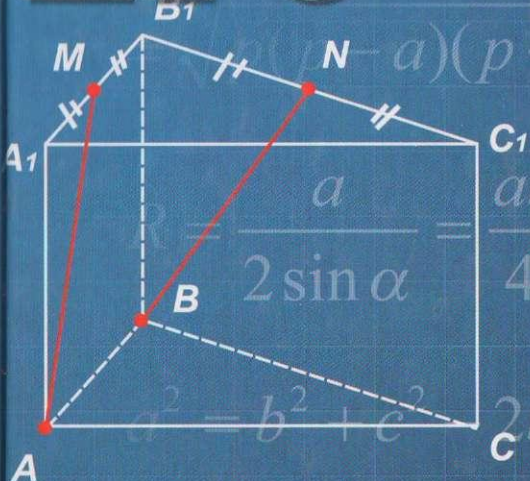


ЕГЭ



Большая переменная

Э.Н. БАЛАЯН

МАТЕМАТИКА

Задачи типа **С4**
Геометрия.
Планиметрия

- Краткая теория и справочные материалы
- Задачи с решениями
- Задачи для самостоятельного решения
- Ответы ко всем задачам

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Краткие теоретические сведения по курсу геометрии VII–IX классов	4
§ 1. Планиметрия	4
1.1. Углы	4
1.2. Многоугольник	6
1.3. Правильные многоугольники	7
1.4. Треугольник	8
1.5. Признаки равенства треугольников	10
1.6. Неравенства треугольника	12
1.7. Определение вида треугольника по его сторонам	12
1.8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства)	12
1.9. Признаки равенства прямоугольных треугольников	13
1.10. Четыре замечательные точки треугольника	14
1.11. Произвольный треугольник	16
1.12. Теорема Чевы	17
1.13. Теорема Менелая	17
1.14. Теорема синусов	18
1.15. Теорема косинусов	18
1.16. Площадь треугольника	18
1.17. Равносторонний (правильный) треугольник	19
1.18. Подобные треугольники	19
1.19. Признаки подобия треугольников	20
1.20. Четырехугольник	21
1.21. Параллелограмм	22
1.22. Трапеция	24
1.23. Прямоугольник	26
1.24. Ромб	26
1.25. Квадрат	27
1.26. Окружность	27
1.27. Свойства касательных к окружности	28

1.28. Окружность и треугольник	29
1.29. Окружность и четырехугольник	29
1.30. Углы и окружность	30
1.31. Метрические соотношения в окружности	32
1.32. Длина окружности. Площадь круга и его частей ..	33
Глава 2. Тренировочные задачи	34
§ 2. Задачи с решениями	34
2.1. Треугольники	34
2.2. Четырехугольники	151
§ 3. Задачи для самостоятельного решения	194
Ответы	205
Литература	206

Учебное издание

Балаян Эдуард Николаевич

МАТЕМАТИКА

Задачи типа С4

Геометрия. Планиметрия

Ответственный редактор *С. Осташов*
Технический редактор *Л. Багрянцева*

Сдано в набор 15.04.2013. Подписано в печать 11.07.2013.
Формат 84 × 108 1/32. Бумага тип № 2.
Гарнитура SchoolBookC. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 11,76. Тираж 2500 экз.
Заказ № 579.

ООО «Феникс»

344082, г. Ростов-на-Дону, пер. Халтуринский, 80.
Сайт издательства www.phoenixrostov.ru
Интернет-магазин www.phoenixbooks.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов в ЗАО «Книга»
344019, г. Ростов-на-Дону, ул. Советская, 57.

Большая перемена

Э.Н. Балаян

МАТЕМАТИКА

Задачи типа С4

Геометрия. Планиметрия

- *Краткая теория и справочные материалы*
- *Задачи с решениями*
- *Задачи для самостоятельного решения*
- *Ответы ко всем задачам*

Ростов-на-Дону

Феникс

2014

УДК 373.167.1:51

ББК 22.1я721

КТК 444

Б20

Балаян Э.Н.

Б20 Математика. Задачи типа С4. Геометрия. Планиметрия / Э.Н. Балаян. — Ростов н/Д: Феникс, 2014. — 208 с. : ил. — (Большая перемена).

ISBN 978-5-222-21435-0

Пособие ориентировано на качественную подготовку учащихся общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, колледжей к успешной сдаче экзамена по математике.

В данном пособии представлен разнообразный материал для подготовки к решению задач С4. Для удобства пользования книгой приводятся краткие теоретические сведения и справочные материалы по курсу планиметрии.

Все задачи снабжены подробными решениями и обоснованиями, а в конце пособия даны задачи для самостоятельного решения и ответы к ним. Авторские задачи отмечены значком (А).

Пособие адресовано учащимся старших классов для подготовки к ЕГЭ, учителям математики, слушателям подготовительных отделений вузов, студентам — будущим учителям математики и репетиторам.

УДК 373.167.1:51

ISBN 978-5-222-21435-0

ББК 22.1я721

© Балаян Э.Н., 2013

© Оформление, ООО «Феникс», 2013

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга посвящена задачам типа С4 по теме «Геометрия. Планиметрия».

В книге рассматриваются подробные решения задач на вписанные и описанные окружности, связанные с треугольниками и четырехугольниками, способы нахождения различных элементов геометрических фигур — высот, медиан, биссектрис, радиусов вписанных и описанных окружностей. Применяется также метод сравнения площадей, удвоение медианы и т. п.

Отметим, что приступать к решению задач, соответствующих по уровню сложности типу С4, целесообразно при условии, что ученик в основном уже владеет навыками решения задач школьного курса математики.

Также автор настоятельно рекомендует использовать вышедшие в 2013 г. в издательстве «Феникс» книги «Геометрия. Задачи на готовых чертежах для подготовки к ГИА и ЕГЭ. 7–9 классы» и «Геометрия. Сборник задач по планиметрии для подготовки к ГИА, ЕГЭ и олимпиадам».

Глава 1

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО КУРСУ ГЕОМЕТРИИ VII–IX КЛАССОВ

§ 1. Планиметрия

1.1. Углы

Углом называется геометрическая фигура (рис. 1), образованная двумя лучами, исходящими из одной точки.

Точка O — вершина угла, а лучи OA и OB — стороны угла.

Обозначение: $\angle AOB$ или $\angle ab$.

Угол в 90° называется **прямым** (рис. 2).

Угол, меньший прямого, называется **острым** (рис. 3).

Угол, больший прямого, но меньший развернутого, называется **тупым** (рис. 4).

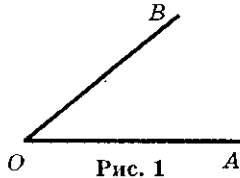


Рис. 1

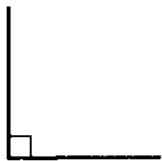


Рис. 2



Рис. 3

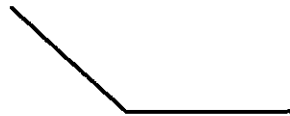


Рис. 4

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого (рис. 5).

$\angle AOC$ и $\angle DOB$; $\angle BOC$ и $\angle AOD$ — вертикальные.

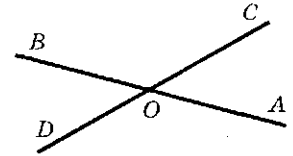


Рис. 5

Вертикальные углы равны: $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle BOC = \angle AOD$.

Два угла называются **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие составляют прямую линию (рис. 6), $\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные.

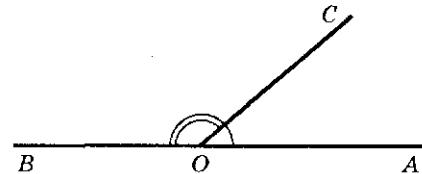


Рис. 6

Сумма смежных углов равна 180° .

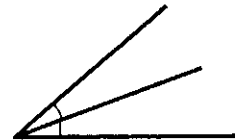


Рис. 7

Биссектрисой угла называется луч, проходящий между сторонами угла и делящий его пополам (рис. 7).

Биссектрисы вертикальных углов составляют продолжение друг друга (рис. 8).

Биссектрисы смежных углов взаимно перпендикулярны (рис. 9).

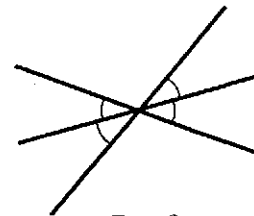


Рис. 8

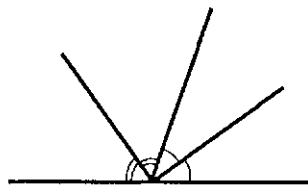


Рис. 9

При пересечении двух прямых a и b третьей c (секущей) образуется 8 углов (рис. 10):

- соответственные углы:
 $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 7$;
- внутренние накрест лежащие:
 $\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$;
- внешние накрест лежащие:
 $\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$;
- внутренние односторонние:
 $\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$;
- внешние односторонние:
 $\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$.

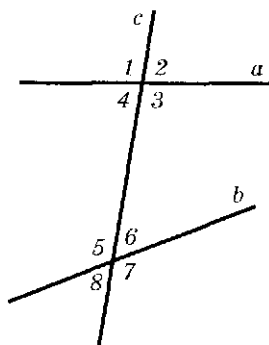


Рис. 10

1.2. Многоугольник

$ABCDE$ — пятиугольник (рис. 11).

Точки A, B, C, D, E — вершины многоугольника; $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \angle E$ — углы многоугольника; AB, BC, CD и т. д. — стороны многоугольника; отрезки AC, AD, BE, BD, CE — диагонали; $P = AB + BC + \dots + EA$ — периметр многоугольника.

Многоугольник называется **выпуклым** (рис. 11), если он целиком расположен по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины. В противном случае многоугольник называется **невыпуклым** (рис. 12).

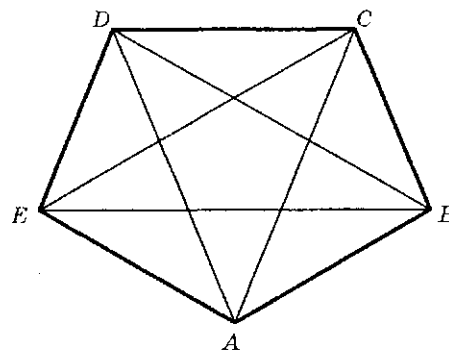


Рис. 11

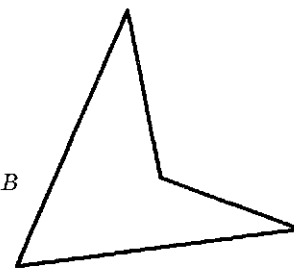


Рис. 12

Свойства:

1. Сумма внутренних углов произвольного n -угольника равна $180^\circ \cdot (n - 2)$.
2. Сумма внешних углов выпуклого n -угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360° .
3. В выпуклом n -угольнике из каждой вершины можно провести $(n - 3)$ диагоналей, которые разбивают n -угольник на $(n - 2)$ треугольников.
4. В выпуклом n -угольнике число диагоналей равно $\frac{1}{2}n(n - 3)$.

1.3. Правильные многоугольники

Выпуклый многоугольник, у которого равны все углы и все стороны, называется **правильным**.

Свойства:

1. Каждый угол правильного n -угольника равен

$$\alpha_n = \frac{180^\circ(n - 2)}{n}.$$

2. Около правильного n -угольника можно описать окружность, и притом только одну.

3. В правильный n -угольник можно вписать окружность, и притом только одну.
4. Окружность, вписанная в правильный n -угольник, касается всех сторон n -угольника в их серединах.
5. Центр окружности, описанной около правильного n -угольника, совпадает с центром окружности, вписанной в тот же n -угольник.
6. Длина стороны правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса R , равна

$$a = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

7. Длина стороны правильного n -угольника, описанного около окружности радиуса r ,

$$a = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}.$$

1.4. Треугольник

Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, последовательно соединяющих эти точки.

Точки A, B, C — **вершины** $\triangle ABC$.

Отрезки AB, BC и AC — **стороны**, $\angle A, \angle B$ и $\angle C$ — **углы**.

Стороны треугольника часто обозначают малыми буквами (рис. 13):

$$AB = c, \quad BC = a, \quad AC = b.$$

$P = a + b + c$ — **периметр** треугольника.

Треугольник, у которого все углы острые, называется **остроугольным** (рис. 13).

Треугольник, у которого угол прямой, называется **прямоугольным** (рис. 14).

Стороны, образующие прямой угол, называются **катетами** (a и b), а сторона, лежащая против прямого угла, называется **гипотенузой** (c).

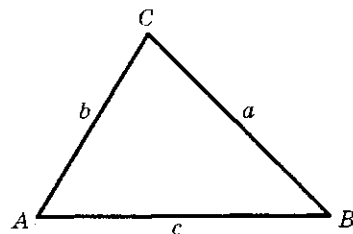


Рис. 13

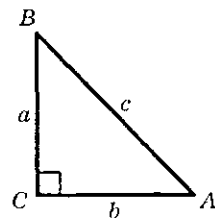


Рис. 14

Треугольник с тупым углом называется **тупоугольным** (рис. 15).

Треугольник, у которого две стороны равны, называется **равнобедренным** (рис. 16).

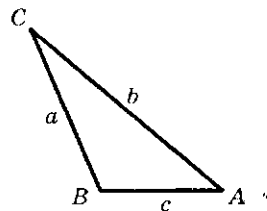


Рис. 15

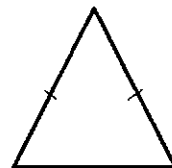


Рис. 16

Равные стороны называются **боковыми**, а третья сторона — **основанием** равнобедренного треугольника.

Треугольник, у которого все стороны равны, называется **равносторонним** (рис. 17).

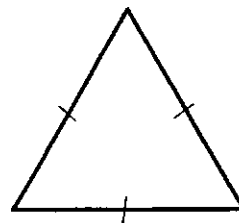


Рис. 17

Каждый угол равностороннего треугольника равен 60° .

Свойства равнобедренного треугольника:

1. Углы при основании равны.
2. Биссектриса, проведенная к основанию, является одновременно медианой и высотой.
3. Высота, проведенная к основанию, является одновременно медианой и биссектрисой.
4. Медиана, проведенная к основанию, является одновременно высотой и биссектрисой.

Внешним углом треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника (рис. 18).

$\angle CBD$ — внешний угол треугольника.

Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним (рис. 18):

$$\angle CBD = \angle A + \angle C.$$

Отрезок, соединяющий середины двух сторон, называется **средней линией** треугольника (рис. 19).

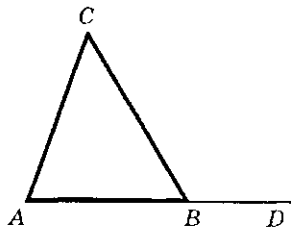


Рис. 18

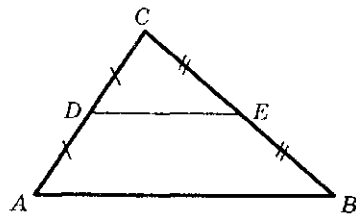


Рис. 19

1.5. Признаки равенства треугольников

I признак (признак равенства по двум сторонам и углу между ними):

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 20).

$$AB = A_1B_1, \quad AC = A_1C_1, \quad \angle A = \angle A_1.$$

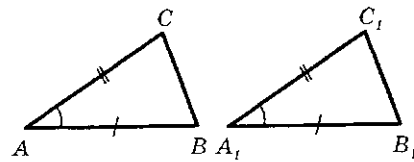


Рис. 20

II признак (признак равенства по стороне и прилежащим к ней углам):

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 21).

$$AB = A_1B_1, \quad \angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1.$$

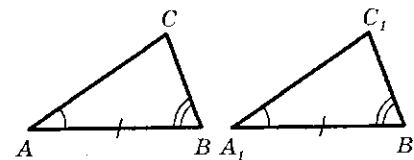


Рис. 21

III признак (признак равенства по трем сторонам):

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рис. 22).

$$AB = A_1B_1, \quad BC = B_1C_1, \quad AC = A_1C_1.$$

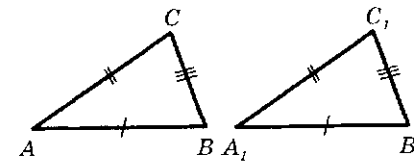


Рис. 22

1.6. Неравенства треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон:

$$a < b + c, \quad b < a + c, \quad c < a + b.$$

1.7. Определение вида треугольника по его сторонам

Пусть c — наибольшая сторона, тогда:

- а) если $c^2 < a^2 + b^2$, то треугольник остроугольный;
- б) если $c^2 > a^2 + b^2$, то треугольник тупоугольный;
- в) если $c^2 = a^2 + b^2$, то треугольник прямоугольный.

1.8. Прямоугольные треугольники (некоторые свойства)

- Сумма острых углов равна 90° (рис. 23).
 $\angle A + \angle B = 90^\circ$.
- Катет, лежащий против угла в 30° , равен половине гипотенузы (рис. 24).
 $a = \frac{1}{2}c$.
- Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30° (рис. 24).

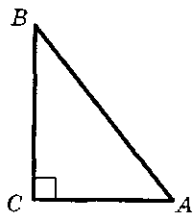


Рис. 23

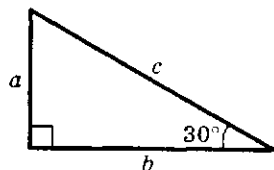


Рис. 24

1.9. Признаки равенства прямоугольных треугольников

- Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны (рис. 25).

$$AC = A_1C_1, \quad BC = B_1C_1.$$

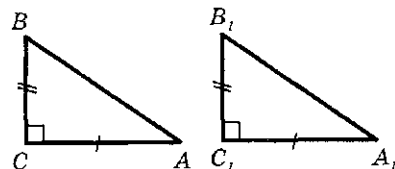


Рис. 25

- Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему углу другого, то такие треугольники равны (рис. 26).

$$AC = A_1C_1, \quad \angle A = \angle A_1.$$

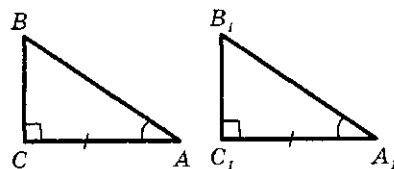


Рис. 26

- Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны (рис. 27).

$$AB = A_1B_1, \quad \angle A = \angle A_1.$$

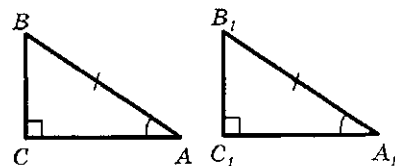


Рис. 27

4. Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны (рис. 28).

$$AB = A_1B_1, \quad AC = A_1C_1.$$

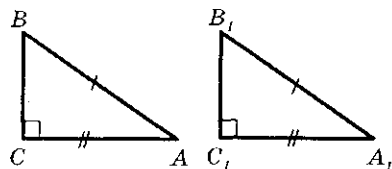


Рис. 28

1.10. Четыре замечательные точки треугольника

С каждым треугольником связаны 4 точки:

- 1) точка пересечения медиан;
- 2) точка пересечения биссектрис;
- 3) точка пересечения высот (или их продолжений);
- 4) точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам.

Эти четыре точки называются **замечательными точками треугольника**.

Высотой треугольника называется длина перпендикуляра, опущенного из любой его вершины на противоположащую сторону или на ее продолжение.

В *тупоугольном треугольнике* (рис. 29) две высоты падают на продолжение сторон и лежат вне треугольника, а третья внутри треугольника.

В *остроугольном треугольнике* (рис. 30) все три высоты лежат внутри треугольника.

В *прямоугольном треугольнике* катеты одновременно служат и высотами (рис. 31).

Три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке, называемой **ортоцентром**. В тупоугольном треугольнике ортоцентр лежит вне треугольника. В пря-

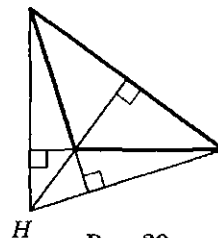


Рис. 29

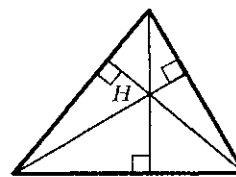


Рис. 30

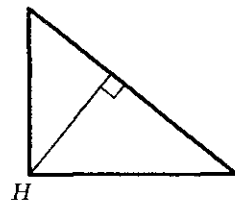


Рис. 31

моугольном треугольнике он совпадает с вершиной прямого угла.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром тяжести треугольника** (рис. 32).

Эта точка делит каждую медиану в отношении 2 : 1 (считая от соответствующей вершины).

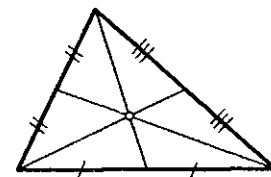


Рис. 32

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла от вершины до пересечения с противоположащей стороной.

Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является **центром вписанного круга** (рис. 33).

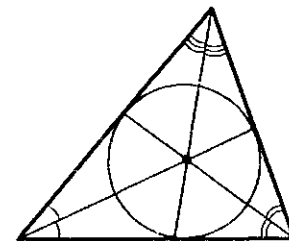


Рис. 33

Три перпендикуляра к сторонам треугольника, проведенные через их середины (рис. 34–36), пересекаются в одной точке, которая является **центром описанной окружности**.

В тупоугольном треугольнике (рис. 34) эта точка лежит вне треугольника, в остроугольном (рис. 35) — **внутри**, в прямоугольном — **на середине гипотенузы**.

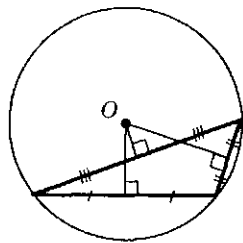


Рис. 34

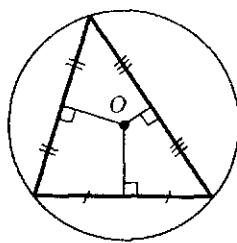


Рис. 35

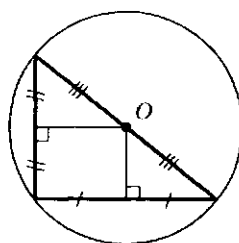


Рис. 36

Ортоцентр, центр тяжести, центр вписанной и описанной окружностей совпадают друг с другом только в равностороннем треугольнике.

1.11. Произвольный треугольник

- 1) Свойство биссектрисы (рис. 37) внутреннего угла треугольника:

$$\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}.$$

- 2) Длина биссектрисы:

$$l_c = \sqrt{ab - a_1b_1};$$

$$l_c = \frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

- 3) Длина медианы:

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

- 4) Длина высоты:

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — стороны треугольника,

$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр,

h_c — высота, проведенная к стороне c .

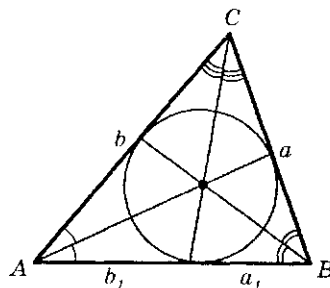


Рис. 37

- 5) Зависимость между сторонами и высотами:

$$h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

- 6) Зависимость между высотами и радиусом вписанной окружности:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

1.12. Теорема Чевы

Для того чтобы прямые BE , AD и CF (рис. 38) пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{AE} \cdot \frac{AF}{BF} = 1.$$

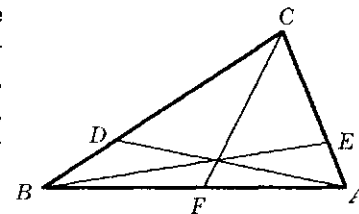


Рис. 38

1.13. Теорема Менелая

Если на сторонах BC , AB и продолжении стороны AC $\triangle ABC$ за точку C отмечены соответственно точки A_1 , C_1 и B_1 , лежащие на одной прямой, то

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1.$$

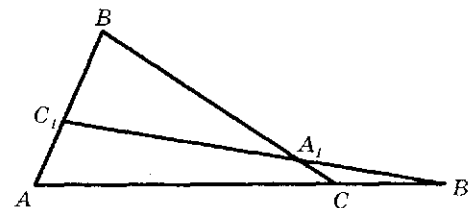


Рис. 39

1.14. Теорема синусов

Во всяком треугольнике стороны относятся как синусы противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника.

1.15. Теорема косинусов

Квадрат одной из сторон треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta, \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma. \end{aligned}$$

1.16. Площадь треугольника

- 1) $S = \frac{1}{2} ah_a$; 2) $S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$;
- 3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (формула Герона);
- 4) $S = p \cdot r$, где $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$;
- 5) $S = \frac{abc}{4R}$;
- 6) $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$.

1.17. Равносторонний (правильный) треугольник (рис. 40)

$$\begin{aligned} S &= \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}; \quad a = R\sqrt{3} = 2r\sqrt{3}; \\ R &= \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}}; \quad h = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

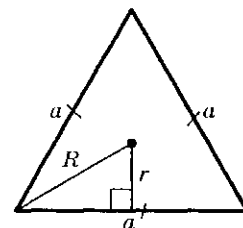


Рис. 40

1.18. Подобные треугольники

Два треугольника называются **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого (рис. 41).

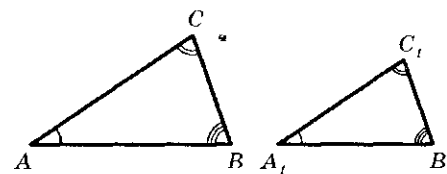


Рис. 41

AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , AC и A_1C_1 — сходственные стороны.

Из подобия треугольников следует:

$$\angle A = \angle A_1, \quad \angle B = \angle B_1, \quad \angle C = \angle C_1.$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k,$$

где k — коэффициент подобия.

Обозначение: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$.

Если два треугольника подобны, то отношение их площадей равно k^2 , т. е. $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle A_1B_1C_1} = k^2$.

1.19. Признаки подобия треугольников

I признак. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны (рис. 42).

$$\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1.$$

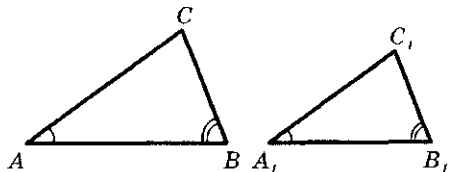


Рис. 42

II признак. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, заключенные между ними, равны, то такие треугольники подобны (рис. 43).

$$\angle A = \angle A_1, \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

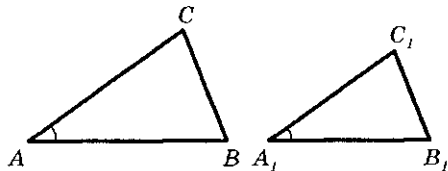


Рис. 43

III признак. Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобны (рис. 44).

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

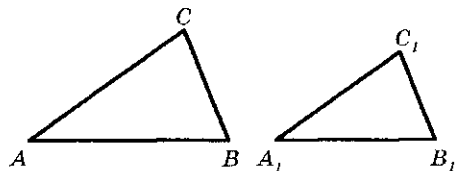


Рис. 44

Площади подобных фигур (в частности, многоугольников) пропорциональны квадратам их сходственных сторон.

В частности, площади кругов относятся как квадраты радиусов (или диаметров).

1.20. Четырехугольник

1. Произвольный выпуклый (d_1 и d_2 — диагонали, φ — угол между ними) (рис. 45).

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi.$$

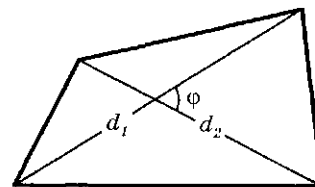


Рис. 45

2. Вписанный (рис. 46).

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$

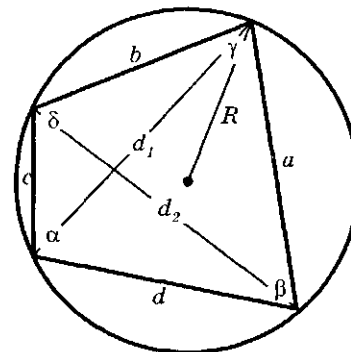


Рис. 46

В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180° . Верно и обратное.

$$ac + bd = d_1 d_2 \text{ (теорема Птолемея).}$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

$$\text{где } p = \frac{1}{2}(a+b+c+d).$$

3. Описанный.

В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны (рис. 47).

$$a + c = b + d, \quad S = p \cdot r.$$

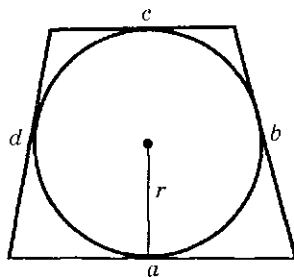


Рис. 47

1.21. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны (рис. 48).

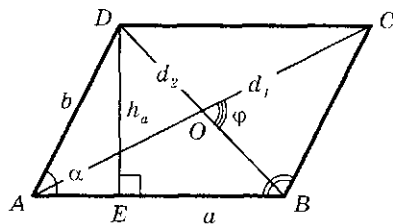


Рис. 48

$$AB \parallel DC, AD \parallel BC$$

(a и b — смежные стороны; α — угол между ними; h_a — высота, проведенная к стороне a).

$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$ — зависимость между сторонами и диагоналями;

$S = a \cdot h_a = ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$ — площадь параллелограмма.

Некоторые свойства:

1. В параллелограмме противоположные стороны и углы равны ($AB = DC$; $AD = BC$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$).
2. Диагонали параллелограмма в точке пересечения делятся пополам ($AO = OC$; $BO = OD$).
3. Сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180° ($\angle A + \angle B = 180^\circ$ и т. д.).
4. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника ($\triangle ADC = \triangle ABC$, $\triangle ABD = \triangle BCD$).
5. Биссектриса угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник (рис. 49).

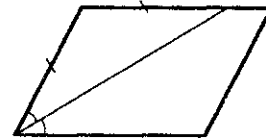


Рис. 49

Признаки параллелограмма (рис. 48)

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны ($AB = DC$, $AB \parallel DC$), то такой четырехугольник — параллелограмм.
2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны ($AB = DC$, $AD = BC$), то такой четырехугольник — параллелограмм.
3. Если в четырехугольнике противоположные углы попарно равны ($\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$), то такой четырехугольник — параллелограмм.
4. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник — параллелограмм.

1.22. Трапеция

a и b — основания;
 h — высота; d_1 и d_2 —
 диагонали; φ — угол
 между ними (рис. 50).

Трапецией называется
 четырехугольник, у которого
 две стороны параллельны, а
 две не параллельны.

$AB \parallel DC$, AB и DC —
 основания трапеции, AD и BC —
 боковые стороны.

Отрезок l , соединяющий
 середины боковых сторон,
 называется **средней линией**
 трапеции.

$l = \frac{1}{2}(a + b)$ — длина
 средней линии трапеции.

$$m \parallel a \parallel b, m = \frac{2ab}{a+b}.$$

$$\angle A + \angle D = 180^\circ; \angle B + \angle C = 180^\circ.$$

$S = l \cdot h = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin \varphi$ — площадь
 трапеции.

1. Равнобедренная трапеция.

Если у трапеции боковые
 стороны равны, то такая
 трапеция называется **равнобедренной** (рис. 51).

$$AD = BC.$$

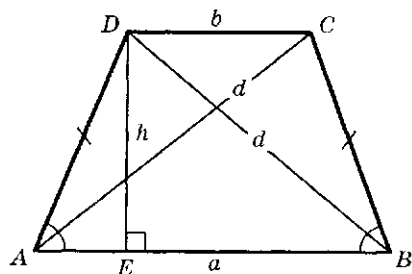


Рис. 51

В равнобедренной трапеции углы при основаниях равны ($\angle A = \angle B$; $\angle C = \angle D$) и диагонали равны ($AC = BD$).

$$AE = \frac{1}{2}(a - b).$$

Если $AC \perp BD$, то $S = h^2$.

$AB + CD = 2AD$ (рис. 52).

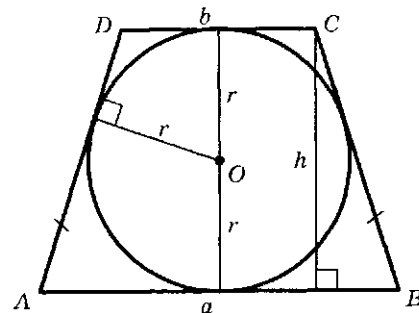


Рис. 52

$h = 2r$, r — радиус вписанной окружности; $h = \sqrt{ab}$.

R — радиус описанной окружности.

Точка O — центр окружности, описанной около
 любого треугольника, вершины которого совпадают с
 вершинами трапеции (рис. 53).

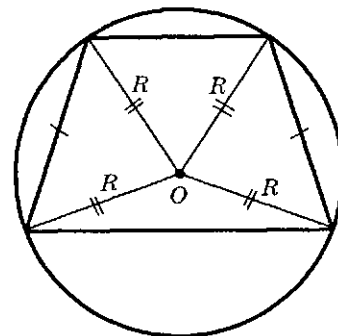


Рис. 53

2. Прямоугольная трапеция.

Если в трапеции один из углов прямой, то такая трапеция называется **прямоугольной** (рис. 54).

$$\angle D = \angle C = 90^\circ.$$

$BE = CD = h$ (высота трапеции).

$$AE = a - b.$$

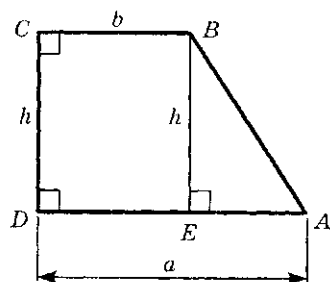


Рис. 54

1.23. Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 55).

Прямоугольник обладает всеми свойствами параллелограмма. Кроме того, у прямоугольника диагонали равны.

Стороны прямоугольника одновременно являются и высотами.

$$d^2 = a^2 + b^2.$$

$$S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi.$$

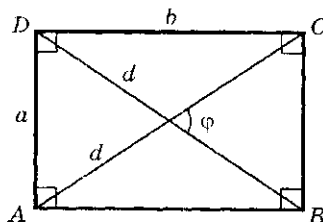


Рис. 55

1.24. Ромб

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 56).

Так как ромб является параллелограммом, то он обладает всеми его свойствами.

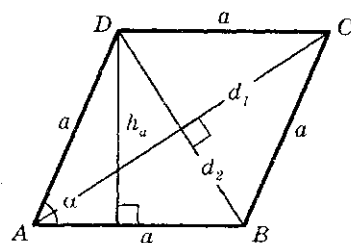


Рис. 56

Кроме того, **диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.**

$$AC \perp BD.$$

AC — биссектриса углов A и C ; BD — биссектриса углов B и D .

$$d_1^2 + d_2^2 = 4a^2.$$

$$S = a \cdot h_a = a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \text{ — площадь ромба.}$$

1.25. Квадрат

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 57).

Можно сказать, что квадрат — это ромб с прямым углом.

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба.

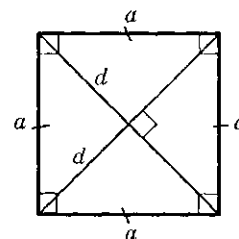


Рис. 57

Основные свойства

1. У квадрата все углы прямые.
2. У квадрата диагонали равны, взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

1.26. Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от одной ее точки (центра) (рис. 58).

Отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности, называется **радиусом**.

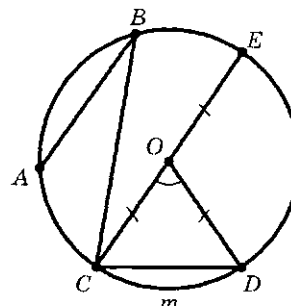


Рис. 58

Обозначение: r или R .

На рис. 58 $OC = OE = OD = R$.

Часть окружности (например, CmD) называется дугой.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой, а хорда, проходящая через центр, называется диаметром.

AB , BC , CD и CE — хорды окружности. CE — наибольшая из хорд — диаметр.

Обозначение: d или D .

$$D = 2R.$$

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется кругом.

Часть круга, ограниченная дугой (CmD) и стягивающей ее хордой (CD), называется сегментом.

Часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, называется сектором.

Угол, образованный двумя радиусами, называется центральным ($\angle COD$ на рис. 58).

Угол, у которого вершина лежит на окружности, а стороны являются хордами, называется вписанным (например, $\angle ABC$).

1.27. Свойства касательных к окружности

Угол, образованный двумя касательными (CA и CB), исходящими из одной точки, называется описанным ($\angle ACB$ на рис. 59).

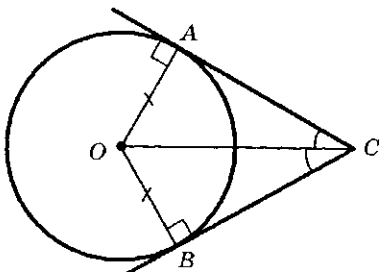


Рис. 59

1. Радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной.
2. Две касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны, и центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними.

1.28. Окружность и треугольник

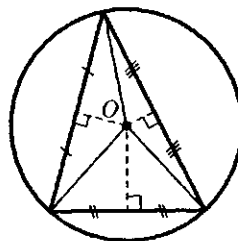


Рис. 60

1. Около всякого треугольника можно описать окружность; центром окружности является точка пересечения перпендикуляров, проведенных к сторонам через их середины (рис. 60).

2. Во всякий треугольник можно вписать окружность; центром окружности является точка пересечения биссектрис (рис. 61).

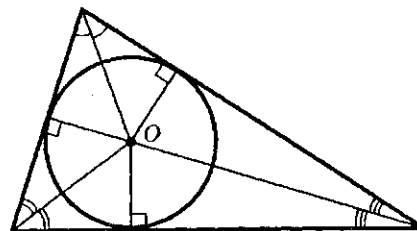


Рис. 61

1.29. Окружность и четырехугольник

1. Для того чтобы около четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов была равна 180° (рис. 62).

$$\alpha + \beta = 180^\circ.$$

2. Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны (рис. 63).

$$a + c = b + d.$$

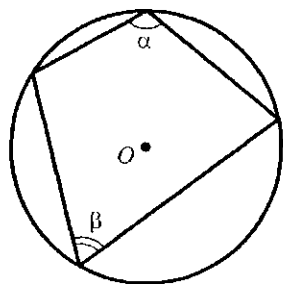


Рис. 62

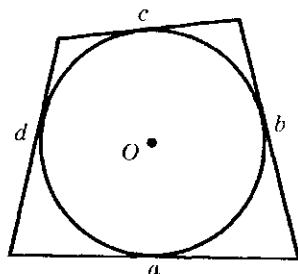


Рис. 63

1.30. Углы и окружность

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается (рис. 64):

$$\angle AOB = \cup AmB.$$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается (рис. 65):

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AmC.$$

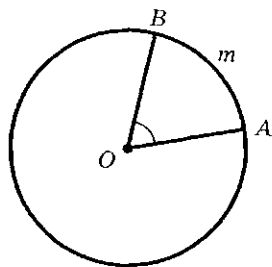


Рис. 64

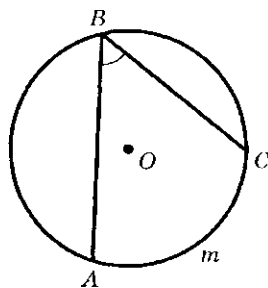


Рис. 65

Угол между хордой и касательной измеряется половиной дуги, заключенной внутри него (рис. 66):

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup BmC.$$

Угол между двумя касательными измеряется полуразностью дуг (рис. 67):

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup AnC).$$

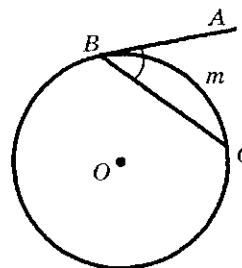


Рис. 66

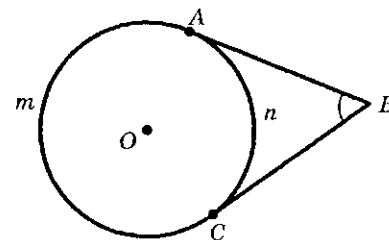


Рис. 67

Угол между двумя хордами измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается (рис. 68):

$$\angle AEC = \frac{1}{2} (\cup AmC + \cup BnD).$$

Угол между секущими измеряется полуразностью дуг между ними (рис. 69):

$$\angle ABC = \frac{1}{2} (\cup AmC - \cup EnD).$$

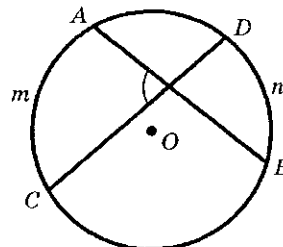


Рис. 68

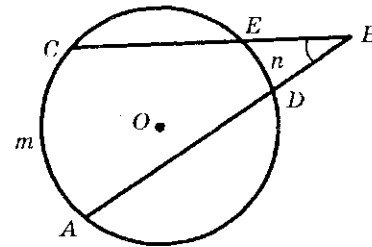


Рис. 69

Угол между касательной и секущей измеряется полуразностью отсекаемых ими дуг, прилежащих к касательной (рис. 70):

$$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AmC - \cup CnD).$$

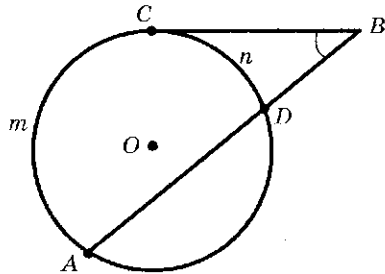


Рис. 70

1.31. Метрические соотношения в окружности

Если хорды AB и CD пересекаются в точке E, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой (рис. 71):

$$AE \cdot EB = CE \cdot ED.$$

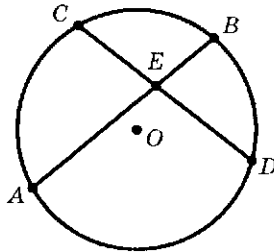


Рис. 71

Если из точки B к окружности проведены две секущие BDA и BEC, то

$$DB \cdot AB = EB \cdot CB \text{ (рис. 72).}$$

Если из точки B к окружности проведены секущая BDA и касательная BC, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной (рис. 73):

$$AB \cdot DB = BC^2.$$

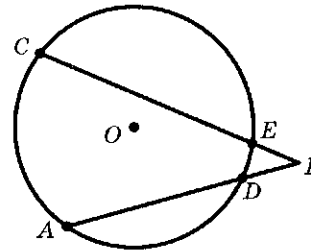


Рис. 72

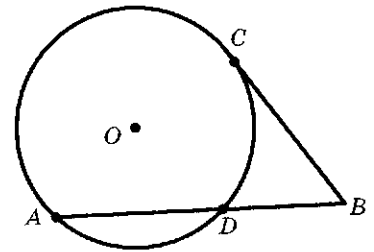


Рис. 73

1.32. Длина окружности. Площадь круга и его частей

$C = 2\pi R = \pi D$ — длина окружности;

$$l = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ} = R\alpha \text{ — длина дуги}$$

окружности;

$$S_{\text{кр.}} = \pi R^2 = \frac{1}{4}\pi D^2 = \frac{1}{2}CR \text{ —}$$

площадь круга;

$$\pi = \frac{C}{D} \approx 3,14 \text{ — отношение}$$

длины окружности к ее диаметру.

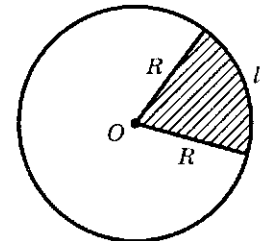


Рис. 74

Глава 2

| ТРЕНИРОВОЧНЫЕ ЗАДАЧИ

§ 2. Задачи с решениями

2.1. Треугольники

Пример 1(А). Известно, что в $\triangle ABC$ $\angle A = 2\angle C$, сторона BC на 2 см больше AB , а $AC = 5$ см. Найти AB и BC .

Решение.

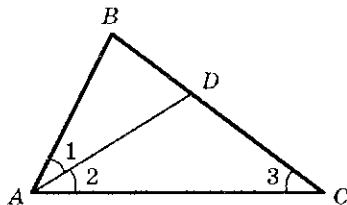
I способ

Проведем биссектрису AD угла A , тогда $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$.

В $\triangle ADC$ углы при основании равны, т. е. $\angle 2 = \angle 3$ и $AD = DC$.

Пусть $AB = x$, $AD = DC = y$, тогда $BC = x + 2$, $BD = x + 2 - y$.

