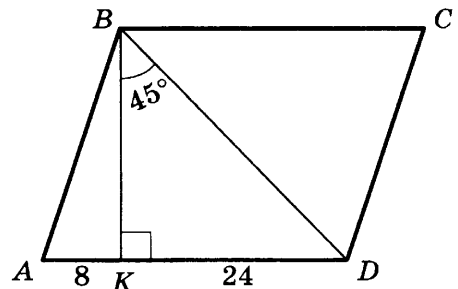
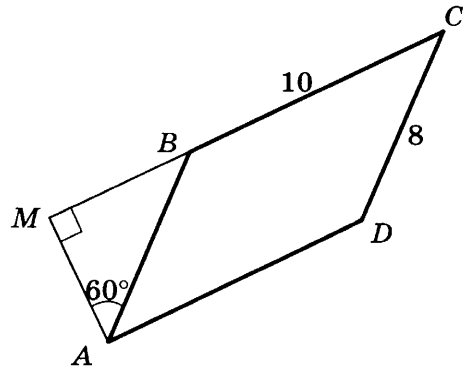
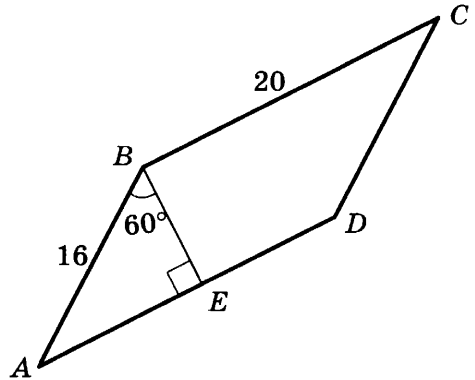
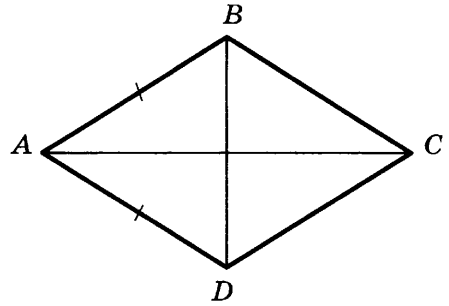
Значит,  $BK = KD = 24$  и  $S = 32 \cdot 24 = 768$ .

Ответ: 768.

13. Так как  $AB = BC$ , то  $ABCD$  — ромб.

Пусть  $\angle A = x$ , тогда  $\angle B = 2x$ .

Но  $\angle A + \angle B = 180^\circ$  (сумма односторонних углов), тогда получим  $x + 2x = 180$ ,  $3x = 180$ ,  $x = 60$ .



Итак,  $\angle A = 60^\circ$ , значит,  $S = AB \cdot AD \sin \angle A = 13 \cdot 13 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 84,5\sqrt{3}$ .

Ответ:  $84,5\sqrt{3}$ .

**14.** Так как  $ABCD$  — параллелограмм, то  $\angle C = \angle A = 45^\circ$  (по свойству).

Но  $AB = BD$  (по условию задачи), тогда  $\angle BAD = \angle BDA = 45^\circ$ .

Значит,  $\angle ABD = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$ . Следовательно,  $BD$  — высота параллелограмма и  $S = AB \cdot BD = AB^2$ . Пусть  $AB = x$ , тогда по теореме Пифагора  $AB^2 + BD^2 = AD^2$ , или  $x^2 + x^2 = 31^2$ ,  $2x^2 = 31^2$ ,  $x^2 = \frac{31^2}{2}$ , т. е.  $S = AB^2 = \frac{31^2}{2} = \frac{961}{2} = 480,5$ .

Ответ: 480,5.

**15.** В  $\triangle ABE$   $\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow BE = \frac{1}{2}AB$ , откуда  $AB = 4 \cdot 2 = 8$ .

Но  $AB = DC = 8$  (по свойству параллелограмма), тогда  $S = DC \cdot BF = 8 \cdot 6 = 48$ .

Ответ: 48.

**16.** Пусть в параллелограмме  $ABCD$   $AD = x$ ,  $AB = y$ .

По условию задачи периметр  $P = 84$ , значит,

$$2(x + y) = 84, \text{ или } x + y = 84.$$

Тогда  $S = AD \cdot BM = DC \cdot BN$ , или

$$8x = 10y, \text{ или } 4x = 5y.$$

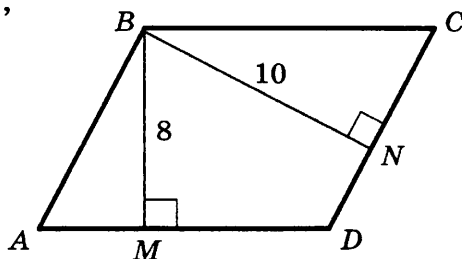
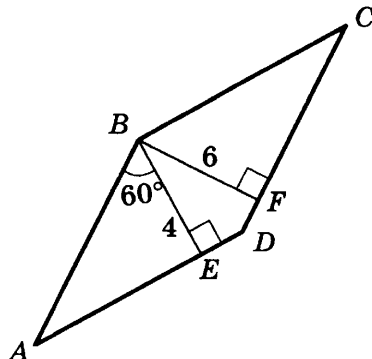
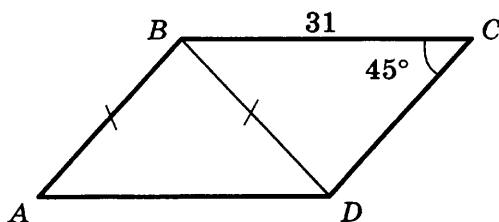
Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 84, \\ 4x = 5y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 84 - x, \\ 4x = 5(84 - x). \end{cases}$$

$$4x = 420 - 5x, \text{ или } 9x = 420; x = \frac{140}{3}.$$

$$\text{Следовательно, } S = 8x = \frac{140}{3} \cdot 8 = \frac{1120}{3} = 373\frac{1}{3}.$$

Ответ:  $373\frac{1}{3}$ .



**17.** Пусть в параллелограмме  $ABCD$   $AD = x$ ,  $AB = y$ , тогда получим  $2(x + y) = 20$ , или  $x + y = 10$ .

Так как точка  $O$  — середина  $AC$  и  $BD$ , то  $OE$  — половина высоты параллелограмма (к стороне  $AD$ ). Аналогично  $OF$  — половина высоты (к стороне  $CD$ ).

$$\text{Значит, } S = AD \cdot 2EO = 8x = \\ = CD \cdot 2FO = 12y.$$

Итак,  $8x = 12y$ , или  $2x = 3y$ .

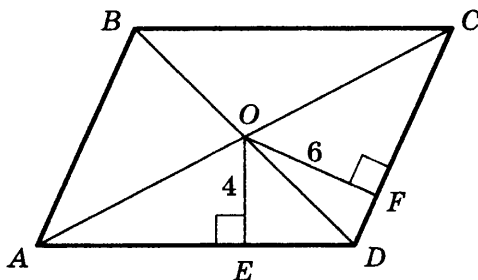
Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ 2x = 3y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 10 - x, \\ 2x = 3(10 - x). \end{cases}$$

$$2x = 30 - 3x, \text{ или } 5x = 30, x = 6.$$

$$\text{Следовательно, } S = 8x = 6 \cdot 8 = 48.$$

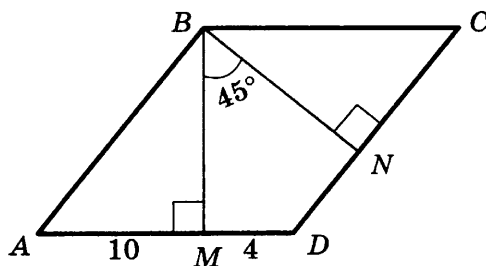
*Ответ:* 48.



**18.** Так как  $ABCD$  — параллелограмм и  $\angle BNC = 90^\circ$ , то  $\angle ABN = 90^\circ$  (как накрест лежащие), и так как  $\angle MBN = 45^\circ$  (по условию), то  $\angle ABM = 45^\circ$ . Но тогда  $\angle A = 45^\circ$ , т. е.  $AM = BM = 10$  и  $AD = 10 + 4 = 14$ .

$$\text{Значит, } S = ah = AD \cdot BM = \\ = 14 \cdot 10 = 140.$$

*Ответ:* 140.

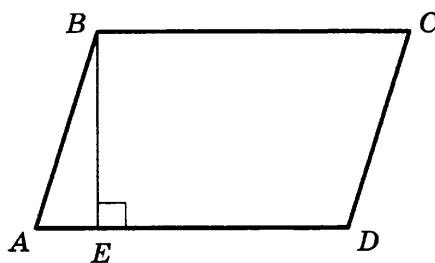


**19.** Пусть в параллелограмме  $ABCD$  высота  $BE = x$ , тогда  $AD = 3x$ .

Так как  $AD - BE = 8$  (по условию), то получим  $3x - x = 8$ ,  $2x = 8$ ,  $x = 4$ .

$$\text{Значит, } BE = 4, AD = 4 \cdot 3 = 12, \text{ тогда } S = AD \cdot BE = 12 \cdot 4 = 48.$$

*Ответ:* 48.

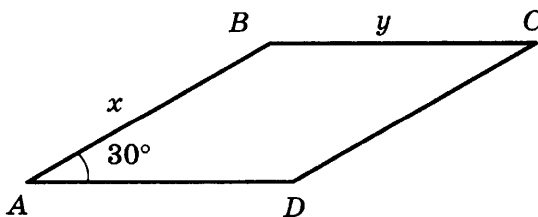


**20.** Пусть  $AB = x$ ,  $BC = y$ .

По условию задачи периметр  $P = 92$ , т. е.  $2(x + y) = 92$ , откуда  $x + y = 46$ . Кроме того,  $BC - AB = 4$ , тогда  $y - x = 4$ . Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 46, \\ y - x = 4. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы, находим  $2y = 50$ ,  $y = 25$ , тогда  $x = 46 - 25 = 21$ .





Так как  $\angle A = 30^\circ$ , то  $S = ab \sin \alpha$ , или  $S = 21 \cdot 25 \sin 30^\circ = 525 \cdot \frac{1}{2} = 262,5$ .

Ответ: 262,5.

**21.** Пусть в параллелограмме  $ABCD$   $AB = x$ ,  $BC = y$ , тогда  $x - y = 4$ .

$S = AB \cdot 9 = BC \cdot 12$ , или  $9x = 12y$ , откуда  $3x = 4y$ .

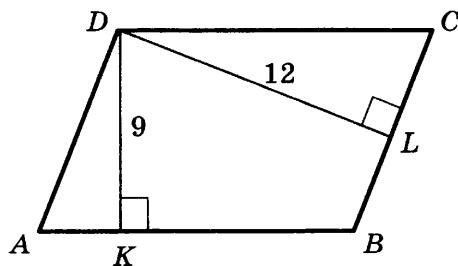
Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = 4, \\ 3x = 4y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = x - 4, \\ 3x = 4(x - 4). \end{cases}$$

$3x = 4x - 16$ , или  $4x - 3x = 16$ ;  $x = 16$ .

Значит,  $S = 9x = 9 \cdot 16 = 144$ .

Ответ: 144.



**22.** Пусть в параллелограмме  $ABCD$  диагонали  $AC = d_1$  и  $BD = d_2$ , где  $AC = 16$ ,  $BD = 12$ .

Так как  $AO = OC$  и  $BO = OD$ , то  $\triangle AOB = \triangle COD$  (по I признаку равенства треугольников) и  $\triangle BOC = \triangle AOD$  (по той же причине).

Но равные многоугольники имеют равные площади, т. е.  $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$  и  $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle BOC}$ .

Значит,  $S_{ABCD} = 2S_{\triangle AOB} + 2S_{\triangle BOC} = 2(S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC})$ .

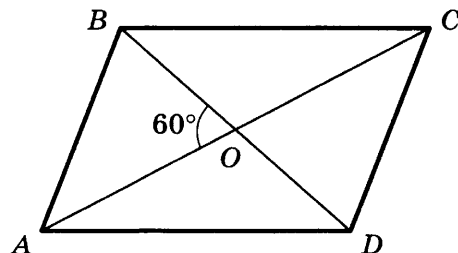
Но  $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AO \cdot BO \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} d_1 \cdot \frac{1}{2} d_2 \sin 60^\circ = \frac{1}{8} d_1 d_2 \sin 60^\circ$ ;

$S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} BO \cdot OC \sin (180^\circ - 60^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} d_2 \cdot \frac{1}{2} d_1 \sin 60^\circ = \frac{1}{8} d_1 d_2 \sin 60^\circ$ .

Следовательно,  $S_{ABCD} = 2 \left( \frac{1}{8} d_1 d_2 \sin 60^\circ + \frac{1}{8} d_1 d_2 \sin 60^\circ \right) = 2 \cdot \frac{1}{4} d_1 d_2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin 60^\circ$ .

Так как  $d_1 = 16$  и  $d_2 = 12$ , то  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}$ .

Ответ:  $48\sqrt{3}$ .



**Замечание 1.** Фактически мы доказали, что площадь параллелограмма  $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$ , где  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали,  $\varphi$  — угол между ними.

**Замечание 2.** Полученная формула верна для любого выпуклого четырехугольника (доказывается аналогично).

**23.** В  $\triangle CFB$   $CF = 10$  (по условию),  $\angle CFB = 90^\circ$ ,  $\angle CBF = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ , тогда  $CF = \frac{1}{2} BC$ , т. е.  $BC = 2CF = 20$ .

Так как  $AB = BC$  и  $\angle ABC = 150^\circ$ , то  $S = AB \cdot BC \sin 150^\circ$ , или  $S = 20 \cdot 20 \sin (180^\circ - 30^\circ) = 20 \cdot 20 \cdot \sin 30^\circ = 200$ .

**Ответ:** 200.

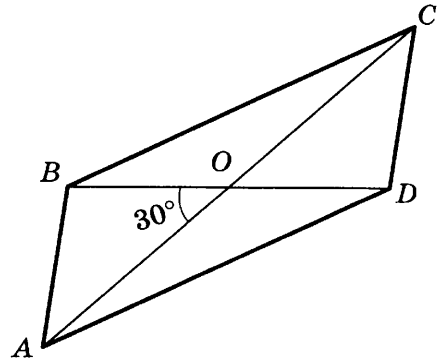
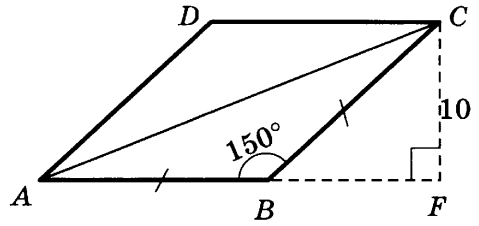
**24.** По условию задачи в параллелограмме  $ABCD$   $AC = 16$  и  $BD = 12$ ,

$\angle AOB = 30^\circ$ , тогда  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$

(см. № 22), или

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 \cdot \sin 30^\circ = 8 \cdot 12 \cdot \frac{1}{2} = 48.$$

**Ответ:** 48.

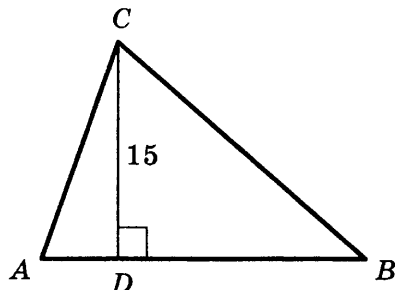


## ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Найдите площадь  $\triangle ABC$ .

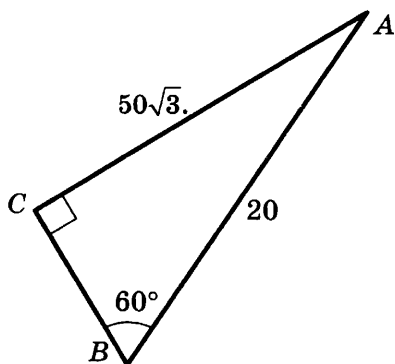
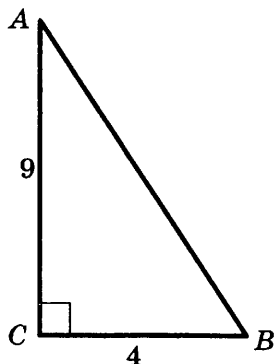
1. По условию задачи  $AB = 22$ , высота  
треугольника  $CD = 15$ , тогда  $S = \frac{1}{2}AB \cdot CD =$   
 $= \frac{1}{2} \cdot 22 \cdot 15 = 165$ .

Ответ: 165.



2. Так как  $\angle C = 90^\circ$ , то  $\triangle ABC$  — прямоугольный,  
тогда  $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 = 18$ .

Ответ: 18.



3. В прямоугольном  
 $\triangle ABC$   $\angle B = 60^\circ$ , тогда  
 $\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow$   
 $\Rightarrow BC = \frac{1}{2}AB = 10$ ,

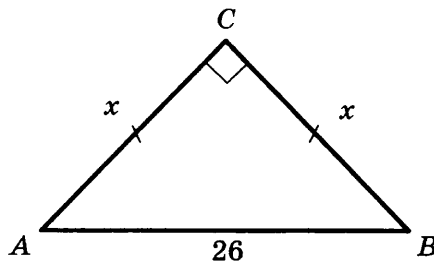
тогда  $S = \frac{1}{2}ab$ , или  $S = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{3} \cdot 10 = 50\sqrt{3}$ .

Ответ:  $50\sqrt{3}$ .

4. Пусть  $AC = BC = x$ , тогда по теореме  
Пифагора имеем  $x^2 + x^2 = 26^2$ , или  $2x^2 =$   
 $= 26^2$ ,  $x^2 = \frac{26^2}{2}$ .

Значит,  $S = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}x^2 = \frac{26^2}{4} =$   
 $= \left(\frac{26}{2}\right)^2 = 13^2 = 169$ .

Ответ: 169.



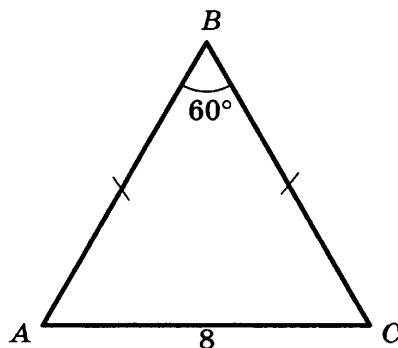
**Замечание.** Задачу можно решить по формуле  $S = \frac{1}{2}ah$ , где  $a = 26$ ,

$h$  — высота, проведенная к основанию  $AB$ .

**5.**  $\triangle ABC$  — равнобедренный, так как  $AB = BC$  (по условию), тогда  $\angle A = \angle C = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$ , т. е.  $\triangle ABC$  — равносторонний. Известно, что площадь равностороннего треугольника определяется по формуле  $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ , где  $a$  — сторона треугольника (см. № 489 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

$$\text{Тогда } S = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}.$$

**Ответ:**  $16\sqrt{3}$ .



**6.**  $S = \frac{1}{2}AC \cdot BC$ , где  $BC = 10$ ,  $AC = AM + MC = 6 + MC$ .

Так как  $\angle AMB = 135^\circ$  (по условию), то  $\angle BMC = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ , тогда в прямоугольном  $\triangle MCB$   $\angle MBC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ .

Значит,  $\triangle MCB$  — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), тогда  $MC = BC = 10$  и  $AC = 6 + 10 = 16$ .

$$\text{Следовательно, } S = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 10 = 80.$$

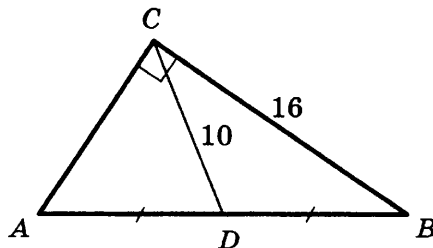
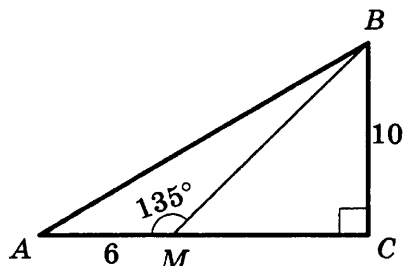
**Ответ:** 80.

**7.** По условию  $\triangle ABC$  — прямоугольный ( $\angle C = 90^\circ$ ) и  $CD$  — медиана, т. е.  $AD = DB$ .

Значит,  $DA = DB = DC = R$ , где  $R$  — радиус описанной около  $\triangle ABC$  окружности, тогда  $AB = 2 \cdot CD = 20$ .

По теореме Пифагора  $AC^2 = AB^2 - BC^2$ , или  $AC = \sqrt{400 - 256} = \sqrt{144} = 12$ , следовательно,  $S = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$ .

**Ответ:** 96.



**8.** Известно, что если  $a, b, c$  — стороны треугольника, то площадь

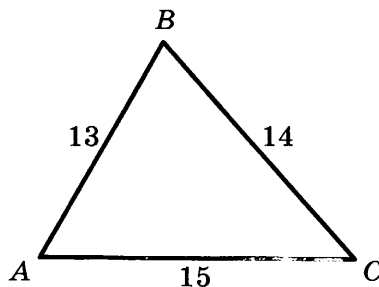
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  (формула Герона) (см. № 524 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

$$P = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(13 + 14 + 15) = 21;$$

$$P - a = 21 - 13 = 8; p - b = 21 - 14 = 7; p - c = 21 - 15 = 6.$$

$$\text{Значит, } S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 6} = 7 \cdot 6 \cdot 2 = 84.$$

Ответ: 84.

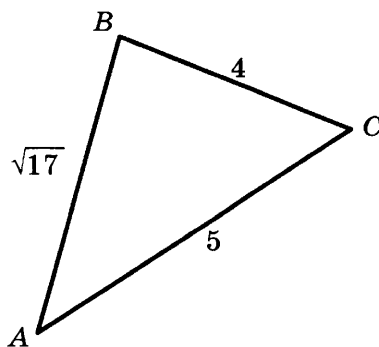


**9.**  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$  (см. № 8),  
где  $p = \frac{\sqrt{17} + 4 + 5}{2} = \frac{\sqrt{17} + 9}{2};$

$$p - a = \frac{\sqrt{17} + 9}{2} - \sqrt{17} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2};$$

$$p - b = \frac{\sqrt{17} + 9}{2} - 4 = \frac{\sqrt{17} + 1}{2};$$

$$p - c = \frac{\sqrt{17} + 9}{2} - 5 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}.$$



Тогда  $S^2 = \frac{\sqrt{17} + 9}{2} \cdot \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \cdot \frac{\sqrt{17} + 1}{2} \cdot \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$ , или

$$S^2 = \frac{9^2 - (\sqrt{17})^2}{4} \cdot \frac{(\sqrt{17})^2 - 1}{4}; S^2 = \frac{64}{4} \cdot \frac{16}{4} = 16 \cdot 4, \text{ откуда}$$

$$S = 4 \cdot 2 = 8.$$

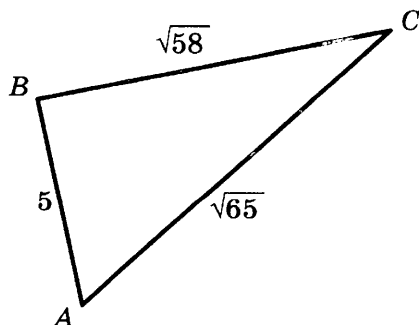
Ответ: 8.

**10.**  $p = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{58} + \sqrt{65})$  (см. № 8);

$$p - a = \frac{1}{2}(\sqrt{58} + \sqrt{65} - 5);$$

$$p - b = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{65} - \sqrt{58});$$

$$p - c = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{58} - \sqrt{65}), \text{ тогда}$$



$$\begin{aligned}
 S^2 &= \frac{1}{16} (5 + \sqrt{58} + \sqrt{65}) (\sqrt{58} + \sqrt{65} - 5) (5 + \sqrt{65} - \sqrt{58}) (5 + \sqrt{58} - \sqrt{65}) = \\
 &= \frac{1}{16} \left( (\sqrt{58} + \sqrt{65})^2 - 5^2 \right) \left( 5^2 - (\sqrt{65} - \sqrt{58})^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{16} (58 + 65 + 2\sqrt{58 \cdot 65} - 25) (25 - 65 - 58 + 2\sqrt{65 \cdot 58}) = \\
 &= \frac{1}{16} (98 + 2\sqrt{58 \cdot 65}) (2\sqrt{65 \cdot 58} - 98) = \frac{1}{4} (49 + \sqrt{58 \cdot 65}) (\sqrt{65 \cdot 58} - 49) = \\
 &= \frac{1}{4} (58 \cdot 65 - 49^2) = \frac{1}{4} (3770 - 2401) = \frac{1}{4} \cdot 1369.
 \end{aligned}$$

Значит,  $S = \frac{1}{2} \cdot 37 = 18,5$  (кв. ед.).

Ответ: 18,5.

*Замечание.* Задачу можно решить по формуле  $S = \frac{1}{2}ah$ , где  $h$  — высота треугольника.

**11.** Найдем площадь  $\triangle ABC$ , не используя формулы Герона.

Проведем высоту  $BD$ . Пусть  $DC = x$ .

$$\text{Из } \triangle ADB \quad BD^2 = (\sqrt{5})^2 - (\sqrt{18} - x)^2.$$

$$\text{Из } \triangle BDC \quad BD^2 = (\sqrt{10})^2 - x^2.$$

Сравнивая правые части полученных равенств, имеем  $5 - (\sqrt{18} - x)^2 = 10 - x^2$ , или

$$x^2 - (\sqrt{18} - x)^2 = 5; (x - \sqrt{18} + x)(x + \sqrt{18} - x) = 5; (2x - 3\sqrt{2}) \cdot 3\sqrt{2} = 5;$$

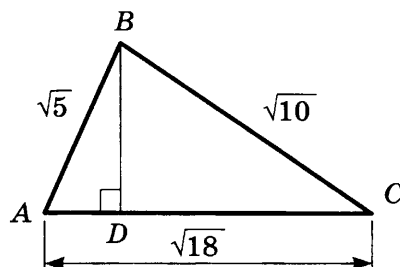
$$6\sqrt{2}x - 18 = 5; 6\sqrt{2}x = 23; x = \frac{23}{6\sqrt{2}}.$$

$$\text{Тогда } BD^2 = 10 - x^2, \text{ или } BD^2 = 10 - \frac{529}{72}; BD^2 = \frac{720 - 529}{72} = \frac{191}{72};$$

$$BD^2 = \frac{382}{144}, BD = \frac{\sqrt{382}}{12}.$$

$$\text{Следовательно, } S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18} \cdot \frac{\sqrt{382}}{12} = \frac{\sqrt{191}}{4}.$$

Ответ:  $\frac{\sqrt{191}}{4}$ .



**Замечание.** Как видим, применение формулы  $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ah$  приводит к относительно простым вычислениям, чем по формуле Герона.

**12.** Построим  $\Delta ABC$  до параллелограмма  $ABCD$ , где  $CD = AB = 27$ ,  $BC = AD = 29$ ,  $BM = MD = 26$ , тогда  $BD = 26 \cdot 2 = 52$ .

Известно, что в параллелограмме  $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ , где  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали,  $a$  и  $b$  — смежные стороны.

Тогда  $AC^2 + 52^2 = 2(27^2 + 29^2)$ ,  $AC^2 = 2(729 + 841) - 2704$ ;  $AC^2 = 436$ ,  $AC = 2\sqrt{109}$ .

Площадь  $\Delta ABC$  найдем по формуле Герона:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , где

$$p = \frac{1}{2}(27 + 29 + 2\sqrt{109}) = \frac{1}{2}(56 + 2\sqrt{109}) = 28 + \sqrt{109};$$

$$p - a = 28 + \sqrt{109} - 27 = 1 + \sqrt{109}; p - b = 28 + \sqrt{109} - 29 = \sqrt{109} - 1;$$

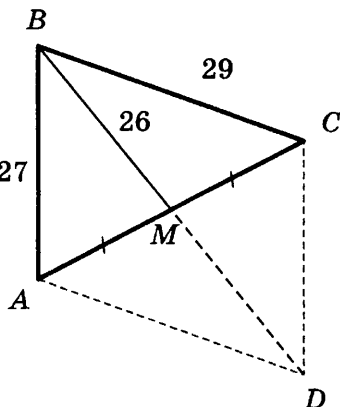
$$p - c = 28 + \sqrt{109} - 2\sqrt{109} = 28 - \sqrt{109}, \text{ тогда}$$

$$S = \sqrt{(28 + \sqrt{109})(1 + \sqrt{109})(\sqrt{109} - 1)(28 - \sqrt{109})}.$$

$$\text{Но } (28 + \sqrt{109})(28 - \sqrt{109}) = 784 - 109 = 675; (1 + \sqrt{109})(\sqrt{109} - 1) = 109 - 1 = 108, \text{ тогда}$$

$$S = \sqrt{675 \cdot 108} = \sqrt{9 \cdot 75 \cdot 9 \cdot 12} = 9\sqrt{3 \cdot 25 \cdot 12} = 9 \cdot 6 \cdot 5 = 270.$$

**Ответ:** 270.



**Замечание.** Задачу можно решить и по формуле  $S = \frac{1}{2}ah$ , где  $a$  — основание,  $b$  — высота.

**13.** Проведем высоту  $AD$  к основанию  $BC$ .

По условию  $AC = 14$ ,  $BK = KC = 7$ ,  $AK = 9$ .

Пусть  $BD = x$ , тогда  $DK = 7 - x$ .

Из  $\Delta ADK$   $AD^2 = 81 - (7 - x)^2$ ;

из  $\Delta ADC$   $AD^2 = 196 - (14 - x)^2$ .

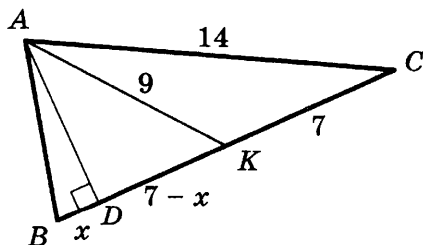
Сравнивая правые части полученных равенств, имеем

$$81 - (7 - x)^2 = 196 - (14 - x)^2, \text{ или}$$

$$(14 - x)^2 - (7 - x)^2 = 196 - 81;$$

$$7(21 - 2x) = 115,$$

$$21 - 2x = \frac{115}{7}; 2x = \frac{32}{7}, x = \frac{16}{7}.$$



Тогда  $AD^2 = 9^2 - \left(7 - \frac{16}{7}\right)^2$ ;  $AD^2 = 9^2 - \left(\frac{33}{7}\right)^2$ ;

$$AD^2 = \left(9 - \frac{33}{7}\right) \left(9 + \frac{33}{7}\right); AD^2 = \frac{30}{7} \cdot \frac{96}{7}, \text{ откуда } AD = \frac{4 \cdot 6\sqrt{5}}{7} = \frac{24\sqrt{5}}{7}.$$

Следовательно,  $S = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot \frac{24\sqrt{5}}{7} = 24\sqrt{5}$  (кв. ед.).

Ответ:  $24\sqrt{5}$ .

*Замечание 1.* Задачу можно решить иначе, например, как в № 12.

*Замечание 2.* Так как  $AK$  — медиана, то  $S_{\triangle ABK} = S_{\triangle AKC}$ , а  $S_{\triangle AKC}$  можно найти по формуле Герона.

**14.** По условию  $\angle ADB = 90^\circ$  и  $\angle ABD = 45^\circ$ , тогда  $\angle A = 45^\circ$ , т. е.  $\triangle ADB$  — равнобедренный и  $BD = AD = 12$ .

Значит,  $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD =$   
 $= \frac{1}{2} (12 + 16) \cdot 12 = 168.$

Ответ: 168.

**15.** В  $\triangle ABC$   $\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 75^\circ$ , значит,  $\triangle ABC$  — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника).

Тогда  $S = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin \angle ACB$ , или

$$S = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 28 \cdot \frac{1}{2} = 14 \cdot 14 = 196.$$

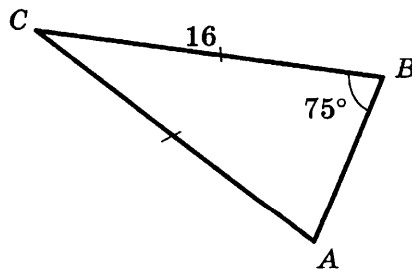
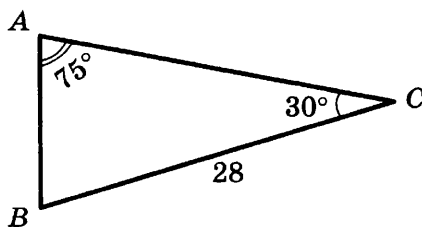
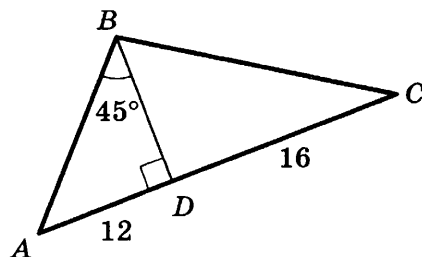
Ответ: 196.

**16.** По условию  $AC = BC$ , значит,  $\triangle ABC$  — равнобедренный (по определению).

Так как  $\angle B = 75^\circ$  (по условию), то  $\angle A = \angle B = 75^\circ$ , тогда  $\angle C = 30^\circ$ .

Значит,  $S = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 16 \cdot \sin 30^\circ = 8 \cdot 8 =$   
 $= 64.$

Ответ: 64.





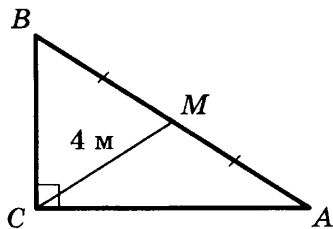
**17.** Пусть  $\angle ACM = x$ , тогда  $\angle BCM = 2x$ .

Так как  $\angle ACB = 90^\circ$ , то получим  $x + 2x = 90$ ,  $3x = 90$ ,  $x = 30$ , значит,  $\angle ACM = 30^\circ$ ,  $\angle BCM = 60^\circ$ .

Но  $CM$  — медиана прямоугольного  $\triangle ACB$ , тогда  $MC = MA = MB = 4$ , т. е.  $\triangle BCM$  — равнобедренный и  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle BMC = 60^\circ$ , тогда  $BC =$

$$= CM = 4. \text{ Значит, } S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$$

*Ответ:*  $8\sqrt{3}$ .



**18.** Пусть  $\angle A = x$ , тогда  $\angle B = 2x$ ,  $\angle C = 3x$ .

Получим уравнение

$$x + 2x + 3x = 180, 6x = 180, x = 30, \\ 2x = 60, 3x = 90.$$

Значит,  $\angle A = 30^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ , т. е.  $\triangle ABC$  — прямоугольный.

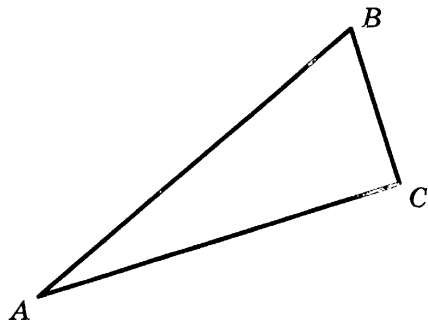
По условию задачи  $AB + BC = 72$ .

Так как  $\angle A = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{1}{2} AB$ , т. е.

$$AB = 2BC, \text{ тогда получим } 2BC + BC = 72, \text{ или } 3 \cdot BC = 72, \text{ откуда } BC = \\ = 24, \text{ тогда } AB = 48, \text{ и так как } \angle B = 60^\circ, \text{ то } S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \angle B =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 288\sqrt{3}.$$

*Ответ:*  $288\sqrt{3}$ .



**19.** Заметим, что  $\angle DCE = \angle ACB$  — как вертикальные, тогда  $\frac{S_{\triangle DEC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{DC \cdot CE}{CB \cdot CA} =$

$$= \frac{4 \cdot 5}{6 \cdot 8} = \frac{5}{12} \text{ (см. п. 52 «Геометрия 7–9»$$

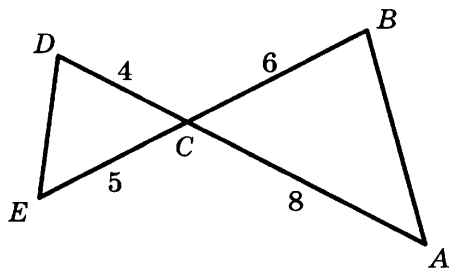
авторов Л.С. Атанасян и др.).

По условию задачи  $S_{\triangle DEC} + S_{\triangle ABC} = 51$ .

Пусть  $S_{\triangle DEC} = x$ ,  $S_{\triangle ABC} = y$ , тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{12}, \\ x + y = 51. \end{cases}$$

Так как нам надо найти площадь  $\triangle ABC$ , то достаточно из системы исключить переменную  $x$ .



$x = 51 - y$ , тогда  $12x = 5y$ , или  $12(51 - y) = 5y$ ;  $12 \cdot 51 - 12y = 5y$ ,  $17y = 12 \cdot 51$ , откуда  $y = 12 \cdot 3 = 36$ .

Итак,  $S_{\triangle ABC} = 36$ .

Ответ: 36.

**20.** По условию задачи  $AC = CE$  и  $CD = 2BC$ .

Пусть  $AC = CE = x$ ,  $BC = y$ , тогда  $CD = 2y$ .

Следовательно,

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle CED}} = \frac{AC \cdot BC}{CE \cdot CD} = \frac{x \cdot y}{x \cdot 2y} = \frac{1}{2}.$$

Так как  $S_{\triangle CED} = 50$ , то получим  $\frac{S_{\triangle ABC}}{50} = \frac{1}{2}$ ,

откуда  $S_{\triangle ABC} = 25$ .

Ответ: 25.

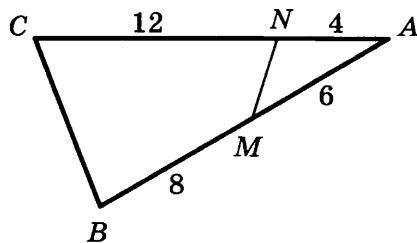
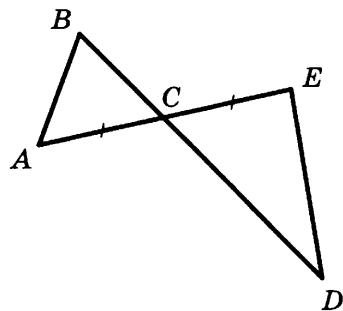
**21.**  $\frac{S_{\triangle AMN}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AN \cdot AM}{AC \cdot AB}$  (см. № 19).

По условию задачи  $S_{\triangle AMN} = 9$ , тогда

получим  $\frac{9}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4 \cdot 6}{16 \cdot 14}$ ;  $\frac{9}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2 \cdot 3}{8 \cdot 7}$ ,

откуда  $S_{\triangle ABC} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{2 \cdot 3} = 84$ .

Ответ: 84.

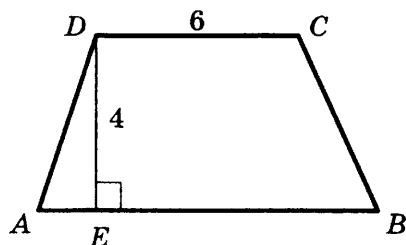


## ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ

Найдите площадь  $ABCD$ .

$$1. S_{ABCD} = \frac{AB + DC}{2} \cdot DE, \text{ или } S_{ABCD} = \frac{10 + 6}{2} \cdot 4 = 32.$$

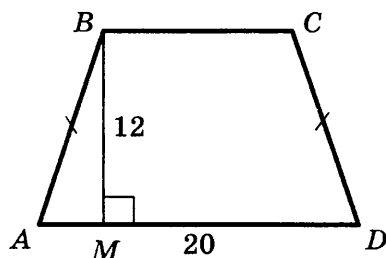
Ответ: 32.



2. Пусть  $AM = x$ ,  $BC = y$ , тогда  $AD = x + 20$ . По условию  $AB = CD$ , значит,  $AM = \frac{AD - BC}{2}$ , или  $x = \frac{x + 20 - y}{2}$ , или  $2x = x + 20 - y$ , откуда  $x + y = 20$ .

$$\text{Тогда } S = \frac{AD + BC}{2} \cdot BM = \frac{x + 20 + y}{2} \cdot 12 = (x + y + 20) \cdot 6 = (20 + 20) \cdot 6 = 240.$$

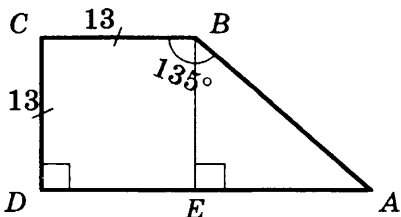
Ответ: 240.



3. Проведем из вершины  $B$  высоту  $BE$ . Тогда  $\angle ABE = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$  и  $\angle A = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ , т. е.  $\triangle AEB$  — равнобедренный, значит,  $AE = BE = 13$ .

Заметим, что  $DE = CB = 13$  ( $CDEB$  — квадрат), тогда  $S = \frac{AD + BC}{2} \cdot CD = \frac{(13 + 13) + 13}{2} \cdot 13 = \frac{117}{2} = 58,5$ .

Ответ: 58,5.

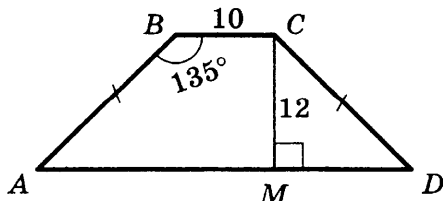


4. Так как  $AB = CD$ , то трапеция — равнобедренная, тогда  $\angle ABC = \angle BCD = 135^\circ$  и  $\angle MCD = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$ , значит,  $\angle D = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ .

Следовательно,  $\triangle CMD$  — равнобедренный и  $MD = MC = 12$ . С другой стороны,  $MD = \frac{1}{2}(AD - BC)$ , или

$$12 = \frac{1}{2}(AD - 10), \text{ или } AD - 10 = 24,$$

откуда  $AD = 34$ .



$$\text{Значит, } S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CM = \frac{1}{2}(34 + 10) \cdot 12 = 264.$$

Ответ: 264.

5. В  $\triangle ABK$   $\angle ABK = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ .

Значит,  $\triangle ABK$  — равнобедренный, тогда  $AK = BK = 8$ .

$BK$  — высота трапеции и  $CD \perp AD$ .

Так как  $BK = KD$ , то  $BKDC$  — квадрат, тогда  $BC = KD = 8$  и  $AD = AK + KD = 16$ .

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } S &= \frac{AD + BC}{2} \cdot BK = \\ &= \frac{16 + 8}{2} \cdot 8 = 96. \end{aligned}$$

Ответ: 96.

6. В  $\triangle AMD$   $\angle A = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ , т. е.  $AM = DM = CB$ .

Заметим, что  $BM = CD = 14$ , тогда  $AM = AB - BM = 25 - 14 = 11$ .

Значит,  $AM = DM = 11$ , тогда

$$\begin{aligned} S &= \frac{AB + CD}{2} \cdot DM = \frac{25 + 14}{2} \cdot 11 = \\ &= \frac{429}{2} = 214,5. \end{aligned}$$

Ответ: 214,5.

7. В  $\triangle ABE$   $\angle A = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ , т. е.  $BE = AE = 4$ .

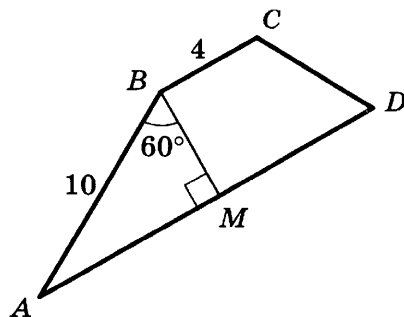
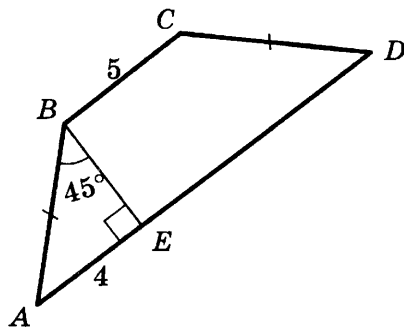
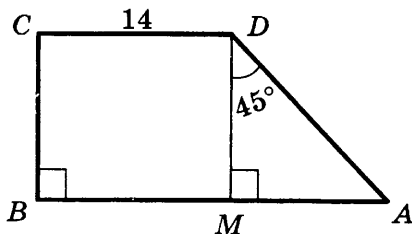
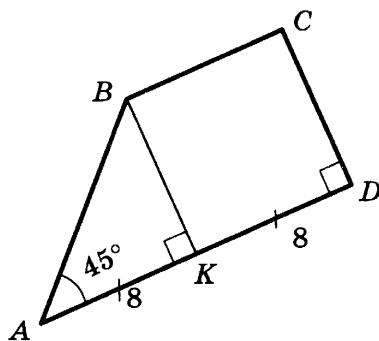
Так как  $AB = CD$ , то трапеция  $ABCD$  — равнобедренная, тогда  $AE = \frac{1}{2}(AD - BC)$ ,

или  $4 = \frac{1}{2}(AD - 5)$ ,  $AD - 5 = 8$ , откуда  $AD = 13$ , значит,

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BE = \frac{1}{2}(13 + 5) \cdot 4 = 36.$$

Ответ: 36.

8. В  $\triangle ABM$   $\angle A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow BM = \frac{1}{2}AB = 5$ .



По условию  $AD = 15$ , тогда  $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BM = \frac{1}{2}(15 + 4) \cdot 5 =$   
 $= \frac{95}{2} = 47,5$ .

Ответ: 47,5.

9. Проведем высоту  $DE$ , тогда в  $\triangle ADE$   
 $DE = \frac{1}{2}AD = 8$  (по свойству катета, лежа-  
 щего против угла в  $30^\circ$ ).

Значит,  $S = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot DE =$   
 $= \frac{1}{2}(32 + 4) \cdot 8 = 144$  (кв. ед.).

Ответ: 144.

10. В  $\triangle ABE$   $AE^2 = AB^2 - BE^2$ , или  $AE =$   
 $= \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$ .

Но периметр  $P = 64$ , тогда  $2AB + AD +$   
 $+ BC = 64$ , или  $20 + AD + BC = 64$ , откуда  
 $AD + BC = 44$ .

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 44 \cdot 8 = 176$ .

Ответ: 176.

11. По условию периметр  $P = 80$ , или  
 $AB + BC + CD + AD = 80$ .

Но  $AB = 25$  и  $CD = 15$ , тогда  $25 + BC +$   
 $+ AD + 15 = 80$ , откуда  $BC + AD = 40$ .

Следовательно,

$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CD = \frac{40}{2} \cdot 15 = 300$ .

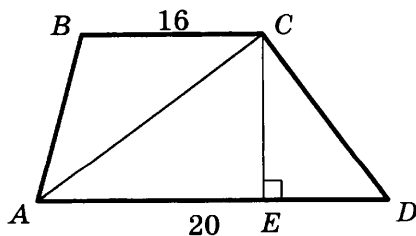
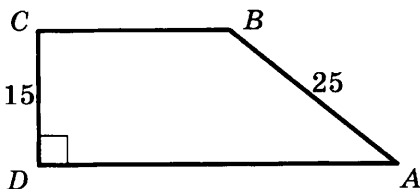
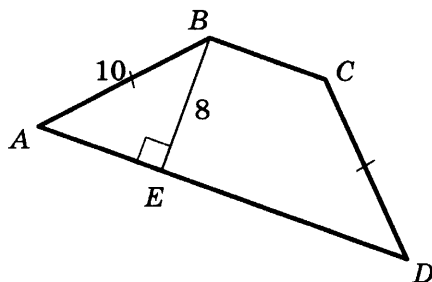
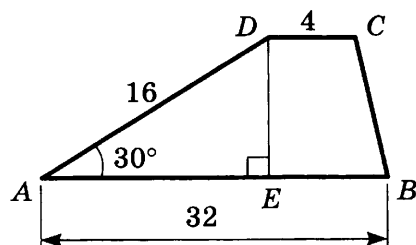
Ответ: 300.

12. Проведем высоту  $CE$  к основанию  
 $AD$ .

По условию задачи  $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AD \cdot CE =$   
 $= 60$ , или  $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot CE = 60$ , откуда  $CE = 6$ ,

тогда  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CE = \frac{1}{2}(20 + 16) \cdot 6 = 108$ .

Ответ: 108.



**13.** Так как  $\triangle DCB$  — прямоугольный и  $\angle CDB = \angle CBD$  (по условию), то  $CD = CB = 8$  и  $\angle CDB = \angle CBD = 45^\circ$ .

Но  $\angle CBD = \angle ADB$  — как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых  $CB$  и  $AD$  и секущей  $BD$ . По условию задачи  $BD = AB$ , значит,  $\angle ADB = \angle BAD = 45^\circ$ .

Из  $\triangle DCB$  по теореме Пифагора имеем  $BD^2 = 8^2 + 8^2$ ,  $BD = 8\sqrt{2}$ .

В  $\triangle ADB$   $\angle ABD = 180^\circ - (45^\circ + 45^\circ) = 90^\circ$ , тогда  $AD^2 = AB^2 + BD^2 = 2 \cdot BD^2$ , откуда  $AD = BD\sqrt{2}$ .

Так как  $BD = 8\sqrt{2}$ , то  $AD = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 16$ .

Значит,  $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CD = \frac{1}{2}(16 + 8) \cdot 8 = 96$ .

Ответ: 96.

**14.** В  $\triangle BCD$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle CBD = 45^\circ$ , тогда  $\angle CDB = 45^\circ$ , т. е.  $\triangle BCD$  — равнобедренный, значит,  $BC = CD = 14$ .

Так как  $ABCD$  — трапеция, то  $\angle CBD = \angle ADB = 45^\circ$  (как накрест лежащие), тогда  $\angle A = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$  и  $AB = BD$ .

Из  $\triangle BDC$   $BD^2 = 14^2 + 14^2 = 2 \cdot 14^2$ .

Из  $\triangle ABD$   $AD^2 = 2BD^2 = 2(2 \cdot 14^2) = 28^2$ , откуда  $AD = 28$ .

Следовательно,  $S = \frac{AD + BC}{2} \cdot CD = \frac{28 + 14}{2} \cdot 14 = 294$ .

Ответ: 294.

**15.** Пусть  $AD = x$ ,  $BC = y$ , тогда согласно условию  $x - y = 4$ .

Так как трапеция равнобедренная, то  $AE = \frac{1}{2}(AD - BC)$ , или  $AE = \frac{1}{2}(x - y)$ . Но

$BC = \frac{1}{2}ED$  (по условию).

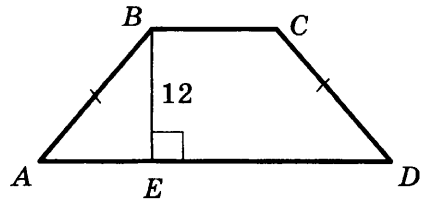
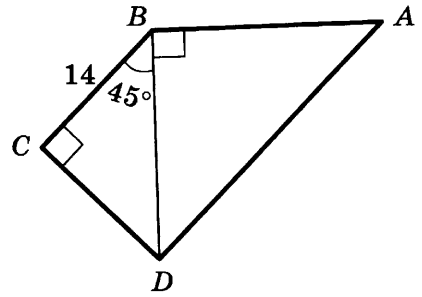
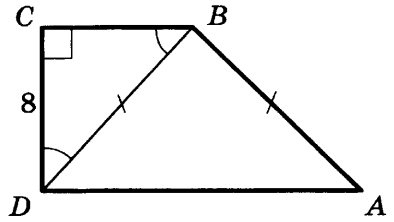
Значит,  $ED = 2BC = 2y$  и  $AD = AE + ED$ , или  $x = \frac{1}{2}(x - y) + 2y$ ,

или  $2x = x - y + 4y$ , откуда  $x = 3y$ .

Так как  $x - y = 4$  и  $x = 3y$ , то  $3y - y = 4$ ;  $2y = 4$ ,  $y = 2$ , тогда  $x = 3 \cdot 2 = 6$ .

Следовательно,  $S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BE = \frac{1}{2}(6 + 2) \cdot 12 = 48$ .

Ответ: 48.



**16.** Из вершины  $C$  проведем  $CF \parallel AB$  и  $CE \perp AD$ , тогда  $AF = BC = 4$  и  $FD = AD - AF = 25 - 4 = 21$ .

Высоту  $CE$  трапеции  $ABCD$  найдем из  $\triangle CFD$ , для чего вычислим  $S_{\triangle CFD}$  (по формуле Герона):

$$S_{\triangle CFD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где  $p = \frac{1}{2}(13 + 20 + 21) = 27$ ;  $p - a = 27 - 13 =$

$$= 14, p - b = 27 - 20 = 7, p - c = 27 - 21 = 6, \text{ тогда } S_{\triangle CFD} = \sqrt{27 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{3 \cdot 9 \cdot 14^2 \cdot 3} = 9 \cdot 14 = 126.$$

С другой стороны,  $S_{\triangle CFD} = \frac{1}{2}FD \cdot CE$ , или  $126 = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot CE$ , откуда  $CE = 12$ .

$$\text{Следовательно, } S = \frac{AD + BC}{2} \cdot CE = \frac{25 + 4}{2} \cdot 12 = 29 \cdot 6 = 174.$$

*Ответ:* 174.

**17.** По условию  $S_{\triangle ACD} = 196$ .

Но  $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2}AD \cdot CE$ , тогда  $196 =$

$$= \frac{1}{2}AD \cdot 16, \text{ откуда } AD = \frac{196}{8} = 24,5.$$

$$\text{Значит, } S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CE =$$

$$= \frac{1}{2}(24,5 + 12) \cdot 16 = 36,5 \cdot 8 = 292.$$

*Ответ:* 292.

**18.** Пусть  $BC = x$ , тогда  $AD = 2x$ .

По условию задачи  $S_{\triangle AMD} = 120$ , или

$$\frac{1}{2} \cdot AD \cdot MN = 120, \frac{1}{2} 2x \cdot h = 120, \text{ откуда}$$

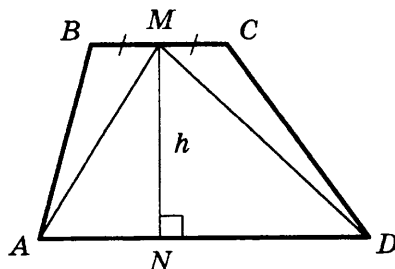
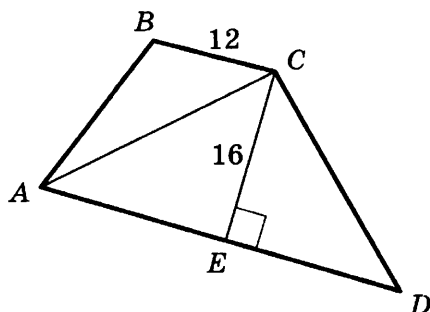
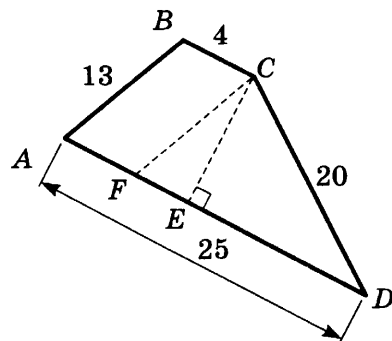
$xh = 120$ , где  $h$  — высота  $\triangle AMD$  (и трапеции).

Площадь трапеции  $ABCD$  будет равна

$$S = \left( \frac{1}{2} BM \cdot h \right) + S_{\triangle AMD} + \left( \frac{1}{2} MC \cdot h \right) = \frac{1}{2} h (BM + MC) + 120 = \frac{1}{2} \cdot hx + 120.$$

$$\text{Так как } xh = 120, \text{ то } S = \frac{1}{2} \cdot 120 + 120 = 180.$$

*Ответ:* 180.

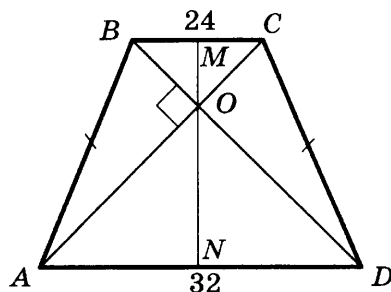


**Замечание.** Нетрудно заметить, что  $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle MCD} = \frac{1}{4}xh$  и  $S_{\triangle AMD} = xh$ , т. е.  $S_{\triangle AMD} = 2(S_{\triangle ABM} + S_{\triangle MCD})$ .

