

З.А.Скопец ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МИНИАТЮРЫ

З. А. Скопец

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МИНИАТЮРЫ





Залман Алтерович
Скопец

З. А. Скопец

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МИНИАТЮРЫ

Составитель *Г. Д. Глейзер*

Москва «Просвещение» 1990

ББК 22.151
С44

Рецензенты:

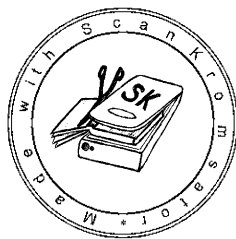
зам. директора НИИ СиМО кандидат педагогических наук В. В. Фирсов;
учитель-методист школы № 165 Москвы М. Л. Галицкий

Скопец З. А.

С44 Геометрические миниатюры/Сост. Г. Д. Глейзер.— М.: Просвещение, 1990.— 224 с.: ил.

ISBN 5-09-001293-8

Эта книга будет интересна всем любителям математики: старшеклассникам и учащимся ПТУ и техникумов, студентам и учителям математики. Читатели познакомятся с любопытными геометрическими фактами и оригинальными подходами к решению задач. Каждый очерк — это законченное «микроисследование» нестандартной задачи.



Scan AAW

С $\frac{4306020000-692}{103(03)-90}$ 227 — 90

ББК 22.151

ISBN 5-09-001293-8

© Скопец З. А. Составитель Глейзер Г. Д., 1990

Любителям математики предлагается книга известного советского геометра и педагога, доктора физико-математических наук, профессора Залмана Алтеровича Скопеца (1917—1984). Книга составлена из отдельных очерков, написанных им в разное время. Часть этих очерков публикуется впервые.

Вначале несколько слов об авторе. З. А. Скопец родился в г. Краславе (ныне Латвийская ССР). По окончании гимназии поступил в Рижский университет, который окончил в 1938 г. со званием магистра по специальности «математика». Свой трудовой путь З. А. Скопец начал учителем математики сельской школы Ярославской области. Затем с 1942 г. до конца своей жизни он работал в Ярославском государственном педагогическом институте им. К. Д. Ушинского. Здесь он прошел путь от лаборанта до заведующего кафедрой геометрии. В 1946 г. З. А. Скопец защитил в МГУ им. М. В. Ломоносова кандидатскую диссертацию (о кремоновых преобразованиях), а в 1962 г. в МГПИ им. В. И. Ленина — докторскую диссертацию «Проективная и неевклидова циклография и ее применение к начертательной геометрии в евклидовом пространстве». З. А. Скопец опубликовал более 200 работ. Под его редакцией вышло 15 томов ученых записок по геометрии.

Круг научных интересов Залмана Алтеровича был чрезвычайно широк и разнообразен — от работ по элементарной геометрии до исследований в области проективной, начертательной, неевклидовой и алгебраической геометрий. В Ярославле Залман Алтерович создал научную школу по конструктивной геометрии, в значительной мере продвинувшую и обогатившую новыми идеями эту классическую область математики, основоположниками которой были Г. Монж, Ж. В. Понселе, Я. Штейнер. Среди учеников З. А. Скопеца есть много ярких ученых и педагогов.

Особо следует подчеркнуть роль З. А. Скопеца в создании современных учебных и методических пособий по геометрии для школ и педагогических институтов. Педагогическая деятельность была его любимым делом и приносила ему много радости и глубокое удовлетворение.

З. А. Скопец обладал выдающимся талантом и тонким вкусом в решении и составлении задач. Эта грань его таланта нашла свое достаточно полное

отражение в разделе задач журнала «Математика в школе». Много лет он вел этот раздел, что способствовало существенному повышению культуры геометрических задач в нашей стране.

Мне посчастливилось сотрудничать и дружить с З. А. Скопцом. Предлагаемая книга составлена мною из различных его статей и докладов, написанных в разное время. При подготовке этих очерков к печати я старался в максимальной степени сохранить авторский текст. Некоторые очерки написаны З. А. Скопцом в соавторстве со своими учениками: В. А. Жаровым («Две теоремы косинусов для четырехугольника»), Т. М. Кориковой («Об использовании единичного вектора при решении задач»), А. И. Чегодаевым («Применение движений к решению геометрических задач»), А. И. Кузнецовой («Метод подобия при решении планиметрических задач»), Г. Б. Кузнецовой («Применение метода координат к изучению свойств параболы»), Я. П. Понариным («Метод комплексных чисел в планиметрии». «Прямая и окружность на плоскости комплексных чисел»), Э. Г. Готманом («Теорема Морлея»).

Содержащиеся в книге очерки представляют собой убедительный пример того, какой богатый простор дает пытливому мыслящему уму элементарная геометрия и насколько велик ее потенциал в деле математического развития человека.

В заключение выражаю сердечную признательность и благодарность Марии Борисовне Скопец, предоставившей материалы к этой книге и активно помогавшей мне в подготовке книги к печати, профессору Кировского пединститута Я. П. Понарину, кандидату педагогических наук В. В. Фирсову, учителю М. Л. Галицкому, ассистенту Горьковского пединститута Г. Н. Никитиной, внимательно прочитавшим материалы и оказавшим помощь в отборе наиболее актуальных из них.

Профессор Г. Д. Глейзер

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

К наиболее важным и замечательным теоремам элементарной евклидовой геометрии относится теорема Пифагора. Геометрический факт, что в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов, был известен задолго до Пифагора. Так, египетские землемеры еще около 2000 лет до н. э. фактически пользовались обратной теоремой Пифагора, при построении прямых углов обращаясь к треугольнику со сторонами 3, 4, 5.

Значение этой теоремы выходит далеко за рамки элементарной геометрии. Вот почему в средней школе изучению теоремы Пифагора уделяется много внимания. Изучающему геометрию важно не только знать зависимость между отрезками, являющимися сторонами прямоугольного треугольника, но и обратно: знать аналитический критерий перпендикулярности двух отрезков (или двух прямых), когда эти отрезки (или прямые) произвольно лежат на плоскости или в пространстве.

Рассмотрим доказательства теоремы Пифагора и следствий из нее, а также некоторые связанные с ней задачи, основываясь на учении о подобии.

I

Теорема 1. *В прямоугольном треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.*

Теорема 2. *В прямоугольном треугольнике каждый из катетов есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу.*

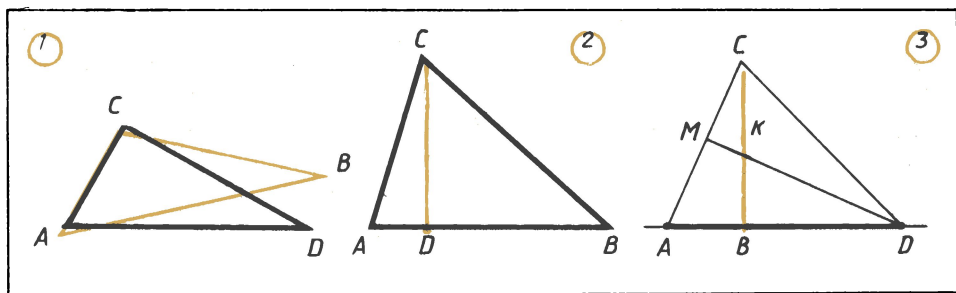
Доказательства этих теорем проводятся на основании признаков подобия.

Теорема 3 (теорема Пифагора). *В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.*

Эту теорему можно доказать, опираясь на теорему 2.

Следствия из теоремы Пифагора.

1. *Квадрат стороны треугольника, лежащей против тупого угла, больше суммы квадратов двух других его сторон.*



Пусть в треугольнике ABC угол C тупой (рис. 1). Построим отрезок CD , равный CB и перпендикулярный CA . По теореме Пифагора имеем $CA^2 + CD^2 = AD^2$. Но на основании теоремы о треугольниках, имеющих соответственно по две равные стороны и неравные углы, заключенные между ними, можно записать: $AB > AD$. Следовательно, $AB^2 > CA^2 + CD^2$, или $AB^2 > AC^2 + BC^2$.

2. Квадрат стороны треугольника, лежащей против острого угла, меньше суммы квадратов двух других его сторон.

Доказательство аналогично предыдущему.

Теорема 4 (обратная теорема Пифагора). Если в треугольнике сумма квадратов двух сторон равна квадрату третьей стороны, то треугольник прямоугольный и третья сторона является его гипотенузой.

Если предположить, что третья сторона лежит против тупого угла, то ее квадрат должен быть больше суммы квадратов двух других сторон (следствие 1), что противоречит условию.

Точно так же отвергается допущение, что угол, лежащий против третьей стороны, острый (следствие 2). Таким образом, угол, лежащий против третьей стороны, прямой, и теорема доказана^{1*}.

Теорема 5. Разность квадратов двух сторон треугольника равна разности квадратов их проекций на третью сторону.

Доказательство опирается на теорему Пифагора, примененную дважды (рис. 2). Обратная теорема будет доказана ниже.

Задача на построение. На прямой даны две точки A и B . Построить на этой прямой точку D так, чтобы разность квадратов ее расстояний до точек A и B была равна квадрату длины данного отрезка k .

Анализ. Предположим, что на прямой AB построена такая точка D , что $AD^2 - BD^2 = k^2$, где k — данный отрезок (рис. 3). Из последнего равенства следует, что $AD^2 = k^2 + BD^2$. Если на отрезках BD и k , как на катетах, построить прямоугольный треугольник, то его гипотенуза будет равна AD . Поэтому, восставив в точке B к прямой AB перпендикуляр и отложив на нем отрезок BC , равный k , получим равнобедренный треугольник ADC . Точка D находится на пересечении прямой AB и серединного перпендикуляра отрезка AC .

* Здесь и далее указан порядковый номер «Комментариев», помещенных в конце книги.

Построение. В точке B восстановим перпендикуляр к прямой AB и отложим на нем отрезок BC , равный k . Серединный перпендикуляр отрезка AC и прямая AB пересекаются в искомой точке D .

Доказательство. Из свойств серединного перпендикуляра вытекает равенство $AD=DC$. По теореме Пифагора, примененной к треугольнику DBC , имеем $DB^2+k^2=DC^2$. После замены в последнем равенстве отрезка DC равным отрезком AD получим $DB^2+k^2=AD^2$, или $AD^2-DB^2=k^2$, и точка D искомая.

Исследование. Задача всегда имеет по крайней мере одно решение, так как серединный перпендикуляр отрезка AC всегда пересекает прямую AB . Задача не может иметь более одного решения, так как предположение о наличии двух решений приводит к тому, что отрезок AC имеет два серединных перпендикуляра, а этого быть не может. Следовательно, задача имеет единственное решение.

Приведенное построение дает возможность сформулировать такую важную теорему:

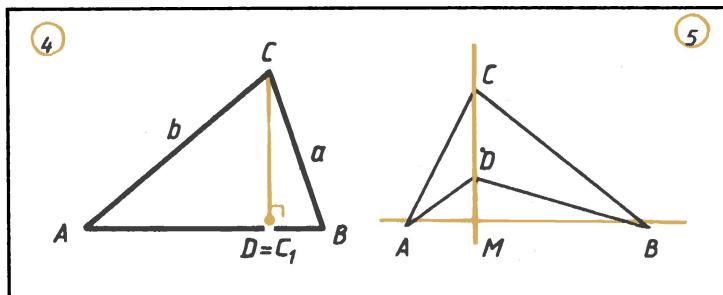
Теорема 6. Если на прямой даны две точки, то на этой же прямой существует единственная точка, разность квадратов расстояний от которой до данных двух точек равна квадрату длины данного отрезка.

Теперь докажем теорему, обратную теореме 5.

Теорема 7. Если на стороне треугольника или на ее продолжении дана точка, разность квадратов расстояний от которой до вершин, определяющих эту сторону, равна разности квадратов прилежащих сторон треугольника, то эта точка является основанием высоты, опущенной на данную сторону треугольника.

Для стороны AB равнобедренного треугольника ABC ($AC=BC$) теорема очевидна. Пусть $b>a$ (рис. 4). Согласно условию теоремы имеем $b^2-a^2=AD^2-BD^2$, где D — точка на прямой AB . Опустим из вершины C высоту CC_1 на сторону AB . Согласно теореме 5 имеем $b^2-a^2=AC_1^2-BC_1^2$. Но согласно теореме 6 на прямой AB существует единственная точка, разность квадратов расстояний от которой до точек A и B равна $b^2-a^2=k^2$. Следовательно, точки C_1 и D совпадают, и теорема доказана. Если $b<a$, то меняем наименование вершин треугольника и справедливость теоремы сохраняется.

Теорема 7 позволяет доказать более общую теорему, которая дает признак перпендикулярности двух прямых в форме равенства разностей квадратов отрезков, концы которых принадлежат данным прямым.



Пусть прямые AB и CD перпендикулярны и пересекаются в точке M (рис. 5). Согласно теореме 5 имеем:

$$CA^2 - CB^2 = MA^2 - MB^2, \quad DA^2 - DB^2 = MA^2 - MB^2,$$

откуда следует, что $CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2$.

Обратно: пусть имеет место последнее равенство. Опустим из точек C и D перпендикуляры CC_1 и DD_1 на прямую AB .

Согласно теореме 5 имеем:

$$CA^2 - CB^2 = AC_1^2 - BC_1^2, \quad DA^2 - DB^2 = AD_1^2 - BD_1^2,$$

откуда, учитывая условие, следует, что

$$AC_1^2 - BC_1^2 = AD_1^2 - BD_1^2.$$

На основании теоремы 6 заключаем, что точки C_1 и D_1 совпадают. Прямая CC_1 совпадает с прямой DD_1 как два перпендикуляра, восстановленные в одной точке к прямой AB . Но данная прямая CD имеет с прямой CC_1 две общие точки C и D . Следовательно, прямые CC_1 и CD совпадают и перпендикулярность прямых AB и CD доказана.

Теорема 8. Если две прямые AB и CD перпендикулярны, то имеет место равенство

$$CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2.$$

Если даны две прямые AB и CD и имеет место последнее равенство, то эти прямые перпендикулярны.

Соотношение $CA^2 - CB^2 = DA^2 - DB^2$ будем называть коротко условием перпендикулярности прямых AB и CD .

II

Теоремы 1—8 можно применить при доказательстве других теорем. Начнем с доказательства теоремы о прохождении трех высот треугольника или их продолжений через одну точку.

Теорема 9. Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке (ортоцентре треугольника).

Пусть высоты AA_1 и BB_1 треугольника ABC или их продолжения пересекаются в точке H (рис. 6). Эта точка всегда существует, так как предположение, что высоты AA_1 и BB_1 параллельны, приводит к параллельности сторон AC и BC , чего не может быть. Докажем, что прямая CH перпендикулярна прямой AB .

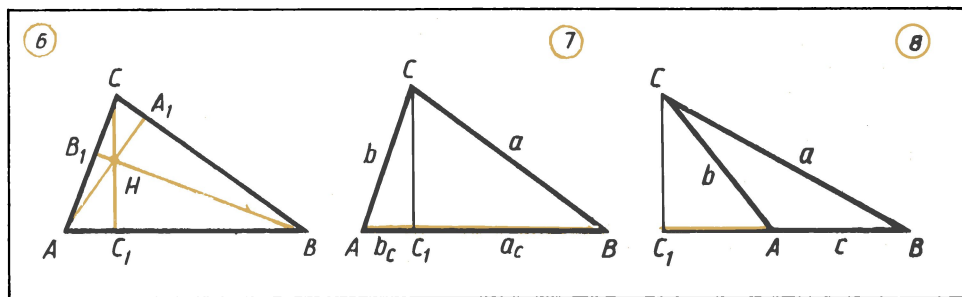
Примечание. Предполагаем, что точки C и H различны. Если же точки C и H совпадают, то $\angle C = 90^\circ$ и справедливость теоремы очевидна.

Действительно, из перпендикулярности прямых AH и BC следует

$$AB^2 - AC^2 = HB^2 - HC^2.$$

Из перпендикулярности прямых BH и AC следует

$$BA^2 - BC^2 = HA^2 - HC^2.$$



Вычитая почленно эти равенства, получим $BC^2 - AC^2 = HB^2 - HA^2$, что означает перпендикулярность прямых AB и CH , и теорема доказана.

Теорема 5 позволяет вычислить проекцию одной стороны треугольника на другую сторону.

Рассмотрим несколько случаев, которые здесь могут возникнуть.

а) Пусть треугольник ABC остроугольный (рис. 7) и a_c и b_c — проекции сторон a и b на сторону c . Согласно теореме 5

$$a^2 - b^2 = a_c^2 - b_c^2, \quad a_c + b_c = c.$$

Решая эту систему относительно a_c и b_c , получаем:

$$a_c = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}, \quad b_c = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

б) Пусть треугольник ABC тупоугольный и стороны b и c лежат против острых углов (рис. 8). Проекция этих сторон на третью сторону, лежащую против тупого угла, определяются так же, как и в первом случае.

Рассмотрим проекции двух сторон на третью, лежащую против острого угла, например сторон a и b на сторону c .

Из системы

$$a^2 - b^2 = a_c^2 - b_c^2, \quad a_c - b_c = c$$

находим a_c и b_c :

$$a_c = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}, \quad b_c = \frac{-(b^2 + c^2 - a^2)}{2c}.$$

Теорема 10. Если две стороны треугольника образуют острый угол, то проекция одной из этих сторон на вторую сторону равна дроби, числитель которой равен сумме квадратов этих сторон без квадрата третьей стороны, а знаменатель — удвоенной второй стороне.

Теорема 11. Если две стороны треугольника образуют тупой угол, то проекция одной из этих сторон на вторую равна дроби, числитель которой равен квадрату третьей стороны без суммы квадратов первых двух сторон, а знаменатель — удвоенной второй стороне.

Из последних теорем непосредственно вытекает теорема о квадрате стороны, лежащей против острого угла, и теорема о квадрате стороны, лежащей против тупого угла треугольника.

Теорема 12. Квадрат стороны треугольника, лежащей против острого угла, равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения одной из этих сторон и проекции на нее другой стороны:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb_c, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc_b.$$

Теорема 13. Квадрат стороны треугольника, лежащей против тупого угла, равен сумме квадратов двух других сторон, сложенной с удвоенным произведением одной из этих сторон, и проекции на нее другой стороны:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cb_c, \quad a^2 = b^2 + c^2 + 2bc_b.$$

Из теорем 12 и 13 можно вывести зависимость между сторонами и диагоналями параллелограмма (рис. 9).

Теорема 14. В параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон:

$$l^2 + f^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Из этой теоремы можно получить формулу, выражающую медиану треугольника через его стороны (рис. 10).

Теорема 15. Квадрат медианы треугольника равен полусумме квадратов заключающих ее сторон без квадрата половины третьей стороны:

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

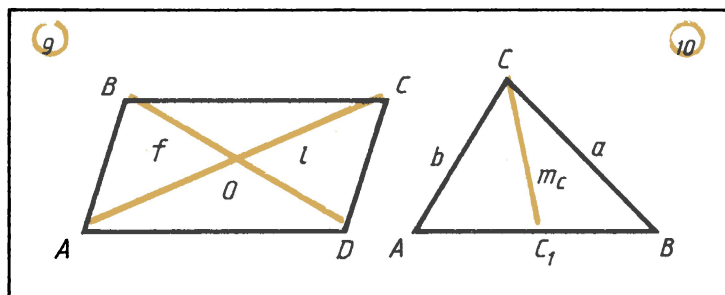
Зная длину проекции одной стороны треугольника на другую сторону, можно при помощи теоремы Пифагора выразить высоту треугольника через его стороны. Действительно, из треугольника ACC_1 (рис. 7) находим на основании теоремы Пифагора соотношение $b^2 = b_c^2 + h_c^2$.

Подставим $b_c = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$, получим:

$$h_c^2 = b^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}.$$

После упрощений и преобразований получим известную формулу:

$$h_c = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



Метрические соотношения в окружности могут быть установлены на основании теоремы 5. Действительно, пусть через точку A , лежащую вне окружности, проведена к ней произвольная секущая, встречающая окружность в точках C и D (рис. 11). Из центра O окружности радиуса R опустим на секущую перпендикуляр OM . Согласно теореме 5 имеем:

$$OA^2 - R^2 = AM^2 - MD^2,$$

или

$$OA^2 - R^2 = (AM + MD) \cdot (AM - MD).$$

Отсюда следует (если учесть, что отрезки CM и MD равны), что

$$AC \cdot AD = AO^2 - R^2.$$

Теорема 16. Если из точки, лежащей вне окружности, провести к окружности секущую, то произведение отрезков секущей от данной точки до точек ее пересечения с окружностью не зависит от направления секущей и оно равно разности квадрата расстояния от данной точки до центра окружности и квадрата радиуса окружности.

Аналогичным образом доказывается теорема для случая, когда данная точка лежит внутри окружности. Формулировка теоремы остается в основном прежней.

Теорема 17. Если через точку, лежащую внутри окружности, провести хорду, то произведение отрезков этой хорды от данной точки до концов хорды не зависит от направления хорды и оно равно разности квадрата радиуса окружности и квадрата расстояния от данной точки до центра окружности:

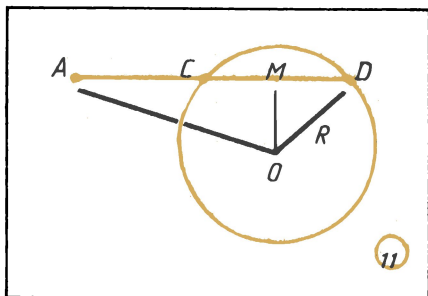
$$AC \cdot BD = R^2 - OA^2.$$

III

Доказанные выше теоремы могут быть использованы также в курсе стереометрии при изучении вопросов, связанных с перпендикулярностью прямых и перпендикулярностью прямой и плоскости. Для иллюстрации приведем доказательства нескольких теорем.

Теорема 18. Если прямая перпендикулярна двум прямым, расположенным на плоскости и проходящим через след² этой прямой, то всякая прямая, принадлежащая этой плоскости и проходящая через след данной прямой, перпендикулярна этой прямой.

Пусть в плоскости α даны две пересекающиеся прямые b и c . Прямая a перпендикулярна этим прямым и проходит через точку их пересечения M . Проведем через эту точку в плоскости α произвольную прямую d и докажем, что она перпендикулярна прямой a . Действительно, проведем в плоскости α вспомогательную прямую g , пересекающую прямые b , c , d в точках B , C , D так, чтобы $BD = DC$, что всегда можно сделать, используя свойства параллелограмма. Последние три точки соединим с произвольной точкой A



прямой a , отличной от M . Выразим медианы AD и MD треугольников ABC и MBC через их соответствующие стороны:

$$AD^2 = \frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}, \quad MD^2 = \frac{BM^2 + CM^2}{2} - \frac{BC^2}{4}.$$

После почленного вычитания этих равенств и применения прямой и обратной теорем Пифагора устанавливаем перпендикулярность прямых a и d :

$$AD^2 - MD^2 = \frac{1}{2}((AB^2 - BM^2) + (AC^2 - CM^2)) = AM^2,$$

или

$$AD^2 = AM^2 + MD^2.$$

Теорема 19. *Если прямая принадлежит плоскости и перпендикулярна наклонной к этой плоскости, то прямая перпендикулярна и проекции наклонной.*

Пусть прямая b , расположенная в плоскости α и перпендикулярная наклонной a , проходит через основание A этой наклонной. Произвольную точку B прямой b соединяем с произвольной точкой M прямой a . Строим проекцию a_1 наклонной и проекцию M_1 точки M соединяем с точкой B . Треугольники AMM_1 и ABM_1 имеют общие катеты, и поэтому можно записать:

$$MA^2 - M_1A^2 = MB^2 - M_1B^2.$$

Учитывая, что треугольник ABM прямоугольный, запишем равенство $MB^2 = MA^2 + AB^2$, которое в сочетании с предыдущим равенством дает соотношение перпендикулярности прямой b и проекции наклонной:

$$M_1A^2 + AB^2 = M_1B^2.$$

Если прямая b не проходит через основание наклонной a , то через основание наклонной проводим прямую, параллельную прямой b .

Теорема 20. *Если проекция наклонной к плоскости перпендикулярна прямой, принадлежащей плоскости, то и сама наклонная перпендикулярна этой прямой.*

Доказательство аналогичное.

В заключение сформулируем признак перпендикулярности двух прямых в пространстве, доказательство которого предоставляем провести читателю.

Теорема 21. *Для того чтобы две прямые AB и CD были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2.$$

IV

В заключение сформулируем три задачи на доказательство, в решении которых могут найти применение рассмотренные выше теоремы.

Задача 1. Если в четырехугольнике суммы квадратов его противоположных сторон равны, то диагонали четырехугольника перпендикулярны.

Задача 2. Если перпендикуляры, опущенные из вершин одного треугольника на соответствующие стороны второго треугольника, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из вершин второго треугольника на соответствующие стороны первого треугольника, также пересекаются в одной точке.

