

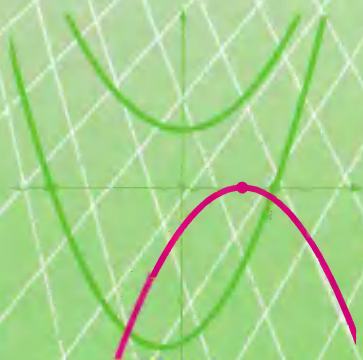
ЗАДАЧИ

Decorative geometric lines and squares in green and magenta colors, crossing the page diagonally.

В. В. ПРАСОЛОВ

АЛГЕБРА

8 класс



ФГОС

В. В. Прасолов

Задачи по алгебре

8 класс

Москва
Издательство МЦНМО
2020

УДК 512.1+517.1+511.1

ББК 22.141+22.161

П70

Прасолов В. В.

П70 Задачи по алгебре. 8 класс. — М.: МЦНМО, 2020. — 94 с.

ISBN 978-5-4439-1400-8

Книга содержит задачи повышенной сложности по алгебре для учащихся 8 класса. Большинство из 10 глав начинается с перечисления основных фактов и понятий, относящихся к этой главе. Затем приводятся решения нескольких наиболее типичных задач. После этого следуют задачи для самостоятельного решения. В конце приведены ответы и почти ко всем задачам даны указания.

Для учителей математики и для школьников, которые хотят научиться решать задачи, немного более сложные, чем задачи из учебника. По этой книге можно подготовиться к математическим олимпиадам, уровень которых ниже уровня заключительного этапа Всероссийской олимпиады.

ББК 22.141+22.161

12+

ISBN 978-5-4439-1400-8

© Прасолов В. В., 2020.

© МЦНМО, 2020.

Оглавление

Предисловие	5
Список обозначений	6
Глава 12. Неравенства. Модуль числа	7
Линейные неравенства (8). Системы линейных неравенств (9). Доказательство неравенств (10). Модуль числа (11).	
Глава 13. Квадратный корень	12
Сравнение корней (13). Тождества с корнями (13). Иррациональные квадратные корни (14). Избавление от иррациональности в знаменателе (15). Уравнения с корнями (15). Неравенства с корнями (16). Числа $a + \sqrt{b}$ и $a - \sqrt{b}$ (16).	
Глава 14. Квадратный трёхчлен	17
Текстовые задачи (18). Корни квадратного уравнения (19). Дискриминант (20). Формулы Виета (20). Уравнения с корнями (21). У квадратного трёхчлена не может быть трёх различных корней (21). Числа Фибоначчи (22). Разные задачи (22).	
Глава 15. Рациональные уравнения	23
Биквадратные и возвратные уравнения (23). Корни многочленов (23). Уравнения с дробями (24).	
Глава 16. Системы уравнений	25
Исключение неизвестных (27). Симметрические системы (27). Разложение на множители (27). Применение неравенств (28). Разные задачи (28).	
Глава 17. Комплексные числа	30
Комплексные корни квадратных уравнений (30). Сопряжённые числа (31). Корни из единицы (31).	
Глава 18. Парабола и гипербола	33
График квадратичной функции (34). График функции $y = \frac{1}{x}$ (36). Дробно-линейная функция (36).	
Глава 19. Квадратные неравенства	37
Решение неравенств (37). Расположение корней квадратного трёхчлена (37). Разные задачи (38).	

Глава 20. Комбинаторика и вероятность	39
Правило произведения (41). Перестановки (42). Размещения (42). Сочетания (42). Разные выборы (43). Комбинаторика в арифметике (43). Взаимно однозначные соответствия (43). Вероятность (44).	
Глава 21. Дополнительные задачи	46
Многочлены (46). Целая и дробная части числа (46). Принцип Дирихле (48). Логические задачи (48).	
Ответы	50
Указания	54
Предметный указатель	92

Предисловие

Книга содержит задачи по алгебре для учащихся 8 класса. Эти задачи немного сложнее тех, которые приводятся в учебниках как основные, но не сложнее тех, которые приводятся как дополнительные задачи или как задачи повышенной трудности.

Большинство из 10 глав начинается с перечисления основных фактов и понятий, относящихся к этой главе. Эти факты и понятия есть во всех школьных учебниках и приводятся для напоминания. Те же понятия, которые есть в некоторых учебниках, но не во всех, приводятся в тех параграфах, в которых они впервые встречаются. К таким понятиям относятся, в частности, числа Фибоначчи, биквадратное уравнение, возвратное уравнение, симметрическая система уравнений, корни из единицы, дробно-линейная функция, целая часть числа, дробная часть числа, принцип Дирихле.

После перечисления основных фактов и понятий во многих главах разбираются решения нескольких наиболее типичных задач. Затем приводятся задачи для самостоятельного решения. В конце приведены ответы и ко всем задачам (кроме тех, к которым уже сам ответ является полным решением) даны указания.

Порядок изложения материала в этом задачнике может отличаться от порядка изложения в школьном учебнике, потому что в разных учебниках порядок изложения разный. Но решать задачи желательно именно в предлагаемом порядке, потому что именно в этом порядке лучше всего проясняются взаимосвязи между разными задачами.

Порядок изложения строго последовательный: ни в одной из глав материал последующих глав не используется.

По этой книге можно подготовиться к математическим олимпиадам, уровень которых ниже уровня заключительного этапа Всероссийской олимпиады.

Эта книга является непосредственным продолжением книги «Задачи по алгебре. 7 класс» (МЦНМО, 2019). Нумерация глав продолжает нумерацию из предыдущей книги.

Список обозначений

7 класс

\overline{abc} — десятичная запись числа

$\text{НОД}(a, b)$ — наибольший общий делитель

$\text{НОК}(a, b)$ — наименьшее общее кратное

$a \equiv c \pmod{b}$ — сравнение по модулю

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ — факториал

8 класс

$>, <, \geq, \leq$ — неравенства, с. 7

$|x|$ — модуль числа x , с. 7

\sqrt{a} — арифметический квадратный корень из числа a , с. 12

$\sqrt[n]{a}$, с. 12

i — мнимая единица, с. 30

$|z|$ — модуль комплексного числа, с. 30

\bar{z} — сопряжённое число, с. 30

$(a; b)$, $(-\infty; b)$, $(a; \infty)$ — интервал, с. 37

$[a; b]$ — отрезок, с. 37

\cup — объединение, с. 37

$(a; b]$, $[a; b)$ — полуинтервал, с. 37

C_n^k — число сочетаний из n элементов по k , с. 40

$[x]$ — целая часть числа, с. 46

$\{x\}$ — дробная часть числа, с. 46

Глава 12

Неравенства. Модуль числа

Основные факты и понятия

Напомним, что запись $a > b$ ($a < b$) означает, что число a больше b (a меньше b), а запись $a \geq b$ ($a \leq b$) означает, что число a больше или равно b (a меньше или равно b).

Свойства неравенств.

1. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$.
2. Если $a > b$, то $a + c > b + c$.
3. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
4. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$.
5. Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.
6. Если $a > b$, то $-a < -b$.

Неравенство $a > b$ называют *строгим*, а неравенство $a \geq b$ называют *нестрогим*.

Неравенства

$$a < b < c, \quad a \leq b < c, \quad a < b \leq c, \quad a \leq b \leq c$$

называют *двойными*.

Если $a > b > 0$, то $0 < \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Линейное неравенство (с двумя неизвестными x и y) — это неравенство вида $ax + by > c$, где a , b и c — некоторые числа, причём хотя бы одно из чисел a и b отлично от нуля. Линейное неравенство с тремя неизвестными x , y и z — это неравенство вида

$$ax + by + cz > d,$$

где хотя бы одно из чисел a , b и c отлично от нуля.

Модуль числа x — это число $|x|$, равное x при $x \geq 0$ и $-x$ при $x < 0$. Модуль числа называют также *абсолютной величиной* числа.

Примеры решения задач

Пример 1. Семь шоколадок дороже восьми пачек печенья. Что дороже: 8 шоколадок или 9 пачек печенья?

Решение. Пусть стоимость шоколадки равна x , а стоимость пачки печенья равна y . По условию $7x > 8y$. Поэтому

$$8x = \frac{8 \cdot 7x}{7} > \frac{8 \cdot 8y}{7} > 9y,$$

т. е. 8 шоколадок дороже, чем 9 пачек печенья.

Ответ. 8 шоколадок.

Пример 2. Дама сдавала в багаж рюкзак, чемодан, саквояж и корзину. Известно, что чемодан весит больше, чем рюкзак; саквояж и рюкзак весят больше, чем чемодан и корзина; корзина и саквояж весят столько же, сколько чемодан и рюкзак. Перечислите вещи дамы в порядке убывания их веса.

Решение. Если положить на левую чашу весов корзину и саквояж, а на правую — чемодан и рюкзак, то по условию весы будут в равновесии. Если затем поменять местами корзину и рюкзак, то левая чаша перевесит. Поэтому рюкзак весит больше корзины, а саквояж — больше чемодана. Кроме того, по условию чемодан весит больше рюкзака.

Ответ. Саквояж, чемодан, рюкзак, корзина.

Пример 3. Докажите, что $x(a - x) \leq \frac{a^2}{4}$.

Решение. Из тождества

$$x^2 - ax + \frac{a^2}{4} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

следует, что $x(x - a) + \frac{a^2}{4} \geq 0$, т. е. $x(a - x) \leq \frac{a^2}{4}$.

Пример 4. Числа a и b различны. Решите уравнение $|x - a| = |x - b|$.

Решение. Если $x - a = x - b$, то $a = b$, что противоречит условию. Поэтому $x - a = -(x - b)$, т. е. $2x = a + b$.

Ответ. $x = \frac{a+b}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Линейные неравенства

12.1. Девять одинаковых книг стоят 11 рублей с копейками, а 13 таких книг стоят 15 рублей с копейками. Сколько стоит одна книга?

12.2. Докажите, что если $a > b > 0$ и $\frac{x}{a} < \frac{y}{b}$, то $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) > \frac{x+y}{a+b}$.

12.3. Трое друзей купили мяч. Каждый из них внёс не больше половины суммы, внесённой двумя остальными. Обязательно ли они внесли поровну?

12.4. Пятеро друзей купили мяч. Могло ли оказаться, что каждые два из них внесли менее одной трети общей стоимости?

12.5. Найдите дробь, если известно, что она больше $\frac{5}{9}$ и меньше $\frac{4}{7}$, а её числитель меньше знаменателя на 16.

12.6. Найдите все пары чисел a и b , для которых при всех $x < 0$ выполняется неравенство $ax + 2 < 3x + b$.

Системы линейных неравенств

12.7. Школьники одного класса ходили в два туристических похода. В каждом походе мальчиков было меньше $\frac{2}{5}$ общего количества участников похода. Докажите, что в этом классе мальчики составляют меньше $\frac{4}{7}$ общего числа учеников, если известно, что каждый из учеников был по крайней мере в одном походе.

12.8. Найдите все пары целых чисел x и y , удовлетворяющих равенству $3x + 4y = 32$ и неравенствам $x < y < \frac{3}{2}x$.

12.9. Запишите в строку пять чисел так, чтобы сумма каждых двух соседних чисел была отрицательна, а сумма всех чисел положительна.

12.10. Запишите в строку 20 чисел так, чтобы сумма любых трёх последовательных чисел была положительна, а сумма всех 20 чисел была отрицательна.

12.11. Девять чисел таковы, что сумма каждых четырёх из них меньше суммы пяти остальных. Докажите, что все числа положительны.

12.12. Сумма любых четырёх из данных 25 чисел положительна. Докажите, что сумма всех чисел тоже положительна.

12.13. Докажите, что если $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{10}$, то

$$\frac{1}{6}(a_1 + a_2 + \dots + a_6) \leq \frac{1}{10}(a_1 + a_2 + \dots + a_{10}).$$

12.14. Числа a, b, c и d отличны от нуля и $ad \neq bc$. Докажите, что для некоторых чисел x и y выполняются неравенства

$$ax > by \quad \text{и} \quad cx > dy.$$

$$\begin{aligned} & a_1 - 3a_2 + 2a_3 \geqslant 0, \\ & a_2 - 3a_3 + 2a_4 \geqslant 0, \\ & \dots\dots\dots \\ & a_{99} - 3a_{100} + 2a_1 \geqslant 0, \\ & a_{100} - 3a_1 + 2a_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

12.26. Докажите, что если $x^2 + y^2 = a^2$, то $\frac{a^4}{2} \leq x^4 + y^4 \leq a^4$.

12.27. Докажите, что

$$\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 - \left(x^6 + \frac{1}{x^6}\right) - 2}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 + \left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)} \geq 6 \quad \text{при } x > 0.$$

12.28. Докажите, что если $0 \leq a, b, c, d \leq 1$, то

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + a + b + c + d \geq 1.$$

Модуль числа

12.29. Докажите, что для любых двух чисел x и y выполняется неравенство $|x + y| \leq |x| + |y|$, причём это неравенство строгое тогда и только тогда, когда $xy < 0$.

12.30. Решите уравнение $2x = |x| + 1$.

12.31. Решите неравенство $|x + a| < |x - a - 1|$ для данного числа a .

12.32. Докажите, что $|x + a| + |x - a| \geq 2|a|$.

12.33. Решите уравнение $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| = 2$.

12.34. Решите уравнение $|x - 2| + |x - 1| + |x| + |x + 1| + |x + 2| = 6$.

12.35. Решите уравнение $|x - a| + |x - b| = a - b$ для данных чисел a и b , где $a > b$.

12.36. Решите уравнение $|x + 1| - |x| + 3|x - 1| - 2|x - 2| = x + 2$.

12.37. Докажите, что наибольшее из чисел x и y равно

$$\frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2},$$

а наименьшее из этих чисел равно

$$\frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}.$$

12.38. Докажите, что ни для каких чисел x, y, z не могут одновременно выполняться три неравенства: $|x| < |y - z|$, $|y| < |z - x|$, $|z| < |x - y|$.

12.39. Докажите, что если $a + b + c + d > 0$, $a > c$ и $b > d$, то $|a + b| > |c + d|$.

12.40. Докажите, что если $|x| < 1$ и $|y| < 1$, то $|x - y| < |1 - xy|$.

12.41. Докажите, что для любых чисел x, y и z выполняется неравенство

$$|x| + |y| + |z| \leq |-x + y + z| + |x - y + z| + |x + y - z|.$$

12.42. Докажите, что если $|x| \leq a$ и $|x - y| \leq 1$, то $|x^2 - y^2| \leq 2a + 1$.

Глава 13

Квадратный корень

Основные факты и понятия

Арифметическим квадратным корнем из числа a называют неотрицательное число, квадрат которого равен a . Арифметический квадратный корень из числа a обозначают \sqrt{a} .

Арифметический квадратный корень из отрицательного числа не определён, $\sqrt{0} = 0$.

Для положительного a уравнение $x^2 = a$ имеет два корня: $x = \sqrt{a}$ и $x = -\sqrt{a}$.

Иррациональное число — это число, которое не является рациональным. Арифметический квадратный корень из натурального числа, которое не является полным квадратом, иррационален (пример 3).

При сравнении корней бывает удобно поставить вместо знака неравенства знак \vee и рассматривать только преобразования, которые сохраняют знак неравенства. Если после нескольких таких преобразований выяснится, какой именно знак неравенства стоит в конце, то такой же знак неравенства стоит и в начале. Такое обозначение используется в решении примера 1.

Примеры решения задач

Пример 1. Какое из чисел больше: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ или $\sqrt{11}$?

Решение. Воспользуемся обозначением \vee , о котором шла речь выше, и сделаем такие преобразования:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \vee \sqrt{11} \Leftrightarrow 2 + 2\sqrt{6} + 3 \vee 11 \Leftrightarrow 2\sqrt{6} \vee 6 \Leftrightarrow 6 \vee 9.$$

Ясно, что $6 < 9$, поэтому $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{11}$.

Ответ. $\sqrt{11}$.

Пример 2. Докажите, что

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1 \quad \text{и} \quad \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1.$$

Решение. Числа $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2}+1$ положительные, а их квадраты равны $3+2\sqrt{2}$. Следовательно, эти числа равны.

Из неравенств $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ следует, что числа $3-2\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}-1$ положительные. Квадраты чисел $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2}-1$ равны $3-2\sqrt{2}$. Следовательно, эти числа равны.

Пример 3. Натуральное число n не является полным квадратом. Докажите, что число \sqrt{n} иррационально.

Решение. Предположим, что $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда числа p и q не имеют общих делителей, поэтому $n = \frac{p^2}{q^2}$ тоже несократимая дробь. Эта несократимая дробь равна целому числу, следовательно, $q = 1$ и $n = p^2$.

Задачи для самостоятельного решения

Сравнение корней

13.1. Какое из чисел больше: $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ или $2\sqrt{5}$?

13.2. Какое из чисел больше: $\sqrt{6} + 2\sqrt{7}$ или $\sqrt{10} + \sqrt{21}$?

13.3. Какое из чисел больше:

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} \quad \text{или} \quad 2\sqrt{n}$$

(число n натуральное)?

13.4. Какое из чисел больше:

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt{n}}$$

(число n натуральное)?

13.5. Какое из чисел больше:

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \quad \text{или} \quad \sqrt{n+1} + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}$$

(число n натуральное)?

13.6. Какое из чисел больше:

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \quad \text{или} \quad \sqrt{n + \sqrt{n+1}}$$

(число n натуральное)?

Тождества с корнями

13.7. Докажите, что $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} = \sqrt{a-1} + 1$ при $a \geq 1$.

13.8. Докажите, что

$$\sqrt{a-2\sqrt{a-1}} = \sqrt{a-1} - 1 \quad \text{при } a \geq 2$$

и

$$\sqrt{a-2\sqrt{a-1}} = 1 - \sqrt{a-1} \quad \text{при } 1 \leq a \leq 2.$$

13.9. Докажите, что $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{2}$.

13.10. Представьте выражение

$$\sqrt{3+\sqrt{2}} + \sqrt{3-\sqrt{2}}$$

в виде $\sqrt{m+\sqrt{n}}$, где m и n — натуральные числа.

13.11. При $a > \sqrt{b}$ докажите равенства

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

и

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

13.12. Представьте числа $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ и $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$ в виде $\sqrt{m} \pm \sqrt{n}$, где m и n — натуральные числа.

13.13. Докажите, что $\sqrt{10+\sqrt{24}} + \sqrt{40+\sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

13.14. Докажите равенство

$$\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{5}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}.$$

13.15. Представьте выражение

$$2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$$

в виде $\sqrt{m} + \sqrt{n}$, где m и n — натуральные числа.

Иррациональные квадратные корни

13.16. Докажите, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррациональное.

13.17. Докажите, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ иррациональное.

13.18. Числа a , b , c и d рациональные и $a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$. Докажите, что $a=c$ и $b=d$.

13.19. Найдите все a , для которых числа $a + \sqrt{15}$ и $\frac{1}{a} - \sqrt{15}$ целые.

13.20. Докажите, что если числа a , b и $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ рациональные, то оба числа \sqrt{a} и \sqrt{b} рациональные.

13.21. Докажите, что если m и n — натуральные числа, то

$$\left| \frac{m}{n} - \sqrt{2} \right| \geq \frac{1}{4n^2}.$$

Избавление от иррациональности в знаменателе

13.22. Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}$ и $\frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{a - b}$.

13.23. Решите задачу 13.14, избавляясь от иррациональности в знаменателе.

13.24. Докажите равенство

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{98} + \sqrt{99}} = \sqrt{99} - 1.$$

13.25. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}.$$

Уравнения с корнями

13.26. Решите уравнение $(x^2 + x)^2 + \sqrt{x^2 - 1} = 0$.

13.27. Решите уравнение

$$\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x - 1}} = 1.$$

13.28. Решите уравнение

$$\frac{36}{\sqrt{x - 2}} + \frac{4}{\sqrt{y - 1}} = 28 - 4\sqrt{x - 2} - \sqrt{y - 1}.$$

13.29. Найдите все целые числа m и n , удовлетворяющие соотношению $\sqrt{n} + \sqrt{n} = m$.

13.30. Приведите пример натурального числа n , для которого $\sqrt{n} + \sqrt{n + 60} = \sqrt{m}$, где m — натуральное число, не являющееся полным квадратом.

В обосуждению уравнений с корнями мы ещё вернёмся в главе 14, когда познакомимся с решением квадратных уравнений.

Неравенства с корнями

13.31. Числа a и b положительные. Докажите, что $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

13.32. Решите неравенство $x + y^2 + \sqrt{x - y^2 - 1} \leq 1$.

13.33. Числа a , b , c и d положительные, и их сумма равна 1. Докажите, что

$$\sqrt{1+4a} + \sqrt{1+4b} + \sqrt{1+4c} + \sqrt{1+4d} \leq 6.$$

13.34. Пусть

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \sqrt{1+\sqrt{1}}, \quad a_3 = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1}}}, \quad \dots, \quad a_n = \sqrt{1+a_{n-1}}.$$

Докажите, что: а) $a_n < 2$; б) $a_n < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

13.35. Пусть

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \quad \dots, \quad a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}.$$

Докажите, что $a_n < 2$.

Числа $a + \sqrt{b}$ и $a - \sqrt{b}$

13.36. Числа a и b натуральные. Докажите, что для любого натурального n число $(a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n$ целое.

13.37. Найдите первую цифру после запятой числа $(2 + \sqrt{3})^{1000}$.

13.38. Докажите, что для любого натурального n число $(1 + \sqrt{2})^n$ можно представить в виде $\sqrt{m} + \sqrt{m+1}$, где m — некоторое натуральное число.

Глава 14

Квадратный трёхчлен

Основные факты и понятия

Квадратным уравнением называют уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где $a \neq 0$. Квадратное уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называют *приведённым*.

Дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ называют число $D = b^2 - 4ac$. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет корней. Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет единственный корень $-\frac{b}{2a}$. Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня $\frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ и $\frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.

Формулы Виета. Если приведённое квадратное уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

имеет два корня x_1 и x_2 , то

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{и} \quad x_1 x_2 = q.$$

Многочлен $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$, называют *квадратным трёхчленом*. Число $D = b^2 - 4ac$ называют *дискриминантом* этого квадратного трёхчлена.

Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ можно представить в виде

$$a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$

Поэтому если $D < 0$, то для всех x функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ принимает значения одного и того же знака. А если $D > 0$, то эта функция принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Примеры решения задач

Пример 1. Подруги обменялись фотографиями: каждая девочка получила фотографии всех остальных. Всего для этого потребовалось 30 фотографий. Сколько было подруг?

Решение. Если количество подруг равно x , то $x(x - 1) = 30$. Квадратное уравнение $x^2 - x - 30 = 0$ имеет корни 6 и -5 ; отрицательный корень не подходит.

