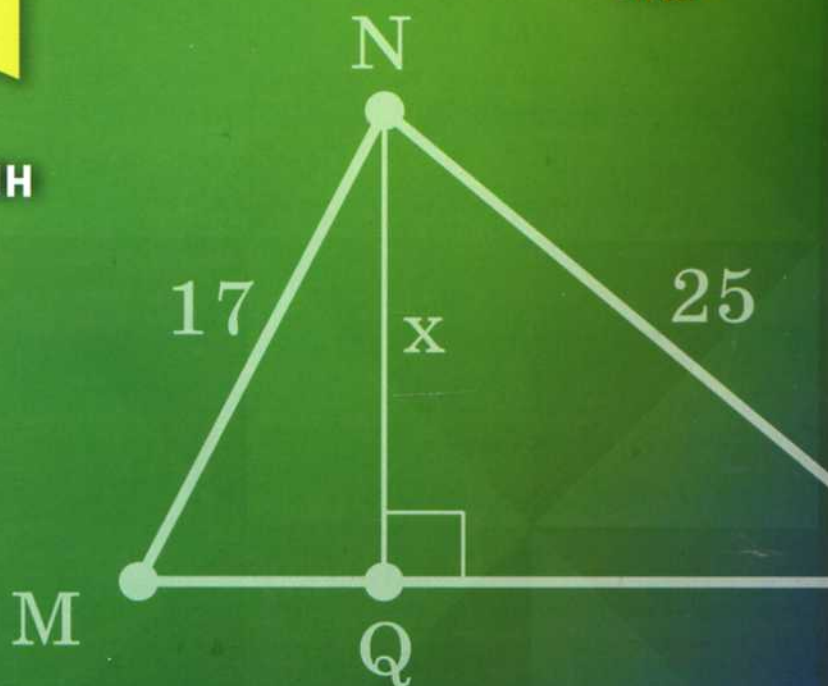


9
класс



Э.Н. Балаян



ГЕОМЕТРИЯ

РЕШЕБНИК К КНИГЕ Э.Н. БАЛАЯНА

.....

Геометрия. Задачи на готовых чертежах
для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ (7–9 классы)

Большая перемена

Э.Н. Балаян

ГЕОМЕТРИЯ

Решебник

к книге Э.Н. Балаяна

ГЕОМЕТРИЯ

Задачи на готовых чертежах

для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ (7–9 классы)

9 класс

Ростов-на-Дону

 **Феникс**
2019

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72
КТК 444
Б20

Балаян Э.Н.

Б20 Геометрия : решебник к книге Э.Н. Балаяна «Геометрия : задачи на готовых чертежах для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ : 7–9 классы» : 9 класс / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д : Феникс, 2019. — 80 с. : ил. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-31527-9

В предлагаемом пособии приводятся полные решения всех без исключения задач из книги «Геометрия: задачи на готовых чертежах для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ: 7–9 классы». 9 класс.

Некоторые задачи решены различными способами, чтобы читатель имел возможность ознакомиться с сущностью рационального решения. Сложные задачи отмечены знаком *, а наиболее трудные — **.

Ученикам будет целесообразно обращаться к решебнику уже после того, как они самостоятельно решат задачи, или тогда, когда они убедятся в том, что не в силах самостоятельно справиться с заданием.

Кроме того, приводятся краткие теоретические сведения по курсу геометрии 7–9 классов, сопровождаемые определениями, теоремами, основными свойствами и необходимыми справочными материалами.

Пособие адресовано учащимся общеобразовательных школ, лицеев, колледжей, а также начинающим учителям математики, студентам — будущим учителям и репетиторам.

ISBN 978-5-222-31527-9

УДК 373.167.1:51
ББК 22.1я72

© Балаян Э.Н., 2018
© Оформление, ООО «Феникс», 2018

КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

1. По правилу параллелограмма $\overline{KM} = \overline{KN} + \overline{KL}$, или $\overline{KM} = \overline{m} + \overline{n}$.

По правилу треугольника $\overline{KL} + \overline{LN} = \overline{KN}$, или $\overline{n} + \overline{LN} = \overline{m}$, откуда $\overline{LN} = \overline{m} - \overline{n}$.

Ответ: $\overline{LN} = \overline{m} - \overline{n}$, $\overline{KM} = \overline{m} + \overline{n}$.

2. $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{BC}$ (по правилу параллелограмма).

Но $\overline{BA} = -\overline{AB} = -\vec{a}$, $\overline{BC} = -\overline{CB} = -\vec{b}$, тогда $\overline{BD} = -\vec{a} - \vec{b}$.

$\overline{CB} + \overline{BA} = \overline{CA}$ (по правилу треугольника).

$\overline{CB} = \vec{b}$, $\overline{BA} = -\overline{AB} = -\vec{a}$, т. е. $\overline{CA} = -\vec{a} + \vec{b}$.

Ответ: $\overline{BD} = -\vec{a} - \vec{b}$; $\overline{CA} = -\vec{a} + \vec{b}$.

3. $\overline{FM} = \overline{FE} + \overline{FK}$ (по правилу параллелограмма).

$\overline{FE} = \overline{m}$, $\overline{FK} = \overline{n}$, тогда $\overline{FM} = \overline{m} + \overline{n}$.

$\overline{FE} + \overline{EK} = \overline{FK}$ (по правилу треугольника), или $\overline{m} + \overline{EK} = \overline{n}$, $\overline{EK} = -\overline{m} + \overline{n}$.

Ответ: $\overline{EK} = -\overline{m} + \overline{n}$, $\overline{FM} = \overline{m} + \overline{n}$.

4. $\overline{TM} + \overline{MO} = \overline{TO}$ (по правилу треугольника), или $\overline{TM} + \vec{b} = \vec{a}$, откуда $\overline{TM} = \vec{a} - \vec{b}$.

$\overline{ST} + \overline{TO} = \overline{SO}$, $\overline{TO} = \vec{a}$, $\overline{SO} = \overline{OM} = -\overline{MO} = -\vec{b}$, тогда $\overline{ST} + \vec{a} = -\vec{b}$, т. е. $\overline{ST} = -\vec{a} - \vec{b}$.

Ответ: $\overline{TM} = \vec{a} - \vec{b}$, $\overline{ST} = -\vec{a} - \vec{b}$.

5. $\overline{FK} = \overline{FM} + \overline{FE}$, или $\overline{FK} = \overline{m} + \overline{n}$ (по правилу параллелограмма). По условию $\overline{FT} : \overline{TK} = 3 : 1$, тогда $\overline{FT} = \frac{3}{4}\overline{FK}$, или $\overline{FT} =$

$$= \frac{3}{4}(\overline{m} + \overline{n}) = \frac{3}{4}\overline{m} + \frac{3}{4}\overline{n}.$$

Ответ: $\overline{FT} = \frac{3}{4}\overline{m} + \frac{3}{4}\overline{n}$.

6. а) Так как векторы \overline{FN} и \overline{FO} сонаправлены, то $k \geq 0$.

$$\text{Значит, } k = \frac{|\overline{FN}|}{|\overline{FO}|} = \frac{|\overline{FN}|}{\frac{1}{2}|\overline{FN}|} = \frac{FN}{\frac{1}{2}FN} = 2.$$

б) Аналогично имеем: $k \geq 0$, $k = \frac{|\overline{MO}|}{|\overline{ME}|} = \frac{\frac{1}{2}ME}{ME} = \frac{1}{2}$.

в) Векторы \overline{ON} и \overline{NF} противоположно направлены, значит, $k < 0$, тогда $k = -\frac{|\overline{ON}|}{|\overline{NF}|} = -\frac{\frac{1}{2}NF}{NF} = -\frac{1}{2}$.

г) $k < 0$, $FM = NE$, $k = -\frac{|\overline{FM}|}{|\overline{NE}|} = -\frac{FM}{NE} = -1$.

д) $k < 0$, $MN = EF$, $k = -\frac{|\overline{MN}|}{|\overline{EF}|} = -\frac{MN}{EF} = -1$.

е) $k < 0$, $FA = AO = \frac{1}{2}FO = \frac{1}{4}FN$; $k = -\frac{|\overline{FA}|}{|\overline{NF}|} = -\frac{\frac{1}{4}FN}{FN} = -\frac{1}{4}$.

ж) $k \geq 0$, $FA = \frac{1}{4}FN$, $AN = 3FA = \frac{3}{4}FN$; $k = \frac{|\overline{AN}|}{|\overline{FA}|} = \frac{\frac{3}{4}FN}{\frac{1}{4}FN} = 3$.

з) $k < 0$, $NA = FN - FA = FN - \frac{1}{4}FN = \frac{3}{4}FN$; $k = -\frac{|\overline{FN}|}{|\overline{NA}|} = -\frac{FN}{\frac{3}{4}FN} = -\frac{4}{3}$.

и) Так как стороны NE и EF параллелограмма не параллельны, то векторы \overline{NE} и \overline{EF} не коллинеарны, т. е. число k не существует.

к) Аналогично и) число k не существует.

Ответ: а) 2; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{2}$; г) -1; д) -1; е) $-\frac{1}{4}$; ж) 3; з) $-\frac{4}{3}$; и), к) число k не существует.

К таблице 2

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ В КООРДИНАТАХ

1. Точка K лежит на оси Ox , значит, $K(3; 0)$; точка M лежит на оси Oy , значит, $M(0; 2)$. Точка O совпадает с началом координат, т. е. $O(0; 0)$.

Ответ: $O(0; 0)$, $K(3; 0)$, $M(0; 2)$.

2. Точка O совпадает с началом координат, значит, $O(0; 0)$; $OT = 6$, тогда $T(6; 0)$; $OC = 3$, т. е. $C(0; 3)$ и $M(6; 3)$.

Ответ: $O(0; 0)$, $T(6; 0)$, $M(6; 3)$, $C(0; 3)$.

3. Так как $MQPN$ — квадрат (по условию), то $QP = PN = NM = MQ$. По условию $M(-2; -2)$.

Точка M симметрична точке Q относительно оси Ox , значит, их абсциссы равны, а ординаты отличаются знаком, т. е. $Q(-2; 2)$. Аналогично находим $P(2; 2)$, $N(2; -2)$.

Ответ: $Q(-2; 2)$, $P(2; 2)$, $N(2; -2)$.

4. Так как противоположные стороны параллелограмма равны, то $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{RT}$.

$$\text{Но } \overrightarrow{MQ} \{24 - 10; 6 - 0\} = \overrightarrow{MQ} \{14; 6\}; \overrightarrow{RT} \{x - 0; y - 0\} = \overrightarrow{RT} \{x; y\}.$$

Координаты равных векторов соответственно равны, тогда из $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{RT}$ следует $x = 14$; $y = +6$.

Ответ: $T(14; 6)$.

5. Известно, что каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала, т. е.

$$\overrightarrow{MN} \{-2 - 3; 4 - 5\} = \overrightarrow{MN} \{-5; -1\}.$$

Ответ: $\overrightarrow{MN} \{-5; -1\}$.

6. По условию точка M — середина отрезка AB , тогда $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$,

$$y_M = \frac{1}{2}(y_A + y_B), \text{ или } x_M = \frac{1}{2}(2 + 6) = 4; y_M = \frac{1}{2}(6 + 2) = 4, \text{ т. е. } M(4; 4).$$

Ответ: $M(4; 4)$.

7. Аналогично № 6 имеем:

$$x_B = \frac{1}{2}(x_A + x_C), \quad y_B = \frac{1}{2}(y_A + y_C), \text{ или}$$

$$0 = \frac{1}{2}(2 + x_C), \quad 18 = \frac{1}{2}(4 + y_C); 36 = 4 + y_C, \text{ откуда}$$

$$2 + x_C = 0,$$

$$y_C = 32.$$

$$x_C = -2.$$

Значит, $C(-2; 32)$.

Ответ: $C(-2; 32)$.

8. Используя формулу расстояния d между точками $M(4; 6)$ и $N(x; 1)$, имеем:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2, \text{ где } d = 13 \text{ (по условию).}$$

$$(x - 4)^2 + (1 - 6)^2 = 13^2, \text{ или } (x - 4)^2 = 169 - 25, (x - 4)^2 = 144;$$

$$x - 4 = \pm 12, \text{ откуда } x = 16 \text{ или } x = -8.$$

Ответ: $x = 16$ или $x = -8$.

9. Аналогично № 8 имеем:

$$(2x - 6)^2 + (-2 - 4x)^2 = 14^2, \text{ или } 4x^2 - 24x + 36 + 4 + 16x + 16x^2 = 196,$$

$$20x^2 - 8x - 156 = 0; 5x^2 - 2x - 39 = 0;$$

$$D/4 = 1 + 195 = 196 = 14^2 > 0; x_{1,2} = \frac{1 \pm 14}{5},$$

$$x_1 = 3; x_2 = -\frac{13}{5} = -2,6.$$

Ответ: $x = 3$ или $x = -2,6$.

10. По условию $OA = OB$, где $A(1; 2)$, $B(x; 0)$.

$$\text{Но } OA^2 = 1^2 + 2^2 = 5, \text{ откуда } OA = \sqrt{5}; OB = x, \text{ т. е. } x = \sqrt{5}.$$

Ответ: $\sqrt{5}$.

$$11. AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - 3)^2 + (5 - 0)^2};$$

$$AB = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}.$$

Ответ: $\sqrt{26}$.

$$12. CD = \sqrt{(0 - 1)^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

13. По условию $MO = OA$. Точки A и M симметричны относительно начала координат.

Значит, $M(-3; 3)$.

Ответ: $(-3; 3)$.

14. Пусть D — середина отрезка AB , тогда $x_D = \frac{1}{2}(x_A + x_B) =$
 $= \frac{1}{2}(1 + 7) = 4; y_D = \frac{1}{2}(2 + 10) = 6.$

Значит, $D(4; 6)$. Но точка C — середина отрезка AD , тогда
 $x_C = \frac{1}{2}(1 + 4) = 2,5; y_C = \frac{1}{2}(2 + 6) = 4$, т. е. $C(2,5; 4)$.

Ответ: $(2,5; 4)$.

15. Пусть A — середина отрезка PM , тогда $x_A = \frac{1}{2}(x_P + x_M) = \frac{1}{2}(6 +$
 $+ 14) = 10; y_A = \frac{1}{2}(3 + 9) = 6$, т. е. $A(10; 6)$.

Заметим, что M — середина отрезка AK , тогда $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_K) =$
 $= \frac{1}{2}(10 + x_K) = 14, 10 + x_K = 28$, откуда $x_K = 18$.

Аналогично $y_M = \frac{1}{2}(6 + y_K) = 9, 6 + y_K = 18, y_K = 12$.

Значит, $K(18; 12)$.

Ответ: $K(18; 12)$.

16. По условию $EK = KF$.

Но $EK = \sqrt{(x-2)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + 4}; KF = \sqrt{(6-x)^2 + (10-0)^2} =$
 $= \sqrt{(6-x)^2 + 100}.$

Значит, $\sqrt{(x-2)^2 + 4} = \sqrt{(6-x)^2 + 100}$, или

$(x-2)^2 + 4 = (6-x)^2 + 100,$
 $x^2 - 4x + 4 + 4 = 36 - 12x + x^2 + 100,$
 $8x = 128, x = 16.$

Ответ: 16.

17. $P_{\Delta MTN} = MT + TN + MN.$

$MT = \sqrt{(3-8)^2 + (-4-0)^2} = \sqrt{25+16} = \sqrt{41};$

$TN = \sqrt{(6-3)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{2 \cdot 9} = 3\sqrt{2};$

$MN = \sqrt{(6-8)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$

Значит, $P_{\Delta MTN} = \sqrt{41} + 3\sqrt{2} + \sqrt{5} \approx 12,9.$

Ответ: $\approx 12,9$.

18. Координаты вершин параллелограмма $OACB$: $O(0; 0)$, $A(6; 0)$, $C(x; y)$, $B(3; 2)$.

Так как противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны, то $\overline{OB} = \overline{AC}$.

$$\overline{OB} \{3 - 0; 2 - 0\} = \overline{AC} \{x - 6; y - 0\};$$

$$\overline{OB} \{3; 2\} = \overline{AC} \{x - 6; y\}.$$

Так как $\overline{OB} = \overline{AC}$, то $3 = x - 6$; $2 = y$, т. е. $x = 9$; $y = 2$, значит, координаты точки $C(9; 2)$.

$$\text{Тогда } AC = \sqrt{(9 - 6)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}; \quad OC = \sqrt{9^2 + 2^2} = \sqrt{85}.$$

$$\text{Ответ: } AC = \sqrt{13}, \quad OC = \sqrt{85}; \quad C(9; 2).$$

19. Точка E — середина отрезка MQ , тогда $x_E = \frac{1}{2}(x_M + x_Q) =$

$$= \frac{1}{2}(6 + 0) = 3;$$

$$y_E = \frac{1}{2}(y_M + y_Q) = \frac{1}{2}(3 + 2) = 2,5, \text{ т. е. } E(3; 2,5).$$

$$\text{Следовательно, } RE = \sqrt{(3 - 1)^2 + (2,5 + 5)^2} = \sqrt{4 + 56,25} = \sqrt{60,25} = \frac{\sqrt{241}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{241}}{2}.$$

20. Координаты вершин трапеции $OABC$: $O(0; 0)$, $A(2; 4)$, $B(x; y)$, $C(12; 0)$.

Так как $AB \parallel Ox$, то $\overline{AB} \{5; 0\}$.

С другой стороны, $\overline{AB} \{x - 2; y - 4\}$, тогда $x - 2 = 5$; $y - 4 = 0$, т. е. $x = 7$; $y = 4$.

Значит, точка B имеет координаты $(7; 4)$.

$$\text{Следовательно, } CB = \sqrt{(7 - 12)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{41}, \quad OB = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}.$$

$$\text{Ответ: } BC = \sqrt{41}; \quad OB = \sqrt{65}.$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1. Введем прямоугольную систему координат (см. рис.).

Координаты вершин $\triangle MNK$: $M(-20; 0)$, $N(20; 0)$, $K(0; 80)$.

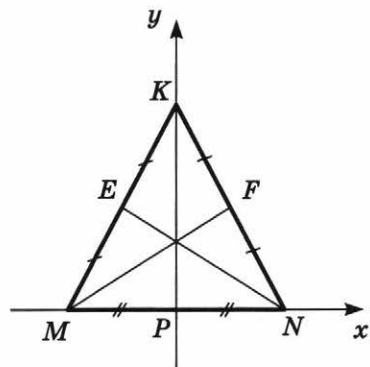
Так как $MK = KN$, то $\triangle MKN$ — равнобедренный, тогда медианы MF и NE , проведенные к боковым сторонам, равны. Найдем длину медианы MF .

Так как F — середина KN , то $x_F = \frac{1}{2}(0 + 20) = 10$, $y_F = \frac{1}{2}(80 + 0) = 40$, т. е. $F(10; 40)$.

Следовательно, $MF = \sqrt{(10 + 20)^2 + (40 - 0)^2} = \sqrt{2500} = 50$.

Итак, $MF = NE = 50$.

Ответ: 50; 50.



2. Введем прямоугольную систему координат (см. рис.).

Координаты вершин $\triangle RTS$: $R(-12; 0)$, $S(12; 0)$, $T(0; 8)$.

По условию K — середина RT , тогда

$$x_K = \frac{1}{2}(x_R + x_T) = \frac{1}{2}(-12 + 0) = -6;$$

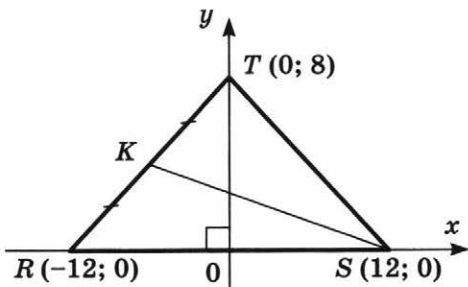
$$y_K = \frac{1}{2}(0 + 8) = 4.$$

Значит, $K(-6; 4)$.

По формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$SK = \sqrt{(-6 - 12)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{324 + 16} = \sqrt{340} = 2\sqrt{85}.$$

Ответ: $2\sqrt{85}$.



3. Введем прямоугольную систему координат, тогда координаты вершин $\triangle CMN$ будут: $M(-8; 0)$, $N(20; 0)$, $C(0; 20)$.

Найдем координаты точки F — середины стороны MC :

$$x_F = \frac{1}{2}(x_M + x_C) = \frac{1}{2}(-8 + 0) = -4;$$

$$y_F = \frac{1}{2}(0 + 20) = 10, \text{ т. е. } F(-4; 10).$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } NF &= \sqrt{(-4 - 20)^2 + (10 - 0)^2} = \\ &= \sqrt{676} = 26. \end{aligned}$$

Ответ: 26.

4. По формуле длины отрезка находим:

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = \\ &= \sqrt{64} = 8; \end{aligned}$$

$$AC = \sqrt{(6 - 4)^2 + (2\sqrt{3} - 4\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4;$$

$$BC = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 + 12} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}.$$

Заметим, что $AB^2 = AC^2 + BC^2$, т. е. $\triangle ABC$ — прямоугольный, $\angle C = 90^\circ$. Кроме того, $AC = \frac{1}{2}AB$, значит, $\angle B = 30^\circ$, $\angle A = 60^\circ$.

Ответ: $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

5. Введем прямоугольную систему координат (см. рис.).

Найдем координаты точки E — середины отрезка BC :

$$x_E = \frac{1}{2}(x_B + x_C) = \frac{1}{2}(0 + 16) = 8,$$

$$y_E = \frac{1}{2}(12 + 0) = 6.$$

Значит, $E(8; 6)$.

Так как $\angle ABD = 45^\circ$ и $\angle ADB = 90^\circ$, то $\angle BAD = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$, т. е. $AD = BD = 12$.

Значит, $A(-12; 0)$. Теперь находим AE :

$$AE = \sqrt{(8 + 12)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{400 + 36} = \sqrt{436} = 2\sqrt{109}.$$

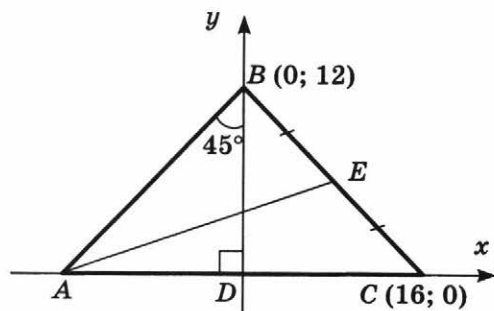
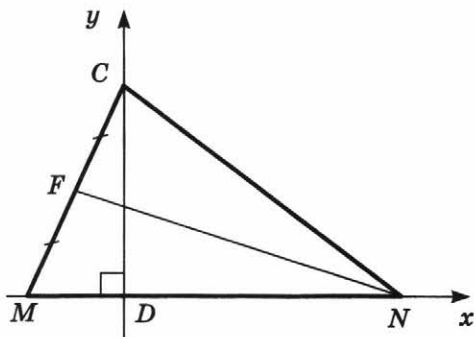
Ответ: $2\sqrt{109}$.

6. Введем систему координат (см. рис.).

Так как $\angle M = 45^\circ$ и $\angle MDK = 90^\circ$, то $\angle MKD = 45^\circ$, т. е. $MD = DK$, тогда вершина K имеет координаты $(0; 8)$.