Заметим, что $\triangle ABD \sim \triangle ABC$ по двум углам ($\angle B$ — общий, $\angle 1 = \angle 3$).



Из подобия имеем

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}, \text{ или } \frac{x}{x+2} = \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}.$$

Итак, для нахождения x и y имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{x+2} = \frac{y}{5}, \\ \frac{x+2-y}{x} = \frac{y}{5}; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x = xy + 2y, \\ 5x + 10 - 5y = xy, \end{cases}$$

откуда, вычитая из первого уравнения второе, получим

$$5y - 10 = 2y, \quad 3y = 10, \quad y = \frac{10}{3},$$

$$\text{тогда } 5x = \frac{10}{3}x + \frac{20}{3},$$

$$15x - 10x = 20,$$

$$5x = 20,$$

$$x = 4.$$

Итак, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

Ответ: $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

II способ

Пусть $\angle C = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$ и $\angle B = 180^\circ - 3\alpha$.

Полагая $AB = x$, $BC = x + 2$, по теореме синусов имеем

$$\frac{x}{\sin \alpha} = \frac{x+2}{\sin 2\alpha} = \frac{5}{\sin(180^\circ - 3\alpha)},$$

$$\text{или } \begin{cases} \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{x+2}{\sin 2\alpha}, \\ \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{x}{\sin 3\alpha}. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим

$$\frac{x+2}{x} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}, \text{ или } 1 + \frac{2}{x} = 2 \cos \alpha. \quad (1)$$

Из второго уравнения системы получим

$$x = \frac{5 \sin \alpha}{\sin 3\alpha}.$$

Так как $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$, то $x = \frac{5}{3 - 4 \sin^2 \alpha}.$

Подставив значение x в (1), получим уравнение

$$1 + \frac{6 - 8 \sin^2 \alpha}{5} = 2 \cos \alpha,$$

$$\text{или } 5 + 6 - 8(1 - \cos 2\alpha) = 10 \cos \alpha,$$

$$\text{или } 8 \cos^2 \alpha - 10 \cos \alpha + 3 = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно $\cos \alpha$, находим

$$\cos \alpha = \frac{3}{4}, \cos \alpha = \frac{1}{2}.$$

Если $\cos \alpha = \frac{3}{4}$, то, учитывая (1), находим $x = 4$.

Если $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, то получим $1 + \frac{2}{x} = 1$, что невоз-

можно.

Итак, $AB = 4$ см, тогда $BC = x + 2 = 6$ (см).

Замечание. Если $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, то $\alpha = 60^\circ$, тогда $\angle C = 60^\circ$, $\angle A = 120^\circ$, что не может быть.

Ответ: $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

III способ

(начало см. способ II)

Так как $1 + \frac{2}{x} = 2 \cos \alpha$, то $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 = 4 \cos^2 \alpha$, или

$$\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 = 4(1 - \sin^2 \alpha) = 4 - 4 \sin^2 \alpha.$$

Кроме того, $x = \frac{5}{3 - 4 \sin^2 \alpha}$, откуда $4 \sin^2 \alpha = 3 - \frac{5}{x}$.

Следовательно, $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 = 4 - \left(3 - \frac{5}{x}\right)$, или

$$\left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 = 1 + \frac{5}{x}.$$

Далее замена $\frac{1}{x} = t, t > 0, (1 + 2t)^2 = 1 + 5t$, или

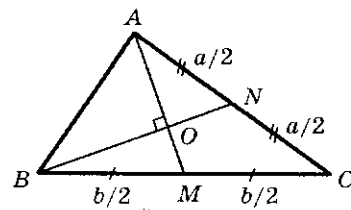
$$4t^2 - 1 = 0, t = \frac{1}{4}, \text{ т. е. } x = 4 \text{ и т. д.}$$

Ответ: $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

Пример 2. Стороны $\triangle ABC$ равны соответственно $AC = a, BC = b$, а медианы AM и BN взаимно перпендикулярны. Найти длину третьей стороны AB .

Решение.

I способ



Используя теорему косинусов для $\triangle AMC, \triangle BCN$ и $\triangle AOB$, имеем

$$AM^2 = a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab \cos \angle C, \quad (1)$$

$$BN^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2 - ab \cos \angle C, \quad (2)$$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C. \quad (3)$$

Так как по условию задачи $AM \perp BN$, то из $\triangle BOA$ имеем

$$AB^2 = AO^2 + BO^2. \quad (4)$$

По свойству медианы треугольника имеем

$$BO = \frac{2}{3}BN, AO = \frac{2}{3}AM, \text{ тогда (4) примет вид}$$

$$AB^2 = \frac{4}{9}(AM^2 + BN^2). \quad (5)$$

Упростим (5) с учетом (1) и (2):

$$AB^2 = \frac{4}{9}(a^2 + \frac{1}{4}b^2 - ab \cos \angle C + b^2 + \frac{1}{4}a^2 - ab \cos \angle C),$$

или $AB^2 = \frac{1}{9}(5a^2 + 5b^2 - 8ab \cos \angle C).$ (6)

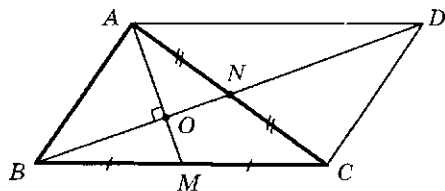
Сравнивая (3) и (6), получим $4(a^2 + b^2) = 10ab \cos \angle C$, откуда $\cos \angle C = \frac{2(a^2 + b^2)}{5ab}$, тогда (3) примет вид

$$AB^2 = \frac{1}{5}(a^2 + b^2), \text{ откуда } AB = \sqrt{\frac{1}{5}(a^2 + b^2)}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{1}{5}(a^2 + b^2)}.$

II способ

Пусть $BO = 2n$, $ON = n$, $AO = 2m$, $OM = m$ (по свойству медианы).



Дополним $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABCD$, тогда по свойству последнего имеем

$$2(AB^2 + BC^2) = BD^2 + AC^2,$$

или, обозначив $AB = x$, имеем

$$2(x^2 + b^2) = 36n^2 + a^2. \quad (1)$$

Из $\triangle AOB$ и $\triangle AON$ имеем

$$x^2 = 4m^2 + 4n^2 \text{ и } 4m^2 + n^2 = \frac{1}{4}a^2,$$

откуда $x^2 - \frac{1}{4}a^2 = 3n^2$, значит, $n^2 = \frac{1}{3}\left(x^2 - \frac{1}{4}a^2\right).$ (2)

Учитывая (2), равенство (1) примет вид

$$2(x^2 + b^2) = 12\left(x^2 - \frac{1}{4}a^2\right) + a^2, \text{ или } x^2 + b^2 = 6x^2 - a^2,$$

$$5x^2 = a^2 + b^2, \text{ откуда } x = AB = \sqrt{\frac{1}{5}(a^2 + b^2)}.$$

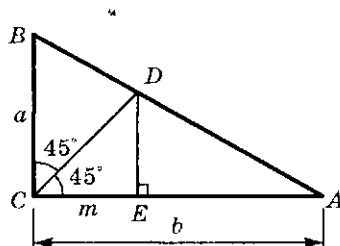
Ответ: $x = \sqrt{\frac{1}{5}(a^2 + b^2)}.$

Замечание. Задачу можно решить с применением векторов.

Пример 3. Катеты прямоугольного треугольника равны a и b . Найти длину биссектрисы прямого угла.

Решение.

Условие этой задачи заимствовано из книги Е.А. Островского и др. «Задачи по математике на вступительных экзаменах в вузах». Приведем другие, более простые способы решения.



I способ

Из точки D опустим перпендикуляр DE на катет $AC = b$. Тогда $\angle CDE = 45^\circ$, т. е. $CE = DE = m$. Из $\triangle CED$ $CD = m\sqrt{2}$.

Заметим, что $\triangle AED \sim \triangle ACB$ (как прямоугольные с общим углом A).

Тогда $\frac{DE}{AE} = \frac{BC}{AC}$, или $\frac{m}{b-m} = \frac{a}{b}$, откуда $m = \frac{ab}{a+b}$.

Значит, $CD = m\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

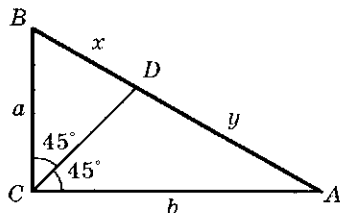
Ответ: $\frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

II способ

Пусть $BD = x > 0$, $AD = y > 0$.

По свойству биссектрисы треугольника имеем

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}.$$



С другой стороны, из $\triangle ACB$ имеем $(x+y)^2 = a^2 + b^2$.

Полученные уравнения образуют систему

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{a}{b}, \\ (x+y)^2 = a^2 + b^2. \end{cases}$$

Из I уравнения системы $y = \frac{b}{a}x$, тогда уравнение

примет вид $\left(x + \frac{b}{a}x\right)^2 = a^2 + b^2$, откуда

$$x^2 = \frac{(a^2 + b^2)a^2}{(a+b)^2}. \quad (1)$$

Из $\triangle BCD$ по теореме косинусов имеем

$$x^2 = a^2 + CD^2 - 2a \cdot CD \cdot \cos 45^\circ$$

или, учитывая (1), получим

$$\frac{(a^2 + b^2)a^2}{(a+b)^2} = a^2 + CD^2 - \sqrt{2}a \cdot CD, \text{ или}$$

$$CD^2 - \sqrt{2}a \cdot CD + \frac{2a^3b}{(a+b)^2} = 0 \text{ — квадратное уравне-}$$

ние относительно CD .

Решая уравнение, находим

$$CD = \frac{\sqrt{2}a(a+b) \pm \sqrt{2}a(a-b)}{2(a+b)}.$$

Если $a > b$, то $CD = \frac{\sqrt{2}a(a+b+a-b)}{2(a+b)} = \frac{\sqrt{2}a^2}{a+b}$.

Если $a < b$ (как в нашем случае), то $CD = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}a^2}{a+b}$, если $a > b$; $\frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$, если $a < b$.

III способ

(см. рисунок способа II)

Пусть $\angle A = \alpha$, тогда из $\triangle BCD$ по теореме синусов имеем

$$\frac{CD}{\sin(90^\circ - \alpha)} = \frac{x}{\sin 45^\circ}, \text{ или } \frac{CD}{\cos \alpha} = \sqrt{2}x. \quad (1)$$

Кроме того, $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$. Из $\triangle ACB$ $(x+y)^2 = a^2 + b^2$, отку-

да $x + y = \sqrt{a^2 + b^2}$, $y = \frac{b}{a}x$, тогда $x + \frac{b}{a}x = \sqrt{a^2 + b^2}$,

откуда $x = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{a+b}$.

Учитывая (1), получим $CD = \frac{a\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{a+b} \cos \alpha$.

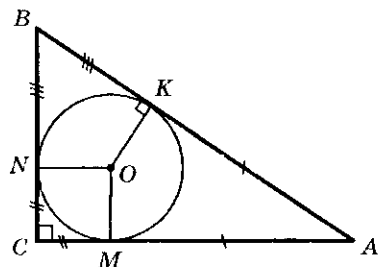
Но $\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, значит, $CD = \frac{\sqrt{2}ab}{a+b}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{2}a^2}{a+b}$.

Пример 4. Доказать, что площадь прямоугольного треугольника можно найти по формуле $S = (2R + r)r$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

Решение.

І способ



Пусть в $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) $OM = ON = OK = r$ — радиус вписанной окружности.

Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный, то AB — диаметр описанной окружности, тогда $AB = 2R$.

Известно, что $S_{\triangle} = p \cdot r$, где p — полупериметр. По свойству касательных, проведенных из одной точки к окружности, имеем $AC + BC = 2r + AB$, тогда

$$S = \frac{1}{2}(AC + BC + AB) \cdot r = \frac{1}{2}(2r + AB + AB) \cdot r = (r + AB)r = (r + 2R)r.$$

Итак, $S = (2R + r)r$, что и требовалось доказать.

ІІ способ

Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный, то $AB = 2R$, тогда $S = \frac{1}{2}AC \cdot BC$.

Пусть $AC = x > 0$, $BC = y > 0$, тогда

$$S = \frac{1}{2}xy. \quad (1)$$

$$\text{Из } \triangle ABC \quad x^2 + y^2 = 4R^2. \quad (2)$$

$$\text{Известно, что } r = \frac{x+y-2R}{2},$$

$$\text{откуда } x + y = 2(R + r). \quad (3)$$

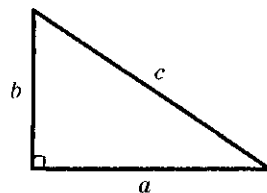
$$\text{Из (2) и (3) имеем систему } \begin{cases} x^2 + y^2 = 4R^2, \\ x + y = 2(R + r). \end{cases}$$

Упростим I уравнение системы: $(x + y)^2 - 2xy = 4R^2$, или, учитывая (3), имеем $4(R + r)^2 - 2xy = 4R^2$, откуда $2xy = 4(R + r)^2 - 4R^2$ или $\frac{1}{2}xy = (R + r)^2 - R^2$; но $\frac{1}{2}xy = S$, тогда $S = R^2 + 2Rr + r^2 - R^2$, или $S = r(2R + r)$, что и требовалось доказать.

Пример 5. Доказать, что в прямоугольном треугольнике $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, где a и b — катеты, c — гипотенуза, r — радиус вписанной окружности.

Решение.

І способ



Идея решения задачи заключается в сравнении площадей.

$$S = \frac{1}{2}ab; \text{ с другой стороны, } S = pr = \frac{1}{2}(a + b + c)r,$$

откуда, сравнивая правые части, имеем

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a + b + c)r,$$

$$\text{откуда } r = \frac{ab}{a + b + c}. \quad (1)$$

По теореме Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2, \text{ или } (a+b)^2 - 2ab = c^2,$$

значит, $2ab = (a+b)^2 - c^2 = (a+b+c)(a+b-c)$, тогда (1) примет вид

$$r = \frac{2ab}{2(a+b+c)} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2(a+b+c)} = \frac{a+b-c}{2}.$$

Итак, $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$, что и требовалось доказать.

П способ

Из центра O вписанной окружности проведем радиусы OD , OE и OF в точки касания, тогда $OD \perp AC$, $OF \perp BC$, $OE \perp AB$.

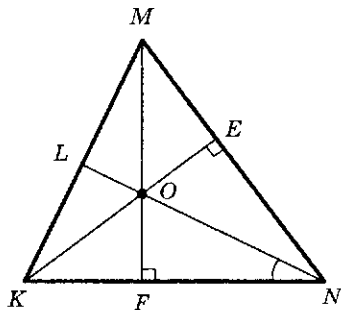
Следовательно, $CFOD$ — квадрат, тогда $OD = OF = OE = r$, $AD = AC - CD = b - r$, $BF = BC - FC = a - r$. Но $AD = AE$ и $BF = BE$ как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки.

Значит, $AE = b - r$, $BE = a - r$ и $AB = AE + BE$, т. е. $c = (b - r) + (a - r)$, откуда получим $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, что и требовалось доказать.

Пример 6(А). Высоты MF и KE $\triangle KMN$ пересекаются в точке O . Найти $\angle FNO$, если $\angle MKN = 66^\circ$.

Решение.

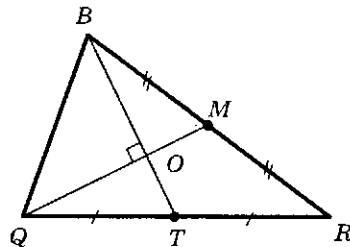
Продолжим NO до пересечения с MK в точке L . Тогда NL — высота $\triangle KMN$ (так как высоты KE и MF пересекаются в точке O).



По условию $\angle MKN = 66^\circ$, значит, $\angle FNO = \angle KLN - \angle MKN = 90^\circ - 66^\circ = 24^\circ$.

Ответ: 24° .

Пример 7(А). Медианы $QM = 9$ и $BT = 12$ $\triangle BQR$ пересекаются в точке O . Найти $S_{\triangle BOQ}$, если $QM \perp BT$.



Решение.

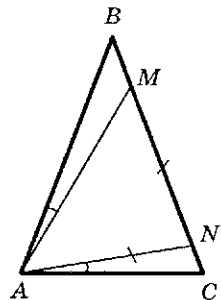
Пусть $OM = x$, $OT = y$, тогда по свойству медиан треугольника $QO = 2x$, $BO = 2y$.

Так как $BT \perp QM$, то $S_{\triangle BOQ} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot 2y = 2xy$.

Но $QM = 3x = 9$, $x = 3$; $BT = 3y = 12$, $y = 4$.

Значит, $S_{\triangle BOQ} = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Ответ: 24.



Пример 8(А). На боковой стороне BC равнобедренного $\triangle ABC$ взяты точки M и N (M лежит между B и N) так, что $AN = MN$ и $\angle BAM = \angle NAC$. Доказать, что $\angle MAC = 60^\circ$.

Решение.

$\angle MAC = \angle AMN + \angle NAC = 2\angle NAC + \angle ABM = 2\angle NAC + 180^\circ - 2(\angle NAC + \angle MAC)$, откуда $\angle MAC = 180^\circ - 2\angle MAC$,

т. е. $3\angle MAC = 180^\circ$, откуда $\angle MAC = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

Пример 9(А). Найти целочисленный треугольник Пифагора, площадь которого численно равна периметру.

Решение.

Пусть x, y — катеты, z — гипотенуза. Пусть для определен-

ности $x > y$. Согласно условию имеем $\frac{1}{2}xy = x + y + z$,

где $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, тогда $\frac{1}{2}xy = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$, или

$$xy - 2(x + y) = 2\sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

Возведем обе части (1) в квадрат: $x^2y^2 - 4xy(x + y) + 4(x + y)^2 = 4(x^2 + y^2)$, или $xy(xy - 4(x + y) + 8) = 0$.

Так как $x > 0, y > 0$, то $xy \neq 0$, тогда $xy - 4(x + y) + 8 = 0$, или $(x - 4)(y - 4) = 8$. (2)

Но $8 = 1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$, тогда из (2) имеем:

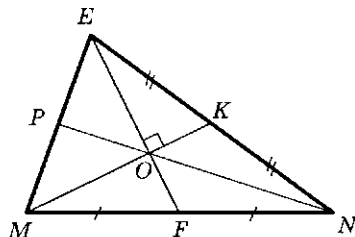
$$1) \begin{cases} x - 4 = 8, \\ y - 4 = 1; \end{cases} \begin{cases} x = 12, \\ y = 5, \end{cases} \text{ тогда } z = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

$$2) \begin{cases} x - 4 = 4, \\ y - 4 = 2; \end{cases} \begin{cases} x = 8, \\ y = 6, \end{cases} z = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

Итак, существуют два прямоугольных треугольника, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: (12; 5; 13), (8; 6; 10).

Пример 10(А). Медианы $MK = 15$ и $EF = 18$ пересекаются под прямым углом в точке O . Найти длину ON .



Решение.

I способ

Пусть $OF = x, OK = y$. Так как MK и EF — медианы, то $EF = 3x = 18, x = 6, OE = 2x = 12; MK = 3y = 15, y = 5, MO = 2y = 10$.

Из $\triangle MOE$ $ME = \sqrt{10^2 + 12^2} = 2\sqrt{61}$. Так как $\triangle MOE$ — прямоугольный и NP — медиана $\triangle MEN$, то OP — медиана $\triangle MOE$, т. е. $MP = PE = OP = \sqrt{61}$ (медиана, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы). Значит, $ON = 2 \cdot OP = ME = 2\sqrt{61}$.

Ответ: $2\sqrt{61}$.

II способ

Известно, что если a, b, c — стороны треугольника и m_c — медиана, проведенная к стороне c , то

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}.$$

Пусть NP — медиана к стороне ME , тогда

$$NP = \frac{1}{2}\sqrt{2(MN^2 + NE^2) - ME^2}.$$

Из $\triangle EOK$ $EK = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (см. I способ),

$$ME = 2\sqrt{61}, MF = \sqrt{10^2 + 6^2} = 2\sqrt{34}.$$

Значит, $EN = 2 \cdot EK = 26, MN = 2 \cdot MF = 4\sqrt{34}$.

$$\text{Следовательно, } NP = \frac{1}{2}\sqrt{2(16 \cdot 34 + 26^2) - 4 \cdot 61} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{244 \cdot 9} = 3\sqrt{61}, \text{ откуда } ON = 2\sqrt{61}.$$

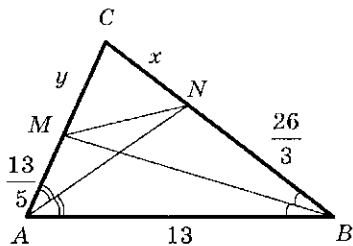
Ответ: $2\sqrt{61}$.

III способ

Достроим $\triangle MEN$ до параллелограмма, для чего из точки E проведем прямую, параллельную MN . Точку их пересечения обозначим буквой T .

Известно, что если a и b — смежные стороны параллелограмма, а d_1 и d_2 — диагонали, то справедливо равенство $2(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2$, и т. д. (см. I способ).

Пример 11(А). Биссектрисы AN и BM треугольника ABC пересекают стороны BC и AC в точках N и M соответственно. Найти длину MN , если $AB = 13$, $AM = \frac{13}{5}$, $BN = \frac{26}{3}$.



Решение.

Пусть $CN = x$, $CM = y$. По свойству биссектрисы угла треугольника имеем

$$\frac{y + \frac{13}{5}}{13} = \frac{x}{\frac{26}{3}}, \text{ или } \frac{y + \frac{13}{5}}{13} = \frac{3x}{26}, \text{ или } y + \frac{13}{5} = \frac{3x}{2}. \quad (1)$$

$$\text{Аналогично } \frac{x + \frac{26}{3}}{13} = \frac{y}{\frac{13}{5}}, \text{ или } x + \frac{26}{3} = 5y. \quad (2)$$

Равенства (1) и (2) решаем как систему, способом подстановки.

$$\begin{cases} y = \frac{3x}{2} - \frac{13}{5}, \\ x + \frac{26}{3} = 5\left(\frac{3x}{2} - \frac{13}{5}\right). \end{cases}$$

Упростим второе уравнение полученной системы:
 $x + \frac{26}{3} = \frac{15x}{2} - 13$, или $\frac{15x}{2} - x = \frac{65}{3}$, $\frac{13x}{2} = \frac{65}{3}$, откуда

$$x = \frac{10}{3}.$$

Тогда из первого уравнения системы находим
 $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{3} - \frac{13}{5}$, или $y = \frac{12}{5}$.

$$\text{Следовательно, } AC = \frac{13}{5} + \frac{12}{5} = 5, \quad BC = \frac{26}{3} + \frac{10}{3} = 12.$$

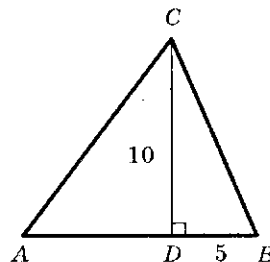
Но $\triangle ABC$ — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора), так как $13^2 = 5^2 + 12^2$, тогда из $\triangle CMN$ найдем искомую длину MN :

$$MN^2 = x^2 + y^2, \quad MN = \sqrt{\left(\frac{10}{3}\right)^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2},$$

$$MN = \sqrt{\frac{100}{9} + \frac{144}{25}} = \sqrt{\frac{2644}{9 \cdot 25}} = \frac{2}{15} \sqrt{661}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{15} \sqrt{661}.$$

Пример 12(А). Высота треугольника, равная 10, делит угол треугольника в отношении $2 : 1$, а основание треугольника — на части, меньшая из которых равна 5. Найти площадь треугольника.



Решение.

По условию задачи высота $CD = 10$,
 $\angle ACD : \angle BCD = 2 : 1$, $BD = 5$.

Пусть $\angle BCD = \alpha$, тогда $\angle ACD = 2\alpha$.

$$\text{Из } \triangle CDB \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{CD} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Из } \triangle ADC \quad AD = CD \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = 10 \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{20 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{10}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{10 \cdot 4}{3} = \frac{40}{3}.$$

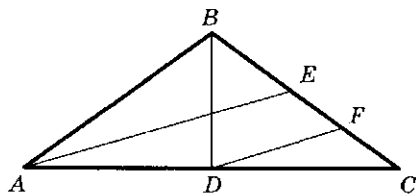
$$\text{Значит, } AB = AD + BD = \frac{40}{3} + 5 = \frac{55}{3}.$$

Следовательно, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD$, или

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{55}{3} \cdot 10 = \frac{275}{3}.$$

Ответ: $\frac{275}{3}$.

Пример 13(А). Один из углов равнобедренного треугольника равен 108° . Найти отношение длин двух биссектрис неравных углов.



Решение.

Так как $\triangle ABC$ — равнобедренный и $\angle B = 108^\circ$ (по условию), то $\angle C = \angle A = (180^\circ - 108^\circ) : 2 = 36^\circ$; $\angle DBC = 108^\circ : 2 = 54^\circ$.

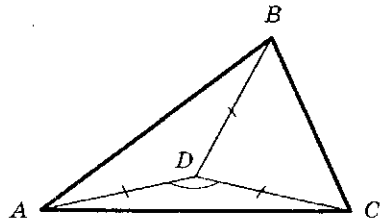
Проведем $DF \parallel AE$, тогда $\angle CAE = 36^\circ : 2 = 18^\circ$, $\angle BDF = 90^\circ - 18^\circ = 72^\circ$.

Далее имеем $\angle DFB = 180^\circ - (72^\circ + 54^\circ) = 54^\circ$,

$$BD = DF = \frac{1}{2} AE, \text{ тогда } BD : AE = 1 : 2.$$

Ответ: $1 : 2$.

Пример 14(А). В $\triangle ABC$ $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 80^\circ$. Точка D , взятая внутри треугольника, равноудалена от всех его вершин. Найти $\angle ADC$.



Решение.

Так как $\angle A = 30^\circ$, то по теореме синусов имеем $\frac{BC}{\sin 30^\circ} = 2R$, или $2BC = 2R$, т. е. $R = BC$.

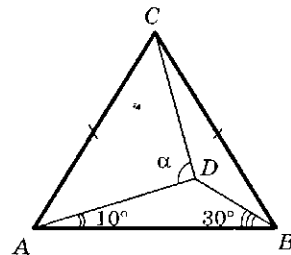
Но точка D — центр описанной окружности, значит, $AD = BD = DC = BC$, т. е. $\triangle BDC$ — равносторонний.

По условию задачи $\angle B = 80^\circ$, тогда $\angle C = 180^\circ - (30^\circ + 80^\circ) = 70^\circ$, следовательно, $\angle ACD = 70^\circ - 60^\circ = 10^\circ$.

Но $AD = DC$, тогда $\angle DAC = \angle ACD = 10^\circ$ и $\angle ADC = 180^\circ - (10^\circ + 10^\circ) = 160^\circ$.

Ответ: 160° .

Пример 15(А). В равнобедренном $\triangle ABC$ $AC = BC$, $\angle C = 80^\circ$. Внутри треугольника взята точка D так, что $\angle BAD = 10^\circ$, $\angle ABD = 30^\circ$. Найти $\angle ADC$.



Решение.

Пусть $AC = BC = a$, искомый угол $ADC = \alpha$. По условию $\angle ACB = 80^\circ$, тогда $\angle CAB = \angle CBA = 50^\circ$, значит, $\angle CAD = 40^\circ$, $\angle CBD = 20^\circ$.

Из $\triangle ACD$ и $\triangle CDB$ по теореме синусов имеем

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{CD}{\sin 40^\circ}, \quad \frac{a}{\sin \angle CDB} = \frac{CD}{\sin 20^\circ}.$$

Поскольку $\angle CDB = 220^\circ - \alpha$, то, разделив левые и правые части полученных равенств, получим

$$\frac{\sin(220^\circ - \alpha)}{\sin \alpha} = \frac{\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}.$$

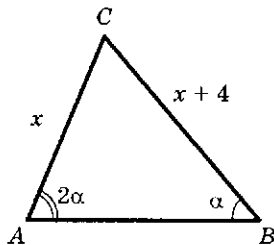
Но $\sin 40^\circ = 2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ$, тогда $\sin (220^\circ - \alpha) = \sin (180^\circ + (40^\circ - \alpha)) = -\sin (40^\circ - \alpha) = \sin (\alpha - 40^\circ)$, значит, $2 \sin (\alpha - 40^\circ) \cdot \cos 20^\circ = \sin \alpha$.

Используя формулу $2 \sin x \cos y = \sin (x - y) + \sin (x + y)$, имеем $\sin (\alpha - 20^\circ) = \sin \alpha - \sin (\alpha - 60^\circ)$, или $\sin (\alpha - 20^\circ) = 2 \sin 30^\circ \cos (\alpha - 30^\circ)$, $\sin (\alpha - 20^\circ) = \cos (\alpha - 30^\circ)$.

Но $\cos (\alpha - 30^\circ) = \sin (90^\circ - (\alpha - 30^\circ)) = \sin (120^\circ - \alpha)$, тогда $\sin (\alpha - 20^\circ) - \sin (120^\circ - \alpha) = 0$, откуда, решая полученное уравнение, находим $\alpha = 70^\circ$.

Ответ: 70° .

Пример 16(А). В треугольнике один из углов вдвое больше другого, а противолежащие им стороны отличаются друг от друга на 4. Найти эти стороны, если известно, что третья сторона треугольника равна 10.



Решение.

Пусть в $\triangle ABC$ $AC = x$, $BC = x + 4$, $\angle B = \alpha$, $\angle A = 2\alpha$, тогда $\angle C = 180^\circ - 3\alpha$.

По теореме синусов имеем $\frac{x+4}{\sin 2\alpha} = \frac{x}{\sin \alpha}$,

или $x = \frac{x+4}{2 \cos \alpha}$, откуда $\cos \alpha = \frac{x+4}{2x}$. (1)

Аналогично $\frac{10}{\sin(180^\circ - 3\alpha)} = \frac{x}{\sin \alpha}$, или

$$\frac{10}{\sin 3\alpha} = \frac{x}{\sin \alpha}.$$

Но $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$, тогда $x = \frac{10}{3 - 4 \sin^2 \alpha}$.

Так как $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, то, учитывая (1), получим $x = \frac{10}{3 - 4 \left(1 - \frac{(x+4)^2}{4x^2}\right)}$, или $x = \frac{10x^2}{(x+4)^2 - x^2}$, или

$$x = \frac{10x^2}{8x + 16}.$$

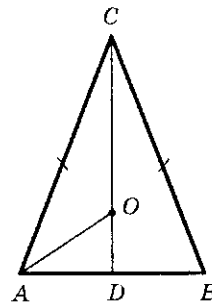
Учитывая, что $x > 0$, имеем $5x = 4x + 8$, откуда $x = 8$, тогда $x + 4 = 12$. Таким образом, $AC = 8$, $BC = 12$.

Ответ: 8 и 12.

Пример 17(А). В остроугольном равнобедренном треугольнике известно, что $r/R = 7/32$, где r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей. Найти угол при основании треугольника.

Решение.

Пусть в $\triangle ABC$ $AC = BC$, $\angle A = \alpha$, O — центр вписанной окружности, тогда AO — биссектриса $\angle CAD$ и $\angle OAD = \frac{\alpha}{2}$.



Из $\triangle AOD$, где $OD = r$ — радиус вписанной окружности, имеем $r = AD \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. Но $AD = AC \cdot \cos \alpha$, тогда $r = AC \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

По теореме синусов $R = \frac{AC}{2 \sin \alpha}$, где R — радиус описанной окружности.

Следовательно, $r/R = AC \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{2 \sin \alpha}{AC} =$

$= 2 \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$. По условию $r/R = 7/32$, тогда по-

лучим уравнение $2 \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{7}{32}$, или

$$2 \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) \cdot \cos \alpha \cdot \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{7}{32}, \text{ или}$$

$$4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \alpha = \frac{7}{32}.$$

Но $2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha$, значит, $2(1 - \cos \alpha) \cdot \cos \alpha = \frac{7}{32}$, или $\cos^2 \alpha - \cos \alpha + \frac{7}{64} = 0$.

Решая полученное квадратное уравнение относительно $\cos \alpha$, находим $(\cos \alpha)_1 = \frac{1}{8}$, $(\cos \alpha)_2 = \frac{7}{8}$.

Но $\angle ACB = 180^\circ - 2\alpha$, тогда $45^\circ < \alpha < 90^\circ$,
 $0 < \cos \alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Поскольку $\frac{7}{8} > \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{8}$, то значение $\cos \alpha = \frac{7}{8}$ не подходит. Если $\cos \alpha = \frac{1}{8}$, то $\alpha = \arccos \frac{1}{8}$.

Ответ: $\arccos \frac{1}{8}$.

Пример 18(А). Найти катеты прямоугольного треугольника, если гипотенуза равна c , а биссектриса одного из острых углов равна $\frac{c}{\sqrt{3}}$.

Решение.

Пусть в $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$), $AB = c$, $AD = \frac{c}{\sqrt{3}}$ — биссектриса $\angle A$. Пусть $\angle CAD = \alpha = \angle DAB$.

Из $\triangle ACD$ $AC = AD \cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{3}} \cos \alpha$, из $\triangle ABC$ $AC = AB \cos 2\alpha = c \cos 2\alpha$.

Сравнивая правые части полученных равенств, имеем $\frac{c}{\sqrt{3}} \cos \alpha = c \cos 2\alpha$, или $\sqrt{3} \cos 2\alpha - \cos \alpha = 0$.

Поскольку $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$, то полученное уравнение примет вид $2\sqrt{3} \cos^2 \alpha - \cos \alpha - \sqrt{3} = 0$, откуда $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, или $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ — не подходит, так как $\angle A < 90^\circ$, тогда $\cos \alpha > 0$.

Если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\alpha = 30^\circ$, значит, $\angle CAD = \angle DAB = 30^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$ и $\angle B = 30^\circ$.

Следовательно, $AC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} c$, $BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

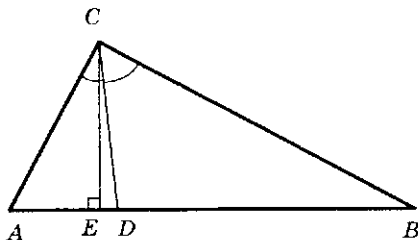
Замечание. Попытка решить задачу алгебраическим способом приводит к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными, например,

$$AC = x, BC = y, CD = z, \text{ тогда } \begin{cases} x^2 + y^2 = c^2, \\ x^2 + z^2 = \frac{1}{3} c^2, \text{ и т. д.} \\ \frac{x}{c} = \frac{z}{y-z}, \end{cases}$$

Ответ: $\frac{1}{2} c, \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Пример 19(А).

В прямоугольном $\triangle ABC$ проведена биссектриса CD прямого угла так, что $AD = 3$, $BD = 6$. Найти высоту треугольника, опущенную из вершины C .



Решение.

Пусть $AE = x$, $BE = y$, тогда $\frac{AC^2}{BC^2} = \frac{x}{y}$ (доказать самостоятельно).

Так как CD — биссектриса, то $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{1}{2}$.

Следовательно, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=9, \\ \frac{x}{y}=\frac{1}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=9, \\ y=4x; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x=9, \\ y=4x; \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{9}{5}, \\ y=\frac{36}{5}. \end{cases}$$

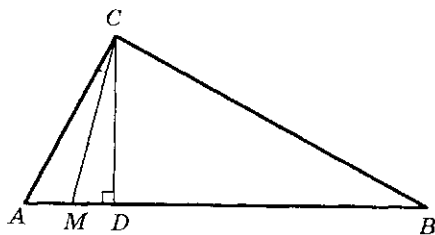
По свойству перпендикуляра CE , опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу AB , имеем

$$CE = \sqrt{xy} = \sqrt{\frac{9}{5} \cdot \frac{36}{5}} = \frac{3 \cdot 6}{5} = 3,6.$$

Ответ: 3,6.

Пример 20. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины C прямого угла проведена высота CD , а в $\triangle ADC$ проведена биссектриса CM . Доказать, что $BC = BM$.

Решение.



Заметим, что в $\triangle ABC$, где $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = \angle ACD$.

Пусть $\angle B = \alpha$. Так как CM — биссектриса $\angle ACD$, то $\angle MCD = \frac{\alpha}{2}$. Значит, $\angle MCB = \angle MCD + \angle DCB = \frac{\alpha}{2} + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

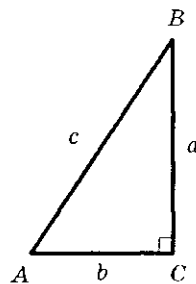
В $\triangle MCD$ $\angle CMD = 90^\circ - \angle MCD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Выходит, что $\angle MCB = \angle CMB$, следовательно, $\triangle CBM$ — равнобедренный, т. е. $BM = BC$, что и требовалось доказать.

Пример 21(А). В прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности равен полуразности его катетов. Найти углы треугольника.

Решение.

Пусть в $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, катет $a > b$, r — радиус вписанной окружности.

Согласно условию $r = \frac{1}{2}(a - b)$.



С другой стороны, $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, где гипотенуза

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$, тогда получим

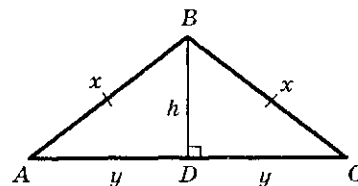
$$a - b = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ или } 2b = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (1)$$

Возведем обе части (1) в квадрат $4b^2 = a^2 + b^2$, $3b^2 = a^2$, откуда $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$. Но $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \angle A$, значит, $\angle A = 60^\circ$, тогда $\angle B = 30^\circ$.

Ответ: 30° ; 60° .

Пример 22(А). Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120° . Найти отношение r/R , где r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.

Решение.



Пусть x — длина боковой стороны, $2y$ — основания, h — высота равнобедренного треугольника. Так как $\angle ABC = 120^\circ$, то $\angle A = \angle C = 30^\circ$.

$$S_{\triangle ABC} = pr = (x + y)r. \quad (1)$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\triangle ABC} = \frac{x^2 y}{2R}. \quad (2)$$

$$\text{Сравнивая (1) и (2), имеем } (x + y)r = \frac{x^2 y}{2R}. \quad (3)$$

По теореме синусов $\frac{x}{\sin \angle A} = 2R$, откуда $x = R$, тогда равенство (3) примет вид

$$(R + y)r = \frac{R^2 y}{2R}, \text{ или } (R + y)y = \frac{1}{2} Ry. \quad (4)$$

Из $\triangle ABD$ по теореме Пифагора $x^2 - y^2 = h^2 = \frac{1}{4}x^2$,

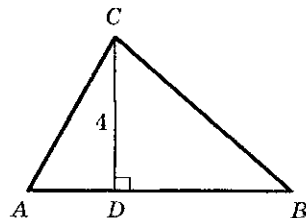
или $\frac{3}{4}x^2 = y^2$, т. е. $y = \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, тогда (4) запишется

в виде $2\left(R + \frac{1}{2}R\sqrt{3}\right)r = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$, или $2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)r = \frac{\sqrt{3}}{2}R$.

$$\text{Значит, } \frac{r}{R} = \frac{\sqrt{3}}{2(2 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3}).$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}}{2}(2 - \sqrt{3}).$$

Пример 23(А). В треугольнике высота, равная 4, делит основание в отношении 1 : 2. Найти основание треугольника, если радиус вписанной окружности равен $\frac{18}{7 + \sqrt{13}}$.



Решение.

Пусть в $\triangle ABC$ $CD = 4$ — высота, AB — основание, $AD : DB = 1 : 2$, $r = \frac{18}{7 + \sqrt{13}}$ — радиус вписанной окружности.

Пусть $AD = x$, $DB = 2x$, $x > 0$, тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot 4 = 6x.$$

С другой стороны, $S_{\triangle ABC} = p \cdot r$, где $p = \frac{1}{2}(3x + AB + BC)$, тогда имеем

$$6x = \frac{9(3x + AB + BC)}{7 + \sqrt{13}}, \text{ или}$$

$$2(7 + \sqrt{13})x = 3(3x + AB + BC).$$

Из $\triangle ADC$ $AC = \sqrt{x^2 + 16}$,

из $\triangle CDB$ $BC = \sqrt{4x^2 + 16} = 2\sqrt{x^2 + 4}$.

Получим уравнение

$$2(7 + \sqrt{13})x = 3(3x + \sqrt{x^2 + 16} + 2\sqrt{x^2 + 4}), \text{ или}$$

$$(5 + 2\sqrt{13})x = 3(\sqrt{x^2 + 16} + 2\sqrt{x^2 + 4}).$$

Возведя обе части в квадрат и упрощая, получим

$$((8 + 5\sqrt{13})x^2 - 72)^2 = (9\sqrt{(x^2 + 4)(x^2 + 16)})^2, \text{ или}$$

$$(8 + 5\sqrt{13})^2 x^2 - 144(8 + 5\sqrt{13}) = 81x^2 + 1620,$$

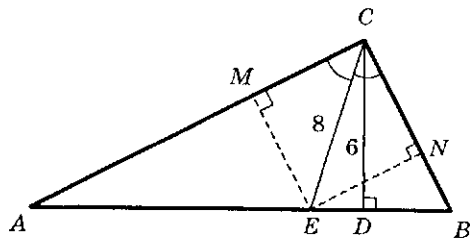
$$(308 + 80\sqrt{13})x^2 = 9(308 + 80\sqrt{13}),$$

откуда $x^2 = 9$, $x = 3$.

Итак, $AD = 3$, $DB = 2x = 6$, тогда $AB = 3 + 6 = 9$.

Ответ: 9.

Пример 24(А). Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, опущенные из вершины прямого угла, равны соответственно 6 и 8. Найти площадь треугольника.



Решение.

Пусть в $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$, CE — биссектриса, CD — высота.

Из точки E опустим перпендикуляры EM и EN на катеты AC и BC . Поскольку CE — биссектриса, то $EN = EM$, тогда $MENC$ — квадрат.

Из $\triangle CME$, где $CE = 8$ находим

$$ME = \frac{CE}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}, \quad EN = ME = 4\sqrt{2}.$$

Пусть $BC = x$, $AC = y$, где $x > 0$, $y > 0$.

Тогда $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACE} + S_{\triangle CEB} =$

$$= \frac{1}{2}y \cdot 4\sqrt{2} + \frac{1}{2}x \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(x + y). \quad (1)$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{1}{2}xy. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), имеем $2\sqrt{2}(x + y) = \frac{1}{2}xy$, или

$$32(x + y)^2 = x^2y^2.$$

$$\text{Наконец, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2} \cdot 6 =$$

$$= 3\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}xy, \text{ откуда } 36(x^2 + y^2) = x^2y^2.$$

Итак, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 32(x + y)^2 = x^2y^2, \\ 36(x^2 + y^2) = x^2y^2. \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

Заметим, что для нахождения искомой площади $\triangle ABC$ нет необходимости находить в отдельности x и y .

$$\text{Из уравнения (3) имеем } x^2 + y^2 = \frac{x^2y^2}{32} - 2xy.$$

$$\text{Из уравнения (4) находим } x^2 + y^2 = \frac{x^2y^2}{36}.$$

Приравняв правые части полученных равенств, получим

$$\frac{x^2y^2}{32} - 2xy = \frac{x^2y^2}{36}, \text{ или } x^2y^2 \left(\frac{1}{32} - \frac{1}{36} \right) = 2xy,$$

$$\frac{1}{8 \cdot 36} xy = 2, \text{ откуда } xy = 2 \cdot 8 \cdot 36.$$

$$\text{Значит, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}xy = 8 \cdot 36 = 288 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: 288.

Замечание. Сравнивая левые части (3) и (4), имеем $32(x + y)^2 = 36(x^2 + y^2)$, откуда $x^2 + y^2 = 16xy$, или, учитывая (4), имеем $36 \cdot 16xy = x^2 + y^2$, т. е.

$$\frac{xy}{2} = S = 36 \cdot 8 = 288.$$

Пример 25. Чему равен $\angle C$ $\triangle ABC$, если известно, что $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$, где $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$?

Решение.

