

# ЗАДАЧИ



В. В. ПРАСОЛОВ

## АЛГЕБРА

7 класс

ФГОС

В. В. Прасолов

# Задачи по алгебре

7 класс

Москва  
Издательство МЦНМО  
2019

УДК 512.1+517.1+511.1

ББК 22.141+22.161

П70

**Прасолов В. В.**

П70      Задачи по алгебре. 7 класс. — М.: МЦНМО, 2019. — 80 с.

ISBN 978-5-4439-1395-7

Книга содержит задачи повышенной сложности по алгебре для учащихся 7 класса. Большинство из 11 глав начинается с перечисления основных фактов и понятий, относящихся к этой главе. Затем приводятся решения нескольких наиболее типичных задач. После этого следуют задачи для самостоятельного решения. В конце приведены ответы и почти ко всем задачам даны указания.

Для учителей математики и для школьников, которые хотят научиться решать задачи, немного более сложные, чем задачи из учебника. По этой книге можно подготовиться к математическим олимпиадам, уровень которых ниже уровня заключительного этапа Всероссийской олимпиады.

ББК 22.141+22.161

6+

ISBN 978-5-4439-1395-7

© Прасолов В. В., 2019.

© МЦНМО, 2019.

# Оглавление

<b>Предисловие</b> . . . . .	5
<b>Список обозначений</b> . . . . .	6
<b>Глава 1. Дроби и проценты</b> . . . . .	7
Дроби (9). Десятичные дроби (9). Проценты (10). Смеси, концентрации (11). Вычисление сумм и произведений дробей (11). Аликвотные дроби (11). Сокращение дробей (12).	
<b>Глава 2. Степень с натуральным показателем</b> . . . . .	13
Общие свойства (14). Последние цифры (14). Делимость (14). Расстановка скобок (15).	
<b>Глава 3. Делимость чисел</b> . . . . .	16
Делимость нацело (17). Делимость двух чисел (18). Признаки делимости и десятичная запись числа (18).	
<b>Глава 4. Разложение на простые множители и деление с остатком</b> . . . . .	19
Простые и составные числа (20). Разложение на простые множители (21). Взаимно простые числа (21). Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное (21). Деление с остатком (21). Остатки полных квадратов (22). Алгоритм Евклида (23).	
<b>Глава 5. Многочлены</b> . . . . .	24
Свойства многочленов (25). Коэффициенты многочленов (26). Делимость многочленов (26).	
<b>Глава 6. Формулы сокращённого умножения и другие тождества</b> . . . . .	27
Выделение полного квадрата (28). Разность квадратов (28). Куб суммы и куб разности (29). Формула для $x^n - y^n$ (29). Формула для $x^n + y^n$ (30). Сумма двух квадратов (30). Разные тождества (30).	
<b>Глава 7. Разложение многочленов на множители</b> . . . . .	31
Разложение на множители многочлена от одной переменной (31). Разложение на множители многочлена от нескольких переменных (32).	
<b>Глава 8. Алгебраические дроби</b> . . . . .	33
Преобразование дробей (33). Дробь — целое число (34). Суммы и произведения дробей (35).	

<b>Глава 9. Линейные уравнения . . . . .</b>	<b>36</b>
График линейной функции (38). Решение задач с помощью систем линейных уравнений (38). Линейные уравнения с несколькими неизвестными (38).	
<b>Глава 10. Текстовые задачи . . . . .</b>	<b>39</b>
Решение без уравнений (40). Одно уравнение (41). Движения (42). Погрузка и упаковка (43).	
<b>Глава 11. Дополнительные задачи . . . . .</b>	<b>44</b>
Задачи на разные темы (44). Переправы (45). Переливания (45).	
<b>Ответы . . . . .</b>	<b>46</b>
<b>Указания . . . . .</b>	<b>49</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>77</b>

## Предисловие

Книга содержит задачи по алгебре для учащихся 7 класса. Эти задачи немного сложнее тех, которые приводятся в учебниках как основные, но не сложнее тех, которые приводятся как дополнительные задачи или как задачи повышенной трудности.

Большинство из 11 глав начинается с перечисления основных фактов и понятий, относящихся к этой главе. Эти факты и понятия есть во всех школьных учебниках и приводятся лишь для напоминания. Те же понятия, которые есть в некоторых учебниках, но не во всех, приводятся в тех параграфах, в которых они впервые встречаются. К таким понятиям относятся, в частности, аликвотные дроби и алгоритм Евклида.

После перечисления основных фактов и понятий во многих главах разбираются решения нескольких наиболее типичных задач. Затем приводятся задачи для самостоятельного решения. В конце приведены ответы и ко всем задачам (кроме тех, к которым уже сам ответ является полным решением) даны указания.

Порядок изложения материала в этом задачнике может отличаться от порядка изложения в школьном учебнике, потому что в разных учебниках порядок изложения разный. Но решать задачи желательно именно в предлагаемом порядке, потому что именно в этом порядке лучше всего проявляются взаимосвязи между разными задачами.

Порядок изложения строго последовательный: ни в одной из глав материал последующих глав не используется.

## Список обозначений

- $0,(ab\dots c)$  — периодическая десятичная дробь, с. 7—8
- $\%$  — процент, с. 8
- $a^n$  — число  $a$  в степени  $n$ , с. 13
- $\overline{abc}$  — десятичная запись числа, с. 16
- $\text{НОД}(a, b)$  или  $(a, b)$  — наибольший общий делитель, с. 19
- $\text{НОК}(a, b)$  или  $[a, b]$  — наименьшее общее кратное, с. 19
- $a \equiv c \pmod{b}$  — сравнение по модулю, с. 20
- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$  — факториал, с. 20
- $P(x)$  — многочлен, с. 24
- $Ox$  и  $Oy$  — оси координат, с. 37

## Глава 1

# Дроби и проценты

### Основные факты и понятия

Положительное рациональное число — это число вида  $\frac{p}{q}$ , где  $p$  и  $q$  — натуральные числа. Положительное рациональное число называют также *обыкновенной дробью* или просто *дробью*. Число  $p$  называют при этом *числителем дроби*, а число  $q$  — *знаменателем дроби*.

Дробь  $\frac{p}{q}$  называют *несократимой*, если числа  $p$  и  $q$  не имеют общих делителей.

Дробь  $\frac{p}{q}$  называют *правильной*, если  $p < q$ .

Обыкновенная дробь  $\frac{a}{b}$  больше обыкновенной дроби  $\frac{c}{d}$ , если  $ad > bc$ .

Если знаменатель  $q$  дроби  $\frac{p}{q}$  — некоторая степень числа 10, то эту дробь можно записать в виде *конечной десятичной дроби*. Например, дроби

$$\frac{5}{10}, \frac{3}{100}, \frac{7}{10000}, \frac{192}{10}$$

записываются следующими конечными десятичными дробями:

$$0,5, 0,03, 0,0007, 19,2.$$

Каждую из этих десятичных дробей называют *десятичным разложением* соответствующей обыкновенной дроби.

Если знаменатель дроби имеет вид  $2^n 5^m$ , то числитель и знаменатель дроби можно умножить на  $2^{k-n} 5^{k-m}$ , где  $k$  — это наибольшее из чисел  $n$  и  $m$ . В результате получим дробь со знаменателем  $10^k$ ; её можно представить в виде конечной десятичной дроби.

Дробь, знаменатель которой имеет простой делитель, отличный от 2 и 5, нельзя представить в виде конечной десятичной дроби, но можно представить в виде *бесконечной десятичной дроби*. Например,  $\frac{1}{3} = 0,3333... = 0,(3)$ . Запись (3) означает, что тройка периодически повторяется. Повторяться может и другой набор цифр; этот



набор называют *периодом*. Периодичность дроби может начинаться сразу после запятой, как для дроби  $0,(3)$ . Тогда дробь называют *чисто периодической*. Если же между запятой и периодом есть другие десятичные знаки, то дробь называют *смешанно периодической*. Например, дробь  $0,73333... = 0,7(3)$  смешанно периодическая.

Любое рациональное число представляется периодической десятичной дробью (задача 1.13).

При вычислении десятичной дроби, представляющей обыкновенную дробь, используется деление с остатком. Подробно оно обсуждается в главе 4. Здесь же вполне достаточно представления о делении уголком, которое основано на делении с остатком.

**Процент** — это  $\frac{1}{100}$  часть данной величины,  $n$  процентов от величины  $a$  равно  $\frac{na}{100}$ . Увеличение данной величины на  $n\%$  — это умножение её на  $1 + \frac{n}{100}$ . Уменьшение данной величины на  $n\%$  — это умножение её на  $1 - \frac{n}{100}$ .

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Что больше:  $\frac{10001}{10002}$  или  $\frac{100001}{100002}$ ?

**Решение.** Вместо того чтобы сравнивать дроби  $\frac{10001}{10002}$  и  $\frac{100001}{100002}$ , сравним дроби  $1 - \frac{10001}{10002}$  и  $1 - \frac{100001}{100002}$ :

$$1 - \frac{10001}{10002} = \frac{1}{10002} > \frac{1}{100002} = 1 - \frac{100001}{100002}.$$

Для исходных дробей знак неравенства обратный.

**Ответ.**  $\frac{10001}{10002} < \frac{100001}{100002}$ .

**Пример 2.** Запишите дроби  $\frac{1}{37}$ ,  $\frac{1}{7}$  и  $\frac{1}{13}$  в виде периодических десятичных дробей.

**Решение.** Дробь  $\frac{1}{37}$  в виде десятичной дроби представляется следующим образом. Сначала сравниваем 10 и 37. Поскольку  $10 < 37$ , первый десятичный знак — ноль. Затем сравниваем 100 и 37. Теперь уже  $100 > 37$ , поэтому делим 100 на 37 с остатком:  $100 = 2 \cdot 37 + 26$ . Второй десятичный знак 2. Затем делим 260 на 37 остатком:  $260 = 7 \cdot 37 + 1$ . Третий десятичный знак 7. Остаток получился 1, поэтому дальше всё будет повторяться периодически. Для двух других дробей вычисления аналогичные.

**Ответ.**  $0,(027)$ ,  $0,(142857)$  и  $0,(076923)$ .

**Пример 3.** В мешке было 100 кг огурцов, на 99 % состоящих из воды. После хранения огурцы усохли, и теперь вода составляет только 98 % их веса. Сколько теперь весят огурцы?

**Решение.** Сухая часть огурцов весит 1 кг. Если вода составляет 98 % веса огурцов, то вес воды относится к весу огурцов как 98 % относится к 2 %. Поэтому вес воды равен  $\frac{98}{2} = 49$  кг, а общий вес равен  $49 + 1 = 50$  кг.

*Ответ.* 50 кг.

## Задачи для самостоятельного решения

### Дроби

1.1. Что больше:  $\frac{12345}{54321}$  или  $\frac{12346}{54322}$ ?

1.2. Разделите 5 яблок поровну между шестью детьми, не разрезая ни одно из яблок более чем на 3 части.

1.3. Как отрезать от шнура в  $\frac{2}{3}$  м кусок в  $\frac{1}{2}$  м, не имея метра?

1.4. На острове  $\frac{2}{3}$  всех мужчин женаты и  $\frac{3}{5}$  всех женщин замужем. Какая доля населения острова состоит в браке?

1.5. Ванна заполняется холодной водой за 6 минут 40 секунд, горячей — за 8 минут. Кроме того, если из полной ванны вынуть пробку, вода вытечет за 13 минут 20 секунд. За сколько времени ванна заполнится при условии, что открыты оба крана, но ванна не заткнута пробкой?

1.6. Школьники одного класса ходили в два туристических похода. В каждом походе мальчиков было меньше  $\frac{2}{5}$  общего количества участников похода. Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше  $\frac{4}{7}$  общего числа учеников, если известно, что каждый из учеников был по крайней мере в одном походе.

1.7. Найдите дробь с наименьшим знаменателем, значение которой больше 0,4 и меньше 0,5.

1.8. Числитель и знаменатель дроби — натуральные числа. Числитель увеличили на 1, а знаменатель — на 10. Могло ли значение дроби увеличиться?

### Десятичные дроби

1.9. Запишите периодические десятичные дроби 0,(1), 0,(01) и 0,(001) в виде обыкновенных дробей.

**1.10.** Представьте периодическую десятичную дробь  $0,(237)$  в виде обыкновенной дроби.

**1.11.** Докажите, что любую периодическую десятичную дробь можно представить в виде обыкновенной дроби.

**1.12.** Чистый период дроби  $\frac{1}{m}$  состоит из  $n$  цифр. Докажите, что число  $999\dots 99$ , состоящее из  $n$  девяток, делится на  $m$ . Например,  $999 : 37 = 27$ ,  $999999 : 7 = 142857$  и  $999999 : 13 = 76923$ .

**1.13.** Докажите, что любое рациональное число представляется периодической десятичной дробью.

**1.14.** Подберите цифру  $d$  так, чтобы для некоторого натурального  $n$  выполнялось равенство  $0,(d25) = \frac{n}{810}$ .

### Проценты

**1.15.** Что больше: пять процентов от семи миллионов или семь процентов от пяти миллионов?

**1.16.** Книга стоила 350 рублей. В первом магазине её сначала уценили на 40 %, а затем ещё на 5 %, во втором — сначала на 5 %, а затем ещё на 40 %, а в третьем магазине книгу уценили на 45 %. В каком магазине книга дешевле?

**1.17.** Цена картофеля сначала повысилась на 20 %, а затем понизилась на 20 %. Повысилась или понизилась в результате цена? На сколько процентов?

**1.18.** После кризиса все цены поднялись на 25 %. На сколько процентов меньше товаров можно купить на ту же зарплату?

**1.19.** В школьном кружке есть девочки, но мальчиков больше 94 % состава. Какое наименьшее число школьников может быть в кружке?

**1.20.** Какое наименьшее число участников может быть в математическом кружке, если известно, что девочек в нём меньше 50 %, но больше 40 %?

**1.21.** Под какой процент выгоднее положить деньги в банк на год: 6 % в год или 0,5 % в месяц?

**1.22.** Сколько кг зерна нужно смолоть, чтобы после оплаты работы (10 % от помолы) осталось ровно 100 кг муки? Потерь при помоле нет.

**1.23.** В семье 4 человека. Если Маше удвоят стипендию, общий доход всей семьи возрастёт на 5 %, если вместо этого маме удвоят зарплату — на 15 %, если же зарплату удвоят папе — на 25 %. На сколько процентов возрастёт доход всей семьи, если бабушке удвоят пенсию?

**1.24.** В отчёте о лыжном забеге сказано, что 96 % его участников выполнили норму. Известно, что эта цифра дана с точностью до 0,5 %. Каково наименьшее число участников этого забега?

### Смеси, концентрации

**1.25.** Из стакана молока три ложки содержимого переливают в стакан с чаем, затем три ложки полученной смеси переливают обратно в стакан с молоком. Чего теперь больше: чая в стакане с молоком или молока в стакане с чаем?

**1.26.** В каком отношении нужно смешать 6-процентный раствор соли и 30-процентный, чтобы получить 12-процентный?

**1.27.** Доля блондинов среди голубоглазых больше, чем доля блондинов среди всех людей. Что больше: доля голубоглазых среди блондинов или доля голубоглазых среди всех людей?

### Вычисление сумм и произведений дробей

**1.28.** Вычислите сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99} + \frac{1}{99 \cdot 100}.$$

**1.29.** Вычислите сумму

$$\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 101} + \frac{1}{101 \cdot 103}.$$

**1.30.** Вычислите сумму

$$\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{96 \cdot 98} + \frac{1}{98 \cdot 100}.$$

**1.31.** Вычислите произведение

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{225}\right).$$

### Аликвотные дроби

*Аликвотная дробь* — это дробь, числитель которой равен 1, а знаменатель — натуральное число  $n > 1$ . Название происходит от латинского слова *aliquot*; одно из значений этого слова — разделённый на равные части. В Древнем Египте аликвотные дроби использовали очень часто, поэтому их иногда называют *египетскими дробями*.

**1.32.** Представьте дробь  $\frac{1}{2}$  в виде суммы двух различных аликвотных дробей.

**1.33.** Представьте дробь  $\frac{1}{3}$  в виде суммы двух различных аликвотных дробей.

**1.34.** Представьте дробь  $\frac{1}{6}$  в виде суммы двух различных аликвотных дробей четырьмя различными способами (не учитывая порядка слагаемых).

**1.35.** Представьте 1 в виде суммы а) трёх; б) четырёх различных аликвотных дробей.

**1.36.** Сколькими различными способами, не учитывая порядка слагаемых, можно представить дробь  $\frac{1}{25}$  в виде суммы двух различных аликвотных дробей?

**1.37.** Сколькими различными способами, не учитывая порядка слагаемых, можно представить дробь  $\frac{1}{6}$  в виде суммы двух различных аликвотных дробей?

**1.38.** Сколькими различными способами, не учитывая порядка слагаемых, можно представить дробь  $\frac{1}{12}$  в виде суммы двух различных аликвотных дробей?

**1.39.** Представьте дробь  $\frac{3}{8}$  в виде суммы различных аликвотных дробей.

**1.40.** Докажите, что любую правильную дробь можно представить в виде аликвотной дроби или суммы нескольких различных аликвотных дробей.

### Сокращение дробей

**1.41.** Найдите все числа, на которые можно сократить дробь  $\frac{5l+6}{8l+7}$ , где число  $l$  целое.

**1.42.** Числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $l$  натуральные, числитель и знаменатель дроби  $\frac{al+b}{cl+d}$  сократимы на  $k$ . Докажите, что  $ad - bc$  делится на  $k$ .

## Глава 2

# Степень с натуральным показателем

### Основные факты и понятия

Произведение  $n$  множителей, каждый из которых равен одному и тому же числу  $a$ , называют  $n$ -й степенью числа  $a$  и обозначают  $a^n$ . Число  $a$  называют *основанием степени*, а число  $n$  — *показателем степени*.

Произведение степеней с одним и тем же показателем равно степени с тем же показателем и основанием, равным произведению оснований:  $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ .

Произведение степеней с одним и тем же основанием равно степени с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей:  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ .

Степень степени числа равна степени того же числа с показателем, равным произведению показателей этих степеней:  $(a^n)^m = a^{nm}$ .

Если числа  $a$  и  $b$  положительные и  $a > b$ , то  $a^n > b^n$  для любого натурального числа  $n$ .

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Какое число больше:  $31^{11}$  или  $17^{14}$ ?

**Решение.** Ясно, что  $31^{11} < 32^{11} = 2^{55} < 2^{56} = 16^{14} < 17^{14}$ .

**Ответ.**  $17^{14}$ .

**Пример 2.** Число  $n$  натуральное. Найдите последнюю цифру числа: а)  $9^{2n}$ ; б)  $9^{2n+1}$ .

**Решение.** Равенство

$$(10k + a)(10l + b) = 10(10kl + al + bk) + ab$$

показывает, что последние цифры у произведения двух чисел и у произведения последних цифр этих чисел одинаковые.

а) Ясно, что  $9^{2n} = (9^2)^n = 81^n$ , поэтому последняя цифра числа  $9^{2n}$  равна 1.

б) Ясно, что  $9^{2n+1} = 9 \cdot 9^{2n}$ . Последняя цифра числа  $9^{2n}$  равна 1, поэтому последняя цифра числа  $9^{2n+1}$  равна 9.

**Ответ.** а) 1; б) 9.

## Задачи для самостоятельного решения

### Общие свойства

- 2.1. Сколько цифр в десятичной записи числа  $10^{1000}$ ?
- 2.2. Числа  $a$ ,  $m$  и  $n$  натуральные,  $a > 1$  и  $m > n$ . Докажите, что  $a^m > a^n$ .
- 2.3. Сколько цифр в десятичной записи числа  $2^{20}$ ?
- 2.4. Могут ли четыре разных степени двойки содержать одно и то же число цифр?
- 2.5. Докажите, что для каждого натурального  $n$  количество различных  $n$ -значных степеней двойки не меньше трёх.
- 2.6. Докажите, что для каждого натурального  $n$  количество различных  $n$ -значных степеней двойки не больше четырёх.
- 2.7. Сколько цифр в десятичной записи числа  $2^{100}$ ?
- 2.8. Какое из чисел больше:  $\frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1}$  или  $\frac{10^{11} + 1}{10^{12} + 1}$ ?
- 2.9. Найдите все натуральные  $n$  и  $m$ , для которых  $m^{n+m} = n^{12}$  и  $n^{n+m} = m^3$ .
- 2.10. Докажите, что для любых натуральных  $n$  и  $m$  выполняется неравенство  $n^n m^m \geq n^m m^n$ .
- 2.11. Докажите, что для любых натуральных  $a$ ,  $b$  и  $c$  выполняется неравенство

$$a^{2a} b^{2b} c^{2c} \geq a^{b+c} b^{c+a} c^{a+b}.$$

### Последние цифры

В задачах 2.12—2.17 число  $n$  натуральное.