Ответ. 6.

Пример 2. Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней и $a + c < b$. Положительно или отрицательно число c ?

Решение. Все значения функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеют один и тот же знак, и $f(-1) = a - b + c < 0$. Поэтому $c = f(0) < 0$.

Ответ. Отрицательно.

Пример 3. Корни многочлена $x^2 + px + q$ равны x_1 и x_2 . Выразите $x_1^2 + x_2^2$ и $x_1^3 + x_2^3$ через p и q .

Решение. Легко проверить, что

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = p^2 - 2q$$

и

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = -p^3 + 3pq.$$

Ответ. $p^2 - 2q$ и $-p^3 + 3pq$.

Пример 4. Решите уравнение $x = \sqrt{1+x}$.

Решение. Возведя обе части в квадрат, получим квадратное уравнение $x^2 - x - 1 = 0$. Любой неотрицательный корень этого уравнения является корнем исходного уравнения, а любой отрицательный не является. Полученное квадратное уравнение имеет корни $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Корень x_1 положительный, а корень x_2 отрицательный. Нам подходит только корень x_1 .

Ответ. $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Задачи для самостоятельного решения

Текстовые задачи

14.1. В шахматном турнире сыграно 36 партий, каждый шахматист сыграл со всеми остальными. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

14.2. Найдите два числа, сумма которых равна 20, а произведение равно 96.

14.3. Первый рабочий изготовил 60 деталей на 3 часа быстрее второго. За сколько часов второй рабочий изготовит 20 деталей, если, работая вместе, они изготовят 30 деталей за 1 час?

14.4. В сплав магния и алюминия, содержащий 22 кг алюминия, добавили 15 кг магния, после чего содержание магния в сплаве увеличилось на 33 %. Сколько первоначально весил сплав?

14.5. В сосуде было 20 л чистого спирта. Часть этого спирта отлили и долили столько же воды. Затем отлили столько же смеси и долили столько же воды. После этого спирта в сосуде стало втрое меньше, чем воды. Сколько спирта отлили в первый раз?

14.6. Города A и B расположены на берегу реки, причём город B расположен ниже по течению. В 9 часов утра из города A в город B отправляется плот. В этот же момент из города B в город A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 часов. Доплыв до города A , лодка поворачивает обратно и приплывает в город B одновременно с плотом. Успеют ли лодка и плот прибыть в город B к 9 часам вечера (того же дня)?

Корни квадратного уравнения

14.7. Уравнение $x^2 + ax + b = 0$ с рациональными коэффициентами имеет корень $1 + \sqrt{3}$. Найдите a и b .

14.8. Докажите, что квадратный трёхчлен

$$(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) + (x - c)(x - a)$$

имеет корень.

14.9. У трёхчленов $x^2 + ax + b$ и $x^2 + cx + d$ нет корней, меньших x_0 . Докажите, что у трёхчлена

$$x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2}$$

тоже нет корней, меньших x_0 .

14.10. Найдите все a , для которых квадратный трёхчлен

$$x^2 + 2ax - 3$$

имеет корень a .

14.11. Найдите все a , для которых уравнения

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + x + a = 0$$

имеют общий корень.

14.12. Докажите, что уравнения

$$x = 3 + \frac{1}{x} \quad \text{и} \quad x = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}}$$

имеют одинаковые корни.

14.13. Решите уравнение

$$\frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} = \frac{50}{x-49} + \frac{49}{x-50}.$$

14.14. Докажите, что если квадратные уравнения $x^2 + p_1x + q_1 = 0$ и $x^2 + p_2x + q_2 = 0$ имеют общий корень, то

$$(q_2 - q_1)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - q_1p_2) = 0.$$

14.15. Числа m и n целые, каждое из них больше 1. Докажите, что

$$\left(\frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2} \right)^m = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$

для некоторого натурального k .

14.16. Коэффициенты p и q квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ изменили не больше чем на 0,001. Может ли больший корень уравнения измениться при этом больше чем на 1000?

Дискриминант

14.17. Докажите, что дискриминант приведённого квадратного уравнения, имеющего два корня x_1 и x_2 , равен $(x_1 - x_2)^2$.

14.18. а) Вычислите дискриминант квадратного трёхчлена

$$(a_1x + b_1)^2 + \dots + (a_nx + b_n)^2.$$

б) Докажите *неравенство Коши*:

$$(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2).$$

14.19. Докажите, что квадратный трёхчлен

$$c(x-a)(x-b) + a(x-b)(x-c) + b(x-c)(x-a)$$

имеет корень.

14.20. Найдите наименьшее значение многочлена

$$x(x+1)(x+2)(x+3).$$

Формулы Виета

14.21. Корни многочлена $x^2 + px + q$ равны x_1 и x_2 . Выразите $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ и $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ через p и q .

14.22. Решите уравнение $x(x+1) = 2019 \cdot 2020$.

14.23. Для положительных чисел p и q только одно из трёх уравнений $x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$ и $x^2 + q = px$ может иметь два положительных корня. Какое именно?

14.24. Корни многочлена $x^2 + px + q$ равны x_1 и x_2 , $s_n = x_1^n + x_2^n$ (число n натуральное). Докажите, что $s_n = -ps_{n-1} - qs_{n-2}$ при $n > 2$.

14.25. Корни многочлена $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами равны x_1 и x_2 . Докажите, что для любого натурального n число $x_1^n + x_2^n$ целое.

14.26. Для какого a сумма квадратов корней многочлена

$$x^2 - (a - 2)x - a - 1,$$

имеющего два корня, наименьшая?

14.27. Докажите, что корень приведённого квадратного уравнения с целыми коэффициентами либо целый, либо иррациональный.

14.28. Корни многочлена $x^2 - 6x + 1$ равны x_1 и x_2 . Докажите, что ни для какого натурального n число $x_1^n + x_2^n$ не делится на 5.

Уравнения с корнями

В главе 13 мы уже обсуждали уравнения с корнями. Здесь мы обсудим уравнения такого типа, для решения которых нужно решать квадратные уравнения.

14.29. Решите уравнение $3 - x = \sqrt{3 + x}$.

14.30. Решите уравнение $\sqrt{2x - 6} + \sqrt{x + 4} = 5$.

14.31. Решите уравнение $\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x$.

14.32. Решите уравнение $\sqrt{3x - a} = a - 2x$.

14.33. Решите уравнение $x^2 + x\sqrt{x+1} - 2(x+1) = 0$.

14.34. Решите уравнение $(2x - 1)^2 = \sqrt{x}(6x - 2\sqrt{x} - 3)$.

У квадратного трёхчлена не может быть трёх различных корней

14.35. Два квадратных трёхчлена $f(x)$ и $g(x)$ принимают равные значения при трёх различных значениях x . Докажите, что $f(x) = g(x)$ при всех x .

14.36. Найдите сумму

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

14.37. Найдите сумму

$$c \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + b \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + a \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

14.38. Числа a , b и c попарно различны. Найдите квадратный трёхчлен $f(x)$, принимающий при $x = a$, $x = b$ и $x = c$ значения A , B и C соответственно.

Числа Фибоначчи

14.39. Для каждого натурального n рассмотрим числа

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad \text{и} \quad b_n = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Докажите, что $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ и $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$.

14.40. Для каждого натурального n рассмотрим число

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Докажите, что $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

14.41. Докажите, что числа F_n из задачи 14.40 по-другому можно задать следующим образом: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = F_2 + F_1 = 3$, ..., $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Числа F_n из задачи 14.41 называют числами Фибоначчи.

Разные задачи

14.42. Приведите пример квадратного трёхчлена $f(x)$ с целыми коэффициентами, который при всех натуральных x , состоящих только из единиц, принимает значения, состоящие только из единиц.

14.43. Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ обладает следующим свойством: если $0 \leq x \leq 1$, то $|ax^2 + bx + c| \leq 1$. Докажите, что

$$|a| + |b| + |c| \leq 17.$$

14.44. Укажите квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$, обладающий свойством из задачи 14.43 (если $0 \leq x \leq 1$, то $|ax^2 + bx + c| \leq 1$), для которого $|a| + |b| + |c| = 17$.

Глава 15

Рациональные уравнения

Основные факты и понятия

Рациональная функция — это дробь, числитель и знаменатель которой — многочлены.

Рациональное уравнение — это уравнение, левая и правая части которого являются рациональными функциями.

В частности, любое уравнение вида $P(x) = 0$, где P — некоторый многочлен, является рациональным.

Задачи для самостоятельного решения

Биквадратные и возвратные уравнения

Биквадратное уравнение — это уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$. Подстановка $t = x^2$ сводит решение биквадратного уравнения к решению квадратного уравнения $at^2 + bt + c = 0$.

Возвратное уравнение четвёртой степени — это уравнение вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad \text{где } a \neq 0.$$

15.1. Докажите, что решение возвратного уравнения четвёртой степени сводится к последовательному решению квадратных уравнений.

15.2. Докажите, что решение уравнения

$$x^4 + ax^3 + bx^2 - ax + 1 = 0$$

сводится к последовательному решению квадратных уравнений.

15.3. Докажите, что многочлен $x^4 + px^2 + q$ можно разложить в произведение двух многочленов второй степени.

Корни многочленов

15.4. Укажите многочлен с целыми коэффициентами, имеющий корни $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

15.5. Число p — корень кубического многочлена $x^3 + x - 3$. Укажите кубический многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число p^2 .

15.6. Найдите корни многочлена $x^3 - x^2 - 2x + 2$.

15.7. Докажите, что решение уравнения

$$(x^2 - x - 1)^3 + (x^2 - 3x + 2)^3 = (2x^2 - 4x + 1)^3$$

можно свести к решению квадратных уравнений.

15.8. Найдите все положительные решения уравнения

$$x^n - nx + n - 1 = 0,$$

где n — натуральное число.

15.9. Докажите, что любой положительный корень уравнения

$$x(x+1)(x+2) \cdot \dots \cdot (x+n) = 1$$

меньше $\frac{1}{n!}$.

15.10. Есть ли отрицательные корни у уравнения

$$x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 3x + 9 = 0?$$

15.11. Многочлен $ax^5 + bx^4 + c$ имеет три различных корня. Докажите, что многочлен $cx^5 + bx + a$ тоже имеет три различных корня.

Уравнения с дробями

15.12. Решите уравнение $\frac{2x}{x-2} = \frac{4}{x-2}$.

15.13. Решите уравнение $\frac{x+5}{x+4} - \frac{x+6}{x+5} = \frac{x+7}{x+6} - \frac{x+8}{x+7}$.

15.14. Решите уравнение $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x+6}$.

15.15. Решите уравнение $\frac{x^5}{(x-2)^2} + \frac{(x-2)^2}{x} = 2x^2$.

15.16. Решите уравнение $\frac{x^4}{x+1} + 5x^2 = 6x + 6$.

15.17. Решите уравнение $\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right)$.

15.18. Решите уравнение $x^{2019} + \frac{1}{x^{2019}} = 1 + x^{2020}$.

Глава 16

Системы уравнений

Основные факты и понятия

Система уравнений — это набор из n уравнений $f_1(x_1, \dots, x_m) = 0, \dots, f_n(x_1, \dots, x_m) = 0$, где $f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)$ — функции от m переменных x_1, \dots, x_m . Чаще всего, но не всегда, рассматривают системы уравнений, для которых $n = m$.

Систему уравнений обычно записывают следующим образом:

[illegible]

При этом уравнения не обязательно записывать так, чтобы в правой части стоял нуль. В правой части может стоять и отличное от нуля число, и какая-то функция.

Решение системы уравнений — это набор чисел (x_1, \dots, x_m) , для которых выполняются все n требуемых равенств. Система уравнений может иметь несколько решений и может не иметь решений.

Примеры решения задач

Пример 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 1, \\ yz = 2, \\ zx = 8. \end{cases}$$

Решение. *Первый способ.* Выразим y и z через x из первого и третьего уравнений: $y = \frac{1}{x}$ и $z = \frac{8}{x}$. Подставим эти выражения во второе уравнение. В результате получим $x^2 = 4$, т. е. $x = 2$ или $x = -2$. Теперь можно найти y и z из первого и третьего уравнений.

Второй способ. Из равенства

$$(xyz)^2 = (xy)(yz)(zx) = 16$$

следует, что $xuz = 4$ или $xuz = -4$. Деля эти равенства на уравнения из системы, находим все неизвестные.

Ответ. $(2; \frac{1}{2}; 4)$, $(-2; -\frac{1}{2}; -4)$.

Пример 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy(x+y) = 30, \\ x^3 + y^3 = 35. \end{cases}$$

Решение. Введём новые переменные $u = x + y$ и $v = xy$. Тогда $uv = xy(x+y) = 30$ и $u^3 - 3uv = x^3 + y^3 = 35$, поэтому

$$u^3 = 3uv + 35 = 90 + 35 = 125.$$

Следовательно, $u = 5$ и $v = 6$. Числа x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2 - ut + v = 0$, т. е. $t^2 - 5t + 6 = 0$. Корни этого уравнения равны 2 и 3.

Ответ. $(2; 3)$, $(3; 2)$.

Пример 3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+y)^3 = z, \\ (y+z)^3 = x, \\ (z+x)^3 = y. \end{cases}$$

Решение. Вычитая из первого уравнения второе, получаем

$$(x-z)((x+y)^2 + (x+y)(y+z) + (y+z)^2) = -(x-z).$$

Выражение вида $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$ не может быть отрицательным, поэтому $x = z$. (В случае, когда указанное выражение равно нулю, $x = -y = z$.) Аналогично $y = z$. Таким образом, $x = y = z$ и $8x^3 = x$. Последнее уравнение имеет три решения: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ и $x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответ. $(0; 0; 0)$, $(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4})$, $(-\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{4}; -\frac{\sqrt{2}}{4})$.

Задачи для самостоятельного решения

Во всех задачах этой главы, в которых приведены только системы уравнений, требуется решить эти системы.

Исключение неизвестных

Один из простейших способов решения систем уравнений — вычитание одних неизвестных через другие, что позволяет исключать неизвестные и получить в конце одно уравнение с одним неизвестным.

$$16.1. \begin{cases} x(y+z)=35, \\ y(x+z)=32, \\ z(x+y)=27. \end{cases}$$

$$16.2. \begin{cases} x+y+xy=19, \\ y+z+yz=11, \\ z+x+zx=14. \end{cases}$$

$$16.3. \begin{cases} \frac{1}{2x-y} + y = -5, \\ \frac{y}{2x-y} = 6. \end{cases}$$

$$16.4. \begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

$$16.5. \begin{cases} x^2 - y^2 = 2a, \\ xy = b, \end{cases} \text{ где } b \neq 0. \quad 16.6. \begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3, \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0. \end{cases}$$

Симметрические системы

Систему уравнений относительно переменных x и y называют *симметрической*, если каждое уравнение не меняется при замене x на y и y на x . При решении симметрической системы уравнений часто помогает замена переменных $u = x + y$, $v = xy$.

$$16.7. \begin{cases} x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17, \\ x + xy + y = 5. \end{cases}$$

$$16.8. \begin{cases} x - y = 2, \\ xy = 3. \end{cases}$$

$$16.9. \begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Разложение на множители

$$16.10. \begin{cases} 2y = 4 - x^2, \\ 2x = 4 - y^2. \end{cases} \quad 16.11. \begin{cases} \frac{1}{x} = y + z, \\ \frac{1}{y} = z + x, \\ \frac{1}{z} = x + y. \end{cases}$$

$$16.12. \begin{cases} x + y + z = a, \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3. \end{cases}$$

16.13. Найдите решения системы уравнений, для которых $xyz \neq 0$:

$$\begin{cases} x^2(y^2 + z^2 - x^2) = 3xyz, \\ y^2(x^2 + z^2 - y^2) = -21xyz, \\ z^2(x^2 + y^2 - z^2) = 3xyz. \end{cases}$$

Применение неравенств

16.14.
$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy - z^2 = 1. \end{cases}$$

16.15.
$$\begin{cases} x^3 - y = 6, \\ y^3 - z = 6, \\ z^3 - x = 6. \end{cases}$$

16.16.
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$$

16.17.
$$\begin{cases} \frac{2x_1^2}{1+x_1^2} = x_2, \\ \frac{2x_2^2}{1+x_2^2} = x_3, \\ \frac{2x_3^2}{1+x_3^2} = x_1. \end{cases}$$

16.18.
$$\begin{cases} (x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1, \\ (x_4 + x_5 + x_1)^5 = 3x_2, \\ (x_5 + x_1 + x_2)^5 = 3x_3, \\ (x_1 + x_2 + x_3)^5 = 3x_4, \\ (x_2 + x_3 + x_4)^5 = 3x_5. \end{cases}$$

Разные задачи

16.19.
$$\begin{cases} x_1 x_2 = 1, \\ x_2 x_3 = 1, \\ x_3 x_4 = 1, \\ \dots\dots\dots \\ x_{n-1} x_n = 1, \\ x_n x_1 = 1. \end{cases}$$

16.20. Найдите положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^2, \\ x_2 + x_3 = x_4^2, \\ x_3 + x_4 = x_5^2, \\ x_4 + x_5 = x_1^2, \\ x_5 + x_1 = x_2^2. \end{cases}$$

16.21. Система уравнений второго порядка

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет, вообще говоря, четыре решения. При каких значениях a число решений системы уменьшается до трёх или до двух?

$$16.22. \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 6, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4, \\ \frac{1}{z} + \frac{1}{x} = 5. \end{cases}$$

$$16.23. \begin{cases} x^3 - y^3 = 26, \\ x^2y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

Глава 17

Комплексные числа

Основные факты и понятия

Мнимая единица — это символ i , квадрат которого равен -1 . С помощью мнимой единицы и действительных чисел можно составлять рациональные выражения и обращаться с ними как с обычными рациональными выражениями. Они преобразуются по обычным правилам, и i^2 можно заменять на -1 . Например,

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2}.$$

Выражение $a + bi$, где a и b — действительные числа, называют *комплексным числом*. Число a называют при этом *действительной частью* комплексного числа $a + bi$, а число b называют *мнимой частью* этого числа. Число $\sqrt{a^2 + b^2}$ называют *модулем* комплексного числа $a + bi$. Модуль комплексного числа z обозначают $|z|$.

Комплексное число bi , где $b \neq 0$ — действительное число, называют *мнимым числом*.

Комплексные числа $a + bi$ и $a - bi$ (здесь a и b — действительные числа) называют *сопряжёнными*. Число, сопряжённое к комплексному числу z , обозначают \bar{z} .

Если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0$$

с действительными коэффициентами отрицателен, то корнями этого уравнения являются сопряжённые числа

$$\frac{-b + i\sqrt{|D|}}{2a} \quad \text{и} \quad \frac{-b - i\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Задачи для самостоятельного решения

Комплексные корни квадратных уравнений

17.1. Укажите квадратное уравнение с действительными коэффициентами, корнями которого являются сопряжённые числа $a + bi$ и $a - bi$.

17.2. Найдите два комплексных числа, квадрат каждого из которых равен i .

17.3. Найдите два комплексных числа, квадрат каждого из которых равен $3 - 4i$.

17.4. Докажите, что при $a + bi \neq 0$ квадратное уравнение $z^2 = a + bi$ имеет ровно два решения в комплексных числах.

17.5. Числа a и b действительные. Докажите, что квадратные корни из комплексного числа $a + bi$ находятся среди чисел

$$\pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}} \right).$$

Как нужно выбрать знак перед вторым слагаемым в скобках, чтобы получить два нужных корня, а не сопряжённые к ним числа?

17.6. Докажите, что корни квадратного уравнения

$$x^2 + (a + bi)x + (c + di) = 0$$

с комплексными коэффициентами можно выразить через действительные числа a , b , c и d

Сопряжённые числа

17.7. Докажите, что $z\bar{z} = |z|^2$.

17.8. Докажите, что если $|z| = 1$, то $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

17.9. Докажите, что если $z \neq 0$, то $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$.

17.10. Избавьтесь от комплексного числа в знаменателе дроби $\frac{1}{a + bi}$

17.11. Докажите, что $\bar{z} \cdot \bar{w} = \overline{zw}$.

17.12. Докажите, что $\bar{z}^n = \overline{z^n}$.

17.13. Докажите, что если комплексное число z является корнем многочлена f с действительными коэффициентами, то и число \bar{z} является корнем этого многочлена.

Корни из единицы

Корни многочлена $x^n - 1$, отличные от 1, называют *корнями n -й степени из единицы*. Корень n -й степени из единицы является корнем многочлена $\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1$. В частности, *кубический корень из единицы* — это один из корней уравнения $x^2 + x + 1 = 0$.

17.14. Докажите, что куб каждого из корней уравнения

$$x^2 + x + 1 = 0$$

равен 1.

17.15. Докажите, что каждый из корней уравнения

$$x^2 + x + 1 = 0$$

является квадратом другого корня.

17.16. Докажите, что куб каждого из корней уравнения

$$x^2 - x + 1 = 0$$

равен -1 .

17.17. Разложите многочлен $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ на три множителя.

17.18. Вычислите произведение $(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c)$, где ω — кубический корень из единицы.

17.19. Докажите, что уравнение $x^3 - a^3 - b^3 - 3abx = 0$ имеет корни $x_1 = a + b$, $x_2 = \omega a + \omega^2 b$ и $x_3 = \omega^2 a + \omega b$, где ω — кубический корень из единицы.

17.20. Докажите, что корень 5-й степени из единицы является корнем уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$, где a — один из корней уравнения $y^2 + y - 1 = 0$.

17.21. Найдите вещественные и комплексные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 26, \\ x^2 y - xy^2 = 6. \end{cases}$$

Глава 18

Парабола и гипербола

Основные факты и понятия

Квадратичная функция — это выражение вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

Парабола — это график квадратичной функции.

Ось параболы — это ось симметрии параболы. У параболы есть только одна ось симметрии (задача 18.10).

Вершина параболы — это точка пересечения параболы и её оси.

Дробно-линейная функция — это функция $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, где $ad - bc \neq 0$ (функция не постоянная) и $c \neq 0$ (функция не линейная).

График дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ называют *гиперболой*.

Центр гиперболы $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ — это её центр симметрии.

Асимптота гиперболы $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ — это прямая, параллельная одной из осей координат и проходящая через центр гиперболы.

Примеры решения задач

Пример 1. Постройте график функции $y = |x^2 - x - 2|$.

Решение. Прежде всего разложим квадратный трёхчлен на множители: $x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)$. Парабола $y = x^2 - x - 2$ пересе-

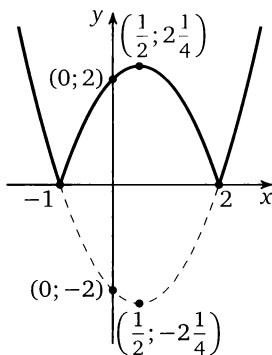


Рис. 1

кает ось абсцисс в точках $(-1; 0)$ и $(2; 0)$. Вершина этой параболы находится в точке $(\frac{1}{2}; -2\frac{1}{4})$. На рис. 1 изображён график параболы $y = x^2 - x - 2$, причём та часть параболы, для которой $y < 0$, изображена пунктиром. Если пунктирную часть параболы отразить симметрично относительно оси абсцисс, то получим искомый график.