Поскольку $a + b + c \neq 0$, то, умножив обе части равенства на $a + b + c$, получим $\frac{(a+c)+b}{a+c} + \frac{(b+c)+a}{b+c} = 3$,

$$\text{или } 1 + \frac{b}{a+c} + 1 + \frac{a}{b+c} = 3, \text{ или } \frac{b}{a+c} + \frac{a}{b+c} = 1, \text{ откуда}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab.$$

$$\text{Но } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle C, \text{ тогда } \cos \angle C = \frac{1}{2},$$

$$\angle C = 60^\circ.$$

Ответ: 60° .

Пример 26(А). В $\triangle ABC$ стороны a, b, c ($a < b < c$) образуют арифметическую прогрессию. Известно, что $R \cdot r = 130$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей. Найти наименьшую целую тройку (a, b, c) .

Решение.

$$\text{Известно, что } S_{\Delta} = \frac{abc}{4R} = pr, \text{ или } \frac{abc}{4R} = \frac{a+b+c}{2} r,$$

$$\text{откуда } 2Rr(a+b+c) = abc. \quad (1)$$

По условию $Rr = 130$, тогда (1) примет вид

$$260(a+b+c) = abc. \quad (2)$$

Поскольку стороны a, b, c $\triangle ABC$ образуют арифметическую прогрессию, то $2b = a + c$, тогда (2) примет вид $260 \cdot 3b = abc$, откуда $ac = 780$.

Итак, $a + c = 2b$, $ac = 780$, т. е. стороны a и c можно принять за корни некоторого квадратного уравнения $x^2 - 2bx + 780 = 0$,

$$D/4 = b^2 - 780, \quad x_{1,2} = b \pm \sqrt{b^2 - 780}.$$

Наименьшую тройку (a, b, c) получим, полагая $b = 28$, $x_{1,2} = 28 \pm 2$, откуда $x_1 = 30$, $x_2 = 26$.

Так как $a < b < c$, то условию задачи удовлетворяет наименьшая тройка чисел $(26; 28; 30)$.

Ответ: $(26; 28; 30)$.

Пример 27(А). Найти площадь треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию с разностью $d = 2$, если известно, что произведение радиусов вписанной и описанной окружностей равно 130.

Решение.

Пусть R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей. Известно, что если a, b, c —

стороны треугольника, то $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{S}{p}$, где

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) \text{ — полупериметр.}$$

Согласно условию задачи $R \cdot r = 130$.

Пусть $a = x$, $b = x + 2$, $c = x + 4$ — стороны треугольника, образующие арифметическую прогрессию с разностью $d = 2$, тогда

$$R \cdot r = \frac{abc}{4S} \cdot \frac{S}{p} = \frac{abc}{4p} = \frac{x(x+2)(x+4)}{2(3x+6)} = \frac{x(x+4)}{6} = 130,$$

или $x^2 + 4x - 780 = 0$, откуда $x_1 = 26$, $x_2 = -30$ (не удовлетворяет, так как x — сторона треугольника).

Итак, $x = 26$, тогда $x + 2 = 28$, $x + 4 = 30$, значит,

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{1}{2}(26 + 28 + 30) = 42,$$

$$S = \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = \sqrt{14 \cdot 3 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = 14 \cdot 4 \cdot 6 = 336 \text{ (кв. ед.)}.$$

Ответ: 336 кв. ед.

Пример 28(А). В $\triangle ABC$ длины сторон образуют арифметическую прогрессию, причем $BC < AC < AB$.

Известно, что $\frac{r}{R} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$, где r и R — соответственно

радиусы вписанной и описанной окружностей. Найти $\angle B$.

Решение.

Пусть a, b, c — стороны треугольника, причем $a < b < c$. По условию $a + c = 2b$. (1)

Кроме того, $\frac{b}{\sin \angle B} = 2R$, откуда $b = 2R \sin \angle B$.

$$S_{\triangle ABC} = p \cdot r = \frac{abc}{4R}, \text{ или } \frac{a+b+c}{2} \cdot r = \frac{abc}{4R}, \text{ тогда, учи-}$$

тывая (1), получим $ac = 6Rr$. (2)

По теореме косинусов $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \angle B$, или

$$b^2 = (a+c)^2 - 2ac(1 + \cos \angle B),$$

$$2ac(1 + \cos \angle B) = 3b^2, \quad 12Rr(1 + \cos \angle B) = 3b^2, \text{ или}$$

$$12Rr(1 + \cos \angle B) = 12R^2 \sin^2 \angle B,$$

$$r(1 + \cos \angle B) = R(1 - \cos \angle B)(1 + \cos \angle B).$$

Но $1 + \cos \angle B \neq 0$, т. е. $\angle B \neq 180^\circ$, тогда
 $r = R(1 - \cos \angle B)$, откуда $1 - \cos \angle B = \frac{r}{R}$.

По условию $\frac{r}{R} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$, тогда
 $\cos \angle B = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\angle B = 30^\circ$.

Ответ: 30° .

Пример 29(А). Стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию с разностью, равной 1. Косинус среднего по величине угла этого треугольника равен $17/32$. Найти $R \cdot r$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

Решение.

Пусть $x - 1$, x , $x + 1$ стороны треугольника, где x — средняя по величине сторона треугольника, тогда $\cos \alpha = \frac{17}{32}$, где α — угол, против которого лежит сторона x .

По теореме косинусов имеем $x^2 = (x - 1)^2 + (x + 1)^2 - 2(x - 1) \cdot \frac{17}{32}$, или $\frac{17}{16}(x^2 - 1) = x^2 + 2$, откуда находим $x = 7$, тогда $x - 1 = 6$, $x + 1 = 8$, т. е. стороны треугольника равны 6; 7 и 8.

Известно, что $r = \frac{S}{p}$ и $R = \frac{abc}{4S}$, где S — площадь треугольника, a , b , c — стороны, значит,

$$R \cdot r = \frac{abc}{4p} = \frac{abc}{2(a+b+c)} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 21} = 8.$$

Ответ: 8.

Пример 30. Стороны одного треугольника 17; 25 и 26 см, а две стороны другого 17 и 25 см. Найти длину третьей стороны, если у треугольников равны радиусы вписанных окружностей.

Решение.

Пусть $a = 17$, $b = 25$, $c = 26$ см — стороны I треугольника, $a = 17$, $b = 25$ — две стороны II треугольника и x — длина третьей стороны. По условию у данных треугольников равны радиусы вписанных окружностей, тогда

$$r = \frac{S_1}{p_1} = \frac{S_2}{p_2}, \text{ где } S_1 = \sqrt{p_1(p_1 - a)(p_1 - b)(p_1 - c)},$$

$$p_1 = \frac{1}{2}(a + b + c) = 34 \text{ и}$$

$$S_1 = \sqrt{34 \cdot 17 \cdot 9 \cdot 8} = 204 \text{ (см}^2\text{)}.$$

$$\text{Аналогично, } p_2 = \frac{42 + x}{2},$$

$$S_2 = \sqrt{\frac{42+x}{2} \cdot \left(\frac{42+x}{2} - 17\right) \cdot \left(\frac{42+x}{2} - 25\right) \cdot \left(\frac{42+x}{2} - x\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{42+x}{2} \cdot \frac{42-x}{2} \cdot \frac{8+x}{2} \cdot \frac{x-8}{2}}.$$

$$\text{Итак, } \frac{1}{4} \sqrt{(42+x)(42-x)(x+8)(x-8)} : \frac{1}{2}(42+x) =$$

$$= \frac{204}{34}, \frac{\sqrt{(42+x)(42-x)(x+8)(x-8)}}{2(42+x)} = 6, \text{ или}$$

$$(42+x)(42-x)(x+8)(x-8) = 144(42+x)^2,$$

$$42+x \neq 0,$$

$$(42-x)(x^2 - 64) = 144(42+x), \text{ или}$$

$$x^3 - 42x^2 + 80x + 8736 = 0, \text{ или}$$

$$x^2(x - 28) - 14x(x - 28) - 312(x - 28) = 0,$$

$$(x - 28)(x^2 - 14x - 312) = 0, x_1 = 28,$$

$$x^2 - 14x - 312 = 0,$$

откуда находим $x_2 = 26$, $x_3 = -12$ (не подходит).

Если $x = 26$, то получим I треугольник. Итак, длина третьей стороны II треугольника равна 28 см. При этом $r = 6$ см (можно проверить непосредственно).

Ответ: 28 см.

Пример 31(А). Существует ли треугольник, стороны которого образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 13$?

Решение.

Пусть стороны треугольника (если он существует) равны x , $x + 13$, $x + 26$, тогда по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{1}{2}(a+b+c), \text{ или}$$

$$p = \frac{3}{2}(x+13); p-x = \frac{1}{2}(x+39), p-(x+13) = \frac{1}{2}(x+13),$$

$$p-(x+26) = \frac{1}{2}(x-13), \text{ тогда}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{4}(x+13)\sqrt{3(x+39)(x-13)}.$$

Пусть $x + 39 = m^2$, $x - 13 = 3n^2$, тогда $m^2 - 3n^2 = 52$, откуда $n^2 = \frac{1}{3}(m^2 - 52)$.

Наименьшее целое n достигается при $m = 8$, тогда

$$n^2 = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4, \text{ откуда } x = m^2 - 39 = 64 - 39 = 25, \text{ тогда}$$

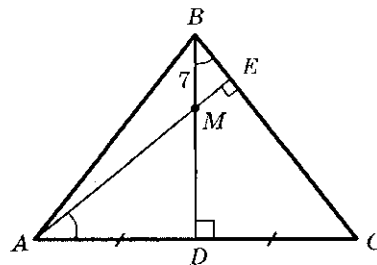
$$x + 13 = 38, \text{ и } x + 26 = 51.$$

Итак, стороны треугольника равны 25, 38 и 51. Следует заметить, что такой треугольник не является единственным. Так, например, при $m = 10$, $n^2 = \frac{1}{3}(100 - 52) = 16$, откуда $n = 4$ и $x = m^2 - 39 = 61$, $x + 13 = 74$ и $x + 26 = 87$, т. е. имеем треугольник со сторонами 61, 74, 87 ед.

Ответ: существует, например, со сторонами 25, 38 и 51 ед.

Пример 32(А). В равнобедренном остроугольном $\triangle ABC$ основание $AC = 24$, а расстояние от вершины B до точки M пересечения высот равно 7. Найти радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$.

Решение.



1 способ

Заметим, что $\triangle BCD \sim \triangle AEC$ (как прямоугольные, имеющие общий острый $\angle C$).

Пусть $\angle CBD = \angle CAE = \alpha$. Из $\triangle AEC$, где $AC = 24$, имеем $EC = 24 \sin \alpha$.

С другой стороны, $EC = BC - BE$,

$$\text{где } BC = \frac{DC}{\sin \alpha} = \frac{12}{\sin \alpha}, BE = 7 \cos \alpha.$$

$$\text{Значит, } EC = \frac{12}{\sin \alpha} - 7 \cos \alpha.$$

$$\text{Получим уравнение } 24 \sin \alpha = \frac{12}{\sin \alpha} - 7 \cos \alpha,$$

$$\text{или } 24 \sin^2 \alpha + 7 \sin \alpha \cos \alpha - 12 = 0. \quad (1)$$

Поскольку $12 = 12 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$, то уравнение (1) преобразуется к виду

$$12 \sin^2 \alpha + 7 \sin \alpha \cos \alpha - 12 \cos^2 \alpha = 0. \quad (2)$$

Разделив обе части (2) на $\cos^2 \alpha \neq 0$, получим уравнение $12 \operatorname{tg}^2 \alpha + 7 \operatorname{tg} \alpha - 12 = 0$, откуда находим $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$,

$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$ — не подходит, так как $0 < \alpha < 90^\circ$ и $\operatorname{tg} \alpha > 0$.

Из $\triangle AMD$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{MD}{AD} = \frac{3}{4}$, откуда $MD = 9$, тогда

высота $BD = 7 + 9 = 16$.

Значит, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 16 = 192$.

С другой стороны, $S_{\triangle ABC} = p \cdot r$, где $p = \frac{1}{2} \cdot (2AB + AC)$,

где $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = 20$.

Тогда $p = \frac{1}{2} (40 + 24) = 32$, $r = \frac{192}{32} = 6$.

Ответ: 6.

II способ

Из $\triangle ABD$ $AB^2 = AD^2 + BD^2$. Пусть $AB = y$, $MD = x$, тогда

$$y^2 = (7 + x)^2 + 144. \quad (3)$$

Из подобия $\triangle AEC$ и $\triangle BDC$ имеем $\frac{EC}{AC} = \frac{DC}{BC}$, или

$$\frac{EC}{24} = \frac{12}{y}.$$

Но $EC = y - BE$, тогда $\frac{y - BE}{24} = \frac{12}{y}$. (4)

Заметим, что $\frac{BE}{BM} = \frac{BD}{y}$, или $BE = \frac{7}{y}(7 + x)$, тогда

$y - BE = y - \frac{7}{y}(7 + x) = \frac{1}{y}(y^2 - 49 - 7x)$, тогда (4) примет

вид $\frac{y^2 - 49 - 7x}{24y} = \frac{12}{y}$, или $y^2 = 7x + 337$. (5)

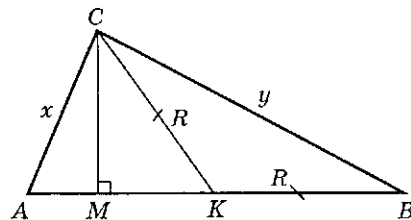
Сравнивая правые части (3) и (5), имеем

$$(7 + x)^2 + 144 = 7x + 337, \text{ или } x^2 + 7x - 144 = 0,$$

откуда находим $x_1 = 9$; $x_2 = -16$ (не подходит). Если $x = 9$, то $BD = 7 + 9 = 16$ и т. д. (см. I способ).

Ответ: 6.

Пример 33(А). В прямоугольном $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) разность между длинами медианы CK и высоты CM равна 7 см. Найти отношение R/r , если $S_{\triangle ABC} = 144 \text{ см}^2$.



Решение.

Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный, то $AB = 2R$ — диаметр описанной окружности, где $CK = AK = KB = R$. Пусть $AC = x > 0$, $BC = y > 0$, тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} xy = pr = 144, \text{ откуда } xy = 288;$$

$$p = \frac{1}{2} (x + y + 2R), \text{ или } \frac{1}{2} (x + y + 2R)r = 144,$$

$$r = \frac{288}{x + y + 2R}, \text{ тогда } \frac{R}{r} = R : \frac{x + y + 2R}{2} = \frac{2R}{x + y - 2R},$$

$$\text{где } r = \frac{x + y - 2R}{2}.$$

По условию задачи $CK - CM = 7$ см, или $R - CM = 7$.

$$\text{Но } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} xy = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot CM, \text{ или } xy = 2R \cdot CM,$$

$$\text{откуда } CM = \frac{xy}{2R} = \frac{288}{2R} = \frac{144}{R}. \text{ Следовательно, имеем}$$

$$\text{уравнение } R - \frac{144}{R} = 7, \text{ или } R^2 - 7R - 144 = 0, \text{ откуда}$$

$$R = 16, R = -9 \text{ (не подходит, так как } R > 0).$$

Итак, $R = 16$. Кроме того, из $\triangle ACB$ $x^2 + y^2 = 4R^2$, или $x^2 + y^2 = 1024$, и так как $xy = 288$, то получим систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1024, \\ xy = 288; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1024, \\ 2xy = 576. \end{cases}$$

Складывая уравнения системы и учитывая, что $x + y > 0$, имеем $(x + y)^2 = 1600$, откуда $x + y = 40$. Тогда

$$\frac{R}{r} = \frac{2R}{x + y - 2R} = \frac{32}{40 - 32} = \frac{32}{8} = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 34(А). Периметр прямоугольного треугольника равен 12 см. Найти радиус вписанной окружности, если известно, что стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию.

Решение.

Пусть стороны треугольника равны $x, x + d, x + 2d$, где d — разность прогрессии.

Так как по условию $P = 12$ см, то получим $x + (x + d) + (x + 2d) = 12$ или $3x + 3d = 12$, откуда

$$x + d = 4. \quad (1)$$

С другой стороны, по теореме Пифагора

$$x^2 + (x + d)^2 = (x + 2d)^2, \quad x^2 + 16 = (x + 2d)^2,$$

откуда $xd + d^2 = 4. \quad (2)$

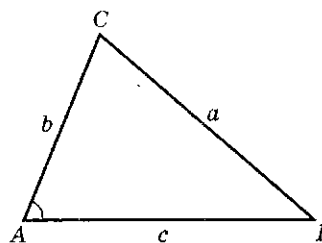
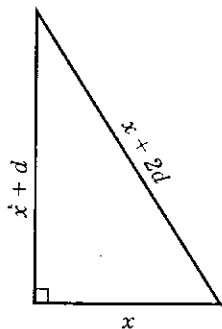
Равенства (1) и (2) рассматриваем как систему

$$\begin{cases} xd + d^2 = 4, \\ x + d = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} d(x + d) = 4, \\ x + d = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} d = 1, \\ x = 3, \end{cases} \quad \text{тогда}$$

$$r = \frac{1}{2}(x + (x + d) - (x + 2d)) = \frac{x - d}{2} = \frac{3 - 1}{2} = 1.$$

Итак, $r = 1$.

Ответ: 1 см.



Пример 35(А). В $\triangle ABC$ длины сторон a, b, c и площадь S связаны соотношением

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2 - a^2).$$

Найти $\angle A$.

Решение.

Пусть $BC = a, AC = b, AB = c$.

Известно, что $S_A = \frac{1}{2}bc \sin \angle A$. Кроме того, по теореме косинусов имеем $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A$, откуда $bc = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cos \angle A}$, тогда $S_A = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2) \operatorname{tg} \angle A$.

По условию задачи $S_A = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2 - a^2)$, или, сравнивая правые части полученных равенств, получим

$$\frac{1}{4}(b^2 + c^2 - a^2) \operatorname{tg} \angle A = \frac{\sqrt{3}}{4}(b^2 + c^2 - a^2),$$

откуда имеем две возможности:

1) $b^2 + c^2 - a^2 = 0$, т. е. $b^2 + c^2 = a^2 \Rightarrow \triangle ABC$ прямоугольный, где a — гипотенуза, b и c — катеты, тогда $\angle A = 90^\circ$. Но равенство $b^2 + c^2 = a^2$ невозможно, так как тогда, учитывая условие задачи, получим $S = 0$.

2) $b^2 + c^2 - a^2 \neq 0$, тогда имеем $\operatorname{tg} \angle A = \sqrt{3}$, $\angle A = 60^\circ$.

Ответ: 60° .

Пример 36(А). На основании равнобедренного треугольника построен правильный треугольник, площадь которого в 3 раза больше площади данного. Найти углы треугольника.

Решение.

Пусть $AB = 2x, AC = y$.

По условию задачи $S_{\triangle ABD} = 3S_{\triangle ABC}$.

Так как $\triangle ABD$ — правильный, то

$$S_{\triangle ABD} = \frac{(AB)^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}x^2, \quad (1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CK = x \cdot CK. \quad (2)$$

$$\text{Из } \triangle AKC \quad CK = \sqrt{y^2 - x^2}. \quad (3)$$

Следовательно, $S_{\triangle ABC} = x \cdot \sqrt{y^2 - x^2}$. Так как

$$S_{\triangle ABD} = 3S_{\triangle ABC},$$

то, учитывая (1), (2) и (3), получим

$$\sqrt{3}x^2 = 3x\sqrt{y^2 - x^2}, \text{ или } 3x^2 = 9(y^2 - x^2), x > 0,$$

$$4x^2 = 3y^2, 2x = \sqrt{3}y, \text{ откуда } \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

и так как $\cos \angle CAK = \frac{x}{y}$, то $\cos \angle CAK = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т. е.

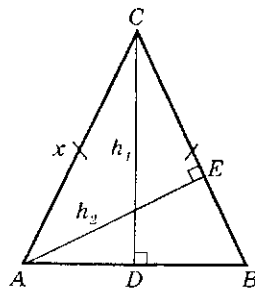
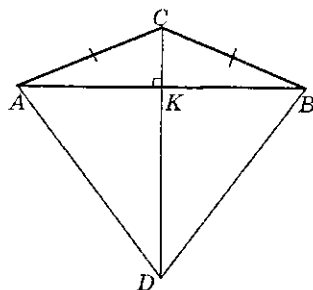
$\angle CAK = 30^\circ$, тогда $\angle CBK = 30^\circ$ и $\angle C = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$. Итак, углы $\triangle ABC$ равны $30^\circ, 30^\circ$ и 120° .

Ответ: $30^\circ, 30^\circ$ и 120° .

Пример 37(А). В равнобедренном треугольнике основание равно 10 см, а разность двух неравных высот равна отношению периметра к боковой стороне. Найти боковую сторону.

Решение.

Пусть основание $AB = 10$ см, $AC = BC = x$. Пусть h_1 и h_2 — высоты треугольника, причем $h_1 > h_2$.



По условию задачи $h_1 - h_2 = \frac{P}{x}$, где P — периметр $\triangle ABC$,

$$h_1 - h_2 = \frac{2x+10}{x} = \frac{2(x+5)}{x}. \quad (1)$$

$$\text{Из } \triangle ADC \quad x^2 = h_1^2 + 25, \quad (2)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h_1 = 5h_1. \quad (3)$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE = \frac{1}{2} x h_2. \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), имеем

$$5h_1 = \frac{1}{2} x h_2, \text{ откуда } h_2 = \frac{10h_1}{x}, \text{ тогда (1) примет вид}$$

$$h_1 - \frac{10h_1}{x} = \frac{2(x+5)}{x}, \text{ откуда } h_1 = \frac{2(x+5)}{x-10}.$$

Учитывая (2), имеем

$$x^2 = \frac{4(x+5)^2}{(x-10)^2} + 25, \text{ или } (x^2 - 25)(x-10)^2 = 4(x+5)^2.$$

Так как по смыслу задачи $x > 0$, то $x + 5 \neq 0$, тогда из последнего равенства получим

$$(x-5)(x-10)^2 = 4(x+5), \text{ или, упростив, имеем}$$

$$x^3 - 25x^2 + 196x - 520 = 0. \quad (5)$$

Можно убедиться в том, что $x = 13$ — корень уравнения (5), тогда левую часть уравнения можно преобразовать так:

$$x^2(x-13) - 12x(x-13) + 40(x-13) = 0,$$

$$(x-13)(x^2 - 12x + 40) = 0, \text{ откуда } x = 13.$$

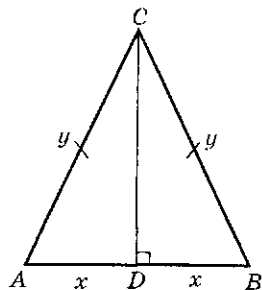
Уравнение $x^2 - 12x + 40 = 0$ не имеет действительных корней, так как $D < 0$.

Итак, боковая сторона $\triangle ABC$ равна 13 см.

$$AC = CB = 13 \text{ см.}$$

Ответ: 13 см.

Пример 38(А). В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 12, а сумма радиусов вписанной и описанной окружностей равна $83/8$. Найти стороны треугольника.



Решение.

Пусть $AC = BC = y > 0$,

$AB = 2x > 0$.

По условию $CD = 12$, тогда из $\triangle ADC$ получим

$$y^2 - x^2 = 144. \quad (1)$$

Известно, что $S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$, где

$a = b = y$, $c = AB = 2x$, тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{xy^2}{2R}. \quad (2)$$

С другой стороны, $S_{\triangle ABC} = p \cdot r = \frac{1}{2}(2y + 2x)r =$

$$= (x + y)r; S_{\triangle ABC} = (x + y)r. \quad (3)$$

Кроме того, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD = 12x$. (4)

Учитывая (4), соотношения (2) и (3) примут вид

$$\frac{xy^2}{2R} = 12x, \text{ или } y^2 = 24R, \text{ откуда } R = \frac{y^2}{24}. \quad (5)$$

Аналогично из (3) имеем $(x + y)r = 12x$, откуда

$$r = \frac{12x}{x + y}. \quad (6)$$

По условию задачи $R + r = \frac{83}{8}$, тогда, складывая (5)

и (6), получим $\frac{12x}{x + y} + \frac{y^2}{24} = \frac{83}{8}$, или, учитывая (1), име-

ем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{12x}{x + y} + \frac{y^2}{24} = \frac{83}{8}, \\ y^2 - x^2 = 144. \end{cases}$$

Заметим, что решение полученной системы обычным способом, например подстановкой, приводит к большим техническим сложностям. Приведем другой способ решения с помощью подстановки: $y = tx$, где $t > 0$.

$$\begin{cases} \frac{12x}{x + tx} + \frac{t^2x^2}{24} = \frac{83}{8}, \\ t^2x^2 - x^2 = 144; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{12}{1 + t} + \frac{t^2x^2}{24} = \frac{83}{8}, \\ x^2 = \frac{144}{t^2 - 1}. \end{cases}$$

Подставив значение x^2 в I уравнение полученной системы, получим после упрощения $35t^2 - 96t + 13 = 0$, откуда $t_1 = \frac{13}{5}$, $t_2 = \frac{1}{7}$.

Учитывая подстановку $y = tx$, получим две системы:

$$1) \begin{cases} y = \frac{13}{5}x, \\ y^2 - x^2 = 144; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = \frac{1}{7}x, \\ y^2 - x^2 = 144. \end{cases}$$

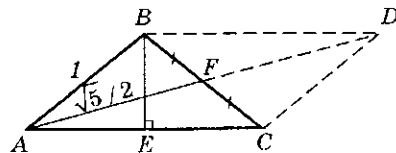
Из системы 1 имеем $x = 5$, $y = 13$.

Система 2 не имеет решений.

Итак, $x = 5$, $y = 13$, тогда $AB = 2x = 10$ и $AC = BC = 13$.

Ответ: 13, 13, 10.

Пример 39(А). В тупоугольном равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 1, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Найти площадь треугольника.



Решение.

Пусть $AB = BC = 1$, $AF = \frac{\sqrt{5}}{2}$ — медиана, BE — вы-

сота $\triangle ABC$.

Достроим $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABCD$, тогда по свойству параллелограмма имеем

$$BC^2 + AD^2 = 2(AB^2 + AC^2), \text{ или } 1 + (\sqrt{5})^2 =$$

$$= 2(1 + AC^2), \text{ откуда находим } AC = \sqrt{2},$$

$$\text{тогда } AE = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из $\triangle AEB$ по теореме Пифагора

$$BE = \sqrt{AB^2 - AE^2}, \text{ или}$$

$$BE = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ следовательно,}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BE = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

Итак, $S_{\triangle ABC} = 0,5$ (кв. ед.).

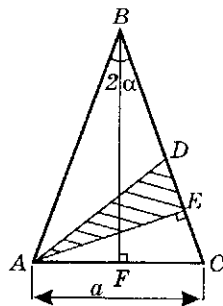
Ответ: 0,5.

Пример 40(А). В равнобедренном треугольнике с основанием a острый угол при вершине равен 2α . Найти площадь треугольника, заключенного между медианой и высотой, проведенными к боковой стороне.

Решение.

Пусть в $\triangle ABC$ $AB = BC$, $AC = a$. $\angle B = 2\alpha$, AE — высота к боковой стороне BC , AD — медиана, тогда

$$S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2} AE \cdot DE. \quad (1)$$



Из $\triangle BFC$ $\angle C = 90^\circ - \alpha$, из $\triangle AEC$ $\angle EAC = 90^\circ - \angle C = \alpha$, тогда $AE = a \cos \alpha$ и $DE = DC - EC = \frac{1}{2} BC - EC$. (2)

Из $\triangle AEC$ $EC = AC \sin \alpha = a \sin \alpha$, тогда (2) примет вид $DE = \frac{1}{2} BC - a \sin \alpha$.

$$\text{Из } \triangle BFC \quad BC = \frac{FC}{\sin \alpha} = \frac{a}{2 \sin \alpha}, \text{ значит,}$$

$$DE = \frac{a}{4 \sin \alpha} - a \sin \alpha = \frac{a}{4} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 4 \sin \alpha \right). \quad (3)$$

Учитывая (3) и $AE = a \cos \alpha$, равенство (1) примет вид

$$\begin{aligned} S_{\triangle ADE} &= \frac{1}{2} a \cos \alpha \cdot \frac{a}{4} \left(\frac{1}{\sin \alpha} - 4 \sin \alpha \right) = \\ &= \frac{a^2}{8} (1 - 4 \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

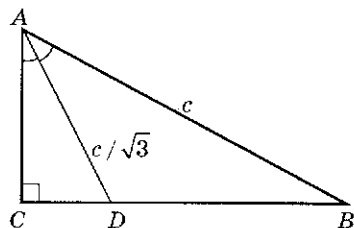
Замечание. Выражение в скобке можно разложить на множители (привести к виду, удобному для логарифмирования):

$$\begin{aligned} 1 - 4 \sin^2 \alpha &= 4 \left(\frac{1}{4} - \sin^2 \alpha \right) = 4 \left(\frac{1}{2} - \sin \alpha \right) \left(\frac{1}{2} + \sin \alpha \right) = \\ &= 4 (\sin 30^\circ - \sin \alpha) (\sin 30^\circ + \sin \alpha) = \\ &= 4 \left(2 \sin \frac{30^\circ - \alpha}{2} \cos \frac{30^\circ}{2} \right) \cdot \left(2 \sin \frac{30^\circ + \alpha}{2} \cos \frac{30^\circ - \alpha}{2} \right) = \\ &= 4 \left(2 \sin \frac{30^\circ - \alpha}{2} \cos \frac{30^\circ - \alpha}{2} \right) \cdot \left(2 \sin \frac{30^\circ + \alpha}{2} \cos \frac{30^\circ + \alpha}{2} \right) = \\ &= 4 \sin (30^\circ - \alpha) \sin (30^\circ + \alpha), \text{ тогда} \\ S_{\triangle ADE} &= \frac{a^2}{2} \sin (30^\circ - \alpha) \sin (30^\circ + \alpha) \operatorname{ctg} \alpha. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{a^2}{8}(1 - 4 \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$, или

$$\frac{a^2}{2} \sin(30^\circ - \alpha) \sin(30^\circ + \alpha) \operatorname{ctg} \alpha.$$

Пример 41(А). Найти катеты прямоугольного треугольника, если гипотенуза равна c , а биссектриса одного из острых углов равна $\frac{c}{\sqrt{3}}$.



Решение.

Пусть $\angle CAD = \angle DAB = \alpha$.

Из $\triangle ACD$ $AC = AD \cos \alpha = \frac{c}{\sqrt{3}} \cos \alpha$.

Из $\triangle ABC$ $AC = AB \cos 2\alpha = c \cos 2\alpha$.

Сравнивая правые части, имеем

$$\frac{c}{\sqrt{3}} \cos \alpha = c \cos 2\alpha, \text{ или } \sqrt{3} \cos 2\alpha - \cos \alpha = 0.$$

Так как $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$, то полученное уравнение примет вид $2\sqrt{3} \cos^2 \alpha - \cos \alpha - \sqrt{3} = 0$, откуда находим $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

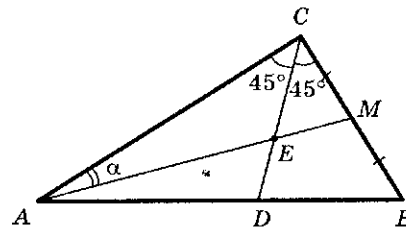
Заметим, что $\angle A < 90^\circ$, тогда $\cos \alpha > 0$, так что значение $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ не подходит. Если $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $\alpha = 30^\circ$, значит, $\angle CAD = \angle DAB = 30^\circ$, а $\angle CAB = 60^\circ$ и $\angle B = 30^\circ$. Следовательно, $AC = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} c$, $BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $AC = \frac{c}{2}$, $BC = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Замечание. Попытка решить задачу алгебраическим способом приводит к решению системы трех уравнений с тремя неизвестными, например: $AC = x$,

$$BC = y, CD = z, \text{ тогда } \begin{cases} x^2 + y^2 = c^2, \\ x^2 + z^2 = \frac{1}{3}c^2, \text{ и т. д.} \\ \frac{x}{c} = \frac{z}{y-z}, \end{cases}$$

Пример 42(А). В прямоугольном $\triangle ABC$ с катетами $AC = 12$, $BC = 5$ проведены медиана AM и биссектриса CD , пересекающиеся в точке E . Найти $S_{\triangle CEM}$.



Решение.

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13.$$

Так как CD — биссектриса, то $\angle ACD = \angle BCD = 45^\circ$.

Пусть $\angle CAM = \alpha$. По условию задачи AM — медиана $\triangle ABC$, т. е. $CM = \frac{1}{2} BC = \frac{5}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle ACM \quad AM &= \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{12^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \\ &= \sqrt{144 + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{601}}{2}, \text{ тогда } \cos \alpha = \frac{AC}{AM} = \frac{24}{\sqrt{601}}. \end{aligned}$$

$$\text{По свойству биссектрисы } \frac{AC}{CM} = \frac{AE}{EM} = \frac{12}{2,5} = \frac{24}{5}.$$

$$\text{Кроме того, } AM = AE + EM = \frac{\sqrt{601}}{2}.$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{AE}{EM} = \frac{24}{5}, \\ AE + EM = \frac{\sqrt{601}}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} 5 \cdot AE = 24 \cdot EM, \\ EM = \frac{\sqrt{601}}{2} - AE. \end{cases}$$

Решая полученную систему способом подстановки, имеем $5AE = 24 \left(\frac{\sqrt{601}}{2} - AE \right)$, или

$$5AE = 12\sqrt{601} - 24AE, \quad 29AE = 12\sqrt{601},$$

$$\text{откуда } AE = \frac{12\sqrt{601}}{29}.$$

Для нахождения искомой площади $\triangle CEM$ остается найти длину CE .

$$\text{Из } \triangle AEC, \text{ где } AC = 12, AE = \frac{12\sqrt{601}}{29}, \angle ACE = 45^\circ,$$

найдем CE по теореме косинусов:

$$CE^2 = AC^2 + AE^2 - 2AC \cdot AE \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

$$CE^2 = 12^2 + \left(\frac{12\sqrt{601}}{29} \right)^2 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{12\sqrt{601}}{29} \cdot \frac{24}{\sqrt{601}},$$

$$CE^2 = 12^2 \left(1 + \frac{601}{841} \right) - \frac{6912}{29},$$

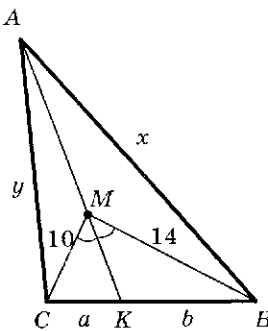
$$CE^2 = \frac{144 \cdot 1442}{841} - \frac{6912}{29} = \frac{7200}{841}, \text{ откуда } CE = \frac{60\sqrt{2}}{29}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle CEM} = \frac{1}{2} CE \cdot CM \cdot \sin 45^\circ =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{60\sqrt{2}}{29} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{75}{29}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{75}{29}.$$

Пример 43(А). В прямоугольном $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$), $BC = 18$. Вершина A соединена с точкой K , взятой на катете BC , а точка M , взятая на AK , соединена с вершинами C и B , причем $CM = 10$, $MB = 14$. Найти AB и AC , если MK — биссектриса $\angle CMB$.



Решение.

Из $\triangle ABC$, где $BC = 18$, имеем $x^2 - y^2 = 324$.

Пусть $CK = a$, $KB = b$, тогда $a + b = 18$.

Так как MK — биссектриса $\angle CMB$, то $\frac{a}{b} = \frac{CM}{MB} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$,

откуда $a = \frac{5}{7}b$. Учитывая, что $a + b = 18$, находим

$$b = \frac{21}{2} \text{ и } a = \frac{5}{7} \cdot \frac{21}{2} = \frac{15}{2}.$$

Пусть $\angle CAK = \angle KAB = \alpha$.

Из $\triangle ABC$ $\cos 2\alpha = \frac{y}{x}$, а из $\triangle ACK$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{y} = \frac{15}{2y}$.

Поскольку $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$, то

$$\left(1 - \left(\frac{15}{2y} \right)^2 \right) : \left(1 + \left(\frac{15}{2y} \right)^2 \right) = \frac{y}{x}, \text{ или } \frac{4y^2 - 225}{4y^2 + 225} = \frac{y}{x}, \text{ или}$$

$$\left(\frac{4y^2 - 225}{4y^2 + 225} \right)^2 = \frac{y^2}{x^2}.$$

Но $x^2 - y^2 = 324$, $x^2 = y^2 + 324$, тогда

$$\left(\frac{4y^2 - 225}{4y^2 + 225} \right)^2 = \frac{y^2}{y^2 + 324}.$$

Пусть $y^2 = t$, $t > 0$, получим $\left(\frac{4t - 225}{4t + 225} \right)^2 = \frac{t}{t + 324}$,

или $(4t - 225)^2(t + 324) = t(4t + 225)^2$.

После преобразований получим $1584t^2 - 583\,200t + 16\,402\,500 = 0$, или $44t^2 - 16\,200t + 455\,625 = 0$, откуда находим $t_1 = 1350/4$, $t_2 = 1350/44$.

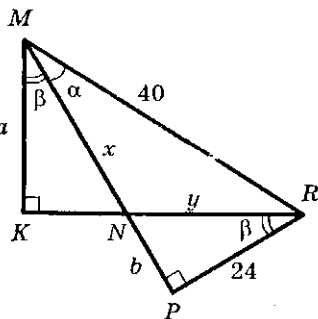
1) Если $t = 1350/4$, то $y^2 = 1350/4$, $y = 15\sqrt{6}/2$, тогда $x^2 = y^2 + 324 = 2646/4$, $x = 21\sqrt{6}/2$. Оба значения подходят, так как $y < x$.

2) Если $t = 1350/44$, то $y^2 = 1350/44$,
 $y = \frac{15}{2} \sqrt{\frac{6}{11}} = \frac{15\sqrt{66}}{22}$, тогда $x^2 = \frac{675}{22} + 324 = \frac{15\,606}{44}$,
откуда $x = \frac{51}{2} \sqrt{\frac{6}{11}} = \frac{51\sqrt{66}}{22}$, где условие $y < x$ также выполняется.

Ответ: 1) $AB = \frac{21\sqrt{6}}{2}$, $AC = \frac{15\sqrt{6}}{2}$;

2) $AB = \frac{51\sqrt{66}}{22}$, $AC = \frac{15\sqrt{66}}{22}$.

Пример 44(А). Прямоугольные треугольники MKR и MPR с общей гипотенузой $MR = 40$ расположены так, что катеты MP и KR пересекаются в точке N . Найти длины MN и NR , если $PR = 24$.



Решение.

Пусть $MK = a$, $NP = b$.

Из $\triangle MPR$ $MP = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32$.

Пусть $\angle PMR = \alpha$.

Заметим, что $\triangle MKN \sim \triangle NRP$ ($\angle K = \angle P = 90^\circ$ и $\angle KNM = \angle PNR$ — как вертикальные), тогда

$$\cos \alpha = \frac{MP}{MR} = \frac{4}{5}.$$

Из $\triangle MNR$ по теореме косинусов

$$y^2 = x^2 + 40^2 - 2 \cdot x \cdot 40 \cdot \frac{4}{5}, \text{ или } y^2 = x^2 - 64x + 1600.$$

Пусть $\angle KMN = \angle NRP = \beta$, тогда $\cos \beta = \frac{a}{x} = \frac{24}{y}$,

$$\text{откуда } a = \frac{24x}{y}.$$

Из $\triangle MKN$ $a^2 = x^2 - 49$, значит, $\left(\frac{24x}{y}\right)^2 = x^2 - 49$,

$$\text{или } \frac{576x^2}{y^2} = x^2 - 49.$$

Подставляя значение y^2 , имеем $(x^2 - 64x + 1600) \times (x^2 - 49) = 576x^2$. Упрощая полученное уравнение, получим $x^4 - 64x^3 + 975x^2 + 3136x - 78\,400 = 0$.

Можно убедиться, что $x = 25$ — корень уравнения, тогда $x^3(x - 25) - 39x^2(x - 25) + 3136(x - 25) = 0$, или $(x - 25)(x^3 - 39x^2 + 3136) = 0$, откуда $x_1 = 25$, тогда $y^2 = 25^2 - 64 \cdot 25 + 1600$, $y^2 = 25^2$, $y = 25$.

Итак, $x = 25$, $y = 25$ — одно из решений задачи. Остается решить уравнение $x^3 - 39x^2 + 3136 = 0$. Можно убедиться, что оно не имеет целых корней. Запи-

шем его в виде $x^2(39 - x) = 3136$, или $39 - x = \left(\frac{56}{x}\right)^2$.

Графическое решение показывает, что полученное уравнение имеет еще три корня, из которых один отрицательный, что не удовлетворяет условию задачи, так как $x > 0$.

Два других корня можно вычислить приближенно: $x_2 \approx 10,5$, $x_3 \approx 36,7$, тогда $y_2^2 = 10,5^2 - 64 \cdot 10,5 + 1600$, откуда находим $y_2 \approx 32,2$.

Аналогично $y_3^2 = 36,7^2 - 64 \cdot 36,7 + 1600$, $y_3 \approx 24,5$.

Ответ: 1) $MN = 25$, $NR = 25$;

2) $MN \approx 10,5$, $NR \approx 32,2$;

3) $MN \approx 36,7$, $NR \approx 24,5$.

Пример 45(А). Равнобедренный $\triangle ABC$ вписан в окружность. Высота CD делится центром O на отрезки $OC = 13$ и $OD = 5$. Найти $S_{\triangle ABC}$.

Решение.

Высота $CD = 13 + 5 = 18$,
тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = 9 \cdot AB.$$

Так как $\triangle ABC$ — равнобедренный и CD — высота (по условию), то CD — медиана.

Пусть $AC = BC = x$, $AD = BD = y$, тогда $S_{\triangle ABC} = 18y$.

$$\text{Из } \triangle ACD \quad x^2 - y^2 = 18^2.$$

$$\text{Но } S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}, \text{ где } a = b = AC = x, c = AB = 2y, R =$$

$$= OC = 13, \text{ тогда } S_{\triangle ABC} = \frac{x^2 \cdot 2y}{4 \cdot 13} = 18y, \text{ откуда } x^2 = 26 \cdot 18.$$

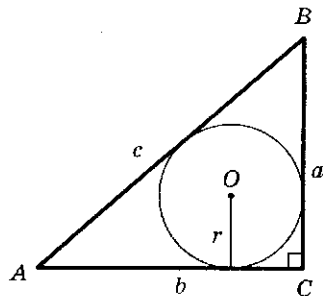
$$\text{Но } x^2 - y^2 = 18^2, \text{ или } y^2 = 26 \cdot 18 - 18^2 = 18(26 - 18) = 144, \text{ т. е. } y = 12. \text{ Значит, } S_{\triangle ABC} = 18y = 18 \cdot 12 = 216.$$

Ответ: 216.

Пример 46. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности его катетов. Найти углы треугольника.

Решение.

Пусть $BC = a$, $AC = b$ — катеты, $AB = c$ — гипотенуза $\triangle ABC$. Пусть для определенности $a < b$.



$$\text{Согласно условию } r = \frac{b-a}{2},$$

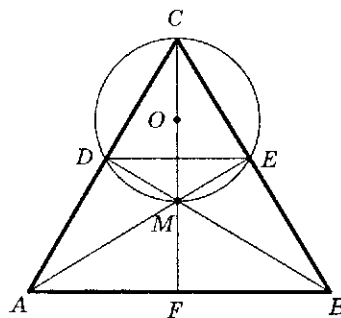
где r — радиус вписанной окружности.

$$\text{С другой стороны, } r = \frac{a+b-c}{2}.$$

$$\text{Следовательно, } \frac{b-a}{2} = \frac{a+b-c}{2}, \text{ откуда } c = 2a, \text{ зна-}$$

чит, $\angle A = 30^\circ$ (по свойству катета, лежащего против угла в 30°), тогда $\angle B = 60^\circ$.

Ответ: $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$.



Пример 47(А). Точки D и E — соответственно середины сторон AC и BC треугольника ABC . Окружность, описанная около $\triangle CDE$, проходит через точку M пересечения медиан $\triangle ABC$. Найти $S_{\triangle ABC}$, если $AB = 10$, $AE = BD$.

Решение.