- 2.12. Найдите последнюю цифру чисел  $4^{2n}$  и  $4^{2n+1}$ .
- 2.13. Найдите последнюю цифру чисел  $2^{4n}$ ,  $2^{4n+1}$ ,  $2^{4n+2}$  и  $2^{4n+3}$ .
- 2.14. Найдите последнюю цифру чисел  $8^{4n}$ ,  $8^{4n+1}$ ,  $8^{4n+2}$  и  $8^{4n+3}$ .
- 2.15. Найдите последнюю цифру чисел  $3^{4n}$ ,  $3^{4n+1}$ ,  $3^{4n+2}$  и  $3^{4n+3}$ .
- 2.16. Найдите последнюю цифру чисел  $7^{4n}$ ,  $7^{4n+1}$ ,  $7^{4n+2}$  и  $7^{4n+3}$ .
- 2.17. Найдите последнюю цифру числа:  
а)  $2^{187}$ ; б)  $3^{115}$ ; в)  $7^{158}$ ; г)  $27^{358} + 53^{275}$ .

### Делимость

- 2.18. Докажите, что число  $16^{11} - 2^{39}$  делится на 31.
- 2.19. Докажите, что число  $333^{777} + 777^{333}$  делится на 37.
- 2.20. Докажите, что число  $10^{23} + 10^{19} - 182$  делится на 18.

### Расстановка скобок

В выражении  $a^{b^c}$  можно расставить скобки двумя способами:  $a^{(b^c)}$  или  $(a^b)^c$ . Но выражение  $(a^b)^c$  можно записать по-другому:  $(a^b)^c = a^{bc}$ . Обычно его именно так и записывают. А запись  $a^{b^c}$  без скобок подразумевает такую последовательность операций:  $a^{(b^c)}$ .

**2.21.** Какое число больше:  $10^{10^{10}}$  или  $(10^{10})^{10}$ ?

**2.22.** Сравните числа  $2^{2^2}$  и  $(2^2)^2$ .

**2.23.** Сравните числа  $2^{(2^{2^2})}$  и  $((2^2)^2)^2$ .

**2.24.** Найдите последнюю цифру числа  $((7^7)^7)^7$ .

**2.25.** Можно ли двумя разными способами так расставить в выражении  $7^{7^{7^7}}$  скобки, определяющие порядок действий, чтобы получилось одно и то же число?

**2.26.** Для каких натуральных чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  числа  $(a^b)^{(c^d)}$  и  $(a^{(c^d)})^b$  равны?



## Глава 3

# Делимость чисел

### Основные факты и понятия

**Признак делимости на 3.** Целое число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

**Признак делимости на 9.** Целое число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9.

**Признак делимости на 11.** Целое число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой его цифр, стоящих на чётных местах, и суммой цифр, стоящих на нечётных местах, делится на 11 (или равна нулю).

Когда в десятичной записи числа вместо цифр используются буквы, это может привести к неправильному пониманию обозначений. В этом случае часто пишут  $\overline{a_1 a_2 \dots a_n}$ , это означает следующее:

$$\overline{ab} = 10a + b, \quad \overline{abc} = 100a + 10b + c \quad \text{и т. д.}$$

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Докажите, что произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.

**Решение.** По крайней мере одно из трёх последовательных натуральных чисел чётно, поэтому их произведение делится на 2. Одно из трёх последовательных натуральных чисел делится на 3, поэтому их произведение делится на 3. Следовательно, произведение любых трёх последовательных натуральных чисел делится на 6.

**Пример 2.** Числа  $a$  и  $b$  целые, число  $14a + 13b$  делится на 11. Докажите, что число  $19a + 9b$  тоже делится на 11.

**Решение.** По условию  $14a + 13b = 11m$ , где число  $m$  целое. Поэтому

$$19a + 9b = -(14a + 13b) + 11(3a + 2b) = 11(-m + 3a + 2b).$$

**Пример 3.** Докажите признак делимости на 3.

**Решение.** Для любого натурального числа  $n$  число  $10^n - 1$  делится на 3. Действительно, в результате такого деления получается

число  $33\dots3$ , состоящее из  $n$  троек. Следовательно, разность между самым целым числом и его суммой цифр делится на 3. Таким образом, целое число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3.

## Задачи для самостоятельного решения

### Делимость нацело

**3.1.** Докажите, что для любого натурального  $n$  число  $n^3 - n$  делится на 6.

**3.2.** Докажите, что для любого нечётного натурального  $n$  число  $n^3 - n$  делится на 24.

**3.3.** Докажите, что  $n^3 + 2n$  делится на 3 для любого натурального  $n$ .

**3.4.** Докажите, что произведение любых пяти последовательных натуральных чисел делится на 120.

**3.5.** Докажите, что для любого натурального  $n$  число  $n^5 - 5n^3 + 4n$  делится на 120.

**3.6.** Докажите, что для любого натурального  $n$  число  $n^5 + 4n$  делится на 5.

**3.7.** Может ли сумма трёх различных натуральных чисел делиться на каждое из слагаемых?

**3.8.** Может ли сумма шести различных натуральных чисел делиться на каждое из слагаемых?

**3.9.** Докажите, что число  $111\dots11$ , состоящее из  $n$  единиц, делится на 7 тогда и только тогда, когда  $n$  делится на 6.

**3.10.** Число  $111\dots11$  делится на 7. Докажите, что это число делится на 13.

**3.11.** В шестизначном числе первая цифра совпадает с четвёртой, вторая с пятой, третья с шестой. Докажите, что это число делится на 7, 11 и 13.

**3.12.** Докажите, что число  $\underbrace{111\dots11}_{n \text{ раз}}$  делится на  $\underbrace{111\dots11}_{m \text{ раз}}$  тогда и только тогда, когда  $n$  делится на  $m$ .

**3.13.** Докажите, что число, имеющее нечётное число делителей, является точным квадратом.

**3.14.** Докажите, что если в числе 12008 между нулями вставить любое количество троек, то получится число, делящееся на 19.

### Делимость двух чисел

В задачах 3.15—3.20 числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$  целые.

**3.15.** Число  $3a + 2b$  делится на 23. Докажите, что число  $17a + 19b$  тоже делится на 23.

**3.16.** Число  $7a + 5b$  делится на 13. Докажите, что  $41a + 46b$  тоже делится на 13.

**3.17.** Число  $6a + 11b$  делится на 31. Докажите, что  $a + 7b$  тоже делится на 31.

**3.18.** Докажите, что числа  $2a + 3b$  и  $9a + 5b$  делятся на 17 одновременно.

**3.19.** Докажите, что числа  $11a + 2b$  и  $18a + 5b$  делятся на 19 одновременно.

**3.20.** Число  $3a + 4b + 5c$  делится на 11. Докажите, что число  $9a + b + 4c$  тоже делится на 11.

**3.21.** Сумма цифр  $a$  и  $b$  делится на 7. Докажите, что число  $\overline{aba} = 100a + 10b + a$  тоже делится на 7.

### Признаки делимости и десятичная запись числа

**3.22.** Докажите признак делимости на 9.

**3.23.** Докажите признак делимости на 11.

**3.24.** Одно четырёхзначное число получено из другого перестановкой первой и последней цифр. Докажите, что если одно из этих чисел делится на 37, то другое число тоже делится на 37. Например, оба числа 1813 и 3811 делятся на 37.

**3.25.** Дано шестизначное число  $\overline{abcdef}$ , причём число  $\overline{abc} + \overline{def}$  делится на 37. Докажите, что и само число делится на 37.

**3.26.** Докажите, что число  $11\dots 11$  ( $2n$  единиц) составное.

**3.27.** Может ли число, сумма цифр которого равна 2019, быть квадратом целого числа?

**3.28.** Может ли число, записанное с помощью трёхсот единиц и некоторого числа нулей, быть квадратом целого числа?

**3.29.** Может ли число, записанное с помощью 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть квадратом целого числа?

**3.30.** Может ли число, состоящее из шестисот шестёрок и некоторого числа нулей, быть квадратом целого числа?

**3.31.** Делится ли число  $111\dots 11$  (81 единица) на 81?

**3.32.** Для какого наименьшего  $n$  число  $111\dots 11$  ( $n$  единиц) делится на  $333\dots 33$  (100 троек)?

## Глава 4

# Разложение на простые множители и деление с остатком

### Основные факты и понятия

*Простое число* — это натуральное число, которое больше 1 и делится только на 1 и на себя.

*Составное число* — это натуральное число, которое больше 1 и не является простым.

*Разложение числа на простые множители* — это представление натурального числа, которое больше 1, в виде произведения простых чисел, взятых в соответствующих степенях и записанных в порядке возрастания этих простых чисел.

**Основная теорема арифметики.** Любое отличное от 1 натуральное число можно разложить на простые множители, и такое разложение единственно. (Обратите внимание, что основную теорему мы пока принимаем без доказательства. Она совсем не очевидна и требует доказательства.)

*Наибольший общий делитель* двух или нескольких натуральных чисел — это наибольшее натуральное число, на которое делятся все эти числа. Наибольший общий делитель чисел  $a$  и  $b$  обозначают  $\text{НОД}(a, b)$ . Иногда используется также обозначение  $(a, b)$ .

Числа  $p$  и  $q$  называют *взаимно простыми*, если  $\text{НОД}(p, q) = 1$ . Из основной теоремы арифметики следует, что если число делится на взаимно простые числа  $p$  и  $q$ , то оно делится и на их произведение  $pq$ . В частности, если числа  $p$  и  $q$  взаимно простые и  $pa$  делится на  $q$ , то  $a$  делится на  $q$ .

*Наименьшее общее кратное* двух или нескольких натуральных чисел — это наименьшее натуральное число, которое делится на все эти числа. Наименьшее общее кратное чисел  $a$  и  $b$  обозначают  $\text{НОК}(a, b)$ . Иногда используется также обозначение  $[a, b]$ .

*Деление с остатком* натурального числа  $a$  на натуральное число  $b$  — это представление вида  $a = qb + r$ , где числа  $q$  и  $r$  целые, причём  $0 \leq r < b$ . Число  $r$  называют *остатком от деления*, а число  $q$  —

*неполным частным*. Число  $a$  делится на  $b$  тогда и только тогда, когда остаток от деления равен 0. Если число  $a$  делится на  $b$ , то число  $q$  называют просто *частным*, а не неполным частным.

Если числа  $a$  и  $c$  дают одинаковые остатки при делении на  $b$ , то для записи этого свойства используют сокращённое обозначение  $a \equiv c \pmod{b}$  и говорят, что  $a$  сравнимо с  $c$  по модулю  $b$ .

*Точный квадрат* или *полный квадрат* — это число, равное квадрату некоторого целого числа.

В математике часто встречается число вида  $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ . Это число обозначают  $n!$  (произносится «эн факториал»).

## Примеры решения задач

**Пример 1.** Натуральные числа  $m$  и  $n$  связаны соотношением  $56m = 65n$ . Докажите, что число  $m + n$  составное.

**Решение.** Числа 56 и 65 взаимно простые, поэтому  $m = 65k$  и  $n = 56k$  для некоторого натурального  $k$ . Следовательно,  $m + n = 121k = 11^2k$  — составное число.

**Пример 2.** Докажите, что  $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b)$ .

**Решение.** Если числа  $a$  и  $b$  делятся на  $d$ , то  $a = md$  и  $b = nd$  для некоторых целых чисел  $m$  и  $n$ . Поэтому числа  $a - b = (m - n)d$  и  $b$  тоже делятся на  $d$ . И наоборот, если  $a - b = kd$  и  $b = ld$ , то  $a = (k + l)d$ .

**Пример 3.** Найдите наименьшее натуральное число, которое больше 1 и даёт остаток 1 при делении на 3, на 4 и на 7.

**Решение.** Пусть натуральное число  $n$  даёт остаток 1 при делении на 3, на 4 и на 7. Тогда число  $n - 1$  делится на  $3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$ . Поэтому  $n = 84k + 1$ , где число  $k$  натуральное. Наименьшее  $n$  получится при  $k = 1$ .

*Ответ.* 85.

**Пример 4.** Докажите, что квадрат нечётного числа при делении на 4 даёт в остатке 1.

**Решение.** Квадрат числа  $2n + 1$  равен  $(2n + 1)^2 = 4(n^2 + n) + 1$ , поэтому при делении на 4 он даёт в остатке 1.

## Задачи для самостоятельного решения

### Простые и составные числа

**4.1.** Докажите, что любое натуральное число, отличное от единицы, имеет простой делитель.

**4.2.** Докажите, что простых чисел бесконечно много.

4.3. Докажите, что для любого натурального  $n$  найдутся  $n$  подряд идущих составных натуральных чисел.

4.4. Является ли число  $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$  простым?

### Разложение на простые множители

4.5. На сколько нулей оканчивается число  $100!$  (произведение всех натуральных чисел от 1 до 100)?

4.6. Найдите наибольшую степень двойки, на которую делится число  $(n+1)(n+2) \cdot \dots \cdot (2n-1)2n$ .

### Взаимно простые числа

4.7. Может ли произведение двух последовательных натуральных чисел быть точным квадратом?

4.8. Докажите, что произведение четырёх последовательных натуральных чисел не может быть четвёртой степенью натурального числа.

### Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

4.9. Найдите  $\text{НОД}(2n+13, n+7)$ .

4.10. Найдите  $\text{НОД}(2n^2-1, n+1)$ .

4.11. Найдите  $\text{НОД}(n^2-n+1, n^2+1)$ .

4.12. Докажите, что  $\text{НОД}(5a+3b, 13a+8b) = \text{НОД}(a, b)$ .

4.13. Докажите, что  $\text{НОД}(a, b) \cdot \text{НОК}(a, b) = ab$ .

4.14. Число  $ab$  — точный квадрат. Докажите, что число  $a \text{ НОД}(a, b)$  тоже точный квадрат.

4.15. Дано 10 натуральных чисел:  $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{10}$ . Докажите, что их наименьшее общее кратное не меньше  $10a_1$ .

### Деление с остатком

4.16. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 3 даёт остаток 2, при делении на 4 — остаток 3, а при делении на 7 — остаток 6.

4.17. Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 5 даёт остаток 4, при делении на 6 — остаток 5, а при делении на 8 — остаток 7.

4.18. Числа  $a$  и  $b$  при делении на  $n$  дают остатки  $r$  и  $s$ . Докажите, что числа  $a+b$  и  $r+s$  дают одинаковые остатки при делении на  $n$  и числа  $ab$  и  $rs$  тоже дают одинаковые остатки при делении на  $n$ .

4.19. Найдите остаток от деления  $2^{100}$  на 3.

- 4.20. Найдите остаток от деления  $2^{100}$  на 5.
- 4.21. Докажите, что  $43^{23} + 23^{43}$  делится на 66.
- 4.22. Приведите пример числа, которое при делении на 5 даёт остаток  $a$ , а при делении на 6 — остаток  $b$ .
- 4.23. Приведите пример числа, которое при делении на 5 даёт остаток  $a$ , при делении на 6 — остаток  $b$ , а при делении на 7 — остаток  $c$ .
- 4.24. Допишите к 523 в конце три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9.
- 4.25. Равносильны ли сравнения  $a \equiv b \pmod{m}$  и  $ac \equiv bc \pmod{mc}$ ?
- 4.26. Докажите, что остаток от деления простого числа на 30 — это простое число или 1.

### Остатки полных квадратов

- 4.27. Может ли сумма квадратов двух нечётных чисел быть квадратом целого числа?
- 4.28. Может ли сумма квадратов трёх нечётных чисел быть квадратом целого числа?
- 4.29. При делении на 4 число даёт остаток 3. Докажите, что это число нельзя представить в виде суммы двух квадратов целых чисел.
- 4.30. Может ли число  $(x^2 + x + 1)^2 + (y^2 + y^2 + 1)^2$  при каких-то целых  $x$  и  $y$  оказаться полным квадратом?
- 4.31. Докажите, что ни для каких целых чисел  $m$  и  $n$  не может выполняться равенство  $m^2 - 4n^2 = 104$ .
- 4.32. Докажите, что ни для каких целых чисел  $m$  и  $n$  не может выполняться равенство  $m^2 + n^2 = 2012$ .
- 4.33. Какие остатки может давать квадрат целого числа при делении на 3?
- 4.34. Докажите, что если сумма квадратов двух целых чисел делится на 3, то и каждое из чисел делится на 3.
- 4.35. Может ли делиться на 5 сумма квадратов двух целых чисел, каждое из которых не делится на 5?
- 4.36. Докажите, что если сумма квадратов двух целых чисел делится на 7, то и каждое из чисел делится на 7.
- 4.37. Какие остатки может давать квадрат целого числа при делении на 8?
- 4.38. При делении на 8 число даёт остаток 7. Докажите, что это число нельзя представить в виде суммы трёх квадратов целых чисел.

### Алгоритм Евклида

*Алгоритм Евклида* сопоставляет натуральным числам  $a$  и  $b$  ( $a \geq b$ ) число  $d$  по следующему правилу. Если  $a$  делится на  $b$ , то  $d = b$ . Если же  $a$  не делится на  $b$ , то делим  $a$  на  $b$  с остатком:  $a = n_1b + r_1$ , где  $n_1$  и  $r_1$  — натуральные числа и  $0 < r_1 < b$ . Затем вместо чисел  $a$  и  $b$  берём числа  $b$  и  $r_1$  и повторяем для них деление с остатком:  $b = n_2r_1 + r_2$ ,  $r_1 = n_3r_2 + r_3$  и т. д. Ясно, что  $a > r_1 > r_2 > r_3 > \dots$ , поэтому в конце концов одно число разделится на другое:  $r_{k-2} = n_k r_{k-1}$ . Положим  $d = r_{k-1}$ .

**4.39.** Докажите, что оба числа  $a$  и  $b$  делятся на число  $d$ , которое получается при применении алгоритма Евклида к числам  $a$  и  $b$ .

**4.40.** Докажите, что число  $d$ , которое получается при применении алгоритма Евклида к числам  $a$  и  $b$ , делится на любой общий делитель чисел  $a$  и  $b$ .

Из задач 4.39 и 4.40 следует, что число  $d$ , которое получается при применении алгоритма Евклида к числам  $a$  и  $b$ , — это НОД( $a, b$ ).

**4.41.** Докажите, что дробь  $\frac{21n+4}{14n+3}$  несократима ни при каких натуральных  $n$ .

**4.42.** Докажите, что

$$\text{НОД}(a^n - 1, a^m - 1) = a^d - 1,$$

где  $d = \text{НОД}(m, n)$ .

**4.43.** Найдите  $\text{НОД}\left(\underbrace{1 \dots 1}_m, \underbrace{1 \dots 1}_n\right)$ .

**4.44.** Докажите, что если  $\text{НОД}(a, b) = d$ , то можно подобрать целые числа  $m$  и  $n$  так, что  $am + bn = d$ .

**4.45.** Докажите, что если числа  $a$  и  $b$  взаимно простые, то можно подобрать целое число  $m$  так, что  $am \equiv 1 \pmod{b}$

**4.46.** Когда сравнения  $a \equiv b \pmod{m}$  и  $ac \equiv bc \pmod{m}$  равносильны?



## Глава 5

# Многочлены

### Основные факты и понятия

*Многочлен* — это выражение вида  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ , где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  — некоторые числа, называемые *коэффициентами* многочлена. Коэффициент  $a_0$  называют *свободным членом*. Если  $a_n \neq 0$ , то число  $n$  называют *степенью*, а коэффициент  $a_n$  — *старшим коэффициентом*. Слагаемые  $a_k x^k$  называют *одночленами*.

Многочлен  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  иногда сокращённо обозначают  $P(x)$  или даже просто  $P$ ; для обозначения многочленов используют и другие буквы, например,  $f$ ,  $g$  или  $h$ .

Число  $a_0$  тоже можно рассматривать как многочлен. Если  $a_0 \neq 0$ , то в соответствии с общим определением степень многочлена  $a_0$  равна 0. Многочлен 0 называют *нулевым многочленом*. Степень нулевого многочлена не определена.

Два многочлена называют *равными*, если их разность равна нулевому многочлену, т. е. их степени равны и соответствующие коэффициенты равны.

Если многочлен  $f$  равен произведению многочленов  $g$  и  $h$ , то говорят, что многочлен  $f$  *делится* на многочлен  $g$ . Многочлен  $h$  называют при этом *частным* многочленов  $f$  и  $g$ .

*Деление с остатком* многочлена  $f$  на  $g$  — это представление вида  $f = gh + r$ , где  $h$  и  $r$  — многочлены, причём либо степень многочлена  $r$  меньше степени многочлена  $g$ , либо многочлен  $r$  нулевой. Многочлен  $r$  называют *остатком от деления*, а многочлен  $h$  — *неполным частным*. Многочлен  $f$  делится на  $r$  тогда и только тогда, когда остаток от деления — нулевой многочлен, при этом  $h$  называют просто частным.

Число  $c$  называют *корнем* многочлена

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

если  $P(c) = 0$ . Здесь

$$P(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_1 c + a_0.$$

Помимо многочленов от одной переменной  $x$  рассматривают многочлены и от нескольких переменных. Например, многочлен от переменных  $x$  и  $y$  — это сумма нескольких слагаемых вида  $a_{mn}x^m y^n$ . При записи многочлена в стандартном виде нет одновременно слагаемых  $a_{mn}x^m y^n$  и  $b_{mn}x^m y^n$ , т. е. все слагаемые с одинаковыми степенями  $x$  и  $y$  собраны вместе. При записи многочлена в стандартном виде числа  $a_{mn}$  называют *коэффициентами* многочлена. Слагаемые  $a_{mn}x^m y^n$  называют *одночленами*. Степень одночлена  $a_{mn}x^m y^n$ , где  $a_{mn} \neq 0$ , равна  $m + n$ . Степень многочлена, записанного в стандартном виде, равна наибольшей из степеней входящих в него одночленов.