**19.** Проведем высоту  $MN$  трапеции через точку пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ .

Так как по условию  $AB = CD$  и  $AC \perp BD$ , то  $AD = 2 \cdot ON$  и  $BC = 2 \cdot OM$ , тогда

$$S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot MN = (ON + OM) \cdot MN = MN \cdot MN = (MN)^2.$$



По условию задачи  $AD = 32$  и  $BC = 24$ , тогда  $ON = \frac{1}{2}AD$ ,  $OM = \frac{1}{2}BC$ .

Значит,  $MN = ON + OM = \frac{1}{2}AD + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2} \cdot 56 = 28$ .

Тогда  $S = 28^2 = 784$ .

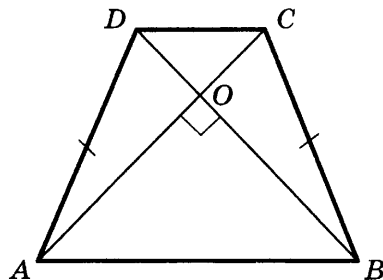
**Ответ:** 784.

**Замечание.** Фактически мы доказали, что «если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то площадь  $S = h^2$  и  $h = \frac{1}{2}(a + b)$ , где  $h$  — высота трапеции,  $a$  и  $b$  — основания».

**20.** Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$  трапеции  $ABCD$ , где  $AD = BC$ .

Так как  $AC \perp BD$  (по условию), то

$$\begin{aligned} S &= S_{\triangle DAC} + S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot OD + \frac{1}{2}AC \cdot OB = \\ &= \frac{1}{2}AC \cdot (OD + OB) = \frac{1}{2}AC \cdot BD. \end{aligned}$$



Но  $AC = BD = 8$ , тогда  $S = \frac{1}{2} \cdot 8^2 = 32$ .

**Ответ:** 32.

**Замечание.** Фактически мы доказали, что «если в трапеции диагонали перпендикулярны, то площадь  $S = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2$ , где  $d_1$  и  $d_2$  — длины диагоналей. Для равнобедренной трапеции  $S = \frac{1}{2}d^2$ , где  $d$  — длина диагонали».

**21.** Так как  $DE$  и  $CF$  — высоты трапеции и  $DC = DE = 12$ , то  $DCFE$  — квадрат.

По условию  $AE = FB = \frac{1}{2}EF$ , и так как  $EF = DC = 12$ , то  $EF = 2AE = 2FB$ , тогда  $AB = 2AE + EF = 12 + 12 = 24$ .



$$\text{Значит, } S = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot DE = \\ = \frac{1}{2}(24 + 12) \cdot 12 = 216.$$

Ответ: 216.

**22.** Пусть  $h$  — высота трапеции.

По условию  $S_{\triangle ACD} = 32$  и  $S_{\triangle DCB} = 13$ .

Но  $S_{\triangle DCB} = S_{\triangle ABC}$ , так как  $S_{\triangle DCB} = \frac{1}{2}BC \cdot h$

$$\text{и } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot h.$$

Итак,  $S_{\triangle ABC} = 13$ , тогда площадь трапеции  $S = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle ABC} = 32 + 13 = 45$ .

Ответ: 45.

**23.** Так как  $AD = DB$  (по условию), то  $\triangle ADB$  — равнобедренный, тогда медиана  $DE$  ( $E$  — середина  $AB$ ) является и высотой.

Значит,  $DE$  — высота и трапеции.

Заметим, что  $\triangle AFE = \triangle DFE$  (по двум катетам). Тогда  $AE = DE = \frac{1}{2}AB = 12$ .

$$\text{Значит, } S = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot DE = \frac{1}{2}(24 + 10) \cdot 12 = 204.$$

Ответ: 204.

**24.** В трапеции  $ABCD$  сумма односторонних углов равна  $180^\circ$ , т. е.  $\angle BCD + \angle ADC = 180^\circ$ .

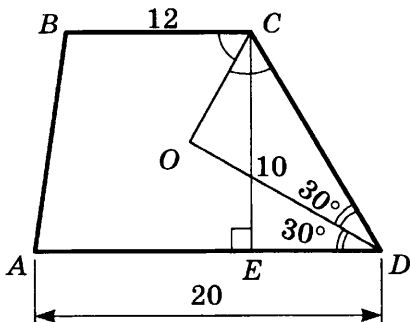
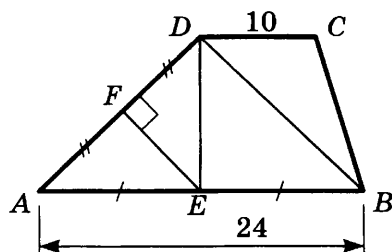
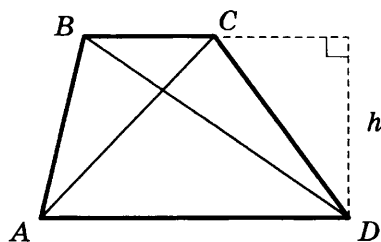
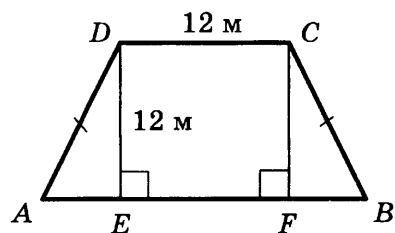
Так как  $CO$  — биссектриса  $\angle BCD$  и  $DO$  — биссектриса  $\angle ADC$ , то в  $\triangle COD$   $\angle OCD + \angle CDO = 90^\circ$ , значит,  $\angle COD = 90^\circ$ , т. е.  $\triangle COD$  — прямоугольный, где  $\angle ODC =$

$$= 30^\circ \Rightarrow \frac{OD}{CD} = \cos 30^\circ, \text{ или } \frac{10}{CD} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ откуда } CD = \frac{20}{\sqrt{3}}.$$

Проведем высоту  $CE$  трапеции, тогда из  $\triangle CED$ , где  $\angle CDE = 60^\circ$ , имеем  $\frac{CE}{CD} = \sin 60^\circ$ , откуда  $CE = \frac{20}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10$ .

$$\text{Значит, } S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CE, \text{ или } S = \frac{1}{2}(20 + 12) \cdot 10 = 160.$$

Ответ: 160.



**25.** Пусть  $BC = x$ ,  $AD = y$ , тогда  $\frac{x}{y} = \frac{3}{4}$ ,

откуда  $y = \frac{4}{3}x$ .

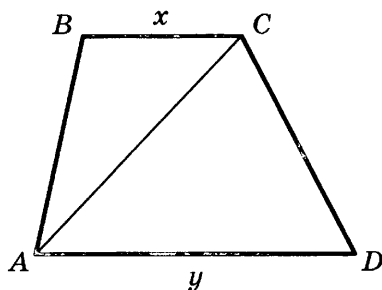
По условию задачи  $S_{\triangle ABC} = 30$ .

Пусть  $h$  — высота трапеции, тогда  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}xh = 30$ , или  $xh = 60$ , откуда  $h = \frac{60}{x}$ .

Значит,  $S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}$ , или  $S = 30 + \frac{1}{2}hy$ . Так как  $h = \frac{60}{x}$  и  $y = \frac{4}{3}x$ ,

то  $hy = \frac{60}{x} \cdot \frac{4}{3}x = 80$  и  $S = 30 + \frac{1}{2} \cdot 80 = 70$ .

*Ответ:* 70.



**26.** По условию задачи  $S_{\triangle BOC} = 4$  и  $S_{\triangle AOD} = 25$ .

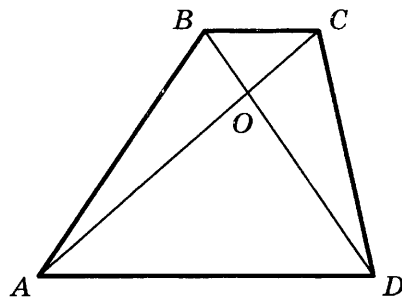
Заметим, что  $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$  (см. № 22).

Тогда  $S_{\triangle AOB} : S_{\triangle BOC} = S_{\triangle AOD} : S_{\triangle COD}$ , откуда находим

$S_{\triangle AOB}^2 = S_{\triangle COD}^2 = S_{\triangle BOC} \cdot S_{\triangle AOD} = 4 \cdot 25 = 100$ , откуда  $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD} = 10$ .

Значит,  $S_{ABCD} = S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOD} + 2S_{\triangle AOB} = 4 + 25 + 2 \cdot 10 = 49$ .

*Ответ:* 49.



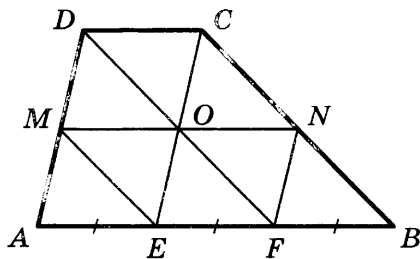
**27.** Через точку  $O$  проведем прямую  $MN \parallel AB$ .

Соединим точки  $M$  и  $E$  и точки  $N$  и  $F$ .

Так как по условию  $AE = EF = FB$  и  $AB : DC = 3 : 1$ , то  $DC = AE = EF = FB$ .

Заметим, что  $\triangle DOC = \triangle EOF$  (по II признаку), так как  $\angle ODC = \angle OFE$ ,  $\angle OCD = \angle OFE$  (как накрест лежащие) и  $DC = EF$ , тогда  $DO = OF$  и  $CO = OE$ , т. е.  $O$  — середина  $DF$  и  $CE$ . Легко доказать, что  $BC \parallel ME$  и  $AD \parallel NF$ . Следовательно, трапеция разбивается на 8 равных треугольников, и так как  $S_{\triangle DOC} = 8$ , то  $S_{ABCD} = 8 \cdot 8 = 64$ .

*Ответ:* 64.



## ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

Найдите  $x$ .

1.  $x^2 = 3^2 + 4^2$ ;  $x^2 = 25$ ,  $x = 5$ .

Ответ: 5.

2.  $x^2 = 13^2 - 4^2$ ;  $x^2 = 153$ ,  $x = \sqrt{153}$ .

Ответ:  $\sqrt{153}$ .

3.  $x^2 = RK^2 + KL^2$ ; так как  $KL = RK = \sqrt{5}$ , то  $x^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{5})^2$ ,

$x^2 = 10$ ,  $x = \sqrt{10}$ .

Ответ:  $\sqrt{10}$ .

4. Так как  $\angle M = 30^\circ$ , то  $NS = \frac{1}{2}MN = \sqrt{3}$ .

Тогда  $x^2 = (2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2$ ;  $x^2 = 12 - 3 = 9$ ,  $x = 3$ .

Ответ: 3.

5. По условию  $AB = BC = 17$ , значит,  $\triangle ABC$  — равнобедренный, тогда высота  $BD = x$  является и медианой, т. е.

$$DC = \frac{1}{2}AC = 8.$$

Значит,  $x^2 = 17^2 - 8^2$ ;  $x^2 = 225$ ,  $x = 15$ .

Ответ: 15.

6.  $\triangle RNM$  — правильный, тогда  $RK = x$  — медиана, биссектриса и высота, т. е.  $NK = 3$ .

Значит,  $x^2 = 6^2 - 3^2$ ;  $x^2 = 27$ ,  $x = \sqrt{3 \cdot 9} = 3\sqrt{3}$ .

Ответ:  $3\sqrt{3}$ .

7.  $\triangle MPR$  — правильный (по условию) и  $RT = 8$  — высота, значит,  $RT$  и медиана, тогда  $TP = \frac{1}{2}x$  и  $x^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 8^2$ , или  $\frac{3}{4}x^2 = 8^2$ ;  $x^2 = 8^2 \cdot \frac{4}{3}$ ,

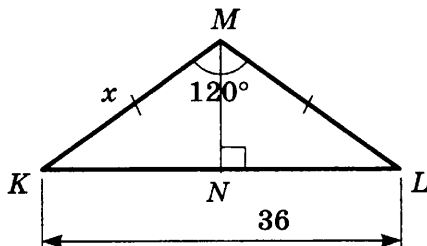
$$x = 8 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{16}{\sqrt{3}}.$$

Ответ:  $\frac{16}{\sqrt{3}}$ .

8. Из  $\triangle ADC$   $x^2 = 26^2 - 10^2$ ;  $x^2 = 576$ ,  $x = 24$ .

Ответ: 24.

9. Так как  $MK = ML$ , то  $\triangle KML$  — равнобедренный. Проведем высоту  $MN$  к основанию  $KL = 36$ , тогда  $MN$  — биссектриса и медиана, т. е.  $KN = 18$  и  $\angle KMN = 60^\circ$ , тогда  $\angle K = 30^\circ \Rightarrow MN = \frac{1}{2}KM =$



$= \frac{1}{2}x$ , значит,  $x^2 - \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 18^2$ , или  $\frac{3}{4}x^2 = 18^2$ ;  $x^2 = 18^2 \cdot \frac{4}{3}$ , откуда

$$x = 18 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{36}{\sqrt{3}} = \frac{36\sqrt{3}}{3} = 12\sqrt{3}.$$

Ответ:  $12\sqrt{3}$ .

Замечание. Задачу можно решить иначе, например:  $\sin 60^\circ = \frac{KN}{x}$ ,

откуда  $x = \frac{KN}{\sin 60^\circ} = \frac{18}{\sqrt{3}/2} = 12\sqrt{3}$ .

10. По условию  $RS = 13$ ,  $RT = 12$ , тогда  $TS^2 = 13^2 - 12^2$ ;  $TS^2 = 25$ ;  $TS = 5$ .

Пусть  $RM = y$ , тогда  $MS = 13 - y$ .

Из  $\triangle TRM$   $y^2 + x^2 = 12^2 = 144$ .

Из  $\triangle TMS$   $x^2 + (y - 13)^2 = 25$ .

Вычитая из I равенства II, получим

$$y^2 - (y - 13)^2 = 144 - 25, \text{ или}$$

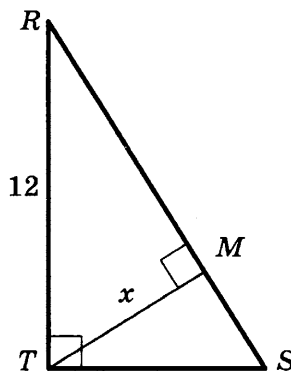
$$y^2 - y^2 + 26y - 169 = 119, \text{ или } 26y = 288,$$

откуда  $y = \frac{144}{13}$ , тогда из I уравнения находим

$$x^2 = 144 - \left(\frac{144}{13}\right)^2, \text{ или } x^2 = \left(12 - \frac{144}{13}\right)\left(12 + \frac{144}{13}\right),$$

$$x^2 = \frac{12}{13} \cdot \frac{300}{13}, \text{ откуда } x = \frac{60}{13}.$$

Ответ:  $\frac{60}{13}$ .



Замечание.  $S_{\triangle RTS} = \frac{1}{2}RT \cdot TS = \frac{1}{2}RS \cdot x$ , откуда  $x = \frac{RT \cdot TS}{RS}$ .

11. Так как  $AC = BC = 13$ , то  $\triangle ABC$  — равнобедренный, тогда высота  $CD$  является медианой и биссектрисой, т. е.  $AD = DB = 5$ .

Из  $\triangle CDB$   $CD^2 = 13^2 - 5^2$ ;  $CD^2 = 169 - 25 = 144$ ;  $CD = 12$ .

Пусть  $BE = y$ , тогда  $CE = 13 - y$ .

Из  $\triangle ACE$ , где  $AE = x$ , имеем

$$x^2 + (13 - y)^2 = 169.$$

Из  $\triangle ABE$   $x^2 + y^2 = 100$ .

Вычитая из I уравнения II, имеем

$$(13 - y)^2 - y^2 = 69, \text{ или}$$

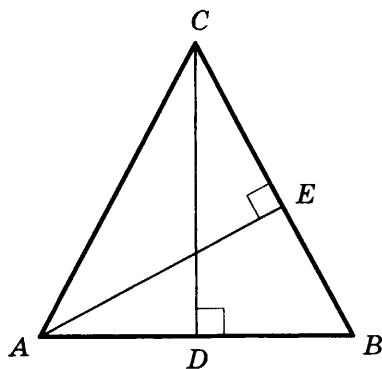
$$169 - 26y + y^2 - y^2 = 69; 26y - 100,$$

откуда  $y = \frac{50}{13}$ , тогда  $x^2 = 100 - y^2$ , или

$$x^2 = 100 - \left(\frac{50}{13}\right)^2, \quad x^2 = \left(10 - \frac{50}{13}\right)\left(10 + \frac{50}{13}\right),$$

$$x^2 = \frac{80}{13} \cdot \frac{180}{13}, \text{ откуда } x = \frac{120}{13}.$$

Ответ:  $\frac{120}{13}$ .



Замечание. Аналогично № 10 имеем  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2}BC \cdot x$ ,

откуда  $x = \frac{AB \cdot CD}{BC}$ .

**12.** Так как  $MK = KN = NR = MR$ , то  $MKNR$  — ромб.

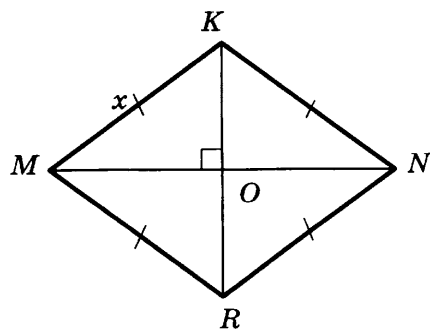
По условию  $MN = 24$ ,  $KR = 10$ , тогда

$$MO = \frac{1}{2}MN = 12 \text{ и } KO = 5.$$

Из  $\triangle MOK$  по теореме Пифагора имеем

$$x^2 = 12^2 + 5^2, \quad x^2 = 169, \quad x = 13.$$

Ответ: 13.



**13.** В ромбе  $ABCD$   $BD = 12$ , тогда  $BO = 6$  и

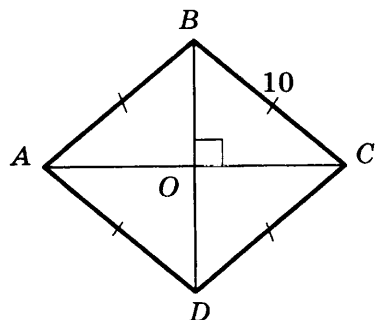
$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}x.$$

Из  $\triangle AOB$   $AO^2 = AB^2 - BO^2$ , или

$$\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 10^2 - 6^2, \quad \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 8^2, \text{ или}$$

$$\frac{1}{2}x = 8, \text{ откуда } x = 16.$$

Ответ: 16.



**14.** Пусть  $ML = y$ , тогда  $LK = 25 - y$ .

Из  $\triangle MLN$   $x^2 + y^2 = 49$ ; из  $\triangle NLK$   $x^2 + (25 - y)^2 = 576$ .

Вычитая из II уравнения I, получим

$$(25 - y)^2 - y^2 = 576 - 49, \text{ или}$$

$$(25 - y - y)(25 - y + y) = 527, \text{ или}$$

$$(25 - 2y) \cdot 25 = 527; 625 - 50y = 527,$$

$$50y = 98, \text{ откуда } y = \frac{49}{25}.$$

$$\text{Тогда } x^2 = 49 - y^2 = 7^2 - \left(\frac{49}{25}\right)^2,$$

$$x^2 = \left(7 - \frac{49}{25}\right)\left(7 + \frac{49}{25}\right), \text{ или}$$

$$x^2 = \frac{126}{25} \cdot \frac{224}{25}, \text{ откуда } x = \frac{\sqrt{9 \cdot 14 \cdot 14 \cdot 16}}{25} = \frac{3 \cdot 14 \cdot 4}{25} = \frac{168}{25} = 6,72.$$

Ответ: 6,72.

**15.** Так как  $SRLK$  — прямоугольник, то  $KS = LR = 8$ .

Тогда из  $\triangle SKL$  по теореме Пифагора имеем  $x^2 = 12^2 + 8^2$ ,  $x^2 = 144 + 64$ ,  
 $x^2 = 208$ , откуда  $x = \sqrt{16 \cdot 13} = 4\sqrt{13}$ .

Ответ:  $4\sqrt{13}$ .

**16.** По условию задачи  $MT = 34$ , тогда  $NT = 34 - x$ .

$$\text{Из } \triangle MNK \quad KN^2 = 16^2 - x^2;$$

$$\text{из } \triangle KNT \quad KN^2 = 30^2 - (34 - x)^2.$$

Сравнивая правые части полученных равенств, получим

$$16^2 - x^2 = 30^2 - (34 - x)^2, \text{ или}$$

$$(34 - x)^2 - x^2 = 30^2 - 16^2;$$

$$(34 - x - x)(34 - x + x) = (30 - 16)(30 + 16);$$

$$2(17 - x) \cdot 34 = 14 \cdot 46;$$

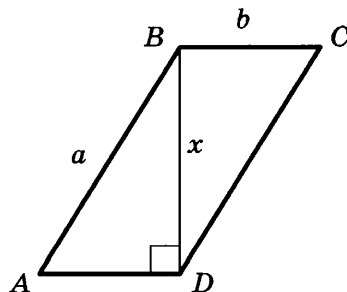
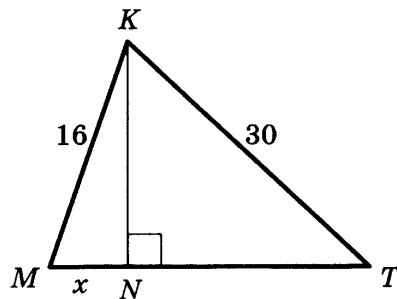
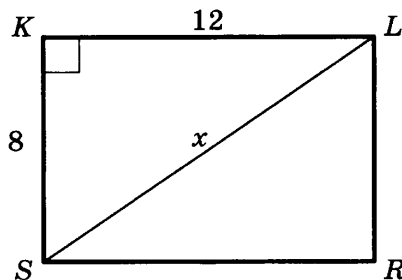
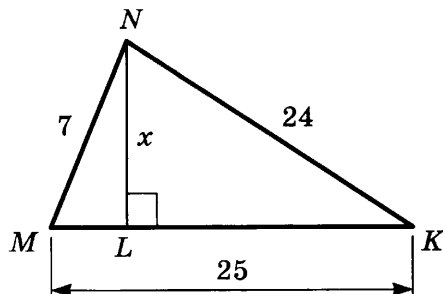
$$17(17 - x) = 161; 289 - 17x = 161;$$

$$17x = 128, \text{ откуда } x = \frac{128}{17}.$$

Ответ:  $\frac{128}{17}$ .

**17.** Пусть  $AB = a$ ,  $BC = b$ , тогда  $a - b = 3$ . По условию задачи периметр  $P = 50$ , или  $2(a + b) = 50$ , откуда  $a + b = 25$ .

Перемножив полученные равенства, имеем  $a^2 - b^2 = 75$ .



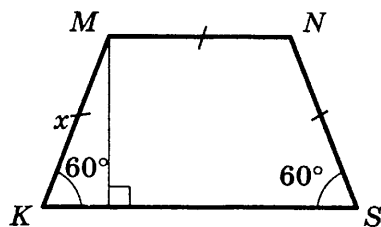
Из  $\triangle ABD$  по теореме Пифагора имеем  $x^2 = a^2 - b^2$ .

Так как  $a^2 - b^2 = 75$ , то  $x^2 = 75$ ,  $x = \sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$ .

Ответ:  $5\sqrt{3}$ .

**18.** Пусть в равнобедренной трапеции  $KMNS$   $KS = y$ , тогда  $KM = MN = NS = x$  (по условию).

Так как  $S_{KMNS} = 96\sqrt{3}$ , то получим  $\frac{x+y}{2} \cdot h = 96\sqrt{3}$ , где  $h = ME$  — высота трапеции.



В  $\triangle KEM$   $\angle KME = 30^\circ \Rightarrow KE = \frac{1}{2}x$ , тогда  $ME^2 = x^2 - \left(\frac{1}{2}x^2\right)$ , или

$$ME^2 = \frac{3}{4}x^2, \text{ откуда } ME = \frac{x}{2}\sqrt{3}.$$

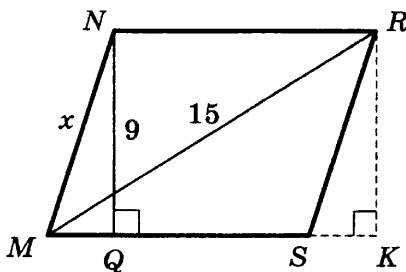
Значит,  $\frac{x+y}{2} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3}$ , или  $x(x+y) = 384$ .

Так как трапеция равнобедренная, то  $KE = \frac{1}{2}(KS - MN)$ , или  $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(y - x)$ , откуда  $y = 2x$ . Учитывая равенство  $x(x+y) = 384$ , получим  $x(x+2x) = 384$ , или  $3x^2 = 384$ ;  $x^2 = 128$ , откуда  $x = 8\sqrt{2}$ .

Ответ:  $8\sqrt{2}$ .

**19.** По условию  $S_{MNRS} = 99$  и высота  $NQ = 9$ , тогда  $S_{MNRS} = MS \cdot NQ$ , или  $99 = 9 \cdot MS$ , откуда  $MS = 11$ .

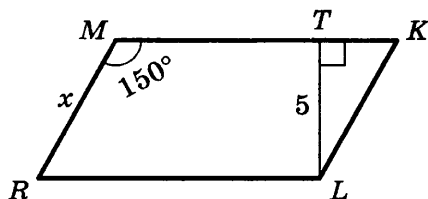
Проведем высоту  $RK$  параллелограмма на продолжение основания  $MS$ , тогда  $RK = NQ = 9$ , и так как  $MR = 15$ , то из  $\triangle MKR$   $NK^2 = MR^2 - RK^2$ , или  $MK^2 = 15^2 - 9^2 = 144$ , откуда  $MK = 12$ . Но  $MS = 11$ , тогда  $SK = 1$ .



Заметим, что  $MN = RS = x$  (по свойству параллелограмма), тогда из  $\triangle SKR$   $RS = x = \sqrt{1^2 + 9^2}$ , или  $x = \sqrt{82}$ .

Ответ:  $\sqrt{82}$ .

**20.** Так как  $RLKM$  — параллелограмм (по условию) и  $\angle M = 150^\circ$ , то  $\angle K = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$ , тогда в  $\triangle LTK$ , где  $\angle LTK = 90^\circ$ ,  $TL = \frac{1}{2}KL$ , откуда  $KL = 10$ .



Но  $KL = MR$  (по свойству параллелограмма), значит,  $x = 10$ .

Ответ: 10.

**21.** В параллелограмме  $QSRT$   $\angle T = 120^\circ$ , тогда  $\angle R = 60^\circ$ .

В  $\triangle SMR$   $\angle SMR = 90^\circ$ ,  $\angle R = 60^\circ$ , тогда  $\angle MSR = 30^\circ \Rightarrow MR = \frac{1}{2}RS$ , и так как  $RS = TQ = 10$  м, то  $MR = 5$  м.

Тогда  $x^2 = 10^2 - 5^2$ , или  $x^2 = 75$ ,  $x = 5\sqrt{3}$ .

Ответ:  $5\sqrt{3}$ .

**22.** По условию  $AB = BD = 5$ , значит,  $\triangle ABD$  — равнобедренный. Из  $\triangle DCB$  по теореме Пифагора имеем  $BC^2 = 5^2 - 3^2$ ,  $BC^2 = 16$ ,  $BC = 4$ .

Проведем высоту  $BE$  к основанию  $AD$ , тогда  $CBED$  — прямоугольник и  $BE = CD = 3$ .

В равнобедренном  $\triangle ABD$  высота  $BE$  является и медианой, тогда  $AE = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}x$ .

Из  $\triangle AED$   $AE^2 = AB^2 - BE^2$ , или  $\frac{1}{4}x^2 = 25 - 9$ ;  $\frac{1}{4}x^2 = 16$ ,  $\frac{1}{2}x = 4$ ,  $x = 8$ .

Ответ: 8.

**23.** Из вершины  $L$  трапеции  $RMKL$  проведем высоту  $LN$ .

По условию  $\angle KLR = 135^\circ$ , тогда  $\angle RLN = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$ , значит,  $\angle R = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ , т. е.  $\triangle LNR$  — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), т. е.  $LN = NR$ .

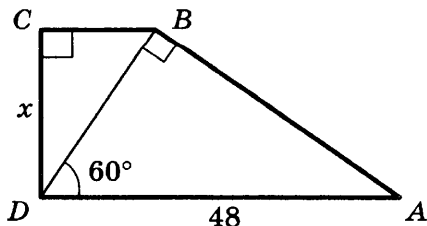
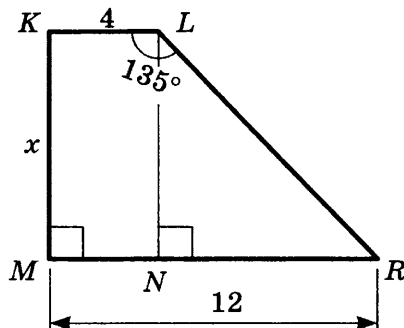
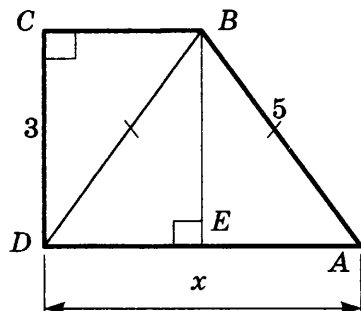
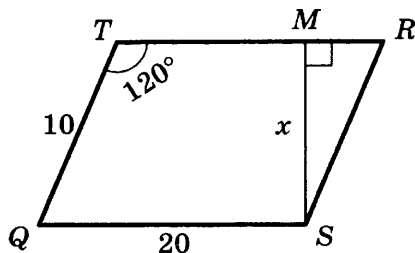
Но  $LN = KM = x$ , и так как  $MR = 12$ , то  $NR = MR - MN = MR - KL = 12 - 4 = 8$ , значит,  $NR = x = 8$ .

Ответ: 8.

**24.** В прямоугольном  $\triangle ABD$   $\angle ADB = 60^\circ$ , тогда  $\angle A = 30^\circ \Rightarrow BD = \frac{1}{2}AD = 24$ .

$\angle ADB = \angle CBD = 60^\circ$  (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых  $AD$  и  $BC$  и секущей  $BD$ ).

Тогда  $\angle CDB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{1}{2}BD = 12$ .





Из  $\triangle BCD$  по теореме Пифагора имеем

$$x^2 = 24^2 - 12^2, \text{ или } x^2 = 432, x = \sqrt{144 \cdot 3} = 12\sqrt{3}.$$

Ответ:  $12\sqrt{3}$ .

**25.** В  $\triangle KEF$   $\angle KEF = 90^\circ$ ,  $EF = 12$  и  $KE = 9$ , тогда  $KF^2 = 12^2 + 9^2$ ,  $KF^2 = 225$ , откуда  $KF = 15$ .

Пусть  $LF = y$ , тогда  $KL = 15 - y$ .

Из  $\triangle KLE$   $x^2 + (15 - y)^2 = 9^2$ ;

из  $\triangle ELF$   $x^2 + y^2 = 12^2$ .

Вычитая из II уравнения I, имеем

$$y^2 - (15 - y)^2 = 144 - 81, \text{ или}$$

$$(y - 15 + y)(y + 15 - y) = 63,$$

$$15(2y - 15) = 63, 30y - 225 = 63, 30y = 288, y = \frac{48}{5}.$$

$$\text{Тогда } x^2 = 12^2 - y^2, \text{ или } x^2 = 144 - \left(\frac{48}{5}\right)^2; x^2 = \left(12 - \frac{48}{5}\right)\left(12 + \frac{48}{5}\right),$$

$$x^2 = \frac{12}{5} \cdot \frac{108}{5}, x^2 = \frac{12^2 \cdot 3^2}{5^2}, x = \frac{36}{5} = 7,2.$$

Ответ: 7,2.

**26.** Так как  $ST = MT$ , то  $\triangle STM$  — равнобедренный, тогда из  $\triangle MTR$   $MR^2 = MT^2 + TR^2$ , или  $x^2 = 8^2 + 6^2$ ;  $x^2 = 100$ , откуда  $x = 10$ .

Ответ: 10.

**27.** По условию задачи  $\angle B = 30^\circ$ ,  $\angle A = 75^\circ$ , тогда  $\angle AMB = 180^\circ - (30^\circ + 75^\circ) = 75^\circ$ , т. е.  $\triangle ABM$  — равнобедренный, значит,  $AB = BM$  (по свойству равнобедренного треугольника). В  $\triangle MCB$   $\angle B = 30^\circ \Rightarrow MC = \frac{1}{2}MB$ , откуда  $MB = 2MC = 32$ , тогда  $AB = 32$ .

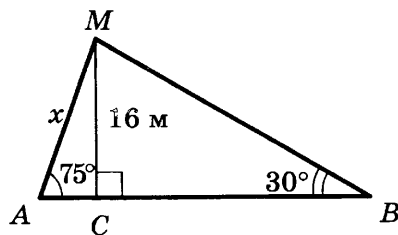
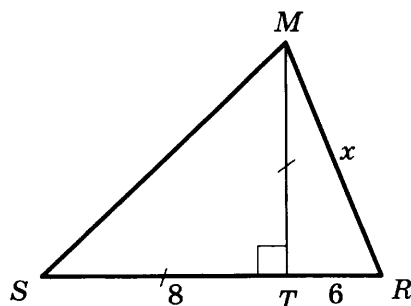
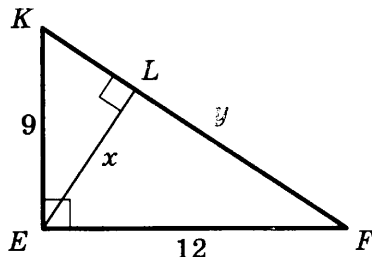
$$CB^2 = MB^2 - MC^2, \text{ или } CB^2 = 32^2 - 16^2,$$

$$CB^2 = 16 \cdot 48, CB = \sqrt{16 \cdot 16 \cdot 3} = 16\sqrt{3}; AC = AB - BC,$$

$$AC = 32 - 16\sqrt{3} = 16(2 - \sqrt{3}).$$

$$\text{Из } \triangle ACM \quad x^2 = AC^2 + MC^2, \text{ или } x^2 = 256(2 - \sqrt{3})^2 + 256;$$

$$x^2 = 256\left((2 - \sqrt{3})^2 + 1\right), x^2 = 256 \cdot (8 - 4\sqrt{3}), \text{ откуда}$$



$$x = 16 \cdot 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = 32\sqrt{2-\sqrt{3}} = 32\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2} = 16\sqrt{2}(\sqrt{3}-1),$$

где  $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2$ .

Ответ:  $16\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ .

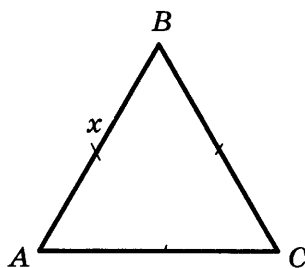
*Замечание.*  $AM = x$  можно найти из  $\triangle AMC$  по формуле  $x = \frac{16}{\sin 75^\circ}$ ,

где  $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ)$  и т. д. (при изучении темы «Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника» см. § 4, п. 66–67 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

**28.** Так как  $\triangle ABC$  — равносторонний, то  $S = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$ , где  $x$  — сторона (см. № 489 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

По условию  $S = 4\sqrt{3}$ , тогда  $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ , или  $x^2 = 16$ , откуда  $x = 4$ .

Ответ: 4.



**29.** Проведем высоту  $NK$  трапеции  $MNQT$ .

Тогда  $KM = 17 - TK = 17 - QN = 12$ .

По условию  $S_{MNQT} = 55$ , или

$$\frac{1}{2}(TM + QN) \cdot NK = 55, \text{ или } 11 \cdot NK = 55,$$

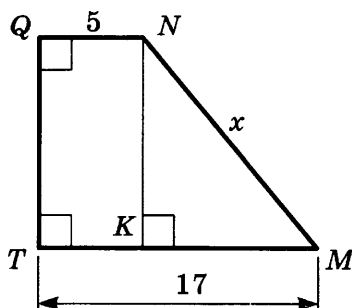
откуда  $NK = 5$ .

Из  $\triangle NKM$  по теореме Пифагора имеем

$$x^2 = KM^2 + KN^2, x^2 = 12^2 + 5^2, x^2 = 169,$$

откуда  $x = 13$ .

Ответ: 13.



**30.** Из  $\triangle MQT$   $QT = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$ .

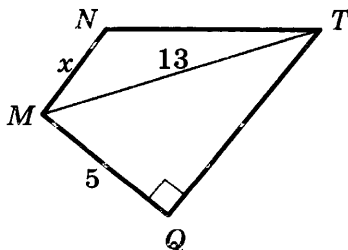
По условию  $S_{MNTQ} = 50$ , или

$$\frac{QT + MN}{2} \cdot MQ = 50, \text{ где } MQ = 5 \text{ — высота}$$

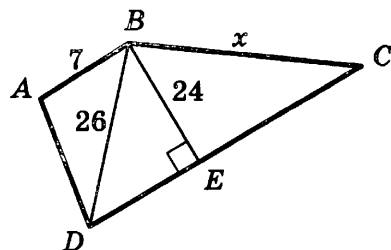
трапеции,  $MN = x$ , тогда получим

$$\frac{12 + x}{2} \cdot 5 = 50, \text{ или } 12 + x = 20, \text{ откуда } x = 8.$$

Ответ: 8.



**31.** По условию  $S_{ABCD} = 432$ , тогда  $\frac{1}{2}(AB + CD) \cdot BE = 432$ , где  $BE = 24$  — высота трапеции,  $AB = 7$ , значит,  $\frac{1}{2}(7 + CD) \cdot 24 = 432$ ,  $7 + CD = 36$ , откуда  $CD = 29$ .



Из  $\triangle BED$  по теореме Пифагора имеем

$$DE = \sqrt{26^2 - 24^2}, DE = \sqrt{100} = 10, \text{ тогда } CE = 29 - 10 = 19.$$

Из  $\triangle BEC$  находим  $BC = x = \sqrt{24^2 + 19^2} = \sqrt{937}$ .

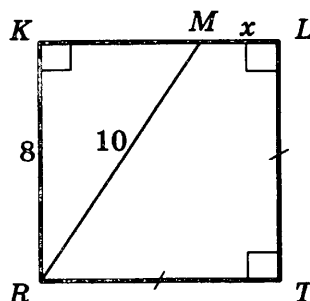
Ответ:  $\sqrt{937}$ .

**32.** Так как  $RT = LT$  и  $\angle K = \angle L = \angle T = 90^\circ$ , то  $\angle KRT = 90^\circ$ , значит,  $KLTR$  — квадрат.

$$\text{В } \triangle RKM \text{ } KM = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6.$$

Но  $KL = KR = 8$ , тогда  $ML = x = 8 - 6 = 2$ .

Ответ: 2.



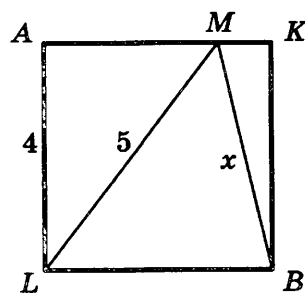
**33.** По условию  $AKBL$  — квадрат, тогда из  $\triangle LAM$  по теореме Пифагора имеем

$$AM = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Так как  $AL = AK = 4$  и  $AM = 3$ , то  $MK = 4 - 3 = 1$ .

Из  $\triangle MKB$ , где  $\angle K = 90^\circ$ ,  $MK = 1$  и  $KB = AL = 4$ , получим  $MB = x = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$ .

Ответ:  $\sqrt{17}$ .

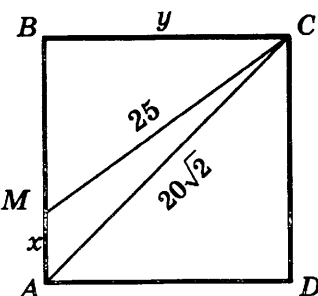


**34.** Пусть в квадрате  $ABCD$   $AB = BC = y$ , тогда  $BM = y - x$ .

Из  $\triangle MBC$   $y^2 + (y - x)^2 = 25^2$ ; из  $\triangle ABC$   $y^2 + y^2 = (20\sqrt{2})^2$ , или  $2y^2 = 400 \cdot 2$ ;  $y^2 = 400$ ,  $y = 20$ .

Тогда  $20^2 + (20 - x)^2 = 25^2$ , или  $(20 - x)^2 = 225$ ;  $20 - x = \pm 15$ , откуда  $x_1 = 20 - 15 = 5$ ,  $x_2 = 35$  (не подходит, так как  $x < y$ ). Значит,  $AM = x = 5$ .

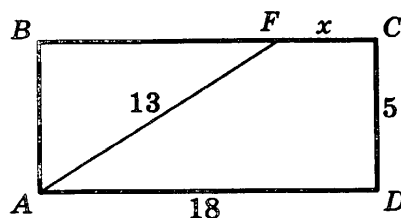
Ответ: 5.



**35.** Так как  $ABCD$  — прямоугольник, то  $AB = CD = 5$ , тогда из  $\triangle ABF$   $BF^2 = AF^2 - AB^2$ , или  $BF^2 = 13^2 - 5^2$ ;  $BF^2 = 144$ , откуда  $BF = 12$ .

Но  $BC = AD = 18$  и  $BF = 12$ , тогда  $FC = x = 18 - 12 = 6$ .

Ответ: 6.



**36.** По условию задачи  $P_{\Delta MNK} = 70$ , или  $MN + NK + MK = 70$ .

Но  $MN = 17$ ,  $NK = 25$ , тогда  $17 + 25 + MK = 70$ , откуда  $MK = 28$ .

Пусть  $MQ = y$ , тогда  $QK = 28 - y$ .

Из  $\Delta MQN$  по теореме Пифагора имеем  $x^2 + y^2 = 17^2$ ; из  $\Delta NQK$   $x^2 + (28 - y)^2 = 25^2$ .

Вычитая из последнего уравнения предыдущее, имеем

$(28 - y)^2 - y^2 = 25^2 - 17^2$ , или  $(28 - y - y)(28 - y + y) = (25 - 17)(25 + 17)$ ;  
 $2(14 - y) \cdot 28 = 8 \cdot 42$ , откуда  $14 - y = 6$ , т. е.  $y = 8$ , тогда из уравнения  $x^2 + y^2 = 17^2$  находим  $x^2 = 17^2 - 8^2$ , или  $x^2 = 225$ ,  $x = 15$ .

Ответ: 15.

**37.** Так как  $RM = MN = KN = RK$ , то  $RMNK$  — ромб (по определению), тогда  $RN \perp MK$  (по свойству ромба).

По условию  $RN - MK = 4$  и  $S_{RMNK} = 96$ . Известно, что если  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали ромба, то  $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$ .

Пусть  $RN = d_1$ ,  $MK = d_2$ , тогда  $\frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 = 96$ , или  $d_1 \cdot d_2 = 192$ . Кроме того,  $d_1 - d_2 = 4$ .

Следовательно, имеем систему уравнений

$\begin{cases} d_1 - d_2 = 4, \\ d_1 d_2 = 192, \end{cases} \quad \begin{cases} d_1 = d_2 + 4, \\ (d_2 + 4) d_2 = 192, \end{cases} \quad \text{или } d_2^2 + 4d_2 - 192 = 0, \text{ откуда } (d_2)_1 = -16, (d_2)_2 = 12. \text{ Поскольку } d_2 > 0, \text{ то корень } d_2 = -16 \text{ не подходит.}$   
 Итак,  $d_2 = 12$ , тогда  $d_1 = 12 + 4 = 16$ .

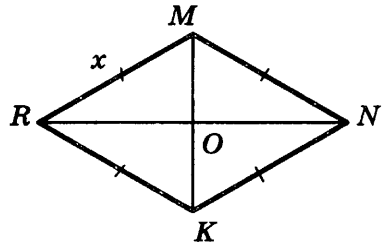
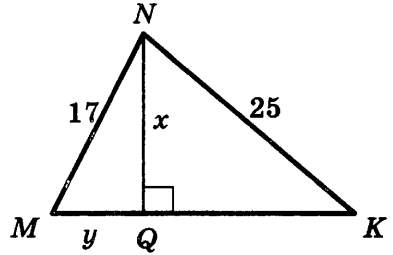
Значит,  $RN = 16$ ,  $MK = 12$ . Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей ромба. В  $\Delta MOR$   $OR = \frac{1}{2} d_1 = 8$ ,  $OM = \frac{1}{2} d_2 = 6$ , тогда  $x^2 = 6^2 + 8^2$ , или  $x^2 = 100$ , откуда  $x = 10$ .

Ответ: 10.

**38.** В параллелограмме  $ABCD$   $P_{ABCD} = 42$ ,  $S_{ABCD} = \frac{140}{3}$  (по условию задачи).

Пусть  $AD = a$ ,  $DC = b$ , тогда  $P_{ABCD} = 2(a + b) = 42$ , или  $a + b = 21$ .

Кроме того,  $S_{ABCD} = 4a = bx = \frac{140}{3}$ .



Если  $4a = \frac{140}{3}$ , то  $a = \frac{35}{3}$ , тогда  $b = 21 -$   
 $-\frac{35}{3} = \frac{28}{3}$ , и так как  $bx = \frac{140}{3}$ , то  $\frac{28}{3} \cdot x =$   
 $= 140$ , откуда  $x = 5 \cdot 3 = 15$ .

Ответ: 15.

**39.** Поскольку  $MR = MQ = x$ , то  $\triangle RMQ$  —  
 равнобедренный, и так как  $\angle R = 30^\circ$ , то  $\angle Q =$   
 $= \angle R = 30^\circ$  (по свойству), тогда  $\angle M =$   
 $= 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$ . По условию зада-  
 чи  $S_{\triangle RMQ} = 100\sqrt{3}$ .

Проведем высоту  $ME$  к основанию  $RQ$ ,  
 тогда

$$ME = \frac{1}{2}RM = \frac{1}{2}x \text{ и } RE^2 = RM^2 - ME^2, \text{ или}$$

$$RE^2 = x^2 - \frac{1}{4}x^2; RE^2 = \frac{3}{4}x^2, \text{ откуда } RE = \frac{x\sqrt{3}}{2}, \text{ тогда } RQ = 2RE = x\sqrt{3}.$$

Так как  $S_{\triangle RMQ} = 100\sqrt{3}$ , то  $\frac{1}{2}RQ \cdot ME = 100\sqrt{3}$ , или  $\frac{1}{2} \cdot x\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}x =$   
 $= 100\sqrt{3}$ , или  $\left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 100$ ,  $\frac{1}{2}x = 10$ , откуда  $x = 20$ .

Ответ: 20.

**40.** По условию  $ABCD$  — ромб, где  $S_{ABCD} =$   
 $= 480$  и  $BD = 20$ , тогда  $OD = \frac{1}{2}BD = 10$ .

Но  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ , и так как  $AC = 2 \cdot AO$ ,

$BD = 2 \cdot DO$ , то  $\frac{1}{2} \cdot 2AO \cdot 2 \cdot DO = 480$ , или

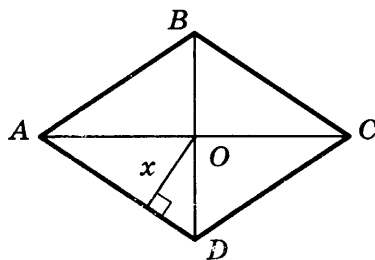
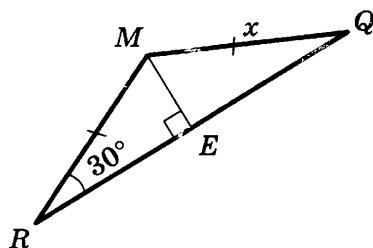
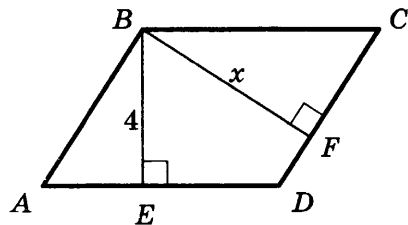
$$AO = 240 : 10 = 24.$$

Из  $\triangle AOD$  по теореме Пифагора имеем  $AD^2 = AO^2 + OD^2$ ,  $AD^2 = 24^2 +$   
 $+ 10^2$ ,  $AD^2 = 676$ , откуда  $AD = 26$ .

С другой стороны,  $S_{ABCD} = 4S_{\triangle AOD} = 4 \cdot \frac{1}{2}AD \cdot x = 2 \cdot 26 \cdot x = 480$ ,

$$\text{откуда } x = \frac{120}{13}.$$

Ответ:  $\frac{120}{13}$ .



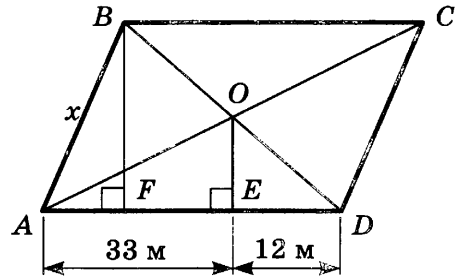
**Замечание.** Задачу можно решить и с применением пропорциональных отрезков в прямоугольном  $\triangle ADO$  (после изучения соответствующей темы п. 63 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

**41.** По условию задачи  $S_{ABCD} = 900$ , тогда  $S_{ABCD} = AD \cdot BF$ , где  $BF$  — высота параллелограмма.

Значит,  $45 \cdot BF = 900$ ,  $BF = 20$ .

Из  $\triangle BFD$   $FD^2 = BD^2 - BF^2$ .

Но  $BD = 2 \cdot DO$ , а  $DO = \sqrt{OE^2 + ED^2}$ , где  $OE = \frac{1}{2}BF = 10$ ,  $ED = 12$  (по усло-



вию), тогда  $DO = \sqrt{100 + 144} = \sqrt{244}$  и

$BD = 2DO = 2\sqrt{244}$ , значит,  $FD^2 = (2\sqrt{244})^2 - 20^2$ ;  $FD^2 = 976 - 400$ ,

$FD^2 = 576$ , откуда  $FD = 24$  и  $AF = AD - FD = 45 - 24 = 21$ .

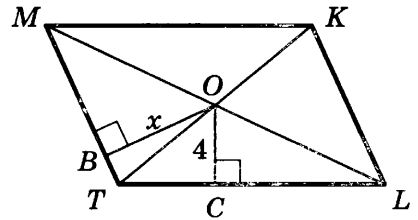
Из  $\triangle AFB$   $x^2 = 21^2 + 20^2$ , или  $x^2 = 841$ ,  $x = 29$ .

**Ответ:** 29.

**42.** В параллелограмме  $MKLT$   $P_{MKLT} = 40$ ,  $S_{MKLT} = 48$  (по условию).

Пусть  $TL = a$ ,  $MT = b$ , тогда  $P_{MKLT} = 2(a + b) = 40$ , или  $a + b = 20$ . Заметим, что  $S_{MKLT} = TL \cdot 2CO = MT \cdot 2BO$ , где  $BO = x$ , значит,  $8a = 2bx = 48$ , откуда  $a = 48 : 8 = 6$ .

Так как  $a + b = 20$  и  $a = 6$ , то  $b = 20 - 6 = 14$ , тогда  $2bx = 48$ , откуда  $x = \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$ .

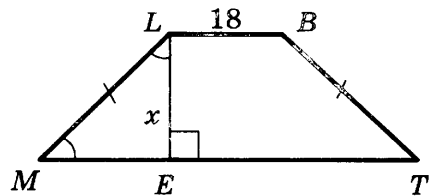


**Ответ:**  $\frac{12}{7}$ .

**43.** Пусть в равнобедренной трапеции  $MLBT$   $MT = y$ , тогда  $ME = \frac{y - 18}{2}$ .

Но  $ME = LE = x$ , так как в  $\triangle MEL$   $\angle M = \angle MLE$  (по условию), значит,

$x = \frac{1}{2}(y - 18)$ .



Так как  $S_{MLBT} = 243$ , то  $\frac{1}{2}(y + 18) \cdot x = 243$ , или  $x(y + 18) = 486$ .

Но  $y - 18 = 2x$ , т. е.  $y = 18 + 2x$ , тогда получим  $x(18 + 2x + 18) = 486$ ,  $x(36 + 2x) = 486$ ,  $x(18 + x) = 243$ , или  $x^2 + 18x - 243 = 0$ , откуда  $x_1 = -27$  (не подходит, так как  $x > 0$ ),  $x_2 = 9$ .

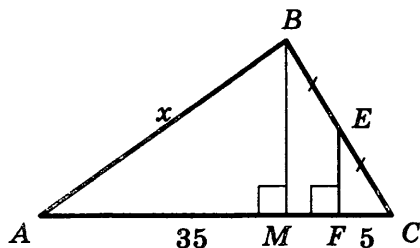
**Ответ:** 9.

**44.** По условию задачи  $AF = 35$ ,  $FC = 5$ , тогда  $AC = 40$ . Проведем высоту  $BM$ . Заметим, что  $MF = FC$  (по теореме Фалеса), тогда  $EF$  — средняя линия  $\triangle BMC$ ;  $S_{\triangle ABC} = 320$  (по условию), или  $\frac{1}{2}AC \cdot BM = 320$ ;

$$\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot BM = 320, \text{ откуда } BM = 16.$$

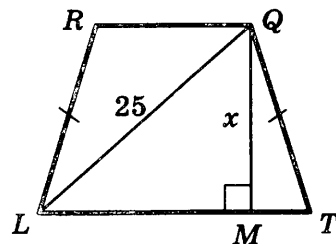
$AM = AC - MC = 40 - (5 + 5) = 30$ , тогда из  $\triangle AMB$  по теореме Пифагора находим  $x^2 = AM^2 + BM^2$ , или  $x^2 = 30^2 + 16^2$ ,  $x^2 = 1156$ , откуда  $x = 34$ .

Ответ: 34.



**45.** Пусть в равнобедренной трапеции  $LRQT$   $LT = a$ ,  $RQ = b$ , тогда  $MT = \frac{1}{2}(a - b)$ .

По условию  $S_{LRQT} = \frac{a+b}{2} \cdot x$ , где  $x = QM$  — высота трапеции;  $S_{LRQT} = 300$  (по условию), или  $\frac{a+b}{2} \cdot x = 300$ ,  $(a+b)x = 600$ .



$$LM = LT - MT = a - \frac{1}{2}(a - b) = \frac{1}{2}(a + b).$$

$$\text{Но } a + b = \frac{600}{x}, \text{ тогда } LM = \frac{1}{2} \cdot \frac{600}{x} = \frac{300}{x}.$$

Из  $\triangle LMQ$  по теореме Пифагора имеем

$$LM^2 + QM^2 = 25^2, \text{ или } \left(\frac{300}{x}\right)^2 + x^2 = 625, \frac{90\,000}{x^2} + x^2 = 625.$$

$$\text{Пусть } x^2 = t, \text{ где } t > 0, \text{ тогда } \frac{90\,000}{t} + t = 625, \text{ или } t^2 - 625t + 90\,000 = 0,$$

откуда находим  $t_1 = 225$ ,  $t_2 = 400$ .

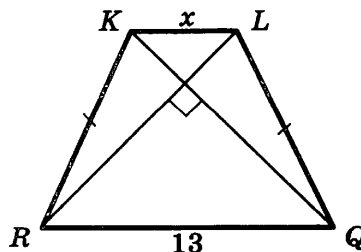
Если  $t = 225$ , то  $x^2 = 225$ ,  $x = 15$ ;

если  $t = 400$ , то  $x^2 = 400$ ,  $x = 20$ .

Ответ: 15; 20.

**46.** По условию трапеция равнобедренная и  $S_{RKQL} = 100$ .

Известно, что если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то  $S = h^2$  и  $h = \frac{1}{2}(a + b)$ , где  $h$  — высота,  $a$  и  $b$  — основания (см. № 19 к табл. 11).



Значит,  $h = \frac{1}{2}(13 + x)$ , а по условию  $S_{RKLQ} = 100$ .

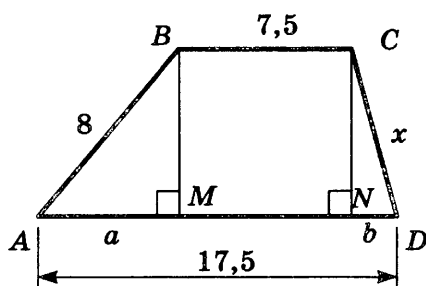
Тогда  $S_{RKLQ} = h^2 = \frac{1}{4}(13 + x)^2 = 100$ , или

$$\frac{1}{2}(13 + x) = 10, \text{ или } 13 + x = 20, \text{ откуда } x = 7.$$

Ответ: 7.