Так как по условию $AE = BD$, то $AC = BC$. Но тогда $CD = CE$, а по свойству медиан $MD = ME = \frac{1}{3} AE =$

$$= \frac{1}{3} BD, \text{ значит, } \triangle CDM = \triangle CEM.$$

Из равенства треугольников следует, что $\angle CDM = \angle CEM$. По свойству четырехугольника $CDME$, вписанного в окружность, имеем

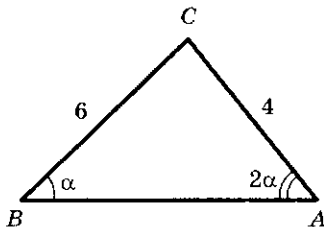
$$\angle CDM + \angle CEM = 180^\circ \Rightarrow \angle CDM = \angle CEM = 90^\circ.$$

Следовательно, $\triangle CDB = \triangle ABD$ (по двум катетам). Но тогда $AB = BC$, т. е. $\triangle ABC$ — равнобедренный, зна-

чит, $S_{\triangle ABC} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$, где $a = 10$ — сторона $\triangle ABC$, т. е.

$$S_{\triangle ABC} = 25\sqrt{3}.$$

Ответ: $25\sqrt{3}$.



Пример 48(А). В $\triangle ABC$ $\angle A = 2\angle B$, $AC = 4$, $BC = 6$. Найти длину AB .

Решение.

Пусть $AB = x$, $\angle B = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$.

По теореме синусов

$$\frac{6}{\sin 2\alpha} = \frac{4}{\sin \alpha}, \text{ или}$$

$3 \sin \alpha = 2 \sin 2\alpha$. Но $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$, тогда имеем
 $3 \sin \alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha$, откуда $\cos \alpha = \frac{3}{4}$.

По теореме косинусов

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \alpha, \text{ или}$$

$$16 = x^2 + 6^2 - 2x \cdot 6 \cdot \cos \alpha, \text{ или } x^2 - 9x + 20 = 0,$$

откуда находим $x_1 = 4, x_2 = 5$.

Если $x = 4$, то $AB = 4$ и $AB = AC$, т. е. $\triangle ABC$ — равнобедренный и прямоугольный, где $\angle B = \angle C = 45^\circ$, $\angle A = 90^\circ$.

Если $x = 5$, то $AB = 5$.

Ответ: 4 или 5.

Пример 49(А). В $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 6, BC = 5, AC = 3$ вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает стороны AB и BC соответственно в точках D и E . Найти периметр треугольника BDE .

Решение.

Пусть M, N и F — точки касания вписанной в $\triangle ABC$ окружности, DE — касательная. По свойству касательных $BM = BN, CF = CN, AM = AF$. Обозначим $BM = BN = x$, тогда $CF = CN = 5 - x, AF = AM = 6 - x$, значит, $AC = AF + CF = 11 - 2x = 3$, откуда $x = 4$.

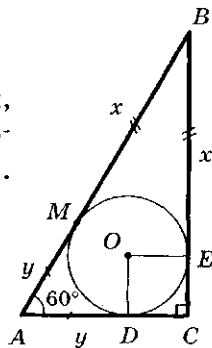
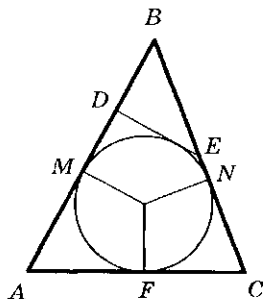
Следовательно, $P_{BDE} = BD + BE + DE = BM + BN = 2x = 8$.

Ответ: 8.

Пример 50(А). Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен $4\sqrt{3}$, а острый угол — 60° . Найти площадь треугольника.

Решение.

Пусть $OD = OE = r = 4\sqrt{3}$ — радиус вписанной окружности, $\angle A = 60^\circ$, тогда $\angle B = 30^\circ \Rightarrow AB = 2 \cdot AC$.



По свойству касательных $BM = BE = x, AM = AD = y, DC = CE = r$, тогда $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} (y + r)(x + r)$.

Поскольку $AB = 2 \cdot AC$, то имеем $x + y = 2(y + r)$, или $x = y + 2r$.

По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$, или $(y + r)^2 + (x + r)^2 = (x + y)^2$.

Учитывая, что $x = y + 2r$, получим

$$(y + r)^2 + (y + 3r)^2 = (2y + 2r)^2,$$

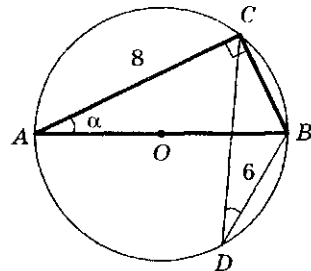
откуда находим $3r^2 = y^2$, т. е. $y = r\sqrt{3}$, тогда $x = 2r + r\sqrt{3}$,

значит, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} (r + r\sqrt{3})(3r + r\sqrt{3}) = \frac{1}{2} r^2 \sqrt{3} (1 + \sqrt{3})^2 = r^2 \sqrt{3} (2 + \sqrt{3})$.

Учитывая, что $r = 4\sqrt{3}$, имеем $S_{\triangle ABC} = 48\sqrt{3} (2 + \sqrt{3})$.

Ответ: $48\sqrt{3} (2 + \sqrt{3})$.

Пример 51(А). Точки C и D расположены по разные стороны от гипотенузы AB прямоугольного $\triangle ABC$ так, что $AC = 8, BD = 6$, причем $S_{\triangle ABC} : S_{\triangle CBD} = 25 : 18$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC .



Решение.

Пусть $AO = OB = R$ — радиус окружности, описанной около прямоугольного $\triangle ABC$, где $\angle C = 90^\circ$. Заметим, что $\angle CAB = \angle CDB = \alpha$ — как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу BC .

Согласно условию $18S_{\triangle ABC} = 25S_{\triangle CBD}$, или

$$18 \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin \alpha = 25 \cdot \frac{1}{2} \cdot CD \cdot BD \cdot \sin \alpha,$$

откуда $CD = \frac{48R}{25}$.

Из $\triangle CDB$ по теореме косинусов имеем

$$BC^2 = CD^2 + BD^2 - 2 \cdot CD \cdot BD \cdot \cos \alpha,$$

где $BD = 6$, $\cos \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{R}$, $BC = 2R \sin \alpha$,

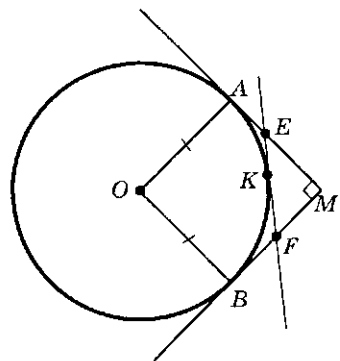
$$BC^2 = 4R^2 \sin^2 \alpha = 4R^2(1 - \cos^2 \alpha) = 4R^2 \left(1 - \frac{16}{R^2}\right) =$$

$$= 4R^2 - 64, \text{ тогда } 4R^2 - 64 = \left(\frac{48R}{25}\right)^2 + 36 - \left(\frac{48}{5}\right)^2,$$

$$\text{или } \left(2R - \frac{48R}{25}\right) \left(2R + \frac{48R}{25}\right) = \left(10 - \frac{48}{5}\right) \left(10 + \frac{48}{5}\right),$$

$$\text{или } \frac{2R}{25} \cdot \frac{98R}{25} = \frac{2}{5} \cdot \frac{98}{5}, \text{ откуда } \frac{R^2}{25} = 1, R = 5.$$

Ответ: 5.



Пример 52(A). Радиус окружности равен 10. Из точки M , взятой вне окружности, проведены касательные MA и MB (A и B — точки касания), $AM \perp MB$. FE — также касательная к окружности, причем $E \in AM$, $F \in BM$. Найти периметр $\triangle MEF$.

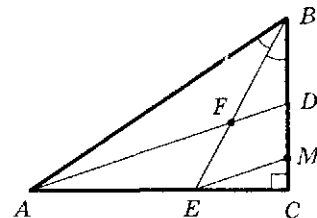
Решение.

$P_{\triangle MEF} = ME + FM + EF$. Пусть K — точка касания касательной EF к окружности, тогда $AE = EK$ и $KF = BF$ (по свойству касательных).

Заметим, что $AOBM$ — квадрат ($\angle M$ — прямой, $OA \perp AM$ и $OB \perp BM$), тогда $P_{\triangle MEF} = ME + FM + (EK + KF) = ME + FM + AE + FB = (ME + AE) + (MF + FB) = AM + MB = 10 + 10 = 20$.

Ответ: 20.

Пример 53(A). В $\triangle ABC$ $\angle C = 90^\circ$. Известно, что биссектриса BE и медиана AD пересекаются в точке F . Найти углы треугольника, если $BF = 12$, $FE = 8$.



Решение.

Пусть $AC = x$, $BC = y$.

Из точки E проведем $EM \parallel AD$, тогда $\frac{BD}{DM} = \frac{BF}{FE} = \frac{3}{2}$,

откуда $DM = \frac{2}{3} BD$.

Так как AD — медиана, то $BD = DC = \frac{1}{2} y$, значит,

$$DM = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} y = \frac{1}{3} y, \text{ тогда } CM = CD - DM = \frac{1}{2} y - \frac{1}{3} y = \frac{1}{6} y.$$

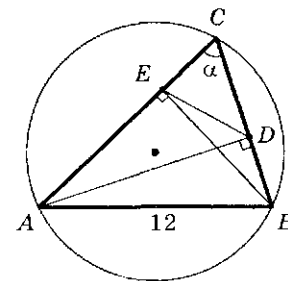
Кроме того, $\frac{AE}{EC} = \frac{DM}{CM}$, или $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{3} y : \frac{1}{6} y = 2$.

Согласно условию задачи BE — биссектриса, тогда $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}$, или $\frac{AB}{BC} = 2$, т. е. $AB = 2 \cdot BC$.

Значит, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$.

Ответ: $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

Пример 54(A). В остроугольном $\triangle ABC$ $AB = 18$, $S_{\triangle ABC} = 24$, а радиус описанной окружности равен $27/\sqrt{5}$. Найти площадь четырехугольника $ABDE$, если AD и BE — высоты $\triangle ABC$.



Решение.

Заметим, что $\triangle ABC \sim \triangle CED$, тогда

$$\frac{CE}{BC} = \frac{CD}{AC} = \frac{DE}{AC} = \cos \alpha, \text{ где } \alpha = \angle ECD.$$

По теореме синусов из $\triangle ABC$ $\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R$, где

$$R = 27/\sqrt{5}, AB = 18, \text{ тогда } \sin \alpha = \frac{18}{2 \cdot 27/\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}, \text{ зна-}$$

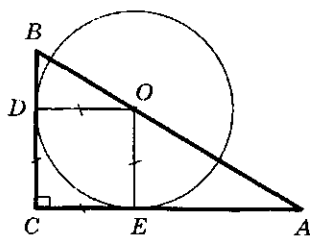
$$\text{чит, } \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Поскольку $\frac{S_{\triangle CED}}{S_{\triangle ABC}} = \cos^2 \alpha$, то $\frac{S_{\triangle CED}}{24} = \frac{4}{9}$, откуда

$$S_{\triangle CED} = \frac{24 \cdot 4}{9} = \frac{32}{3}.$$

$$\text{Следовательно, } S_{\triangle BDE} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle CED} = 24 - \frac{32}{3} = \frac{40}{3}.$$

Ответ: $40/3$.



Пример 55(A). Центр окружности, касающийся катетов прямоугольного треугольника, лежит на гипотенузе. Найти радиус окружности, если он в 7 раз меньше суммы катетов, а площадь треугольника равна 56.

Решение.

Пусть точка O — центр окружности, касающейся катетов AC и BC в точках соответственно E и D .

Пусть $AC = x$, $BC = y$, $AE = b$, $BD = a$.

Так как $BC \perp OD$, $AC \perp OE$ и $OE = OD = r$, то $CDOE$ — квадрат, тогда $AC = b + r$, $BC = a + r$, т. е. $x = b + r$, $y = a + r$.

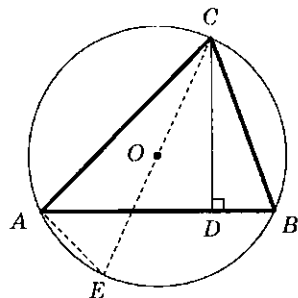
Из подобия $\triangle BDO$ и $\triangle BCA$ имеем $\frac{a}{r} = \frac{a+r}{b+r}$, откуда находим $ab = r^2$.

Кроме того, $S_{\triangle ABC} = 56$, тогда $(a+r)(b+r) = 112$, или $ab + (a+b)r + r^2 = 112$. Учитывая, что $ab = r^2$, имеем

$2r^2 + (a+b)r = 112$. Согласно условию $7r = x + y$, или $a + b = 5r$, тогда получим $2r^2 + 5r^2 = 112$, $r^2 = 16$, $r = 4$.

Ответ: 4.

Пример 56(A). Две стороны остроугольного треугольника равны соответственно 13 см и 20 см. Радиус описанного около треугольника круга равен $65/6$ см. Найти третью сторону треугольника.



Решение.

Пусть в $\triangle ABC$ $AC = 20$ см,

$$BC = 13 \text{ см, } OC = \frac{65}{6} \text{ см.}$$

Из вершины C опустим высоту CD и проведем диаметр CE . Далее соединим точку A с точкой E . Тогда $\triangle CAE$ прямоугольный, так как вписанный угол CAE опирается на диаметр CE . Из подобия $\triangle ACE$ и $\triangle CDB$ имеем $\frac{CD}{CB} = \frac{AC}{CE}$, откуда $CD = \frac{CB \cdot AC}{CE} = 12$ (см).

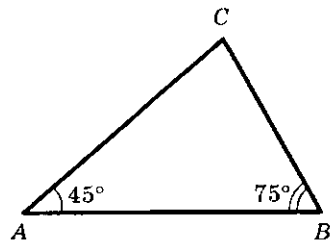
$$\text{Из } \triangle CDB \text{ } DB = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ (см).}$$

$$\text{Из } \triangle ACD \text{ } AD = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ (см).}$$

$$\text{Значит, } AB = 16 + 5 = 21 \text{ (см).}$$

Ответ: 21 см.

Пример 57(A). Окружность радиуса r проходит через середины трех сторон $\triangle ABC$, где $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 75^\circ$. Найти площадь треугольника.



Решение.

$\angle C = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$. Заметим, что $\triangle ABC$ подобен треугольнику с вершинами в серединах его сторон с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$.

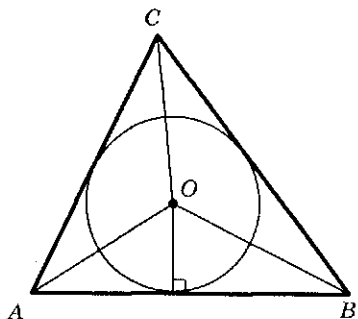
Значит, радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, равен $R = 2r$, тогда

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \angle C = \\ &= \frac{1}{2} (2r \sin \angle B) \cdot (2r \sin \angle A) \cdot \sin \angle C = \\ &= 2r^2 \sin 75^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 60^\circ. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Но } \sin 75^\circ &= \sin (45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \\ &+ \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } S_{\triangle ABC} &= 2r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + \sqrt{3}) r^2. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + \sqrt{3}) r^2.$$



Пример 58(А). В треугольнике вписана окружность. Прямые, соединяющие центр окружности с вершинами, делят треугольник на части с площадями 120, 104, 112. Найти радиус вписанной окружности.

Решение.

Пусть $AB = x$, $AC = y$, $BC = z$, r — радиус вписанной окружности.

Пусть $S_{\triangle COB} = 120$, $S_{\triangle AOC} = 104$ и $S_{\triangle AOB} = 112$, тогда $S_{\triangle ABC} = 120 + 104 + 112 = 336$.

С другой стороны,

$$S_{\triangle AOC} = \frac{1}{2} ry = 104, S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} rx = 112 \text{ и}$$

$$S_{\triangle COB} = \frac{1}{2} rz = 120.$$

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} rx = 224, \\ ry = 208, \\ rz = 240; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{224}{r}, \\ y = \frac{208}{r}, \\ z = \frac{240}{r}. \end{cases}$$

Тогда $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где

$$p = \frac{1}{2}(x+y+z) = \frac{1}{2} \left(\frac{224}{r} + \frac{208}{r} + \frac{240}{r} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{672}{r} = \frac{336}{r}.$$

$$p-x = \frac{336}{r} - \frac{224}{r} = \frac{112}{r}, \quad p-y = \frac{128}{r}, \quad p-z = \frac{96}{r}.$$

Так как $S_{\triangle ABC} = 336$, то получим

$$\frac{336}{r} \cdot \frac{112}{r} \cdot \frac{128}{r} \cdot \frac{96}{r} = 336^2, \text{ или } \frac{112 \cdot 128 \cdot 96}{r^4} = 336^2,$$

$$\text{откуда } r^4 = \frac{112 \cdot 128 \cdot 96}{336^2}, \quad r^4 = \frac{128 \cdot 96}{3} = 128 \cdot 32,$$

$$\text{или } r^4 = 4 \cdot 32 \cdot 32, \quad r^4 = (2 \cdot 32)^2 = 8^4,$$

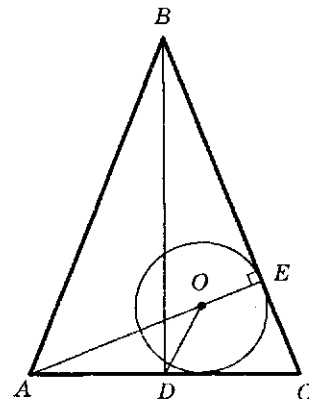
откуда $r = 8$.

Ответ: 8.

Пример 59(А). В равнобедренном $\triangle ABC$ $AB = BC = 13$, $AC = 10$. Найти радиус круга, касающегося BC в точке D — основании высоты AE и проходящего через середину AC .

Решение.

Так как $AB = BC$, то $\triangle ABC$ — равнобедренный. По



условию D — середина AC , значит, медиана BD является высотой.

$$\text{Из } \triangle ABD \quad BD = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

Пусть $\angle A = \angle C = \alpha$, AE — высота, опущенная на BC .

В $\triangle AEC \quad \angle CAE = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $OE = OD = r$ — радиус круга.

$$\text{Значит, } AE = AC \cdot \sin \alpha = 10 \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{13}.$$

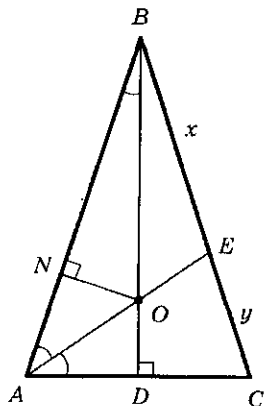
Из $\triangle AOD$ по теореме косинусов имеем $OD^2 = AO^2 + AD^2 - 2 \cdot AO \cdot AD \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, где $AD = \frac{1}{2}AC = 5$,
 $AO = AE - r = \frac{120}{13} - r$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{12}{13}$, тогда

$$r^2 = \left(\frac{120}{13} - r\right)^2 + 25 - \frac{120}{13} \cdot \left(\frac{120}{13} - r\right), \text{ или}$$

$$r^2 = \left(\frac{120}{13}\right)^2 - 2 \cdot \frac{120}{13} \cdot r + r^2 + 25 - \left(\frac{120}{13}\right) + \frac{120}{13}r, \text{ или}$$

$$\frac{120}{13}r = 25, \text{ откуда } r = \frac{13 \cdot 25}{120} = \frac{65}{24}.$$

Ответ: $\frac{65}{24}$.



Пример 60(А). Основание равнобедренного треугольника равно 12, а расстояние от вершины основания до точки пересечения биссектрис равно $3\sqrt{5}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

Решение.

Пусть в $\triangle ABC \quad AB = BC$, O — точка пересечения биссектрис, тогда точка O является центром вписанной окружности. Из точ-

ки O опустим перпендикуляр ON на AB . $OD = ON = r$ — радиус вписанной окружности. Из $\triangle AOD$, где

$$AD = \frac{1}{2}AC = 6, AO = 3\sqrt{5}, \text{ имеем}$$

$$r = OD = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 6^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Пусть $BE = x$, $CE = y$. Заметим, что $\triangle BNO \sim \triangle ABD$ (как прямоугольные, имеющие общий острый $\angle ABD$).

Тогда $\frac{BO}{NO} = \frac{AB}{AD}$, откуда $BO = \frac{1}{2}(x + y)$.

Из $\triangle ABD \quad AB^2 = AD^2 + BD^2$, или $(x + y)^2 = 36 + \left(\frac{x+y}{2} + 3\right)^2$, или $(x + y)^2 - 4(x + y) - 60 = 0$, откуда $x + y = 10$, $x + y = -6$ (не подходит, так как $x > 0$, $y > 0$).

Если $x + y = 10$, то $R = \frac{abc}{4S}$, где $a = b = x + y$,

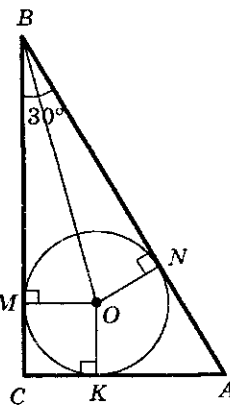
$c = AC = 12$, тогда $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$, значит, $R = \frac{10^2 \cdot 12}{4 \cdot 48} = \frac{25}{4} = 6,25$.

Ответ: 6,25.

Пример 61(А). Острый угол прямоугольного треугольника равен 30° . Найти отношение радиусов описанной и вписанной окружностей.

Решение.

Пусть в прямоугольном $\triangle ABC \quad \angle B = 30^\circ$. По свойству касательных $BM = BN$, $OM = ON = r$, где M — радиус вписанной окружности. Из равенства прямоугольных треугольников следует, что $\angle OBM = \angle OBN = 15^\circ$, т. е. BO — биссектриса $\angle B$.



Из $\triangle OMB$ $BM = r \operatorname{ctg} 15^\circ$, тогда $BC = BM + r = r(1 + \operatorname{ctg} 15^\circ)$. Так как $\angle C = 90^\circ$, то $AB = 2R$, где R — радиус описанной окружности.

Из $\triangle ABC$, где $\angle B = 30^\circ$, $BC = 2R \cos 30^\circ$.

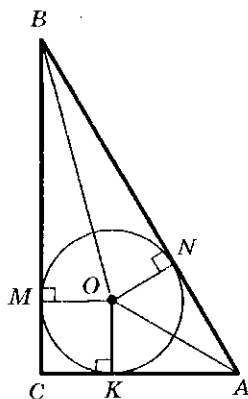
Значит, $r(1 + \operatorname{ctg} 15^\circ) = 2R \cos 30^\circ$, откуда

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + \operatorname{ctg} 15^\circ}{2 \cos 30^\circ} = \frac{1 + \operatorname{ctg} 15^\circ}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Но } \operatorname{ctg} 15^\circ &= \operatorname{ctg} (45^\circ - 30^\circ) = \frac{\operatorname{ctg} 45^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ + 1}{\operatorname{ctg} 30^\circ - \operatorname{ctg} 45^\circ} = \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \frac{R}{r} = \frac{1 + (2 + \sqrt{3})}{\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 1.$$

Ответ: $\sqrt{3} + 1$.



Пример 62(А). Расстояния от центра окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, до вершин его острых углов равны $2\sqrt{10}$ и $\sqrt{10}$. Найти длины катетов.

Решение.

По условию задачи $BO = 2\sqrt{10}$, $AO = \sqrt{10}$; M, N, K — точки касания. Пусть $\angle B = \alpha$, $\angle A = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

Так как окружность вписана в треугольник, то AO и BO — биссектрисы.

$$\text{В } \triangle BON \text{ } ON = BO \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = AO \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right), \text{ или}$$

$$2\sqrt{10} \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{10} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right), \text{ или}$$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Но } \sin \frac{\pi}{4} &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ значит, } 2 \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} - \\ &- \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ т. е. } 3 \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}, \text{ или } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}, \text{ тогда} \\ \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} &= 3. \end{aligned}$$

$$\text{Но } 1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ или } 10 = \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}}, \text{ откуда}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

$$\text{Из } \triangle BON \text{ } ON = r = BO \cdot \sin \frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{10} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = 2.$$

$$BC = BM + r = r \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \cdot (1 + 3) = 8.$$

$$AC = r + AK = r + \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) = 2 + \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} =$$

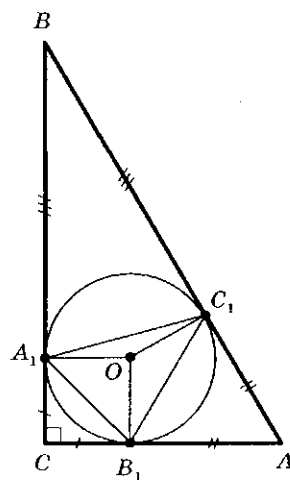
$$= 2 + 2 = 4.$$

Ответ: $AC = 4$, $BC = 8$.

Пример 63(А). В прямоугольном $\triangle ABC$ $BC = 8$, $AC = 6$. Окружность, вписанная в треугольник, касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1 . Найти отношение площади $\triangle ABC$ к площади $\triangle A_1B_1C_1$.

Решение.

Пусть r — радиус вписанной окружности. Известно, что в прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c



$$r = \frac{1}{2}(a + b - c), \text{ где } a = 6, b = 8, \text{ тогда } AB = c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

$$\text{Значит, } r = \frac{1}{2}(6 + 8 - 10) = 2.$$

Поскольку $\sin \angle B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$, $\sin \angle A = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{5}$, то $A_1B = BC - r = 6$, $AC_1 = AB - BC_1 = AB - A_1B = 10 - 6 = 4$, $A_1C = BC - A_1B = 8 - 6 = 2$.

$$\text{Тогда } S_{\Delta A_1 B_1 C_1} = S_{\Delta ABC} - (S_{\Delta A_1 C B_1} + S_{\Delta A B_1 C_1} + S_{\Delta A_1 B C_1}).$$

$$\text{Но } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24;$$

$$S_{\Delta A_1 C B_1} = \frac{1}{2} A_1 C \cdot B_1 C = \frac{1}{2} r^2 = 2.$$

$$S_{\Delta A_1 B C_1} = \frac{1}{2} A_1 B \cdot B C_1 \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{3}{5} = \frac{54}{5};$$

$$S_{\Delta A B_1 C_1} = \frac{1}{2} A B_1 \cdot A C_1 \cdot \sin \angle A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{5}.$$

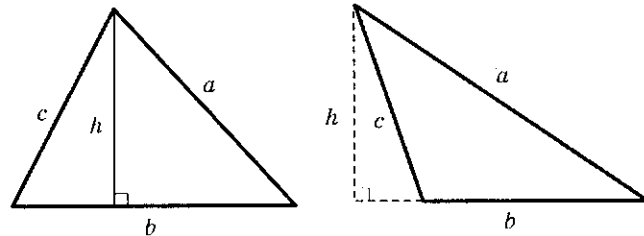
$$\text{Следовательно, } S_{\Delta A_1 B_1 C_1} = 24 - \left(2 + \frac{32}{5} + \frac{54}{5}\right) = 24 - 19,2 = 4,8. \text{ Тогда } \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1 B_1 C_1}} = \frac{24}{4,8} = 5.$$

Ответ: 5.

Пример 64(А). Существует ли треугольник, стороны и высота которого связаны соотношением $a > b > c > h$ и выражаются последовательными целыми числами, если высота h опущена на сторону b ?

Решение.

Пусть $h = x$, тогда $c = x + 1$, $b = x + 2$, $a = x + 3$, так как (по условию) стороны и высота выражаются последовательными целыми числами.



По формуле Герона $S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{3}{2}(x+2)$, $p - a = \frac{1}{2}x$, $p - b = \frac{1}{2}(x+2)$, $p - c = \frac{1}{2}(x+4)$.

Следовательно,

$$S_{\Delta} = \sqrt{\frac{3}{2}(x+2) \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}(x+2) \cdot \frac{1}{2}(x+4)} = \frac{1}{4} \sqrt{3x(x+2)^2(x+4)} = \frac{1}{4}(x+2)\sqrt{3x(x+4)}. \quad (1)$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\Delta} = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(x+2)x. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), имеем

$$\frac{1}{4}(x+2)\sqrt{3x(x+4)} = \frac{1}{2}(x+2)x,$$

или, разделив обе части на $x+2 \neq 0$, имеем

$$\sqrt{3x(x+4)} = 2x, \text{ или } 3x(x+4) = 4x^2, x \neq 0,$$

$$3(x+4) = 4x, \text{ откуда } x = 12.$$

$$\text{Итак, } h = 12, c = 13, b = 14, a = 15.$$

Ответ: существует, $h = 12$, $c = 13$, $b = 14$, $a = 15$.

Пример 65(А). По двум сторонам треугольника a и b найти радиус описанной окружности, если известно, что угол, лежащий против третьей стороны, в два раза больше угла, лежащего против стороны b .

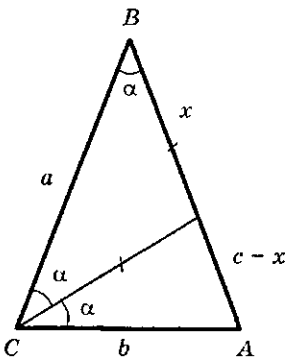
Решение.

По условию задачи $BC = a$, $AC = b$.

Пусть $AB = c$, $BD = x$, тогда $AD = c - x$.

По условию задачи $\angle C = 2\angle B$. Если $\angle B = \alpha$, то $\angle C = 2\alpha$.

Проведем биссектрису CD , тогда $\angle BCD = \angle CBD = \alpha$, т. е. $\triangle CDB$ — равнобедренный и $BD = CD = x$. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника имеем $\frac{c-x}{b} = \frac{x}{a}$, или $ac - ax = bx$,



$$ac = (a+b)x, \text{ откуда } c = \frac{a+b}{a}x. \quad (1)$$

Заметим, что $\triangle ACD \sim \triangle ABC$ (по двум углам: $\angle A$ — общий и $\angle ACD = \angle CBD$), тогда $\frac{c}{a} = \frac{b}{CD}$, или $\frac{c}{a} = \frac{b}{x}$,

откуда $x = \frac{ab}{c}$, тогда (1) примет вид $c = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{ab}{c}$, или $c^2 = b(a+b)$, откуда

$$c = \sqrt{b(a+b)}. \quad (2)$$

Пусть R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$. Известно, что $R = \frac{abc}{4S}$, где

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$p = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(a+b+\sqrt{b(a+b)}),$$

$$p-a = \frac{1}{2}(a+b+\sqrt{b(a+b)})-a = \frac{1}{2}(-a+b+\sqrt{b(a+b)}),$$

$$p-b = \frac{1}{2}(a-b+\sqrt{b(a+b)}),$$

$$p-c = \frac{1}{2}(a+b-\sqrt{b(a+b)}).$$

Тогда

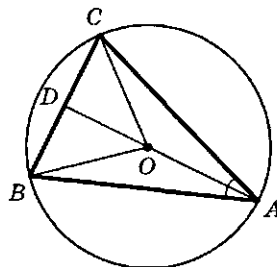
$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{2^4} (a+b+\sqrt{b(a+b)}) \cdot (-a+b+\sqrt{b(a+b)}) \times \\ &\times (a-b+\sqrt{b(a+b)}) \cdot (a+b-\sqrt{b(a+b)}) = \\ &= \frac{1}{2^4} (a+b+\sqrt{b(a+b)}) \cdot (a+b-\sqrt{b(a+b)}) \times \\ &\times (\sqrt{b(a+b)}-(a-b)) \cdot (\sqrt{b(a+b)}+(a-b)) = \\ &= \frac{1}{2^4} ((a+b)^2 - b(a+b)) \cdot (b(a+b) - (a-b)^2) = \\ &= \frac{1}{2^4} (a^2 + ab)(3ab - a^2) = \frac{1}{2^4} a^2 (a+b)(3b-a), \text{ откуда} \\ S &= \frac{a}{4} \sqrt{(a+b)(3b-a)}. \end{aligned}$$

$$\text{Тогда } R = \frac{abc}{4S} = \frac{ab\sqrt{b(a+b)}}{4 \cdot \frac{a}{4} \sqrt{(a+b)(3b-a)}} =$$

$$= \frac{b\sqrt{b(a+b)}}{\sqrt{(a+b)(3b-a)}} = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{3b-a}}.$$

Замечание. Задача имеет решение, если $3b - a > 0$, т. е. при $a < 3b$.

$$\text{Ответ: } R = \frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{3b-a}}, \text{ при } a < 3b.$$



Пример 66(A). В круг единичного радиуса вписан треугольник с острым углом 30° .

Отрезок, соединяющий вершину этого угла и проходящий через центр круга, делит противоположную сторону в отношении $1:2$. Найти длину этого отрезка.

Решение.

Пусть $\angle A = 30^\circ$, O — центр круга; пусть $CD = x$, тогда $DB = 2x$ (по условию).

По следствию из теоремы синусов имеем $\frac{CB}{\sin A} = 2R$,

где $R = 1$ и $\angle A = 30^\circ$, тогда $CB = 2R \sin 30^\circ = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$.

Выходит, что $CB = AO = BO = CO = R = 1$.

Значит, $\triangle COB$ равносторонний и $\angle OCD = 60^\circ$. Тогда $BC = x + 2x = 3x = R = 1$, откуда $x = \frac{1}{3}$.

Из $\triangle COD$ по теореме косинусов имеем

$$DO^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}, \text{ или}$$

$$DO^2 = \frac{7}{9}, \quad DO = \frac{\sqrt{7}}{3},$$

тогда $AD = DO + OA = \frac{\sqrt{7}}{3} + 1 = \frac{1}{3}(3 + \sqrt{7})$ (ед.).

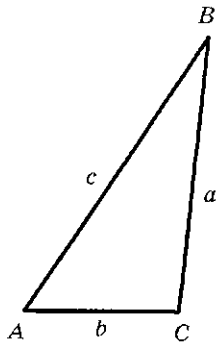
Ответ: $\frac{1}{3}(3 + \sqrt{7})$.

Пример 67(А). В $\triangle ABC$ одна из сторон в два раза больше другой, $\angle A = 2\angle B$. Найти отношение $\frac{R}{r}$, где

R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

Решение.

Прежде всего, определим вид треугольника, исходя из данных задачи. Допустим, что треугольник имеет вид, изображенный на рисунке.



Пусть $\angle B = \alpha$, тогда $\angle A = 2\alpha$. По теореме косинусов

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \alpha. \quad (1)$$

По теореме синусов

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin 2\alpha}, \text{ или } \frac{b}{\sin \alpha} = \frac{a}{2 \sin \alpha \cos \alpha},$$

откуда $\cos \alpha = \frac{a}{2b}$, тогда (1) примет вид

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \frac{a}{2b}, \text{ или } b^3 = a^2b + bc^2 - a^2c,$$

$(b^3 - bc^2) - (a^2b - a^2c) = 0$, $b(b^2 - c^2) - a^2(b - c) = 0$, или $(b - c)(b(b + c) - a^2) = 0$, откуда $b - c = 0$, что невозможно из условия задачи.

Остается $b(b + c) - a^2 = 0$, или $a^2 = b(b + c)$. (2)

Учитывая, что по условию одна из сторон в два раза больше другой, получим следующие возможности:

1) $a = 2b$, тогда (2) примет вид $4b^2 = b(b + c)$, $b \neq 0$, $4b = b + c$, откуда $3b = c$. Но из неравенства треугольника $\Rightarrow c < a + b$, т. е. $3b < 2b + b$, что невозможно.

2) Случай $a = 2c$ и $c = 2a$ также не выполняются по той же причине.

Остается рассмотреть случай, когда $c = 2b$.

В этом случае равенство (2) примет вид

$$a^2 = b(b + 2b), \quad a^2 = 3b^2, \quad a = b\sqrt{3},$$

и так как по доказанному ранее $\cos \alpha = \frac{a}{2b}$, то

$$\cos \alpha = \frac{b\sqrt{3}}{2b} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ откуда } \alpha = 30^\circ, \text{ тогда } 2\alpha = 60^\circ.$$

Итак, $\angle B = 30^\circ$, $\angle A = 60^\circ$, тогда $\angle C = 90^\circ$, т. е. $\triangle ABC$ — прямоугольный, тогда $AB = c = 2R$,

$$R = \frac{c}{2} = \frac{2b}{2} = b \text{ и } r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b-2b}{2} = \frac{a-b}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b \operatorname{tg} 60^\circ = b\sqrt{3},$$

$$r = \frac{a-b}{2} = \frac{b\sqrt{3}-b}{2} = \frac{b}{2}(\sqrt{3}-1).$$

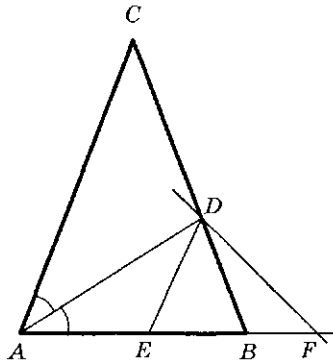
Значит,

$$\frac{R}{r} = b \cdot \frac{2}{b(\sqrt{3}-1)} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1.$$

Ответ: $\sqrt{3}+1$.

Пример 68(А). В равнобедренном $\triangle ABC$ с основанием AB проведена биссектриса AD . Через точку D провели прямую, перпендикулярную AD и пересекающую AB в точке F .

Найти радиус окружности, описанной около $\triangle ADF$, если $BD = a$.



Решение.

Пусть в $\triangle ABC$ $AC = BC$, AD — биссектриса $\angle A$.

Из точки $D \in BC$ проведем $DE \parallel CA$. Тогда точка E — центр описанной окружности, так как $\triangle ADF$ прямоугольный ($AD \perp DF$ по условию) и $AF = 2R$ — диаметр описанной окружности. Значит, $EA = ED = EF = R$. Кроме того, $\triangle BDE \sim \triangle BCA$ ($\angle B$ — общий, $CA \parallel DE$ по построению). Значит, $\triangle DEB$ — равнобедренный ($\angle B = \angle CAB = \angle DEB$), тогда $BD = DE = a$.

$\triangle AED$ также равнобедренный ($AE = DE$ — по доказанному).

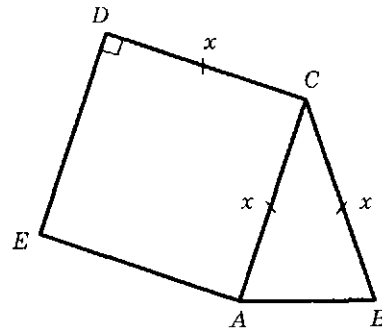
Итак, $BD = DE = AE = FE = R = a$.

Ответ: a .

Пример 69(А). Площадь квадрата, построенного на боковой стороне равнобедренного треугольника с острым углом при вершине, в четыре раза больше площади треугольника. Найти $\frac{R}{r}$, где R и r — соответ-

ственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

Решение.



Пусть $AC = BC = CD = x$.

По условию $x^2 = 4S_{\triangle ABC}$.

Но

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \sin C = \frac{1}{2} x^2 \sin C. \quad (1)$$

Учитывая (1), получим $x^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} x^2 \sin C$,

или $x^2 = 2x^2 \sin C$, $x \neq 0$, $\sin C = \frac{1}{2}$, откуда $\angle C = 30^\circ$,

тогда $\angle A = \angle B = 75^\circ$.

По следствию из теоремы синусов, $\frac{AB}{\sin C} = 2R$,

откуда $R = \frac{AB}{2 \sin C} = \frac{y}{2 \cdot \frac{1}{2}} = y$.

Итак, $R = y$.

Известно, что $S_{\triangle} = p \cdot r$, где

$p = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = \frac{1}{2}(2x + y)$, тогда

$$OE = \frac{1}{4} CO = \frac{1}{4} R.$$

Аналогично $\frac{CD}{AD} = \frac{CE}{OE}$, откуда

$$CD = \frac{AD \cdot CE}{OE} = \frac{\frac{1}{2} x \cdot x}{\frac{1}{4} R} = \frac{2x^2}{R}; \quad CD = \frac{2x^2}{R}. \quad (1)$$

Из прямоугольного $\triangle CEO$ (OE — высота равнобедренного $\triangle AOC$) имеем

$$x^2 = R^2 - OE^2, \text{ или } x^2 = R^2 - \left(\frac{1}{4} R\right)^2, \quad x^2 = \frac{15}{16} R^2,$$

тогда (1) примет вид

$$CD = \frac{2}{R} \cdot \frac{15}{16} R^2 = \frac{15}{8} R; \quad CD = \frac{15}{8} R. \quad (2)$$

С другой стороны, $CD = CO_1 + O_1D = CO_1 + r$. (3)

Сравнивая (2) и (3), имеем

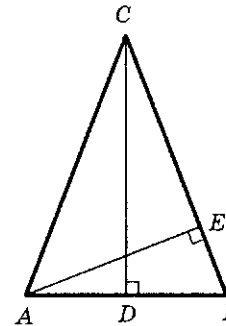
$$\frac{15}{8} R = CO_1 + r, \text{ откуда } CO_1 = \frac{15}{8} R - r.$$

Из подобия $\triangle COE$ и $\triangle CO_1F$ получим $\frac{CO_1}{O_1F} = \frac{CO}{OE}$, или

$$\frac{\frac{15}{8} R - r}{r} = \frac{R}{\frac{1}{4} R}, \quad \frac{15}{8} R - r = 4r, \quad \frac{15}{8} R = 5r,$$

откуда $R = \frac{8}{3} r$.

Ответ: $\frac{8}{3} r$.



Пример 71(А). В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, в два раза больше высоты, опущенной на боковую сторону. Найти отношение $\frac{R}{r}$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

Решение.

Пусть $AE = x$, тогда $CD = 2x$.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD. \quad (1)$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), имеем

$$AB \cdot 2x = BC \cdot x, \text{ откуда } BC = 2AB. \quad (3)$$

Из $\triangle CDB$ $BC^2 = CD^2 + BD^2$, или, учитывая (3), имеем

$$4AB^2 = 4x^2 + \frac{1}{4} AB^2, \text{ или } 15AB^2 = 16x^2, \text{ откуда}$$

$$AB = \frac{4}{\sqrt{15}} x, \text{ тогда } BC = 2AB = \frac{8}{\sqrt{15}} x.$$

$$\text{Известно, что } R = \frac{abc}{4S} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} \text{ и}$$

$$r = \frac{S}{p} = \frac{2S}{AB + BC + AC}, \text{ тогда}$$

$$\frac{R}{r} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S} \cdot \frac{AB + BC + AC}{2S} =$$

$$= \frac{1}{4S} \left(\frac{4}{\sqrt{15}} x \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} x \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} x \right) \cdot \frac{1}{2S} \left(\frac{4}{\sqrt{15}} x + \frac{8}{\sqrt{15}} x + \frac{8}{\sqrt{15}} x \right) =$$

$$= \frac{1}{8S^2} \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} x \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} x \cdot \frac{8}{\sqrt{15}} x \cdot \frac{20}{\sqrt{15}} x = \frac{4 \cdot 8 \cdot 20 x^4}{15^2 S^2} =$$

$$= \frac{4 \cdot 8 \cdot 20 x^4}{15^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{15}} x \cdot 2x \right)^2} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 20 x^4}{15^2 \cdot \frac{16}{15} x^4} = \frac{4 \cdot 10}{15} = \frac{8}{3}.$$

Итак, $\frac{R}{r} = \frac{8}{3}.$

Ответ: $\frac{8}{3}.$

Пример 72(А). В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к основанию и к боковой стороне, соответственно равны a и b ($a > b$). Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

Решение.

Пусть $CD = a$, $AE = b$, r — радиус вписанной окружности.

Пусть $AC = BC = y$, $AB = 2x$.

$\triangle AEB \sim \triangle CDB$ (как прямоугольные с общим углом B).