По условию E — середина KF , тогда

$$x_E = \frac{1}{2}(0 + 12) = 6;$$

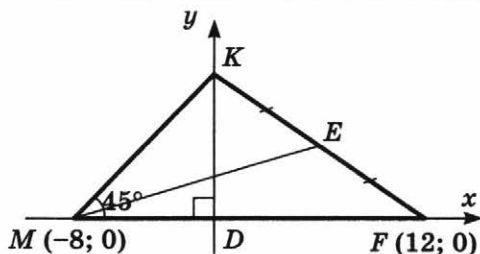


$$y_E = \frac{1}{2}(8 + 0) = 4, \text{ т. е. } E(6; 4).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} ME &= \sqrt{(6 + 8)^2 + (4 - 0)^2} = \\ &= \sqrt{196 + 16} = \sqrt{212} = 2\sqrt{53}. \end{aligned}$$

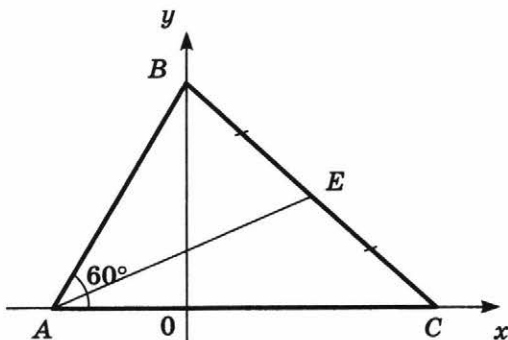
Ответ: $2\sqrt{53}$.



7. Введем прямоугольную систему координат (см. рис.).

Из $\triangle AOB$, где $AB = 8$, $\angle A = 60^\circ$, находим: $AO = \frac{1}{2}AB = 4$ (так как $\angle ABO = 30^\circ$), тогда

$BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$. Значит, $A(-4; 0)$, $C(8; 0)$, $B(0; 4\sqrt{3})$. Пусть E — середина стороны BC .



Тогда $x_E = \frac{1}{2}(x_B + x_C) = \frac{1}{2}(0 + 8) = 4$; $y_E = \frac{1}{2}(4\sqrt{3} + 0) = 2\sqrt{3}$, т. е.

$E(4; 2\sqrt{3})$.

Теперь по формуле расстояния между двумя точками находим:

$$AE = \sqrt{(4 + 4)^2 + (2\sqrt{3} - 0)^2} = \sqrt{64 + 12} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}.$$

Ответ: $2\sqrt{19}$.

8. По формуле длины отрезка находим:

$$MN = \sqrt{(8 - 4)^2 + (2 - 8)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13};$$

$$NP = \sqrt{(14 - 8)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13};$$

$$MP = \sqrt{(14 - 4)^2 + (6 - 8)^2} = \sqrt{100 + 4} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}.$$

Так как $MN = NP$, то $\triangle MNP$ — равнобедренный. Кроме того, $MP^2 = MN^2 + NP^2$ (по обратной теореме Пифагора). Значит, $\triangle MNP$ — прямоугольный. Тогда $\angle M = \angle P = 45^\circ$, $\angle N = 90^\circ$.

Ответ: $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

9. Аналогично № 7 имеем:

в $\triangle KOD$, где $\angle K = 45^\circ$, $KD = 4\sqrt{2}$, $\angle KOD = 90^\circ$, находим $KD^2 = KO^2 + OD^2$.

Так как $\angle KDO = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$,
то $DO = KO$, т. е. $2KO^2 = KD^2$,
откуда $KO = DO = \frac{KD}{\sqrt{2}} = 4$.

Значит, $D(0; 4)$, $K(-4; 0)$, $P(5; 0)$
(так как $OP = KP - KO = 5$).

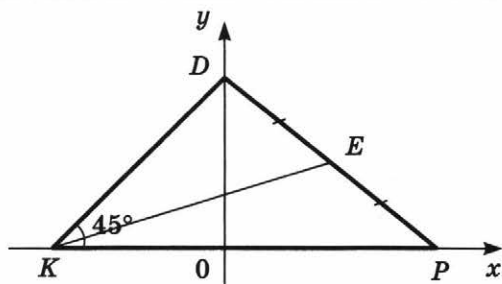
Пусть E — середина отрезка DP ,
тогда

$$x_E = \frac{1}{2}(x_D + x_P) = \frac{1}{2}(0 + 5) = 2,5;$$

$$y_E = \frac{1}{2}(4 + 0) = 2, \text{ т. е. } E(2,5; 2).$$

$$\text{Следовательно, } KE = \sqrt{(2,5 + 4)^2 + (2 - 0)^2} = \sqrt{42,25 + 4} = \sqrt{46,25} = \\ = \sqrt{185/4} = \sqrt{185}/2.$$

Ответ: $\sqrt{185}/2$.



К таблице 4

УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

1. Уравнение окружности радиуса r с центром в точке $O_1(x_0; y_0)$ имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, где $x_0 = -4$; $y_0 = 2$.

Расстояние от точки O_1 до A равно радиусу

$$r = O_1A = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0 + 4)^2 + (5 - 2)^2} = \sqrt{16 + 9} = \\ = \sqrt{25} = 5.$$

Значит, уравнение окружности имеет вид $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

Ответ: $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

2. Так как $r = 5$ и центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение окружности имеет вид $x^2 + y^2 = 25$.

$A(0; 4)$; $0^2 + 4^2 = 25$, $16 \neq 25$; точка A не принадлежит окружности.

$B(5; 0)$; $5^2 + 0^2 = 25$, $25 = 25$ — верно, т. е. точка B принадлежит окружности.

$C(3; -4)$; $3^2 + (-4)^2 = 25$, $25 = 25$ — верно, т. е. точка C принадлежит окружности.

$D(4; -3)$; $4^2 + (-3)^2 = 25$, $25 = 25$ — верно, т. е. точка D принадлежит окружности.

Ответ: B, C, D .

3. Аналогично № 1 имеем:

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = r^2, \text{ где } r = \sqrt{(5 - 2)^2 + (0 + 4)^2} = 5.$$

Значит, $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$.

4. Уравнение окружности с центром в точке O_1 имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, где $(x_0; y_0)$ — координаты центра O_1 , $r = O_1M = O_1K$.

O_1 — середина KM , тогда $x_0 = \frac{1}{2}(x_M + x_K) = 0$, $y_0 = \frac{1}{2}(6 + 0) = 3$, т. е.

$O_1(0; 3)$.

Значит, $r = O_1M = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$, и $(x - 0)^2 + (y - 3)^2 = 13$, или $x^2 + (y - 3)^2 = 13$.

Ответ: $x^2 + (y - 3)^2 = 13$.

5. $O_1(x_0, 0)$ — координаты центра окружности. Так как MH — диаметр окружности, то $x_0 = \frac{1}{2}(x_M + x_H) = \frac{1}{2}(0 + 6) = 3$, тогда

$$r = O_1H = O_1M = \sqrt{(6 - 3)^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{13}.$$

Следовательно, уравнение окружности с центром $O_1(3; 0)$ примет вид $(x - 3)^2 + y^2 = 13$.

Ответ: $(x - 3)^2 + y^2 = 13$.

6. Уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 = r^2$.

Так как точка $T(-2; 3)$ принадлежит окружности, то $x = -2$, $y = 3$, тогда $(-2)^2 + 3^2 = r^2$, или $r^2 = 13$, тогда $x^2 + y^2 = 13$.

Ответ: $x^2 + y^2 = 13$.

7. По условию $O_1M = r = 3$ дм и $O_1(4; 5)$ — центр окружности, тогда $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$.

Ответ: $(x - 4)^2 + (y - 5)^2 = 9$.

8. Уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 = r^2$, где $r = OK = 5$, тогда $x^2 + y^2 = 25$.

Если AB — хорда окружности, то точки A и B принадлежат окружности: $A(4; -3)$; $4^2 + (-3)^2 = 25$. Так как $25 = 25$, то точка A принадлежит окружности.

$B(3; 4)$: $3^2 + 4^2 = 25$, $25 = 25$ — верно, т. е. точка B также принадлежит окружности.

Значит, AB — хорда.

9. $x^2 + y^2 = 13$ — уравнение окружности с центром в начале координат.

а) Зная абсциссу точки $x = 2$, найдем ординату из уравнения $2^2 + y^2 = 13$; $y^2 = 9$.

Значит, $y = -3$ или $y = 3$. Имеем две точки: $(2; -3)$, $(2; 3)$.

б) Зная ординату точки $y = 3$, найдем абсциссу из уравнения $x^2 + 3^2 = 13$; $x^2 = 4$, откуда $x = -2$ или $x = 2$. Имеем две точки: $(-2; 3)$, $(2; 3)$.

Ответ: а) $(2; -3)$, $(2; 3)$; б) $(-2; 3)$, $(2; 3)$.

10. а) Если $x = 2$, то уравнение окружности примет вид $0 + (y - 4)^2 = 9$, $y - 4 = \pm 3$, откуда $y_1 = 7$, $y_2 = 1$. Имеем две точки: $(2; 7)$, $(2; 1)$.

б) Если $y = 4$, то $(x - 2)^2 + 0 = 9$, $x - 2 = \pm 3$, откуда $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Имеем две точки: $(5; 4)$, $(-1; 4)$.

Ответ: а) $(2; 7)$, $(2; 1)$; б) $(5; 4)$, $(-1; 4)$.

11. Уравнение окружности, центр которой совпадает с началом координат, имеет вид $x^2 + y^2 = r^2$. Поскольку точка $B(-2; 6)$ принадлежит окружности, то $(-2)^2 + 6^2 = r^2$, $r^2 = 40$, тогда $x^2 + y^2 = 40$.

Ответ: $x^2 + y^2 = 40$.

12. Уравнение окружности с центром в точке $A(0; 2)$ имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, где $x_0 = 0$, $y_0 = 2$, $r = AB$.

$r^2 = AB^2 = (-3 - 0)^2 + (1 - 2)^2 = 9 + 1 = 10$, тогда

$(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 10$, или $x^2 + (y - 2)^2 = 10$.

Ответ: $x^2 + (y - 2)^2 = 10$.

13. Уравнение окружности с центром в точке $O_1(0; y_0)$ имеет вид $(x - 0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

Так как точки $M(-3; 0)$ и $N(0; 9)$ принадлежат окружности, то имеем:

$9 + (0 - y_0)^2 = r^2$, или $9 + y_0^2 = r^2$ и $(0 - 0)^2 + (9 - y_0)^2 = r^2$, или $(9 - y_0)^2 = r^2$.

Сравнивая левые части полученных равенств, получим

$9 + y_0^2 = (9 - y_0)^2$, или $9 + y_0^2 = 81 - 18y_0 + y_0^2$, $18y_0 = 72$, $y_0 = 4$, тогда $r^2 = 9 + 4^2 = 25$.

Значит, уравнение окружности имеет вид: $x^2 + (y - 4)^2 = 25$.

Ответ: $x^2 + (y - 4)^2 = 25$.

14. Центр окружности расположен на оси Ox , значит $O_1(x_0, 0)$, тогда $(x - x_0)^2 + y^2 = r^2$.

MN — диаметр окружности, тогда O_1 — середина MN , т. е.

$x_0 = \frac{1}{2}(x_M + x_N) = \frac{1}{2}(-2 + 4) = 1$. Имеем: $(x - 1)^2 + y^2 = r^2$.

Точки $M(-2; 3)$ и $N(4; -3)$ принадлежат окружности, тогда получим:
 $(-2 - 1)^2 + 3^2 = r^2$, или $r^2 = 18$.

Значит, уравнение окружности запишется в виде $(x - 1)^2 + y^2 = 18$.

Ответ: $(x - 1)^2 + y^2 = 18$.

УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

1. Уравнение прямой, параллельной оси Oy , имеет вид $x = b$, где b — абсцисса любой точки, принадлежащей прямой, и, в частности, точки $A(3; 9)$. Тогда $b = 3$ и $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

2. Уравнение прямой, параллельной оси Ox , имеет вид $y = a$, где a — ордината любой точки, принадлежащей прямой, и, в частности, точки $B(-3; 10)$. Тогда $a = 10$ и $y = 10$.

Ответ: $y = 10$.

3. Прямая $2x + y + 4 = 0$ пересекает оси координат в точках M и N . Так как точка M принадлежит оси Ox , то $y = 0$, тогда $2x + 0 + 4 = 0$, $x = -2$, т. е. $M(-2; 0)$.

Аналогично $x = 0$, тогда $2 \cdot 0 + y + 4 = 0$, $y = -4$, т. е. $N(0; -4)$.

В $\triangle MON$ $\angle MON = 90^\circ$, $MO = 2$ и $NO = 4$, тогда $S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} MO \cdot ON = 4$.

Ответ: 4.

4. Так как прямая проходит через начало координат, то она имеет вид $y = kx$, где k — угловой коэффициент прямой.

Так как искомая прямая проходит и через точку $A(2; -10)$, то $x = 2$, $y = -10$, т. е. $-10 = 2k$, откуда $k = -5$, значит, $y = -5x$, или $y + 5x = 0$.

Ответ: $y + 5x = 0$.

5. Найдем точку C пересечения прямых $x = -1$ и $2x + y + 4 = 0$, для чего решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x = -1, \\ 2x + y + 4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ -2 + y + 4 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = -2. \end{cases}$$

Значит, точка C имеет координаты $(-1; -2)$.

Пересечение прямой $2x + y + 4 = 0$ с осью Ox находим из условия $y = 0$, тогда $2x + 4 = 0$, $x = -2$, т. е. $B(-2; 0)$.

Прямая $x = -1$ пересекает ось Ox в точке $A(-1; 0)$.

В $\triangle BAC$ $\angle A = 90^\circ$, $AB = 1$, $AC = 2$, тогда $S_{\triangle BAC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = 1$.

Ответ: 1.

6. Уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа. Так как прямая проходит через точки $A(1; 10)$ и $B(-1; -4)$, то имеем: $10 = k \cdot 1 + b$, $-4 = k \cdot (-1) + b$, или $\begin{cases} k + b = 10, \\ -k + b = -4. \end{cases}$

Складывая уравнения системы, находим $2b = 6$, $b = 3$, тогда $k = 10 - 3 = 7$.

Значит, уравнение прямой примет вид

$$y = 7x + 3, \text{ или } 7x - y + 3 = 0.$$

Ответ: $7x - y + 3 = 0$.

7. Найдем точку пересечения прямых $y = 3$ и $y - 3x + 6 = 0$. Имеем: $3 - 3x + 6 = 0$, откуда $3x = 9$, $x = 3$, т. е. $M(3; 3)$. Пересечение прямой $y - 3x + 6 = 0$ с осью Oy находим из условия $x = 0$, тогда $y = -6$, т. е. $N(0; -6)$.

$$S_{\triangle MEN} = \frac{1}{2} EM \cdot EN = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (3 + 6) = 13,5.$$

Ответ: 13,5.

8*. Найдем координаты точки M — середины отрезка AB :

$$x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B) = \frac{1}{2}(8 + (-8)) = 0; y_M = \frac{1}{2}(12 + 0) = 6.$$

Значит, $M(0; 6)$.

Уравнение медианы (прямой) CM имеет вид $ax + by + c = 0$. Так как точки C и M принадлежат прямой CM , то их координаты удовлетворяют уравнению прямой:

$$a \cdot (-2) + b \cdot (-8) + c = 0, \text{ или } -2a - 8b + c = 0 \text{ и } a \cdot 0 + b \cdot 6 + c = 0, \text{ или } 6b + c = 0, \text{ откуда } b = -\frac{1}{6}c, \text{ тогда } -2a - 8 \cdot \left(-\frac{1}{6}c\right) + c = 0; -2a + \frac{7}{3}c = 0, \\ 2a = \frac{7}{3}c, a = \frac{7}{6}c.$$

Подставляя значения b и a в уравнение прямой, получим

$$\frac{7}{6}c \cdot x + \left(-\frac{1}{6}c\right) \cdot y + c = 0, \text{ где } c \neq 0, \text{ или } \frac{7}{6}x - \frac{1}{6}y + 1 = 0, \text{ т. е.}$$

$7x - y + 6 = 0$ — уравнение медианы CM .

Ответ: $7x - y + 6 = 0$.

9*. Уравнение диагонали ML имеет вид $ax + by + c = 0$. Так как точки M и L принадлежат прямой ML , то их координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$a \cdot (-4) + b \cdot (-4) + c = 0, -4a - 4b + c = 0 \text{ и } a \cdot 14 + b \cdot 14 + c = 0, \text{ или } 14a + 14b + c = 0.$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} -4a - 4b + c = 0, \\ 14a + 14b + c = 0, \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 7 \\ \cdot 2 \end{vmatrix} \begin{cases} -28a - 28b + 7c = 0, \\ 28a + 28b + 2c = 0. \end{cases}$$

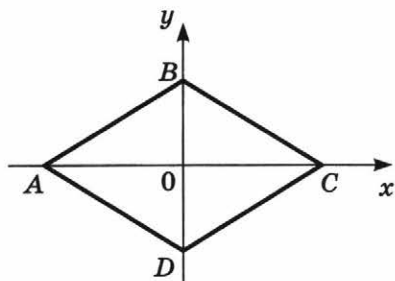
Складывая уравнения системы, находим $9c = 0$, откуда $c = 0$, тогда $-4a - 4b = 0$, т. е. $a = -b$. Уравнение прямой примет вид $ax - ay + 0 = 0$, $a \neq 0$, или $x - y = 0$.

Ответ: $x - y = 0$.

10*. Введем систему координат (см. рис.).

Запишем координаты вершин ромба $ABCD$: $A(-10; 0)$; $B(0; 4)$, $C(10; 0)$, $D(0; -4)$.

1) Уравнение прямой AB имеет вид $ax + by + c = 0$. Так как точки A и B лежат на прямой AB , то их координаты удовлетворяют этому уравнению, т. е.



$$\begin{cases} a \cdot (-10) + b \cdot 0 + c = 0, \\ a \cdot 0 + b \cdot 4 + c = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -10a + c = 0, \\ 4b + c = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0,1c, \\ b = -0,25c. \end{cases}$$

Подставляя значения a и b в уравнение прямой, находим $0,1c \cdot x + (-0,25c)y + c = 0$; $c \neq 0$.

$0,1x - 0,25y + 1 = 0$ или, умножив обе части уравнения на 20, имеем: $2x - 5y + 20 = 0$.

2) Составим теперь уравнение BC :

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot 4 + c = 0, \\ a \cdot 10 + b \cdot 0 + c = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 4b + c = 0, \\ 10a + c = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} b = -\frac{1}{4}c, \\ a = -\frac{1}{10}c. \end{cases}$$

Значит, уравнение BC примет вид

$$-\frac{1}{10}cx - \frac{1}{4}cy + c = 0, \quad c \neq 0, \quad \text{или} \quad 2x + 5y - 20 = 0.$$

3) Составим уравнение DC :

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b \cdot (-4) + c = 0, \\ a \cdot 10 + b \cdot 0 + c = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -4b + c = 0, \\ 10a + c = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} b = \frac{1}{4}c, \\ a = -\frac{1}{10}c. \end{cases}$$

$$\text{Следовательно, } -\frac{1}{10}cx + \frac{1}{4}cy + c = 0, \quad c \neq 0, \quad 2x - 5y - 20 = 0.$$

4) Уравнение AD :

$$\begin{cases} a \cdot (-10) + b \cdot 0 + c = 0, \\ a \cdot 0 + b \cdot (-4) + c = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -10a + c = 0, \\ -4b + c = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{1}{10}c, \\ b = \frac{1}{4}c. \end{cases}$$

$$\text{Следовательно, } \frac{1}{10}c \cdot x + \frac{1}{4}c \cdot y + c = 0, \quad c \neq 0, \quad \text{или} \quad 2x + 5y + 20 = 0.$$

Ответ: $2x - 5y + 20 = 0$; $2x + 5y - 20 = 0$; $2x - 5y - 20 = 0$; $2x + 5y + 20 = 0$.

Замечание. Относительно осей Ox и Oy ромб может иметь и другое расположение, что равносильно замене оси Ox на Oy и наоборот. Тогда придется заменить x на y и y на x .

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

1. $S_{\Delta MNK} = \frac{1}{2} MK \cdot NK \sin \angle K$, где $MK = NK = 2$, $\angle K = 45^\circ$, тогда

$$S_{\Delta MNK} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}$.

2. По условию ΔABC — равносторонний, где $AB = 5$, тогда $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ (см. № 489, Л.С. Атанасян и др. «Геометрия 7–9»).

$$S_{\Delta ABC} = \frac{25\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: $\frac{25\sqrt{3}}{4}$.

3. Пусть $PE = PF = x$, тогда $S_{\Delta EPF} = \frac{1}{2} x^2 \sin 30^\circ$.

Так как $S_{\Delta EPF} = 20$, то $20 = \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{2}$, откуда $x^2 = 80$, $x = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$,

т. е. $EP = 4\sqrt{5}$.

Ответ: $4\sqrt{5}$.

4. $S_{\Delta MBR} = \frac{1}{2} BR \cdot MR \cdot \sin \angle R = 90$, или $\frac{1}{2} \cdot BR \cdot 15 \cdot \frac{1}{2} = 90$, откуда

$$BR = 90 \cdot \frac{4}{15} = 24.$$

Ответ: 24.

5. $S_{\Delta EFQ} = \frac{1}{2} QE \cdot QF \sin \angle Q = 8\sqrt{3}$, или $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 4 \cdot \sin \angle Q = 8\sqrt{3}$, откуда

$$\sin \angle Q = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ значит, } \angle Q = 60^\circ.$$

Ответ: 60° .

6. $S_{\Delta RMQ} = \frac{1}{2} RM \cdot MQ \cdot \sin \angle RMQ$, или $S_{\Delta RMQ} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 \sin 135^\circ =$

$$= 25 \sin (180^\circ - 45^\circ) = 25 \sin 45^\circ = 25 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{25\sqrt{2}}{2}.$$

Так как MT — медиана $\triangle RMQ$, то $S_{\triangle RMT} = S_{\triangle TMQ}$ ($RT = TQ$ и высота h — общая).

$$\text{Значит, } S_{\triangle TMQ} = \frac{1}{2} S_{\triangle RMQ} = \frac{25\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{25\sqrt{2}}{4}.$$

$$\begin{aligned} 7. S_{\triangle EPM} &= \frac{1}{2} EP \cdot PM \sin \angle EPM = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \sin 120^\circ = \\ &= 20 \sin (180^\circ - 60^\circ) = 20 \sin 60^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } S_{\triangle EKP} = \frac{1}{2} S_{\triangle EPM} = 5\sqrt{3} \text{ (см. № 6).}$$

$$\text{Ответ: } 5\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} 8. S_{ABCD} &= AD \cdot AB \sin \angle A = 50\sqrt{3}, \quad AB = 20 \text{ м, } \angle A = 60^\circ, \text{ тогда} \\ AD \cdot 20 \sin 60^\circ &= 50\sqrt{3}, \text{ или } 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AD = 50\sqrt{3}, \text{ откуда } AD = 5. \end{aligned}$$

$$\text{Значит, } P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD) = 50.$$

$$\text{Ответ: } 50.$$

$$\begin{aligned} 9. \text{ Так как } \angle M &= 135^\circ, \text{ то } \angle F = 45^\circ, \text{ тогда } S_{MNEF} = MF \cdot FE \sin \angle F = \\ &= 25\sqrt{2}, \text{ или } 5 \cdot FE \cdot \sin 45^\circ = 25\sqrt{2}, \text{ где } MF = EN = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Значит, } 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot FE &= 25\sqrt{2}, \text{ откуда } FE = 10. \text{ Тогда } P_{MNEF} = 2 \cdot (MF + \\ &+ FE) = 2 \cdot (5 + 10) = 30. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 30.$$

10*. Предварительно докажем, что

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha, \text{ где } \alpha = \angle AOB.$$

Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $AO = OC$ и $BO = OD$ (по свойству), тогда $S_{ABCD} = 2S_{\triangle AOB} + 2S_{\triangle BOC} = 2(S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC}) = 2(\frac{1}{2} AO \cdot BO \sin \alpha + \frac{1}{2} OB \cdot OC \sin (180^\circ - \alpha)) = 2 \cdot \frac{1}{2} BO (AO \sin \alpha + OC \sin \alpha) = BO \sin \alpha (AO + OC) = BO \cdot AC \sin \alpha = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin \alpha$, что и требовалось доказать.

$$\text{Следовательно, } S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 20 \sin 60^\circ = 160 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 80\sqrt{3}.$$

$$\text{Ответ: } 80\sqrt{3}.$$

$$11. S_{KEMR} = \frac{1}{2} KM \cdot RE \sin 45^\circ \text{ (см. № 10).}$$

$$S_{KEMR} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 60\sqrt{2}.$$

Ответ: $60\sqrt{2}$.

$$12. S_{ABCD} = a \cdot b \sin \alpha, \text{ или } S_{ABCD} = 10 \cdot 16 \sin \angle B.$$

$$\sin \angle B = \sqrt{1 - \cos^2 \angle B} = \sqrt{1 - (-0,6)^2} = \sqrt{0,64} = 0,8, \text{ где } 0 < \angle B < 180^\circ,$$

т. е. $\sin \angle B > 0$.

$$\text{Значит, } S_{ABCD} = 10 \cdot 16 \cdot 0,8 = 128.$$

Ответ: 128.

$$13. S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD \sin 30^\circ, \text{ где } AC = BD = 26 \text{ см.}$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 26 \cdot 26 \cdot \frac{1}{2} = 169.$$

Ответ: 169.