**47.** Так как  $AD \parallel BC$ , то  $ABCD$  — трапеция.

По условию  $S_{ABCD} = 60$ , или  $\frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BM = 60$ , где  $BM$  и  $CN$  — высоты трапеции,  $AD = 17,5$ ,  $BC = 7,5$ . Следовательно,  $\frac{1}{2}(17,5 + 7,5) \cdot BM = 60$ , или



$25BM = 60 \cdot 2$ , откуда  $BM = \frac{24}{5} = 4,8$ . Так как  $BM \perp AD$ ,  $CN \perp AD$ , то  $BCNM$  — прямоугольник, т. е.  $MN = BC = 7,5$ .

Пусть  $AM = a$ ,  $ND = b$ , тогда  $a + b = 17,5 - 7,5 = 10$ .

Из  $\triangle AMB$   $a^2 = 8^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2$ ,  $a^2 = \left(8 - \frac{24}{5}\right)\left(8 + \frac{24}{5}\right)$ ,  $a^2 = \frac{16}{5} \cdot \frac{64}{5}$ , откуда

$$a = \frac{4 \cdot 8}{5} = \frac{32}{5} = 6,4.$$

Так как  $a + b = 10$  и  $a = 6,4$ , то  $b = 3,6$ .

Из  $\triangle CND$  по теореме Пифагора имеем

$$x^2 = 4,8^2 + 3,6^2, \text{ или } x^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{18}{5}\right)^2;$$

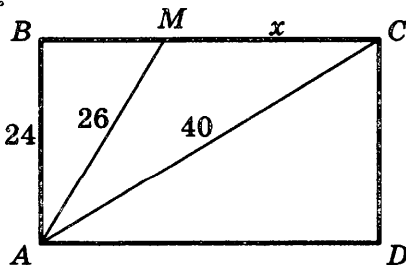
$$x^2 = \frac{576 + 324}{25} = \frac{900}{25}, \text{ откуда } x = \frac{30}{5} = 6.$$

Ответ: 6.

**48.** По условию задачи  $ABCD$  — прямоугольник, тогда из  $\triangle ABM$  по теореме Пифагора имеем  $BM^2 = 26^2 - 24^2$ , или  $BM^2 = 100$ , откуда  $BM = 10$ . Теперь из  $\triangle ABC$  находим  $BC^2 = AC^2 - AB^2$ , или  $BC^2 = 40^2 - 24^2 = 1024$ , откуда  $BC = 32$ .

Значит,  $x = BC - BM = 22$ .

Ответ: 22.



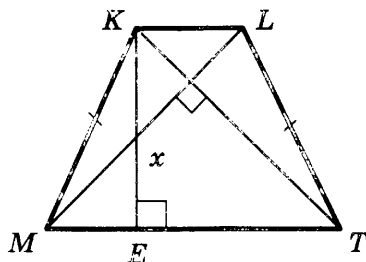


**49.** В равнобедренной трапеции  $MKLT$   $S_{MKLT} = 81$  (по условию).

Известно, что если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то  $S = h^2$ , где  $h$  — высота трапеции (см. № 19 к табл. 11).

Тогда  $x^2 = 81$ , откуда  $x = 9$ .

*Ответ:* 9.



**50.** Известно, что если  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали

четырехугольника и  $\alpha$  — угол между ними, то  $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$  (см., на-

пример, № 529 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

По условию задачи  $AC = 9$ ,  $BD = 12$  и  $S_{ABCD} = 54$ , тогда получим

$$\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \sin \alpha = 54, \text{ или } \sin \alpha = 1,$$

откуда  $\alpha = 90^\circ$ , т. е.  $AC \perp BD$ .

Из точки  $C$  проведем прямую  $\parallel BD$  до пересечения с продолжением основания  $AD$  в точке  $E$ .

Тогда  $BCED$  — параллелограмм (по определению) и  $DE = BC = 5$ . Так как  $AC \perp BD$  (по доказанному) и  $BD \parallel CE$  (по построению), то  $\triangle ACE$  — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора), тогда  $AC^2 + CE^2 = AE^2$ , или  $9^2 + 12^2 = (x + 5)^2$ , или  $(x + 5)^2 = 225$ , и так как  $x + 5 > 5$ , то  $x + 5 = 15$ , откуда  $x = 10$ .

*Ответ:* 10.

*Замечание 1.* Поскольку нами была применена формула

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$ , доказательство которой основано, в свою очередь, на

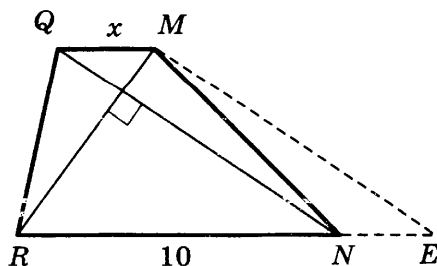
применении формулы площади треугольника  $S = \frac{1}{2} ab \sin \alpha$ , где  $a$  и  $b$  — две стороны и  $\alpha$  — угол между ними, то эта задача может быть рассмотрена позднее, при повторении.

*Замечание 2.* Задача может быть решена иначе, например, предварительно доказав, что  $S_{ABCD} = S_{\triangle ACE}$ .

**51.** В трапеции  $RQMN$   $QN \perp RM$ ,  $QN = 12$ ,  $RM = 5$  и  $RN = 10$  (по условию задачи).

$\triangle RME$  — прямоугольный, тогда  $ME = QN = 12$ ,  $QM = NE = x$ .

По теореме Пифагора  $RE^2 = RM^2 + ME^2$ , или  $RE^2 = 5^2 + 12^2$ ;  $RE^2 = 169$ , откуда  $RE = 13$ .



Но  $RE = RN + NE$ , где  $RN = 10$  (по условию) и  $NE = QM = x$ , тогда  $x = 13 - 10 = 3$ .

Ответ: 3.

**52.** Из точки  $O$  пересечения диагоналей проведем высоту  $KM$  трапеции.

Поскольку  $ABCD$  — равнобедренная трапеция и  $AC \perp BD$ , то  $\triangle DOC$  и  $\triangle AOB$  — равнобедренные и прямоугольные, тогда

$$OK = \frac{1}{2}DC \text{ и } OM = \frac{1}{2}AB, \text{ значит,}$$

$$KM = OK + OM = \frac{1}{2}(AB + DC) = DE.$$

По условию  $S_{ABCD} = 576$ , или

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot DE = 576, \text{ или } DE^2 = 576.$$

Из  $\triangle ADE$   $x^2 = AE^2 + DE^2$ , или  $x^2 = 576 + 100 = 676$ , откуда  $x = AD = BC = 26$ .

Ответ: 26.

**53.**  $ACBM$  — параллелограмм (по условию),  $CE \perp AM$  и  $\angle ECF = 60^\circ$ , тогда  $\angle ACE = 30^\circ$  и  $\angle FCB = 30^\circ$ . Значит,  $AE = \frac{1}{2}AC = 8$ .

Из  $\triangle AEC$ , где  $AC = 16$ ,  $AE = 8$ .

$$CE^2 = AC^2 - AE^2, \text{ или } x^2 = 16^2 - 8^2;$$

$$x = \sqrt{(16-8)(16+8)} = \sqrt{8 \cdot 24} = \sqrt{8 \cdot 8 \cdot 3} = 8\sqrt{3}.$$

Значит,  $CE = 8\sqrt{3}$ .

Ответ:  $8\sqrt{3}$ .

**54.** Проведем высоту  $DE$  трапеции  $ABCD$ .

Так как трапеция равнобедренная, то, обозначив  $AE = y$ , получим

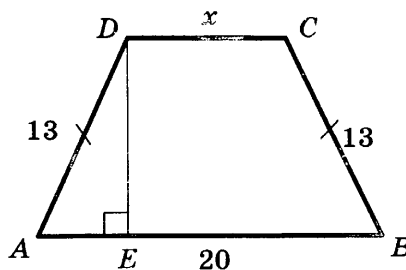
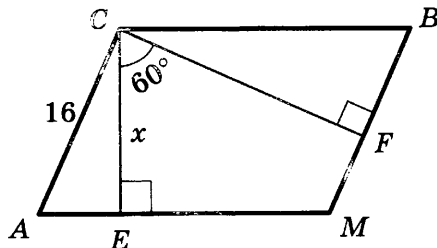
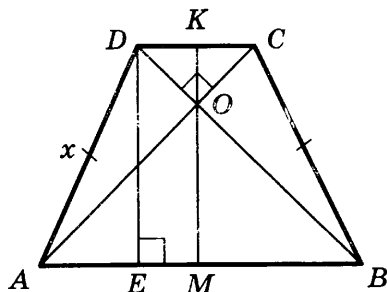
$$y = \frac{1}{2}(20 - x).$$

Из  $\triangle AED$  по теореме Пифагора имеем  $y^2 + h^2 = 13^2$ , где  $h = DE$ .

Кроме того, согласно условию задачи

$$S = 180, \text{ или } \frac{20+x}{2} \cdot h = 180, \text{ или}$$

$$(20+x)h = 360.$$



Итак, для нахождения  $DC = x$  имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(20 - x), \\ y^2 + h^2 = 13^2, \\ (20 + x)h = 360, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y^2 = \frac{1}{4}(20 - x)^2, \\ h^2 = 13^2 - y^2, \\ (20 + x)^2 h^2 = 360^2. \end{cases}$$

$$h^2 = 13^2 - \frac{1}{4}(20 - x)^2 = \left(13 - \frac{20 - x}{2}\right)\left(13 + \frac{20 - x}{2}\right) = \frac{1}{4}(6 + x)(46 - x).$$

Тогда III уравнение примет вид

$$(20 + x)^2(6 + x)(46 - x) = 720^2.$$

Упрощая полученное уравнение, получим

$$x^4 - 1476x^2 - 27\,040x + 408\,000 = 0.$$

Можно убедиться, что  $x = 10$  — корень полученного уравнения, тогда имеем

$$x^2(x^2 - 100) - 1376x(x - 10) - 40\,800(x - 10) = 0,$$

откуда  $x = 10$  — единственный корень уравнения.

Заметим, что уравнение  $x^2(x + 10) - 1376x - 408\,000 = 0$  не имеет корней, так как по смыслу задачи  $x < 20$  и левая часть полученного уравнения отрицательна, равенство не может выполняться.

**Ответ:** 10.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Найдите  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

1. Так как  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , то  $\frac{x}{18} = \frac{28}{21}$ , откуда  $x = \frac{18 \cdot 28}{21} = 6 \cdot 4 = 24$ .

Ответ: 24.

2. По условию  $N_1K_1 : NK = 2 : 1$ , т. е.  $y : 7 = 2 : 1$ , откуда  $y = 7 \cdot 2 = 14$ , где  $k = 2$  — коэффициент подобия. Тогда  $x = 4k = 8$ ,  $z = 6k = 12$ .

Ответ:  $x = 8$ ;  $y = 14$ ;  $z = 12$ .

3.  $\frac{L_1M_1}{LM} = \frac{21}{7} = 3$ , т. е.  $k = 3$ , тогда  $x = 6 \cdot 3 = 18$ ;  $y = 5 \cdot 3 = 15$ .

Ответ:  $x = 18$ ;  $y = 15$ .

4. Так как  $P_{\triangle ABC} = 36$ , то  $x + y + z = 36$ .

Но  $P_{\triangle A_1B_1C_1} = 12 + 18 + 24 = 54$ , тогда  $\frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle A_1B_1C_1}} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3} = k$ , где  $k$  —

коэффициент подобия.

Значит,  $\frac{x}{12} = \frac{2}{3}$ ,  $x = 8$ ;  $\frac{y}{18} = \frac{2}{3}$ ;  $y = 12$ ;  $\frac{z}{24} = \frac{2}{3}$ ,  $z = 16$ .

Ответ:  $x = 8$ ;  $y = 12$ ;  $z = 16$ .

5.  $P_{\triangle QMR} = 2 + 4 + 5 = 11$ . По условию задачи  $P_{\triangle M_1Q_1R_1} = 110$ , тогда  $k = \frac{11}{110} = 0,1$ .

Значит,  $\frac{2}{x} = 0,1$ , откуда  $x = 20$ ;  $\frac{5}{y} = 0,1$ ,  $y = 50$ ;  $\frac{4}{z} = 0,1$ ,  $z = 40$ .

Ответ:  $x = 20$ ;  $y = 50$ ;  $z = 40$ .

6. Пусть  $AB = 6k$ ,  $BC = 4k$ ,  $AC = 3k$ , тогда  $P_{\triangle ABC} = 6k + 4k + 3k = 13k$ . По условию задачи  $P_{\triangle A_1B_1C_1} = 91$ . Так как  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , то  $13k = 91$ ,

$k = \frac{1}{7}$ , тогда  $\frac{6}{x} = \frac{1}{7}$ ,  $x = 42$ ;  $\frac{4}{y} = \frac{1}{7}$ ,  $y = 28$ ;  $\frac{3}{z} = \frac{1}{7}$ ,  $z = 21$ .

Ответ:  $x = 42$ ;  $y = 28$ ;  $z = 21$ .

7. Так как  $\triangle MKN \sim \triangle M_1K_1N_1$  и  $MK : KN : MN = 9 : 7 : 8$ , то  $9 : 7 = x : y$ , или  $\frac{x}{y} = \frac{9}{7}$ . Кроме того,  $x + y = 48$ .

Имеем систему уравнений 
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{9}{7}, \\ x + y = 48, \end{cases} \quad \begin{cases} 7x = 9y, \\ x = 48 - y, \end{cases} \quad \begin{cases} 7(48 - y) = 9y, \\ x = 48 - y. \end{cases}$$

$336 - 7y = 9y$ , или  $16y = 336$ ,  $y = 21$ , тогда  $x = 27$ .

Значит,  $k = 27 : 9 = 3$ , т. е.  $z = 8k = 24$ .

Ответ:  $x = 27$ ;  $y = 21$ ;  $z = 24$ .

8. Аналогично № 7 имеем 
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{9}{7}, \\ x - y = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} 7x = 9y, \\ x = 6 + y, \end{cases} \quad \begin{cases} 7(6 + y) = 9y, \\ x = 6 + y. \end{cases}$$

$42 + 7y = 9y$ , или  $2y = 42$ ,  $y = 21$ , тогда  $x = 6 + 21 = 27$ .

Значит,  $k = 27 : 9 = 3$ , т. е.  $z = 8 \cdot 3 = 24$ .

Ответ:  $x = 27$ ;  $y = 21$ ;  $z = 24$ .

9.  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle ATK}} = k^2$ , где  $k = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$  — коэффициент подобия.

По условию  $S_{\triangle ATK} = 16 \text{ м}^2$ , тогда  $\frac{x}{16} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$ , или  $\frac{x}{16} = \frac{25}{4}$ , откуда  $x = 100$ .

Ответ: 100.

10. Так как  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ , то  $\frac{4}{x} = k$ , где  $k$  — коэффициент подобия.

Но  $S_{\triangle ABC} = 32$ ,  $S_{\triangle A_1B_1C_1} = 50$ , тогда  $k^2 = \frac{32}{50}$ , или  $k^2 = \frac{16}{25}$ , откуда  $k = \frac{4}{5}$ .

Значит,  $\frac{4}{x} = \frac{4}{5}$ , откуда  $x = 5$ .

Ответ: 5.

11. Аналогично № 10 имеем

$\frac{x}{9} = k$ ;  $\frac{S_{\triangle MNT}}{S_{\triangle M_1N_1T_1}} = k^2 = \frac{75}{225} = \frac{1}{3}$ , откуда  $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Тогда  $\frac{x}{9} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , откуда  $x = \frac{9}{\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$ .

Ответ:  $3\sqrt{3}$ .

12. По условию  $MN : FE = 7 : 6$ , т. е.  $k = \frac{7}{6}$ .

Так как  $S_{\Delta MNC} = y$ ,  $S_{\Delta FER} = x$ , то  $\frac{y}{x} = k^2 = \frac{49}{36}$ .

Кроме того,  $y - x = 26$  (по условию).

Имеем систему уравнений 
$$\begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{49}{36}, \\ y - x = 26, \end{cases} \quad \begin{cases} 49x = 36y, \\ y = 26 + x, \end{cases} \quad \begin{cases} 49x = 36(26 + x), \\ y = 26 + x, \end{cases}$$

$49x = 36 \cdot 26 + 36x$ , или  $13x = 36 \cdot 26$ , откуда  $x = 72$ , тогда  $y = 26 + 72 = 98$ .

Ответ:  $x = 72$ ;  $y = 98$ .

**13.** Из подобия  $\Delta ABC$  и  $\Delta DEC$  следует, что  $\frac{x}{15} = \frac{21}{9+15}$ , или  $\frac{x}{15} = \frac{21}{24}$ , откуда  $x = \frac{15 \cdot 21}{24} = \frac{105}{8}$ ,  $x = 13\frac{1}{8} = 13,125$ .

Ответ: 13,125.

#### I способ

**14.** Заметим, что  $FKCP$  — ромб (по определению), тогда  $BC \parallel FK$  и  $AC \parallel FP$ .

Значит,  $\Delta AFK \sim \Delta ABC$  и  $\Delta BFP \sim \Delta ABC$  (по двум углам). Из подобия

этих треугольников следует 
$$\begin{cases} \frac{AB}{BC} = \frac{y}{14-a}, \\ \frac{AB}{AC} = \frac{x}{10-a}, \\ AB = x + y = 12, \end{cases} \quad \text{где } a \text{ — сторона ромба,}$$

или 
$$\begin{cases} \frac{y}{14-a} = \frac{6}{7}, \\ \frac{x}{10-a} = \frac{6}{5}, \end{cases} \quad \begin{cases} 7y = 84 - 6a, \\ 5x = 60 - 6a, \end{cases} \quad \text{откуда } 7y - 5x = 24.$$

Так как  $x + y = 12$ , то  $y = 12 - x$ , тогда  $7(12 - x) - 5x = 24$ , откуда находим  $x = 5$  и  $y = 12 - 5 = 7$ .

Ответ: 5; 7.

#### II способ

Так как  $FKCP$  — ромб, то диагональ  $CF$  — биссектриса углов  $KCP$  и  $KFP$ , тогда в  $\Delta ABC$  по свойству биссектрисы угла треугольника имеем

$\frac{x}{y} = \frac{10}{14}$ , или  $\frac{x}{y} = \frac{5}{7}$ , и так как  $x + y = 12$ , то, решая систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{7}, \\ x + y = 12, \end{cases} \quad \text{находим } x = 5, y = 7.$$

15. Решая аналогично № 14 (II способом), имеем 
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{8}{12}, \\ x + y + NK = 55, \end{cases}$$

где  $NK = 8 + 12 = 20$  и  $P_{\triangle MNK} = 55$  (по условию).

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3}, \\ x + y = 35, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 2y, \\ y = 35 - x, \end{cases}$$

$3x = 2(35 - x)$ , или  $5x = 70$ , откуда  $x = 14$ , тогда  $y = 21$ .

Ответ: 14; 21.

16. Пусть  $KE = EM = y$ , тогда  $\frac{S_{\triangle KLM}}{S_{\triangle MEF}} = \frac{LM \cdot KM}{MF \cdot ME}$  (см. п. 52 (окончание) «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

Значит,  $\frac{x}{8} = \frac{9 \cdot 2y}{3 \cdot y}$ , или  $\frac{x}{8} = 6$ , откуда  $x = 48$ .

Ответ: 48.

17. По условию задачи  $\triangle ABC \sim \triangle MNK$ .

$P_{\triangle ABC} : P_{\triangle MNK} = 2 : 3$ , тогда  $k = \frac{2}{3}$ , где  $k$  — коэффициент подобия. Кроме того, по условию  $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle MNK} = 130$  и  $S_{\triangle ABC} = x$ ,  $S_{\triangle MNK} = y$ , или  $x + y = 130$  и  $\frac{x}{y} = k^2 = \frac{4}{9}$ .

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 130, \\ \frac{x}{y} = \frac{4}{9}, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 130, \\ 9x = 4y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 130 - x, \\ 9x = 4(130 - x), \end{cases}$$

$9x = 4 \cdot 130 - 4x$ , или  $13x = 4 \cdot 130$ , откуда  $x = 40$ , тогда  $y = 130 - 40 = 90$ .

Ответ: 40; 90.

18. Решая аналогично № 17, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 91, \\ \frac{x}{y} = k, \\ k^2 = \frac{18}{32}, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 91, \\ \frac{x}{y} = k, \\ k = \frac{3}{4}, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 91, \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{4}, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 91 - x, \\ 4x = 3y, \end{cases}$$

$4x = 3(91 - x)$ , или  $7x = 3 \cdot 91$ , откуда  $x = 39$ , тогда  $y = 91 - 39 = 52$ .

Ответ: 39; 52.

19. Пусть  $AO = OB = y$ , тогда

$$\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle BOD}} = \frac{OC \cdot OA}{OB \cdot OD} \quad (\text{см. № 16}), \text{ или } \frac{5}{x} = \frac{OC \cdot y}{OD \cdot y} = \frac{OC}{OD}. \text{ Но } \frac{OC}{OD} = \frac{5}{6}$$

(по условию), тогда  $\frac{5}{x} = \frac{5}{6}$ , откуда  $x = 6$ .

Ответ: 6.

20. Так как  $\frac{BC}{AB} = \frac{AM}{MB}$ , где  $AB = x$  и  $AM = AB - MB = x - MB$ , то получим  $\frac{20}{x} = \frac{x - MB}{MB}$ .

Кроме того,  $\frac{AB \cdot BC}{MB \cdot BC} = \frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle MBC}}$  (см. № 16), или  $\frac{x}{MB} = \frac{S_{\triangle AMC} + S_{\triangle BMC}}{S_{\triangle MBC}}$ ,

или  $\frac{x}{MB} = \frac{4}{3}$ , откуда  $MB = \frac{3}{4}x$ , тогда  $\frac{20}{x} = \frac{x - \frac{3}{4}x}{\frac{3}{4}x}$ , или  $\frac{20}{x} = \frac{1}{3}$ ,

откуда  $x = 20 \cdot 3 = 60$ .

Ответ: 60.

21. Пусть  $NF = FE = a$ ,  $NK = c$ ,  $FM = b$ .

Так как в  $\triangle KNM$   $\angle N = 90^\circ$  и  $NF = FE$  (по условию), то  $NE$  — биссектриса  $\angle KNM$ , тогда по свойству биссектрисы имеем

$$\frac{c}{a+b} = \frac{40}{30}, \text{ или } \frac{c}{a+b} = \frac{4}{3}.$$

Заметим, что  $\triangle MNK \sim \triangle MFE$  (как прямоугольные, имеющие общий  $\angle M$ ), тогда получим

$$\frac{70}{a+b} = \frac{30}{b}, \text{ или } \frac{7}{a+b} = \frac{3}{b}, \text{ или } 7b = 3a + 3b, 4b = 3a, \text{ откуда } b = \frac{3}{4}a.$$

Кроме того, из  $\triangle EFM$  по теореме Пифагора имеем  $a^2 + b^2 = 900$ , и так как  $b = \frac{3}{4}a$ , то получим  $a^2 + \frac{9}{16}a^2 = 900$ ,  $\frac{25}{16}a^2 = 900$ ,  $\frac{5}{4}a = 30$ , откуда

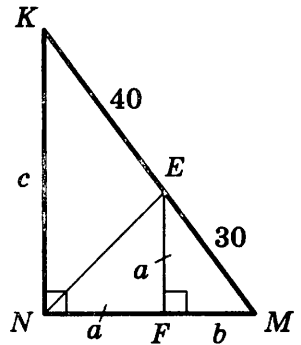
$$a = 24, \text{ тогда } b = \frac{3}{4} \cdot 24 = 18.$$

Вспоминая, что  $\frac{c}{a+b} = \frac{4}{3}$ , находим  $c = \frac{4}{3}(a+b) = \frac{4}{3}(24+18) = 56$ .

Следовательно,  $P_{\triangle MNK} = x = a + b + c + 70 = 24 + 18 + 56 + 70 = 168$ .

Ответ: 168.

22. Пусть в  $\triangle QNM$   $QN = a$ ,  $QE = EF = b$ ,  $EM = c$ . Так как  $QE = EF$ , то  $\triangle QEF$  — равнобедренный, тогда  $\angle FQE = \angle QFE$  (по свойству).





Но  $EF \perp NM$  и  $QN \perp NM$ , значит,  $QN \parallel EF$ , тогда  $\angle NQF = \angle EFQ$  (как накрест лежащие). Итак,  $\angle NQF = \angle FQE$ , т. е.  $QF$  — биссектриса  $\angle NQM$ . По свойству биссектрисы имеем

$$\frac{NF}{FM} = \frac{QN}{QM}, \text{ или } \frac{8}{10} = \frac{a}{b+c}, \text{ или } \frac{a}{b+c} = \frac{4}{5}.$$

Из подобия  $\triangle MFE$  и  $\triangle MNQ$  (см. № 21) получим

$$\frac{b+c}{8+10} = \frac{c}{10}, \text{ или } \frac{b+c}{18} = \frac{c}{10}, \text{ или}$$

$$\frac{b+c}{9} = \frac{c}{5}.$$

Кроме того, из  $\triangle MFE$  по теореме Пифагора имеем  $c^2 - b^2 = 100$ . Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{b+c}{9} = \frac{c}{5}, \\ c^2 - b^2 = 100, \end{cases} \quad \begin{cases} 9c = 5b + 5c, \\ c^2 - b^2 = 100, \end{cases} \quad \begin{cases} 4c = 5b, \\ c^2 - b^2 = 100, \end{cases} \quad \begin{cases} c = \frac{5}{4}b, \\ \frac{25}{16}b^2 - b^2 = 100, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = \frac{5}{4}b, \\ \frac{9}{16}b^2 = 100, \end{cases} \quad \begin{cases} c = \frac{5}{4}b, \\ \frac{3}{4}b = 10, \end{cases} \quad \begin{cases} c = \frac{5}{4} \cdot \frac{40}{3}, \\ b = \frac{40}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} c = \frac{50}{3}, \\ b = \frac{40}{3}. \end{cases}$$

$$\text{Так как } \frac{a}{b+c} = \frac{4}{5}, \text{ то } a = \frac{4}{5} \cdot (b+c) = \frac{4}{5} \cdot 30 = 24.$$

$$\text{Значит, } P_{\triangle MNQ} = x = a + b + c + 18 = 24 + 30 + 18 = 72.$$

Ответ: 72.

**23.**  $BC \parallel AD$ , значит,  $ABCD$  — трапеция.

По условию  $\triangle ABC \sim \triangle ACD$ , тогда

$$\frac{12}{x} = \frac{x}{27}, \text{ или } x^2 = 12 \cdot 27, \text{ откуда}$$

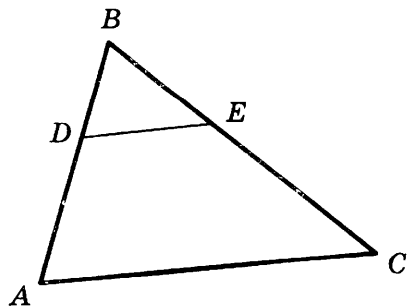
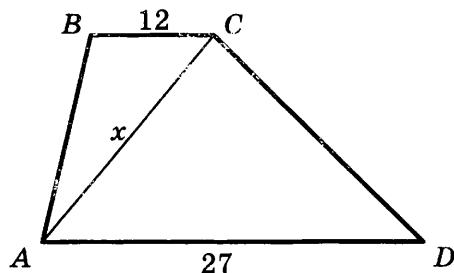
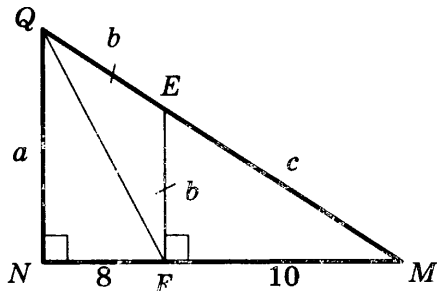
$$x = \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 9} = 3 \cdot 6 = 18.$$

Ответ: 18.

**24.**  $DE \parallel AC$  (по условию), значит,  $ADEC$  — трапеция, тогда  $\triangle BDE \sim \triangle BAC$ .

Следовательно,  $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BDE}} = k^2$ , где  $k$  — коэффициент подобия.

Но  $AB : BD = 3 : 1$ , т. е.  $k = 3$ .



Кроме того,  $S_{\triangle ABC} = 54$ ,  $S_{\triangle DEC} = x$ , тогда  $\frac{54}{S_{\triangle BDE}} = 9$ , откуда  $S_{\triangle BDE} = 6$ ,  
значит,  $x = S_{\triangle DEC} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BDE} = 54 - 6 = 48$ .

Ответ: 48.

**25.** Аналогично № 24 имеем  $\triangle BDE \sim \triangle ABC$ ,  
тогда  $AB : BD = 4 : 1$ , т. е.  $k = 4$ , значит,

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BDE}} = k^2, \text{ или } \frac{x}{x - 60} = 16, \text{ или } 16x - 960 = x,$$

$15x = 960$ , откуда  $x = 64$ .

Ответ: 64.

**26.** Так как  $NK \parallel MT$ , то  $MNKT$  — трапеция. По условию задачи  $\triangle MNK \sim \triangle MKT$ ,

тогда  $\frac{MN}{KM} = \frac{KT}{MT}$ , где  $MK = KT = 24$ .

Значит,  $\frac{18}{24} = \frac{24}{MT}$ , откуда

$$MT = \frac{24 \cdot 24}{18} = \frac{4 \cdot 24}{3} = 32.$$

Следовательно,  $x = P_{MNKT} = MN + NK + KT + MT$ .

Так как  $MK$  — биссектриса  $\angle NMT$ , то  $\angle NMK = \angle KMT = \angle NKM$ ,  
т. е.  $MN = NK = 18$ , тогда  $x = 18 + 18 + 24 + 32 = 92$ .

Ответ: 92.

**27.** Так как в параллелограмме  $ABCD$   $\frac{BC}{AB} = \frac{AC}{OC}$  (по условию) и  $AB = 10$ , то  $\frac{BC}{10} = \frac{AC}{OC}$ .

Но  $AC = 2 \cdot OC$ , тогда  $\frac{BC}{10} = \frac{2 \cdot OC}{OC} = 2$ ,  
откуда  $BC = 20$ .

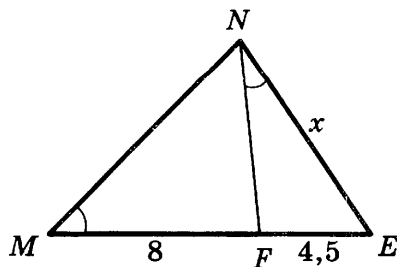
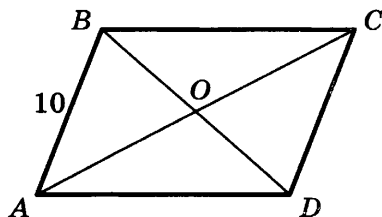
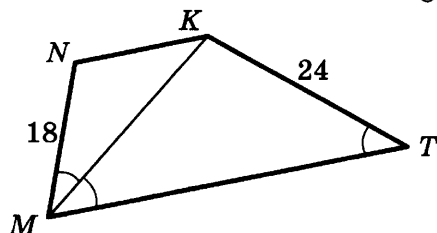
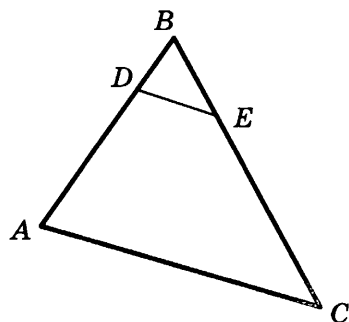
Значит,  $x = P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(10 + 20) = 60$ .

Ответ: 60.

**28.** Из подобия  $\triangle NFE$  и  $\triangle MNE$  следует,  
что  $\frac{FE}{NE} = \frac{NE}{ME}$ , или  $\frac{4,5}{x} = \frac{x}{12,5}$ , или

$$x^2 = 4,5 \cdot 12,5, \text{ откуда } x = \sqrt{9 \cdot 0,5 \cdot 25 \cdot 0,5} = 3 \cdot 0,5 \cdot 5 = 7,5.$$

Ответ: 7,5.



**29.** По условию задачи  $AD$  — биссектриса  $\angle BAC$ , тогда по свойству биссектрисы угла имеем  $\frac{x}{BD} = \frac{AC}{DC}$ , или  $\frac{x}{9} = \frac{18}{15}$ , откуда  $x = \frac{9 \cdot 18}{15} = \frac{3 \cdot 18}{5} = \frac{54}{5} = 10,8$ , т. е.  $AB = 10,8$ .

Ответ: 10,8.

**30.** Из условия задачи следует, что  $LN$  — биссектриса  $\angle RLM$ , тогда

$$\frac{RN}{MN} = \frac{RL}{LM}, \text{ или } \frac{x}{y} = \frac{14}{10,5}, \text{ или } \frac{x}{y} = \frac{4}{3}.$$

Кроме того,  $RM = 20$ , или  $x + y = 20$ .

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{4}{3}, \\ x + y = 20, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 4y, \\ y = 20 - x, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 4(20 - x), \\ y = 20 - x. \end{cases}$$

$$3x = 80 - 4x, \text{ или } 7x = 80, \text{ откуда } x = \frac{80}{7}, \text{ тогда } y = 20 - \frac{80}{7} = \frac{60}{7}.$$

$$\text{Значит, } RN = \frac{80}{7} = 11\frac{3}{7}, NM = \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}.$$

$$\text{Ответ: } x = 11\frac{3}{7}; y = 8\frac{4}{7}.$$

**31.** Так как  $\angle BDC = \angle BCD$  (по условию), то  $\triangle BDC$  — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), тогда  $BD = BC = 8$ .

Кроме того,  $BD$  — биссектриса  $\angle ABC$ , тогда  $\frac{AD}{AB} = \frac{DC}{BC}$ , или  $\frac{10}{15} = \frac{x}{8}$ , откуда находим  $x = \frac{10 \cdot 8}{15} = \frac{2 \cdot 8}{3} = \frac{16}{3}$ , значит,  $DC = \frac{16}{3} = 5\frac{1}{3}$ .

$$\text{Ответ: } 5\frac{1}{3}.$$

**32.** По условию задачи  $KM$  — биссектриса  $\angle TKL$ , тогда  $\frac{TK}{TM} = \frac{KL}{ML}$ , или  $\frac{y}{24} = \frac{x}{27}$ , откуда  $24x = 27y$ , или  $8x = 9y$ .

Кроме того,  $P_{\triangle TKL} = 153$  или  $x + y + (24 + 27) = 153$ , откуда  $x + y = 102$ .

$$\text{Имеем систему уравнений } \begin{cases} x + y = 102, \\ 8x = 9y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 102 - x, \\ 8x = 9(102 - x), \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 102 - x, \\ 17x = 9 \cdot 102, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 102 - 54, \\ x = 54, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 54, \\ y = 48. \end{cases}$$

Значит,  $TK = 48$ ,  $KL = 54$ .

Ответ:  $TK = 48$ ;  $KL = 54$ .

**33.** Аналогично № 32 имеем

$$\frac{NM}{MT} = \frac{NK}{TK}, \text{ или } \frac{9}{6} = \frac{NK}{TK}, \frac{NK}{TK} = \frac{3}{2}.$$

Так как по условию  $NK = MK$  и  $MK = 6 + TK$ , то  $NK = 6 + TK$ , и так как  $\frac{NK}{TK} = \frac{3}{2}$ , то  $\frac{6+TK}{TK} = \frac{3}{2}$ , или  $3TK = 12 + 2TK$ , откуда  $TK = 12$ , тогда  $MK = 6 + 12 = 18$ . Значит,  $P_{\Delta NMK} = x = MN + NK + MK = MN + 2MK = 9 + 36 = 45$ .

Ответ: 45.

**34.** Поскольку  $\angle C = 90^\circ$ , то  $\Delta ABC$  — прямоугольный, тогда  $AC^2 = AB^2 - BC^2$ , или  $BC = \sqrt{900 - 324} = \sqrt{576} = 24$ .

По условию задачи  $BE$  — биссектриса  $\angle ABC$ , тогда  $\frac{x}{y} = \frac{18}{30}$ , или  $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$ , и так как  $x + y = AC = 24$ , получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 24, \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{5}, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 24 - x, \\ 5x = 3y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 24 - x, \\ 5x = 3(24 - x). \end{cases}$$

$5x = 72 - 3x$ , или  $8x = 72$ , откуда  $x = 9$ , тогда  $y = 24 - 9 = 15$ .

Итак,  $CE = x = 9$ ,  $AE = y = 15$ .

Ответ:  $CE = 9$ ;  $AE = 15$ .

**35.** В  $\Delta KMR$   $\angle KMR = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$ , т. е.  $\Delta KMR$  — прямоугольный, тогда  $KR^2 = KM^2 + MR^2$ , или  $KR = \sqrt{256 + 900} = 34$ , значит,  $x + y = 34$ .

Поскольку  $MT$  — биссектриса  $\angle KMR$ , то  $\frac{x}{y} = \frac{30}{16}$ , или  $\frac{x}{y} = \frac{15}{8}$ .

Имеем систему уравнений  $\begin{cases} x + y = 34, \\ \frac{x}{y} = \frac{15}{8}, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 34 - x, \\ 8x = 15y, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 34 - x, \\ 8x = 15(34 - x). \end{cases}$

$8x + 15x = 15 \cdot 34$ ,  $33x = 15 \cdot 34$ ,  $x = \frac{170}{11}$ , тогда  $y = 34 - \frac{170}{11} = \frac{204}{11}$ .

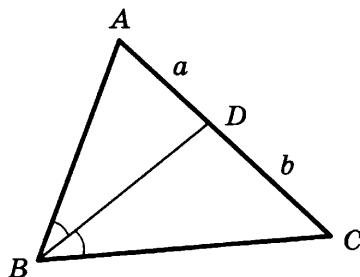
Итак,  $TR = x = 15\frac{5}{11}$ ,  $y = 18\frac{6}{11}$ .

Ответ:  $x = 15\frac{5}{11}$ ;  $y = 18\frac{6}{11}$ .

**36.** Пусть в  $\Delta ABC$   $AD = a$ ,  $DC = b$ .

По условию задачи  $AC = BC = a + b$ ,  $AC - AB = 4,8$  и  $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$ .

$$\begin{aligned}
 &BD — \text{биссектриса } \angle ABC, \text{ тогда } \frac{a}{b} = \frac{AB}{BC} = \\
 &= \frac{AB}{AC} = \frac{AB}{a+b} \text{ и } (a+b) - AB = 4,8, \text{ откуда} \\
 &AB = (a+b) - 4,8, \text{ тогда } \frac{a}{b} = \frac{AB}{a+b} = \frac{3}{5}; \\
 &AB = \frac{3}{5}(a+b), \text{ значит, } \frac{3}{5}(a+b) = (a+b) - \frac{24}{5}, \\
 &\text{или } \frac{2}{5}(a+b) = \frac{24}{5},
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &\text{откуда } a+b=12. \text{ Так как } P_{\triangle ABC} = x, \text{ то } x = AB + AC + BC = AB + \\
 &+ 2AC = \frac{a}{b}(a+b) + 2(a+b) = \frac{3}{5} \cdot 12 + 2 \cdot 12 = \left(\frac{3}{5} + 2\right) 12 = \frac{13}{5} \cdot 12 = \\
 &= \frac{156}{5} = 31,2.
 \end{aligned}$$

Итак,  $P_{\triangle ABC} = 31,2$ .

Ответ: 31,2.

К таблице 14

## ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Найдите  $x$ ,  $y$ .

1. Из  $\triangle EFA$ , где  $AE = 10$ ,  $FE = 6$ ,  $AF = y$  и  $\angle EFA = 90^\circ$ , имеем  $y^2 = 10^2 - 6^2$ , или  $y^2 = 64$ , откуда  $y = 8$ .

$\triangle ABC \sim \triangle AFE$  ( $\angle A$  — общий,  $\angle AFE = \angle ACB = 90^\circ$ ), т. е. по I признаку, тогда  $\frac{x}{AC} = \frac{6}{y}$ , где  $AC = y + 12$ , тогда  $xy = 6(y + 12)$ , где  $y = 8$ , значит,

$$8x = 6 \cdot 20, \text{ откуда } x = 15.$$

Итак,  $BC = x = 15$ ,  $y = AF = 8$ .

Ответ:  $x = 15$ ;  $y = 8$ .

2. По условию  $\angle MNL = \angle K$  и  $\angle M$  — общий, тогда  $\triangle KMN \sim \triangle MNL$ , значит,  $\frac{8}{x} = \frac{y}{21}$  и  $\frac{18}{x} = \frac{x}{8}$ , откуда  $x^2 = 18 \cdot 8$ , т. е.  $x = 12$ , тогда  $\frac{8}{12} = \frac{y}{21}$ ,  $y = \frac{8 \cdot 21}{12} = 14$ .

Итак,  $MN = x = 12$ ,  $NL = y = 14$ .

Ответ:  $x = 12$ ;  $y = 14$ .

3. Так как  $TF \parallel SE$ , то  $STFE$  — трапеция. Заметим, что  $\triangle TOF \sim \triangle SOE$  (по двум углам), так как  $\angle OTF = \angle SEO$  и  $\angle TFO = \angle OSE$  (или  $\angle TOF = \angle SOE$  — как вертикальные), тогда  $\frac{x}{50} = \frac{8}{20}$ , откуда  $x = \frac{8 \cdot 50}{20} = 20$ .

Итак,  $TF = x = 20$ .

Ответ: 20.

4. Поскольку  $DC \parallel MN$ , то  $\angle AMN = \angle ADC$  — как соответственные; кроме того,  $\angle A$  — общий, тогда  $\triangle ADC \sim \triangle AMN$  (по двум углам).

Значит,  $\frac{AD}{AC} = \frac{AM}{AN}$ , или  $\frac{11}{x+5} = \frac{11-4}{x}$ , откуда  $11x = 7(x+5)$ ,  $4x = 35$ ,  $x = \frac{35}{4} = 8,75$ .

Итак,  $AN = x = 8,75$ .

Ответ: 8,75.

5.  $\triangle TKR \sim \triangle RKE$  (по двум углам:  $\angle R$  — общий,  $\angle T = \angle RKE$  — по условию), тогда  $\frac{RT}{RK} = \frac{RK}{RE}$ , или  $\frac{17}{10} = \frac{10}{x}$ , или  $17x = 100$ ,  $x = \frac{100}{17} = 5\frac{15}{17}$ , т. е.  $RE = 5\frac{15}{17}$ .

Ответ:  $5\frac{15}{17}$ .

6. В  $\triangle AME$   $\angle AME = 90^\circ$ , тогда  $AM^2 + ME^2 = AE^2$ , откуда  $ME^2 = x^2 = 13^2 - 5^2$ , или  $x^2 = 144$ ,  $x = 12$ .

$\triangle AME \sim \triangle ACB$  ( $\angle A$  — общий,  $\angle AME = \angle C = 90^\circ$ ), тогда  $\frac{5}{x} = \frac{15}{y}$ , или  $\frac{5}{12} = \frac{15}{y}$ , откуда  $y = \frac{12 \cdot 15}{5} = 36$ . Значит,  $ME = x = 12$ ,  $CE = y = 36$ .

Ответ:  $ME = 12$ ;  $CE = 36$ .

7.  $\triangle KRO \sim \triangle OLM$  (по двум углам), тогда  $\frac{x}{y} = \frac{OL}{OM}$ , где  $OL = 12$  и  $OM = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20$ , значит,  $\frac{x}{y} = \frac{12}{20}$ , или  $\frac{x}{y} = \frac{3}{5}$ .

Кроме того,  $\frac{KR}{RO} = \frac{OL}{OM}$ , или  $\frac{x}{24} = \frac{12}{16}$ , откуда  $x = \frac{24 \cdot 12}{16} = 18$ , тогда  $\frac{18}{y} = \frac{3}{5}$ , т. е.  $y = 30$ .

Итак,  $x = KR = 18$ ,  $y = KO = 30$ .

Ответ:  $x = 18$ ;  $y = 30$ .

8. Поскольку  $DE \parallel AC$ , то  $\triangle BDE \sim \triangle ABC$  (по двум углам), тогда  $\frac{BD}{DE} = \frac{BA}{AC}$ , или  $\frac{x}{10} = \frac{x+7,2}{16}$ , или  $16x = 10(x+7,2)$ , или  $8x = 5x + 36$ ,  $3x = 36$ , откуда  $x = 12$ . Значит,  $BD = 12$ .

Аналогично  $\frac{y}{10} = \frac{y+7,8}{16}$ , или  $8y = 5(y+7,8)$ , или  $3y = 39$ ,  $y = 13$ , т. е.  $BE = 13$ .

Ответ:  $x = 12$ ;  $y = 13$ .

9. Так как  $ST \parallel KL$ , то  $\triangle MST \sim \triangle MKL$  (по II признаку подобия), тогда  $\frac{MK}{ML} = \frac{MS}{MT}$ , или  $\frac{5+x}{6} = \frac{5}{4}$ ;  $2(5+x) = 15$ , или  $2x = 15 - 10 = 5$ ,  $x = 2,5$ , т. е.  $SK = 2,5$ .

Ответ: 2,5.

10. По условию задачи  $\triangle ABD \sim \triangle AEC$ , тогда  $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD}$ , или  $\frac{32}{20} = \frac{x}{16}$ , или  $\frac{8}{5} = \frac{x}{16}$ , откуда  $5x = 128$ ,  $x = 25,6$ , т. е.  $AE = 25,6$ .

Ответ: 25,6.

11. Так как  $MK$  — биссектриса  $\angle OMN$  (по условию), то  $\frac{x}{y} = \frac{8}{16}$ , или  $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ , откуда  $y = 2x$ . Кроме того,  $ON = 12$ , или  $x + y = 12$ , тогда получим  $x + 2x = 12$ ,  $3x = 12$ ,  $x = 4$ ,  $y = 4 \cdot 2 = 8$ .

Значит,  $OK = x = 4$ ,  $KN = y = 8$ .

Ответ:  $x = 4$ ;  $y = 8$ .

12. Заметим, что  $\triangle BDE \sim \triangle ABC$  (по I признаку), так как  $\angle B$  — общий и  $\angle DEB = \angle A$  (по условию). Из подобия треугольников следует  $\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BE}$ , или  $\frac{24}{12+x} = \frac{12}{8}$ , или  $\frac{2}{12+x} = \frac{1}{8}$ , или  $12+x = 16$ , откуда  $x = 4$ , т. е.  $AD = 4$ .

Ответ:  $x = 4$ .

13.  $\triangle BDC \sim \triangle ABC$  — как прямоугольные, имеющие общий  $\angle B$ , тогда  $\frac{CD}{BD} = \frac{AD}{CD}$ , или  $\frac{x}{18} = \frac{32}{x}$ , или  $x^2 = 18 \cdot 32$ , откуда  $x = \sqrt{18 \cdot 32} = \sqrt{9 \cdot 2 \cdot 16 \cdot 2} = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ .

Из  $\triangle CDA$  по теореме Пифагора находим  $y^2 = x^2 + 32^2$ , или  $y^2 = 24^2 + 32^2$ ,  $y^2 = 1600$ , откуда  $y = 40$ . Итак,  $CD = x = 24$ ,  $AC = y = 40$ .

Ответ:  $x = 24$ ;  $y = 40$ .

Замечание. Можно рассмотреть подобие  $\triangle CDB$  и  $\triangle ADC$ .

**14.** Так как  $PK \parallel MN$ , то  $\angle PKF = \angle FEM$  — как накрест лежащие. Кроме того,  $\angle PFK = \angle EFM$  — как вертикальные.

Значит,  $\triangle FEM \sim \triangle PFK$  (по I признаку), тогда  $\frac{x}{8} = \frac{40}{16}$ , или  $x = 20$ .  
 $\frac{8}{y} = \frac{16}{32}$ , или  $\frac{8}{y} = \frac{1}{2}$ , откуда  $y = 16$ . Итак,  $x = EF = 20$  и  $y = EM = 16$ .

Ответ:  $x = 20$ ;  $y = 16$ .

**15.** Поскольку  $CB \parallel DA$ , то  $\angle CBF = \angle FED$  (как накрест лежащие) и  $\angle CFB = \angle EFD$  (как вертикальные), значит,  $\triangle CFB \sim \triangle FED$  (по I признаку), тогда  $\frac{x}{y} = \frac{10}{4}$ , или  $\frac{x}{y} = \frac{5}{2}$ , откуда  $2x = 5y$ .

Кроме того,  $CD = AB = x + y = 16$ .

Имеем систему уравнений  $\begin{cases} 2x = 5y, \\ x + y = 16, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 5(16 - x), \\ y = 16 - x, \end{cases} \quad \begin{cases} 7x = 80, \\ y = 16 - x, \end{cases}$

$x = \frac{80}{7}$ , тогда  $y = 16 - \frac{80}{7} = \frac{112 - 80}{7} = \frac{32}{7}$ . Значит,  $CF = x = \frac{80}{7} = 11\frac{2}{7}$

и  $FD = y = \frac{32}{7} = 4\frac{4}{7}$ .

Ответ:  $x = 11\frac{2}{7}$ ;  $y = 4\frac{4}{7}$ .

**16.**  $AB \parallel DC$  (по условию), значит,  $ABCD$  — трапеция, тогда  $\angle ABO = \angle ODC$  (как накрест лежащие) и  $\angle AOB = \angle DOC$  (как вертикальные), значит,  $\triangle AOB \sim \triangle DOC$  (по I признаку).

Следовательно,  $\frac{x}{4,8} = \frac{OC}{12}$ , или  $\frac{x}{0,4} = OC$ ; но  $OC = AC - AO = 7,5 - x$ ,

тогда  $x = 0,4(7,5 - x)$ , или  $1,4x = 3$ , откуда  $x = \frac{15}{7} = 2\frac{1}{7}$ .

Значит,  $AO = x = 2\frac{1}{7}$ .

Ответ:  $2\frac{1}{7}$ .

**17.** В  $\triangle NTK$   $\angle NTK = 90^\circ$ , тогда  $KN^2 = 12^2 + 16^2$ , или  $KN^2 = 400$ ,  $KN = 20$ , значит,  $KM = KN + NM = 20 + 8 = 28$ .

Заметим, что  $\triangle KTN \sim \triangle KMP$  (как прямоугольные, имеющие общий угол  $K$ ), тогда  $\frac{28}{x} = \frac{12}{16}$ , или  $\frac{28}{x} = \frac{3}{4}$ , откуда  $x = 37\frac{1}{3}$ , т. е.  $MP = 37\frac{1}{3}$ .

Ответ:  $37\frac{1}{3}$ .

**18.**  $AB \parallel DC$ , значит,  $ABCD$  — трапеция, тогда  $\triangle DOC \sim \triangle AOB$  (по I признаку; см. № 16), где  $O$  — точка пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$ .



Значит,  $\frac{x}{y} = \frac{DC}{AB}$ , где  $DC = 12$  и  $AB = 18$ , или  $\frac{x}{y} = \frac{12}{18}$ ;  $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ .

По условию задачи  $x + y = 20$ . Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3}, \\ x + y = 20, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 2y, \\ y = 20 - x, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 2(20 - x), \\ 5x = 40, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8, \\ y = 20 - 8 = 12. \end{cases}$$

Значит,  $MO = x = 8$ ,  $ON = y = 12$ .

Ответ:  $x = 8$ ;  $y = 12$ .

19. По условию  $RKLN$  — параллелограмм, тогда  $\triangle QKL \sim \triangle QRM$  (по I признаку), так как  $\angle Q$  — общий и  $\angle QKL = \angle QRM$  (как накрест лежащие), значит,  $\frac{QK}{KL} = \frac{QR}{RM}$ , где  $QK = 14$ ,  $KL = RN = 12$ ,  $QR = 14 + 10 = 24$  и  $RM = 12 + x$ .

Тогда  $\frac{14}{12} = \frac{24}{12+x}$ , или  $7(12+x) = 144$ ,  $7x = 60$ ;  $x = \frac{60}{7} = 8\frac{4}{7}$ .

Итак,  $NM = x = 8\frac{4}{7}$ .

Ответ:  $8\frac{4}{7}$ .

20.  $\triangle BOC \sim \triangle AOD$  (см. № 16), тогда  $\frac{x}{6} = \frac{y}{14}$ , или  $7x = 3y$ . Кроме того,

$BD = 32$  см, или  $x + y = 32$ . Имеем систему уравнений  $\begin{cases} x + y = 32, \\ 7x = 3y. \end{cases}$

Решая способом подстановки, находим  $x = 9,6$ ;  $y = 22,4$ .

Значит,  $BO = x = 9,6$ ;  $OD = y = 22,4$ .

Ответ:  $x = 9,6$ ;  $y = 22,4$ .

21. Так как  $BC \parallel DE$ , то  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  (по I признаку). Кроме того,  $AB : BD = 2 : 1$ , тогда  $AD : AB = 3 : 2$  и  $\frac{24}{x} = \frac{3}{2}$ , откуда  $x = 16$ .

Значит,  $BC = 16$ .

Ответ:  $x = 16$ .

22. По условию  $MNPT$  — параллелограмм, тогда  $\triangle KNP \sim \triangle KML$  (см. № 19).

Значит,  $\frac{MK}{ML} = \frac{NK}{NP}$ , где  $MK = 18$ ,  $ML = 12$ ,  $NK = 18 - MN = 18 - x$ ,

$NP = MT = y$ , тогда  $\frac{18}{12} = \frac{18-x}{y}$ , или  $\frac{3}{2} = \frac{18-x}{y}$ .

Кроме того,  $x : y = 3 : 1$  (по условию), или  $x = 3y$ , тогда  $\frac{3}{2} = \frac{18-3y}{y}$ , или  $3y = 36 - 6y$ ;  $9y = 36$ ;  $y = 4$  и  $x = 3y = 12$ .

Итак,  $x = MN = 12$ ;  $y = MT = 4$ .

Ответ:  $x = 12$ ;  $y = 4$ .

**23.** Так как  $TE \parallel SF$ , то  $STEF$  — параллелограмм, тогда  $\triangle TOE \sim \triangle SOF$  (см. № 16).

По условию  $P_{\triangle TOE} : P_{\triangle SOF} = 2 : 3$ .

Известно, что отношение периметров двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия (см. № 547 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

Значит,  $\frac{P_{\triangle TOE}}{P_{\triangle SOF}} = \frac{2}{3} = k = \frac{x}{y}$ , где  $x = TO$ ,  $y = OF$ . Кроме того,  $x + y = 10$

(по условию).

Имеем систему уравнений 
$$\begin{cases} x + y = 10, \\ \frac{x}{y} = \frac{2}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 10 - x, \\ 3x = 2y, \end{cases}$$

$2(10 - x) = 3x$ , или  $5x = 20$ ,  $x = 4$ , тогда  $y = 10 - 4 = 6$ .

Значит,  $x = TO = 4$ ;  $y = OF = 6$ .

Ответ:  $x = 4$ ;  $y = 6$ .

**24.** Пусть  $\angle E = \angle 4$ , тогда в  $\triangle MEL$   $\angle 1 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ ;  $\angle MLF = \angle 5$ , тогда  $\angle 5 = \angle 1 + \angle 4 = 180^\circ - \angle 3$ ;  $\angle F = 180^\circ - (\angle 2 + \angle 5) = 180^\circ - (\angle 2 + 180^\circ - \angle 3) = \angle 3 - \angle 2$ .

Так как  $\angle 3 = \angle 1 + \angle 2$  (по условию), то  $\angle F = \angle 1 + \angle 2 - \angle 2 = \angle 1$ , значит,  $\triangle EML \sim \triangle MEF$  (по I признаку), тогда  $\frac{EL}{EM} = \frac{EM}{EF}$ , или  $\frac{8}{x} = \frac{x}{18}$ ,

или  $x^2 = 8 \cdot 18$ ,  $x = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 9} = 4 \cdot 3 = 12$ .

Итак,  $ME = x = 12$ .

Ответ: 12.

**25.** По условию задачи  $BD$  — биссектриса  $\angle CBA$ , тогда  $\frac{x}{y} = \frac{6}{12}$ , или

$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ , откуда  $y = 2x$ . Кроме того, по условию  $\angle B = 2 \angle A$ , тогда  $\angle A = \angle ABD$ , т. е.  $\triangle ABD$  — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника), значит,  $AD = BD = 12$ .