Пример 2. Найдите все a и b , для которых прямая $ax + by = 1$ не имеет общих точек с графиком функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Прямые $ax = 1$ и $by = 1$ пересекают указанный график. Если же $ab \neq 0$, то прямая $ax + by = 1$ не имеет общих точек с указанным графиком тогда и только тогда, когда уравнение $ax + \frac{b}{x} - 1 = 0$ не имеет решений. Это уравнение можно записать как квадратное уравнение $ax^2 - x + b = 0$. Дискриминант этого уравнения равен $1 - 4ab$. Он должен быть отрицательным.

Ответ. $4ab > 1$ или ровно одно из чисел a и b равно нулю.

Задачи для самостоятельного решения

График квадратичной функции

18.1. Найдите уравнение оси параболы $y = ax^2 + bx + c$.

18.2. Найдите координаты вершины параболы

$$y = ax^2 + bx + c.$$

18.3. Определите знаки чисел a , b и c по графику функции

$$y = ax^2 + bx + c,$$

изображённому на рис. 2.

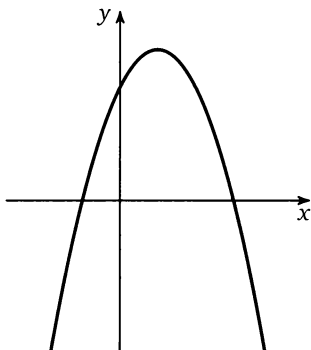


Рис. 2

- 18.4. Докажите, что при изменении числа a вершина параболы $y = 2(a+1)x + a^2$ движется по прямой.
- 18.5. Докажите, что при изменении числа a вершина параболы $y = 2ax + a$ движется по параболе.
- 18.6. Найдите уравнение параболы $y = ax^2 + bx + c$, проходящей через точки $(1; 5)$, $(-1; -1)$ и $(0; 0)$.
- 18.7. Прямая $y = 2x + a$ пересекает параболу $y = x^2$ в одной точке. Найдите координаты этой точки.
- 18.8. Прямая $y = ax - 4$ пересекает параболу $y = x^2$ в одной точке. Найдите координаты этой точки.
- 18.9. Докажите, что для заданного k середины отрезков, высекаемых параболой $y = ax^2 + bx + c$ на прямой $y = kx + l$, лежат на прямой, параллельной оси ординат.
- 18.10. Докажите, что у параболы есть только одна ось симметрии.
- 18.11. Найдите все a и b , для которых графики функций

$$f(x) = x^2 + 2bx + 1 \quad \text{и} \quad g(x) = 2a(x + b)$$

не пересекаются.

- 18.12. На рис. 3 изображены графики трёх квадратных трёхчленов. Можно ли подобрать числа a , b и c так, чтобы это были графики трёхчленов $ax^2 + bx + c$, $bx^2 + cx + a$ и $cx^2 + ax + b$?

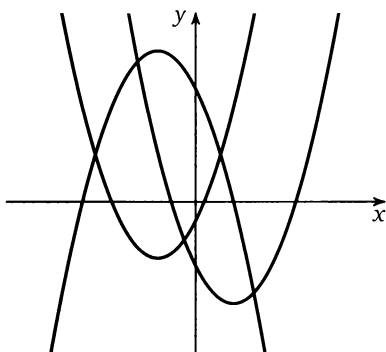


Рис. 3

- 18.13. На графике квадратного трёхчлена $f(x) = lx^2 + mx + n$ с целыми коэффициентами отмечены две точки с целыми координатами. Докажите, что если расстояние между ними — целое число, то соединяющий их отрезок параллелен оси абсцисс.

График функции $y = \frac{1}{x}$

18.14. Прямая пересекает одну и ту же ветвь гиперболы в двух точках. Докажите, что отрезки этой прямой, заключённые между осями координат и гиперболой, равны.

18.15. Прямая проходит через точку $(x_0; y_0)$, лежащую на гиперболе $y = \frac{1}{x}$, не имеет с гиперболой других общих точек и не параллельна осям координат. Найдите уравнение этой прямой.

18.16. Докажите, что оси координат высекают на прямой из задачи 18.15 отрезок, серединой которого является точка $(x_0; y_0)$.

Дробно-линейная функция

18.17. Докажите, что кривая, заданная уравнением

$$(x - x_0)(y - y_0) = e,$$

где $e \neq 0$, является гиперболой, и найдите её центр.

18.18. Найдите центр гиперболы $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

18.19. Найдите асимптоты гиперболы $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

18.20. Представьте дробно-линейную функцию $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ в виде $f(x) = A + \frac{B}{x+C}$, где A , B и C — некоторые числа. Укажите эти числа.

18.21. Пусть $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Докажите, что для любых попарно различных чисел x_1, x_2, x_3 и x_4 выполняется равенство

$$\frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} : \frac{x_4 - x_2}{x_4 - x_3} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_1) - f(x_3)} : \frac{f(x_4) - f(x_2)}{f(x_4) - f(x_3)}.$$

Глава 19

Квадратные неравенства

Основные факты и понятия

Квадратное неравенство — это неравенство, в левой части которого стоит квадратный трёхчлен, а в правой — нуль. Квадратное неравенство часто называют также *неравенством второй степени*.

В этой главе под корнями квадратного трёхчлена подразумеваются только вещественные корни.

При записи решений неравенств часто используются следующие обозначения: $(a; b)$ — *интервал*, $[a; b]$ — *отрезок*, \cup — *объединение* интервалов или отрезков. Интервал (a, b) состоит из чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$, интервал $(-\infty; b)$ состоит из чисел x , удовлетворяющих неравенству $x < b$, интервал $(a; \infty)$ состоит из чисел x , удовлетворяющих неравенству $x > a$. Отрезок $[a; b]$ состоит из чисел x , удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$.

Помимо отрезков и интервалов есть и *полуинтервалы* $(a; b]$ и $[a; b)$. Круглые скобки соответствуют строгим неравенствам, а квадратные — нестрогим.

Задачи для самостоятельного решения

Решение неравенств

19.1. Решите неравенство $|x^2 - 4x| + 3 \geq x^2 + |x - 5|$.

19.2. Решите неравенство $|x^2 - 2x - 3| < 3x - 3$.

19.3. Для всех a решите неравенство $x^2 + ax + 1 > 0$.

19.4. Для каждого $a > 0$ решите неравенство

$$4a^3x^4 + 4a^2x^2 + 32x + a + 8 \geq 0.$$

Расположение корней квадратного трёхчлена

19.5. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Докажите, что если

$$f(\alpha)f(\beta) < 0,$$

то между α и β лежит по крайней мере один корень квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$.

19.6. Пусть $f(x) = x^2 + px + q$, $f(a) < 0$ и $f(b) < 0$. Докажите, что если $a \leq x \leq b$, то $f(x) < 0$.

19.7. Пусть $f(x) = -x^2 + px + q$, $f(a) < 0$ и $f(b) < 0$. Обязательно ли $f(x) < 0$ для всех x , заключённых между a и b ?

19.8. Для каких a неравенство $x^2 - (a + 2)x + a \leq 0$ выполняется для всех x , заключённых между 1 и 2?

19.9. Для каких a неравенство $2x^2 + ax - 5 \geq 0$ выполняется для некоторого x , модуль которого не превосходит 1?

19.10. Для каких a неравенство $x^2 - ax + 2a \leq 0$ выполняется для некоторого $x \geq 1$?

19.11. Пусть α — корень уравнения $x^2 + ax + b = 0$, β — корень уравнения $x^2 - ax - b = 0$. Докажите, что между числами α и β есть корень уравнения $x^2 - 2ax - 2b = 0$.

19.12. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два корня, разность которых не меньше натурального числа $n \geq 2$. Докажите, что квадратный трёхчлен $f(x) + f(x + 1) + \dots + f(x + n)$ имеет два корня.

19.13. Даны уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ и $-ax^2 + bx + c = 0$. Докажите, что если x_1 — корень первого уравнения, а x_2 — второго, то найдётся корень уравнения $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$, заключённый между x_1 и x_2 .

19.14. Докажите, что на отрезке $[-1; 1]$ квадратный трёхчлен

$$f(x) = 2x^2 + ax + b$$

принимает значение, модуль которого не меньше 1.

19.15. Докажите, что если числа p_1, p_2, q_1, q_2 удовлетворяют неравенству $(q_2 - q_1)^2 + (p_1 - p_2)(p_1q_2 - q_1p_2) < 0$, то квадратные трёхчлены $x^2 + p_1x + q_1$ и $x^2 + p_2x + q_2$ имеют корни и между корнями каждого из них лежит корень другого.

Разные задачи

19.16. Пусть

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Найдите знак числа a , если $f(-3) < 3$, $f(-1) > 2$ и $f(1) < 0$.

19.17. Докажите, что если $|ax^2 - bx + c| < 1$ при $|x| \leq 1$, то

$$|(a + b)x^2 + c| < 1$$

при тех же x .

Комбинаторика и вероятность

Основные факты и понятия

Правило произведения: если первый элемент пары можно выбрать m способами и для каждого такого выбора второй элемент можно выбрать n способами, то всего существует mn различных пар с выбранными первым и вторым элементами. Правило произведения можно, в частности, применить в том случае, когда выбор производится из n элементов с возможным повторением, т. е. второй элемент может быть таким же, как первый, например, когда рассматриваются слова из двух букв некоторого алфавита, причём слово может состоять и из двух одинаковых букв.

Правило произведения относится к упорядоченным парам: нас интересует не только то, какие элементы в итоге выбраны, но и в каком порядке они выбраны, т. е. какой элемент выбран первым, а какой вторым. Правило произведения можно применить и к выбору не двух, а нескольких элементов. В частности, количество слов из k букв алфавита, состоящего из n букв, равно n^k .

Размещение из n элементов по k — это упорядоченный набор из k различных элементов некоторого n -элементного множества. Упорядоченность набора означает, что важны не только сами выбранные элементы, то и то, в каком порядке их выбирают: какой элемент первый, какой второй и т. д. Количество размещений из n элементов по k равно

$$n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Перестановка n элементов — это упорядоченный набор этих элементов. Перестановка n элементов — это то же самое, что размещение из n элементов по n . Количество перестановок n элементов равно $n!$.

Размещения и правило произведения относятся к упорядоченным наборам. При выборе k элементов из n с возможным повторением элементов количество различных вариантов вычисляется по правилу произведения, а при выборе без повторений количество вариантов равно количеству размещений.

Сочетание из n элементов по k — это неупорядоченный набор k элементов, выбранных из данных n элементов. Неупорядоченность набора означает, что важны только сами выбранные элементы. Наборы, отличающиеся только порядком выбора элементов, считаются одинаковыми. Этим сочетания отличаются от размещений. Количество сочетаний из n элементов по k в $k!$ раз меньше количества размещений из n по k , т. е. оно равно

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Это число часто обозначают C_n^k .

Предположим, что случайный эксперимент может завершиться одним из n равновероятных исходов, причём m из этих исходов приводят к наступлению некоторого события. Тогда *вероятность* этого события равна $\frac{m}{n}$. Например, равновероятными исходами могут быть выпадения игральной кости числами 1, 2, 3, 4, 5 или 6 вверх. А событием может быть выпадение чётного числа. Вероятность такого события равна $\frac{3}{6} = 0,5$. А вероятность того, что выпадет число, которое больше 4, равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Примеры решения задач

Пример 1. Монету бросают трижды. Сколько разных последовательностей орлов и решек можно при этом получить?

Решение. На каждом из трёх мест может быть либо орёл, либо решка. Рассматриваемые последовательности упорядоченные. Их количество равно количеству слов из трёх букв алфавита, состоящего из двух букв, поэтому оно равно 2^3 .

Ответ. 8.

Пример 2. Сколько существует трёхзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2 и 3 встречаются ровно по одному разу?

Решение. Искомое число равно количеству перестановок трёх предметов, т. е. оно равно $3! = 6$.

Ответ. 6.

Пример 3. На полке стоят пять книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

Решение. Есть 5 способов положить одну книгу, $5 \cdot 4$ способов положить две книги, $5 \cdot 4 \cdot 3$ способов положить три книги и по 5! способов положить 4 и 5 книг. Поэтому количество способов равно

$$5 + 5 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 5! = 5 + 20 + 60 + 240 = 325.$$

Ответ. 325 способами.

Пример 4. Поверхность куба с ребром n окрашена красным цветом, а затем куб разрезан на n^3 кубиков с ребром 1. Один из этих кубиков случайным образом выбирают и бросают на стол. Какова вероятность того, что его верхняя грань окрашена?

Решение. Верхней гранью может оказаться любая из граней кубиков с ребром 1, причём для всех граней вероятность одна и та же. Поэтому искомая вероятность равна отношению количества красных граней к количеству всех граней, т. е. равна

$$\frac{6n^2}{6n^3} = \frac{1}{n}.$$

Ответ. $\frac{1}{n}$.

Задачи для самостоятельного решения

Правило произведения

20.1. Сколькими способами можно выбрать несколько (в том числе один или ни одного) предметов из n различных предметов?

20.2. Сколькими способами можно разложить семь монет различного достоинства по трём карманам?

20.3. Найдите количество всех пятизначных чисел.

20.4. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, не начинающихся с нуля?

20.5. Найдите количество всех шестизначных чисел, делящихся на 5.

20.6. Сколько существует шестизначных чисел, все цифры которых имеют одинаковую чётность?

20.7. Найдите количество пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево (например, как 54345 и 17071).

20.8. Кубик бросают трижды. Среди всех возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестёрка. Сколько их?

20.9. Пусть p и q — различные простые числа. Сколько делителей у числа $p^m q^n$?

20.10. Найдите количество пятизначных чисел, в десятичной записи которых содержится хотя бы одна цифра 8.

Перестановки

20.11. На танцплощадке собрались n юношей и n девушек. Сколькими способами они могут разбиться на пары для участия в очередном танце?

20.12. Сколько существует различных возможностей рассадить 5 юношей и 5 девушек за круглый стол с 10 пронумерованными креслами так, чтобы юноши и девушки чередовались?

20.13. В зале стоят шесть стульев в два ряда — по три стула в каждом, второй ряд ровно за первым. В зал пришли шесть человек разного роста. Сколькими способами можно рассадить их так, чтобы каждый человек, сидящий в первом ряду, был ниже человека, сидящего за ним?

20.14. Сколькими способами можно поставить 8 ладей на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга?

Размещения

20.15. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

20.16. Сколькими способами можно изготовить трёхцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

20.17. Найдите количество десятизначных чисел, в записи которых имеется хотя бы две одинаковые цифры.

Сочетания

20.18. а) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек команду в пять человек?

б) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек две команды по пять человек в каждой?

в) Сколькими способами можно разбить 15 человек на три команды по пять человек в каждой?

20.19. У одного школьника есть 6 книг, а у другого 8. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

20.20. Сколькими способами можно разбить 8 человек на пары?

Разные выборы

20.21. Найдите количество всех шестизначных чисел, в десятичной записи которых нет двух стоящих рядом одинаковых цифр.

20.22. Сколько ожерелий можно составить из пяти белых бусинок и двух чёрных?

20.23. Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

20.24. Сколько ожерелий можно составить из семи различных бусинок?

Комбинаторика в арифметике

20.25. Сколько существует четырёхзначных номеров (от 0001 до 9999), у которых сумма двух первых цифр равна сумме двух последних цифр?

20.26. Сколько существует пар целых чисел (x, y) , заключённых между 1 и 1000, для которых $x^2 + y^2$ делится на 7? При $x \neq y$ пары (x, y) и (y, x) считаются различными.

20.27. Сколько существует натуральных чисел x , меньших 10 000, для которых $2^x - x^2$ делится на 7?

20.28. Даны 6 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Найдите сумму всех четырёхзначных чётных чисел, которые можно записать этими цифрами (одна и та же цифра в числе может повторяться).

Взаимно однозначные соответствия

Часто бывает так, что количества объектов, описанных разными способами, оказываются одинаковыми. Иногда это можно доказать без непосредственного вычисления количества объектов в том и в другом случае, установив вместо этого *взаимно однозначное соответствие* между двумя множествами, т.е. сопоставив каждому объекту из первого множества объект из второго множества так, чтобы каждый объект из второго множества был сопоставлен некоторому объекту из первого множества и разным объектам из первого множества были сопоставлены разные объекты из второго множества.

20.29. Докажите, что количество способов выбрать чётное число (в том числе и 0) предметов из $n + 1$ различных предметов равно

количеству способов выбрать несколько (в том числе один или ни одного) предметов из n различных предметов.

20.30. Докажите, что количество пятизначных чисел, не делящихся на 5, равно количеству пятизначных чисел, у которых ни первая, ни вторая цифра слева — не пятёрка.

Вероятность

20.31. Монету бросают два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет орёл?

Замечание. Задача 20.31 получила название *задача Даламбера*. Такое название связано со знаменитой ошибкой Даламбера в статье «Орёл и решка» в 4-м томе «Энциклопедии» (1754). По его мнению, вероятность выпадения орла два раза подряд при двух бросках монеты равна $\frac{1}{3}$ (а не $\frac{1}{4}$, как на самом деле). Даламбер считал, что если при первом броске выпала решка, то второй бросок делать незачем. А ещё возможны броски орёл-орёл и орёл-решка, поэтому всех возможных случаев три, а не четыре.

20.32. а) На палке случайным образом делают две пометки и разламывают её на k равных частей. Какова вероятность того, что обе пометки окажутся на одной и той же части палки?

б) На палке случайным образом делают две пометки и разламывают её на k равных частей. Какова вероятность того, что обе пометки окажутся на одной и той же части палки?

20.33. Какая сумма выпавших чисел более вероятна при бросании двух игральных костей: 9 или 10?

20.34. В ящике 10 белых и 15 чёрных шаров. Из ящика вынимаются четыре шара. Какова вероятность того, что все вынутые шары будут белыми?

20.35. Мальчик должен сыграть в теннис три матча со своими родителями. Он будет считаться победителем, если выиграет подряд два матча. Отец играет лучше, чем мать. Какой порядок матчей предпочтительнее для мальчика: «отец—мать—отец» или «мать—отец—мать»?

20.36. Силы двух игроков равны, т. е. они имеют равные шансы на победу в каждой партии. Они договорились, что приз получит тот, кто первым выиграет 6 партий. Им пришлось прервать игру после того, как первый игрок выиграл 5 партий, а второй — 3. В каком отношении справедливо разделить приз?

20.37. В ящике лежат красные и чёрные носки. Если из ящика наугад вытащить два носка, то вероятность того, что они оба красные, равна $\frac{1}{2}$.

- а) Какое наименьшее число носков может быть в ящике?
- б) Какое наименьшее число носков может быть в ящике, если известно, что число чёрных носков чётно?

20.38. Можно ли написать на гранях двух игральных костей некоторые числа так, чтобы сумма очков при бросании принимала значения $1, 2, \dots, 36$ с равными вероятностями?

Глава 21

Дополнительные задачи

Задачи для самостоятельного решения

Многочлены

21.1. Многочлен $x^3 + ax^2 + 2x + b$ делится на $x^2 + x + 1$. Найдите a и b .

21.2. Подберите числа a_0, a_1, a_2 и a_3 так, чтобы выполнялось равенство

$$x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0.$$

21.3. Докажите, что $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$ для всех x .

Целая и дробная части числа

Пусть $[x]$ обозначает *целую часть числа x* , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x , $\{x\} = x - [x]$ — *дробная часть числа x* .

21.4. Число a положительное, число n натуральное. Докажите, что количество натуральных чисел, не превосходящих a и делящихся на n , равно $\left[\frac{a}{n}\right]$.

21.5. Докажите, что для любого положительного числа a и любого натурального числа n выполняется равенство $\left[\frac{a}{n}\right] = \left[\frac{[a]}{n}\right]$.

21.6. Докажите, что наибольшая степень простого числа p , на которую делится $n!$, равна

$$\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \dots$$

(в этой сумме конечное число слагаемых, отличных от нуля).

21.7. Любое ли натуральное число n можно представить в виде $n = [x] + [2x]$, где x — некоторое положительное число?

21.8. Докажите, что для любого натурального числа n и любого положительного числа x выполняются неравенства

$$0 \leq [nx] - n[x] \leq n - 1.$$

21.9. Докажите, что

$$[\sqrt{4n+1}] = [\sqrt{4n+2}] = [\sqrt{4n+3}]$$

для любого натурального числа n .

21.10. Докажите, что

$$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1}] = [\sqrt{4n+2}]$$

для любого натурального числа n .

21.11. Для натурального числа n найдите

$$\left[\sqrt{n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3}}} \right].$$

21.12. Решите неравенство $[x] \cdot \{x\} < x - 1$.

21.13. Найдите число решений в натуральных числах уравнения

$$\left[\frac{x}{10} \right] = \left[\frac{x}{11} \right] + 1.$$

21.14. Приведите пример положительного числа a , для которого выполняется равенство

$$\{a\} + \left\{ \frac{1}{a} \right\} = 1.$$

21.15. Сколько существует натуральных чисел, меньших тысяч, которые не делятся ни на 5, ни на 7?

21.16. Докажите, что для любого положительного числа x справедливо равенство

$$[\sqrt{[\sqrt{x}]}] = [\sqrt{\sqrt{x}}].$$

21.17. Докажите, что среди чисел

$$\left[\frac{1^2}{1000} \right], \left[\frac{2^2}{1000} \right], \left[\frac{3^2}{1000} \right], \dots, \left[\frac{500^2}{1000} \right]$$

встречаются все целые числа от 0 до 250.

21.18. Докажите, что все числа

$$\left[\frac{500^2}{1000} \right], \left[\frac{501^2}{1000} \right], \left[\frac{502^2}{1000} \right], \dots$$

попарно различны.

Принцип Дирихле

Обычно *принцип Дирихле* формулируют так: «Если в n клетках сидит m зайцев, причём $m > n$, то хотя бы в одной клетке сидят по крайней мере два зайца». Это очевидное замечание часто оказывается весьма эффективным подходом к доказательствам разных утверждений.

21.19. Докажите, что среди данных 12 целых чисел можно выбрать два числа, разность которых делится на 11.

21.20. Докажите, что в любой компании найдутся два человека, имеющие одинаковое число друзей (из этой компании).

21.21. Докажите, что если натуральные числа a и b взаимно просты, то $a^n - 1$ делится на b для некоторого натурального n .