Из подобия этих треугольников имеем

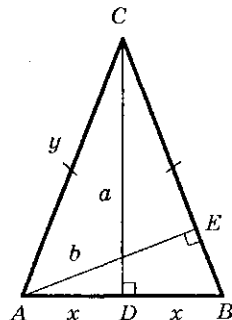
$$\frac{CB}{AB} = \frac{CD}{AE}, \text{ или } \frac{y}{2x} = \frac{a}{b}. \quad (1)$$

Кроме того, из $\triangle ADC$

$$y^2 - x^2 = a^2. \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) рассматриваем как систему

$$\begin{cases} \frac{y}{2x} = \frac{a}{b}, \\ y^2 - x^2 = a^2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{2a}{b} x, \\ \frac{4a^2}{b^2} x^2 - x^2 = a^2. \end{cases}$$



Упростим второе уравнение системы:

$$x^2(4a^2 - b^2) = a^2b^2, \text{ откуда } x^2 = \frac{a^2b^2}{4a^2 - b^2}, \text{ т. е.}$$

$$x = \frac{ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}}, \text{ где } b < 2a.$$

$$\text{Тогда } y = \frac{2a}{b} x = \frac{2a}{b} \cdot \frac{ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}} = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

$$\text{Значит, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot a = ax = \frac{a^2b}{\sqrt{4a^2 - b^2}}. \quad (3)$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle ABC} = pr = \frac{1}{2} \cdot 2(x + y)r = (x + y)r =$$

$$= \left(\frac{ab}{\sqrt{4a^2 - b^2}} + \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}} \right) \cdot r = \frac{(2a + b)a}{\sqrt{4a^2 - b^2}} \cdot r.$$

$$\text{Итак, } S_{\triangle ABC} = \frac{(2a + b)a}{\sqrt{4a^2 - b^2}} \cdot r. \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), получим

$$\frac{(2a + b)a}{\sqrt{4a^2 - b^2}} \cdot r = \frac{a^2b}{\sqrt{4a^2 - b^2}}, \text{ откуда}$$

$$r = \frac{a^2b}{(2a + b)a} = \frac{ab}{2a + b}.$$

Ответ: $\frac{ab}{2a + b}.$

Замечание. Задачу можно решить другим способом.

Пример 73(А). В равнобедренном треугольнике с острым углом при вершине угол при основании равен 2α . Найти отношение $\frac{r}{R}$, где r и R — соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей.

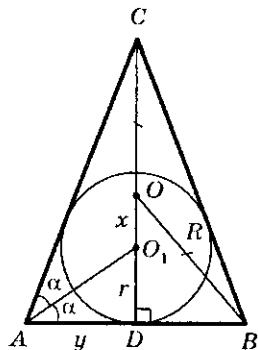
Решение.

I способ

По условию $\angle A = 2\alpha$, $AC = BC$, $O_1D = r$ — радиус вписанной окружности;

$OB = OC = R$ — радиус описанной окружности.

Пусть $OO_1 = x$ — искомое расстояние между центрами окружностей.



Пусть $AD = y > 0$, тогда

$$CD = R + x + r. \quad (1)$$

Так как O_1 — центр вписанной окружности, то AO_1 — биссектриса $\angle CAD$, тогда $\angle CAO_1 = \angle O_1AD = \alpha$.

$$\text{Из } \triangle ADC \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{CD}{AD} \Rightarrow CD = y \operatorname{tg} 2\alpha. \quad (2)$$

$$\text{Из } \triangle AO_1D \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{O_1D}{AD} = \frac{r}{y} \Rightarrow r = y \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Тогда (1) с учетом (2) и (3) примет вид $y \operatorname{tg} 2\alpha = R + x + y \operatorname{tg} \alpha$, откуда

$$\begin{aligned} R + x &= y(\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha) = y \cdot \frac{\sin(2\alpha - \alpha)}{\cos 2\alpha \cdot \cos \alpha} = \\ &= y \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos 2\alpha \cos \alpha} = \frac{r}{\operatorname{tg} \alpha \cos 2\alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{\cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

$$\text{Итак, } R + x = \frac{r}{\cos 2\alpha}, \text{ откуда } r = (R + x) \cos 2\alpha. \quad (4)$$

Известно, что если x — расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей, то

$$x = \sqrt{R(R - 2r)} \quad (5)$$

(см., например, № 27, с. 170, В.М. Говоров и др. «Сборник конкурсных задач по математике», 1983 г.).

Возведя обе части (5) в квадрат и учитывая (4), получим

$$\begin{aligned} x^2 &= R^2 - 2Rr, \text{ или } x^2 = R^2 - 2R(R + x) \cos 2\alpha, \\ R^2 - 2R(R + x) \cos 2\alpha - x^2 &= 0, \text{ или} \\ R^2 - 2R^2 \cos 2\alpha - 2Rx \cos 2\alpha - x^2 &= 0, \\ (1 - 2 \cos 2\alpha)R^2 - 2x \cos 2\alpha \cdot R - x^2 &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнение (6) рассматриваем как квадратное относительно R :

$$\begin{aligned} D/4 &= x^2 \cos^2 2\alpha + x^2(1 - 2 \cos 2\alpha) = \\ &= x^2(\cos^2 2\alpha - 2 \cos 2\alpha + 1) = x^2(\cos 2\alpha - 1)^2. \\ R &= \frac{x \cos 2\alpha \pm x |\cos 2\alpha - 1|}{1 - 2 \cos 2\alpha} = \frac{x \cos 2\alpha \pm x(\cos 2\alpha - 1)}{1 - 2 \cos 2\alpha}, \end{aligned}$$

так как $|\cos 2\alpha| < 1$ (\Rightarrow из условия задачи).

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{x \cos 2\alpha + x - x \cos 2\alpha}{1 - 2 \cos 2\alpha} = \frac{x}{1 - 2 \cos 2\alpha}; \\ R_2 &= \frac{x \cos 2\alpha - x + x \cos 2\alpha}{1 - 2 \cos 2\alpha} = \frac{x(2 \cos 2\alpha - 1)}{1 - 2 \cos 2\alpha} = \end{aligned}$$

$= -x$ (не удовлетворяет).

$$\text{Итак, } R = \frac{x}{1 - 2 \cos 2\alpha}, \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} r &= (R + x) \cos 2\alpha = \left(\frac{x}{1 - 2 \cos 2\alpha} + x \right) \cos 2\alpha = \\ &= \frac{x + x - 2x \cos 2\alpha}{1 - 2 \cos 2\alpha} \cos 2\alpha = \\ &= \frac{2x(1 - \cos 2\alpha)}{1 - 2 \cos 2\alpha} \cos 2\alpha = \frac{2x \cdot 2 \sin^2 \alpha}{1 - 2 \cos 2\alpha} \cos 2\alpha = \\ &= \frac{4x \sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{1 - 2 \cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\frac{r}{R} = \frac{4x \sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{1 - 2 \cos 2\alpha} \cdot \frac{1 - 2 \cos 2\alpha}{x} = 4 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha, \text{ или}$$

$$\frac{r}{R} = \frac{4x \sin^2 \alpha \cos 2\alpha \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2 \sin^2 \alpha \sin 4\alpha}{\sin 2\alpha} =$$

$$= \frac{2 \sin^2 \alpha \sin 4\alpha}{2 \sin \alpha \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha \sin 4\alpha.$$

Ответ: $\operatorname{tg} \alpha \sin 4\alpha$.

II способ

$$\angle C = 180^\circ - 4\alpha, 2y = 2R \sin(180^\circ - 4\alpha) = 2R \sin 4\alpha,$$

$$y = R \sin 4\alpha.$$

Пример 74(А). В равнобедренном треугольнике из вершин нижнего основания опущены высоты на боковые стороны. Найти длину отрезка, соединяющего их концы, если середина отрезка является центром описанной окружности радиуса $R = \sqrt{\sqrt{5} + 2}$.

Решение.

По условию

$AC = BC$, $AF \perp BC$ и $BE \perp AC$, O — середина EF и центр описанной окружности.

Из $\triangle ABC$ по следствию из теоремы синусов имеем

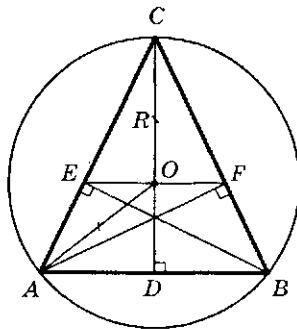
$$\frac{AB}{\sin C} = 2R, \text{ или } AB = 2R \sin C. \quad (1)$$

Из $\triangle AOC$, где $AO = OC = R$,

$$AC = 2R \cos \frac{C}{2}. \quad (2)$$

$$\text{Из } \triangle AOD \quad y = r \cdot \operatorname{ctg} \alpha \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{\sin 4\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} = \sin 4\alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

Заметим, что $\triangle ABC \sim \triangle EFC$ ($\angle C$ — общий, $AB \parallel EF$), тогда



$$\frac{AB}{EF} = \frac{AC}{EC}, \text{ откуда } EF = \frac{AB \cdot EC}{AC}. \quad (3)$$

$$\text{Из } \triangle CEB \quad EC = BC \cos C, \text{ но } BC = 2R \cos \frac{C}{2} = AC,$$

тогда $EC = 2R \cos \frac{C}{2} \cos C$, и (3) примет вид

$$EF = \frac{2R \sin C \cdot 2R \cos \frac{C}{2} \cdot \cos C}{2R \cos \frac{C}{2}} = 2R \sin C \cdot \cos C.$$

$$\text{Итак, } EF = 2R \cos \frac{C}{2}. \quad (4)$$

Из $\triangle ABC$ по теореме косинусов имеем

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C. \quad (5)$$

Но $BC \cdot \cos C = EC$ (из $\triangle BEC$).

Кроме того, из $\triangle EOC \quad EC = \frac{R}{\cos \frac{C}{2}}$, тогда

$$BC \cdot \cos C = \frac{R}{\cos \frac{C}{2}}. \quad (6)$$

Равенство (5) с учетом (1), (2) и (6) примет вид

$$4R^2 \sin^2 C = 4R^2 \cos^2 \frac{C}{2} + 4R^2 \cos^2 \frac{C}{2} - 2 \cdot 2R \cos \frac{C}{2} \cdot \frac{R}{\cos \frac{C}{2}}.$$

$$4R^2 \sin^2 C = 8R^2 \cos^2 \frac{C}{2} - 4R^2, R \neq 0,$$

$$\sin^2 C = 2 \cos^2 \frac{C}{2} - 1.$$

Но $\sin^2 C = 1 - \cos^2 C$ и $2 \cos^2 \frac{C}{2} - 1 = \cos C$, тогда

$$1 - \cos^2 C = \cos C, \text{ или } \cos^2 C + \cos C - 1 = 0,$$

$$D = 1 + 4 = 5 > 0, (\cos C)_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}), \text{ откуда}$$

$$\cos C = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1), \cos C = \frac{1}{2}(-\sqrt{5} - 1) \text{ — не удовлетворяет, так как } |\cos C| \leq 1.$$

$$\text{Итак, } \cos C = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1), \text{ тогда}$$

$$\begin{aligned} \sin C &= \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}(6 - 2\sqrt{5})} = \frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{5} - 2} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{5} - 1}. \end{aligned}$$

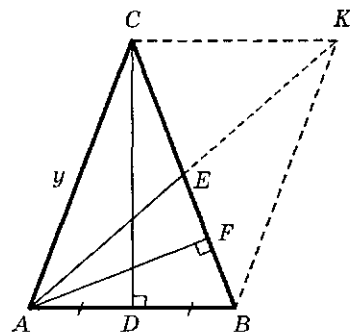
$$\text{По условию задачи } R = \sqrt{\sqrt{5} + 2}.$$

Учитывая значения $\sin C$ и $\cos C$, равенство (4) примет вид

$$\begin{aligned} EF &= 2\sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{5} - 1} \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt{(\sqrt{5} - 1)^2(\sqrt{5} - 1)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt{(6 - 2\sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{(3 - \sqrt{5})(\sqrt{5} - 1)} = \\ &= \sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt{3\sqrt{5} - 5 - 3 + \sqrt{5}} = \sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt{4\sqrt{5} - 8} = \\ &= 2\sqrt{\sqrt{5} + 2} \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 2} = 2\sqrt{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} = \\ &= 2\sqrt{5 - 4} = 2 \cdot 1 = 2. \text{ Итак, } EF = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

Пример 75(А). Найти длину медианы равнобедренного треугольника, опущенную на боковую сторону, если длины высот, опущенных на основание и боковую сторону, равны соответственно m и n .



Решение.

Пусть $AC = BC$, CD и AF — высоты, AE — медиана. По условию $CD = m$, $AF = n$. Построим $\triangle ABC$ до параллелограмма $ACKB$.

Пусть $AB = x$, $AC = y$, $AE = z$.

По свойству параллелограмма имеем

$$AK^2 + BC^2 = 2(AB^2 + AC^2), \text{ где}$$

$$AK = 2z, BC = y, AB = x,$$

$AC = y$, тогда получим

$$4z^2 + y^2 = 2(x^2 + y^2), \text{ или } 4z^2 = 2x^2 + y^2. \quad (1)$$

$$\text{Заметим, что } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2}AF \cdot BC, \text{ или}$$

$$x \cdot m = y \cdot n. \quad (2)$$

$$\text{Из } \triangle ADC \text{ } AC^2 = AD^2 + CD^2, \text{ или } y^2 = \frac{1}{4}x^2 + m^2. \quad (3)$$

Равенства (2) и (3) рассматриваем как систему

$$\begin{cases} mx = ny, \\ y^2 = \frac{1}{2}x^2 + m^2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{m}{n}x, \\ y^2 = \frac{1}{4}x^2 + m^2; \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{m}{n}x, \\ \frac{m^2}{n^2}x^2 = \frac{1}{4}x^2 + m^2. \end{cases}$$

Упростим второе уравнение системы

$$4m^2x^2 - n^2x^2 = 4m^2n^2, \quad x^2(4m^2 - n^2) = 4m^2n^2,$$

$$x^2 = \frac{4m^2n^2}{4m^2 - n^2}, \quad \text{откуда } x = \frac{2mn}{\sqrt{4m^2 - n^2}}.$$

Замечание. Для нахождения $AE = z$ из (1) достаточно найти x^2 и y^2 .

$$\text{Тогда } y = \frac{m}{n}x = \frac{m}{n} \cdot \frac{2mn}{\sqrt{4m^2 - n^2}} = \frac{2m^2}{\sqrt{4m^2 - n^2}}.$$

Используя (1), имеем

$$4z^2 = 2x^2 + y^2, \quad \text{или } 4z^2 = \frac{8m^2n^2}{4m^2 - n^2} + \frac{4m^4}{4m^2 - n^2}, \quad \text{или, разде-}$$

$$\text{лив обе части на 4, получим } z^2 = \frac{2m^2n^2}{4m^2 - n^2} + \frac{m^4}{4m^2 - n^2},$$

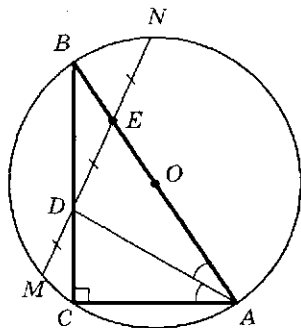
$$z^2 = \frac{m^2(m^2 + 2n^2)}{4m^2 - n^2}, \quad \text{откуда } z = AE = m\sqrt{\frac{m^2 + 2n^2}{4m^2 - n^2}}.$$

Замечание. Искомую медиану AE можно найти из прямоугольного $\triangle AFE$, где $FE = BE - FB$, а FB из $\triangle AFB$ и т. д.

$$\text{Ответ: } m\sqrt{\frac{m^2 + 2n^2}{4m^2 - n^2}}.$$

Пример 76(А). Прямоугольный треугольник с катетами a и b ($a > b$) вписан в окружность. Биссектриса острого угла соединена с точкой, взятой на большем катете.

Через эту точку проведена хорда так, что она делится точками пересечения на три равные части. Найти длину хорды.



Решение.

Пусть в $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$), $AC = b$, $BC = a$, где $a > b$; AD — биссектриса $\angle A$, $D \in BC$.

Пусть $MD = DE = EN = x$, тогда по свойству пересекающихся хорд имеем

$$BD \cdot DC = MD \cdot ND. \quad (1)$$

Пусть $CD = y$, где $y > 0$, тогда $BD = a - y$ и (1) примет вид

$$(a - y)y = x \cdot 2x, \quad \text{или } (a - y)y = 2x^2. \quad (2)$$

Так как AD — биссектриса $\angle A$, то по свойству биссектрисы имеем

$$\frac{DC}{BD} = \frac{AC}{AB}, \quad \text{или } \frac{y}{a - y} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \text{или}$$

$$y \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = ab - by, \quad y(\sqrt{a^2 + b^2} + b) = ab, \quad \text{откуда}$$

$$y = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2} + b}.$$

$$\text{Тогда } a - y = \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} + b}.$$

Учитывая (2), имеем

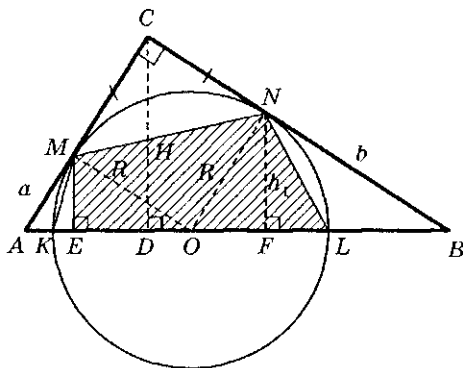
$$x^2 = \frac{1}{2}(a - y) \cdot y = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} + b} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2} + b},$$

$$x^2 = \frac{a^2b\sqrt{a^2 + b^2}}{2(\sqrt{a^2 + b^2} + b)^2}, \quad x = \frac{a\sqrt{2b\sqrt{a^2 + b^2}}}{2(\sqrt{a^2 + b^2} + b)}.$$

$$\text{Следовательно, } MN = 3x = \frac{3a\sqrt{2b\sqrt{a^2 + b^2}}}{2(\sqrt{a^2 + b^2} + b)}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{3a\sqrt{2b\sqrt{a^2 + b^2}}}{2(\sqrt{a^2 + b^2} + b)}.$$

Пример 77(А). Окружность, центр которой лежит на гипотенузе AB $\triangle ABC$, касается катетов AC и BC соответственно в точках M и N и пересекает гипотенузу в точках K и L . Найти площадь четырехугольника $KMNL$, если $AM = a$, $NB = b$.



Решение.

Пусть M и N — точки касания катетов AC и BC с окружностью; K и L — точки пересечения гипотенузы с окружностью.

По условию задачи центр O окружности лежит на гипотенузе. Так как M и N — точки касания, то по свойству касательных имеем $MC = CN$.

Соединим центр окружности с точками M и N , тогда $MO = NO = R$. Кроме того, $OK = OL = R$. Но AC и BC — касательные к окружности, тогда $MO \perp AC$ и $ON \perp CB$.

Выходит, что четырехугольник $MONC$ — квадрат.

$$S_{KMNL} = S_{MKO} + S_{MNO} + S_{NOL} =$$

$$= \frac{1}{2} KO \cdot h + \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} h_1 \cdot OL = \frac{1}{2} Rh + \frac{1}{2} R^2 + \frac{1}{2} h_1 R =$$

$$= \frac{1}{2} R(h + R + h_1). \quad (1)$$

Заметим, что $\triangle ACB \sim \triangle ONB$ (как прямоугольные с общим острым углом B).

$$\text{Из подобия} \Rightarrow \frac{AC}{CB} = \frac{ON}{NB}, \text{ или } \frac{a+R}{R+b} = \frac{R}{b},$$

$$ab + bR = R^2 + bR, \text{ откуда } R = \sqrt{ab}. \quad (2)$$

Аналогично из подобия $\triangle ACD$ и $\triangle AEM$ имеем

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AM}{ME}, \text{ или } \frac{a+R}{H} = \frac{a}{h}, \frac{a+\sqrt{ab}}{H} = \frac{a}{h}. \quad (3)$$

Высоту $CD = H$ найдем из сравнения площадей $\triangle ACB$:

$$\frac{1}{2} AB \cdot H = \frac{1}{2} AC \cdot BC, \text{ откуда}$$

$$H = \frac{AC \cdot CB}{AB} = \frac{(a+R)(R+b)}{\sqrt{(a+R)^2 + (b+R)^2}} =$$

$$\frac{(a+\sqrt{ab})(b+\sqrt{ab})}{\sqrt{(a+\sqrt{ab})^2 + (b+\sqrt{ab})^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b}) \cdot \sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2 + b(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}} = \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(a+b)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{(a+b)}} = \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{(a+b)}}.$$

$$\text{Из (3)} \Rightarrow h = \frac{aH}{a+\sqrt{ab}} = \frac{aH}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \cdot \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a+b}} = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}};$$

$$h = \frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}. \quad (4)$$

Высоту h_1 найдем из подобия $\triangle CBD$ и $\triangle NBF$:

$$\frac{h_1}{b} = \frac{H}{R+b}, \text{ откуда } h_1 = \frac{bH}{R+b} = \frac{b}{\sqrt{ab}+b} H$$

$$= \frac{b}{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \cdot \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a+b}} = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}.$$

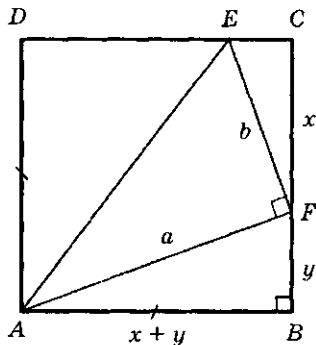
$$\text{Итак, } h_1 = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}. \quad (5)$$

Тогда соотношение (1) с учетом (2), (4) и (5) примет вид

$$\begin{aligned} S_{KMNL} &= \frac{1}{2} \sqrt{ab} \left(\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} + \sqrt{ab} + \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} + 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} ab \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} + 1 \right) \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{ab}{2} \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} + 1 \right).$$

Пример 78(А). В квадрат вписан прямоугольный треугольник с катетами a и b ($a > b$) так, что одна из вершин совпадает с вершиной квадрата, а две другие расположены на сторонах квадрата, не содержащих данную вершину квадрата. Найти площадь квадрата.



Решение.

Пусть в квадрат $ABCD$ вписан $\triangle AFE$ ($\angle AFE = 90^\circ$), где $AF = a$, $EF = b$.

Пусть $CF = x > 0$, $FB = y > 0$, тогда $AB = x + y$.

Из подобия $\triangle ABF$ и $\triangle FCE \Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{CF}{EF}$, или $\frac{x+y}{a} = \frac{x}{b}$,

$$ax = bx + by, (a-b)x = by,$$

$$\text{откуда } x = \frac{b}{a-b} y. \quad (1)$$

Из $\triangle ABF$ $(x+y)^2 + y^2 = a^2$, или, учитывая (1), получим $\left(\frac{b}{a-b} y + y \right)^2 + y^2 = a^2$, или $y^2 \left(\frac{b}{a-b} + 1 \right)^2 + y^2 = a^2$,

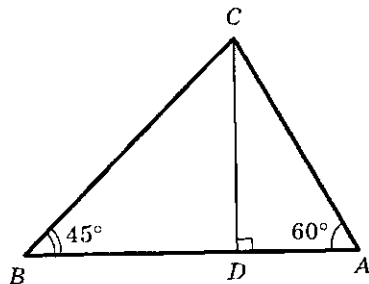
или $\left(\frac{a^2}{(a-b)^2} + 1 \right) y^2 = a^2$, $y^2 = \frac{a^2(a-b)^2}{a^2 + (a-b)^2}$, тогда

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= (x+y)^2 = a^2 - y^2 = a^2 - \frac{a^2(a-b)^2}{a^2 + (a-b)^2} = \\ &= a^2 \left(1 - \frac{(a-b)^2}{a^2 + (a-b)^2} \right) = a^2 \cdot \frac{a^2 + (a-b)^2 - (a-b)^2}{a^2 + (a-b)^2} = \\ &= \frac{a^4}{a^2 + (a-b)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^4}{a^2 + (a-b)^2}.$$

Пример 79(А). Два угла треугольника, прилежащих к одной стороне, равны 45° и 60° . Найти отношение $\frac{R}{r}$, где R и

r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.



Решение.

Пусть $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$.

По следствию из теоремы синусов $\frac{AC}{\sin B} = 2R$, или

$$AC = 2R \sin 45^\circ = R\sqrt{2}. \quad (1)$$

$$= \frac{b}{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \cdot \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a+b}} = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}.$$

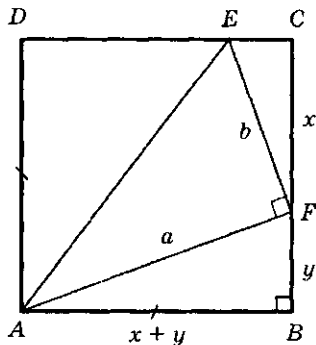
$$\text{Итак, } h_1 = \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}. \quad (5)$$

Тогда соотношение (1) с учетом (2), (4) и (5) примет вид

$$\begin{aligned} S_{KMNL} &= \frac{1}{2} \sqrt{ab} \left(\frac{a\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} + \sqrt{ab} + \frac{b\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{ab} \cdot \sqrt{ab} \cdot \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} + 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} ab \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} + 1 \right) \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{ab}{2} \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}} + 1 \right).$$

Пример 78(А). В квадрат вписан прямоугольный треугольник с катетами a и b ($a > b$) так, что одна из вершин совпадает с вершиной квадрата, а две другие расположены на сторонах квадрата, не содержащих данную вершину квадрата. Найти площадь квадрата.



Решение.

Пусть в квадрат $ABCD$ вписан $\triangle AFE$ ($\angle AFE = 90^\circ$), где $AF = a$, $EF = b$.

Пусть $CF = x > 0$, $FB = y > 0$, тогда $AB = x + y$.

Из подобия $\triangle ABF$ и $\triangle FCE \Rightarrow \frac{AB}{AF} = \frac{CF}{EF}$, или $\frac{x+y}{a} = \frac{x}{b}$,

$$ax = bx + by, (a-b)x = by,$$

$$\text{откуда } x = \frac{b}{a-b} y. \quad (1)$$

Из $\triangle ABF$ $(x+y)^2 + y^2 = a^2$, или, учитывая (1), получим $\left(\frac{b}{a-b} y + y \right)^2 + y^2 = a^2$, или $y^2 \left(\frac{b}{a-b} + 1 \right)^2 + y^2 = a^2$,

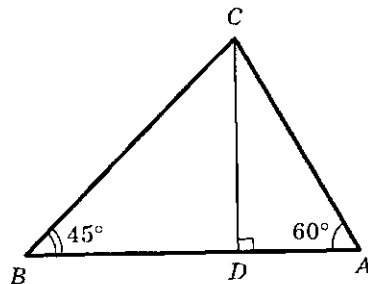
или $\left(\frac{a^2}{(a-b)^2} + 1 \right) y^2 = a^2$, $y^2 = \frac{a^2(a-b)^2}{a^2 + (a-b)^2}$, тогда

$$\begin{aligned} S_{ABCD} &= (x+y)^2 = a^2 - y^2 = a^2 - \frac{a^2(a-b)^2}{a^2 + (a-b)^2} = \\ &= a^2 \left(1 - \frac{(a-b)^2}{a^2 + (a-b)^2} \right) = a^2 \cdot \frac{a^2 + (a-b)^2 - (a-b)^2}{a^2 + (a-b)^2} = \\ &= \frac{a^4}{a^2 + (a-b)^2}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{a^4}{a^2 + (a-b)^2}.$$

Пример 79(А). Два угла треугольника, прилежащих к одной стороне, равны 45° и 60° . Найти отношение $\frac{R}{r}$, где R и

r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.



Решение.

Пусть $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 45^\circ$.

По следствию из теоремы синусов $\frac{AC}{\sin B} = 2R$, или

$$AC = 2R \sin 45^\circ = R\sqrt{2}. \quad (1)$$

Из $\triangle ADC$, где $\angle ACD = 30^\circ$, имеем $AD = \frac{1}{2}AC$.

Учитывая (1), получим $AD = \frac{1}{2}R\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.

Из $\triangle BDC$, где $BD = DC = x$, $BC = x\sqrt{2}$.

Из $\triangle ADC$ $CD = AC \sin A = R\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}R$, тогда

$$BC = x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}R \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3}R.$$

Значит, $AB = AD + BD = \frac{\sqrt{2}}{2}R + \frac{\sqrt{6}}{2}R = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})R$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } S_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2}AB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})R \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}R = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \sqrt{3})R^2. \end{aligned} \quad (2)$$

С другой стороны,

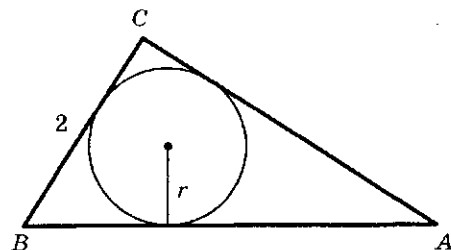
$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= p \cdot r = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot r = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + \sqrt{3})R + R\sqrt{2} + R\sqrt{3} \right) r = \\ &= \frac{1}{2}Rr \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2} + 3 \right) = \frac{1}{2}Rr \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2} + 2) = \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4}Rr(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1); \\ S_{\triangle ABC} &= \frac{\sqrt{6}}{4}Rr(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1). \end{aligned} \quad (3)$$

Сравнивая (2) и (3), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{4}(1 + \sqrt{3})R^2 &= \frac{\sqrt{6}}{4}Rr(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1), \text{ или} \\ (1 + \sqrt{3})R &= \sqrt{2}r(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1), \text{ откуда} \\ \frac{R}{r} &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1) = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(3 - \sqrt{3} + \sqrt{6} - \sqrt{2} + \sqrt{3} - 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}) = \\ &= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3} - 1) = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1. \end{aligned}$$

Ответ: $\frac{R}{r} = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$.

Пример 80. Углы треугольника относятся как 1 : 5 : 6. Длина наименьшей стороны равна 2. Найти радиус вписанной окружности.



Решение.

Пусть $BC = 2$ — наименьшая сторона треугольника, тогда $\angle A = x$ — меньший угол, $\angle B = 5x$ и $\angle C = 6x$.

Следовательно, $x + 5x + 6x = 180$, $12x = 180$, $x = 15$.

Итак, $\angle A = 15^\circ$, $\angle B = 5x = 75^\circ$ и $\angle C = 6x = 90^\circ$.

Значит, $\triangle ABC$ — прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), тогда

$$r = \frac{1}{2}(AC + BC - AB), \text{ или } r = \frac{1}{2}(AC - AB + 2).$$

$$\text{Но } AB = \frac{BC}{\sin A} = \frac{2}{\sin 15^\circ}, \text{ где}$$

$$\begin{aligned}\sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) = \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1), \text{ тогда}\end{aligned}$$

$$AB = \frac{8}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)},$$

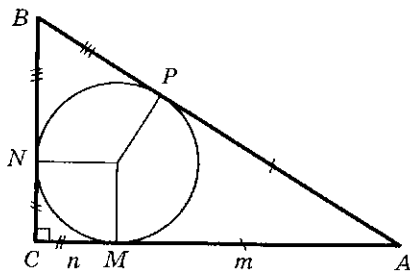
$$\begin{aligned}AC &= \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{\frac{64}{2(4-2\sqrt{3})} - 4} = \sqrt{\frac{16}{2-\sqrt{3}} - 4} = \\ &= \sqrt{16(2+\sqrt{3}-4)} = 2\sqrt{4(2+\sqrt{3})-1} = 2\sqrt{7+4\sqrt{3}} = \\ &= 2\sqrt{(2+\sqrt{3})^2} = 2(2+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Итак, $AC = 2(2+\sqrt{3})$, тогда

$$\begin{aligned}r &= \frac{1}{2} \left(2(2+\sqrt{3}) - \frac{8}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} + 2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(6+2\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \right) = \frac{1}{2} (6+2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)) = \\ &= \frac{1}{2} (2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1) - 2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)) = (\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+1).\end{aligned}$$

Ответ: $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+1)$.

Пример 81(А). Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит один из катетов на отрезки длиной m и n ($m > n$). При каких целых значениях m и n площадь треугольника представляет наименьший полный куб?



Решение.

Пусть M , N и P — точки касания вписанной окружности со сторонами $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$).

По условию задачи $AM = m$, $CM = n$, где $m > n$ (по условию).

Пусть $AB = x > 0$, тогда по свойству касательных, проведенных к окружности из некоторой точки, имеем $AM = AP = m$, $BP = BN = x - m$, $CN = CM = n$.

Из $\triangle ABC$ $AB^2 = AC^2 + BC^2$, или

$$x^2 = (m+n)^2 + (x-m+n)^2,$$

$$\begin{aligned}x^2 &= m^2 + 2mn + n^2 + x^2 - 2mx + m^2 + 2nx - 2mn + n^2, \\ 2mx - 2nx &= 2m^2 + 2n^2, \text{ или}\end{aligned}$$

$$x(m-n) = m^2 + n^2, \text{ откуда } x = \frac{m^2 + n^2}{m-n}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}BC &= x - m + n = \frac{m^2 + n^2}{m-n} - (m-n) = \\ &= \frac{m^2 + n^2 - (m-n)^2}{m-n} = \frac{2mn}{m-n}.\end{aligned}$$

$$\text{Значит, } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{mn(m+n)}{m-n}.$$

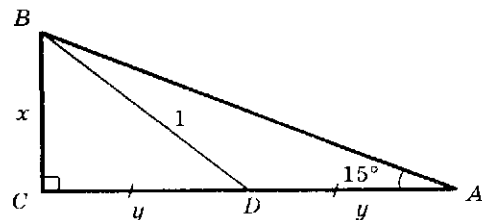
Площадь $\triangle ABC$ будет наименьшим кубом при

$$m = 12, n = 6. \text{ При этом } S_{\triangle ABC} = \frac{12 \cdot 6 \cdot 18}{6} = 216 = 6^3.$$

Ответ: при $m = 12$, $n = 6$.

Пример 82(А). Острый угол прямоугольного треугольника равен 15° , а длина медианы другого острого угла равна 1. Найти длину гипотенузы.

Решение.



Пусть $BC = x$, $AC = 2y$, тогда

$$\begin{cases} x = AB \sin 15^\circ, \\ 2y = AB \cos 15^\circ; \\ x^2 = AB^2 \sin^2 15^\circ, \\ y^2 = \frac{1}{4} AB^2 \cos^2 15^\circ. \end{cases} \quad (1)$$

Из $\triangle ABC$ $BC^2 + AC^2 = AB^2$, или

$$x^2 + y^2 = 1. \quad (2)$$

Складывая уравнения системы (1), получим

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4} AB^2 \cdot (4 \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ).$$

Учитывая (2), получим

$$AB^2 \cdot (4 \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 4. \quad (3)$$

Упростим выражение в скобке:

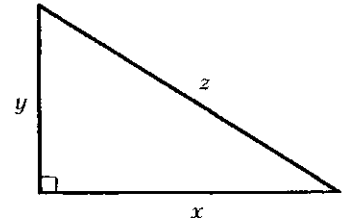
$$\begin{aligned} 4 \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ &= 4 \cdot \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} + \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \\ &= \frac{1}{2} (4 - 4 \cos 30^\circ + 1 + \cos 30^\circ) = \frac{1}{2} (5 - 3 \cos 30^\circ) = \\ &= \frac{1}{2} \left(5 - \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{4} (10 - 3\sqrt{3}). \end{aligned}$$

Тогда (3) примет вид $\frac{1}{4} (10 - 3\sqrt{3}) AB^2 = 4$,

$$AB^2 = \frac{16}{10 - 3\sqrt{3}}, \text{ откуда } AB = \frac{4}{\sqrt{10 - 3\sqrt{3}}}.$$

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{10 - 3\sqrt{3}}}.$

Пример 83(А). Каковы должны быть стороны прямоугольного треугольника, чтобы радиус вписанной окружности принимал заданное целочисленное значение?



Решение.

Известно, что между сторонами прямоугольного треугольника существует зависимость.

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2, \\ y = 2uv, \\ z = u^2 + v^2; \end{cases} \quad (1)$$

$$u > v.$$

Формулы (1) называются формулами Пифагора. Кроме того, в прямоугольном треугольнике

$$r = \frac{x + y - z}{2},$$

где r — радиус вписанной окружности.

Учитывая (1), мы имеем

$$r = \frac{1}{2} (u^2 - v^2 + 2uv - u^2 - v^2) = uv - v^2, \text{ или}$$

$$r = v(u - v). \quad (2)$$

Пусть $r = k$ принимает заданное целочисленное значение, тогда (2) примет вид

$$v(u - v) = k. \quad (3)$$

Равенство (3) выполняется, например, если $v = 1$, тогда $u - v = k$, т. е. $u = k + 1$, значит,

$$\begin{aligned} x &= (k + 1)^2 - 1, \\ y &= 2(k + 1), \\ z &= (k + 1)^2 + 1, \end{aligned} \quad (4)$$

где $k \geq 1$.

С помощью формул (4) может быть получено сколько угодно троек чисел (x, y, z) , удовлетворяющих условию задачи.

Пусть, например, $r = k = 13$, тогда

$$x = (13 + 1)^2 - 1 = 195,$$

$$y = 2 \cdot (13 + 1) = 28,$$

$$z = (13 + 1)^2 + 1 = 197.$$

В этом случае получим тройку чисел:

$$195^2 + 28^2 = 197^2 \text{ и т. д.}$$

Ответ: $x = (k + 1)^2 - 1,$

$$y = 2(k + 1),$$

$$z = (k + 1)^2 + 1, \text{ где } k \geq 1.$$

Пример 84(А). Найти прямоугольные треугольники, у которых гипотенуза в сумме с одним из катетов дает квадрат другого катета.

Решение.

Пусть c — гипотенуза; a и b — катеты прямоугольного треугольника. Тогда согласно условию имеем

$$a + c = b^2 \text{ (или } b + c = a^2).$$

По теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, следовательно, получим систему

$$\begin{cases} a + c = b^2, \\ a^2 + b^2 = c^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c + a = b^2, \\ c^2 - a^2 = b^2; \end{cases}$$

$$c + a = (c - a)(c + a), \quad c + a \neq 0, \text{ тогда } c - a = 1. \quad (1)$$

Из (1) \Rightarrow , что c и a — последовательные натуральные числа. Для нахождения c и a решим систему

$$\begin{cases} c + a = b^2, \\ c - a = 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c = b^2 + 1, \\ 2a = b^2 - 1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = \frac{1}{2}(b^2 + 1), \\ a = \frac{1}{2}(b^2 - 1). \end{cases}$$

Из соотношения $c = \frac{1}{2}(b^2 + 1) \Rightarrow$, что c будет целым

числом, если b будет нечетным, причем $b > 1$.

Полагая $b = 3$, имеем $c = \frac{1}{2}(3^2 + 1) = 5$, $a = 4$, и мы

получаем «египетский треугольник», стороны которого удовлетворяют условию задачи, так как $4 + 5 = 3^2$.

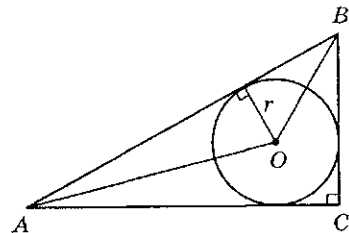
Если $b = 5$, $c = 13$, $a = 12$, тогда $12 + 13 = 5^2$ и т. д.

Полагая $b = 2k + 1$, получим

$$\begin{cases} a = 2k(k + 1), \\ c = k^2 + (k + 1)^2, \text{ где } k > 0. \\ b = 2k + 1. \end{cases}$$

Замечание. Эти формулы можно получить и из формул Пифагора (см. задачу № 83).

Пример 85. Площадь прямоугольного $\triangle ABC$ с гипотенузой AB равна 30, а площадь $\triangle AOB$ равна 13. O — центр вписанной окружности. Найти длины сторон $\triangle ABC$.



Решение.

Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, тогда $S = p \cdot r$, где $p = \frac{a+b+c}{2}$, r — радиус вписанной окружности.

Так как $S = 30$, то получим $\frac{1}{2}(a + b + c)r = 30$, или

$$\frac{1}{2}(a + b)r = 30 - \frac{1}{2}cr.$$

Но $\frac{1}{2}cr = S_{\triangle AOB} = 13$, тогда

$$\frac{a+b}{2} \cdot r = 30 - 13 = 17. \quad (1)$$

Из соотношения $\frac{1}{2}cr = 13$, имеем $r = \frac{26}{c}$, а из (1)

получим $r = \frac{34}{a+b}$. Значит, $\frac{34}{a+b} = \frac{26}{c}$, или

$$17c = 13(a+b). \quad (2)$$

Возведем обе части (2) в квадрат:

$$289c^2 = 169(a^2 + b^2 + 2ab), \text{ или}$$

$$289c^2 = 169(c^2 + 120), \text{ или}$$

$$120c^2 = 169 \cdot 120, \text{ откуда } c = 13, \text{ тогда } r = \frac{26}{c} = \frac{26}{13} = 2,$$

а из (2) находим $17 \cdot 13 = 13(a+b)$, т. е. $a+b = 17$.

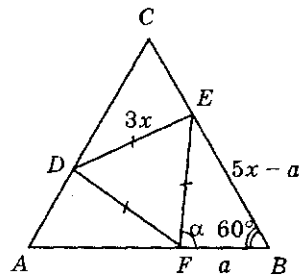
Так как по условию $S = \frac{1}{2}ab = 30$, то $ab = 60$.

Итак, $a+b = 17$, $ab = 60$. По теореме, обратной теореме Виета, находим $a = 5$, $b = 12$, или $a = 12$, $b = 5$.

Итак, стороны $\triangle ABC$ 5; 12; 13.

Ответ: 5; 12; 13.

Пример 86. В равносторонний $\triangle ABC$ вписан равносторонний $\triangle DEF$; точка D лежит на стороне AC , тогда E — на BC и точка F — на AB . Известно, что $AC : DE = 5 : 3$. Найти $\sin \angle EFB$.



Решение.

Пусть $AC = 5x$, $DE = 3x$,

$BF = a$, $BE = 5x - a$, $\angle BFE = \alpha$.

Из $\triangle BFE$ по теореме косинусов имеем:

$$FE^2 = BE^2 + BF^2 - 2 \cdot BE \cdot BF \cdot \cos 60^\circ, \text{ или}$$

$$9x^2 = (5x - a)^2 + a^2 - 2 \cdot (5x - a)a \cdot \frac{1}{2}, \text{ или}$$

$$9x^2 = 25x^2 - 10ax + a^2 + a^2 - 5ax + a^2, \text{ или}$$

$$3a^2 - 15ax + 16x^2 = 0. \quad (1)$$

Решим уравнение (1) относительно переменной a .

$$D = 225x^2 - 192x^2 = 33x^2,$$

$$a = \frac{15 \pm \sqrt{33}}{6}x. \quad (2)$$

Сравнивая площадь $\triangle BEF$ двумя способами, имеем:

$$S_{\triangle BFE} = \frac{1}{2}BE \cdot BF \sin 60^\circ =$$

$$= \frac{1}{2}(5x - a)a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}(5x - a)a\sqrt{3}.$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\triangle BFE} = \frac{1}{2}EF \cdot BF \sin \alpha =$$

$$= \frac{1}{2}3x \cdot a \sin \alpha = \frac{3}{2}ax \sin \alpha.$$

$$\text{Значит, } \frac{3}{2}ax \sin \alpha = \frac{1}{4}(5x - a)a\sqrt{3}, \text{ откуда}$$

$$\sin \alpha = \frac{(5x - a)\sqrt{3}}{6x}, \text{ где } a \neq 0.$$

$$\text{Но } 5x - a = 5x - \frac{15 \pm \sqrt{33}}{6}x = \frac{15 \pm \sqrt{33}}{6}x.$$

$$\text{Следовательно, } \sin \alpha = \frac{15 \pm \sqrt{33}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}(15 \pm \sqrt{33})}{36}$$

$$= \frac{3(5\sqrt{3} \pm \sqrt{11})}{36} = \frac{5\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{12}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{5\sqrt{3} \pm \sqrt{11}}{12}.$$

Пример 87. Основание равнобедренного треугольника равно 36, а $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, где α — угол при вершине.

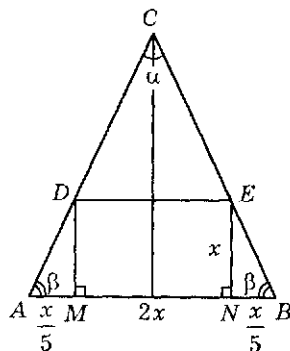
Две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах.