## Задачи для самостоятельного решения

### Свойства многочленов

**5.1.** Целое число  $s$  является корнем многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами. Докажите, что свободный член этого многочлена делится на  $s$ .

**5.2.** Несократимая дробь  $\frac{p}{q}$  является корнем многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами. Докажите, что свободный член этого многочлена делится на  $p$ , а старший коэффициент делится на  $q$ .

**5.3.** Найдите числа  $m$  и  $n$ , для которых многочлены  $(x^2 - 1)(x + m)$  и  $(x - 1)(x + 3)(x + n)$  равны.

**5.4.** Многочлен

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

с целыми коэффициентами принимает нечётное значение при  $x = 0$ . Докажите, что он принимает нечётные значения при всех чётных  $x$ .

**5.5.** Многочлен

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

с целыми коэффициентами принимает чётное значение при  $x = 1$ . Докажите, что он принимает чётные значения при всех нечётных  $x$ .

**5.6.** Выберите целое число  $a$  так, чтобы для некоторых целых  $b$  и  $c$  выполнялось равенство

$$(x - a)(x - 10) + 1 = (x + b)(x + c).$$

**5.7.** Найдите все  $a$ , для которых многочлены  $x^4 + ax^2 + 1$  и  $x^3 + ax + 1$  имеют общий корень.

### Коэффициенты многочленов

**5.8.** Многочлен  $P(x)$  при всех целых  $x$  принимает целые значения. Обязательно ли коэффициенты этого многочлена — целые числа?

**5.9.** Найдите сумму всех коэффициентов многочлена, который получается из выражения  $P(x) = (x^3 - x + 1)^{100}$  в результате раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых.

**5.10.** Найдите сумму всех коэффициентов многочлена  $(1 + x)^n$ .

**5.11.** Дан многочлен  $P(x) = (x^3 - x + 1)^{100}$ . Найдите сумму всех коэффициентов а) при чётных степенях; б) при нечётных степенях.

**5.12.** а) Многочлен  $(1 + x - y)^3$  приведите к стандартному виду. Чему равна сумма коэффициентов при всех одночленах?

б) Чему равна сумма коэффициентов при тех одночленах, которые не содержат  $y$ ?

в) Чему равна сумма коэффициентов при тех одночленах, которые содержат  $x$ ?

**5.13.** Докажите, что в произведении многочленов

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + x^{100})(1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100})$$

после раскрытия скобок и приведения подобных членов не остаётся членов, содержащих  $x$  в нечётной степени.

**5.14.** Значение многочлена  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  с целыми коэффициентами при любом целом  $x$  делится на 5. Докажите, что все коэффициенты многочлена делятся на 5.

**5.15.** Найдите коэффициенты многочлена  $(1 + x^5 + x^7)^{20}$  при  $x^{17}$  и  $x^{18}$ .

**5.16.** Докажите, что любая натуральная степень многочлена

$$x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2$$

имеет хотя бы один отрицательный коэффициент.

### Делимость многочленов

**5.17.** Докажите, что остаток от деления многочлена  $P(x)$  на многочлен  $x - c$  равен  $P(c)$  (*теорема Безу*).

**5.18.** Докажите, что число  $c$  является корнем многочлена  $P(x)$  тогда и только тогда, когда  $P(x)$  делится на  $x - c$  без остатка.

**5.19.** Докажите, что наибольший общий делитель многочленов  $x^n - 1$  и  $x^m - 1$  равен  $x^d - 1$ , где  $d = \text{НОД}(m, n)$ .

## Глава 6

# Формулы сокращённого умножения и другие тождества

### Основные факты и понятия

**Формула квадрата суммы:**  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

**Формула квадрата разности:**  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .

Часто бывает полезно записать многочлен  $ax^2 + bx + c$  степени 2 в виде  $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$ . Запись в таком виде называют *выделением полного квадрата*. Выделение полного квадрата показывает, в частности, что если  $a > 0$ , то  $ax^2 + bx + c \geq c - \frac{b^2}{4a}$ , а если  $a < 0$ , то  $ax^2 + bx + c \leq c - \frac{b^2}{4a}$ .

**Формула разности квадратов:**  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ .

**Формула куба суммы:**  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ .

**Формула куба разности:**  $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ .

**Формула разности кубов:**  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ .

**Формула суммы кубов:**  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ .

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Докажите, что для любых чисел  $x$  и  $y$  выражение  $x^2 - xy + \frac{2}{7}y^2$  положительно или равно нулю.

**Решение.** Выражение  $x^2 - xy$  входит в полный квадрат

$$\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 = x^2 - xy + \frac{1}{4}y^2.$$

Поэтому

$$x^2 - xy + \frac{2}{7}y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{2}{7}y^2 = \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{1}{28}y^2.$$

Выражение  $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{1}{28}y^2$  равно нулю при  $x = y = 0$ . При остальных значениях  $x$  и  $y$  оно положительно.

**Пример 2.** Докажите, что ни при каких целых  $x$  и  $y$  не может выполняться равенство  $x^2 - y^2 = 2018$ .

**Решение.** Предположим, что числа  $x$  и  $y$  целые и  $x^2 - y^2 = 2018$ . Тогда они либо оба чётные, либо оба нечётные, поэтому оба числа  $x + y$  и  $x - y$  чётные. Следовательно, число  $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$  делится на 4. Это противоречит тому, что число 2018 на 4 не делится.

**Пример 3.** Разделите многочлен  $x^n - y^n$  на многочлен  $x - y$ .

**Решение.** При делении многочлена  $x^n - y^n$  на многочлен  $x - y$  последовательно получаем:

$$\begin{aligned} x^n - y^n &= x^{n-1}(x - y) + x^{n-1}y - y^n, \\ x^{n-1}y - y^n &= x^{n-2}y(x - y) + x^{n-2}y^2 - y^n, \\ x^{n-2}y^2 - y^n &= x^{n-3}y(x - y) + x^{n-3}y^3 - y^n, \\ &\dots\dots\dots \\ xy^{n-1} - y^n &= y^{n-1}(x - y). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$x^n - y^n = (x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1})(x - y).$$

Ответ.  $x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}$ .

## Задачи для самостоятельного решения

### Выделение полного квадрата

6.1. Докажите, что равенство  $4x^2 + 9y^2 - 4x + 6y + 2 = 0$  выполняется только при  $x = \frac{1}{2}$  и  $y = -\frac{1}{3}$ .

6.2. Докажите, что если число  $x$  положительно, то  $x + \frac{1}{x} \geq 2$ .

6.3. Докажите, что  $x(1 - x) \leq \frac{1}{4}$ .

6.4. При каком  $x$  величина  $(x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2$  принимает наименьшее значение?

### Разность квадратов

6.5. Найдите все пары целых чисел  $x$  и  $y$ , для которых выполняется равенство  $x^2 - 8 = y^2 + 4y$ .

6.6. Найдите все пары целых чисел  $x$  и  $y$ , для которых выполняется равенство  $x^2 + 2x = y^2 + 6$ .

6.7. Докажите, что

$$(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)(3^8 + 1)(3^{16} + 1) = \frac{3^{32} - 1}{2}.$$

6.8. Докажите, что  $2^{20} - 1$  делится на 25.

**6.9.** Числа  $a$  и  $b$  целые. Докажите, что если  $a^2 + 9ab + b^2$  делится на 11, то  $a^2 - b^2$  тоже делится на 11.

**6.10.** Найдите все натуральные числа  $m$  и  $n$ , для которых  $2^m + 7 = n^2$ .

**6.11.** Подберите число  $c$  и многочлен  $P(x)$  так, чтобы выполнялось равенство  $(x + 1)P(x) + c(x^4 + 1) = 1$ .

**6.12.** Докажите, что если к произведению четырёх последовательных натуральных чисел прибавить 1, то получится квадрат натурального числа.

### Куб суммы и куб разности

**6.13.** Докажите, что сумма кубов трёх последовательных натуральных чисел делится на 9.

**6.14.** Разложите на множители  $(a + b)^3 - (a - 2b)^3$ .

**6.15.** Докажите равенство

$$x^3 = \left(x \frac{x^3 - 2y^3}{x^3 + y^3}\right)^3 + \left(y \frac{2x^3 - y^3}{x^3 + y^3}\right)^3 + y^3.$$

### Формула для $x^n - y^n$

При решении задач этого параграфа используется пример 3.

**6.16.** Докажите, что для любого многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами и для любых различных целых чисел  $a$  и  $b$  число  $P(a) - P(b)$  делится на  $a - b$ .

**6.17.** Докажите, что не существует многочлена  $P(x)$  с целыми коэффициентами, для которого  $P(6) = 5$  и  $P(14) = 9$ .

**6.18.** Докажите, что  $7^{2n} - 4^{2n}$  делится на 33.

**6.19.** Докажите, что  $11^{10} - 1$  делится на 100.

**6.20.** Докажите, что  $2^{1000} - 1$  делится на 25.

**6.21.** Докажите, что для любых натуральных  $n$  и  $r$  число

$$10^{6n+r} - 10^r$$

делится на 7.

**6.22.** Последнюю цифру  $6n$ -значного числа, делящегося на 7, перенесли в начало. Докажите, что полученное число тоже делится на 7.

**6.23.** Число  $\frac{2^n - 2}{n}$  целое. Докажите, что число  $\frac{2^{2^n - 1} - 2}{2^n - 1}$  тоже целое.

**6.24.** Докажите, что для любого натурального  $n > 2$  число  $n^{n-1} - 1$  делится на  $(n - 1)^2$ .

### Формула для $x^n + y^n$

6.25. При нечётном  $n$  разделите многочлен  $x^n + y^n$  на  $x + y$ .

6.26. Докажите, что  $43^{101} + 23^{101}$  делится на 66.

6.27. Докажите, что  $21^{10} - 1$  делится на 2200.

6.28. Докажите, что число  $2^9 + 2^{99}$  делится на 100.

6.29. Докажите, что при чётном  $n$  многочлен

$$x^{4n} + x^{4n-4} + \dots + x^8 + x^4 + 1$$

делится на многочлен

$$x^{2n} + x^{2n-2} + \dots + x^4 + x^2 + 1,$$

а при нечётном  $n$  не делится.

6.30. Раскройте скобки и приведите подобные члены:

$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + x^{100})(1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100}).$$

6.31. Докажите, что сумма  $1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n$  делится на  $n$  при нечётном  $n$ .

6.32. Докажите, что  $3^{2n} - 1$  делится на  $2^{n+2}$  и не делится на  $2^{n+3}$ .

### Сумма двух квадратов

6.33. Представьте выражение  $2x^2 + 2y^2$  в виде суммы двух квадратов.

6.34. Представьте выражение  $(x^2 + y^2)(u^2 + v^2)$  в виде суммы двух квадратов.

### Разные тождества

6.35. Докажите, что если  $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ , то  $x = y = z$ .

6.36. Докажите, что если числа  $x, y, z$  положительны и

$$x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz,$$

то  $x = y = z$ .

6.37. Выразите через  $a = x + y$  и  $b = xy$  суммы  $x^2 + y^2$ ,  $x^3 + y^3$ ,  $x^4 + y^4$ ,  $x^5 + y^5$ .

6.38. Существуют ли нечётные целые числа  $x, y$  и  $z$ , удовлетворяющие равенству  $(x + y)^2 + (x + z)^2 = (y + z)^2$ ?

6.39. Укажите многочлен, квадрат которого равен

$$\frac{(x+1)^4 + x^4 + 1}{2}.$$

6.40. Укажите многочлен, квадрат которого равен

$$(z - x)^2(x - y)^2 + (x - y)^2(y - z)^2 + (y - z)^2(z - x)^2.$$

## Глава 7

# Разложение многочленов на множители

### Основные факты и понятия

Многочлен с целыми коэффициентами делится на  $x - c$ , где число  $c$  целое, лишь в том случае, когда свободный член многочлена делится на  $c$  и  $c$  — корень многочлена (см. задачи 5.1 и 5.18). Поэтому при разложении многочлена на множители есть смысл проверить, не являются ли делители свободного члена корнями.

### Примеры решения задач

**Пример 1.** Разложите на множители многочлен  $x^3 + x^2 + 4$ .

**Решение.** Проверка делителей свободного члена показывает, что данный многочлен имеет корень  $-2$ , поэтому он делится на  $x + 2$ . Поделив  $x^3 + x^2 + 4$  на  $x + 2$ , получим  $x^2 - x + 2$ .

*Ответ.*  $(x + 2)(x^2 - x + 2)$ .

**Пример 2.** Разложите на множители многочлен  $xy - x - y + 1$ .

**Решение.** Многочлен обращается в нуль при  $x = 1$  и при  $y = 1$ , поэтому он должен делиться на  $(x - 1)(y - 1)$ . Простая проверка показывает, что

$$(x - 1)(y - 1) = xy - x - y + 1.$$

*Ответ.*  $(x - 1)(y - 1)$ .

### Задачи для самостоятельного решения

**Разложение на множители многочлена от одной переменной**

7.1. Разложите на множители  $x^3 + 2x - 3$ .

7.2. Разложите на множители  $2x^3 + x^2 + x - 1$ .

7.3. Разложите на множители  $x^3 - 6x^2 - x + 30$ .

7.4. Разложите на множители  $x^4 + x^2 + 1$ .

7.5. Разложите на множители  $x^4 + 4$ .

7.6. Разложите на множители  $4x^4 + 1$ .

7.7. Делится ли  $2^{62} + 1$  на  $2^{31} + 2^{16} + 1$ ?



**7.8.** Может ли при перемножении двух многочленов получиться многочлен, в котором меньше одночленов, чем в каждом из сомножителей?

**7.9.** Разложите на множители  $x^5 + x + 1$ .

**7.10.** Разложите на множители  $x^{10} + x^5 + 1$ .

**7.11.** Разложите на множители  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 12$ .

**7.12.** Разложите на множители  $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) + 15$ .

**Разложение на множители многочлена  
от нескольких переменных**

**7.13.** Разложите на множители  $(x - y + z)^2 - x^2 + y^2 - z^2$ .

**7.14.** Разложите на множители  $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$ .

**7.15.** Разложите на множители  $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$ .

**7.16.** Разложите на множители  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ .

**7.17.** Разложите на множители  $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$ .

**7.18.** Разложите на множители  $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ .

**7.19.** Разложите на множители  $a^4(b - c) + b^4(c - a) + c^4(a - b)$ .

**7.20.** Разложите на множители

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2.$$

## Глава 8

# Алгебраические дроби

## Основные факты и понятия

Алгебраическая дробь — это выражение вида  $\frac{f}{g}$ , где  $f$  и  $g$  — многочлены, причём многочлен  $g$  ненулевой.

## Примеры решения задач

**Пример 1.** Докажите, что равенства  $y = \frac{x+1}{x-1}$  и  $x = \frac{y+1}{y-1}$  эквивалентны, т. е. из первого равенства следует второе и наоборот.

**Решение.** Легко проверить, что если  $x \neq 1$  и  $y \neq 1$ , то оба равенства эквивалентны равенству  $(x-1)(y-1) = 2$ . Это равенство не может выполняться ни при  $x = 1$ , ни при  $y = 1$ .

**Пример 2.** Найдите сумму

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8} + \frac{16}{1+a^{16}}.$$

**Решение.** Применим равенство

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$$

сначала для  $x = a$ . В результате получим, что сумма первых двух дробей равна  $\frac{2}{1-a^2}$ . Теперь можно применить то же самое равенство для  $x = a^2$ . В результате получим, что сумма первых трёх дробей равна  $\frac{4}{1-a^4}$ . Затем последовательно применим равенство для  $x = a^4$ ,  $x = a^8$  и  $x = a^{16}$ .

Ответ.  $\frac{32}{1-a^{32}}$ .

## Преобразование дробей

В задачах 8.1—8.3 предполагается, что знаменатели всех рассматриваемых дробей отличны от нуля.

**8.1.** Докажите, что равенства  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  и  $\frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d}$  эквивалентны.

8.2. Докажите, что равенства  $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  и  $\frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d}$  эквивалентны.

8.3. Докажите, что если  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c}{d}$ , то  $\frac{c+d}{c-d} = \frac{a}{b}$ .

8.4. Числа  $a + \frac{b^2}{a}$  и  $b + \frac{a^2}{b}$  равны. Обязательно ли равны числа  $a$  и  $b$ ?

8.5. Докажите, что если  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ , то  $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \frac{1}{ab}$ .

8.6. Докажите, что если число  $a + \frac{1}{a}$  целое, то число  $a^2 + \frac{1}{a^2}$  тоже целое.

8.7. Докажите, что если число  $a + \frac{1}{a}$  целое, то число  $a^3 + \frac{1}{a^3}$  тоже целое.

8.8. Докажите, что

$$\left(\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b}\right)\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right) = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}.$$

8.9. Докажите, что если  $a > b > 0$ , то  $\frac{1+a}{1+a+a^2} < \frac{1+b}{1+b+b^2}$ .

8.10. Приведите к общему знаменателю дробь

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c}$$

и разложите на множители числитель полученной дроби.

8.11. Разделите дробь

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} - \frac{a^2}{c} - \frac{b^2}{a} - \frac{c^2}{b} \quad \text{на} \quad (a-b)(b-c)(c-a).$$

8.12. Разделите дробь

$$\frac{a^2(b-c)}{b+c} + \frac{b^2(c-a)}{c+a} + \frac{c^2(a-b)}{a+b} \quad \text{на} \quad \frac{a(b-c)}{b+c} + \frac{b(c-a)}{c+a} + \frac{c(a-b)}{a+b}.$$

8.13. Выразите  $\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$  через  $a = \frac{x}{x^2+x+1} \neq 0$ .

### Дробь — целое число

8.14. При каких целых  $n$  число  $\frac{n+9}{n+6}$  целое?

8.15. При каких натуральных  $n$  число  $\frac{19n+17}{7n+1}$  целое?

8.16. Найти все целые числа  $n$ , при которых дробь  $\frac{n^5+3}{n^2+1}$  является целым числом.

**Суммы и произведения дробей****8.17.** Найдите сумму

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(x+3)(x+4)} + \frac{1}{(x+4)(x+5)}.$$

**8.18.** Найдите сумму

$$\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-c)(b-a)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

**8.19.** Найдите сумму

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}.$$

**8.20.** Найдите сумму

$$\frac{bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab}{(c-a)(c-b)}.$$

**8.21.** Найдите сумму

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

**8.22.** Найдите сумму

$$c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

**8.23.** Вычислите произведение

$$\frac{1^2-1+1}{1^2+1+1} \cdot \frac{2^2-2+1}{2^2+2+1} \cdot \dots \cdot \frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}.$$

## Глава 9

# Линейные уравнения

### Основные факты и понятия

*Линейная функция* — это выражение вида  $y = kx + b$ , где  $k$  и  $b$  — некоторые числа. Число  $k$  называют *коэффициентом при неизвестном*.

*Линейное уравнение с одним неизвестным* — это уравнение вида  $kx + b = 0$ . Уравнение вида  $kx + b = 0$ , где  $k \neq 0$ , называют *уравнением первой степени*. Корень уравнения первой степени равен  $-\frac{b}{k}$ .

*Линейное уравнение с двумя неизвестными* — это уравнение вида  $ax + by + c = 0$ .

Система, состоящая из двух линейных уравнений

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0,$$

имеет единственное решение  $(x_0, y_0)$ , если  $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ . Чтобы найти  $x_0$ , можно умножить первое уравнение на  $-a_2$ , второе уравнение — на  $a_1$  и сложить новые уравнения. В результате получим

$$x_0 = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Чтобы найти  $y_0$ , умножим первое уравнение на  $b_2$ , второе уравнение — на  $-b_1$  и сложим новые уравнения. В результате получим

$$y_0 = \frac{-c_1b_2 + c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

*Ось координат* — это прямая  $l$ , на которой отмечена некоторая точка  $O$  (*начало координат*) и выбран один из двух лучей, на которые точка  $O$  разделяет прямую  $l$  (*положительная полуось*). При этом дополнительно предполагается, что выбрана некоторая единица измерения отрезков. Ось координат с началом  $O$  обычно обозначают  $Ox$ .

*Координата точки  $M$* , лежащей на оси координат  $Ox$ , — это число, равное длине отрезка  $OM$ , взятой со знаком плюс, если точка  $M$  лежит на положительной полуоси, и со знаком минус, если точка  $M$  не лежит на положительной полуоси. Координатой точки  $O$  считается число 0.

Если на плоскости проведены две взаимно перпендикулярные оси координат  $Ox$  и  $Oy$  с общим началом  $O$  и выбрана единица измерения отрезков, то говорят, что задана *прямоугольная система координат*. Оси  $Ox$  и  $Oy$  называют *осью абсцисс* и *осью ординат* соответственно, а точку  $O$  — *началом координат*. Прямоугольную систему координат обычно обозначают  $Oxy$ .