21.22. Числа a , b и c нечётные. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab - 1$, $bc - 1$ и $ca - 1$ делится на 4.

21.23. Докажите, что из целых чисел a_1, a_2, \dots, a_n можно выбрать одно или несколько последовательных чисел так, чтобы их сумма делилась на n .

21.24. Из чисел $1, 2, \dots, n$ выбрано более $\frac{n+1}{2}$ различных чисел. Докажите, что одно из выбранных чисел делится на другое.

21.25. Докажите, что для любого числа x по крайней мере одно из чисел $x, 2x, 3x, \dots, (n-1)x$ отличается от целого числа не более чем на $\frac{1}{n}$.

21.26. В строку записано $mn + 1$ попарно различных чисел. Докажите, что среди них можно выбрать либо $m + 1$ чисел, записанных в порядке возрастания, либо $n + 1$ чисел, записанных в порядке убывания.

Логические задачи

21.27. В трёх ящиках лежат шары — чёрный, белый и зелёный (в каждом ящике по одному шару). На первом ящике написано: «белый», на втором — «чёрный», на третьем — «белый или зелёный». Известно, что ни одна надпись не соответствует действительности. Выясните, где какие шары лежат.

21.28. На острове живут два племени — аборигены и пришельцы. Известно, что аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник нанял туземца-островитянина в проводники. По дороге они встретили какого-то человека. Путешественник попросил проводника узнать, к какому племени принадлежит

этот человек. Проводник вернулся и сообщил, что человек назвался аборигеном. Кем был проводник — аборигеном или пришельцем?

21.29. Путешественник попал на остров, часть обитателей которого всегда говорит правду, а остальные всегда лгут. Какой вопрос может задать путешественник обитателю острова, чтобы выяснить, всегда ли он говорит правду или всегда лжёт?

21.30. Один человек всегда говорит правду, а другой человек всегда лжёт. Какой вопрос нужно им задать, чтобы они ответили на него одинаково?

21.31. Некто всегда говорит правду. Какой вопрос можно задать ему дважды и получить на него разные ответы?

21.32. Дано 4 предмета, один из которых выделен. Требуется задать два вопроса, на которые даются только ответы «да» и «нет», и узнать, какой предмет выделен.

21.33. Дано 8 предметов, один из которых выделен. Требуется задать три вопроса, на которые даются только ответы «да» и «нет», и узнать, какой предмет выделен.

21.34. Первый вторник месяца Митя провёл в Смоленске, а первый вторник после первого понедельника — в Вологде. В следующем месяце Митя первый вторник провёл во Пскове, а первый вторник после первого понедельника — во Владимире. Какого числа и какого месяца Митя был в каждом из городов?

21.35. В институте работают правдолюбцы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды каждый из сотрудников сделал два заявления.

1. В институте нет и десяти человек, которые работают больше меня.

2. В институте по крайней мере у ста человек зарплата больше, чем у меня.

Известно, что нагрузка у всех сотрудников разная и зарплата тоже. Сколько человек работает в институте?

21.36. Три мудреца сидят на стульях в затылок друг другу так, что сидящий впереди не видит тех, кто сидит сзади. Они знают, что есть 3 белые и 2 чёрные шляпы. Мудрецы зажимают глаза, и им на головы надевают шляпы, после чего оставшиеся шляпы убирают. Мудрецы открывают глаза, и сидящий сзади всех говорит, что он не знает, какого цвета на нём шляпа. После этого сидящий посередине говорит, что он тоже не знает, какого цвета на нём шляпа. Знает ли теперь сидящий впереди, какого цвета на нём шляпа?

Ответы

Глава 12. Неравенства. Модуль числа

- 12.1. 1 рубль 23 копейки. 12.3. Обязательно. 12.4. Нет.
12.5. $\frac{21}{37}$. 12.6. $a > 3$ и $b \geq 2$ или $a = 3$ и $b > 2$. 12.8. $x = 4$, $y = 5$.
12.9. 3, -4, 3, -4, 3.
12.10. -25, 13, 13, -25, 13, 13, ..., -25, 13, 13, -25, 13.
12.18. 6. 12.19. 2a. При $x = a$. 12.30. $x = 1$.
12.31. Если $a > -\frac{1}{2}$, то $x < \frac{1}{2}$; если $a = -\frac{1}{2}$, то решений нет;
если $a < -\frac{1}{2}$, то $x > \frac{1}{2}$.
12.33. $x = 2$. 12.34. $x = 0$. 12.35. $b \leq x \leq a$.
12.36. $x = -2$ или $x \geq 2$.

Глава 13. Квадратный корень

- 13.1. $2\sqrt{5}$. 13.2. $\sqrt{10} + \sqrt{21}$. 13.3. $2\sqrt{n}$. 13.4. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$.
13.5. $\sqrt{n+1} + \sqrt{n+\sqrt{n+1}}$. 13.6. $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$. 13.10. $\sqrt{6 + \sqrt{28}}$.
13.12. $\sqrt{4} + \sqrt{5}$ и $\sqrt{5} - \sqrt{2}$. 13.15. $\sqrt{2} + \sqrt{6}$. 13.19. $a = \pm 4 - \sqrt{15}$.
13.25. $\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5})\sqrt{6}}{12}$. 13.26. $x = -1$. 13.27. $5 \leq x \leq 10$.
13.28. $x = 11$, $y = 5$. 13.29. $m = n = 0$. 13.30. $n = 20$ или 48.
13.32. $x = 1$, $y = 0$. 13.37. 9.

Глава 14. Квадратный трёхчлен

- 14.1. 9. 14.2. 8 и 12. 14.3. За 2 часа. 14.4. 25 кг. 14.5. 10 л.
14.6. Нет. 14.7. $a = b = -2$. 14.10. $a = \pm 1$. 14.11. $a = -2$.
14.13. $x_1 = 0$, $x_2 = 99$, $x_3 = \frac{4901}{99}$. 14.16. Может.
14.18. а) $4(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$.
14.20. -1. 14.21. $-\frac{p}{q}$ и $\frac{p^2 - 2q}{q^2}$. 14.22. $x_1 = 2019$, $x_2 = -2020$.
14.23. $x^2 + q = px$. 14.26. Для $a = 1$. 14.29. $x = 1$. 14.30. $x = 5$.
14.31. Если $a = 0$, то $x = 0$; если $a \geq 1$, то $x = \frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$;
если $a < 0$ или $0 < a < 1$, то решений нет.
14.32. $x = \frac{4a+3-\sqrt{8a+9}}{8}$ при $a \geq 0$; при $a < 0$ решений нет.
14.33. $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = 2 - 2\sqrt{2}$. 14.34. $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$. 14.36. 1.

14.37. x . 14.38. $f(x) = A \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + B \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + C \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.
 14.42. $9x^2 + 2x$. 14.44. $8x^2 - 8x + 1$.

Глава 15. Рациональные уравнения

15.4. $x^4 - 10x^2 + 1$. 15.5. $x^3 + 2x^2 + x - 9$. 15.6. $x_1 = 1, x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$.
 15.8. $x = 1$. 15.10. Нет. 15.12. Решений нет. 15.13. $x = -\frac{11}{2}$.
 15.14. $x_1 = 2,4$ и $x_2 = 1,2$. 15.15. $x = 1$.
 15.16. $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, x_{3,4} = -3 \pm \sqrt{3}$.
 15.17. $x_1 = -2, x_2 = 6, x_3 = 3 + \sqrt{21}, x_4 = 3 - \sqrt{21}$. 15.18. $x = 1$.

Глава 16. Системы уравнений

16.1. $(5; 4; 3), (-5; -4; -3)$. 16.2. $(4; 3; 2), (-6; -5; -4)$.
 16.3. $\left(-1\frac{3}{4}; -3\right), \left(-1\frac{1}{6}; -2\right)$. 16.4. $\left(\frac{11}{13}; -4\frac{4}{5}\right)$.
 16.5. $\pm\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}; \sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right)$ при $b > 0$,
 $\pm\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}; -\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right)$ при $b < 0$.
 16.6. $(2, 1), (1, -1)$. 16.7. $(1; 2), (2; 1)$. 16.8. $(3; 1), (-1; -3)$.
 16.9. $(1; 2), (2; 1)$.
 16.10. $(-1 + \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5}), (-1 - \sqrt{5}; -1 - \sqrt{5}), (0; 2), (2; 0)$.
 16.11. $\pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 16.12. $(0; 0; a), (0; a; 0)$ и $(a; 0; 0)$.
 16.13. $(1; 3; 1), (-1; 3; -1), (1; -3; -1), (-1; -3; 1)$.
 16.14. $(1; 1; 0)$. 16.15. $(2; 2; 2)$. 16.16. $(0; 1), (1; 0)$.
 16.17. $(0; 0; 0), (1; 1; 1)$. 16.18. $(0; 0; 0), \pm\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.
 16.19. $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \pm 1$ при нечётном n ;
 $x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1} = a$ и $x_2 = x_4 = \dots = x_n = \frac{1}{a}$ ($a \neq 0$) при чётном n .
 16.20. $(2; 2; 2; 2)$.
 16.21. Число решений уменьшается до трёх при $a = \pm 1$, число решений уменьшается до двух при $a = \pm\sqrt{2}$.
 16.22. $\left(\frac{2}{7}; \frac{2}{5}; \frac{2}{3}\right)$. 16.23. $(3; 1), (-1; -3)$.

Глава 17. Комплексные числа

17.1. $x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = 0$. 17.2. $\pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$. 17.3. $\pm(2-i)$.
 17.5. Знак должен совпадать со знаком числа b . 17.10. $\frac{a-bi}{a^2+b^2}$.

17.17. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c)$,
где ω — кубический корень из единицы.

17.18. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$.

17.21. $(-1, -3), \left(\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}(1 \pm i\sqrt{3})\right),$
 $(3, 1), \left(\frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})\right).$

Глава 18. Парабола и гипербола

18.1. $x = -\frac{b}{2a}$. 18.2. $\left(-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right)$. 18.3. $a < 0, b > 0, c > 0$.

18.6. $y = 2x^2 + 3$. 18.7. $(1; 1)$. 18.8. $(2; 4)$ или $(-2; 4)$.

18.11. $a^2 + b^2 < 1$. 18.12. Нет, нельзя. 18.15. $y_0 x + x_0 y = 2$.

18.17. (x_0, y_0) . 18.18. $\left(-\frac{d}{c}; \frac{a}{c}\right)$. 18.19. $x = -\frac{d}{c}$ и $y = \frac{a}{c}$.

18.20. $A = \frac{a}{c}, B = \frac{bc - ad}{c^2}, C = \frac{d}{c}$.

Глава 19. Квадратные неравенства

19.1. $\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right]$. 19.2. $(2; 5)$.

19.3. Если $-2 < a < 2$, то x любое;
если $a = 2$, то $x \neq -1$, а если $a = -2$, то $x \neq 1$;

$$\left(-\infty; \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4}}{2}\right) \cup \left(\frac{-a + \sqrt{a^2 - 4}}{2}; +\infty\right).$$

19.4. Если $a \geq 2$, то x любое;

$$\left(-\infty; \frac{-2 - \sqrt{4 - 2a}}{2a}\right] \cup \left[\frac{-2 + \sqrt{4 - 2a}}{2a}; +\infty\right).$$

19.7. Нет. 19.8. Для $a \geq 0$. 19.9. Для $|a| \geq 3$.

19.10. Для $a \leq -1$ и для $a \geq 8$. 19.16. $a < 0$.

Глава 20. Комбинаторика и вероятность

20.1. 2^n . 20.2. 3^7 . 20.3. 90 000. 20.4. $9 \cdot 10^6$. 20.5. 180 000.

20.6. $9 \cdot 5^5$. 20.7. 900. 20.8. $6^3 - 5^3$. 20.9. $(m+1)(n+1)$.

20.10. 37 512. 20.11. $n!$. 20.12. $2 \cdot (5!)^2 = 28\,800$. 20.13. 90.

20.14. $8!$. 20.15. 110. 20.16. 120. 20.17. $9 \cdot 10^9 - 9 \cdot 9!$.

20.18. а) 3003; б) 378 378; в) 126 126. 20.19. 1120. 20.20. 105.

20.21. 9^6 . 20.22. 3. 20.23. 720. 20.24. 360. 20.25. 669.

20.26. $142^2 = 20\,164$. 20.27. 2857. 20.28. 1 769 580. 20.31. $\frac{1}{4}$.

20.32. а) $\frac{1}{k}$; б) $\frac{2}{k+1}$. 20.33. 9. 20.34. $\frac{21}{1265}$.

20.35. «Отец—мать—отец». (Такой ответ представляется на первый взгляд странным, потому что приходится дважды играть с сильным

игроком. Но при другом порядке матчей нужно обязательно выиграть единственный матч с сильным игроком, а не один из двух матчей.)

20.36. 7: 1. 20.37. а) 4. б) 21. 20.38. Можно.

Глава 21. Дополнительные задачи

21.1. $a = 2$, $b = 1$. 21.2. $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 1$.

21.7. Нет, не любое.

21.11. $n + 1$. 21.12. $[2; +\infty)$. 21.13. 110. 21.14. $a = 2 + \sqrt{3}$.

21.15. 686.

21.27. В первом ящике зелёный шар, во втором белый, в третьем чёрный.

21.28. Аборигеном.

21.29. «Если бы ты всегда говорил правду, то как бы ты ответил на вопрос „Ты лжец?“»

21.30. «Ты всегда говоришь правду?»

21.31. «Я тебя сегодня о чём-нибудь спрашивал?»

21.34. В Смоленске 1 февраля, в Вологде 8 февраля, в Пскове 1 марта, во Владимире 8 марта.

21.35. 110. 21.36. Сидящий впереди знает, что на нём белая шляпа.

Указания

Глава 12. Неравенства. Модуль числа

12.1. Если $11 < 9x < 12$ и $15 < 13x < 16$, то $x > \frac{11}{9} > 1,22$ и $x < \frac{16}{13} < 1,24$.

12.2. Числа a и b положительны, поэтому требуемое неравенство эквивалентно неравенству

$$b^2x + a^2y > abx + aby,$$

т. е. $a(a - b)y > b(a - b)x$. Это неравенство следует из неравенств $ay > bx$ и $a - b > 0$.

12.3. Если кто-то внёс больше трети общей суммы, то остальные внесли меньше двух третей.

12.4. Предположим, что $S = a + b + c + d + e$ и каждое из чисел $a + b, b + c, c + d, d + e$ и $e + a$ меньше $\frac{S}{3}$. Складывая эти неравенства, получаем

$$2(a + b + c + d + e) < \frac{5S}{3},$$

т. е. $6S < 5S$.

12.5. Из неравенств $\frac{5}{9} < \frac{n}{n+16} < \frac{4}{7}$ следует, что $20 < n < 21\frac{1}{3}$.

12.6. Данное неравенство можно записать в виде $(a - 3)x < b - 2$. Если $a > 3$, то $(a - 3)x$ при отрицательных x принимает все отрицательные значения, поэтому для всех отрицательных y должно выполняться неравенство $y < b - 2$. Это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $b \geq 2$. Если $a = 3$, то должно выполняться неравенство $0 < b - 2$, т. е. $b > 2$. Если $a < 3$, то для всех положительных y должно выполняться неравенство $y < b - 2$. Такого не может быть.

12.7. Первый способ. Пусть всего в классе x мальчиков и y девочек; в первом походе было x_1 мальчиков и y_1 девочек, во втором — x_2 и y_2 . По условию $5x_1 < 2(x_1 + y_1)$, поэтому $3x_1 < 2y_1 \leq 2y$. Аналогично $3x_2 < 2y$. Следовательно, $3(x_1 + x_2) < 4y$. Кроме того, по условию $x_1 + x_2 \geq x$. Поэтому $3x < 4y$, т. е. $7x < 4(x + y)$.

Второй способ. См. указание к задаче 1.6 из задачника для 7 класса.

12.8. Положите $y = 8 - \frac{3}{4}x$ и выведите из данных неравенств, что $\frac{32}{9} < x < \frac{32}{7}$, а потому $x = 4$.

12.9. Числа $x, -y, x, -y, x$ требуемые, если $y > x$ и $3x > 2y$. Можно положить $x = 3$ и $y = 4$.

12.10. Числа $a, b, b, a, b, b, \dots, a, b, b, a, b$ требуемые, если $a + 2b > 0$ и $7a + 13b < 0$. Можно положить $a = -25$ и $b = 13$.

12.11. Запишите данные числа в порядке возрастания: $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_9$. По условию

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > a_6 + a_7 + a_8 + a_9 \geq a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

Поэтому $a_1 > 0$. Остальные числа не меньше a_1 , поэтому они тоже положительны.

12.12. *Первый способ.* Для данных чисел a_1, a_2, \dots, a_{25} выполняются неравенства

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 > 0,$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 > 0,$$

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 > 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$a_{22} + a_{23} + a_{24} + a_{25} > 0,$$

$$a_{23} + a_{24} + a_{25} + a_1 > 0,$$

$$a_{24} + a_{25} + a_1 + a_2 > 0,$$

$$a_{25} + a_1 + a_2 + a_3 > 0.$$

Сложив эти неравенства, получите неравенство

$$4(a_1 + a_2 + \dots + a_{25}) > 0.$$

Второй способ. Расположите числа в порядке возрастания:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{25}.$$

Сумма любых четырёх чисел положительна, поэтому сумма первых четырёх чисел положительна. Следовательно, четвёртое число положительно. Поэтому числа a_n при $n \geq 4$ положительны. Добавляя их сумму к сумме первой тройки чисел, получим положительное число.

Третий способ. Есть хотя бы одно положительное число. Остальные 24 числа можно разбить произвольным образом на четвёрки, сумма чисел которых по условию положительна. Поэтому сумма всех чисел положительна.

12.13. Ясно, что $a_1 + \dots + a_6 \leq 6a_6$ и $a_7 + \dots + a_{10} \geq 4a_6$. Поэтому

$$4(a_1 + \dots + a_6) \leq 24a_6 \leq 6(a_7 + \dots + a_{10}),$$

т. е. $10(a_1 + \dots + a_6) \leq 6(a_1 + \dots + a_{10})$.

12.14. Из условия следует, что прямые $ax = by$ и $cx = dy$ не совпадают. Прямая $ax = by$ разбивает координатную плоскость на две полуплоскости. В одной из этих полуплоскостей выполняется неравенство $ax > by$, а в другой — неравенство $ax < by$. Прямые $ax = by$ и $cx = dy$ разбивают плоскость на четыре части, которые являются общими частями пар полуплоскостей. Рассмотрите общую часть полуплоскостей $ax > by$ и $cx > dy$.

12.15. Сумма всех левых частей этих неравенств равна нулю. Сумма неотрицательных чисел равна нулю тогда и только тогда, когда все эти числа равны нулю. Поэтому все данные неравенства являются равенствами. Следовательно, $a_1 - a_2 = 2(a_2 - a_3)$, $a_2 - a_3 = 2(a_3 - a_4)$, ..., $a_{100} - a_1 = 2(a_1 - a_2)$ и

$$a_1 - a_2 = 2(a_2 - a_3) = 2^2(a_3 - a_4) = \dots = 2^{99}(a_{100} - a_1) = 2^{100}(a_1 - a_2).$$

12.16. Если $x > 0$, то $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$, а если $x < 0$, то

$$x + \frac{1}{x} + 2 = \frac{(x+1)^2}{x} \leq 0.$$

12.17. Сложите неравенства $x^2 + y^2 \geq 2xy$, $y^2 + z^2 \geq 2yz$ и $z^2 + x^2 \geq 2zx$.

12.18. Воспользуйтесь тем, что $x + \frac{9}{x} = \frac{(x-3)^2}{x} + 6$.

12.19. Воспользуйтесь тем, что $x + \frac{a^2}{x} = \frac{(x-a)^2}{x} + 2a$.

12.20. Воспользуйтесь тем, что

$$(1 + a_1) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) = \left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$$

и

$$(1 + a) \left(1 + \frac{1}{a}\right) = 2 + a + \frac{1}{a} \geq 4.$$

12.21. Воспользуйтесь тем, что $a + b - 1 - ab = (a-1)(1-b)$.

12.22. Воспользуйтесь тем, что $(x+y)^2 \geq 4xy > 4(x+y)$.

12.23. Неравенство $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$ эквивалентно неравенству

$$ab + ad < ab + bc, \quad \text{т. е. } ad < bc.$$

А неравенство $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ эквивалентно неравенству

$$ad + cd < bc + cd, \quad \text{т. е. } ad < bc.$$

12.24. Пусть $x + y = a$, $y + z = b$ и $z + x = c$. Тогда

$$\frac{x}{y+z} = \frac{a-b+c}{2b} = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - 1 + \frac{c}{b} \right).$$

Воспользуйтесь тем, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

12.25. Сложите неравенства $y_i \frac{x_1}{y_1} \leq x_i \leq y_i \frac{x_n}{y_n}$ для i от 1 до n .

12.26. Воспользуйтесь тем, что

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = a^4 - 2x^2y^2$$

и

$$(xy)^2 \leq \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)^2 = \frac{a^4}{4}.$$

12.27. Положите $y = x + \frac{1}{x}$. Тогда $y \geq 2$, $y^3 - 3y = x^3 + \frac{1}{x^3}$ и

$$(y^3 - 3y)^2 = \left(x^3 + \frac{1}{x^3} \right)^2 = \left(x^6 + \frac{1}{x^6} \right) + 2.$$

Поэтому рассматриваемая дробь равна

$$\frac{y^6 - (y^3 - 3y)^2}{y^3 + (y^3 - 3y)} = \frac{3y(2y^3 - 3y)}{2y^3 - 3y} = 3y \geq 3 \cdot 2$$

(знаменатель дроби положителен, поэтому на него можно сократить).

12.28. Фиксируем b , c и d и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f(a) &= (1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + a + b + c + d = \\ &= (1-a)k + a + l = (1-k)a + k + l. \end{aligned}$$

Здесь $k = (1-b)(1-c)(1-d)$, поэтому $0 \leq k \leq 1$, а значит, $0 \leq (1-k) \leq 1$. Следовательно, $f(a) \geq f(0)$. Для b , c и d получаем аналогичные неравенства, поэтому наименьшее значение

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + a + b + c + d$$

при $0 \leq a, b, c, d \leq 1$ равно

$$(1-0)(1-0)(1-0)(1-0) + 0 + 0 + 0 + 0 = 1.$$

12.29. Обе части неотрицательны, поэтому данное неравенство эквивалентно неравенству $|x+y|^2 \leq (|x|+|y|)^2$, т. е.

$$x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x y| + y^2.$$

12.30. При $x \geq 0$ должно выполняться уравнение $2x = x + 1$. Это уравнение имеет корень $x = 1$; этот корень подходит. При $x < 0$ решений нет, поскольку левая часть уравнения отрицательна, а правая положительна.