Найти площадь прямоугольника, если одна из сторон вдвое больше другой.

Решение.

I случай

Пусть вершины M и N прямоугольника $MDEN$ лежат на основании AB равнобедренного треугольника ABC (точка N — между B и M), а вершины D и E — на боковых сторонах AC и BC соответственно.



Пусть $\angle ACB = \alpha$, $\angle CAB = \angle ABC = \beta$. По условию задачи $\cos \alpha = \frac{12}{13}$, тогда $\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{169}} = \frac{5}{13}$.

Кроме того, $\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

Но $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \left(1 + \frac{12}{13}\right) : \frac{5}{13} = 5$.

Пусть $EN = x$, тогда $MN = 2x$.

Из $\triangle BEN$ $BN = EN \cdot \operatorname{ctg} \beta = x \cdot \frac{1}{5} = \frac{x}{5}$, тогда

$BN = AM = \frac{x}{5}$, $MN = DF = 2x$.

Следовательно, $AB = \frac{x}{5} + 2x + \frac{x}{5} = \frac{12x}{5}$.

Так как $AB = 36$, то получим $\frac{12x}{5} = 36$, откуда

$x = 15$, т. е. $EN = 15$, $MN = 2x = 30$, тогда $S_{MDEN} = 15 \cdot 30 = 450$.

II случай

Пусть $MN = y$, тогда $EN = 2y$.

Из $\triangle BEN$ $BN = EN \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{y}{2}$,

тогда $AM = BN = \frac{y}{2}$.

Следовательно,

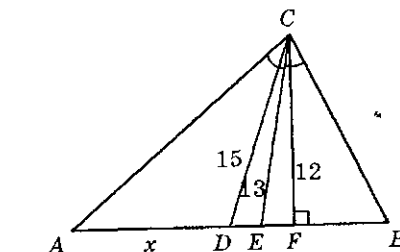
$AB = \frac{y}{2} + y + \frac{y}{2} = 2y$.

Так как $AB = 36$, то $2y = 36$, $y = 18$.

Итак, $MN = y = 18$, $EN = 2y = 36$, тогда

$S_{MDEN} = 18 \cdot 36 = 648$.

Ответ: 450 или 648.



Пример 88(А). В $\triangle ABC$ из вершины C на сторону AB проведены медиана, биссектриса и высота, длины которых равны соответственно 15; 13 и 12. Найти длину AB .

Решение.

Пусть в $\triangle ABC$ CD — медиана, CE — биссектриса, CF — высота, где $CD = 15$, $CE = 13$, $CF = 12$.

Пусть $AD = DB = x$, тогда $AF = x + DF$, $FB = x - DF$, $AE = x + DE$, $BE = x - DE$.

Поскольку CE — биссектриса $\angle ACB$, то

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AC}{BC}. \quad (1)$$

Из $\triangle CEF$ $EF = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$;

из $\triangle CFD$ $DF = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$, тогда

$DE = DF - EF = 9 - 5 = 4$.

Значит, $AF = x + 9$; $FB = x - 9$; $AE = x + 4$; $BE = x - 4$.

Кроме того, из $\triangle ACF$ $AC^2 = (x+9)^2 + 12^2$, а из $\triangle CFB$ $BC^2 = (x-9)^2 + 12^2$.

$$\text{Из (1) имеем } \frac{AE^2}{BE^2} = \frac{AC^2}{BC^2}.$$

Учитывая полученные соотношения, получим уравнение

$$\frac{(x+4)^2}{(x-4)^2} = \frac{(x+9)^2 + 12^2}{(x-9)^2 + 12^2}, \text{ или } \frac{(x+4)^2}{(x-4)^2} = \frac{(x+9)^2 + 144}{(x-9)^2 + 144},$$

или, вычитая по единице с обеих частей, получим

$$\frac{(x+4)^2 - (x-4)^2}{(x-4)^2} = \frac{(x+9)^2 + 144 - (x-9)^2 - 144}{(x-9)^2 + 144}.$$

После упрощения в числителях дробей получим более простое уравнение

$$\frac{16x}{(x-4)^2} = \frac{36x}{(x-9)^2 + 144}, \quad x \neq 0,$$

$$\frac{4}{(x-4)^2} = \frac{9}{(x-9)^2 + 144}, \text{ или}$$

$$4(x-9)^2 + 576 = 9(x-4)^2. \quad (2)$$

Уравнение (2) упростим следующим образом:

$$9(x-4)^2 - 4(x-9)^2 = 576, \text{ или}$$

$$(9x-12-2x+18)(3x-12+2x-18) = 576,$$

$$(7x+6)(5x-30) = 576, \text{ или}$$

$$35x^2 - 180x - 756 = 0.$$

$$D/4 = 35 \cdot 460 = 48^2 \cdot 15 > 0.$$

$$x_{1,2} = \frac{90 \pm 48\sqrt{15}}{35}, \text{ откуда } x = \frac{90 + 48\sqrt{15}}{35}$$

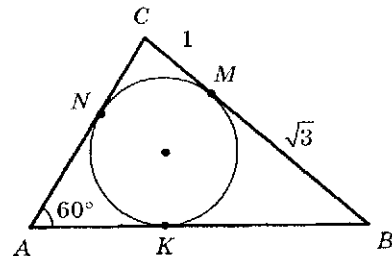
(второй корень не подходит, так как $x > 0$).

$$\text{Значит, } AB = 2x = \frac{2}{35}(90 + 48\sqrt{15}).$$

$$\text{Ответ: } \frac{2}{35}(90 + 48\sqrt{15}).$$

Пример 89(А). Точка касания окружности, вписанной в треугольник, делит одну из сторон на отрезки длиной 1 и $\sqrt{3}$. Найти площадь треугольника, если противолежащий этой стороне угол треугольника равен 60° .

Решение.



Пусть M и N — точки касания окружности, вписанной в $\triangle ABC$. Пусть $CM = 1$, $BM = \sqrt{3}$, $\angle A = 60^\circ$.

По свойству касательных, проведенных к окружности из точки, имеем $CM = CN = 1$, $BM = BK = \sqrt{3}$.

Обозначим $AN = x$, тогда $AK = x$, $AC = x + 1$, $AB = x + \sqrt{3}$.

По теореме косинусов имеем $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A$, или

$$(1 + \sqrt{3})^2 = (x + \sqrt{3})^2 + (x + 1)^2 - 2(x + \sqrt{3})(x + 1) \cdot \frac{1}{2}.$$

После упрощения получим квадратное уравнение $x^2 + (\sqrt{3} + 1)x - 3\sqrt{3} = 0$.

Поскольку $x = AN > 0$, то

$$x = AN = \frac{-(\sqrt{3} + 1) + \sqrt{4 + 14\sqrt{3}}}{2}, \text{ тогда}$$

$$AB = x + \sqrt{3} = \frac{(\sqrt{3} - 1) + \sqrt{4 + 14\sqrt{3}}}{2},$$

$$AC = x + 1 = \frac{(1 - \sqrt{3}) + \sqrt{4 + 14\sqrt{3}}}{2}.$$

Следовательно, искомая площадь треугольника ABC будет равна

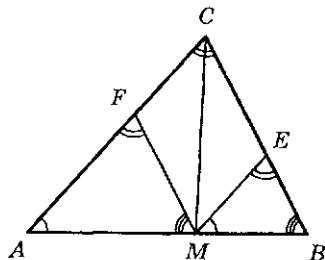
$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle A,$$

$$\begin{aligned} \text{или } S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4} \left((4 + 14\sqrt{3}) - (\sqrt{3} - 1)^2 \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{16} (4 + 14\sqrt{3} - 4 + 2\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot 16\sqrt{3} = 3. \end{aligned}$$

Ответ: 3.

Пример 90. Через точку M , взятую на стороне AB $\triangle ABC$, проведена прямая параллельно стороне AC до пересечения в точке E так, что $BE : EC = 1 : 3$. Найти отношение $S_{\triangle CEM} : S_{\triangle ABC}$.

Решение.



Из точки M проведем прямую параллельно BC до пересечения со стороной AC в точке F . Так как $ME \parallel AC$ (по условию), то $FCEM$ — параллелограмм. Тогда $\triangle CFM = \triangle CEM$.

$$\text{В этом случае } S_{\triangle CFM} + S_{\triangle CEM} = S_{\triangle ABC} - 2 S_{\triangle CEM}. \quad (1)$$

По условию задачи $\frac{CE}{BE} = 3$. Согласно теореме Фалеса,

$$\text{са, имеем } \frac{CE}{BE} = \frac{AM}{MB} = 3.$$

Заметим, что $\triangle AFM \sim \triangle ABC$ и $\triangle MEB \sim \triangle ABC$, тогда

$$\frac{BC}{MF} = \frac{AB}{AM} = \frac{AM + MB}{AM} = 1 + \frac{MB}{AM} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{AC}{ME} = \frac{AB}{MB} = \frac{AM + MB}{MB} = \frac{AM}{MB} + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Известно, что площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон, тогда

$$\frac{S_{\triangle AFM}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{FM}{BC} \right)^2 = \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{9}{16} \text{ и}$$

$$\frac{S_{\triangle MEB}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{ME}{AC} \right)^2 = \left(\frac{1}{4} \right)^2 = \frac{1}{16}.$$

$$\text{Значит, } S_{\triangle AFM} + S_{\triangle MEB} = \frac{9}{16} S_{\triangle ABC} + \frac{1}{16} S_{\triangle ABC} =$$

$$= \frac{5}{8} S_{\triangle ABC}.$$

Учитывая равенство (1), имеем

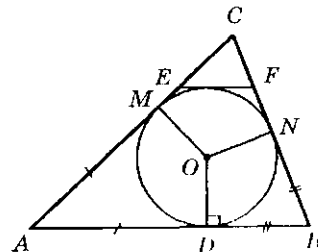
$$S_{\triangle ABC} - 2S_{\triangle CEM} = \frac{5}{8} S_{\triangle ABC}, \text{ или}$$

$$\frac{3}{8} S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle CEM}, \text{ откуда } S_{\triangle CEM} : S_{\triangle ABC} = 3 : 16.$$

Ответ: 3 : 16.

Пример 91(А). В $\triangle ABC$ с периметром, равным 24, вписана окружность. Отрезок EF касательной, проведенной к окружности параллельно основанию, равен $\frac{8}{3}$. Найти длину основания AB треугольника.

Решение.



Пусть M, N, D — точки касания, EF — касательная, $EF \parallel AB$ (по условию).

Так как $AM = AD$ и $BD = BN$ — как отрезки касательных, проведенных к окружности из некоторой точки, то $AB = AD + BD = AM + BN$, тогда $P_{\triangle ABC} = AC + BC + AB = (AM + MC) + (BN + CN) + AB = (AD + DB) + (MC + CN) + AB = 2AB + MC + CN = 24$. (1)

Но $CM + CN = CE + CF + EF = P_{\triangle CEF}$.

Тогда равенство (1) примет вид $P_{\triangle CEF} + 2AB = 24$, откуда $P_{\triangle CEF} = 24 - 2AB$. (2)

Пусть $AB = x$, тогда $P_{\triangle CEF} = 24 - 2x$.

Заметим, что $\triangle ABC \sim \triangle CEF$ (по двум углам), значит, $\frac{P_{\triangle CEF}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{EF}{AB}$. Учитывая соотношение (2), имеем

$$\frac{24 - 2x}{24} = \frac{\frac{8}{x}}{x}, \text{ или } \frac{12 - x}{8} = \frac{4}{x}, \text{ или } x^2 - 12x + 32 = 0,$$

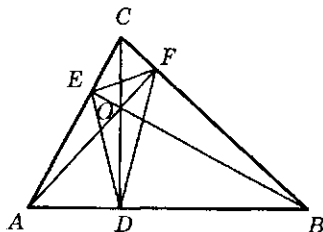
откуда $x_1 = 4$, $x_2 = 8$.

Итак, $AB = 4$ или $AB = 8$.

Ответ: 4 или 8.

Пример 92(А). Основания высот остроугольного $\triangle ABC$ служат вершинами другого $\triangle DEF$, периметр которого равен 8. Найти $S_{\triangle ABC}$, если радиус окружности, описанной около него, равен 3,5.

Решение.



Пусть D, E и F — основания высот $\triangle ABC$. Заметим, что $\triangle ABC \sim \triangle BDF$ (по двум углам), так как $\angle ODF =$

$$= \angle OBF = \frac{\pi}{2} - \angle BCE, \text{ тогда } \angle BDF = \frac{\pi}{2} - \angle ODF = \angle BCE, \text{ кроме того, } \angle ABC \text{ — общий.}$$

Пусть R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, R_1 — радиус окружности, описанной около $\triangle BDF$, тогда $\frac{AC}{DF} = \frac{R}{R_1}$, откуда $DF = \frac{AC \cdot R_1}{R}$, где $R = 3,5$

(по условию задачи).

$R_1 = \frac{1}{2} OB$ (OB — диаметр), тогда

$$DF = \frac{AC \cdot OB}{2R} = \frac{AC \cdot (BE - OE)}{2R} = \frac{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AOC}}{R}.$$

$$\text{Точно так же } EF = \frac{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle AOB}}{R}; DE = \frac{S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BOC}}{R}.$$

$$\text{Следовательно, } DF + EF + DE = \frac{1}{R} (3S_{\triangle ABC} - (S_{\triangle AOC} + S_{\triangle AOB} + S_{\triangle BOC})) = \frac{1}{R} (3S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ABC}) = \frac{1}{R} \cdot 2S_{\triangle ABC}.$$

Так как по условию задачи $R = 3,5$, $P_{\triangle DEF} = 8$, то получим $\frac{1}{3,5} \cdot 2S_{\triangle ABC} = 8$, откуда $S_{\triangle ABC} = 3,5 \cdot 4 = 14$.

Ответ: 14.

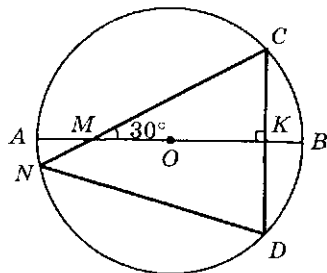
Пример 93(А). Хорда NC пересекает диаметр AB в точке M под углом 30° . Через точку C проведена хорда $CD \perp AB$. Найти площадь $\triangle NCD$, если $MN : MC = 3 : 8$, а радиус окружности равен 5.

Решение.

Пусть $MN = 3x$, $MC = 8x$. Так как $CD \perp AB$, то $\triangle MCK$ — прямоугольный.

$$\text{По условию } \angle CMK = 30^\circ, \text{ тогда } CK = \frac{1}{2} MC = 4x,$$

$$CD = 8x, NC = 11x.$$



Из $\triangle NCD$ по теореме синусов имеем $\frac{ND}{\sin \angle C} = 2R$,

$$\text{откуда } ND = 2R \sin 60^\circ = 2 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}. \quad (1)$$

С другой стороны, по теореме косинусов $ND^2 = CN^2 + CD^2 - 2CN \cdot CD \cos \angle C$, или

$$ND^2 = 121x^2 + 64x^2 - 2 \cdot 11x \cdot 8x \cdot \frac{1}{2}, \text{ или}$$

$$ND^2 = 185x^2 - 88x^2 = 97x^2, \text{ откуда } ND = x\sqrt{97}.$$

Учитывая соотношение (1), получим $x\sqrt{97} = 5\sqrt{3}$,

$$x = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{97}}.$$

Следовательно, $S_{\triangle NCD} = \frac{1}{2} NC \cdot CD \sin \angle C$, или $S_{\triangle NCD} =$

$$= \frac{1}{2} \cdot 11x \cdot 8x \cdot \sin 60^\circ = 44x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 22\sqrt{3} \cdot \left(\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{97}}\right)^2 =$$

$$= \frac{22\sqrt{3} \cdot 25 \cdot 3}{97} = \frac{1650\sqrt{3}}{97}.$$

Ответ: $\frac{1650\sqrt{3}}{97}$.

Пример 94(А). Две стороны треугольника равны 12 и 15, косинус угла между ними равен $\frac{2}{5}$. В треуголь-

ник вписан ромб, имеющий с треугольником общий угол (вершина ромба, противоположная вершине этого угла, лежит на третьей стороне треугольника). Найти сторону ромба.

Решение.

1 случай

Пусть угол при вершине A — общий угол $\triangle ABC$ и ромба $ADEF$.

Пусть в $\triangle ABC$ $AC = 15$, $AB = 12$, $\angle A = \alpha$, $\cos \alpha = \frac{2}{5}$ (по условию).

По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos \alpha},$$

$$\text{или } BC = \sqrt{15^2 + 12^2 - 2 \cdot 15 \cdot 12 \cdot \frac{2}{5}},$$

$$BC = 15.$$

Выходит, что $AC = BC$, т. е. $\triangle ABC$ — равнобедренный.

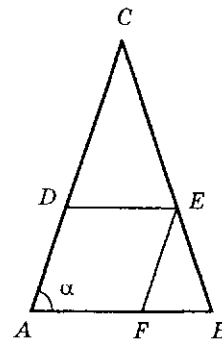
Пусть $AF = AD = x$ — сторона ромба $ADEF$, причем вершина E ромба лежит на стороне BC $\triangle ABC$, а вершина F — на стороне AB .

Заметим, что $\triangle CDE \sim \triangle ABC$ (по двум углам), тогда

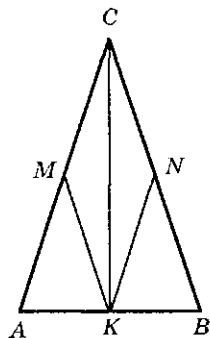
$$\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{AC}, \text{ или } \frac{x}{12} = \frac{15-x}{15}, \text{ или } 15x = 180 - 12x,$$

$$27x = 180, \text{ откуда } x = AF = AD = \frac{20}{3}.$$

Тот же результат мы получим, если $\angle B$ — общий угол ромба и $\triangle ABC$.



II случай



Пусть $\angle C$ — общий угол $\triangle ABC$ и ромба $CMKN$, где вершина K лежит на основании AB , а вершина M — на стороне AC . Так как CK — биссектриса $\angle ACB$, то CK и медиана равнобедренного $\triangle ABC$ и $MK \parallel BC$, тогда MK — средняя линия $\triangle ABC$, значит, $MK = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \cdot 15 = 7,5$.

Ответ: $\frac{20}{3}$ или 7,5.

Пример 95. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB является диаметром первой окружности, а отрезок BC — диаметром второй окружности. Прямая, проходящая через точку A , пересекает первую окружность в точке D и касается второй — в точке E . Найти радиусы окружностей, если $BD = 12$, $BE = 16$.

Решение.

Возможны 3 случая расположения точек A, B и C на одной прямой.

I случай

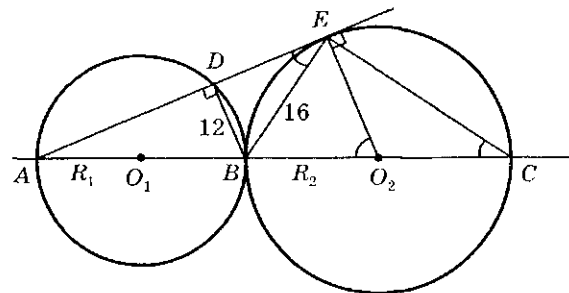
Точка A расположена между точками B и C , тогда A находится внутри второй окружности. В этом случае не существует прямой, проходящей через A и касающейся второй окружности.

II случай

Точка B расположена между точками A и C (см. верхний рис. на стр. 145).

Пусть R_1 и R_2 — радиусы первой и второй окружностей соответственно. Заметим, что $\angle ADB = \angle CEB$ — как вписанные, опирающиеся на диаметр.

Кроме того, $\angle BED = \angle BCE$ — как угол между касательной и хордой, равный вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу. Тогда $\triangle BDE \sim \triangle BEC$ (по двум

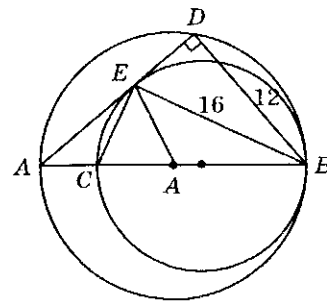


углам), значит, $\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{BE}$, или $\frac{16}{12} = \frac{2R_2}{16}$, откуда $R_2 = \frac{32}{3}$.

Поскольку $BD < O_2E$, а $12 > \frac{32}{3}$, то этот случай невозможен.

III случай

Точка C расположена между точками A и B (рис. ниже).



Аналогично II случаю находим $R_2 = \frac{32}{3}$.

Из подобия прямоугольных треугольников $\triangle AOE$ и $\triangle ADB$ имеем:

$$\frac{AB}{AO} = \frac{BD}{OE}, \text{ или } \frac{2R_1}{2R_1 - R_2} = \frac{12}{R_2}, \quad \frac{R_1}{2R_1 - R_2} = \frac{6}{R_2},$$

$$\text{откуда } R_1 = \frac{6R_2}{12 - R_2} = 48.$$

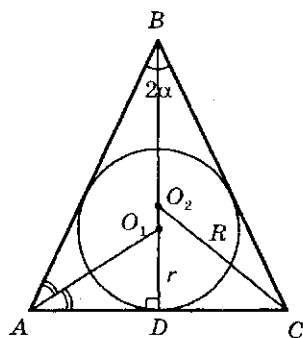
$$\text{Ответ: } R_1 = 48, R_2 = \frac{32}{3}.$$

Пример 96(А). В $\triangle ABC$ $AB = BC$, $\sin \angle B = \frac{24}{25}$,

$r = 12$ — радиус вписанной окружности. Найти радиус описанной окружности.

Решение.

I случай



$\angle B$ — острый.

Пусть $\angle B = 2\alpha$, $O_1D = r$ — радиус вписанной, $O_2B = O_2C = R$ — радиус описанной окружности.

Так как $\triangle ABC$ — равнобедренный, то O_1 и O_2 расположены на биссектрисе BD . Так как $\angle B = 2\alpha$, то

$$\angle O_1AD = \frac{180^\circ - 2\alpha}{4} = 45^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

По условию задачи $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$, тогда

$$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25}.$$

$$\text{Поскольку } 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha, \text{ то } \cos^2 \alpha = \frac{1 + \frac{7}{25}}{2} = \frac{16}{25},$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Известно, что } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \text{ или } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{3}{5}}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{1}{3},$$

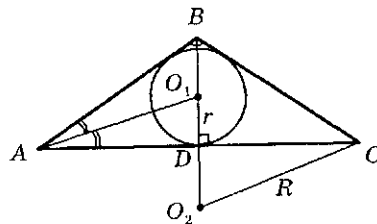
$$AD = r \cdot \operatorname{ctg} \left(45^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) = r \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \text{ или } AD = 12 \cdot \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 24.$$

Значит, $AC = 2 \cdot AD = 48$.

Из $\triangle ABC$ по теореме синусов имеем

$$R = \frac{AC}{2 \sin 2\alpha} = \frac{48}{2 \cdot \frac{24}{25}} = 25.$$

II случай



$\angle B$ — тупой.

В этом случае точка O_1 — центр вписанной окружности — расположен на биссектрисе BD равнобедренного $\triangle ABC$, а центр O_2 — на продолжении биссектрисы BD .

Аналогично имеем: $\sin 2\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$, тогда

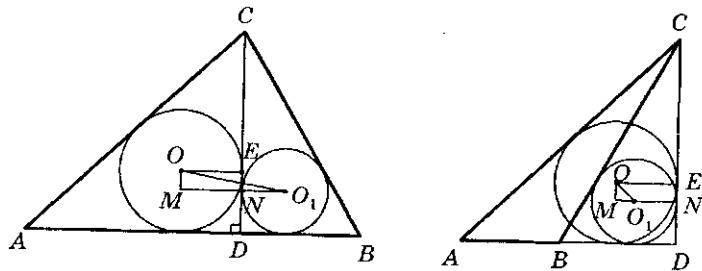
$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha), \cos^2 \alpha = \frac{9}{25}, \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{4}{5}}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{1}{2}, AD = 12 \cdot \frac{1 + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 36, AC = 2AD = 72.$$

$$\text{Наконец, } R = \frac{AC}{2 \sin 2\alpha} = \frac{72 \cdot 25}{2 \cdot 24} = \frac{75}{2} = 37,5.$$

Ответ: 25 или 37,5.

Пример 97(А). В $\triangle ABC$ известны $AC = 34$, $BC = 20$, а высота $CD = 16$. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в $\triangle ADC$ и $\triangle BCD$.



Решение.

Пусть O и O_1 — центры окружностей, вписанных соответственно в $\triangle ADC$ и $\triangle BCD$, r_1 и r_2 — радиусы этих окружностей, а точки E и N — точки касания окружностей с высотой CD .

В $\triangle ADC$ известны $AC = 34$ и $CD = 16$, тогда

$$AD = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30.$$

Аналогично из $\triangle CDB$ имеем

$$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12.$$

Из центра O опустим перпендикуляр OM на прямую O_1N , тогда искомое расстояние OO_1 найдем из прямоугольного $\triangle OMO_1$, т. е. $OO_1 = \sqrt{OM^2 + MO_1^2}$.

Возможны два случая.

I случай

(точка D расположена между точками A и B):

$$r_1 = \frac{AD + DC - AC}{2} = \frac{30 + 16 - 34}{2} = 6,$$

$$r_2 = \frac{BD + CD - BC}{2} = \frac{12 + 16 - 20}{2} = 4.$$

$$OM = EN = DE - EN = r_1 - r_2 = 2, MO_1 = O_1N + MN = O_1N + OE = r_1 + r_2 = 10, \text{ тогда}$$

$$OO_1 = \sqrt{2^2 + 10^2} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}.$$

II случай

(точка B лежит между точками A и D):

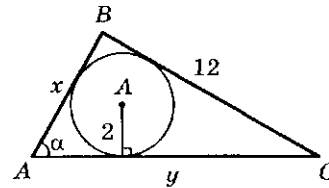
$$OM = EN = DE - EN = r_1 - r_2 = 2, MO_1 = MN - O_1N = OE - O_1N = r_1 - r_2 = 2.$$

В этом случае искомое расстояние

$$OO_1 = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $2\sqrt{26}$ или $2\sqrt{2}$.

Пример 98(А). Известно, что в $\triangle ABC$ $BC = 12$, $AB + AC = 19$, радиус вписанной окружности равен 2. Найти косинус угла A .



Решение.

Пусть $AB = x$, $AC = y$, $\angle A = \alpha$.

По условию $BC = 12$, $x + y = 19$, откуда $y = 19 - x$,

$$\text{тогда } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} x(19 - x) \sin \alpha. \quad (1)$$

С другой стороны, $S_{\triangle ABC} = p \cdot r$, где $r = 2$,
 $p = \frac{1}{2}(x + y + 12) = \frac{1}{2}(19 + 12) = \frac{31}{2}$, тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{31}{2} \cdot 2 = 31. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), имеем $\frac{1}{2}x(19 - x) \sin \alpha = 31$,

$$\text{откуда } x(19 - x) = \frac{62}{\sin \alpha}. \quad (3)$$

По теореме косинусов $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha$,
 или $12^2 = x^2 + (19 - x)^2 - 2x(19 - x)\cos \alpha$, откуда

$$\cos \alpha = \frac{x^2 + (19 - x)^2 - 12^2}{2x(19 - x)}. \quad (4)$$

Так как $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, то равенство (4) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{(x + 19 - x)^2 - 2x(19 - x) - 12^2}{2x(19 - x)} = \\ &= \frac{19^2 - 12^2 - 2x(19 - x)}{2x(19 - x)}. \end{aligned}$$

Используя соотношение (3), получим

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{19^2 - 12^2 - 2 \cdot \frac{62}{\sin \alpha}}{2 \cdot \frac{62}{\sin \alpha}} = \\ &= \frac{7 \cdot 31 - 4 \cdot \frac{31}{\sin \alpha}}{4 \cdot \frac{31}{\sin \alpha}} = \frac{7 - \frac{4}{\sin \alpha}}{\frac{4}{\sin \alpha}} = \frac{7 \sin \alpha - 4}{4}. \end{aligned}$$

Итак, $\cos \alpha = \frac{7 \sin \alpha - 4}{4}$, или $4(1 + \cos \alpha) = 7 \sin \alpha$.

Но $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$, $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$.

Учитывая, что $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$, получим уравнение

$$4 \cos \frac{\alpha}{2} = 7 \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ или } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{4}{7}.$$

Поскольку $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$, то $\cos \alpha = \frac{1 - \frac{16}{49}}{1 + \frac{16}{49}}$, или

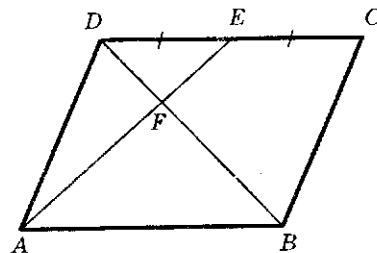
$$\cos \alpha = \frac{33}{65}.$$

Ответ: $\frac{33}{65}$.

2.2. Четырехугольники

Пример 99(А). В параллелограмме $ABCD$ точка E — середина стороны DC . Отрезок AE пересекает диагональ BD в точке F . Найти S_{ABCD} , если $S_{\triangle DFE} = 3$.

Решение.



Пусть E — середина DC , тогда $DE = CE = \frac{1}{2}AB$.

По условию $S_{\triangle DFE} = 3$. Поскольку $\triangle AFB \sim \triangle DFE$ (по двум углам), то $S_{\triangle DFE} : S_{\triangle AFB} = DE^2 : AB^2 = 1 : 4$, тогда $S_{\triangle AFB} = 4 \cdot S_{\triangle DFE} = 4 \cdot 3 = 12$.

Кроме того, $S_{\triangle DFE} : S_{\triangle AFB} = DF^2 : BF^2 = \frac{1}{4}$, тогда

$$DF = \frac{1}{2} BF.$$

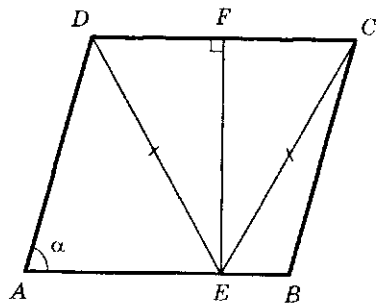
Значит, $S_{\triangle AFD} = \frac{1}{2} S_{\triangle AFB}$, следовательно,

$$S_{ABCD} = 2S_{\triangle ABD} = 2(S_{\triangle ADF} + S_{\triangle AFB}) = 2 \cdot (6 + 12) = 36.$$

Ответ: 36.

Пример 100(А). Точка E , взятая на стороне ромба $ABCD$, делит его в отношении 3 : 2, считая от вершины A , а $DE = CE = \sqrt{31}$. Найти $S_{\triangle CED}$.

Решение.



Пусть $AE = 3x$, тогда $BE = 2x$, $AB = 5x$. Обозначим $\angle A = \alpha$, $\angle B = 180^\circ - \alpha$.

Из $\triangle ADE$ и $\triangle CEB$ по теореме косинусов имеем $DE^2 = AE^2 + AD^2 - 2AE \cdot AD \cdot \cos \alpha$, или

$$31 = 9x^2 + 25x^2 - 30x^2 \cos \alpha, \quad 34x^2 - 30x^2 \cos \alpha = 31. \quad (1)$$

$$\text{Аналогично } CE^2 = 4x^2 + 25x^2 - 20x^2 \cdot \cos(180^\circ - \alpha), \\ \text{или } 29x^2 + 20x^2 \cos \alpha = 31. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), находим $50x^2 \cos \alpha = 5x^2$, откуда $\cos \alpha = \frac{1}{10}$. Учитывая (1), имеем $31x^2 = 31$, $x = 1$,

тогда $DC = AB = 5x = 5$.

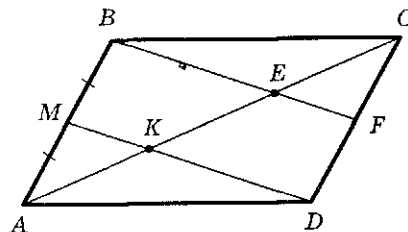
$$\text{Из } \triangle DEF \quad EF = \sqrt{31 - 6,25} = \frac{\sqrt{99}}{2} = \frac{3\sqrt{11}}{2}.$$

$$\text{Значит, } S_{\triangle DEC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{11}}{2} = \frac{15}{4} \sqrt{11}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{15}{4} \sqrt{11}.$$

Пример 101(А). В параллелограмме $ABCD$ M — середина AB . Диагональ AC пересекается с отрезком MD в точке K . Найти длины AK и KC , если $AC = 18$.

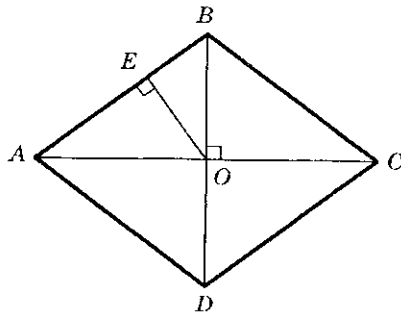
Решение.



Проведем $BF \parallel MD$. Так как $BM \parallel FD$, то $MBFD$ — параллелограмм, т. е. $MB = FD$. Но $MB = AM$ (по условию), $AB = CD$ (по свойству параллелограмма), тогда $FD = MB = FC$. Так как $BM = MA$, то $AK = KE$ (по теореме Фалеса). Аналогично из того, что $CF = FD$, $\Rightarrow CE = KE$. Значит, $AK = KE = EC$, и так как $AC = 18$, то $AK = 18 : 3 = 6$, тогда $KC = 18 - 6 = 12$.

Ответ: $AK = 6$, $KC = 12$.

Пример 102(А). В ромбе $ABCD$ $AC : BD = 3 : 2$, O — точка пересечения диагоналей, $OE \perp AB$. Найти S_{ABCD} , если $S_{\triangle AOE} = 27$.



Решение.

Пусть в ромбе $ABCD$ $AE = x$, $BE = y$, $OE = h$, $AO = a$, $OB = b$, тогда $S_{ABCD} = AB \cdot 2OE = 2(x + y) \cdot h$.

По условию задачи $S_{AOE} = 27$, или $\frac{1}{2}xh = 27$, $xh = 54$.

Так как $OE = h \perp AB$, то из $\triangle AOB$ имеем $h^2 = xy$.

Из подобия $\triangle AOE$ и $\triangle AOB$ (как прямоугольные, имеющие общий $\angle OAE$) получим $a : b = x : h$, и так как по условию задачи $AC : BD = 3 : 2$, то $a : b = 3 : 2$, тогда $x : h = 3 : 2$. Имеем систему уравнений

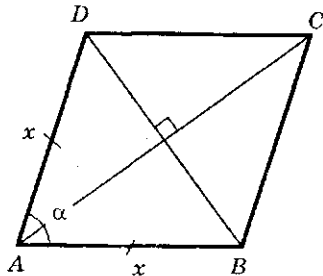
$$\begin{cases} xh = 54, \\ x : h = 3 : 2, \text{ или } xh \cdot \frac{x}{h} = 54 \cdot \frac{3}{2}, \text{ или } x^2 = 81, x = 9, \\ h^2 = xy, \end{cases}$$

тогда $h = 54 : x = 6$, следовательно, $y = h^2 : x = 4$, значит, $S_{ABCD} = 2(x + y) \cdot h = 2 \cdot (9 + 4) \cdot 6 = 156$.

Ответ: 156.

Пример 103. Чему равен острый угол ромба, если сторона есть среднее геометрическое его диагоналей?

Решение.



Пусть сторона ромба $AB = x$, $\angle DAB = \alpha$, $AC = d_1$, $BD = d_2$. По условию задачи $x^2 = d_1 \cdot d_2$.

Из $\triangle ABD$ по теореме косинусов $d_2^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \alpha$,

или $d_2^2 = 2x^2(1 - \cos \alpha)$. Так как $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, то

получим $d_2^2 = 4x^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, откуда $d_2 = 2x \sin \frac{\alpha}{2}$.

Аналогично из $\triangle ABC$, где $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$, имеем

$$d_1^2 = 2x^2 + 2x^2 \cos \alpha = 2x^2(1 + \cos \alpha) = 4x^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2},$$

откуда $d_1 = 2x \cos \frac{\alpha}{2}$.

Итак, $d_1 = 2x \cos \frac{\alpha}{2}$, $d_2 = 2x \sin \frac{\alpha}{2}$.

Учитывая условие задачи, имеем

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2x \sin \frac{\alpha}{2} = 2x^2 \left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \\ &= 2x^2 \sin \alpha, \text{ откуда } \sin \alpha = \frac{1}{2}, \alpha = 30^\circ. \end{aligned}$$

Ответ: 30° .

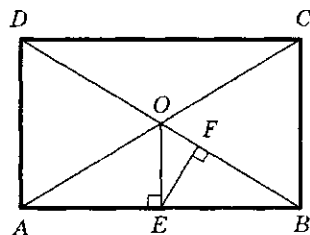
Пример 104(А). В прямоугольнике $ABCD$ O — точка пересечения диагоналей AC и BD , расстояние от точки O до стороны AB равно 13, а расстояние от середины AB до диагонали BD равно 12. Найти радиус окружности, описанной около прямоугольника.

Решение.

По условию $OE = 13$, $EF = 12$, тогда из $\triangle OEF$ находим $OF = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Заметим, что $\triangle DAB \sim \triangle OEF$ —

как прямоугольные, $\angle ADB = \angle EOF$, значит,

$$\frac{AD}{AB} = \frac{OF}{EF}, \text{ откуда } AB = \frac{AD \cdot EF}{OF}.$$



Так как O — середина BD , E — середина AB , то OE — средняя линия $\triangle DAB$, значит, $AD = 2 \cdot OE$ и $AB = \frac{2 \cdot 13 \cdot 12}{5} = \frac{26 \cdot 12}{5}$. Далее из $\triangle DAB$ находим

$$BD = \sqrt{AD^2 + AB^2} = \sqrt{26^2 + \left(\frac{26 \cdot 12}{5}\right)^2} =$$

$$= 26 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = 26 \cdot \sqrt{\frac{169}{25}} = \frac{26 \cdot 13}{5}.$$

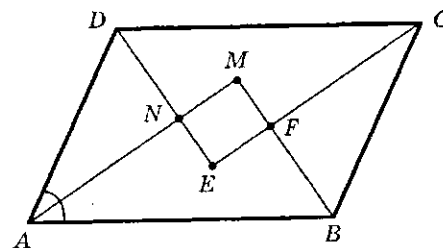
Поскольку $ABCD$ прямоугольник, то диагональ является диаметром описанной окружности, тогда радиус $R = \frac{1}{2} BD = \frac{13^2}{5} = \frac{169}{5} = 33,8$.

Ответ: 33,8.

Пример 105(А). В параллелограмме со сторонами 11 и 5 проведены биссектрисы всех углов. Найти острый угол параллелограмма, если площадь четырехугольника, вершинами которого являются точки пересечений биссектрис, равна 9.

Решение.

По условию $AB = 11$, $AD = 5$. Пусть точки E, F, M, N — точки пересечения биссектрис углов параллелограмма $ABCD$. Пусть $\angle DAB = \alpha$ — искомый угол.



Заметим, что четырехугольник $EFMN$ — прямоугольник (доказать самостоятельно), тогда

$$NE = DE - DN = 11 \sin \frac{\alpha}{2} - 5 \sin \frac{\alpha}{2} = 6 \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$EF = CE - CF = 11 \cos \frac{\alpha}{2} - 5 \cos \frac{\alpha}{2} = 6 \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$\text{Значит, } S_{\triangle EFMN} = NE \cdot EF = 6 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot 6 \cos \frac{\alpha}{2} =$$

$$= 18 \sin \alpha.$$

Но $S_{\triangle EFMN} = 9$, тогда $18 \sin \alpha = 9$, откуда

$$\sin \alpha = \frac{1}{2}, \quad \alpha = 30^\circ.$$

Ответ: 30° .

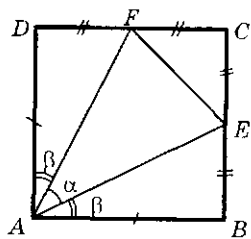
Пример 106(А). В квадрате $ABCD$ точка E — середина BC , а точка F — середина CD . Найти $\angle EAF$.

Решение.

I способ

Пусть в квадрате $ABCD$ точка E — середина BC , F — середина CD . Пусть $\angle EAF = \alpha$. Так как F и E — середины сторон квадрата, то $\triangle ADF \sim \triangle ABE$ (по двум катетам). Тогда $\angle DAF = \angle BAE = \beta$ и $\angle DAB = 2\beta + \alpha = 90^\circ$, откуда $\alpha = 90^\circ - 2\beta$, тогда $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} (90^\circ - 2\beta) = \operatorname{ctg} 2\beta$.

$$\text{Из } \triangle ADF \text{ находим } \operatorname{ctg} \beta = \frac{AD}{DF} = 2.$$



Но $\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$, тогда

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} 2\beta = \frac{\operatorname{ctg}^2 \beta - 1}{2 \operatorname{ctg} \beta} = \frac{4-1}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}.$$

Итак, $\operatorname{tg} \alpha = 0,75$.

Ответ: 0,75.

II способ

Пусть $AB = 2x$, тогда $FC = EC = x$.

Из $\triangle FCE$ $FE^2 = x^2 + x^2$, или $FE^2 = 2x^2$.

Из $\triangle ABE$ $AE^2 = (2x)^2 + x^2$, $AE^2 = 5x^2$,

или $AE = AF = x\sqrt{5}$.

Из $\triangle AFE$ по теореме косинусов имеем

$$FE^2 = AE^2 + AF^2 - 2AE \cdot AF \cos \alpha,$$

$$\text{или } 2x^2 = 5x^2 + 5x^2 - 2 \cdot 5x^2 \cos \alpha,$$

$$10x^2 \cos \alpha = 8x^2, x > 0, \cos \alpha = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Известно, что } 1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \text{ или } 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{25}{16},$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{9}{16}, \text{ откуда } \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4} = 0,75, \text{ где } 0 < \alpha < 90^\circ.$$

Ответ: 0,75.

III способ

$$S_{\triangle AFE} = S_{ABCD} - 2S_{\triangle ABE} - S_{\triangle FCE},$$

$$\text{или } \frac{1}{2} AF \cdot AE \sin \alpha = AB^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BE - \frac{1}{2} CE \cdot CF,$$

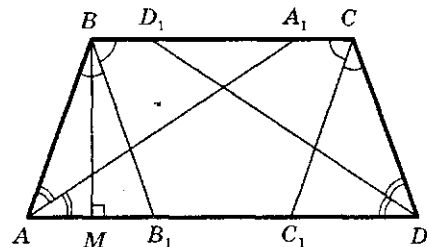
$$\frac{1}{2} \cdot 5x^2 \sin \alpha = 4x^2 - 2x^2 - \frac{1}{2} x^2;$$

$$\frac{1}{2} \cdot 5x^2 \sin \alpha = \frac{3}{2} x^2,$$

$$\text{откуда } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{16}{25} \text{ и}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \text{ и т. д. (см. способ 2).}$$

Пример 107(А). Биссектрисы углов трапеции делят каждое из ее оснований на 3 равные части. Найти площадь трапеции, если ее высота равна 1.



Решение.

Пусть AD — большее основание трапеции $ABCD$. AA_1 , BB_1 , CC_1 и DD_1 — биссектрисы ее внутренних углов.

По условию $AB_1 = B_1C_1 = C_1D$ и $BD_1 = D_1A_1 = A_1C$ (это единственно возможный случай выполнения условия).

Пусть $BC = 3x$. Так как AA_1 и BB_1 — биссектрисы соответствующих углов A и B , то $BA_1 = AB = AB_1$ ($\angle BA_1A = \angle A_1AD = \angle BAA_1$, $\angle ABB_1 = \angle B_1BC = \angle BB_1A$).