Проведём через точку  $M$  перпендикуляры  $MM_1$  и  $MM_2$  к осям  $Ox$  и  $Oy$ . Координаты точки  $M$  — это координаты точек  $M_1$  и  $M_2$  на осях  $Ox$  и  $Oy$ . Координату на оси  $Ox$  называют *абсциссой* точки  $M$ , а координату на оси  $Oy$  — *ординатой* точки  $M$ . Запись  $M(x; y)$  означает, что абсцисса точки  $M$  равна  $x$ , а её ордината равна  $y$ .

График линейной функции  $y = kx + b$  — это множество всех точек с координатами  $(x; y) = (x; kx + b)$ .

График линейной функции  $y = kx + b$  — прямая. Если  $k = 0$  и  $b = 0$ , то эта прямая — ось  $Ox$ . Если  $k = 0$  и  $b \neq 0$ , то эта прямая параллельна оси  $Ox$  и пересекает ось  $Oy$  в точке с координатами  $(0; b)$  (рис. 1). Если  $k \neq 0$ , то эта прямая пересекает оси  $Ox$  и  $Oy$  в точках с координатами  $(-\frac{b}{k}; 0)$  и  $(0; b)$ .

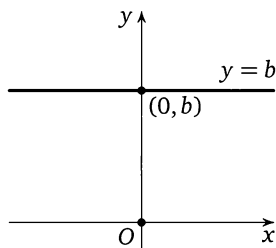


Рис. 1

Графики функций  $y = 2x$  и  $y = -\frac{2}{3}x + 2$  изображены на рисунках 2 и 3.

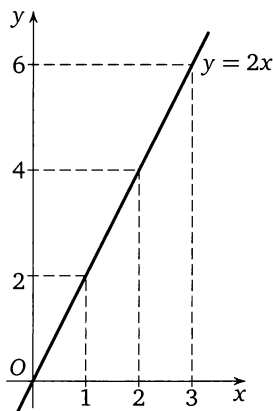


Рис. 2

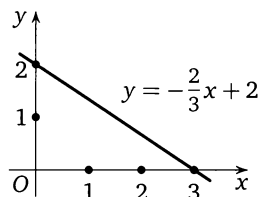


Рис. 3

## Задачи для самостоятельного решения

### График линейной функции

9.1. Графики функций  $y = kx + b$  и  $y = bx + k$  пересекаются. Найдите абсциссу точки пересечения.

9.2. Прямые  $y = kx + b$ ,  $y = 2kx + 2b$  и  $y = bx + k$  различны и пересекаются в одной точке. Какими могут быть её координаты?

9.3. В формулу линейной функции  $y = kx + b$  вместо букв  $k$  и  $b$  впишите числа от 1 до 20 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось 10 функций, графики которых проходят через одну и ту же точку.

### Решение задач с помощью систем линейных уравнений

9.4. Числа  $a$  и  $b$  различны, многочлен  $P(x)$  при делении на  $x - a$  и на  $x - b$  даёт в остатке  $A$  и  $B$  соответственно. Найдите остаток от деления многочлена  $P(x)$  на  $(x - a)(x - b)$ .

9.5. Найдите остаток от деления многочлена  $x^{100}$  на  $x^2 - x - 2$ .

### Линейные уравнения с несколькими неизвестными

9.6. Карандаш в 6 раз дешевле альбома, ручка в 2 раза дешевле альбома, альбом стоит на 20 рублей дороже карандаша и ручки вместе. Сколько стоят карандаш, ручка и альбом по отдельности?

9.7. Решите систему уравнений:  $x + y = a$ ,  $y + z = b$ ,  $z + x = c$ .

9.8. У кассира в кассе 30 монет: 10, 15 и 20 копеек на сумму 5 рублей. Докажите, что 20-копеечных монет у него больше, чем 10-копеечных.

9.9. На базаре продаются рыбки, большие и маленькие. Сегодня три больших и одна маленькая стоят вместе столько же, сколько пять больших вчера. А две большие и одна маленькая сегодня стоят вместе столько же, сколько три больших и одна маленькая вчера. Что дороже: одна большая и две маленьких сегодня или пять маленьких вчера?

## Глава 10

### Текстовые задачи

#### Основные факты и понятия

В формулировках текстовых задач иногда встречаются средние значения. Обычно имеется в виду *среднее арифметическое*  $n$  чисел  $a_1, \dots, a_n$ , которое равно  $\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$ .

Для движения с непостоянной скоростью *средняя скорость* на данном участке пути — это отношение  $\frac{S}{t}$ , где  $S$  — длина данного участка пути, а  $t$  — время, за которое он пройден.

#### Примеры решения задач

**Пример 1.** Три землекопа за три часа выкопали три ямы. Сколько ям выкопают шесть землекопов за пять часов?

**Решение.** За час три землекопа выкапывают одну яму, поэтому шесть землекопов за час выкапывают две ямы, а за пять часов — десять ям.

*Ответ.* 10 ям.

**Пример 2.** Мимо наблюдателя поезд проходит за 10 секунд, а мимо моста длиной 400 метров — за 30 секунд. Считается, что поезд проходит мимо моста начиная с того момента, когда локомотив въезжает на мост, и кончая моментом, когда последний вагон покидает мост. Определите длину и скорость поезда.

**Решение.** Во втором случае поезд проезжает на 400 м больше, т. е. на 400 м он затрачивает  $30 - 10 = 20$  секунд. Поэтому его скорость равна  $\frac{400}{20} = 20$  м/с. За 10 секунд он проходит расстояние, равное своей длине, поэтому длина поезда равна  $10 \cdot 20 = 200$  м.

*Ответ.* 200 м, 20 м/с = 72 км/ч.

**Пример 3.** Грузоподъёмность машины 10 т. Можно ли её полностью загрузить контейнерами весом 800 кг и 900 кг?

**Решение.** Несложно подобрать следующее представление числа 100 в виде  $8m + 9n$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа:

$$100 = 8 \cdot 8 + 9 \cdot 4.$$



Поэтому машину можно полностью загрузить восемью контейнерами весом 800 кг и четырьмя контейнерами весом 900 кг.

*Ответ.* Можно.

## **Задачи для самостоятельного решения**

### **Решение без уравнений**

**10.1.** 7 волков съедают 7 баранов за 7 дней. За сколько дней 9 волков съедят 9 баранов?

**10.2.** У Ани и Маши конфет поровну. Сколько конфет Аня должна дать Маше, чтобы у Маши стало на 10 конфет больше, чем у Ани.

**10.3.** Летела стая гусей, а навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуйте, сто гусей!» Вожак стаи отвечает ему: «Нет, нас не сто гусей! Вот если бы нас было столько, сколько есть, да ещё столько, да ещё полстолька, да ещё четверть столька, да ты, гусь, с нами, вот тогда нас было бы сто гусей, а так...» Сколько же гусей было в стае?

**10.4.** Летела стая гусей. На каждом озере садилась половина гусей и ещё полгуся. Остальные летели дальше. Все гуси сели на семи озёрах. Сколько всего гусей было в стае?

**10.5.** Телёнок весит столько же, сколько козлёнок вместе с поросёнком. А поросёнок вместе с телёнком — столько же, сколько ягнёнок вместе с козлёнком. Сколько весит поросёнок, если ягнёнок весит 30 кг?

**10.6.** Миша распилил бревно на 4 части за 12 минут. Сколько времени ему понадобится, чтобы распилить одно бревно на 5 частей и два бревна на 3 части каждое? (Все брёвна одинаковые.)

**10.7.** Петя решил склеить пазл и повесить на стену. За одну минуту он склеивал вместе два куска (начальных или ранее склеенных). В результате весь пазл соединился в одну цельную картину за 2 часа. За какое время собралась бы картина, если бы Петя склеивал вместе за минуту не по два, а по три куска?

**10.8.** Из пункта *A* в пункт *B*, расстояние между которыми 5 км, вышел пешеход. Из пункта *B* навстречу ему одновременно с ним выехал велосипедист, скорость которого в 2 раза больше скорости пешехода. Встретив пешехода, он повернул и поехал обратно в *B*. Доехав до *B*, велосипедист снова повернул и поехал навстречу пешеходу и т. д. Какой путь проедет велосипедист к тому моменту, когда пешеход придёт в *B*?

**10.9.** Коля и Вася за январь получили по 20 оценок, причём Коля получил пятёрок столько же, сколько Вася четвёрок, четвёрок столько же, сколько Вася троек, троек столько же, сколько Вася двоек, и двоек столько же, сколько Вася — пятёрок. При этом средний балл за январь у них одинаковый. Сколько двоек за январь получил Коля?

**10.10.** Саша и Ваня родились 19 марта. Каждый из них отмечает свой день рождения тортом со свечками по количеству исполнившихся ему лет. В тот год, когда они познакомились, у Саши на торте было столько же свечек, сколько у Вани сегодня. Известно, что суммарное количество свечек на четырёх тортах Вани и Саши (тогда и сегодня) равно 216. Сколько лет исполнилось Ване сегодня?

**10.11.** На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов могло бы выпить озеро за 1 день, а стадо из 37 слонов — за 5 дней. За сколько дней выпьет озеро один слон?

**10.12.** У Алёны есть мобильный телефон, заряда аккумулятора которого хватает на 6 часов разговора или 210 часов ожидания. Когда Алёна садилась в поезд, телефон был полностью заряжен, а когда она выходила из поезда, телефон разрядился. Сколько времени она ехала на поезде, если известно, что Алёна говорила по телефону ровно половину времени поездки?

**10.13.** Трава на всём лугу растёт одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров съели бы её за 24 дня, 30 коров — за 60 дней. Сколько коров съели бы её за 96 дней?

**10.14.** Артемон подарил Мальвине букет из аленьких цветочков и чёрных роз. У каждой чёрной розы 4 пестика и 4 тычинки, а на стебле два листка. У каждого аленького цветочка 8 пестиков и 10 тычинок, а на стебле три листка. Листков в букете на 108 меньше, чем пестиков. Сколько тычинок в букете?

### Одно уравнение

**10.15.** У Ани и Маши конфет поровну. Сколько конфет Аня должна дать Маше, чтобы у Маши стало вдвое больше конфет, чем у Ани?

**10.16.** Хозяин обещал работнику за 30 дней 9 рублей и кафтан. Через три дня работник уволился и получил кафтан. Сколько стоил кафтан?

**10.17.** Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов А и В и встретились в 70 км от А. Продолжая дви-

гаться с теми же скоростями, они доехали до  $A$  и  $B$  и повернули обратно. Второй раз они встретились в 90 км от  $B$ . Найдите расстояние от  $A$  до  $B$ .

### Движения

**10.18.** Первую половину пути машина ехала со скоростью  $v_1$ , вторую — со скоростью  $v_2$ . Какова её средняя скорость?

**10.19.** Пароход шёл от Нижнего Новгорода до Астрахани 5 суток, а обратно — 7 суток. Сколько дней плывут плоты от Нижнего Новгорода до Астрахани?

**10.20.** Двигаясь по течению реки, катер проходит путь из  $A$  в  $B$  за  $a$  часов, против течения (из  $B$  в  $A$ ) — за  $b$  часов. За сколько времени он прошёл бы путь из  $A$  в  $B$ , если бы течения не было? (Скорость катера и течения постоянны.)

**10.21.** Два одинаковых катера, имеющих одинаковую скорость в стоячей воде, проходят по двум различным рекам одинаковое расстояние (по течению) и возвращаются обратно (против течения). В какой реке на эту поездку потребуется больше времени: в реке с быстрым течением или в реке с медленным течением?

**10.22.** Улитка двигалась так, что за каждый промежуток времени в одну минуту она проползала 1 м. Могла ли она двигаться неравномерно?

**10.23.** Турист шёл 3,5 часа, причём за каждый промежуток времени в один час он проходил ровно 5 км. Следует ли из этого, что его средняя скорость равна 5 км/ч?

**10.24.** Два пловца одновременно прыгнули с плывущего по реке плота и поплыли в разные стороны: первый — по течению, а второй — против течения. Через пять минут они развернулись и вскоре вновь оказались на плоту. Кто из них вернулся раньше? (Каждый из пловцов плывёт с постоянной собственной скоростью.)

**10.25.** В шесть часов утра в понедельник гусеница начала вползать на дерево высотой в 12 м. За день (до 18 ч) она поднималась на 4 м, а за ночь спускалась на 3 м. Когда она достигнет вершины?

**10.26.** Отец и сын катаются на коньках по кругу. Время от времени отец обгоняет сына. После того как сын переменял направление своего движения на противоположное, они стали встречаться в 5 раз чаще. Во сколько раз отец бежит быстрее сына?

### Погрузка и упаковка

**10.27.** В коробку одного вида можно упаковать 5 деталей, в коробку другого вида 8 деталей. Сколько коробок каждого вида понадобится, чтобы упаковать 69 деталей?

**10.28.** Можно ли увезти из каменоломни 50 камней, массы которых 370 кг, 372 кг, 374 кг, ..., 468 кг, на семи трёхтонках?

**10.29.** В карьере заготовлено 120 гранитных плит по 7 т и 80 плит по 9 т. На железнодорожную платформу можно погрузить до 40 т. Какое наименьшее число платформ потребуется, чтобы вывезти все плиты?

**10.30.** Груз весом 13,5 т упакован в ящики так, что вес каждого ящика не превосходит 350 кг. Докажите, что этот груз можно перевезти на 11 полутонках.

## Глава 11

### Дополнительные задачи

#### Задачи для самостоятельного решения

##### Задачи на разные темы

**11.1.** Сколько звеньев цепочки, состоящей из семи звеньев, нужно расковать, чтобы при необходимости можно было отдать любое число звеньев от одного до семи.

**11.2.** Кузнец соединил 5 цепей, по 3 звена в каждой, в одну цепь, расковав 4 звена и снова их заковав. Можно ли это сделать, расковав меньше четырёх звеньев?

**11.3.** Сколько карандашей надо взять в темноте из коробки с четырьмя красными и двумя синими карандашами, чтобы было взято не менее двух красных карандашей и не менее одного синего?

**11.4.** Сколько карандашей надо взять в темноте из коробки с семью красными и пятью синими карандашами, чтобы было взято не менее двух красных карандашей и не менее трёх синих?

**11.5.** Саша, Маша и Наташа собирали грибы. Саша собрал в 3 раза больше грибов, чем Маша, и в 5 раз больше, чем Наташа. Сколько грибов они собрали, если в их общей корзине меньше 40 грибов?

**11.6.** Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причём никакие двое не собрали одинакового количества грибов. Докажите, что среди них есть трое грибников, собравших вместе не менее 50 грибов.

**11.7.** В классе провели контрольную работу. Оказалось, что у мальчиков средняя оценка 4; у девочек 3,25; у всех вместе 3,6. Сколько мальчиков и сколько девочек писало контрольную работу, если известно, что в классе больше 30 и меньше 50 человек?

**11.8.** Приведите пример десятизначного числа, первая цифра которого — количество нулей в этом числе, вторая — количество единиц, ..., десятая — количество девяток.

**11.9.** В таблице размером  $10 \times 10$  записано 100 чисел. В каждой строке выбрано наименьшее число и среди них выбрано наибольшее число  $A$ . В каждом столбце выбрано наибольшее число и среди них выбрано наименьшее число  $B$ . Может ли оказаться, что  $A > B$ ?

### Переправы

**11.10.** Двое мальчиков плавали в лодке. К берегу подошёл отряд солдат. Лодка так мала, что на ней могут переправиться или только двое мальчиков или только один солдат. Как солдатам переправиться через реку?

**11.11.** Перевозчику нужно переправить через реку волка, козу и капусту. В лодку он может взять или только волка, или только козу, или только капусту. Кроме того, капусту нельзя оставить без присмотра вместе с козой, а козу — с волком. Как осуществить переправу?

**11.12.** Три солдата и три разбойника должны переправиться через реку. Они нашли лодку, в которую помещаются только два человека. На одном берегу солдаты не могут оставаться, если их меньше, чем разбойников. Как им всем переправиться через реку?

**11.13.** Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама за 2, сын за 5, бабушка за 10. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если по мосту идут двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Идти по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя, перебрасывать фонарик через реку тоже нельзя.)

### Переливания

**11.14.** Есть полный кувшин молока ёмкостью 8 литров и два пустых кувшина в 5 литров и 3 литра. Как разделить молоко на две равные части?

**11.15.** Есть полный кувшин молока ёмкостью 12 литров и два пустых кувшина в 8 литров и 5 литров. Как разделить молоко на две равные части?

**11.16.** Есть четыре бочки. В первую входит 24 ведра, во вторую 13, в третью 11, в четвёртую 5. Первая бочка наполнена водой, а остальные бочки пустые. Как разделить воду на три равные части?

**11.17.** В бочке не менее 13 вёдер бензина. Как отлить 8 вёдер с помощью девятиведёрной и пятиведёрной бочек?

# ОТВЕТЫ

## Глава 1. Дроби и проценты

- 1.1.  $\frac{12345}{54321} < \frac{12346}{54322}$ . 1.4.  $\frac{12}{19}$ . 1.5. За 5 минут. 1.7.  $\frac{3}{7}$ . 1.8. Могло.  
1.9.  $0,(1) = \frac{1}{9}$ ,  $0,(01) = \frac{1}{99}$  и  $0,(001) = \frac{1}{999}$ . 1.10.  $\frac{237}{999}$ . 1.14. 9.  
1.15. Эти числа равны. 1.16. В третьем. 1.17. Понижилась на 4%.  
1.18. На 20%. 1.19. 17. 1.20. 7. 1.21. Под 0,5% в месяц.  
1.22.  $111\frac{1}{9}$  кг. 1.23. На 55%. 1.24. 23. 1.25. Поровну. 1.26. 3:1.  
1.27. Доля голубоглазых среди блондинов. 1.28.  $\frac{99}{100}$ . 1.29.  $\frac{50}{309}$ .  
1.30.  $\frac{49}{200}$ . 1.31.  $\frac{8}{15}$ . 1.32.  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ . 1.33.  $\frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ .  
1.34.  $\frac{1}{7} + \frac{1}{42}$ ,  $\frac{1}{8} + \frac{1}{24}$ ,  $\frac{1}{9} + \frac{1}{18}$ ,  $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ .  
1.35.  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$ . 1.36. Двумя способами.  
1.37. Четырьмя способами. 1.38. Семью способами.  
1.39.  $\frac{1}{4} + \frac{1}{8}$  или  $\frac{1}{3} + \frac{1}{24}$ . 1.41. Только 13.

## Глава 2. Степень с натуральным показателем

- 2.1. 1001. 2.3. 7. 2.4. Могут. 2.7. 31 цифра.  
2.8. Первое число больше. 2.9.  $n = m = 1$  или  $n = 2, m = 4$ .  
2.12. 6 и 4. 2.13. 6, 2, 4 и 8. 2.14. 6, 8, 4 и 2. 2.15. 1, 3, 9 и 7.  
2.16. 1, 7, 9 и 3. 2.17. а) 8; б) 7; в) 9; г) 6. 2.21.  $10^{10^{10}} > (10^{10})^{10}$ .  
2.22. Числа равны. 2.23.  $2^{(2^{2^2})} > ((2^2)^2)^2$ . 2.24. 3. 2.25. Можно.  
2.26. Для любых.

## Глава 3. Делимость чисел

- 3.7, 3.8. Может. 3.27—3.30. Нет. 3.31. Делится. 3.32.  $n = 300$ .

## Глава 4. Разложение на простые множители и деление с остатком

- 4.4. Нет. 4.5. На 24 нуля. 4.6.  $2^n$ . 4.7. Нет. 4.9—4.11 1.  
4.16. 83. 4.17. 119. 4.19, 4.20. 1. 4.22.  $6a + 25b$ .  
4.23.  $126a + 175b + 120c$ . 4.24. 523 152 или 523 656. 4.25. Да.  
4.27, 4.28, 4.30. Нет. 4.33. 0 и 1. 4.35. Может. 4.37. 0, 1 и 4.  
4.43.  $\underbrace{1 \dots 1}_{\text{НОД}(m,n)}$ . 4.46. При  $\text{НОД}(m, c) = 1$ .

## Глава 5. Многочлены

- 5.3.  $m=3, n=1$ . 5.6. 8 или 12. 5.7.  $a=-2$ .  
5.8. Нет, не обязательно. 5.9. 1. 5.10.  $2^n$ . 5.11. а) 1; б) 0.  
5.12. а) 1; б) 8; в) 1. 5.15. 3420 и 0.

## Глава 6. Формулы сокращённого умножения и другие тождества

- 6.4. При  $x = \frac{a+b+c}{3}$ . 6.5.  $(2, -2), (-2, -2)$ . 6.6.  $(3, \pm 3), (-5, \pm 3)$ .  
6.10.  $m=1, n=3$ . 6.11.  $c = \frac{1}{2}$  и  $P(x) = -\frac{1}{2}(x^3 - x^2 - x + 1)$ .  
6.14.  $9b(a^2 - ab + b^2)$ . 6.25.  $x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \dots - xy^{n-2} + y^{n-1}$ .  
6.30.  $1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{198} + x^{200}$ . 6.33.  $(x-y)^2 + (x+y)^2$ .  
6.34.  $(xu - yv)^2 + (xv + yu)^2$ .  
6.37.  $x^2 + y^2 = a^2 - 2b, x^3 + y^3 = a^3 - 3ab, x^4 + y^4 = a^4 - 4a^2b + 2b^2,$   
 $x^5 + y^5 = a^5 - 5a^3b + 5ab^2$ .  
6.38. Нет. 6.39.  $x^2 + x + 1$ . 6.40.  $(z-x)^2 + (x-y)^2 + (z-x)(x-y)$ .