Задача 3. Если у треугольной пирамиды две пары противоположных ребер перпендикулярны, то и ребра третьей пары также перпендикулярны.

ТЕОРЕМА О ПРОЕКЦИЯХ ДЛЯ ТРЕУГОЛЬНИКА И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НЕЕ

Теоремы синусов и косинусов можно излагать по-разному. Приведем варианты их изложения на основе теоремы о проекциях двух сторон треугольника на прямую, содержащую третью сторону.

Если C_1 — проекция вершины C треугольника ABC на прямую AB , то получаем два отрезка: AC_1 и C_1B — проекции сторон AC и BC на прямую AB . Если углы A и B острые, то

$$c = b \cos \hat{A} + a \cos \hat{B}.$$

Эта формула сохраняет свой вид и в том случае, когда углы A и B тупые или прямые. Для того чтобы в этом убедиться, читателю достаточно рассмотреть все возможные частные случаи. Их всего четыре:

- 1) $\hat{A} < 90^\circ$, $\hat{B} = 90^\circ$; 3) $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} < 90^\circ$;
2) $\hat{A} < 90^\circ$, $\hat{B} > 90^\circ$; 4) $\hat{A} > 90^\circ$, $\hat{B} < 90^\circ$.

Итак, имеет место теорема о проекциях двух сторон треугольника на прямую, содержащую третью сторону:

Теорема. Если в треугольнике ABC имеем $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, то

$$\begin{aligned} a &= b \cos \hat{C} + c \cos \hat{B}, \\ b &= c \cos \hat{A} + a \cos \hat{C}, \\ c &= a \cos \hat{B} + b \cos \hat{A}. \end{aligned} \tag{1}$$

Если формулы (1) принять за исходные, то с их помощью чисто алгебраически, не прибегая к чертежу, можно получить ряд важных и полезных следствий.

1. Теорема косинусов. Выведем теорему косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}. \tag{2}$$

В самом деле, вычислим, используя (1), выражение $a^2 + b^2 - c^2$:

$$a^2 + b^2 - c^2 = a(c \cos \hat{B} + b \cos \hat{C}) + b(a \cos \hat{C} + c \cos \hat{A}) - c(a \cos \hat{B} + b \cos \hat{A}).$$

Отсюда после упрощений находим:

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos \hat{C},$$

и соотношение (2) доказано⁴.

II. *Теорема синусов.* Из системы (1) найдем отношение $a:b$, используя сначала первое и третье уравнения, а затем второе и третье:

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \cos \widehat{C} + \frac{c}{b} \cos \widehat{B}, \\ \frac{a}{b} \cos \widehat{B} = \frac{c}{b} - \cos \widehat{A}; \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{a}{b} \cos \widehat{C} = 1 - \frac{c}{b} \cos \widehat{A}, \\ \frac{a}{b} \cos \widehat{B} = \frac{c}{b} - \cos \widehat{A}. \end{cases} \quad (4)$$

Из системы (3) находим:

$$\frac{a}{b}(1 - \cos^2 \widehat{B}) = \cos \widehat{C} + \cos \widehat{A} \cdot \cos \widehat{B}, \quad \cos \widehat{C} + \cos \widehat{A} \cos \widehat{B} \neq 0.$$

Из системы (4) получаем: $\frac{a}{b}(\cos \widehat{C} + \cos \widehat{A} \cos \widehat{B}) = 1 - \cos^2 \widehat{A}$.

Отсюда умножением получаем:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{1 - \cos^2 \widehat{A}}{1 - \cos^2 \widehat{B}} = \frac{\sin^2 \widehat{A}}{\sin^2 \widehat{B}}, \quad \text{или} \quad a:b = \sin \widehat{A}:\sin \widehat{B}.$$

Итак,

$$a:b:c = \sin \widehat{A}:\sin \widehat{B}:\sin \widehat{C} \quad (5)$$

и теорема синусов доказана⁵.

III. *Теорема сложения для функции синус.*

Имеем $\sin \widehat{C} = \sin(180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B})) = \sin(\widehat{A} + \widehat{B})$.

Но из $c = a \cos \widehat{B} + b \cos \widehat{A}$ следует по теореме синусов

$$\sin \widehat{C} = \sin \widehat{A} \cos \widehat{B} + \sin \widehat{B} \cos \widehat{A},$$

или

$$\sin(\widehat{A} + \widehat{B}) = \sin \widehat{A} \cos \widehat{B} + \sin \widehat{B} \cos \widehat{A}. \quad (6)$$

Если угол A острый, то из (6) следует:

$$\sin 2\widehat{A} = 2 \sin \widehat{A} \cos \widehat{A}. \quad (6')$$

IV. *Теорема сложения для функции косинус.* Из системы (1) имеем:

$$c = (b \cos \widehat{C} + c \cos \widehat{B}) + b \cos \widehat{A}.$$

Отсюда $c(1 - \cos^2 \widehat{B}) = b(\cos \widehat{B} \cos \widehat{C} + \cos \widehat{A})$.

Воспользовавшись теоремой синусов, получаем:

$$\sin \widehat{C} \sin^2 \widehat{B} = \sin \widehat{B} (\cos \widehat{B} \cos \widehat{C} + \cos \widehat{A}),$$

или

$$\cos \widehat{A} = \sin \widehat{B} \sin \widehat{C} - \cos \widehat{B} \cos \widehat{C}.$$

Так как $\cos \hat{A} = -\cos(\hat{B} + \hat{C})$, то отсюда следует:

$$\cos(\hat{B} + \hat{C}) = \cos \hat{B} \cos \hat{C} - \sin \hat{B} \sin \hat{C}. \quad (7)$$

V. *Синус разности и косинус разности.* Рассмотрим треугольник с углами $\hat{B} - \hat{A}$ ($\hat{B} > \hat{A}$), \hat{A} и $180^\circ - \hat{B}$, где \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} — углы данного треугольника ABC . По формуле (6) имеем:

$$\sin(\hat{B} - \hat{A}) = \sin \hat{A} \cos(180^\circ - \hat{B}) + \sin(180^\circ - \hat{B}) \cos \hat{A}.$$

Отсюда

$$\sin(\hat{B} - \hat{A}) = \sin \hat{B} \cos \hat{A} - \cos \hat{B} \sin \hat{A}. \quad (8)$$

Применяя к указанному треугольнику формулу (7), получаем:

$$\cos(180^\circ + \hat{A} - \hat{B}) = \cos \hat{A} \cos(180^\circ - \hat{B}) - \sin \hat{A} \sin(180^\circ - \hat{B}),$$

или

$$\cos(\hat{B} - \hat{A}) = \cos \hat{B} \cos \hat{A} + \sin \hat{B} \sin \hat{A}.$$

VI. *Зависимость между косинусами углов треугольника.* Если из системы (1) исключить a , b , c , то получим зависимость между косинусами трех углов треугольника ABC :

$$\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{C} + 2 \cos \hat{A} \cos \hat{B} \cos \hat{C} = 1. \quad (9)$$

VII. *Обратное утверждение.* Если между косинусами трех углов из промежутка $[0^\circ, 180^\circ]$ имеет место зависимость (9), то

$$(\cos \hat{A} + \cos \hat{B} \cos \hat{C})^2 = 1 - \cos^2 \hat{B} - \cos^2 \hat{C} + \cos^2 \hat{B} \cos^2 \hat{C}.$$

Отсюда

$$(\cos \hat{A} + \cos \hat{B} \cos \hat{C})^2 = (1 - \cos^2 \hat{B})(1 - \cos^2 \hat{C}),$$

или

$$(\cos \hat{A} + \cos \hat{B} \cos \hat{C})^2 - \sin^2 \hat{B} \sin^2 \hat{C} = 0.$$

После некоторых преобразований получим:

$$(\cos \hat{A} + \cos(\hat{B} + \hat{C}))(\cos \hat{A} + \cos(\hat{B} - \hat{C})) = 0.$$

Если углы положительны и сумма любых двух из них меньше 180° , то возможно, что $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ или $\hat{A} + \hat{B} - \hat{C} = 180^\circ$. Второй случай, однако, отпадает, так как $\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ + \hat{C} > 180^\circ$. Поэтому остается, что

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ.$$

Итак, если углы положительны и сумма любых двух из них меньше 180° , то из равенства (9) следует, что \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} — углы треугольника.

VIII. Из системы (1) путем сложения получаем:

$$a + b + c = (b + c) \cos \hat{A} + (c + a) \cos \hat{B} + (a + b) \cos \hat{C}.$$

Отсюда находим:

$$2p = 2p(\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C}) - (a \cos \hat{A} + b \cos \hat{B} + c \cos \hat{C}). \quad (10)$$

Но, как известно,

$$R(a \cos \hat{A} + b \cos \hat{B} + c \cos \hat{C}) = 2S,$$

где R — радиус описанной окружности.

Действительно, воспользовавшись треугольником с вершинами в основаниях высот данного треугольника, будем иметь:

$$a \cos \hat{A} + b \cos \hat{B} + c \cos \hat{C} = 2p \frac{r}{R}.$$

Учитывая (10), получим:

$$2p = 2p (\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C}) = 2p \frac{r}{R}.$$

Окончательно:

$$\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} = 1 + \frac{r}{R}. \quad (11)$$

Из полученного равенства вытекает:

$$\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} \leq \frac{3}{2},$$

так как согласно формуле Эйлера $2r \leq R$.

IX. При решении треугольников может оказаться полезной формула

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \hat{A} + \cos \hat{B}}{1 - \cos \hat{C}}, \quad (12)$$

которую получаем при сложении первых двух равенств системы (1).

Поскольку $a+b > c$, то получаем:

$$\frac{\cos \hat{A} + \cos \hat{B}}{1 - \cos \hat{C}} > 1,$$

или

$$\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} > 1. \quad (13)$$

Вычитанием аналогично получаем:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\cos \hat{B} - \cos \hat{A}}{1 + \cos \hat{C}},$$

откуда с учетом условия $\frac{a-b}{c} < 1$ имеем:

$$\frac{\cos \hat{B} - \cos \hat{A}}{1 + \cos \hat{C}} < 1,$$

или

$$\cos \hat{A} + \cos \hat{C} + 1 > \cos \hat{B}. \quad (14)$$

Сложение неравенств (13) и (14) дает:

$$2 \cos \hat{A} + 2 \cos \hat{C} + 1 + \cos \hat{B} > 1 + \cos \hat{B}.$$

Отсюда для каждого треугольника имеет место неравенство

$$\cos \hat{A} + \cos \hat{C} > 0. \quad (15)$$

ДВЕ ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

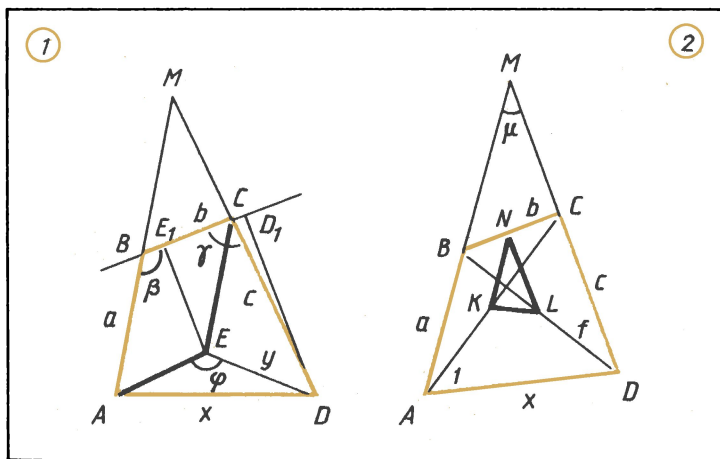
В практике нередко возникают задачи, решение которых опирается на метрические соотношения в четырехугольнике. Так, в геодезии часто приходится иметь дело с выяснением взаимного расположения четырех пунктов, в технике — с расчетами четырехзвенных шарнирных механизмов и т. п. Из всего многообразия возникающих здесь вопросов нами рассматриваются лишь две теоремы, которые по аналогии с соответствующими теоремами для треугольника естественно называть теоремами косинусов для четырехугольника. Эти теоремы интересны сами по себе, богаты вытекающими из них следствиями и могут с успехом применяться при решении различных метрических задач.

Теорема 1. *Квадрат стороны выпуклого четырехугольника равен сумме квадратов трех других сторон без удвоенных произведений пар этих сторон и косинусов углов между ними.*

Доказательство 1. Построив параллелограмм $ABCE$ (рис. 1), получим $\hat{ECD} = \hat{AMD} = \mu$. $CE = a$, $AE = b$.

На основании теоремы косинусов имеем $y^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \mu$. С другой стороны, из треугольника AED следует:

$$x^2 = b^2 + y^2 - 2by \cos \varphi.$$



Из полученных двух равенств находим:

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ac \cos \mu - 2by \cos \varphi.$$

Но

$$y \cos (180^\circ - \varphi) = E_1 D_1 = E_1 C + CD_1 = a \cos \widehat{BCE} + c \cos (180^\circ - \gamma).$$

Следовательно, $y \cos \varphi = a \cos \beta + c \cos \gamma$.

Подставив найденное значение $y \cos \varphi$ в выражение для x^2 , получим окончательно:

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab \cos \beta - 2bc \cos \gamma - 2ac \cos \mu. \quad (1)$$

И теорема доказана.

Обращаем, однако, внимание читателя на то, что *приведенное выше доказательство существенным образом опирается на чертеж*.

Необходимо рассмотреть другие выпуклые четырехугольники и убедиться в том, что эта теорема во всех случаях сохраняет свою силу независимо от расположения точек E_1 и D_1 на стороне BC .

Приведем второе доказательство, которое не нуждается в рассмотрении различных случаев расположения элементов четырехугольника.

Доказательство 2. Из треугольника KLN , вершинами которого являются середины диагоналей и середина стороны BC четырехугольника $ABCD$ (рис. 2), по теореме косинусов записываем:

$$KL^2 = KN^2 + LN^2 - 2KN \cdot LN \cos \mu, \quad (2)$$

причем согласно теореме Эйлера

$$KL^2 = \frac{1}{4} (a^2 + b^2 + c^2 + x^2 - e^2 - f^2).$$

Учитывая, что $KN^2 = \frac{1}{4} a^2$, $LN^2 = \frac{1}{4} c^2$, получаем после подстановки значений KL , KN , LN в равенство (2):

$$x^2 = e^2 + f^2 - b^2 - 2ac \cos \mu.$$

Значения e^2 и f^2 находим по теореме косинусов из треугольников ABC и BCD :

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta, \quad f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \gamma.$$

Подставив эти значения в выражение для x^2 , получим окончательно требуемое соотношение (1).

Наиболее экономный вывод соотношения (1) достигается средствами *векторной алгебры*.

Действительно, $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$, и, возведя обе части этого равенства в квадрат, получим:

$$x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + 2\vec{BC} \cdot \vec{CD} + 2\vec{CD} \cdot \vec{AB}.$$

Если скалярные произведения записать в виде произведения длин соответствующих векторов и косинусов углов между ними, то получим соотношение (1).

Последнее доказательство указывает на то, что теорема косинусов может быть распространена также на *вогнутые четырехугольники* и *четырёхугольники с самопересечением сторон*. Для определения углов в формуле (1) требуется стороны четырехугольника ориентировать по обходу его контура (рис. 3).

Отметим, что и первые доказательства могут быть распространены на любой четырехугольник, однако в каждом отдельном случае пришлось бы выяснить, какие углы участвуют в формуле (1).

Рассмотрим несколько задач, решения которых опираются на доказанную выше теорему.

Задача 1. Выразить диагональ правильного пятиугольника через его сторону.

Решение. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ со стороной a проведем диагональ AD . Применив теорему косинусов для четырехугольника $ABCD$, получим:

$$x^2 = 3a^2 - 4a^2 \cos 108^\circ - 2a^2 \cos 36^\circ.$$

С другой стороны, по теореме косинусов из треугольника ABC находим:

$$x^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos 108^\circ. \quad (3)$$

После сравнения значений для x^2 и упрощений получим:

$$2 \cos 108^\circ + 2 \cos 36^\circ = 1.$$

Отсюда следует, положив $\cos 108^\circ = -\sin 18^\circ$ или $\cos 36^\circ = 1 - 2 \sin^2 18^\circ$, что $4 \sin^2 18^\circ + 2 \sin 18^\circ - 1 = 0$ и

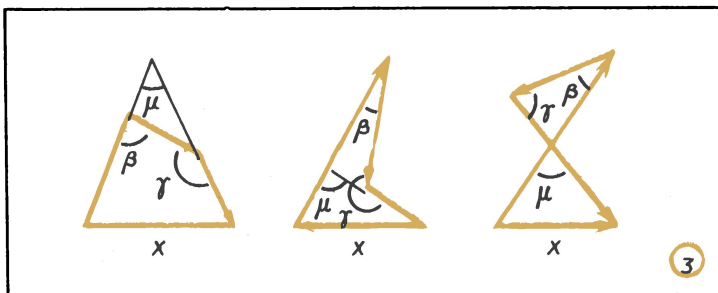
$$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Тогда из равенства (3) находим:

$$x^2 = 2a^2 + 2a^2 \frac{\sqrt{5}-1}{4},$$

или

$$x^2 = \frac{\sqrt{5}+3}{2} a^2.$$



Коэффициент при a^2 можно преобразовать так:

$$\frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{2\sqrt{5}+6}{4} = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}.$$

Следовательно, $x^2 = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4} a^2$ и $x = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+1)$.

Существуют и другие решения этой задачи, однако для данного решения характерно то, что попутно найдено значение $\sin 18^\circ$.

Задача 2. На сторонах треугольника вне его построены равносторонние треугольники. Доказать, что центры этих треугольников являются вершинами равностороннего треугольника.

Решение. По теореме косинусов определим расстояние между центрами O_1 и O_2 из четырехугольника $O_1O_2B_1A_1$ (рис. 4), где A_1 и B_1 — середины сторон треугольника ABC . В этом четырехугольнике $O_1A_1 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $A_1B_1 = \frac{c}{2}$, $O_2B_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$, $\widehat{O_1A_1B_1} = 90^\circ + \widehat{B}$, $\widehat{O_2B_1A_1} = 90^\circ + \widehat{A}$ и $(\widehat{O_1A_1}, \widehat{O_2B_1}) = 180^\circ - \widehat{C}$. Поэтому

$$O_1O_2 = \frac{a^2+b^2}{12} + \frac{c^2}{4} + \frac{ac\sqrt{3}}{6} \sin \widehat{B} + \frac{bc\sqrt{3}}{6} \sin \widehat{A} + \frac{2ab}{12} \cos \widehat{C}.$$

Но $ac \sin \widehat{B} = bc \sin \widehat{A} = 2S$, $2ab \cos \widehat{C} = a^2 + b^2 - c^2$.

Следовательно, $O_1O_2^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + 2\sqrt{3}S)$.

Симметрия⁶ полученной формулы относительно a , b и c указывает на то, что $O_1O_2 = O_2O_3 = O_3O_1$.

Задача 3. Две окружности радиусами R_1 и R_2 касаются внешним образом. Вычислить длину их общей внешней касательной.

Решение. Из центров O_1 и O_2 опускаем на общую касательную перпендикуляры O_1T_1 и O_2T_2 и применяем теорему косинусов к четырехугольнику $O_1T_1T_2O_2$, у которого два угла прямые, а третий равен нулю.

Предлагаем читателю самостоятельно решить следующие задачи, в которых целесообразно воспользоваться теоремой косинусов:

Задача 4. На стороне BC треугольника ABC вне его построен равносторонний треугольник BCD . Доказать, что

$$AD^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}S.$$

Задача 5. На сторонах треугольника $A_1A_2A_3$ построены вне его квадраты с центрами O_1 , O_2 , O_3 . Доказать, что

$$A_iO_i = O_jO_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

вычислив эти отрезки.

Задача 6. На сторонах выпуклого четырехугольника вне его построены квадраты. Доказать, что расстояния между центрами квадратов, построенных на противоположных сторонах четырехугольника, равны (выразив эти расстояния через элементы данного четырехугольника).

Задача 7. Выяснить справедливость теоремы косинусов для косо́го четырехугольника⁷.

Вторая теорема косинусов (теорема Бретшнейдера, 1843 г.), насколько нам известно, редко встречается в русской и иностранной учебной литературе по элементарной геометрии. Целесообразность знакомства с этой забытой теоремой читатель уяснит из ее содержания.

Теорема 2. Квадрат произведения диагоналей простого⁸ четырехугольника равен сумме квадратов произведений его противоположных сторон без удвоенного произведения всех четырех сторон четырехугольника и косинуса суммы двух его противолежащих углов.

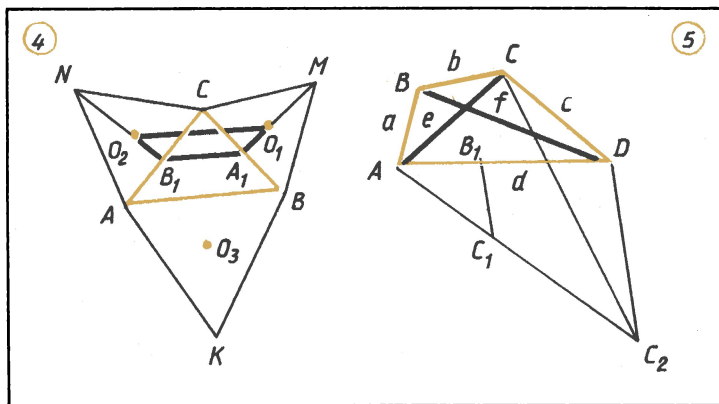
Эта теорема названа теоремой косинусов для четырехугольника потому, что она аналогична теореме косинусов для треугольника, стороны которого пропорциональны произведениям ef , ac , bd , где a , b , c , d — последовательные стороны данного четырехугольника, e и f — его диагонали. Существование такого треугольника легко может быть установлено.

Итак, необходимо доказать следующую зависимость между элементами простого четырехугольника: $e^2 f^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos \varphi$, где φ — угол, равный сумме углов A и C или B и D , так как $\cos(\widehat{A} + \widehat{C}) = \cos(\widehat{B} + \widehat{D})$.

Доказательство. Повернем треугольник ABC (рис. 5) вокруг точки A до совмещения стороны AB со стороной AD (точка B_1 может лежать на AD , на ее продолжении или совместиться с точкой D).

Полученный треугольник AB_1C_1 подвергнем гомотетии (в нашем случае растяжению) с центром в точке A и коэффициентом гомотетии $k = \frac{AD}{AB_1}$.

При этом точка B_1 совместится с точкой D , а треугольник AB_1C_1 займет положение треугольника ADC_2 .



Поскольку $AB_1=AB=a$, $B_1C=BC_1=b$, $AC_1=AC=e$, $AD=d$ и $k=\frac{d}{a}$,
то $AC_2=AC_1 \cdot k=\frac{ed}{a}$, $DC_2=B_1C_1 \cdot k=\frac{bd}{a}$.

Кроме того, $\widehat{ABC}=\widehat{AB_1C_1}=\widehat{ADC_2}$, а значит, $\widehat{CDC_2}=\widehat{B}+\widehat{D}$ или $360^\circ - (\widehat{B}+\widehat{D})$, т. е. равен сумме двух противоположных углов данного четырехугольника.

Используя теорему косинусов, определим CC_2 из треугольников CDC_2 и CAC_2 и полученные выражения приравняем:

$$c^2 + \frac{b^2 d^2}{a^2} - \frac{2bcd}{a} \cos(\widehat{B} + \widehat{D}) = e^2 + \frac{e^2 d^2}{a^2} - \frac{2e^2 d}{a} \cos A.$$

Заменив $\cos A$ выражением $\frac{a^2 + d^2 - f^2}{2ad}$ (из треугольника ABD) и выполнив преобразования, получим искомое соотношение для данного четырехугольника:

$$e^2 f^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(\widehat{B} + \widehat{D}).$$

Читатель самостоятельно убедится в том, что если четырехугольник $ABCD$ самопересекающийся⁹, то

$$e^2 f^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2abcd \cos(\widehat{A} + \widehat{C}),$$

где \widehat{A} есть угол между \vec{AB} и \vec{AD} , а \widehat{C} — угол между \vec{CB} и \vec{CD} .

Рассмотрим некоторые следствия из доказанной теоремы.

1. Если сумма какой-либо пары противоположных углов четырехугольника равна 90° , то квадрат произведения диагоналей равен сумме квадратов произведений противоположных сторон четырехугольника.

Действительно, если сумма углов A и C равна 90° (или же 270°), то $(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2$. Это соотношение представляет собой аналог теоремы Пифагора и в известном смысле может быть названо теоремой Пифагора для четырехугольника.

2. В параллелограмме с острым углом, равным 45° , квадрат произведения диагоналей равен сумме четвертых степеней неравных сторон.

Это следствие вытекает из предыдущего при $a=c$ и $b=d$.