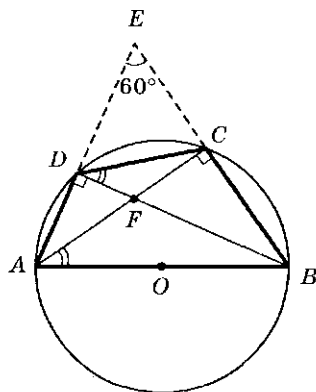
Значит, $AB = 2x$, $AD = 6x$ — трапеция равнобедренная. Проведем высоту BM , тогда по теореме Пифагора имеем

$$4x^2 - \frac{9x^2}{4} = 1, \text{ или } \frac{7}{4}x^2 = 1, \frac{\sqrt{7}}{2}x = 1, \text{ откуда } x = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BM$, или

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \left(\frac{12}{\sqrt{7}} + \frac{6}{\sqrt{7}} \right) \cdot 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{\sqrt{7}} = \frac{9}{\sqrt{7}}.$$

Ответ: $\frac{9}{\sqrt{7}}$.



Пример 108(А). AB — диаметр четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность. Найти отношение $DC : AB$, если угол между прямыми AD и BC равен 60° .

Решение.

Проведем диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$. Пусть F — точка их пересечения, а E — точка пересечения прямых AD и BC .

Поскольку AB — диаметр окружности, то $\triangle ACB$ и $\triangle ADB$ — прямоугольные, тогда AC и BD — высоты $\triangle AEB$.

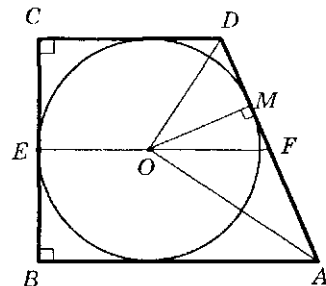
Значит, $\angle AFB + \angle CFB = \angle CFB + \angle DFC$, откуда $\angle CFB = 180^\circ - \angle DFC = 60^\circ$.

Кроме того, $\angle CAB = \angle BDC$ — как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу CB , $\angle AFD = \angle CFB$ — как вертикальные, тогда $\triangle AFB \sim \triangle DFC$ (по двум углам), причем коэффициент подобия $k = \frac{CF}{BF} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$,

следовательно, $DC : AB = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

Ответ: 1 : 2.

Пример 109(А). В прямоугольную трапецию вписана окружность, центр которой удален от концов боковой стороны на расстояния 9 и 12. Найти периметр трапеции.



Решение.

По свойству описанного четырехугольника имеем

$$AB + CD = BC + AD.$$

EF — средняя линия трапеции, тогда $2EF = AB + CD$.

Следовательно, периметр трапеции будет равен

$$P = (AB + CD) + (BC + AD) = 4EF.$$

Заметим, что $EF = EO + OF$, где $EO = OM$ — радиус вписанной окружности.

Поскольку $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$, то

$$\angle OAD + \angle ADO = \frac{1}{2} \angle BAD + \frac{1}{2} \angle ADC = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

(AO и DO — соответственно биссектрисы углов A и D .)

Значит, $\angle AOD = 90^\circ$, т. е. $\triangle AOD$ — прямоугольный, тогда $AD = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = 15$.

Но F — середина AD (EF — средняя линия трапеции), т. е. OF — медиана $\triangle AOD$, а точка F — центр описанной около $\triangle AOD$ окружности, т. е.

$$OF = \frac{1}{2} AD = \frac{15}{2}.$$

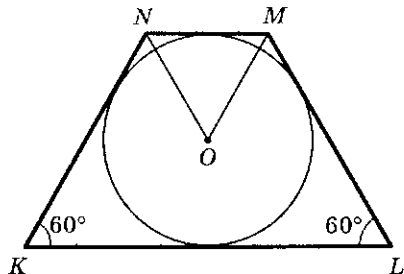
Заметим, что $S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} AD \cdot OM = \frac{1}{2} AO \cdot OD$, откуда

$$OM = \frac{AO \cdot OD}{AD} = \frac{36}{5}.$$

Значит, $P = 4EF = 4 \cdot (EO + OF) = 4(OM + OF) = 4 \cdot 14,7 = 58,8$.

Ответ: 58,8.

Пример 110(А). Меньшее основание равнобедренной трапеции равно 10, а острый угол равен 60° . Найти длину отрезка, соединяющего центр вписанной окружности с вершиной меньшего основания.



Решение.

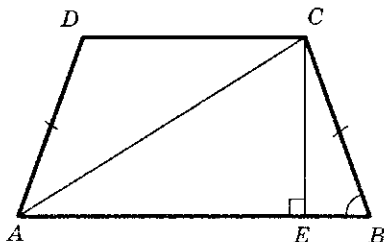
Так как $KNML$ — трапеция, где $KL \parallel NM$, то $\angle K + \angle KNM = 180^\circ$.

По условию задачи окружность вписана в трапецию, где $NM = 10$, тогда $NO = OM$ — биссектрисы углов KNM и LMN .

Так как $\angle K = 60^\circ$, то $\angle KNM = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, тогда в $\triangle NOM$ $\angle ONM = \angle OMN = 60^\circ$, значит, $\angle NOM = 60^\circ$, т. е. $\triangle NOM$ — равносторонний, тогда $MO = NO = MN = 10$.

Ответ: 10.

Пример 111(А). Основания трапеции равны 4 и 16. В нее вписана и около нее описана окружность. Найти произведение радиусов описанной и вписанной окружностей.



Решение.

Согласно условию задачи около трапеции можно описать окружность. Но тогда $ABCD$ — равнобедренная трапеция, т. е. $AD = BC$. Поскольку в трапецию также можно вписать окружность, то $AD + BC = AB + DC = 20$, тогда $AD = BC = 10$.

Проведем высоту CE трапеции.

Пусть $\angle B = \alpha$. Так как трапеция равнобедренная, то $BE = \frac{1}{2}(AB - CD) = 6$.

Из $\triangle CEB$ $CE = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$. Но $CE = 2r$, где r — радиус вписанной в трапецию окружности, т. е. $r = 4$.

Значит, из $\triangle CEB$ $\cos \alpha = \frac{BE}{BC} = 0,6$, где $\alpha = \angle B$, тогда

$\sin \alpha = 0,8$.

Из $\triangle ACB$ по теореме косинусов имеем

$$AC^2 = 256 + 100 - 2 \cdot 16 \cdot 10 \cdot 0,6 = 164, \quad AC = 2\sqrt{41}.$$

Так как по условию окружность описана около трапеции $ABCD$, то она описана и около $\triangle ABC$, тогда по

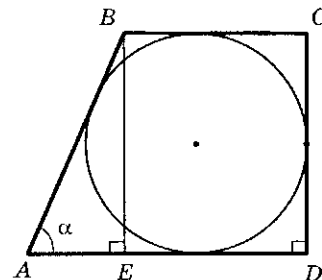
теореме синусов $\frac{AC}{\sin \alpha} = 2R$, $R = \frac{2\sqrt{41}}{2 \cdot 0,8} = \frac{5\sqrt{41}}{4}$.

Следовательно, $R \cdot r = 5\sqrt{41}$.

Ответ: $5\sqrt{41}$.

Пример 112(А). В прямоугольную трапецию с острым углом, равным $\arcsin \frac{3}{5}$,

вписана окружность радиуса $\frac{9}{4}$. Найти площадь трапеции.



Решение.

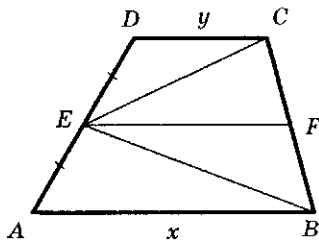
Пусть $\angle BAD = \alpha$, тогда согласно условию задачи $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Проведем высоту BE трапеции $ABCD$.

Из $\triangle ABE$ имеем $AB = \frac{BE}{\sin \alpha} = \frac{2 \cdot 9/4}{3/5} = \frac{15}{2}$, где $BE = 2r$, r — радиус вписанной окружности.

По свойству описанного четырехугольника $AD + BC = AB + CD = \frac{15}{2} + \frac{9}{2} = 12$. Следовательно, площадь

$$\text{трапеции } S = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \frac{18}{4} = 27.$$

Ответ: 27.



Пример 113(А). Площадь трапеции равна 10. Середина боковой стороны соединена с концами другой боковой стороны. Найти площадь получившегося треугольника.

Решение.

По условию $S_{ABCD} = 10$, E — середина AD .

Проведем из точки E среднюю линию EF .

Пусть $AB = x$, $DC = y$, тогда $EF = \frac{1}{2}(x + y)$. Пусть

h — общая высота для трапеций $AEFD$ и $EDCF$, тогда

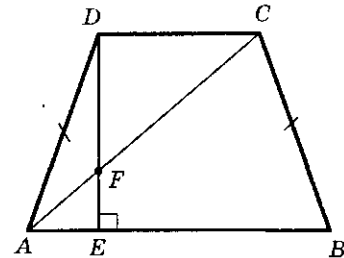
$$S_{\triangle CEB} = S_{\triangle ECF} + S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot h + \frac{1}{2} \cdot EF \cdot h = EF \cdot h.$$

$$\begin{aligned} \text{С другой стороны, } S_{\triangle AEB} + S_{\triangle DEC} &= \frac{1}{2}x \cdot h + \frac{1}{2}y \cdot h = \\ &= \frac{1}{2}h(x + y) = \frac{1}{2}(x + y) \cdot h = EF \cdot h = S_{\triangle CEB}. \end{aligned}$$

$$\text{Значит, } S_{\triangle CEB} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

Ответ: 5.

Пример 114(А). В трапеции $ABCD$ $AD = BC$. Диагональ AC пересекается с высотой DE в точке F . Известно, что $AF : FC = 1 : 4$. Найти отношение площадей треугольников ADC и ABC .



Решение.

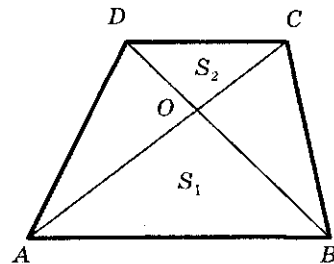
Заметим, что $\triangle AFE \sim \triangle DCF$ (по двум углам), тогда $\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{DC}$.

По условию задачи $\frac{AF}{FC} = \frac{1}{4}$, значит, $\frac{AE}{DC} = \frac{1}{4}$, откуда $DC = 4 \cdot AE$. Следовательно, $AB = 2AE + DC = 2AE + 4AE = 6AE = 6 \cdot \frac{1}{4}DC = \frac{3}{2}DC$.

Но $DC : AB = S_{\triangle ADC} : S_{\triangle ABC}$, или $S_{\triangle ADC} : S_{\triangle ABC} = 2 : 3$.

Ответ: 2 : 3.

Пример 115. В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и DC O — точка пересечения диагоналей AC и BD . Найти площадь трапеции, если $S_{\triangle AOB} = S_1$, $S_{\triangle COD} = S_2$.



Решение.

Заметим, что $\triangle AOB \sim$

$\triangle COD$ (по двум углам), тогда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AO^2}{OC^2}$, или $\frac{AO}{OC} = \sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$.

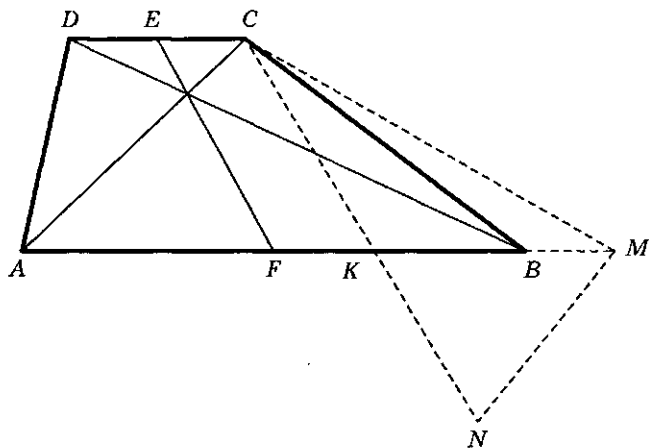
Кроме того, $\frac{S_{\triangle MOD}}{S_2} = \frac{AO}{OC}$, значит, $\sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{S_{\triangle MOD}}{S_2}$, откуда

$$S_{\triangle MOD} = S_2 \cdot \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \sqrt{S_1 \cdot S_2}.$$

Поскольку $S_{\triangle AOD} = S_{\triangle COB}$ (доказать самостоятельно), то площадь S трапеции $ABCD$ будет равна $S = S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1 S_2}$, или $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

Ответ: $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

Пример 116(А). Диагонали трапеции равны 5 и 12, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 6,5. Найти площадь трапеции.



Решение.

Пусть в трапеции $ABCD$ $AC = 5$, $BD = 12$, E — середина DC , F — середина AB , $EF = 6,5$. Из точки C проведем прямую параллельно DB до пересечения с продолжением AB в точке M . Тогда $CM = BD = 12$.

Также из точки C проведем $CK \parallel EF$ и продолжим медиану CK за точку K на расстояние, равное ее длине. Заметим, что $S_{\triangle ACM} = S_{ABCD}$.

Но $\triangle ACK = \triangle MNK = \triangle CKM$, тогда $S_{\triangle CMN} = S_{ABCD}$.

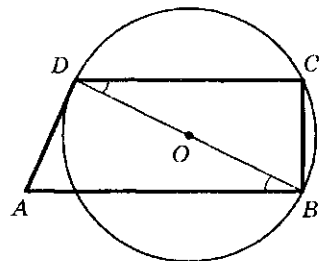
Но $\triangle CMN$ — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора), так как $CN = 2CK = 13$, $CM = BD = 12$, $MN = AC = 5$ и $13^2 = 12^2 + 5^2$.

$$\text{Значит, } S_{ABCD} = S_{\triangle CMN} = \frac{1}{2} CM \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 5 = 30.$$

Ответ: 30.

Пример 117(А). В трапеции $ABCD$ основания $AB = 9$, $CD = 4$. Окружность, проходящая через вершины B , C и D , касается стороны AD .

Найти высоту трапеции, если диагональ BD проходит через центр окружности.



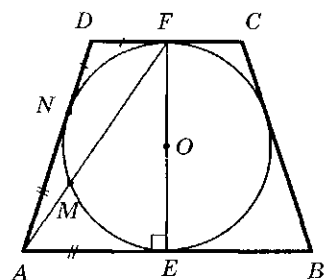
Решение.

По условию задачи окружность с центром O проходит через вершины B , C , D и касается стороны AD . Пусть D — точка касания. Так как диагональ BD проходит через центр O окружности, то $\angle ADB = \angle DCB = 90^\circ$.

Кроме того, $\angle BDC = \angle ABD$ как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AB и DC и секущей BD . Значит, трапеция — прямоугольная, где BC — искомая высота. Заметим, что $\triangle ADB \sim \triangle BCD$ (по двум углам), тогда $BD : AB = CD : BD$, откуда $BD = \sqrt{AB \cdot CD} = \sqrt{9 \cdot 4} = 6$.

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle DCB \text{ находим } BC &= \sqrt{BD^2 - CD^2} = \\ &= \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Ответ: $2\sqrt{5}$.



Пример 118(А). В равнобедренную трапецию $ABCD$ вписана окружность радиуса $r = 2\sqrt{3}$, F — точка касания окружности с основанием трапеции DC . Отрезок AF пересекает окружность в точке M так, что $AM : MF = 2 : 6$. Найти периметр трапеции.

Решение.

Пусть $AM = 2x$, тогда $MF = 6x$, $DF = y$. По свойству касательных $DF = DN = y$, $AN = AE$.

По свойству касательной и секущей $AE^2 = AF \cdot AM$, откуда $AE = \sqrt{(2x+6x) \cdot 2x} = 4x$.

Так как $AE = 4x$, $AM = 8x$, то $\angle AFE = 30^\circ \Rightarrow \angle AFD = 60^\circ$.

Из $\triangle ADF$, где $DF = y$, $AD = AN + ND = AE + DF = 4x + y$, по теореме косинусов имеем $(4x + y)^2 = 64x^2 + y^2 - 2 \cdot 8x \cdot y \cdot \frac{1}{2}$, или $48x^2 = 16xy$, $x \neq 0$, откуда

$y = 2x$, тогда $DC = 2y = 4x$, $AB = 2AE = 8x$.

Из $\triangle AED$ $AF^2 - AE^2 = FE^2$, или $(8x)^2 - (4x)^2 = (2r)^2$, откуда $12x^2 = r^2$, где $r = 2\sqrt{3}$ (по условию), тогда $12x^2 = 12$, $x^2 = 1$, $x = 1$. Значит, $AB = 8x = 8$; $DC = 4$.

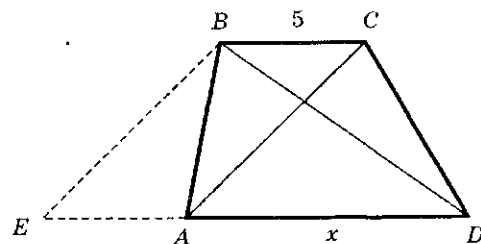
Но $AB + DC = AD + BC$ (по свойству описанного четырехугольника), тогда периметр трапеции $P = (8 + 4) \cdot 2 = 24$.

Ответ: 24.

Пример 119(А). В трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $BC = 5$, $AC = 9$, $BD = 12$. Найти большее основание AD , если $S_{ABCD} = 54$.

Решение.

Известно, что если d_1 и d_2 — диагонали четырехугольника и α — угол между ними, то $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$.



По условию задачи $AC = 9$; $BD = 12$ и $S_{ABCD} = 54$, тогда получим $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \cdot \sin \alpha = 54$, или $\sin \alpha = 1$, $\alpha = 90^\circ$,

т. е. $AC \perp BD$.

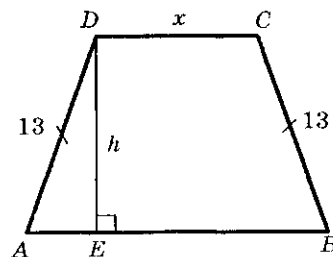
Из точки B проведем прямую параллельно AC до пересечения с продолжением основания DA в точке E .

Тогда $ACBE$ — параллелограмм (по определению) и $AE = BC = 5$. Так как $BD \perp AC$ (по доказанному) и $AC \parallel BE$ (по построению), то $\triangle BDE$ — прямоугольный (по обратной теореме Пифагора), тогда $BD^2 + BE^2 = DE^2$, или $12^2 + 9^2 = (x + 5)^2$, где $x = AD$. Решая полученное уравнение, находим $x = 10$.

Ответ: 10.

Замечание. Задачу можно решить иначе, например, предварительно доказав, что $S_{ABCD} = S_{ABED}$.

Пример 120(А). В равнобедренной трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AD = BC = 13$, основание $AB = 20$. Найти длину меньшего основания, если $S_{ABCD} = 180$.



Решение.

Проведем высоту трапеции $DE = h$. Пусть $DC = x$,

$AE = y$, тогда $y = \frac{1}{2}(20 - x)$. Из $\triangle AED$ $y^2 + h^2 = 13^2$.

По условию задачи $S_{ABCD} = 180$, или $(20 + x) \cdot h = 360$. Итак, для нахождения $DC = x$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(20 - x), \\ y^2 + h^2 = 13^2, \\ (20 + x) \cdot h = 360; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y^2 = \frac{1}{4}(20 - x)^2, \\ h^2 = 13^2 - y^2, \\ (20 + x)^2 h^2 = 360^2, \end{cases}$$

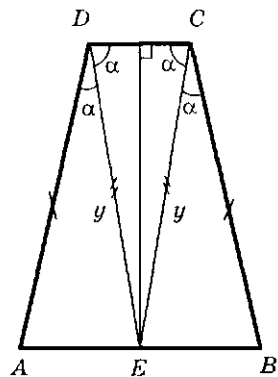
откуда $h^2 = 13^2 - \frac{1}{4}(20 - x)^2$, или $h^2 = \frac{1}{4}(6 + x)(46 - x)$.

Тогда III уравнение системы примет вид $(20 + x)^2(6 + x)(46 - x) = 720^2$.

Упрощая полученное уравнение, получим $x^4 - 1476x^2 - 27\,040x + 408\,000 = 0$.

Можно убедиться, что $x = 10$ — корень уравнения, тогда $x^2(x^2 - 100) - 1376x(x - 10) - 40\,800(x - 10) = 0$, откуда находим, что $x = 10$ — единственный корень уравнения. Уравнение $x^3 + 10x^2 - 1376x - 408\,000 = 0$ не имеет корней, так как по смыслу задачи $x < 20$, и левая часть полученного уравнения отрицательна и равенство не может выполняться.

Ответ: 10.



Пример 121(А). Боковая сторона равнобедренной трапеции в три раза больше меньшего из оснований. Биссектрисы тупых углов этой трапеции пересекаются в точке, лежащей на основании. Найти отношение площади трапеции к площади треугольника, образованного меньшим основанием и биссектрисами.

Решение.

Пусть в трапеции $ABCD$ $AD = BC$, DE и CE — биссектрисы тупых углов ADC и BCD .

Пусть $DC = x$, тогда $AD = 3x$.

Так как $\angle EDC = \angle ECD$, то $\triangle EDC$ равнобедренный. Пусть $DE = CE = y$.

Но $\triangle ADE = \triangle ECB$ (по двум сторонам и углу между ними), тогда

$$S_{ABCD} = 2S_{ADE} + S_{DEC}. \quad (1)$$

$$\text{Но } S_{ADE} = \frac{1}{2}AD \cdot DE \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 3xy \sin \alpha. \quad (2)$$

$$S_{DEC} = \frac{1}{2}DE \cdot CE \cdot \sin (180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2}y^2 \sin 2\alpha. \quad (3)$$

С учетом (2) и (3) равенство (1) примет вид

$$S_{ABCD} = 3xy \sin \alpha + \frac{1}{2}y^2 \sin 2\alpha. \quad (4)$$

$$\text{Из } \triangle DKE \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}x : y = \frac{x}{2y}, \text{ откуда } x = 2y \cos \alpha,$$

$$\text{тогда } S_{ABCD} = 3 \cdot 2y \cos \alpha \cdot y \sin \alpha + \frac{1}{2}y^2 \sin 2\alpha =$$

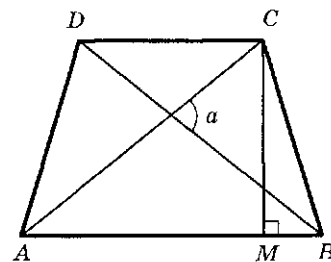
$$= 3y^2 \sin 2\alpha + \frac{1}{2}y^2 \sin 2\alpha = \frac{7}{2}y^2 \sin 2\alpha.$$

Учитывая (3), получим

$$S_{ABCD} : S_{DEC} = \frac{7}{2}y^2 \sin 2\alpha : \frac{1}{2}y^2 \sin 2\alpha = 7.$$

Ответ: 7.

Пример 122(А). В равнобедренной трапеции острый угол между диагоналями, противолежащий боковой стороне, равен α . При каком значении α диагональ трапеции в два раза больше высоты?



Решение.

Пусть $DC = 2x$, $AB = 2y$.

Из условия следует, что $\alpha < 90^\circ$.

Известно, что $S_{ABCD} = \frac{1}{2}d^2 \sin \alpha$, где $d = AC = BD$.

С другой стороны,

$$S_{ABCD} = \frac{AB+DC}{2} \cdot CM = \frac{2x+2y}{2} \cdot h = (x+y)h, \text{ откуда,}$$

сравнивая полученные выражения, получим

$$\frac{1}{2}d^2 \sin \alpha = (x+y)h, \text{ или}$$

$$d^2 \sin \alpha = 2(x+y)h. \quad (1)$$

По условию задачи $d = 2h$, тогда (1) примет вид

$$4h^2 \sin \alpha = 2(x+y)h, \quad h \neq 0, \text{ тогда}$$

$$2h \sin \alpha = x+y. \quad (2)$$

$$\text{Но } MB = \frac{1}{2}(AB-DC) = \frac{1}{2}(2y-2x) = y-x, \text{ тогда}$$

$$AM = AB - MB = 2y - (y-x) = y+x. \quad (3)$$

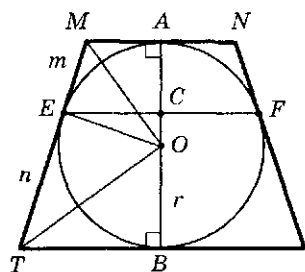
Из $\triangle AMC$ $d^2 = AM^2 + h^2$, или, учитывая (3), имеем

$$4h^2 = (x+y)^2 + h^2, \text{ или } 4h^2 = 4h^2 \sin^2 \alpha + h^2,$$

$$3h^2 = 4h^2 \sin^2 \alpha, \quad \sin^2 \alpha = \frac{3}{4}, \text{ откуда}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\sin \alpha > 0), \text{ тогда } \alpha = 60^\circ.$$

Ответ: при $\alpha = 60^\circ$.



Пример 123(А). В равнобедренную трапецию $TMNK$, площадь которой равна 125, вписана окружность. E и F соответственно точки касания боковых сторон MT и NK с окружностью.

Найти площадь круга, если $EF = 8$.

Решение.

Проведем диаметр окружности $AB \perp MN$ и $AB \perp TK$, проходящий через центр O окружности. По условию $TM = KN$, $S_{TMNK} = 125$ и $EF = 8$ — расстояние между точками касания ее боковых сторон.

Пусть $EM = MA = m$, $TE = TB = b$, $EO = r$ — радиус вписанной окружности, $AB = 2r$, $EC = \frac{1}{2}EF = 4$, где

C — точка пересечения EF и AB .

Из $\triangle EOC$ $OC = \sqrt{r^2 - 16}$, тогда $AC = AO - OC = r - \sqrt{r^2 - 16}$, $BC = BO + OC = r + \sqrt{r^2 - 16}$.

Следовательно, $ME : ET = AC : BC$, или $m : n = (r - \sqrt{r^2 - 16}) : (r + \sqrt{r^2 - 16})$.

Из $\triangle MOT$, где $\angle MOT = 90^\circ$ (MO и TO — биссектрисы углов TMN и MTK , $\angle TMN + \angle MTK = 180^\circ$), имеем $OE^2 = ME \cdot ET$, или $mn = r^2$.

По условию $S_{TMNK} = 125$, или $\frac{1}{2}(MN + TK) \cdot AB = 125$. Но $2MT = MN + TK$ (по свойству описанного четырехугольника), тогда $2(m+n) = MN + TK$, или $(m+n) \cdot 2r = 125$.

Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} m:n = (r - \sqrt{r^2 - 16}) : (r + \sqrt{r^2 - 16}), \\ mn = r^2, \\ 2(m+n)r = 125. \end{cases}$$

Пусть для краткости $r - \sqrt{r^2 - 16} = \alpha$, $r + \sqrt{r^2 - 16} = \beta$,

тогда $m = \frac{\alpha}{\beta} \cdot n$ и II уравнение примет вид $\frac{\alpha}{\beta} \cdot n^2 = r^2$,

следовательно, III уравнение преобразуется к виду

$$2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot n + n \right) \cdot r = 125, \text{ или } 2nr \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) = 125.$$

Но $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \cdot n = r$, $n = \frac{r}{\sqrt{\alpha/\beta}}$, значит,

$$2r^2 \cdot \left(\frac{\alpha}{\beta} + 1 \right) = 125 \cdot \sqrt{\alpha/\beta}.$$

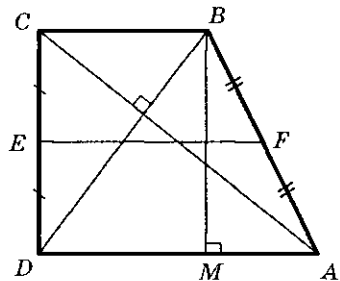
Так как $\frac{\alpha}{\beta} + 1 = \frac{r - \sqrt{r^2 - 16}}{r + \sqrt{r^2 - 16}} + 1 = \frac{2r}{r + \sqrt{r^2 - 16}},$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta} = \frac{4}{r + \sqrt{r^2 - 16}}.$$

Следовательно, $2r^2 \cdot \frac{2r}{r + \sqrt{r^2 - 16}} = 125 \cdot \frac{4}{r + \sqrt{r^2 - 16}},$

или $r^3 = 125$, $r = 5$, тогда $S_{кр.} = \pi r^2 = 25\pi$.

Ответ: 25π .



Пример 124(А). В прямоугольной трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), $BC : CD = 1 : 2$, $EF = 20$ — средняя линия. Найти длину меньшего основания, если известно, что $AC \perp BD$.

Решение.

Пусть в трапеции $ABCD$ $\angle C = \angle D = 90^\circ$, $BC = x$, $CD = 2x$, $AD = y$, тогда $EF = \frac{1}{2}(x + y) = 20$, или $x + y = 40$.

Из $\triangle ADC$ $AC = \sqrt{4x^2 + y^2}$.

Проведем высоту BM , тогда из $\triangle DMB$

$$BD = \sqrt{BM^2 + DM^2},$$

где $BM = CD = 2x$, $DM = x$, тогда $BD = \sqrt{4x^2 + x^2} = \sqrt{5}x$.

Так как $AC \perp BD$, то $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ (см. № 478

«Геометрия, 7–9» авторов Л.С. Атанасян и др.).

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + y^2} \cdot \sqrt{5}x.$$

С другой стороны, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(x + y) \cdot 2x$, тогда

$$\frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + y^2} \cdot \sqrt{5}x = \frac{1}{2}(x + y) \cdot 2x, \text{ или}$$

$$\sqrt{5(4x^2 + y^2)} = 2(x + y), \quad x \neq 0.$$

Но $x + y = 40$, тогда $\sqrt{5(4x^2 + y^2)} = 80$,

$$\text{или } 4x^2 + y^2 = 1280.$$

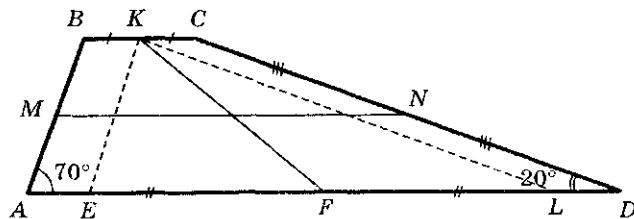
Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 = 1280, \\ x + y = 40; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 4x^2 + (40 - x)^2 = 1280, \\ y = 40 - x. \end{cases}$$

Решая уравнения системы, имеем $x^2 - 16x + 64 = 0$, или $(x - 8)^2 = 0$; $x = 8$, т. е. $BC = 8$.

Ответ: 8.

Пример 125(А). В трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) $\angle A = 70^\circ$, $\angle D = 20^\circ$, $MN = 4$ — средняя линия трапеции, $KF = 2$, где K и F — соответственно середины BC и AD . Найти длины оснований AD и BC .



Решение.

Предварительно докажем, что «если в трапеции сумма углов при основании равна 90° , то отрезок, соединяющий середины оснований, равен их полуразности».

Доказательство:

Пусть точки K и F — середины оснований AD и BC . Пусть $AD = 2x$, $BC = 2y$. Проведем $KE \parallel AB$ и $KL \parallel CD$.

Заметим, что $\angle KEF = \angle A = 70^\circ$ и $\angle KLF = \angle D = 20^\circ$, тогда $\angle EKL = 90^\circ$, т. е. $\triangle EKL$ — прямоугольный и KF — медиана $\triangle EKL$ и, значит,

$$KE = KF = FL = \frac{1}{2} EL = \frac{1}{2} (AD - BC),$$

что и требовалось доказать.

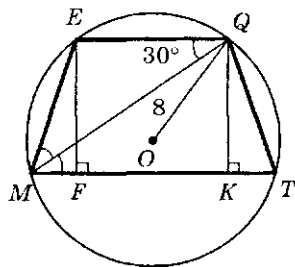
Следовательно, $\frac{1}{2}(2x - 2y) = 2$, или $x - y = 2$.

Кроме того, $MN = \frac{1}{2}(AD + BC) = 4$, или $x + y = 4$.

Решая систему уравнений $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2, \end{cases}$ находим

$2x = AD = 6$; $2y = BC = 2$.

Ответ: $AD = 6$, $BC = 2$.



Пример 126(A). Трапеция $MEQT$ ($MT \parallel EQ$) вписана в окружность радиуса $OQ = 8$. MQ — биссектриса $\angle EMT$, $\angle MQE = 30^\circ$. Найти площадь трапеции.

Решение.

По условию MQ — биссектриса $\angle EMT$. Заметим, что $\angle QMT = \angle MQE = 30^\circ$, тогда $\triangle MEQ$ — равнобедренный (по признаку равнобедренного треугольника).

Проведем высоты EF и QK трапеции, где $EM = QT$ (доказать самостоятельно). Пусть $EQ = 2x$, $MT = 2y$, $ME = EQ = 2x$.

$$\text{Из } \triangle MEF \quad MF = \frac{1}{2} ME = x, \quad EF = \sqrt{4x^2 - x^2} = x\sqrt{3};$$

$$\text{из } \triangle MQK \quad MQ = 2 \cdot OK = 2 \cdot EF = 2x\sqrt{3}.$$

$$S_{\triangle MQT} = \frac{1}{2} MT \cdot QK = \frac{1}{2} \cdot 2y \cdot x\sqrt{3} = \sqrt{3}xy.$$

$$\text{С другой стороны, } S_{\triangle MQT} = \frac{abc}{4R}, \text{ где } a = MQ, b = QT,$$

$$c = MT, R = OQ = 8, \text{ тогда } S_{\triangle MQT} = \frac{2x\sqrt{3} \cdot 2x \cdot 2y}{4 \cdot 8} = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 y.$$

$$\text{Значит, } \sqrt{3}xy = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2 y, \text{ откуда находим } x = 3.$$

$$\text{Следовательно, } S_{MTQE} = \frac{1}{2} (MT + QE) \cdot EF =$$

$$(x + y) \cdot x\sqrt{3}. \text{ Но } MT = 2MF + FK = 2MF + EQ = 4x,$$

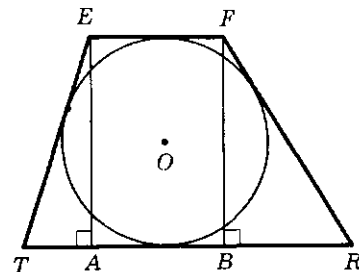
$$\text{или } 2y = 4x, y = 2x = 8, \text{ тогда } S_{MTQE} = (4 + 8) \cdot 4\sqrt{3} = 48\sqrt{3}.$$

Ответ: $48\sqrt{3}$.

Пример 127(A). Трапеция $TEFR$ ($EF \parallel TR$) описана около окружности. Найти площадь трапеции, если $ET = 13$, $FR = 15$, $TR + EF = 14$.

Решение.

По свойству описанного четырехугольника имеем $TR + EF = ET + FR$, или $TR + EF = 28$.



Но $TR - EF = 14$ (по условию задачи). Пусть $TR = a$, $EF = b$, тогда получим систему уравнений

$$\begin{cases} a+b=28, \\ a-b=14; \end{cases} \quad \begin{cases} 2a=42, & a=21, \\ 2b=14; & b=7. \end{cases}$$

Значит, $TR = 21$, $EF = 7$.

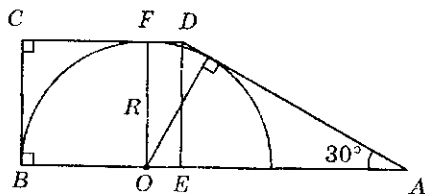
Пусть $TA = x$, тогда $AB = EF = 7$, $BR = 21 - (x + 7) = 14 - x$.

Из $\triangle TAE$ $EA^2 = 13^2 - x^2$;
из $\triangle FBR$ $FB^2 = 15^2 - (14 - x)^2$,
и так как $EA = FB$, то $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$,
откуда находим $x = 5$. Тогда $EA^2 = 13^2 - 5^2$, $EA = 12$.

Значит, $S_{TRFE} = \frac{1}{2}(TR + EF) \cdot EA = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 12 = 168$.

Ответ: 168.

Пример 128. В прямоугольной трапеции $ABCD$ острый угол равен 30° . Окружность с центром на большем основании касается трех остальных сторон. Найти площадь трапеции, если известно, что радиус окружности равен 6.



Решение.

Пусть $CD = x$, тогда $AB = BE + EA = x + EA$.

Из $\triangle AED$, где $ED = OF = R$ и $\angle A = 30^\circ$, имеем

$R = \frac{1}{2} AD$, $AD = 2R$, тогда $EA = 2R \cos 30^\circ = R\sqrt{3}$. Зна-

чит, $AB = x + R\sqrt{3}$.

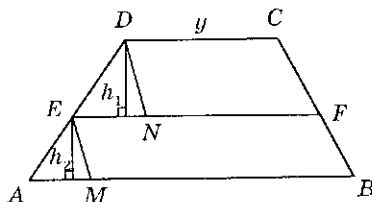
Из $\triangle AOD$ $AO = 2R$, тогда $AB = AO + OB = 2R + R = 3R$. Но $AB = x + R\sqrt{3}$, значит, $x + R\sqrt{3} = 3R$, откуда $x = R(3 - \sqrt{3})$.

Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{3R+R(3-\sqrt{3})}{2} \cdot R = \frac{6-\sqrt{3}}{2} R^2$.

По условию $R = 6$, тогда $S = \frac{6-\sqrt{3}}{2} \cdot 36 = 18(6-\sqrt{3})$.

Ответ: $18(6-\sqrt{3})$.

Пример 129. Известно, что в трапеции сумма квадратов параллельных сторон равна 392. Определить длину отрезка, параллельного этим сторонам и делящего площадь трапеции пополам.



Решение.

Пусть в трапеции $ABCD$ $AB = x$, $DC = y$, EF — отрезок, параллельный основаниям и делящий ее площадь пополам. Проведем $DN \parallel CB$ и $EM \parallel CB$.

Пусть h_1 — высота $\triangle DEN$ и h_2 — высота $\triangle EAM$, тогда $EN = EF - y$, $AM = x - EF$.

Заметим, что $\triangle AEM \sim \triangle DEN$ (по двум углам).

Тогда $\frac{AM}{EN} = \frac{x - EF}{EF - y} = \frac{h_2}{h_1}$.

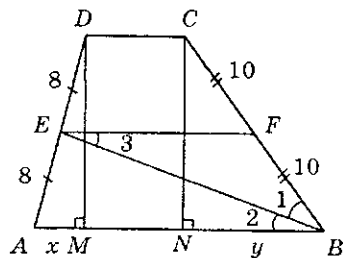
Согласно условию задачи $S_{AEFB} = S_{EDCF}$, тогда $\frac{x+EF}{2} \cdot h_2 = \frac{EF+y}{2} \cdot h_1$, или $\frac{h_2}{h_1} = \frac{EF+y}{x+EF} = \frac{x-EF}{EF-y}$, откуда

$(EF)^2 - y^2 = x^2 - (EF)^2$, или $2(EF)^2 = x^2 + y^2$, откуда

$$EF = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}.$$

Но $x^2 + y^2 = 392$, тогда $EF = \sqrt{\frac{392}{2}} = \sqrt{196} = 14$.

Ответ: 14.



Пример 130. В трапеции $ABCD$ $AD = 16$, $DC = 4$, $BC = 20$, основание $AB > DC$. Известно, что биссектриса угла ABC проходит через середину стороны AD . Найти S_{ABCD} .

Решение.

Пусть в трапеции $ABCD$ $DM = CN = h$ — высоты, $AM = x$, $NB = y$, EF — средняя линия трапеции.

Так как BE — биссектриса $\angle ABC$, то $\angle 1 = \angle 2$.

Но $\angle 2 = \angle 3$ — как накрест лежащие при параллельных прямых EF и AB и секущей BE , тогда $\angle 1 = \angle 3$, т. е. $\triangle FEB$ — равнобедренный.

Значит, $EF = FD = \frac{1}{2}CB = 10$.

$$S_{ABCD} = EF \cdot h = 10h.$$

Заметим, что $AB + DC = 2EF = 20$, откуда $AB = 20 - DC = 16$, тогда $x + y = AB - MN = AB - DC = 12$.

Из $\triangle ADM$ и $\triangle BCN$ имеем $x^2 + h^2 = 256$, $y^2 + h^2 = 400$.

Вычитая из второго равенства первое, получим $y^2 - x^2 = 144$.

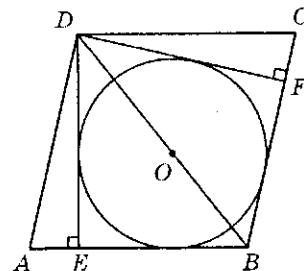
Решая систему уравнений $\begin{cases} y^2 - x^2 = 144, \\ x + y = 12, \end{cases}$ находим

$$x = 0, y = 12.$$

Если $x = 0$, то $AD = DM = h = 16$, т. е. трапеция $ABCD$ — прямоугольная. Значит, $S = 10h = 160$.

Ответ: 160.

Пример 131. В ромбе $ABCD$ из вершины D тупого угла проведены высоты DE и DF . В получившийся четырехугольник $DEBF$ вписана окружность радиуса $r = 2$. Найти сторону ромба, если известно, что $\angle ADC = 2 \arctg 2$.



Решение.

Так как $ABCD$ — ромб, то высоты DE и DF равны. Пусть h — высота ромба.

По свойству ромба диагональ BD является биссектрисой углов ADC и ABC . Из $\triangle DEB$ имеем

$$BE = DE \operatorname{ctg} \angle DBE.$$

По условию $\angle ADC = 2 \arctg 2$, тогда

$$BE = h \operatorname{ctg} (\arctg 2) = \frac{h}{\operatorname{tg}(\arctg 2)} = \frac{1}{2}h.$$

Заметим, что $\triangle DEB = \triangle DFB$ (по гипотенузе и катету), тогда $S_{DEBF} = DE \cdot BE = h \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{2}h^2$. С другой сто-

роны, $S_{DEBF} = p \cdot r = (DE + BE) \cdot r = \left(h + \frac{1}{2}h\right) \cdot 2 = 3h$.

Следовательно, $\frac{1}{2}h^2 = 3h$, или $h^2 = 6h$, откуда $h = 6$

($h \neq 0$), тогда $BE = \frac{1}{2}h = 3$.

Далее из $\triangle ADE$ имеем

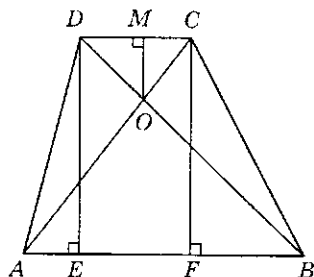
$$AE = DE \operatorname{ctg} \angle A = h \cdot \operatorname{ctg} (\pi - 2 \arctg 2) = \frac{h}{\operatorname{tg}(2 \arctg 2)}$$

Применяя формулу тангенса двойного угла, находим

$$AE = \frac{-h(1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} 2))}{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 2)} = \frac{-h(1 - 4)}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}h.$$

Так как $h = 6$, то $AE = \frac{3}{4} \cdot 6 = 4,5$.

Ответ: 4,5.



Пример 132. В трапеции $ABCD$ известны длины оснований: $AB = 6$, $CD = 2$, $\angle A = \operatorname{arctg} 2$, $\angle B = \operatorname{arctg} 3$. Найти радиус окружности, вписанной в $\triangle DOC$, где O — точка пересечения диагоналей.

Решение.

Проведем высоты DE и CF трапеции. Пусть $DE = CF = h$, тогда из $\triangle ADE$ и $\triangle CFB$ находим $AE = h \operatorname{ctg} \angle A$, $BF = h \operatorname{ctg} \angle B$.

По условию $\angle A = \operatorname{arctg} 2$, тогда $\operatorname{tg} \angle A = 2$ и $\operatorname{ctg} \angle A = \frac{1}{2}$.

Аналогично $\operatorname{ctg} \angle B = \frac{1}{3}$. Значит, $AE = \frac{1}{2}h$, $BF = \frac{1}{3}h$.

Но $AB = AE + EF + FB$, где $EF = DC = 2$, $AB = 6$, тогда получим

$$\frac{1}{2}h + 2 + \frac{1}{3}h = 6, \text{ или } \frac{5}{6}h = 4, \text{ откуда } h = \frac{24}{5}.$$

$$\text{Из } \triangle DEB \quad BD^2 = DE^2 + BE^2, \text{ или } BD^2 = h^2 + \left(6 - \frac{1}{2}h\right)^2,$$

$$\text{или } BD^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{18}{5}\right)^2, \quad BD = \sqrt{\frac{900}{25}} = 6.$$

Аналогично, из $\triangle ACF \quad AC^2 = h^2 + \left(6 - \frac{1}{3}h\right)^2$, или

$$AC^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{22}{5}\right)^2, \quad AC = \frac{2\sqrt{265}}{5}.$$

Заметим, что $\triangle DOC \sim \triangle AOD$ (по двум углам), тогда $\frac{DO}{OB} = \frac{DC}{AB} = \frac{1}{3}$, откуда $OB = 3DO$.