14. Так как $MNKL$ — параллелограмм (по условию) и $\angle M = \angle K = 60^\circ$ (по свойству), то $\triangle KEF$ — равносторонний ($KE = KF = EF$).

$$\text{Кроме того, } NK = KL = 24 \text{ и } KE = \frac{1}{2} NK = 12.$$

$$\text{Значит, } S_{\triangle KEF} = \frac{1}{2} EK \cdot KF \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 36\sqrt{3}.$$

Ответ: $36\sqrt{3}$.

$$15. S_{TKNM} = TM \cdot KE = \sqrt{3} \cdot TM.$$

$$TM = TE + EM;$$

$$\text{из } \triangle TKE \quad TE = KE \operatorname{ctg} 60^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 1;$$

$$\text{из } \triangle KEM \quad EM = \sqrt{19-3} = \sqrt{16} = 4.$$

$$\text{Значит, } TM = 1 + 4 = 5 \text{ и } S_{TKNM} = \sqrt{3} \cdot 5 = 5\sqrt{3}.$$

Ответ: $5\sqrt{3}$.

$$16. S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin \angle A.$$

По условию $\cos \angle A = \frac{1}{3}$, $\angle A$ — острый, значит, $\sin \angle A > 0$, или

$$\sin \angle A = \sqrt{1 - \cos^2 \angle A} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Значит, } S_{ABCD} = 4 \cdot 6 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 16\sqrt{2}.$$

Ответ: $16\sqrt{2}$.

17*. Так как $ABCD$ — параллелограмм, то диагональ BD делит его на два равных треугольника ($\triangle ABD = \triangle BDC$ — по III признаку). А равные многоугольники имеют равные площади (по свойству многоугольника).

$$\text{Значит, } S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} AD \cdot BD \sin \angle ADB = AD \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 4AD.$$

Из $\triangle ABD$ по теореме косинусов имеем:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos \angle ADB, \text{ или } 41 = AD^2 + 25 - 2 \cdot AD \cdot 5 \cos \angle ADB.$$

$\cos \angle ADB = \sqrt{1 - \sin^2 \angle ADB} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$, где $\cos \angle ADB > 0$ (острый угол).

$$\text{Следовательно, } 41 = AD^2 + 25 - 10AD \cdot \frac{3}{5}, \text{ или } AD^2 - 6AD - 16 = 0,$$

откуда $(AD)_1 = 8$, $(AD)_2 = -2$.

Так как $AD > 0$, то $AD = 8$, тогда $S_{ABCD} = 8 \cdot 4 = 32$.

Ответ: 32.

18. Известно, что площадь выпуклого четырехугольника определяется по формуле $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin \alpha$, где d_1 и d_2 — диагонали, α — угол между ними.

По условию $AC = BD = 8$ (диагонали равнобедренной трапеции равны), $\alpha = 45^\circ$, тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \sin 45^\circ = 32 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2}$.

Ответ: $16\sqrt{2}$.

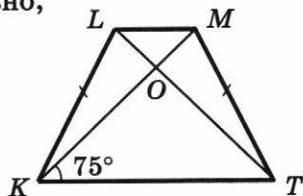
19. В равнобедренной трапеции диагонали равны и углы при основаниях равны (по свойству).

Проведем диагональ LT , тогда $OK = OT$ и $\angle OTK = \angle OKT = 75^\circ$. Значит, $\angle KOT = 180^\circ - (75^\circ + 75^\circ) = 30^\circ$, следовательно,

$$S_{KLMT} = \frac{1}{2} KM \cdot LT \sin 30^\circ \text{ (см. № 18).}$$

$$S_{KLMT} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 16.$$

Ответ: 16.



РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Теорема синусов

Найдите x , y .

1. По теореме синусов имеем:

$$\frac{x}{\sin \angle M} = \frac{MN}{\sin \angle K}, \quad x = \frac{8 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}/2}{1/2} = 8\sqrt{2}. \text{ Аналогично,}$$

$$\frac{8}{\sin 30^\circ} = \frac{y}{\sin \angle N}, \text{ где } \angle N = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ, \sin 105^\circ =$$

$$= \sin(45^\circ + 60^\circ) = \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3}), \text{ тогда } y = \frac{8 \cdot \sin 105^\circ}{1/2} = 16 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3}) = 4\sqrt{2} (1 + \sqrt{3}).$$

Ответ: $x = 8\sqrt{2}$, $y = 4\sqrt{2} (1 + \sqrt{3})$.

2. $\angle LRM$ — внешний угол $\triangle QRM$, тогда $\angle M = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$, $\angle QRM = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

По теореме синусов имеем: $\frac{13}{\sin 30^\circ} = \frac{x}{\sin 50^\circ}$, $x = \frac{13 \cdot \sin 50^\circ}{1/2} =$

$$= 26 \cdot 0,766 \approx 19,9.$$

Аналогично, $\frac{y}{\sin 100^\circ} = \frac{13}{\sin 30^\circ}$, $y = \frac{13 \cdot \sin 100^\circ}{1/2} = 26 \sin 100^\circ \approx 25,6$.

Ответ: $x \approx 19,9$; $y \approx 25,6$.

3. $\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{20}{\sin 60^\circ}$, $x = \frac{20 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{20 \cdot \sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{6}}{3} \approx$

$$\approx 16,3;$$

$\angle K = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 75^\circ$, тогда $\frac{y}{\sin 75^\circ} = \frac{20}{\sin 60^\circ}$, $y = \frac{20 \cdot \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} =$

$$= \frac{40 \sin 75^\circ}{\sqrt{3}} \approx \frac{40 \cdot 0,966}{1,732} = 22,3.$$

Ответ: $x \approx 16,3$; $y \approx 22,3$.

4. $\frac{y}{\sin 45^\circ} = \frac{12}{\sin 60^\circ}$, $y = \frac{12 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{12 \cdot \sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{6} \approx 9,8;$

$\angle S = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ.$

$$\frac{x}{\sin 75^\circ} = \frac{12}{\sin 60^\circ}, x = \frac{12 \cdot \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{24\sqrt{3} \sin 75^\circ}{3} = 8\sqrt{3} \sin 75^\circ \approx 13,9.$$

Ответ: $x \approx 13,9$; $y \approx 9,8$.

5. $\triangle ABC$ — прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), тогда $\cos \angle A = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = x =$

$$= \frac{AC}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\cos 15^\circ} \approx \frac{1,7320}{0,9659} = 1,79 \approx 1,8;$$

$$y = \sqrt{3} \operatorname{tg} 15^\circ \approx 1,7320 \cdot 0,2679 \approx 0,5.$$

Ответ: $x \approx 1,8$; $y \approx 0,5$.

6. В $\triangle RMS$ $\angle S = 30^\circ$, $\angle M = 90^\circ \Rightarrow RM = \frac{1}{2}y$, т. е. $y = RS = 2RM =$

$$= 12.$$

По теореме синусов, из $\triangle RTS$ имеем $\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{y}{\sin \angle RTS},$

$$\angle RTS = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ.$$

$$\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3}) \text{ (см. № 1)}.$$

$$\text{Значит, } x = \frac{y \cdot \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{12 \cdot \sqrt{2}/2}{\frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3})} = \frac{24}{1 + \sqrt{3}} = 12(\sqrt{3} - 1).$$

$$\text{Итак, } x = TS = 12(\sqrt{3} - 1) \approx 8,8.$$

Ответ: $x \approx 8,8$; $y = 12$.

7. Пусть $\angle K = 4m$, $\angle L = 2m$, $\angle M = 3m$, тогда $4m + 2m + 3m = 180$, $9m = 180$, $m = 20$.

$$\text{Значит, } \angle K = 80^\circ, \angle L = 40^\circ, \angle M = 60^\circ.$$

По теореме синусов $\frac{16}{\sin \angle K} = \frac{y}{\sin \angle M}, y = \frac{16 \sin 60^\circ}{\sin 80^\circ} = \frac{16 \cdot \sqrt{3}}{2 \sin 80^\circ} =$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} \approx \frac{13,8564}{0,9848} \approx 14,1;$$

$$\frac{x}{\sin 40^\circ} = \frac{16}{\sin 80^\circ}, x = \frac{16 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \approx \frac{16 \cdot 0,6428}{0,9848} \approx 10,4.$$

$$\text{Итак, } MK = x \approx 10,4, LK = y \approx 14,1.$$

Ответ: $x \approx 10,4$, $y \approx 14,1$.

8. $\frac{y}{\sin 105^\circ} = \frac{10}{\sin \angle BAC}$, где $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3})$ (см. № 1).

$$\sin \angle BAC = \sin (180^\circ - 150^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ тогда } y = \frac{10 \cdot \sin 105^\circ}{\sin \angle BAC} =$$

$$= \frac{10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3})}{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{2} (1 + \sqrt{3}) \approx 19,3.$$

$$\angle C = 150^\circ - 105^\circ = 45^\circ, \text{ тогда } \frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{10}{\sin \angle BAC}, \text{ или}$$

$$x\sqrt{2} = 10 \cdot 2 = 20, x = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} \approx 14,1.$$

Значит, $AB = x \approx 14,1$, $AC = y \approx 19,3$.

$$9^*. \frac{MK}{\sin \angle F} = \frac{KF}{\sin 30^\circ}, KF = \frac{MK \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{MK}{\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{13}{4}.$$

$$KF = \frac{1}{2}EF = \frac{1}{2}x, \text{ тогда } x = \frac{13}{4} \cdot 2 = \frac{13}{2} = 6,5.$$

$$\angle MKF = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ.$$

По теореме синусов из $\triangle MKF$ имеем: $\frac{MF}{\sin 105^\circ} = \frac{FK}{\sin 30^\circ},$

$$MF = \frac{FK \cdot \sin 105^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{13}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3})}{1/2} = \frac{13\sqrt{2}}{8} (1 + \sqrt{3}) \approx 6,3.$$

Достроим $\triangle MEF$ до параллелограмма $MERF$, для чего из вершин E и F проведем прямые ER и FR , соответственно параллельные MF и ME . Тогда $MK = KR$ (по свойству параллелограмма). Значит, $MR^2 + EF^2 = 2(y^2 + MF^2)$ (зависимость между сторонами и диагоналями), где

$$MR = 2MK = \frac{13\sqrt{2}}{2}, EF = x = \frac{13}{2}, MF \approx 6,3, \text{ тогда имеем:}$$

$$\frac{169}{2} + \frac{169}{4} = 2(y^2 + 6,3^2), \text{ или } y^2 + 6,3^2 = \frac{507}{8}, y^2 = 63,375 - 39,69;$$

$$y^2 = 23,685, y \approx 4,9.$$

Ответ: $x = 6,5$; $y \approx 4,9$.

Замечание. Сторону $EM = y$ можно найти по теореме косинусов. Но эта тема изучается после теоремы синусов. Возможны и другие решения.

10*. Достроим $\triangle MFN$ до параллелограмма $MFNK$, тогда $\angle KMF + \angle MFN = 180^\circ$ (сумма односторонних углов), $\angle KMF = 105^\circ$, $\angle MKF = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$.

По теореме синусов из $\triangle MFK$ имеем:

$$\frac{KF}{\sin 105^\circ} = \frac{x}{\sin 30^\circ}, \text{ откуда } x = \frac{KF \cdot \sin 30^\circ}{\sin 105^\circ},$$

$$\text{где } KF = 2FE = 16, \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})$$

(см. № 1).

$$x = \frac{16 \cdot 0,5}{\frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3})} = \frac{8 \cdot 4}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})} =$$

$$= \frac{32(\sqrt{3} - 1)}{2\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \approx 8,3.$$

В $\triangle FKN$ $\angle FKN = \angle MFK = 45^\circ$ — как накрест лежащие, тогда

$$\frac{y}{\sin 45^\circ} = \frac{KN}{\sin 30^\circ}, KN = MF = x, y = \frac{x \cdot \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = x\sqrt{2} =$$

$$= 8\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1) \cdot \sqrt{2} = 16(\sqrt{3} - 1) \approx 14,3.$$

Итак, $MF = x \approx 8,3$, $FN = y \approx 14,3$.

Ответ: $x \approx 8,3$; $y \approx 14,3$.

11*. Достроим $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABCE$, тогда $BE = 2y$, $\angle BEC = 45^\circ$, $\angle BCE = 105^\circ$ (см. № 10).

Из $\triangle BEC$ по теореме синусов имеем:

$$\frac{2y}{\sin 105^\circ} = \frac{14}{\sin 45^\circ}, y = \frac{7 \cdot \sin 105^\circ}{\sin 45^\circ} =$$

$$= 7\sqrt{2} \sin 105^\circ.$$

$$\text{Но } \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}) \text{ (см. № 1),}$$

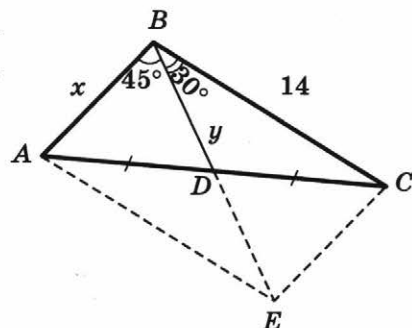
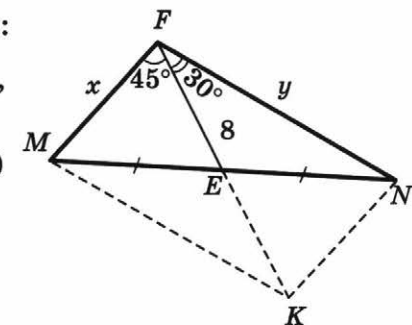
$$\text{тогда } y = 7\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + \sqrt{3}) = \frac{7}{2}(1 + \sqrt{3}) \approx 9,6.$$

$$\text{Так как } CE = AB = x, \text{ то } \frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{14}{\sin 45^\circ}, x = \frac{14 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} =$$

$$= 14 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 7\sqrt{2} \approx 9,9.$$

$$\text{Итак, } AB = x = 7\sqrt{2} \approx 9,9, BD = y = \frac{7}{2}(1 + \sqrt{3}) \approx 9,6.$$

Ответ: $x \approx 9,9$; $y \approx 9,6$.



12. В $\triangle MKT$ $KM = KT = y$ (по условию), $\angle KMT = \angle KTM = 30^\circ$ (как углы при основании равнобедренного треугольника), тогда $\angle K = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$. По теореме синусов имеем:

$$\frac{MT}{\sin \angle MKT} = \frac{KM}{\sin \angle MTK}, \quad \frac{\sqrt{2}}{\sin 120^\circ} = \frac{y}{\sin 30^\circ},$$

$$\sin 120^\circ = \sin (180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$y = \frac{\sqrt{2} \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{2\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Так как ME — биссектриса, то $\angle KME = \angle EMT = 15^\circ$.

В $\triangle KME$ $\frac{x}{\sin 120^\circ} = \frac{y}{\sin \angle KEM}$, где $\angle KEM = 180^\circ - (120^\circ + 15^\circ) = 45^\circ$,

$$\text{тогда } x = \frac{y \cdot \sin 120^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2}}{3 \cdot 2} = 1.$$

$$\text{Итак, } ME = x = 1, KM = KT = y = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } x = 1, y = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Замечание. Если провести высоту KN на сторону MT , то $KM = y$ можно найти из соотношения $y = \frac{\sqrt{2}}{2} : \cos 30^\circ$, где KN — медиана $\triangle MKT$ и т. д.

13. По условию $MNEF$ — параллелограмм, тогда $\angle NFE = \angle MFE - \angle MFN = 120^\circ - 40^\circ = 80^\circ = \angle MNF$ (как накрест лежащие углы).

Из $\triangle MNF$ по теореме синусов имеем:

$$\frac{x}{\sin 80^\circ} = \frac{24}{\sin \angle M}, \quad \text{где } \angle M = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

$$x = \frac{24 \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{48 \sin 80^\circ}{\sqrt{3}} \approx 27,3;$$

$$\frac{y}{\sin 40^\circ} = \frac{24}{\sin 60^\circ}, \quad y = \frac{24 \sin 40^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{48 \sin 40^\circ}{\sqrt{3}} \approx 17,8.$$

$$\text{Ответ: } x \approx 27,3; y \approx 17,8.$$

14*. Проведем высоту BE на основание AD .

Так как $\angle BAD = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$, то $\angle ABE = 45^\circ$, т. е. $AE = BE$.

$$\text{Из } \triangle ABE \quad \sin 45^\circ = \frac{BE}{AB} \Rightarrow BE = AE = 4 \cdot \cos 45^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}, \text{ тогда}$$

$$ED = AD - AE = 6 - 2\sqrt{2}.$$

Из $\triangle BED$ по теореме Пифагора имеем:

$$BD^2 = x^2 = BE^2 + ED^2, \text{ или } BD^2 = 8 + (6 - 2\sqrt{2})^2 = 8 + 36 - 24\sqrt{2} + 8 = 52 - 24\sqrt{2}, \quad BD = \sqrt{52 - 24\sqrt{2}} \approx 4,2, \text{ т. е. } x \approx 4,2.$$

По свойству параллелограмма:

$$x^2 + y^2 = 2(AB^2 + AD^2), \text{ или } y^2 = 2(16 + 36) - (52 - 24\sqrt{2}) = 52 + 24\sqrt{2},$$

откуда $y = \sqrt{52 + 24\sqrt{2}} \approx 9,3$.

Ответ: $x = \sqrt{52 - 24\sqrt{2}} \approx 4,2$; $y = \sqrt{52 + 24\sqrt{2}} \approx 9,3$.

15. $\angle NQP = \angle QPR = 25^\circ$ (как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых NQ, PR и секущей PQ), тогда $\angle NPQ = 180^\circ - (130^\circ + 25^\circ) = 25^\circ$, т. е. $\triangle NPQ$ — равнобедренный. Значит, $x = y$.

По теореме синусов $\frac{PQ}{\sin 130^\circ} = \frac{x}{\sin 25^\circ}$, $x = \frac{20 \sin 25^\circ}{\sin (180^\circ - 50^\circ)} =$
 $= \frac{20 \sin 25^\circ}{\sin 50^\circ} = \frac{20 \sin 25^\circ}{2 \sin 25^\circ \cdot \cos 25^\circ} = \frac{10}{\cos 25^\circ} \approx 11$, где $\cos 25^\circ \approx 0,9063$.

Итак, $x = y \approx 11$.

Ответ: $x = y \approx 11$.

16*. Проведем высоту BE к основанию AD .

$\angle BAD = 60^\circ$, тогда $S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin 60^\circ = 8 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 48\sqrt{3}$. С дру-

гой стороны, $S_{ABCD} = AD \cdot BE = 12 \cdot BE = 48\sqrt{3}$, откуда $BE = 4\sqrt{3}$.

В $\triangle ABE$ $\angle ABE = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \Rightarrow AE = \frac{1}{2}AB = 4$.

Значит, $ED = AD - AE = 12 - 4 = 8$.

Из $\triangle BED$, где $BD = y$, имеем:

$y^2 = BE^2 + ED^2$, $y^2 = (4\sqrt{3})^2 + 8^2 = 112$, откуда $y = \sqrt{112} = 4\sqrt{7} \approx 10,6$.

По свойству параллелограмма

$AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + DC^2)$, или

$x^2 + y^2 = 2(12^2 + 8^2)$, $x^2 = 416 - 112 = 304$, $x = \sqrt{304} \approx 17,4$.

Ответ: $x \approx 17,4$; $y \approx 10,6$.

Замечание. Задачу можно решить другими способами.

17. В $\triangle FEK$ $\angle FEK = 180^\circ - (40^\circ + 25^\circ) = 115^\circ$, тогда $\frac{FK}{\sin 115^\circ} = \frac{FE}{\sin 25^\circ}$,

где $FK = y$, $FE = 16$, $\sin 115^\circ = \sin (180^\circ - 65^\circ) = \sin 65^\circ$.

Имеем: $y = \frac{16 \sin 65^\circ}{\sin 25^\circ} \approx \frac{16 \cdot 0,9063}{0,4226} \approx 34,3$.

$\frac{EK}{\sin 40^\circ} = \frac{FE}{\sin 25^\circ}$, $EK = \frac{FE \cdot \sin 40^\circ}{\sin 25^\circ} = \frac{16 \cdot 0,6428}{0,4226} \approx 24,3$.

По свойству параллелограмма

$x^2 + y^2 = (16^2 + 24,3^2) \cdot 2$, $x^2 + 34,3^2 = (256 + 590,49) \cdot 2$;

$x^2 = 1692,98 - 1176,49 = 516,49$, откуда $x \approx 22,7$.

Ответ: $x \approx 22,7$; $y \approx 24,3$.

РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Теорема косинусов

Найдите x , y .

1. По теореме косинусов имеем:

$$x^2 = 16^2 + 18^2 - 2 \cdot 16 \cdot 18 \cdot \cos 130^\circ,$$

$$\cos 130^\circ = \cos (180^\circ - 50^\circ) = -\cos 50^\circ \approx -0,6428,$$

$$x^2 = 256 + 324 + 370,2528 = 950,2528, \approx 30,8.$$

Ответ: $x \approx 30,8$.

$$2. SR^2 = ST^2 + RT^2 - 2 \cdot ST \cdot RT \cos x,$$

$$100 + 49 - 2 \cdot 10 \cdot 7 \cos x = 16,$$

$$140 \cos x = 133, \cos x = \frac{133}{140} \approx 0,95, \text{ откуда } x \approx 18^\circ.$$

Ответ: $x \approx 18^\circ$.

$$3. x^2 = (\sqrt{8})^2 + 5^2 - 2 \cdot \sqrt{8} \cdot 5 \cos 45^\circ,$$

$$x^2 = 33 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 33 - 20 = 13, \text{ откуда } x = \sqrt{13}.$$

Ответ: $x = \sqrt{13}$.

4. $RO = x$ — радиус описанной окружности.

$$S_{\Delta REF} = \frac{abc}{4x}, \text{ где } a, b, c \text{ — стороны;}$$

$$S_{\Delta REF} = \frac{10 \cdot 5 \cdot 7}{4x} = \frac{175}{2x}; \text{ с другой стороны,}$$

$$S_{\Delta REF} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона), где } p = \frac{1}{2}(10 + 5 +$$

$$+ 7) = 11, S_{\Delta REF} = \sqrt{11 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 4} = 2\sqrt{66}.$$

$$\text{Значит, } \frac{175}{2x} = 2\sqrt{66}, x = \frac{175}{4\sqrt{66}} \approx 5,4.$$

Ответ: $x \approx 5,4$.