## Глава 7. Разложение многочленов на множители

- 7.1.  $(x-1)(x^2 + x + 3)$ . 7.2.  $(2x-1)(x^2 + x + 1)$ .  
7.3.  $(x+2)(x-3)(x-5)$ . 7.4.  $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$ .  
7.5.  $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$ . 7.6.  $(2x^2 + 2x + 1)(2x^2 - 2x + 1)$ .  
7.7. Да, делится. 7.8. Да. 7.9.  $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$ .  
7.10.  $(x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1)$ .  
7.11.  $(x^2 - 2x + 3)(x^2 + 3x + 4)$ . 7.12.  $(x+2)(x+6)(x^2 + 8x + 10)$ .  
7.13.  $2(x-y)(z-y)$ . 7.14.  $3(x+y)(y+z)(z+x)$ .  
7.15.  $3(x-y)(y-z)(z-x)$ .  
7.16.  $(x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ . 7.17.  $(b-a)(a-c)(c-b)$ .  
7.18.  $(a+b+c)(b-a)(a-c)(c-b)$ .  
7.19.  $(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)(b-a)(a-c)(c-b)$ .  
7.20.  $(a-b-c)(a-b+c)(a+b-c)(a+b+c)$ .

## Глава 8. Алгебраические дроби

- 8.4. Обязательно. 8.10.  $(a+b)(b+c)(c+a)$ . 8.11.  $\frac{a+b+c}{abc}$ .  
8.12.  $a+b+c$ . 8.13.  $\frac{a^2}{1-2a}$ . 8.14. При  $n = -9, -7, -5$  или  $-3$ .  
8.15. При  $n = 7$ . 8.16.  $n = -3; -1; 0; 1; 2$ . 8.17.  $\frac{5}{x(x+5)}$ . 8.18. 0.  
8.19. 0. 8.20. 1. 8.21. 1. 8.22.  $x$ . 8.23.  $\frac{1}{n^2 + n + 1}$ .



### Глава 9. Линейные уравнения

9.1. 1. 9.2. (1; 0).

9.3. Например,

$$y = 1x + 20, \quad y = 2x + 19, \quad \dots, \quad y = 10x + 11$$

или

$$y = 1x + 2, \quad y = 3x + 4, \quad \dots, \quad y = 19x + 20.$$

9.4.  $\frac{A-B}{a-b}x + \frac{aB-bA}{a-b}$ . 9.5.  $\frac{2^{100}-1}{3}x + \frac{2^{100}+2}{3}$ .

9.6. 10, 30 и 60 рублей. 9.7.  $x = \frac{a-b+c}{2}$ ,  $y = \frac{a+b-c}{2}$ ,  $z = \frac{-a+b+c}{2}$ .

9.9. Рыбки стоят одинаково.

### Глава 10. Текстовые задачи

10.1. За 7 дней. 10.2. 5 конфет. 10.3. 36. 10.4. 127. 10.5. 15 кг.

10.6. 32 минуты. 10.7. За час. 10.8. 10 км. 10.9. 5 двоек.

10.10. 54 года. 10.11. За 365 дней. 10.12. 11 часов 40 минут.

10.13. 20 коров. 10.14. 216 тычинок. 10.15.  $\frac{1}{3}$ . 10.16. 1 рубль.

10.17. 120 км. 10.18.  $\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2}$ . 10.19. 35. 10.20. За  $\frac{2ab}{a+b}$  часов.

10.21. В реке с быстрым течением. 10.22. Могла.

10.23. Нет, не следует. 10.24. Пловцы вернулись одновременно.

10.25. Во вторник следующей недели в 18 ч.

10.26. В 1,5 раза. 10.27. 1 и 8 или 9 и 3. 10.28. Нельзя. 10.29. 40.

### Глава 11. Дополнительные задачи

11.1. Одно. 11.2. Можно. 11.3. 5. 11.4. 10. 11.5. 23.

11.7. 21 мальчик и 24 девочки. 11.8. 6 210 001 000.

11.9. Нет, не может.

# Указания

## Дроби и проценты

1.1. Воспользуйтесь тем, что  $\frac{m+1}{n+1} - \frac{m}{n} = \frac{n-m}{n(n+1)}$ .

1.2. Каждое яблоко можно разрезать на половину, треть и  $\frac{1}{6}$ .

1.3. Кусок в  $\frac{1}{2}$  м составляет три четверти от всего шнура:  $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$ . Поэтому от шнура нужно отрезать четверть (два раза сложив его пополам).

1.4. Пусть число супружеских пар на острове равно  $N$ . По условию на острове  $\frac{5N}{3}$  женщин и  $\frac{3N}{2}$  мужчин. Всего на острове

$$\frac{5N}{3} + \frac{3N}{2} = \frac{19N}{6} \text{ жителей,}$$

а в браке состоит  $2N$ . Искомая доля равна  $2 : \frac{19}{6} = \frac{12}{19}$ .

1.5. Замените время в секундах временем в минутах: 6 минут 40 секунд замените на  $6\frac{2}{3} = \frac{20}{3}$ , а 13 минут 20 секунд — на  $\frac{40}{3}$ . За одну минуту холодной водой заполнится  $\frac{3}{20}$  ванны, горячей  $\frac{1}{8}$  ванны, а вытечет  $\frac{3}{40}$  ванны. Поэтому за одну минуту наполнится  $\frac{3}{20} + \frac{1}{8} - \frac{3}{40} = \frac{1}{5}$  ванны.

1.6. В каждом походе мальчиков было меньше  $\frac{2}{3}$  девочек, участвовавших в походе. Поэтому в каждом походе мальчиков было меньше  $\frac{2}{3}$  всех девочек, учащихся в классе. Каждый мальчик был хотя бы в одном походе, поэтому мальчиков в классе меньше  $\frac{4}{3}$  всех девочек, т. е. мальчиков меньше  $\frac{4}{7}$  общего числа учеников.

1.7. Пусть  $n$  — знаменатель искомой дроби. Между числами  $0,4n$  и  $0,5n$  должно быть целое число. Наименьшее такое  $n$  равно 7.

1.8. Неравенство  $\frac{m}{n} < \frac{m+1}{n+10}$  выполняется, когда  $10m < n$ . Например,  $\frac{1}{11} < \frac{2}{21}$ .

1.9. Деление с остатком, описанное в решении примера 2, для этих чисел устроено особенно просто:  $10 = 1 \cdot 9 + 1$ ,  $100 = 1 \cdot 99 + 1$  и  $1000 = 1 \cdot 999 + 1$ .

**1.10.** Воспользуйтесь задачей 1.9 и тем, что  $0,(237) = 237 \cdot 0,(001)$ .

**1.11.** Если смешанно периодическую десятичную дробь умножить на 10 в подходящей степени и вычесть целое число, то можно получить чисто периодическую дробь. Для любой чисто периодической десятичной дроби можно применить тот же подход, что и при решении задачи 1.10. Обратите внимание, что нет необходимости выбирать наименьший период. Например, периодам (1), (11) и (111) соответствуют равные дроби  $\frac{1}{9} = \frac{11}{99} = \frac{111}{999}$ .

**1.12.** Если  $\frac{1}{m} = 0,(p)$ , где  $p$  — набор из  $m$  цифр, то  $\frac{1}{m} = \frac{p}{999\dots 99}$ , где знаменатель — число, состоящее из  $n$  девяток (см. задачу 1.10). Поэтому число  $999\dots 99 = mp$  делится на  $m$ .

**1.13.** Правильная дробь  $\frac{p}{q}$  представляется в виде десятичной дроби следующим образом. Число  $10p$  делим на  $q$  с остатком:  $10p = d_1q + r_1$ , где  $d_1$  и  $r_1$  — целые числа, причём  $0 \leq r_1 < q$ . Затем делим  $10r_1$  на  $q$  с остатком:  $10r_1 = d_2q + r_2$ , и т.д.:  $10r_2 = d_3q + r_3$ ,  $10r_3 = d_4q + r_4$ , ... Тогда  $\frac{p}{q} = 0,d_1d_2d_3d_4\dots$ . Остатки  $r_1, r_2, r_3, \dots$  принимают одно из  $q$  значений, поэтому рано или поздно какие-то два остатка совпадут:  $r_i = r_{i+n}$ . Но тогда  $d_{i+n+1} = d_{i+1}$ ,  $d_{i+n+2} = d_{i+2}$ , ... Поэтому дробь периодическая.

**1.14.** Требуемое равенство можно записать в виде  $\frac{\overline{d25}}{999} = \frac{n}{810}$ , т.е.  $n = \overline{d25} \cdot \frac{30}{37}$ . Число  $\overline{d25}$  нечётно и делится на  $5 \cdot 37 = 185$ . Число  $3 \cdot 185 = 555$  не подходит, число  $5 \cdot 185 = 925$  подходит, а число  $7 \cdot 185 = 1295$  уже слишком велико.

**1.15.**  $5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$ .

**1.16.** В первом и во втором магазинах цену умножили на  $0,6 \times 0,95 = 0,57$ , а в третьем — на  $0,55$ .

**1.17.** Цена увеличилась на  $1,2 \cdot 0,8 = 0,96$ .

**1.18.** Повышение цен на 25 % означает, что новая цена товара равна старой, умноженной на  $\frac{5}{4}$ . Поэтому на прежнюю зарплату можно купить  $1 : \frac{5}{4} = \frac{4}{5}$  от старого количества товаров, т.е. на 20 % меньше.

**1.19.** Одна девочка составляет менее 6 %, поэтому всего в кружке больше  $100 : 6 = 16,66\dots$  человек.

**1.20.** См. задачу 1.7 и указание к ней.

**1.21.** Пусть в банке начисляется 0,5 % в месяц. Если бы эти проценты каждый месяц начислялись от суммы, положенной в банк в начале года, то в конце года (через 12 месяцев) сумма увеличи-

лась бы как раз на 6 %. Но начиная со второго месяца 0,5 % будет начисляться от большей суммы. Поэтому в конце года начисление окажется больше 6 %.

**1.22.** Оставшиеся 100 кг составляют 90 %, т. е.  $\frac{9}{10}$  от веса зерна. Поэтому вначале вес зерна был  $100 \cdot \frac{10}{9} = 111\frac{1}{9}$  кг.

**1.23.** Если Маше удвоят стипендию, семейный доход возрастёт на размер этой стипендии. Поэтому Машин стипендия составляет 5 % общего дохода. Аналогично мамина зарплата составляет 15 %, а папина — 25 %. Оставшиеся 55 % приходятся на дедушкину пенсию. Поэтому если ему удвоят пенсию, доход всей семьи возрастёт на 55 %.

**1.24.** Пусть в забеге участвовало  $n$  лыжников, причём  $k$  из них не выполнили норму. По условию  $3,5 \leq \frac{100k}{n} \leq 4,5$ . Значит,  $k \geq 1$  и  $n \geq \frac{100k}{4,5} > 22,2k \geq 22,2$ . Поэтому  $n \geq 23$ . Если в забеге участвовало 23 лыжника, из которых норму не выполнил только один, то требуемое условие выполняется.

**1.25.** Объём жидкости не изменился, поэтому после второго переливания в стакане с молоком будет ровно столько чая, сколько оттуда было взято молока. Следовательно, чая в молоке столько же, сколько молока в чае.

**1.26.** Пусть взято  $a$  частей 6-процентного раствора и  $b$  частей 30-процентного раствора. Тогда должно выполняться равенство

$$a \frac{6}{100} + b \frac{30}{100} = (a + b) \frac{12}{100}.$$

**1.27.** Пусть  $n$  — число всех людей,  $g$  — число голубоглазых,  $b$  — число блондинов,  $a$  — число голубоглазых блондинов. По условию  $\frac{a}{g} > \frac{b}{n}$ . Умножив это неравенство на  $\frac{g}{b}$ , получим  $\frac{a}{b} > \frac{g}{n}$ .

**1.28.** Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \dots, \quad \frac{1}{98 \cdot 99} = \frac{1}{98} - \frac{1}{99},$$

$$\frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{1}{99} - \frac{1}{100}.$$

**1.29.** Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{10} - \frac{1}{14}, \quad \dots, \quad \frac{1}{101 \cdot 103} = \frac{1}{202} - \frac{1}{206}.$$

**1.30.** Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}, \quad \frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12}, \quad \dots, \quad \frac{1}{98 \cdot 100} = \frac{1}{196} - \frac{1}{200}.$$

**1.31.** Из равенств

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}, \quad 1 - \frac{1}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3}, \quad 1 - \frac{1}{16} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4}, \quad \dots, \quad 1 - \frac{1}{225} = \frac{14}{15} \cdot \frac{16}{15}$$

следует, что искомое произведение равно  $\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{15}$ .

**1.32.** Из равенства  $\frac{1}{2} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  следует, что

$$pq = 2(p+q) \quad \text{и} \quad p = \frac{2q}{q-2} = 2 + \frac{4}{q-2}.$$

При  $q = 3$  получаем  $p = 6$ .

**1.33.** Равенство  $\frac{1}{3} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$  можно записать в виде  $p = 3 + \frac{9}{q-3}$ .

При  $q = 4$  получаем  $p = 12$ .

**1.36.** Пусть  $m > n$  и  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{25}$ . Тогда  $m = \frac{25n}{n-25} = 25 + \frac{625}{n-25}$ . Если  $n - 25 = 1$ , то  $m = 650$ . Если  $n - 25 = 5$ , то  $m = 150$ . Если же  $n - 25 = 25$ , то  $m = n$ .

**1.37.** Пусть  $m > n$  и  $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$ . Тогда  $m = \frac{6n}{n-6} = 6 + \frac{36}{n-6}$ .

Если  $n - 6 = 1$ , то  $m = 42$ . Если  $n - 6 = 2$ , то  $m = 24$ .

Если  $n - 6 = 3$ , то  $m = 18$ . Если  $n - 6 = 4$ , то  $m = 15$ .

Если же  $n - 6 = 6$ , то  $m = n$ .

**1.38.** Как и при решении задач 1.36 и 1.37, получаем, что количество представлений равно количеству делителей числа  $12^2 = 144$ , которые меньше 12. Делителям 1, 2, 3, 4, 6, 8 и 9 соответствуют представления

$$\frac{1}{13} + \frac{1}{156}, \quad \frac{1}{14} + \frac{1}{84}, \quad \frac{1}{15} + \frac{1}{60}, \quad \frac{1}{16} + \frac{1}{48}, \quad \frac{1}{18} + \frac{1}{38}, \quad \frac{1}{20} + \frac{1}{30}, \quad \frac{1}{21} + \frac{1}{28}.$$

**1.40.** Пусть  $\frac{m}{n}$  — правильная дробь,  $m > 1$ . Запишем  $n$  в виде  $n = qt - r$ , где  $0 \leq r < m$ . Тогда  $\frac{m}{n} = \frac{qm}{qn} = \frac{n+r}{qn} = \frac{1}{q} + \frac{r}{qn}$ . При  $r = 0$  получаем требуемое представление. Если же  $r \neq 0$ , то повторяем то же самое для правильной дроби  $\frac{r}{qn}$ , и т. д. В полученном представлении дроби  $\frac{m}{n}$  нет одинаковых слагаемых, поскольку  $\frac{r}{qn} < \frac{m}{qn} < \frac{n}{qn} = \frac{1}{q}$ .

**1.41.** Из равенства  $8(5l + 6) - 5(8l + 7) = 13$  следует, что общий делитель числителя и знаменателя данной дроби является делителем числа 13. При  $l = 4$  получаем сократимую дробь  $\frac{26}{39}$ .

**1.42.** Если  $al + b = km$  и  $cl + d = kn$ , то

$$ad - bc = (ad + acl) - (bc + acl) = k(an - cm).$$

## Глава 2. Степень с натуральным показателем

**2.1.** В десятичной записи числа  $10^1$  две цифры, числа  $10^2$  — три цифры, и т. д.

**2.2.** Воспользуйтесь тем, что  $a^n < a \cdot a^n = a^{n+1}$ .

**2.3.**  $2^{20} = (2^{10})^2 = 1024^2 = 1\,048\,576$ .

**2.4.**  $2^{10} = 1024$ ,  $2^{11} = 2048$ ,  $2^{12} = 4096$  и  $2^{13} = 8192$ .

**2.5.** Пусть  $2a$  — наименьшая  $n$ -значная степень двойки. Тогда  $a < 10^{n-1} < 2a$ , поэтому  $10^{n-1} < 2a < 4a < 8a < 8 \cdot 10^{n-1} < 10^n$ .

**2.6.** Если  $a > 10^{n-1}$ , то  $2^4 a = 16a > 10^n$ .

**2.7.**  $2^{100} = (1024)^{10} = 10^{30} (1,024)^{10}$ . Проверим, что  $(1,024)^{10} < 10$ .

*Первый способ.*

$$(1,024)^5 < (1,024)^6 = (1,048576)^3 < (1,05)^3 = 1,157625 < 1,2,$$

поэтому  $(1,024)^{10} < (1,2)^2 = 1,44$ .

*Второй способ.* Для любого натурального  $n$  выполняется неравенство  $\frac{n+1}{n} < \frac{n}{n-1}$ , поэтому

$$\frac{1024^{10}}{1000^{10}} < \left(\frac{1025}{1000}\right)^{10} = \left(\frac{41}{40}\right)^{10} < \frac{41}{40} \cdot \frac{40}{39} \cdot \frac{39}{38} \cdot \dots \cdot \frac{32}{31} = \frac{41}{31} < 10.$$

**2.8.** Воспользуйтесь тем, что

$$(10^{10} + 1)(10^{12} + 1) - (10^{11} + 1)^2 = 10^{10}(101 - 20).$$

**2.9.** Если одно из чисел  $m$  и  $n$  равно 1, то и другое тоже равно 1. В дальнейшем будем считать, что оба числа больше 1. Набор простых делителей у чисел  $m$  и  $n$  один и тот же. Кроме того,  $(nm)^{n+m} = n^{12}m^3 < (nm)^{12}$ , поэтому  $n + m < 12$ . Из этих двух условий следует, что числа равны 2 и 4 или 2 и 8. Проверка показывает, что подходят только числа  $n = 2$ ,  $m = 4$ .

**2.10.** Можно считать, что  $n \geq m$ . Тогда  $n^{n-m} \geq m^{n-m}$ . Умножьте обе части этого неравенства на  $n^m m^m$ .

**2.11.** Воспользовавшись задачей 2.10, получите неравенства

$$a^a b^b \geq a^b b^a, \quad b^b c^c \geq b^c c^b, \quad c^c a^a \geq c^a a^c$$

и перемножьте их.

**2.12.** Воспользуйтесь тем, что  $4^{2n} = (4^2)^n = 16^n$  и  $4^{2n+1} = 4 \cdot 16^{2n}$ .

**2.13.** Воспользуйтесь тем, что  $2^4 = 16$ .

**2.14.** Воспользуйтесь тем, что последняя цифра числа  $8^4 = 2^{12}$  равна 6.

2.15. Воспользуйтесь тем, что  $3^2 = 9$ ,  $3^3 = 27$  и  $3^4 = 81$ .

2.16. Воспользуйтесь тем, что  $7^2 = 49$ ,  $7^3 = 343$  и  $7^4 = 2401$ .

2.17. а)  $187 = 4n + 3$ ; б)  $115 = 4n + 3$ ; в)  $158 = 4n + 2$ ; г) последние цифры этих чисел 9 и 7.

2.18. Воспользуйтесь тем, что  $16^{11} = 32 \cdot 2^{39}$ .

2.19. Воспользуйтесь тем, что 111 делится на 37.

2.20. Это число чётно и делится на 9, поскольку оно равно

$$(10^{23} - 1) + (10^{19} - 1) - 180.$$

2.21. Ясно, что  $10^{10} > 100$ . Поэтому  $10^{10^{10}} > 10^{100} = (10^{10})^{10}$ .

2.22.  $2^4 = 4^2$ .

2.23.  $2^{(2^2)} = 2^{(2^4)} = 2^{16}$  и  $((2^2)^2)^2 = (4^2)^2 = (2^4)^2 = 2^8$ .

2.24. Последняя цифра числа  $7^7 = 7^{4+3}$  равна 3. Поэтому последняя цифра числа  $(7^7)^7$  такая же, как у числа  $3^7 = 3^{4+3}$ , т. е. она равна 7. У числа  $((7^7)^7)^7$  последняя цифра такая же, как у числа  $7^7$ , т. е. она равна 3.

2.25. Если в равенстве  $(a^b)^c = a^{bc} = (a^c)^b$  положить  $a = 7$ ,  $b = 7$  и  $c = 7^7$ , то получим  $(7^7)^{(7^7)} = 7^{7 \cdot 7^7} = (7^{(7^7)})^7$ .

2.26. Оба числа равны  $a^{b \cdot c^d}$ .

### Глава 3. Делимость чисел

3.1. Воспользуйтесь примером 1 и тем, что  $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$ .