Заметим, что  $\triangle CBD \sim \triangle ABC$  (по I признаку),  $\angle C$  — общий,  $\angle ABD = \angle A = \angle CBD$ , тогда  $\frac{BC}{AC} = \frac{CD}{BC}$ , или  $x^2 = 18 \cdot 6$ , откуда  $x = 6\sqrt{3}$ ,  $y = 2x = 12\sqrt{3}$ .

Ответ:  $x = 6\sqrt{3}$ ;  $y = 12\sqrt{3}$ .

**26.** Так как по условию  $\angle M = \angle C$  и  $\angle N = \angle A$ , то  $\triangle KMN \sim \triangle ABC$  (по I признаку), тогда  $\frac{x}{4} = \frac{7}{8}$ , откуда  $x = \frac{7}{2} = 3,5$ .

Аналогично  $\frac{y}{4} = \frac{x+4}{8}, y = \frac{x+4}{2} = \frac{7,5}{2} = 3,75.$

Итак,  $KM = x = 3,5; MN = y = 3,75.$

Ответ:  $x = 3,5; y = 3,75.$

27. По условию  $MQ \parallel LN$ , тогда  $\angle M = \angle N$  и  $\angle Q = \angle L$  (как накрест лежащие), значит,  $\triangle MOQ \sim \triangle LON$  (по I признаку), тогда  $\frac{x}{y} = \frac{30}{10} = 3$ , т. е.

$x = 3y$ . Так как  $x + y = 48$ , то  $3y + y = 48$ , или  $4y = 48; y = 12$ , тогда  $x = 3 \cdot 12 = 36$ .

Значит,  $MQ = x = 36; LN = y = 12.$

Ответ:  $x = 36; y = 12.$

28. Так как  $BC \parallel AD$ , то  $ABCD$  — трапеция, тогда  $\triangle BOC \sim \triangle AOD$  (по I признаку), следовательно,  $\frac{x}{y} = k$ , где  $k$  — коэффициент подобия. По условию  $S_{\triangle BOC} : S_{\triangle AOD} = 1 : 9$ .

Известно, что отношение двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия (см. п. 58 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.), значит,  $\frac{S_{\triangle BOC}}{S_{\triangle AOD}} = k^2 = \frac{1}{9}$ , откуда  $k = k = \frac{1}{3}$ , и так

как  $\frac{x}{y} = k$ , то  $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$ , тогда  $y = 3x$ .

Но  $x + y = 9,6$  (по условию), тогда  $3x + x = 9,6$ , или  $4x = 9,6$ , откуда  $x = 2,4$  и  $y = 3 \cdot 2,4 = 7,2$ .

Итак,  $BC = x = 2,4; AD = y = 7,2.$

Ответ:  $x = 2,4; y = 7,2.$

К таблице 15

## ПРИЗНАКИ ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Укажите пары подобных треугольников и докажите их подобие.

1.  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$  (по I признаку подобия треугольников), так как  $\angle A$  — общий и  $\angle ADE = \angle ABC$  (по условию).

2.  $\triangle EOF \sim \triangle MON$  (по I признаку), так как  $\angle OEF = \angle ONM$  (по условию) и  $\angle EOF = \angle MON$  (как вертикальные).

3.  $\triangle MKN \sim \triangle MKT$  (по I признаку), так как  $\angle M$  — общий,  $\angle MKN = \angle KTM = 90^\circ$  (по условию).

Аналогично  $\triangle MKN \sim \triangle KTN$ , так как  $\angle N$  — общий и  $\angle MKN = \angle KTN = 90^\circ$  (по условию), тогда  $\angle M = \angle TKN$ .

Наконец  $\triangle MKT \sim \triangle KTN$  также по I признаку ( $\angle MTK = \angle KTN = 90^\circ$  и  $\angle M = \angle TKN$ ).

4. Так как  $ABCD$  — трапеция (по условию), то  $BC \parallel AD$ , значит,  $\angle ACB = \angle CAD$  (как накрест лежащие). Кроме того, по условию  $\angle BAC = \angle ADC$ , тогда  $\triangle ABC \sim \triangle ACD$  (по I признаку).

5. По условию задачи  $\angle R = \angle M = \angle K = \angle Q$ .

Значит,  $\triangle RTM \sim \triangle QKL$  по двум углам, т. е. по I признаку.

6.  $\angle S = \angle MFE$  (по условию) и  $\angle E$  — общий.

Значит,  $\triangle SFE \sim \triangle EFM$  (по I признаку).

7.  $\triangle MNO \sim \triangle QOP$  (по I признаку), где  $O$  — точка пересечения диагоналей  $MP$  и  $NQ$ ,  $\angle MNO = \angle OQP$  (по условию) и  $\angle NOM = \angle QOP$  — как вертикальные.

8. Так как  $FDEP$  — параллелограмм (по условию), то  $DE \parallel FB$  и  $FD \parallel BE$  (по определению).

Тогда  $\angle CDE = \angle A$  и  $\angle CED = \angle B$  (как соответственные), значит,  $\triangle DEC \sim \triangle ABC$  (по двум углам, т. е. по I признаку подобия). Аналогично  $\triangle ADF \sim \triangle ACB$  и  $\triangle ADF \sim \triangle DEC$ .

*Замечание.* Можно использовать и II признак подобия.

9.  $\triangle LPK \sim \triangle FST$  (по II признаку подобия), так как  $PL = PK$ ,  $FS = ST$  и  $\angle P = \angle S$ .

10. Поскольку  $\angle A = 180^\circ - (\angle M + \angle K) = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$  и  $\angle C = 60^\circ$ , то  $\triangle AMK \sim \triangle BRC$  (по двум углам, т. е. по I признаку подобия).

11. В  $\triangle ABC$   $\angle A = 90^\circ - \angle B = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$  и  $\angle C = \angle K = 90^\circ$  (по условию), тогда  $\triangle ABC \sim \triangle MKN$  (по I признаку подобия).

12. Так как  $MK = KN$ , то  $\triangle MKN$  — равнобедренный (по определению). По условию задачи  $\angle LMK = 130^\circ$ , тогда  $\angle NMK = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ = \angle N$ .

Значит,  $\angle K = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ = \angle B$ .

Следовательно,  $\triangle MKN \sim \triangle ABC$  по II признаку подобия.

13. Заметим, что  $\angle C = \angle N = 70^\circ$  (по условию) и  $\frac{AC}{MN} = \frac{CB}{NK}$ , тогда  $\triangle ABC \sim \triangle NMK$  (по II признаку подобия).

14. Аналогично № 13  $\angle T = \angle S = 30^\circ$  и  $\frac{QT}{NS} = \frac{RT}{MS} \Rightarrow \triangle QRT \sim \triangle NMS$  (по II признаку подобия).

15. Так как треугольники равносторонние (по условию), то они подобны по III признаку подобия.

16. В  $\triangle ABC$   $AB = BC = 10$  (по условию) и  $AC = 8$  (по условию); в  $\triangle A_1B_1C_1$   $A_1B_1 = B_1C_1 = 5$  и  $A_1C_1 = 4$  (по условию). Выходит, что стороны  $\triangle ABC$  пропорциональны сторонам  $\triangle A_1B_1C_1$ , т. е. они подобны по II признаку подобия.

**17.** В  $\triangle MPN$   $MP = PN = 12$  (по условию), т. е.  $\triangle MPN$  — равнобедренный, тогда  $\angle M = \angle N = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$ . В  $\triangle M_1P_1N_1$   $P_1N_1 = M_1N_1$  и  $\angle M_1 = 70^\circ$ , тогда  $\angle P_1 = \angle M_1 = 70^\circ$  и  $\angle N_1 = 40^\circ$ .

Значит,  $\triangle MPN \sim \triangle P_1N_1M_1$  (по II признаку подобия).

**18.** Так как  $\frac{SF}{MK} = \frac{FE}{KN} = \frac{SE}{MN} = \frac{10}{3}$ , то  $\triangle SFE \sim \triangle MKN$  (по III признаку подобия).

**19.** Пусть  $c$  — гипотенуза первого треугольника, тогда по теореме Пифагора  $c^2 = 9^2 + 12^2$ ,  $c^2 = 225$ ,  $c = 15$ .

Пусть  $a$  — катет второго треугольника, тогда  $a^2 = 10^2 - 6^2$ ,  $a^2 = 64$ , откуда  $a = 8$ .

Так как  $\frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10}$ , т. е. стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого, то треугольники подобны по III признаку подобия.

**20.** В  $\triangle ABC$   $\angle B = 40^\circ$  и  $\angle C = 90^\circ$  (по условию), тогда  $\angle A = 90^\circ - \angle B = 50^\circ$ . В  $\triangle A_1B_1C_1$   $\angle A_1 = 50^\circ$  и  $\angle C_1 = 90^\circ$  (по условию), тогда  $\angle B_1 = 40^\circ$ .

Выходит, что  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$  по III признаку подобия.

**21.** В  $\triangle RSM$   $\angle S = 90^\circ$ ,  $SM = 3$ ,  $RM = 5$ , тогда  $SR = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ; в  $\triangle NKL$   $KL = \sqrt{15^2 - 12^2}$ ,  $KL = \sqrt{81} = 9$ . Так как  $\frac{SR}{KN} = \frac{SM}{KL} = \frac{MR}{LN} = \frac{1}{3}$ , то  $\triangle RSM \sim \triangle NKL$  по III признаку подобия.

**22.** По условию  $PS = SA$  и  $OK = AK$ .

Кроме того,  $\angle A$  — общий, тогда  $\frac{SA}{KA} = \frac{PA}{OA}$ . Значит,  $\triangle AKS \sim \triangle AOP$  по II признаку подобия.

**23.**  $\triangle BEF \sim \triangle BCA$  (по I признаку подобия), так как  $\angle B$  — общий и  $\angle BFE = \angle C = 90^\circ$ .

**24.** Так как  $MNFE$  — параллелограмм, то  $NF \parallel ME$  и  $MN \parallel EF$  (по определению), тогда  $\angle N = \angle RFE$ ,  $\angle R$  — общий, значит,  $\triangle MNR \sim \triangle RFK$  (по I признаку подобия), где  $K$  — точка пересечения  $FE$  и  $MR$ .

Аналогично  $\triangle MKE \sim \triangle FKR$  (по I признаку).

**25.**  $\triangle ACE \sim \triangle ADB$  (по I признаку подобия), так как  $\angle A$  — общий и  $\angle AEC = \angle ADB = 90^\circ$  (по условию). Аналогично  $\triangle COD \sim \triangle EOB$  (по I признаку), где  $O$  — точка пересечения  $CE$  и  $BD$ .

**26.** Так как  $EKFQ$  — прямоугольник (по условию), то  $EK \parallel QF$  и  $EQ \parallel KF$ , тогда  $\triangle NEK \sim \triangle NQM$  (по I признаку подобия).

Аналогично  $\triangle MFK \sim \triangle MQN$  и  $\triangle NEK \sim \triangle MFK$ .

## СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА

1. Так как  $M$  — середина  $AB$ ,  $N$  — середина  $BC$  и  $K$  — середина  $AC$ , то  $MN$ ,  $NK$  и  $MK$  — средние линии  $\triangle ABC$  (по определению), тогда  $MN = \frac{1}{2}AC$ ,  $NK = \frac{1}{2}AB$ ,  $MK = \frac{1}{2}BC$ .

Значит,  $P_{\triangle MNK} = MN + NK + MK = \frac{1}{2}(AC + BC + AB) = \frac{1}{2}(20 + 18 + 16) = 27$ , где  $AC = 20$ ,  $BC = 18$  и  $AB = 16$  (по условию задачи).

Ответ: 27.

2. Аналогично № 1  $EF = \frac{1}{2}KL$ ,  $ET = \frac{1}{2}ML$ ,  $FT = \frac{1}{2}KM$ . Тогда  $P_{\triangle ETF} = EF + ET + FT = \frac{1}{2}(KL + KM + ML) = \frac{1}{2} \cdot P_{\triangle KML} = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$ .

Ответ: 12.

3. Так как  $FSMN$  — прямоугольник, то  $FM = SN$  (по свойству). Точка  $O$  — середина диагоналей  $SN$  и  $FM$ , тогда  $OF = ON$ , т. е.  $\triangle FON$  — равнобедренный, где  $OK$  — высота (по условию)  $\Rightarrow OK$  — медиана  $\triangle FON$ , значит,  $OK$  — средняя линия  $\triangle SFN$ , и так как  $OK = 24$  (по условию), то  $SF = 2 \cdot OK = 48$ .

Ответ: 48.

4. По условию задачи в прямоугольнике  $ABCD$   $F$ ,  $M$ ,  $N$  и  $E$  — середины соответствующих сторон, тогда  $\triangle BEF = \triangle CFM = \triangle MDN = \triangle EAN$  (по двум катетам), тогда  $EF = FM = MN = EN$ , т. е.  $EFMN$  — ромб. Так как  $CD = 30$  и  $\angle ACD = 60^\circ$ , то  $\angle CAD = 30^\circ \Rightarrow CD = \frac{1}{2}AC$ , т. е.  $AC = 2CD = 60$ .

Но  $EF$  — средняя линия  $\triangle ABC$ , тогда  $EF = \frac{1}{2}AC = 30$ , значит,  $P_{EFMN} = 4 \cdot EN = 120$ .

Ответ: 120.

5. Так как  $KE = EM$  и  $MF = FL$ , то  $EF$  — средняя линия  $\triangle KML$ , т. е.  $EF = \frac{1}{2}KL$ .

$P_{\triangle KLM} = KM + ML + KL = 2ME + 2MF + 2EF = 2(ME + MF + EF) = 2P_{\triangle MEF} = 31 \cdot 2 = 62$ .

Ответ: 62.

**6. Проведем  $BF \parallel MD$ .**

Так как  $BM \parallel FD$ , то  $MBFD$  — параллелограмм, т. е.  $MB = FD$ .

Но  $MB = AM$  (по условию),  $AB = CD$  (по свойству параллелограмма), тогда  $FD = MB = FC$ . Так как  $BM = MA$ , то  $AK = KE$  (по теореме Фалеса). Аналогично из того, что  $CF = FD \Rightarrow CE = KE$ .

Значит,  $AK = KE = EC$ , и так как  $AC = 18$ , то  $AK = 18 : 3 = 6$ , тогда  $KC = 18 - 6 = 12$ .

**Ответ:** 6 и 12.

**7.** Из условия  $\Rightarrow$ , что  $MN$  — средняя линия  $\triangle RSF$ , и так как  $MN = 4$ , то  $RS = 2MN = 8$ . Но  $RF = SF$  и  $P_{\triangle RFS} = 30$ , тогда  $2RF + RS = 30$ , или  $2RF = 30 - 8 = 22$ , откуда  $RF = 11$ .

**Ответ:**  $RS = 8$ ;  $RF = 11$ .

**8.  $P_{ABCD} = 2(AD + AB)$ .**

Так как  $E$  — середина  $AD$ , то  $AE = ED = 3$ .  $O$  — середина  $AC \Rightarrow EO$  — средняя линия  $\triangle ABD$ , тогда  $AB = 2EO = 8$ , значит,  $P_{ABCD} = 2(6 + 8) = 28$ .

**Ответ:** 28.

**9.** Так как в трапеции  $ABCD$   $BC = 12$  и  $AD = 2BC$ , то  $AD = 24$ . По условию  $K$  — середина  $BM$  и  $L$  — середина  $MC$ , тогда  $KL$  — средняя линия  $\triangle MBC$ , значит,  $EF$  — средняя линия трапеции ( $BE = EA$  и  $CF = FD$  по теореме Фалеса), следовательно,  $EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(24 + 12) = 18$ .

**Ответ:** 18.

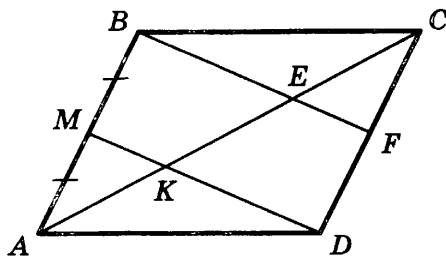
**10.** По условию задачи  $\triangle MNQ$  — равносторонний, где  $MN = 18$ , тогда  $MT = TQ = 9$ . В  $\triangle NTQ$   $F$  — середина  $NQ$  и  $FE \perp NT$ .

Так как  $NT \perp TQ$ , то  $EF \parallel TQ$ , тогда  $E$  — середина  $NT$  (по теореме Фалеса), значит,  $EF$  — средняя линия  $\triangle NTQ$  и  $EF = \frac{1}{2}TQ = \frac{9}{2}$ .

Из  $\triangle NEF$  по теореме Пифагора находим

$$NE^2 = NF^2 - EF^2, \text{ или } NE^2 = 81 - \frac{81}{4} = 81 \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right), \text{ откуда}$$

$$NE = 9\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}. \text{ Но } NT = NQ \cos \angle TNQ, \text{ или } NT = 18 \cdot \cos 30^\circ = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}.$$



$$\text{Тогда } ET = NT - NE = 9\sqrt{3} - \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

**11.** Точки  $E$ ,  $M$  и  $N$  — соответственно середины сторон  $BC$ ,  $AC$  и  $AB$   $\triangle ABC$ , где  $\angle C = 90^\circ$  и  $\angle A = 30^\circ$ . Так как  $BC = 6$ , то  $AB = 12$ , тогда в  $\triangle ABC$   $\operatorname{tg} \angle A = \frac{BC}{AC}$ , откуда  $AC = \frac{6}{\operatorname{tg} 30^\circ} = 6 \operatorname{ctg} 30^\circ = 6\sqrt{3}$ . Значит,  $EN = \frac{1}{2}AC = 3\sqrt{3}$ ,  $EM = \frac{1}{2}AB = 6$  и  $MN = \frac{1}{2}BC = 3$ , тогда  $P_{\triangle MEN} = ME + EN + MN = 6 + 3\sqrt{3} + 3 = 9 + 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)$ .

$$\text{Ответ: } 3\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1).$$

**12.** Так как  $E$  — середина  $AB$  и  $F$  — середина  $BC$ , то  $EF$  — средняя линия  $\triangle ABC$ , тогда  $EF = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 48 = 24$ . Аналогично,  $MN$  — средняя линия  $\triangle ADC$ , тогда  $MN = \frac{1}{2}AC = 24$ .

$$\text{Ответ: } EF = MN = 24.$$

*Замечание.* Известно, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма (см. № 567 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.), тогда  $EF = MN = \frac{1}{2}AC = 24$ .

**13.** В  $\triangle MEN$   $KL$  — средняя линия, так как  $K$  — середина  $ME$  и  $L$  — середина  $EN$ , тогда  $KL = \frac{1}{2}MN$ . По условию  $MN - KL = 6$ , значит,  $MN - \frac{1}{2}MN = 6$ , или  $\frac{1}{2}MN = 6$ , откуда  $MN = 12$ .

$$\text{Ответ: } 12.$$

**14.** Так как  $ABCD$  — квадрат и  $BM = BN$ , то  $\triangle MBN$  — равнобедренный и прямоугольный, тогда  $\angle BMN = \angle BNM = 45^\circ$ . Кроме того,  $\triangle MBN = \triangle NCK = \triangle KDP = \triangle MAP$  (по двум катетам), значит,  $MN = NK = KP = PM$ , т. е.  $MNKP$  — ромб (по определению), где  $\angle MNK = \angle NKP = \angle KPM = \angle PMN = 90^\circ$ , следовательно, ромб  $MNKP$  — квадрат.

Пусть  $AB = 2x$ , тогда из  $\triangle ABC$   $AC = AB\sqrt{2} = 2x\sqrt{2}$ , тогда  $MN = \frac{1}{2}AC = x\sqrt{2}$  (средняя линия  $\triangle ABC$ ).



Следовательно,  $\frac{S_{MNKP}}{S_{ABCD}} = \frac{(MN)^2}{(AB)^2} = \frac{(x\sqrt{2})^2}{(2x)^2} = \frac{2x^2}{4x^2} = \frac{1}{2} = 0,5$ .

Ответ: 0,5.

**15.** Так как в  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$  и  $\angle B = 45^\circ$ , то  $\angle A = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ , т. е.  $BC = AC$ .

По условию  $AB = 16$ , тогда по теореме Пифагора имеем  $AC^2 + BC^2 = 16^2$ , или  $2AC^2 = 16^2$ ,  $\sqrt{2} AB = 16$ ,  $AC = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}$ .

Отрезки  $MN$ ,  $NK$  и  $MK$  — средние линии  $\triangle ABC$ , тогда  $MN = \frac{1}{2}AC$ ,  $NK = \frac{1}{2}BC$ ,  $MK = \frac{1}{2}AB$ .

Значит,  $P_{\triangle MNK} = MN + NK + MK = \frac{1}{2}(AC + BC + AB) = \frac{1}{2}(8\sqrt{2} + 8\sqrt{2} + 16) = \frac{1}{2}(16\sqrt{2} + 16) = 8(1 + \sqrt{2})$ .

Ответ:  $8(1 + \sqrt{2})$ .

**16.** Пусть  $MR = 3x$ , тогда  $MS = 6x$ ,  $RS = 4x$ .

Так как  $K$  — середина  $MR$  и  $L$  — середина  $MS$ , то  $KL$  — средняя линия  $\triangle MRS$ , тогда  $KL = \frac{1}{2}RS = 2x$ . Аналогично  $LF = \frac{1}{2}MR = \frac{3}{2}x$  и  $KF = \frac{1}{2}MS = 3x$ . По условию  $P_{\triangle KLF} = 10,4$ , или  $KL + LF + KF = 10,4$ ;  $2x + \frac{3}{2}x + 3x = 10,4$ ;  $\frac{13}{2}x = 10,4$ ;  $13x = 20,8$ ,  $x = 1,6$ .

Значит,  $MR = 3x = 1,6 \cdot 3 = 4,8$ ;  $MS = 6x = 1,6 \cdot 6 = 9,6$ ;  $RS = 4x = 6,4$ .

Ответ:  $MR = 4,8$ ;  $MS = 9,6$ ;  $RS = 6,4$ .

**17.** Пусть  $TL = 4x$ , тогда  $LM = 3x$  и  $TM = 5x$ .

По условию  $P_{\triangle TLM} = 60$ , или  $4x + 3x + 5x = 60$ ,  $12x = 60$ ,  $x = 5$ .

Значит,  $TL = 4x = 20$ ,  $LM = 3x = 15$  и  $TM = 5x = 25$ , тогда  $FE = \frac{1}{2}TM = 12,5$  (см. № 16),  $EC = \frac{1}{2}TL = 10$ ,  $FC = \frac{1}{2}LM = 7,5$ .

Ответ:  $FE = 12,5$ ;  $EC = 10$ ;  $FC = 7,5$ .

## ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Найдите неизвестные линейные элементы  $\triangle MNK$  ( $\angle K = 90^\circ$ ).

1. Так как  $\angle MKN = 90^\circ$ ,  $MK = 10$  и  $MN = 26$ , то по теореме Пифагора имеем  $KN^2 = 26^2 - 10^2$ ,  $KN^2 = (26 - 10)(26 + 10)$ ,  $KN = \sqrt{16 \cdot 36} = 4 \cdot 6 = 24$ .

Так как  $MT$  — проекция катета  $MK$  на гипотенузу  $MN$ , то  $MK^2 = MN \cdot MT$ , откуда  $MT = \frac{MK^2}{MN} = \frac{10^2}{26} = \frac{50}{13}$ , тогда  $TN = MN - MT = 26 - \frac{50}{13} = \frac{288}{13}$ .

Ответ:  $KN = 24$ ;  $MT = \frac{50}{13}$ ;  $TN = \frac{288}{13}$ .

2. Пусть  $NL = x$ ,  $LM = y$ . Так как  $MN = 25$ , то  $x + y = 25$ . По свойству перпендикуляра  $KL$ , опущенного из вершины прямого  $\angle NKM$  на гипотенузу  $MN$ , имеем  $KL^2 = NL \cdot LM$ , или  $xy = 144$ . Получим систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 25, \\ xy = 144, \end{cases} \text{ откуда по теореме, обратной теореме Виета, находим } \begin{cases} x = 9, \\ y = 16, \end{cases} \begin{cases} x = 16, \\ y = 9. \end{cases}$$

Если  $x < y$ , т. е.  $NL < LM$  (см. рис. к задаче), то  $NL = 9$ ,  $LM = 16$ .

Из  $\triangle NLK$   $NK = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15$ ;

из  $\triangle KLM$   $KM = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20$ .

Ответ:  $NL = 9$ ;  $LM = 16$ ;  $NK = 15$ ;  $KM = 20$ .

3. Из  $\triangle KEN$ , где  $KE = 6$ ,  $EN = 8$  и  $\angle KEN = 90^\circ$ , находим  $KN^2 = 6^2 + 8^2$ ,  $KN = 10$ .

По свойству перпендикуляра  $KE$ , опущенного на гипотенузу  $MN$   $\triangle MKN$ , имеем  $KE^2 = ME \cdot EN$ , откуда  $ME = \frac{6^2}{8} = 4,5$ .

Из  $\triangle MEK$   $MK^2 = ME^2 + KE^2$ ,  $MK = \sqrt{4,5^2 + 6^2} = \sqrt{56,25} = 7,5$ .

Ответ:  $ME = 4,5$ ;  $MK = 7,5$ ;  $KN = 10$ .

4. По теореме Пифагора  $MN^2 = 5^2 + 12^2$ ,  $MN = \sqrt{169} = 13$ .

$$MK^2 = MT \cdot MN, \text{ или } 25 = 13MT, MT = \frac{25}{13}, \text{ тогда } TN = MN - MT =$$

$$= 13 - \frac{25}{13} = \frac{169 - 25}{13} = \frac{144}{13}.$$

*Ответ:*  $MT = \frac{25}{13}; TN = \frac{144}{13}.$

**5.** Из  $\triangle MKN$ , где  $MK = 10$ ,  $MN = 25$ , по теореме Пифагора находим:  
 $KN = \sqrt{25^2 - 10^2} = \sqrt{525} = 5\sqrt{21}.$

$$MK^2 = ME \cdot MN, ME = \frac{10^2}{25} = 4, EN = 25 - 4 = 21.$$

*Ответ:*  $KN = 5\sqrt{21}; ME = 4; EN = 21.$

**6.** Пусть в  $\triangle NKM$   $KN = 3x$ , тогда  $KM = 4x$ .

Так как  $MN = 50$ , то получим  $(3x)^2 + (4x)^2 = 50^2$ , или  $25x^2 = 2500$ ;  
 $x^2 = 100$ ,  $x = 10$ . Тогда  $KN = 30$ ,  $KM = 40$ .

$$KN^2 = NF \cdot MN, NF = \frac{30^2}{50} = 18, FM = 50 - 18 = 32.$$

*Ответ:*  $KN = 30; KM = 40; NF = 18; FM = 32.$

**7.** Пусть  $KN = 6x$ , тогда  $KM = 5x$ .

$$\text{Из } \triangle MNK \text{ } MN = \sqrt{(6x)^2 + (5x)^2} = \sqrt{61x^2} = x\sqrt{61}.$$

$$\text{Пусть } MT = a, TN = b, \text{ тогда } MK^2 - MT^2 = KN^2 - TN^2, \text{ или } 25x^2 - a^2 =$$

$$= 36x^2 - b^2, \text{ или } b^2 - a^2 = 11x^2.$$

$$\text{По условию задачи } b - a = 11, \text{ тогда } (b - a)(b + a) = 11x^2, \text{ или } 11(b + a) =$$

$$= 11x^2, b + a = x^2.$$

$$\text{Но } MN = a + b = x\sqrt{61}, \text{ тогда } x^2 = x\sqrt{61}, \text{ откуда } x = \sqrt{61}. \text{ Значит,}$$

$$KM = 5x = 5\sqrt{61}, KN = 6x = 6\sqrt{61}, MN = x\sqrt{61} = \sqrt{61} \cdot \sqrt{61} = 61.$$

$$\text{Итак, } a + b = MN = 61, b - a = 11, \text{ тогда } 2b = 61 + 11, b = 36;$$

$$a = 61 - 36 = 25, \text{ т. е. } MT = 25, TN = 36.$$

*Ответ:*  $KM = 5\sqrt{61}; KN = 6\sqrt{61}; MN = 61; MT = 25; TN = 36.$

**8.** Из  $\triangle MNK$ , где  $MK = 3\sqrt{5}$ ,  $KN = b$  и  $\angle MKN = 90^\circ$ , имеем  $MN^2 =$   
 $= (3\sqrt{5})^2 + 6^2, MN = \sqrt{45 + 36} = \sqrt{81} = 9.$

$$\text{По условию задачи } ME = EN = \frac{1}{2}MN = 4,5.$$

$$KN^2 = FN \cdot MN, FN = \frac{6^2}{9} = 4, MF = 9 - 4 = 5, EF = EN - FN = 4,5 - 4 = 0,5.$$

*Ответ:*  $MN = 9; ME = EN = 4,5; EF = 0,5; FN = 4.$

9. Так как  $\triangle ABD$  — прямоугольный ( $\angle ABD = 90^\circ$ ) и  $BE \perp AD$ , то  $BE^2 = AE \cdot ED$ , или  $36 = 3 \cdot ED$ , откуда  $ED = 12$ , тогда  $AD = AE + ED = 3 + 12 = 15$ .

Значит,  $S_{ABCD} = AD \cdot BE = 15 \cdot 6 = 90$ .

Ответ: 90.

10. Из прямоугольного  $\triangle MNK$  находим

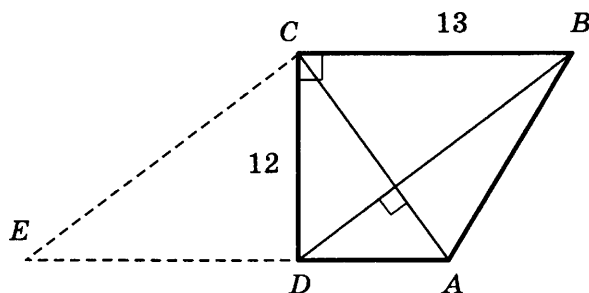
$$MK = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20.$$

Из вершины  $K$   $\triangle MKP$  проведем высоту  $KE$  к основанию  $MP$ . Тогда  $ME = NK = 16$  и  $MK^2 = ME \cdot MP$  (по свойству перпендикуляра  $KE$ ).

$$MP = \frac{20^2}{16} = 25, \text{ значит, } S_{MNKP} = \frac{1}{2}(MP + NK) \cdot MN = \\ = \frac{1}{2}(25 + 16) \cdot 12 = 246.$$

Ответ: 246.

11. Проведем из вершины  $C$  прямую  $\parallel BD$  до пересечения с продолжением  $AD$  в точке  $E$ . Так как  $AC \perp BD$  (по условию) и  $BD \parallel CE$  (по построению), то  $\triangle AEC$  — прямоугольный.



Тогда  $CD^2 = ED \cdot DA$ , где  $CD = 12$ ,  $ED = CB = 13$  ( $CEDB$  — параллелограмм).

$$\text{Значит, } AD = \frac{12^2}{13} = \frac{144}{13}.$$

Ответ:  $\frac{144}{13}$ .

12. Пусть  $ML = x$ , тогда  $MN = 2x$ .

Так как  $\angle MLN = 90^\circ$  (по условию) и  $LT \perp MN$ , то  $ML^2 = MT \cdot MN$ , или  $x^2 = 4 \cdot 2x$ , откуда  $x = 8$ , тогда  $MN = 2x = 16$ . Из  $\triangle MTL$  находим  $LT = \sqrt{x^2 - 4^2}$ ,  $LT = \sqrt{64 - 16} = 4\sqrt{3}$ , тогда  $S_{MNKL} = MN \cdot LT = 16 \cdot 4\sqrt{3} = 64\sqrt{3}$ .

Ответ:  $64\sqrt{3}$ .

**13.** Из  $\triangle NRK$   $NK = \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ .

Так как  $\angle NRK = 90^\circ$  и  $RF \perp NK$ , то  $RN^2 = NF \cdot NK$ , или  $NF = \frac{4^2}{2\sqrt{13}} = \frac{8}{\sqrt{13}}$ , тогда  $FK = NK - NF = 2\sqrt{13} - \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{18}{\sqrt{13}}$ .

По условию  $FE \parallel NM$ , тогда  $FE \perp EK$ , значит,  $\triangle FEK \sim \triangle NMK$  (по двум углам)  $\Rightarrow \frac{KN}{NM} = \frac{KF}{FE}$ , откуда  $FE = \frac{NM \cdot KF}{KN} = \frac{6 \cdot \frac{18}{\sqrt{13}}}{2\sqrt{13}} = \frac{54}{13}$ .

Ответ:  $\frac{54}{13}$ .

**14.** Пусть в ромбе  $ABCD$   $AE = x$ ,  $EB = y$ ,  $EO = h$ ,  $AO = a$ ,  $BO = b$ , тогда  $S_{ABCD} = AB \cdot 2EO = 2(x + y)h$ .

По условию задачи  $S_{\triangle AOE} = 27$ , или  $\frac{1}{2}xh = 27$ , откуда  $xh = 54$ .

Так как  $OE = h \perp AB$ , то из  $\triangle AOB$  по свойству перпендикуляра имеем  $h^2 = xy$ .

Из подобия  $\triangle AOE$  и  $\triangle AOB$  (как прямоугольные, имеющие общий  $\angle OAE$ ) получим

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{h}, \text{ и так как } AC : BD = 3 : 2 \text{ (по условию задачи), то } \frac{a}{b} = \frac{3}{2}, \text{ тогда}$$

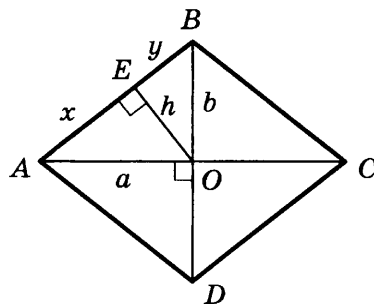
$$\frac{x}{h} = \frac{3}{2}.$$

Имеем систему уравнений 
$$\begin{cases} xh = 54, \\ \frac{x}{h} = \frac{3}{2}, \\ h^2 = xy, \end{cases} \text{ или } xh \cdot \frac{x}{h} = 54 \cdot \frac{3}{2}, x^2 = 81, x = 9,$$

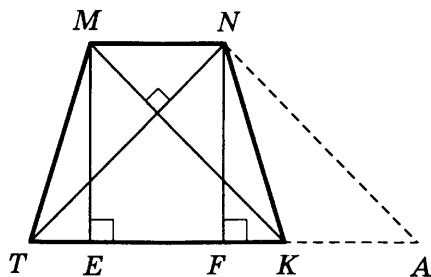
тогда  $h = 54 : x = 6$ , следовательно,  $y = \frac{h^2}{x} = \frac{36}{9} = 4$ .

Значит,  $S_{ABCD} = 2(x + y) \cdot h = 2(9 + 4) \cdot 6 = 156$ .

Ответ: 156.



**15.** Через вершину  $N$  проведем прямую, параллельную  $MK$ , до пересечения с продолжением  $TK$  в точке  $A$ . Так как  $MK \perp TN$  и  $MK \parallel NA$ , то  $\triangle TNA$  — прямоугольный. Заметим, что  $S_{\triangle TNA} = S_{\triangle TMNA}$  ( $\triangle TNK$  — общий, а  $\triangle TMN = \triangle NKA$ , так как основания  $MN$  и  $KA$  равны по построению,



а высота  $ME$  — общая). Пусть  $MN = x$ ,  $TE = y$ . Из  $\triangle MEK$   $EK = \sqrt{15^2 - 9^2} = \sqrt{144} = 12$ ;  $S_{TMNA} = \frac{1}{2}(x + y + 12) \cdot 9$ .

С другой стороны,  $S_{TMNA} = S_{\triangle TNA} = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot TN$ , где  $TN^2 = 81 + (x + y)^2$  (из  $\triangle TNF$ ). Значит,  $\frac{15}{12}TN = \frac{9}{2}(x + y + 12)$ , откуда  $TN = \frac{3}{5}(x + y + 12)$ , тогда  $\frac{9}{25}(x + y + 12)^2 = 81 + (x + y)^2$ , или  $9(x + y + 12)^2 = 2025 + 25(x + y)^2$ , или  $9(x + y)^2 + 216(x + y) + 1296 = 2025 + 25(x + y)^2$ , или  $16(x + y)^2 - 216(x + y) + 729 = 0$ ;  $(4(x + y) - 27)^2 = 0$ .

$$4(x + y) = 27, x + y = 27/4, \text{ тогда } S_{TMNK} = \frac{9}{2} \left( \frac{27}{4} + 12 \right) = \frac{675}{8} = 84,375.$$

Ответ: 84,375.

# СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

Найдите  $x$ .

1.  $\sin \angle B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AC = x = 18 \cdot \sin 60^\circ = 18 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}.$

Ответ:  $9\sqrt{3}.$

2.  $\frac{EF}{TF} = \sin \angle T \Rightarrow TF = x = \frac{16}{\sin 45^\circ} = \frac{16}{1/\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}.$

Ответ:  $16\sqrt{2}.$

3.  $\operatorname{ctg} \angle L = \frac{LN}{KN} \Rightarrow LN = x = 4 \operatorname{ctg} 30^\circ = 4\sqrt{3}.$

Ответ:  $4\sqrt{3}.$

4. Так как  $MK = KN$ , то  $\triangle MNK$  — равнобедренный, где  $\angle MKN = 120^\circ$  (по условию), тогда  $\angle M = \angle MNK = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ \Rightarrow NC = x = \frac{1}{2}MN = 15.$

Ответ: 15.

5. Так как  $\angle M = 90^\circ$  и  $\angle E = 30^\circ$ , то  $MF = x = \frac{1}{2}EF = 5.$

Ответ: 5.

6. По условию  $\angle P = 90^\circ$  и  $AP = PT$ , тогда  $\angle A = \angle T = 45^\circ;$

$\frac{AP}{AT} = \sin \angle T$ , или  $AP = x = 30 \cdot \sin 45^\circ = 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 15\sqrt{2}.$

Ответ:  $15\sqrt{2}.$

Замечание.  $AP = x$  можно найти по теореме Пифагора.

7.  $\frac{ER}{SR} = \operatorname{tg} \angle S; ER = x = 9 \operatorname{tg} 60^\circ = 9\sqrt{3}.$

Ответ:  $9\sqrt{3}.$

8. В  $\triangle ADC$   $\angle ACD = 30^\circ$  и  $\angle ADC = 90^\circ$ , тогда  $\angle A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ . Из  $\triangle ABC$ , где  $\angle C = 90^\circ$  и  $AC = 6$ , имеем  $\frac{CB}{CA} = \operatorname{tg} 60^\circ$ , откуда  $CB = x = 6 \operatorname{tg} 60^\circ = 6\sqrt{3}$ .

Ответ:  $6\sqrt{3}$ .

9.  $AC = BC$  и  $\angle ACB = 90^\circ$  (по условию), тогда  $\angle A = \angle B = 45^\circ$ . Так как  $CD \perp AB$ , то из  $\triangle BDC$   $\frac{CD}{BC} = \sin \angle B$ , или  $\frac{12}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , откуда  $x = 12\sqrt{2}$ , т. е.  $BC = 12\sqrt{2}$ .

Ответ:  $12\sqrt{2}$ .

10. Так как  $\angle LKM = 90^\circ$ ,  $LK = MK$  и  $KE \perp LM$ , то в  $\triangle LEK$   $\angle L = \angle LKE = 45^\circ$ , тогда  $KE = LE = 6$ .

Но в равнобедренном  $\triangle LKM$  высота  $KE$  является и медианой, т. е.  $LM = 2LE = 12$ .

Ответ: 12.

11.  $PT = TR$  и  $\angle PSR = 90^\circ$  (по условию), значит,  $ST$  — медиана  $\triangle PSR$ , тогда  $TP = TR = TS = R$ , где  $R$  — радиус описанной окружности. Так как  $\angle P = 60^\circ$  и  $SR = 18$ , то  $\frac{SR}{PR} = \sin \angle P$ , или  $PR = \frac{18}{\sin 60^\circ} = \frac{18}{\sqrt{3}/2} = 12\sqrt{3}$ ,

тогда  $ST = x = \frac{1}{2} PR = 6\sqrt{3}$ .

Ответ:  $6\sqrt{3}$ .

Замечание. Можно доказать, что  $\triangle PST$  — равносторонний, тогда  $x = PT = \frac{1}{2} PR$ , и т. д.

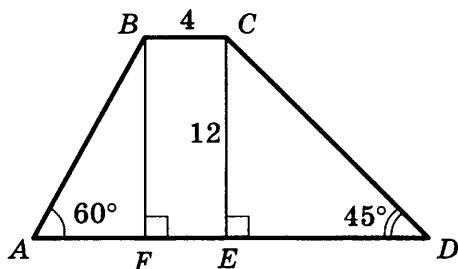
12. Так как  $\angle CED = 90^\circ$  и  $\angle D = 45^\circ$ , то  $\angle DCE = 45^\circ$ , т. е.  $CE = ED = 12$ .

Из вершины  $B$  проведем  $BF \perp AD$ , тогда  $BF = CE = 12$  (высоты трапеции равны), тогда из  $\triangle ABF$ , где  $\angle A = 60^\circ$ , находим

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{AF}{BF} \Rightarrow AF = 12 \operatorname{tg} 60^\circ = 12\sqrt{3}; FE = BC = 4.$$

Значит,  $AD = x = AF + FE + ED = 12\sqrt{3} + 4 + 12 = 12\sqrt{3} + 16 = 4(4 + \sqrt{3})$ .

Ответ:  $4(4 + \sqrt{3})$ .





**13.** Проведем высоту  $BD$  к стороне  $AC$ .

Так как  $\angle C = 60^\circ$ , то  $\angle CBD = 30^\circ \Rightarrow CD =$   
 $= \frac{1}{2} BC = 10$ , тогда по теореме Пифагора

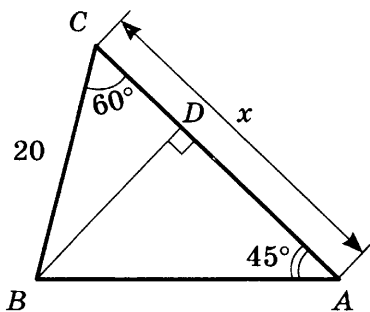
имеем  $BD^2 = BC^2 - CD^2$ , или

$$BD = \sqrt{400 - 100} = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}.$$

В  $\triangle ABD$   $\angle A = 45^\circ$ , тогда  $\angle ABD = 90^\circ -$   
 $- 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow AD = BD = 10\sqrt{3}$ , значит,

$$AC = x = AD + CD = 10\sqrt{3} + 10 = 10(\sqrt{3} + 1).$$

Ответ:  $10(\sqrt{3} + 1)$ .



**14.** В  $\triangle KMN$   $\angle M = 90^\circ$ ,  $\angle N = 45^\circ$  и  $KN = 20$  (по условию), тогда  
 $\angle MKN = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ , т. е.  $MN = KM$ . Имеем  $\frac{KM}{KN} = \sin \angle N$ , или

$$KM = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}.$$

Из  $\triangle KME$ , где  $\angle MKE = 30^\circ$ , получим  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{ME}{MK}$ , откуда  $ME = x =$   
 $= 10\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{10\sqrt{6}}{3}.$

Ответ:  $\frac{10\sqrt{6}}{3}.$

**15.** Из  $\triangle RES$ , где  $\angle R = 60^\circ$ ,  $RE = 6$  и  $\angle RES = 90^\circ$ , имеем  $\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{SE}{RE} \Rightarrow$   
 $\Rightarrow SE = 6 \operatorname{tg} 60^\circ = 6\sqrt{3}.$

В  $\triangle SEF$   $\angle F = 45^\circ$  и  $\angle SEF = 90^\circ$ , тогда  $\sin \angle F = \frac{SE}{SF}$ , откуда  $SF = x =$   
 $= \frac{6\sqrt{3}}{\sin 45^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{1/\sqrt{2}} = 6\sqrt{6}.$

Ответ:  $6\sqrt{6}.$

**16.** В  $\triangle ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle A = 45^\circ$ , тогда  $\angle B = 45^\circ$ , т. е.  $AC = BC$ . Так как  
 $CD \perp AB$  (по условию), то  $CD$  — медиана  $\triangle ABC$ , тогда  $DA = DB = DC$   
 (см. № 11). По условию  $S_{\triangle ABC} = 50$ , или  $\frac{1}{2} AB \cdot DC = 50$ , или  $\frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x =$   
 $= 50$ ,  $x^2 = 50$ ,  $x = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ , т. е.  $CD = 5\sqrt{2}.$

Ответ:  $5\sqrt{2}.$

# СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

1. Так как  $\angle A = 45^\circ$  и  $\angle ADB = 90^\circ$ , то  $\angle ABD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ , т. е.  $AD = DB = 6$ .

Если  $AD$  — основание параллелограмма, то  $DB$  — высота, тогда  $S_{ABCD} = AD \cdot DB = 6 \cdot 6 = 36$ .

Ответ: 36.

2. В  $\triangle MNP$   $MP = 16$ ,  $\angle M = 30^\circ$  и  $\angle MNP = 90^\circ$ , тогда  $PN = \frac{1}{2}MP = 8$ ;

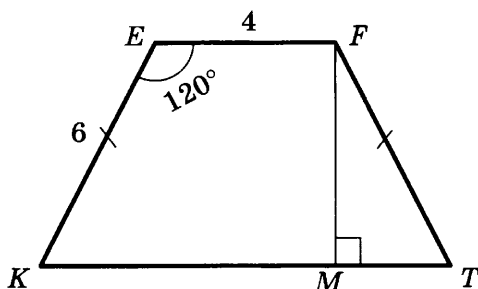
$$\cos 30^\circ = \frac{MN}{MP} \Rightarrow MN = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$$

Следовательно,  $S_{MNKP} = MN \cdot PN = 8\sqrt{3} \cdot 8 = 64\sqrt{3}$ .

Ответ:  $64\sqrt{3}$ .

3.  $EF \parallel KT$  (по условию) и  $KE = FT \Rightarrow KEFT$  — равнобедренная трапеция, где  $\angle E = \angle F = 120^\circ$ .

Проведем высоту  $FM$  трапеции, тогда  $\angle MFT = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ \Rightarrow MT = \frac{1}{2}FT = 3$ .



Но  $MT = \frac{1}{2}(KT - EF)$ , тогда  $2 \cdot 3 = KT - 4$ , откуда  $KT = 10$ .

Из  $\triangle FMT$   $FM = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$ .

Следовательно,  $S_{EFTK} = \frac{1}{2}(KT + EF) \cdot FM = \frac{1}{2}(10 + 4) \cdot 3\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$ .

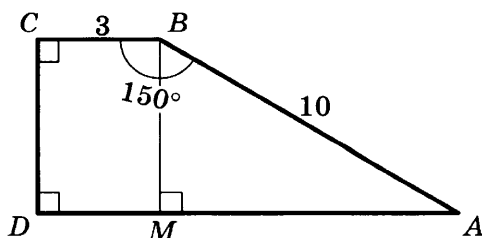
Ответ:  $21\sqrt{3}$ .

4. Проведем высоту  $BM$ , тогда  $\angle A = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow BM = \frac{1}{2}AB = 5.$$

$AD = AM + MD = AM + BC = AM + 3$ .

Из  $\triangle AMB$   $AM = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$ .



$$AD = 5\sqrt{3} + 3, \text{ тогда } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BM = \frac{1}{2}(5\sqrt{3} + 3 + 3) \cdot 5 = \\ = \frac{5}{2}(5\sqrt{3} + 6).$$

$$\text{Ответ: } \frac{5}{2}(5\sqrt{3} + 6).$$

5. По условию  $\angle K = \angle ELK$  и  $\angle LEK = 90^\circ$ , тогда  $\triangle LEK$  — равнобедренный и прямоугольный, значит,  $EK = LE = 7$ . Так как  $ML \parallel NK$ , то  $MLKN$  — трапеция, где  $ML = NE = 7$ .

$$\text{Значит, } S_{KLMN} = \frac{1}{2}(KN + ML) \cdot LE = \frac{1}{2}(14 + 7) \cdot 7 = \frac{1}{2} \cdot 147 = 73,5.$$

$$\text{Ответ: } 73,5.$$

$$6. \text{ Из } \triangle LFM \text{ находим } FM = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

$$\text{Так как } \angle KLM = 90^\circ \text{ и } LF \perp KM, \text{ то } LM^2 = FM \cdot KM; KM = \frac{10^2}{8} = \\ = \frac{25}{2} = 12,5, \text{ тогда } KF = KM - FM = 12,5 - 8 = 4,5.$$

$$KL^2 = KF \cdot KM, KL = \sqrt{4,5 \cdot 12,5} = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{25}{2}} = \frac{3 \cdot 5}{2} = 7,5, \text{ тогда}$$

$$\cos \angle K = \frac{KL}{KM} = \frac{7,5}{12,5} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

$$\text{Ответ: } KL = 7,5; \cos \angle K = 0,6.$$

7. По условию  $ABCD$  — прямоугольник, тогда  $\triangle ABC$  — прямоугольный, где  $\angle CAB = 30^\circ$ ,  $AC = 9$ , тогда  $CB = \frac{1}{2}AC = 4,5$  (по свойству катета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ).

$$\cos 30^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Значит, } S_{ABCD} = AB \cdot BC = \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{81\sqrt{3}}{4};$$

$$\cos \angle ACB = \frac{CB}{AC} = \frac{4,5}{9} = 0,5.$$

$$\text{Ответ: } S_{ABCD} = \frac{81\sqrt{3}}{4}; \cos \angle ACB = 0,5.$$

8. По свойству перпендикуляра  $EL$ , опущенного из вершины прямого угла  $E$  на гипотенузу  $FK$ , имеем  $EL^2 = FL \cdot LK$ , откуда

$$FL = \frac{12^2}{18} = \frac{144}{18} = 8.$$

Из  $\triangle FLE$  по теореме Пифагора имеем  $FE^2 = FL^2 + EL^2$ ,  
 $FE = \sqrt{64 + 144} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$ .

$$\text{Тогда } \sin \angle F = \frac{EL}{FE} = \frac{12}{4\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}; \cos \angle F = \frac{FL}{FE} = \frac{8}{4\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}};$$

$$\operatorname{tg} \angle F = \frac{EL}{FL} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}; \operatorname{ctg} \angle F = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \sin \angle F = \frac{3}{\sqrt{13}}; \cos \angle F = \frac{2}{\sqrt{13}}; \operatorname{tg} \angle F = \frac{3}{2}; \operatorname{ctg} \angle F = \frac{2}{3}.$$

$$9. \cos \angle B = \frac{BN}{AB} = \frac{MB}{BC} = \frac{1}{3} \text{ (по условию), значит, } BC = 3MB; \text{ но } MB =$$

$$= \frac{1}{2}AB, \text{ тогда } BC = \frac{3}{2}AB, \text{ откуда } \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Заметим, что } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AN = \frac{1}{2}AB \cdot MC, \text{ откуда } BC \cdot AN =$$

$$= AB \cdot MC, \text{ или } \frac{AN}{CM} = \frac{AB}{BC}.$$

$$\text{Но } \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}, \text{ тогда } \frac{AN}{CM} = \frac{2}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{3}.$$

10. Аналогично № 9 имеем

$$\cos 75^\circ = \frac{ME}{MN} = \frac{MF}{MQ} = \frac{\frac{1}{2}MN}{MQ} = \frac{MN}{2MQ}, \text{ откуда } \frac{MN}{MQ} = 2 \cos 75^\circ.$$

$$S_{\triangle MNQ} = \frac{1}{2}MN \cdot FQ = \frac{1}{2}MQ \cdot NE, \text{ откуда } \frac{NE}{QF} = \frac{MN}{MQ}.$$

$$\text{Значит, } \frac{NE}{QF} = 2 \cos 75^\circ.$$

$$\text{Но } \cos 75^\circ = \cos (45^\circ + 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1), \text{ тогда } \frac{NE}{QF} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1).$$

**Замечание.** Применение формулы  $\cos(\alpha + \beta)$  не обязательно, так как эта формула применяется в основном в 9 классе.

**11.** Проведем высоту  $BE$  трапеции  $ABCD$ , где  $AB = CD$ ,  $BC = 8$  и  $AD = 40$ .

$$\text{Тогда } AE = \frac{1}{2}(40 - 8) = 16.$$

Так как  $\angle ABD = 90^\circ$  и  $BE \perp AD$ , то  $BE^2 = AE \cdot ED$ , где  $ED = 40 - 16 = 24$ , тогда  $BE = \sqrt{16 \cdot 24} = 4 \cdot 2\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$ .

$$\text{Значит, } S_{ABCD} = \frac{8 + 40}{2} \cdot 8\sqrt{6} = 24 \cdot 8\sqrt{6} = 192\sqrt{6}.$$

Ответ:  $192\sqrt{6}$ .

**12.** Так как  $KF = LF$ , то  $\triangle KLF$  — равнобедренный, тогда высота  $FE$  является и медианой. Следовательно,  $KE = EL = 4$ .

Из  $\triangle KEF$   $\sin \angle K = \frac{EF}{KF}$ , где  $KF = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$ , тогда  $\sin \angle K = \frac{12}{4\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ;  $\cos \angle K = \frac{KE}{KF} = \frac{4}{4\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ;  $\operatorname{tg} \angle K = \frac{EF}{KE} = \frac{12}{4} = 3$ , тогда  $\operatorname{ctg} \angle K = \frac{1}{3}$ .

$$\text{Ответ: } \sin \angle K = \frac{3}{\sqrt{10}}; \cos \angle K = \frac{1}{\sqrt{10}}; \operatorname{tg} \angle K = 3; \operatorname{ctg} \angle K = \frac{1}{3}.$$

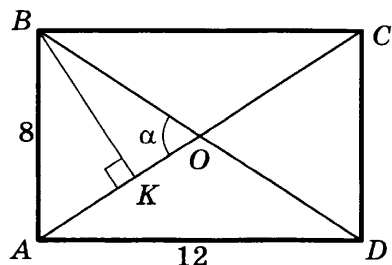
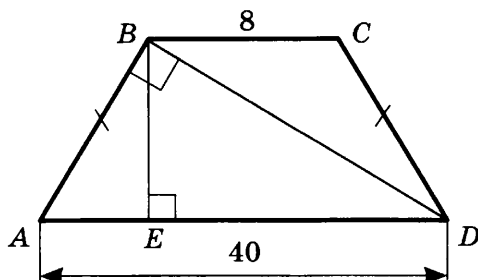
**13.** Так как  $AB = 5BC$ , то по теореме Пифагора  $AC^2 = AB^2 - BC^2$ , или  $AC^2 = 25BC^2 - BC^2$ ,  $AC^2 = 24BC^2$ ,  $AC = 2\sqrt{6}BC$ .

Тогда  $\sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{2\sqrt{6}BC}{5BC} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ ;  $\cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{5BC} = \frac{1}{5}$ ;  
 $\operatorname{tg} \angle B = \frac{\sin \angle B}{\cos \angle B} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \cdot \frac{5}{1} = 2\sqrt{6}$ ,  $\operatorname{ctg} \angle B = \frac{1}{2\sqrt{6}}$ .

$$\text{Ответ: } \sin \angle B = \frac{2\sqrt{6}}{5}; \cos \angle B = \frac{1}{5}; \operatorname{tg} \angle B = 2\sqrt{6}; \operatorname{ctg} \angle B = \frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

**14.** Так как  $ABCD$  — прямоугольник и  $AB = 8$ ,  $AD = BC = 12$ , то из  $\triangle ABC$   $AC = \sqrt{12^2 + 8^2} = \sqrt{208} = 4\sqrt{13}$ ;  $AC = BD = 4\sqrt{13}$ .