3. Расстояние от вершины C прямого угла прямоугольного треугольника ABC до произвольной точки D его гипотенузы выражается формулой $CD^2 = \frac{a^2 m^2 + b^2 n^2}{c^2}$, где a и b — катеты, m и n — отрезки гипотенузы AB треугольника ABC .

Рассмотрим вырожденный четырехугольник¹⁰ $ABCD$, у которого $\widehat{BDA}=180^\circ$ и $\widehat{ACB}=90^\circ$. Очевидно, стороны четырехугольника равны a , b , m и n , а диагонали его $AB=m+n=c$ и $CD=e$. Следовательно, $e^2 c^2 = a^2 m^2 + b^2 n^2$, откуда и вытекает требуемое соотношение.

Рекомендуем читателю самостоятельно рассмотреть случай, когда точка D лежит на продолжении гипотенузы.

4. Во всяком выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон (теорема Птолемея).

Во вписанном четырехугольнике сумма углов A и C равна 180° , значит,

$$(ef)^2 = (ac)^2 + (bd)^2 + 2abcd,$$

или

$$(ef)^2 = (ac + bd)^2, \text{ т. е. } ef = ac + bd.$$

5. Расстояние BD между вершиной B треугольника ABC и произвольной точкой D стороны AC (рис. 6) определяется равенством

$$BD^2 = \frac{1}{AC} (AB^2 \cdot DC + BC^2 \cdot AD - AC \cdot AD \cdot DC).$$

Это соотношение известно как теорема Стюарта.

Рассмотрим вырожденный простой четырехугольник $ABCD$ с углом CDA , равным 180° ; диагонали его равны BD и $AC = DA + DC$.

Тогда

$$(BD \cdot AC)^2 = (AB \cdot DC)^2 + (BC \cdot AD)^2 - 2AB \cdot BC \cdot DC \cdot AD \cos(\widehat{B} + 180^\circ).$$

Но $\cos(180^\circ + \widehat{B}) = -\cos \widehat{B} = -\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC}$, поэтому

$$BD^2 \cdot AC^2 = AB^2 \cdot DC^2 + BC^2 \cdot AD^2 + CD \cdot DA (AB^2 + BC^2 - AC^2),$$

или $BD^2 \cdot AC^2 = AB^2 \cdot DC (DC + AD) + BC^2 \cdot AD (AD + CD) - CD \cdot DA \cdot AC^2$,

т. е. $BD^2 = \frac{1}{AC} (AB^2 \cdot DC + BC^2 \cdot AD - CD \cdot DA \cdot AC)$.

Случай, когда точка D лежит на продолжении стороны AC , читатель рассмотрит самостоятельно, выяснив, что соответствующий вырожденный четырехугольник является непростым.

6. Если на плоскости даны четыре точки A, B, C, D , то определяемые ими шесть отрезков удовлетворяют неравенству

$$AB \cdot CD \leq AC \cdot BD + AD \cdot BC,$$

причем знак равенства имеет место только в двух случаях: когда данные точки лежат на одной окружности или же эти точки лежат на одной прямой и, кроме того, пара точек A и B разделяет пару точек C и D .

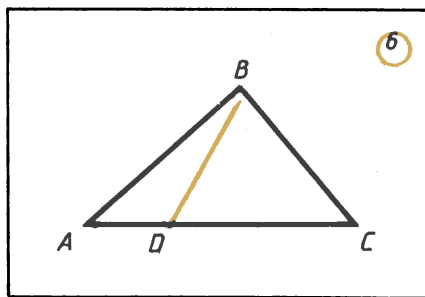
В самом деле, учитывая, что

$$AB^2 \cdot CD^2 \leq AC^2 \cdot BD^2 + AD^2 \cdot BC^2 + 2AC \cdot BD \cdot AD \cdot BC,$$

получаем, что

$$AB \cdot CD \leq AC \cdot BD + AD \cdot BC.$$

Если имеет место знак равенства, то $\widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ$ и данные четыре точки лежат на одной окружности или же на одной прямой.



ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ ДЛЯ ТРЕХГРАННОГО УГЛА

Зная стороны треугольника, можно вычислить его углы посредством формулы, выражающей теорему косинусов для треугольника. Аналогично обстоит дело и с трехгранным углом¹¹. Если даны плоские углы трехгранного угла, то его двугранные углы можно вычислить по формулам, выражающим теорему косинусов для трехгранного угла.

Обычно вывод формулы, связывающей плоские углы и двугранный угол трехгранного угла, проводится средствами векторной алгебры с использованием операции векторного умножения. Но введение этой операции связано с необходимостью рассматривать ориентированное пространство. Между тем искомая формула не зависит от ориентации пространства, подобно тому как теорема косинусов для треугольника не связана с ориентацией плоскости.

Эти соображения приводят к мысли искать такое доказательство теоремы косинусов для трехгранного угла, которое опирается на скалярное произведение векторов и поэтому не связано с ориентацией пространства.

Приведем два вывода теоремы косинусов для трехгранного угла, которые основаны на применении скалярного произведения векторов¹².

Т е о р е м а. *Косинус плоского угла трехгранного угла равен произведению косинусов двух остальных плоских углов, сложенному с произведением синусов тех же углов и косинуса двугрannого угла, определяемого этими плоскими углами:*

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \hat{A}. \quad (1)$$

Доказательство 1. На рисунке изображен трехгранный угол $SABC$ с плоскими углами $\widehat{BSC} = \alpha$, $\widehat{ASC} = \beta$, $\widehat{ASB} = \gamma$. На ребрах данного трехгранного угла отложим единичные векторы $\vec{SA} = \vec{e}_1$, $\vec{SB} = \vec{e}_2$, $\vec{SC} = \vec{e}_3$.

Проведем отрезки BM и CN перпендикулярно прямой SA , тогда $(\vec{MB}, \vec{NC}) = \hat{A}$. Для углов из промежутка $(0^\circ, 180^\circ)$ имеем: $|NC| = \sin \beta$, $|MB| = \sin \gamma$.

Кроме того, по свойству проекции вектора на ось

$$\vec{SN} = \cos \beta \vec{e}_1, \quad \vec{SM} = \cos \gamma \vec{e}_1.$$

По правилу сложения векторов

$$\vec{e}_3 = \vec{SN} + \vec{NC} = \vec{e}_1 \cos \beta + \vec{NC},$$

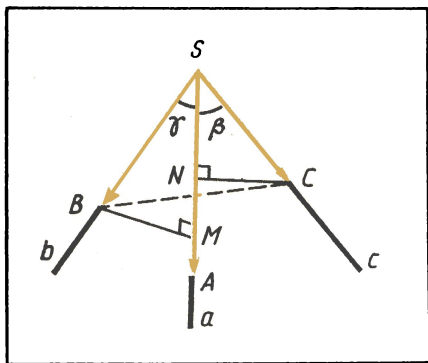
$$\vec{e}_2 = \vec{SM} + \vec{MB} = \vec{e}_1 \cos \gamma + \vec{MB}.$$

Перемножим скалярно эти два равенства, учитывая, что $\vec{NC} \perp \vec{e}_1$ и $\vec{MB} \perp \vec{e}_1$. Получим:

$$\vec{e}_3 \vec{e}_2 = \cos \beta \cos \gamma \vec{e}_1 \vec{e}_1 + \vec{NC} \cdot \vec{MB}.$$

Итак,

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \hat{A}.$$



Доказательство 2. Воспользуемся предыдущими обозначениями и рисунком. Имеем:

$$\vec{MB} \cdot \vec{NC} = |\vec{MB}| |\vec{NC}| \cos \hat{A} = \sin \beta \sin \gamma \cos \hat{A}. \quad (2)$$

С другой стороны, учитывая, что $\vec{SM} \cdot \vec{NC} = 0$, получим:

$$\begin{aligned} \vec{MB} \cdot \vec{NC} &= (\vec{SB} - \vec{SM}) \cdot \vec{NC} = \vec{SB} \cdot \vec{NC} - \vec{SM} \cdot \vec{NC} = \\ &= \vec{SB} (\vec{SC} - \vec{SN}) = \vec{SB} \cdot \vec{SC} - \vec{SB} \cdot \vec{SN}. \end{aligned}$$

Но $\vec{SN} = \cos \beta \vec{e}_1$, поэтому

$$\vec{SB} \cdot \vec{SN} = \vec{SB} (\cos \beta \vec{e}_1) = \cos \beta \cos \gamma.$$

Таким образом,

$$\vec{MB} \cdot \vec{NC} = \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma. \quad (3)$$

Из сопоставления (2) и (3) снова получаем (1).

При помощи теоремы косинусов для трехгранного угла можно успешно решать ряд стереометрических задач вычислительного характера, доказывать теоремы, касающиеся свойств плоских и двугранных углов трехгранного и многогранных углов. Эта теорема находит широкое применение в сферической геометрии и тригонометрии, в геодезии и астрономии.

Докажем для примера теорему о свойстве плоских углов трехгранного угла.

Т е о р е м а. *Величина каждого плоского угла трехгранного угла меньше суммы величин двух других плоских его углов, но больше их разности.*

Докажем, что $\beta + \gamma > \alpha > |\beta - \gamma|$. Из соотношения (1)

$$\cos \hat{A} = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

Так как $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$, то $-1 < \cos \hat{A} < 1$, или

$$-1 < \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma} < 1.$$

Произведение $\sin \beta \sin \gamma$ положительно, поэтому из предыдущего неравенства следует:

$$-\sin \beta \sin \gamma < \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma < \sin \beta \sin \gamma.$$

Отсюда $\cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma < \cos \alpha < \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma$, т. е.

$$\cos(\beta + \gamma) < \cos \alpha < \cos(\beta - \gamma). \quad (4)$$

Косинус — четная функция. Поэтому $\cos(\beta - \gamma) = \cos |\beta - \gamma|$. В промежутке $[0^\circ, 180^\circ]$ косинус монотонно убывает, поэтому при условии $\beta + \gamma \leq 180^\circ$ из (4) следует неравенство $\beta + \gamma > \alpha > |\beta - \gamma|$. Если же $\beta + \gamma > 180^\circ$, то последнее неравенство и подавно выполняется.

ПРИМЕНЕНИЕ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И АЛГЕБРАИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

При решении и исследовании многих задач арифметики, алгебры, анализа и геометрии приходится непосредственно или косвенно рассматривать неравенства и системы неравенств, применять свойства неравенств. Помимо известных приемов решения задач на неравенства, в основе которых лежит теорема Коши, можно предложить дополнительно еще неравенства, связанные со скалярным произведением:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \text{ при } \vec{a} \neq \vec{0}, \quad (1)$$

$$(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 - \vec{a}^2 \vec{b}^2 \leq 0, \quad (2)$$

причем в (2) знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда векторы \vec{a} и \vec{b} линейно зависимы (т. е. коллинеарны).

Более подробно: если $\vec{a} \uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$; если $\vec{a} \downarrow \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$. Эти два неравенства позволяют доказать известные неравенства и открывают путь для получения новых неравенств, не рассматривавшихся в школьной учебной литературе.

Ниже будут приведены решения геометрических и алгебраических задач на неравенства посредством формул (1) и (2).

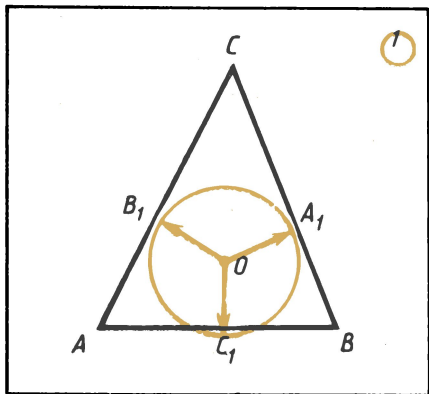
З а д а ч а 1. Доказать, что для всякого треугольника ABC выполняется неравенство $\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} \leq \frac{3}{2}$.

Р е ш е н и е. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC , A_1, B_1, C_1 — точки ее касания со сторонами BC, CA и AB (рис. 1).

Пусть $\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1 = \vec{s}$,

причем $\vec{s} = \vec{0}$ только для равностороннего треугольника. Согласно (1) имеем $\vec{s}^2 \geq 0$, или

$$(\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1)^2 \geq 0.$$



Возведем трехчлен в квадрат, имея в виду, что $|OA_1| = |OB_1| = |OC_1| = r$.

Получим: $3r^2 + 2r^2 (\cos \widehat{B_1OC_1} + \cos \widehat{C_1OA_1} + \cos \widehat{A_1OB_1}) \geq 0$.

Но $\cos \widehat{B_1OC_1} = -\cos \widehat{A}$, $\cos \widehat{C_1OA_1} = -\cos \widehat{B}$, $\cos \widehat{A_1OB_1} = -\cos \widehat{C}$. Следовательно, $3r^2 - 2r^2 (\cos \widehat{A} + \cos \widehat{B} + \cos \widehat{C}) \geq 0$, откуда следует:

$$\cos \widehat{A} + \cos \widehat{B} + \cos \widehat{C} \leq \frac{3}{2}.$$

Знак равенства имеет место только для равностороннего треугольника.

Задача 2. Доказать, что для всякого треугольника имеют место неравенства

$$\cos 2\widehat{A} + \cos 2\widehat{B} + \cos 2\widehat{C} \geq -\frac{3}{2}, \quad a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2,$$

где $|BC| = a$, $|CA| = b$, $|AB| = c$, R — радиус описанной вокруг треугольника окружности.

Решение. Известно, что если O — центр описанной вокруг треугольника ABC окружности, H — ортоцентр треугольника, то $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$. Отсюда на основании неравенства (1) имеем:

$$(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})^2 \geq 0,$$

причем знак равенства имеет место только для равностороннего треугольника. Возведем сумму в скалярный квадрат:

$$3R^2 + 2R^2 (\cos \widehat{BOC} + \cos \widehat{COA} + \cos \widehat{AOB}) \geq 0.$$

Но

$$\cos \widehat{BOC} = \cos 2\widehat{A}, \quad \cos \widehat{COA} = \cos 2\widehat{B}, \quad \cos \widehat{AOB} = \cos 2\widehat{C}.$$

Поэтому

$$\cos 2\widehat{A} + \cos 2\widehat{B} + \cos 2\widehat{C} \geq -\frac{3}{2}.$$

Но

$$\cos 2\widehat{A} = 1 - 2 \sin^2 \widehat{A} = 1 - \frac{a^2}{2R^2}, \quad \cos 2\widehat{B} = 1 - \frac{b^2}{2R^2}, \quad \cos 2\widehat{C} = 1 - \frac{c^2}{2R^2}$$

$$\left(\text{так как } \sin \widehat{A} = \frac{a}{2R}, \quad \sin \widehat{B} = \frac{b}{2R}, \quad \sin \widehat{C} = \frac{c}{2R} \right).$$

Следовательно,

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} + 1 - \frac{b^2}{2R^2} + 1 - \frac{c^2}{2R^2} \geq -\frac{3}{2},$$

откуда следует:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

Задача 3. Вокруг окружности описан четырехугольник $ABCD$; противоположные стороны AB и CD , BC и AD лежат на прямых, пересекающихся в точках M и N . Доказать, что

$$\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} + \cos \hat{D} + \cos \hat{M} + \cos \hat{N} \leq 2.$$

Решение. Если O — центр окружности, а точки A_1, B_1, C_1, D_1 — точки касания ее со сторонами четырехугольника (рис. 2), то

$$\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1 + \vec{OD}_1 = \vec{s},$$

причем $|OA_1| = |OB_1| = |OC_1| = |OD_1| = r$.

Имеем

$$\vec{s}^2 \geq 0 \text{ или } (\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1 + \vec{OD}_1)^2 \geq 0.$$

Отсюда

$$4r^2 + 2r^2(-\cos \hat{A} - \cos \hat{B} - \cos \hat{C} - \cos \hat{D} - \cos \hat{M} - \cos \hat{N}) \geq 0,$$

или

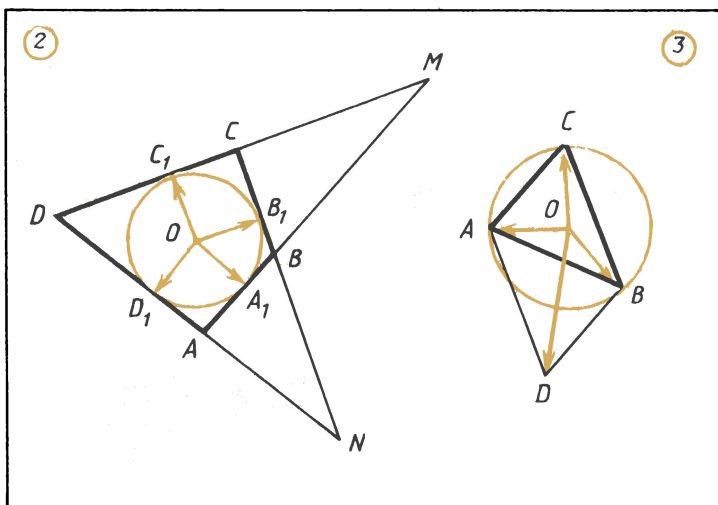
$$\cos \hat{A} + \cos \hat{B} + \cos \hat{C} + \cos \hat{D} + \cos \hat{M} + \cos \hat{N} \leq 2.$$

Выясним, в каком случае $\vec{s} = \vec{0}$.

Пусть $\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1 + \vec{OD}_1 = \vec{0}$.

В этом случае $(\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1) = -(\vec{OC}_1 + \vec{OD}_1)$, откуда следует $\vec{OP} = -\vec{OQ}$,

где P и Q — середины $[A_1B_1]$ и $[C_1D_1]$. Следовательно, $[PQ] \perp [A_1B_1]$ и $[PQ] \perp [C_1D_1]$, т. е. $[A_1B_1] \parallel [C_1D_1]$. Аналогично убеждаемся, что $[B_1C_1] \parallel [D_1A_1]$. Та-



ким образом, $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник, вписанный в данную окружность, а поэтому описанный четырехугольник есть ромб.

Итак, если для описанного четырехугольника $ABCD$ выполняется равенство

$$\cos \widehat{A} + \cos \widehat{B} + \cos \widehat{C} + \cos \widehat{D} + \cos \widehat{M} + \cos \widehat{N} = 2,$$

то $ABCD$ есть ромб.

З а д а ч а 4. Доказать, что для всякого треугольника ABC выполняются неравенства

$$\cos 2\widehat{A} + \cos 2\widehat{B} - \cos 2\widehat{C} \leq \frac{3}{2}, \quad c^2 \leq a^2 + b^2 + R^2.$$

Р е ш е н и е. Дополним треугольник ABC до параллелограмма $ADBC$. Пусть точка O — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC (рис. 3). Очевидно,

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC} + \vec{OD},$$

откуда

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC}$$

и $(\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC})^2 \geq 0$. Если R — радиус окружности, описанной вокруг треугольника ABC , то из последнего неравенства следует:

$$3R^2 + 2R^2 \cos 2\widehat{C} - 2R^2 \cos 2\widehat{A} - 2R^2 \cos 2\widehat{B} \geq 0,$$

или

$$\cos 2\widehat{A} + \cos 2\widehat{B} - \cos 2\widehat{C} \leq \frac{3}{2}.$$

Преобразуем это неравенство.

$$\text{Имеем } \cos 2\widehat{A} = 1 - 2 \sin^2 \widehat{A} = 1 - \frac{a^2}{2R^2}, \quad \cos 2\widehat{B} = 1 - \frac{b^2}{2R^2}, \quad \cos 2\widehat{C} = 1 - \frac{c^2}{2R^2};$$

$$\text{следовательно,} \quad 1 - \frac{a^2}{2R^2} + 1 - \frac{b^2}{2R^2} - 1 + \frac{c^2}{2R^2} \leq \frac{3}{2},$$

откуда находим:

$$c^2 \leq a^2 + b^2 + R^2.$$

Выясним, когда имеет место знак равенства. Очевидно, для этого требуется, чтобы $\vec{OD} = \vec{0}$, т. е. чтобы вершина D параллелограмма $ADBC$ совпала с точкой O . Но в таком случае параллелограмм есть ромб, причем $C = 120^\circ$. Итак, если для треугольника ABC $c^2 = a^2 + b^2 + R^2$, то треугольник равнобедренный ($|AC| = |CB|$) и $\widehat{C} = 120^\circ$. Для такого треугольника, и только для такого,

$$\cos 2\widehat{A} + \cos 2\widehat{B} - \cos 2\widehat{C} = \frac{3}{2}.$$

Задача 5. Доказать, что для любого четырехугольника со сторонами a_1, a_2, a_3, a_4 имеет место неравенство

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > \frac{1}{3} a_4^2.$$

Решение. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (даже любая замкнутая ломаная с четырьмя звеньями в пространстве). Если $\vec{AB} = \vec{a}_1$, $\vec{BC} = \vec{a}_2$, $\vec{CD} = \vec{a}_3$, $\vec{DA} = \vec{a}_4$, то по правилу многоугольника

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 = \vec{0}.$$

Отсюда

$$\vec{a}_4 = -(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3),$$

или

$$\vec{a}_4^2 = \vec{a}_1^2 + \vec{a}_2^2 + \vec{a}_3^2 + 2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 + 2\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 + 2\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1.$$

В силу равенства $(\vec{x} - \vec{y})^2 = \vec{x}^2 + \vec{y}^2 - 2\vec{x} \cdot \vec{y}$ имеем:

$$2\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_1^2 + \vec{a}_2^2 - (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2,$$

$$2\vec{a}_2 \cdot \vec{a}_3 = \vec{a}_2^2 + \vec{a}_3^2 - (\vec{a}_2 - \vec{a}_3)^2,$$

$$2\vec{a}_3 \cdot \vec{a}_1 = \vec{a}_3^2 + \vec{a}_1^2 - (\vec{a}_3 - \vec{a}_1)^2.$$

Следовательно,

$$\vec{a}_4^2 = 3(\vec{a}_1^2 + \vec{a}_2^2 + \vec{a}_3^2) - (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 - (\vec{a}_2 - \vec{a}_3)^2 - (\vec{a}_3 - \vec{a}_1)^2,$$

и, поскольку согласно (1) $(\vec{a}_1 - \vec{a}_2)^2 > 0$, $(\vec{a}_2 - \vec{a}_3)^2 > 0$, $(\vec{a}_3 - \vec{a}_1)^2 > 0$, получаем:

$$a_4^2 < 3(\vec{a}_1^2 + \vec{a}_2^2 + \vec{a}_3^2), \text{ или } \vec{a}_1^2 + \vec{a}_2^2 + \vec{a}_3^2 > \frac{1}{3} \vec{a}_4^2.$$

Задача 6. Даны треугольник ABC и точка M . Доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$, где $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$, $a_1 = |MA|$, $b_1 = |MB|$, $c_1 = |MC|$.

Решение. $(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})^2 \geq 0$. Отсюда

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 2\vec{MA} \cdot \vec{MB} + 2\vec{MB} \cdot \vec{MC} + 2\vec{MC} \cdot \vec{MA} \geq 0.$$

Но $2\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MA}^2 + \vec{MB}^2 - (\vec{MA} - \vec{MB})^2 = a_1^2 + b_1^2 - c^2$,

$$2\vec{MB} \cdot \vec{MC} = \vec{MB}^2 + \vec{MC}^2 - (\vec{MB} - \vec{MC})^2 = b_1^2 + c_1^2 - a^2,$$

$$2\vec{MC} \cdot \vec{MA} = \vec{MC}^2 + \vec{MA}^2 - (\vec{MC} - \vec{MA})^2 = c_1^2 + a_1^2 - b^2.$$

Следовательно,

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + a_1^2 + b_1^2 - c^2 + b_1^2 + c_1^2 - a^2 + c_1^2 + a_1^2 - b^2 \geq 0,$$

откуда находим: $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)$.

Знак равенства будет тогда и только тогда, когда $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$, т. е. когда M — центроид треугольника ABC .

Задача 7. Доказать, что линейные углы двугранных углов тетраэдра $ABCD$ удовлетворяют неравенству

$$\cos \widehat{AB} + \cos \widehat{BC} + \cos \widehat{CD} + \cos \widehat{DA} + \cos \widehat{AC} + \cos \widehat{BD} \leq 2.$$

Решение. Если O — центр сферы радиуса r , вписанной в тетраэдр $ABCD$, а точки A_1, B_1, C_1, D_1 — точки касания ее с гранями тетраэдра, то

$$(\vec{OA}_1 + \vec{OB}_1 + \vec{OC}_1 + \vec{OD}_1)^2 \geq 0.$$

Отсюда

$$4r^2 - 2r^2 (\cos \widehat{AB} + \cos \widehat{BC} + \cos \widehat{CD} + \cos \widehat{DA} + \cos \widehat{AC} + \cos \widehat{BD}) \geq 0$$

и после преобразований получаем искомое неравенство.

Задача 8. Доказать, что для каждого треугольника ABC выполняется неравенство $R \geq 2r$, где R — радиус описанной окружности, r — радиус вписанной окружности.