3.2. Воспользуйтесь указанием к задаче 3.1 и тем, что  $n - 1$  и  $n + 1$  — последовательные чётные числа; одно из них делится на 2, а другое делится на 4.

3.3. Воспользуйтесь задачей 3.1 и тем, что  $n^3 + 2n = (n^3 - n) + 3n$ .

3.4. Одно из этих чисел делится на 3 и одно делится на 5. Среди них есть также два чётных числа, одно из которых делится на 4.

3.5. Воспользуйтесь задачей 3.4 и тем, что

$$n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^2 - 1)(n^2 - 4) = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2).$$

3.6. Воспользуйтесь задачей 3.5 и тем, что

$$n^5 + 4n = (n^5 - 5n^3 + 4n) + 5n^3.$$

3.7. Например,  $6 = 1 + 2 + 3$ .

3.8. Возьмите три числа из задачи 3.7 и добавьте к ним их сумму: 1, 2, 3, 6. Затем добавьте сумму полученных чисел и т. д. до 1, 2, 3, 6, 12, 24.

**3.9.** Числа 1, 11, 111, 1111 и 11111 не делятся на 7, а число 111 111 делится.

**3.10.** Воспользуйтесь задачей 3.9 и тем, что число 111 111 делится на 13.

**3.11.** Число делится на  $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ .

**3.12.** При делении столбиком из числа, состоящего из  $n$  единиц, поочерёдно убирается по  $m$  единиц.

**3.13.** Если  $d$  — делитель числа  $n$ , то  $\frac{n}{d}$  — тоже делитель этого числа. Предположим, что делители числа  $n$  разбиваются на пары различных чисел  $(d, \frac{n}{d})$ . Тогда количество делителей числа  $n$  чётно. Поэтому в какой-то паре  $(d, \frac{n}{d})$  делители совпадают. Тогда  $d = \frac{n}{d}$ , т. е.  $n = d^2$ .

**3.14. Первый способ.** Пусть  $n = 1203...308$  — одно из таких чисел. Проверьте, что  $3n + 5 \cdot 19 = 3610...019$  и 361 делится на 19.

*Второй способ.* Умножьте число 633...32 на 19.

**3.15.** Воспользуйтесь тем, что  $(17a + 19b) + 2(3a + 2b) = 23(a + b)$ .

**3.16.** Воспользуйтесь тем, что

$$41a + 46b = 4(7a + 5b) + 13(a + 2b).$$

**3.17.** Из равенства  $11(a + 7b) = 7(6a + 11b) - 31a$  следует, что число  $11(a + 7b)$  делится на 31. Числа 11 и 31 не имеют общих делителей, поэтому число  $a + 7b$  делится на 31.

**3.18.** Воспользуйтесь тем, что  $4(2a + 3b) + (9a + 5b) = 17(a + b)$ .

**3.19.** Воспользуйтесь тем, что

$$7(11a + 2b) + (18a + 5b) = 19(5a + b).$$

**3.20.** Воспользуйтесь тем, что

$$9a + b + 4c = 3(3a + 4b + 5c) - 11(b + c).$$

**3.21.** Воспользуйтесь тем, что  $\overline{aba} = 7(14a + b) + 3(a + b)$ .

**3.22.** Для любого  $n$  остаток от деления  $10^n$  на 9 равен 1. Поэтому разность между самим числом и его суммой цифр делится на 9.

**3.23.** Проверим, что разность между числами

$$a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + 10^4a_4 + \dots$$

и

$$(a_0 + a_2 + a_4 + \dots) - (a_1 + a_3 + \dots)$$



делится на 11. Эту разность можно представить в виде

$$11(a_1 + 10a_2 + 10^2a_3 + 10^3a_4 + \dots) - \\ - 11(a_2 + 10a_3 + 10^2a_4 + \dots) + 11(a_3 + 10a_4 + \dots) - \dots$$

Действительно,

$$11 \cdot 10 - 11 = 10^2 - 1,$$

$$11 \cdot 10^2 - 11 \cdot 10 + 11 = 10(11 \cdot 10 - 11) + 11 = 10^3 - 10 + 11 = 10^3 + 1,$$

$$11 \cdot 10^3 - 11 \cdot 10^2 + 11 \cdot 10 - 11 = 10(10^3 + 1) - 11 = 10^4 - 1$$

и т. д.

**3.24.** Разность этих чисел равна  $d \cdot 999$ , где  $d$  — разность между первой и последней цифрами. А число 999 делится на 37.

**3.25.** Воспользуйтесь тем, что число

$$\overline{abcdef} - (\overline{abc} + \overline{def}) = 1000\overline{abc} - \overline{abc} = 999\overline{abc}$$

делится на 37, поскольку 999 делится на 37.

**3.26.** *Первый способ.* Это число делится на 11.

*Второй способ.* Это число делится на  $1 \dots 1$  ( $n$  единиц).

**3.27.** Такое число делится на 3, но не делится на 9.

**3.28.** Такое число делится на 3, но не делится на 9.

**3.29.** Сумма цифр этого числа равна 300, поэтому оно делится на 3, но не делится на 9.

**3.30.** Если квадрат целого числа оканчивается на чётное число нулей — вычеркнем их. После этого рассматриваемое число примет вид  $2n$ , где  $n$  состоит из шестисот троек и некоторого количества нулей, причём последняя цифра — тройка. Число  $n$  нечётно, поэтому число  $2n$  делится на 2 и не делится на 4. Такое число не может быть квадратом целого числа.

**3.31.** Число 111 делится на 3. Число 111 111 111 получается из этого числа умножением на число 1001001, делящееся на 3. Число, состоящее из 27 единиц, получается умножением полученного числа 111 111 111 на число такого же вида, записанное тремя единицами и нулями, и потому делящееся на 3. Данное число получается ещё одним умножением на число, делящееся на 3.

**3.32.** Если число  $111 \dots 11$  ( $n$  единиц) делится на число  $333 \dots 33$  (100 троек), равное  $3 \cdot 111 \dots 11$  (100 единиц), то согласно признаку делимости на 3 число  $n$  делится на 3, а согласно задаче 3.12 число  $n$  делится на 100. Поэтому  $n$  делится на 300. Число  $111 \dots 11$  (300 единиц) делится на 3 и на  $111 \dots 11$  (100 единиц).

## Глава 4. Разложение на простые множители и деление с остатком

**4.1.** Если составное число  $n$  больше 1, то оно имеет делитель  $d$ , который больше 1 и меньше  $n$ . Если число  $d$  не простое, то находим у него делитель, который больше 1 и меньше  $d$ , и т. д. Каждый полученный делитель делит  $n$  и число шагов конечно (оно меньше  $n$ ).

**4.2.** Предположите, что число простых чисел конечно, и составьте их список: 2, 3, 5, 7, ...,  $p$ . У числа  $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot p + 1$  есть простой делитель, и число  $N$  не делится нацело на числа из списка (при делении на них оно даёт в остатке 1).

**4.3.** Для  $k = 2, 3, \dots, n + 1$  число  $(n + 1)! + k$  делится на  $k$ .

**4.4.**  $4^9 + 6^{10} + 3^{20} = (2^9 + 3^{10})^2$ .

**4.5.** В разложении числа  $N = 100!$  двоек больше, чем пятёрок. Поэтому достаточно найти степень, в которой простой множитель 5 входит в разложение числа  $N$ . Среди чисел от 1 до 100 всего 20 чисел дают пятёрки в разложение, причём числа 25, 50, 75 и 100 дают сразу две пятёрки.

**4.6.** Воспользуйтесь тем, что данное число равно

$$\frac{(2n)!}{n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1) \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{n!} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n - 1) \cdot 2^n \frac{n!}{n!}.$$

**4.7. Первый способ.** Числа  $n$  и  $n + 1$  взаимно простые. Произведение двух взаимно простых чисел является точным квадратом тогда и только тогда, когда каждое из них является точным квадратом. Два последовательных натуральных числа не могут быть оба точными квадратами.

**Второй способ.** Предположите, что для некоторых натуральных чисел  $n$  и  $m$  выполняется равенство  $n(n + 1) = m^2$ . Тогда

$$n^2 < n(n + 1) < (n + 1)^2,$$

поэтому  $n < m < n + 1$ , чего не может быть.

**4.8.** Предположите, что для некоторых натуральных чисел  $n$  и  $m$  выполняется равенство

$$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = m^4.$$

Тогда  $n^4 < m^4 < (n + 3)^4$ , поэтому  $n < m < n + 3$ . С одной стороны, число  $m + 1$  взаимно просто с  $m$ , с другой стороны, оно является делителем числа

$$n(n + 1)(n + 2)(n + 3) = m^4.$$

Такого быть не может.

4.9. Воспользуйтесь равенством  $2(n+7) - (2n+13) = 1$ .

4.10. Воспользуйтесь равенством  $2n^2 - 1 - 2(n-1)(n+1) = 1$ .

4.11.  $n^2 + 1 - n \cdot n = 1$ , поэтому  $\text{НОД}(n^2 + 1, n) = 1$  и, согласно примеру 2,

$$\begin{aligned}\text{НОД}(n^2 + 1, n^2 + 1 - n) &= \text{НОД}(n^2 + 1, (n^2 + 1 - n) - n^2 + 1) = \\ &= \text{НОД}(n^2 + 1, n) = 1.\end{aligned}$$

4.12. Из равенств

$$a = 8(5a + 3b) - 3(13a + 8b) \quad \text{и} \quad b = 5(13a + 8b) - 13(5a + 3b)$$

следует, что любой общий делитель чисел  $5a + 3b$  и  $13a + 8b$  является также общим делителем чисел  $a$  и  $b$ .

4.13. Пусть  $p$  — простое число,  $a = p^\alpha \leq p^\beta = b$ . Тогда  $\text{НОД}(a, b) = p^\alpha$  и  $\text{НОК}(a, b) = p^\beta$ . В этом случае требуемое равенство верно. Для каждого простого множителя степень, в которой он входит в  $\text{НОД}(a, b)$  и в  $\text{НОК}(a, b)$ , зависит только от степени, в которой он входит в  $a$  и  $b$ .

4.14. Число является точным квадратом, если в его разложение на простые множители каждый из них входит с чётным показателем степени. Поэтому каждое простое число входит в разложения чисел  $a$  и  $b$  с показателями степеней одинаковой чётности. В разложение  $\text{НОД}(a, b)$  каждый простой множитель входит с наименьшим показателем из этих двух, поэтому в разложения чисел  $a$  и  $\text{НОД}(a, b)$  каждое простое число также входит с показателями степеней одинаковой чётности.

4.15. Пусть  $\text{НОК}(a_1, \dots, a_{10}) = A$ . Тогда  $A = a_1 k_1 = \dots = a_{10} k_{10}$ , где  $k_1, \dots, k_{10}$  — натуральные числа. Из условия следует, что  $k_1 > k_2 > \dots > k_{10}$ , поэтому  $k_1 \geq 10$ . Следовательно,  $A = a_1 k_1 \geq 10a_1$ .

4.16. Если к данному числу прибавить 1, то полученное число делится на  $3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$ .

4.17. Если  $n$  — искомое число, то  $n + 1$  делится на  $\text{НОК}(5, 6, 8) = 120$ .

4.18. Если  $a = qn + r$  и  $b = pn + s$ , то

$$a + b = (q + p)n + (r + s) \quad \text{и} \quad ab = (qpn + rp + sq)n + rs.$$

4.19. Остатки от деления на 3 чисел  $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$  равны  $2, 1, 2, 1, \dots$ . Поэтому остаток от деления на 3 числа  $2^{2n}$  равен 1.

4.20. Остатки от деления на 5 чисел  $2, 2^2, 2^3, 2^4, \dots$  равны  $2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, \dots$ . Поэтому остаток от деления на 5 числа  $2^{4n}$  равен 1.

**4.21.**  $43^{23} + 23^{43} \equiv 1^{23} + (-1)^{43} \equiv 0 \pmod{6}$  и

$$43^{23} + 23^{43} \equiv (-1)^{23} + 1^{43} \equiv 0 \pmod{11}.$$

**4.22.** Пусть  $6n \equiv 1 \pmod{5}$  и  $5m \equiv 1 \pmod{6}$ . Тогда  $6na + 5mb \equiv 6na \equiv a \pmod{5}$  и  $6na + 5mb \equiv 5mb \equiv b \pmod{6}$ . Положите  $n = 1$  и  $m = 5$ .

**4.23.** Пусть

$$42k \equiv 1 \pmod{5}, \quad 35n \equiv 1 \pmod{6} \quad \text{и} \quad 30m \equiv 1 \pmod{7};$$

здесь  $42 = 6 \cdot 7$ ,  $35 = 5 \cdot 7$  и  $30 = 5 \cdot 6$ . Тогда

$$42ka + 35nb + 30mc \equiv 42ka \equiv a \pmod{5},$$

$$42ka + 35nb + 30mc \equiv 35nb \equiv b \pmod{6}$$

и

$$42ka + 35nb + 30mc \equiv 30mc \equiv c \pmod{7}.$$

Положите  $k = 3$ ,  $n = 5$  и  $m = 4$ .

**4.24.** Полученное число должно делиться на  $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$ . Поделим 523 000 на 504 с остатком:  $523\,000 = 1037 \cdot 504 + 352$ . Поскольку  $504 - 352 = 152$ , на 504 делятся числа 523 152 и  $523\,152 + 504 = 523\,656$ . Других чисел, делящихся на 504, среди чисел от 523 000 до 523 999 нет.

**4.25.** Равенства  $\frac{a-b}{m} = n$  и  $\frac{(a-b)c}{mc} = n$  эквивалентны.

**4.26.** Представьте простое число  $p$  в виде  $p = 30k + r$ , где  $r$  — одно из чисел от 1 до 29. Число  $r$  не может делиться на 2, 3 или 5, так как тогда  $p$  делилось бы на 2, 3 или 5. Если из чисел от 1 до 29 исключить числа, делящиеся на 2, 3 или 5, то останутся лишь простые числа (7, 11, 13, 17, 19, 23, 29) и 1.

**4.27.** Согласно примеру 4 сумма квадратов двух нечётных чисел при делении на 4 даёт в остатке 2. Квадрат чётного числа делится на 4, а квадрат нечётного числа при делении на 4 даёт в остатке 1.

**4.28.** Воспользуйтесь указанием к задаче 4.27.

**4.29.** При делении на 4 сумма квадратов двух чётных чисел даёт остаток 0, одного чётного и одного нечётного — остаток 1, двух нечётных чисел — остаток 2.

**4.30.** Для целого  $a$  число  $a^2 + a = a(a + 1)$  чётно, а сумма квадратов двух нечётных чисел не может быть квадратом целого числа (задача 4.27).

**4.31.** Если такое равенство выполняется, то число  $m$  чётно:  $m = 2k$ . Тогда  $k^2 - n^2 = 26$ . Числа  $k$  и  $n$  одной чётности, поэтому  $k^2 - n^2$  делится на 4, а 26 не делится.

**4.32.** Если одно из чисел  $m$  и  $n$  чётно, а другое нечётно, то число  $m^2 + n^2$  нечётно. Если оба числа нечётны, то  $m^2 + n^2$  не делится на 4, а 2012 делится. Если  $m = 2a$  и  $n = 2b$ , то  $a^2 + b^2 = 503$ , а сумма двух квадратов не может давать остаток 3 при делении на 4 (задача 4.29).

**4.33.** Воспользуйтесь равенством  $(3n \pm 1)^2 = 3(3n^2 \pm 2n) + 1$ .

**4.34.** Пусть  $m^2 + n^2$  делится на 3 и  $m$  не делится на 3. Тогда  $n$  тоже не делится на 3. Поэтому согласно задаче 4.33 число  $m^2 + n^2$  при делении на 3 даёт остаток 2.

**4.35.**  $1^2 + 2^2 = 5$ .

**4.36.** Сначала докажите, что квадрат целого числа, не делящегося на 7, при делении на 7 даёт остаток 1, 2 или 4. Затем проверьте, что ни сумма двух разных остатков, ни сумма двух одинаковых остатков не делится на 7.

**4.37.** Воспользуйтесь равенствами

$$(2n + 1)^2 = 4n(n + 1) + 1 \quad \text{и} \quad (4n + 2)^2 = 16n(n + 1) + 4$$

и тем, что число  $n(n + 1)$  чётно.

**4.38.** При делении на 8 сумма квадратов двух целых чисел даёт остаток 0, 1, 2, 4 или 5, а сумма квадратов трёх целых чисел даёт остаток 0, 1, 2, 3, 4, 5 или 6.

**4.39.** Число  $r_{k-2}$  делится на  $r_{k-1} = d$ . Из формулы

$$r_{k-3} = n_{k-1}r_{k-2} + r_{k-1}$$

следует, что  $r_{k-3}$  делится на  $d$ . Аналогично  $r_{k-4}, \dots, b$ , а делятся на  $d$ .

**4.40.** Из формулы  $a = n_1b + r_1$  следует, что  $r_1$  делится на любой общий делитель чисел  $a$  и  $b$ . Из формулы  $b = n_2r_1 + r_2$  следует, что  $r_2$  делится на любой общий делитель чисел  $b$  и  $r_1$ , поэтому  $r_2$  делится на любой общий делитель чисел  $a$  и  $b$ . Аналогично  $r_3$  делится на любой общий делитель чисел  $a$  и  $b$  и т. д. Поэтому  $r_{k-1} = d$  делится на любой общий делитель чисел  $a$  и  $b$ .

**4.41.** Поделив  $21n + 4$  на  $14n + 3$ , получим в остатке  $7n + 1$ . Поделив  $14n + 3$  на  $7n + 1$ , получим в остатке 1. Поэтому числа  $21n + 4$  на  $14n + 3$  взаимно простые.

**4.42.** Пусть  $m \geq n$ . Тогда

$$\text{НОД}(a^m - 1, a^n - 1) = \text{НОД}(a^m - a^n, a^n - 1) = \text{НОД}(a^{m-n} - 1, a^n - 1).$$

Поэтому применение алгоритма Евклида к числам  $a^n - 1$  и  $a^m - 1$  аналогично применению алгоритма Евклида к числам  $n$  и  $m$ .

**4.43.** Если  $m > n$  и  $m = pq + r$ , где  $r < n$ , то один шаг алгоритма Евклида приводит к равенству

$$\text{НОД}\left(\underbrace{1\dots 1}_m, \underbrace{1\dots 1}_n\right) = \text{НОД}\left(\underbrace{1\dots 1}_n, \underbrace{1\dots 1}_r\right).$$

Поэтому в итоге получится число, состоящее из  $\text{НОД}(m, n)$  единиц.

**4.44.** Сначала примените к числам  $a$  и  $b$  алгоритм Евклида:

$$a = n_1 b + r_1, \quad b = n_2 r_1 + r_2, \quad r_1 = n_3 r_2 + r_3, \quad \dots, \quad r_{k-2} = n_k r_{k-1} = d.$$

Затем последовательно выразите  $r_1, r_2, \dots, r_{k-1} = d$  через  $a$  и  $b$ :

$$r_1 = a - n_1 b, \quad r_2 = b - n_2 r_1 = b - n_2(a - n_1 b) \quad \text{и т. д.}$$

**4.45.** Согласно задаче 4.44 можно подобрать целые числа  $m$  и  $n$  так, что  $am + bn = 1$ . Поэтому  $am \equiv am + bn \equiv 1 \pmod{b}$ .

**4.46.** Из равенства  $\frac{a-b}{m} = n$  следует равенство  $\frac{(a-b)c}{m} = nc$ , поэтому из сравнения  $a \equiv b \pmod{m}$  следует сравнение  $\frac{a-b}{m}c \equiv \frac{bc}{m} \pmod{m}$ . Если  $\text{НОД}(m, c) = 1$ , то согласно задаче 4.45 можно подобрать целое число  $x$  так, что  $cx \equiv 1 \pmod{m}$ . Поэтому из сравнения  $ac \equiv bc \pmod{m}$  следует сравнение  $a \equiv acx \equiv bcx \equiv b \pmod{m}$ .

## Глава 5. Многочлены

**5.1.** Воспользуйтесь равенством

$$(a_n c^{n-1} + a_{n-1} c^{n-2} + \dots + a_1)c + a_0 = 0.$$

**5.2.** Воспользуйтесь равенствами

$$(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1})p + a_0 q^n = 0$$

и

$$a_n p^n + q(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p q^{n-2} + a_0 q^{n-1}) = 0$$

и тем, что числа  $p$  и  $q$  не имеют общих делителей.

**5.3.** Подставьте в данные многочлены  $x = -3$  и  $x = -1$ .

**5.4.** Если число  $x$  чётное, то значение многочлена при делении на 2 даёт такой же остаток, как число  $a_n = P(0)$ .

**5.5.** Если число  $x$  нечётное, то значение многочлена при делении на 2 даёт такой же остаток, как число  $a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n = P(1)$ .

**5.6.** Положите  $x = 10$ . Тогда  $(10 + b)(10 + c) = 1$ , поэтому  $b = c = -9$  или  $b = c = -11$ . В первом случае  $(x - a)(x - 10) + 1 = (x - 9)^2$ , поэтому  $a = 8$ , во втором случае  $(x - a)(x - 10) + 1 = (x - 11)^2$ , поэтому  $a = 12$ .