$O$  — середина диагоналей  $AC$  и  $BD$ , тогда  $AO = OC = OB = OD = 2\sqrt{13}$ .



$$\begin{aligned} \text{В } \triangle ABC \quad BC^2 &= KC \cdot AC, KC = \frac{144}{4\sqrt{13}} = \frac{36}{\sqrt{13}}, \text{ тогда } KO = KC - OC = \\ &= \frac{36}{\sqrt{13}} - 2\sqrt{13} = \frac{10}{\sqrt{13}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle BOK \quad BK &= \sqrt{BO^2 - KO^2} = \sqrt{4 \cdot 13 - \frac{100}{13}} = \sqrt{\frac{576}{13}} = \frac{24}{\sqrt{13}}, \text{ тогда} \\ \sin \alpha &= \frac{BK}{BO} = \frac{24}{\sqrt{13}} : 2\sqrt{13} = \frac{12}{13}; \cos \alpha = \frac{KO}{BO} = \frac{10}{\sqrt{13}} : 2\sqrt{13} = \frac{5}{13}; \operatorname{tg} \alpha = \\ &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{5}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \sin \alpha = \frac{12}{13}; \cos \alpha = \frac{5}{13}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}.$$

**15.** Пусть  $ME$  — высота трапеции, тогда

$$KE = \frac{1}{2}(KF - MT) = \frac{1}{2}(10 - 4) = 3.$$

$$\text{Из } \triangle MKE \quad ME = \sqrt{MK^2 - KE^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4.$$

$$\text{Тогда } \sin \angle K = \frac{ME}{MK} = \frac{4}{5} = 0,8; \cos \angle K = \frac{KE}{MK} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

$$\text{Ответ: } \sin \angle K = 0,8; \cos \angle K = 0,6.$$

**16.** Пусть  $KL$  — высота, проведенная к основанию  $ER$ . Так как  $\angle F = \angle E = 90^\circ$ , то  $FK \parallel ER$ , т. е.  $EFKR$  — трапеция, где  $RE = 8$ ,  $FK = 4$  и  $FE = KL = 4\sqrt{3}$ .

$$\begin{aligned} RL &= RE - LE = 8 - 4 = 4, \text{ тогда } \sin \angle R = \frac{KL}{KR}, \text{ где } KR = \sqrt{KL^2 + ER^2} = \\ &= \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8. \text{ Значит, } \sin \angle R = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \operatorname{tg} \angle R = \frac{KL}{RL} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \sin \angle R = \sqrt{3}/2; \operatorname{tg} \angle R = \sqrt{3}.$$

**17.** По условию задачи  $\angle ACB = 90^\circ$ , значит,  $\triangle ABC$  — прямоугольный, где  $BC = 12$ .

$$\begin{aligned} \text{Так как } CD &\text{ — медиана, то } AD = DB = DC = R = 15, \text{ где } R \text{ — радиус} \\ &\text{окружности, описанной около } \triangle ABC. \text{ Значит, } \angle BCD = \angle B = \alpha, \text{ тогда} \\ \cos \alpha &= \cos \angle B = \frac{BC}{AB} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5} = 0,4; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{\sqrt{30^2 - 12^2}} = \\ &= \frac{12}{\sqrt{18 \cdot 42}} = \frac{12}{\sqrt{9 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 21}} = \frac{12}{3 \cdot 2\sqrt{21}} = \frac{2}{\sqrt{21}}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \cos \alpha = 0,4; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sqrt{21}}.$$

**18.** Проведем высоту  $DE$  ромба.

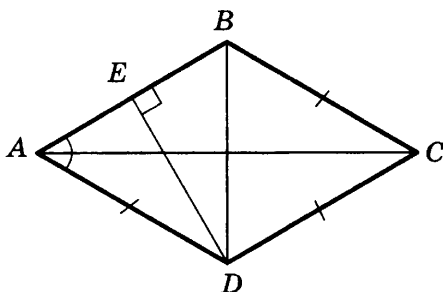
Так как  $S_{ABCD} = AB \cdot DE = 12\sqrt{2}$ , то

$6\sqrt{2} \cdot DE = 12\sqrt{2}$ , откуда  $DE = 2$ .

Из  $\triangle AED$   $AE^2 = AD^2 - DE^2$ , или  $AE^2 = 68 - 4$ ,  $AE^2 = 68$ ,  $AE = \sqrt{68} = \sqrt{17 \cdot 4} = 2\sqrt{17}$ .

$$\text{Тогда } \sin \angle A = \frac{DE}{AD} = \frac{2}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}; \quad \operatorname{tg} \angle A = \frac{DE}{AE} = \frac{2}{2\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$

$$\text{Ответ: } \sin \angle A = \frac{\sqrt{2}}{6}; \quad \operatorname{tg} \angle A = \frac{\sqrt{17}}{17}.$$



**19.** Пусть  $AD$  — высота, проведенная к боковой стороне  $BC$ . Пусть  $BD = x$ , тогда  $DC = 15 - x$ , где  $AB = BC = 15$  и  $AC = 18$  (по условию задачи).

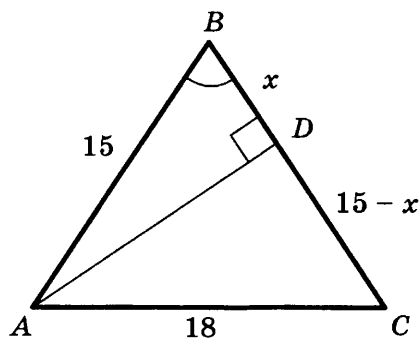
$AD^2 = 15^2 - x^2 = 18^2 - (15 - x)^2$ , или  $225 - x^2 = 324 - 225 + 30x - x^2$ ;  $30x = 126$ ,

откуда  $x = 4,2 = \frac{21}{5}$ , тогда  $AD^2 = 15^2 -$

$$-\left(\frac{21}{5}\right)^2, \text{ или } AD^2 = \left(15 - \frac{21}{5}\right)\left(15 + \frac{21}{5}\right) = \frac{54}{5} \cdot \frac{96}{5}; \quad AD = \frac{\sqrt{6 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 6}}{5} = \frac{72}{5}.$$

$$\text{Значит, } \cos \angle B = \frac{BD}{AB} = \frac{21}{5} : 15 = \frac{7}{25}; \quad \operatorname{ctg} \angle B = \frac{BD}{AD} = \frac{7}{24}.$$

$$\text{Ответ: } \cos \angle B = \frac{7}{25}; \quad \operatorname{ctg} \angle B = \frac{7}{24}.$$



**20.** Пусть  $NK = x$ , тогда из  $\triangle AKN$   $\sin \alpha = \frac{x}{18}$ ; проведем высоту  $ME$ , из

$\triangle AME$   $\sin \angle A = \frac{x}{13}$ , где  $\angle A = 40^\circ$ ,  $x = 13 \sin 40^\circ$ .

$$\text{Следовательно, } \sin \alpha = \frac{13 \sin 40^\circ}{18} \approx 0,46.$$

Известно, что  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ , или  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha \approx \frac{1}{0,2155} \approx 4,64$ ;

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = 3,64, \quad \operatorname{ctg} \alpha \approx 1,91, \quad \text{тогда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \approx 0,52.$$

$$\text{Ответ: } \sin \alpha \approx 0,46; \quad \operatorname{tg} \alpha \approx 0,52.$$

**21.** Так как  $CF$  — медиана  $\triangle ABC$  и  $\angle ACB = 90^\circ$ , то  $FA = FC = FB = 6$  — радиус описанной окружности. Из  $\triangle CEF$   $CE = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 - 27} = 3$ .

Из  $\triangle AEC$   $AC^2 = AE^2 + CE^2$ , или  $AC = \sqrt{(3\sqrt{3} + 6)^2 + 3^2} = \sqrt{27 + 36\sqrt{3} + 36 + 9} = \sqrt{36\sqrt{3} + 72} = 6\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ .

$$\text{Тогда } \sin \angle A = \frac{CE}{AC} = \frac{3}{6\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}};$$

$$\cos \angle A = \frac{AE}{AC} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{6\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{3(2 + \sqrt{3})}{6\sqrt{2 + \sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \sin \angle A = \frac{1}{2\sqrt{2 + \sqrt{3}}}; \cos \angle A = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}.$$

**22.** По условию задачи  $ME = 8$ ,  $EN = 6$  и  $MN = 10$ . Заметим, что  $10^2 = 8^2 + 6^2$ , тогда  $\triangle MEN$  — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора). Так как  $FK \perp ME$  и  $ME \perp EN$ , то  $FK \parallel EN$ , т. е.  $\angle KFE = \angle N = \alpha$ .

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \frac{ME}{MN} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Ответ: 0,8.



## КАСАТЕЛЬНАЯ К ОКРУЖНОСТИ

1. Так как  $KL$  — касательная к окружности, то  $KL \perp OK$  (по теореме; см. п. 69 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

$$\text{Тогда } \operatorname{tg} \angle KOL = \frac{KL}{OK} \Rightarrow KL = 6 \operatorname{tg} 60^\circ = 6\sqrt{3}.$$

Ответ:  $6\sqrt{3}$ .

2.  $NM$  — касательная к окружности,  $ON$  — радиус, тогда  $NM \perp ON$ , где  $ON = 9$ ,  $OM = 18$ , значит,  $\angle OMN = 30^\circ$ , т. е.  $ON = \frac{1}{2}OM$ . Но  $OM$  — биссектриса  $\angle NMK$ , тогда  $\angle NMK = 60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$ .

3. По условию  $AC$  — касательная к окружности, тогда  $\angle OAC = 90^\circ$ . Но  $OA = AB$  (по условию). С другой стороны,  $OA = OB$  (как радиусы окружности), значит,  $OA = OB = AB$ , т. е.  $\triangle OAB$  — равносторонний, тогда  $\angle OAB = 60^\circ$  и  $\angle BAC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

Ответ:  $30^\circ$ .

4. Аналогично № 3 имеем  $\angle OAM = 90^\circ$ ,  $\angle OAB = 60^\circ$ , тогда  $\angle BAM = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

Так как  $MA = MB$  (как отрезки касательных к окружности, проведенных из точки  $M$ ), то  $\angle AMB = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$ .

Ответ:  $120^\circ$ .

5.  $MN$  — касательная к окружности,  $OM$  — радиус, тогда  $MN \perp OM$ , т. е.  $\triangle OMN$  — прямоугольный, где  $OM = 12$ ,  $ON = 15$ , тогда  $MN^2 = ON^2 - OM^2$ , или  $MN = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ .

Ответ: 9.

6.  $KM = KN$  — как отрезки касательных, проведенных к окружности из точки  $K$ ;  $OM = ON$  — как радиусы окружности, тогда  $\triangle OMK = \triangle ONK$  (по двум катетам или по трем сторонам). Из равенства этих треугольников следует, что  $\angle MOK = \angle NOK$ , тогда  $\angle MOK = 60^\circ$ . Так как  $OK = 6$ , то

$$\sin \angle MOK = \frac{MK}{OK} \Rightarrow MK = 6 \sin 60^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

Значит,  $MK = NK = 3\sqrt{3}$ .

Ответ:  $MK = NK = 3\sqrt{3}$ .

7. По условию  $\angle ACB = 90^\circ$ , тогда  $CD \perp AD$  (по свойству касательной), значит,  $CD^2 = AD \cdot DB$ . Пусть  $AD = x$ , тогда  $DB = 25 - x$ , т. е.  $12^2 = x(25 - x)$ , или  $x^2 - 25x + 144 = 0$ , откуда  $x_1 = 9$ ,  $x_2 = 16$ .

Если  $AD = 9$ , то  $DB = 25 - 9 = 16$ ; если  $AD = 16$ , то  $DB = 9$ . Но  $AE = AD = 16$ , или  $AE = 9$ .

Ответ: 16 или 9.

8. Пусть  $OB = OA = R$ , где  $R$  — радиус окружности, тогда  $OM = 22$  (по условию), значит,  $OM = 2OB$ , т. е.  $\angle OMB = \angle AMO = 30^\circ$ , тогда  $\angle AMB = 60^\circ$ .

Ответ:  $60^\circ$ .

9.  $KM = KN$  — по свойству касательных, проведенных к окружности из точки, взятой вне ее, тогда  $\triangle MKN$  — равнобедренный.

Но  $OM \perp MK$  (касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания). Значит,  $\angle OMK = 90^\circ$  и  $\angle MOK = 60^\circ$ , тогда  $\angle OMN = 30^\circ$ , а  $\angle KMN = 60^\circ$ , т. е.  $MN \perp OK$  и  $\triangle MNK$  — равнобедренный,  $MN = MK = NK = 15$ .

Ответ: 15.

10.  $BM$  — касательная к окружности, тогда  $\triangle OBM$  — прямоугольный, где  $OB = 20$ ,  $OM = 30$ , значит,  $BM = \sqrt{OM^2 - OB^2} = \sqrt{900 - 400} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$ . Но  $OM = OA + AM = OB + AM$ , или  $30 = 20 + AM$ , откуда  $AM = 10$ .

Ответ:  $AM = 10$ ;  $BM = 10\sqrt{5}$ .

11. Заметим, что  $AO = OB = R$  — как радиусы окружности. Кроме того,  $OE \perp AB$  (по условию), значит, в равнобедренном  $\triangle AOB$  высота  $OE$  является и медианой, т. е.  $AE = EB$ .

Из  $\triangle AOE$ , где  $AO = 10$ ,  $OE = 8$ , находим  $AE = \sqrt{AO^2 - OE^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ , тогда  $AB = 2AE = 12$ .

Аналогично  $CF = FD$ , из  $\triangle OFC$  имеем  $CF = \sqrt{OC^2 - OF^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ , значит,  $CD = 2CF = 16$ .

Ответ:  $AB = 12$ ;  $CD = 16$ .

12. Поскольку  $AM = 12$ ,  $MB = 4$ , то  $AB = 12 + 4 = 16$ , где  $AB$  — диаметр окружности, тогда  $AO = OB = 16 : 2 = 8$ .

Но  $AM = 12$ , тогда  $OM = 12 - AO = 4$ .

По условию  $OK \perp KM$ , т. е.  $\triangle OKM$  — прямоугольный, где  $\angle OMK = 30^\circ \Rightarrow OK = \frac{1}{2} OM = 2$ .

Ответ:  $OK = 2$ .

13.  $MA$  и  $AN$  — касательные к окружности, тогда  $MA \perp OM$  и  $MA \perp AN \Rightarrow MO \parallel AN$ . Аналогично  $MA \parallel ON \Rightarrow MONA$  — ромб. Так как  $MA \perp AN$  (по условию), то  $MONA$  — квадрат, тогда  $MA = NA = MO = 20$ .

Ответ:  $MA = NA = 20$ .

14. Заметим, что радиус окружности  $OK$ , проведенный в точку касания  $MN$  с окружностью, является высотой  $\triangle MON$ , тогда  $OK^2 = MK \cdot KN$  (по свойству перпендикуляра).

Но  $AM = MK$  и  $BN = NK$  (по свойству касательных), значит,  $OK^2 = AM \cdot BN$ , откуда  $OK = \sqrt{1,2 \cdot 3,2} = \sqrt{\frac{12}{10} \cdot \frac{32}{10}} = \frac{1}{10} \sqrt{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 16} = \frac{1}{10} \cdot 2 \cdot 4 \sqrt{6} = 0,6 \sqrt{6}$ ; тогда  $AB = 2OK = 1,2 \sqrt{6}$ .

Ответ:  $1,2 \sqrt{6}$ .

**15.**  $P_{\triangle MEF} = ME + FM + EF$ .

Пусть  $EF$  — касательная к окружности и  $K$  — точка касания, тогда  $AE = EK$  и  $KF = FB$  (по свойству касательных). Заметим, что  $AOBM$  — квадрат (см. № 13), тогда  $P_{\triangle MEF} = ME + FM + (EK + KF) = ME + FM + AE + FB = (ME + AE) + (MF + FB) = AM + MB = 10 + 10 = 20$ .

Ответ: 20.

**16.** Пусть  $h$  — высота трапеции  $ABCD$ , где  $AD = BC$  (по условию). Так как  $OE = 10$  — радиус вписанной окружности, то  $h = 2 \cdot OE = 20$ .

Но  $\angle A = 30^\circ \Rightarrow h = \frac{1}{2}AD$ , тогда  $AD = 2h = 40$ .

Итак,  $AD = BC = 40$ .

Ответ:  $AD = BC = 40$ .

**17.** Заметим, что  $BF = 2OE = 14$ , так  $OE$  — радиус вписанной окружности, тогда  $BF$  — высота ромба и диаметр вписанной окружности.

Замечание. Условие  $ABCD$  — ромб является лишним.

Ответ: 14.

**18.** Так как  $MN$  — касательная к окружности ( $K$  — точка касания), то  $OK \perp MN$ .

По условию  $OM = ON = 10$ , значит,  $\triangle OMN$  — равнобедренный, тогда высота  $OK$  является и медианой, т. е.  $MK = KN = \frac{1}{2}MN = 8$ .

Из  $\triangle OKM$  (или  $\triangle OKN$ )  $OK = \sqrt{OM^2 - MK^2}$ , или  $OK = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{36} = 6$ .

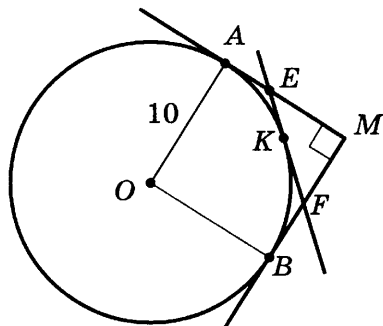
Ответ: 6.

**19.** Пусть  $E$  — точка касания касательной  $AB$  к окружности, тогда (см. № 15)  $NA = AE$  и  $BE = BK$ . По условию  $P_{\triangle MAB} = 48$ , или  $MA + MB + AB = 48$ , где  $AB = AE + EB = AN + BK$ , тогда  $MA + MB + AN + BK = (MA + AN) + (MB + BK) = MN + MK = 48$ .

Но  $MN = MK$  (по свойству касательных), тогда  $MN = MK = 48 : 2 = 24$ .

Ответ:  $MN = MK = 24$ .

**20.** Так как  $SR$  — касательная к окружности и  $OT$  — радиус, то  $OT \perp SR$  (по теореме о свойстве касательной к окружности). По условию  $\angle ROT = \angle SOT$ , тогда  $\triangle ORT = \triangle OST$  (по катету и острому углу). Из ра-



венства треугольников следует, что  $ST = TR = 7,5$ , тогда  $OS = OR = \sqrt{OT^2 + ST^2} = \sqrt{16 + 56,25} = \sqrt{72,25} = 8,5$ .

Ответ:  $OS = OR = 8,5$ .

**21.** По условию задачи  $MA$  и  $MB$  — касательные к окружности, проведенные из точки  $M$ , тогда  $MA = MB$  (по свойству).

Кроме того,  $AM \perp OA$  и  $MB \perp OB$  (касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания), тогда  $\triangle OAM = \triangle OBM$  (по двум катетам). Так как  $OA = OB$  (как радиусы) и  $\angle AOB = 60^\circ$  (по условию), то  $\triangle AOB$  — равносторонний;  $\angle AOM = 30^\circ \Rightarrow AM = \frac{1}{2} OM = 12$ ,  $AM = BM = 12$ . Из  $\triangle OAM$  по теореме Пифагора имеем  $OA^2 = OM^2 - AM^2$ , откуда  $OA = \sqrt{24^2 - 12^2} = \sqrt{36 \cdot 12} = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$ .

Значит,  $AB = OA = OB = 12\sqrt{3}$ , тогда  $P_{\triangle AMB} = AM + MB + AB = 12 + 12 + 12\sqrt{3} = 24 + 12\sqrt{3} = 12(2 + \sqrt{3})$ .

Ответ:  $12(2 + \sqrt{3})$ .

**22.**  $OK$  — радиус окружности,  $NK$  — касательная, тогда  $OK \perp KN$ . Но  $EL \parallel NK \Rightarrow OT \perp LE$ , т. е.  $\triangle OTE$  — прямоугольный, где  $OT = 8$  (по условию),  $OE = OM = 20$ .

$\triangle OTE \sim \triangle OKN$  (по двум углам), тогда  $\frac{OT}{OE} = \frac{OK}{ON}$ , или  $\frac{8}{20} = \frac{20}{ON}$ , откуда  $ON = \frac{20 \cdot 20}{8} = 50$ .

Значит,  $MN = MO + ON = 20 + 50 = 70$ .

Ответ: 70.

**23.** Так как  $AB$  — касательная к окружности, то  $AB \perp OK$ , где  $K$  — точка касания.

Но  $OA = OB = 20$  (по условию), т. е.  $\triangle OAB$  — равнобедренный, тогда  $AB \parallel DC$  (две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны друг другу). Тогда  $\triangle ODM \sim \triangle OKB \Rightarrow \frac{OD}{OM} = \frac{OB}{OK}$ , где  $OD = 14$ ,  $OB = 20$ ,  $OK = OD = 14$ .

Имеем  $\frac{14}{OM} = \frac{20}{14}$ , откуда  $OM = \frac{14 \cdot 14}{20} = 9,8$ .

Из  $\triangle OMD$   $MD = \sqrt{14^2 - 9,8^2} = \sqrt{4,2 \cdot 23,8} = \sqrt{\frac{21}{5} \cdot \frac{119}{5}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 17}}{5} = \frac{7\sqrt{51}}{5}$ .

Тогда  $DC = 2MD = \frac{14\sqrt{51}}{5} = 2,8\sqrt{51}$ .

Ответ:  $2,8\sqrt{51}$ .

# ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

Найдите  $x$ .

1.  $\sphericalangle MN = 180^\circ$ ,  $\sphericalangle MOK = 76^\circ$ , тогда  $\sphericalangle KN = 180^\circ - 78^\circ = 102^\circ$ , т. е.  $\sphericalangle KON = 102^\circ$ .

В  $\triangle NOK$   $OK = ON$  — как радиусы, тогда  $\sphericalangle OKN = \sphericalangle ONK$  (как углы при основании равнобедренного треугольника). Значит,  $x = (180^\circ - 102^\circ) : 2 = 39^\circ$ .

Ответ:  $39^\circ$ .

Замечание.  $\sphericalangle MOK$  — внешний угол  $\triangle OKN$ , тогда  $\sphericalangle MOK = 2x = 78^\circ$ ,  $x = 39^\circ$ .

2.  $AO = OB$  — как радиусы окружности, то  $\triangle AOB$  — равнобедренный (по свойству). По условию  $\sphericalangle AOB = 60^\circ$ , тогда  $\sphericalangle OAB = \sphericalangle ABO = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$ , т. е.  $\triangle AOB$  — равносторонний, тогда  $AB = x = 8$ .

Ответ: 8.

3.  $OL = OM \Rightarrow \triangle LOM$  — равнобедренный, тогда  $x^2 = OL^2 + OM^2$ ,  $x^2 = 2 \cdot 32^2$ ,  $x = 32\sqrt{2}$ , т. е.  $LM = 32\sqrt{2}$ .

Ответ:  $32\sqrt{2}$ .

4.  $\sphericalangle KL = 360^\circ - (143^\circ + 77^\circ) = 360^\circ - 220^\circ = 140^\circ$ , тогда  $x = \frac{1}{2} \sphericalangle KL = 70^\circ$ .

Ответ:  $70^\circ$ .

5.  $\sphericalangle MNS = 180^\circ$ ,  $\sphericalangle MN = 2\sphericalangle MSN = 80^\circ$ , тогда  $x = \sphericalangle SN = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ .

Ответ:  $100^\circ$ .

6.  $\sphericalangle KMN = 180^\circ$ ,  $\sphericalangle MN = 124^\circ$  (по условию), тогда  $\sphericalangle MK = 180^\circ - 124^\circ = 56^\circ \Rightarrow x = \sphericalangle MNK = \frac{1}{2} \sphericalangle MK = 28^\circ$ .

Ответ:  $28^\circ$ .

7.  $\sphericalangle NQ = 200^\circ$  (по условию),  $\sphericalangle MNQ = 25^\circ \Rightarrow \sphericalangle QM = 25^\circ \cdot 2 = 50^\circ$ , тогда  $\sphericalangle NM = x = 360^\circ - (200^\circ + 50^\circ) = 110^\circ$ .

Ответ:  $110^\circ$ .

8.  $\sphericalangle KM = 360^\circ - (46^\circ + 112^\circ) = 360^\circ - 158^\circ = 202^\circ$ , тогда  $\sphericalangle MNK = x = \frac{1}{2} \sphericalangle KM = 101^\circ$ .

Ответ:  $101^\circ$ .

9. Докажем, что  $\angle EAF = \frac{1}{2}(\cup EF - \cup BC)$ .

*Доказательство.* Соединим точки  $E$  и  $C$ , тогда  $\angle ECF$  — внешний угол  $\triangle AEC$ , значит,  $\angle ECF = \angle A + \angle AEC$ , откуда  $\angle A = \angle ECF - \angle AEC = \frac{1}{2}\cup EF - \frac{1}{2}\cup BC = \frac{1}{2}(\cup EF - \cup BC)$ ,

ч. т. д.

Тогда  $\angle A = x = \frac{1}{2}(130^\circ - 42^\circ) = 44^\circ$ .

Ответ:  $44^\circ$ .

10.  $\cup MKE = 180^\circ$ ,  $\cup MK = 116^\circ$  (по условию), тогда  $\cup KE = 180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$ , значит,  $x = \angle KME = \frac{1}{2}\cup KE = 32^\circ$ .

Ответ:  $32^\circ$ .

11. Докажем, что  $x = \angle MKB = \frac{1}{2}(\cup MB + \cup AN)$ , где  $K$  — точка пересечения  $MN$  и  $AB$ .

*Доказательство.* Соединим точки  $A$  и  $M$ , тогда  $\angle AKN$  будет внешним для  $\triangle AMK$ , значит,

$$\angle AKN = \angle AMN + \angle KAM = \frac{1}{2}\cup AN + \frac{1}{2}\cup MB = \frac{1}{2}(\cup AN + \cup MB).$$

Следовательно,  $x = \angle MKB = \angle AKN = \frac{1}{2}(\cup AN + \cup MB)$ , тогда

$$x = \frac{1}{2}(38^\circ + 42^\circ) = 40^\circ.$$

Ответ:  $40^\circ$ .

12. По теореме о произведении отрезков пересекающихся хорд имеем  $AM \cdot MB = CM \cdot MD$ , или  $9 \cdot 3 = 2 \cdot x$ , откуда  $x = 13,5$ .

Ответ: 13,5.

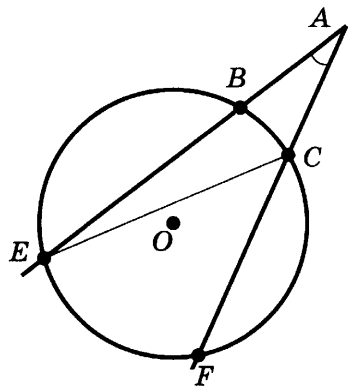
13. Известно, что произведение длины секущей на ее внешнюю часть равно квадрату длины касательной (см. № 670 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.), т. е.  $MN \cdot NK = NL^2$ , или  $(x + 4) \cdot 4 = 8^2$ ,  $x + 4 = 16$ ,  $x = 12$ .

Значит,  $KM = x = 12$ .

Ответ: 12.

14.  $38^\circ = \frac{1}{2}(\cup CD - \cup AB)$  (см. № 9), или  $126^\circ - x = 76^\circ$ , откуда  $x = \cup AB = 50^\circ$ .

Ответ:  $50^\circ$ .



**15.** Так как  $\cup MN = 120^\circ$ , то  $\angle MON = 120^\circ$ .

Но  $OM = ON$  — как радиусы окружности, значит,  $\triangle MON$  — равнобедренный, значит, высота  $OK = x$  является и биссектрисой, т. е.  $\angle MOK = \angle NOK = 60^\circ \Rightarrow \angle OMK = 30^\circ$ , тогда  $OK = x = \frac{1}{2} OM = 1,4$  (по свойству катета, лежащего против угла в  $30^\circ$ ).

*Ответ:* 1,4.

**16.** Так как  $MA$  и  $MB$  — касательные к окружности, то  $MA \perp OA$  и  $MB \perp OB$ , где  $OA$  и  $OB$  — радиусы окружности.

По условию  $\angle AOB = 140^\circ$ , тогда  $\angle M = x = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 140^\circ) = 360^\circ - 320^\circ = 40^\circ$ .

*Ответ:*  $40^\circ$ .

*Замечание 1.* Здесь мы использовали тот факт, что сумма углов выпуклого четырехугольника равна  $360^\circ$  (по формуле  $180^\circ(n - 2)$ , где  $n = 4$ ).

*Замечание 2.*  $x + 140^\circ = 180^\circ$ ,  $x = 40^\circ$ .

**17.** Так как  $\cup AB = 90^\circ$ , то  $\angle AOB = 90^\circ$ , т. е.  $\triangle AOB$  — прямоугольный и равнобедренный ( $AO = OB$  — как радиусы), тогда высота  $OK$  является медианой и биссектрисой, тогда  $\angle BOK = \angle OBK = 45^\circ$ , значит,  $OK = x = BK = \frac{1}{2} AB = 4$ .

*Ответ:* 4.

**18.**  $AM$  — касательная к окружности, тогда  $AM \perp AO$ , где  $AO$  — радиус окружности.

Значит,  $\triangle AOB$  — прямоугольный. Так как  $\cup AB = 72^\circ$ , то  $\angle AOB = 72^\circ$ , тогда  $\angle M = x = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$ .

*Ответ:*  $18^\circ$ .

**19.** Если  $\cup MN = 134^\circ$  (по условию), то  $\angle MON = 134^\circ$ . Но  $\angle KMN = x$  — внешний угол  $\triangle MON$ , тогда  $x = \angle MON + \angle ONM$ .

Поскольку  $OM = ON$  (как радиусы), то  $\triangle MON$  — равнобедренный, тогда  $\angle ONM = \angle OMN = (180^\circ - 134^\circ) : 2 = 23^\circ$ , значит,  $x = 134^\circ + 23^\circ = 157^\circ$ .

*Ответ:*  $157^\circ$ .

**20.**  $NP$  — касательная к окружности,  $MN$  — диаметр, тогда  $MN \perp NP$ , т. е.  $\triangle MNP$  — прямоугольный. Так как  $MK = KP$ , то  $NK$  — медиана, тогда  $MK = KP = KN$  и  $\angle M = x = 45^\circ$ .

*Ответ:*  $45^\circ$ .

**21.**  $DC$  — касательная к окружности, тогда  $DC \perp DO$ , где  $DO$  — радиус. Так как  $\angle ADC = 140^\circ$ , то  $\angle ADO = 140^\circ - 90^\circ = 50^\circ$ . Но  $AO = OD$  — как радиусы, т. е.  $\triangle AOD$  — равнобедренный, тогда  $\angle A = \angle ADO = 50^\circ$ , тогда  $\angle A = \frac{1}{2} \cup DB = \frac{1}{2} x$ , откуда  $x = 50^\circ \cdot 2 = 100^\circ$ .

*Ответ:*  $100^\circ$ .

**22.** Соединим центр  $O$  окружности с точками  $A$  и  $B$ , тогда  $\triangle AOB$  — равнобедренный, где  $AO = OB$  — как радиусы. Так как  $\sphericalangle AN = 45^\circ$ , то  $\sphericalangle AON = 45^\circ$ . Так как  $\sphericalangle AKN = 75^\circ$  — внешний угол  $\triangle AOK$ , то  $\sphericalangle OAK = \sphericalangle OBK = 75^\circ - 45^\circ = 30^\circ$ , тогда  $\sphericalangle AOB = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$ , и так как  $\sphericalangle AOK = 45^\circ$ , то  $\sphericalangle KOB = 120^\circ - 45^\circ = 75^\circ$ , тогда  $x = \sphericalangle BN = 75^\circ$ .

Ответ:  $75^\circ$ .

**23.** Так как  $AB = BC$  и  $\sphericalangle B = 60^\circ$ , то  $\sphericalangle A = \sphericalangle C = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$ , т. е.  $\triangle ABC$  — равносторонний, тогда точка  $O$  — точка пересечения медиан, биссектрис и высот.

Значит,  $\sphericalangle OAD = 30^\circ$  и  $AD = \frac{1}{2}AC = 5$ .

Из  $\triangle AOD$   $\operatorname{tg} \sphericalangle OAD = \frac{OD}{AD} \Rightarrow OD = x = 5 \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{5}{\sqrt{3}}$ .

Ответ:  $\frac{5}{\sqrt{3}}$ .

**24.**  $AC$  — касательная к окружности,  $OA = OB$  — радиусы, тогда  $OA \perp AC$ .

По условию  $\sphericalangle BAC = 40^\circ$ , тогда  $\sphericalangle OAB = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ = \sphericalangle OBA$ . Значит,  $\sphericalangle AOB = x = 180^\circ - (50^\circ + 50^\circ) = 80^\circ$ .

Ответ:  $80^\circ$ .

**25.**  $MB = MA$  — как касательные, проведенные к окружности из точки  $M$ .

$MA \perp OA$  и  $MB \perp OB$  (по свойству касательной).

$\triangle AOM = \triangle BOM$  (по двум катетам или по трем сторонам), тогда  $\sphericalangle BMO = \sphericalangle AMO$ , т. е.  $MO$  — биссектриса  $\sphericalangle AMB$ , значит,  $\sphericalangle AMO = 30^\circ$ , тогда  $OA = \frac{1}{2}OM = \frac{1}{2}x$ , откуда  $x = 2 \cdot AO = 30$ .

Ответ: 30.

**26.** Так как  $\sphericalangle KOT = 60^\circ$ , то  $\sphericalangle KOT = 60^\circ$ .

Но  $KO = TO = OS = 10$  (как радиусы), тогда  $\sphericalangle OTK = \sphericalangle OKT = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$ , т. е.  $\triangle KOT$  — равносторонний, значит,  $TK = x = 10$ .

Ответ: 10.

**27.** По условию  $\sphericalangle B = 66^\circ$  и  $AB = BC$ , тогда  $\triangle ABC$  — равнобедренный, тогда  $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BAC = (180^\circ - 66^\circ) : 2 = 57^\circ$ .

Но  $\sphericalangle ACB = \frac{1}{2}\sphericalangle AB = \frac{1}{2}x$ , тогда  $x = 57^\circ \cdot 2 = 114^\circ$ .

Ответ:  $114^\circ$ .



**28.**  $O$  — центр окружности и  $SO = 8$  — ее радиус.  $E$  — середина  $ST$  (по условию), значит,  $OE$  — средняя линия  $\triangle SMT$  (по определению) и  $OE = \frac{1}{2}MT = \frac{1}{2}x$ .

Но  $OE = OS = 8$ , тогда  $x = 2 \cdot OE = 16$ .

Ответ: 16.

**29.**  $OE$  — средняя линия  $\triangle MRN$  (см. № 28), тогда  $OE = \frac{1}{2}RN = 10$ . Но  $OE = OM = OR$  — как радиусы окружности, тогда в  $\triangle OME$   $\angle OEM = 30^\circ$ .  $\angle ROE$  — внешний угол  $\triangle OME$ , тогда  $\angle ROE = 60^\circ$ .

Так как  $OE = OR$ , то  $\angle ORE = \angle OER = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$ , т. е.  $\triangle ROE$  — равносторонний, значит,  $RE = x = 10$ .

Ответ: 10.

**30.**  $MA \perp OM$  (по свойству касательной).

Так как  $MB \perp AB$  и  $MA = AN$  (как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки), то в равнобедренном  $\triangle AMB$  высота  $AB$  является и медианой, тогда  $MB = BN = \frac{1}{2}MN = 15$ . Из  $\triangle OMB$   $OB = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{64} = 8$ , тогда из  $\triangle AOM$   $MB^2 = OB \cdot AB$ , откуда  $AB = x = \frac{15^2}{8} = \frac{225}{8} = 28,125$ .

Ответ: 28,125.

**31.**  $MK \perp KL$  (по свойству касательной), тогда из  $\triangle KNL$ , где  $KL = 2 \cdot OL = 20$  и  $KN = 12$ , имеем  $NL = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{256} = 16$ .

$KN^2 = MN \cdot NL$  (по свойству перпендикуляра),  $12^2 = MN \cdot 16$ , откуда  $MN = \frac{144}{16} = 9$ .

Тогда из  $\triangle MNK$   $MK = x = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15$ .

Ответ: 15.

**32.**  $BC$  — касательная к окружности, тогда  $BC \perp AC$ , где  $AC = 2AO = 2\sqrt{3}$ .

Так как  $\angle AOE = 120^\circ$ , то  $\angle AOE = 120^\circ$ , тогда  $\angle OAE = \angle OEA = (180^\circ - 120^\circ) : 2 = 30^\circ$  (как углы при основании равнобедренного  $\triangle AOE$ ).

В  $\triangle ACB$   $\cos \angle A = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 4 \Rightarrow CB = \frac{1}{2}AB = 2$ .

$\angle COE$  — внешний угол  $\triangle AOE$ , тогда  $\angle COE = 60^\circ$ , и так как  $OC = OE$ , то  $\angle OCE = \angle OEC = 60^\circ$ , т. е.  $\triangle OEC$  — равносторонний и  $CE = OC = \sqrt{3}$ .

Так как  $\angle ACB = 90^\circ$ , то  $\angle ECB = 30^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ , тогда  $\angle CEB = 90^\circ$ .

Из  $\triangle CEB$   $EB = x = \sqrt{CB^2 - CE^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$ .

Ответ: 1.

**33.**  $\angle AB = 60^\circ \Rightarrow \angle AOB = 60^\circ$ . Так как  $\angle ADO = 90^\circ$  и  $AO = 16$ , то  $\sin \angle AOD = \frac{AD}{AO} \Rightarrow AD = x = 16 \sin 60^\circ = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$ .

Ответ:  $8\sqrt{3}$ .

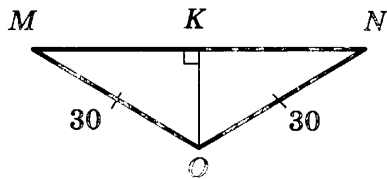
**34.** Так как  $MK$  — диаметр окружности, то  $\angle MK = 180^\circ \Rightarrow \angle MNK = 90^\circ$ , где  $NS \perp MK$ , тогда  $NP$  — высота, проведенная из вершины прямого угла  $MNK$  на гипотенузу  $MK$ . По теореме Пифагора имеем  $MK^2 = MN^2 + NK^2$ , или  $MK = \sqrt{144 + 81} = \sqrt{225} = 15$ .  $MN^2 = MK \cdot MP$ ,  $MP = \frac{12^2}{15} = \frac{144}{15}$ , тогда из  $\triangle MPN$   $PN = \sqrt{12^2 - \left(\frac{144}{15}\right)^2} = \sqrt{\frac{180 - 144}{15} \cdot \frac{180 + 144}{15}} = \frac{1}{15} \sqrt{36 \cdot 324} = \frac{1}{15} \cdot 6 \cdot 18 = \frac{36}{5} = 7,2$ . Значит,  $SN = 2 \cdot PN = 14,4$ .

Ответ: 14,4.

**35.** Так как  $\angle ADC$  — вписанный, опирающийся на диаметр  $AC$ , то  $\angle ADC = 90^\circ$ . По условию  $\triangle ACB$  — прямоугольный, тогда по свойству перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, имеем  $CD^2 = AD \cdot DB$ , или  $x^2 = 8 \cdot 18 = 144$ , откуда  $x = 12$ . Следовательно,  $CD = x = 12$ .

Ответ: 12.

**36.** Пусть  $AB$  — диаметр полуокружности с центром в точке  $O$ . Так как  $\angle AOM = 35^\circ$  и  $\angle BON = 25^\circ$ , то  $\angle MON = 180^\circ - (35^\circ + 25^\circ) = 120^\circ$ . Заметим, что  $OM = ON = OA = OB = 30$  — как радиусы окружности. В  $\triangle MON$  проведем высоту  $OK$ , тогда в равнобедренном треугольнике высота  $OK$  является медианой и биссектрисой. Значит,  $MK = KN = \frac{1}{2} MN$ ,  $\angle MOK = 60^\circ$ , тогда  $MK =$



$= MO \sin 60^\circ = 30 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$  и  $MN = x = 2MK = 30\sqrt{3}$ .

Ответ:  $30\sqrt{3}$ .

**37.** Заметим, что  $\triangle AOB = \triangle DOC$  (по трем сторонам), так как  $AO = BO = DO = CO$  — как радиусы и  $AB = DC$  (по условию). Так как  $\angle AOB = 100^\circ$ , то  $\angle DOC = \angle AOB = 100^\circ \Rightarrow \angle DC = x = 100^\circ$ .

Ответ:  $100^\circ$ .

**38.** В  $\triangle ABC$   $\angle ABC = 90^\circ$  (по условию), тогда  $BC^2 = AC^2 - AB^2$ , или  $BC^2 = 100 - 36 = 64$ ,  $BC = 8$ .

Так как  $AC$  — касательная к окружности, то  $AC \perp AO$ , тогда  $AC^2 = OC \cdot BC$ , откуда  $OC = \frac{10^2}{8} = \frac{100}{8} = \frac{25}{2} = 12,5$ , значит,  $OB = 4,5$ .

Из  $\triangle AOB$  по теореме Пифагора имеем  $AO^2 = OB^2 + AB^2$ , или  $x^2 = 4,5^2 + 6^2$ ,  $x^2 = 56,25$ , откуда  $x = 7,5$ , т. е.  $AO = 7,5$ .

Ответ: 7,5.

**39.** Так как  $ME \perp KL$ , где  $KL$  — диаметр окружности, то  $ME^2 = KE \cdot EL$  (см. № 668 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

Тогда  $ME = EN = \sqrt{12 \cdot 4} = 4\sqrt{3}$  и  $MN = 8\sqrt{3}$ .

Ответ:  $8\sqrt{3}$ .

**40.** Так как  $AB \parallel CD$  и  $AB \perp MN$ , то  $CD \perp MN$ .

Из  $\triangle AOM$   $AO^2 = AM^2 + MO^2$ , где  $AM = \frac{1}{2}AB = 6$ , тогда  $AO^2 = 36 + MO^2$ .

Аналогично из  $\triangle CON$ , где  $CN = \frac{1}{2}CD = 8$ , имеем  $CO^2 = 64 + ON^2$ .

Но  $AO = CO = x$  — радиусы окружности, тогда  $36 + MO^2 = 64 + ON^2$ , или  $MO^2 - ON^2 = 28$ .

Пусть  $MO = a$ ,  $ON = b$ . Заметим, что  $a + b = MN = 14$ . Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 28, \\ a + b = 14, \end{cases} \quad \begin{cases} (a - b)(a + b) = 28, \\ a + b = 14, \end{cases} \quad \begin{cases} 14(a - b) = 28, \\ a + b = 14, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = 14, \\ a - b = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} 2a = 16, \\ 2b = 12, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 8, \\ b = 6. \end{cases}$$

Значит,  $AO^2 = x^2 = 36 + 64 = 100$ ,  $x = 10$ , т. е.  $AO = x = 10$ .

Ответ: 10.

**41.**  $AE^2 = CE \cdot ED$  (см. задачу № 39), где  $CE = 6$ , тогда  $AE^2 = 6ED$ .

Так как  $AE = \frac{1}{2}AB$ , то  $\frac{1}{4}AB^2 = 6(2x - CE)$ , или  $AB^2 = 48(x - 3)$ . Кроме того, по условию  $AB + CE = CD$ , или  $AB = 2x - 6 = 2(x - 3)$ .

Следовательно,  $4(x - 3)^2 = 48(x - 3)$ ,  $(x - 3)^2 = 12(x - 3)$ ,  $(x - 3)(x - 15) = 0$ , откуда  $x = 3$ , или  $x = 15$ . Но  $x > CE$ , значит,  $x = 15$ , т. е.  $CO = 15$ .

Ответ: 15.

**42.** В  $\triangle OKM$   $OK = 10$ ,  $OM = 8$  и  $\angle OMK = 90^\circ$ , тогда  $KM = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ . Значит,  $AM = AK + KM = 16$ . Следовательно,  $AO^2 = AM^2 + OM^2$ , или  $AO = x = \sqrt{16^2 + 8^2} = \sqrt{8^2(2^2 + 1)} = 8\sqrt{5}$ .

Ответ:  $8\sqrt{5}$ .

**43.** Так как  $AE = AD = 8$ , то  $\triangle AED$  — равнобедренный, тогда  $\angle ADE = \angle AED$ .

Но  $\angle ABC = \angle ADC = \angle AED = 60^\circ$ . Кроме того,  $\angle AED = \angle CEB = 60^\circ$  — как вертикальные.

Выходит, что  $\triangle CBE$  (как и  $\triangle AED$ ) — равносторонний, т. е.  $CE = BE = 6$ , где  $CE = x$ .

Ответ: 6.

**44.**  $\angle ADC$  — вписанный и опирается на диаметр  $AC$ , значит,  $\angle ADC = 90^\circ$ , тогда  $AC^2 = AD^2 + DC^2$ ,  $AC = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}$ .

По условию  $AC = BC$ , тогда  $S_{\triangle ABC} = x = \frac{1}{2} BC \cdot AD = 4\sqrt{145}$ .

Ответ:  $4\sqrt{145}$ .

**45.** Так как  $\angle CMA = 55^\circ$ , то  $\angle BMC = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$ , тогда  $\angle BMC = \frac{1}{2}(\cup BC + \cup AD)$  (см. задачу № 11), или  $\cup BC + \cup AD = 250^\circ$ .

Согласно условию задачи  $\cup BC - \cup AD = 65^\circ$ .

Складывая почленно полученные равенства, находим  $2\cup BC = 315^\circ$ , откуда  $\cup BC = x = 157^\circ 30'$ .

Ответ:  $157^\circ 30'$ .

**46.** По условию  $\angle NMC = 75^\circ$ , тогда  $\cup NC = 75^\circ \cdot 2 = 150^\circ$ . Пусть  $\cup MC = x$ , тогда  $\cup NM = 2x$ . Имеем

$\cup MC + \cup NM + \cup NC = 360^\circ$ , или  $x + 2x + 150 = 360$ ;  $3x = 210$ , откуда  $x = 70$ . Значит,  $\angle МОС = \cup MC = 70^\circ$ .

Ответ:  $70^\circ$ .

**47.** Пусть  $\cup KT = 7k$ , тогда  $\cup TM = 4k$ .

По условию  $\cup KM = 140^\circ$ . Имеем  $\cup KT + \cup TM + \cup KM = 360^\circ$ , или  $7k + 4k + 140 = 360$ ,  $11k = 220$ ,  $k = 20$ .

Тогда  $\cup TM = 4k = 80^\circ$ , значит,  $\angle MKT = x = \frac{1}{2} \cup TM = 40^\circ$ .

Ответ:  $40^\circ$ .

**48.** Пусть  $\cup AMB = 5k$ , тогда  $\cup ANB = 11k$ .

Имеем  $5k + 11k = 360$ ;  $16k = 360$ ,  $k = 22,5$ . Значит,  $\cup ANB = 11k = 247,5^\circ \Rightarrow \angle AMB = x = \frac{1}{2} \cup ANB = 123,75^\circ = 123^\circ 45'$ .

Ответ:  $123^\circ 45'$ .

**49.** Пусть  $\cup MN = 31k$ , тогда  $\cup NK = 16k$ .

По условию  $\cup MK = 125^\circ$ , следовательно,  $31k + 16k + 125 = 360$ ;  
 $47k = 235$ , откуда  $k = 5$ . Значит,  $\cup NK = 16k = 80^\circ \Rightarrow \angle NMK = x =$   
 $= \frac{1}{2} \cup NK = 40^\circ$ .

*Ответ:*  $40^\circ$ .

**50.** Пусть  $\cup NM = 20k$ , тогда  $\cup NK = 24k$ .

Так как  $\angle MNK = 70^\circ$ , то  $\cup MK = 140^\circ$ .

Имеем  $20k + 24k + 140^\circ = 360$ , или  $44k = 220$ ,  $k = 5$ . Значит,  $\cup NM =$   
 $= 20k = 100^\circ$ , т. е.  $x = \cup NM = 100^\circ$ .

*Ответ:*  $100^\circ$ .

**51.** Пусть  $\cup AB = 7k$ ,  $\cup BC = 11k$ ,  $\cup AC = 6k$ .

Тогда  $7k + 11k + 6k = 360$ ,  $24k = 360$ , откуда  $k = 15$ . Значит,  $\cup BC =$   
 $= 11k = 165^\circ \Rightarrow x = \angle BAC = \frac{1}{2} \cup BC = 82^\circ 30'$ .

*Ответ:*  $82^\circ 30'$ .

**52.**  $\angle ABC = 90^\circ$  — вписанный, тогда  $AC$  — диаметр окружности, значит,  $\cup AC = 180^\circ$ .

Пусть  $\cup BC = 2k$ , тогда  $\cup AC = 5k = 180$ , откуда  $k = 36$ .

$\cup AB + \cup BC = 180^\circ$ ,  $x + 2k = 180$ , или  $x + 72 = 180$ , откуда  $x = \cup AB =$   
 $= 108^\circ$ .

*Ответ:*  $108^\circ$ .

**53.** Пусть  $\cup AB = 3k$ , тогда  $\cup BMA = 5k$ .

Получим  $3k + 5k = 360$ , или  $8k = 360$ , откуда  $k = 45$ .

Значит,  $\cup AB = 135^\circ \Rightarrow \angle AOB = 135^\circ$ .

Так как  $AO = BO$  (как радиусы), то  $\triangle AOB$  — равнобедренный, тогда  
 $\angle OAB = \angle OBA = (180^\circ - 135^\circ) : 2 = 45^\circ : 2 = 22^\circ 30'$ .

По условию  $BC$  — касательная к окружности, тогда  $OB \perp BC$  и  
 $\angle ABC = x = 90^\circ - 22^\circ 30' = 67^\circ 30'$ .

*Ответ:*  $67^\circ 30'$ .

**54.** Пусть  $\cup AB = 10k$ , тогда  $\cup CA = 12k$ .

По условию  $\cup BC = 140^\circ$ , значит,  $10k + 12k + 140 = 360$ , или  $22k =$   
 $= 220$ , откуда  $k = 10$ , тогда  $\cup CA = 12k = 120^\circ$ ,  $\cup AB = 10k = 100^\circ$ .

Следовательно,  $x = \angle AMC = \frac{1}{2} (\cup CA - \cup AB) = 10^\circ$ .

*Ответ:*  $10^\circ$ .

## ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ ТРЕУГОЛЬНИКА

1.  $MN = MK$  (по свойству касательных).

$MN \perp NO$  и  $KM \perp KO$  (касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания). Тогда  $\triangle MON = \triangle MOK$  (по двум катетам или по трем сторонам), значит,  $\angle NMO = \angle KMO = 30^\circ$  (по условию  $\angle NMK = 60^\circ$ ), тогда  $MO = 2 \cdot NO = 20$ .

Ответ: 20.

2. Продолжим  $NO$  до пересечения с  $MK$  в точке  $L$ . Тогда  $NL$  — высота  $\triangle KMN$  (так как высоты  $KE$  и  $MF$  пересекаются в точке  $O$ ).

По условию  $\angle MKN = 66^\circ$ , значит,  $\angle FNO = \angle KLN - \angle MKN = 90^\circ - 66^\circ = 24^\circ$ .

Ответ:  $24^\circ$ .

3. По условию точка  $M$  — точка пересечения биссектрис  $BB_1$  и  $AA_1$   $\triangle ABC \Rightarrow CM$  — биссектриса  $\angle C$ . Пусть  $\angle BAM = \alpha$ ,  $\angle ABM = \beta$ , тогда  $\alpha + \beta = 180^\circ - 128^\circ = 52^\circ$ . Значит,  $\angle A + \angle B = 2\alpha + 2\beta = 104^\circ$  и  $\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B) = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$ .

Следовательно,  $\angle MCB_1 = \frac{1}{2} \angle C = 38^\circ$ .

Ответ:  $38^\circ$ .

4. Известно, что каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка (см. § 3, п. 72 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.). Значит,  $CM = CN = 10$ .

Так как  $MK = 17$ , то  $CK = MK - CM = 7$ .

Ответ: 7.

5. По условию  $BT$  и  $QM$  — медианы  $\triangle QBR$  и  $BT \perp QM$ . Известно, что медианы треугольника пересекаются в отношении  $2 : 1$ , считая от соответствующей медианы (см. § 3, п. 62, задача 1 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

Пусть  $OM = x$ ,  $OT = y$ , тогда  $QO = 2x$  и  $BO = 2y$ .

Так как  $BT \perp QM$ , то  $S_{\triangle BOQ} = \frac{1}{2} QO \cdot BO = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2y = 2xy$ .

Но  $QM = 3x = 9$ ,  $x = 3$ ;  $BT = 3y = 12$ ,  $y = 4$ .

Значит,  $S_{\triangle BOQ} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ .

Ответ: 24.

6. По условию точка  $O$  — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам  $\triangle PRQ$ , тогда  $RO = PO = 20$ . Из  $\triangle POK$ , где  $OK \perp PK$  и  $\angle OPK = 30^\circ \Rightarrow OK = \frac{1}{2} PO = 10$ .

Ответ: 10.

## 7.

## Способ 1

Пусть  $OF = x$ ,  $OK = y$ , тогда  $EF = 3x = 18$ ,  $x = 6$ ,  $2x = OE = 12$ ;  $MK = 3y = 15$ ,  $y = 5$ ,  $2y = MO = 10$ . Из  $\triangle MOE$   $ME = \sqrt{10^2 + 12^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$ . Так как  $\triangle MOE$  — прямоугольный и  $NP$  — медиана  $\triangle MEN$ , то  $OP$  — медиана  $\triangle MOE$ , т. е.  $MP = EP = OP = \sqrt{61}$  (медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы).

Значит,  $ON = 2OP = ME = 2\sqrt{61}$ .

Ответ:  $2\sqrt{61}$ .

## Способ 2

Известно, что если  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — стороны треугольника и  $m_c$  — медиана, проведенная к стороне  $c$ , то  $m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$ .

Пусть  $NP$  — медиана к стороне  $ME$ , тогда  $NP = \frac{1}{2} \sqrt{2(MN^2 + NE^2) - ME^2}$ .

Пусть  $OF = x$ ,  $OK = y$ , тогда  $EF = 3x = 18$ , т. е.  $x = 6$ ,  $2x = OE = 12$ ;  $NK = 3y = 15$ ,  $y = 5$ ,  $2y = MO = 10$ . Из  $\triangle EOK$   $EK = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ .

$ME = \sqrt{10^2 + 12^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$ ,  $MF = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} = 2\sqrt{34}$ .

Значит,  $EN = 2EK = 26$ ,  $MN = 2MF = 4\sqrt{34}$ .

Следовательно,  $NP = \frac{1}{2} \sqrt{2(16 \cdot 34 + 26^2) - 4 \cdot 61} = \frac{1}{2} \sqrt{244 \cdot 9} = 3\sqrt{61}$ ,

откуда  $ON = 2\sqrt{61}$ .

Ответ:  $2\sqrt{61}$ .

## Способ 3

Достроим  $\triangle MEN$  до параллелограмма, для чего из точки  $E$  проведем прямую  $\parallel MN$  и из точки  $M$  проведем прямую  $\parallel EN$ . Точку пересечения обозначим буквой  $B$ .

Известно, что если  $a$  и  $b$  — смежные стороны, а  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали параллелограмма, то  $2(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2$ , и т. д. (см. способ 1).

*Замечание.* Этот способ решения может быть предложен учащимся, которые знают эту формулу.

**8.** Заметим, что точка  $O$  пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника равноудалена от его вершин, т. е.  $OA = OB = OC$ . Пусть  $OK$  — высота, проведенная к стороне  $AB$ , тогда  $\angle AOK = 60^\circ$ ,  $AK = \frac{1}{2}AB = 10$ . Из  $\triangle AOK$   $\frac{AK}{AO} = \sin 60^\circ \Rightarrow AO = \frac{10}{\sin 60^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}/2} = \frac{20}{\sqrt{3}}$ .

Значит,  $AO = OC = \frac{20}{\sqrt{3}}$ .

Ответ:  $\frac{20}{\sqrt{3}}$ .

**9.** Из условия задачи следует, что точка  $O$  равноудалена от сторон  $MK$ ,  $KN$  и  $MN$   $\triangle MKN$ , значит, точка  $O$  — точка пересечения биссектрис  $MO$ ,  $KO$  и  $NO$ . Так как  $\angle M + \angle K + \angle N = 180^\circ$ , то  $2\angle MKO + 2\angle KMO + 2\angle KNO = 180^\circ$ .

Но  $\angle MKO = 40^\circ$  (по условию), тогда  $\angle KMO + \angle KNO = 50^\circ$ , и так как  $\angle KMO = \angle OMN$ , а  $\angle KNO = \angle ONM$ , то  $\angle MON = 180^\circ - (\angle OMN + \angle ONM) = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$ .