12.31. Возведите обе части в квадрат и приведите полученное неравенство к виду $2(1 + 2a)x < 1 + 2a$.

12.32. Согласно задаче 12.29 имеем

$$|x + a| + |x - a| \geq |(x + a) - (x - a)|.$$

12.33. Воспользовавшись задачей 12.32, докажите, что

$$|(x - 2) + 1| + |(x - 2) - 1| \geq 2.$$

12.34. Воспользовавшись задачей 12.32, докажите, что

$$|x + 1| + |x - 1| \geq 2 \quad \text{и} \quad |x + 2| + |x - 2| \geq 4.$$

12.35. Согласно задаче 12.29 имеем

$$|x - a| + |x - b| \geq |(x - a) - (x - b)| = a - b,$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда числа $x - a$ и $x - b$ имеют противоположные знаки (или одно из них равно нулю).

12.36. При $x \geq 2$ получаем тождество. При $1 \leq x < 2$ получаем уравнение $4x = 8$, которое не имеет корней на данном интервале. При $0 \leq x < 1$ получаем уравнение $-2x = 2$, которое не имеет корней на данном интервале. При $-1 \leq x < 0$ получаем $0 = 2$, чего не может быть. При $x < -1$ получаем корень $x = -2$.

12.37. Если $x \leq y$, то $|x - y| = y - x$, поэтому

$$\frac{x + y}{2} + \frac{|x - y|}{2} = y \quad \text{и} \quad \frac{x + y}{2} - \frac{|x - y|}{2} = x.$$

А если $x \geq y$, то $|x - y| = x - y$, поэтому

$$\frac{x + y}{2} + \frac{|x - y|}{2} = x \quad \text{и} \quad \frac{x + y}{2} - \frac{|x - y|}{2} = y.$$

12.38. Неравенство $|x| < |y - z|$ эквивалентно неравенству $x^2 < (y - z)^2$, т. е. $(x - y + z)(x + y - z) < 0$. Аналогично

$$(y - x + z)(y + x - z) < 0 \quad \text{и} \quad (z - x + y)(z + x - y) < 0.$$

Следовательно,

$$(x - y + z)^2(x + y - z)^2(-x + y + z)^2 < 0,$$

чего не может быть.

12.39. Из неравенств $a > c$ и $b > d$ следует, что $a + b > c + d$, а из неравенства $a + b + c + d > 0$ следует, что $a + b > -(c + d)$. Поэтому $a + b > |c + d|$. Ясно также, что $|a + b| \geq a + b$.

12.40. По условию $1 - x > 0$, $1 + x > 0$, $1 - y > 0$ и $1 + y > 0$. Поэтому $(1 - x)(1 + y) > 0$ и $(1 + x)(1 - y) > 0$, т. е. $1 - x + y - xy > 0$ и $1 + x - y - xy > 0$. Следовательно, $1 - xy > x - y$ и $1 - xy > y - x$. Кроме того, $|xy| < 1$, поэтому $1 - xy = |1 - xy|$.

12.41. Воспользовавшись задачей 12.29, получите неравенство

$$|x + y - z| + |x - y + z| \geq |(x + y - z) + (x - y + z)| = 2|x|.$$

Затем сложите это неравенство с двумя другими аналогичными неравенствами.

12.42. Воспользуйтесь тем, что

$$|x^2 - y^2| = |x - y| \cdot |x + y| \leq |x + y| = |2x + (y - x)| \leq 2|x| + |x - y|.$$

Глава 13. Квадратный корень

13.1. $\sqrt{3} + \sqrt{7} \vee 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 3 + 2\sqrt{21} + 7 \vee 20 \Leftrightarrow 2\sqrt{21} \vee 10 \Leftrightarrow 21 \vee 25$. Значит, $\sqrt{3} + \sqrt{7} < 2\sqrt{5}$.

13.2. $\sqrt{6} + 2\sqrt{7} \vee \sqrt{10} + \sqrt{21} \Leftrightarrow 6 + 4\sqrt{42} + 28 \vee 10 + 2\sqrt{210} + 21 \Leftrightarrow 3 + 4\sqrt{42} \vee 2\sqrt{210} \Leftrightarrow 9 + 24\sqrt{42} + 672 \vee 840 \Leftrightarrow 24\sqrt{42} \vee 159 \Leftrightarrow 24 \vee 192 \vee 25 \vee 281$. Значит, $\sqrt{6} + 2\sqrt{7} < \sqrt{10} + \sqrt{21}$.

13.3. $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} \vee 2\sqrt{n} \Leftrightarrow n+1 + 2\sqrt{n^2-1} + n-1 \vee 4n \Leftrightarrow 2\sqrt{n^2-1} \vee 2n$.

13.4. Воспользуйтесь задачей 13.3 и тем, что

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}.$$

13.5. Воспользуйтесь тем, что

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n+1+\sqrt{n}})^2 = 2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)+n\sqrt{n}}$$

и

$$(\sqrt{n+1} + \sqrt{n+\sqrt{n+1}})^2 = 2n+1 + 2\sqrt{n(n+1)+(n+1)\sqrt{n+1}}.$$

13.6. Воспользуйтесь тем, что

$$\sqrt{n+1+\sqrt{n}} - \sqrt{n+\sqrt{n+1}} = \frac{n+1+\sqrt{n} - (n+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+1+\sqrt{n}} + \sqrt{n+\sqrt{n+1}}}$$

и $n+1+\sqrt{n} - (n+\sqrt{n+1}) = 1 - \frac{n+1-n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} > 0$.

13.7. Возведите обе части в квадрат.

13.8. Сначала проверьте, что $a \geq 2\sqrt{a-1}$ при $a \geq 1$ (для этого возведите обе части в квадрат). Возведите обе части требуемых равенств в квадрат и воспользуйтесь тем, что $\sqrt{a-1} \geq 1$ при $a \geq 2$ и $\sqrt{a-1} \leq 1$ при $1 \leq a \leq 2$.

13.9. Число $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}}$ положительно, а его квадрат равен $4 + \sqrt{7} - 2\sqrt{16-7} + 4 - \sqrt{7} = 8 - 2\sqrt{9} = 2$.

13.10. Возведите данное выражение в квадрат.

13.11. Возведите обе части каждого равенства в квадрат.

13.12. Воспользуйтесь формулами из задачи 13.11.

13.13. Проверьте, что

$$(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5})^2 = 10 + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{15}.$$

13.14. *Первый способ.* Сначала сложите две дроби в левой части, а затем вычтите из полученной суммы дробь в правой части.

Второй способ. См. указание к задаче 13.23.

13.15. Последовательно проверьте, что

$$\sqrt{13 + \sqrt{48}} = 1 + 2\sqrt{3}, \quad \sqrt{5 - (1 + 2\sqrt{3})} = \sqrt{3} - 1$$

и $2\sqrt{3 + (\sqrt{3} - 1)} = \sqrt{2} + \sqrt{6}$.

13.16. Предположите, что число $r = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ рациональное. Тогда $r^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, поэтому число $\sqrt{6}$ рациональное, чего не может быть.

13.17. Предположите, что число $r = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ рациональное. Тогда $(r - \sqrt{5})^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$, т. е. $r^2 + 5 - 2r\sqrt{5} = 5 + 2\sqrt{6}$. Поэтому $(2\sqrt{6} + 2r\sqrt{5})^2 = r^4$, т. е. $6 + 5r^2 + 2r\sqrt{30} = \frac{r^4}{4}$. Следовательно, число $\sqrt{30}$ рациональное, чего не может быть.

13.18. Если $b \neq d$, то из равенства $a - c = (d - b)\sqrt{2}$ следует, что число $\sqrt{2} = \frac{a-c}{d-b}$ рациональное. Если $a \neq c$, то рационально число $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{d-b}{a-c}$.

13.19. Пусть $m = a + \sqrt{15}$ и $n = \frac{1}{a} - \sqrt{15}$. Тогда

$$(m - \sqrt{15})(n + \sqrt{15}) = 1,$$

т. е. $mn + \sqrt{15}(m - n) = 16$. Если числа m и n целые и $m - n \neq 0$, то $\sqrt{15} = \frac{16 - mn}{m - n}$, чего не может быть. Поэтому $m = n$ и, следовательно, $mn = 16$ и $m = n = \pm 4$.

13.20. Первый способ. Предположите, что $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{p}{q} \neq 0$, и воспользуйтесь тем, что $a = \left(\frac{p}{q} - \sqrt{b}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} - 2\frac{p}{q}\sqrt{b} + b$.

Второй способ. Воспользуйтесь тем, что число

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

рациональное.

13.21. Предположите, что $\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{4n^2}$. Тогда

$$\left|\frac{m^2}{n^2} - 2\right| = \left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| \cdot \left(\frac{m}{n} + \sqrt{2}\right) < \frac{1}{4n^2} \left(\frac{m}{n} + \sqrt{2}\right),$$

т. е. $|m^2 - 2n^2| < \frac{1}{4} \left(\frac{m}{n} + \sqrt{2}\right)$. Из предположения следует также, что

$$\frac{m}{n} < \sqrt{2} + \frac{1}{4n^2} \leq \sqrt{2} + \frac{1}{4} < 2.$$

Поэтому $|m^2 - 2n^2| < 1$. Получено противоречие, поскольку $m^2 - 2n^2$ — целое число, отличное от нуля.

13.22. Воспользуйтесь тем, что $a - b = (\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

13.23. Проверьте, что $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, $\frac{5}{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$ и $\frac{3}{2\sqrt{2} - \sqrt{5}} = 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

13.24. Воспользуйтесь тем, что $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

13.25. Воспользуйтесь тем, что

$$(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c) = (a^2+b^2-c^2)^2 - 4a^2b^2.$$

13.26. Оба числа $(x^2+x)^2$ и $\sqrt{x^2-1}$ неотрицательны, поэтому их сумма равна нулю тогда и только тогда, когда они оба равны нулю, т. е. $x^2+x=0$ и $x^2=1$.

13.27. Сначала проверьте, что

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} = |\sqrt{x-1}-2| \quad \text{и} \quad \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = |\sqrt{x-1}-3|.$$

Затем воспользуйтесь задачей 12.35 и покажите, что $2 \leq \sqrt{x-1} \leq 3$.

13.28. Согласно задаче 12.19 имеем

$$\frac{36}{\sqrt{x-2}} + 4\sqrt{x-2} \geq 24 \quad \text{и} \quad \frac{4}{\sqrt{y-1}} + \sqrt{y-1} \geq 4,$$

причём равенства достигаются только при $\sqrt{x-2}=3$ и $\sqrt{y-1}=2$.

13.29. Из равенства $m^2 = n + \sqrt{n}$ следует, что \sqrt{n} — целое число, т. е. $n = k^2$, где число k целое. Тогда $\sqrt{n + \sqrt{n}} = \sqrt{k(k+1)}$. При $k \geq 1$ число $k(k+1)$ не может быть полным квадратом, так как числа k и $k+1$ не имеют общих делителей и не могут быть оба одновременно полными квадратами.

13.30. Если $a = p^2q$ и $b = r^2q$, то $\sqrt{a} + \sqrt{b} = (p+r)\sqrt{q}$. Для $q = 3$ нужно подобрать такие числа p и r , что $3(r^2 - p^2) = 60$, т. е.

$$(r-p)(r+p) = 20.$$

Например, пусть $r = 6$ и $p = 4$. В этом случае $n = 48$ и $m = 300$. Для $q = 5$ нужно подобрать такие числа p и r , что $5(r^2 - p^2) = 60$, т. е. $(r-p)(r+p) = 12$. Например, пусть $r = 4$ и $p = 2$. В этом случае $n = 20$ и $m = 180$.

13.31. Воспользуйтесь тем, что $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2$.

13.32. Второе и третье слагаемые неотрицательные, поэтому $x \leq 1$. Подкоренное выражение неотрицательное, поэтому $x \geq 1$. Следовательно, $x = 1$ и $y = 0$.

13.33. Согласно задаче 13.31 имеем

$$\sqrt{1 \cdot (1+4a)} \leq \frac{1+(1+4a)}{2} = 1+2a.$$

13.34. а) Воспользуйтесь тем, что $a_1 < 2$ и если $a_{n-1} < 2$, то

$$a_n = \sqrt{1+a_{n-1}} < \sqrt{1+2} < 2.$$

б) Воспользуйтесь указанием к задаче а) и тем, что

$$\sqrt{1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

13.35. Воспользуйтесь тем, что $a_1 < 2$ и если $a_{n-1} < 2$, то

$$a_n = \sqrt{2+a_{n-1}} < \sqrt{2+2} = 2.$$

13.36. Предположите, что

$$(a + \sqrt{b})^n = p_n + q_n \sqrt{b} \quad \text{и} \quad (a - \sqrt{b})^n = p_n - q_n \sqrt{b},$$

где числа p_n и q_n целые. Тогда

$$\begin{aligned} (a + \sqrt{b})^{n+1} &= (p_n + q_n \sqrt{b})(a + \sqrt{b}) = \\ &= (p_n a + q_n b) + (q_n a + p_n) \sqrt{b} = p_{n+1} + q_{n+1} \sqrt{b} \end{aligned}$$

и

$$(a - \sqrt{b})^{n+1} = p_{n+1} - q_{n+1} \sqrt{b},$$

где $p_{n+1} = p_n a + q_n b$ и $q_{n+1} = q_n a + p_n$ — целые числа. Числа $p_1 = a$ и $q_1 = 1$ целые, поэтому числа p_2 и q_2 тоже целые и т. д. Следовательно, число $(a + \sqrt{b})^n + (a - \sqrt{b})^n = 2p_n$ целое.

13.37. Согласно задаче 13.36 число $(2 + \sqrt{3})^{1000} + (2 - \sqrt{3})^{1000}$ целое. Кроме того,

$$2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} < \frac{1}{3},$$

поэтому $(2 - \sqrt{3})^{1000} < 0,1$.

13.38. Из указания к задаче 13.36 видно, что $(1 + \sqrt{2})^n = p_n + q_n \sqrt{2}$ и $(1 - \sqrt{2})^n = p_n - q_n \sqrt{2}$, где p_n и q_n — некоторые натуральные числа. Поэтому

$$(1 + \sqrt{2})^n = \sqrt{p_n^2} + \sqrt{2q_n^2},$$

где $p_n^2 - 2q_n^2 = (1 + \sqrt{2})^n (1 - \sqrt{2})^n = (-1)^n$. Таким образом, в качестве m можно взять либо p_n^2 , либо $2q_n^2$.

Глава 14. Квадратный трёхчлен

14.1. Если количество шахматистов равно x , то $\frac{x(x-1)}{2} = 36$. Это уравнение имеет корни 9 и -8 ; отрицательный корень не подходит.

14.2. Если одно число равно x , то другое равно $20 - x$. Поэтому $x(20 - x) = 96$. Это уравнение имеет корни 8 и 12.

14.3. Пусть второй рабочий изготавливает x деталей за 1 час. Тогда $\frac{60}{x} - \frac{60}{30-x} = 3$, поэтому $x = 10$ или 60. Второй корень не подходит, поскольку $x < 30$.

14.4. Пусть в первоначальном сплаве было x кг магния. Тогда $\frac{x+15}{x+37} - \frac{x}{x+22} = \frac{33}{100}$, поэтому $x = 3$ или -62 . Второй корень не подходит.

14.5. Пусть в первый раз отлили x л спирта. Тогда во второй раз отлили x л жидкости, в которой доля спирта равна $\frac{20-x}{20}$. Таким образом, во второй раз отлили $\frac{x(20-x)}{20}$ л спирта. Поэтому

$$20 - x - \frac{x(20-x)}{20} = 5.$$

Это уравнение имеет корни $x_1 = 10$ и $x_2 = 30$. Второй корень не подходит.

14.6. Пусть расстояние между городами равно S , скорость течения реки равна u , а скорость лодки в стоячей воде равна v . Тогда

$\frac{S}{u+(v-u)} = 5$ ($v > u$) и $\frac{S}{u} = \frac{S}{v-u} + \frac{S}{v+u}$. Пусть $\frac{u}{v} = x$. Тогда из второго уравнения следует, что $\frac{1}{x} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}$. Это квадратное уравнение имеет корни $-1 + \sqrt{2}$ и $-1 - \sqrt{2}$. Отрицательный корень не подходит, поэтому $\frac{u}{v} = \sqrt{2} - 1$ и

$$\frac{S}{u} = \frac{S}{v} : \frac{u}{v} = \frac{5}{\sqrt{2}-1} = 5(\sqrt{2}+1) > 12.$$

14.7. Подставляя $x = 1 + \sqrt{3}$ в данное уравнение, получаем

$$(a+2)\sqrt{3} + (4+a+b) = 0.$$

Число $\sqrt{3}$ иррациональное, поэтому $a+2=0$ и $4+a+b=0$. (См. задачу 13.18; для числа $\sqrt{3}$ доказательство такое же, как и для $\sqrt{2}$.)

14.8. Коэффициент при x^2 положителен, поэтому достаточно проверить, что трёхчлен принимает отрицательные значения или обращается в нуль.

Первый способ. Произведение значений трёхчлена при $x=a$, $x=b$ и $x=c$ равно $-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$.

Второй способ. Можно считать, что $a \leq b \leq c$. Тогда значение трёхчлена при $x=b$ равно $(b-c)(b-a) \leq 0$.

14.9. Из условия следует, что если $x > x_0$, то

$$x^2 + ax + b > 0 \quad \text{и} \quad x^2 + cx + d > 0.$$

Поэтому если $x > x_0$, то $2x^2 + (a+c)x + (b+d) > 0$.

14.10. Если $x^2 + 2ax - 3 = (x-a)(x+b)$ для всех x , то $2a = -a+b$ и $ab = 3$, поэтому $a = \pm 1$ и $b = \pm 3$. Несложно также проверить, что $x^2 \pm 2x - 3 = (x \mp 1)(x \pm 3)$.

14.11. При $a=1$ получаем одно и то же уравнение $x^2 + x + 1 = 0$. Дискриминант этого уравнения отрицательный, оно не имеет корней. Предположим, что для некоторого $a \neq 1$ уравнения имеют общий корень x_0 . Тогда

$$(x_0^2 + ax_0 + 1) - (x_0^2 + x_0 + a) = 0,$$

т. е. $(a-1)(x_0-1) = 0$. Поэтому $x_0 = 1$ и $1+a+1=0$.

14.12. Оба уравнения квадратные. Уравнение $x = 3 + \frac{1}{x}$ имеет два корня, и для каждого из них выполняются равенства

$$x = 3 + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}}.$$

14.13. Пусть $u = \frac{x-49}{50}$ и $v = \frac{x-50}{49}$. Тогда $u + v = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$, поэтому $(u+v)(uv-1) = 0$. Если $u+v=0$, то получаем линейное уравнение

$$\frac{x-49}{50} + \frac{x-50}{49} = 0.$$

Если $uv=1$, то получаем квадратное уравнение

$$\frac{x-49}{50} \cdot \frac{x-50}{49} = 1,$$

т. е. $x^2 - 99x = 0$.

14.14. Пусть x_1 — общий корень данных уравнений. Вычитая одно уравнение из другого, получаем $(p_1 - p_2)x_1 = q_2 - q_1$. Если $p_1 = p_2$, то $q_1 = q_2$. Если же $p_1 \neq p_2$, то $x_1 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$. Подставив это выражение для x_1 в любое из двух квадратных уравнений, получим требуемое соотношение. При $p_1 = p_2$ и $q_1 = q_2$ это соотношение тоже выполняется.

14.15. Число $x = \frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2}$ является корнем уравнения $x + \frac{1}{x} = n$. Рассмотрите числа

$$k_1 = x + \frac{1}{x} = n,$$

$$k_2 = x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = n^2 - 2,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$k_m = x^m + \frac{1}{x^m}.$$

Воспользовавшись равенством

$$\left(x^p + \frac{1}{x^p}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{p+1} + \frac{1}{x^{p+1}} + x^{p-1} + \frac{1}{x^{p-1}},$$

покажите, что $k_{p+1} = k_p\left(x + \frac{1}{x}\right) - k_{p-1} = nk_p - k_{p-1}$ при $p \geq 2$. Поэтому число k_m натуральное. Это и есть искомое число k .

14.16. Рассмотрите уравнения

$$x^2 - 2ax + a^2 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - 2(a+b)x + a^2 = 0,$$

где $a = 10^9$ и $b = 5 \cdot 10^{-4}$. Первое уравнение имеет единственный корень a , больший корень второго уравнения равен

$$a + b + \sqrt{2ab + b^2} > a + \sqrt{2ab} = a + 1000.$$

14.17. Разность корней приведённого квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0$$

равна $\pm 2\sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \pm \sqrt{p^2 - 4q}$.

14.18. б) Квадратный трёхчлен $(a_1x + b_1)^2 + \dots + (a_nx + b_n)^2$ не принимает отрицательных значений, поэтому его дискриминант не превосходит нуля.

14.19. Делённый на 4 дискриминант этого уравнения равен

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - abc(a + b + c).$$

Чтобы получить неравенство

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c),$$

можно положить $x = ab$, $y = bc$ и $z = ca$ в неравенстве из задачи 12.17.

14.20. Пусть $x^2 + 3x = z$. Тогда $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = z(z + 2) = (z + 1)^2 - 1$. Наименьшее значение -1 этой функции достигается при $z = -1$. Уравнение $x^2 + 3x + 1 = 0$ имеет корни, поскольку его дискриминант больше нуля. Поэтому x , при котором данная функция принимает значение -1 , существует.

14.21. Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(x_1x_2)^2}.$$

14.22. Корень $x_1 = 2019$ легко угадывается. Второй корень x_2 можно найти, воспользовавшись любой из формул Виета: $x_1 + x_2 = -1$ или $x_1x_2 = -2019 \cdot 2020$.

14.23. Произведение корней каждого из уравнений $x^2 + px = q$ и $x^2 = px + q$ равно $-q < 0$, поэтому быть положительными сразу оба корня не могут.

14.24. Воспользуйтесь тем, что

$$s_n = (x_1 + x_2)(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) - x_1x_2(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}).$$

14.25. Воспользуйтесь задачей 14.24.

14.26. Пусть корни равны x_1 и x_2 . Тогда

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a - 2)^2 + 2(a + 1) = \\ &= a^2 - 2a + 6 = (a - 1)^2 + 5. \end{aligned}$$

При $a = 1$ получаем многочлен $x^2 + x - 2$, имеющий корни 1 и -2 .

14.27. Предположим, что несократимая дробь $\frac{m}{n}$ является корнем уравнения $x^2 + px + q = 0$ с целыми p и q .

Первый способ. Из равенства $m^2 + pmn + qn^2 = 0$ следует, что $m^2 = n(-pm - qn)$, поэтому m^2 делится на n . Если $n > 1$, то получаем противоречие с несократимостью дроби.