**5.7.** Если  $x_0^4 + ax_0^2 + 1 = 0$  и  $x_0^3 + ax_0 + 1 = 0$ , то

$$x_0^4 + ax_0^2 + 1 - x_0(x_0^3 + ax_0 + 1) = 0,$$

т. е.  $x_0 = 1$ . В таком случае  $1 + a + 1 = 0$ , т. е.  $a = -2$ . При  $a = -2$  данные многочлены действительно имеют общий корень  $x_0 = 1$ .

**5.8.** Рассмотрите многочлен  $P(x) = \frac{x(x+1)}{2}$ .

**5.9.** Сумма всех коэффициентов многочлена  $P(x)$  равна  $P(1)$ .

**5.10.** См. указание к задаче 5.9.

**5.11.** Сумма всех коэффициентов многочлена  $P(x)$  равна  $P(1)$ , а разность между суммой коэффициентов многочлена  $P(x)$  при чётных степенях и суммой при нечётных степенях равна  $P(-1)$ . Поэтому сумма коэффициентов при чётных степенях равна

$$\frac{P(1) + P(-1)}{2} = 1,$$

а сумма коэффициентов при нечётных степенях равна

$$\frac{P(1) - P(-1)}{2} = 0.$$

**5.12.** Обозначим  $P(x, y) = (1 + x - y)^3$ .

а) Сумма всех коэффициентов этого многочлена равна  $P(1, 1)$ .

б) Сумма коэффициентов при тех одночленах, которые не содержат  $y$ , равна  $P(1, 0)$ .

в) Сумма коэффициентов при тех одночленах, которые содержат  $x$ , равна  $P(1, 1) - P(0, 1)$ .

**5.13.** Данное произведение  $P(x)$  имеет вид  $Q(x)Q(-x)$ , поэтому  $P(-x) = P(x)$  и  $2P(x) = P(x) + P(-x)$ . В правой части все одночлены нечётной степени сокращаются.

**5.14.** Подставив значение  $x = 0$ , получим, что  $d$  делится на 5. Подставив значения  $x = 1$  и  $x = -1$ , получим, что  $a + b + c$  и  $a - b + c$  делятся на 5, поэтому  $b$  и  $a + c$  делятся на 5. Подставив значение  $x = 2$ , получим, что  $4a + c$  делится на 5. Поэтому  $3a = (4a + c) - (a + c)$  делится на 5, а значит,  $a$  и  $c$  делятся на 5.

**5.15.** Число 18 нельзя представить в виде суммы чисел 5 и 7, поэтому коэффициент при  $x^{18}$  равен 0. Число 17 представляется в виде суммы чисел 5 и 7 следующим образом:  $17 = 7 + 5 + 5$ . С точностью

до перестановки слагаемых это представление единственно. В одном из 20 множителей  $1 + x^5 + x^7$  мы должны выбрать  $x^7$ , а в двух из 19 оставшихся выбрать  $x^5$ . Поэтому коэффициент при  $x^{17}$  равен  $\frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{2} = 3420$ .

**5.16.** Пусть  $P(x)$  — данный многочлен и  $Q(x) = (P(x))^n$ . Тогда  $P(0) = P(1) = 2$  и  $Q(0) = Q(1) = 2^n$ . Поэтому  $Q(1) - Q(0) = 0$ . Но число  $Q(1) - Q(0)$  равно сумме всех коэффициентов многочлена  $Q$ , кроме свободного члена.

**5.17.** Остаток от деления на многочлен  $x - c$  — это нулевой многочлен или многочлен степени 0, т. е. остаток — это некоторое число  $r$ . Пусть  $P(x) = Q(x)(x - c) + r$ . При  $x = c$  получаем  $r = P(c)$ .

**5.18.** Воспользуйтесь задачей 5.17. Из равенства

$$P(x) = Q(x)(x - c) + r$$

следует, что если  $c$  — корень многочлена  $P(x)$ , то  $r = P(c) = 0$ . Наоборот, если  $r = 0$ , то  $P(c) = r = 0$ .

**5.19.** См. указание к задаче 4.42.

## Глава 6. Выделение полного квадрата

**6.1.** Воспользуйтесь равенством

$$4x^2 + 9y^2 - 4x + 6y + 2 = (2x - 1)^2 + (3y + 1)^2.$$

**6.2.** Воспользуйтесь равенством  $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x}$ .

**6.3.** Воспользуйтесь равенством  $x - x^2 = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$ .

**6.4.** При выделении полного квадрата появится член

$$3\left(x - \frac{a+b+c}{3}\right)^2.$$

**6.5.** Запишите данное равенство в виде  $(y + 2 + x)(y + 2 - x) = -4$  и воспользуйтесь тем, что числа  $y + 2 + x$  и  $y + 2 - x$  либо оба чётны, либо оба нечётны.

**6.6.** Запишите данное равенство в виде  $(x + 1 + y)(x + 1 - y) = 7$ .

**6.7.** Умножьте данное выражение на  $(3 - 1)$  и воспользуйтесь тем, что  $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ .

**6.8.** Воспользуйтесь тем, что

$$2^{20} - 1 = (2^{10} - 1)(2^{10} + 1) \quad \text{и} \quad 2^{10} + 1 = 1025.$$

**6.9.** Из формулы квадрата разности следует, что

$$a^2 + 9ab + b^2 = (a - b)^2 + 11ab.$$



Поэтому число  $(a - b)^2$  делится на 11. Число 11 простое, поэтому число  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$  тоже делится на 11.

**6.10.** Из равенств

$$(n - 3)(n + 3) = n^2 - 9 = 2^m - 2$$

следует, что числа  $n + 3$  и  $n - 3$  чётные. Поэтому число  $2^m - 2$  делится на 4. Но при  $m > 1$  это число не делится на 4.

**6.11.** Воспользуйтесь тем, что

$$2 = (x^4 + 1) - (x^4 - 1) = (x^4 + 1) - (x + 1)(x - 1)(x^2 - 1).$$

**6.12.** Произведение чисел  $n - 1$ ,  $n$ ,  $n + 1$  и  $n + 2$  равно

$$(n^2 + n)(n^2 + n - 2) = (N + 1)(N - 1),$$

где  $N = n^2 + n - 1$ .

**6.13.** Сначала докажите, что  $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 3n(n^2 + 2)$ . Затем воспользуйтесь задачей 4.33.

**6.15.** Сначала, воспользовавшись задачей 6.14, докажите, что

$$(x^3 + y^3)^3 - (x^3 - 2y^3)^3 = 9y^3(x^6 - x^3y^3 + y^6).$$

Затем докажите, что

$$x^3 - \left(x \frac{x^3 - 2y^3}{x^3 + y^3}\right)^3 = \frac{9x^3y^3(x^6 - x^3y^3 + y^6)}{(x^3 + y^3)^3} = y^3 - \left(y \frac{y^3 - 2x^3}{x^3 + y^3}\right)^3.$$

**6.16.** Разность  $P(a) - P(b)$  представляет собой сумму выражений вида  $m(a^k - b^k)$  с целыми коэффициентами  $m$ . Число  $a^k - b^k$  делится на  $a - b$ .

**6.17.** Воспользуйтесь задачей 6.16 и тем, что число  $P(14) - P(6) = 9 - 5 = 4$  не делится на  $14 - 6 = 8$ .

**6.18.** Число  $7^{2n} - 4^{2n} = (7^2)^n - (4^2)^n$  делится на  $7^2 - 4^2 = 33$  для любого  $n$ .

**6.19.** Воспользуйтесь равенством

$$11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + \dots + 11 + 1);$$

во второй скобке стоит сумма десяти чисел, оканчивающихся на 1.

**6.20.** Воспользуйтесь тем, что  $2^{1000} - 1 = (2^{20})^{50} - 1$  и  $2^{20} - 1$  делится на 25 согласно задаче 6.8.

**6.21.** Число  $10^{6n+r} - 10^r = 10^r(10^{6n} - 1)$  делится на

$$10^6 - 1 = 999999 = 7 \cdot 142857.$$

**6.22.** Запишем исходное число  $A$  в виде  $A = 10a + b$  и переставим последнюю цифру  $b$  в начало. В результате получим число  $B = 10^{6n-1}b + a$ . Число  $10B - A = (10^{6n} - 1)b$  делится на

$$10^6 - 1 = 999 \cdot 1001 = 999 \cdot 143 \cdot 7,$$

поэтому оно делится на 7. Следовательно, число  $B$  тоже делится на 7.

**6.23.** Пусть  $2^n - 2 = mn$ , где число  $m$  целое. Тогда

$$2^{2^n-1} - 2 = 2(2^{mn} - 1),$$

а число  $2^{mn} - 1$  делится на  $2^n - 1$ .

**6.24.** Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{n^{n-1} - 1}{n - 1} = n^{n-2} + n^{n-3} + \dots + n + 1$$

и каждое из  $n - 1$  чисел  $1, n, \dots, n^{n-3}, n^{n-2}$  при делении на  $n - 1$  даёт остаток 1.

**6.25.** При нечётном  $n$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} & (x + y)(x^{n-1} + (-1)^1 x^{n-2} y + \dots + (-1)^{k-1} x^{n-k} y^{k-1} + \dots \\ & \dots + (-1)^{n-1} y^{n-1}) = x^n + (-x^{n-1} y + x^{n-1} y) + (x^{n-2} y^2 - x^{n-2} y^2) + \dots \\ & \dots + (x y^{n-1} - x y^{n-1}) + y^n = x^n + y^n. \end{aligned}$$

**6.26.** Воспользуйтесь тем, что  $a^n + b^n$  делится на  $a + b$  при нечётном  $n$ .

**6.27.** В разложении  $21^{10} - 1 = (21^5 - 1)(21^5 + 1)$  число  $21^5 + 1$  делится на  $21 + 1 = 22$ , а число

$$21^5 - 1 = (21 - 1)(21^4 + 21^3 + 21^2 + 21 + 1)$$

делится на 100, поскольку второй множитель — сумма пяти чисел, оканчивающихся на 1.

**6.28.** Воспользуйтесь равенством

$$2^9 + 2^{99} = 2^9(2^{90} + 1) = 2^9(1024^9 + 1).$$

Первый множитель делится на 4, второй делится на  $1024 + 1 = 1025$ , поэтому второй множитель делится на 25.

**6.29.**  $\frac{x^{4n} + x^{4n-4} + \dots + x^8 + x^4 + 1}{x^{2n} + x^{2n-2} + \dots + x^4 + x^2 + 1} = \frac{x^{4n+4} - 1}{x^4 - 1} : \frac{x^{2n+2} - 1}{x^2 - 1} = \frac{x^{2n+2} + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2)^{n+1} + 1}{x^2 + 1}$ . Если число  $n + 1$  нечётно, то  $y^{n+1} + 1$  делится на  $y + 1$ .

А если  $n + 1 = 2m$ , то при делении  $(x^2)^{n+1} + 1 = x^{4m} + 1$  на  $x^2 + 1$  в остатке получается 2, так как  $x^{4m} - 1$  делится на

$$x^4 - 1 = (x^2 - 1)(x^2 + 1)$$

и потому делится на  $x^2 + 1$ .

**6.30.** Произведение многочленов

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{99} + x^{100} = \frac{x^{101} - 1}{x - 1}$$

и

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{99} + x^{100} = \frac{x^{101} + 1}{x + 1}$$

равно  $\frac{x^{202} - 1}{x^2 - 1}$ .

**6.31.** Воспользуйтесь тем, что  $k^n + (n - k)^n$  делится на  $k + (n - k) = n$  при нечётном  $n$ .

**6.32.** В разложении

$$3^{2^n} - 1 = (3 - 1)(3 + 1)(3^2 + 1)(3^4 + 1)\dots(3^{2^{n-1}} + 1)$$

все множители, кроме второго, делятся на 2 и не делятся на 4. В самом деле, согласно примеру 4 на с. 20 при делении на 4 квадрат нечётного числа даёт в остатке 1.

**6.35.** Воспользуйтесь тем, что

$$2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2.$$

**6.36.** Воспользуйтесь тем, что

$$2(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) = (x + y + z)((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2).$$

**6.38.** Из данного равенства следует равенство  $(x + y)(x + z) = 2yz$ . Если числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  нечётны, то левая часть делится на 4, а правая не делится.

## Глава 7. Разложение многочленов на множители

### 7.1. Первый способ.

$$x^3 + 2x - 3 = x^3 - x + 3x - 3 = x(x - 1)(x + 1) + 3(x - 1).$$

*Второй способ.* Многочлен имеет корень 1, поэтому он делится на  $x - 1$ .

$$\mathbf{7.2.} \quad 2x^3 + x^2 + x - 1 = x^3 - 1 + x^3 + x^2 + x = (x - 1)(x^2 + x + 1) + x(x^2 + x + 1).$$

**7.3.** Многочлен имеет корни  $-2$ ,  $3$  и  $5$ .

**7.7.** Воспользуйтесь разложением из задачи 7.6 для  $x = 2^{15}$ .

**7.8.** Воспользуйтесь разложением из задачи 7.5.

$$\begin{aligned} 7.9. \quad x^5 + x + 1 &= x^5 + x^4 + x^3 - x^4 - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1 = \\ &= x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = \\ &= (x^3 - x^2 + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

**7.10.** Первый способ.

$$\begin{aligned} x^{10} + x^5 + 1 &= x^{10} - x^7 + x^7 - x^4 + x^5 - x^2 + x^4 - x + x^2 + x + 1 = \\ &= (x^7 + x^4 + x^2 + x)(x^3 - 1) + x^2 + x + 1 = \\ &= (x^2 + x + 1)((x^7 + x^4 + x^2 + x)(x - 1) + 1) = \\ &= (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1). \end{aligned}$$

*Второй способ.* Многочлен  $x^{15} - 1 = (x^5 - 1)(x^{10} + x^5 + 1)$  делится на  $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$  поэтому можно ожидать, что  $x^{10} + x^5 + 1$  делится на  $x^2 + x + 1$ .

**7.11.** Воспользовавшись тем, что  $12 = 3 \cdot 4$ , попробуйте представить данный многочлен в виде

$$(x^2 + ax + 3)(x^2 + bx + 4).$$

$$\begin{aligned} 7.12. \quad (x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15 &= \\ &= (x+1)(x+7)(x+3)(x+5) + 15 = \\ &= (x^2 + 8x + 11 - 4)(x^2 + 8x + 11 + 4) + 15 = \\ &= (x^2 + 8x + 11)^2 - 16 + 15 = (x^2 + 8x + 11)^2 - 1 = \\ &= (x^2 + 8x + 10)(x^2 + 8x + 12) = (x^2 + 8x + 10)(x+2)(x+6). \end{aligned}$$

**7.13.** Многочлен обращается в нуль при  $x = y$  и при  $z = y$ , поэтому, согласно теореме Безу, он делится на  $(x - y)(z - y)$ . Следовательно,

$$(x - y + z)^2 - x^2 + y^2 - z^2 = k(x - y)(z - y),$$

где  $k$  — некоторое число. Подставляя  $x = z = 1$  и  $y = 0$ , находим  $k$ .

**7.14.** Первый способ.

$$\begin{aligned} (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 &= (x + y + z)^3 - x^3 - (y^3 + z^3) = \\ &= (y + z)((x + y + z)^2 + x(x + y + z) + x^2) - (y + z)(y^2 - yz + z^2) = \\ &= (y + z)(3x^2 + 3xy + 3xz + 3yz) = 3(y + z)(x(x + y) + z(x + y)) = \\ &= 3(y + z)(x + y)(x + z). \end{aligned}$$

*Второй способ.* При  $x = -y$  многочлен обращается в нуль, поэтому, согласно теореме Безу, он делится на  $x + y$ . Аналогично он делится на  $y + z$  и  $z + x$ . Поэтому многочлен равен  $k(x + y)(y + z)(z + x)$ , где  $k$  — некоторое число. Подставляя  $x = y = z = 1$ , находим  $k = 3$ .

**7.15. Первый способ.**

$$\begin{aligned}(y - z)^3 + (z - x)^3 + (x - y)^3 &= \\&= (y - x)((y - z)^2 - (y - z)(z - x) + (z - x)^2) + (x - y)^3 = \\&= (y - x)((y - z)^2 - (y - z)(z - x) + (z - x)^2 - (x - y)^2) = \\&= (y - x)((y - z)(y + x - 2z) + (y + z - 2x)(z - y)) = \\&= (y - x)(y - z)(3x - 3z).\end{aligned}$$

*Второй способ.* При  $x = y$  многочлен обращается в нуль, поэтому, согласно теореме Безу, он делится на  $x - y$ . Аналогично он делится на  $y - z$  и  $z - x$ . Поэтому многочлен равен  $k(x - y)(y - z)(z - x)$ , где  $k$  — некоторое число. Подставляя  $x = -1$ ,  $y = 0$  и  $z = 1$ , находим  $k = 3$ .

**7.16.**  $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y) - 3xyz =$   
 $= (x + y + z)((x + y)^2 - (x + y)z + z^2) - 3xy(x + y + z) =$   
 $= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz).$

**7.17.** При  $a = b$  многочлен обращается в нуль. При  $b = c$  и  $c = a$  многочлен тоже обращается в нуль.

**7.18.** См. указание к задаче 7.17.

**7.19.** См. указание к задаче 7.17.

**7.20.**  $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 =$   
 $= (a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 - 2ab + b^2 - c^2)(a^2 + 2ab + b^2 - c^2) =$   
 $= ((a - b)^2 - c^2)((a + b)^2 - c^2) = (a - b - c)(a - b + c)(a + b - c)(a + b + c).$

## Глава 8. Алгебраические дроби

**8.1.** Оба равенства эквивалентны равенству  $ad = bc$ .

**8.2.** Оба равенства эквивалентны равенству  $ad = bc$ .

**8.3.** Оба равенства эквивалентны равенству  $ad + bc + bd = ac$ .

**8.4.** Данные числа равны  $\frac{a^2 + b^2}{a}$  и  $\frac{a^2 + b^2}{b}$ .

**8.5.**  $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{a+b}{ab}.$

**8.6.** Воспользуйтесь тем, что  $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2$ .

**8.7.** Воспользуйтесь тем, что

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^3 = a^3 + 3\left(a + \frac{1}{a}\right) + \frac{1}{a^3}.$$

### 8.8. Сумма трёх дробей

$$\begin{aligned}\frac{a}{b-c}\left(\frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}\right) &= \frac{ac-ab}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \\ \frac{b}{c-a}\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b}\right) &= \frac{ab-bc}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \\ \frac{c}{a-b}\left(\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a}\right) &= \frac{bc-ac}{(a-b)(b-c)(c-a)}\end{aligned}$$

равна нулю.

### 8.9. Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{1+b}{1+b+b^2} - \frac{1+a}{1+a+a^2} = \frac{(a-b)(a+b+ab)}{(1+a+a^2)(1+b+b^2)}.$$

### 8.10. Числитель равен

$$\begin{aligned}(a+b+c)(bc+ac+ab) - abc &= (a+b+c)c(a+b) + (a+b)ab = \\ &= (a+b)(ac+bc+c^2+ab) = (a+b)(a+c)(b+c).\end{aligned}$$

### 8.11. Воспользуйтесь тем, что

$$a^3(c-b) + b^3(a-c) + c^3(b-a) = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

согласно задаче 7.18.

### 8.12. Проверьте, что

$$\begin{aligned}\frac{a^2(b-c)}{b+c} + \frac{b^2(c-a)}{c+a} + \frac{c^2(a-b)}{a+b} &= \\ &= (a+b+c)\left(\frac{a(b-c)}{b+c} + \frac{b(c-a)}{c+a} + \frac{c(a-b)}{a+b}\right).\end{aligned}$$

### 8.13. Из равенства

$$a = \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{x+\frac{1}{x}+1}$$

следует, что  $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{a} - 1$ . Поэтому

$$\frac{x^2}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}-1\right)^2-1} = \frac{a^2}{1-2a}.$$

### 8.14. Воспользуйтесь тем, что $\frac{n+9}{n+6} = 1 + \frac{3}{n+6}$ .

### 8.15. Число

$$\frac{19n+17}{7n+1} = 2 + \frac{5n+15}{7n+1}$$

может быть целым только при  $5n + 15 \geq 7n + 1$ , т. е. при  $n \leq 7$ . При  $1 \leq n \leq 6$  это число не целое.

**8.16.** Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{n^5 + 3}{n^2 + 1} = n^3 - n + \frac{n + 3}{n^2 + 1}$$

и  $|n + 3| < n^2 + 1$  при  $n > 2$  и  $n < -3$ . Действительно, если  $n > 2$ , то  $n^2 > 2n$ , поэтому

$$n^2 + 1 > 2n + 1 = n + n + 1 > n + 3.$$

А если  $n < -3$ , то  $n^2 > -3n$ , поэтому

$$n^2 + 1 > -3n + 1 = -n - 2n + 1 > -n + 7 > -n - 3.$$

**8.17.** Воспользуйтесь тем, что  $\frac{1}{(x+a)(x+a+1)} = \frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+a+1}$ .