Замечание. Задачу можно решить и другими способами.

5. $QN = 12$ (по условию), тогда $QK = 12 - y$.

$$\text{Из } \Delta QMK \quad x^2 + (12 - y)^2 = 6^2;$$

$$\text{из } \Delta MKN \quad x^2 + y^2 = 10^2.$$

Вычитая из II равенства I, имеем:

$$y^2 - (12 - y)^2 = 100 - 36, y^2 - 144 + 24y - y^2 = 64, 24y = 208, y = \frac{26}{3},$$

тогда $x^2 = 100 - \left(\frac{26}{3}\right)^2, x^2 = 100 - \frac{676}{9} = \frac{900 - 676}{9}, x^2 = \frac{224}{9},$ откуда

$$x = \frac{\sqrt{224}}{3} = \frac{4\sqrt{14}}{3}.$$

Ответ: $x = \frac{4\sqrt{14}}{3}, y = \frac{26}{3}.$

6. $BC = AD = 9$ (по свойству параллелограмма).

Из $\triangle ABD$ $x^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \cdot 6 \cdot 9 \cdot \cos 60^\circ, x^2 = 36 + 81 - 108 \cdot \frac{1}{2} = 63;$

$$x = \sqrt{63}.$$

Ответ: $x = \sqrt{63}.$

7. Пусть O — точка пересечения диагоналей.

Так как $AC = 8, BD = 6$, то $AO = 4; BO = 3.$

$\angle AOB = \angle COD = 70^\circ$ (как вертикальные).

Из $\triangle AOB$ по теореме косинусов имеем:

$$y^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos 70^\circ, y^2 = 25 - 24 \cos 70^\circ, y^2 \approx 25 - 8,2 = 16,8, \\ y \approx 4,1.$$

По свойству параллелограмма

$$2(x^2 + y^2) = AC^2 + BD^2, \text{ или } x^2 + y^2 = 50, x^2 = 50 - 4,1^2, x^2 = 33,19, \\ x \approx 5,8.$$

Ответ: $x \approx 5,8; y \approx 4,1.$

8. $MNEF$ — параллелограмм, $MF = NE = 13.$

Из $\triangle MFE$ по теореме косинусов

$$y^2 = 11^2 + 13^2 - 2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \cos 100^\circ,$$

$$y^2 = 290 - 286 \cdot \cos (180^\circ - 80^\circ) = 290 + 286 \cos 80^\circ,$$

$$y^2 \approx 339,6633, y \approx 18,4.$$

По свойству параллелограмма

$$x^2 + y^2 = 2(13^2 + 11^2), x^2 = 580 - 339,6633, x^2 \approx 240,3367, x \approx 15,5.$$

Ответ: $x \approx 15,5; y \approx 18,4.$

9. $QT^2 = 11^2 + 8^2 - 2 \cdot 11 \cdot 8 \cos 130^\circ = 185 - 176 \cos (180^\circ - 50^\circ);$
 $QT^2 = 185 + 176 \cos 50^\circ.$

$$QT^2 \approx 298,1306, QT \approx 17,3.$$

$$MT = QT - QM = 17,3 - y.$$

Из $\triangle RMQ$ $x^2 + y^2 = 121;$

из $\triangle RMT$ $x^2 + (17,3 - y)^2 = 64.$

Вычитая из I равенства II, имеем:

$$y^2 - (17,3 - y)^2 = 57, (y - 17,3 + y)(y + 17,3 - y) = 57, (2y - 17,3) \cdot 17,3 = 57;$$

$$34,6y = 299,29 + 57; 34,6y = 356,29, y \approx 10,3.$$

$$\text{Тогда } x^2 = 121 - 10,3^2 = 14,91; x \approx 3,9.$$

$$\text{Ответ: } x \approx 3,9; y \approx 10,3.$$

$$10^*. \text{ В } \triangle ABC \text{ } AB = y + 4, \text{ тогда } (y + 4)^2 = 20^2 + 15^2, (y + 4)^2 = 625,$$

$$y + 4 > 0, y + 4 = 25, y = 21.$$

$$\text{Пусть } \angle A = \alpha, \text{ тогда } x^2 = 15^2 + 4^2 - 2 \cdot 15 \cdot 4 \cos \alpha, x^2 = 241 - 120 \cos \alpha,$$

$$\text{где } \cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}; \text{ значит, } x^2 = 241 - 120 \cdot \frac{3}{5}, x^2 = 169, x = 13.$$

$$\text{Итак, } x = 13; y = 21.$$

$$\text{Ответ: } x = 13, y = 21.$$

11. По теореме косинусов имеем:

$$13^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ, \text{ или } x^2 + y^2 - xy = 13^2, \text{ или}$$

$$(x + y)^2 - 3xy = 13^2. \text{ Но } x + y = 22, \text{ тогда } 484 - 3xy = 169, \text{ откуда } xy = 105.$$

$$\text{Значит, } \begin{cases} x + y = 22, \\ xy = 105, \end{cases} \text{ следовательно, } \begin{cases} x = 7, \\ y = 15, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 15, \\ y = 7. \end{cases}$$

$$\text{Если } y > x, \text{ то } y = 15, x = 7.$$

$$\text{Ответ: } x = 7; y = 15.$$

$$12. \text{ По условию } \frac{x}{y} = \frac{3}{8}. \text{ Кроме того, по теореме косинусов } 42^2 = x^2 +$$

$$+ y^2 - 2xy \cos 60^\circ, \text{ или}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 1764, \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{8}, \end{cases} \begin{cases} \frac{9}{64}y^2 + y^2 - \frac{3}{8}y^2 = 1764, \\ x = \frac{3}{8}y. \end{cases}$$

$$\frac{49}{64}y^2 = 1764, \text{ или } \frac{7}{8}y = 42, \frac{1}{8}y = 6, y = 48, \text{ тогда } x = \frac{3}{8} \cdot 48 = 18.$$

$$\text{Ответ: } x = 18; y = 48.$$

$$13. MT = MR - TR = 14 - x.$$

$$\text{Из } \triangle PTM \text{ } y^2 + (14 - x)^2 = 13^2; \text{ из } \triangle PTR \text{ } x^2 + y^2 = 15^2. \text{ Вычитая из II ра-}$$

$$\text{венства I, имеем: } x^2 - (14 - x)^2 = 15^2 - 13^2, \text{ или } x^2 - 196 + 28x - x^2 = 56;$$

$$28x = 252; x = 9.$$

$$\text{Значит, } y^2 = 225 - x^2 = 144, y = 12.$$

$$\text{Ответ: } x = 9; y = 12.$$

14. Из $\triangle ABC$ по теореме косинусов имеем:

$$37^2 = 44^2 + 15^2 - 2 \cdot 44 \cdot 15 \cdot \cos \angle A, \text{ или } 1369 = 2161 - 1320 \cdot \cos \angle A,$$

$$\text{откуда } \cos \angle A = \frac{792}{1320} = \frac{3}{5}.$$

Из $\triangle ABD$ $x^2 = 15^2 + 14^2 - 2 \cdot 15 \cdot 14 \cdot \cos \angle A$, или

$$x^2 = 421 - 420 \cdot \frac{3}{5} = 169, \text{ т. е. } x = 13.$$

Ответ: $x = 13$.

15*. Так как $ME \parallel FT$, то $\triangle KFT \sim \triangle KME$, тогда $\frac{FK}{FT} = \frac{KM}{ME}$, или

$$\frac{50-y}{x} = \frac{50}{60}, \frac{50-y}{x} = \frac{5}{6}. \text{ Из } \triangle MFE \text{ по теореме Пифагора } FE^2 = 60^2 - y^2,$$

а из $\triangle KFE$ имеем: $FE^2 = 50^2 - (50-y)^2$.

Сравнивая полученные равенства, находим

$$60^2 - y^2 = 50^2 - (50-y)^2, \text{ или } 3600 - y^2 = 2500 - 2500 + 100y - y^2;$$

$$3600 = 100y, \text{ откуда } y = 36.$$

$$\text{Так как } \frac{50-y}{x} = \frac{5}{6} \text{ и } y = 36, \text{ то } \frac{14}{x} = \frac{5}{6}, x = \frac{14 \cdot 6}{5} = \frac{84}{5} = 16,8.$$

Ответ: $x = 16,8; y = 36$.

16. По условию $\triangle PCM$ — прямоугольный ($\angle PCM = 90^\circ$), тогда

$$\cos \angle P = \frac{PC}{PM} = \frac{40}{42+x}.$$

Из $\triangle PCD$ по теореме косинусов имеем $26^2 = 40^2 + 42^2 - 2 \cdot 40 \cdot 42 \cdot \cos \angle P$.

$$676 = 1600 + 1764 - 3360 \cdot \cos \angle P, \text{ откуда } \cos \angle P = \frac{2688}{3360} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{40}{42+x} = \frac{4}{5}, \text{ или } \frac{10}{42+x} = \frac{1}{5}, 42+x = 50, x = 8.$$

Значит, $PM = 42 + 8 = 50$, тогда $y^2 = 50^2 - 40^2, y^2 = 900, y = 30$.

Итак, $DM = x = 8, CM = y = 30$.

Ответ: $x = 8, y = 30$.

17. Из $\triangle MKL$, где $MK = 7, KL = 24, \angle MKL = 90^\circ$, имеем: $y^2 = 7^2 + 24^2$, $y^2 = 49 + 576 = 625, y = 25$, т. е. $ML = 25$. Так как $KL = LN$, то $LN = 24$, $MN = y + 24 = 49$.

Из $\triangle MKN$ по теореме косинусов находим:

$$x^2 = 7^2 + 49^2 - 2 \cdot 7 \cdot 49 \cos \angle M,$$

$$x^2 = 2450 - 686 \cos \angle M.$$

$$\text{Но } \cos \angle M = \frac{MK}{ML} = \frac{7}{25}, \text{ значит, } x^2 = 2450 - 686 \cdot \frac{7}{25},$$

$$x^2 = \frac{61\,250 - 4802}{25} = \frac{56\,448}{25}, \text{ откуда } x = \frac{168\sqrt{2}}{5}.$$

Ответ: $x = \frac{168\sqrt{2}}{5}; y = 25$.

18. Пусть $x = 2k$; $y = 3k$. По свойству параллелограмма имеем:

$$AC^2 + BD^2 = 2(x^2 + y^2), \text{ или } 2(4k^2 + 9k) = 17^2 + 19^2, 26k^2 = 650, k^2 = 25, k = 5.$$

Значит, $x = 10$; $y = 15$.

Ответ: $x = 10$; $y = 15$.

19.** Пусть $MK = a$, $NP = b$. Из $\triangle MPR$ $MP = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32$. Пусть $\angle PMR = \beta$. Заметим, что $\triangle MKN \sim \triangle NRP$ ($\angle K = \angle P = 90^\circ$ и $\angle KNM = \angle PNR$ — как вертикальные); $\cos \beta = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$.

Из $\triangle MNR$ по теореме косинусов $y^2 = x^2 + 40^2 - 2x \cdot 40 \cdot \frac{4}{5}$, или $y^2 = x^2 - 64x + 1600$.

Пусть $\angle KMN = \angle NRP = \alpha$, тогда $\cos \alpha = \frac{a}{x} = \frac{24}{y}$, $a = \frac{24x}{y}$.

Из $\triangle MKN$ $a^2 = x^2 - 49$, значит, $\left(\frac{24x}{y}\right)^2 = x^2 - 49$, или

$$\frac{576x^2}{x^2 - 64x + 1600} = x^2 - 49.$$

Упрощая полученное уравнение, имеем:

$$x^4 - 64x^3 + 975x^2 + 3136x - 78400 = 0, \text{ или } x^3(x - 25) - 39x^2(x - 25) + 3136(x - 25) = 0, \text{ или } (x - 25)(x^3 - 39x^2 + 3136) = 0, \text{ откуда } x_1 = 25,$$

$$\text{тогда } \left(\frac{24 \cdot 25}{y}\right)^2 = 25^2 - 49, \text{ или } \frac{24^2 \cdot 25^2}{y^2} = 24^2, y^2 = 25^2, y_1 = 25.$$

Итак, $x = 25$, $y = 25$ — одно из решений задачи.

Ответ: 25, 25.

Замечание 1. Оставляем читателю исследовать и решить кубическое уравнение, решение которого выходит за рамки программы, хотя можно привести графическое решение, что также не просто ввиду больших чисел.

Замечание 2. Решение задачи значительно упростится, если положить $KN = NP = 7$. Тогда это будет более простая задача.

20. Пусть $BD = x = 2k$, $AC = y = 3k$, тогда по свойству параллелограмма имеем: $AC^2 + BD^2 = 2(AD^2 + AB^2)$, или $9k^2 + 4k^2 = 2(23^2 + 11^2)$,

$$13k^2 = 2 \cdot (529 + 121), 13k^2 = 2 \cdot 650 = 1300,$$

$$k^2 = 100, k = 10, \text{ значит, } x = 2k = 20, y = 3k = 30.$$

Ответ: $x = 20$; $y = 30$.

21. Построим $\triangle QPR$ до параллелограмма, для чего из точек Q и R проведем прямые, соответственно параллельные PR и PQ . Обозначим точку

пересечения буквой M . Так как PL — медиана $\triangle QPR$ (по условию), то L — точка пересечения (середина) диагоналей QR и PM .

По свойству параллелограмма имеем: $QR^2 + PM^2 = 2(QP^2 + PR^2)$, где $QR = 2x$, $PM = 2PL = 14$, $QP = 6$ и $PR = 11$.

Тогда $4x^2 + 14^2 = 2 \cdot (36 + 121)$, $4x^2 = 2 \cdot 157 - 196$, $4x^2 = 118$, откуда $x = \frac{\sqrt{118}}{2}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{118}}{2}$.

22.** Из $\triangle ABC$ $x^2 - y^2 = 324$.

Пусть $CK = a$, $KB = b$, тогда $a + b = 18$.

Так как MK (а значит, и AK) — биссектриса $\angle CMB$, то $\frac{a}{b} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$,

откуда $a = \frac{5}{7}b$. Но $a + b = 18$, тогда $\frac{5}{7}b + b = 18$, $\frac{12}{7}b = 18$, $b = \frac{21}{2}$, тогда

$a = \frac{5}{7} \cdot \frac{21}{2} = \frac{15}{2}$. Пусть $\angle CAK = \angle KAB = \beta$.

Из $\triangle ABC$ $\cos 2\beta = \frac{y}{x}$, а из $\triangle ACK$ $\operatorname{tg} \beta = \frac{a}{y} = \frac{15}{2y}$.

Известно, что $\cos 2\beta = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}$.

Следовательно, $\frac{1 - \left(\frac{15}{2y}\right)^2}{1 + \left(\frac{15}{2y}\right)^2} = \frac{y}{x}$, или $\frac{4y^2 - 225}{4y^2 + 225} = \frac{y}{x}$, или

$\left(\frac{4y^2 - 225}{4y^2 + 225}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2}$. Но $x^2 - y^2 = 324$, откуда $x^2 = y^2 + 324$, тогда

$$\left(\frac{4y^2 - 225}{4y^2 + 225}\right)^2 = \frac{y^2}{y^2 + 324}.$$

Заметим, что $\left|\frac{y}{x}\right| < 1$ или $y < x$ (катет меньше гипотенузы).

Пусть $y^2 = t$, где $t > 0$, тогда уравнение примет вид

$$\left(\frac{4t - 225}{4t + 225}\right)^2 = \frac{t}{t + 324}, \text{ или } (4t - 225)^2 (t + 324) = t(4t + 225)^2.$$

После преобразований получим квадратное уравнение

$1584t^2 - 583\,200t + 16\,402\,500 = 0$, или, разделив на 36, имеем:

$$44t^2 - 16\,200t + 455\,625 = 0,$$

$$D/4 = (8100)^2 - 44 \cdot 455\,625 = 45\,562\,500 = 6750^2 > 0.$$

$$t_{1,2} = \frac{8100 \pm 6750}{44}, t_1 = \frac{14\,850}{44} = \frac{1350}{4}; t_2 = \frac{1350}{44}.$$

$$1) \text{ Если } t = \frac{1350}{4}, \text{ то } y^2 = \frac{1350}{4}, y = \frac{15\sqrt{6}}{2}, \text{ тогда } x^2 = y^2 + 324 = \\ = \frac{1323}{2} = \frac{2646}{4}, x = \frac{21\sqrt{6}}{2}.$$

Оба значения подходят, так как $y < x$.

$$2) \text{ Если } t = \frac{1350}{44}, \text{ то } y^2 = \frac{1350}{44}, y = \frac{15}{2} \sqrt{\frac{6}{11}} = \frac{15\sqrt{66}}{22}.$$

$$\text{Тогда } x^2 = \frac{675}{22} + 324 = \frac{7803}{22} = \frac{15\,606}{44}, \text{ откуда } x = \frac{51}{2} \sqrt{\frac{6}{11}} = \frac{51\sqrt{66}}{22},$$

также выполняется условие $y < x$.

Следовательно, задача имеет два решения.

$$\text{Ответ: } 1) x = \frac{21\sqrt{6}}{2}; y = \frac{15\sqrt{6}}{2}; 2) x = \frac{51\sqrt{66}}{22}, y = \frac{15\sqrt{66}}{22}.$$

Замечание. Возможны другие решения (предоставляем найти читателю).

23. По свойству параллелограмма $2(MN^2 + MF^2) = ME^2 + FN^2$, или $2(x^2 + y^2) = 196 + 144, x^2 + y^2 = 170$.

По условию $x - y = 4$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 170, \\ x - y = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} (4 + y)^2 + y^2 = 170, \\ x = 4 + y. \end{cases}$$

$16 + 8y + y^2 + y^2 = 170$, или $y^2 + 4y - 77 = 0$, откуда находим $y_1 = 7$, $y_2 = -11$ (не подходит, так как $y > 0$).

Если $y = 7$, то $x = 4 + 7 = 11$.

Ответ: $x = 11, y = 7$.

24*. По свойству параллелограмма $2(AD^2 + AB^2) = AC^2 + BD^2$, где $AD = x, AB = y, AD = BD = x$, тогда $2(x^2 + y^2) = AC^2 + x^2$, откуда $x^2 + 2y^2 = AC^2$.

По условию $AC - BD = 2$, или $AC = x + 2$, тогда $x^2 + 2y^2 = (x + 2)^2$, или $x^2 + 2y^2 = x^2 + 4x + 4, y^2 = 2x + 2$.

Кроме того, по условию $x - y = 11$.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2 = 2x + 2, \\ x - y = 11, \end{cases} \quad \begin{cases} (x - 11)^2 = 2x + 2, \\ y = x - 11. \end{cases}$$

$x^2 - 22x + 121 - 2x - 2 = 0; x^2 - 24x + 119 = 0$, откуда $x_1 = 17, x_2 = 7$, тогда $y_1 = 6, y_2 = 7 - 11 = -4$ (не удовлетворяет, так как $y > 0$).

Поскольку $x - y = 11$, т. е. $x > y$, то $x = 17, y = 6$.

Ответ: $x = 17, y = 6$.

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. По условию $MNKP$ — квадрат, где диагональ MK является биссектрисой $\angle PMN = 90^\circ$.

Значит, $\widehat{MP \cdot MK} = 45^\circ$.

Ответ: 45° .

2. $ABCD$ — прямоугольник, где $|\overline{BA}| = 6$, $|\overline{BC}| = 8$, тогда $|\overline{BD}|^2 = |\overline{BC}|^2 + |\overline{CD}|^2$.

Но $|\overline{BA}| = |\overline{CD}|$, тогда $|\overline{BD}|^2 = 8^2 + 6^2 = 100$, откуда $|\overline{BD}| = 10$.

Ответ: 10.

3. По условию $\triangle QTR$ — равносторонний, тогда $\angle Q = \angle R = \angle T = 60^\circ$.

Угол между векторами \overline{QR} и \overline{RT} равен: $\widehat{QR \cdot RT} = 180^\circ - \angle QRT = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Тогда $\overline{QR} \cdot \overline{RT} = |\overline{QR}| \cdot |\overline{RT}| \cos 120^\circ = 8 \cdot 8 \cdot \cos (180^\circ - 60^\circ) = 64 \cdot (-\cos 60^\circ) = 64 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -32$.

Ответ: -32.

4. $\overline{NM} \cdot \overline{NS} = |\overline{NM}| \cdot |\overline{NS}| \cdot \cos 135^\circ = 5 \cdot 2\sqrt{2} \cos (180^\circ - 45^\circ) = 10\sqrt{2} \cdot (-\cos 45^\circ) = 10\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -10$.

Ответ: -10.

5. $\overline{MN} \cdot \overline{MK} = |\overline{MN}| \cdot |\overline{MK}| \cos (\widehat{MN, NK}) = 3 \cdot 2 \cdot \cos 45^\circ = 3 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$.

Ответ: $3\sqrt{2}$.

6. $\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cos \alpha$, где $\alpha = \widehat{p, q}$.

По условию $\vec{p} \{3; -4\}$, $\vec{q} \{15; 8\}$, тогда $|\vec{p}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$,

$|\vec{q}| = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{169} = 13$.

$\vec{p} \cdot \vec{q} = 3 \cdot 15 + (-4) \cdot 8 = 45 - 32 = 13$.

$$\text{Значит, } \cos \alpha = \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{|\vec{p}| \cdot |\vec{q}|} = \frac{13}{5 \cdot 13} = \frac{1}{5} = 0,2.$$

Ответ: 0,2.

7. По условию $\angle KML = 90^\circ$, $MK = ML$, значит, $\triangle MKL$ — равнобедренный и прямоугольный, MN — медиана и высота, т. е. $MN \perp KL$.

Следовательно, $\vec{MN} \cdot \vec{KL} = |\vec{MN}| \cdot |\vec{KL}| \cos 90^\circ = 0$, так как $\cos 90^\circ = 0$.

Ответ: 0.

$$8. \cos \angle C = \frac{\vec{CA} \cdot \vec{CB}}{|\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}|}. \text{ Найдем координаты векторов } \vec{CA} \text{ и } \vec{CB}: \\ \vec{CA} \{-4 - 4; 8 - 0\} = \{-8; 8\}, \vec{CB}\{2 - 4; 14 - 0\} = \{-2; 14\}, \text{ тогда}$$

$$|\vec{CA}| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2} = \sqrt{2 \cdot 8^2} = 8\sqrt{2}, |\vec{CB}| = \sqrt{(-2)^2 + 14^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

$$\vec{CA} \cdot \vec{CB} = -8 \cdot (-2) + 8 \cdot 14 = -16 + 112 = 96.$$

$$\text{Следовательно, } \cos \angle C = \frac{\sqrt{96}}{8\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}} = \frac{12}{2 \cdot 10} = 0,6.$$

Ответ: 0,6.

9. Угол между векторами \vec{EF} и \vec{EM} равен 60° ($\triangle FEM$ — равнобедренный), тогда $\vec{EF} \cdot \vec{EM} = |\vec{EF}| \cdot |\vec{EM}| \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 50$.

Ответ: 50.

10. Аналогично № 7 имеем: $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{CD}| \cos(\widehat{AB, CD})$.

Так как угол между векторами \vec{AB} и \vec{CD} равен 90° , то $\cos 90^\circ = 0$, тогда $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0$.

Ответ: 0.

11. $MNKP$ — прямоугольник (по условию) и $\angle OMN = 30^\circ$, тогда $\angle OMP = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

По свойству прямоугольника $PN = MK$, тогда $MO = PO$, т. е. $\triangle MOP$ — равнобедренный, $\angle OMP = \angle MPO = 60^\circ$, тогда $\angle POM = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$.