Решение. Пусть O — центр описанной окружности, I — центр вписанной окружности. Тогда, как известно,

$$\vec{OI} = \frac{a\vec{OA} + b\vec{OB} + c\vec{OC}}{a+b+c},$$

где $a = |BC|$, $b = |CA|$, $c = |AB|$.

Следовательно,

$$(a \cdot \vec{OA} + b \cdot \vec{OB} + c \cdot \vec{OC})^2 \geq 0,$$

причем знак равенства имеет место только для равностороннего треугольника. Далее имеем:

$$(a^2 + b^2 + c^2) R^2 + 2(ab \cos 2\widehat{C} + bc \cos 2\widehat{A} + ca \cos 2\widehat{B}) R^2 \geq 0.$$

Но

$$\cos 2\widehat{A} = 1 - \frac{a^2}{2R^2}, \quad \cos 2\widehat{B} = 1 - \frac{b^2}{2R^2}, \quad \cos 2\widehat{C} = 1 - \frac{c^2}{2R^2},$$

поэтому

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \left(1 - \frac{a^2}{2R^2}\right) + 2ca \left(1 - \frac{b^2}{2R^2}\right) + 2ab \left(1 - \frac{c^2}{2R^2}\right) \geq 0.$$

После упрощений получаем:

$$(a+b+c)^2 - \frac{1}{R^2} abc(a+b+c) \geq 0.$$

Сократив на $a+b+c$ и положив $a+b+c=2p$, $abc=4RS$, $S=pr$,

найдем: $2p - \frac{1}{R^2} \cdot 4R \cdot p \cdot r \geq 0$ или $R \geq 2r$.

Задача 9. Доказать, что если угол C треугольника ABC тупой, то

$$\cos 2\hat{A} + \cos 2\hat{B} - \cos 2\hat{C} > 1.$$

Решение. Опишем вокруг треугольника ABC окружность с центром O . Тогда $\vec{CA} \cdot \vec{CB} < 0$ или $(\vec{OA} - \vec{OC})(\vec{OB} - \vec{OC}) < 0$. Отсюда

$$R^2 (\cos 2\hat{C} - \cos 2\hat{B} - \cos 2\hat{A} + 1) < 0$$

или

$$\cos 2\hat{A} + \cos 2\hat{B} - \cos 2\hat{C} > 1.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$2 \cos^2 \hat{A} - 1 + 2 \cos^2 \hat{B} - 1 - 2 \cos^2 \hat{C} + 1 > 1,$$

или

$$\cos^2 \hat{A} + \cos^2 \hat{B} - \cos^2 \hat{C} > 1.$$

Задача 10. Даны четыре точки A, B, C и D . Доказать, что

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 \geq |AC|^2 + |BD|^2.$$

Решение. Пусть M — середина отрезка AB , N — середина отрезка CD . Тогда

$$\vec{MN} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB} - \vec{OD}).$$

Отсюда

$$(\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB} - \vec{OD})^2 \geq 0,$$

причем знак равенства имеет место только тогда, когда $M = N$, т. е. когда $ABCD$ — параллелограмм.

$$\begin{aligned} \text{Имеем } |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 - |AC|^2 - |BD|^2 &= \\ &= (\vec{OB} - \vec{OA})^2 + (\vec{OC} - \vec{OB})^2 + (\vec{OD} - \vec{OC})^2 + (\vec{OA} - \vec{OD})^2 - (\vec{OC} - \vec{OA})^2 - \\ &- (\vec{OD} - \vec{OB})^2 = \vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 + \vec{OC}^2 + \vec{OD}^2 - 2 \cdot \vec{OA} \cdot \vec{OB} - 2 \vec{OC} \cdot \vec{OB} - \\ &- 2 \vec{OD} \cdot \vec{OC} - 2 \vec{OA} \cdot \vec{OD} + 2 \vec{OC} \cdot \vec{OA} + 2 \vec{OD} \cdot \vec{OB} = (\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB} - \vec{OD})^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Задача 11. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 3 \sin x + 4 \cos x.$$

Решение. Рассмотрим два вектора:

$$\vec{a}(3; 4), \vec{b}(\sin x; \cos x).$$

Согласно неравенству (2) $-\vec{a} \cdot \vec{b} \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, где $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 1$.

Имеем $-5 \leq 3 \sin x + 4 \cos x \leq 5$.

Задача 12. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(t) = \frac{-5t^2 + 24t + 5}{1 + t^2}.$$

Решение. Рассмотрим векторы:

$$\vec{a} = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}; \frac{2t}{1+t^2} \right), \quad \vec{b} (5; 12).$$

Следовательно,

$$|\vec{a}| = 1, \quad |\vec{b}| = 13, \quad \vec{a}\vec{b} = f(t).$$

Итак,

$$-13 \leq f(t) \leq 13.$$

Задача 13. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x, y) = 6 \sin x \cdot \cos y + 2 \sin x \cdot \sin y + 3 \cos x.$$

Решение. Рассмотрим векторы:

$$\vec{a} (\sin x \cdot \cos y; \sin x \cdot \sin y; \cos x), \quad \vec{b} (6; 2; 3).$$

Легко проверить, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 7$.

Следовательно, $-7 \leq f(x, y) \leq 7$.

Задача 14. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 4\sqrt{1-x} + 3\sqrt{x}.$$

Решение. Рассмотрим векторы:

$$\vec{a} (\sqrt{1-x}; \sqrt{x}), \quad \vec{b} (4; 3).$$

Имеем $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 5$.

Выясним, могут ли данные векторы быть сонаправленными:

$$\frac{\sqrt{1-x}}{4} = \frac{\sqrt{x}}{3}, \quad \text{или} \quad 4\sqrt{x} = 3\sqrt{1-x}.$$

Отсюда $16x = 9 - 9x$, $x = \frac{9}{25}$.

Итак, при $x = \frac{9}{25}$ векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены и поэтому $f(x) \leq 5$.

Однако координаты вектора \vec{a} не могут быть отрицательными, поэтому $f(x) > 0$ принимает наименьшее значение при $x = 1$.

Следовательно,

$$3 \leq f(x) \leq 5.$$

Проверить правильность векторного решения можно посредством производной.

Задача 15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}}.$$

Решение. Функцию $f(x)$ представим в виде

$$f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{1 - \frac{x}{2}} + 2\sqrt{1 - \frac{x}{2}}.$$

Теперь рассмотрим векторы: $\vec{a}(1; 2; 2)$, $\vec{b}(\sqrt{x}; \sqrt{1 - \frac{x}{2}}; \sqrt{1 - \frac{x}{2}})$.

Очевидно, что $f(x) = \sqrt{x} + 2\sqrt{1 - \frac{x}{2}} + 2\sqrt{1 - \frac{x}{2}} = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Векторы \vec{a} и \vec{b} сонаправлены, если $\frac{\sqrt{x}}{1} = \frac{\sqrt{1 - \frac{x}{2}}}{2}$.

Отсюда находим, что $2\sqrt{x} = \sqrt{1 - \frac{x}{2}}$ и $4x = 1 - \frac{x}{2}$. Окончательно получаем $x = \frac{2}{9}$. Но функция $f(x)$ определена на сегменте $[0, 2]$. Следовательно,

$$f_{\max} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 3\sqrt{2},$$

минимума функция достигает в точке $x=2$, т. е. $f_{\min} = \sqrt{2}$.

Итак, $f_{\max} = 3\sqrt{2}$ при $x = \frac{2}{9}$; $f_{\min} = \sqrt{2}$ при $x = 2$.

СОСТАВЛЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ С ПОМОЩЬЮ ВЕКТОРОВ

Векторы можно с успехом применять к получению интересных тригонометрических неравенств. Приведем один прием составления таких неравенств, основанный на использовании известных операций над векторами.

I

Рассматриваемый прием предполагает знакомство с линейной зависимостью между векторами \vec{OA} , \vec{OB} и \vec{OC} , где O — центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC (рис. 1):

$$\vec{OA} \sin 2\hat{A} + \vec{OB} \sin 2\hat{B} + \vec{OC} \sin 2\hat{C} = \vec{0}. \quad (1)$$

Выведем зависимость (1). Очевидно, из компланарности векторов¹³ \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} следует разложение

$$\vec{OC} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{OB}, \quad (2)$$

так как точки A и B не диаметрально противоположны ($\hat{C} \neq 90^\circ$).

Вычислим α и β . Умножив равенство (2) скалярно последовательно на \vec{OA} и \vec{OB} и положив радиус окружности равным R , получим систему уравнений относительно α и β :

$$\begin{cases} \vec{OA} \cdot \vec{OC} = \alpha R^2 + \beta \vec{OA} \cdot \vec{OB}, \\ \vec{OB} \cdot \vec{OC} = \alpha \vec{OB} \cdot \vec{OA} + \beta R^2. \end{cases}$$

Но $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = R^2 \cos 2\hat{C}$, $\vec{OB} \cdot \vec{OC} = R^2 \cos 2\hat{A}$, $\vec{OC} \cdot \vec{OA} = R^2 \cos 2\hat{B}$. Поэтому полученную систему можно записать в виде

$$\begin{cases} \cos 2\hat{B} = \alpha + \beta \cos 2\hat{C}, \\ \cos 2\hat{A} = \alpha \cos 2\hat{C} + \beta. \end{cases}$$

Отсюда

$$\alpha = \frac{\cos 2\hat{B} - \cos 2\hat{A} \cdot \cos 2\hat{C}}{1 - \cos^2 2\hat{C}}, \quad \beta = \frac{\cos 2\hat{A} - \cos 2\hat{B} \cos 2\hat{C}}{1 - \cos^2 2\hat{C}}.$$

Но $\cos 2\hat{B} = \cos (2\hat{A} + 2\hat{C}) = \cos 2\hat{A} \cos 2\hat{C} - \sin 2\hat{A} \sin 2\hat{C}$,
 $\cos 2\hat{A} = \cos (2\hat{B} + 2\hat{C}) = \cos 2\hat{B} \cos 2\hat{C} - \sin 2\hat{B} \sin 2\hat{C}$.

Следовательно

$$\alpha = -\frac{\sin 2\hat{A}}{\sin 2\hat{C}}, \quad \beta = -\frac{\sin 2\hat{B}}{\sin 2\hat{C}}.$$

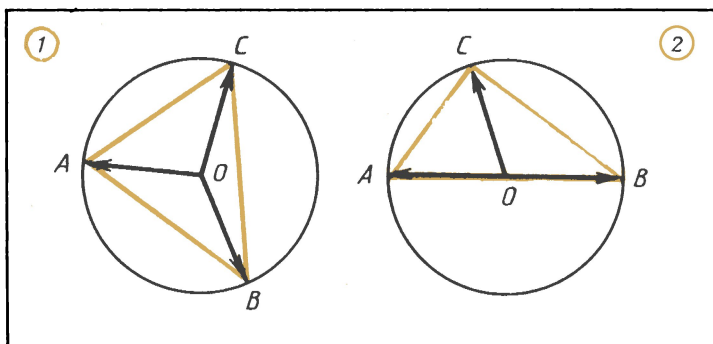
Итак,

$$\vec{OC} = -\frac{\sin 2\hat{A}}{\sin 2\hat{C}} \vec{OA} - \frac{\sin 2\hat{B}}{\sin 2\hat{C}} \vec{OB}, \quad (3)$$

откуда получается равенство (1).

Если $\hat{C} = 90^\circ$, то равенство (1) также имеет место, в чем легко убедиться проверкой (рис. 2).

Верно и обратное утверждение: если для треугольника ABC и некоторой точки O выполняется равенство (1), то O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .



В самом деле, пусть O_1 — центр описанной окружности для треугольника ABC . Тогда согласно (1) имеем:

$$\vec{O_1A} \sin 2\hat{A} + \vec{O_1B} \sin 2\hat{B} + \vec{O_1C} \sin 2\hat{C} = \vec{0}. \quad (4)$$

Из равенств (4) и (1) вычитанием находим:

$$(\vec{O_1A} - \vec{OA}) \sin 2\hat{A} + (\vec{O_1B} - \vec{OB}) \sin 2\hat{B} + (\vec{O_1C} - \vec{OC}) \sin 2\hat{C} = \vec{0}.$$

Но $\vec{O_1A} - \vec{OA} = \vec{O_1B} - \vec{OB} = \vec{O_1C} - \vec{OC} = \vec{O_1O}$.

Поэтому $\vec{O_1O} (\sin 2\hat{A} + \sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C}) = \vec{0}$.

Остается доказать, что $\sin 2\hat{A} + \sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C} \neq 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} \sin 2\hat{A} + \sin 2\hat{B} + \sin 2\hat{C} &= 2 \sin \hat{A} \cos \hat{A} + 2 \sin \hat{B} \cos \hat{B} + 2 \sin \hat{C} \cos \hat{C} = \\ &= \frac{1}{R} (a \cos \hat{A} + b \cos \hat{B} + c \cos \hat{C}) = \\ &= \frac{1}{2R} \left(\frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{bc} + \frac{b(c^2 + a^2 - b^2)}{ca} + \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{ab} \right) = \\ &= \frac{1}{Rabc} (a^2(b^2 + c^2 - a^2) + b^2(c^2 + a^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2)) = \\ &= \frac{16S_{ABC}^2}{2R \cdot 4RS_{ABC}} = \frac{2S_{ABC}}{R^2} \neq 0. \end{aligned}$$

Итак, $\vec{O_1O} = \vec{0}$ и $O = O_1$, т. е. точка O есть центр описанной окружности.

Рассмотрим разложение (1). Для некоторого другого треугольника $A_1B_1C_1$, вписанного в окружность с центром O_1 , имеет место разложение (1'):

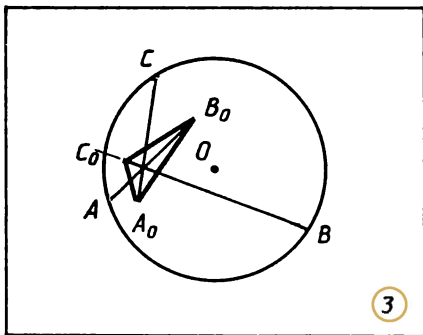
$$\vec{O_1A_1} \sin 2\hat{A}_1 + \vec{O_1B_1} \sin 2\hat{B}_1 + \vec{O_1C_1} \sin 2\hat{C}_1 = \vec{0}. \quad (1')$$

Докажем, что если коэффициенты разложения (1') пропорциональны коэффициентам разложения (1), то треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC при условии, что оба треугольника непрямоугольные.

Итак, необходимо доказать, что из равенств

$$\frac{\sin 2\hat{A}}{\sin 2\hat{A}_1} = \frac{\sin 2\hat{B}}{\sin 2\hat{B}_1} = \frac{\sin 2\hat{C}}{\sin 2\hat{C}_1} \quad (5)$$

следует $\hat{A}_1 = \hat{A}$, $\hat{B}_1 = \hat{B}$, $\hat{C}_1 = \hat{C}$. В самом деле, из (5) следует:



$$\frac{a \cos \hat{A}}{a_1 \cos \hat{A}_1} = \frac{b \cos \hat{B}}{b_1 \cos \hat{B}_1} = \frac{c \cos \hat{C}}{c_1 \cos \hat{C}_1}. \quad (6)$$

Очевидно, что соответствующие углы обоих треугольников одновременно оба острые или оба тупые (случай, когда оба угла прямые, пока рассматривать не будем). Но числа $a \cos \hat{A}$, $b \cos \hat{B}$, $c \cos \hat{C}$ (при острых углах A , B и C) равны, как известно, длинам сторон треугольника $A_0B_0C_0$ с верши-

нами в основаниях высот треугольника ABC (рис. 3). Следовательно, треугольники с вершинами в основаниях высот данных треугольников подобны, а поэтому подобны и сами треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, так как их стороны перпендикулярны биссектрисам треугольников с вершинами в основаниях высот.

Если один из углов, например угол C , тупой, то тупым будет и угол C_1 , но тогда длины $a \cos \hat{A}$, $b \cos \hat{B}$, $c |\cos \hat{C}|$ пропорциональны длинам $a_1 \cos \hat{A}_1$, $b_1 \cos \hat{B}_1$, $c_1 |\cos \hat{C}_1|$ и данные треугольники, как и прежде, подобны.

Для случая прямоугольных треугольников отношение $\sin 2\hat{C} : \sin 2\hat{C}_1$ теряет смысл, но остается

$$\frac{\sin 2\hat{A}}{\sin 2\hat{A}_1} = \frac{\sin 2\hat{B}}{\sin 2\hat{B}_1}, \quad \hat{A} + \hat{B} = \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 90^\circ.$$

Эта пропорция имеет место при любых \hat{A} и \hat{B} , \hat{A}_1 и \hat{B}_1 , поэтому треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, вообще говоря, не подобны.

Таким образом, доказано следующее важное для дальнейшего предложение: если даны два произвольных непрямоугольных треугольника PQR и $P_1Q_1R_1$ и соответствующие им разложения

$$\begin{aligned} \vec{OP} \sin 2\hat{P} + \vec{OQ} \sin 2\hat{Q} + \vec{OR} \sin 2\hat{R} &= \vec{0}, \\ \vec{O_1P_1} \sin 2\hat{P_1} + \vec{O_1Q_1} \sin 2\hat{Q_1} + \vec{O_1R_1} \sin 2\hat{R_1} &= \vec{0}, \end{aligned}$$

то из пропорциональности коэффициентов этих разложений следует подобие рассматриваемых треугольников.

Доказанное предложение позволяет сделать вывод, что если треугольник $P_1Q_1R_1$ не подобен треугольнику PQR , то вектор

$$\vec{O_1P_1} \sin 2\hat{P} + \vec{O_1Q_1} \sin 2\hat{Q} + \vec{O_1R_1} \sin 2\hat{R}$$

отличен от нуль-вектора и поэтому для любого треугольника $P_1Q_1R_1$ имеет место неравенство

$$(\vec{O_1P_1} \sin 2\hat{P} + \vec{O_1Q_1} \sin 2\hat{Q} + \vec{O_1R_1} \sin 2\hat{R})^2 \geq 0, \quad (7)$$

причем крайне существенно, что знак равенства имеет место только в случае подобия треугольников PQR и $P_1Q_1R_1$.

II

Перейдем к составлению тригонометрических неравенств, используя для этой цели доказанное предложение.

1. Для равностороннего треугольника $A_1B_1C_1$ имеет место разложение

$$\vec{O_1A_1} + \vec{O_1B_1} + \vec{O_1C_1} = \vec{0},$$

где O_1 — центр описанной окружности. Для произвольного треугольника ABC имеем согласно доказанному предложению $(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})^2 \geq 0$, где O — центр окружности, описанной около треугольника ABC .

Отсюда получаем: $3R^2 + 2R^2 (\cos 2\hat{A} + \cos 2\hat{B} + \cos 2\hat{C}) \geq 0$.

После упрощений приходим к неравенству

$$\cos 2\hat{A} + \cos 2\hat{B} + \cos 2\hat{C} \geq -\frac{3}{2}, \quad (8)$$

причем знак равенства имеет место только для равностороннего треугольника.

2. Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$ с углами $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 30^\circ$, $\hat{C}_1 = 120^\circ$. Согласно (1) имеем:

$$\vec{O_1A_1} \sin 60^\circ + \vec{O_1B_1} \sin 60^\circ + \vec{O_1C_1} \sin 240^\circ = \vec{0}$$

или

$$\vec{O_1A_1} + \vec{O_1B_1} - \vec{O_1C_1} = \vec{0}.$$

Для произвольного треугольника ABC , не подобного треугольнику $A_1B_1C_1$, выполняется неравенство

$$\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{s} \neq \vec{0}.$$

Следовательно, для произвольного треугольника ABC имеет место неравенство

$$\vec{s}^2 = (\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC})^2 \geq 0,$$

отсюда находим:

$$3R^2 + 2R^2 (\cos 2\hat{C} - \cos 2\hat{A} - \cos 2\hat{B}) \geq 0$$

или

$$\cos 2\hat{A} + \cos 2\hat{B} - \cos 2\hat{C} \leq \frac{3}{2}, \quad (9)$$

причем знак равенства имеет место только при $\hat{A} = \hat{B} = 30^\circ$, $\hat{C} = 120^\circ$.

3. Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$, у которого $\hat{A}_1 = 15^\circ$, $\hat{B}_1 = 60^\circ$, $\hat{C}_1 = 105^\circ$. Для этого треугольника имеет место разложение

$$\vec{O_1A_1} \sin 30^\circ + \vec{O_1B_1} \sin 120^\circ + \vec{O_1C_1} \sin 210^\circ = \vec{0}$$

или

$$\vec{O_1A_1} + \sqrt{3} \vec{O_1B_1} - \vec{O_1C_1} = \vec{0}.$$

Для произвольного треугольника ABC имеем:

$$(\vec{OA} + \sqrt{3} \vec{OB} - \vec{OC})^2 \geq 0.$$

Отсюда получаем тригонометрическое неравенство для треугольника ABC :

$$5R^2 + 2\sqrt{3} R^2 \cos 2\hat{C} - 2R^2 \cos 2\hat{B} - 2\sqrt{3} R^2 \cos 2\hat{A} \geq 0$$

$$\text{или} \quad \sqrt{3} (\cos 2\hat{A} - \cos 2\hat{C}) + \cos 2\hat{B} \leq \frac{5}{2}. \quad (10)$$

Знак равенства имеет место только при $\hat{A} = 15^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 105^\circ$.

4. Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$, у которого $\hat{A}_1 = 45^\circ$, $\hat{B}_1 = 60^\circ$, $\hat{C}_1 = 75^\circ$.

Разложение (1) принимает вид:

$$2\vec{O_1A_1} + \sqrt{3}\vec{O_1B_1} + \vec{O_1C_1} = \vec{0}.$$

Поэтому для произвольного треугольника ABC имеем:

$$(2\vec{OA} + \sqrt{3}\vec{OB} + \vec{OC})^2 \geq 0$$

или

$$8R^2 + 4\sqrt{3}R^2 \cos 2\hat{C} + 4R^2 \cos 2\hat{B} + 2\sqrt{3}R^2 \cos 2\hat{A} \geq 0.$$

После упрощений получаем:

$$\sqrt{3} \cos 2\hat{A} + 2 \cos 2\hat{B} + 2\sqrt{3} \cos 2\hat{C} \geq -4. \quad (11)$$

5. Если углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны: $\hat{A} = \hat{B} = 36^\circ$, $\hat{C} = 108^\circ$, то

$$(\vec{O_1A_1} + \vec{O_1B_1}) \sin 72^\circ - \vec{O_1C_1} \sin 36^\circ = \vec{0}$$

или

$$2(\vec{O_1A_1} + \vec{O_1B_1}) \cos 36^\circ - \vec{O_1C_1} = \vec{0}.$$

Но $\cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Поэтому $(\sqrt{5}+1)(\vec{O_1A_1} + \vec{O_1B_1}) - 2\vec{O_1C_1} = \vec{0}$.

Для произвольного треугольника ABC имеем:

$$((\sqrt{5}+1)(\vec{OA} + \vec{OB}) - 2\vec{OC})^2 \geq 0.$$

Отсюда получаем:

$$(6 + 2\sqrt{5})2R^2(1 + \cos 2\hat{C}) + 4R^2 - 4(\sqrt{5}+1)R^2(\cos 2\hat{A} + \cos 2\hat{B}) \geq 0,$$

или окончательно:

$$((\sqrt{5}+1)(\cos 2\hat{A} + \cos 2\hat{B}) - (3 + \sqrt{5})\cos 2\hat{C}) \leq 4 + \sqrt{5}, \quad (12)$$

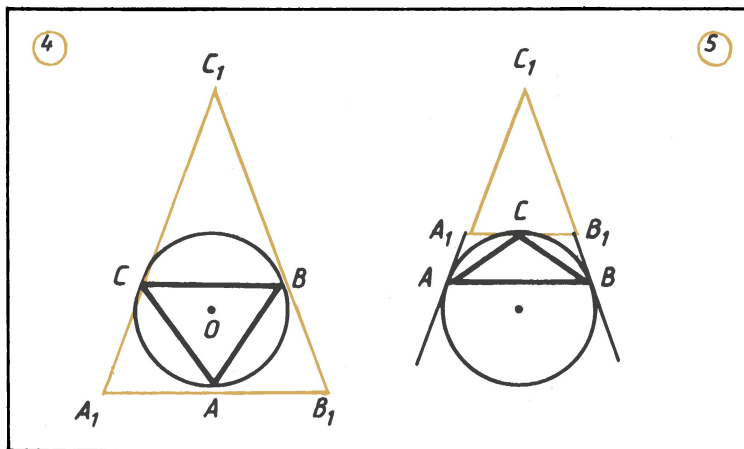
причем знак равенства имеет место только при $\hat{A} = \hat{B} = 36^\circ$, $\hat{C} = 108^\circ$.