Второй способ. Второй корень уравнения равен $q \frac{n}{m}$. Число

$$-p = \frac{m}{n} + q \frac{n}{m} = \frac{m^2 + qn^2}{nm}$$

целое. Если $n > 1$, то число $m^2 + qn^2$ не делится на n .

14.28. Пусть $s_n = x_1^n + x_2^n$. Согласно задаче 14.24 при $n > 2$ выполняется соотношение $s_n = 6s_{n-1} - s_{n-2}$, поэтому $s_n \equiv s_{n-1} - s_{n-2} \pmod{5}$. Проверьте, что $s_2 = 34 \equiv -1 \pmod{5}$ и остатки от деления s_n на 5 повторяются с периодом 6.

14.29. После возведения в квадрат получаем квадратное уравнение $x^2 - 7x + 6 = 0$. Подходят те корни этого уравнения, для которых $3 - x \geq 0$. Корень $x_1 = 1$ подходит, а корень $x_2 = 6$ не подходит.

14.30. Положите $y = \sqrt{x+4}$, возведите в квадрат обе части уравнения $\sqrt{2x-6} = 5-y$ и получите уравнение $y^2 + 10y - 39 = 0$. Корни этого уравнения равны 3 и -13 . Но $y > 0$, поэтому остаётся только корень $y = 3$, которому соответствует $x = 5$. Проверьте, что $x = 5$ действительно является корнем.

14.31. Положите $y = \sqrt{a+x}$. Тогда $x = \sqrt{a-y}$, поэтому

$$(y-x)(y+x) = y^2 - x^2 = (a+x) - (a-y) = x+y.$$

Следовательно, $x+y=0$ или $y-x=1$. Числа x и y неотрицательные, поэтому равенство $x+y=0$ выполняется только при $x=y=0$; в таком случае $a=0$. Если $x+1=y$, то $(x+1)^2 = y^2 = x+a$. (И наоборот, если $(x+1)^2 = x+a$ и $x+a \geq 0$, то $x+1=y$, где $y = \sqrt{a+x}$.) При $a \geq 1$ уравнение $x^2 + x + 1 - a = 0$ имеет единственный неотрицательный корень $\frac{\sqrt{4a-3}-1}{2}$. При $a < 1$ неотрицательных корней у этого уравнения нет.

14.32. Сначала возведите обе части в квадрат, получите уравнение

$$4x^2 - (4a+3)x + a^2 + a = 0$$

и найдите его корни $x_{1,2} = \frac{4a+3 \pm \sqrt{8a+9}}{8}$. Подходят те корни, для которых $a-2x \geq 0$. Воспользовавшись тем, что

$$a - 2x_{1,2} = \frac{-3 \mp \sqrt{8a+9}}{4},$$

исключите один из корней. При $a < 0$ исключите и второй корень, а при $a \geq 0$ проверьте, что оставшийся корень удовлетворяет неравенству $a - 2x \geq 0$, а потому удовлетворяет и исходному уравнению.

14.33. Положите $a = \sqrt{x+1}$ и найдите корни квадратного уравнения $x^2 + ax - 2a^2 = 0$: $x_1 = a$ и $x_2 = -2a$. Уравнение $x = \sqrt{x+1}$ имеет

корни $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, но корень $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ не подходит. Уравнение $x = -2\sqrt{x+1}$ имеет корни $2 \pm 2\sqrt{2}$, но корень $2 + 2\sqrt{2}$ не подходит.

14.34. Положите $y = \frac{2x-1}{\sqrt{x}}$ и найдите корни уравнения $y^2 - 3y + 2 = 0$: $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Затем решите уравнения $\frac{2x-1}{\sqrt{x}} = 1$ и $\frac{2x-1}{\sqrt{x}} = 2$.

14.35. Разность $f(x) - g(x)$ — это либо квадратный трёхчлен, либо линейная функция, либо нулевой многочлен. Многочлен $f(x) - g(x)$ имеет три различных корня, поэтому это нулевой многочлен.

14.36. Данная сумма имеет вид $Ax^2 + Bx + C$, где A , B и C — некоторые числа. При трёх различных значениях x (при $x = a$, $x = b$ и $x = c$) данная сумма принимает одно и то же значение, равное 1. Поэтому $A = 0$, $B = 0$ и $C = 1$.

14.37. Данная сумма имеет вид $Ax^2 + Bx + C$, где A , B и C — некоторые числа. При $x = a$, $x = b$ и $x = c$ сумма принимает значения a , b и c соответственно, а значит, функция

$$Ax^2 + Bx + C - x = Ax^2 + (B-1)x + C$$

при $x = a$, $x = b$ и $x = c$ принимает одно и то же значение, равное 0. Поэтому $A = 0$, $B = 1$ и $C = 0$.

14.38. При $x = a$, $x = b$ и $x = c$ одна из дробей, входящих в многочлен, приведённый в ответе, равна 1, а две другие равны 0. Искомый многочлен только один.

14.39. Числа $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ являются корнями уравнения $x^2 = x + 1$. Домножьте равенства $x_1^2 = x_1 + 1$ и $x_2^2 = x_2 + 1$ на x_1^n и x_2^n .

14.40. Воспользуйтесь задачей 14.39 и тем, что $F_n = \frac{a_n - b_n}{\sqrt{5}}$.

14.41. Проверьте, что $F_1 = 1$ и $F_2 = 1$, и воспользуйтесь тем, что числа из задачи 14.40 удовлетворяют соотношению $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

14.42. Натуральное число, состоящее только из единиц, имеет вид $\frac{1}{9}(10^k - 1)$. Требуется подобрать коэффициенты a , b и c так, что для всех натуральных k выражение

$$a\left(\frac{1}{9}(10^k - 1)\right)^2 + b\left(\frac{1}{9}(10^k - 1)\right) + c$$

имеет вид $\frac{1}{9}(10^n - 1)$. Представьте это выражение в виде

$$\frac{1}{9}\left(\frac{a}{9}10^{2k} + \left(b - \frac{2a}{9}\right)10^k + \left(\frac{a}{9} - b + 9c\right)\right)$$

и положите $\frac{a}{9} = 1$, $b - \frac{2a}{9} = 0$ и $\frac{a}{9} - b + 9c = -1$.

14.43. При $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ и $x = 1$ получаем $|c| \leq 1$, $\left| \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \right| \leq 1$ (т. е. $|a + 2b + 4c| \leq 4$) и $|a + b + c| \leq 1$. Пусть $m = a + 2b + 4c$ и $n = a + b + c$. Тогда $a = -m + 2n + 2c$ и $b = m - n - 3c$, поэтому

$$|a| \leq |m| + 2|n| + 2|c| \leq 4 + 2 + 2 = 8$$

и

$$|b| \leq |m| + |n| + 3|c| \leq 4 + 1 + 3 = 8.$$

14.44. Ясно, что $8x^2 - 8x + 1 = 8\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1 \geq -1$ для всех x . Кроме того, если $0 \leq x \leq 1$, то $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$, поэтому $8x^2 - 8x + 1 \leq 1$.

Глава 15. Рациональные уравнения

15.1. Возвратное уравнение можно сначала записать в виде

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0,$$

а затем воспользоваться тем, что

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2.$$

В результате получим, что сначала нужно решить уравнение $at^2 + bt + (c - 2) = 0$, а затем для каждого из корней этого уравнения решить уравнение $x + \frac{1}{x} = t$.

15.2. Запишите данное уравнение в виде

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + a\left(x - \frac{1}{x}\right) + b = 0$$

и воспользуйтесь тем, что

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2.$$

15.3. Если $p^2 - 4q \geq 0$, то трёхчлен $t^2 + pt + q$ имеет два корня t_1 и t_2 и $x^4 + px^2 + q = (x^2 - t_1)(x^2 - t_2)$. Пусть теперь $p^2 - 4q < 0$. Тогда $q > 0$, поэтому $q = r^2$, где $r > 0$, и $p^2 - 4r^2 = (p - 2r)(p + 2r) < 0$. Значит, одно из чисел $p - 2r$ и $p + 2r$ отрицательно. Если отрицательно $p - 2r$, то $p - 2r = -a^2$ и

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 + r)^2 + (p - 2r)x^2 = (x^2 - ax + r)(x^2 + ax + r).$$

Если $p + 2r = -a^2$, то аналогично

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 - ax - r)(x^2 + ax - r).$$

15.4. Если $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, то $(x - \sqrt{3})^2 = 2$, т. е. $x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$. Поэтому $(x^2 + 1)^2 = (2\sqrt{3}x)^2$.

15.5. По условию $p^3 + p = 3$, поэтому $(p^3 + p)^2 = 9$, т. е. $p^6 + 2p^4 + p^2 - 9 = 0$.

15.6. Корень $x = 1$ легко угадывается. После деления данного многочлена на $x - 1$ получаем многочлен $x^2 - 2$.

15.7. Положите $u = x^2 - x - 1$ и $v = x^2 - 3x + 2$ и запишите рассматриваемое уравнение в виде $u^3 + v^3 = (u + v)^3$, т. е. $3uv(u + v) = 0$. Решение исходного уравнения сводится к решению трёх квадратных уравнений $x^2 - x - 1 = 0$, $x^2 - 3x + 2 = 0$ и $2x^2 - 4x + 1 = 0$.

15.8. Сначала проверьте равенство

$$x^n - nx + n - 1 = (1 + x + \dots + x^{n-1} - n)(x - 1).$$

Затем воспользуйтесь тем, что если $x > 1$, то $1 + x + \dots + x^{n-1} - n > 0$, а если $0 < x < 1$, то $1 + x + \dots + x^{n-1} - n < 0$.

15.9. Для любого положительного корня x данного уравнения получаем $x = \frac{1}{(x+1)(x+2) \cdot \dots \cdot (x+n)} < \frac{1}{n!}$.

15.10. Запишите уравнение в виде $(x^2 - 3)^2 = x(4x^2 + 3)$ и воспользуйтесь тем, что $x = \frac{(x^2 - 3)^2}{4x^2 + 3} \geq 0$.

15.11. Если $x = 0$, то $c = 0$. Многочлен $ax^5 + bx^4$ имеет не более двух различных корней, что противоречит условию. Поэтому $x \neq 0$. Тогда можно разделить обе части уравнения $ax^5 + bx^4 + c = 0$ на x^5 и получить равенство $a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^5} = 0$. Если x_1 , x_2 и x_3 — различные корни многочлена $ax^5 + bx^4 + c$, то $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ и $\frac{1}{x_3}$ — различные корни многочлена $cx^5 + bx + a$.

15.12. Если $x \neq 2$, то $2x = 4$, т. е. $x = 2$. Но $x = 2$ не входит в область определения.

15.13. Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{x+5}{x+4} - \frac{x+6}{x+5} = \frac{1}{(x+4)(x+5)} \quad \text{и} \quad \frac{x+7}{x+6} - \frac{x+8}{x+7} = \frac{1}{(x+6)(x+7)}.$$

15.14. Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{5x-12}{(x-2)(x-3)} \quad \text{и} \quad \frac{6}{x+6} - \frac{1}{x-1} = \frac{5x-12}{(x+6)(x-1)}.$$

15.15. Воспользовавшись тем, что $x \neq 0$, разделите обе части на x^2 :

$$\frac{x^3}{(x-2)^2} + \frac{(x-2)^2}{x^3} = 2.$$

Пусть $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$. Тогда $y + \frac{1}{y} = 2$, поэтому $y = 1$ и $x^3 - (x-2)^2 = 0$, т. е. $(x-1)(x^2+4) = 0$.

15.16. Запишите уравнение в виде $\frac{x^4}{(x+1)^2} + 5\frac{x^2}{x+1} - 6 = 0$, положите $y = \frac{x^2}{x+1}$ и сначала решите уравнение $y^2 + 5y - 6 = 0$.

15.17. Положите $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$ и решите уравнение $3y^2 - 10y + 8 = 0$.

15.18. Ясно, что $x > 0$. Если $0 < x < 1$, то согласно задаче 12.16 имеем

$$x^{2019} + \frac{1}{x^{2019}} \geq 2 > 1 + x^{2020}.$$

Если же $x > 1$, то $x^{2019} < x^{2020}$ и $\frac{1}{x^{2019}} < 1$, поэтому

$$x^{2019} + \frac{1}{x^{2019}} < 1 + x^{2020}.$$

Глава 16. Системы уравнений

16.1. Сложив все уравнения, получим $xy + yz + zx = 47$. Поэтому $yz = 12$, $xz = 15$ и $xy = 20$. Эта система уравнений решается так же, как система из примера 1 на с. 25.

16.2. Данную систему можно переписать в виде $x_1y_1 = 20$, $y_1z_1 = 12$, $x_1z_1 = 15$, где $x_1 = x + 1$, $y_1 = y + 1$, $z_1 = z + 1$. Решая эту систему уравнений так же, как систему из примера 1 на с. 25, получаем $(x_1; y_1; z_1) = (5; 4; 3)$ или $(-5; -4; -3)$.

16.3. Из второго уравнения видно, что $y \neq 0$. Запишите это уравнение в виде $\frac{1}{2x-y} = \frac{6}{y}$ и подставьте это выражение в первое уравнение.

16.4. Воспользовавшись первым уравнением, запишите второе уравнение в виде $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{4}$.

16.5. Подставьте сначала выражение $y = \frac{b}{x}$ в первое уравнение и положите $t = x^2$. Квадратное уравнение $t^2 - 2at - b^2 = 0$ имеет следующие решения: $t_1 = a + \sqrt{a^2 + b^2}$, $t_2 = a - \sqrt{a^2 + b^2}$. Для любого a выполняются неравенства $t_1 > 0$ и $t_2 < 0$, поэтому корень t_1 всегда подходит, а корень t_2 никогда не подходит. Таким образом,

$$x = \pm \sqrt{\sqrt{a^2 + b^2} + a}$$

и

$$y = \frac{b}{x} = \frac{b\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}}{x\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}} = \pm \frac{b}{\sqrt{b^2}} \sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}.$$

16.6. Умножьте первое уравнение на y , второе на x и сложите полученные уравнения. Из полученного в результате уравнения $2xy - 1 = 3y$ следует, в частности, что $y \neq 0$, поэтому $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2y}$. Подставьте это выражение во второе уравнение и получите уравнение $4y^4 - 3y^2 - 1 = 0$. При решении этого биквадратного уравнения воспользуйтесь тем, что $y^2 \geq 0$, и получите равенство $y^2 = 1$, т. е. $y_1 = 1$ и $y_2 = -1$. Этим значениям y соответствуют $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$.

16.7. Сделайте замену $u = x + y$, $v = xy$. Тогда

$$\begin{aligned} 17 &= u^3 - 3uv + v^3 = (u+v)(u^2 - uv + v^2) - 3uv = \\ &= 5(u^2 - uv + v^2) - 3uv = 5(u^2 + v^2) - 8uv = \\ &= 5(u+v)^2 - 18uv = 125 - 18uv, \end{aligned}$$

поэтому $uv = 6$. Следовательно, $(u; v) = (2; 3)$ или $(3; 2)$. В первом случае решений нет.

16.8. После замены $u = -y$ получите симметрическую систему $x + u = 2$, $xu = -3$.

16.9. Положите $xy = u$. Тогда $x^2 + y^2 = 9 - 2u$ и $(9 - 2u)^2 - 2u^2 = x^4 + y^4 = 17$. Поэтому $u^2 - 18u + 32 = 0$, т. е. $u = 2$ или 16 . Система $x + y = 3$, $xy = 2$ имеет решения $(1; 2)$ и $(2; 1)$, а система $x + y = 3$, $xy = 16$ решений не имеет.

16.10. Вычтите из первого уравнения второе:

$$2(y - x) = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x).$$

Значит, либо $y = x$, либо $y + x = 2$. Если $y = x$, то $2x = 4 - x^2$, т. е. $x = -1 \pm \sqrt{5}$. Если $y + x = 2$, то $2(2 - x) = 4 - x^2$, т. е. $x^2 = 2x$.

16.11. Вычтите первое уравнение из второго: $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = y - x$, т. е. $(y - x)\left(\frac{1}{xy} - 1\right) = 0$. Поэтому либо $x = y$, либо $xy = 1$. Если $x = y$, то подставьте выражение $y = x$ в первое и третье уравнения: $\frac{1}{x} = x + z$ и $\frac{1}{z} = 2x$. Поэтому $x = z$ и $x^2 = \frac{1}{2}$. Если $xy = 1$, то $z = \frac{1}{x} - y = 0$, чего не может быть.

16.12. Из тождества

$$(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 2(xy + yz + xz)$$

следует, что $xy + yz + xz = 0$. Из тождества

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

следует, что $xyz = 0$, поэтому по крайней мере одно из чисел x , y и z равно 0. Если $x = 0$, то $xy + yz + xz = yz$, поэтому $yz = 0$, т. е. либо $y = 0$ и $z = a$, либо $z = 0$ и $y = a$. Случаи, когда $y = 0$ или $z = 0$, аналогичны.

16.13. Вычтите первое уравнение из третьего:

$$z^2y^2 - x^2y^2 + x^4 - z^4 = 0,$$

т. е. $(z^2 - x^2)(y^2 - z^2 - x^2) = 0$. Поэтому либо $y^2 - z^2 - x^2 = 0$, либо $x^2 = z^2$. Первый случай противоречит второму уравнению системы. Следовательно, $z = x$ (и $y = 3$) или $z = -x$ (и $y = -3$). В обоих случаях второе уравнение принимает вид $9(2x^2 - 9) = -21 \cdot 3x^2$, поэтому $x^2 = 1$.

16.14. Из второго уравнения следует, что $xy \geq 1$. Числа x и y не могут быть оба отрицательными, поскольку их сумма равна 2. Значит, числа x и y положительные и $x + y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2$, причём равенство $x + y = 2$ возможно лишь в том случае, когда $x = y = 1$. В таком случае $z = 0$.

16.15. Если $x \geq y$, то $y = x^3 - 6 \geq y^3 - 6 = z$ и аналогично $z \geq x$, поэтому $x = y = z$. Случай, когда $x \leq y$, рассматривается аналогично. Таким образом, $x^3 - x - 6 = 0$, т. е. $(x - 2)(x^2 + 2x + 3) = 0$. Квадратный трёхчлен $x^2 + 2x + 3$ не имеет корней.

16.16. Из второго уравнения следует, что если одно из чисел x и y равно нулю, то модуль другого числа равен 1, а если модуль одного из этих чисел равен 1, то другое число равно нулю. Во всех этих случаях из первого уравнения следует, что $x \neq -1$ и $y \neq -1$. Поэтому решений такого вида ровно два: $x = 0$, $y = 1$ и $x = 1$, $y = 0$. Покажите, что в случае, когда $0 < |x|$, $|y| < 1$, других решений нет. В этом случае $|x|^3 + |y|^3 < x^4 + y^4 = 1$. Поэтому если числа x и y оба положительны, то решений нет. Если оба эти числа отрицательны, то решений тоже нет. Пусть теперь, например, $x > 0$ и $y < 0$. Тогда $x^3 + y^3 < x^3 < 1$. В этом случае решений тоже нет.

16.17. У рассматриваемой системы есть решение $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ясно также, что если одно из чисел x_1 , x_2 , x_3 равно нулю, то равны нулю и остальные два числа. Поэтому будем предполагать, что $x_1x_2x_3 \neq 0$. Тогда уравнения можно записать в виде

$$1 + \frac{1}{x_1^2} = \frac{2}{x_2}, \quad 1 + \frac{1}{x_2^2} = \frac{2}{x_3}, \quad 1 + \frac{1}{x_3^2} = \frac{2}{x_1}.$$

Сложив эти уравнения, получаем

$$\left(1 - \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{x_2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{x_3}\right)^2 = 0.$$

Поэтому $x_1 = x_2 = x_3 = 1$.

16.18. После циклической перенумерации неизвестных можно считать, что $x_1 \geq x_i$ для $i = 2, 3, 4, 5$. Тогда

$$3x_2 = (x_4 + x_5 + x_1)^5 \geq (x_3 + x_4 + x_5)^5 = 3x_1.$$

Поэтому $x_1 = x_2$ и $x_3 = x_1$. Кроме того,

$$3x_4 = (x_1 + x_2 + x_3)^5 \geq (x_5 + x_1 + x_2)^5 = 3x_3.$$

Значит, $x_4 = x_3$ и $x_5 = x_3$. Мы получили, что $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x$. Это число x должно удовлетворять уравнению $(3x)^5 = 3x$. Получаем три решения: $x = 0$ или $\pm \frac{1}{3}$.

16.19. Пусть n нечётно. Ясно, что $x_2 \neq 0$, поэтому из первого и второго уравнений получаем $x_1 = x_3$. Из второго и третьего уравнений получаем $x_2 = x_4$ и т. д. Кроме того, из первого и последнего уравнений получаем $x_n = x_2$. В итоге получаем $x_1 = x_3 = \dots = x_n = x_2 = x_4 = \dots = x_{n-1}$. Поэтому из первого уравнения получаем $x_1^2 = 1$, т. е. $x_1 = \pm 1$. Очевидно, что оба указанных в ответе набора неизвестных действительно являются решениями системы. При чётном n точно так же получаем $x_1 = x_3 = \dots = x_{n-1}$, $x_2 = x_4 = \dots = x_{n-2}$ и $x_2 = x_n$. Очевидно, что такие наборы чисел являются решениями данной системы уравнений.

16.20. Пусть $x_{\min} = x_i$ — наименьшее из чисел x_1, \dots, x_5 , $x_{\max} = x_j$ — наибольшее. Тогда $x_{\min}^2 = x_{i-2} + x_{i-1} \geq 2x_{\min}$ (здесь подразумевается, что $x_0 = x_5$ и $x_{-1} = x_4$) и $x_{\max}^2 = x_{j-2} + x_{j-1} \leq 2x_{\max}$. Числа x_{\min} и x_{\max} положительные, поэтому $x_{\min} \geq 2 \geq x_{\max}$. Следовательно, $x_{\min} = x_{\max} = 2$.

16.21. Из первого уравнения получаем $y = \pm x$. Подставив это выражение во второе уравнение, получим

$$(x - a)^2 + x^2 = 1. \quad (1)$$

Число решений системы уменьшается до трёх, если одно из решений уравнения (1) обращается в нуль. Подставив в уравнение (1) значение $x = 0$, получим $a^2 = 1$, т. е. $a = \pm 1$. Число решений системы уменьшается до двух, если уравнение (1) имеет единственный корень (т. е. два совпадающих корня). Приравнявая нулю дискриминант уравнения (1), получаем $a = \pm \sqrt{2}$.

16.22. Сделайте замену $u = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{y}$, $t = \frac{1}{z}$ и сложите полученные уравнения $u + v = 6$, $v + t = 4$ и $t + u = 5$: $u + v + t = 7,5$. Поэтому $u = 3,5$, $v = 2,5$ и $t = 1,5$.