Значит, $\triangle POM$ — равносторонний и $PO = MO = 4$.

$$\text{Следовательно, } \vec{OP} \cdot \vec{OM} = |\vec{OP}| \cdot |\vec{OM}| \cos 60^\circ = 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 8.$$

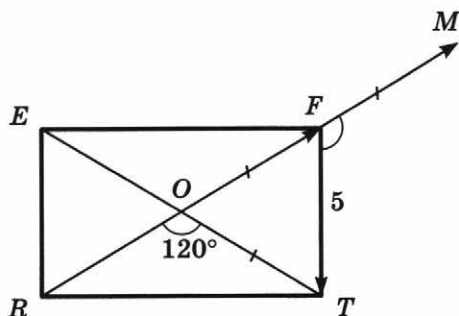
Ответ: 8.

12*. Аналогично № 12 имеем: $\triangle FOT$ — равносторонний, т. е. $OF = OT = FT = 5$.

Продолжим OF на величину $FM = OF$, тогда $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{FM}$.

$$\begin{aligned} & \text{Следовательно, } \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{FT} = \\ &= \overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FT} = \\ &= |\overrightarrow{FM}| \cdot |\overrightarrow{FT}| \cos (180^\circ - 60^\circ) = \\ &= 5 \cdot 5 \cdot (-\cos 60^\circ) = 25 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -12,5. \end{aligned}$$

Ответ: -12,5.



13. $\triangle ABC$ — равносторонний, тогда $\angle DBC = 30^\circ$.

Значит, $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 30^\circ$.

$$\begin{aligned} & \text{Из } \triangle BDC, \text{ где } BC = 3, DC = \frac{1}{2}AC = \frac{3}{2}, \text{ находим } BD = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \sqrt{9\left(1 - \frac{1}{4}\right)} = 3\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{4} = 6,75.$$

Ответ: 6,75.

Замечание. Сторону BD можно найти иначе:

$$BD = BC \sin \angle C = 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

14. По условию $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$, тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 4$.

Но $\cos (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \cos 45^\circ = \sin (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, значит,

$$S_{\triangle MKN} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{MK}| \cdot |\overrightarrow{MN}| \sin 45^\circ = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Ответ: 2.

15. По условию $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3}$, тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \sqrt{3}$, $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 30^\circ = \sqrt{3}$.

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \sin 30^\circ = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

$$\text{Но } |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = \frac{\sqrt{3}}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2, \text{ тогда } S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Ответ: 1.

16. $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cos \alpha$, где $\alpha = \angle CAB$.

По условию $A(2; 4)$, $B(2; 8)$, $C(6; 4)$, тогда $\overline{AB} \{2 - 2; 8 - 4\} = \{0; 4\}$, $\overline{AC} \{6 - 2; 4 - 4\} = \{4; 0\}$.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4; |\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + 0^2} = 4.$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \cdot 4 + 4 \cdot 0 = 0, \cos \alpha = \frac{0}{4 \cdot 4} = 0, \text{ т. е. } \alpha = \angle CAB = 90^\circ.$$

Ответ: 90° .

17. Аналогично № 16 имеем:

$\overline{MK} \{0,5 + 1; \sqrt{3} - \sqrt{3}\} = \{1,5; 0\}$, $\overline{MN} \{1 + 1; -\sqrt{3} - \sqrt{3}\} = \{2; -2\sqrt{3}\}$,
тогда $\overline{MK} \cdot \overline{MN} = 1,5 \cdot 2 + 0 \cdot (-2\sqrt{3}) = 3 + 0 = 3$; $|\overline{MK}| = \sqrt{1,5^2 + 0^2} = 1,5$;
 $|\overline{MN}| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$.

$$\overline{MK} \cdot \overline{MN} = |\overline{MK}| \cdot |\overline{MN}| \cos \angle M, \text{ или } 3 = 1,5 \cdot 4 \cos \angle M,$$

$$\cos \angle M = \frac{1}{2}, \angle M = 60^\circ.$$

Ответ: 60° .

18. Аналогично № 16 имеем:

$$\overline{EF} \{3; 3\}, \overline{ET} \{4; -4\}, \text{ тогда } \overline{EF} \cdot \overline{ET} = 3 \cdot 4 + 3 \cdot (-4) = 0.$$

Значит, $\overline{EF} \perp \overline{ET}$, тогда $\angle E = 90^\circ$ и $\cos \angle E = \cos 90^\circ = 0$.

Ответ: 0.

19. Поскольку векторы \overline{FE} и \overline{NM} противоположно направлены, то $\overline{FE} \cdot \overline{NM} = 10 \cdot (-6) = -60$.

Ответ: -60.

20. Найдем координаты векторов \overline{MN} и \overline{LT} :

$$\overline{MN} \{6 - 1; 2 - 5\} = \{5; -3\}; \overline{LT} \{3 - 4,5; 3 - 5,5\} = \{-1,5; -2,5\}.$$

$$\text{Тогда } \overline{MN} \cdot \overline{LT} = 5 \cdot (-1,5) + (-3) \cdot (-2,5) = -7,5 + 7,5 = 0.$$

Следовательно, $\overline{MN} \perp \overline{LT}$, т. е. $\angle LON = \alpha = 90^\circ$.

Ответ: 90° .

К таблице 10

ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ДЛИНА ДУГИ

C — длина окружности, l — длина дуги.

$$1. \text{ Так как } \angle AOB = 120^\circ, \text{ т. е. } \alpha = 120^\circ \text{ и } R = 9, \text{ то } l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha = \\ = \frac{\pi \cdot 9}{180} \cdot 120 = 6\pi.$$

Ответ: 6π .

$$2. \angle KTM = \alpha; l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha, \text{ откуда } \alpha = \frac{l \cdot 180}{\pi R} = \frac{3\pi \cdot 180}{\pi \cdot 8} = \frac{3 \cdot 45}{2} = \\ = \frac{135}{2} = 67,5.$$

Ответ: $67,5$.

$$3. C = \pi \cdot D, \text{ где } D = KL = 12 \text{ — диаметр, тогда } C = \pi \cdot 12 = 12\pi.$$

Ответ: 12π .

$$4. C = 2\pi R \text{ — длина окружности.}$$

По условию $C = 4\pi$, тогда $2\pi R = 4\pi$, откуда $R = 2$.

Известно, что $a_4 = R\sqrt{2}$, где a_4 — сторона правильного четырехугольника (квадрата), R — радиус описанной окружности.

$$\text{Значит, } a_4 = 2\sqrt{2} \text{ и } S_{KMNT} = (2\sqrt{2})^2 = 8.$$

Ответ: 8 .

$$5. \text{ По условию } C = 8\pi\sqrt{3}. \text{ Но } C = 2\pi R, \text{ тогда } 2\pi R = 8\pi\sqrt{3}, R = 4\sqrt{3}. \\ \text{Так как } \angle AOB = 120^\circ, \text{ то } \angle AOB = 120^\circ, \text{ где } AO = OB = R = 4\sqrt{3}.$$

Из центра O опустим перпендикуляр OC на хорду AB .

OC — медиана равнобедренного $\triangle AOB$, где $\angle OAB = \angle OBA = 30^\circ$.

$$\text{Из } \triangle AOC \text{ } AC = AO \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6.$$

$$\text{Значит, } AB = 2AC = 12.$$

Ответ: 12 .

$$6. S_{ABKDEF} = 6S_{\triangle AOB}. \text{ Но } S_{\triangle AOB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \text{ — площадь правильного треугольника со стороной } a.$$

$$\text{По условию } S_{ABKDEF} = 72\sqrt{3}, \text{ тогда } 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 72\sqrt{3}, a^2 = 48, a = 4\sqrt{3}.$$

Кроме того, $a = R$, где R — радиус описанной окружности.

Тогда $C = 2\pi R = 2\pi \cdot 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\pi$.

Ответ: $8\sqrt{3}\pi$.

7. $OA = OB = R$ — радиусы окружности, $OM \perp AB$ (по условию), тогда OM — медиана равнобедренного $\triangle AOB$. Из $\triangle AOM$, где $OM = 12$, $AM = \frac{1}{2}AB = 5$, находим: $AO = R = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$.

Тогда $C = 2\pi R = 26\pi$.

Ответ: 26π .

8. Аналогично № 7 имеем:

$MK = \frac{1}{2}MN = 24$, $OK = 10$ (по условию), тогда $MO = R = \sqrt{24^2 + 10^2} = \sqrt{676} = 26$.

Значит, $C = 2\pi R = 52\pi$.

Ответ: 52π .

9. Так как $\angle TmM = 120^\circ$, то $\angle TOM = 120^\circ$.

В равнобедренном $\triangle TOM$ ($TO = MO = R$), $\angle OTM = \angle OMT = 30^\circ$.

Проведем высоту OK , тогда из $\triangle OTK$ $TK = 5$, $OT = \frac{5}{\cos 30^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}}$.

Следовательно, $l = \frac{\pi R}{180} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot 10}{180 \cdot \sqrt{3}} \cdot 120 = \frac{20\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{20\pi\sqrt{3}}{9}$.

Ответ: $\frac{20\pi\sqrt{3}}{9}$.

10. По условию $C = 24\pi$. С другой стороны, $C = 2\pi R$, тогда $2\pi R = 24\pi$, $R = 12$.

Значит, $AO = OB = AB = 12$ см, т. е. $\triangle AOB$ — равносторонний.

Следовательно, $\angle AOB = \angle AmB = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

11. Пусть $\angle MmN = 2x$, тогда $\angle NnM = 3x$.

Значит, $2x + 3x = 360$, $5x = 360$, $x = 72$, т. е. $\angle MmN = 2x = 144^\circ$, $\angle NnM = 3x = 216^\circ$.

Ответ: 144° ; 216° .

12. Пусть $\angle AmB = \alpha$, $\angle BA = \beta$.

По условию $\alpha - \beta = 90^\circ$. Кроме того, $\alpha + \beta = 360^\circ$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 360^\circ, \\ \alpha - \beta = 90^\circ, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\alpha = 450^\circ, \\ 2\beta = 270^\circ, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 225^\circ, \\ \beta = 135^\circ. \end{cases}$$

Значит, $\angle AmB = 225^\circ$, $\angle BA = 135^\circ$.

Ответ: 225° ; 135° .

13. $C = 2\pi R$ — длина окружности, R — радиус.

В правильном шестиугольнике сторона $a = R$, тогда $P = 6a = 6R$.

По условию $C - P = 7$, или $2\pi R - 6R = 7$, или $R(2\pi - 6) = 7$,

$$R = \frac{7}{2(\pi - 3)}, \text{ значит, } C = 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{7}{2(\pi - 3)} = \frac{7\pi}{\pi - 3}.$$

Ответ: $\frac{7\pi}{\pi - 3}$.

14. $STKR$ — прямоугольник, где $SR = 24$, $ST = 32$, тогда $RT^2 = ST^2 + SR^2$, $RT = \sqrt{32^2 + 24^2} = \sqrt{1600} = 40$.

Но $RT = 40$ — диаметр окружности, значит, $C = \pi D = 40\pi$.

Ответ: 40π .

15*.

Способ 1

$\cup AM = \cup BN$ — как дуги окружности, заключенные между параллельными хордами AB и MN ($AB \parallel MN$ — по условию). Но тогда $AM = BN$, т. е. $ABNM$ — равнобедренная трапеция.

Проведем диагональ AN .

Так как $MN = 16$, $AB = 12$, то $MK = \frac{1}{2}(16 - 12) = 2$.

Из $\triangle AMK$ $AM = \sqrt{2^2 + 14^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

$KN = MN - MK = 14$. Из $\triangle AKN$, где $AK = KN = 14$, $AN = 14\sqrt{2}$.

Известно, что $S_{\triangle} = \frac{abc}{4R}$, где a, b, c — стороны, R — радиус описанной окружности.

Но $S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 14 = \frac{10\sqrt{2} \cdot 16 \cdot 14\sqrt{2}}{4R}$, откуда $R = 10$.

Тогда $C = 2\pi R = 20\pi$.

Ответ: 20π .

Способ 2

Соединим точки B и N с центром окружности O , тогда $OB = ON = R$.

Проведем диаметр EF , перпендикулярный данным хордам, тогда $LT = AK = 14$, $LB = \frac{1}{2}AB = 6$ и $TN = \frac{1}{2}MN = 8$.

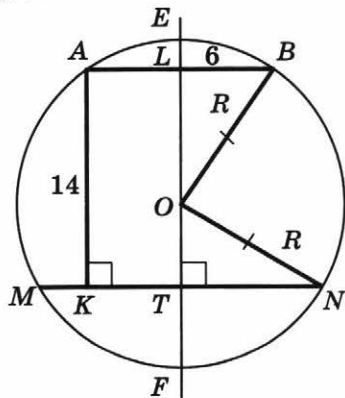
Пусть $OT = x$, тогда $OL = 14 - x$.

Из $\triangle OLB$ и $\triangle OTN$ по теореме Пифагора имеем:

$$\begin{cases} 6^2 + (14 - x)^2 = R^2, \\ 8^2 + x^2 = R^2. \end{cases}$$

Сравнивая левые части системы, получим:

$36 + 196 - 28x + x^2 = 64 + x^2$, $28x = 168$, откуда $x = 6$.



Значит, $R^2 = 64 + 36 = 100$, $R = 10$ и $C = 2\pi R = 20\pi$.

Способ 3

Пусть $EL = x$, $TF = y$, тогда имеем

$$\begin{cases} TN^2 = ET \cdot TF, \\ BL^2 = EL \cdot LF, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y(14 + x) = 64, \\ x(14 + y) = 36. \end{cases}$$

Вычитая из I уравнения II, получим $14(y - x) = 28$, $y - x = 2$, $y = x + 2$.

Подставим значение y в одно из уравнений системы:

$(x + 2)(14 + x) = 64$, или $14x + 28 + x^2 + 2x = 64$, $x^2 + 16x - 36 = 0$, откуда $x_1 = 2$, $x_2 = -18$ (не удовлетворяет, так как $x > 0$). Если $x = 2$, то $y = 2 + 2 = 4$, тогда $EF = 2R = x + y + LT = 2 + 4 + 14 = 20$, откуда $R = 10$, значит, $C = 2\pi R = 20\pi$.

Замечание. Как видим, во всех способах решения заложены различные идеи.

16. $FEKR$ — прямоугольник, тогда FK — диаметр описанной окружности (если вписанный угол — прямой, то он опирается на диаметр). Так как M — середина RF и N — середина RK , то MN — средняя линия ΔRFK , тогда $FK = 2MN = 40$ и $FO = OK$ — радиус описанной окружности, т. е. $FO = 20$. Значит, $C = 2\pi R = 40\pi$.

Ответ: 40π .

17. По условию ΔABM — правильный.

Известно, что если a — сторона, r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей, то $a = 2r\sqrt{3}$ и $a = R\sqrt{3}$.

Так как $r = OK = 8$, то $a = 2 \cdot 8\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$, тогда $16\sqrt{3} = R\sqrt{3}$, т. е. $R = 16$.

Значит, $C = 2\pi R = 32\pi$.

Ответ: 32π .

18. Проведем радиус KO . Пусть T — точка пересечения MN и KO . В ΔKMT KT — медиана, биссектриса и высота ΔMKN , тогда

$$MK = \frac{MT}{\cos 30^\circ} = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{3}} = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}.$$

Заметим, что $\angle MKT = 60^\circ$, и так как $MO = OK = R$, то ΔMKO — равносторонний, т. е. $MK = R = 4\sqrt{3}$.

Значит, $C = 2\pi R = 8\pi\sqrt{3}$.

Ответ: $8\pi\sqrt{3}$.

19. ME — диаметр описанной окружности, тогда $C = \pi \cdot D = \pi \cdot ME = 7\sqrt{5}\pi$.

Ответ: $7\sqrt{5}\pi$.

20. Пусть $KO = RO = x$ — радиус описанной окружности. По условию $KM = 6$, тогда $OM = 6 - x$, $RM = MT = 7$.

Из $\triangle ROM$ $RO^2 = RM^2 + OM^2$, или $x^2 = 49 + (6 - x)^2$, $12x = 85$, $x = \frac{85}{12}$,

значит, $C = 2\pi r = 2\pi \cdot \frac{85}{12} = \frac{85}{6}\pi$.

Ответ: $\frac{85}{6}\pi$.

21. $ADLK$ — прямоугольник, так как $\angle KAD$ — вписанный, опирающийся на диаметр.

Аналогично $\angle AKL = \angle KLD = \angle ADL = 90^\circ$.

Так как $AO = KO = R$ — радиусы окружности и $\angle AOK = 60^\circ$, то $\angle AKO = \angle OAK = 60^\circ$, т. е. $\triangle AOK$ — правильный, тогда $AK = AO = KO = R$. В $\triangle KAD$ $KD = 2R$, тогда $KD^2 - AK^2 = AD^2$, или $4R^2 - R^2 = 16^2$, $3R^2 = 16^2$, $\sqrt{3}R = 16$, $R = \frac{16}{\sqrt{3}}$. Тогда $C = 2\pi R = \frac{32\pi}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{32\pi}{\sqrt{3}}$.

22*.

Способ 1

По условию $AM = BM = 14$, т. е. $\triangle AMB$ — равнобедренный. Проведем высоту ME . Тогда ME — медиана $\triangle MAB$; $AE = BE = 4$.

$$S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2}AB \cdot ME = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot ME = 4ME.$$

Из $\triangle AME$ $ME^2 = AM^2 - AE^2$; $ME = \sqrt{14^2 - 4^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$.

$$S_{\triangle AMB} = 24\sqrt{5}.$$

С другой стороны, $S_{\triangle AMB} = \frac{abc}{4R}$, где a, b, c — стороны $\triangle AMB$, R — радиус описанной окружности. Значит, $\frac{14 \cdot 14 \cdot 8}{4R} = 24\sqrt{5}$, откуда $R =$

$$= \frac{14 \cdot 14 \cdot 8}{4 \cdot 24 \cdot \sqrt{5}} = \frac{49}{3\sqrt{5}}, \text{ тогда } C = 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{49}{3\sqrt{5}} = \frac{98\pi\sqrt{5}}{15}.$$

Ответ: $\frac{98\pi\sqrt{5}}{15}$.

Способ 2

Соединим точку A с центром окружности O , $ME = 6\sqrt{5}$ (см. способ 1). $AO = MO = R$.

Из $\triangle AOE$ $AO^2 - OE^2 = AE^2$, или $R^2 - (6\sqrt{5} - R)^2 = 16$, откуда находим $R = \frac{49}{3\sqrt{5}}$ и т. д. (см. способ 1).

23. По условию $\triangle MEF$ — правильный, где $EF = a = 8$.

Так как $a = R\sqrt{3}$, то $R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}$, тогда $C = 2\pi R = \frac{16\pi}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{16\pi}{\sqrt{3}}$.

24*. По условию $EF = 16$ и $\angle F = 30^\circ$, тогда $EM = \frac{1}{2}EF$, т. е. $EM = 8$.

$$MF = EF \cos 30^\circ = 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}.$$

Известно, что в прямоугольном треугольнике $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, где a , b — катеты, c — гипотенуза, r — радиус вписанной окружности.

$$\text{Значит, } r = \frac{1}{2}(8 + 8\sqrt{3} - 16) = 4\sqrt{3} - 4 = 4(\sqrt{3} - 1).$$

$$\text{Тогда } C = 2\pi r = 2\pi \cdot 4(\sqrt{3} - 1) = 8\pi(\sqrt{3} - 1).$$

$$\text{Ответ: } 8\pi(\sqrt{3} - 1).$$

25. AB — диаметр окружности, тогда $\angle ADB = 90^\circ$ (вписанный угол, опирающийся на диаметр). Из $\triangle ABD$ $AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$.

$$\text{Значит, } C = \pi \cdot AB = 20\pi.$$

$$\text{Ответ: } 20\pi.$$

26. По условию в $\triangle KTM$ $\angle T = 90^\circ$, $KM = 6$ и $KT = TM$, тогда $2KT^2 = KM^2 = 6^2$, $KT^2 = 18$, $KT = 3\sqrt{2} = TM$.

$$\text{Значит, } r = \frac{TM + TK - KM}{2} = \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 6}{2} = 3\sqrt{2} - 3 = 3(\sqrt{2} - 1)$$

(см. № 24).

$$\text{Тогда } C = 2\pi r = 6\pi(\sqrt{2} - 1).$$

$$\text{Ответ: } 6\pi(\sqrt{2} - 1).$$

27*. По условию $MK = NK = 25$, т. е. $\triangle MKN$ — равнобедренный, где $KE = 20$ — медиана, биссектриса и высота $\triangle KMN$.

$$\text{Из } \triangle MEK \text{ } ME = \sqrt{25^2 - 20^2} = \sqrt{225} = 15.$$

$S_{\triangle MNK} = \frac{1}{2}MN \cdot EK = p \cdot r$, где $p = \frac{1}{2}(MN + MK + NK)$ — полупериметр, $r = OE$ — радиус вписанной окружности.

$$\text{Значит, } MN \cdot EK = (MN + MK + NK) \cdot r, \text{ или } 30 \cdot 20 = (30 + 25 + 25) \cdot r,$$

$$r = \frac{30 \cdot 20}{80} = \frac{15}{2}.$$

$$\text{Тогда } C = 2\pi r = 15\pi.$$

$$\text{Ответ: } 15\pi.$$

Замечание. Задачу можно решить иначе, например:

$$S_{\triangle MNK} = \frac{1}{2}MN \cdot MK \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 25 \cdot 0,8 = 15 \cdot 20 = 300 \text{ и т. д.}$$

ПЛОЩАДЬ КРУГА

C — длина окружности, l — длина дуги.

Найдите $S_{кр}$.

1. По условию $C = 4\sqrt{\pi}$. Но $C = 2\pi R$, тогда $2\pi R = 4\sqrt{\pi}$, $R = \frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}$, зна-

$$\text{чит, } S = \pi R^2 = \pi \cdot \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{\pi}\right)^2 = \pi \cdot \frac{4\pi}{\pi^2} = 4.$$

Ответ: 4.

2. $\angle AOB = 60^\circ$ (по условию), значит, $\angle AOB = 60^\circ$.

Но $AO = BO = R$, тогда $\angle OAB = \angle OBA = 60^\circ$, т. е. $\triangle OAB$ — правильный, значит, $AB = OA = OB = 8$ и $S = \pi R^2 = \pi \cdot 8^2 = 64\pi$.

Ответ: 64π .

3*. По условию $MK = NK = 20$ и $\angle K = 30^\circ$, тогда

$$S_{\triangle MNK} = \frac{1}{2} MK \cdot NK \cdot \sin \angle K = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} = 100.$$

Проведем высоту KE , тогда $ME = MK \sin 15^\circ$, где KE — медиана и биссектриса равнобедренного $\triangle MKN$; $ME = 20 \sin 15^\circ$ и $KE = 20 \cos 15^\circ$.

$$MN = 2ME = 40 \sin 15^\circ.$$

$$\text{Но } \sin^2 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} = \frac{1 - \sqrt{3}/2}{2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}, \text{ значит,}$$

$$MN = 40 \cdot \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = 20\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

Известно, что $S_{\triangle MNK} = p \cdot r$, где $p = \frac{1}{2}(MK + KN + MN) =$

$$= \frac{1}{2}(40 + 20\sqrt{2 - \sqrt{3}}) = 20 + 10\sqrt{2 - \sqrt{3}}, r — \text{ радиус вписанной окружно-}$$

сти.

$$\text{Следовательно, } (20 + 10\sqrt{2 - \sqrt{3}})r = 100, \text{ откуда } r = \frac{100}{20 + 10\sqrt{2 - \sqrt{3}}} =$$

$$= \frac{10}{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}} = 10(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}), \text{ тогда } S_{кр.} = \pi r^2 = \frac{100\pi}{(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}})^2} \approx 49,5.$$

Ответ: $\frac{100\pi}{(2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}})^2} \approx 49,5.$

Замечание. $\sin 15^\circ$ можно найти иначе: $\sin 15^\circ = \sin (45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$ и т. д.