6. Рассмотрим треугольник $A_1B_1C_1$ и вписанную в него окружность, касающуюся его сторон соответственно в точках A , B , C (рис. 4). Между углами треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC имеют место соотношения

$$\hat{A}_1 = 180^\circ - 2\hat{A}, \quad \hat{B}_1 = 180^\circ - 2\hat{B}, \quad \hat{C}_1 = 180^\circ - 2\hat{C}. \quad (13)$$

Очевидно, треугольник ABC всегда остроугольный. Для него выполняется неравенство (8). После перехода к углам \hat{A}_1 , \hat{B}_1 , \hat{C}_1 согласно (11) получим из (8) новое неравенство

$$\cos \hat{A}_1 + \cos \hat{B}_1 + \cos \hat{C}_1 \leq \frac{3}{2}, \quad (14)$$



которое имеет место для любого треугольника, причем равенство наступает только для равностороннего треугольника.

7. Если для треугольника $A_1B_1C_1$ построить внеписанную окружность, касающуюся стороны A_1B_1 и продолжений двух других сторон, то точки касания будут вершинами треугольника ABC (рис. 5), для которого $\hat{C} > 90^\circ$. Зависимости между углами треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC такие:

$$\hat{A}_1 = 2\hat{A}, \hat{B}_1 = 2\hat{B}, \hat{C}_1 = 2\hat{C} - 180^\circ. \quad (15)$$

Используя соотношения (13), из неравенства (10) получим новое неравенство

$$\sqrt{3}(\cos \hat{A}_1 + \cos \hat{C}_1) + \cos \hat{B}_1 \leq \frac{5}{2}, \quad (16)$$

причем равенство имеет место только при $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 30^\circ$, $\hat{C}_1 = 120^\circ$.

Неравенство (11) принимает вид:

$$\sqrt{3} \cos \hat{A}_1 + 2 \cos \hat{B}_1 + 2 \sqrt{3} \cos \hat{C}_1 \leq 4. \quad (17)$$

Равенство имеет место только при $\hat{A}_1 = 90^\circ$, $\hat{B}_1 = 60^\circ$, $\hat{C}_1 = 30^\circ$.

Наконец, неравенству (12) соответствует неравенство

$$(\sqrt{5} + 1)(\cos \hat{A}_1 + \cos \hat{B}_1) + (3 + \sqrt{5}) \cos \hat{C}_1 \leq 4 + \sqrt{5}, \quad (18)$$

которое становится равенством при $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = 36^\circ$, $\hat{C}_1 = 108^\circ$.

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕКТОРОВ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ НА НАХОЖДЕНИЕ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК

Векторы целесообразно применять при решении разнообразных геометрических задач: *аффинных* и *метрических**. Среди них имеются задачи на доказательство и на вычисление, планиметрические и стереометрические.

В задачах с аффинным содержанием обычно требуется установить принадлежность трех точек одной прямой или четырех точек одной плоскости, вычислить отношение, в котором точка, принадлежащая отрезку, делит этот отрезок, доказать параллельность отрезков или прямых, сонаправленность или противонаправленность лучей, параллельность прямых и плоскостей. Реже встречаются задачи на нахождение различных множеств точек. В метрических же задачах преимущественно приходится вычислять расстояния и углы (между прямыми, прямой и плоскостью, двугранные углы), доказывать перпендикулярность прямых и плоскостей и значительно реже находить и изучать множества точек на плоскости и в пространстве.

I

Для успешного применения векторов в задачах на нахождение множества точек необходимо владеть важнейшими векторными равенствами, содержащими переменные векторы, задающие основные известные множества точек. Только при этих условиях можно в ходе решения задачи распознать по полученному уравнению искомое множество точек. С этими равенствами мы и познакомим читателя.

1. Составить векторное уравнение прямой, проходящей через две данные точки A и B .

Пусть C — произвольная точка прямой AB , тогда $\vec{AC} = k\vec{AB}$ (рис. 1).

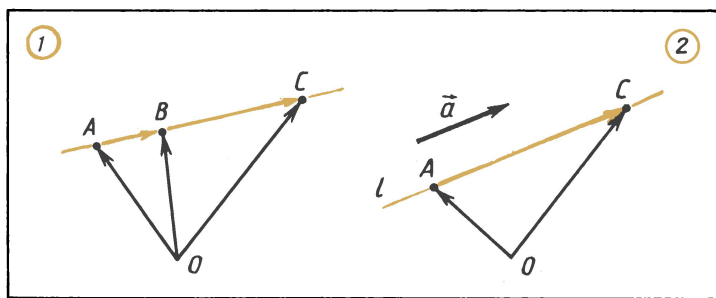
Если O — произвольная точка плоскости (или пространства), то $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA}$, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$, поэтому $\vec{OC} - \vec{OA} = k(\vec{OB} - \vec{OA})$. Откуда следует:

$$\vec{OC} = (1 - k)\vec{OA} + k\vec{OB}. \quad (1)$$

Для каждой точки C мы имеем определенное значение k , а для каждого действительного числа k находим вполне определенную точку C на прямой AB . Следовательно, уравнение (1), в котором A , B , O — фиксированные точки, задает все те и только те точки, которые принадлежат прямой AB .

Уравнение (1) содержит параметр k и переменный вектор \vec{OC} .

* Задачу называют аффинной, если она не связана с измерением отрезков и углов (непосредственно или косвенно). В противном случае задачу называют метрической или евклидовой (*Прим. сост.*).



Обратим внимание, что уравнение (1) можно также рассматривать как векторную функцию скалярного аргумента:

$$k \mapsto (1-k)\vec{OA} + k\vec{OB}.$$

Следует добавить, что

$$\begin{aligned} k \geq 0 &\mapsto [AB]; \\ k \leq 0 &\mapsto [AD], [AB] \cup [AD] = (AB); \\ 0 \leq k \leq 1 &\mapsto [AB]; \\ k \leq 1 &\mapsto [BA]; \\ k \geq 1 &\mapsto [BM], [BM] \cup [BA] = (AB)^{14}. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение (1) задает также, после наложения на параметр k определенных ограничений, отрезок AB и четыре луча с началом в точках A и B .

2. Составить векторное уравнение прямой, проходящей через данную точку A параллельно вектору \vec{a} ($\vec{a} \neq \vec{0}$).

Очевидно, что для любой точки C прямой $l(A, \vec{a})$, имеющей вектор \vec{a} своим направляющим вектором и проходящей через точку A , выполняется равенство $\vec{AC} = k\vec{a}$ (рис. 2).

Отсюда получаем:

$$\vec{OC} = \vec{OA} + k\vec{a}. \quad (2)$$

Как и раньше, убеждаемся, что уравнение (2), содержащее параметр k , задает точки прямой l , проведенной через A параллельно \vec{a} , и только эти точки.

При задании (2) имеем для $k \geq 0$ один луч, а для $k \leq 0$ — второй луч, объединение которых и есть данная прямая l .

3. Составить векторное уравнение плоскости α , проходящей через три точки A, B и C , не принадлежащие одной прямой.

Пусть D — произвольная точка плоскости α (рис. 3). В таком случае векторы \vec{AB} и \vec{AC} неколлинеарны¹³, а поэтому вектор \vec{AD} можно разложить по \vec{AB} и \vec{AC} , т. е. $\vec{AD} = p\vec{AB} + q\vec{AC}$, где p и q — некоторые действительные числа, однозначно определяемые заданием точки $D \in \alpha$.

Выбрав в пространстве произвольную точку O , можно записать:

$$\vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA}, \quad \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}, \quad \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA},$$

и поэтому

$$\vec{OD} - \vec{OA} = p(\vec{OB} - \vec{OA}) + q(\vec{OC} - \vec{OA}).$$

Отсюда

$$\vec{OD} = (1 - p - q) \vec{OA} + p \vec{OB} + q \vec{OC}. \quad (3)$$

Уравнение (3) и есть векторное уравнение плоскости, проходящей через данные три точки, не принадлежащие одной прямой. Это уравнение можно иначе записать так:

$$\vec{OD} = s \vec{OA} + p \vec{OB} + q \vec{OC}, \quad p + q + s = 1. \quad (4)$$

Для любой точки D , принадлежащей плоскости α , вектор \vec{OD} удовлетворяет уравнению (4) при однозначно определяемых этой точкой значениях p, q, s , а для точек $D \notin \alpha$ вектор \vec{OD} уравнению (4) не удовлетворяет ни при каких значениях p, q, s .

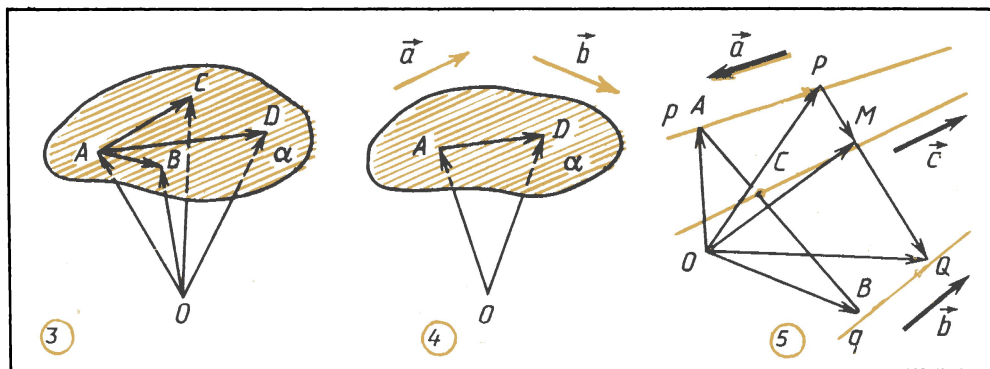
4. Составить векторное уравнение плоскости α , проходящей через данную точку A параллельно двум неколлинеарным векторам \vec{a} и \vec{b} (эти векторы называются направляющими векторами плоскости).

Рассуждая так же, как и в предыдущем случае (рис. 4), получим:

$$\vec{OD} = \vec{OA} + p\vec{a} + q\vec{b}. \quad (5)$$

II

Приведенные выше векторные уравнения прямой и плоскости будут применены ниже к решению некоторых аффинных задач на отыскание множеств точек на плоскости и в пространстве.



Задача 1. Даны две прямые p и q :

$$\vec{OP} = \vec{OA} + k\vec{a}, \quad \vec{OQ} = \vec{OB} + s\vec{b}$$

(\vec{a} и \vec{b} — произвольные ненулевые векторы). Отрезок PQ разделен точкой M в отношении l , т. е. $\vec{PM}:\vec{MQ}=l$. Найти множество точек M , когда k и s принимают все возможные равные между собой значения.

Решение. Имеем (рис. 5):

$$\vec{PM} = \vec{OM} - \vec{OP}, \quad \vec{MQ} = \vec{OQ} - \vec{OM}.$$

Из условия задачи следует, что

$$(\vec{OM} - \vec{OP} = l(\vec{OQ} - \vec{OM})) \Rightarrow \left(\vec{OM} = \frac{\vec{OP} + l\vec{OQ}}{1+l} \right).$$

Подставив в это уравнение значения \vec{OP} и \vec{OQ} , известные из условий задачи, получим:

$$\left(\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + k\vec{a} + l(\vec{OB} + s\vec{b})}{1+l} \right) \Rightarrow \left(\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + l\vec{OB}}{1+l} + k \frac{\vec{a} + l\vec{b}}{1+l} \right).$$

Отсюда

$$\vec{OM} = \vec{OC} + k\vec{c},$$

где

$$\vec{OC} = \frac{\vec{OA} + l\vec{OB}}{1+l}, \quad \vec{c} = \frac{\vec{a} + l\vec{b}}{1+l}.$$

Итак, множество точек M есть прямая, параллельная вектору \vec{c} и проходящая через точку C , такую, что $\vec{AC}:\vec{CB}=l$.

Интересно отметить, что решение не зависит от того, скрещиваются¹⁵ данные прямые p и q , пересекаются они или параллельны.

Задача 2. Даны две скрещивающиеся прямые p и q :

$$\vec{OP} = \vec{OA} + k\vec{a}, \quad \vec{OQ} = \vec{OB} + s\vec{b}.$$

Отрезок PQ разделен точкой M в отношении l , т. е. $\vec{PM}:\vec{MQ}=l$. Найти множество точек M , когда k и s независимо друг от друга принимают все возможные значения.

Решение. Как и в предыдущей задаче,

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OP} + l\vec{OQ}}{1+l}.$$

Подставим данные значения для \vec{OP} и \vec{OQ} , получим:

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + k\vec{a} + l(\vec{OB} + s\vec{b})}{1+l},$$

отсюда

$$\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \alpha\vec{a} + \beta\vec{b},$$

где

$$\vec{OM}_0 = \frac{\vec{OA} + l\vec{OB}}{1+l}, \quad \alpha = \frac{k}{1+l}, \quad \beta = \frac{ls}{1+l},$$

\vec{a} и \vec{b} — неколлинеарные векторы. Согласно (5) множество точек M есть плоскость, проходящая через M_0 параллельно векторам \vec{a} и \vec{b} .

Приведенные две задачи можно формулировать без привлечения векторов. Сформулируем первую из них.

Задача 1а. Подобие плоскости (пространства)¹⁶ отображает прямую p на прямую q . Отрезки, соединяющие соответственные точки, разделены в равных отношениях (считая от какой-либо одной прямой). Найти множество точек деления.

Задача 3. На сторонах \vec{CA} и \vec{CB} треугольника ABC даны соответственно точки M и N , такие, что $\vec{AM} = k\vec{MC}$, $\vec{CN} = k\vec{NB}$. Найти множество центроидов¹⁷ треугольников MNP , где P — любая точка, принадлежащая прямой AB .

Решение. Имеем (рис. 6):

$$\begin{aligned} \vec{AM} &= \vec{OM} - \vec{OA}, \quad \vec{MC} = \vec{OC} - \vec{OM}, \quad \vec{CN} = \vec{ON} - \vec{OC}, \\ \vec{NB} &= \vec{OB} - \vec{ON}, \quad \vec{OP} = (1-s)\vec{OA} + s\vec{OB}. \end{aligned}$$

Следовательно,

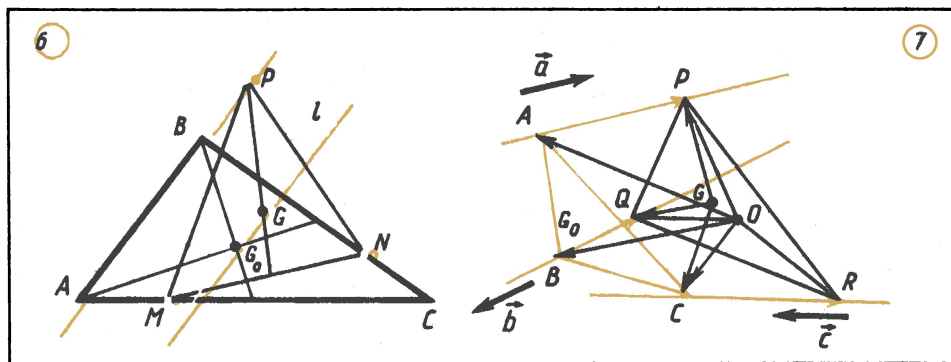
$$\begin{aligned} ((\vec{OM} - \vec{OA}) &= k(\vec{OC} - \vec{OM})) \Rightarrow \left(\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + k\vec{OC}}{1+k} \right), \\ ((\vec{ON} - \vec{OC}) &= k(\vec{OB} - \vec{ON})) \Rightarrow \left(\vec{ON} = \frac{\vec{OC} + k\vec{OB}}{1+k} \right). \end{aligned}$$

Если G — центроид треугольника MNP , то

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OM} + \vec{ON} + \vec{OP}) = \frac{1}{3} \left(\frac{\vec{OA} + k\vec{OB}}{1+k} + \vec{OC} + (1-s)\vec{OA} + s\vec{OB} \right).$$

Для упрощения решения положим $O = C$. Тогда

$$\vec{CG} = \frac{1}{3} \left(\frac{\vec{CA} + k\vec{CB}}{1+k} + (s-1)\vec{CA} + s\vec{CB} \right).$$



Отсюда

$$\vec{CG} = \frac{2}{3}(p\vec{CA} + q\vec{CB}),$$

где

$$p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+k} + 1 - s\right), \quad q = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1} + s\right), \quad p + q = 1.$$

Значит, множество точек G есть прямая l , гомотетичная прямой AB ($l \parallel (AB)$) и проходящая через центроид G_0 треугольника ABC .

Задача 4. Даны три попарно скрещивающиеся прямые, параллельные некоторой плоскости. Найти множество центроидов треугольников, вершины которых принадлежат данным прямым.

Решение. Рассмотрим три прямые (рис. 7):

$$\vec{OP} = \vec{OA} + p\vec{a}, \quad \vec{OQ} = \vec{OB} + q\vec{b}, \quad \vec{OR} = \vec{OC} + s\vec{c}.$$

Чтобы эти прямые попарно скрещивались и были параллельны одной плоскости, необходимо потребовать, чтобы векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} были компланарны (но никакие два из них не коллинеарны) и чтобы тройки векторов \vec{AB} , \vec{a} , \vec{b} ; \vec{BC} , \vec{b} , \vec{c} ; \vec{CA} , \vec{c} , \vec{a} были некомпланарными. Если G — центроид треугольника PQR , то $\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR})$.

Отсюда

$$\vec{OG} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) + \frac{1}{3}(p\vec{a} + q\vec{b} + s(m\vec{a} + n\vec{b})),$$

где $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$. Положив $\frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) = \vec{OG}_0$, получим:

$$\vec{OG} = \vec{OG}_0 + \frac{1}{3}((p + ms)\vec{a} + (q + ns)\vec{b}).$$

Согласно (5) последнее уравнение задает плоскость σ , проходящую через центроид G_0 треугольника ABC (если A, B, C не принадлежат одной прямой) параллельно векторам \vec{a} и \vec{b} . Если $p + ms = u$, $q + ns = v$, то каждой точке G плоскости σ соответствует однозначно u и v , а каждой паре чисел u и v — точка G плоскости σ .

Если значения u и v фиксированы, то точка G в плоскости σ также фиксирована, но $p = u - ms$ и $q = v - ns$, где s принимает любое значение. Таким образом, через данную точку G плоскости σ проходят бесконечное множество плоскостей, пересекающих данные прямые в точках, являющихся вершинами треугольников с общим центроидом G .

III

Для задания прямых и плоскостей, окружностей и сфер можно воспользоваться скалярным произведением векторов.

1. На плоскости дана точка A и вектор \vec{n} ($\vec{n} \neq \vec{0}$). Составить векторное уравнение прямой l , проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

Пусть M — произвольная точка прямой l , причем $M \neq A$ (рис. 8). Тогда \vec{AM} и \vec{n} — перпендикулярные векторы и $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

Если $M=A$, то равенство $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ также выполняется.

Если же точка M прямой l не принадлежит, то $\vec{AM} \cdot \vec{n} \neq 0$. Следовательно, $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ есть уравнение прямой в векторной форме. Выбрав произвольную точку O , можем записать:

$$\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA} \text{ и } (\vec{OM} - \vec{OA}) \cdot \vec{n} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$\vec{OM} \cdot \vec{n} - c = 0, \quad c = \vec{OA} \cdot \vec{n}, \quad \vec{n} \neq \vec{0}. \quad (6)$$

Уравнение (6) и есть уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно вектору \vec{n} .

2. В пространстве даны точка A и вектор \vec{n} ($\vec{n} \neq \vec{0}$). Составить уравнение плоскости, проходящей через A перпендикулярно \vec{n} .

Легко проверить, что уравнение этой плоскости в векторной форме совпадает с уравнением (6).

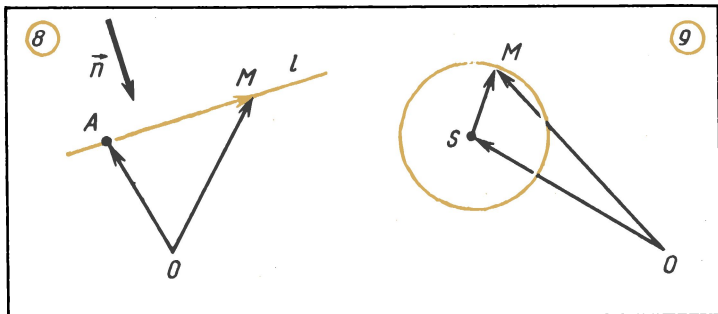
3. Составить уравнение окружности (сферы) радиуса R с центром в точке S .

Для любой точки M (рис. 9) окружности (сферы) имеем $|SM| = R$, или $|\vec{SM}|^2 = R^2$. Поэтому $\vec{SM}^2 = R^2$, или $(\vec{OM} - \vec{OS})^2 = R^2$. Отсюда получаем:

$$\vec{OM}^2 - 2\vec{OS} \cdot \vec{OM} + D = 0, \quad D = \vec{OS}^2 - R^2. \quad (7)$$

Если точка M окружности (сфере) не принадлежит, то $\vec{SM}^2 \neq R^2$ и для нее уравнение (7) не выполняется.

Необходимо, однако, отметить, что не всякое уравнение вида (7) есть уравнение окружности (сферы). Так как $R^2 = \vec{OS}^2 - D$, то только при $\vec{OS}^2 - D > 0$ мы имеем окружность (сферу), при $\vec{OS}^2 - D = 0$ имеем точку, а при $\vec{OS}^2 - D < 0$ — пустое множество.



Применим уравнения (6) и (7) к решению задач на нахождение множеств точек.

Задача 5. Дан прямоугольный треугольник ABC , $\widehat{C}=90^\circ$. Найти множество точек M плоскости треугольника, для которых

$$|AM|^2 + |BM|^2 = 2|CM|^2.$$

Решение. Выбрав произвольную точку O (рис. 10), можем записать:

$$\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}, \quad \vec{BM} = \vec{OM} - \vec{OB}, \quad \vec{CM} = \vec{OM} - \vec{OC}.$$

Но
$$|AM|^2 = \vec{AM}^2 = (\vec{OM} - \vec{OA})^2.$$

Поэтому

$$(\vec{OM} - \vec{OA})^2 + (\vec{OM} - \vec{OB})^2 = 2(\vec{OM} - \vec{OC})^2.$$

Отсюда после возведения в квадрат и упрощений получим:

$$(\vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OC}) \cdot \vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 - 2\vec{OC}^2).$$

Поскольку $\vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OC} \neq \vec{0}$, то полученное уравнение имеет вид уравнения (6) и поэтому представляет собой прямую l . Чтобы найти положение прямой l на плоскости по отношению к треугольнику ABC , выберем точку O так, чтобы $O=C$. Тогда $\vec{OC} = \vec{0}$ и полученное уравнение примет вид:

$$(\vec{CA} + \vec{CB}) \cdot \vec{CM} = \frac{1}{2}(\vec{CA}^2 + \vec{CB}^2).$$

Но $\vec{CA} + \vec{CB} = 2\vec{CS}$, где S — середина гипотенузы AB . Поэтому имеем:

$$\vec{CS} \cdot \vec{CM} = \frac{1}{4}c^2, \quad c = |AB|.$$

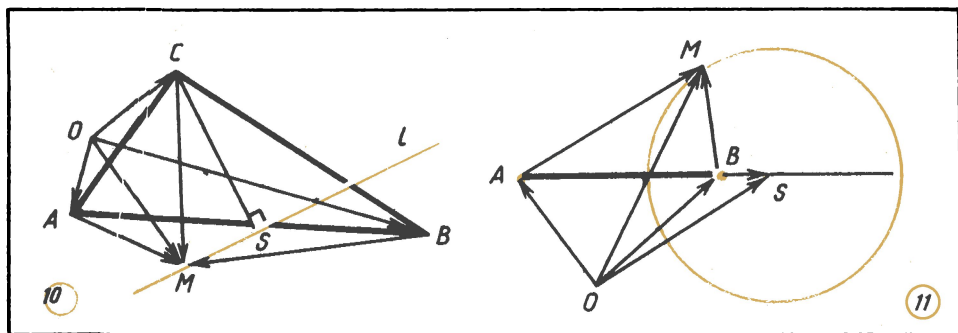
Итак, прямая l перпендикулярна медиане CS . Но последнему уравнению удовлетворяет вектор \vec{CM} , равный \vec{CS} , так как

$$\vec{CS} \cdot \vec{CS} = \vec{CS}^2 = |CS|^2 = \frac{1}{4}|AB|^2 = \frac{1}{4}c.$$

Следовательно, прямая l проходит через середину гипотенузы перпендикулярно медиане CS данного треугольника.

Если задачу решать как стереометрическую, то искомое множество точек M есть плоскость, проходящая через середину гипотенузы AB перпендикулярно медиане CS .

Наконец, заметим, что если данный треугольник равнобедренный ($|CA| = |CB|$), то прямая l совпадает с прямой AB .