Ответ:  $130^\circ$ .

**10.** По условию точка  $O$  — точка пересечения биссектрис. Так как точка  $O$  равноудалена от сторон  $\triangle MEF$ , то  $OK = OL$ , где  $OL \perp FE$ . Тогда из  $\triangle EOL$ , где  $\angle OEL = 30^\circ$ ,  $EO = 8$ , значит,  $OL = \frac{1}{2}OE = 4$ .

Следовательно,  $OL = OK = 4$ .

Ответ: 4.

**11.** По условию задачи  $AA_1$  и  $BB_1$  — медианы  $\triangle ABC$ , причем  $AA_1 \perp BB_1$ .

Пусть  $O$  — точка пересечения медиан,  $OA_1 = x$ ,  $OB_1 = y$ , тогда  $AO = 2x$  и  $BO = 2y$  (по свойству медиан). Так как  $AA_1 = 12$  и  $BB_1 = 9$ , то  $AO + OA_1 = 12$ , или  $2x + x = 12$ ,  $3x = 12$ ,  $x = 4$ , тогда  $AO = 8$ .

Аналогично  $2y + y = 9$ ;  $3y = 9$ ,  $y = 3$ , тогда  $BO = 6$ .

Из  $\triangle OAB$  ( $\angle AOB = 90^\circ$ ) по теореме Пифагора имеем  $AB^2 = BO^2 + AO^2$ ,  $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ .

Ответ: 10.

**12.** По условию точка  $O$  — точка пересечения высот  $\triangle KMP$ . Так как  $OK = FP = 8$  и  $\angle EOK = \angle FOP$ , то  $\triangle KEO \sim \triangle FOP$  (по двум углам).

Значит,  $\frac{EO}{OK} = \frac{OF}{OP}$ , откуда  $EO = \frac{OK \cdot OF}{OP}$ .

Из прямоугольного  $\triangle FOP$ , где  $OF = 6$ ,  $FP = 8$ , находим  $OP = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ . Тогда  $EO = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8$ .

Ответ: 4,8.

**13.** По условию задачи точка  $K$  — точка пересечения медиан  $\triangle MRN$ , где  $MR = NR$ .

Продолжим  $RK$  до пересечения с основанием  $MN$  в точке  $P$ . Тогда  $RK = 2KP$  (по свойству медиан). Так как  $RK = 12$ , то  $KP = 6$ , значит,  $RP = 18$ . В равнобедренном  $\triangle MRN$  медиана  $RP$  является и высотой.

Значит,  $S_{\triangle MRN} = \frac{1}{2}MN \cdot RP = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 18 = 180$ .

Ответ: 180.

**14.** Так как точка  $O$  — точка пересечения биссектрис  $\triangle ABC$ , то она равноудалена от сторон, т. е.  $OK$  — радиус вписанной окружности ( $OK \perp AB$ ), тогда  $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2}BC \cdot r$ , где  $BC = 20$ ,  $r = OK = 8$ , т. е.  $S_{\triangle BOC} = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8 = 80$ .

Ответ: 80.



**15.** По условию  $NA = AK$  и  $NK \perp BA$ , тогда  $BN = BK$ , так как каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Значит,  $BK = BM = BN = 10$ .

Так как  $P_{\triangle MBN} = 35$ , то  $MB + BN + MN = 35$ , или  $10 + 10 + MN = 35$ , откуда  $MN = 15$ .

Ответ: 15.

**16.**  $ON$  и  $OM$  — серединные перпендикуляры к сторонам  $AC$  и  $AB$  соответственно, тогда  $OA = OB = OC = 16$ . Пусть  $OK$  — серединный перпендикуляр к стороне  $BC$ , где  $\angle OBC = \angle BOC = \angle OCB = 60^\circ$ , т. е.  $\triangle OBC$  — равносторонний, тогда  $S_{\triangle OBC} = \frac{16^2 \sqrt{3}}{4} = 64 \sqrt{3}$ .

*Замечание.* Здесь мы использовали формулу площади равностороннего треугольника  $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ , где  $a$  — сторона треугольника (см. № 489, стр. 132 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

**17.** Из прямоугольного  $\triangle MDC$ , где  $MC = 26$ ,  $MD = \frac{1}{2} MN = 10$ , имеем

$$CD = \sqrt{26^2 - 10^2} = 24.$$

По условию задачи  $O_1$  — точка пересечения медиан  $\triangle CMN$ . Пусть  $O_1D = x$ , тогда  $O_1C = 2x$  (по свойству медиан треугольника).

Значит,  $x + 2x = 24$ ;  $3x = 24$ ;  $x = 8$ ,  $2x = 16$ , т. е.  $O_1C = 16$ .

Пусть  $DO = y$ , тогда  $OO_1 = DC - (2x + y) = 24 - (16 + y) = 8 - y$ .

Заметим, что  $S_{\triangle MNC} = \frac{1}{2} MN \cdot DC = \frac{1}{2} MC \cdot NB$ , или  $20 \cdot 24 = 26 \cdot NB$ ,

$$\text{откуда } NB = \frac{240}{13}.$$

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle MNB \quad MB &= \sqrt{MN^2 - NB^2} = \sqrt{20^2 - \left(\frac{240}{13}\right)^2} = \sqrt{20^2 \left(1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2\right)} = \\ &= 20 \sqrt{\frac{169 - 144}{13^2}} = \frac{20}{13} \sqrt{25} = \frac{100}{13}. \end{aligned}$$

$\triangle NBM \sim \triangle NDO$  (как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle MNB$ ).

$$\text{Тогда } \frac{MB}{NB} = \frac{y}{10}, \text{ откуда } y = \frac{10 \cdot MB}{NB} = \frac{10 \cdot \frac{100}{13}}{\frac{240}{13}} = \frac{10 \cdot 100}{240} = \frac{25}{6}.$$

$$\text{Следовательно, } OO_1 = 8 - \frac{25}{6} = \frac{23}{6}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{23}{6}.$$

# ВПИСАННАЯ И ОПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТИ

## 1. Способ 1

Так как  $MK = NK = 26$ , то  $\triangle MKN$  — равнобедренный, тогда высота  $KE$  является медианой и биссектрисой, т. е.  $ME = EN = \frac{1}{2}MN = 10$ .

$S_{\triangle MNK} = \frac{1}{2}MN \cdot KE = p \cdot r$ , где  $p = \frac{1}{2}(MK + KN + MN) = \frac{1}{2}(26 + 26 + 20) = 36$ ,  $r = OE$  — радиус вписанной окружности, тогда  $\frac{1}{2} \cdot 20 \cdot KE = 36 \cdot OE$ , или  $10KE = 36 \cdot OE$ .

Из  $\triangle MKE$  по теореме Пифагора имеем

$$KE^2 = MK^2 - ME^2, KE = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24.$$

Значит,  $10 \cdot 24 = 36 \cdot OE$ , откуда  $OE = \frac{20}{3}$ .

Ответ:  $\frac{20}{3}$ .

*Замечание.* Здесь мы применили формулу  $S = p \cdot r$ , где  $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$  — полупериметр (см. № 697 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

## Способ 2

Проведем высоту  $KE$  к основанию  $MN$  и опустим перпендикуляр  $OF$  на боковую сторону  $MK$ . Заметим, что  $\triangle KOF \sim \triangle MEK$  (как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle MKE$ ).

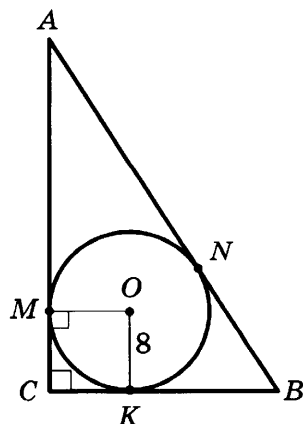
Тогда  $\frac{FO}{KO} = \frac{ME}{MK}$ , или

$$\frac{FO}{KE - OE} = \frac{ME}{MK}, \text{ или } \frac{r}{24 - r} = \frac{10}{26};$$

$$26r = 240 - 10r, 36r = 240, r = OE = \frac{20}{3}.$$

Ответ:  $\frac{20}{3}$ .

2. Пусть  $M$  и  $N$  — точки касания вписанной окружности. Так как  $OK \perp CB$ ,  $MC \perp CK$  и  $MC =$



$= CK = OK$ , то  $МОКС$  — квадрат. Кроме того,  $AM = AN$  и  $BN = BK$  (по свойству касательных).

Так как  $AN + NB = AB = 52$ , то  $AM + BK = AB = 52$ , тогда  $P_{\triangle ABC} = AC + CB + AB = (AM + BK) + (MC + CK) + 52 = 52 + 16 + 52 = 120$ .

Ответ: 120.

3.  $MN = 2 \cdot OM = 26$ . Так как  $\angle MKN$  — вписанный, опирающийся на диаметр  $MN$ , то  $\angle MKN = 90^\circ$ , тогда  $KN = \sqrt{26^2 - 24^2} = \sqrt{100} = 10$ .

Значит,  $P_{\triangle KMN} = KM + MN + NK = 24 + 26 + 10 = 60$ .

Ответ: 60.

4.  $\triangle ABC$  — равнобедренный, так как  $AC = BC$  (по условию), значит, высота  $CD$  является и медианой, тогда  $AD = DB = 3$ . Соединим точки  $A$  и  $O$ , тогда  $AO = OB = OC$  — радиус описанной окружности. Из  $\triangle AOD$   $AO = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ .

Значит,  $CD = CO + OD = 5 + 4 = 9$ ;

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27.$$

Ответ: 27.

5. По условию  $KF = EF$ , тогда  $P_{\triangle KFE} = 2KF + KE = 2(6 + 8) + KE = 28 + KE$ .

Пусть  $M$  — точка касания  $KE$  и окружности, а  $N$  — точка касания  $EF$  и окружности, тогда  $MK = KM$  и  $ME = EF$ , значит,  $P_{\triangle KFE} = 28 + 2KM = 28 + 12 = 40$ .

Ответ: 40.

6. Пусть  $M$  и  $N$  — соответственно точки касания касательных  $AC$  и  $CB$  с окружностью радиуса  $r$ . Тогда  $AM = AD = 24$ ,  $DB = BN = 10$  (по свойству касательных).

Кроме того,  $CM = CN = r$ , тогда  $P_{\triangle ABC} = AC + BC + AB = (24 + r) + (r + 10) + (24 + 10) = 68 + 2r$ .

По теореме Пифагора имеем  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , или

$$34^2 = (24 + r)^2 + (r + 10)^2;$$

$$1156 = 576 + 48r + r^2 + r^2 + 20r + 100;$$

$$2r^2 + 68r - 480 = 0; r^2 + 34r - 240 = 0,$$

откуда  $r_1 = 6$ ,  $r_2 = -40$  (не подходит, так как  $r > 0$ ).

Значит,  $P_{\triangle ABC} = 68 + 2 \cdot 6 = 80$ .

Ответ: 80.

7. По условию  $LE = ME$ , значит,  $\triangle LEM$  — равнобедренный (по определению) и  $\angle ELM = \angle EML$  (по свойству). Так как  $\angle LEM = 108^\circ$ , то  $\angle E = \frac{1}{2} \angle LEM = 54^\circ$ , тогда  $\angle L = \angle M = (180^\circ - 54^\circ) : 2 = 126^\circ : 2 = 63^\circ$ .

Ответ:  $\angle L = \angle M = 63^\circ$ ;  $\angle E = 54^\circ$ .

**8.** Так как  $AB$  — диаметр окружности, то  $\angle ACB = 90^\circ$  (вписанный угол, опирающийся на диаметр — прямой).

По условию  $\angle AC = 48^\circ \Rightarrow \angle B = \frac{1}{2} \angle AC = 24^\circ$ , тогда  $\angle A = 90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$ .

*Ответ:*  $\angle A = 66^\circ$ ;  $\angle B = 24^\circ$ ;  $\angle ACB = 90^\circ$ .

**9.**  $\triangle KME$  — равносторонний (по условию), тогда точка  $O$  — точка пересечения биссектрис, медиан и высот. Пусть  $OT$  — высота, опущенная из центра  $O$  на сторону  $KE$ , тогда в  $\triangle KOT$   $\angle OKT = 30^\circ$ ,  $KO = 5$ , следовательно,

$\cos \angle OKT = \frac{KT}{KO} \Rightarrow KT = KO \cdot \cos 30^\circ = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ , тогда  $KE = 2 \cdot KT = 5\sqrt{3}$ .

*Ответ:*  $5\sqrt{3}$ .

**10.**  $AB$  — диаметр окружности, тогда  $\angle ACB = 90^\circ$  (вписанный угол, опирающийся на диаметр — прямой).  $AO = CO$  — как радиусы.

По условию  $\angle A = 40^\circ \Rightarrow \angle ACO = 40^\circ$  (как углы при основании равнобедренного треугольника).

Значит,  $\angle AOC = 180^\circ - (40^\circ + 40^\circ) = 100^\circ$ .

*Ответ:*  $100^\circ$ .

**11.** Так как  $\triangle ABC$  — прямоугольный ( $\angle C = 90^\circ$ ),  $BC = 24$  и  $AC = 10$ , то  $AB = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26$ .

Пусть  $OD = r$  — радиус вписанной окружности. Заметим, что  $BM = BN$ ,  $AN = AD$  и  $MC = CD = OD = r$ , тогда  $AB = BN + AN = BM + AD = (BC - r) + (AC - r) = AC + BC - 2r$ , откуда  $2r = AC + BC - AB$ , т. е.  $r = \frac{AC + BC - AB}{2} =$

$$= \frac{10 + 24 - 26}{2} = 4.$$

Итак,  $OD = r = 4$ .

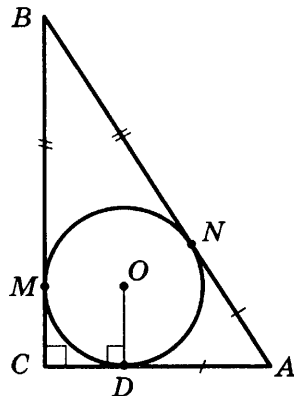
*Ответ:* 4.

**12.**  $OL = \sqrt{3}$  — радиус вписанной окружности, тогда  $O$  — точка пересечения биссектрис, значит,  $\angle OML = 30^\circ$ .

Из  $\triangle MOL$   $\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{ML}{OL} \Rightarrow ML = \sqrt{3} \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$ , тогда

$$MN = 2ML = 6.$$

*Ответ:* 6.



**13.** Из  $\triangle QNM$ , где  $MN = 8$ ,  $QM = 12$  и  $\angle QNM = 90^\circ$ , находим  $QN = \sqrt{12^2 - 8^2} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$ , тогда  $QT = 2QN = 8\sqrt{5}$ .

Заметим, что  $S_{\triangle QMT} = \frac{1}{2} QT \cdot MN = \frac{QT \cdot MT \cdot QM}{4R}$ , или  $MN = \frac{MT \cdot QM}{2R}$ , где  $R = QO$  — радиус описанной окружности, откуда

$$R = \frac{MT \cdot QM}{2MN} = \frac{12 \cdot 12}{2 \cdot 8} = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9, \text{ т. е. } QO = 9.$$

Ответ: 9.

*Замечание.* Здесь мы использовали формулу площади треугольника  $S = \frac{abc}{4R}$ , где  $a, b, c$  — стороны,  $R$  — радиус описанной окружности.

**14.** Проведем  $OK \perp AC$ , где  $OK$  — радиус вписанной окружности,  $AO$  — биссектриса  $\angle A = 60^\circ$ , тогда  $\angle OAK = 30^\circ \Rightarrow OK = r = \frac{1}{2} AO = 10$  и  $AK = AO \cos 30^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ .

Пусть  $BM = BN = x$ ,  $AM = AK = y$  (по свойству касательных).

Из  $\triangle ABC$ , где  $\angle B = 30^\circ \Rightarrow AC = \frac{1}{2} AB$ , или  $y + r = \frac{1}{2}(x + y)$ , или  $2y + 2r = x + y$ ,  $x = y + 2r = 10\sqrt{3} + 20$ , тогда  $BC = x + r = 10\sqrt{3} + 20 + 10 = 20(\sqrt{3} + 1)$ .

Ответ:  $20(\sqrt{3} + 1)$ .

**15.** Проведем высоту  $SM$  к основанию  $RT$ .

Так как  $SR = ST = 5$  (по условию), то высота  $SM$  — медиана  $\triangle SRT$ , тогда  $RM = 3$ .

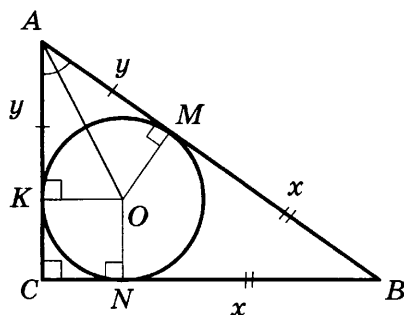
Из  $\triangle SRM$   $SM = \sqrt{SR^2 - RM^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ .

Тогда  $\frac{1}{2} RT \cdot SM = \frac{RS \cdot ST \cdot RT}{4 \cdot RO}$ , или  $SM = \frac{RS \cdot ST}{2RO}$ , откуда  $RO = \frac{RS \cdot ST}{2 \cdot SM} = \frac{5 \cdot 5}{2 \cdot 4} = \frac{25}{8}$ .

Ответ:  $\frac{25}{8}$ .

*Замечание.* Здесь мы использовали формулу к задаче № 13

$$\left( S_{\triangle} = \frac{abc}{4R} \right).$$



**16.** Пусть  $L$  и  $F$  — точки касания соответственно касательных  $MN$  и  $NE$  с окружностью.

Тогда  $KOFE$  — квадрат и  $OK = r$  — радиус вписанной окружности. Заметим, что  $NL = NF = 12$ ,  $FE = EK$  и  $ML = MK = 8$  (по свойству касательных).

Из  $\triangle MEN$  по теореме Пифагора имеем

$$(NF + FE)^2 + (EK + MK)^2 = MN^2, \text{ или } (12 + r)^2 + (8 + r)^2 = 400;$$

$$2r^2 + 144 + 64 + 24r + 16r = 400; 2r^2 + 40r - 192 = 0; r^2 + 20r - 96 = 0,$$

откуда  $r_1 = 4$ ,  $r_2 = -24$  (не удовлетворяет, так как  $r > 0$ ).

Значит,  $OK = r = 4$ .

Ответ: 4.

**17.** Так как  $AC = BC$ , то  $\triangle ABC$  — равнобедренный (по определению).

Так как  $P_{\triangle ABC} = 40$ , то  $2AC + AB = 40$ ,  $AB = 2AD$  ( $CD$  — медиана),  $2AC + 2AD = 40$ , или  $AC + AD = 20$ .

Но  $OD = 0,4CD$  (по условию),  $CO = CD - OD = CD - 0,4CD = 0,6CD$ .

Пусть  $M$  — точка касания  $AC$  с окружностью, тогда  $\triangle CMO \sim \triangle ACD$  (как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle ACD$ ), тогда

$$\frac{MO}{CO} = \frac{AD}{AC}, \text{ или } \frac{OD}{CO} = \frac{AD}{AC}, \frac{0,4CD}{0,6CD} = \frac{AD}{AC}, \text{ откуда } \frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}.$$

Но  $AC + AD = 20$ , тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} AC + AD = 20, \\ \frac{AD}{AC} = \frac{2}{3}, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{3}{2}AD + AD = 20, \\ AC = \frac{3}{2}AD, \end{cases}$$

$5AD = 40$ ,  $AD = 8$ , тогда  $AB = 2AD = 16$ .

Ответ: 16.

**18.** Так как  $MT$  — диаметр окружности, то  $\angle MKT = 90^\circ$  (вписанный угол, опирающийся на диаметр — прямой), тогда  $KO = OM = OT$  — как радиусы окружности.

Из  $\triangle MKT$   $MT^2 = 12^2 + 16^2$ ,  $MT = \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} = 20$ , значит,  $KO = \frac{1}{2}MT = 10$ .

Ответ: 10.

**19.**  $\triangle ABC$  — прямоугольный (см. № 18), тогда  $\cos 30^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{BC}{\cos 30^\circ}$ , или  $AB = \frac{36}{\sqrt{3}/2} = \frac{72}{\sqrt{3}} = \frac{72\sqrt{3}}{3} = 24\sqrt{3}$ , тогда  $CO = \frac{1}{2}AB = 12\sqrt{3}$ .

Ответ:  $12\sqrt{3}$ .

**20.** Так как окружность вписана в треугольник, то  $O$  — точка пересечения биссектрис, тогда  $\angle NLM = 40^\circ$ ;  $\angle OML = 180^\circ - (20^\circ + 120^\circ) = 40^\circ \Rightarrow \angle LMN = 80^\circ$ ; значит,  $\angle N = 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ) = 60^\circ$ .

*Ответ:*  $60^\circ$ .

**21.**  $RO = 13$ ,  $OT = 5$ , тогда  $RT = 18$   $RE = RF$ , значит,  $\triangle ERF$  — равнобедренный.

$S_{\triangle ERF} = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot EF = 9EF$ . Пусть  $RE = RF = x$ ,  $ET = TF = y$ , тогда

$$S_{\triangle ERF} = 18y.$$

Из  $\triangle ERT$   $x^2 - y^2 = 18^2$ .

Кроме того,  $S_{\triangle ERF} = \frac{abc}{4R}$ , где  $a = b = RE = x$ ,  $c = EF = 2y$ ,  $R = 13$  — ра-

диус описанной окружности. Значит,  $S_{\triangle ERF} = \frac{x^2 \cdot 2y}{4 \cdot 13} = 18y$ , или  $\frac{x^2}{26} = 18$ ,  $x^2 = 26 \cdot 18$ .

Но  $x^2 - y^2 = 18^2$ , тогда  $y^2 = x^2 - 18^2$ , или  $y^2 = 26 \cdot 18 - 18^2$ ,  $y^2 = 18(26 - 18) = 18 \cdot 8 = 144$ , откуда  $y = 12$ , тогда  $S_{\triangle ERF} = 18y = 18 \cdot 12 = 216$ .

*Ответ:* 216.

**22.** Пусть  $CD = h$ , где  $CD$  — высота, опущенная на  $AB$ ; пусть  $AB = 2x$ , тогда  $AD = DB = x$  (высота  $CD$  является и медианой в равнобедренном  $\triangle ABC$ ).

$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot CB \cdot AB}{4R}$ , где  $AC = CB = 8\sqrt{5}$ ,  $AB = 2x$  и  $R = AO = 10$ , тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{8\sqrt{5} \cdot 8\sqrt{5} \cdot 2x}{4 \cdot 10} = 16x; \text{ с другой стороны, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot h = xh.$$

Значит,  $16x = xh$ , откуда  $h = 16$ .

Из  $\triangle ADC$  по теореме Пифагора имеем

$$h^2 + x^2 = (8\sqrt{5})^2, \text{ или } 256 + x^2 = 320, \text{ откуда } x^2 = 64, \text{ т. е. } x = 8.$$

Следовательно,  $S_{\triangle ABC} = 16 \cdot 8 = 128$ .

*Ответ:* 128.

**23.** Поскольку отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны, то  $BE = BM = 10$ ,  $MC = CF = 6$  и  $AF = AE = 4$ .

Тогда  $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC = (4 + 10) + (10 + 6) + (6 + 4) = 40$ .

*Ответ:* 40.

**24.** Аналогично № 23  $NT = NS = x$ ,  $MT = MR = y$ ,  $QR = QS = z$ .

По условию  $QN = 10$ ,  $MN = 20$ ,  $MQ = 24$ , тогда 
$$\begin{cases} x + z = 10, \\ x + y = 20, \text{ или, складывая} \\ y + z = 24, \end{cases}$$

вая почленно уравнения системы, имеем  $2(x + y + z) = 54$ ,  $x + y + z = 27$ , и так как  $y + z = 24$ , то  $x = 27 - 24 = 3$ .

Итак,  $NT = x = 3$ .

*Ответ:* 3.

**25.**  $ME$  — диаметр окружности, тогда  $EO = OM = 5$  и  $\angle MKE = 90^\circ$  (вписанный угол, опирающийся на диаметр — прямой). Значит,  $ME^2 = KM^2 + KE^2$ ,  $KE^2 = 10^2 - 6^2$ ,  $KE^2 = 8^2$ , т. е.  $KE = 8$ .

*Ответ:* 8.

**26.**

Способ 1

Так как  $AB = BC = AC$  (по условию), то  $\triangle ABC$  — равносторонний, тогда  $O$  — точка пересечения медиан, биссектрис и высот.

В  $\triangle CDO$   $CO = 10$  — радиус описанной окружности,  $\angle DCO = 30^\circ$ ,  $\angle CDO = 90^\circ$  ( $BD \perp AC$ ), тогда  $DO = \frac{1}{2}CO = 5$ ,  $OB = 2 \cdot DO = 10$  (по свойству медиан), значит,  $BD = DO + OB = 5 + 10 = 15$ .

*Ответ:* 15.

Способ 2

$OC = OB = 10$  (как радиусы окружности);  $DO = \frac{1}{2}OB = 5$  (по свойству медиан треугольника). Тогда  $BD = DO + OB = 15$ .

*Ответ:* 15.

**27.** По условию  $MK = EK$ , т. е.  $\triangle MKE$  — равнобедренный, где  $\angle K = 60^\circ$ , тогда  $\angle M = \angle E = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$ . Значит,  $\triangle MKE$  — равносторонний.

Пусть  $MD$  — высота, опущенная на  $KE$ .

В  $\triangle MDE$   $ME = 4\sqrt{3}$ ,  $\angle E = 60^\circ$ , тогда  $\sin 60^\circ = \frac{MD}{ME} \Rightarrow$

$\Rightarrow MD = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$ . Пусть  $OD = x$ , тогда  $MO = 2x$  (по свойству медиан). Имеем  $x + 2x = 6$ ,  $3x = 6$ , откуда  $x = 2$ , значит,  $MO = 2x = 4$ .

*Ответ:* 4.

**28.** По условию  $LK = LT$  и  $\angle LKT = 30^\circ$ , тогда  $\angle L = 60^\circ$ . Соединим центр  $O$  окружности с точкой  $L$ , тогда  $LO = OT$  (как радиусы), и так как



$\angle LTO = 60^\circ$ , то  $\angle LOT = 60^\circ$ , значит,  $\triangle LOT$  — равносторонний. Пусть  $M$  — точка пересечения  $LO$  и  $KT$ .

Так как  $\triangle KLT$  — равнобедренный, то  $LM$  — высота, медиана и биссектриса, тогда из  $\triangle KLM$  имеем

$$\cos 30^\circ = \frac{KM}{KL} \Rightarrow KL = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 6. \text{ Значит, } KL = LT = OT = 6.$$

*Ответ:* 6.

*Замечание.* Задачу можно решить с использованием теоремы синусов:  $\frac{KT}{\sin \angle L} = 2R$  (изучается в 9 классе).

**29.** Из  $\triangle ABD$ , где  $BD = 4$ ,  $AB = 5$  и  $\angle ADB = 90^\circ$ , находим  $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$ ,  $AD = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$ .

Заметим, что  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ , где  $AC = 3 + DC$ .

$$\begin{aligned} \text{С другой стороны, } S_{\triangle ABC} &= \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4 \cdot OC} = \frac{5 \cdot BC(3 + DC)}{4 \cdot 5} = \\ &= \frac{1}{4} BC(3 + DC). \end{aligned}$$

$$\text{Значит, } \frac{1}{2}(3 + DC) \cdot 4 = \frac{1}{4} BC(3 + DC).$$

Так как  $3 + DC > 0$ , то  $2 = \frac{1}{4} BC$ , откуда  $BC = 8$ .

*Ответ:* 8.

*Замечание.* Задачу можно решить и другим способом.

**30.** Так как  $MO = ON$  (как радиусы), то  $\triangle MON$  — равнобедренный, тогда высота  $OF$  является медианой и биссектрисой, значит,  $MF = FN = \frac{1}{2} MN = 12$ .

$$\text{Из } \triangle MOF \text{ } MO = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13.$$

*Ответ:* 13.

**31.**  $KM = KL = 20$ , значит,  $\triangle MKL$  — равнобедренный. Проведем высоту  $KN$ , тогда  $OR = OK = r$  — радиус вписанной окружности. Заметим, что  $\triangle KRO \sim \triangle MKN$  (как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle RKO$ ). Следовательно,  $\frac{MK}{MN} = \frac{KO}{RO}$ , или  $\frac{20}{MN} = \frac{10}{r}$ , откуда  $MN = 2r$ .

Из  $\triangle MKN$  по теореме Пифагора имеем

$(10 + r)^2 + MN^2 = 20^2$ , или  $(10 + r)^2 + 4r^2 = 400$ ;  $100 + 20r + 5r^2 = 400$ , или  $5r^2 + 20r - 300 = 0$ , или  $r^2 + 4r - 60 = 0$ , откуда  $r_1 = 6$ ,  $r_2 = -10$  (не подходит, так как  $r > 0$ ).

Значит,  $RO = r = 6$ .

Ответ: 6.

Замечание. Возможны и другие способы решения.

**32.** Известно, что если  $a$  и  $b$  — катеты,  $c$  — гипотенуза,  $r$  — радиус вписанной окружности, то  $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$  (см. задачу № 11).

По условию  $r = 4\sqrt{3}$ , тогда  $a + b - c = 8\sqrt{3}$ .

Так как  $\angle A = 60^\circ$ , то  $\angle B = 30^\circ \Rightarrow b = \frac{1}{2}c$ , значит,  $a + \frac{1}{2}c - c = 8\sqrt{3}$ ,

или  $a - \frac{1}{2}c = 8\sqrt{3}$ .

Кроме того, по теореме Пифагора  $a^2 + b^2 = c^2$ , или  $a^2 + \frac{1}{4}c^2 = c^2$ ;

$$a^2 = \frac{3}{4}c^2, \text{ откуда } a = \frac{\sqrt{3}}{2}c, \text{ тогда } \frac{\sqrt{3}}{2}c - \frac{1}{2}c = 8\sqrt{3}, \text{ или } (\sqrt{3} - 1)c = 16\sqrt{3},$$

$$\text{откуда } c = \frac{16\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}; b = \frac{1}{2}c = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}; a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{24}{\sqrt{3} - 1}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{96\sqrt{3}}{(\sqrt{3} - 1)^2} =$$

$$= \frac{96\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}} = \frac{48\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = 48\sqrt{3}(2 + \sqrt{3}).$$

Ответ:  $48\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})$ .

**33.** Пусть  $r$  — радиус вписанной окружности. Из  $\triangle QML$  по теореме Пифагора имеем  $QM^2 + ML^2 = QL^2$ , где  $QM = 4 + r$ ,  $ML = 6 + r$  и  $QL = 4 + 6 = 10$  (по свойству касательных к окружности).

Значит,  $(4 + r)^2 + (6 + r)^2 = 100$ , или  $16 + 8r + r^2 + 36 + 12r + r^2 = 100$ ;  $2r^2 + 20r - 48 = 0$ , или  $r^2 + 10r - 24 = 0$ , откуда  $r_1 = -12$  (не подходит, так как  $r > 0$ ),  $r_2 = 2$ .

Тогда  $ML = 6 + r = 8$ .

Ответ: 8.

**34.** Пусть  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $BC = a$ .

Так как  $\angle B = 30^\circ$  и  $\angle C = 90^\circ$ , то  $AC = \frac{1}{2}AB$ , или  $b = \frac{1}{2}c$ . По условию

$r = 4$  м — радиус вписанной окружности, тогда по свойству касательных к окружности имеем

$$BC = 4 + x, AC = 4 + y, AB = x + y.$$

По теореме Пифагора  $AB^2 = AC^2 + BC^2$ , или  $(x + y)^2 = (4 + y)^2 + (4 + x)^2$ .

Так как  $b = \frac{1}{2}c$ , или  $y + 4 = \frac{1}{2}(x + y)$ , то  $2y + 8 = x + y$ , или  $x - y = 8$ , откуда  $x = y + 8$ .

Значит,  $(y + 8 + y)^2 = (4 + y)^2 + (4 + y + 8)^2$ ,  
 $(2y + 8)^2 = (4 + y)^2 + (12 + y)^2$ ;  $4(y + 4)^2 - (4 + y)^2 =$   
 $= (12 + y)^2$ ;  $3(y + 4)^2 = (12 + y)^2$ .

Так как  $y + 4 > 0$ ,  $12 + y > 0$ , то  $\sqrt{3}(y + 4) =$   
 $= 12 + y$ , или  $(\sqrt{3} - 1)y = 12 - 4\sqrt{3}$ , откуда  $y =$

$$= \frac{4(3 - \sqrt{3})}{\sqrt{3} - 1} = \frac{4\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{3} - 1} = 4\sqrt{3}.$$

Значит,  $AC = y + 4 = 4\sqrt{3} + 4 = 4(\sqrt{3} + 1)$ .

Ответ:  $4(\sqrt{3} + 1)$ .

*Замечание.* Задачу можно решить иначе, например, по формуле

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c) \text{ (см. № 11)}.$$

**35.** Заметим, что  $S_{\triangle MEF} = \frac{1}{2}EF \cdot MK = \frac{ME \cdot MF \cdot EF}{4 \cdot MO}$ , где  $MO = 10$ ,  
 $MK = 16$ .

Пусть  $ME = MF = x$ ,  $EK = KF = y$ , тогда  $\frac{1}{2} \cdot 2y \cdot 16 = \frac{x^2 \cdot 2y}{4 \cdot 10}$ , или  
 $16y = \frac{x^2 y}{20}$ ;  $y \neq 0$ ,  $x^2 = 16 \cdot 20$ ,  $x = 8\sqrt{5}$ .

Кроме того, из  $\triangle MEK$ , по теореме Пифагора  $x^2 - y^2 = 16^2$ , или  
 $320 - y^2 = 256$ ,  $y^2 = 64$ ,  $y = 6$ . Значит,  $ME = x = 8\sqrt{5}$ ,  $EF = 2y = 12$ .

Ответ:  $ME = 8\sqrt{5}$ ,  $EF = 12$ .

**36.** Пусть  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $r = 4$ , тогда  $r = \frac{a + b - c}{2}$  (см. № 11),  
 или  $r = \frac{a + b - 20}{2} = 4$ , где  $c = AM + MB = 20$ .

Значит,  $a + b = 28$ .

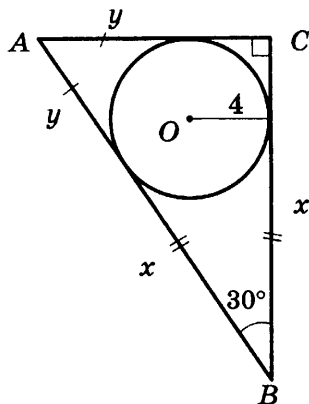
Кроме того по теореме Пифагора имеем  $a^2 + b^2 = 400$ .

Имеем систему уравнений  $\begin{cases} a^2 + b^2 = 400, \\ a + b = 28, \end{cases}$

$(a + b)^2 = 400 + 2ab$ ,  $28^2 = 400 + 2ab$ , откуда  $2ab = 784 - 400$ , тогда  
 $ab = 192$ .

Значит,  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab = 96$ .

Ответ: 96.



**37.** Пусть  $RK = x$ ,  $QK = y$ ,  $RQ = 30$ .

Решая аналогично № 36, имеем

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 30^2, \\ \frac{x + y - 30}{2} = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 900, \\ x + y = 42, \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + (42 - x)^2 = 900, \\ y = 42 - x, \end{cases}$$

$x^2 + 1764 - 84x + x^2 = 900$ ,  $2x^2 - 84x + 864 = 0$ ,  $x^2 - 42x + 432 = 0$ , откуда находим  $x_1 = 24$ ;  $x_2 = 18$ , тогда  $y_1 = 42 - 24 = 18$ ;  $y_2 = 42 - 18 = 24$ .

Значит,  $RK = 24$ ,  $QK = 18$ , или  $RK = 18$ ,  $QK = 24$ .

Из условия задачи следует, что  $RK < 20$ , тогда  $RK = 18$ ,  $QK = 24$ .

*Ответ:*  $RK = 18$ ;  $QK = 24$ .

**38.** Пусть  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$ ,  $OM = r = 2$ .

По условию  $b + a = 17$ .

Кроме того,  $\frac{a + b - c}{2} = 2$  (см. № 11), откуда  $a + b - c = 4$ , или  $17 - c = 4$ ,

откуда  $c = 17 - 4 = 13$ . Значит,  $P_{\triangle ABC} = a + b + c = 17 + 13 = 30$ .

*Ответ:* 30.

**39.**  $OE$  — радиус вписанной окружности, тогда  $O$  — точка пересечения биссектрис.

Соединим центр окружности с точкой  $M$ ; по свойству биссектрисы угла треугольника имеем  $\frac{MK}{ME} = \frac{KO}{OE}$ , где  $\frac{KO}{OE} = \frac{12}{5}$  (по условию) и

$MK = NK = 30$ , тогда получим  $\frac{30}{ME} = \frac{12}{5}$ , откуда  $ME = \frac{5 \cdot 30}{12} = \frac{25}{2}$ .

Значит,  $MN = 2ME = 25$ .

*Ответ:* 25.

**40.** Пусть  $\angle E = \alpha$ , тогда  $\angle F = 2\alpha$ .

Заметим, что  $\angle EMF = 90^\circ$ , как вписанный угол, опирающийся на диаметр.

Значит,  $\alpha + 2\alpha = 90^\circ$ , или  $3\alpha = 90^\circ$ , откуда  $\alpha = 30^\circ$ .

Тогда  $\cos 30^\circ = \frac{EM}{EF} \Rightarrow EF = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 8$ .

Следовательно,  $EO = \frac{1}{2}EF = 4$ .

*Ответ:* 4.

**41.**  $AC = BC$ , т. е.  $\triangle ABC$  — равнобедренный, тогда  $P_{\triangle ABC} = 2AC + AB$ , где  $AB = 8$  (по условию). Пусть  $CD = x$ ,  $AD = y$ , тогда  $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ .

Но  $AD = y = \frac{1}{2}AB = 4$  (по свойству касательных), значит,  $\frac{x}{4} = \frac{3}{2}$ ,

откуда  $x = 6$ , тогда  $AC = AD + DC = y + x = 4 + 6 = 10$ .

Следовательно,  $P_{\triangle ABC} = 2 \cdot 10 + 8 = 28$ .

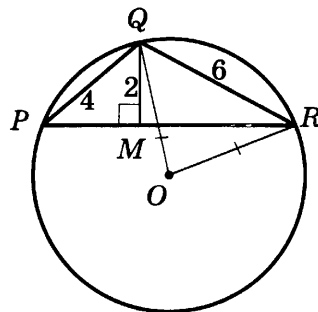
Ответ: 28.

**42.** Поскольку  $QP = 4$ ,  $QM = 2$  и  $QM \perp PM$ , то  $\angle P = 30^\circ \Rightarrow \angle QOR = 60^\circ$ .

Значит,  $\angle O = 60^\circ$ .

Так как  $OQ = OR$ , то  $\angle OQR = \angle ORQ = 60^\circ$ , т. е.  $\triangle QOR$  — равносторонний, тогда  $OR = 6$ .

Ответ: 6.



**43.** По условию задачи  $KR = KM = 16$ , значит,  $\triangle KRM$  — равнобедренный.

$OM = OK$  — как радиусы окружности и  $ON$  — высота  $\triangle MOK \Rightarrow ON$  — медиана, тогда  $MN = \frac{1}{2}MK = 8$ .

Из  $\triangle MON$   $OM = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ .

Ответ: 10.

**44.**

#### Способ 1

В равнобедренном  $\triangle ABC$   $AC = BC = 10$ ,  $OM$  — радиус вписанной окружности, тогда  $OM \perp AB$  (касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания).

Проведем высоту  $MC$ , тогда в  $\triangle AMC$   $\cos \angle A = \frac{AM}{AC} = 0,6$  (по условию), значит,  $AM = 10 \cdot 0,6 = 6$ , тогда  $AB = 12$ .

По теореме Пифагора имеем  $MC = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ .

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot MC = \frac{1}{2}(AC + BC + AB) \cdot OM$ , или

$12 \cdot 8 = (10 + 10 + 12) \cdot OM$ ;  $32 \cdot OM = 96$ , откуда  $OM = 3$ .

Ответ: 3.

*Замечание.* Здесь мы применили формулу площади треугольника  $S = p \cdot r$ , где  $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$  — полупериметр,  $r$  — радиус вписанной окружности.

#### Способ 2

Пусть  $K$  — точка касания окружности и касательной  $AC$ . Тогда  $\triangle AMC \sim \triangle CKO$  (как прямоугольные, имеющие общий острый  $\angle ACM$ ). Из подобия треугольников следует  $\frac{AM}{MC} = \frac{KO}{KC}$ , где  $AM = 6$ ,  $MC = 8$  (см. способ 1).

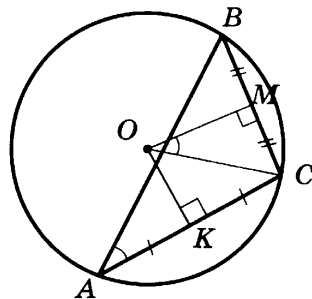
Кроме того,  $KO = \frac{6 \cdot 4}{8} = 3$ . Но  $KO = OM$ , т. е.  $OM = 3$ .

Ответ: 3.

**45.** Соединим центр окружности с точкой  $C$  и опустим перпендикуляр  $OM$  на  $BC$ .

Заметим, что  $\angle A = \frac{1}{2} \angle BC$ .

Так как  $M$  — середина  $BC$  ( $OM$  — медиана и биссектриса равнобедренного  $\triangle COB$ ), то  $\angle MOC = \frac{1}{2} \angle BC$ . Значит,  $\angle A = \angle MOC$ .



Из  $\triangle OKC$ , где  $KC = \frac{1}{2} AC = 10$  и  $OK = 12$  (по условию), находим  $OC = \sqrt{OK^2 + KC^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}$ .

Тогда  $\sin \angle MOC = \sin \angle A = \frac{MC}{OC} = \frac{6,5}{2\sqrt{61}} = \frac{13}{4\sqrt{61}}$ .

Ответ:  $\frac{13}{4\sqrt{61}}$ .

*Замечание.* Задачу можно решить с помощью теоремы синусов:  $\sin \angle A = \frac{13}{2R}$ , где  $R = OC = 2\sqrt{61}$  (изучается в 9 классе).

**46.** Так как  $\triangle MKN$  — равнобедренный и  $\angle K = 120^\circ$ , то  $\angle N = \angle M = 30^\circ$ , тогда  $\angle MK = 60^\circ$ . Значит, в  $\triangle MOK$   $\angle MOK = 60^\circ$ , так как  $OM = OK$  (как радиусы окружности), то  $\angle OMK = \angle OKM = 60^\circ$ , т. е.  $\triangle MOK$  — равносторонний. Следовательно,  $MO = MK = 16$ .

Ответ: 16.

*Замечание.* Задачу можно решить с помощью теоремы синусов:  $\frac{MN}{\sin \angle K} = 2R$  и т. д. (изучается в 9 классе).

**47.** Так как  $\angle PRQ$  — вписанный и опирается на диаметр, то  $\angle PRQ = 90^\circ$ , тогда  $PQ = 2 \cdot OR = 68$ . Из  $\triangle PRQ$   $RQ = \sqrt{PQ^2 - PR^2}$ , или  $RQ = \sqrt{68^2 - 60^2} = \sqrt{8 \cdot 128} = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 64} = 4 \cdot 8 = 32$ .

Тогда  $S_{\triangle PQR} = \frac{1}{2} PR \cdot RQ = \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 32 = 960$ .

Ответ: 960.

**48.** Проведем высоту  $KM$  на основание  $EF$ . Тогда в равнобедренном  $\triangle KEF$  ( $KE = KF$ ) высота  $KM$  является и медианой, т. е.  $EM = MF = 24$ .

$$S_{\Delta EKF} = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot KM = 24KM; \text{ с другой стороны, } S_{\Delta EKF} = \frac{abc}{4R}, \text{ где}$$

$$a = EK, b = KF, c = EF, R = EO = 25, \text{ тогда имеем } 24KM = \frac{KE \cdot KF \cdot EF}{4 \cdot 25} =$$

$$= \frac{KE \cdot KF \cdot 12}{25}.$$

Пусть  $KM = h$ ,  $KE = KF = x$ , тогда  $24h = \frac{12x^2}{25}$ , или  $x^2 = 50h$ .

Из  $\Delta KME$   $x^2 = h^2 + 24^2$ , тогда получим  $50h = h^2 + 576$ , или  $h^2 - 50h + 576 = 0$ , откуда находим  $h_1 = 18$ ,  $h_2 = 32$ .

Значит,  $x^2 = 50 \cdot 18 = 900$ , откуда  $x = 30$ ;  $x^2 = 32 \cdot 50$ ,  $x = \sqrt{2 \cdot 16 \cdot 50} = 10 \cdot 4 = 40$ .

Следовательно  $EK = 30$ , или  $EK = 40$ .

Ответ: 30 или 40.

**49.** Решая аналогично № 48, имеем

$$S_{\Delta MKN} = \frac{1}{2} MN \cdot KE = 4KE, \text{ где } KE \text{ — высота, проведенная на основа-}$$

ние  $MN$ ; с другой стороны

$$S_{\Delta MKN} = \frac{MK \cdot KN \cdot MN}{4 \cdot ON} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 8}{4 \cdot ON} = \frac{50}{ON}.$$

Значит,  $\frac{50}{ON} = 4KE$ , или  $\frac{25}{ON} = 2KE$ .

Из  $\Delta MKE$   $KE = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ , тогда  $\frac{25}{ON} = 6$ , откуда  $ON = \frac{25}{6}$ .

Ответ:  $\frac{25}{6}$ .

**50.** Известно, что площадь описанного многоугольника равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности (см. № 697 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

Значит,  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (AB + BC + CD + AD) \cdot OE$ .

Но  $AB + DC = AD + BC = 24$  (по свойству описанного четырехугольника).

Тогда  $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (24 + 24) \cdot 10 = 240$ .

Ответ: 240.

**51.** Аналогично № 50 имеем

$$S_{MNKL} = \frac{1}{2} (MN + NK + KL + ML) \cdot OE = 24.$$

По условию  $MN + LK = 20$ , значит,  $ML + NK = 20$  (по свойству описанного четырехугольника). Следовательно,

$$\frac{1}{2} \cdot (20 + 20) \cdot OE = 24, KO \cdot OE = 24, OE = \frac{6}{5} = 1,2.$$

*Ответ:* 1,2.

**52.** По условию задачи  $MK + EF = 40$ .

Но  $ME + KF = MK + EF$  (см. № 50), тогда  $P_{MEFK} = (ME + KF) + (MK + EF) = 40 + 40 = 80$ .

*Ответ:* 80.

**53.** Так как  $ABCD$  — равнобедренная трапеция ( $AD = BC$ ), то  $AD = BC = 12 + 15 = 27$ .

По свойству касательных, проведенных к окружности, имеем  $AB = 12 \cdot 2 = 24$ ;  $DC = 15 \cdot 2 = 30$ .

*Ответ:*  $AB = 24$ ;  $DC = 30$ .

**54.** Так как четырехугольник вписанный, то  $\angle K + \angle M = 180^\circ$ ,  $\angle E + \angle N = 180^\circ$ .

По условию  $\angle K = 53^\circ$ ,  $\angle E = 75^\circ$ , тогда  $\angle M = 180^\circ - 53^\circ = 127^\circ$ ,  $\angle N = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ .

*Ответ:*  $\angle M = 127^\circ$ ;  $\angle N = 105^\circ$ .

**55.** По условию  $\angle AOB = 120^\circ$ , тогда  $\angle AOD = 60^\circ$ .

Так как  $ABCD$  — прямоугольник (по условию), то  $AC = BD$  (по свойству). Так как прямоугольник является параллелограммом, то  $O$  — середина диагоналей, значит,  $AO = OD$ , т. е.  $\triangle AOD$  — равнобедренный, тогда  $\angle DAO = \angle ADO = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$ .

Значит,  $\triangle AOD$  — равносторонний, т. е.  $AO = AD = 10$ .

*Ответ:* 10.

**56.** По свойству описанного четырехугольника  $AB + DC = AD + BC$ . Так как  $P_{ABCD} = 48$ , то  $AB + DC = 24$ , тогда средняя линия  $MN$  трапеции

будет равна  $MN = \frac{1}{2}(AB + DC) = 12$ .

*Ответ:* 12.

**57.** По свойству описанного четырехугольника имеем  $AB + CD = BC + AD$ , или  $6 + 9 = 8 + AD$ , откуда  $AD = 7$ .

Тогда  $P_{ABCD} = (9 + 6) \cdot 2 = 30$ .

*Ответ:* 30.

**58.** По свойству описанного четырехугольника имеем  $MN + LK = ML + NK$ .

Пусть  $MN = 2x$ , тогда  $NK = 6x$ ,  $KL = 7x$ .

Но  $MN + LK = ML + NK$  и  $P_{MNKL} = 54$ .

Значит,  $2(MN + LK) = 54$ , или  $2x + 7x = 27$ ;  $9x = 27$ ,  $x = 3$ .



Тогда  $MN = 2x = 6$ ,  $NK = 6x = 18$ .

$KL = 7x = 21$ ,  $LM = 27 - NK = 27 - 18 = 9$ .

Ответ:  $MN = 6$ ;  $NK = 18$ ;  $KL = 21$ ;  $LM = 9$ .

**59.**

### Способ 1

Проведем высоту трапеции  $BE$ . Так как  $\angle A = 60^\circ$ , то  $\angle ABE = 30^\circ$ . Точка  $O$  — центр вписанной окружности, значит,  $AO$  — биссектриса  $\angle A$ , т. е.  $\angle OAK = 30^\circ$ , тогда  $\triangle ABE \sim \triangle AOK$  — как прямоугольные, имеющие равные острые углы.

Пусть  $AD = 2x$ ,  $BC = 2y$ ,  $MN = 20$  м (по условию), тогда  $\frac{2x + 2y}{2} = 20$ ,  
 $2x + 2y = 40$ .

Но  $AB + CD = BC + AD$  (по свойству описанного четырехугольника),  
 или  $2AB = 2x + 2y$ , или  $2AB = 40$ ,  $AB = 20$ . Тогда  $\frac{AB}{BE} = \frac{AO}{AK}$ , или

$$\frac{20}{2OK} = \frac{AO}{x}, \text{ или } \frac{10}{OK} = \frac{AO}{x}.$$

Из  $\triangle AOK$ , где  $\angle OAK = 30^\circ \Rightarrow OK = \frac{1}{2}AO$ , тогда  $AO = 2OK$ , т. е.  $\frac{10}{OK} =$   
 $= \frac{2 \cdot OK}{x}$ .

Но  $\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{x}{OK} \Rightarrow x = OK \sqrt{3}$ , тогда  $\frac{10}{OK} = \frac{2 \cdot OK}{OK \sqrt{3}}$ , или  $\frac{5}{OK} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  
 откуда  $OK = 5\sqrt{3}$ .

Ответ:  $5\sqrt{3}$ .

### Способ 2

$$MN = \frac{2x + 2y}{2} = 20, \text{ или } x + y = 10.$$

$$2AB = 2x + 2y = 40, AB = 20 \text{ (см. способ 1)}.$$

$$\text{Из } \triangle BEA \cos 30^\circ = \frac{BE}{AB} = \frac{2 \cdot OK}{20} = \frac{OK}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ откуда } OK = 5\sqrt{3}.$$

Ответ:  $5\sqrt{3}$ .

**60.** Проведем высоту трапеции  $PE$ .

Так как трапеция  $MPKN$  — равнобедренная, то по свойству описанного четырехугольника имеем  $2MP = PK + MN$ .

Заметим, что  $PE = 2r = 10$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности. Так как  $\angle M = 45^\circ$ , то  $\angle MPE = 45^\circ$ , т. е.  $ME = PE = 10$ , тогда  $MP =$   
 $= ME \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$ .

$$S_{MNKP} = \frac{MN + PK}{2} \cdot PE = \frac{2MP}{2} \cdot PE = MP \cdot PE = 10\sqrt{2} \cdot 10 = 100\sqrt{2}.$$

Ответ:  $100\sqrt{2}$ .

**61.**  $OK = 4$  — радиус вписанной окружности. Так как трапеция  $ABCD$  — прямоугольная, то  $DC = 2 \cdot OK = 8$ .

Проведем высоту трапеции  $BE$ , тогда  $AE = AD - BC$ . Но  $AD - BC = 6$  (по условию), значит,  $AE = 6$ ,  $BE = DC = 8$ . Из  $\triangle AEB$  по теореме Пифагора имеем  $AB^2 = AE^2 + BE^2$ ,  $AB = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ .

По свойству описанного четырехугольника  $DC + AB = BC + AD$ , тогда  $P_{ABCD} = 2(DC + AB) = 2(8 + 10) = 36$ .

Ответ: 36.

**62.**  $MNKP$  — равнобедренная трапеция (по условию).  $MN$  — диаметр окружности, тогда  $\angle MPN = \angle NKM = 90^\circ$  (как вписанные углы, опирающиеся на диаметр). В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны.

Пусть  $A$  — точка пересечения диагоналей трапеции, тогда  $\angle MAP = 48^\circ$  — внешний угол равнобедренного  $\triangle PAK$ , тогда  $\angle APK = \angle AKP = 48^\circ : 2 = 24^\circ$

Тогда  $\angle MPK = \angle NKP = 90^\circ + 24^\circ = 114^\circ$  и  $\angle PMN = \angle KNM = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$ .

Ответ:  $66^\circ$ ;  $66^\circ$ ;  $114^\circ$ ;  $114^\circ$ .

**63.** По условию  $MNRK$  — прямоугольная трапеция. Заметим, что  $\angle N + \angle R = 180^\circ$  (как сумма односторонних углов). Но точка  $O$  — центр вписанной окружности;  $OR$  и  $ON$  — соответственно биссектрисы углов  $R$  и  $N$ , тогда  $\angle ORN + \angle ONR = 90^\circ$ , т. е.  $\triangle RON$  — прямоугольный, значит,  $RN = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ .

Высота  $\triangle RON$  равна радиусу вписанной в трапецию окружности, тогда высота трапеции равна диаметру этой окружности.

Пусть  $OT$  — высота  $\triangle ORN$ , тогда  $S_{\triangle RON} = \frac{1}{2} OR \cdot ON = \frac{1}{2} RN \cdot OT$ , или  $6 \cdot 8 = 10 \cdot OT$ , откуда  $OT = 4,8$ , значит,  $RE = 2 \cdot OT = 9,6$ , где  $RE$  — высота трапеции, опущенная на основание  $MN$ .

Но  $MN + KR = KM + RN$  (по свойству описанного четырехугольника), значит,  $KM + RN = RE + RN = 9,6 + 10 = 19,6$ , тогда  $S_{MNRK} = \frac{MN + KR}{2} \cdot RE = \frac{KM + RN}{2} \cdot RE = \frac{19,6}{2} \cdot 9,6 = 94,8$ .

Ответ: 94,08.

**64.** Так как  $AD = BC$ , то трапеция  $ABCD$  — равнобедренная. Заметим, что  $\triangle COB$  — прямоугольный (см. № 63), тогда  $CB^2 = CO^2 + BO^2$ ,  $CB = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{400} = 20$ .

Пусть  $OK$  — высота  $\triangle COB$ ,  $CE$  — высота трапеции  $ABCD$ .

$$S_{\triangle COB} = \frac{1}{2} OC \cdot OB = \frac{1}{2} BC \cdot OK, \text{ или } 12 \cdot 16 = 20 \cdot OK, \text{ откуда } OK = 9,6.$$

Значит,  $CE = 2 \cdot OK = 19,2$ .

$$\begin{aligned} \text{Так как } AB + DC = 2BC, \text{ то } S_{ABCD} &= \frac{AB + DC}{2} \cdot CE = \frac{2BC}{2} \cdot CE = \\ &= BC \cdot CE = 20 \cdot 19,2 = 384. \end{aligned}$$

*Ответ:* 384.

**65.** Проведем высоту  $NT$  трапеции  $EFMN$ , где  $NE = ME$ . По свойству описанного четырехугольника имеем  $EF + NM = 2NE$ .

$$\text{Заметим, что } NT = MK = 4 = \frac{1}{2} NE \Rightarrow NE = 8.$$

Значит,  $EF + NM = 16$ .