4. $\triangle ABC$ — правильный (по условию).

Пусть $AB = a$, тогда $a = 2r\sqrt{3}$, откуда $r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{12}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}.$

Значит, $S_{\text{кр.}} = \pi r^2 = \pi \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{3}}\right)^2 = 12\pi.$

Ответ: $12\pi.$

5. По условию $FЕКМ$ — прямоугольник, тогда $ME = 2r$ — диаметр описанной окружности. Из $\triangle MFE$ $ME^2 = 4^2 + 8^2$, $ME^2 = 80$, $ME = 4\sqrt{5}$, $2r = 4\sqrt{5}$, $r = 2\sqrt{5}.$

Тогда $S_{\text{кр.}} = \pi r^2 = \pi (2\sqrt{5})^2 = 20\pi.$

Ответ: $20\pi.$

6. В $\triangle ABC$ $\angle A = 60^\circ$, $AC = 6$, $\angle C = 90^\circ$, тогда $\angle B = 30^\circ \Rightarrow AB = 2AC = 12.$

$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{BC}{AC} \Rightarrow BC = 6 \operatorname{tg} 60^\circ = 6\sqrt{3}.$

Известно, что в прямоугольном треугольнике $r = \frac{1}{2}(AC + BC - AB) = \frac{1}{2}(6 + 6\sqrt{3} - 12) = 3\sqrt{3} - 3 = 3(\sqrt{3} - 1).$

Значит, $S_{\text{кр.}} = \pi r^2 = \pi \cdot 9(\sqrt{3} - 1)^2 = 9\pi(4 - 2\sqrt{3}) = 18\pi(2 - \sqrt{3}).$

Ответ: $18\pi(2 - \sqrt{3}).$

Замечание. Радиус вписанной окружности можно найти и другими способами, например по формуле $S = pr$, через подобие треугольников и т. д.

7. $\triangle MTP$ — правильный, тогда $MP = R\sqrt{3}$, где $R = MO = TO = PO$ — радиус описанной окружности. По условию $MP = 2\sqrt{3}$, тогда $2\sqrt{3} = R\sqrt{3}$, т. е. $R = 2$. Значит, $S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = 4\pi.$

Ответ: $4\pi.$

8*. Проведем высоту NK . Пусть $EK = x$.

Так как $\angle E = 45^\circ$, то $\angle ENK = 45^\circ$, т. е. $NK = EK = x$.

Пусть $MN = y$, тогда $EF = 2x + y = 24$.

По условию $EN = FM$, тогда по свойству описанного четырехугольника $2EN = EF + NM = 2x + y$, или $EN = x + y$.

Из $\triangle ENK$ $EN^2 = EK^2 + NK^2$, или $(x + y)^2 = 2x^2$, $x + y = x\sqrt{2}$.

Так как $2x + y = 24$, то $y = 24 - 2x$, значит, $x + 24 - 2x = x\sqrt{2}$,

$$24 = x(\sqrt{2} + 1), \text{ откуда } x = \frac{24}{\sqrt{2} + 1}.$$

Но $x = 2r$, тогда $r = \frac{12}{\sqrt{2} + 1} = 12(\sqrt{2} - 1)$, и $S_{\text{кр.}} = \pi r^2 = 144\pi(3 - 2\sqrt{2})$.

Ответ: $144\pi(3 - 2\sqrt{2})$.

9. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, где $AD = BC = 6$, $S_{ABCD} = 12$.

Проведем высоту DE . Пусть $DC = x$; $AE = y$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + DC) \cdot DE = 12, \text{ или } \frac{1}{2}(2y + x + x) \cdot 2r = 12,$$

$$(2x + 2y)r = 12, (x + y)r = 6, \text{ где } 2r = DE.$$

По свойству описанного четырехугольника $2AB = AB + DC$, или $12 = 2x + 2y$, или $x + y = 6$.

Так как $(x + y)r = 6$, то $6r = 6$, $r = 1$.

Значит, $S = \pi r^2 = \pi$.

Ответ: π .

10**. По условию $TM = KN$, $S_{TMNK} = 125$ и $EF = 8$ — расстояние между точками касания ее боковых сторон.

Пусть $EM = MA = m$, $TE = TB = n$, $EO = r$ — радиус вписанной окружности;

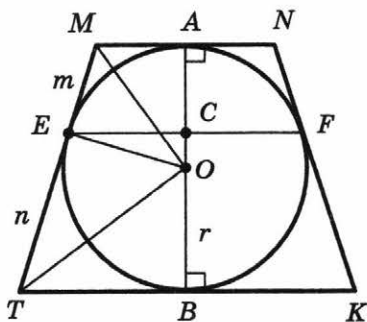
$$AB = 2r, EC = \frac{1}{2}EF = 4.$$

Из $\triangle EOC$ $OC = \sqrt{r^2 - 16}$, тогда $AC = AO - OC = r - \sqrt{r^2 - 16}$, $BC = BO + OC = r + \sqrt{r^2 - 16}$.

Следовательно, $ME : ET = AC : BC$, или $m : n = (r - \sqrt{r^2 - 16}) : (r + \sqrt{r^2 - 16})$.

Из $\triangle MOT$, где $\angle MOT = 90^\circ$ (MO и TO — биссектрисы углов TMN и MTK , где $\angle TMN + \angle MTK = 180^\circ$), имеем:

$$OE^2 = ME \cdot ET, \text{ или } mn = r^2.$$



По условию $S_{TMNK} = 125$, или $\frac{1}{2}(MN + TK) \cdot AB = 125$. Но $2MT = MN + TK$ (по свойству описанного четырехугольника), или $2(m + n) = MN + TK$, тогда $(m + n) \cdot 2r = 125$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} m : n = (r - \sqrt{r^2 - 16}) : (r + \sqrt{r^2 - 16}), \\ mn = r^2, \\ 2(m + n)r = 125. \end{cases}$$

Пусть для краткости $r - \sqrt{r^2 - 16} = \alpha$, $r + \sqrt{r^2 - 16} = \beta$, тогда $m = \frac{\alpha}{\beta} \cdot n$,

и II уравнение примет вид $\frac{\alpha}{\beta} n^2 = r^2$, следовательно, III уравнение преобразуется к виду

$$2\left(\frac{\alpha}{\beta} n + n\right)r = 125, \text{ или } 2nr\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) = 125.$$

$$\text{Но } \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot n = r, n = \frac{r}{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}}, \text{ значит, } 2r^2\left(\frac{\alpha}{\beta} + 1\right) = 125 \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Преобразуем $\frac{\alpha}{\beta} + 1$ и $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} + 1 &= \frac{r - \sqrt{r^2 - 16}}{r + \sqrt{r^2 - 16}} + 1 = \frac{2r}{r + \sqrt{r^2 - 16}}; \quad \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} = \frac{\sqrt{r^2 - r^2 + 16}}{r + \sqrt{r^2 - 16}} = \\ &= \frac{4}{r + \sqrt{r^2 - 16}}. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } 2r^2 \cdot \frac{2r}{r + \sqrt{r^2 - 16}} = 125 \cdot \frac{4}{r + \sqrt{r^2 - 16}}, \text{ или } r^3 = 125,$$

откуда $r = 5$.

$$\text{Тогда } S_{\text{кр.}} = \pi r^2 = 25\pi.$$

Ответ: 25π .

11*. $ABCD$ — равнобедренная трапеция ($AB = CD$), $MN = \frac{3}{\sqrt{2}}$ — сред-

няя линия трапеции и $AD = 2BC$.

Проведем высоту BE трапеции.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } BC = x, AE = y, \text{ тогда } MN &= \frac{1}{2}(BC + AD), \text{ или } \frac{1}{2}(x + (2y + x)) = \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}}, \text{ или } x + y = \frac{3}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

По условию $AD = 2BC$, или $x + 2y = 2x$, откуда $y = x$, тогда $2x = \frac{3}{\sqrt{2}}$,

$$x = \frac{3}{2\sqrt{2}}, y = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

По свойству описанного четырехугольника $2AB = BC + AD$, $2AB = 2(x + y)$, $AB = x + y = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Из } \triangle ABE \quad BE = 2r = \sqrt{AB^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{9}{2} - \frac{9}{8}} = 3\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{8}} = 3\sqrt{\frac{3}{8}} = \frac{3\sqrt{6}}{4},$$

$$r = \frac{3\sqrt{6}}{8}.$$

$$\text{Следовательно, } S = \pi r^2 = \pi \cdot \frac{9 \cdot 6}{64} = \frac{27}{32} \pi.$$

$$\text{Ответ: } \frac{27}{32} \pi.$$

12. Проведем высоту EK . Пусть $FE = x$, $EN = y$.

По условию $S_{MFEN} = 2 + \frac{4}{\sqrt{3}}$, или $\frac{2x+y}{2} \cdot FM = 2 + \frac{4}{\sqrt{3}}$, где $FM = 2r$,

$$\text{тогда } (2x + y)r = 2 + \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Из } \triangle EKN \quad y = 2r \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{2r}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{В } \triangle EKN \quad \angle KEN = 30^\circ \Rightarrow EN = 2KN = 2y.$$

По свойству описанного четырехугольника

$$2x + y = 2r + 2y, \text{ где } y = \frac{2r}{\sqrt{3}}, \text{ т. е. } (2r + 2y) \cdot r = 2 + \frac{4}{\sqrt{3}},$$

$$(r + y)r = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ или } \left(r + \frac{2r}{\sqrt{3}}\right)r = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)r^2 = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}, \text{ т. е.}$$

$$r^2 = 1, r = 1.$$

$$\text{Значит, } S_{\text{кр.}} = \pi r^2 = \pi.$$

Ответ: π .

13*. $KTL P$ — равнобедренная трапеция (по условию), где $TK = LP = 10$, $KP = 14$, $TL = 2$.

Из точки T проведем высоту TE и диагональ TP трапеции. Тогда

$$KE = \frac{1}{2}(KP - TL) = \frac{1}{2}(14 - 2) = 6. \text{ Из } \triangle KET \quad TE = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

$$S_{\triangle KTP} = \frac{1}{2} KP \cdot TE = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 8 = 56.$$

Заметим, что $KO = TO = OL = OP = R$ — радиус окружности, описанной около трапеции и $\triangle KTP$.

Известно, что $S_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$, где a, b, c — стороны, тогда $\frac{KT \cdot TP \cdot KP}{4R} = 56$.

Длину диагонали TP находим из $\triangle TEP$, где $TE = 8$, $EP = KP - KE = 14 - 6 = 8$, тогда $TP^2 = 8^2 + 8^2$, $TP = 8\sqrt{2}$. Имеем: $\frac{10 \cdot 8\sqrt{2} \cdot 14}{4R} = 56$,

откуда $R = 5\sqrt{2}$.

Значит, $S = \pi R^2 = 50\pi$.

Ответ: 50π .

14. $ABCD$ — равнобедренная трапеция, так как $AB = CD$ (по условию).

$AD = 10$, $BC = 8$, тогда $AE = \frac{1}{2}(AD - BC) = 1$. Проведем диагональ BD .

Заметим, что $ED = AD - AE = 10 - 1 = 9$.

Из $\triangle BED$ $BD = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$.

Из $\triangle ABE$ $AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}AD \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 3 = 15$.

С другой стороны, $S_{\triangle ABD} = \frac{AB \cdot BD \cdot AD}{4R} = \frac{\sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} \cdot 10}{4R} = \frac{75}{R}$

(см. № 13).

Значит, $\frac{75}{R} = 15$, $R = 5$, тогда $S_{кр.} = \pi R^2 = 25\pi$.

Ответ: 25π .

15. $ABCD$ — квадрат и $S_{ABCD} = 121$ (по условию). Пусть a — сторона квадрата, тогда $a = R\sqrt{2}$. Но $a^2 = 121$, т. е. $a = 11$.

Значит, $R\sqrt{2} = 11$, $R = \frac{11}{\sqrt{2}}$.

Следовательно, $S_{кр.} = \pi R^2 = \frac{121}{2}\pi = 60,5\pi$.

Ответ: $60,5\pi$.

16. $MNKT$ — квадрат. Пусть a — сторона квадрата, r — радиус вписанной окружности. Заметим, что $a = 2r$.

По условию $S_{MNKT} - S_{кр.} = 86$, или $a^2 - \pi r^2 = 86$, или $4r^2 - \pi r^2 = 86$, $r^2(4 - \pi) = 86$, $r^2 = \frac{86}{4 - \pi}$, тогда $S_{кр.} = \pi r^2 = \frac{86\pi}{4 - \pi}$.

Ответ: $\frac{86\pi}{4 - \pi}$.

17. Аналогично № 15 имеем:

$$a = R\sqrt{2}, \text{ тогда } \pi R^2 - 2R^2 = 456, R^2(\pi - 2) = 456, R^2 = \frac{456}{\pi - 2},$$

$$S_{\text{кр.}} = \frac{456\pi}{\pi - 2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{456\pi}{\pi - 2}.$$

$$18. \text{ Из } \triangle BMA \text{ получим } BA = \frac{MA}{\sin 60^\circ} = \frac{20 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{40}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Но } BA = 2R \text{ — диаметр описанной окружности, тогда } 2R = \frac{40}{\sqrt{3}},$$

$$R = \frac{20}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = \frac{400}{3} \pi.$$

$$\text{Ответ: } \frac{400}{3} \pi.$$

19*. Соединим точку M с центром окружности, тогда $MO = NO = KO = R$ — радиус описанной окружности. Пусть $OT = x$. По условию $\triangle MKN$ — равнобедренный, где высота KT — медиана и биссектриса. Тогда $MT = 7$, $KT = 24$ (по условию). Из $\triangle MKT$ $MK = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$.

Заметим, что $KT = R + x = 24$, а из $\triangle MOT$ $R^2 - x^2 = 49$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} R + x = 24, \\ R^2 - x^2 = 49, \end{cases} \quad \begin{cases} R + x = 24, \\ (R - x)(R + x) = 49, \end{cases} \quad \begin{cases} R + x = 24, \\ 24(R - x) = 49, \end{cases} \quad \begin{cases} R + x = 24, \\ R - x = \frac{49}{24}. \end{cases}$$

Складывая почленно уравнения полученной системы, имеем:

$$2R = 24 + \frac{49}{24}, 2R = \frac{625}{24}, \text{ откуда } R = \frac{625}{48}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = \left(\frac{625}{48}\right)^2 \pi \approx 169,5\pi.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{625}{48}\right)^2 \pi \approx 169,5\pi.$$

20. Соединим центр окружности с концами хорды KL . Так как $\angle KL = 120^\circ$, то $\angle KOL = 120^\circ$.

Проведем высоту OM $\triangle KOL$ ($OK = OL$), где OM — медиана и биссектриса.

В $\triangle KOM$ $\angle K = 30^\circ$, тогда $\cos 30^\circ = \frac{KM}{R}$, $R = \frac{KM}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}KL}{\sqrt{3}/2} = \frac{KL}{\sqrt{3}} =$
 $= \frac{3}{\sqrt{3}\pi}$. Значит, $S_{кр.} = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{9}{3\pi} = 3$.

Ответ: 3.

21. Соединим центр O с концами хорды EF . $OK \perp EF$, значит, высота OK является медианой и биссектрисой. По условию $EF = 3$, тогда $EK = 1,5$. Из $\triangle EOK$ $R^2 = 2^2 + 1,5^2 = 6,25$, значит, $S_{кр.} = \pi R^2 = 6,25\pi$.

Ответ: $6,25\pi$.

22. По условию $ABCD$ — квадрат, тогда $AB = a = R\sqrt{2}$, где $R = AO = BO = CO = DO$.

По условию $AB = \frac{4}{\sqrt{\pi}}$, т. е. $a = \frac{4}{\sqrt{\pi}} = R\sqrt{2}$, откуда $R = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}$, тогда
 $S_{кр.} = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{16}{2\pi} = 8$.

Ответ: 8.

23. Пусть в ромбе $MNLK$ $MK = x$, тогда $S_{MKLN} = MK \cdot MN \sin \angle M$, или $x^2 \cdot \sin 30^\circ = 40$, $x^2 = 80$, $x = 4\sqrt{5}$. Проведем высоту NE ромба, тогда $NE = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{2}x = 2\sqrt{5}$, где $NE = 2r$ — диаметр вписанной окружности. Значит, $2r = 2\sqrt{5}$, $r = \sqrt{5}$, т. е. $S_{кр.} = \pi r^2 = 5\pi$.

Ответ: 5π .

24. По условию $\triangle AEB$ — правильный.

Пусть $AB = a$, тогда $S_{\triangle ABE} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. По условию $S_{\triangle ABE} = 16\sqrt{3}$, т. е.
 $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}$, $a^2 = 64$, откуда $a = 8$.

Так как $ABCD$ — квадрат, то $a = R\sqrt{2}$, где R — радиус описанной окружности.

Значит, $R\sqrt{2} = 8$, $R = \frac{8}{\sqrt{2}}$, тогда $S = \pi R^2 = \pi \cdot \frac{64}{2} = 32\pi$.

Ответ: 32π .

ПЛОЩАДЬ КРУГА

Найдите площадь заштрихованной фигуры.

1. $\triangle AOB$ — равносторонний (по условию), где $OA = 12$, тогда

$$S_{\triangle AOB} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \text{ (площадь правильного треугольника со стороной } a).$$

$$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot \alpha, \text{ где } R = OA = 12 \text{ м, } \alpha = 60^\circ.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } S_{\text{ф.}} = S_{\text{сект.}} - S_{\triangle AOB} &= \frac{\pi \cdot 12^2}{360} \cdot 60 - \frac{12^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\pi \cdot 12^2}{6} - \\ &- \frac{12^2 \sqrt{3}}{4} = 24\pi - 36\sqrt{3} = 12(2\pi - 3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } 12(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

2. $OM = ON = 20$ и $MN = 12$ (по условию).

Проведем высоту OK , тогда OK — медиана и биссектриса.

$$S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot ON \sin \alpha = 200 \cdot \sin \alpha, \text{ где } \alpha = \angle MON.$$

$$\text{Из } \triangle MOK \text{ } OK = \sqrt{20^2 - 6^2} = \sqrt{364} = 2\sqrt{91}.$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\triangle MON} = \frac{1}{2} MN \cdot OK = 12\sqrt{91}.$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } 200 \sin \alpha &= 12\sqrt{91}, \sin \alpha = \frac{3\sqrt{91}}{50} \approx 0,5724, \text{ откуда} \\ \alpha &\approx 35^\circ. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } S_{\text{ф.}} = S_{\text{сект.}} - S_{\triangle MON} &= \frac{\pi \cdot 20^2}{360} \cdot 35 - 12\sqrt{91} = \frac{350\pi}{9} - 12\sqrt{91} \approx \\ &\approx 122,11 - 114,47 \approx 7,6. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \approx 7,6.$$

3. $S_{\text{ф.}} = S_{\text{сект.}} - S_{\triangle MON}$. Так как $\angle MN = 60^\circ$, то $\angle MON = 60^\circ$, тогда $\triangle MON$ — равносторонний.

$$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi \cdot 10^2}{360} \cdot 60 = \frac{50\pi}{3}; S_{\triangle MON} = \frac{10^2 \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}.$$

$$\text{Значит, } S_{\text{ф.}} = \frac{50\pi}{3} - 25\sqrt{3} \approx 52,33 - 43,30 \approx 9.$$

$$\text{Ответ: } \approx 9.$$

4. Из $\triangle OKF$, где $OK = 3$, $OF = 13$ и $\angle OKF = 90^\circ$, находим $KF = \sqrt{13^2 - 3^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$, тогда $EF = 2KF = 8\sqrt{10}$.

$$S_{\triangle EOF} = \frac{1}{2} EF \cdot OK = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{10} \cdot 3 = 12\sqrt{10}.$$

С другой стороны, $S_{\triangle EOF} = \frac{1}{2} OE \cdot OF \cdot \sin \alpha$, где $\alpha = \angle EOF$, или

$$12\sqrt{10} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 13 \cdot \sin \alpha, \text{ откуда } \sin \alpha = \frac{24\sqrt{10}}{169} \approx 0,4491, \text{ откуда } \alpha = \angle EOF \approx 153^\circ.$$

$$\text{Значит, } S_{\phi} = S_{\text{сект.}} - S_{\triangle EOF} = \frac{\pi \cdot 13^2}{180} \cdot 153 - 12\sqrt{10} \approx 451,1 - 37,9 = 413,2.$$

Ответ: $\approx 413,2$.

$$5. S_{\phi} = \pi \cdot 3,5^2 - \pi \cdot 1,5^2 = \pi(3,5^2 - 1,5^2) = 10\pi.$$

Ответ: 10π .

$$6. S_{\phi} = S_{\text{кр.}} - S_{\text{кв.}} = \pi \cdot OA^2 - S_{\text{кв.}}$$

$R = OA = 10$, $a = R\sqrt{2}$, где a — сторона квадрата, R — радиус описанной окружности, тогда $S_{\text{кв.}} = a^2 = (R\sqrt{2})^2 = 200$.

$$\text{Значит, } S_{\phi} = \pi \cdot 100 - 200 = 100(\pi - 2).$$

Ответ: $100(\pi - 2)$.

$$7. S_{\phi} = S_{\text{кр.}} - S_{\text{сект.}}; S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = \pi \cdot OB^2 = 64\pi.$$

$$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2}{360} \cdot 60^\circ = \frac{\pi \cdot 32}{3}, \text{ тогда } S_{\phi} = 64\pi - \frac{\pi \cdot 32}{3} = \frac{160\pi}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{160\pi}{3}.$$

$$8. S_{\phi} = S_{ABCD} - S_{\text{кр.}}; S_{ABCD} = AB^2 = 64.$$

$$S_{\text{кр.}} = \pi R^2, \text{ где } R = \frac{1}{2} AB = 4, \text{ тогда } S_{\phi} = 64 - 16\pi = 16(4 - \pi).$$

Ответ: $16(4 - \pi)$.

$$9. S_{\phi} = S_{MPKN} - S_{\text{кр.}} = 10 \cdot 20 - \pi R^2 = 200 - \pi \cdot \left(\frac{1}{2} PM\right)^2 =$$

$$= 200 - 25\pi = 25 \cdot (8 - \pi).$$

Ответ: $25(8 - \pi)$.

10*. Пусть $a = 15$ — сторона правильного треугольника, тогда

$$S_{\phi} = \frac{\pi a^2}{3} - \frac{a^2 \sqrt{3}}{2},$$

$$S_{\text{ф.}} = \frac{\pi \cdot 15^2}{3} - \frac{15^2 \sqrt{3}}{2} = \frac{15^2}{6} (2\pi - 3\sqrt{3}) = 37,5(2\pi - 3\sqrt{3}) =$$

$$= 75\pi - 112,5\sqrt{3} = 75(\pi - 1,5\sqrt{3}) \approx 75(3,14 - 2,60) \approx 40,5.$$

Ответ: $\approx 40,5$.

$$11^*. S_{\text{ф.}} = S_{\Delta ABC} - \frac{1}{2} S_{\text{кр.}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \pi R^2, \text{ где } a = AB = 16, R = 5, \text{ тогда}$$

$$S_{\text{ф.}} = \frac{16^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2} \pi \cdot 5^2 = 64\sqrt{3} - \frac{25}{2} \pi = \frac{1}{2} (128\sqrt{3} - 25\pi) \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} (221,7 - 78,5) \approx 182,5.$$

Ответ: $\approx 182,5$.

$$12^*. S_{\text{ф.}} = S_{MNKT} - \frac{1}{4} S_{\text{кр.}}$$

$$S_{MNKT} = a^2 = 12^2 = 144.$$

$$S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = \pi \cdot 12^2 = 144\pi, \text{ тогда } \frac{1}{4} S_{\text{кр.}} = \frac{1}{4} \cdot 144\pi = 36\pi.$$

$$\text{Значит, } S_{\text{ф.}} = 144 - 36\pi = 36(4 - \pi) \approx 31.$$

Ответ: $36(4 - \pi) \approx 31$.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Планиметрия

1. Углы

Углом называется геометрическая фигура (рис. 1), образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

Точка O — вершина угла, а лучи OA и OB — стороны угла.