Таким образом, если M — любая точка на прямой AB , а ABC — равнобедренный прямоугольный треугольник ($|CA| = |CB|$), то

$$|CM|^2 = \frac{1}{2}(|AM|^2 + |BM|^2),$$

или

$$|CM| = \sqrt{\frac{|AM|^2 + |BM|^2}{2}}.$$

Отрезок CM называется *средним квадратичным* для отрезков AM и MB . Построение среднего квадратичного двух отрезков длиной x и y выполняем так: строим отрезки AM и BM , такие, чтобы $|AM| = x$, $|BM| = y$, $M \in [AB]$; строим далее равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ; $[CM]$ — искомый отрезок.

Задача 6. Найти множество точек M , отношение расстояний от которых до данных точек A и B равно λ .

Решение. Из условия задачи следует, что $|AM|^2 : |BM|^2 = \lambda^2$ (рис. 11). Но $|AM|^2 : |BM|^2 = \vec{AM}^2 : \vec{BM}^2$, поэтому $\vec{AM}^2 = \lambda^2 \vec{BM}^2$.

Учитывая, что $\vec{AM} = \vec{OM} - \vec{OA}$, $\vec{BM} = \vec{OM} - \vec{OB}$, получаем:

$$(\vec{OM} - \vec{OA})^2 = \lambda^2 (\vec{OM} - \vec{OB})^2.$$

Отсюда

$$(1 - \lambda^2) \vec{OM}^2 - 2(\vec{OA} - \lambda^2 \vec{OB}) \cdot \vec{OM} + \vec{OA}^2 - \lambda^2 \vec{OB}^2 = 0.$$

Если $\lambda = 1$, то искомое множество точек есть серединный перпендикуляр точек A и B . Пусть $\lambda \neq 1$. Тогда, разделив уравнение на $1 - \lambda^2$, получим:

$$\vec{OM}^2 - 2 \frac{\vec{OA} - \lambda^2 \vec{OB}}{1 - \lambda^2} \cdot \vec{OM} = - \frac{\vec{OA}^2 - \lambda^2 \vec{OB}^2}{1 - \lambda^2}$$

или

$$\left(\vec{OM} - \frac{\vec{OA} - \lambda^2 \vec{OB}}{1 - \lambda^2} \right)^2 = \left(\frac{\vec{OA} - \lambda^2 \vec{OB}}{1 - \lambda^2} \right)^2 - \frac{\vec{OA}^2 - \lambda^2 \vec{OB}^2}{1 - \lambda^2},$$

причем правая часть равна $\frac{\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2} \vec{AB}^2$.

Итак, искомое множество точек есть окружность радиуса $\frac{\lambda}{|1-\lambda^2|} |AB|$ с центром S , для которого $\vec{OS} = \frac{\vec{OA} - \lambda^2 \vec{OB}}{1 - \lambda^2}$.

Это значит, что $\vec{AS} = -\lambda^2 \vec{SB}$.

Полученная окружность называется *окружностью Аполлония*. Ее центр находится на прямой AB , но вне отрезка AB , причем $|AS| : |SB| = \lambda^2$.

Если искомое множество точек рассматривается в пространстве, то получаем сферу того же радиуса с центром в той же точке:

$$\left(\vec{OM} - \frac{\vec{OA} - \lambda^2 \vec{OB}}{1 - \lambda^2} \right)^2 = \frac{\lambda^2}{(1 - \lambda^2)^2} \vec{AB}^2, \quad \lambda \neq 1.$$

Заметим, что при $\lambda > 1$ центр S принадлежит лучу $[AB)$ и B лежит между A и S , а при $\lambda < 1$ — лучу $[BA)$ и A лежит между B и S .

Задача 7. Дан равносторонний треугольник ABC . Найти множество точек M , для которых $|AM|^2 + |BM|^2 = |CM|^2$.

Решение. Примем центр O данного треугольника за начало (рис. 12). Тогда

$$(\vec{OM} - \vec{OA})^2 + (\vec{OM} - \vec{OB})^2 = (\vec{OM} - \vec{OC})^2.$$

Отсюда

$$\vec{OM}^2 - 2(\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC}) \cdot \vec{OM} + \vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 - \vec{OC}^2 = 0.$$

Но $\vec{OA}^2 = \vec{OB}^2 = \vec{OC}^2 = R^2$, $\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OC} = -2\vec{OC}$. Поэтому

$$\vec{OM}^2 + 4\vec{OC} \cdot \vec{OM} + R^2 = 0.$$

Выделим в левой части уравнения полный квадрат:

$$(\vec{OM} + 2\vec{OC})^2 = 4\vec{OC}^2 - R^2$$

или

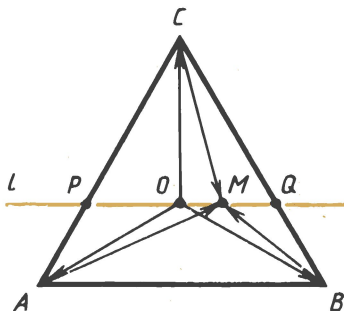
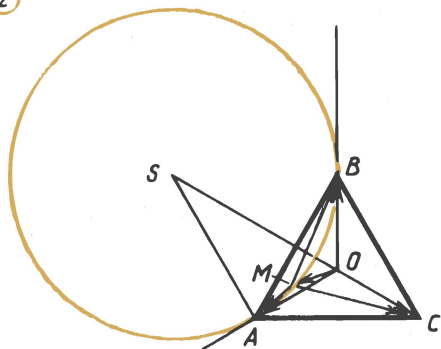
$$(\vec{OM} + 2\vec{OC})^2 = (\sqrt{3}R)^2.$$

Итак, искомое множество точек есть окружность радиуса $R\sqrt{3}$ с центром в точке S , такой, что $\vec{OS} = -2\vec{OC}$. Очевидно, что точка S принадлежит биссектрисе угла C ; ее расстояние от центра треугольника равно $2R$.

Вычислим величину угла OAS . Имеем:

$$\cos \widehat{OAS} = \frac{\vec{AO} \cdot \vec{AS}}{|\vec{AO}| \cdot |\vec{AS}|} = \frac{\vec{OA} \cdot (\vec{OA} + 2\vec{OC})}{|\vec{AO}| \cdot |\vec{AS}|} = \frac{R^2 - R^2}{|\vec{AO}| \cdot |\vec{AS}|} = 0.$$

Это значит, что найденная окружность касается прямых OA и OB в точках A и B . Другими словами, эта окружность пересекает описанную около треугольника окружность ортогонально.



Наконец, заметим, что $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC} + \vec{OS}$, так как из этого равенства следует истинное соотношение $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$. Следовательно, $ACBS$ — параллелограмм.

Задача 8. Дан равносторонний треугольник ABC . Найти множество точек M , для которых $|AM|^2 + |BM|^2 = 2|CM|^2$.

Решение. Если O — центр тяжести данного треугольника (рис. 13), то

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}, \quad |\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}| = R.$$

Далее,

$$AM^2 = (\vec{OM} - \vec{OA})^2, \quad BM^2 = (\vec{OM} - \vec{OB})^2, \quad CM^2 = (\vec{OM} - \vec{OC})^2.$$

Следовательно,

$$(\vec{OM} - \vec{OA})^2 + (\vec{OM} - \vec{OB})^2 = 2(\vec{OM} - \vec{OC})^2.$$

После возведения в квадрат и упрощений получим:

$$2(\vec{OA} + \vec{OB} - 2\vec{OC}) \cdot \vec{OM} = \vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 - 2\vec{OC}^2,$$

$$\text{или } -6\vec{OC} \cdot \vec{OM} = 0.$$

Другими словами, множество точек M есть прямая l , проходящая через центр тяжести O треугольника перпендикулярно лучу OC . Иначе, прямая l проходит через точку O параллельно прямой AB .

Заметим, что если $l \cap (AC) = P$, то $|PA|^2 + |PB|^2 = 2|PC|^2$. Но $|AP| : |PC| = 1 : 2$. Поэтому получаем такое следствие: если точка P делит сторону AC равностороннего треугольника ABC в отношении $1 : 2$, то $|PA|^2 + |PB|^2 = 2|PC|^2$.

Далее, если $l \cap (BC) = Q$, то $|PQ| = |PC|$ и $|PA|^2 + |PB|^2 = 2|PQ|^2$.

Задача 9. Даны плоскость α и точка M , не принадлежащая α . Для каждой точки P плоскости α строится точка P' , такая, что $\vec{MP} \cdot \vec{MP'} = R^2$, $R \neq 0$, причем точки M , P , P' принадлежат одной прямой. Найти множество точек P' .

Решение. Из условия задачи следует, что $\vec{MP'} = \lambda \vec{MP}$ (рис. 14). Отсюда $\vec{MP} \cdot \vec{MP'} = \lambda \vec{MP}^2 = R^2$, поэтому $\lambda = R^2 : \vec{MP}^2$ и

$$\vec{MP'} = \frac{R^2}{\vec{MP}^2} \vec{MP}. \quad (8)$$

Для данной плоскости имеем уравнение

$$\vec{n} \cdot \vec{MP} + D = 0, \quad D \neq 0.$$

Но

$$\vec{MP} = \frac{\vec{MP}^2}{R^2} \vec{MP'}.$$

Следовательно,

$$\frac{\vec{MP}^2}{R^2} (\vec{n} \cdot \vec{MP'}) + D = 0.$$

Далее, $\vec{MP}^2 \cdot \vec{MP'}^2 = R^4$, поэтому $\frac{\vec{MP}^2}{R^2} = \frac{R^2}{\vec{MP'}^2}$ и последнее уравнение принимает вид:

$$\frac{R^2}{\vec{MP'}^2} (\vec{n} \cdot \vec{MP'}) + D = 0,$$

или

$$R^2 (\vec{n} \cdot \vec{MP'}) + D \cdot \vec{MP'}^2 = 0.$$

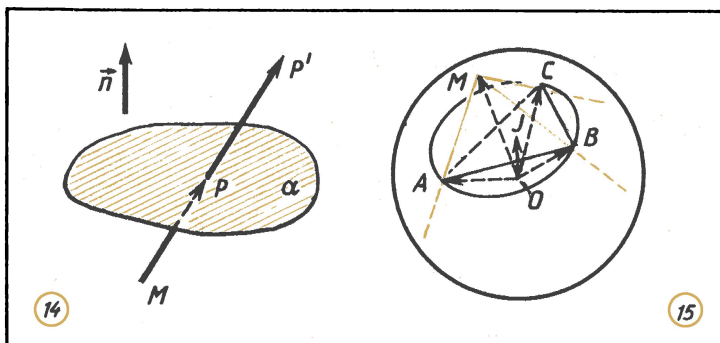
Отсюда получаем:

$$\left(\vec{MP'} + \frac{R^2}{2D} \vec{n} \right)^2 = \frac{R^2 \vec{n}^2}{4D^2}. \quad (9)$$

Итак, искомое множество точек есть сфера радиуса $\frac{R |\vec{n}|}{2|D|}$ с центром S , причем $\vec{MS} = -\frac{R^2}{2D} \vec{n}$. Из этого уравнения видно, что центр сферы лежит на перпендикуляре к данной плоскости α , проведенном через точку M .

Отображение пространства, при котором точка P переходит в точку P' согласно формуле (8) при условии, что $P \neq M$, называется *преобразованием инверсии с коэффициентом инверсии*, равным R^2 . Образом плоскости α , не проходящей через центр инверсии, является сфера (9), проходящая через точку M , называемую *центром инверсии*.

Если формулу (8) рассматривать для точек P плоскости, то эта формула задает преобразование инверсии плоскости. Однако из плоскости необходимо удалить центр M инверсии, который не имеет образа.



Задача 10. Даны сфера $\omega(0; R)$ и точка M , $|OM| > R$. Ребра прямого трехгранного угла с вершиной M пересекают сферу в точках A, B и C . Найти множество центроидов G троек точек A, B, C для множества всех прямых трехгранных углов с общей вершиной M .

Решение. Согласно условию задачи имеем (рис. 15):

$$\vec{OA}^2 = \vec{OB}^2 = \vec{OC}^2 = R^2;$$

далее,

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0, \vec{MB} \cdot \vec{MC} = 0, \vec{MC} \cdot \vec{MA} = 0,$$

откуда следует:

$$(\vec{OA} - \vec{OM}) \cdot (\vec{OB} - \vec{OM}) = 0, (\vec{OB} - \vec{OM}) (\vec{OC} - \vec{OM}) = 0, \\ (\vec{OC} - \vec{OM}) (\vec{OA} - \vec{OM}) = 0,$$

или более подробно:

$$\vec{OM}^2 - \vec{OM} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB}) + \vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0, \\ \vec{OM}^2 - \vec{OM} \cdot (\vec{OB} + \vec{OC}) + \vec{OB} \cdot \vec{OC} = 0, \\ \vec{OM}^2 - \vec{OM} \cdot (\vec{OC} + \vec{OA}) + \vec{OC} \cdot \vec{OA} = 0.$$

После почленного сложения этих равенств получим:

$$3\vec{OM}^2 - 2\vec{OM} \cdot (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) + \vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OB} \cdot \vec{OC} + \vec{OC} \cdot \vec{OA} = 0.$$

Но

$$\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = 3\vec{OG}, \\ \vec{OA} \cdot \vec{OB} + \vec{OB} \cdot \vec{OC} + \vec{OC} \cdot \vec{OA} = \\ = \frac{1}{2} ((\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})^2 - 3R^2).$$

$$\text{Следовательно, } 3\vec{OM}^2 - 6\vec{OM} \cdot \vec{OG} + \frac{1}{2}(9\vec{OG}^2 - 3R^2) = 0.$$

Полученное уравнение преобразуем к виду

$$3\vec{OG}^2 - 4\vec{OM} \cdot \vec{OG} = R^2 - 2d^2, \quad d = |\vec{OM}|$$

или

$$\left(\vec{OG} - \frac{2}{3}\vec{OM} \right)^2 = \frac{1}{9}(3R^2 - 2d^2).$$

Итак, если $3R^2 - 2d^2 > 0$, то искомое множество центроидов есть сфера радиуса $\frac{1}{3}\sqrt{3R^2 - 2d^2}$ с центром в точке S , такой, что $\vec{OS} = \frac{2}{3}\vec{OM}$. Если $3R^2 - 2d^2 = 0$, то искомое множество точек есть точка S ; при $3R^2 - 2d^2 < 0$ искомое множество точек является пустым.

Нетрудно доказать, что при $3R^2 - 2|\vec{OM}|^2 = 0$ все рассматриваемые трехгранные углы расположены так, что их ребра либо касаются сферы в тройках точек, имеющих общий центроид S , либо интересующих нас троек не существует.

Решение рассматриваемой задачи для двумерного случая, когда роль сферы играет окружность, а тройка попарно перпендикулярных лучей заменена парой таких лучей, предлагаем провести читателю самостоятельно.

V

Известно, что для составления уравнений различных множеств точек весьма удобно применять координаты. Фактически основное назначение координат заключается именно в том, чтобы по уравнениям множеств точек (иногда используются неравенства и их системы) изучать свойства этих множеств и обратно: по свойствам различных множеств точек составлять соответствующие им уравнения. Располагая уравнением множества точек, можно по виду уравнения охарактеризовать это множество. Во многих случаях координаты предпочтительнее векторов, но не всегда. Решая задачу посредством координат, приходится одновременно рассматривать расположение изучаемой фигуры относительно осей координат, начала координат, координатных углов. Вычисления нередко становятся громоздкими и труднообозримыми. Решая же задачу посредством векторов, достаточно выбрать лишь «начальную» точку и все рассматриваемые векторы откладывать от этой точки. Иногда специальный выбор начала делает решение еще более естественным, сокращает значительно вычисления.

При решении многих задач целесообразно применять координатно-векторный метод, основанный на совместном использовании векторов и вычислений над их координатами, задавая базис¹⁸, выполняя разложение вводимых векторов по базису. В приведенных выше задачах мы применяли исключительно векторный аппарат, не привлекая базисных векторов и координат. В этих задачах применение векторов, по нашему мнению, максимально целесообразно.

О ДВУХ ПРАВИЛЬНЫХ ШЕСТИУГОЛЬНИКАХ, СВЯЗАННЫХ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ТРЕУГОЛЬНИКОМ

Ниже речь пойдет об одной задаче, хорошо знакомой многим любителям математики. Сформулируем ее.

Задача. Если на сторонах BC , CA и AB треугольника ABC построены в его плоскости равносторонние одинаково ориентированные¹⁹ треугольники BCA_1 , CAB_1 , ABC_1 (рис. 1), то центры A_0 , B_0 , C_0 этих треугольников являются вершинами равностороннего треугольника $A_0B_0C_0$ или совпадают.

В № 5 журнала «Квант» за 1972 г. этой задаче, приписываемой Наполеону, была посвящена отдельная статья, ее можно найти также во многих пособиях и сборниках задач повышенной трудности, предназначенных для поступающих в вузы или для внеклассных занятий. В помещенных в этих книгах решениях применяются тригонометрия, геометрические преобразования, различные другие традиционные приемы, характерные для элементарной геометрии.

В предлагаемом нами решении, в котором находят применение векторы и преобразования, будет обнаружено, что равносторонних треугольников, соответствующих только одной из двух возможных ориентаций треугольников BCA_1 , CAB_1 , ABC_1 , можно указать два (среди них $\triangle A_0B_0C_0$), причем вершины обоих треугольников образуют правильный шестиугольник. Аналогичным образом можно построить и второй правильный шестиугольник, который соответствует другой ориентации трех указанных выше равносторонних треугольников.

I

Рассмотрим для определенности тот случай, когда ориентации треугольников BCA_1 , CAB_1 и ABC_1 противоположны ориентации треугольника ABC (рис. 1).

Пусть G — центроид данного треугольника ABC . Согласно правилу треугольника имеем:

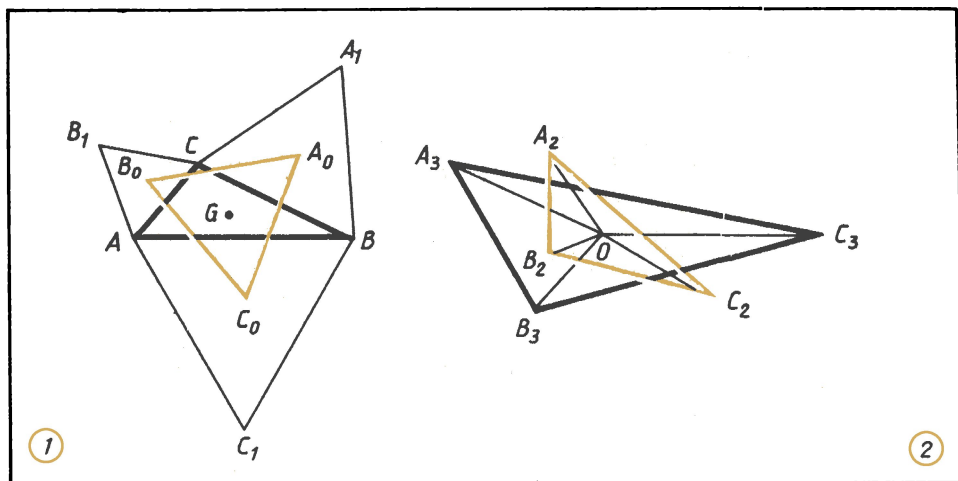
$$\vec{GA}_0 = \vec{GB} + \vec{BA}_0, \quad \vec{GB}_0 = \vec{GC} + \vec{CB}_0, \quad \vec{GC}_0 = \vec{GA} + \vec{AC}_0.$$

Отсюда сложением получаем:

$$\vec{GA}_0 + \vec{GB}_0 + \vec{GC}_0 = \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + (\vec{BA}_0 + \vec{CB}_0 + \vec{AC}_0). \quad (1)$$

Поскольку точка G — центроид треугольника ABC , то

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}.$$



Отложив векторы $\vec{BA_0}$, $\vec{CB_0}$, $\vec{AC_0}$ и векторы \vec{BC} , \vec{CA} , \vec{AB} от некоторой точки O , получим соответственно векторы $\vec{OA_2}$, $\vec{OB_2}$, $\vec{OC_2}$ и $\vec{OA_3}$, $\vec{OB_3}$, $\vec{OC_3}$ (рис. 2).

Треугольник $A_2B_2C_2$ получается из треугольника $A_3B_3C_3$ поворотом $R_0^{-30^\circ}$ и гомететией $H_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

Поскольку $\vec{OA_3} + \vec{OB_3} + \vec{OC_3} = \vec{0}$, то O — центроид треугольника $A_3B_3C_3$. Поворот и гомететия отображают центроид на центроид, а так как при данной гомететии и данном повороте точка O неподвижна, то O — центроид и треугольника $A_2B_2C_2$. Отсюда следует, что $\vec{OA_2} + \vec{OB_2} + \vec{OC_2} = \vec{0}$.

Таким образом, $\vec{BA_0} + \vec{CB_0} + \vec{AC_0} = \vec{0}$, и поэтому из (1) находим, что

$$\vec{GA_0} + \vec{GB_0} + \vec{GC_0} = \vec{0}. \quad (2)$$

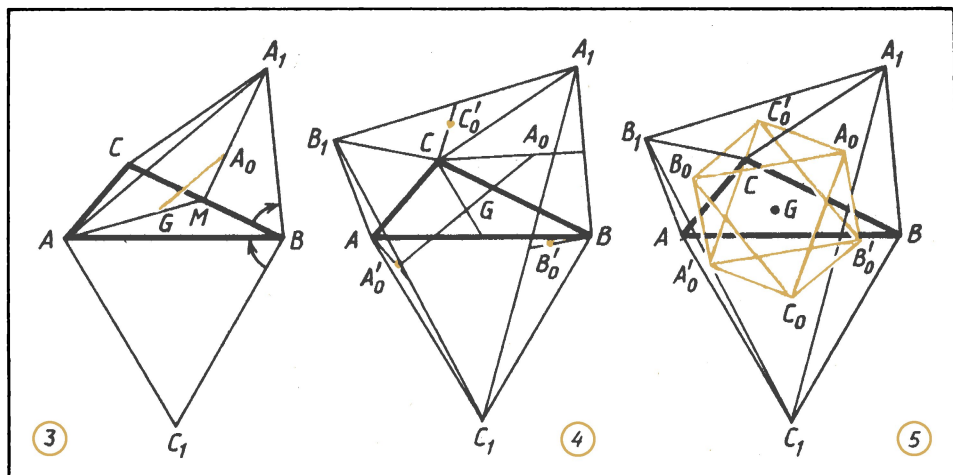
Из (2) вытекает, что G — центроид треугольника $A_0B_0C_0$.

Теперь рассмотрим четырехугольник ABA_1C (рис. 3). Отрезок GA_0 соединяет центроиды треугольников ABC и BA_1C , следовательно, $\vec{GA_0} = \frac{1}{3} \vec{AA_1}$ ($H_M^{\frac{1}{3}}([AA_1]) = [GA_0]$, M — середина стороны BC).

Аналогичным образом обнаруживаем, что

$$\vec{GB_0} = \frac{1}{3} \vec{BB_1}, \quad \vec{GC_0} = \frac{1}{3} \vec{CC_1}.$$

Но $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$. Действительно, поворот $R_B^{-60^\circ}$ отображает C_1 на A , C на A_1 , поэтому $|CC_1| = |AA_1|$; аналогично $R_C^{-60^\circ}([A_1A]) = [BB_1]$, и поэтому $|AA_1| = |BB_1|$.



В таком случае $|GA_0| = |GB_0| = |GC_0|$. Следовательно, для треугольника $A_0B_0C_0$ точка G есть и центроид, и центр описанной окружности, поэтому $A_0B_0C_0$ — правильный треугольник.

Задача решена и дополнена тем, что центроид треугольника $A_0B_0C_0$ совпадает с центроидом данного.

II

Вне поля зрения остался еще один правильный треугольник $A'_0B'_0C'_0$, который обнаруживается следующим образом.

Рассмотрим центроиды A'_0, B'_0, C'_0 треугольников B_1AC_1, C_1BA_1 и A_1CB_1 (рис. 4). Соединим их с центроидом G . Заметим, что в четырехугольнике $B_1AC_1A_1$ длина диагонали AA_1 в три раза больше длины отрезка GA'_0 , причем $[GA'_0] \uparrow \uparrow [A_1A]$, т. е. $\vec{GA'_0} = \frac{1}{3} \vec{A_1A}$ (обратить внимание на то, что точка G — центроид также и треугольника $A_1B_1C_1$, рассуждения аналогичны вышеприведенным). Точно так же

$$\vec{GB'_0} = \frac{1}{3} \vec{B_1B}, \quad \vec{GC'_0} = \frac{1}{3} \vec{C_1C}.$$

Поскольку

$$|\vec{A_1A}| = |\vec{B_1B}| = |\vec{C_1C}|$$

и

$$(\vec{A_1A}, \vec{B_1B}) = (\vec{B_1B}, \vec{C_1C}) = (\vec{C_1C}, \vec{A_1A}) = 120^\circ, \quad \text{то}$$

$$|\vec{GA'_0}| = |\vec{GB'_0}| = |\vec{GC'_0}| \quad \text{и} \quad (\vec{GA'_0}, \vec{GB'_0}) = (\vec{GB'_0}, \vec{GC'_0}) = (\vec{GC'_0}, \vec{GA'_0}) = 120^\circ.$$

Следовательно, треугольник $A'_0B'_0C'_0$ также правильный и центр его совпадает с центроидом G данного треугольника.