Но $DB = DO + OB = DO + 3DO = 4DO$, тогда

$$DO = \frac{1}{4}DB = \frac{1}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Аналогично, } CO = \frac{1}{4}AC = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\sqrt{265}}{5} = \frac{\sqrt{265}}{10}.$$

Теперь находим площадь $\triangle DOC$:

$$S_{\triangle DOC} = \frac{1}{2}DC \cdot OM = \frac{1}{2}DC \cdot \frac{1}{4}h = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{24}{5} = \frac{6}{5}.$$

Известно, что $S_{\triangle} = p \cdot r$, где

$$p = \frac{1}{2}(OD + OC + DC) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{265}}{10} + 2\right) = \frac{35 + \sqrt{265}}{20}.$$

$$\text{полупериметр, } S_{\triangle DOC} = \frac{6}{5}.$$

Следовательно, $r = \frac{S_{\triangle DOC}}{p}$, или

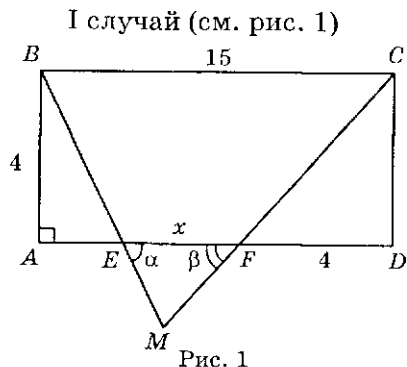
$$r = \frac{6}{5} \cdot \frac{20}{35 + \sqrt{265}} = \frac{24}{35 + \sqrt{265}} = \frac{24(35 - \sqrt{265})}{1225 - 265} = \frac{24(35 - \sqrt{265})}{960} = \frac{35 - \sqrt{265}}{40}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{35 - \sqrt{265}}{40}.$$

Пример 133. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 4$, $BC = 15$. На стороне AD отмечены точки E и F так, что $DF = 4$, при этом M — точка пересечения прямых BE и CF . Известно, что $S_{\triangle MEF} = 1$. Найти длину EF .

Решение.

В зависимости от расположения точек E и F , возможны 2 случая.



Пусть $EF = x$, $\angle MEF = \alpha$, $\angle MFE = \beta$.

По условию задачи $AB = 4$, $BC = 15$, $DF = 4$ и $S_{\triangle MEF} = 1$.

Известно, что $S_{\triangle MEF} = \frac{x^2}{2(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)}$ (доказать самостоятельно).

Заметим, что $\angle AEB = \angle MEF = \alpha$ и $\angle CFD = \angle MFE = \beta$.

Тогда $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{AE}{AB} = \frac{11-x}{4}$, $\operatorname{ctg} \beta = \frac{FD}{CD} = 1$.

Значит, $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{11-x}{4} + 1 = \frac{15-x}{4}$.

Так как $S_{\triangle MEF} = 1$, то получим $\frac{x^2}{2 \cdot \frac{15-x}{4}} = 1$, или

$2x^2 + x - 15 = 0$, откуда находим $x_1 = 2,5$, $x_2 = -3$ (не имеет смысла, так как x — сторона $\triangle EFM$).

II случай (см. рис. 2)

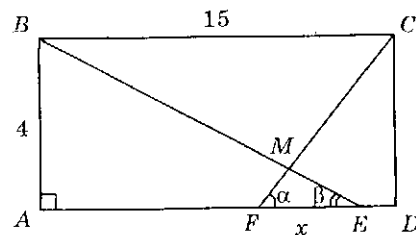


Рис. 2

$ED = 4 - x$.

В этом случае $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{11+x}{4}$, $\operatorname{ctg} \beta = 1$,

$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{15+x}{4}$.

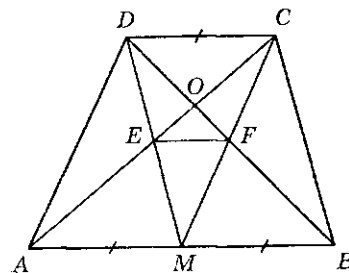
Тогда $S_{\triangle MEF} = \frac{x^2}{2 \cdot \frac{15+x}{4}} = 1$, или $2x^2 - x - 15 = 0$, от-

куда находим $x_1 = 3$, $x_2 = -2,5$ (не подходит).

Итак, $FE = 2,5$ или $FE = 3$.

Ответ: 2,5 или 3.

Пример 134. Площадь трапеции $ABCD$ равна 360. Одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Известно, что диагонали пересекаются в точке O , а отрезки, соединяющие середину M основания AB с вершинами D и C , пересекаются с диагоналями трапеции в точках E и F . Найти $S_{\triangle EOF}$.



Решение.

Так как M — середина AB и $AB = 2DC$, то $AM = MB = DC$. Заметим, что четырехугольники $ADCM$ и $DCBM$ — параллелограммы, E и F — середины MD и MC , значит, CE и DF — медианы треугольника MDC . Пусть h — высота трапеции, $DC = a$, $AB = 2a$, $OE = x$.

Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2}h = \frac{3}{2}ah$.

По условию задачи $S_{ABCD} = 360$, тогда $\frac{3}{2}ah = 360$,

откуда $ah = 240$. Так как O — точка пересечения медиан $\triangle MDC$, то $OC = 2x$, $AE = EC = 3x$, $AO = AE + EO = 4x$, $OE : OA = x : 4x = 1 : 4$.

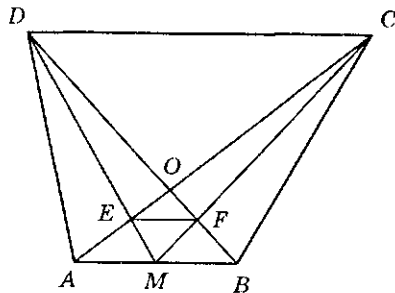
Аналогично, $OF : OB = 1 : 4$, т. е. $\triangle OEF \sim \triangle AOB$, где $k = \frac{1}{4}$.

Значит, $S_{\triangle OEF} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot S_{\triangle AOB} = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{3}h =$

$$= \frac{1}{24}ah = \frac{1}{24} \cdot 240 = 10.$$

Итак $S_{\triangle OEF} = 10$.

Возможен случай, когда $DC = 2AB$.



Пусть h — высота трапеции, $AB = a$, $DC = 2a$, $AE = y$, тогда $ah = 240$.

Заметим, что $\triangle AOB \sim \triangle COD$, где $k = \frac{1}{2}$. Кроме того,

$\triangle AEM \sim \triangle CED$, где $AM : CD = 1 : 4$.

В этом случае имеем $AE : EC = 1 : 4$, $ME : MD = 1 : 5$, $CE = 12y$, $AC = AE + CE = 15y$, $AO = 5y$, $EO = 2y$, значит, $OE : AO = 2y : 5y = 2 : 5$.

Аналогично, $OF : OB = 2 : 5$.

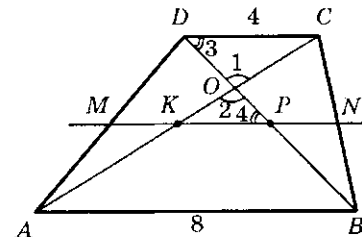
Следовательно, $S_{\triangle OEF} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot S_{\triangle AOB} = \frac{4}{25} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{1}{3}h =$

$$= \frac{2}{75} \cdot 240 = \frac{32}{5} = 6,4.$$

Ответ: 10 или 6,4.

Пример 135(А). В трапеции $ABCD$ известны длины оснований: $AB = 8$, $DC = 4$. Прямая MN , параллельная основаниям, пересекает боковые стороны в точках M и N , а диагонали AC и BD соответственно в точках K и P так, что $S_{\triangle KOP} = S_{\triangle DOC}$. Найти длину отрезка MN .

Решение.



По условию задачи $S_{\triangle KOP} = S_{\triangle DOC}$. Кроме того $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, значит, $\triangle KOP \sim \triangle DOC$.

Значит, $DC = KP = 4$, $DO = OP$ и $CO = OK$. Поскольку $AB = 8$ и $KP = 4$, то K и P — соответственно середины AO и BO , т. е. KP — средняя линия $\triangle AOB$.

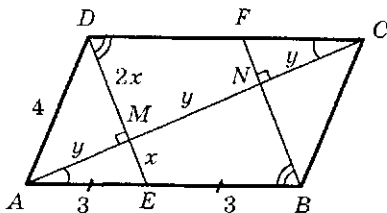
Значит, $MK = \frac{1}{3}DC = \frac{4}{3}$ и $PN = \frac{1}{3}DC = \frac{4}{3}$.

Следовательно, $MN = MK + KP + PN = \frac{4}{3} + 4 + \frac{4}{3} = \frac{20}{3}$.

Ответ: $\frac{20}{3}$.

Пример 136(А). В параллелограмме $ABCD$ известны $AB = 6$, $AD = 4$, точка E — середина AB . Известно, что $AC \perp DE$. Найти площадь параллелограмма.

Решение.



Проведем $BF \parallel ED$, тогда $DEBF$ — параллелограмм. Так как E — середина AB , то F — середина DC .

Заметим, что $\angle CAB = \angle ACD$ и $\angle AED = \angle CDE$ (как накрест лежащие при параллельных прямых и секущей), тогда $\triangle AME \sim \triangle DMC$ (по двум углам).

Значит, $\frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$, тогда $\frac{DM}{ME} = \frac{2}{1}$.

Пусть $ME = x$, $AM = y$.

Из прямоугольных треугольников AME и AMD имеем:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 4x^2 + y^2 = 16, \end{cases} \text{ или, вычитая из второго уравнения}$$

первое, получим $3x^2 = 7$, $x = \sqrt{\frac{7}{3}}$.

Тогда $y^2 = 9 - x^2$, $y^2 = 9 - \frac{7}{3} = \frac{20}{3}$, откуда $y = \sqrt{\frac{20}{3}}$.

Так как диагональ AC делит параллелограмм $ABCD$ на два равных треугольника, то $S_{ABCD} = 2S_{\triangle ADC} = 2 \cdot \frac{1}{2} AC \cdot DM = 3y \cdot 2x = 6xy$.

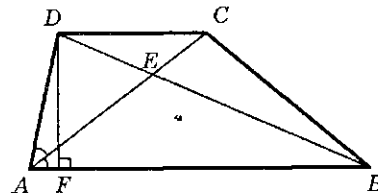
Учитывая найденные значения x и y , находим

$$S_{ABCD} = 6 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} \cdot \sqrt{\frac{20}{3}} = 6 \cdot \frac{2}{3} \sqrt{35} = 4\sqrt{35}.$$

Ответ: $4\sqrt{35}$.

Пример 137(А). В трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD известно $AB = 10$, диагонали AC и BD пересекаются в точке E так, что $AE = 4$, $BE = 8$. Найти площадь трапеции, если диагональ AC является биссектрисой $\angle BAD$.

Решение.



Так как AC — биссектриса $\angle BAD$, то $\angle DAC = \angle CAB$. Но $\angle CAB = \angle ACD$ — как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей AC . Значит, $\triangle ADC$ — равнобедренный, т. е. $AD = CD$.

Пусть $\angle CAB = \angle DAC = \alpha$, $DF = h$ — высота трапеции.

Из $\triangle BAE$ по теореме косинусов $BE^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \cdot AE \cos \alpha$, или $64 = 100 + 16 - 2 \cdot 10 \cdot 4 \cos \alpha$, откуда находим $\cos \alpha = \frac{13}{20}$.

Заметим, что $\triangle DEC \sim \triangle AEB$ (по двум углам), тогда $\frac{CD}{AB} = \frac{DE}{BE}$, или $\frac{CD}{10} = \frac{DE}{8}$, откуда $DE = \frac{4}{5} CD$. (1)

Из $\triangle ADE$ по теореме косинусов имеем $DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cos \alpha$. Учитывая, что $AD = DC$ и

соотношение (1), имеем $\left(\frac{4}{5}CD\right)^2 = CD^2 + 16 - 8 \cdot CD \cdot \frac{13}{20}$,

откуда после упрощения получим квадратное уравнение относительно CD .

$$9CD^2 - 130CD + 400 = 0.$$

Решая полученное уравнение, находим $(CD)_1 = 10$ (не подходит, так как $AB > CD$), $(CD)_2 = \frac{40}{9}$.

$$\begin{aligned} \text{Из } \triangle AFD \quad h &= CD \cdot \sin 2\alpha = \\ &= \frac{40}{9} \cdot 2 \cdot \frac{13}{20} \sqrt{1 - \left(\frac{13}{20}\right)^2} = \frac{13}{45} \sqrt{231}. \end{aligned}$$

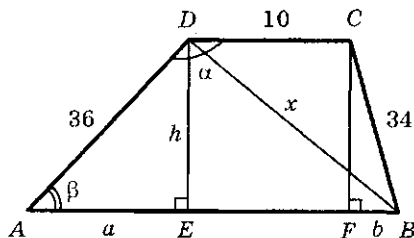
$$\begin{aligned} \text{Следовательно, } S_{ABCD} &= \frac{1}{2} \left(10 + \frac{40}{9}\right) \cdot \frac{13}{45} \sqrt{231} = \\ &= \frac{130 \cdot 13}{18 \cdot 45} \sqrt{231} = \frac{169}{81} \sqrt{231}. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } \frac{169}{81} \sqrt{231}.$$

Пример 138. В трапеции $ABCD$ известны длины боковых сторон $AD = 36$, $BC = 34$, верхнее основание $CD = 10$ и $\cos \angle ADC = -\frac{1}{3}$. Найти длину диагонали BD .

Решение.

I случай



Пусть в трапеции $ABCD$ $BD = x$ — искомая диагональ, $AB = y$, $AE = a$, $BF = b$, $\angle ADC = \alpha$, $\angle DAB = \beta$. Так как $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$, то $\cos \beta = \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha =$

$$= \frac{1}{3}, \text{ тогда } \sin \beta = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Из } \triangle AED \quad DE = h = AD \cdot \sin \beta = 36 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 24\sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} AE = a &= \sqrt{36^2 - h^2} = \sqrt{144} = 12, \text{ а из } \triangle CFB \text{ находим} \\ b &= \sqrt{34^2 - h^2} = 2. \end{aligned}$$

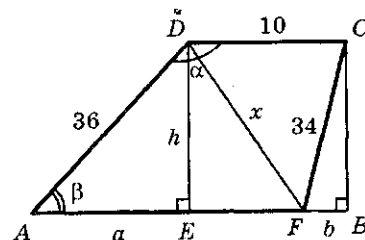
$$\text{Значит, } AB = y = a + 10 + b = 24.$$

Из $\triangle ADB$ имеем по теореме косинусов:

$$x^2 = 36^2 + 24^2 - 2 \cdot 36 \cdot 24 \cdot \frac{1}{3}, \text{ или } x^2 = 1296,$$

$$\text{откуда } x = BD = 36.$$

II случай



В этом случае имеем: $AB = y = AE + BE = a + 10 - b$. Так как $a = 12$, $b = 2$, то $AB = y = 20$.

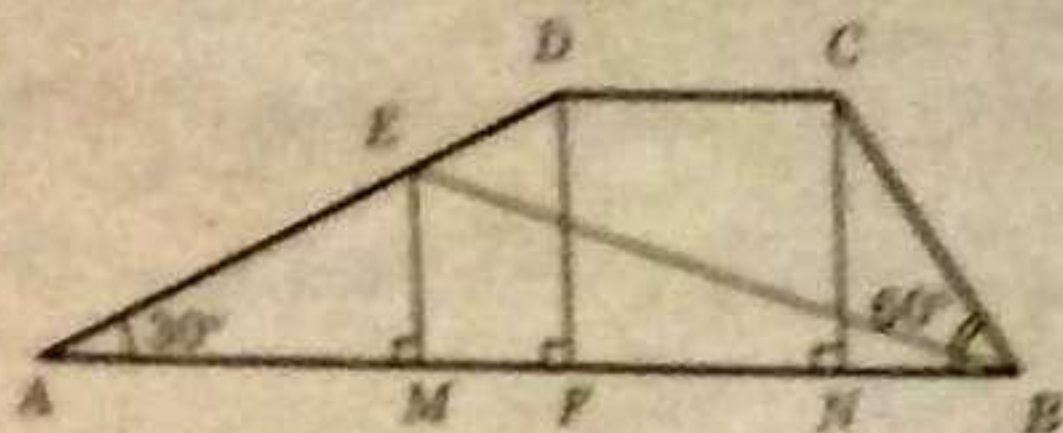
Из $\triangle ABD$ по теореме косинусов находим $x^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD \cdot AB \cdot \cos \beta$, или $x^2 = 1296 + 400 - 480 = 1216$, откуда $x = BD = \sqrt{1216} = \sqrt{64 \cdot 19} = 8\sqrt{19}$.

$$\text{Итак, в этом случае } BD = 8\sqrt{19}.$$

$$\text{Ответ: } 36 \text{ и } 8\sqrt{19}.$$

Пример 139(А). В трапеции $ABCD$ известны длины оснований и углы: $AB = 12$, $CD = 4$, $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Прямая, проходящая через точку B и точку E , взятую на стороне AD , делит трапецию на две равновеликие части. Найти длину отрезка BE .

Решение.



Из точек C , D и E опустим соответственно перпендикуляры CN , DF и EM на основание AB .

Пусть $CN = DF = h$ — высоты трапеции, $EM = h_1$ — высота $\triangle AEB$.

По условию задачи $S_{\triangle AEB} = S_{BCDE}$.

Но $S_{BCDE} = S_{ABCD} - S_{\triangle AEB}$.

Тогда $S_{\triangle AEB} = S_{ABCD} - S_{\triangle AEB}$, откуда $S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Но $S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} \cdot DF = \frac{12+4}{2} \cdot h = 8h$.

Так как $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, то из $\triangle ADF$ $AF = h \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}h$. Аналогично из $\triangle CNB$ находим

$$BN = \frac{h}{\sqrt{3}}.$$

Высоту трапеции $DF = h$ найдем из соотношения

$$AF + BN = AB - FN = AB - CD = 8, \text{ или } \sqrt{3}h + \frac{h}{\sqrt{3}} = 8,$$

$$\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)h = 8, \quad \frac{4}{\sqrt{3}}h = 8, \text{ откуда } h = 2\sqrt{3}, \text{ тогда}$$

$$S_{ABCD} = 8 \cdot 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}, \text{ значит, } S_{\triangle AEB} = 8\sqrt{3}.$$

$$\text{Но } S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2} AB \cdot ME = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h_1 = 6h_1, \text{ или}$$

$$6h_1 = 8\sqrt{3}, \text{ откуда } h_1 = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Теперь из $\triangle AEM$ находим $AM = h_1 \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 4$, следовательно, $MB = AB - AM = 8$.

Наконец, из $\triangle BME$ получим

$$BE = \sqrt{BM^2 + ME^2} = \sqrt{64 + \frac{16}{3}} = \sqrt{16 \left(4 + \frac{1}{3}\right)} = 4\sqrt{\frac{13}{3}} = \frac{4\sqrt{39}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{4\sqrt{39}}{3}.$$

§ 3. Задачи для самостоятельного решения

1. В прямоугольный треугольник вписан ромб так, что все его вершины лежат на сторонах треугольника, а угол, равный 60° , является общим углом треугольника и ромба. Найти стороны треугольника, если сторона ромба равна 6.

2. В квадрат $ABCD$ вписан равнобедренный треугольник AKM так, что точка K лежит на стороне BC , точка M — на CD и $AM = AK$. Найти $\angle MAD$, если известно, что $\operatorname{tg} \angle AKM = 3$.

3. Прямоугольник со сторонами 36 и 48 разделен диагональю на два треугольника. В каждый из этих треугольников вписана окружность. Найти расстояние между их центрами.

4. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48 см^2 , а диагональ равна 10 см. Точка O удалена от вершин B и D на расстояние 13 см. Найти расстояние от точки O до наиболее удаленной от этой точки вершины прямоугольника.

5. В $\triangle ABC$ точка H — ортоцентр (точка пересечения высот). Найти AH , если $AB = 13 \text{ см}$, $BC = 14 \text{ см}$, $AC = 15 \text{ см}$.

6. В $\triangle ABC$ проведена медиана BD . Найти отношение радиуса окружности, описанной около треугольника ABD , к радиусу окружности, вписанной в треугольник ABC , если $AB = 2$, $AC = 6$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

7. Одно из оснований трапеции равно 24 см, а расстояние между серединами диагоналей 4 см. Найти другое основание.

8. В окружности по разные стороны от центра проведены параллельные хорды длиной 12 и 16. Расстояние между ними равно 14. Найти радиус окружности.

9. Из одной точки проведены перпендикуляр и две наклонные длиной 10 см и 17 см к данной прямой. Проекция наклонных соотносятся как 2 : 5. Найти длину перпендикуляра.

10. Около равностороннего треугольника описана окружность радиуса $R = 2\sqrt{3}$, через центр которой проведена прямая, параллельная одной из сторон треугольника. Найти длину отрезка этой прямой, заключенного между двумя сторонами треугольника.

11. Отношение площади прямоугольного треугольника к площади квадрата, построенного на его гипотенузе, равно 1 : 3. Найти сумму тангенсов острых углов.

12. В прямоугольном треугольнике известны не перпендикулярные друг к другу высоты m и n ($m > n$). Вычислить длину радиуса описанной около треугольника окружности.

13. Тангенс угла между медианой и высотой, проведенной к боковой стороне равнобедренного треугольника, равен 0,5. Найти синус угла при вершине.

14. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α . Высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на 1. Найти стороны треугольника.

15. Меньший катет прямоугольного треугольника равен 1, длины его сторон образуют арифметическую прогрессию. Найти площадь треугольника.

16. Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, делит прямой угол в отношении 1 : 2 и равна 1. Найти стороны треугольника.

17. Сумма двух неравных высот равнобедренного треугольника равна 1, угол при вершине α . Найти боковую сторону.

18. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α . Найти отношение основания к медиане, проведенной к боковой стороне.

19. Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, если медиана, проведенная к боковой стороне, образует с основанием угол $\arcsin \frac{3}{5}$.

20. Определить вид треугольника, если известно, что его медианы связаны равенством $m_a^2 + m_b^2 = 5m_c^2$.

21. Высота треугольника делит угол в отношении $2 : 1$, а основание — на отрезки, отношение которых равно 3. Найти больший угол при основании треугольника.

22. Определить вид треугольника, если известно, что расстояние от точки пересечения медиан треугольника до центра описанной около него окружности равно $\frac{1}{3}$ радиуса этой окружности.

23. В тупоугольном треугольнике острые углы равны α и β ($\alpha > \beta$). Из вершины тупого угла опущены на основание высота длиной a , медиана и биссектриса. Найти площадь треугольника, заключенного между биссектрисой и медианой.

24. Две стороны треугольника равны 26 и 40 см. Отрезок прямой, длиной 7 см, параллелен третьей стороне и пересекает боковые стороны, а высота, опущенная на эту сторону, делится на части в отношении $1 : 5$ (считая от вершины). Определить длины этих частей.

25. Площадь $\triangle ABC$ равна $60\sqrt{3}$, $\angle BAC = 120^\circ$, $\angle ABC > \angle ACB$. Расстояние от вершины A до центра вписанной окружности равно 4. Найти $R \cdot r$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

26. В $\triangle ABC$ медианы m_a и m_c образуют с основанием AC углы, сумма которых равна 45° . Известно, что $m_a \cdot m_c = 3\sqrt{2}$. Найти площадь $\triangle ABC$.

27. Высоты, проведенные к боковым сторонам остроугольного треугольника, равны 4 см и $2\sqrt{3}$ см, а третья высота делится их точкой пересечения в отношении $3 : 1$, считая от вершины треугольника. Найти расстояние между ортоцентром треугольника и центром описанной окружности.

28. В треугольник со сторонами 5, 6 и 9 см вписана окружность. Найти площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания.

29. Окружность проходит через вершины A и C $\triangle ABC$ и пересекает сторону AB в точке D , а сторону BC в точке E . Найти величину $\angle ABC$, если $AD = 2$, $AC = 14$, $BE = 5$ и $BD : CE = 8 : 1$.

30. В $\triangle ABC$ биссектриса $\angle ACB$ пересекает сторону AB в точке D так, что $BD = 2$, $CD = 4$ и $BC = 3$. Найти $S_{\triangle ABC}$.

31. В $\triangle ABC$ вписана окружность, касающаяся стороны AB , BC и AC в точках N , K и M . Найти длину отрезка NK , если $AM = 2$, $AC = 7$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

32. В равнобедренном треугольнике с основанием a острый угол между высотами, проведенными к боковым сторонам, равен α . Найти радиус описанной окружности.

33. Окружность радиуса 4, вписанная в прямоугольный треугольник ABC , касается катетов AC , BC и гипотенузы AB соответственно в точках E , F и D . Найти отношение $S_{\triangle DEF} : S_{\triangle DOF}$, если $P_{\triangle ABC} = 48$.

34. Площадь равнобедренного треугольника относится к площади квадрата, построенного на его боковой стороне, как $\sqrt{3} : 4$. Определить углы треугольника.

35. Площадь правильного треугольника, построенного на гипотенузе, в 2 раза больше площади прямо-
угольного треугольника. Найти отношение $\frac{R}{r}$, где R и

r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

36. Внутри правильного треугольника взята точка, удаленная от его сторон на расстояния a , b , c . Найти радиус вписанной окружности.

37. В $\triangle ABC$ $AB = 5$, $AC = 6$ и $\cos A = \frac{3}{4}$. В каком от-

ношении делится биссектриса $\angle C$ центром вписанной в треугольник окружности?

38. В равнобедренную трапецию с боковой стороной a и высотой b вписана окружность. Найти основания трапеции.

39. Вычислить длину диагонали равнобедренной трапеции, вписанной в окружность, если известно, что ее средняя линия равна высоте трапеции длиной 5.

40. Найти площадь равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, если основания трапеции равны a и b .

41. Высота равнобедренной трапеции, равная 21, делит основание трапеции в отношении 1 : 9. Определить радиус описанного круга, если боковая сторона трапеции равна меньшему основанию.

42. Основания равнобедренной трапеции относятся как 1 : 5, высота равна 4. Найти площадь трапеции, если боковая сторона равна длине перпендикуляра, проведенного к ней из вершины нижнего основания.

43. В трапеции $ABCD$ с основанием AB сумма углов при основании равна 90° . EF — отрезок, соединяющий середины оснований DC и AB ($DC < AB$). MN — средняя линия трапеции, $MN = a$, $EF = b$ ($a > b$). Найти AB и DC .

44. Доказать, что если в трапеции $ABCD$ (AB и DC — основания) диагонали AC и BD перпендикулярны, то $DB^2 + AC^2 = (DC + AB)^2$.

45. Основания трапеции и высота равны соответственно 48; 8 и 10. Точка, взятая на боковой стороне, делит ее в отношении 1 : 3, считая от вершины меньшего основания. Найти отношения площадей полученных треугольников.

46. На меньшем основании равнобедренной трапеции построен правильный треугольник. Его высота равна высоте трапеции, а площадь в 5 раз меньше. Найти угол при большем основании трапеции.

47. Основания трапеции равны a и b . Определить длину отрезка прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей, параллельной основаниям.

48. Найти отношение большего основания трапеции к меньшему, если средняя линия делится диагоналями на 3 равные части.

49. Около окружности описана равнобедренная трапеция, диагонали которой равны большему основанию. Найти углы при основании.

50. Около окружности радиуса 1 описана равнобедренная трапеция, у которой одно основание вдвое больше другого. Найти среднюю линию трапеции.

51. В прямоугольной трапеции острый угол равен α , а радиус вписанной окружности $r = 1$. Найти площадь трапеции.

52. На стороне AD и на диагонали AC квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M и N так, что $AM : MD = 5 : 2$, $AN : NC = 6 : 1$. Доказать, что в $\triangle MNB$ $\frac{R}{r} = \sqrt{2} + 1$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

53. В $\triangle ABC$ вписан ромб $ADEF$ так, что $\angle A$ у них общий, а вершина E находится на стороне BC . Найти сторону ромба, если $AB = c$, $AC = b$.

54. Диагонали выпуклого четырехугольника равны a и b , а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны. Найти площадь четырехугольника.

55. Дан квадрат $ABCD$ со стороной $a = 1$. Найти радиус окружности, проходящей через середину стороны AB , центр квадрата и вершину C .

56. В параллелограмме $ABCD$ $AB = a$, $BC = b$, $\angle ABC = 30^\circ$. Найти расстояние между центрами окружностей, описанных около $\triangle BCD$ и $\triangle DAB$.

57. В выпуклом четырехугольнике отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны соответственно a и b и пересекаются под углом 60° . Найти длину большей диагонали четырехугольника.

58. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. Найти сторону ромба, одна вершина которого совпадает с вершиной A , противоположная лежит на прямой BD , а две оставшиеся — на прямых BC и CD .

59. В четырехугольнике $ABCD$ $AB = a$, $AD = b$; стороны BC , CD и AD касаются некоторой окружности, центр которой находится в середине AB . Найти BC .

60. В $\triangle ABC$ $\angle A = 30^\circ$. На стороне AB взята точка M так, что AM равно расстоянию от центра описанной около $\triangle ABC$ окружности до AC . Найти BM , если $AC = a$.

61. Высота равнобедренной трапеции, равная 21, делит основание трапеции в отношении 1 : 9. Определить радиус описанного круга, если боковая сторона трапеции равна меньшему основанию.

62. В $\triangle ABC$ вписана окружность, касающаяся сторон AB , BC , AC соответственно в точках N , K и M . Найти длину отрезка NK , если $AM = 2$, $AC = 7$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

63. Две стороны треугольника равны 6 и 4, а высота, опущенная на третью сторону, равна 2. Найти радиус описанной окружности.

64. Боковая сторона равнобедренного треугольника, основание которого равно 4, делится точкой касания вписанной в него окружности в отношении 3 : 2, считая от вершины. Найти периметр треугольника.

65. В $\triangle ABC$ BD — высота, AE — биссектриса угла A , EF — перпендикуляр на AC . Определить EF , если $BD = 30$, $AB : AC = 7 : 8$.

66. По двум сторонам треугольника $a = 12$ и $b = 16$ найти радиус описанной окружности, если известно, что угол, лежащий против третьей стороны, в два раза больше угла, лежащего против стороны b .

67. В $\triangle ABC$ одна из сторон в 2 раза больше другой, $\angle A = 2\angle B$. Найти отношение R/r , где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

68. Площадь квадрата, построенного на боковой стороне равнобедренного треугольника, в 4 раза больше площади треугольника. Найти R/r , где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

69. В окружность вписан равнобедренный треугольник, боковая сторона которого в 2 раза больше основания. Найти радиус описанной окружности, если радиус вписанной окружности равен 3.

70. В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к основанию и боковой стороне, соответственно равны 8 и 4. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник.

71. В равнобедренном треугольнике из вершин нижнего основания опущены высоты на боковые стороны. Найти длину отрезка, соединяющего их концы, если середина отрезка является центром описанной окружности радиуса $R = \sqrt{5+2}$.

72. Прямоугольный треугольник с катетами $a = 12$ и $b = 5$ вписан в окружность. Биссектриса острого угла соединена с точкой, взятой на большем катете. Через эту точку проведена хорда так, что она делится точками пересечения на 3 равные части. Найти длину хорды.

73. В квадрат вписан прямоугольный треугольник с катетами $a = 9$ и $b = 16$ так, что одна из вершин совпадает с вершиной квадрата, а две другие расположены на сторонах квадрата, не содержащих данную вершину квадрата. Найти площадь квадрата.

74. Боковая сторона равнобедренной трапеции в 3 раза больше меньшего из оснований. Биссектрисы тупых углов этой трапеции пересекаются в точке, лежащей на основании. Найти отношение площади трапеции к площади треугольника, образованного меньшим основанием и биссектрисами.

75. Две стороны треугольника равны 26 и 40. Отрезок прямой, длиной 7, параллелен третьей стороне и пересекает боковые стороны, а высота, опущенная на эту сторону, делится на части в отношении 1 : 5 (считая от вершины). Определить длины этих частей.

76. Площадь $\triangle ABC$ равна $60\sqrt{3}$, $\angle BAC = 120^\circ$, $\angle ABC > \angle ACB$. Расстояние от вершины A до центра вписанной окружности равно 4. Найти $R \cdot r$, где R и r — соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей.

77. Высоты, проведенные к боковым сторонам остроугольного треугольника, равны 4 см и $2\sqrt{3}$ см, а третья высота делится их точкой пересечения в отношении 3 : 1, считая от вершины треугольника. Найти

расстояние между ортоцентром треугольника и центром описанной окружности.

78. Окружность проходит через вершины A и C $\triangle ABC$ и пересекает сторону AB в точке D , а сторону BC — в точке E . Найти величину $\angle ABC$, если $AD = 2$, $AC = 14$, $BE = 5$ и $BD : CE = 8 : 11$.

79. Вершина B прямого угла в $\triangle ABC$ лежит внутри окружности с центром O и радиусом 8, проходящей через концы гипотенузы AC , BC — высота $\triangle ABC$. На прямой AC взята точка M так, что $MN = ON$. Найти BM .

80. Окружность радиуса 5 с центром O проходит через концы A и B гипотенузы $\triangle ABC$ так, что вершина C прямого угла оказывается вне окружности, CD — высота $\triangle ABC$. На прямой AB взята точка M так, что $MD = OD$. Найти CM .

81. Точки A , B и C лежат на одной прямой. Отрезок AB — диаметр первой окружности, а отрезок BC — второй окружности. Прямая, проходящая через точку A , пересекает первую окружность в точке M и касается второй окружности в точке N . Известно, что $BM = 9$, $BN = 12$. Найти радиусы окружностей.

82. Отрезок AD является биссектрисой треугольника ABC . Окружность радиуса 3 проходит через вершину A , касается стороны BC в точке D и пересекает сторону AB в точке E . Найти $\angle A$ и $S_{\triangle ABC}$, если $BC = 4$, $\frac{AE}{BD} = \frac{3}{2}$.

83. В прямоугольном $\triangle ABC$ гипотенуза DC является хордой окружности радиуса 1, которая пересекает катеты AD и AC в точках E и B соответственно. Найти BD , если $\angle DBE = 30^\circ$, $S_{\triangle DEC} = \frac{(\sqrt{3}+1)}{4}$.

84. В $\triangle ABC$ $AB = 13$, $BC = 2$, $AC = 12$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 3$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB , касаются стороны AD в точках E и F . Найти длину отрезка EF .

85. В равнобедренный $\triangle ABC$ ($AB = BC$) вписана окружность. Через точку M , лежащую на стороне AB ,

проведена касательная к окружности, пересекающая прямую AC в точке D . Найти боковую сторону треугольника ABC , если $AC = CD = 14$, $MB = \frac{1}{8} AB$.

86. Биссектриса BD и высота CE остроугольного $\triangle ABC$ пересекаются в точке O . Окружность радиуса 3 с центром в точке O проходит через вершину B , середину стороны BC и пересекает сторону AB в точке K так, что $AK : KB = 2 : 1$. Найти длину стороны AC .

87. В $\triangle ABC$ $\angle B = \arccos \frac{15}{17}$. На стороне AC взята

точка K так, что $AK = 12$, $KC = 4$. Найти радиус окружности, проходящей через вершину B , касающейся стороны AC в точке K и касающейся окружности, описанной около $\triangle ABC$.

88. Через середину гипотенузы AC прямоугольного $\triangle ABC$ проведена прямая, пересекающая катет BC в точке D , а продолжение катета AB за точку A — в точке M . Найти площадь $\triangle ABC$, если $CD = 1$, $AM = 2$, $\angle CAB = \arccos \frac{3}{5}$.

89. Через середину катета AB прямоугольного $\triangle ABC$ проведена прямая, пересекающая гипотенузу AC в точке M , а продолжение катета BC за точку B — в точке N . Найти площадь $\triangle ABC$, если $AM = 2$, $BN = 3$, $\angle ACB = 60^\circ$.

90. Окружность с центром на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ касается прямой AB и проходит через точки C и D . Найти стороны параллелограмма, если его площадь $S = 2\sqrt{7}$, а $\angle BAC = \arctg \frac{3}{\sqrt{7}}$.

91. Окружность с центром на диагонали AC трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) проходит через вершины A и B , касается стороны CD в точке S и пересекает основание AD в точке M . Найти площадь трапеции $ABCD$, если $BC = 2$, $CD = 10\sqrt{26}$.

92. На сторонах AB и AC $\triangle ABC$ взяты точки M и N соответственно. Отрезок MN проходит через центр вписанной в треугольник окружности и параллелен

отрезку BC . Найти периметр $\triangle ABC$, если $BC = 15$, $BM = 6$, $CN = 4$.

93. В $\triangle ABC$ со сторонами $AB = 6$, $BC = 4$ проведена биссектриса BD , точка O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности, $BO : OD = 3 : 1$. Найти радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

94. Около окружности радиуса $2\sqrt{3}$ описана равнобедренная трапеция. Найти площадь трапеции, если ее высота вдвое больше меньшего из оснований трапеции.

95. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 и высотой 8, проведена касательная, параллельная основанию. Найти площадь трапеции, отсекаемой этой касательной от треугольника.

96. Сторона ромба равна 10, большая диагональ равна 16. К окружности, вписанной в ромб, проведена касательная, параллельная его меньшей диагонали. Найти длину отрезка касательной, заключенной между сторонами ромба.

97. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 10$. Из середины M стороны AB проведен перпендикуляр MN к стороне AB до пересечения с BC в точке N и точка N соединена с точкой A . Периметр $\triangle ABC$ равен 40. Найти $P_{\triangle ANC}$.

98. Центр вписанной в $\triangle MKN$ окружности делит биссектрису угла K на части 9 и 5, считая от вершины K . Длина $MN = 15$, а разность двух других сторон равна 1. Найти радиус вписанной окружности.

99. Центр вписанной в $\triangle KTL$ окружности делит биссектрису угла T на части 10 и 5, считая от вершины T , а биссектрису угла K на отрезки 3 и 1. Известно, что $P_{\triangle KTL} = 36$. Найти стороны треугольника.

100. В параллелограмме $MNEF$ длина $MN = 13$. Из углов M и N проведены биссектрисы, которые пересекаются в точке O . Расстояние от точки O до стороны MN равно $60/13$. Найти длины отрезков NO и MO .

ОТВЕТЫ

1. 9 см; $9\sqrt{3}$ см;
18 см.

2. $\arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$.

3. $12\sqrt{5}$ см.

4. $\frac{7}{5}\sqrt{145}$ см.

5. 8,25 см.

6. $\frac{\sqrt{7}}{9}(\sqrt{7}+4)$.

7. 16 см.

8. 10.

9. 8.

10. 4.

11. 1,5.

12. $\frac{n^2}{2\sqrt{n^2-m^2}}$.

13. 0,6.

14. $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$;

$2 \cos \alpha \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.

15. $\frac{2}{3}$.

16. 1; $\sqrt{3}$; 2.

17. $\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} + \sin \alpha$.

18. $\frac{4 \cos \alpha}{\sqrt{1+8 \cos^2 \alpha}}$.

19. $\arcsin \left(\frac{72}{97} \right)$.

20. Прямоугольный.

21. 60° .

22. Прямоугольный.

23.

$$\frac{a^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2} \cos^2 \frac{\alpha+\beta}{2}}{2 \sin \alpha \sin \beta}$$

24. 4 см и 20 см.

25. 56.

26. 2.

27. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см.

28. $\frac{40}{27}\sqrt{2}$ см.

29. 60° .

30. $\frac{63\sqrt{15}}{20}$.

31. 3.

32. $\frac{a}{2 \sin \alpha}$.

33. 9 или 4.

34. 30° , 30° , 120° или 60° , 60° , 60° .

35. $\sqrt{3}-1$.

36. $\frac{1}{3}(a+b+c)$.

38. $a-\sqrt{a^2-b^2}$;

$a+\sqrt{a^2-b^2}$.

39. $5\sqrt{2}$.

40. $\frac{1}{2}\sqrt{ab}(a+b)$.

41. 16.

42. 12 и 48.

43. $AB = a + b$,

$DC = a - b$.

45. $18 : 9 : 1$.

46. 30° .

47. $\frac{2ab}{(a+b)}$.

48. 2.

49. $\arccos \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

50. $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

51. $2 \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha} \right)$.

53. $\frac{bc}{b+c}$.

54. $\frac{1}{2}ab$.

55. $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

56. $\sqrt{3(a^2 + \sqrt{3}ab + b^2)}$.

57. $\sqrt{a^2 + ab + b^2}$.

58. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

59. $\frac{a^2}{4b}$.

60. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

61. 16.

62. 3.

63. 6.

- | | | |
|--|----------------------------|-----------------------------|
| 64. 14. | 77. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. | 89. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$. |
| 65. 16. | | |
| 66. $\frac{32}{3}$. | 78. 60. | 90. 2 и $\frac{8}{3}$. |
| 67. $\sqrt{3}+1$. | 79. 8. | |
| 68. $2(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$. | 80. 5. | 91. 270. |
| 69. 8. | 81. 36 и 8. | 92. 45. |
| 70. 1,6. | 82. 30; $12(2-\sqrt{3})$. | 93. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$. |
| 71. 2. | 83. $\sqrt{2}$. | 94. 60. |
| 72. $\sqrt{130}$. | 84. 1 или 1,5. | 95. 45. |
| 73. 172,8. | 85. 10. | 96. 4,8. |
| 74. 7. | 86. 15. | 97. 25. |
| 75. 4 и 20. | 87. 12. | 98. 4. |
| 76. 52. | 88. $\frac{96}{25}$. | 99. 9; 12; 15. |
| | | 100. 12; 5. |

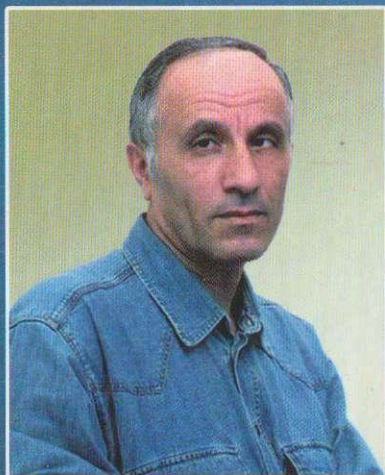
ЛИТЕРАТУРА

Балаян Э.Н. Геометрия. Сборник задач по планиметрии для подготовки к ГИА, ЕГЭ и олимпиадам. 7–11 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2013.

Балаян Э.Н. Геометрия: задачи на готовых чертежах. 7–9 классы. — 5-е изд. — Ростов н/Д: Феникс, 2013.

Балаян Э.Н. Репетитор по геометрии для подготовки к ГИА и ЕГЭ. 7–11 классы. — Ростов н/Д: Феникс, 2012.

Балаян Э.Н. Репетитор по математике для поступающих в вузы. — 11-е изд. — Ростов н/Д: Феникс, 2013.



Эдуард Николаевич Балаян

профессор РАЕ, почетный доктор наук (DOCTOR OF SCIENCE, HONORIS CAUSA), известный учитель математики, автор более 80 книг. Имеет большой опыт работы, в том числе в специализированном математическом лицее. Его выпускники ныне работают в Российской Федерации, странах СНГ, дальнего и ближнего зарубежья, с благодарностью вспоминая его увлекательные уроки.

За многолетний педагогический труд, большой личный вклад в разработку учебно-методической литературы по математике награжден медалью им. В.И. Вернадского, почетной грамотой МО и науки РФ и другими наградами.

В настоящее время работает на подготовительном отделении Донского государственного технического университета (ДГТУ).

ФЕНИКС

ISBN 978-5-222-21435-0



9 785222 214

Амитель №12

МАТЕМ ЗАДАЧИ ТИПА С4 ГЕОМЕТРИЯ
ПЛАНИМЕТРИЯ БАЛАЯН "БП" ФЕНИКС

Россия

121 140214

8743