Обозначение: $\angle AOB$ или $\angle ab$.

Угол в 90° называется **прямым** (рис. 2).

Угол, меньший прямого, называется **острым** (рис. 3).

Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется **тупым** (рис. 4).

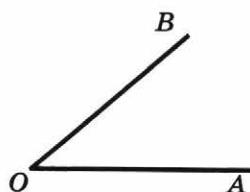


Рис. 1

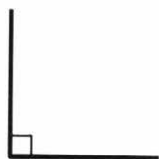


Рис. 2

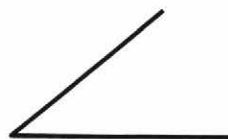


Рис. 3



Рис. 4

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого (рис. 5).

$\angle AOC$ и $\angle DOB$; $\angle BOC$ и $\angle AOD$ — вертикальные.

Вертикальные углы равны: $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle BOC = \angle AOD$.

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию (рис. 6), $\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные.

Сумма смежных углов равна 180° .

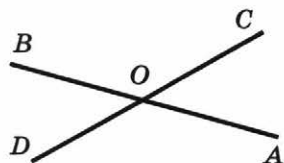


Рис. 5

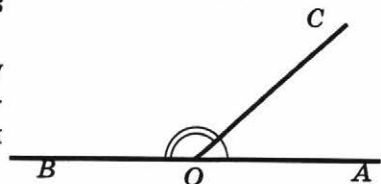


Рис. 6

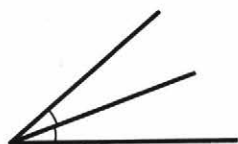


Рис. 7

Биссектрисой угла называется луч, проходящий между сторонами угла и делящий его пополам (рис. 7).

Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение друг друга (рис. 8).

Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (рис. 9).

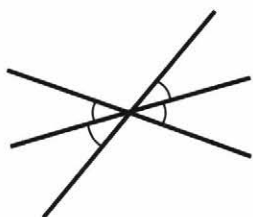


Рис. 8

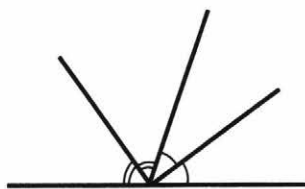


Рис. 9

При пересечении двух прямых a и b третьей c (секущей) образуется 8 углов (рис. 10):

соответственные углы:

$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 7$;

внутренние накрест лежащие:

$\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$;

внешние накрест лежащие:

$\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$;

внутренние односторонние:

$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$;

внешние односторонние:

$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$.

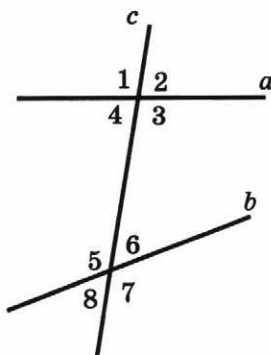


Рис. 10

2. Многоугольник

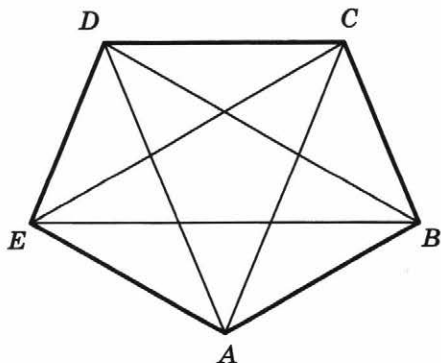


Рис. 11

$ABCDE$ — пятиугольник (рис. 11).

Точки A, B, C, D, E — вершины многоугольника; $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$ — углы; AB, BC, CD и т. д. — стороны; отрезки AC, AD, BE, BD, CE — диагонали; $P = AB + BC + \dots + EA$ — периметр многоугольника.

Многоугольник называется **выпуклым** (см. рис. 11), если он целиком расположен по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две

его соседние вершины. В противном случае многоугольник называется **невыпуклым** (рис. 12).

Свойства:

1. Сумма внутренних углов произвольного n -угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.

2. Сумма внешних углов выпуклого n -угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360° .

3. В выпуклом n -угольнике из каждой вершины можно провести $(n - 3)$ диагоналей, которые разбивают n -угольник на $(n - 2)$ треугольников.

4. В выпуклом n -угольнике число диагоналей равно $\frac{1}{2}n(n - 3)$.

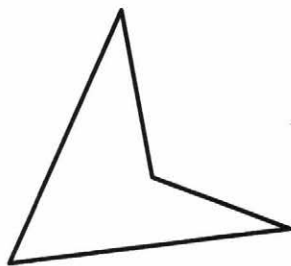


Рис. 12

3. Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник, у которого равны все углы и стороны, называется **правильным**.

Свойства:

1. Каждый угол правильного n -угольника равен $\alpha_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

2. Около правильного n -угольника можно описать окружность, и притом только одну.

3. В правильный n -угольник можно вписать окружность, и притом только одну.

4. Окружность, вписанная в правильный n -угольник, касается всех сторон n -угольника в их серединах.

5. Центр окружности, описанной около правильного n -угольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же n -угольник.

6. Длина стороны правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R , равна $a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$.

7. Длина стороны правильного n -угольника, описанного около окружности радиуса r , равна $a = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$.

4. Треугольник

Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, последовательно соединяющих эти точки.

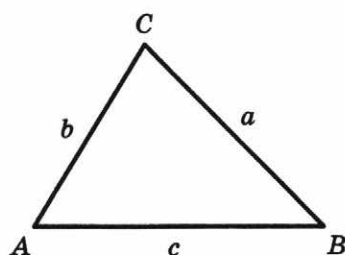


Рис. 13

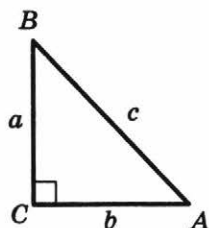


Рис. 14

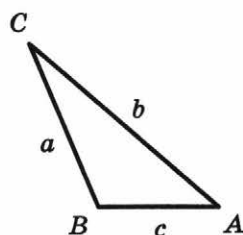


Рис. 15

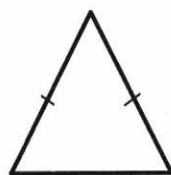


Рис. 16

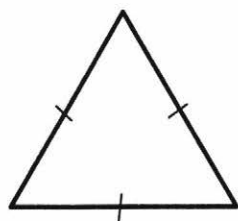


Рис. 17

Точки A, B, C — **вершины** $\triangle ABC$.

Отрезки AB, BC и AC — **стороны**, $\angle A, \angle B$ и $\angle C$ — **углы**.

Стороны треугольника часто обозначают малыми буквами (рис. 13):

$$AB = c, BC = a, AC = b.$$

$P = a + b + c$ — **периметр** треугольника.

Треугольник, у которого все углы острые, называется **остроугольным** (см. рис. 13).

Треугольник, у которого угол прямой, называется **прямоугольным** (рис. 14).

Стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** (a и b), а сторона, лежащая против прямого угла, — **гипотенузой** (c).

Треугольник с тупым углом называется **тупоугольным** (рис. 15).

Треугольник, у которого две стороны равны, называется **равнобедренным** (рис. 16).

Равные стороны называются **боковыми**, а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** (рис. 17).

Каждый угол равностороннего треугольника равен 60° .

Свойства равнобедренного треугольника:

1. Углы при основании равны.
2. Биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.
3. Высота, проведенная к основанию, является одновременно медианой и биссектрисой.

4. Медиана, проведенная к основанию, является одновременно высотой и биссектрисой.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника (рис. 18).

$\angle CBD$ — внешний угол треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (см. рис. 18): $\angle CBD = \angle A + \angle C$.

Отрезок, соединяющий середины двух сторон, называется **средней линией** треугольника (рис. 19).

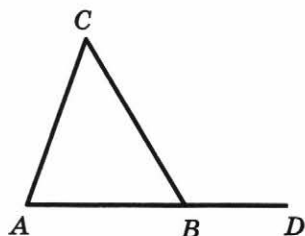


Рис. 18

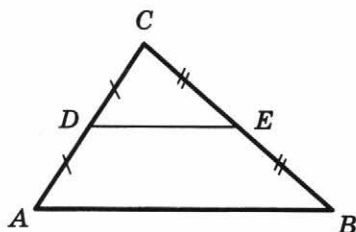


Рис. 19

5. Признаки равенства треугольников

I признак (*признак равенства по двум сторонам и углу между ними*)

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 20).

$AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

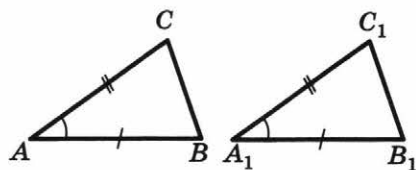


Рис. 20

II признак (*признак равенства по стороне и прилежащим к ней углам*)

Если сторона и два прилежащих угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 21).

$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

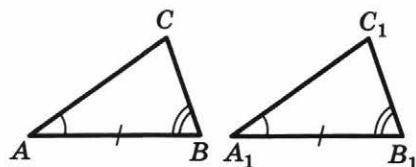


Рис. 21

III признак (*признак равенства по трем сторонам*)

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 22).

$AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$.

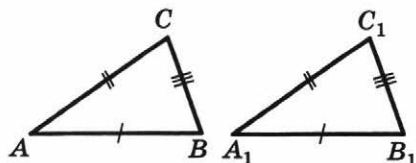


Рис. 22

6. Неравенства треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон:

$$a < b + c, b < a + c, c < a + b.$$

7. Определение вида треугольника по его сторонам

Пусть c — наибольшая сторона, тогда:

- а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;
- б) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный;
- в) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный.

8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства)

- 1) Сумма острых углов равна 90° (рис. 23).

$$\angle A + \angle B = 90^\circ.$$

- 2) Катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы (рис. 24).

$$a = \frac{1}{2}c.$$

- 3) Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° (см. рис. 24).

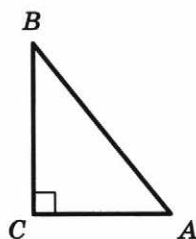


Рис. 23

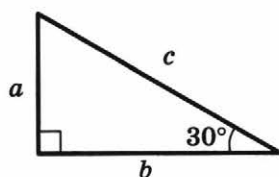


Рис. 24

9. Признаки равенства прямоугольных треугольников

1. Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны (рис. 25).

$$AC = A_1C_1, BC = B_1C_1.$$

2. Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны (рис. 26).

$$AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1.$$

3. Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника

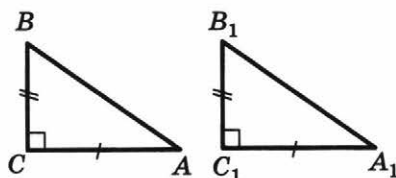


Рис. 25

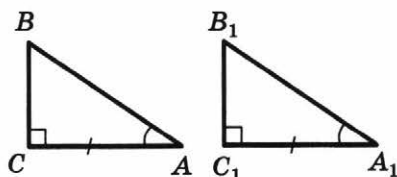


Рис. 26

соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны (рис. 27).

$$AB = A_1B_1, \angle A = \angle A_1.$$

4. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны (рис. 28).

$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1.$$

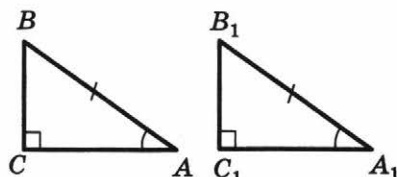


Рис. 27

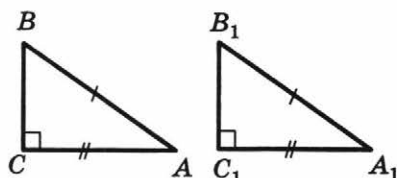


Рис. 28

10. Четыре замечательные точки треугольника

С каждым треугольником связаны 4 точки:

- 1) точка пересечения медиан;
- 2) точка пересечения биссектрис;
- 3) точка пересечения высот (или их продолжений);
- 4) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника**.

Высотой треугольника называется длина перпендикуляра, опущенного из любой его вершины на противоположащую сторону или ее продолжение.

В *тупоугольном треугольнике* (рис. 29) две высоты падают на продолжение сторон и лежат вне треугольника, а третья внутри.

В *остроугольном треугольнике* (рис. 30) все три высоты лежат внутри треугольника.

В *прямоугольном треугольнике* катеты одновременно служат и высотами (рис. 31).

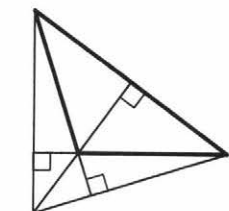


Рис. 29

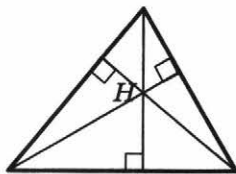


Рис. 30

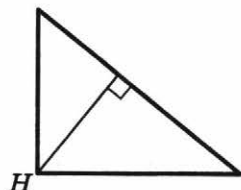


Рис. 31

Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой **ортоцентром**. В тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника. В прямоугольном треугольнике он совпадает с вершиной прямого угла.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

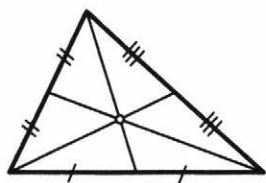


Рис. 32

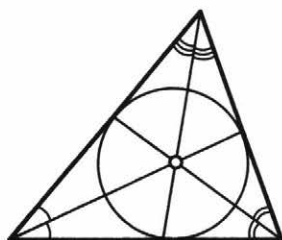


Рис. 33

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром тяжести** треугольника (рис. 32).

Эта точка делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (считая от соответствующей вершины).

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла от вершины до пересечения с противоположащей стороной.

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром вписанного круга** (рис. 33).

Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины (рис. 34, 35, 36), пересекаются в одной точке, которая является **центром описанной окружности**.

В тупоугольном треугольнике (рис. 34) эта точка лежит **вне** треугольника, в остроугольном (рис. 35) — **внутри**, в прямоугольном — **на середине гипотенузы**.

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной окружностей совпадают друг с другом только в **равностороннем** треугольнике.

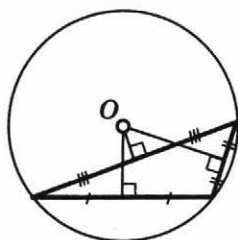


Рис. 34

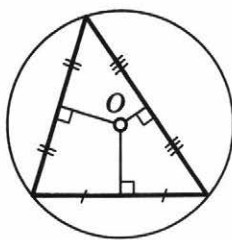


Рис. 35

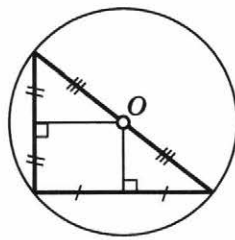


Рис. 36

11. Произвольный треугольник

1) **Свойство биссектрисы** (рис. 37) внутреннего угла треугольника:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

2) **Длина биссектрисы:**

$$l_c = \sqrt{ab - a_1b_1};$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

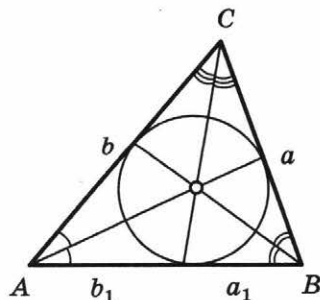


Рис. 37

3) Длина медианы:

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

4) Длина высоты:

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника,

$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр,

h_c — высота, проведенная к стороне c .

5) Зависимость между сторонами и высотами:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

6) Зависимость между высотами и радиусом вписанной окружности:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

12. Теорема Чевы

Для того чтобы прямые BE , AD и CF (рис. 38) пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

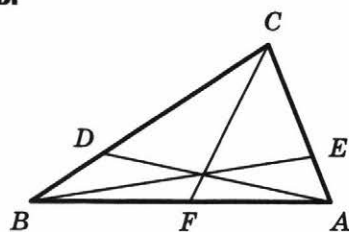


Рис. 38

13. Теорема Менелая

Если на сторонах BC , AB и продолжении стороны AC $\triangle ABC$ за точку C отмечены соответственно точки A_1 , C_1 и B_1 , лежащие на одной прямой, то

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

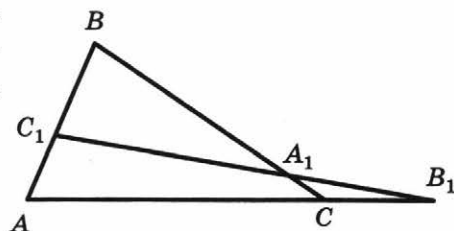


Рис. 39

14. Теорема синусов

Во всяком треугольнике стороны относятся как синусы противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

15. Теорема косинусов

Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

16. Площадь треугольника

$$1) S = \frac{1}{2} ah_a;$$

$$2) S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma;$$

$$3) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (формула Герона);}$$

$$4) S = p \cdot r, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a+b+c);$$

$$5) S = \frac{abc}{4R};$$

$$6) S = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha}.$$

17. Равносторонний (правильный) треугольник

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3};$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}; r = \frac{a}{2\sqrt{3}}; h = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

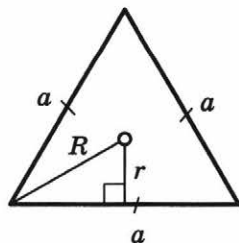


Рис. 40

18. Подобные треугольники

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого (рис. 41).

AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 — сходственные стороны.

Из подобия треугольников следует:

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1.$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

где k — коэффициент подобия.

Обозначение: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Если два треугольника подобны, то отношение их площадей равно k^2 , т. е. $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle A_1B_1C_1} = k^2$.

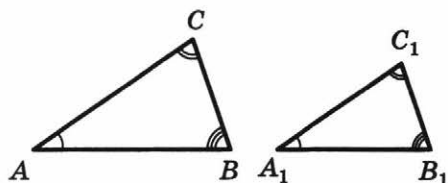


Рис. 41

19. Признаки подобия треугольников

I признак: если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны (рис. 42).

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1.$$

II признак: если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между ними, равны, то такие треугольники подобны (рис. 43).

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}, \angle A = \angle A_1.$$

III признак: если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны (рис. 44).

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

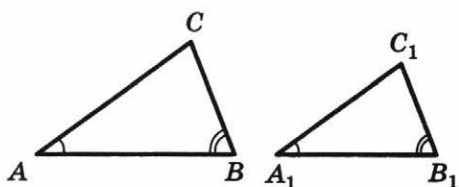


Рис. 42

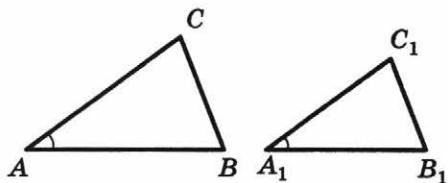


Рис. 43

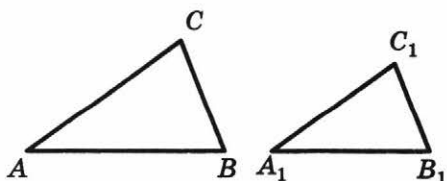


Рис. 44

Площади подобных фигур (в частности многоугольников) пропорциональны квадратам их сходственных сторон.

В частности площади кругов относятся как квадраты радиусов (или диаметров).

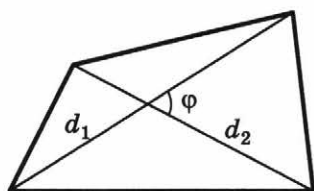


Рис. 45

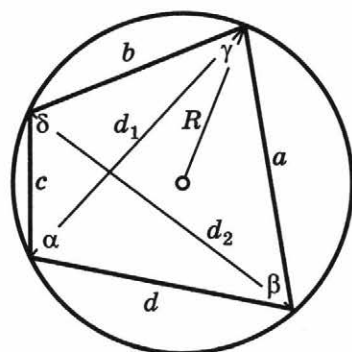


Рис. 46

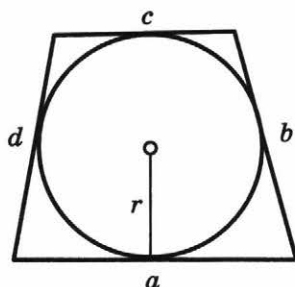


Рис. 47

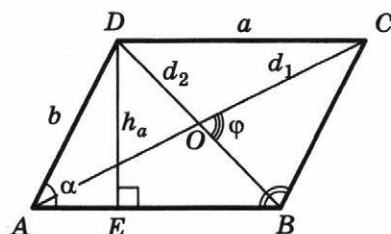


Рис. 48

20. Четырехугольник

1. Произвольный выпуклый (d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними) (рис. 45).

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

2. Вписанный (рис. 46).

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° . Верно и обратное.

$$ac + bd = d_1 d_2$$

(теорема Птолемея).

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

$$\text{где } p = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

3. Описанный.

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны (рис. 47).

$$a + c = b + d, \quad S = p \cdot r.$$

21. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 48).

$$AB \parallel DC, \quad AD \parallel BC$$

(a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a).

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ — зависимость между сторонами и диагоналями;

$S = a \cdot h_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$ — площадь параллелограмма.

Некоторые свойства:

1. В параллелограмме противоположные стороны и углы равны ($AB = DC$; $AD = BC$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$).

2. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам ($AO = OC$; $BO = OD$).

3. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180° ($\angle A + \angle B = 180^\circ$ и т. д.).

4. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника ($\triangle ADC = \triangle ABC$, $\triangle ABD = \triangle BCD$).

5. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник (рис. 49).

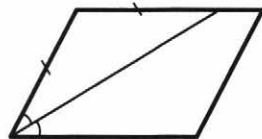


Рис. 49

Признаки параллелограмма (см. рис. 48)

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны ($AB = DC$, $AB \parallel DC$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны ($AB = DC$, $AD = BC$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

3. Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны ($\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$), то такой четырехугольник — параллелограмм.

4. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — параллелограмм.

22. Трапеция

a и b — основания; h — высота; d_1 и d_2 — диагонали; φ — угол между ними (рис. 50).

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две не параллельны.

$AB \parallel DC$, AB и DC — основания трапеции, AD и BC — боковые стороны.

Отрезок l , соединяющий середины боковых сторон, называется **средней линией трапеции**.