*Ответ:* 16.

**66.** Пусть  $LE$  — высота трапеции  $KLMT$  ( $LM \parallel KT$ ), где  $LK = MT$  (доказать!),  $LM = 12$ ,  $LE = 2$ ,  $KT = 16$ .

$$\text{Тогда } KE = \frac{1}{2}(KT - LM) = 2.$$

$$\text{Из } \triangle LET \quad LT = \sqrt{LE^2 + ET^2}, \quad LT = \sqrt{2^2 + 14^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

$$\text{Значит, } S_{\triangle KLT} = \frac{1}{2} KT \cdot LE = 16.$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\triangle KLT} = \frac{abc}{4R}, \text{ где } a = KL, b = LT, c = KT, R = OT,$$

$$\text{тогда } S_{\triangle KLT} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 16}{4 \cdot OT} = 16, \text{ откуда } \frac{10}{OT} = 1, \text{ т. е. } OT = 10.$$

*Ответ:* 10.

**67.** Проведем высоты  $EF$  и  $QK$  на основание  $MT$ .

Так как  $EQ \parallel MT$ , то  $MTQE$  — равнобедренная трапеция. По условию  $MQ$  — биссектриса  $\angle M$ .

Заметим, что  $\angle QMT = \angle MQE = 30^\circ$  (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых  $MT$  и  $EQ$  и секущей  $MQ$ ). Тогда  $\angle EMQ = \angle MQE = 30^\circ$ , т. е.  $\triangle MQE$  — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника). Пусть  $EQ = 2x$ ,  $MT = 2y$ ,  $ME = EQ = 2x$ .

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle MEF \quad MF &= \frac{1}{2} ME = x, \quad EF = \sqrt{4x^2 - x^2} = \sqrt{3x^2} = x\sqrt{3}; \text{ из } \triangle MQK \\ MQ &= 2 \cdot QK = 2EF = 2x\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$S_{\Delta MQT} = \frac{1}{2} MT \cdot QK = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot x\sqrt{3} = xy\sqrt{3}, \text{ с другой стороны, } S_{\Delta MQT} = \frac{MQ \cdot QT \cdot MT}{4 \cdot QO} \text{ (см. № 66), или } S_{\Delta MQT} = \frac{2x\sqrt{3} \cdot 2x \cdot 2y}{4 \cdot 8} = \frac{\sqrt{3}x^2y}{4}. \text{ Значит, } xy\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2y, \text{ откуда } x = 4.$$

$$\text{Следовательно, } S_{MTQE} = \frac{MT + EQ}{2} \cdot EF = \frac{2y + 2x}{2} \cdot x\sqrt{3} = (x + y) \cdot x\sqrt{3}.$$

Но  $MT = 2MF + FK = 2MF + EQ = 2x + 2x = 4x$ , или  $2y = 4x$ ,  $y = 2x = 8$ , значит,  $S_{MTQE} = (4 + 8) \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$ .

Ответ:  $48\sqrt{3}$ .

**68.** Так как  $BC \parallel AD$ , то  $ABCD$  — трапеция, где  $AB = CD = x$ . Проведем высоты  $BE$  и  $CF$ .

Пусть  $AE = FD = y$ . Так как  $ABCD$  — описанный четырехугольник, то  $2AB = AD + BC$ , или  $2x = AD + 1$ . Но  $AD = 2y + EF = 2y + BC = 2y + 1$ , тогда  $2x = 2y + 2$ , или  $x = y + 1$ .

Кроме того, из  $\triangle ABE$   $x^2 = y^2 + 4$ , значит,  $(y + 1)^2 = y^2 + 4$ ,  $y^2 + 2y + 1 = y^2 + 4$ ;  $2y = 3$ .

Следовательно,  $AD = 2y + 1 = 3 + 1 = 4$ .

Ответ: 4.

**69.** По условию  $NM \parallel KL$ , т. е.  $KNML$  — трапеция, где  $KN = NM = ML = 10$  (по условию).

Заметим, что  $\angle ONK + \angle OKN = 90^\circ$  (см. № 63), и так как  $\angle OKN = 30^\circ$ , то  $\angle ONK = 60^\circ$ .

Значит,  $\angle ONM = \angle ONK = 60^\circ$ . Так как  $ON = OM$ , то  $\triangle ONM$  — равнобедренный, т. е.  $\angle OMN = 60^\circ$ , но тогда  $\angle NOM = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$ . Выходит, что  $\triangle ONM$  — равносторонний и  $MO = MN = 10$ .

Ответ: 10.

**70.** Так как  $KM \parallel FE$  и  $KF = ME = 10$ , то  $FKME$  — равнобедренная трапеция.

Проведем высоты  $KA$  и  $MB$ . Так как  $FE = 14$ ,  $KM = 2$ , то  $FA = \frac{1}{2}(14 - 2) = 6$ , тогда из  $\triangle FAK$  имеем  $KA = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8$ . Проведем диагональ  $KE$ .

$$S_{\Delta FKE} = \frac{1}{2} FE \cdot KA = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 8 = 56, \text{ с другой стороны, } S_{\Delta FKE} = \frac{FK \cdot KE \cdot FE}{4 \cdot MO}; AE = FE - FA = 8; \text{ из } \triangle KAE \text{ } KE = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}.$$

Значит,  $S_{\triangle FKE} = \frac{10 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 14}{4 \cdot MO} = \frac{280\sqrt{2}}{MO}$ , тогда  $\frac{280\sqrt{2}}{MO} = 56$ , откуда  $MO = 280\sqrt{2} : 56 = 5\sqrt{2}$ .

Ответ:  $5\sqrt{2}$ .

**71.** По условию  $ABCD$  — равнобедренная трапеция, где  $AB = 18$ ,  $DC = 2$ .

Проведем высоту  $DE$ , тогда  $AE = \frac{1}{2}(AB - DC) = 8$ . Так как трапеция описана около окружности и  $AD = BC$ , то  $2AD = AB + DC = 20$ , откуда  $AD = 10$ .

Из  $\triangle ADE$   $DE = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$ . Но  $DE = 2 \cdot OK = 6$ , откуда  $OK = 3$ .

Ответ: 3.

**72.**  $MP \parallel NK$  (по условию) и  $MN = PK$ , значит,  $MNKP$  — равнобедренная трапеция.

Проведем высоту  $NE$  трапеции. Так как трапеция описана около окружности и  $MN = PK$ , то  $2MN = MP + NK = 10$ . По условию задачи  $MP - NK = 6$ . Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} MP + NK = 10, \\ MP = NK = 6, \end{cases} \quad \begin{cases} 2MP = 16, \\ 2NK = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} MP = 8, \\ NK = 2. \end{cases}$$

Значит,  $ME = \frac{1}{2}(MP - NK) = \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$ .

Из  $\triangle MEN$   $NE = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ .

Следовательно,  $S_{MPKN} = \frac{1}{2}(MP + NK) \cdot NE = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20$ .

Ответ: 20.

**73.** По условию  $BC \parallel AD$  и  $AB = CD$ , значит,  $ABCD$  — равнобедренная трапеция.

По свойству описанного четырехугольника  $2AB = BC + AD$ . Так как  $O$  — центр вписанной окружности и  $OK$  — радиус, то  $EF$  — средняя линия трапеции, тогда  $BC + AD = 2EF = 16$ .

Значит,  $2AB = 16$ ,  $AB = 8$ .

Следовательно,  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot 2 \cdot OK = 8 \cdot 2 \cdot 5 = 80$ .

Ответ: 80.

**74.**  $MEKB$  — равнобедренная трапеция (см. № 73). Проведем высоты  $MA$  и  $EC$ .

Пусть  $BA = CK = x$ ,  $ME = AC = 2$ . Имеем  $2MB = ME + BK$ , или  $2MB = 2 + 2 + 2x$ , откуда  $MB = 2 + x$ . Из  $\triangle MAB$   $MB^2 = AB^2 + AM^2$ , или

$(2 + x)^2 = x^2 + 16$ , или  $4 + 4x + x^2 = x^2 + 16$ , или  $4x = 12$ ,  $x = 3$ , тогда  $MB = 2 + 3 = 5$ .

Значит,  $S_{MEKB} = MB \cdot MA = 5 \cdot 4 = 20$ .

Ответ: 20.

**75.** Проведем высоты  $BE$  и  $CK$  (см. № 74).

Так как  $AE = KD$ , тогда  $2AB = BC + AD = 13$ ,  $AB = 6,5$ , значит,  $AE = \frac{1}{2}(AD - BC) = 2,5$ .

Из  $\triangle ABE$   $BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{42,25 - 6,25} = \sqrt{36} = 6$ , тогда

$$OF = \frac{1}{2}BE = 3.$$

Ответ: 3.

*Замечание.* Можно доказать, что если  $h$  — высота,  $a$  и  $b$  — основания равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, то  $h = \sqrt{ab}$ .

В данной задаче  $h = \sqrt{4 \cdot 9} = 6 \Rightarrow r = \frac{1}{2}h = 3$ .

**76.**  $EF \parallel TR$ , значит,  $TRFE$  — трапеция.

По свойству описанного четырехугольника  $TR + EF = ET + FR$ , или  $TR + EF = 28$ .

Но  $TR - EF = 14$  (по условию). Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} TR + EF = 28, \\ TR - EF = 14, \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \cdot TR = 42, \\ 2 \cdot EF = 14, \end{cases} \quad \begin{cases} TR = 21, \\ EF = 7. \end{cases}$$

Проведем высоты  $EA$  и  $FB$  трапеции.

Пусть  $TA = x$ , тогда  $AB = EF = 7$ ,  $BR = 21 - (x + 7) = 14 - x$ .

Из  $\triangle TAE$   $EA^2 = 13^2 - x^2$ ; из  $\triangle FBR$   $FB^2 = 15^2 - (14 - x)^2$ , или  $(14 - x)^2 - x^2 = 15^2 - 13^2$ , или  $196 - 28x + x^2 - x^2 = 225 - 169$ , или  $28x = 140$ ,  $x = 5$ , тогда  $EA^2 = 13^2 - 5^2$ , откуда  $EA = 12$ .

Значит,  $S_{TRFE} = \frac{1}{2}(TR + EF) \cdot EA = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 12 = 168$ .

Ответ: 168.

**77.** По условию  $BC \parallel AD$  и  $AB = CD$ , значит,  $ABCD$  — равнобедренная трапеция.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot BE$ , где  $BE$  — высота трапеции,  $AD + BC = 2AB$

(по свойству описанного четырехугольника), тогда

$S_{ABCD} = AB \cdot BE$ , где  $AB = CD = 30$ ,  $BE = 2r = 2OK$ , где  $OK$  — радиус вписанной окружности. Но  $\triangle COD$  — прямоугольный (см. № 63), где  $OK$  — высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, тогда  $OK = \sqrt{CK \cdot KD} = \sqrt{6 \cdot 24} = \sqrt{6^2 \cdot 4} = 12$ .

Значит,  $S_{ABCD} = 30 \cdot 24 = 720$ .

Ответ: 720.

**78.** По условию  $ABCD$  — квадрат, где  $AB = 12$ .

$OE$  — радиус вписанной окружности, тогда  $OE \perp AB$ , значит,  $2 \cdot OE = AD = AB = 12$ , откуда  $OE = 6$ .

Ответ: 6.

**79.** Так как  $ABCD$  — прямоугольник, то  $\triangle ADC$  — прямоугольный, тогда  $AC^2 = AD^2 + DC^2$ ,  $AC = \sqrt{12^2 + 16^2}$ ,  $AC = \sqrt{144 + 256} = \sqrt{400} = 20$ .

Точка  $O$  — середина диагоналей, тогда  $AO = \frac{1}{2}AC = 10$ .

Ответ: 10.

**80.**  $K$  — середина  $MN$  и  $P$  — середина  $EN$ , значит,  $KP$  — средняя линия  $\triangle MEN$ , т. е.  $KP = \frac{1}{2}ME$ . Но  $ME = 2 \cdot OE$  ( $O$  — точка пересечения диагоналей), значит,  $KP = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot OE = OE = 10$ .

Ответ: 10.

**81.** По условию  $ABCD$  — ромб.

Пусть  $OK = 1$  — радиус вписанной окружности, тогда  $BE = 2 \cdot OK$  — высота ромба, т. е.  $BE = 2$ , значит,  $\sin \angle A = \frac{BE}{AB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle A = 30^\circ$ .

Ответ:  $30^\circ$ .

**82.** По условию  $MNKL$  — ромб,  $\angle MNK = 90^\circ$  (вписанный угол, опирающийся на диаметр — прямой), а ромб с прямым углом — квадрат, где  $MK = 2 \cdot MO = 14\sqrt{6}$ ,  $KN = MN = x$ .

Тогда  $x^2 + x^2 = (14\sqrt{6})^2$ , или  $2x^2 = 196 \cdot 6$ , откуда  $x^2 = 196 \cdot 3 = 588$ .

Значит,  $S_{MNKL} = x^2 = 588$ .

Ответ: 588.

**83.** По условию  $ABCD$  — ромб.

Пусть  $AB = x$ , тогда  $4AB = 4x = 80$ , откуда  $x = 20$ . Так как  $AC = 32$ , то  $AO = 16$ .

Из  $\triangle AOE$   $AO^2 = AE^2 + OE^2$ , или  $AE^2 + OE^2 = 256$ .

Так как  $AC \perp BD$  (по свойству ромба), то  $\triangle AOB$  — прямоугольный, и так как  $OE \perp AB$ , то  $AO^2 = AB \cdot AE$ , или  $16^2 = 20 \cdot AE$ , откуда  $AE = \frac{64}{5}$ .

Значит,  $\left(\frac{64}{5}\right)^2 + OE^2 = 16^2$ , или  $OE^2 = 16^2 - \left(\frac{64}{5}\right)^2$ ,

$$OE^2 = \left(16 - \frac{64}{5}\right) \left(16 + \frac{64}{5}\right), OE^2 = \frac{16}{5} \cdot \frac{144}{5}, \text{ откуда } OE = \frac{4 \cdot 12}{5} = \\ = \frac{48}{5} = 9,6.$$

Ответ: 9,6.

**84.** Так как  $AB = CD$  и  $BC = AD$ , то  $ABCD$  — параллелограмм (по свойству).

$OE$  — радиус вписанной окружности, тогда  $OE \perp AD$ , значит,  $2OE = 6\sqrt{3}$  — высота параллелограмма, следовательно,  $S_{ABCD} = AD \cdot 2 \cdot OE = 7\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{3} = 42\sqrt{6}$ .

Ответ:  $42\sqrt{6}$ .

**85.** Пусть  $M$  — точка касания стороны  $AF$  и вписанной окружности.

По условию  $ABCDEF$  — правильный шестиугольник. Так как  $O$  — центр окружности (середина  $FC$ ) и  $M$  — середина  $AF$ , то  $OM$  — средняя линия  $\triangle AFC$ , тогда  $OM = \frac{1}{2}AC = 11$ . Но  $OM = OK$  — как радиусы окружности, значит,  $OK = 11$ .

Ответ: 11.

**86.** Угол  $A$  правильного шестиугольника равен  $120^\circ$ , так как  $(180^\circ \cdot (6 - 2) : 6 = 120^\circ)$ , тогда  $AO$  — биссектриса  $\angle A$ , т. е.  $\angle OAM = 60^\circ$ , где  $M$  — точка касания с окружностью. Из  $\triangle AOM$   $\sin 60^\circ = \frac{OM}{AO} \Rightarrow OM =$

$$= 5\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2}. \text{ Но } OM = \frac{1}{2}AB \text{ (см. № 85), тогда } AB = 2 \cdot OM = 15.$$

Ответ: 15.



# ВЕКТОРЫ

1. Если два ненулевых вектора коллинеарны и одинаково направлены, то они называются сонаправленными, а если противоположно направлены, то противоположно направленными.

Ответ: а)  $\vec{m} \uparrow \vec{e}$ ,  $\vec{m} \uparrow \vec{p}$ ; б)  $\vec{n} \uparrow \vec{k}$ ,  $\vec{n} \uparrow \vec{f}$ ; в)  $\vec{m} \uparrow \vec{c}$ ,  $\vec{m} \uparrow \vec{d}$ ,  $\vec{n} \uparrow \vec{a}$ ,  $\vec{n} \uparrow \vec{b}$ .

2. Ненулевые векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.

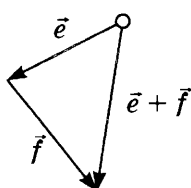
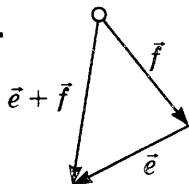
Ответ: а)  $\vec{c}$  и  $\vec{n}$ ,  $\vec{c}$  и  $\vec{m}$ ,  $\vec{m}$  и  $\vec{n}$ ,  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ ; б)  $\vec{c} \uparrow \vec{m}$ ,  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ;

в)  $\vec{c} \uparrow \vec{n}$ ,  $\vec{n} \uparrow \vec{m}$ ; г)  $\vec{a} = \vec{b}$ ,  $\vec{c} = \vec{m}$ .

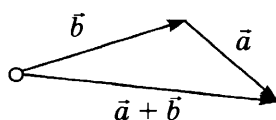
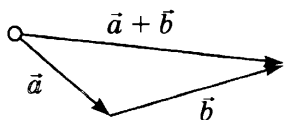
3. Решается аналогично № 2.

Ответ: а)  $\vec{m}$  и  $\vec{a}$ ,  $\vec{m}$  и  $\vec{b}$ ,  $\vec{n}$  и  $\vec{d}$ ; б)  $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ ; в)  $\vec{n} \uparrow \vec{d}$ ,  $\vec{m} \uparrow \vec{a}$ ,  $\vec{m} \uparrow \vec{b}$ ; г) нет.

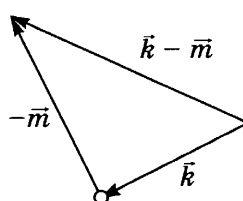
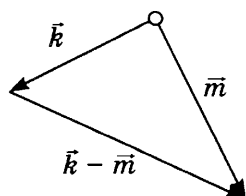
4.



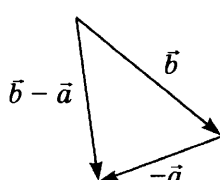
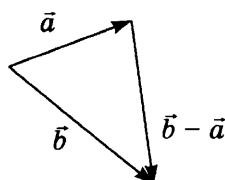
5.



6.



7.



$$8. \overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EA} + \overline{BC} + \overline{DE} = (\overline{AB} + \overline{BC}) + (\overline{CD} + \overline{DE}) + \overline{EA} = \\ = \overline{AC} + \overline{CE} + \overline{EA} = \overline{AE} + \overline{EA} = \overline{AA} = \vec{O}.$$

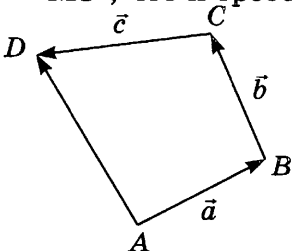
Ответ:  $\vec{O}$ .

$$9. \overline{ME} + \overline{KN} + \overline{EK} + \overline{NF} = (\overline{ME} + \overline{EK}) + (\overline{KN} + \overline{NF}) = \overline{MK} + \\ + \overline{KF} = \overline{MF};$$

$$\overline{MN} + \overline{EF} + \overline{NE} = (\overline{MN} + \overline{NE}) + \overline{EF} = \overline{ME} + \overline{EF} = \overline{MF}.$$

$\overline{MF} = \overline{MF}$ , что и требовалось доказать.

$$10. \overline{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$



$$11. \overline{MO} + \overline{FE} + \overline{OF} + \overline{EN} = (\overline{MO} + \overline{OF}) + (\overline{FE} + \overline{EN}) = \overline{MF} + \overline{FN} = \\ = \overline{MN};$$

$$\overline{ME} + \overline{FM} = \overline{FM} + \overline{ME} = \overline{FE}.$$

Но  $MN = FE$  (по свойству параллелограмма), тогда  $\overline{MN} = \overline{FE}$ , т. е. равенство доказано.

$$12. \overline{CD} + \overline{X} + \overline{BC} + \overline{AB} = \overline{X} + (\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}) = \overline{X} + \overline{AD} \text{ (по пра-} \\ \text{вилу многоугольника).}$$

$$\overline{EF} + \overline{AE} = \overline{AE} + \overline{EF} = \overline{AF}, \text{ тогда получим } \overline{X} + \overline{AD} = \overline{AF}, \text{ откуда} \\ \overline{X} = \overline{AF} - \overline{AD} = \overline{AF} + \overline{DA} = \overline{DA} + \overline{AF} = \overline{DF}.$$

Ответ:  $\overline{DF}$ .

13. Так как точка  $M$  — середина отрезка  $RR_1$ , а  $S$  — произвольная точка плоскости, то  $\overline{SM} = \frac{1}{2} (\overline{SR} + \overline{SR_1})$  (см. п. 84, задача 1 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

По условию  $\overline{SR} = \vec{a}$ ,  $\overline{ST} = \vec{b}$ , тогда  $\overline{SR_1} = \frac{1}{2} \overline{ST} = \frac{1}{2} \vec{b}$ , значит,

$$\overline{SM} = \frac{1}{2} \left( \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right) = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{b}.$$

Ответ:  $\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{b}$ .

**14.** Так как  $MNKP$  — параллелограмм, то точка  $O$  — середина диагоналей  $PN$  и  $МК$ .

Тогда  $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP})$  (см. № 13), или  $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ , значит,  $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ .

Аналогично  $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MK})$ .

Но  $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP} = \vec{b} + \vec{a}$  (по правилу параллелограмма), тогда  $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{b} + \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ .

Ответ:  $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ ;  $\overrightarrow{MA} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ .

**15.**  $\overrightarrow{RK} = \overrightarrow{ST} = -\vec{n}$ .

По правилу параллелограмма  $\overrightarrow{TR} = \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{TK}$ , или  $\vec{m} = \vec{n} + \overrightarrow{TK}$ ,  $\overrightarrow{TK} = \vec{m} - \vec{n}$ , тогда  $\overrightarrow{KT} = -\vec{m} + \vec{n}$ ;  $\overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SR} = \overrightarrow{TR}$  (по правилу треугольника), или  $\vec{n} + \overrightarrow{SR} = \vec{m}$ , откуда  $\overrightarrow{SR} = \vec{m} - \vec{n}$ .

Ответ:  $\overrightarrow{RK} = -\vec{n}$ ;  $\overrightarrow{KT} = -\vec{m} + \vec{n}$ ;  $\overrightarrow{SR} = \vec{m} - \vec{n}$ .

**16.** Так как точка  $A$  — середина диагоналей  $MF$  и  $EN$ , то  $\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EF})$  (см. № 13).

$\overrightarrow{EA} = (\overrightarrow{FN} + \overrightarrow{MN}) = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}$ .

Аналогично  $\overrightarrow{FB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{FM}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{FN} - \overrightarrow{MN}) = \frac{1}{2}(-\vec{n} + \vec{m} - \vec{n}) = \frac{1}{2}\vec{m} - \vec{n}$ .

Ответ:  $\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2}\vec{m} + \frac{1}{2}\vec{n}$ ;  $\overrightarrow{FB} = \frac{1}{2}\vec{m} - \vec{n}$ .

**17.**  $\overrightarrow{KO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KE}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KN})$  (см. № 13).

Но  $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MK} = \vec{b} - \vec{a}$ , тогда  $\overrightarrow{KO} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ .

Ответ:  $\overrightarrow{KO} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ .

**18.** Пусть  $DK = x$ , тогда  $KC = 3x$  и  $DC = 4x$ .

Но  $\overline{DC} = \overline{AB} = \vec{b}$ , т. е.  $\vec{x} = \frac{1}{4}\vec{b}$ ,  $\overline{DK} = \frac{1}{4}\vec{b}$ ,  $\overline{KC} = \frac{3}{4}\vec{b}$ .

$\overline{AD} + \overline{DK} = \overline{AK}$  (по правилу треугольника),  $\overline{AK} = \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ ;

$\overline{AK} + \overline{KB} = \overline{AB}$ , откуда  $\overline{KB} = \vec{b} - \left(\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right) = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ .

Ответ:  $\overline{AK} = \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ ;  $\overline{KB} = -\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}$ .

**19.** Пусть  $MK = 3x$ ,  $KN = 2x$ ,  $MN = 5x$ .

$\overline{AM} + \overline{MN} = \overline{AN}$ ,  $\overline{AM} = \overline{AN} - \overline{MN} = \vec{b} - 5\vec{x}$ .

Аналогично  $\overline{AM} + \overline{MK} = \overline{AK}$ , или  $\overline{AM} + 3\vec{x} = \vec{a}$ ,  $\overline{AM} = \vec{a} - 3\vec{x}$ .

Значит,  $\vec{a} - 3\vec{x} = \vec{b} - 5\vec{x}$ ,  $2\vec{x} = -\vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ , тогда  $\overline{AM} =$

$$= \vec{a} + \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} = \frac{5}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}.$$

Ответ:  $\overline{AM} = \frac{5}{2}\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$ .

**20.** Пусть  $EA = 2x$ ,  $AF = 5x$ , тогда  $EF = 7x$ .

По правилу треугольника  $\overline{KE} + \overline{EF} = \overline{KF}$ , или  $\overline{KE} + 7\vec{x} = \vec{n}$ .

Аналогично  $\overline{KA} + \overline{AF} = \overline{KF}$ , или  $\vec{m} + 5\vec{x} = \vec{n}$ ,  $\overline{KE} + \overline{EA} = \overline{KA}$ , или  $\overline{KE} + 2\vec{x} = \vec{m}$ , откуда  $\overline{KE} = \vec{m} - 2\vec{x}$ .

Так как  $\overline{KE} + 7\vec{x} = \vec{n}$ , то  $\vec{m} - 2\vec{x} + 7\vec{x} = \vec{n}$ , или  $5\vec{x} = \vec{n} - \vec{m}$ , откуда  $\vec{x} = -\frac{1}{5}\vec{m} + \frac{1}{5}\vec{n}$ . Значит,  $\overline{KE} = \vec{m} - 2\left(-\frac{1}{5}\vec{m} + \frac{1}{5}\vec{n}\right) = \frac{7}{5}\vec{m} - \frac{2}{5}\vec{n}$ .

Ответ:  $\overline{KE} = \frac{7}{5}\vec{m} - \frac{2}{5}\vec{n}$ .

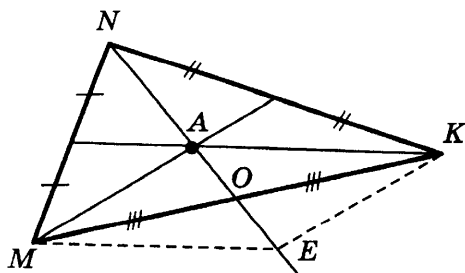
**21.**  $M$  — середина  $AB$  и  $N$  — середина  $AC$ , тогда

$\overline{BM} = \overline{MA} = -\vec{m}$ ;  $\overline{NC} = \overline{AN} = \vec{n}$ ;  $\overline{MN} = -\vec{m} + \vec{n}$ ;  $\overline{BN} = -2\vec{m} + \vec{n}$ .

Ответ:  $\overline{BM} = -\vec{m}$ ;  $\overline{NC} = \vec{n}$ ;  $\overline{MN} = -\vec{m} + \vec{n}$ ;  $\overline{BN} = -2\vec{m} + \vec{n}$ .

**22.** Построим  $\triangle MAK$  до параллелограмма  $MAKE$ . Так как  $NO$  — медиана  $\triangle MNK$ , то  $NA : AO = 2 : 1$ , где  $A$  — точка пересечения медиан.

Но  $AO = OE$  (по свойству параллелограмма), значит,  $AE = NA$ . По правилу параллелограмма  $\overline{AE} = \overline{AM} + \overline{AK}$ . Но  $\overline{AE} = -\overline{AN}$ , тогда  $-\overline{AN} = \overline{AM} + \overline{AK}$ , откуда  $\overline{AM} + \overline{AN} + \overline{AK} = \vec{O}$ .



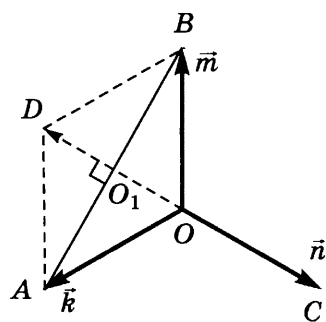
**23.** Так как  $M$  — середина  $AC$ , то  $AM = MC$ ; аналогично  $BN = ND$ .

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \\ &+ \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \\ &+ \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}), \text{ что и требовалось доказать.}\end{aligned}$$

**24.** По условию  $|\vec{m}| = |\vec{n}| = |\vec{k}|$ .

Построим ромб  $OADB$ .

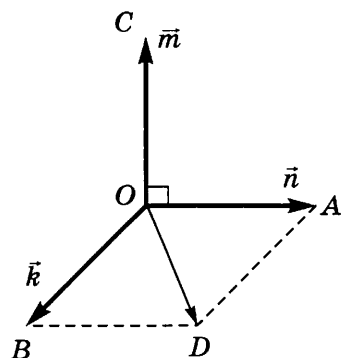
По свойству ромба  $OD$  — биссектриса  $\angle AOB$ , тогда  $\angle AOD = \angle DOB = 60^\circ$ . Так как  $AB \perp OD$ , то  $\angle O_1AO = 30^\circ \Rightarrow O_1O = \frac{1}{2}AO$ , тогда  $OD = OA = OC = OB$ . По правилу параллелограмма  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ . Но  $\overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OC} = -\vec{n}$ ,  $\overrightarrow{OA} = \vec{k}$  и  $\overrightarrow{OB} = \vec{m}$ , тогда  $-\vec{n} = \vec{k} + \vec{m}$ , откуда  $\vec{m} + \vec{n} + \vec{k} = \vec{O}$ , ч. т. д.



**25.** По условию  $|\vec{n}| = |\vec{k}| = 1$ ,  $|\vec{m}| = \sqrt{2}$ .

По правилу параллелограмма  $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ , или  $\overrightarrow{OD} = \vec{k} + \vec{n}$ .  $|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ .

Значит,  $|\vec{m}| = |\overrightarrow{OD}| = \sqrt{2}$ , тогда  $-\vec{m} = \vec{k} + \vec{n}$ , откуда  $\vec{m} + \vec{k} + \vec{n} = \vec{O}$ , ч. т. д.



**26.** Так как  $MK = NK$  (по условию), то  $\triangle MKN$  — равнобедренный. Точка  $A$  — середина  $MN$ , тогда  $KA$  — медиана, а значит, и высота  $\triangle MKN$ .

Из  $\triangle MAK$   $MA^2 = MK^2 - KA^2$ ,  $MA = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$ , тогда  $MN = 12$ .

$$\begin{aligned}\text{Значит, } |\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{KM}| &= |\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KM} - \overrightarrow{AN}| = |\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}| = \\ &= |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{NA}| = |\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{NM}| = 12.\end{aligned}$$

Ответ: 12.

**27.** По условию  $PS = KS$  и  $\angle PSK = 90^\circ$ , значит,  $\triangle PSK$  — равнобедренный и прямоугольный, где  $ST$  — медиана, тогда в  $\triangle PST$   $PT = ST$ .

$$\text{Значит, } |\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KS} + \overrightarrow{PT}| = |\overrightarrow{KT} - \overrightarrow{KS}| = |\overrightarrow{KT} + \overrightarrow{SK}| = |\overrightarrow{ST}| = \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{PK} \right| = 6.$$

Ответ: 6.

**28.**  $MNEF$  — прямоугольник, где  $NE = 24$ ,  $NM = EF = 10$ .

Из  $\triangle MNE$   $ME = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } |\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NE} - \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{OF}| &= |\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{FE} - \overrightarrow{OF}| = |\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FO}| = \\ &= |\overrightarrow{MO}| = \left| \frac{1}{2} \overrightarrow{ME} \right| = 13. \end{aligned}$$

Ответ: 13.

**29.** Так как  $ME = EK = KN = MN$  (по условию), то  $MEKN$  — ромб (по определению), тогда  $MK \perp NE$  (по свойству ромба), а  $ON = \frac{1}{2} EN = 6$ .

Из  $\triangle MON$   $MO = \sqrt{MN^2 - ON^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ .

$$\begin{aligned} \text{Тогда } |\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ME} - \overrightarrow{EK} - \overrightarrow{OE}| &= |\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ME} - \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{EO}| = |\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EO}| = \\ &= |\overrightarrow{MO}| = 8. \end{aligned}$$

Ответ: 8.

**30.** По условию  $MNKE$  — прямоугольная трапеция, где  $MK = 2\sqrt{2}$ ,  $\angle MKN = 45^\circ$  и  $\angle MKE = 90^\circ$ .

Проведем высоту  $KF$  к основанию  $ME$ .

Заметим, что  $\angle MKN = \angle KME = 45^\circ$  — как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых  $NK$  и  $ME$  и секущей  $MK$ . Но тогда  $\angle E = 45^\circ$ , т. е.  $\triangle MKE$  — равнобедренный, и  $MK = KE$ . Кроме того,  $NM = KF$  (как высоты трапеции) и  $NM \parallel KF$ .

$$\begin{aligned} \text{Значит, } |\overrightarrow{KE} - \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{KN}| &= |\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KN}| = |\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{MN}| = \\ &= |\overrightarrow{KE} + \overrightarrow{FK}| = |\overrightarrow{FE}|. \end{aligned}$$

Из  $\triangle MKE$ , где  $\angle MKE = 90^\circ$ ,  $MK = KE = 2\sqrt{2}$ ,  $ME^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 16$ ,  $ME = 4$ , тогда  $FE = 2$ , значит,  $|\overrightarrow{FE}| = 2$ .

Ответ: 2.

**31.** Так как  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ , то  $\vec{p} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB}$ , тогда  $|\vec{p}| = |2\overrightarrow{AB}| = 16 \cdot 2 = 32$ .

Ответ: 32.

**32.** По условию задачи  $\angle C = 90^\circ$  и  $BC = 18$ . Тогда  $\vec{k} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BC}$ . Значит,  $|\vec{k}| = |2\overrightarrow{BC}| = 18 \cdot 2 = 36$ .

Ответ: 36.

$$33. |\overline{AB}| = |\overline{DC}| = 6, |\overline{BC}| = 8, |\overline{DC}| = 6.$$

$$MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \sqrt{9 + 64} = \sqrt{73}, |\overline{MC}| = \sqrt{73}.$$

$$\text{Ответ: } |\overline{AB}| = 6; |\overline{BC}| = 8; |\overline{DC}| = 6; |\overline{MC}| = \sqrt{73}.$$

34. Проведем высоту  $CE$  трапеции  $ABCD$ , где  $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ,  $\angle D = 45^\circ$ ,  $AB = 5$  и  $AD = 13$ .

$$\text{Из } \triangle BAD \quad BD^2 = 5^2 + 13^2 = 194, BD = \sqrt{194}, \text{ значит, } |\overline{BD}| = \sqrt{194}.$$

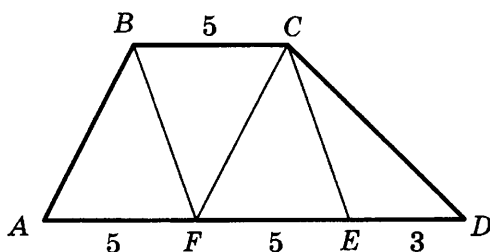
$$\text{В } \triangle CED \quad \angle DCE = 45^\circ \Rightarrow CE = ED = AB = 5, \text{ тогда } CD = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2},$$

$$|\overline{CD}| = 5\sqrt{2}.$$

$$\text{Из } \triangle ABC \quad AC = \sqrt{5^2 + (13 - 5)^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89}, |\overline{AC}| = \sqrt{89}.$$

$$\text{Ответ: } |\overline{BD}| = \sqrt{194}; |\overline{CD}| = 5\sqrt{2}; |\overline{AC}| = \sqrt{89}.$$

35. По условию задачи в трапеции  $ABCD$   $AD = 13$ ,  $BC = 5$ .



Из точки  $C$  проведем  $CF \parallel AB$  и соединим точки  $B$  и  $F$ .

Из точки  $C$  проведем  $CE \parallel BF$ .

Тогда  $AF = FE = BC = 5$  (по построению) и  $ED = AD - (AF + FE) = 3$ .

$$\text{Действительно, } \vec{a} = \overline{CD} - \overline{BC} + \overline{AB} = \overline{FA} + \overline{CD} + \overline{AB} = \overline{CD} + \overline{FB} =$$

$$= \overline{CD} + \overline{FC} + \overline{CB} = \overline{CB} + (\overline{FC} + \overline{CD}) = \overline{CB} + \overline{FD} = \overline{FA} + \overline{FD} = \overline{FA} +$$

$$+ (\overline{FE} + \overline{ED}) = \overline{FA} - \overline{FA} + \overline{ED} = \overline{ED}.$$

$$\text{Значит, } |\vec{a}| = |\overline{ED}| = 3.$$

Ответ: 3.

36. а) Проведем  $NT \parallel MK$  и  $KT \parallel MN$ , тогда  $MKTN$  — параллелограмм (по определению), где  $MN = MK = KN = a$ , значит,  $MKTN$  — ромб.

$$\text{Но } \overline{MK} + \overline{MN} = \overline{MT} \text{ (по правилу параллелограмма), т. е. } |\overline{MK} + \overline{MN}| =$$

$$= |\overline{MT}| = MT, \text{ где } MT \text{ — диагональ ромба, значит, } MT = 2MO, MO \perp KN$$

и  $O$  — середина  $KN$ . Из  $\triangle MON$ , где  $MN = a$ ,  $ON = \frac{1}{2}a$ , имеем

$$MO^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2, MO = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$MT = 2MO = a\sqrt{3};$$

$$\text{б) } |\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KN}| = |\overrightarrow{MN}| = a;$$

в) проведем  $TE \parallel NK$  и  $TE = NK$ , тогда  $\overrightarrow{TE} = \overrightarrow{NK}$  и  $\overrightarrow{NT} = \overrightarrow{MK}$  (как противоположные стороны параллелограмма).

$\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{NT} + \overrightarrow{TE} = \overrightarrow{NE}$ ;  $NTEK$  — ромб по построению со стороной  $a$  и  $NTEK = MKTN$ , значит, диагональ  $NE = MT = a\sqrt{3}$ .

$$\text{Итак, } |\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KN}| = a\sqrt{3}.$$

$$\text{г) } |\overrightarrow{KM} - \overrightarrow{KN}| = |\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{NK}| = |\overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KM}| = |\overrightarrow{NM}| = a;$$

$$\text{д) } |\overrightarrow{MK} - \overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MK}| = |\overrightarrow{NK}| = NK = a.$$

Ответ: а)  $a\sqrt{3}$ ; б)  $a$ ; в)  $a\sqrt{3}$ ; г)  $a$ ; д)  $a$ .

$$\mathbf{37. 1) } MF = \sqrt{16^2 + 12^2} = \sqrt{400} = 20,$$

$$|\overrightarrow{EM}| - |\overrightarrow{EF}| = 12 - 16 = -4;$$

$$2) |\overrightarrow{EM} - \overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{FE}| = |\overrightarrow{FM}| = 20;$$

$$3) |\overrightarrow{EM}| + |\overrightarrow{EF}| = 12 + 16 = 28;$$

4) проведем  $MA \parallel EF$  и  $MA = EF$ , тогда  $MAFE$  — параллелограмм (по I признаку) и  $\angle FEM = \angle EMA = 90^\circ \Rightarrow MAFE$  — прямоугольник, тогда  $\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{EA}$ ;

$$|\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{EA}| = 20;$$

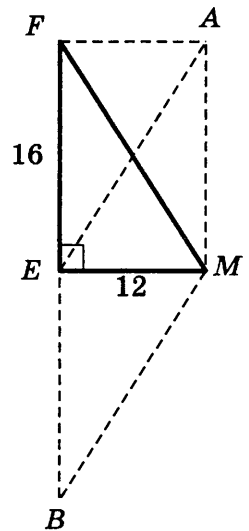
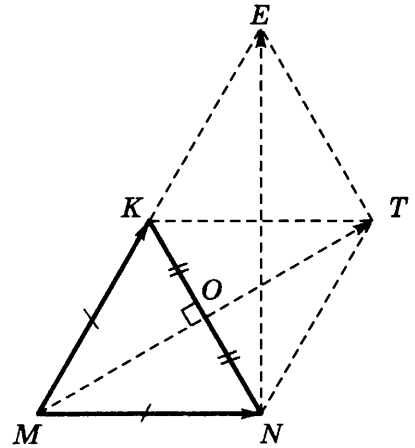
$$5) |\overrightarrow{ME}| + |\overrightarrow{EF}| = 12 + 16 = 28;$$

$$6) |\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{MF}| = 20;$$

$$7) |\overrightarrow{ME}| - |\overrightarrow{EF}| = 12 - 16 = -4;$$

$$8) |\overrightarrow{ME} - \overrightarrow{EF}| = |\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB}| = |\overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{AE}| = 20.$$

Ответ: 1)  $-4$ ; 2)  $20$ ; 3)  $28$ ; 4)  $20$ ; 5)  $28$ ; 6)  $20$ ; 7)  $-4$ ; 8)  $20$ .





## СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРАПЕЦИИ

1.  $MN$  — средняя линия трапеции, где  $AB = CD = 15$ , тогда  $\frac{AD + BC}{2} = MN = 25$ , или  $AD + BC = 50$ .

Значит,  $P_{ABCD} = 2AB + AD + BC = 2 \cdot 15 + 50 = 80$ .

Ответ: 80.

2. По свойству описанного четырехугольника  $2MF = MN + FE$ , где  $MF = NE$  (по условию).

Но  $P_{MNEF} = 30$ , или  $2MF + MN + FE = 30$ , значит,  $(MN + FE) \cdot 2 = 30$ ,  $MN + FE = 15$ , тогда  $KR = \frac{1}{2}(MN + FE) = 7,5$ .

Ответ: 7,5.

3. По условию задачи  $QR - SM = 8$ .

Кроме того, средняя линия  $EF = 20$ , или  $\frac{QR + SM}{2} = 20$ , или  $QR + SM = 40$ .

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} QR + SM = 40, \\ QR - SM = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} 2QR = 48, \\ 2SM = 32, \end{cases} \quad \begin{cases} QR = 24, \\ SM = 16. \end{cases}$$

Ответ:  $SM = 16$ ;  $QR = 24$ .

4. Пусть  $NE = x$ , тогда  $MF = 2x$ , тогда  $\frac{x + 2x}{2} = 30$ , или  $3x = 60$ ,  $x = 20$ .

Значит,  $NE = 20$ ,  $MF = 20 \cdot 2 = 40$ .

Ответ:  $NE = 20$ ;  $MF = 40$ .

5.  $ABCD$  — равнобедренная трапеция (по условию) и  $P_{ABCD} = 36$ , тогда  $2AB + BC + AD = 36$ . Но  $AD + BC = 2EF = 20$ , значит,  $2AB + 20 = 36$ ,  $2AB = 16$ ;  $AB = 8$ .

Ответ: 8.

6. Проведем высоту  $SE$  трапеции  $QSTR$ .

Так как  $\angle Q = 60^\circ$ , то  $\angle QSE = 30^\circ \Rightarrow QE = \frac{1}{2}QS = 10$ .

Но  $QE = \frac{1}{2}(QR - ST)$ , или  $20 = 30 - ST$ ,  $ST = 10$ , тогда

$$MN = \frac{1}{2}(QR + ST) = \frac{1}{2}(30 + 10) = 20.$$

Ответ:  $ST = 10$ ;  $MN = 20$ .

7. Так как  $\angle FEM = 150^\circ$  и  $\angle KEM = 90^\circ$ , то  $\angle FEK = 60^\circ$ , тогда  $\angle FKE = 30^\circ \Rightarrow KE = 2FE = 8$ .

В  $\triangle KEM$   $\angle M = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ \Rightarrow KM = 2KE = 16$ .

Значит,  $AB = \frac{1}{2}(FE + KM) = \frac{1}{2}(4 + 16) = 10$ .

Ответ: 10.

8. В  $\triangle RKS$   $\angle R = 45^\circ$  и  $\angle RKS = 90^\circ$ , тогда  $\angle RSK = 45^\circ$ , т. е.  $RK = SK = 8$ .

Средняя линия  $EF = \frac{1}{2}(RT + SQ)$ .

По условию  $\angle R = \angle T = 45^\circ$ , тогда  $RT = 2RK + SQ = 16 + 10 = 26$ , значит,  $EF = \frac{1}{2}(26 + 10) = 18$ .

Ответ:  $RT = 26$ ;  $EF = 18$ .

9. Так как  $ABCD$  — равнобедренная трапеция, то  $AE = \frac{1}{2}(AB - DC)$ ,

или  $2 = \frac{1}{2}(7 - DC)$ ;  $7 - DC = 4$ ;  $DC = 3$ .

Значит,  $MN = \frac{1}{2}(AB + DC) = 5$ .

Ответ:  $MN = 5$ ;  $DC = 3$ .

10. В трапеции  $LMNK$   $\angle MNK = 135^\circ$ , тогда  $\angle MNL = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ \Rightarrow \angle MLN = 45^\circ$ , т. е.  $ML = MN = 4$ . Из  $\triangle LMN$   $LN = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ . Кроме того,  $\angle K = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ , тогда  $\angle NLK = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ \Rightarrow LN = NK = 4\sqrt{2}$ .

Из  $\triangle LNK$   $LK^2 = (4\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 = 64$ ,  $LK = 8$ .

Значит,  $RQ = \frac{1}{2}(LK + MN) = \frac{1}{2}(8 + 4) = 6$ .

Ответ: 6.

11. Проведем высоту  $CE$  трапеции  $ABCD$ , где  $AB = CD$ ,  $AC = 16$ , тогда  $MN = \frac{1}{2}(AD + BC)$ .

Пусть  $DE = x$ ,  $BC = y$ , тогда  $MN = \frac{1}{2}(2x + y + y) = x + y$ .

Так как  $\angle CAD = 60^\circ$ , то  $\angle ACE = 30^\circ \Rightarrow AE = \frac{1}{2}AC = 8$ . Но  $AE = x + y$ , значит,  $x + y = 8$  и  $MN = AE = 8$ .

Ответ: 8.

**12.** Пусть  $NR = x$ ,  $MQ = y$ . Так как в  $\triangle SQN$   $\angle QSN = 45^\circ$  и  $QN \perp SR$ , то  $\angle SQN = 45^\circ \Rightarrow SN = QN = x + y = 4$ .

$$\text{Значит, } TE = \frac{1}{2}(SR + MQ) = \frac{1}{2}(2x + y + y) = x + y = 4.$$

*Ответ:* 4.

$$\mathbf{13.} \quad MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(AD + 4).$$

Так как  $AD - BC = 4$  (по условию) и  $BC = 4$ , то  $AD = 8$  и

$$MN = \frac{1}{2}(8 + 4) = 6.$$

*Ответ:* 6.

$$\mathbf{14.} \quad \text{Пусть } RE = EM = MQ = x, \text{ тогда } KL = \frac{1}{2}(12 + x).$$

Проведем высоту  $ET$  трапеции  $REMQ$ . Так как  $\angle R = 60^\circ$ , то  $\angle RET = 30^\circ \Rightarrow RT = \frac{1}{2}RE = \frac{1}{2}x$ ; кроме того,  $RT = \frac{1}{2}(RQ - EM) = \frac{1}{2}(12 - x)$ ,

значит,  $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(12 - x)$ ,  $x = 12 - x$ ,  $2x = 12$ , откуда  $x = 6$ , т. е.  $KL = \frac{1}{2}(12 + 6) = 9$ .

*Ответ:* 9.

**15.** По условию  $KE \parallel NF$ , значит,  $KEFN$  — параллелограмм (по определению), тогда  $EF = KN = 5$  и  $RS = \frac{1}{2}(KM + EF) = \frac{1}{2}(14 + 5) = 9,5$ .

*Ответ:* 9,5.

**16.** Проведем высоту  $FT$  трапеции  $CEFK$ , где  $CE = FK$ ,  $MN = 4$ ,  $S_{CEFK} = 8$ .

$$S_{CEFK} = \frac{1}{2}(CK + EF) \cdot FT = 8, \text{ или } MN \cdot FT = 8,$$

где  $MN = \frac{1}{2}(CK + EF) = 4$ , значит,  $4FT = 8$ , откуда  $FT = 2$ .

$$\text{Пусть } EF = x, CK = y, \text{ тогда } TK = \frac{1}{2}(y - x), CT = CK - TK =$$

$$= y - \frac{1}{2}(y - x) = \frac{1}{2}(x + y) = MN = 4.$$

$$\text{Из } \triangle CFT \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{FT}{CT} = \frac{2}{4} = 0,5.$$

*Ответ:* 0,5.

**17.** Пусть  $AB = x$ ,  $DC = y$ , тогда  $x - y = 64$  (по условию задачи).  $MN$  — средняя линия трапеции  $ABCD$ , значит,  $MN = \frac{x+y}{2} = 68$ , откуда  $x + y = 136$ .

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 136, \\ x - y = 64, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 200, \\ 2y = 72, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 100, \\ y = 36. \end{cases}$$

По свойству описанного четырехугольника

$$2AD = x + y = 136, \text{ откуда } AD = 68.$$

Проведем высоту  $DT$  трапеции  $ABCD$ .

Так как  $AD = CB$ , то  $AT = \frac{1}{2}(x - y) = 32$ .

$$\text{Из } \triangle ADT \text{ } DT = \sqrt{AD^2 - AT^2}, \text{ } DT = \sqrt{68^2 - 32^2} = \sqrt{3600} = 60.$$

Но  $OK = \frac{1}{2}DT = 30$ , так как  $OK$  — радиус вписанной окружности и  $DT = 2 \cdot OK$ .

*Ответ:* 30.

**18.** Так как  $QR$  — биссектриса  $\angle Q$ , то  $\angle SQR = \angle RQM$ . Но  $\angle RQM = \angle SRQ$  — как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых  $SR$  и  $QM$  и секущей  $QR$ .

Значит,  $\triangle QSR$  — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника).

Пусть  $SR = SQ = x$ . По условию  $P_{QSRM} = 48$ , или  $x + x + x + 18 = 48$ ,  $3x = 30$ ,  $x = 10$ .

$$\text{Следовательно, } EF = \frac{1}{2}(18 + 10) = 14.$$

*Ответ:* 14.

**19.** В прямоугольной трапеции  $ABCD$ , где  $BC = 10$ ,  $AB = 8$  и  $\angle A = 60^\circ$ , проведем высоту  $BE$ . Тогда  $\angle ABE = 30^\circ \Rightarrow AE = \frac{1}{2}AB = 4$  и  $AD = 10 + 4 = 14$ . Значит,  $EF = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{1}{2}(14 + 10) = 12$ .

*Ответ:* 12.

**20.** Поскольку  $O$  — центр вписанной окружности, то  $MO$  и  $NO$  — биссектрисы углов  $KNM$  и  $LMN$ , тогда  $\angle OMN = \angle ONM = \frac{1}{2}\angle KNM + \frac{1}{2}\angle LMN = \frac{1}{2}(\angle KNM + \angle LMN) = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$ , т. е.  $\angle MON = 90^\circ$ , тогда  $MN^2 = MO^2 + NO^2$ ,  $MN = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ .

Заметим, что высота  $OA$   $\triangle OMN$  является одновременно и радиусом вписанной окружности. Тогда  $S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} OA \cdot MN = \frac{1}{2} OM \cdot ON$ , откуда

$$OA = \frac{6 \cdot 8}{10} = 4,8.$$

Значит,  $KL = 2 \cdot OA = 9,6$ , так как  $KL$  равно диаметру окружности. По свойству описанного четырехугольника  $KN + LM = KL + MN = 10 + 9,6 = 19,6$ , тогда  $EF = \frac{1}{2}(KN + LM) = \frac{1}{2} \cdot 19,6 = 9,8$ .

Ответ: 9,8.

**21.** Пусть в равнобедренной трапеции  $ABCD$   $BC = x$ , тогда  $AD = 2x$  и  $EF = \frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{3x}{2}$ . Пусть  $BT$  — высота трапеции, тогда  $AT = \frac{1}{2}(AD - BC) = \frac{1}{2}(2x - x) = \frac{1}{2}x$ ;  $BT = 2 \cdot OK = 2$ .

По свойству описанного четырехугольника  $AD + BC = 2AB$ , или  $3x = 2AB$ , откуда  $AB = \frac{3}{2}x$ .

Из  $\triangle ABT$   $AB^2 = BT^2 + AT^2$ , или  $\frac{9}{4}x^2 = 4 + \frac{1}{4}x^2$ ;  $9x^2 = 16 + x^2$ ,  $8x^2 = 16$ ,  $x^2 = 2$ ;  $x = \sqrt{2}$ .

$$\text{Значит, } EF = \frac{3x}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

**22.** Пусть  $NR = x$ ,  $MQ = y$ . Проведем высоту  $NK$  трапеции  $MNRQ$ . Из  $\triangle MNK$   $NK = MN \sin \angle M = 0,8MN$ .

По условию  $S_{MNRQ} = 20$ , или  $\frac{x+y}{2} \cdot NK = 20$ , где  $\frac{x+y}{2} = TE$  — средняя линия трапеции.

По свойству описанного четырехугольника  $2MN = x + y$ ,

$$MN = \frac{1}{2}(x + y) \Rightarrow MN = TE.$$

Значит,  $MN \cdot NK = 20$ . Так как  $NK = 0,8MN$ , то  $MN \cdot 0,8MN = 20$ ,  $MN^2 = \frac{20}{0,8} = 25$ , откуда  $MN = 5$ .

Следовательно,  $TE = MN = 5$ .

Ответ: 5.

**23.** Пусть  $BC = x$ ,  $CD = 2x$ ,  $AD = y$ .

$EF$  — средняя линия трапеции  $ABCD$ , тогда  $\frac{x+y}{2} = 20$ , или  $x + y = 40$ .

Из  $\triangle ADC$ , где  $\angle ADC = 90^\circ$ , имеем  $AC = \sqrt{4x^2 + y^2}$ .

Проведем высоту  $BM$ , тогда из  $\triangle DMB$

$DB = \sqrt{BM^2 + DM^2}$ , где  $BM = CD = 2x$ ,  $DM = x$ , тогда

$$DB = \sqrt{4x^2 + x^2} = \sqrt{5x^2} = x\sqrt{5}.$$

Так как  $AC \perp BD$ , то  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$  (см. № 478 «Геометрия 7–9»

авторов Л.С. Атанасян и др.), или  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + y^2} \cdot x\sqrt{5}$ .

С другой стороны,  $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(x + y) \cdot 2x$ .

Тогда  $\frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + y^2} \cdot x\sqrt{5} = \frac{1}{2}(x + y) \cdot 2x$ , или

$$\sqrt{5(4x^2 + y^2)} = 2(x + y), \quad x \neq 0.$$

Но  $x + y = 40$ , тогда  $\sqrt{5(4x^2 + y^2)} = 80$ , или  $4x^2 + y^2 = 1280$ .

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1280, \\ x + y = 40, \end{cases} \quad \begin{cases} 4x^2 + (40 - x)^2 = 1280, \\ y = 40 - x. \end{cases}$$

$4x^2 + 1600 - 80x + x^2 = 1280$ , или  $5x^2 - 80x + 320 = 0$ , или  $x^2 - 16x + 64 = 0$ ;  $(x - 8)^2 = 0$ ,  $x - 8 = 0$ ,  $x = 8$ .

Значит,  $BC = x = 8$ .

*Ответ:* 8.

**24.** Известно, что «если в равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны, то площадь  $S = h^2$  и  $h = \frac{1}{2}(a + b)$ , где  $h$  — высота трапеции,  $a$  и  $b$  — основания» (см. задачу № 19 к табл. 11 или № 519 «Геометрия 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

Пусть  $KR = x$ ,  $FN = y$ , тогда  $TS = \frac{x+y}{2} = KE = 10$ .

*Ответ:* 10.

**25.** Так как  $MT \parallel NK$  и  $MN \parallel FK$ , то  $MNKT$  — параллелограмм (по определению).

Пусть  $MN = TK = x$ ,  $FT = y$ , тогда  $EL = \frac{1}{2}(MN + FK)$ , или  $2x + y = 42,8$ . По условию  $MF = NK$  и  $P_{FMNK} = 71,8$ , значит,  $2MF + (2x + y) = 71,8$ , или  $2MF = 71,8 - 42,8$ ;  $2MF = 29$ ;  $MF = 14,5$ .