16.23. Из равенств

$$(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3(x^2y - xy^2) = 26 - 3 \cdot 6 = 8$$

следует, что $x - y = 2$. Поэтому $6 = x^2y - xy^2 = xy(x - y) = 2xy$ и $xy = 3$. Решение системы $x - y = 2$, $xy = 3$ содержится в указании к задаче 16.8.

Глава 17. Комплексные числа

17.1. Рассмотрите квадратное уравнение $x^2 - px + q$, где

$$p = (a + bi) + (a - bi) = 2a \quad \text{и} \quad q = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

17.2. Равенство $(a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$ показывает, что нужно подобрать действительные числа a и b , для которых $a^2 = b^2$ и $2ab = 1$.

17.3. Подберите действительные числа a и b , для которых $a^2 - b^2 = 3$ и $2ab = -4$.

17.4. Если записать z в виде $z = x + iy$, то для x и y получим систему уравнений $x^2 - y^2 = a$, $2xy = b$. При $b \neq 0$ эта система имеет ровно два решения (см. указание к задаче 16.5).

17.5. См. указания к задачам 17.4 и 16.5.

17.6. Воспользуйтесь задачей 17.5.

17.7. Воспользуйтесь тем, что $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$.

17.8. Если $|z| = 1$, то согласно задаче 17.7 имеем $z\bar{z} = |z|^2 = 1$.

17.9. Воспользуйтесь тем, что согласно задаче 17.7 выполнено равенство $z\bar{z} = |z|^2$.

17.10. Умножьте числитель и знаменатель на $a - bi$.

17.11. Воспользуйтесь тем, что

$$(a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i$$

и

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

17.12. Воспользуйтесь задачей 17.11.

17.13. Воспользуйтесь тем, что для многочлена с действительными коэффициентами справедливо равенство $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$.

17.14. Если x — корень данного уравнения, то

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0.$$

17.15. Проверьте, что $\frac{(-1 \pm i\sqrt{3})^2}{4} = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}$.

17.16. Если x — корень данного уравнения, то

$$x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1) = 0.$$

17.17. У многочлена $x^3 + b^3 + c^3 - 3bcx$ есть корень $x = -(b + c)$, поэтому он делится на $x + b + c$. Этот же многочлен можно записать в виде $x^3 + (\omega b)^3 + (\omega^2 c)^3 - 3(\omega b)(\omega^2 c)x$, где ω — кубический корень из единицы. Поэтому многочлен делится и на $x + \omega b + \omega^2 c$. Аналогично он делится на $x + \omega^2 b + \omega c$. Чтобы найти отношение данного многочлена к произведению трёх найденных множителей, можно положить $b = c = 0$.

17.18. Воспользуйтесь тем, что

$$(a + \omega b + \omega^2 c)(a + \omega^2 b + \omega c) = a^2 + b^2 + c^2 + (\omega^2 + \omega)(ab + bc + ca)$$

и $\omega^2 + \omega + 1 = 0$.

17.19. *Первый способ.* Из равенства

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

видно, что $x = a + b$ — корень данного уравнения. Поделив $x^3 - a^3 - b^3 - 3abx$ на $x - a - b$, получите квадратное уравнение

$$x^2 + (a + b)x + a^2 - ab + b^2$$

и найдите его комплексные корни.

Второй способ. Воспользовавшись решением задачи 17.17, получите разложение

$$x^3 - a^3 - b^3 - 3abx = (x - a - b)(x - \omega a - \omega^2 b)(x - \omega^2 a - \omega b).$$

17.20. Рассмотрите возвратное уравнение $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ и сделайте замену $y = x + \frac{1}{x}$.

17.21. Пусть $y = kx$. Сразу отметим, что $k \neq 1$. Из уравнений

$$x^3 - k^3 x^3 = 26 \text{ и } kx^3 - k^2 x^3 = 6$$

получаем $x^3 = \frac{26}{1 - k^3}$ и $x^3 = \frac{6}{k - k^2}$. Следовательно,

$$\frac{26}{1 - k^3} = \frac{6}{k - k^2}.$$

Это уравнение можно умножить на $1 - k$. В результате получим

$$\frac{26}{1 + k + k^2} = \frac{6}{k},$$

откуда $k = 3$ или $\frac{1}{3}$. Поэтому $x^3 = -1$ или $x^3 = 27$.

Глава 18. Парабола и гипербола

18.1. Выделите сначала полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

Затем докажите, что ось параболы $y = a(x + x_0)^2 + d$ задаётся уравнением $x + x_0 = 0$. Для этого воспользуйтесь тем, что если $x_1 + x_2 = x_0$, то $(x_1 + x_0)^2 = (x_2 + x_0)^2$.

18.2. Выделите полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}.$$

18.3. Ветви параболы направлены вниз, поэтому $a < 0$. Абсцисса вершины параболы положительна, поэтому $-\frac{b}{2a} > 0$ и $b > 0$. Парабола пересекает ось ординат в точке с положительной ординатой, поэтому $c > 0$.

18.4. Вершина параболы имеет координаты

$$(x; y) = (a + 1; a^2 - (a + 1)^2).$$

Поэтому $a = x - 1$ и $y = (x - 1)^2 - x^2 = -2x + 1$.

18.5. Вершина параболы имеет координаты $(x; y) = (a; a - a^2)$. Поэтому $y = x - x^2$.

18.6. Решите систему уравнений $a + b = 5$, $a - b = -1$, $c = 0$.

18.7. Дискриминант уравнения $x^2 = 2x + a$ равен нулю, поэтому $a = -1$ и $x = 1$.

18.8. Дискриминант уравнения $x^2 = ax - 4$ равен нулю, поэтому $a = \pm 4$ и $x = -\frac{a}{2} = \mp 2$.

18.9. Абсциссы концов отрезка, отсекаемого параболой $y = ax^2 + bx + c$ на прямой $y = kx + l$, — это корни уравнения $ax^2 + bx + c = kx + l$, т. е. $ax^2 + (b - k)x + c - l = 0$. Сумма этих корней равна $\frac{k - b}{a}$. Поэтому середина отрезка лежит на прямой $x = \frac{k - b}{2a}$.

18.10. Середины отрезков, отсекаемых параболой на прямых, перпендикулярных оси симметрии параболы, лежат на этой оси. Согласно задаче 18.9 середины отрезков, отсекаемых параболой на семействе параллельных прямых, лежат на прямой, параллельной оси ординат. (Эта задача не охватывает прямые, параллельные оси ординат, но такие прямые пересекают параболу только в одной точке.) Поэтому осью симметрии параболы может быть только прямая, на

которой лежат середины отрезков, параллельных оси абсцисс, концы которых лежат на параболе.

18.11. Квадратное уравнение

$$x^2 + 2bx + 1 = 2a(x + b),$$

т. е. $x^2 + 2(b - a)x + 1 - 2ab = 0$, должно не иметь корней. Это означает, что его дискриминант

$$4(b - a)^2 - 4(1 - 2ab) = 4(a^2 + b^2 - 1)$$

отрицателен.

18.12. Предположим, что числа удалось подобрать.

Первый способ. У двух парабол «ветви» направлены вверх, а у одной вниз, поэтому у двух трёхчленов старший коэффициент положительный, а у одного отрицательный, т. е. среди чисел a , b и c два положительных и одно отрицательное. Две параболы пересекают ось Oy в точках с отрицательными ординатами, а одна в точке с положительной ординатой, поэтому у двух трёхчленов свободный член отрицательный, а у одного положительный, т. е. среди чисел a , b и c два отрицательных и одно положительное. Получено противоречие.

Второй способ. Такие параболы имеют общую точку $(1, a + b + c)$. Но на рисунке у парабол общей точки нет.

18.13. Пусть отмеченные точки имеют координаты $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$. Тогда

$$f(b) - f(a) = lb^2 - la^2 + m(b - a) = k(b - a),$$

где число $k = l(a + b) + m$ целое. Квадрат расстояния между отмеченными точками равен $(b - a)^2 + (f(b) - f(a))^2 = (b - a)^2(1 + k^2)$. По условию это число — полный квадрат. Но тогда и число $1 + k^2$ — полный квадрат, что возможно только при $k = 0$.

18.14. Пусть прямая задаётся уравнением $ax + by + c = 0$. Тогда абсциссы точек пересечения прямой с осями координат равны 0 и $-\frac{c}{a}$, а абсциссы точек пересечения прямой с гиперболой являются корнями уравнения $ax^2 + cx + b = 0$, поэтому они равны

$$\frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}.$$

18.15. Прямая, которая проходит через точку $(x_0; y_0)$ и не параллельна осям координат, задаётся уравнением $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$,

т. е. $ax + by = ax_0 + by_0$. Уравнение $ax + \frac{b}{x} = ax_0 + by_0$ имеет только один корень, поэтому

$$4ab = (ax_0 + by_0)^2 = a^2x_0^2 + 2ab + b^2y_0^2,$$

т. е. $(ax_0 - by_0)^2 = 0$. Таким образом, можно положить $a = y_0$ и $b = x_0$.

18.16. Воспользовавшись тем, что $x_0y_0 = 1$, покажите, что концы рассматриваемого отрезка имеют координаты $(0; 2y_0)$ и $(2x_0; 0)$.

18.17. Запишите уравнение кривой в виде $y = \frac{y_0x - y_0x_0 + e}{x - x_0}$ и воспользуйтесь тем, что $y_0(-x_0) - (e - x_0y_0) = -e \neq 0$. Для нахождения центра кривой воспользуйтесь тем, что центром симметрии кривой $xy = e$ является точка $(0; 0)$.

18.18. Запишите уравнение кривой в виде $(x - x_0)(y - y_0) = e$, где $x_0 = -\frac{d}{c}$, $y_0 = \frac{a}{c}$ и $e = -\frac{ad - bc}{c^2}$, и воспользуйтесь задачей 18.17.

18.19. Воспользуйтесь задачей 18.18.

18.20. Воспользуйтесь тем, что $\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)}$.

18.21. Сначала докажите, что

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{(ad - bc)(x_1 - x_2)}{(cx_1 + d)(cx_2 + d)}$$

и

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{f(x_1) - f(x_3)} = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} \cdot \frac{cx_3 + d}{cx_2 + d}.$$

Глава 19. Квадратные неравенства

19.1. Рассмотрите следующие случаи:

1) $x \leq 0$ или $4 \leq x \leq 5$; 2) $0 \leq x \leq 4$; 3) $x \geq 5$.

В случае 1 решите неравенство $x^2 - 4x + 3 \geq x^2 - x + 5$. В случае 2 решите неравенство $-x^2 + 4x + 3 \geq x^2 - x + 5$. В случае 3 решите неравенство $x^2 - 4x + 3 \geq x^2 + x - 5$.

19.2. Ясно, что $3x - 3 > 0$, т. е. $x > 1$. При $x > 1$ можно возвести обе части в квадрат. Запишите полученное при этом неравенство в виде $(x + 3)x(x - 2)(x - 5) < 0$. Если $x > 1$, то $(x + 3)x > 0$, поэтому приходим к неравенству $(x - 2)(x - 5) < 0$.

19.3. Если $-2 < a < 2$, то дискриминант трёхчлена отрицательный. Если $a = \pm 2$, то неравенство имеет вид $(x \pm 1)^2 > 0$. Если $a > 2$ или $a < -2$, то корни трёхчлена равны $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

19.4. Умножьте обе части неравенства на положительное число a , положите $y = ax$ и запишите полученное неравенство в виде

$$a^2 + (4y^2 + 8)a + 4y^4 + 32y \geq 0.$$

Рассмотрите левую часть как квадратный трёхчлен от a , найдите его корни и разложите его на множители:

$$(a + 2y^2 + 4y)(a + 2y^2 - 4y + 8) \geq 0.$$

Ясно, что $a + 2y^2 - 4y + 8 = a + 2(y - 2)^2 > 0$. Запишите неравенство $a + 2y^2 + 4y \geq 0$ в виде $2(y + 1)^2 - 2 + a \geq 0$. Если $a \geq 2$, то y любое. Если $0 < a < 2$, то $y \leq \frac{-2 - \sqrt{4 - 2a}}{2}$ или $y \geq \frac{-2 + \sqrt{4 - 2a}}{2}$. Воспользуйтесь теперь тем, что $y = ax$.

19.5. Если у квадратного трёхчлена нет корней или есть только один корень, то все его значения одновременно неотрицательны или неположительны. Если квадратный трёхчлен имеет корни x_1 и x_2 , где $x_1 < x_2$, то его значения при $x < x_1$ и при $x > x_2$ имеют один знак, а при $x_1 < x < x_2$ — другой знак. Поэтому если квадратный трёхчлен в двух точках принимает значения разных знаков, то между этими точками лежит x_1 или x_2 .

19.6. Числа a и b заключены между корнями многочлена $f(x)$, поэтому число x тоже заключено между этими корнями.

19.7. Пусть $f(x) = -x^2 + 1$. Тогда $f(2) = f(-2) = -3$ и $f(0) = 1$.

19.8. Пусть $f(x) = x^2 - (a + 2)x + a$. Неравенство $f(1) \leq 0$ выполняется для всех a , а неравенство $f(2) \leq 0$ выполняется при $a \geq 0$. Кроме того, согласно задаче 19.6 для всех x , заключённых между 1 и 2, из неравенств $f(1) \leq 0$ и $f(2) \leq 0$ следует неравенство $f(x) \leq 0$.

19.9. Пусть $f(x) = 2x^2 + ax - 5$. Если $-3 < a < 3$, то $f(1) = a - 3 < 0$ и $f(-1) = -a - 3 < 0$. Поэтому согласно задаче 19.6 имеем $f(x) < 0$ при $|x| \leq 1$. Если $|a| > 3$, то $f(1)f(-1) = 9 - a^2 < 0$. Поэтому согласно задаче 19.5 многочлен $f(x)$ имеет корень, модуль которого меньше 1. Если $|a| = 3$, то многочлен $f(x)$ имеет корень, модуль которого равен 1.

19.10. Пусть $f(x) = x^2 - ax + 2a$. Если $f(1) = 1 + a \leq 0$, то неравенство выполняется для $x = 1$. Если $f(1) > 0$, то для некоторого $x > 1$ неравенство $f(x) \leq 0$ выполняется только в следующем случае: $\frac{a}{2} > 1$ и $f\left(\frac{a}{2}\right) \leq 0$, т. е. $a \geq 8$.

19.11. Пусть $f(x) = x^2 - 2ax - 2b$. По условию $\alpha^2 = -a\alpha - b$ и $\beta^2 = a\beta + b$, поэтому $f(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha^2 = 3\alpha^2$ и $f(\beta) = \beta^2 - 2\beta^2 = -\beta^2$. Значит, $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$. Поэтому между числами α и β есть корень уравнения $x^2 - 2ax - 2b = 0$.

19.12. Пусть квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет корни x_1 и $x_2 = x_1 + n + a$, где $a \geq 0$. Для определённости будем считать, что ко-

коэффициент при x^2 положителен. Положим $x_0 = x_1 + \frac{a}{2}$. Тогда $x_0 \geq x_1$ и $x_0 + n \leq x_2$. Поэтому $f(x_0) + f(x_0 + 1) + \dots + f(x_0 + n) < 0$. У квадратного трёхчлена $f(x) + \dots + f(x + n)$ коэффициент при x^2 положителен, поэтому при достаточно больших x он принимает положительные значения.

19.13. При $x = x_1$ и при $x = x_2$ трёхчлен $\frac{a}{2}x^2 + bx + c$ принимает значения $-\frac{ax_1^2}{2}$ и $\frac{3ax_2^2}{2}$. Эти значения имеют разные знаки, поэтому один из корней трёхчлена расположен между x_1 и x_2 .

19.14. Предположите, что $|f(x)| < 1$ при $|x| \leq 1$, и рассмотрите графики функций $f(x)$ и $g(x) = 2x^2 - 1$. Согласно предположению $f(\pm 1) < g(\pm 1) = 1$ и $f(0) > g(0) = -1$, поэтому графики функций f и g пересекаются по крайней мере в двух точках: одна точка пересечения лежит на отрезке $[-1, 0]$, а другая — на отрезке $[0, 1]$. Покажите затем, что графики функций f и g пересекаются не более чем в одной точке. Действительно, из равенства $2x^2 + ax + b = 2x^2 - 1$ следует, что $ax + b = -1$. Кроме того, из неравенства $f(0) > g(0)$ следует, что $b > -1$, поэтому при $a \neq 0$ уравнение $ax + b = -1$ имеет единственное решение, а при $a = 0$ не имеет решений.

19.15. Из условия следует, что $p_1 \neq p_2$. Положите $x_1 = \frac{q_2 - q_1}{p_1 - p_2}$. Тогда

$$x_1^2 + p_1 x_1 + q_1 = x_1^2 + p_2 x_1 + q_2 = \frac{(q_2 - q_1)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - q_1 p_2)}{(p_1 - p_2)^2} < 0.$$

Это означает, что графики функций $f_1(x) = x^2 + p_1 x + q_1$ и $f_2(x) = x^2 + p_2 x + q_2$ пересекаются в точке (x_1, y_1) , где $y_1 < 0$. В таком случае квадратные трёхчлены $x^2 + p_1 x + q_1$ и $x^2 + p_2 x + q_2$ имеют корни α_1, β_1 и α_2, β_2 . Рассмотрите функцию

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x) = (p_1 - p_2)x + (q_2 - q_1) = (p_1 - p_2)(x - x_1)$$

и покажите, что

$$\begin{aligned} f_1(\alpha_2)f_1(\beta_2) &= f(\alpha_2)f(\beta_2) = (p_1 - p_2)^2(\alpha_2 - x_1)(\beta_2 - x_1) = \\ &= (p_1 - p_2)^2 f_2(x_1) < 0. \end{aligned}$$

19.16. По условию $9a - 3b + c < 3$, $a - b + c > 2$ и $a + b + c < 0$. Умножьте второе неравенство на -2 , сложите три неравенства и получите неравенство $8a < -1$.

19.17. Пусть $f(x) = ax^2 - bx + c$ и $g(x) = (a + b)x^2 + c$. Парабола $y = g(x)$ симметрична относительно оси ординат, поэтому достаточ-

но проверить, что $|g(0)| < 1$ и $|g(1)| < 1$. Эти неравенства следуют из того, что $g(0) = f(0)$ и $g(1) = f(-1)$.

Глава 20. Комбинаторика и вероятность

20.1. Для каждого из n предметов есть две возможности: его можно либо выбрать, либо не выбрать.

20.2. Каждая из монет может оказаться в любом из трёх карманов. Поэтому для каждой из семи монет нужно выбрать один из трёх карманов.

20.3. На первом месте может стоять любая из 9 цифр (все, кроме 0), а на остальных четырёх — любая из десяти.

20.4. Первую цифру можно выбрать 9 способами, а каждую из шести остальных — 10 способами. Всего получаем $9 \cdot 10^6$ способов.

20.5. Чтобы получить шестизначное число, делящееся на 5, нужно дописать в конце пятизначного числа 0 или 5. Согласно задаче 20.3 количество пятизначных чисел равно 90 000.

20.6. Первая цифра любая из девяти (0 не может стоять на первом месте). Каждая следующая цифра выбирается одним из пяти способов.

20.7. Достаточно задать три первые цифры такого числа.

20.8. Количество всех последовательностей длины 3, состоящих из чисел от 1 до 6, равно 6^3 , а количество всех последовательностей длины 3, состоящих из чисел от 1 до 5, равно 5^3 .

20.9. Каждый делитель имеет вид $p^k q^l$, где k принимает одно из $m + 1$ значений (от 0 до m), а l принимает одно из $n + 1$ значений.

20.10. Всего есть 90 000 пятизначных чисел (задача 20.3). Найдём количество пятизначных чисел, в которых не содержится ни одной цифры 8. На первом месте в таком числе не может стоять ни 0, ни 8 — всего 8 вариантов; на каждом из последующих четырёх мест может стоять любая из 9 цифр, отличных от 8. Поэтому количество таких чисел равно $8 \cdot 9^4 = 52\,488$. Таким образом, количество пятизначных чисел, в записи которых содержится хотя бы одна цифра 8, равно $90\,000 - 52\,488 = 37\,512$.

20.11. Если девушки и юноши занумерованы, то разбиение на пары задаётся перестановкой номеров юношей.

20.12. Можно считать, что кресла пронумерованы по порядку. Тогда девушки сидят либо в креслах с чётными номерами, либо в креслах с нечётными номерами. На свои кресла юноши и девуш-

ки рассаживаются произвольно, у юношей есть 5! возможностей, и у девушек тоже есть 5! возможностей.

20.13. Количество способов рассадить произвольно шесть человек на шесть стульев равно 6!. Если затем менять местами людей, сидящих друг за другом, то это можно сделать $2^3 = 8$ различными способами. Из этих способов ровно один удовлетворяет условию. Искомое число равно

$$\frac{6!}{8} = 90.$$

20.14. *Первый способ.* В каждой вертикали находится по одной ладье. Положение ладей определяется перестановкой горизонталей.

Второй способ. Ладья на первой горизонтали может занимать 8 разных положений. Если это положение фиксировано, то ладья на второй горизонтали может занимать уже только 7 положений. Аналогично для ладьи на третьей горизонтали остаётся 6 вариантов и т. д. Итого $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 8!$ способов.

20.15. Капитаном может стать любой из 11 футболистов. После выбора капитана на роль его заместителя могут претендовать 10 оставшихся человек. Таким образом, всего есть $11 \cdot 10 = 110$ разных вариантов.

20.16. Цвет для верхней полосы флага можно выбрать шестью разными способами. После этого для средней полосы флага остаётся пять возможных цветов, а затем для нижней полосы флага — четыре различных цвета. Таким образом, флаг можно изготовить $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ способами.

20.17. Найдите сначала количество десятизначных чисел, в которых все цифры разные. На первом месте в таком числе может стоять любая из девяти отличных от нуля цифр, на втором — любая из девяти цифр, отличных от первой, для третьей цифры остаётся уже 8 вариантов и т. д. Всего получается $9 \cdot 9!$ чисел. Вычтите это количество из количества $9 \cdot 10^9$ всех десятизначных чисел (см. указание к задаче 20.3).

20.18. а) Искомое число равно C_{15}^5 .

б) После того как выбрана первая команда, вторую команду можно выбрать C_{10}^5 способами. Кроме того, выбор сначала второй команды, а потом первой даёт тот же самый результат, что и выбор сначала первой, а потом второй. Поэтому произведение двух полученных чисел нужно разделить на 2.

в) После того как выбраны две команды, третья команда тоже выбрана. Кроме того, разный порядок выбора команд приводит

к одному и тому же результату. Поэтому произведение двух полученных чисел нужно разделить на $3!$.