**8.18.** Умножьте дроби на  $(a-b)(b-c)(c-a)$  и воспользуйтесь тем, что  $(c-b) + (a-c) + (b-a) = 0$ .

**8.19.** Умножьте дроби на  $(a-b)(b-c)(c-a)$  и воспользуйтесь тем, что  $a(c-b) + b(a-c) + c(b-a) = 0$ .

**8.20.** Умножьте дроби на  $(a-b)(b-c)(c-a)$  и воспользуйтесь тем, что

$$bc(c-b) + ac(a-c) + ab(b-a) = (a-b)(b-c)(c-a).$$

**8.21.** Воспользуйтесь задачами 8.18—8.20.

**8.22.** См. указание к задаче 8.21.

**8.23.** Воспользуйтесь тем, что  $m^2 - m + 1 = (m-1)^2 + (m-1) + 1$ .

## Глава 9. Линейные уравнения

**9.1.** *Первый способ.* Искомая абсцисса является решением уравнения  $kx + b = bx + k$ , т. е.  $(k-b)x = k-b$ . Данные графики пересекаются (не совпадают), поэтому  $k \neq b$  и  $x = 1$ . *Второй способ.* При  $x = 1$  обе данные линейные функции принимают одно и то же значение  $y = k + b$ . По условию их графики имеют ровно одну общую точку, поэтому других решений нет.

**9.2.** Пусть точка пересечения данных прямых имеет координаты  $(x_0; y_0)$ . Из первых двух уравнений следует, что  $kx_0 + b = 0$  и  $y_0 = 0$ . Из первого и третьего уравнения получаем, что  $kx_0 + b = bx_0 + k$ , т. е.  $x_0(k-b) = k-b$ . Если  $k = b$ , то первая и третья прямые совпадают, поэтому  $x_0 = 1$ . Таким образом, координатами общей точки могут быть только  $(1; 0)$ . Если положить  $k = 1$  и  $b = -1$ , то получим три

прямые  $y = x - 1$ ,  $y = 2x - 2$  и  $y = 1 - x$ . Эти прямые различны и пересекаются в точке  $(1; 0)$ .

**9.3.** В первом случае график каждой функции проходит через точку  $(1, 21)$ , а во втором — через точку  $(-1, 1)$ .

**9.4.** Согласно теореме Безу (задача 5.17)  $P(a) = A$  и  $P(b) = B$ . Пусть

$$P(x) = (x - a)(x - b)Q(x) + R(x),$$

где  $R(x) = px + q$ . Тогда  $R(a) = P(a) = A$  и  $R(b) = B$ , поэтому  $pa + q = A$  и  $pb + q = B$ .

**9.5.** Воспользуйтесь задачей 9.4 и тем, что

$$x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2);$$

остаток от деления многочлена  $x^{100}$  на  $x - a$  равен  $a^{100}$ .

**9.6.** Пусть карандаш, альбом и ручка стоят  $x$ ,  $y$  и  $z$  рублей. Тогда  $y = 6x$ ,  $2z = y = 6x$  и  $y = 20 + x + z$ . Поэтому  $6x = 20 + x + 3x$ , т. е.  $x = 10$ .

**9.7.** Если сложить первое уравнение со вторым и вычесть третье, то получим  $2y = a + b - c$ .

**9.8.** Пусть количества 10-копеечных монет, 15-копеечных и 20-копеечных равны  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Тогда  $x + y + z = 30$  и  $10x + 15y + 20z = 500$ . Вычитая из второго уравнения первое, умноженное на 15, получаем:  $5(z - x) = 50$ , поэтому  $z - x = 10 > 0$ .

**9.9.** Пусть сегодня большая рыба стоит  $A$ , а маленькая  $a$ ; вчера большая стоила  $B$ , а маленькая —  $b$ . Тогда

$$3A + a = 5B \quad \text{и} \quad 2A + a = 3B + b.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 5b &= 5(2A + a - 3B) = 10A + 5a - 3(5B) = \\ &= 10A + 5a - 3(3A + a) = A + 2a, \end{aligned}$$

т. е. пять маленьких вчера стоили столько же, сколько одна большая и две маленькие сегодня.

## Глава 10. Текстовые задачи

**10.1.** Количество волков увеличилось во столько же раз, во сколько увеличилось количество баранов.

**10.2.** Разность между новыми количествами конфет вдвое больше количества отданных конфет.



**10.3.** Пусть «столько» составляет 4 части. Тогда «столько да ещё столько, да ещё полстолько, да ещё четверть столько» составит  $4 + 4 + 2 + 1 = 11$  частей. Это же количество составляют 99 гусей. Значит, одна часть — это 9 гусей, а всего в стае было 36 гусей.

**10.4.** Добавьте к стае одного гуся. Тогда на каждом озере будет садиться ровно половина гусей.

**10.5.** Ягнёнок и козлёнок весят столько же, сколько козлёнок и два поросёнка. Поэтому поросёнок весит в два раза меньше ягнёнка.

**10.6.** Количество распилов каждого бревна на 1 меньше количества частей. Требуемое количество распилов равно  $4 + 2 + 2 = 8$ , на один распил затрачивается  $12 : 3 = 4$  минуты.

**10.7.** *Первый способ.* Каждое склеивание уменьшает на 1 количество кусков на столе. После 120 склеиваний получился один кусок (целый пазл), поэтому до начала работы был 121 кусок. Теперь если за минуту склеивать по три куска (т. е. уменьшать количество кусков на 2), то один кусок останется через 60 минут. *Второй способ.* За минуту Петя делал одно склеивание и на сбор пазла потратил 2 часа. Если бы он склеивал по три куска, он делал бы два склеивания за минуту, т. е. работал бы вдвое быстрее и потратил бы 1 час.

**10.8.** Можно считать, что велосипедист всё время едет в одном направлении (длина пути от этого не меняется). Его скорость в 2 раза больше скорости пешехода, поэтому за то время, за которое пешеход пройдёт 5 км, велосипедист проедет 10 км.

**10.9.** Добавим по единице к каждой оценке Васи. С одной стороны, его сумма баллов увеличится на 20. С другой стороны, она станет больше суммы оценок Коли на учетверённое количество Колиных двоек.

**10.10.** Если перенести «лишние» свечи с сегодняшнего торта Саши на старый Ванин торт, то получатся четыре торта с одинаковым числом свечек. Значит, сегодня Ване исполнилось  $216 : 4 = 54$  года.

**10.11.** 37 слонов за пять дней выпивают столько же, сколько  $37 \cdot 5 = 185$  слонов за один день. Разница в два слона объясняется тем, что за четыре лишних дня из ключей натекает столько воды, сколько два слона выпивают за день. Таким образом, ключи восполняют за день половину дневной порции слона. В озере (без ключей) 182,5 дневных порций слона. Один слон половину дня пьёт воду из озера, а половину из ключей. Поэтому ему понадобится  $182,5 \cdot 2 = 365$  дней.

**10.12.** За час разговора и час ожидания расходуется  $\frac{1}{6} + \frac{1}{210} = \frac{6}{35}$  заряда. Поэтому Алёна ехала  $2 \cdot \frac{35}{6} = \frac{35}{3} = 11\frac{2}{3}$  часа.

**10.13.** Пусть корова съедает за день 1 порцию травы. За  $60 - 24 = 36$  дней на лугу выросло  $30 \cdot 60 - 70 \cdot 24 = 120$  порций. Значит, помимо съеденных за 60 дней 30 коровами 1800 порций за добавочные  $96 - 60 = 36$  дней вырастет ещё 120 порций. Всего за 96 дней коровы должны съесть  $1800 + 120 = 1920$  порций. Поэтому количество коров равно  $1920 : 96 = 20$ .

**10.14.** У каждого цветка число тычинок в два раза больше разности числа пестиков и числа листков. Поэтому такое же соотношение выполняется и для всего букета.

**10.15.** Если сначала было  $n$  конфет и из них отдано  $m$  конфет, то  $\frac{n+m}{n-m} = 2$ .

**10.16.** *Первый способ.* Если кафтан стоил  $x$  рублей, то  $(9+x)\frac{3}{30} = x$ .

*Второй способ.* За оставшиеся 27 дней работник заработал бы 9 рублей, поэтому за три дня он заработал 1 рубль.

**10.17.** Пусть расстояние от  $A$  до  $B$  равно  $x$  км. До первой встречи оба велосипедиста вместе проехали  $x$  км, а велосипедист, выехавший из  $A$ , проехал 70 км. До второй встречи оба велосипедиста вместе проехали  $3x$  км, поэтому велосипедист, выехавший из  $A$ , проехал  $3 \cdot 70 = 210$  км. С другой стороны, он проехал  $x + 90$  км. Поэтому  $x + 90 = 210$ , т. е.  $x = 210 - 90 = 120$ .

**10.18.** Пусть  $2S$  машина проехала за время

$$\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2} = \frac{S(v_1 + v_2)}{v_1 v_2}.$$

Поэтому её средняя скорость равна  $2S \frac{v_1 v_2}{S(v_1 + v_2)}$ .

**10.19.** Пусть расстояние от Нижнего до Астрахани равно  $S$ . Тогда скорость парохода по течению равна  $\frac{S}{5}$ , а против течения  $\frac{S}{7}$ . Поэтому скорость течения (и скорость плотов) равна  $\frac{1}{2}(\frac{S}{5} - \frac{S}{7}) = \frac{S}{35}$ .

**10.20.** Пусть скорость катера  $v$  км/ч, скорость течения реки  $w$  км/ч, расстояние между  $A$  и  $B$  равно  $S$ . Тогда  $\frac{S}{v+w} = a$  и  $\frac{S}{v-w} = b$ , поэтому  $\frac{w}{v} = \frac{b-a}{a+b}$ . Без течения на путь из  $A$  в  $B$  требуется

$$\frac{S}{v} = \frac{S}{v+w} \cdot \frac{v+w}{v} = a \left(1 + \frac{b-a}{a+b}\right) = \frac{2ab}{a+b} \text{ часов.}$$

**10.21.** Пусть скорость катера  $v$  км/ч, скорость течения реки  $w$  км/ч, расстояние в одном направлении  $S$  км. Тогда время, затра-

ченное катером на весь путь, равно

$$\frac{S}{v+w} + \frac{S}{v-w} = \frac{2Sv}{v^2 - w^2} \text{ ч.}$$

Числитель этой дроби не зависит от  $w$ , а знаменатель для реки с быстрым течением меньше. Поэтому для реки с быстрым течением дробь больше.

**10.22.** Улитка может ползти полминуты со скоростью 2 м/мин, а затем стоять полминуты на месте, затем снова ползти полминуты со скоростью 2 м/мин, затем снова стоять полминуты на месте, и т. д. Проверьте, что за промежуток времени в 1 минуту, начинающийся в любой момент времени, полминуты из этого промежутка времени улитка стоит на месте и полминуты двигается со скоростью 2 м/мин.

**10.23.** Пусть турист идёт по такому графику: переходы по полчаса со скоростью 10 км/ч и привалы по полчаса. Тогда за 3,5 часа он пройдёт 20 км, и его средняя скорость равна  $20 : 3,5 = 5\frac{5}{7}$  км/ч.

**10.24.** Относительно плота каждый пловец всегда плывёт со своей собственной скоростью (независимо от того, по или против течения он плывёт). По условию каждый пловец плыл 5 мин, удаляясь от плота. Значит, ему потребуется ещё 5 мин, чтобы вернуться обратно.

**10.25.** За сутки гусеница поднимается вверх на 1 м. Поэтому за 8 суток она окажется на высоте 8 м и к 18 ч достигнет вершины.

**10.26.** Частота встреч обратно пропорциональна скорости отца относительно сына. Поэтому условие означает, что сумма  $S$  скоростей отца и сына в 5 раз больше разности  $R$  этих скоростей. Разделив удвоенную скорость отца  $S + R$  на удвоенную скорость сына  $S - R$ , получим отношение их скоростей:  $\frac{S+1}{S-1} = 1,5$ .

**10.27.** Если  $8n = 69 - 5m$ , то число  $m$  нечётно. Вычтите из 69 последовательно числа 5, 15, 25, 35, 45 и 55.

**10.28.** Если бы камни удалось увезти, то на какую-то трёхтонку пришлось бы положить 8 камней, но даже 8 самых лёгких камней весят  $370 + 372 + \dots + 384 = 370 \cdot 8 + 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 = 3016$  кг, а это больше 3 т.

**10.29.** На одну платформу нельзя погрузить 6 плит даже по 7 т. Поэтому нужно по крайней мере  $\frac{200}{5} = 40$  платформ. Сорока платформ достаточно: на каждую платформу можно погрузить 3 плиты по 7 т и 2 плиты по 9 т.

**10.30.** Выделим 8 машин и будем последовательно их грузить, причём каждый раз тот ящик, который уже нельзя погрузить, будем ставить рядом с машиной. Погруженные ящики вместе с ящиками, стоящими рядом с машинами, весят более  $8 \cdot 1,5 = 12$  т, поэтому оставшиеся ящики весят менее 1,5 т; их можно увезти на одной полутоннажке. Поскольку  $4 \cdot 350 = 1400 < 1500$ , на одной машине можно увезти любые 4 ящика. Значит, 8 ящиков, стоящих рядом с машинами, можно увезти на двух оставшихся полутоннажках.

## Глава 11. Дополнительные задачи

**11.1.** Нужно расковать одно звено, чтобы цепочка распалась на два звена и четыре звена.

**11.2.** Можно расковать 3 звена одной цепи.

**11.3.** Если взять 4 карандаша, то среди них могут оказаться только красные. Если же взять 5 карандашей, то останется один карандаш, поэтому взято не менее трёх красных карандашей и не менее одного синего.

**11.4.** Если взять 9 карандашей, то среди них могут оказаться семь красных и только два синих. Если же взять 10 карандашей, то останется 2 карандаша, поэтому взято не менее пяти красных карандашей и не менее трёх синих.

**11.5.** Количество грибов, собранных Сашей, делится на  $3 \cdot 5 = 15$ . Если бы он собрал 30 грибов, то вместе они собрали бы 46 грибов.

**11.6.** Пусть  $a_1 > a_2 > \dots > a_7$  — количества грибов, собранных грибниками. Если  $a_3 \geq 16$ , то  $a_2 \geq 17$  и  $a_1 \geq 18$ , поэтому  $a_1 + a_2 + a_3 \geq 51$ . Если  $a_3 \leq 15$ , то  $a_4 \leq 14$ ,  $a_5 \leq 13$ ,  $a_6 \leq 12$  и  $a_7 \leq 11$ , поэтому

$$a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 50,$$

а значит,  $a_1 + a_2 + a_3 \geq 50$ .

**11.7.** Пусть в классе  $x$  мальчиков и  $y$  девочек. Тогда

$$\frac{4x + 3,25y}{x + y} = 3,6,$$

т. е.  $8x = 7y$ . Значит,  $x = 7a$  и  $y = 8a$  для некоторого целого  $a$ . Поэтому число  $x + y = 15a$  делится на 15. Единственное число, делящееся на 15, которое больше 30 и меньше 50, — это 45. Таким образом,  $x = 21$  и  $y = 24$ .

**11.9.** Пусть на пересечении строки, в которой стоит число  $A$ , и столбца, в котором стоит число  $B$ , стоит число  $x$ . Тогда  $A \leq x \leq B$ .

**11.10.** Мальчики в лодке плывут к противоположному берегу. Один из них остаётся там, а другой возвращается. Один солдат переправляется, вылезает, мальчик возвращается и потом снова мальчики в лодке плывут к противоположному берегу и т. д.

**11.11.** Сначала нужно перевезти через реку козу. После этого перевозчик возвращается, и есть два варианта дальнейших действий. Нужно перевезти капусту (волка), вернуться обратно с козой, оставить козу на берегу, перевезти волка (капусту) и потом перевезти козу.

**11.12.** Будем указывать в скобках, кто плывёт в лодке. Переправиться через реку можно следующим образом:

PPCC(PC), PPCC(P)C, PCC(PP)C, PCC(P)PC, CC(PP)PC,  
CC(C)PPP, C(CC)PPP, C(P)PPCC, (PC)PPCC.

**11.13.** Бабушка должна пройти по мосту вместе с внуком. Сначала идут папа с мамой, затем папа возвращается с фонариком, после этого идут бабушка с внуком, затем мама возвращается с фонариком, наконец, папа с мамой переходят через мост. Всего на это будет затрачено

$$2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17 \text{ минут.}$$

**11.14.** Если в 8-литровый, 5-литровый и 3-литровый кувшин налито, соответственно,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  литров молока, то будем обозначать это  $(a, b, c)$ . Можно применить такую последовательность переливаний:

$$(8, 0, 0) \rightarrow (3, 5, 0) \rightarrow (3, 2, 3) \rightarrow (6, 2, 0) \rightarrow \\ \rightarrow (6, 0, 2) \rightarrow (1, 5, 2) \rightarrow (1, 4, 3) \rightarrow (4, 4, 0).$$

**11.15.** Можно применить такую последовательность переливаний:

$$(12, 0, 0) \rightarrow (4, 8, 0) \rightarrow (0, 8, 4) \rightarrow (8, 0, 4) \rightarrow (8, 4, 0) \rightarrow \\ \rightarrow (3, 4, 5) \rightarrow (3, 8, 1) \rightarrow (11, 0, 1) \rightarrow (11, 1, 0) \rightarrow \\ \rightarrow (6, 1, 5) \rightarrow (6, 6, 0).$$

**11.16.**  $(24, 0, 0, 0) \rightarrow (19, 0, 0, 5) \rightarrow (8, 0, 11, 5) \rightarrow (8, 11, 0, 5) \rightarrow$   
 $\rightarrow (0, 11, 8, 5) \rightarrow (0, 13, 8, 3) \rightarrow (8, 13, 0, 3) \rightarrow (8, 13, 3, 0) \rightarrow$   
 $\rightarrow (8, 8, 3, 5) \rightarrow (8, 8, 8, 0).$

**11.17.**  $(a, 0, 0) \rightarrow (a - 9, 9, 0) \rightarrow (a - 9, 4, 5) \rightarrow (a - 4, 4, 0) \rightarrow$   
 $\rightarrow (a - 4, 0, 4) \rightarrow (a - 13, 9, 4) \rightarrow (a - 13, 8, 5) \rightarrow (a - 8, 8, 0).$

# Предметный указатель

- абсцисса точки 37
- алгебраическая дробь 33
- аликвотная дробь 11
  
- бесконечная десятичная дробь 7
  
- взаимно простые числа 19
- выделение полного квадрата 27
  
- график функции 37
  
- деление с остатком многочленов 24
  - натуральных чисел 19
- делимость многочленов 24
- десятичная дробь бесконечная 7
  - — конечная 7
- десятичное разложение дроби 7
  - дробь 7
    - алгебраическая 33
    - аликвотная 11
    - десятичная 7
    - несократимая 7
    - обыкновенная 7
    - правильная 7
    - смешанно периодическая 8
    - чисто периодическая 8
  
- египетская дробь 11
  
- знаменатель дроби 7
  
- конечная десятичная дробь 7
- координата 36
- координаты 37
- корень многочлена 24
- коэффициент многочлена 24, 25
  - при неизвестном 36
  
- линейная функция 36
- линейное уравнение с двумя неизвестными 36
  - — с одним неизвестным 36
  
- многочлен 24
  
- наибольший общий делитель 19
- наименьшее общее кратное 19
- начало координат 36, 37
- неполное частное 20, 24
- несократимая дробь 7
- нулевой многочлен 24
  
- обыкновенная дробь 7
- одночлен 24, 25
- ордината точки 37
- основание степени 13
- основная теорема арифметики 19
- остаток от деления 19, 24
- ось абсцисс 37
  - координат 36
  - ординат 37
  
- период дроби 8
- показатель степени 13
- полный квадрат 20
- положительная полуось 36
- положительное рациональное число 7
- правильная дробь 7
- признак делимости 16
- простое число 19

- процент 8
- прямоугольная система координат 37
- равные многочлены 24
- разложение числа на простые множители 19
- свободный член 24
- система координат прямоугольная 37
- смешанно периодическая дробь 8
- составное число 19
- сравнение по модулю 20
- среднее арифметическое 39
- средняя скорость 39
- старший коэффициент 24
- степень многочлена 24
- числа 13
- теорема Безу 26
- точный квадрат 20
- уравнение первой степени 36
- факториал 20
- формула квадрата разности 27
- — суммы 27
- куба разности 27
- — суммы 27
- разности квадратов 27
- — кубов 27
- суммы кубов 27
- частное 20
- двух многочленов 24
- числа взаимно простые 19
- числитель дроби 7
- число положительное
- рациональное 7
- простое 19
- составное 19
- чисто периодическая дробь 8

*Учебно-методическое издание*

ВИКТОР ВАСИЛЬЕВИЧ ПРАСОЛОВ

ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ. 7 КЛАСС

Редактор Быкова М. Г.

Подписано к печати 10.06.2019 г. Формат 60 × 90/16. Печать офсетная.

Объем 16 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра

непрерывного математического образования.

119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в типографии ООО «Принт сервис групп»,

тел./факс: (499) 785 05 18, e-mail: 3565264@mail.ru, www.printsg.ru

105187, г. Москва, Борисовская ул., д. 14, стр. 6

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 745-80-31. E-mail: biblio@mcsme.ru

---



ISBN 978-5-4439-1395-7



9 785443 913957 >