$l = \frac{1}{2}(a + b)$ — длина средней линии трапеции.

$$m \parallel a \parallel b, m = \frac{2ab}{a+b}.$$

$$\angle A + \angle D = 180^\circ; \angle B + \angle C = 180^\circ.$$

$$S = l \cdot h = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin \varphi \text{ — площадь трапеции.}$$

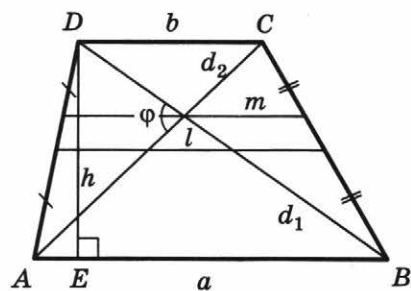


Рис. 50

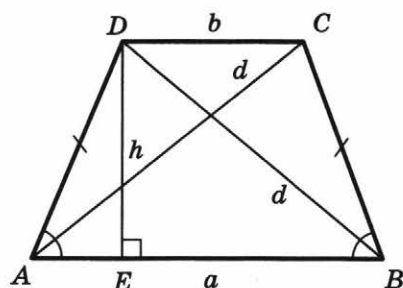


Рис. 51

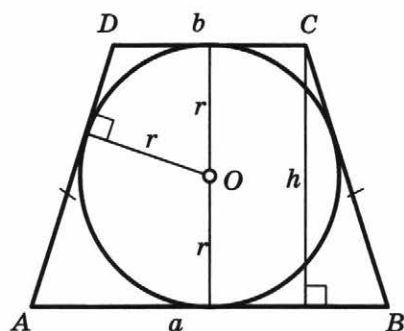


Рис. 52

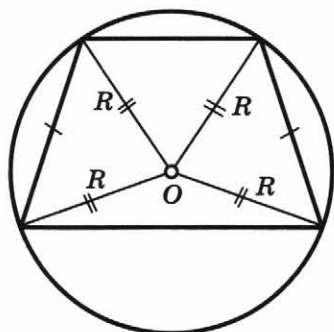


Рис. 53

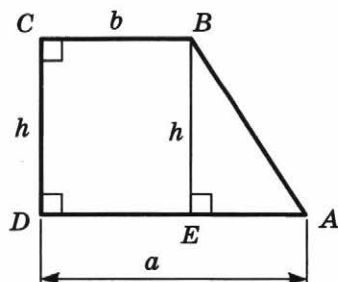


Рис. 54

1) Равнобедренная трапеция

Если у трапеции боковые стороны равны, то такая трапеция называется равнобедренной (рис. 51).

$$AD = BC.$$

В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны ($\angle A = \angle B$; $\angle C = \angle D$) и диагонали равны ($AC = BD$).

$$AE = \frac{1}{2} (a - b).$$

Если $AC \perp BD$, то $S = h^2$.

$$AB + CD = 2AD \text{ (рис. 52).}$$

$h = 2r$, r — радиус вписанной окружности; $h = \sqrt{ab}$.

R — радиус описанной окружности.

Точка O — центр окружности, описанной около любого треугольника, вершины которого совпадают с вершинами трапеции (рис. 53).

2) Прямоугольная трапеция

Если в трапеции один из углов прямой, то такая трапеция называется прямоугольной (рис. 54).

$$\angle D = \angle C = 90^\circ.$$

$$BE = CD = h \text{ (высота трапеции).}$$

$$AE = a - b.$$

23. Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 55).

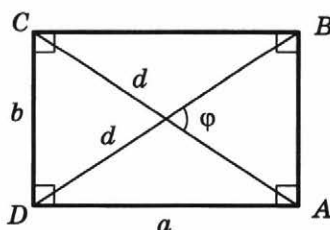


Рис. 55

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, у прямоугольника диагонали равны.

Стороны прямоугольника одновременно являются и высотами.

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi.$$

24. Ромб

Ромб называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 56).

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми его свойствами.

Кроме того, *диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.*

$$AC \perp BD.$$

AC — биссектриса углов A и C ; BD — биссектриса углов B и D .

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

$$S = a \cdot h_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \text{ — площадь ромба.}$$

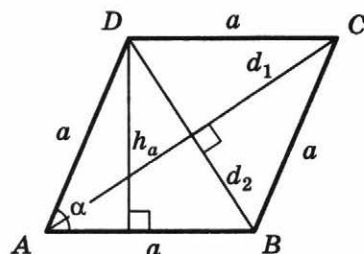


Рис. 56

25. Квадрат

Квадрат называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 57).

Можно сказать, что квадрат — это ромб с прямым углом.

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

Основные свойства

1. У квадрата все углы прямые.
2. У квадрата диагонали равны, взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

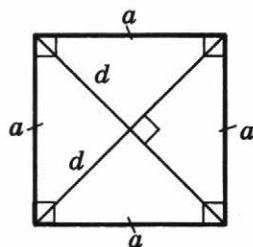


Рис. 57

26. Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра) (рис. 58).

Отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности, называется **радиусом**.

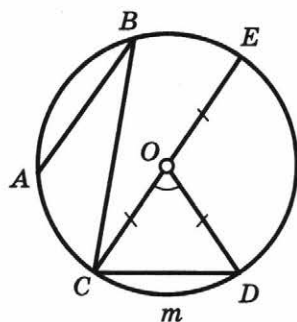


Рис. 58

Обозначение: r или R .

На рисунке $OC = OE = OD = R$.

Часть окружности (например CmD) называется **дугой**.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**, а хорда, проходящая через центр, — **диаметром**.

AB , BC , CD и CE — хорды окружности. CE — наибольшая из хорд — диаметр.

Обозначение: d или D .

$$D = 2R.$$

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом**.

Часть круга, ограниченная дугой (CmD) и стягивающей ее хордой (CD), называется **сегментом**.

Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, называется **сектором**.

Угол, образованный двумя радиусами, называется **центральный** ($\angle COD$ на рис. 58).

Угол, у которого вершина лежит на окружности, а стороны являются хордами, называется **вписанным** (например $\angle ABC$).

27. Свойства касательных к окружности

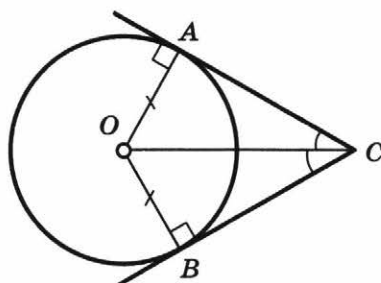


Рис. 59

Угол, образованный двумя касательными (CA и CB), исходящими из одной точки, называется **описанным** ($\angle ACB$ на рис. 59).

1. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.

2. Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.

28. Окружность и треугольник

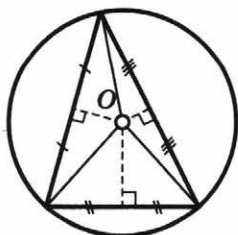


Рис. 60

1. Около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам через их середины (рис. 60).

2. Во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности является точка пересечения биссектрис (рис. 61).

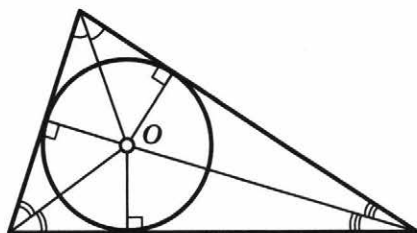


Рис. 61

29. Окружность и четырехугольник

1. Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов была равна 180° (рис. 62).

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

2. Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны (рис. 63).

$$a + c = b + d.$$

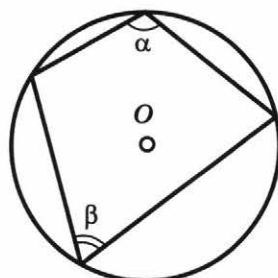


Рис. 62

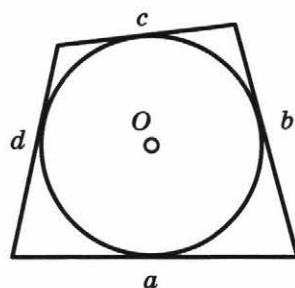


Рис. 63

30. Углы и окружность

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 64).

$$\angle AOB = \cup AmB.$$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 65).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AmC.$$

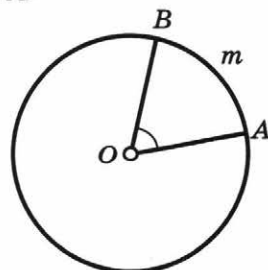


Рис. 64

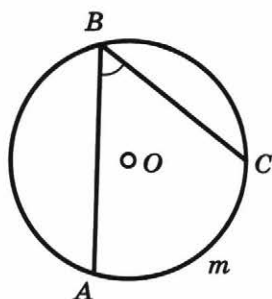


Рис. 65

Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной внутри него (рис. 66).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC.$$

Угол между двумя касательными измеряется полуразностью дуг (рис. 67).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup AnC).$$

Угол между двумя хордами измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается (рис. 68).

$$\angle AEC = \frac{1}{2} (\cup AmC + \cup BnD).$$

Угол между секущими измеряется полуразностью дуг между ними (рис. 69).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup EnD).$$

Угол между касательной и секущей измеряется полуразностью отсекаемых ими дуг, прилежащих к касательной (рис. 70).

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup CnD).$$

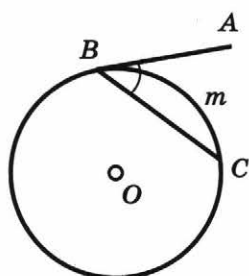


Рис. 66

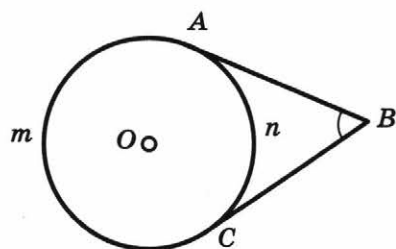


Рис. 67

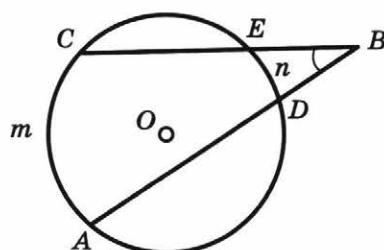


Рис. 69

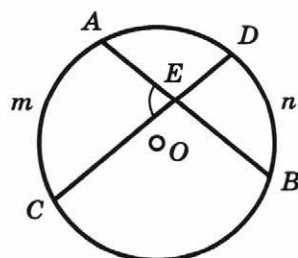


Рис. 68

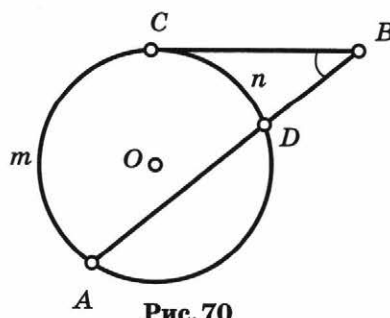


Рис. 70

31. Метрические соотношения в окружности

Если хорды AB и CD пересекаются в точке E , то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой (рис. 71).

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

Если из точки B к окружности проведены две секущие BDA и BEC , то

$$DB \cdot AB = EB \cdot CB \text{ (рис. 72).}$$

Если из точки B к окружности проведены секущая BDA и касательная BC , то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной (рис. 73).

$$AB \cdot DB = BC^2.$$

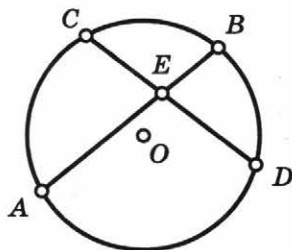


Рис. 71

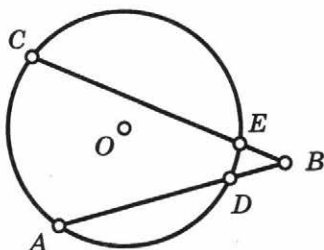


Рис. 72

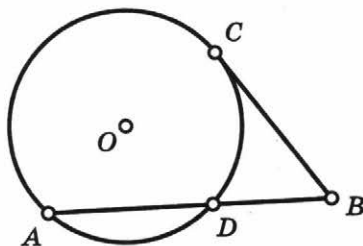


Рис. 73

32. Длина окружности. Площадь круга и его частей

$C = 2\pi R = \pi D$ — длина окружности;

$l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = R\alpha$ — длина дуги окружности;

$S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \frac{1}{4} \pi D^2 = \frac{1}{2} CR$ — площадь круга;

$\pi = \frac{C}{D} \approx 3,14$ — отношение длины окружности к ее диаметру;

ности к ее диаметру;

$S_{\text{сект.}} = \frac{\pi R^2 n}{360}$ — площадь сектора.

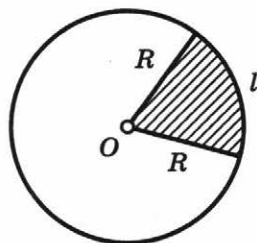


Рис. 74

33. Понятие вектора

Вектором называется направленный отрезок (рис. 75).

Всякий вектор характеризуется:

- 1) начальной точкой;
- 2) направлением;
- 3) длиной (модулем).

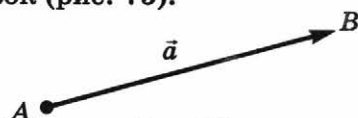


Рис. 75

Длиной (модулем) ненулевого вектора \overrightarrow{AB} называется длина отрезка AB и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$ или $|\vec{a}|$.

34. Равенство векторов

Если ненулевые векторы лежат на одной прямой или параллельных прямых, то они называются **коллинеарными** (рис. 76).

Коллинеарные векторы:

$$\vec{a}, \vec{m}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{KP}, \overrightarrow{AA} = \vec{0}.$$

Неколлинеарные векторы:

$$\overrightarrow{CD} \text{ и } \overrightarrow{ST}, \overrightarrow{KP} \text{ и } \overrightarrow{ST}.$$

Коллинеарные векторы называются **сонаправленными**, если они имеют одинаковые направления.

Например, $\vec{a} \uparrow \vec{m}$, $\vec{a} \uparrow \overrightarrow{KP}$,

$$\vec{m} \uparrow \overrightarrow{KP}.$$

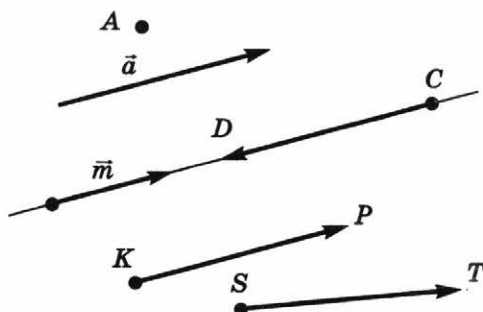


Рис. 76

Коллинеарные векторы называются **противоположно направленными**, если они имеют разные направления.

Например, \vec{a} и \overrightarrow{CD} , \vec{m} и \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{CD} и \overrightarrow{KP} .

Векторы называются **равными**, если они сонаправлены и их длины равны.

35. Координаты вектора

Пусть $A(x_1; y_1)$ — начало вектора \vec{a} , $B(x_2; y_2)$ — конец вектора \vec{a} (см. рис. 75).

Координатами вектора \vec{a} называют числа $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ и обозначают $\vec{a}(a_1; a_2)$.

Тогда абсолютная величина (модуль) вектора с координатами a_1, a_2 равна $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$.

Если векторы равны, то у них равны соответствующие координаты. И наоборот, если у векторов равны соответствующие координаты, то векторы равны.

36. Действия над векторами

1. Сумма двух векторов.

Каковы бы ни были точки A, B, C , имеет место векторное равенство (рис. 77):

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \quad (\text{правило треугольника}),$$

$$\text{или } \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}.$$

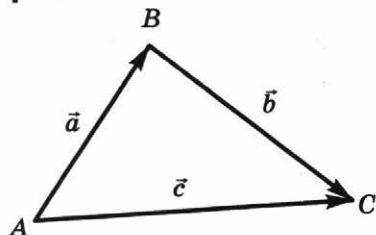


Рис. 77

2. Векторы складываются геометрически по правилу параллелограмма (рис. 78): сумма двух векторов \vec{a} и \vec{b} , имеющих общее начало, изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах.

3. Для векторов справедливы *переместительный* и *сочетательный* законы сложения:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{и} \quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

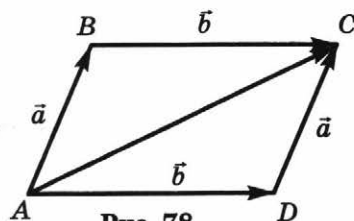


Рис. 78

4. Разностью векторов $\vec{a} (a_1; a_2)$ и $\vec{b} (b_1; b_2)$ называется такой вектор $\vec{c} (c_1; c_2)$, который в сумме с вектором \vec{b} дает вектор \vec{a} , т. е.

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{a} \quad (\text{рис. 79}).$$

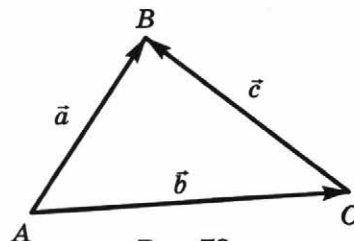


Рис. 79

5. Умножение вектора на число.

Произведением вектора $\vec{a} (a_1; a_2)$ на число k называется вектор $k\vec{a} (ka_1; ka_2)$.

Из определения следует, что:

- 1) произведение любого вектора на число ноль есть нулевой вектор;
- 2) для любого числа k и любого вектора \vec{a} векторы \vec{a} и $k\vec{a}$ коллинеарны.

Основные свойства умножения вектора на число:

- 1) $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ — сочетательный закон;
- 2) $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$ — I распределительный закон;
- 3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ — II распределительный закон.

37. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин (модулей) на косинус угла между ними (рис. 80).

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha.$$

- 1) Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\alpha = 90^\circ$, $\cos \alpha = 0$, тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Верно и обратное: если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

- 2) Если $\alpha < 90^\circ$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$; если $\alpha > 90^\circ$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

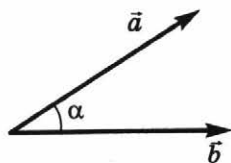


Рис. 80

38. Скалярное произведение в координатах

Если $\vec{a} \{x_1; y_1\}$, $\vec{b} \{x_2; y_2\}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Следствие 1. $\vec{a} \perp \vec{b}$ тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$.

Следствие 2. $\cos \alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$, где α — угол между ненулевыми векторами $\vec{a} \{x_1; y_1\}$, $\vec{b} \{x_2; y_2\}$.

39. Свойства скалярного произведения векторов

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$;
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный закон);
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (распределительный закон);
- 4) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ (сочетательный закон).

40. Уравнение окружности

Если центром окружности является начало координат (рис. 81), то уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

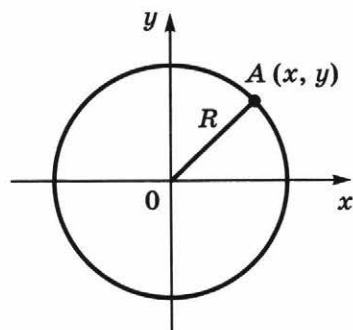


Рис. 81

Если центр окружности $M(x_0; y_0)$, то уравнение окружности имеет вид (рис. 82)

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

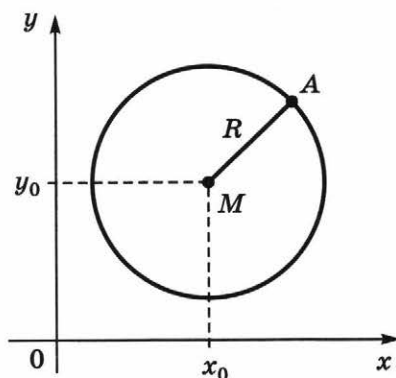


Рис. 82

41. Уравнение прямой

1) Любая прямая в декартовых координатах x и y задается уравнением вида $ax + by + c = 0$, где a и b — коэффициенты при неизвестных, c — свободный член.

2) Если $a = 0$, $b \neq 0$, то $y = -\frac{c}{b}$ — уравнение прямой, параллельной оси Ox (рис. 83).

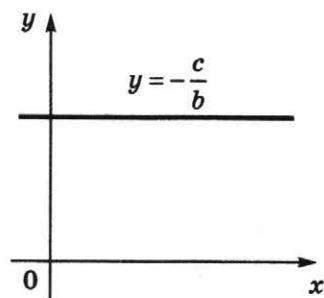


Рис. 83

3) Если $b = 0$, $a \neq 0$, то $x = -\frac{c}{a}$ — уравнение прямой, параллельной оси Oy (рис. 84).

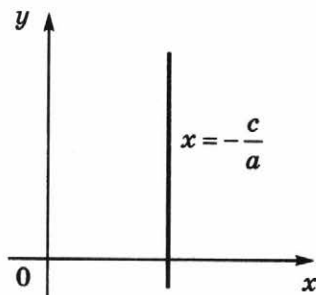


Рис. 84

4) Если $c = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $ax + by = 0$ — уравнение прямой, проходящей через начало координат $(0; 0)$ (рис. 85).

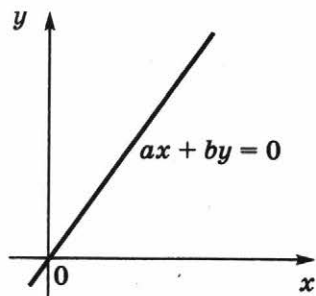
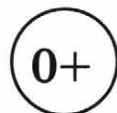


Рис. 85

Содержание

К таблице 1. Координаты вектора	3
К таблице 2. Простейшие задачи в координатах.....	5
К таблице 3. Применение метода координат к решению задач	9
К таблице 4. Уравнение окружности	12
К таблице 5. Уравнение прямой.....	15
К таблице 6. Решение треугольников. Площадь треугольника	18
К таблице 7. Решение треугольников. Теорема синусов	22
К таблице 8. Решение треугольников. Теорема косинусов	28
К таблице 9. Скалярное произведение векторов	35
К таблице 10. Длина окружности. Длина дуги.....	39
К таблице 11. Площадь круга.....	45
К таблице 12. Площадь круга.....	53
Краткие теоретические сведения	56
Планиметрия	56
1. Углы	56
2. Многоугольник.....	57
3. Правильные многоугольники	58
4. Треугольник	58
5. Признаки равенства треугольников	60
6. Неравенства треугольника	61
7. Определение вида треугольника по его сторонам.....	61
8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства)	61
9. Признаки равенства прямоугольных треугольников.....	61
10. Четыре замечательные точки треугольника.....	62
11. Произвольный треугольник.....	63
12. Теорема Чевы	64
13. Теорема Менелая	64
14. Теорема синусов.....	65
15. Теорема косинусов	65
16. Площадь треугольника	65
17. Равносторонний (правильный) треугольник (рис. 40)	65
18. Подобные треугольники.....	66
19. Признаки подобия треугольников	66
20. Четырехугольник.....	67
21. Параллелограмм	67
22. Трапеция	68
23. Прямоугольник	69
24. Ромб.....	70
25. Квадрат	70
26. Окружность.....	70

27. Свойства касательных к окружности	71
28. Окружность и треугольник	71
29. Окружность и четырехугольник	72
30. Углы и окружность	72
31. Метрические соотношения в окружности	74
32. Длина окружности. Площадь круга и его частей	74
33. Понятие вектора	75
34. Равенство векторов	75
35. Координаты вектора	75
36. Действия над векторами	76
37. Скалярное произведение векторов	76
38. Скалярное произведение в координатах	77
39. Свойства скалярного произведения векторов	77
40. Уравнение окружности	77
41. Уравнение прямой	77

ЕАС*Учебное издание***Балаян Эдуард Николаевич****ГЕОМЕТРИЯ****Решебник к книге Э.Н. Балаяна****ГЕОМЕТРИЯ***Задачи на готовых чертежах**для подготовки к ОГЭ и ЕГЭ (7–9 классы)***9 класс**

Ответственный редактор *С. Осташов*
 Технический редактор *Л. Багрянцева*

Формат 70 × 100/16. Бумага офсетная.
 Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45. Тираж 3000 экз.
 Заказ № 1039.

ООО «Феникс»

344011, Россия, Ростовская обл., г. Ростов-на-Дону, ул. Варфоломеева, 150

Сайт издательства: www.phoenixrostov.ruИнтернет-магазин: www.phoenixbooks.ru

Изготовлено в России. Дата изготовления: 12.2018.

Изготовитель: ООО «Чеховский печатник»

142300, Россия, Московская обл., Чеховский р-н, г. Чехов,
 ул. Полиграфистов, д. 1, корп. А, пом. 12, эт. 4