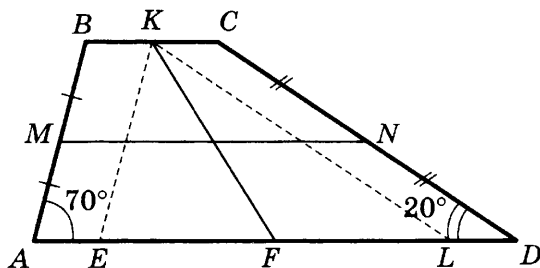
Так как  $MT$  — биссектриса  $\angle NMF$ , то  $\angle NMT = \angle FMT$ . Но  $\angle NMT = \angle MTF$  (как внутренние накрест лежащие) и  $MT = NK = MF$ , т. е.  $\triangle MFT$  — равнобедренный,  $MF = FT = 14,5$ .

Так как  $2x + y = 42,8$  и  $y = FT = 14,5$ , то  $2x = 42,8 - 14,5$ ;  $2x = 28,3$ , откуда  $x = 14,15$ .

Значит,  $MN = 14,15$ .

Ответ: 14,15.

**26.** Предварительно докажем, что «если в трапеции сумма углов при основании равна  $90^\circ$ , то отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности».



*Доказательство.* Пусть точки  $K$  и  $F$  — середины оснований  $AD$  и  $BC$ ;  $AD = 2x$  и  $BC = 2y$ .

Проведем  $KE \parallel AB$  и  $KL \parallel CD$ . Заметим, что  $\angle KEF = \angle A = 70^\circ$  и  $\angle KLF = \angle D = 20^\circ$ , тогда  $\angle EKL = 90^\circ$ , т. е.  $\triangle EKL$  — прямоугольный и  $KF$  — медиана  $\triangle EKL$ , значит,  $KE = KF = FL = \frac{1}{2}EL = \frac{AD - BC}{2}$ , что и требовалось доказать.

Следовательно,  $\frac{2x - 2y}{2} = 2$ , или  $x - y = 2$ .

Кроме того,  $MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 4$ , или  $x + y = 4$ .

Получим систему уравнений  $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 6, \\ 2y = 2. \end{cases}$

Итак,  $AD = 2x = 6$ ,  $BC = 2y = 2$ .

Ответ:  $AD = 6$ ;  $BC = 2$ .

# КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

---

## Планиметрия

### 1. Углы

**Углом** называется геометрическая фигура (рис. 1), образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

Точка  $O$  — вершина, а лучи  $OA$  и  $OB$  — стороны угла.

Обозначение:  $\angle AOB$  или  $\angle ab$ .

Угол в  $90^\circ$  называется **прямым** (рис. 2).

Угол, меньший прямого, называется **острым** (рис. 3).

Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется **тупым** (рис. 4).

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого (рис. 5).

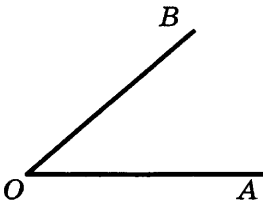


Рис. 1

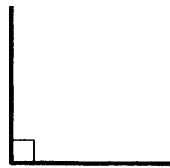


Рис. 2

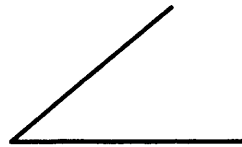


Рис. 3

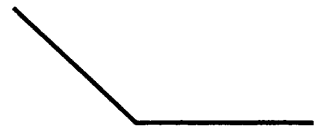


Рис. 4

$\angle AOC$  и  $\angle DOB$ ;  $\angle BOC$  и  $\angle AOD$  — вертикальные.

**Вертикальные углы равны:**  $\angle AOC = \angle DOB$  и  $\angle BOC = \angle AOD$ .

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию (рис. 6),  $\angle AOC$  и  $\angle BOC$  — смежные.

**Сумма смежных углов равна  $180^\circ$ .**

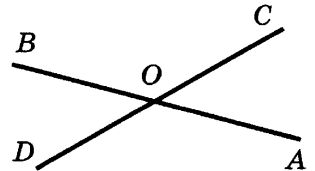


Рис. 5

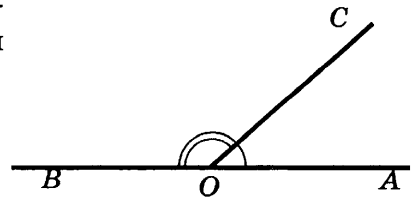


Рис. 6



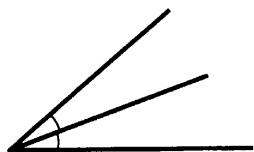


Рис. 7

**Биссектрисой угла** называется луч, проходящий между сторонами угла и делящий его пополам (рис. 7).

Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение друг друга (рис. 8).

Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (рис. 9).

При пересечении двух прямых  $a$  и  $b$  третьей  $c$  (секущей) образуется 8 углов (рис. 10):

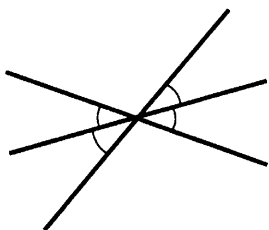


Рис. 8

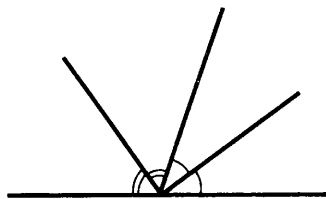


Рис. 9

**соответственные углы:**

$\angle 1$  и  $\angle 5$ ,  $\angle 2$  и  $\angle 6$ ,  $\angle 4$  и  $\angle 8$ ,  $\angle 3$  и  $\angle 7$ ;

**внутренние накрест лежащие:**

$\angle 4$  и  $\angle 6$ ,  $\angle 3$  и  $\angle 5$ ;

**внешние накрест лежащие:**

$\angle 1$  и  $\angle 7$ ,  $\angle 2$  и  $\angle 8$ ;

**внутренние односторонние:**

$\angle 4$  и  $\angle 5$ ,  $\angle 3$  и  $\angle 6$ ;

**внешние односторонние:**

$\angle 1$  и  $\angle 8$ ,  $\angle 2$  и  $\angle 7$ .

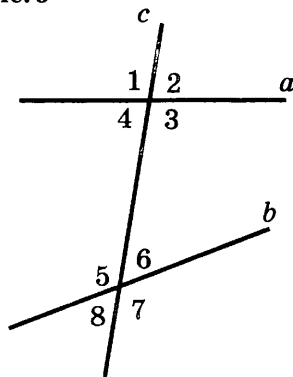


Рис. 10

## 2. Многоугольник

$ABCDE$  — пятиугольник (рис. 11).

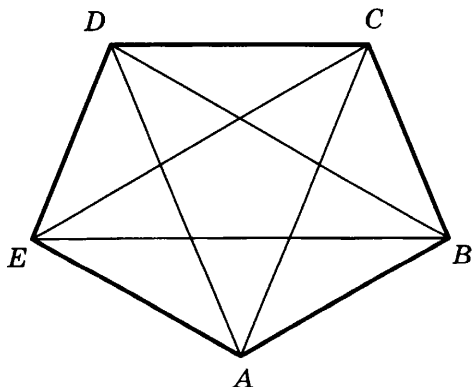


Рис. 11

Точки  $A, B, C, D, E$  — вершины многоугольника;  $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$  — углы;  $AB, BC, CD$  и т. д. — стороны; отрезки  $AC, AD, BE, BD, CE$  — диагонали;  $P = AB + BC + \dots + EA$  — периметр многоугольника.

Многоугольник называется **выпуклым** (рис. 11), если он целиком расположен по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две

его соседние вершины. В противном случае многоугольник называется **невыпуклым** (рис. 12).

#### Свойства:

1. Сумма внутренних углов произвольного  $n$ -угольника равна  $180^\circ \cdot (n - 2)$ .

2. Сумма внешних углов выпуклого  $n$ -угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна  $360^\circ$ .

3. В выпуклом  $n$ -угольнике из каждой вершины можно провести  $(n - 3)$  диагоналей, которые разбивают  $n$ -угольник на  $(n - 2)$  треугольников.

4. В выпуклом  $n$ -угольнике число диагоналей равно  $\frac{1}{2}n(n - 3)$ .

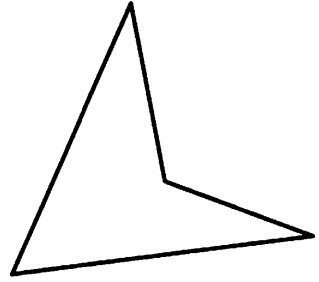


Рис. 12

### 3. Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник, у которого равны все углы и стороны, называется **правильным**.

#### Свойства:

1. Каждый угол правильного  $n$ -угольника равен  $\alpha_n = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}$ .

2. Около правильного  $n$ -угольника можно описать окружность, и притом только одну.

3. В правильный  $n$ -угольник можно вписать окружность, и притом только одну.

4. Окружность, вписанная в правильный  $n$ -угольник, касается всех сторон  $n$ -угольника в их серединах.

5. Центр окружности, описанной около правильного  $n$ -угольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же  $n$ -угольник.

6. Длина стороны правильного  $n$ -угольника, вписанного в окружность радиуса  $R$ , равна  $a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$ .

7. Длина стороны правильного  $n$ -угольника, описанного около окружности радиуса  $r$ , равна  $a = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$ .

### 4. Треугольник

**Треугольником** называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, последовательно соединяющих эти точки.

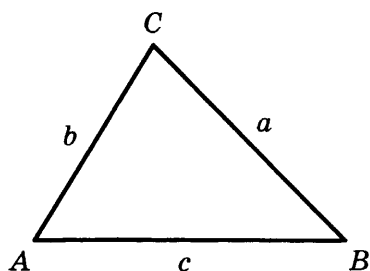


Рис. 13

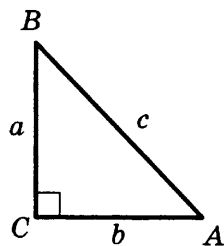


Рис. 14

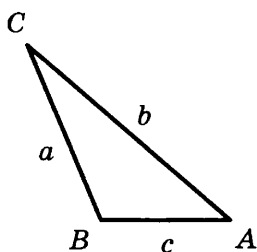


Рис. 15

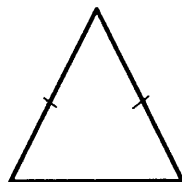


Рис. 16

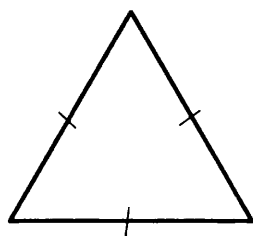


Рис. 17

Точки  $A, B, C$  — вершины  $\triangle ABC$ .

Отрезки  $AB, BC$  и  $AC$  — стороны,  $\angle A, \angle B$  и  $\angle C$  — углы.

Стороны треугольника часто обозначают малыми буквами (рис. 13):

$$AB = c, BC = a, AC = b.$$

$P = a + b + c$  — периметр треугольника.

Треугольник, у которого все углы острые, называется **остроугольным** (рис. 13).

Треугольник, у которого угол прямой, называется **прямоугольным** (рис. 14).

Стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** ( $a$  и  $b$ ), а сторона, лежащая против прямого угла, — **гипотенузой** ( $c$ ).

Треугольник с тупым углом называется **тупоугольным** (рис. 15).

Треугольник, у которого две стороны равны, называется **равнобедренным** (рис. 16).

Равные стороны называются **боковыми**, а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** (рис. 17).

Каждый угол равностороннего треугольника равен  $60^\circ$ .

### Свойства равнобедренного треугольника:

1. Углы при основании равны.
2. Биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.
3. Высота, проведенная к основанию, является одновременно медианой и биссектрисой.

4. Медиана, проведенная к основанию, является одновременно высотой и биссектрисой.

**Внешним углом** треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника (рис. 18):

$\angle CBD$  — внешний угол треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (рис. 18):  $\angle CBD = \angle A + \angle C$ .

Отрезок, соединяющий середины двух сторон, называется **средней линией** треугольника (рис. 19).

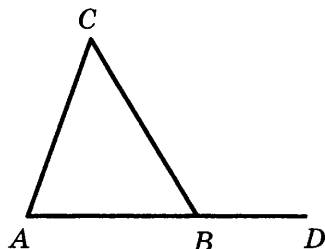


Рис. 18

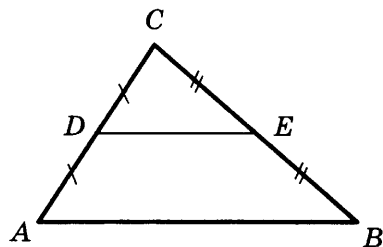


Рис. 19

## 5. Признаки равенства треугольников

**I признак** (*признак равенства по двум сторонам и углу между ними*)

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 20).

$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1.$$

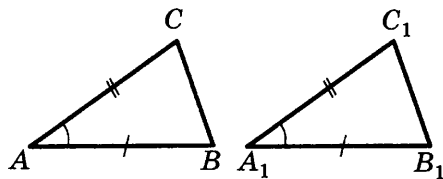


Рис. 20

**II признак** (*признак равенства по стороне и прилежащим к ней углам*)

Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 21).

$$AB = A_1B_1, \angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1.$$

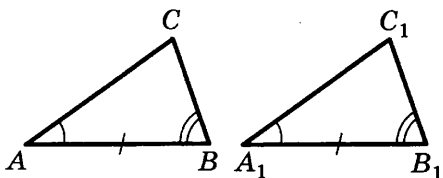


Рис. 21

**III признак** (*признак равенства по трем сторонам*)

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 22).

$$AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, AC = A_1C_1.$$

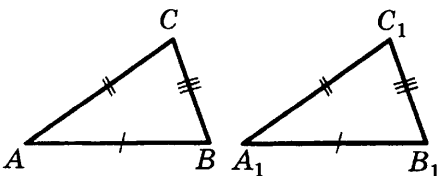


Рис. 22

## 6. Неравенства треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон:

$$a < b + c, b < a + c, c < a + b.$$

## 7. Определение вида треугольника по его сторонам

Пусть  $c$  — наибольшая сторона, тогда:

а) если  $c^2 < a^2 + b^2$ , то треугольник остроугольный;

б) если  $c^2 > a^2 + b^2$ , то треугольник тупоугольный;

в) если  $c^2 = a^2 + b^2$ , то треугольник прямоугольный.

## 8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства)

1) Сумма острых углов равна  $90^\circ$  (рис. 23).

$$\angle A + \angle B = 90^\circ.$$

2) Катет, лежащий против угла в  $30^\circ$ , равен половине гипотенузы (рис. 24).

$$a = \frac{1}{2}c.$$

3) Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен  $30^\circ$  (рис. 24).

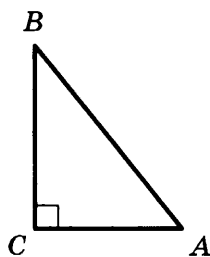


Рис. 23

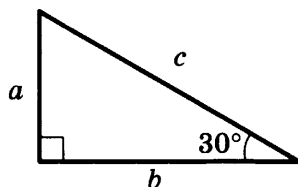


Рис. 24

## 9. Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны (рис. 25).

$$AC = A_1C_1, BC = B_1C_1.$$

2. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны (рис. 26).

$$AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1.$$

3. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника

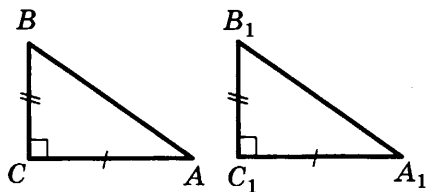


Рис. 25

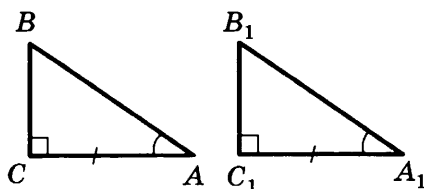


Рис. 26

соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны (рис. 27).

$$AB = A_1B_1, \angle A = \angle A_1.$$

4. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны (рис. 28).

$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1.$$

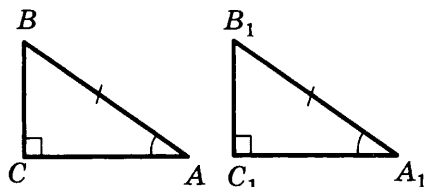


Рис. 27

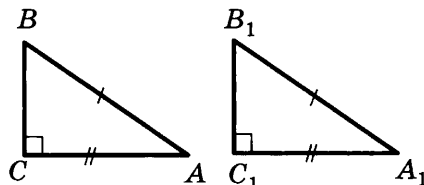


Рис. 28

## 10. Четыре замечательные точки треугольника

С каждым треугольником связаны 4 точки:

- 1) точка пересечения медиан;
- 2) точка пересечения биссектрис;
- 3) точка пересечения высот (или их продолжений);
- 4) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника**.

**Высотой** треугольника называется длина перпендикуляра, опущенного из любой его вершины на противоположащую сторону или ее продолжение.

В *тупоугольном треугольнике* (рис. 29) две высоты падают на продолжение сторон и лежат вне треугольника, а третья — внутри.

В *остроугольном треугольнике* (рис. 30) все три высоты лежат внутри треугольника.

В *прямоугольном треугольнике* катеты одновременно служат и высотами (рис. 31).

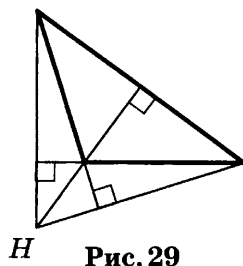


Рис. 29

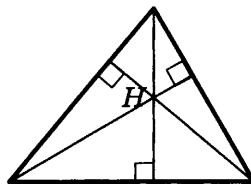


Рис. 30

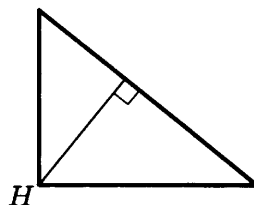


Рис. 31

Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой **ортоцентром**. В тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника. В прямоугольном треугольнике он совпадает с вершиной прямого угла.

**Медианой** треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

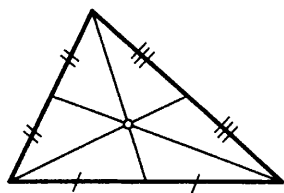


Рис. 32

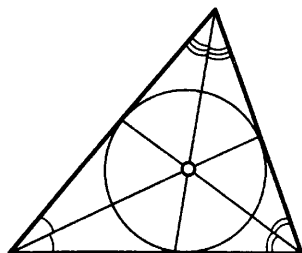


Рис. 33

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром тяжести** треугольника (рис. 32).

Эта точка делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (считая от соответствующей вершины).

**Биссектрисой** треугольника называется отрезок биссектрисы угла от вершины до пересечения с противоположащей стороной.

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром вписанного круга** (рис. 33).

Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины (рис. 34, 35, 36), пересекаются в одной точке, которая является **центром описанной окружности**.

В тупоугольном треугольнике (рис. 34) эта точка лежит **вне** треугольника, в остроугольном (рис. 35) — **внутри**, в прямоугольном — **на середине** гипотенузы.

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной окружностей совпадают друг с другом только в **равностороннем** треугольнике.

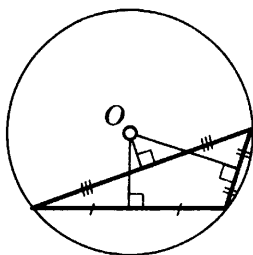


Рис. 34

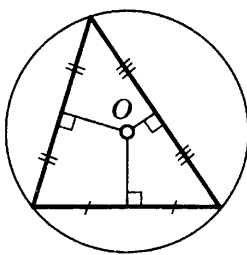


Рис. 35

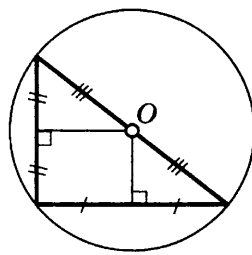


Рис. 36

## 11. Произвольный треугольник

1) **Свойство биссектрисы** (рис. 37) внутреннего угла треугольника:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

2) **Длина биссектрисы:**

$$l_c = \sqrt{ab - a_1b_1};$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

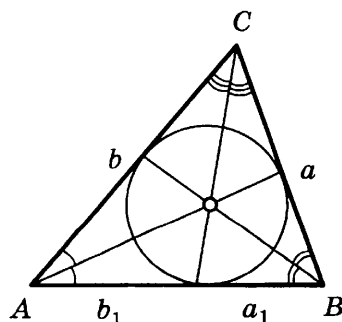


Рис. 37

## 3) Длина медианы:

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

## 4) Длина высоты:

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где  $a, b, c$  — стороны треугольника;

$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$  — полупериметр;

$h_c$  — высота, проведенная к стороне  $c$ .

## 5) Зависимость между сторонами и высотами:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

## 6) Зависимость между высотами и радиусом вписанной окружности:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

## 12. Теорема Чевы

Для того чтобы прямые  $BE$ ,  $AD$  и  $CF$  (рис. 38) пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

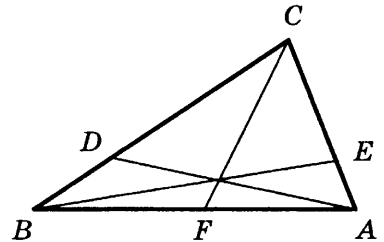


Рис. 38

## 13. Теорема Менелая

Если на сторонах  $BC$ ,  $AB$  и продолжении стороны  $AC$   $\triangle ABC$  за точку  $C$  отмечены соответственно точки  $A_1$ ,  $C_1$  и  $B_1$ , лежащие на одной прямой, то

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

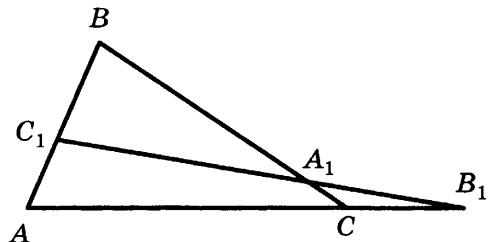


Рис. 39



## 14. Теорема синусов

Во всяком треугольнике стороны относятся как синусы противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где  $R$  — радиус окружности, описанной около треугольника.

## 15. Теорема косинусов

Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha;$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

## 16. Площадь треугольника

$$1) S = \frac{1}{2} ah_a;$$

$$2) S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma;$$

$$3) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона);}$$

$$4) S = p r, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a+b+c);$$

$$5) S = \frac{abc}{4R};$$

$$6) S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}.$$

## 17. Равносторонний (правильный) треугольник (рис. 40)

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; a = R \sqrt{3} = 2r \sqrt{3};$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}; r = \frac{a}{2\sqrt{3}}; h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

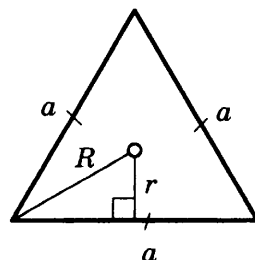


Рис. 40

## 18. Подобные треугольники

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого (рис. 41).

$AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $AC$  и  $A_1C_1$  — сходственные стороны.

Из подобия треугольников следует

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1.$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

где  $k$  — коэффициент подобия.

Обозначение:  $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ .

Если два треугольника подобны, то отношение их площадей равно  $k^2$ , т. е.  $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle A_1B_1C_1} = k^2$ .

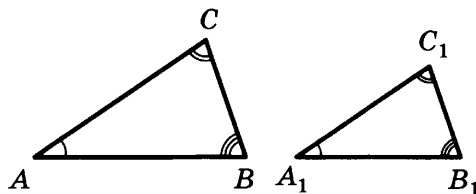


Рис. 41

## 19. Признаки подобия треугольников

**I признак:** если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны (рис. 42).

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1.$$

**II признак:** если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между ними, равны, то такие треугольники подобны (рис. 43).

$$\begin{aligned} \angle A &= \angle A_1, \\ \frac{AB}{A_1B_1} &= \frac{AC}{A_1C_1}. \end{aligned}$$

**III признак:** если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны (рис. 44).

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

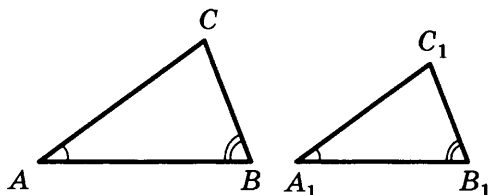


Рис. 42

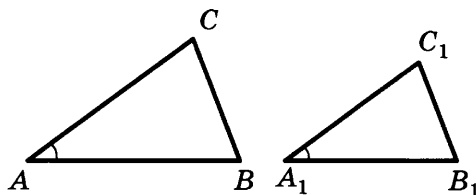


Рис. 43

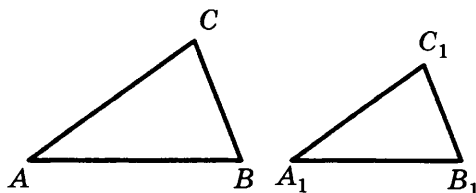


Рис. 44

**Площади подобных фигур** (в частности, многоугольников) пропорциональны квадратам их сходственных сторон.

В частности, **площади кругов** относятся как квадраты радиусов (или диаметров).

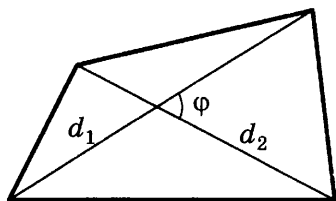


Рис. 45

## 20. Четырехугольник

**1. Произвольный выпуклый** ( $d_1$  и  $d_2$  — диагонали,  $\varphi$  — угол между ними) (рис. 45).

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

**2. Вписанный** (рис. 46).

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна  $180^\circ$ . Верно и обратное.

$$ac + bd = d_1 d_2$$

(теорема Птолемея).

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

$$\text{где } p = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

**3. Описанный.**

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны (рис. 47).

$$a + c = b + d, \quad S = p \cdot r.$$

## 21. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 48).

$$AB \parallel DC, \quad AD \parallel BC$$

( $a$  и  $b$  — смежные стороны;  $\alpha$  — угол между ними;  $h_a$  — высота, проведенная к стороне  $a$ ).

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$  — зависимость между сторонами и диагоналями;

$$S = a \cdot h_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$$

— площадь параллелограмма.

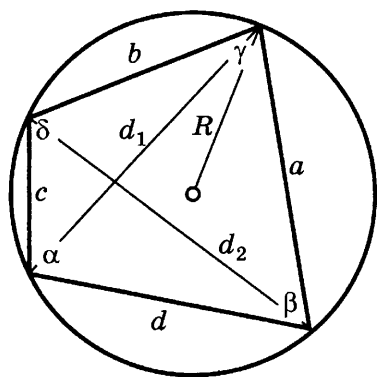


Рис. 46

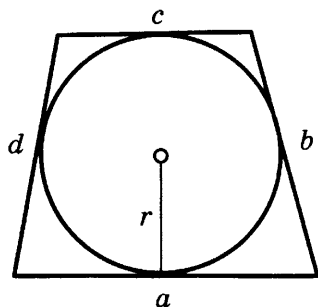


Рис. 47

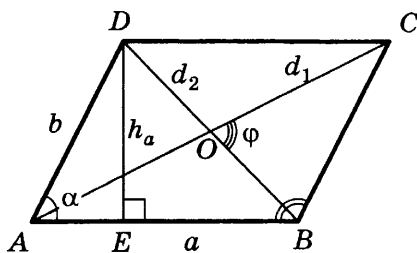


Рис. 48

**Некоторые свойства:**

1. В параллелограмме противоположные стороны и углы равны ( $AB = DC$ ;  $AD = BC$ ;  $\angle A = \angle C$ ;  $\angle B = \angle D$ ).

2. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам ( $AO = OC$ ;  $BO = OD$ ).

3. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна  $180^\circ$  ( $\angle A + \angle B = 180^\circ$  и т. д.).

4. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника ( $\triangle ADC = \triangle ABC$ ,  $\triangle ABD = \triangle BCD$ ).

5. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник (рис. 49).

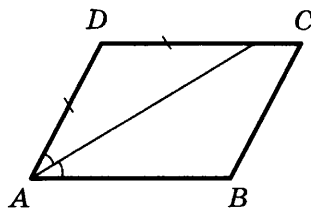


Рис. 49

**Признаки параллелограмма (рис. 48)**

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны ( $AB = DC$ ,  $AB \parallel DC$ ), то такой четырехугольник — параллелограмм.

2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны ( $AB = DC$ ,  $AD = DC$ ), то такой четырехугольник — параллелограмм.

3. Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны ( $\angle A = \angle C$ ;  $\angle B = \angle D$ ), то такой четырехугольник — параллелограмм.

4. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — параллелограмм.

**22. Трапеция**

$a$  и  $b$  — основания;  $h$  — высота;  $d_1$  и  $d_2$  — диагонали;  $\varphi$  — угол между ними (рис. 50).

**Трапецией** называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две не параллельны.

$AB \parallel DC$ ,  $AB$  и  $DC$  — основания трапеции,  $AD$  и  $BC$  — боковые стороны.

Отрезок  $l$ , соединяющий середины боковых сторон, называется **средней линией трапеции**.

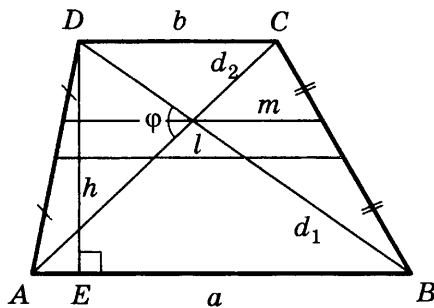


Рис. 50

$l = \frac{1}{2}(a + b)$  — длина средней линии трапеции;

$$m \parallel a \parallel b, m = \frac{2ab}{a+b};$$

$$\angle A + \angle D = 180^\circ; \angle B + \angle C = 180^\circ;$$

$$S = l \cdot h = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin \varphi \text{ — площадь трапеции.}$$

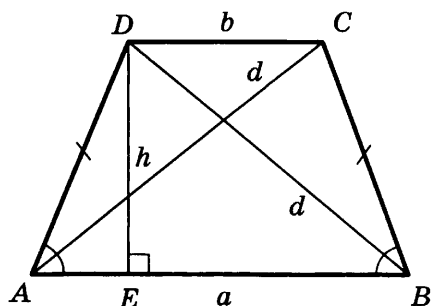


Рис. 51

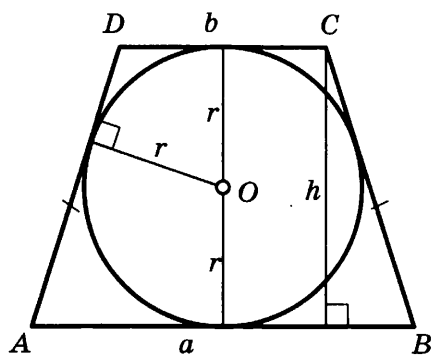


Рис. 52

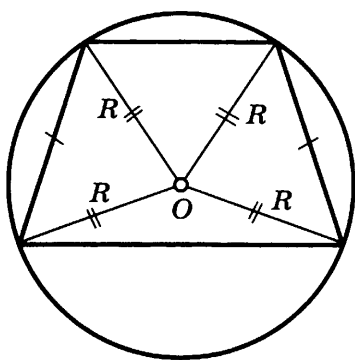


Рис. 53

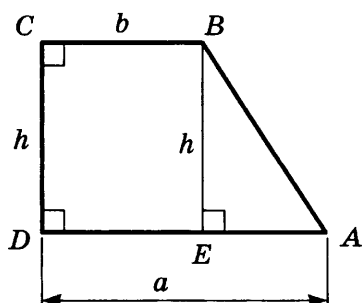


Рис. 54

## 1. Равнобедренная трапеция

Если у трапеции боковые стороны равны, то такая трапеция называется равнобедренной (рис. 51).

$$AD = BC.$$

В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны ( $\angle A = \angle B$ ;  $\angle C = \angle D$ ) и диагонали равны ( $AC = BD$ ).

$$AE = \frac{1}{2}(a - b).$$

Если  $AC \perp BD$ , то  $S = h^2$ .

$$AB + CD = 2AD \text{ (рис. 52).}$$

$h = 2r$ ,  $r$  — радиус вписанной окружности;  $h = \sqrt{ab}$ .

$R$  — радиус описанной окружности.

Точка  $O$  — центр окружности, описанной около любого треугольника, вершины которого совпадают с вершинами трапеции (рис. 53).

## 2. Прямоугольная трапеция

Если в трапеции один из углов прямой, то такая трапеция называется прямоугольной (рис. 54).

$$\angle D = \angle C = 90^\circ.$$

$$BE = CD = h \text{ (высота трапеции).}$$

$$AE = a - b.$$

## 23. Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 55).

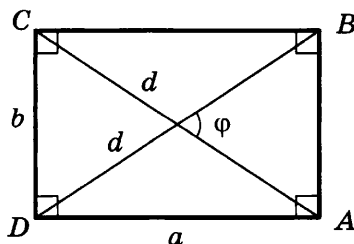


Рис. 55

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, у прямоугольника **диагонали равны**.

Стороны прямоугольника одновременно являются и высотами.

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi.$$

## 24. Ромб

**Ромбом** называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 56).

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми его свойствами.

Кроме того, *диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов*.

$$AC \perp BD.$$

$AC$  — биссектриса углов  $A$  и  $C$ ;  $BD$  — биссектриса углов  $B$  и  $D$ .

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

$$S = a \cdot h_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \text{ — площадь ромба.}$$

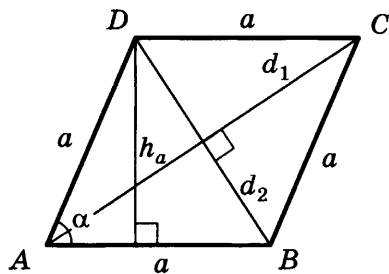


Рис. 56

## 25. Квадрат

**Квадратом** называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 57).

Можно сказать, что квадрат — это ромб с прямым углом.

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

**Основные свойства:**

1. У квадрата все углы прямые.
2. У квадрата диагонали равны, взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

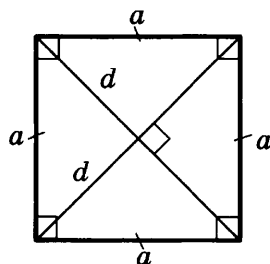


Рис. 57

## 26. Окружность

**Окружностью** называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра) (рис. 58).

Отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности, называется **радиусом**.

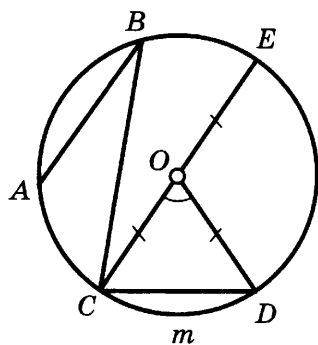


Рис. 58

Обозначение:  $r$  или  $R$ .

На рисунке  $OC = OE = OD = R$ .

Часть окружности (например,  $CmD$ ) называется **дугой**.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**, а хорда, проходящая через центр, — **диаметром**.

$AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $CE$  — хорды окружности.  $CE$  — наибольшая из хорд — диаметр.

Обозначение:  $d$  или  $D$ .

$$D = 2R.$$

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом**.

Часть круга, ограниченная дугой ( $CmD$ ) и стягивающей ее хордой ( $CD$ ), называется **сегментом**.

Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, называется **сектором**.

Угол, образованный двумя радиусами, называется **центральный** ( $\angle COD$  на рис. 58).

Угол, у которого вершина лежит на окружности, а стороны являются хордами, называется **вписанным** (например,  $\angle ABC$ ).

## 27. Свойства касательных к окружности

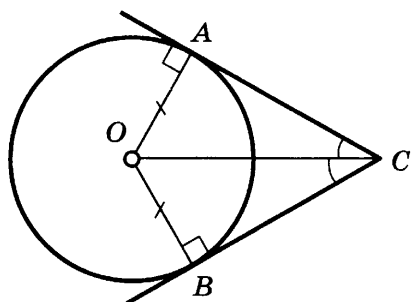


Рис. 59

Угол, образованный двумя касательными ( $CA$  и  $CB$ ), исходящими из одной точки, называется **описанным** ( $\angle ACB$  на рис. 59).

1. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

2. Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.

## 28. Окружность и треугольник

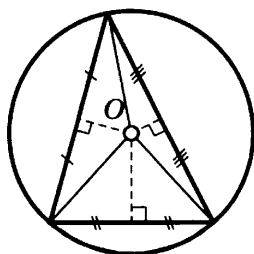


Рис. 60

1. Около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам через их середины (рис. 60).

2. Во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности является точка пересечения биссектрис (рис. 61).

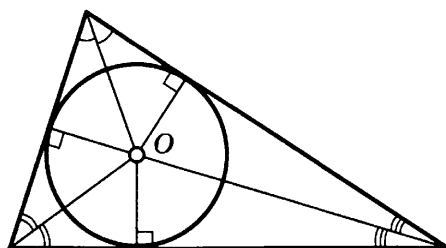


Рис. 61

## 29. Окружность и четырехугольник

1. Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов была равна  $180^\circ$  (рис. 62).

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

2. Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны (рис. 63).

$$a + c = b + d.$$

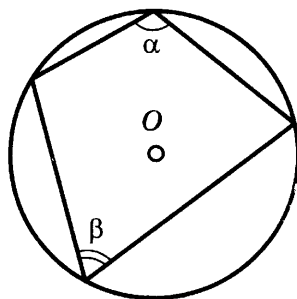


Рис. 62

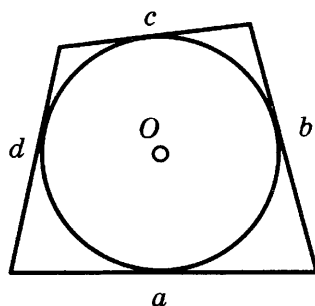


Рис. 63

## 30. Углы и окружность

**Центральный угол** измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 64).

$$\angle AOB = \cup AmB.$$

**Вписанный угол** измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 65).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AmC.$$

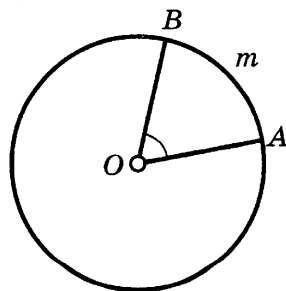


Рис. 64



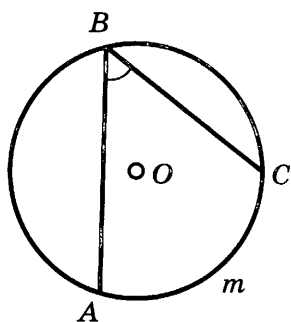


Рис. 65

Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной внутри него (рис. 66).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC.$$

Угол между двумя касательными измеряется полуразностью дуг (рис. 67).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup AnC).$$

Угол между двумя хордами измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается (рис. 68).

$$\angle AEC = \frac{1}{2} (\cup AmC + \cup BnD).$$

Угол между секущими измеряется полуразностью дуг между ними (рис. 69).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup EnD).$$

Угол между касательной и секущей измеряется полуразностью отсекаемых ими дуг, прилежащих к касательной (рис. 70).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup CnD).$$

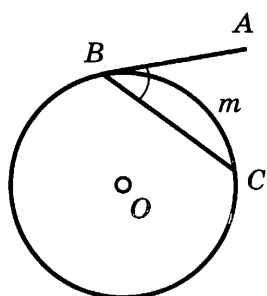


Рис. 66

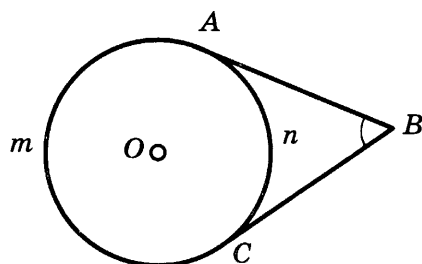


Рис. 67

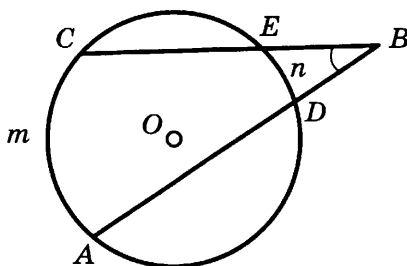


Рис. 69

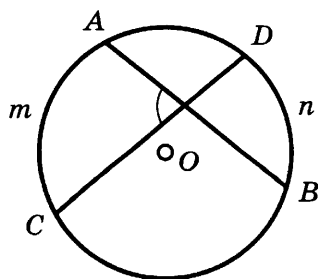


Рис. 68

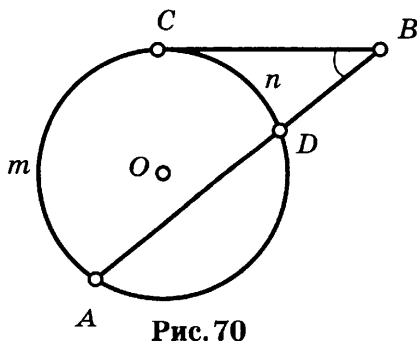


Рис. 70

### 31. Метрические соотношения в окружности

Если хорды  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $E$ , то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой (рис. 71).

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

Если из точки  $B$  к окружности проведены две секущие  $BDA$  и  $BEC$ , то

$$DB \cdot AB = EB \cdot CB \text{ (рис. 72).}$$

Если из точки  $B$  к окружности проведены секущая  $BDA$  и касательная  $BC$ , то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной (рис. 73).

$$AB \cdot DB = BC^2.$$

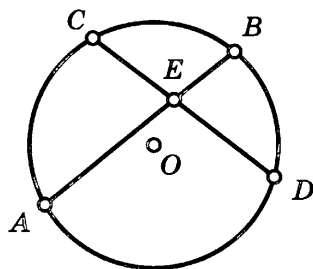


Рис. 71

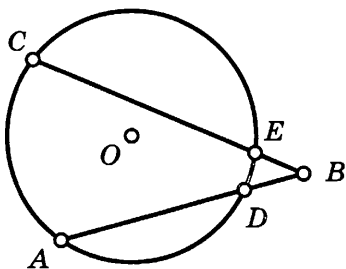


Рис. 72

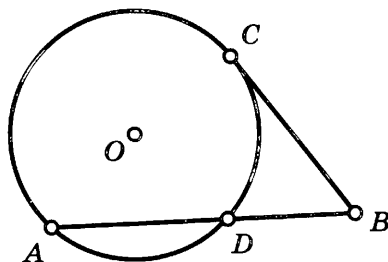


Рис. 73

### 32. Длина окружности. Площадь круга и его частей

$C = 2\pi R = \pi D$  — длина окружности;

$l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = R\alpha$  — длина дуги окружности;

$S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi D^2 = \frac{1}{2} CR$  — площадь круга;

$\pi = \frac{C}{D} \approx 3,14$  — отношение длины окруж-

ности к ее диаметру;

$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n}{360}$  — площадь сектора.

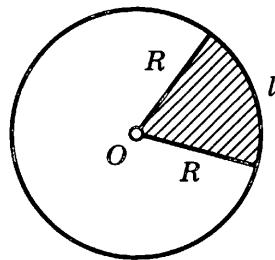


Рис. 74

### 33. Понятие вектора

*Вектором* называется направленный отрезок (рис. 75).

Всякий вектор характеризуется:

- 1) начальной точкой;
- 2) направлением;
- 3) длиной (модулем).

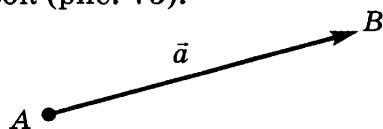


Рис. 75

*Длиной (модулем)* ненулевого вектора  $\overrightarrow{AB}$  называется длина отрезка  $AB$ . Длина вектора обозначается  $|\overrightarrow{AB}|$  или  $|\vec{a}|$ .

### 34. Равенство векторов

Если ненулевые векторы лежат на одной прямой или параллельных прямых, то они называются *коллинеарными* (рис. 76).

Коллинеарные векторы:

$$\vec{a}, \vec{m}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{KP}, \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Неколлинеарные векторы:

$$\overrightarrow{CD} \text{ и } \overrightarrow{ST}, \overrightarrow{KP} \text{ и } \overrightarrow{ST}.$$

Коллинеарные векторы называются *сонаправленными*, если они имеют одинаковые направления.

Например,  $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{m}$ ,  $\vec{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KP}$ ,

$$\vec{m} \uparrow\uparrow \overrightarrow{KP}.$$

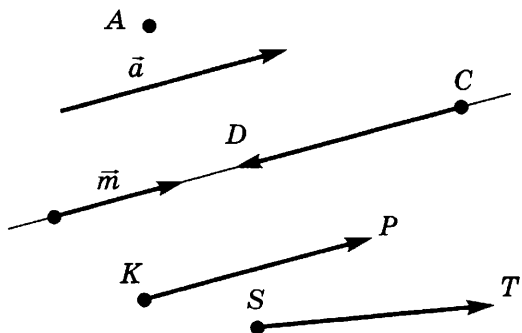


Рис. 76

Коллинеарные векторы называются *противоположно направленными*, если они имеют разные направления.

Например,  $\vec{a}$  и  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\vec{m}$  и  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  и  $\overrightarrow{KP}$ .

Векторы называются *равными*, если они сонаправлены и их длины равны.

### 35. Координаты вектора

Пусть  $A(x_1; y_1)$  — начало вектора  $\vec{a}$ ,  $B(x_2; y_2)$  — конец вектора  $\vec{a}$  (рис. 75).

*Координатами вектора  $\vec{a}$*  называют числа  $a_1 = x_2 - x_1$ ,  $a_2 = y_2 - y_1$ .

Координаты вектора обозначают  $\vec{a}(a_1; a_2)$ .

Тогда абсолютная величина (модуль) вектора с координатами  $a_1, a_2$

$$\text{равна } |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Если векторы равны, то у них равны соответствующие координаты. И наоборот, если у векторов равны соответствующие координаты, то векторы равны.

### 36. Действия над векторами

#### 1. Сумма двух векторов.

Каковы бы ни были точки  $A, B, C$ , имеет место векторное равенство (рис. 77):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (\text{правило треугольника}),$$

$$\text{или } \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}.$$

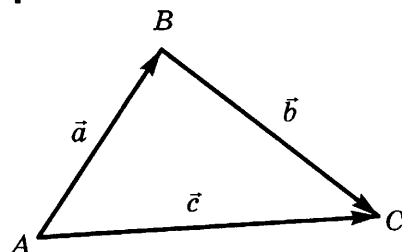


Рис. 77

2. Векторы складываются геометрически по правилу параллелограмма (рис. 78): сумма двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , имеющих общее начало, изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах.

3. Для векторов справедливы *переместительный* и *сочетательный* законы сложения:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{и} \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

4. Разностью векторов  $\vec{a}(a_1; a_2)$  и  $\vec{b}(b_1; b_2)$  называется такой вектор  $\vec{c}(c_1; c_2)$ , который в сумме с вектором  $\vec{b}$  дает вектор  $\vec{a}$ , т. е.

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a} \quad (\text{рис. 79}).$$

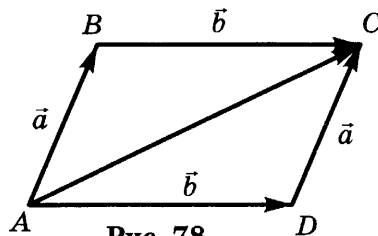


Рис. 78

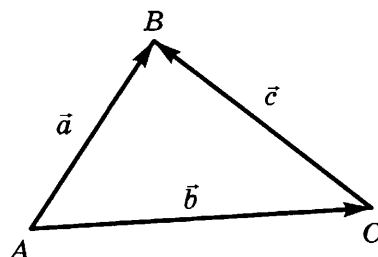


Рис. 79

#### 5. Умножение вектора на число.

Произведением вектора  $\vec{a}(a_1; a_2)$  на число  $k$  называется вектор  $k\vec{a}(ka_1; ka_2)$ .

Из определения следует, что:

- 1) произведение любого вектора на число ноль есть нулевой вектор;
- 2) для любого числа  $k$  и любого вектора  $\vec{a}$  векторы  $\vec{a}$  и  $k\vec{a}$  коллинеарны.

**Основные свойства умножения вектора на число:**

- 1)  $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$  — сочетательный закон;
- 2)  $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$  — I распределительный закон;
- 3)  $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$  — II распределительный закон.

### 37. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин (модулей) на косинус угла между ними (рис. 80).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha.$$

1) Если  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , то  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\cos \alpha = 0$ , тогда  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .

Верно и обратное: если  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , то  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

2) Если  $\alpha < 90^\circ$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ ; если  $\alpha > 90^\circ$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ .

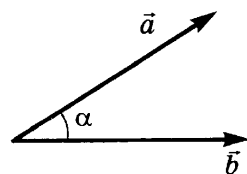


Рис. 80

### 38. Скалярное произведение в координатах

Если  $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ ,  $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$ .

*Следствие 1.*  $\vec{a} \perp \vec{b}$  тогда и только тогда, когда  $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ .

*Следствие 2.*  $\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$ , где  $\alpha$  — угол между ненулевыми векторами  $\vec{a}\{x_1; y_1\}$ ,  $\vec{b}\{x_2; y_2\}$ .

### 39. Свойства скалярного произведения векторов

- 1)  $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ ;
- 2)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (переместительный закон);
- 3)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$  (распределительный закон);
- 4)  $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$  (сочетательный закон).

### 40. Уравнение окружности

Если центром окружности является начало координат (рис. 81), то уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

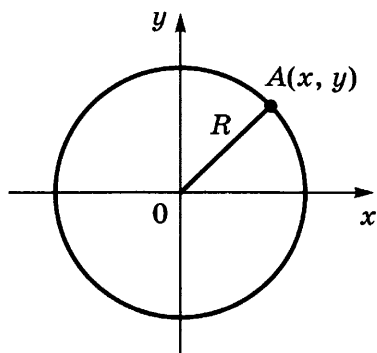


Рис. 81

Если центр окружности  $M(x_0; y_0)$ , то уравнение окружности имеет вид (рис. 82)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

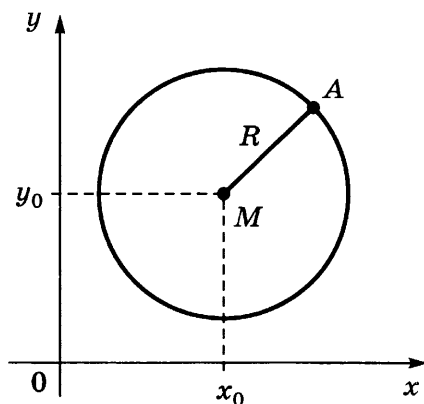


Рис. 82

### 41. Уравнение прямой

1) Любая прямая в декартовых координатах  $x$  и  $y$  задается уравнением вида  $ax + by + c = 0$ , где  $a$  и  $b$  — коэффициенты при неизвестных,  $c$  — свободный член.

2) Если  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , то  $y = -\frac{c}{b}$  — уравнение прямой, параллельной оси  $Ox$  (рис. 83).

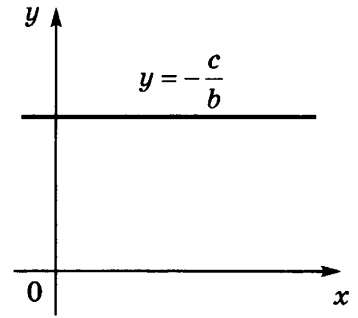


Рис. 83

3) Если  $b = 0$ ,  $a \neq 0$ , то  $x = -\frac{c}{a}$  — уравнение прямой, параллельной оси  $Oy$  (рис. 84).

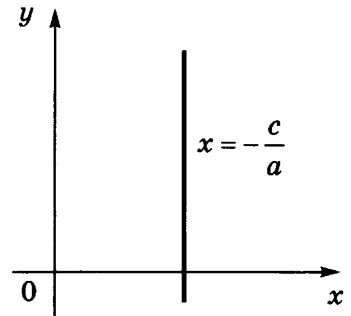


Рис. 84

4) Если  $c = 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ , то  $ax + by = 0$  — уравнение прямой, проходящей через начало координат  $(0; 0)$  (рис. 85).

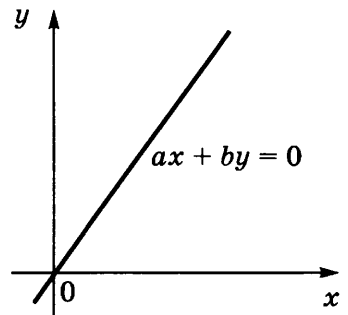


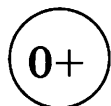
Рис. 85

# Содержание

.....	
К таблице 1. Определение и признаки параллелограмма .....	3
К таблице 2. Свойства параллелограмма .....	6
К таблице 3. Свойства параллелограмма .....	13
К таблице 4. Параллелограмм .....	19
К таблице 5. Параллелограмм .....	21
К таблице 6. Трапеция.....	24
К таблице 7. Трапеция.....	28
К таблице 8. Площадь прямоугольника .....	31
К таблице 9. Площадь параллелограмма.....	35
К таблице 10. Площадь треугольника.....	42
К таблице 11. Площадь трапеции.....	50
К таблице 12. Теорема Пифагора .....	58
К таблице 13. Определение подобных треугольников.....	75
К таблице 14. Признаки подобия треугольников.....	84
К таблице 15. Признаки подобия треугольников.....	90
К таблице 16. Средняя линия треугольника .....	93
К таблице 17. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике .....	97
К таблице 18. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике .....	102
К таблице 19. Соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике .....	105
К таблице 20. Касательная к окружности .....	112
К таблице 21. Центральные и вписанные углы .....	116
К таблице 22. Четыре замечательные точки треугольника .....	125
К таблице 23. Вписанная и описанная окружности .....	129
К таблице 24. Векторы .....	152
К таблице 25. Средняя линия трапеции .....	160
<b>Краткие теоретические сведения .....</b>	<b>167</b>
Планиметрия .....	167
1. Углы.....	167
2. Многоугольник.....	168
3. Правильные многоугольники .....	169
4. Треугольник .....	169
5. Признаки равенства треугольников .....	171
6. Неравенства треугольника .....	172
7. Определение вида треугольника по его сторонам.....	172
8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства) .....	172
9. Признаки равенства прямоугольных треугольников.....	172

10. Четыре замечательные точки треугольника.....	173
11. Произвольный треугольник.....	174
12. Теорема Чевы .....	175
13. Теорема Менелая .....	175
14. Теорема синусов.....	176
15. Теорема косинусов .....	176
16. Площадь треугольника .....	176
17. Равносторонний (правильный) треугольник .....	176
18. Подобные треугольники.....	177
19. Признаки подобия треугольников .....	177
20. Четырехугольник.....	178
21. Параллелограмм .....	178
22. Трапеция .....	179
23. Прямоугольник .....	180
24. Ромб.....	181
25. Квадрат .....	181
26. Окружность.....	181
27. Свойства касательных к окружности .....	182
28. Окружность и треугольник.....	182
29. Окружность и четырехугольник.....	183
30. Углы и окружность .....	183
31. Метрические соотношения в окружности .....	185
32. Длина окружности. Площадь круга и его частей .....	185
33. Понятие вектора.....	186
34. Равенство векторов .....	186
35. Координаты вектора .....	186
36. Действия над векторами .....	187
37. Скалярное произведение векторов .....	187
38. Скалярное произведение в координатах.....	188
39. Свойства скалярного произведения векторов.....	188
40. Уравнение окружности.....	188
41. Уравнение прямой .....	188





*Учебное издание*

**Балаян Эдуард Николаевич**

**ГЕОМЕТРИЯ**  
**Решебник**  
**к книге Э.Н. Балаяна**  
**ГЕОМЕТРИЯ**  
*Задачи на готовых чертежах*  
*для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ (7–9 классы)*  
**8 класс**

Ответственный редактор *С. Осташов*  
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Формат 70×100/16. Бумага офсетная.  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,48. Тираж 4000 экз.  
Заказ № 1038.

ООО «Феникс»  
344011, Россия, Ростовская обл., г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150.

Сайт издательства: [www.phoenixrostov.ru](http://www.phoenixrostov.ru)  
Интернет-магазин: [www.phoenixbooks.ru](http://www.phoenixbooks.ru)

Изготовлено в России. Дата изготовления: 12.2018.  
Изготовитель: ООО «Чеховский печатник»  
142300, Россия, Московская обл., Чеховский р-н, г. Чехов,  
ул. Полиграфистов, д. 1, корп. А, пом. 12, эт. 4