Так как полученные равносторонние треугольники $A_0B_0C_0$ и $A'_0B'_0C'_0$ симметричны относительно их общего центра G , то шестиугольник $A_0C'_0B_0A'_0C_0B'_0$ правильный и его центр совпадает с центроидом G данного треугольника (рис. 5).

Вычислим длину d стороны этого шестиугольника. Очевидно, $d = \frac{1}{3} |AA_1|$. Рассмотрим треугольник ABA_1 . По теореме косинусов имеем:

$$\begin{aligned} |AA_1|^2 &= |AB|^2 + |BA_1|^2 - 2 |AB| |BA_1| \cos(60^\circ + \widehat{B}) = \\ &= c^2 + a^2 - 2ac \left(\frac{1}{2} \cos \widehat{B} - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \widehat{B} \right) = c^2 + a^2 - ac \cos \widehat{B} + 2\sqrt{3}S_{ABC} = \\ &= c^2 + a^2 - \frac{-b^2 + c^2 + a^2}{2} + 2\sqrt{3}S_{ABC} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S_{ABC}). \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом, } d = \frac{1}{3} |AA_1| = \frac{1}{3\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S_{ABC}}.$$

В случае если равносторонние треугольники, построенные на сторонах данного, имеют противоположную с ним ориентацию, то по аналогии с предыдущим также получаем правильный шестиугольник с тем же центром и со стороной d' , равной $\frac{1}{3} |AA_1|$, причем

$$d' = \frac{1}{3\sqrt{2}} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4\sqrt{3}S_{ABC}}.$$

В единственном случае, когда данный треугольник правильный, шестиугольник вырождается в точку и

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4\sqrt{3}S_{ABC}.$$

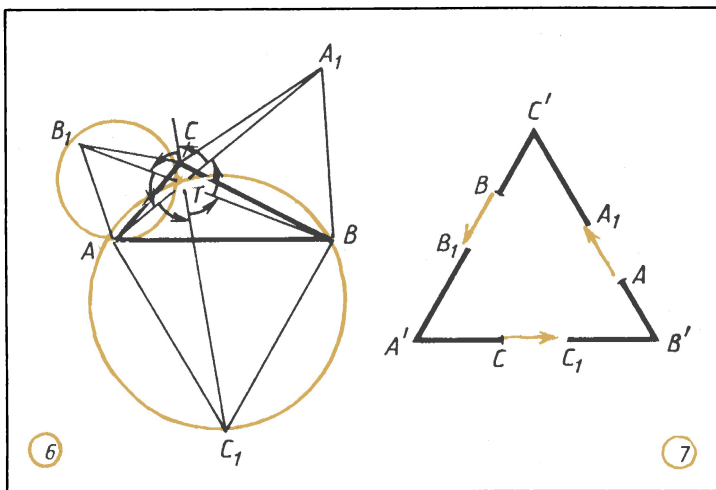
Полученное равенство характеризует только равносторонний треугольник, т. е. из него следует $a = b = c$.

III

Анализ решенной задачи приводит нас к возможности сделать дальнейшие обобщения. В самом деле, прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. В этом можно убедиться так. Было выяснено, что угол между векторами $\vec{AA_1}$ и $\vec{CC_1}$ равен 60° (рис. 6). Если $(AA_1) \cap (CC_1) = T$, то $\widehat{ATC_1} = 60^\circ$. Но $\widehat{ABC_1} = 60^\circ$, следовательно, около четырехугольника $ATBC_1$ можно описать окружность, откуда следует, что $\widehat{C_1TB} = 60^\circ$ и $\widehat{BTA_1} = 60^\circ$. Далее около четырехугольника AB_1CT также можно описать окружность, поэтому $\widehat{CTB_1} = \widehat{B_1TA} = 60^\circ$. Таким образом, при точке T все шесть углов равны 60° , и поэтому точки B , T и B_1 принадлежат одной прямой.

Однако в решении обобщенной задачи о правильном шестиугольнике мы не использовали тот факт, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Нам было важно, что $|AA_1| = |BB_1| = |CC_1|$ и

$$(\vec{AA_1}, \vec{BB_1}) = (\vec{BB_1}, \vec{CC_1}) = (\vec{CC_1}, \vec{AA_1}) = 120^\circ.$$



Вот почему основную задачу можно освободить от этого лишнего требования и сформулировать новую, более общую задачу (рис. 7).

Задача. Дан равносторонний треугольник $A'B'C'$. На его сторонах $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ заданы соответственно пары точек A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 так, что $\vec{AA_1} = k\vec{B'C'}$, $\vec{BB_1} = k\vec{C'A'}$, $\vec{CC_1} = k\vec{A'B'}$. Доказать, что:

- 1) центры тяжести треугольников ABC_1 , BCA_1 и CAB_1 являются вершинами равностороннего треугольника;
- 2) центры тяжести треугольников A_1B_1C , B_1C_1A и C_1A_1B также являются вершинами равностороннего треугольника;
- 3) центры тяжести этих двух равносторонних треугольников совпадают с общим центром тяжести G треугольников ABC и $A_1B_1C_1$;
- 4) оба полученных равносторонних треугольника симметричны друг другу относительно центра G ;
- 5) вершины обоих равносторонних треугольников являются вершинами правильного шестиугольника.

Если G — центр тяжести треугольника ABC , то, как и в специальном случае, доказываем, что G является центром тяжести правильного треугольника с вершинами в центрах тяжести треугольников ABC_1 , BCA_1 , CAB_1 .

Остается лишь доказать, что центр тяжести G_1 треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром тяжести G треугольника ABC . В самом деле, примем точку G за начало векторов. Тогда $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$. Но согласно условию задачи имеем:

$$\vec{GA_1} = \vec{GA} + k\vec{B'C'}, \quad \vec{GB_1} = \vec{GB} + k\vec{C'A'}, \quad \vec{GC_1} = k\vec{A'B'}.$$

Из этих равенств непосредственно следует, что $\vec{GA_1} + \vec{GB_1} + \vec{GC_1} = \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + k(\vec{B'C'} + \vec{C'A'} + \vec{A'B'})$, т. е. $\vec{GA_1} + \vec{GB_1} + \vec{GC_1} = \vec{0}$ и центр тяжести G_1 треугольника $A_1B_1C_1$ совпадает с центром тяжести G треуголь-

ника ABC .

Не составляет труда убедиться в том, что вершины второго равносоставленного треугольника симметричны вершинам первого относительно точки G .

В итоге получаем правильный шестиугольник, сторона которого $\frac{1}{3}|AA_1|$.

В данном обобщении роль точки T с проходящими через нее прямыми AA_1 , BB_1 , CC_1 играет правильный треугольник $A'B'C'$ и прямые, содержащие его стороны.

ПОВОРОТ ВЕКТОРА НА 90°

Для решения аффинных задач планиметрии, касающихся взаимного расположения двух прямых, принадлежности трех точек одной прямой, вычисления отношения коллинеарных отрезков, удобно пользоваться векторами. В процессе решения таких задач необходимо владеть лишь операциями сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число, которые известны читателю из школьного курса геометрии.

Если же задача носит метрический характер, то этих операций недостаточно. На помощь приходит обычно операция скалярного умножения векторов. Посредством этой операции (в сочетании с аффинными операциями) можно вычислять расстояния и углы, находить метрические соотношения между линейными и угловыми элементами многоугольников, описывать различные множества точек, решать ряд задач, связанных с окружностью.

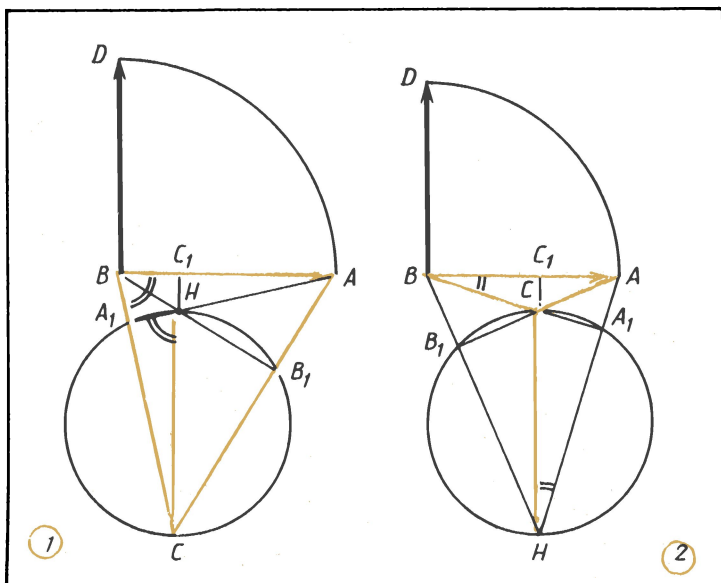
Между тем очень полезной при решении метрических задач является операция поворота вектора на 90° в положительном направлении (в предположении, что на плоскости введена ориентация)¹⁹. Эта несложная операция позволяет нередко освободиться от применения скалярного умножения векторов, особенно в тех случаях, когда в задаче приходится установить перпендикулярность прямых или отрезков. Более того, указанная операция во многих случаях имеет преимущество перед скалярным умножением векторов, так как в результате ее применения не приходится заменять векторные равенства числовыми (как в случае скалярного умножения), закрывающими геометрическую картину решаемой задачи.

Для иллюстрации приведем решения нескольких нестандартных планиметрических задач, в которых находит применение операция поворота вектора на 90° .

Вектор \vec{b} , получаемый из вектора \vec{a} поворотом его на 90° в положительном направлении (против движения часовой стрелки), обозначим символом $i\vec{a}$. Множитель i указывает действие поворота (никакого другого смысла в этот множитель вкладывать не следует).

Итак, из $\vec{b} = i\vec{a}$ следует, что $|\vec{b}| = |\vec{a}|$, $(\vec{a}, \vec{b}) = +90^\circ$. Верно и обратное утверждение.

Перечислим свойства операции умножения на i , вытекающие из ее определения:



- 1) $i(k\vec{a}) = k(i\vec{a})$, k — действительное число; 3) $i\vec{0} = \vec{0}$;
 2) $i(\vec{a} + \vec{b}) = i\vec{a} + i\vec{b}$; 4) $i(i\vec{a}) = -\vec{a}$.

Этими свойствами мы будем пользоваться при решении задач и доказательстве теорем. Читатель без труда самостоятельно докажет истинность перечисленных свойств.

Задача 1. Дан положительно ориентированный треугольник ABC , точка H — его ортоцентр. Доказать, что $\vec{CH} = \text{ctg } \widehat{C} \cdot (i\vec{BA})$.

Решение. Пусть $\widehat{C} < 90^\circ$. Докажем, что $|CH| = |AB| \text{ ctg } \widehat{C}$. В самом деле, окружность, построенная на диаметре CH , проходит через основания A_1 и B_1 высот AA_1 и BB_1 треугольника ABC (рис. 1). Следовательно, $|CA_1| = |CH| \sin \widehat{B}$, где $|CA_1| = |CA| \cos \widehat{C}$. Отсюда

$$|CH| = \frac{|CA|}{\sin \widehat{B}} \cdot \cos \widehat{C}.$$

Но по теореме синусов $|CA| : |AB| = \sin \widehat{B} : \sin \widehat{C}$. Поэтому

и
$$|CH| = \frac{|AB| \cos \widehat{C}}{\sin \widehat{C}}$$

$$|CH| = |AB| \text{ ctg } \widehat{C}. \quad (1)$$

Если вектор \vec{BA} повернуть на $+90^\circ$ около вершины B , то получим вектор $i\vec{BA} = \vec{BD}$, сонаправленный с \vec{CH} (точки C и D лежат по разные стороны от (AB)). Значит, $\vec{CH} = k(i\vec{BA})$, где $k > 0$. Поэтому $|CH| = k |BA|$. Сопоставляя последнее равенство с (1), получаем $k = \text{ctg } \widehat{C}$.

Итак, $\vec{CH} = \text{ctg } \widehat{C} \cdot (i\vec{BA})$.

Формула (1) остается в силе и тогда, когда $\widehat{C} > 90^\circ$ (рис. 2) и $\widehat{C} = 90^\circ$. (Доказательство опускаем.)

Применим результат, содержащийся в решении задачи 1, для решения следующей задачи.

Задача 2. Выразить радиус-вектор ортоцентра H треугольника ABC через радиус-векторы его вершин.

Решение. Если треугольник прямоугольный, то вершина прямого угла является ортоцентром треугольника. Поэтому положим, что данный треугольник не прямоугольный. Согласно задаче 1 имеем:

$$\vec{CH} = \text{ctg } \widehat{C} \cdot (i\vec{BA}).$$

Отсюда

$$\vec{AB} = \text{tg } \widehat{C} \cdot (i\vec{CH}), \quad \vec{AB} = \text{tg } \widehat{C} (i\vec{H} - i\vec{C}).$$

Аналогично

$$\vec{BC} = \text{tg } \widehat{A} (i\vec{H} - i\vec{A}), \quad \vec{CA} = \text{tg } \widehat{B} (i\vec{H} - i\vec{B}).$$

После почленного сложения полученных равенств найдем:

$$i(\text{tg } \widehat{A} (\vec{H} - \vec{A}) + \text{tg } \widehat{B} (\vec{H} - \vec{B}) + \text{tg } \widehat{C} (\vec{H} - \vec{C})) = 0,$$

откуда

$$\vec{H}(\text{tg } \widehat{A} + \text{tg } \widehat{B} + \text{tg } \widehat{C}) = \vec{A} \text{tg } \widehat{A} + \vec{B} \text{tg } \widehat{B} + \vec{C} \text{tg } \widehat{C}$$

и

$$\vec{H} = \frac{\vec{A} \text{tg } \widehat{A} + \vec{B} \text{tg } \widehat{B} + \vec{C} \text{tg } \widehat{C}}{\text{tg } \widehat{A} + \text{tg } \widehat{B} + \text{tg } \widehat{C}}.$$

Если точка H совпадает с началом радиус-векторов, то $\vec{H} = \vec{0}$ и

$$\vec{A} \text{tg } \widehat{A} + \vec{B} \text{tg } \widehat{B} + \vec{C} \text{tg } \widehat{C} = \vec{0}.$$

Покажем, что получение этого соотношения посредством скалярного умножения векторов сопряжено с громоздкими выкладками.

Примем ортоцентр H за начало радиус-векторов. Тогда

$$\vec{A}(\vec{B} - \vec{C}) = 0, \quad \vec{B}(\vec{A} - \vec{C}) = 0.$$

Отсюда

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot \vec{C}, \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{C}.$$

Положим $\vec{C} = m\vec{A} + n\vec{B}$. Значения m и n находим из системы

$$\begin{cases} \vec{A} \cdot \vec{B} = m\vec{A}^2 + n\vec{A} \cdot \vec{B}, \\ \vec{A} \cdot \vec{B} = m\vec{A} \cdot \vec{B} + n\vec{B}^2. \end{cases}$$

Имеем:

$$m = \frac{(\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{B}^2 - \vec{A} \cdot \vec{B})}{\vec{A}^2 \cdot \vec{B}^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2}, \quad n = \frac{(\vec{A} \cdot \vec{B})(\vec{A}^2 - \vec{A} \cdot \vec{B})}{\vec{A}^2 \cdot \vec{B}^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2}.$$

Выразим m и n через элементы треугольника. Заметим, что $\vec{A} \cdot \vec{B} = -|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \widehat{C}$. Поэтому

$$\begin{aligned} m &= \frac{-|\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \widehat{C} (|\vec{B}|^2 + |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \widehat{C})}{|\vec{A}|^2 \cdot |\vec{B}|^2 - |\vec{A}|^2 \cdot |\vec{B}|^2 \cos^2 \widehat{C}} = \\ &= -\frac{\cos \widehat{C} (|\vec{B}| + |\vec{A}| \cos \widehat{C}) |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|^2}{|\vec{A}|^2 \cdot |\vec{B}|^2 \cdot \sin \widehat{C}} = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \widehat{C}} \left(\frac{|\vec{B}|}{|\vec{A}| \sin \widehat{C}} + \frac{\cos \widehat{C}}{\sin \widehat{C}} \right). \end{aligned}$$

Но $|\vec{B}| : |\vec{A}| = \cos \widehat{B} : \cos \widehat{A}$ (по теореме синусов для треугольника HAB). Следовательно,

$$\begin{aligned} m &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \widehat{C}} \cdot \left(\frac{\cos \widehat{B}}{\cos \widehat{A} \cdot \sin \widehat{C}} + \frac{\cos \widehat{C}}{\sin \widehat{C}} \right) = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \widehat{C}} \frac{\cos \widehat{B} + \cos \widehat{A} \cdot \cos \widehat{C}}{\cos \widehat{A} \cdot \sin \widehat{C}} = \\ &= -\frac{1}{\operatorname{tg} \widehat{C}} \cdot \frac{\sin \widehat{A} \cdot \sin \widehat{C}}{\cos \widehat{A} \cdot \sin \widehat{C}} = -\frac{\operatorname{tg} \widehat{A}}{\operatorname{tg} \widehat{C}}. \end{aligned}$$

Аналогично находим, что $n = -\frac{\operatorname{tg} \widehat{B}}{\operatorname{tg} \widehat{C}}$.

Итак,

$$\vec{C} = -\frac{\operatorname{tg} \widehat{A}}{\operatorname{tg} \widehat{C}} \cdot \vec{A} - \frac{\operatorname{tg} \widehat{B}}{\operatorname{tg} \widehat{C}} \cdot \vec{B}$$

и

$$\vec{A} \operatorname{tg} \widehat{A} + \vec{B} \operatorname{tg} \widehat{B} + \vec{C} \operatorname{tg} \widehat{C} = \vec{0}.$$

Приведенное здесь решение требует привлечения теоремы синусов, теоремы сложения для функции косинусов, различных тождественных преобразований. Операция поворота вектора на 90° в данной задаче оказалась более эффективной.

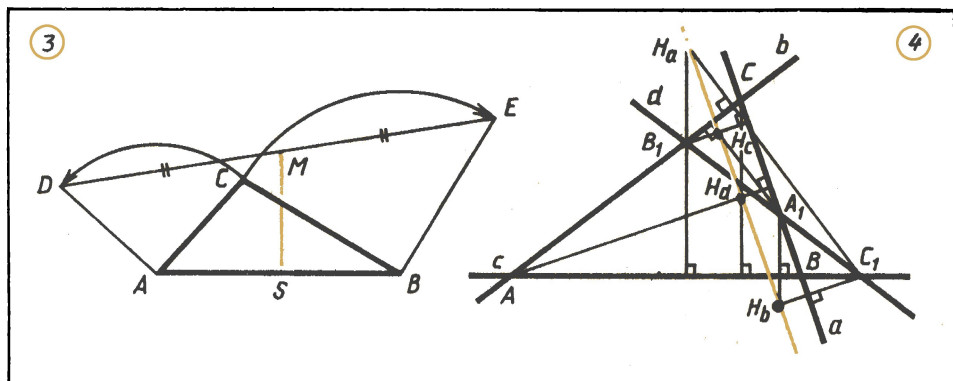
Задача 3. Дан треугольник ABC . Поворотом точки C около точки A на $+90^\circ$ получаем точку D , а поворотом точки C около точки B на -90° получаем точку E . Вычислить расстояние от середины M отрезка DE до прямой AB .

Решение. Выбирая произвольно начало векторов (рис. 3), получим:

$$\vec{D} = \vec{A} + i(\vec{C} - \vec{A}), \quad \vec{E} = \vec{B} - i(\vec{C} - \vec{B}).$$

Отсюда

$$\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{D} + \vec{E}) = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{2} + i \frac{\vec{B} - \vec{A}}{2}.$$



Если S — середина $[AB]$, то $\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{A} + \vec{B})$, и поэтому $\vec{M} = \vec{S} + i\frac{\vec{AB}}{2}$.

Следовательно,

$$\vec{M} - \vec{S} = i\frac{\vec{AB}}{2}, \quad \vec{SM} = i\frac{\vec{AB}}{2} \quad \text{и} \quad |\vec{SM}| = \frac{1}{2} |\vec{AB}|,$$

причем $(SM) \perp (AB)$.

Итак, искомое расстояние равно $\frac{1}{2} |AB|$. Интересно отметить, что оно зависит только от расстояния между A и B , но не зависит от положения вершины C .

Задача 4. Даны четыре прямые, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку (такая фигура называется полным четырехсторонником). Доказать, что ортоцентры четырех треугольников, образованных данными прямыми, взятыми по три, принадлежат одной прямой.

Решение. Пусть прямые a, b, c образуют треугольник ABC , а прямая d пересекает эти три прямые в точках A_1, B_1, C_1 (рис. 4). Рассмотрим положительно ориентированные треугольники ABC и AC_1B_1 , имеющие общий угол A . Обозначим их ортоцентры соответственно через H_d и H_a .

Согласно (1) имеем:

$$\vec{AH}_d = \text{ctg } \hat{A} (i\vec{CB}), \quad \vec{AH}_a = \text{ctg } \hat{A} (i\vec{B_1C_1}).$$

Но $\vec{H_aH_d} = \vec{AH_d} - \vec{AH_a}$, поэтому

$$\vec{H_aH_d} = \text{ctg } \hat{A} i (\vec{CB} - \vec{B_1C_1}). \quad (2)$$

Теперь рассмотрим два положительно ориентированных треугольника A_1CB_1 и A_1BC_1 . Согласно (1) имеем:

$$\vec{A_1H_c} = \text{ctg } \widehat{B_1A_1C} (i\vec{B_1C}), \quad \vec{A_1H_b} = \text{ctg } \widehat{C_1A_1B} (i\vec{C_1B}).$$

Отсюда

$$\vec{H_b H_c} = \text{ctg } \widehat{A_1} i (\vec{B_1 C} - \vec{C_1 B}). \quad (3)$$

Но

$$\vec{CB} + \vec{BC_1} + \vec{C_1 B_1} + \vec{B_1 C} = \vec{0},$$

поэтому

$$\vec{CB} - \vec{B_1 C_1} = -(\vec{B_1 C} - \vec{C_1 B})$$

и

$$i (\vec{CB} - \vec{B_1 C_1}) = -i (\vec{B_1 C} - \vec{C_1 B}).$$

Из равенств (2) и (3) находим, что векторы $\vec{H_a H_d}$ и $\vec{H_b H_c}$ коллинеарны.

Аналогичным образом доказываем коллинеарность векторов $\vec{H_b H_d}$ и $\vec{H_c H_a}$, $\vec{H_c H_d}$ и $\vec{H_a H_b}$. Но в таком случае все четыре точки H_a, H_b, H_c, H_d принадлежат одной прямой h . Задача решена.

Предложенное решение имеет то преимущество перед другими известными решениями, что оно позволяет также найти отношение коллинеарных векторов $\vec{H_a H_d}$ и $\vec{H_b H_c}$. В общем случае, когда $\widehat{A} \neq 90^\circ$, $\widehat{A_1} \neq 90^\circ$, имеем:

$$\text{ctg } \widehat{A_1} \cdot \vec{H_a H_d} + \text{ctg } \widehat{A} \cdot \vec{H_b H_c} = \vec{0}$$

и

$$\vec{H_a H_d} : \vec{H_b H_c} = \text{tg } (\widehat{a, d}) : \text{tg } (\widehat{b, c}). \quad (4)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \vec{H_b H_d} : \vec{H_c H_a} &= \text{tg } (\widehat{b, d}) : \text{tg } (\widehat{c, a}), \\ \vec{H_c H_d} : \vec{H_a H_b} &= \text{tg } (\widehat{c, d}) : \text{tg } (\widehat{a, b}). \end{aligned} \quad (4')$$

Итак, если даны четыре прямые a, b, c, d , то находим четыре точки H_a, H_b, H_c, H_d , причем тангенсы углов между прямыми и расстояния между ортоцентрами связаны соотношениями (4) и (4').

Предлагаем для самостоятельного исследования следующую проблему:

На прямой h даны четыре точки H_a, H_b, H_c, H_d . При каких условиях существуют на плоскости такие четыре прямые a, b, c, d , чтобы данные точки были ортоцентрами четырех треугольников, образованных этими прямыми, взятыми по три? Построить эти четыре прямые.

Задача 5 (теорема Гаусса). Прямые a, b, c, d образуют полный четырехсторонник (см. задачу 4) с вершинами

$$a \cap b = C, c \cap d = C_1, a \cap c = B, b \cap d = B_1, b \cap c = A, a \cap d = A_1.$$

Доказать, что середины M, N, P отрезков AA_1, BB_1, CC_1 принадлежат одной прямой.