20.19. Количество способов выбрать 3 книги из 6 равно $C_6^3 = 20$. Количество способов выбрать 3 книги из 8 равно $C_8^3 = 56$. Искомое число равно $20 \cdot 56 = 1120$.

20.20. Первую пару можно выбрать $\frac{8 \cdot 7}{2}$ способами, вторую $\frac{6 \cdot 5}{2}$ способами и т. д. Порядок, в котором выбираются пары, не имеет значения, поэтому произведение

$$\frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2}$$

нужно разделить на $4!$. В результате получим

$$\frac{8 \cdot 7}{8} \cdot \frac{6 \cdot 5}{6} \cdot \frac{4 \cdot 3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = 7 \cdot 5 \cdot 3.$$

20.21. На первом месте может стоять любая из 9 цифр (все, кроме 0), на втором тоже (все, кроме первой) и т. д.

20.22. Чёрные бусинки разбивают белые бусинки на две группы (одна из этих групп может содержать 0 бусинок). Вид ожерелья полностью определяется количеством бусинок в меньшей группе. Это количество может быть равно 0, 1 или 2.

20.23. Семь девушек на семь разных мест в хороводе можно расставить $7! = 5040$ способами. Но в хороводе расположения, которые получаются при движении по кругу, не различаются. Поворотами хоровода из одного расположения можно получить 7 других расположений. Поэтому всего получается $\frac{7!}{7} = 6! = 720$ способов.

20.24. Ожерелье, в отличие от хоровода, можно не только вращать по кругу, но и перевернуть. Воспользовавшись результатом задачи 20.23, получаем $\frac{720}{2} = 360$ различных ожерелий.

20.25. Пусть сумма первых двух цифр равна n и сумма двух последних цифр тоже равна n . Число n принимает значение от 1 до 18. Если количество двузначных номеров, у которых сумма цифр равна n , равно a_n , то искомое число равно $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{18}^2$. Проверьте, что $a_1 = 2, a_2 = 3, \dots, a_8 = 9, a_9 = 10, a_{10} = 9, \dots, a_{17} = 2, a_{18} = 1$.

20.26. Число $x^2 + y^2$ делится на 7 тогда и только тогда, когда оба числа x и y делятся на 7. Действительно, квадрат целого числа при делении на 7 даёт остатки 0, 1, 2 и 4. Количество целых чисел, заключённых между 1 и 1000 и делящихся на 7, равно 142. Поэтому искомое число равно $142^2 = 20\,164$.

20.27. Остатки от деления на 7 чисел 2^x и x^2 повторяются с периодами 3 и 7, поэтому остатки от деления на 7 числа $2^x - x^2$ повторяются с периодом 21. Среди чисел x от 1 до 21 равные остатки от деления на 7 чисел 2^x и x^2 дают ровно 6 чисел. Поэтому среди чисел от 1 до $9996 = 21 \cdot 476$ есть $476 \cdot 6 = 2856$ требуемых чисел. Непосредственная проверка с использованием полученной последовательности остатков показывает, что из оставшихся чисел 9997, 9998 и 9999 только число 9998 обладает требуемым свойством.

20.28. Будем отдельно подсчитывать сумму тысяч, сотен, десятков и единиц для рассматриваемых чисел. На первом месте может стоять любая из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5. Количество всех чисел с фиксированной первой цифрой равно $6 \cdot 6 \cdot 3 = 108$, поскольку на втором и третьем месте может стоять любая из шести цифр, а на четвёртом месте может стоять любая из трёх цифр 0, 2, 4 (мы рассматриваем только чётные числа). Поэтому сумма тысяч равна $(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 108 \cdot 1000 = 1\,620\,000$. Количество чисел с фиксированной второй цифрой равно $5 \cdot 6 \cdot 3 = 90$ (на первом месте стоит любая из пяти цифр). Поэтому сумма сотен равна

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 90 \cdot 100 = 135\,000.$$

Аналогично сумма десятков равна

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 90 \cdot 10 = 13\,500,$$

а сумма единиц равна $(2 + 4) \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,080$.

20.29. Выделим один из $n + 1$ предметов и обозначим его a . Любому набору из оставшихся n предметов можно сопоставить набор из чётного числа из $n + 1$ предметов следующим образом: набору из чётного числа предметов сопоставляем тот же самый набор, а к набору из нечётного числа предметов добавляем предмет a .

20.30. Пусть в числе $ABCDE$ обе первые цифры отличны от 5. Если $B \neq 0$, то поставим этому числу в соответствие число $BCDEA$, а если $B = 0$, то поставим ему в соответствие число $5CDEA$. Таким способом получаются все пятизначные числа, не делящиеся на 5.

20.31. Возможны 4 равновероятных исхода: орёл-орёл, орёл-решка, решка-орёл, решка-решка. Интересующее нас событие происходит только в первом из них.

20.32. а) Выберите ту из частей, на которой оказалась первая отметка. Вероятность того, что вторая пометка окажется на выбранной части, равна $\frac{1}{k}$.

б) Рассмотрите $k + 1$ точку — две пометки и $k - 1$ точку разлома. Выбрать две точки из $k + 1$ можно $\frac{(k+1)k}{2}$ способами. А выбрать две точки из $k + 1$ так, чтобы они оказались соседними, можно k способами. Выбор двух точек из рассматриваемых $k + 1$ точек соответствует выбору тех равных частей палки, на которые ставятся пометки.

20.33. Суммы 9 и 10 можно получить двумя разными способами: $9 = 3 + 6 = 4 + 5$ и $10 = 4 + 6 = 5 + 5$. Но нужно учитывать порядок, в котором выпадают числа на костях. Поэтому число 9 получается четырьмя разными способами, а число 10 лишь тремя:

$$9 = 3 + 6 = 6 + 3 = 4 + 5 = 5 + 4, \quad 10 = 4 + 6 = 6 + 4 = 5 + 5.$$

20.34. Вероятность того, что первый вынутый шар белый, равна $\frac{10}{25}$. Вероятность того, что при этом условии второй шар белый, равна $\frac{9}{24}$ и т. д. Искомая вероятность равна

$$\frac{10}{25} \cdot \frac{9}{24} \cdot \frac{8}{23} \cdot \frac{7}{22} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 23 \cdot 11}.$$

20.35. Пусть вероятность выиграть матч у отца равна p , а у матери — q . По условию $p < q$. Победу мальчику приносят следующие исходы турнира: ВВП, ВВВ, ПВВ (здесь В означает выигрыш, а П — проигрыш). Для турнира «отец—мать—отец» вероятности таких исходов равны $pq(1 - p)$, pqr , $(1 - p)qr$. Поэтому вероятность выигрыша в таком турнире равна $2pq - pqr$. Аналогично вероятность выигрыша в турнире «мать—отец—мать» равна $2pq - qrr$. Ясно, что $pqr < qrr$, поэтому $2pq - pqr > 2pq - qrr$.

20.36. Пусть игроки сыграют ещё три партии, т. е. игра фиктивно продолжается даже после того, как первый игрок получил приз. Второй игрок получит приз тогда и только тогда, когда он выиграет все три партии. Поскольку все $2^3 = 8$ исходов этих трёх партий равновероятны, второй игрок получит приз с вероятностью $\frac{1}{8}$. Соответственно, первый игрок получит приз с вероятностью $\frac{7}{8}$.

20.37. а) Пусть в ящике лежит m красных носков и n чёрных. Вероятность того, что первый выбранный носок красный, равна $\frac{m}{n+m}$. При условии, что первый выбранный носок красный, вероятность того, что второй носок тоже красный, равна $\frac{m-1}{n+m-1}$. Поэтому вероятность того, что оба носка красные, равна $\frac{m}{n+m} \cdot \frac{m-1}{n+m-1}$. Таким

образом, требуется, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{m}{n+m} \cdot \frac{m-1}{n+m-1} = \frac{1}{2}. \quad (1)$$

При $n=1$ получаем $m=3$. Такой набор носков нам подходит.

б) Ясно, что $n > 0$. Тогда, как легко проверить, $\frac{m}{n+m} > \frac{m-1}{n+m-1}$. Поэтому должны выполняться неравенства

$$\frac{m}{n+m} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{m-1}{n+m-1},$$

т. е. $(\sqrt{2}+1)n < m < (\sqrt{2}+1)n+1$. По условию число n чётно. Для $n=2, 4, 6$ получаем $m=5, 10, 15$. В первых двух случаях равенство (1) не выполняется, а в третьем выполняется. При этом $n+m=6+15=21$.

20.38. Пусть на первой игральной кости написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, а на второй 0, 6, 12, 18, 24, 30. Тогда любое число от 1 до 36 представляется единственным образом в виде суммы чисел, написанных на двух кубиках.

Глава 21. Дополнительные задачи

21.1. Вычислите произведение $(x^2+x+1)(x+c)$.

21.2. Решите систему уравнений $a_3=1$, $3a_3+2a_2=4$, $3a_3+2a_2+a_1=6$, $a_3+a_2+a_1+a_0=4$.

21.3. Если $x \leq 0$, то числа x^{12} , $-x^9$, x^4 и $-x$ неотрицательные; если $0 < x < 1$, то $x^{12}+x^4(1-x^5)+(1-x) > 0$; если $x \geq 1$, то $x^9(x^3-1)+x(x^3-1)+1 > 0$.

21.4. Натуральные числа, не превосходящие a и делящиеся на n , — это числа $n, 2n, \dots, mn$, где m — наибольшее целое число, для которого $mn \leq a$, т. е. $m \leq \frac{a}{n}$.

21.5. Оба числа равны количеству натуральных чисел, не превосходящих a и делящихся на n .

21.6. Количество чисел от 1 до n , делящихся на p^k , равно $\left[\frac{n}{p^k} \right]$.

Каждое из этих чисел, не делящееся на p^{k+1} , даёт вклад k в данную сумму.

21.7. Если $x < 1$, то $[x] + [2x] \leq 1$, а если $x \geq 1$, то $[x] + [2x] \geq 1+2=3$.

21.8. Запишите число $[nx]$ в виде $[nx] = na_0 + a_1$, где a_1 — остаток от деления числа $[nx]$ на n . Тогда $nx = na_0 + a_1 + \alpha$, где $0 \leq a_1 \leq n-1$ и $0 \leq \alpha < 1$. Поэтому

$$x = a_0 + \frac{a_1 + \alpha}{n},$$

где $a_1 + \alpha < (n - 1) + 1 = n$. Следовательно, $[x] = a_0$ и $[nx] - n[x] = a_1 \leq n - 1$.

21.9. Пусть $k = [\sqrt{4n + 1}]$. Тогда $k^2 \leq 4n + 1 < (k + 1)^2$. Полный квадрат при делении на 4 не может давать в остатке 2 или 3, поэтому числа $4n + 2$ и $4n + 3$ не могут совпасть с $(k + 1)^2$. Следовательно, оба эти числа меньше $(k + 1)^2$.

21.10. Воспользуйтесь тем, что

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}$$

и $n < \sqrt{n(n+1)} < n + 1$.

21.11. Последовательно докажите неравенства

$$\begin{aligned} (4n + 1)^2 &< 16n^2 + 8n + 3 < (4n + 2)^2, \\ (2n + 1)^2 &< 4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3} < (2n + 2)^2, \\ (n + 1)^2 &< n^2 + \sqrt{4n^2 + \sqrt{16n^2 + 8n + 3}} < (n + 2)^2. \end{aligned}$$

21.12. Пусть $[x] = a$ и $\{x\} = b$. Тогда $x = a + b$, поэтому данное неравенство имеет вид $ab < a + b - 1$. Это неравенство эквивалентно неравенству $(a - 1)(b - 1) < 0$. Ясно также, что $b = \{x\} < 1$. Поэтому неравенство принимает вид $[x] > 1$, т. е. $x \geq 2$.

21.13. *Первый способ.* Пусть $x = 11n + r$, где $n \geq 0$ и $0 \leq r \leq 10$. Тогда $\left[\frac{x}{11}\right] = n$ и $n + 1 = \left[\frac{x}{10}\right] = n + \left[\frac{n+r}{10}\right]$, поэтому $10 \leq n + r < 20$, т. е. $10 - r \leq n \leq 19 - r$. Для каждого r от 0 до 10 получаем 10 решений.

Второй способ. Если $x \geq 220$, то $\frac{x}{10} \geq 2 + \frac{x}{11}$, поэтому и целые части чисел $\frac{x}{10}$ и $\frac{x}{11}$ отличаются по крайней мере на 2. Если же $x < 220$, то эти целые части отличаются меньше чем на 2. Кроме того, если $\left[\frac{x}{10}\right] = \left[\frac{x}{11}\right] + a$, то

$$\left[\frac{x+110}{10}\right] = \left[\frac{x+110}{11}\right] + 1 + a.$$

Поэтому ровно одно из чисел x и $x + 110$, где $x \leq 110$, является решением данного уравнения.

21.14. В качестве a можно взять корень уравнения $x + \frac{1}{x} = n$, где n — натуральное число, $n \geq 3$. При $n = 4$ получится число, указанное в ответе.

21.15. Сначала вычеркните из набора чисел 1, 2, ..., 999 числа, кратные 5; их количество равно $\left[\frac{999}{5}\right] = 199$. Затем из того же

набора чисел вычеркните числа, кратные 7; их количество равно $\left\lfloor \frac{999}{7} \right\rfloor = 142$. При этом числа, кратные 35, будут вычеркнуты дважды. Их количество равно $\left\lfloor \frac{999}{35} \right\rfloor = 28$. Значит, всего вычеркнуто $199 + 142 - 28 = 313$ чисел, а осталось $999 - 313 = 686$ чисел.

21.16. Выберите натуральное число n так, что $n^4 \leq x < (n+1)^4$. Тогда $n^2 \leq \sqrt{x} < (n+1)^2$. С одной стороны, $n \leq \sqrt{\sqrt{x}} < n+1$, поэтому $[\sqrt{\sqrt{x}}] = n$. С другой стороны, $n^2 \leq [\sqrt{x}] < (n+1)^2$, поэтому $n \leq \sqrt{[\sqrt{x}]} < n+1$ и $[\sqrt{[\sqrt{x}]}] = n$.

21.17. Предположив, что среди данных чисел нет некоторого натурального числа $p \leq 250$, выберите целое число k так, что $\frac{k^2}{1000} < p$ и $\frac{(k+1)^2}{1000} \geq p+1$. Тогда $\frac{k^2}{1000} + \frac{2k+1}{1000} \geq p+1$, поэтому $\frac{2k+1}{1000} > 1$, т. е. $k > 500$. Это противоречит тому, что $\frac{k^2}{1000} < p \leq 250$.

21.18. Предположив, что для некоторого целого $k \geq 500$ числа $\left\lfloor \frac{k^2}{1000} \right\rfloor$ и $\left\lfloor \frac{(k+1)^2}{1000} \right\rfloor$ равны, выберите натуральное число m так, что

$$m \leq \frac{k^2}{1000} < \frac{(k+1)^2}{1000} < m+1.$$

Тогда

$$\frac{(k+1)^2}{1000} - \frac{k^2}{1000} < 1,$$

т. е. $\frac{2k+1}{1000} < 1$. Это противоречит тому, что $k \geq 500$.

21.19. Среди 12 остатков от деления данных чисел на 11 найдутся два одинаковых.

21.20. В компании не могут одновременно присутствовать человек, который дружит со всеми, и человек, который не дружит ни с кем. Поэтому количество знакомых у людей из компании, состоящей из n человек, равно одному из $n-1$ чисел.

21.21. Два из чисел a, a^2, \dots, a^{b+1} дают одинаковые остатки при делении на b . Пусть это будут числа a^k и a^l , где $k > l$. Тогда $a^k - a^l = a^l(a^{k-l} - 1)$ делится на b . Числа a^l и b взаимно простые, поэтому $a^{k-l} - 1$ делится на b .

21.22. Два из чисел a, b и c дают одинаковые остатки при делении на 4. Если, например, a и b при делении на 4 дают остаток 3 (или оба дают остаток 1), то $ab - 1$ делится на 4.

21.23. Предположите, что ни одно из чисел $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + \dots + a_n$ не делится на n . Тогда при делении на n эти

числа могут давать не более $n - 1$ разных остатков: $1, 2, \dots, n - 1$. Поэтому два числа S_p и S_q , где $p > q$, дают одинаковые остатки при делении на n . Это означает, что число $S_p - S_q = a_{q+1} + \dots + a_p$ делится на n .

21.24. Сопоставьте каждому выбранному числу его наибольший нечётный делитель. Количество нечётных чисел, не превосходящих n , равно $\frac{n}{2}$ при чётном n и $\frac{n+1}{2}$ при нечётном n . Поэтому у двух из выбранных чисел наибольший нечётный делитель один и тот же. Большее из этих чисел делится на меньшее.

21.25. Отметьте на оси координат точки с координатами

$$x - [x], 2x - [2x], 3x - [3x], \dots, (n-1)x - [(n-1)x].$$

Эти точки лежат на отрезке с координатами 0 и 1 и делят его на n отрезков. Длина одного из этих отрезков не превосходит $\frac{1}{n}$. Рассмотрим этот отрезок. Если один из его концов — это 0 или 1, то другой его конец — искомое число. Если концы отрезка — числа $kx - [kx]$ и $lx - [lx]$, где $k > l > 0$, то число $(k-l)x$ искомое.

21.26. Сопоставьте члену a_k данной последовательности два числа x_k и y_k , где x_k — наибольшая длина возрастающей последовательности, начинающейся с a_k , y_k — наибольшая длина убывающей последовательности, начинающейся с a_k . Предположите, что $x_k \leq m$ и $y_k \leq n$ для всех k . Тогда количество всех различных пар чисел (x_k, y_k) не превосходит mn . Поэтому $x_k = x_l$ и $y_k = y_l$ для некоторых номеров $k \neq l$. Но этого не может быть. Действительно, пусть для определённости $k < l$. Тогда если $a_k < a_l$, то $x_k > x_l$, а если $a_k > a_l$, то $y_k > y_l$.

21.27. В третьем ящике может лежать только чёрный шар. Белый шар может лежать только во втором ящике. Зелёный шар лежит в первом ящике.

21.28. Если любого туземца спросить, к какому племени он принадлежит, то он назовётся аборигеном. Проводник не обманул путешественника, поэтому он абориген.

21.29. Тот, кто всегда говорит правду, на заданный вопрос ответит «нет», а тот, кто всегда лжёт, ответит «да».

21.30. Оба ответят «да».

21.32. Занумеруйте предметы номерами от 0 до 3 и сопоставьте этим номерам записи 00, 01, 10, 11. Можно задать два вопроса: входит ли предмет в группу $\{0, 1\}$ и входит ли предмет в группу $\{0, 2\}$. Ответ на первый вопрос позволяет выяснить первую цифру записи, а ответ на второй вопрос — вторую.

21.33. Занумеруйте предметы номерами от 0 до 7 и сопоставьте этим номерам записи 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Можно задать вопросы, входит ли выделенный предмет в группы $\{0, 1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 4, 5\}$ и $\{0, 2, 4, 6\}$. Ответы на эти вопросы позволяют последовательно выяснить первую, вторую и третью цифру записи.

21.34. Митя не мог провести один и тот же день и в Смоленске, и в Вологде, поэтому месяц начинался во вторник (иначе первый вторник и первый вторник после первого понедельника совпали бы). Аналогично и второй месяц должен начинаться во вторник. Это возможно только в случае, когда один месяц — февраль, а другой — март, причём год не високосный. Следовательно, в Смоленске Митя был 1 февраля, в Вологде — 8 февраля, во Пскове — 1 марта, во Владимире — 8 марта.

21.35. Из первого заявления для правдолюбца с наименьшей нагрузкой следует, что в институте не более 10 правдолюбцов, а для лжеца с наибольшей нагрузкой — что в институте не менее 10 правдолюбцов. Из второго заявления для правдолюбца с самой большой зарплатой следует, что в институте не менее 100 лжецов, а для лжеца с самой маленькой зарплатой — что в институте не более 100 лжецов. Таким образом, в институте работает 10 правдолюбцов и 100 лжецов.

21.36. Если бы на двух передних мудрецах были чёрные шляпы, то сидящий сзади мудрец знал бы, что на нём белая шляпа. Значит, хотя бы на одном из них шляпа белая. Поэтому если бы на сидящем впереди мудреце была бы чёрная шляпа, то сидящий посередине понял бы, что на нём самом — белая. Значит, на мудреце, сидящем впереди, шляпа белая.

Предметный указатель

абсолютная величина числа 7
арифметический квадратный
корень 12
асимптота 33

биквадратное уравнение 23

вероятность 40
вершина параболы 33
взаимно однозначное
соответствие 43
Виета формулы 17
возвратное уравнение 23

гипербола 33

двойное неравенство 7
действительная часть 30
дискриминант квадратного
трёхчлена 17
— — уравнения 17
дробная часть числа 46
дробно-линейная функция 33

задача Даламбера 44

интервал 37
иррациональное число 12

квадратичная функция 33
квадратное неравенство 37
— уравнение 17
квадратный корень
арифметический 12
— трёхчлен 17
комплексное число 30

корень из единицы 31
кубический корень из единицы 31

линейное неравенство 7

мнимая единица 30
— часть 30
мнимое число 30
модуль комплексного числа 30
— числа 7

неравенство второй степени 37
— двойное 7
— квадратное 37
— Коши 20
— линейное 7
— нестрогое 7
— строгое 7

объединение 37
ось параболы 33
отрезок 37

парабола 33
перестановка 39
полуинтервал 37
правило произведения 39
приведённое квадратное
уравнение 17
принцип Дирихле 48

размещение 39
рациональная функция 23
рациональное уравнение 23
решение системы уравнений 25

свойства неравенств 7

-
- система уравнений 25
 - симметрическая 27
 - сопряжённые числа 30
 - сочетание 40
 - строгое неравенство 7

 - уравнение биквадратное 23
 - возвратное 23
 - квадратное 17
 - рациональное 23
 - формулы Виета 17

 - функция квадратичная 33
 - рациональная 23

 - целая часть числа 46
 - центр гиперболы 33

 - числа сопряжённые 30
 - Фибоначчи 22
 - число иррациональное 12
 - комплексное 30
 - мнимое 30

Учебно-методическое издание

Виктор Васильевич Прасолов

Задачи по алгебре. 8 класс

Подписано к печати 27.09.2019 г. Формат 60 × 90/16. Печать офсетная.
Объем 6 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в типографии ООО «Принт сервис групп»,
тел./факс: (499) 785-05-18, e-mail: 3565264@mail.ru, www.printsg.ru
105187, г. Москва, Борисовская ул., д. 14, стр. 6

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 745-80-31. E-mail: biblio@mccme.ru

ISBN 978-5-4439-1400-8



9 785443 914008 >