Решение. Рассмотрим вектор \vec{MN} (рис. 5). Очевидно, что

$$\vec{MN} = \vec{MA}_1 + \vec{A_1B_1} + \vec{B_1N}, \quad \vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BN}.$$

Почленное сложение этих векторных равенств приводит к соотношению

$$\vec{MN} = \frac{1}{2} (\vec{AB} + \vec{A_1B_1}),$$

так как

$$\vec{MA}_1 + \vec{MA} = \vec{0}, \quad \vec{BN} + \vec{B_1N} = \vec{0}.$$

Аналогично получаем:

$$\vec{NP} = \frac{1}{2} (\vec{B_1C} + \vec{BC_1}),$$

$$\vec{PM} = \frac{1}{2} (\vec{C_1A} + \vec{CA_1}).$$

Сопоставляя предпоследнее равенство с (3), обнаруживаем

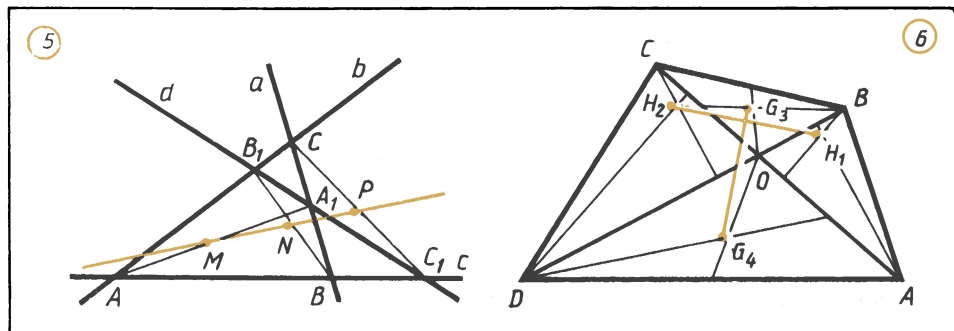
$$H_b H_c = 2 \operatorname{ctg} \hat{A}_1 (i \vec{NP}). \quad (5)$$

Отсюда следует, что вектор \vec{NP} перпендикулярен вектору $\vec{H_b H_c}$ или прямой h , которой принадлежат точки H_a, H_b, H_c, H_d . Аналогичным образом устанавливаем перпендикулярность векторов \vec{PM} и \vec{MN} той же прямой h . Следовательно, точки M, N, P принадлежат одной прямой q .

В ходе решения этой задачи посредством операции поворота на 90° дополнительно выяснено, что прямая q перпендикулярна прямой h , а также найдено отношение длин отрезков NP и $H_b H_c$:

$$|NP| : |H_b H_c| = \frac{1}{2} |\operatorname{tg}(\hat{a}, \hat{d})|.$$

Обращаем внимание на то, что теорема Гаусса, носящая аффинный характер, решена метрическими средствами.



Задача 6. В четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD , пересекающиеся в точке O . Для треугольников OAB и OCD построены ортоцентры H_1 и H_2 , а для треугольников OBC и ODA — центроиды (точки пересечения медиан) — G_3 и G_4 . Доказать, что отрезки H_1H_2 и G_3G_4 перпендикулярны.

Решение. Пусть треугольники OAB и OCD ориентированы положительно (рис. 6). Тогда согласно решению задачи 1 имеем:

$$\begin{aligned}\vec{OH}_1 &= \operatorname{ctg} \varphi (i\vec{BA}), \quad \vec{OH}_2 = \operatorname{ctg} \varphi (i\vec{DC}), \\ \varphi &= \widehat{AOB} = \widehat{COD}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\vec{H_1H_2} = \operatorname{ctg} \varphi i(\vec{DC} - \vec{BA}).$$

С другой стороны,

$$\vec{OG}_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} (\vec{OB} + \vec{OC}),$$

поэтому

$$\vec{OG}_3 = \frac{1}{3} (\vec{OB} + \vec{OC}), \quad \vec{OG}_4 = \frac{1}{3} (\vec{OD} + \vec{OA}),$$

откуда

$$\vec{G_3G_4} = \frac{1}{3} (\vec{OD} + \vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC}).$$

Так как

$$\vec{OD} - \vec{OC} = \vec{CD}, \quad \vec{OA} - \vec{OB} = \vec{AB},$$

то

$$\vec{G_3G_4} = \frac{1}{3} (\vec{CD} - \vec{AB}).$$

Итак,

$$\vec{H_1H_2} = -3 \operatorname{ctg} \varphi (i\vec{G_3G_4}).$$

Из последнего равенства следует, что $[H_1H_2] \perp [G_3G_4]$. Задача решена.

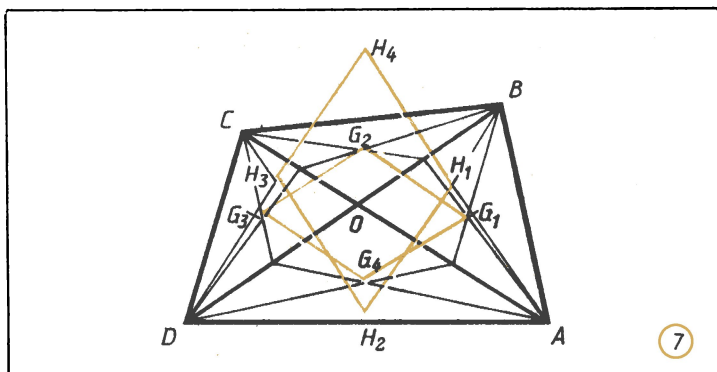
Однако выяснено больше, а именно:

$$|H_1H_2| = 3 |\operatorname{ctg} \varphi| |G_3G_4|,$$

т. е. одновременно вычислено и отношение этих отрезков:

$$|H_1H_2| : |G_3G_4| = 3 |\operatorname{ctg} \varphi|.$$

Эта задача предлагалась на Всероссийской математической олимпиаде школьников в 1972 г. и вызвала у участников олимпиады большие затруднения.



Задача 7. В четырехугольнике $ABCD$ проведены диагонали AC и BD , пересекающиеся в точке O . Для треугольников ABO , BCO , CDO , DAO построены центры G_1 , G_2 , G_3 , G_4 и ортоцентры H_1 , H_2 , H_3 , H_4 . Доказать, что $G_1G_2G_3G_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ — подобные параллелограммы, и найти коэффициент подобия ($|H_1H_2| : |G_1G_2| = k$).

Решение. Примем точку O за начало радиус-векторов (рис. 7). Тогда

$$\vec{G}_1 = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B}), \quad \vec{G}_2 = \frac{1}{3}(\vec{B} + \vec{C}), \quad \vec{G}_3 = \frac{1}{3}(\vec{C} + \vec{D}), \quad \vec{G}_4 = \frac{1}{3}(\vec{D} + \vec{A}).$$

Поскольку

$$\vec{G}_1 + \vec{G}_3 = \vec{G}_2 + \vec{G}_4 = \frac{1}{3}(\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}),$$

то $G_1G_2G_3G_4$ — параллелограмм.

Согласно решению задачи 4

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 &= \operatorname{ctg} \widehat{AOB} (i\vec{BA}), & \vec{H}_2 &= \operatorname{ctg} \widehat{BOC} (i\vec{CB}), \\ \vec{H}_3 &= \operatorname{ctg} \widehat{COD} (i\vec{DC}), & \vec{H}_4 &= \operatorname{ctg} \widehat{DOA} (i\vec{AD}), \end{aligned}$$

причем

$$\widehat{AOB} = \widehat{COD} = \varphi, \quad \widehat{BOC} = \widehat{DOA} = 180^\circ - \varphi.$$

Тогда

$$\vec{H}_1 + \vec{H}_3 = \operatorname{ctg} \varphi \cdot i(\vec{BA} + \vec{CD}) = \operatorname{ctg} \varphi \cdot i(\vec{A} - \vec{B} + \vec{C} - \vec{D}),$$

$$\vec{H}_2 + \vec{H}_4 = \operatorname{ctg} \varphi \cdot i(\vec{BC} + \vec{DA}) = \operatorname{ctg} \varphi \cdot i(\vec{C} - \vec{B} + \vec{A} - \vec{D}).$$

Итак, $\vec{H}_1 + \vec{H}_3 = \vec{H}_2 + \vec{H}_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ — параллелограмм.

Вычислим отношение $|H_1H_2| : |G_1G_2|$. Для этого найдем:

$$\vec{H}_1H_2 = \operatorname{ctg} \varphi \cdot i(\vec{BC} - \vec{BA}) = \operatorname{ctg} \varphi (i\vec{AC}), \quad (6)$$

$$\vec{G}_1G_2 = \vec{G}_2 - \vec{G}_1 = \frac{1}{3}(\vec{C} - \vec{A}) = \frac{1}{3}\vec{AC}. \quad (7)$$

Итак, $|H_1H_2| : |G_1G_2| = 3 |\operatorname{ctg} \varphi|$.

Аналогично убеждаемся, что отношения других сходственных сторон и диагоналей параллелограммов равны $3 |\operatorname{ctg} \varphi|$. Поэтому $k = 3 |\operatorname{ctg} \varphi|$.

Наконец, остается выяснить, будет ли подобие первого или второго рода. Из равенств (7) следует, что

$$\vec{H_1H_2} = 3 \operatorname{ctg} \varphi (i \vec{G_1G_2}).$$

Следовательно, стороны H_1H_2 и G_1G_2 рассматриваемых параллелограммов перпендикулярны. Легко убедиться, что

$$\vec{H_2H_3} = -3 \operatorname{ctg} \varphi (i \vec{G_2G_3}).$$

Значит, стороны $\vec{H_2H_3}$ и $\vec{G_2G_3}$ также перпендикулярны.

Если направление вектора $\vec{H_1H_2}$ получается из направления вектора $\vec{G_1G_2}$ поворотом на 90° в одном направлении, то направление вектора $\vec{H_2H_3}$ получается из направления вектора $\vec{G_2G_3}$ поворотом на 90° в противоположном направлении. Следовательно, параллелограммы ориентированы противоположно.

Интересно отметить, что диагонали одного параллелограмма перпендикулярны диагоналям другого, но эти диагонали не являются соответствующими. Поэтому, хотя стороны и диагонали одного параллелограмма перпендикулярны сторонам и диагоналям другого параллелограмма, нельзя поворотом на 90° привести один из параллелограммов в гомотетичное расположение относительно другого. Мы здесь имеем пример подобия второго рода²¹.

Задача 8. На плоскости даны произвольно четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 . Построены четыре другие точки P, Q, R, S , такие, что треугольники $A_1PA_2, A_2QA_3, A_3RA_4, A_4SA_1$ одинаково ориентированные, равнобедренные и прямоугольные с прямыми углами при вершинах P, Q, R и S . Доказать, что отрезки PR и QS конгруэнтны²² и перпендикулярны.

Решение 1. Из условия задачи следует (рис. 8), что

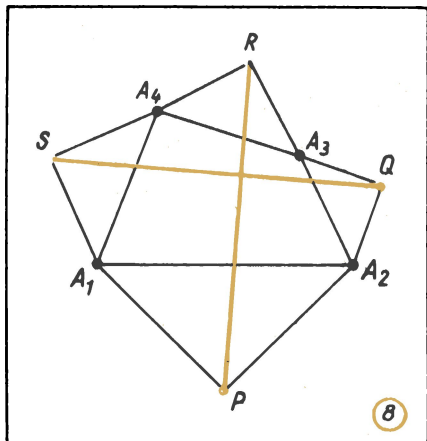
$$\begin{aligned} \vec{PA_2} &= i \vec{PA_1}, & \vec{QA_3} &= i \vec{QA_2}, \\ \vec{RA_4} &= i \vec{RA_3}, & \vec{SA_1} &= i \vec{SA_4}. \end{aligned} \quad (8)$$

Если O — начало радиус-векторов, то эти равенства можно записать так:

$$\begin{aligned} \vec{A_2} - \vec{P} &= i (\vec{A_1} - \vec{P}), & \vec{A_3} - \vec{Q} &= i (\vec{A_2} - \vec{Q}), \\ \vec{A_4} - \vec{R} &= i (\vec{A_3} - \vec{R}), & \vec{A_1} - \vec{S} &= i (\vec{A_4} - \vec{S}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} i \vec{P} - \vec{P} &= i \vec{A_1} - \vec{A_2}, & i \vec{Q} - \vec{Q} &= i \vec{A_2} - \vec{A_3}, \\ i \vec{R} - \vec{R} &= i \vec{A_3} - \vec{A_4}, & i \vec{S} - \vec{S} &= i \vec{A_4} - \vec{A_1}. \end{aligned}$$



Вычитая почленно из первого равенства третье, а из второго четвертое, получим:

$$\begin{aligned} i\vec{RP} - \vec{RP} &= i\vec{A_3A_1} - \vec{A_4A_2}, \\ i\vec{SQ} - \vec{SQ} &= i\vec{A_4A_2} - \vec{A_1A_3}. \end{aligned}$$

Повернем полученные равные векторы на 90° :

$$\begin{aligned} -\vec{RP} - i\vec{RP} &= -\vec{A_3A_1} - i\vec{A_4A_2}, \\ -\vec{SQ} - i\vec{SQ} &= -\vec{A_4A_2} - i\vec{A_1A_3}. \end{aligned}$$

Из последних двух пар равенств почленным сложением найдем:

$$\begin{aligned} 2\vec{RP} &= -\vec{A_2A_4} - \vec{A_1A_3} + i\vec{A_1A_3} + i\vec{A_4A_2}, \\ 2\vec{SQ} &= \vec{A_1A_3} + \vec{A_4A_2} + i\vec{A_1A_3} + i\vec{A_2A_4}. \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $2\vec{RP} = i(2\vec{SQ})$, или $\vec{RP} = i\vec{SQ}$. Следовательно, отрезки RP и SQ конгруэнтны и перпендикулярны.

Решение 2. Согласно правилу цепи сложения векторов имеем:

$$\begin{aligned} \vec{RP} &= \vec{RA_4} + \vec{A_4S} + \vec{SQ} + \vec{QA_2} + \vec{A_2P}, \\ i\vec{SQ} &= i(\vec{SA_1} + \vec{A_1P} + \vec{PR} + \vec{RA_3} + \vec{A_3Q}). \end{aligned}$$

Но из (8) находим:

$$\vec{SA_1} = i\vec{SA_4}, \quad \vec{A_1P} = i\vec{PA_2}, \quad \vec{RA_3} = i\vec{A_4R}, \quad \vec{A_3Q} = -i\vec{QA_2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} i\vec{SQ} &= i(i\vec{SA_4} + i\vec{PA_2} + \vec{PR} + i\vec{A_4R} - i\vec{QA_2}) = \vec{A_4S} + \vec{A_2P} + i\vec{PR} + \vec{RA_4} + \vec{QA_2} = \\ &= \vec{RP} - \vec{SQ} + i\vec{PR}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\vec{RP} - i\vec{SQ} = \vec{SQ} - i\vec{PR}.$$

Повернем полученные равные векторы на 90° :

$$i\vec{RP} + \vec{SQ} = i\vec{SQ} + \vec{PR}.$$

Из последних двух равенств вытекает, что $i\vec{SQ} = \vec{RP}$.

СОПРЯЖЕННОСТЬ ТОЧЕК ОТНОСИТЕЛЬНО ОКРУЖНОСТИ

Применение векторов при введении понятия сопряженности двух точек относительно окружности в сочетании с другими понятиями и теоремами усиливает эффективность векторного аппарата в ходе его применения при решении геометрических задач.

Определение. Точки A и B называют сопряженными относительно окружности $\omega(O; R)^{23}$, если выполняется равенство

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = R^2. \quad (1)$$

Из этого определения вытекает ряд следствий (рис. 1):

1) Точка сопряжена сама себе тогда и только тогда, когда она принадлежит окружности ω . В самом деле, если $\vec{OM} \cdot \vec{OM} = R^2$, то $M \in \omega$ и обратно.

2) Угол $\varphi = \widehat{AOB}$ либо острый, либо равен нулю.

3) Точка O не сопряжена ни с какой точкой, так как из уравнения $\vec{0} \cdot \vec{OB} = R^2$ вектор \vec{OB} найти нельзя: такой вектор не существует.

4) Если точка $A \neq O$ лежит внутри окружности, то точка B лежит вне окружности. Действительно,

$$|OA| \cdot |OB| \cos \varphi = R^2,$$

поэтому

$$|OB| = \frac{R^2}{|OA| \cos \varphi}.$$

и при $|OA| < R$ получаем $|OB| > R$.

Из формулы (1) следует также, что для фиксированной точки A , отличной от O , имеется бесконечное множество сопряженных с нею точек B относительно данной окружности ω . Чтобы в этом убедиться, найдем все точки X , для которых

$$\vec{OA} \cdot \vec{OX} = R^2. \quad (1')$$

Пусть $\vec{OX}_0 = k\vec{OA}$, и потребуем, чтобы точка X_0 была сопряжена с точкой A .

В таком случае имеем $\vec{OA} \cdot (k\vec{OA}) = R^2$, откуда находим $k = R^2 : |OA|^2$ и

$$\vec{OX}_0 = \frac{R^2}{|OA|^2} \vec{OA}. \quad (2)$$

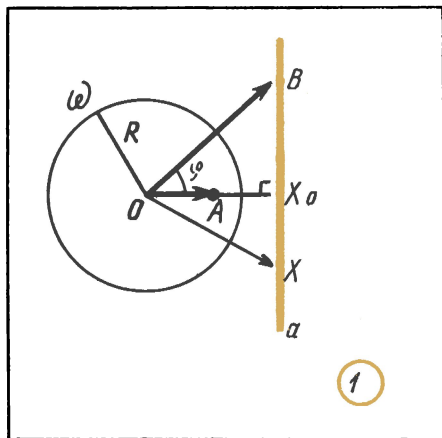
Итак, на прямой OA имеется только одна точка X_0 , сопряженная с точкой A . Поэтому можно записать:

$$\vec{OA} \cdot \vec{OX}_0 = R^2. \quad (3)$$

Из (1') и (3) следует равенство

$$\vec{OA} \cdot (\vec{OX} - \vec{OX}_0) = 0, \quad (4)$$

или $\vec{X_0X} \perp \vec{OA}$. Следовательно, каждая точка X , лежащая на прямой a ,



проходящей через точку X_0 перпендикулярно (OX_0), сопряжена с точкой A , причем только точки прямой a обладают этим свойством. Тем самым доказана следующая теорема:

Множество всех точек плоскости, сопряженных с данной точкой A относительно окружности ω ($O; R$) при $A \neq O$, есть прямая a , проходящая через точку X_0 , определяемую формулой (2), перпендикулярно прямой OA .

Прямую a называют *полярной* точки A относительно окружности ω .

Таким образом, для каждой точки $A \neq O$ плоскости имеется полярная a относительно ω , содержащая все точки B , сопряженные точке A . Обратно: для каждой прямой a , не проходящей через центр O окружности ω , имеется единственная точка A , такая, что она сопряжена любой точке B прямой a . Точку A называют *полюсом* прямой a относительно окружности. Чтобы по прямой a построить полюс A , необходимо найти проекцию X_0 центра O на прямую a , затем, пользуясь формулой (2), найти точку A . Поэтому построение полярной a точки A и полюса A прямой a сводится к построению по формуле (2) для точки A точки X_0 и для точки X_0 точки A (рис. 2, 3).

П о с т р о е н и е. Пусть дана точка $A \neq O$. Из (2) следует, что $|\vec{OX}_0| = \frac{R^2}{|\vec{OA}|^2} \cdot |\vec{OA}|$, или $|\vec{OX}_0| = \frac{R^2}{|\vec{OA}|}$. Таким образом, расстояние $|OX_0|$ есть четвертое пропорциональное для расстояний R , R и $|OA|$. Практически удобно найти точку X_0 по точке A так:

1) Пусть $|OA| < R$. Тогда проводим прямую OA , строим перпендикуляр l к OA в точке A , находим одну из его точек C пересечения с окружностью ω . Касательная к окружности в точке C пересекает (OA) в точке X_0 . В самом деле, из прямоугольного треугольника OCX_0 находим, что

$$R^2 = |OA| \cdot |OX_0| \text{ и } |OX_0| = \frac{R^2}{|OA|}.$$

2) Если $|OA| > R$, то проводим через точку A касательную AC к ω (C — точка касания) и находим проекцию точки C на прямую OA . Снова $R^2 = |OX_0| \cdot |OA|$ и точка X_0 искомая.

3) Если $|OA| = R$, то $X_0 = A$.

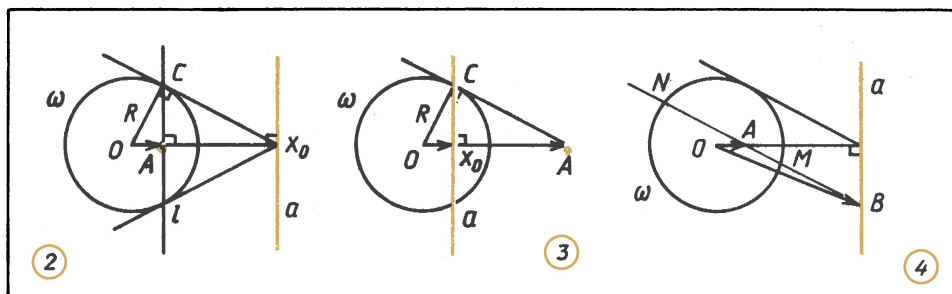
Полюсы и полярные относительно окружности ω обладают следующим замечательным свойством: если точка B лежит на полярной a точки A , то точка A лежит на полярной b точки B .

В самом деле, из того, что точка B лежит на полярной a точки A , следует, что точки A и B сопряжены относительно окружности ω , но тогда точка A лежит на полярной b точки B .

Из этого свойства полюсов и поляр следует: полярные всех точек, принадлежащих прямой m , проходят через полюс M этой прямой. Требуется лишь, чтобы $O \notin m$.

II

Понятию сопряженности двух точек относительно окружности ω ($O; R$) можно дать другое определение, которое равносильно приведенному выше и доказывается на его основе (рис. 4).



Если точки A и B сопряжены относительно ω , то

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = R^2, \quad A \neq O.$$

Найдем точки пересечения прямой AB с окружностью (если они существуют). Уравнение окружности ω можно записать в векторной форме так:

$$|\vec{OX}|^2 = R^2, \quad (5)$$

а уравнение прямой так:

$$\vec{OX} = \frac{\vec{OA} + \lambda \vec{OB}}{1 + \lambda}. \quad (6)$$

Чтобы найти точки пересечения прямой (6) и окружности (5) (при условии (1)), подставляем значение \vec{OX} из (6) в (5):

$$\left(\frac{\vec{OA} + \lambda \vec{OB}}{1 + \lambda} \right)^2 = R^2.$$

Отсюда

$$|\vec{OA}|^2 + 2\lambda \vec{OA} \cdot \vec{OB} + \lambda^2 |\vec{OB}|^2 = R^2 + 2\lambda R^2 + \lambda^2 R^2, \quad (7)$$

и после упрощений получаем уравнение

$$(|\vec{OB}|^2 - R^2) \lambda^2 = R^2 - |\vec{OA}|^2.$$

Поскольку $A \neq B$, то в общем случае $|\vec{OA}|^2 \neq |\vec{OB}|^2 \neq R^2$, а поэтому

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{R^2 - |\vec{OA}|^2}{|\vec{OB}|^2 - R^2}}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 0. \quad (7')$$

Если $|\vec{OA}| < R$, то $|\vec{OB}| > R$, прямая AB пересекает окружность ω , и поэтому оба значения λ действительны; если же $|\vec{OA}| > R$, то $|\vec{OB}|$ может быть больше, меньше или равно R и этот случай приходится опустить, так как λ может быть и мнимым числом.

Итак, при $|\vec{OA}| < R$ оба значения λ равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Это значит, что точки пересечения M и N пря-

мой AB с окружностью ω делят отрезок AB внутренним и внешним образом в равных отношениях. В этом случае говорят, что точки M и N делят отрезок AB гармонически²⁴.

Таким образом,

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MB}} = -\frac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{NB}}. \quad (8)$$

Из этой пропорции следует равносильная ей пропорция

$$\frac{\overrightarrow{NA}}{\overrightarrow{AM}} = -\frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{BM}}. \quad (9)$$

Из (9) заключаем, что точки A и B , в свою очередь, делят гармонически отрезок MN .

Теперь все подготовлено для того, чтобы дать определение сопряженности двух точек A и B относительно окружности.

О п р е д е л е н и е. Точки A и B сопряжены относительно окружности (при условии, что одна из этих точек лежит внутри окружности), если они делят гармонически хорду MN , высекаемую окружностью ω на прямой AB .

Покажем, что из этого определения следует определение сопряженности, основанное на формуле (1).

В самом деле, если выполняется (9), то выполняется (8), тогда оба значения λ равны по абсолютной величине и противоположны по знаку и при решении системы уравнений (5) и (6) получаем квадратное относительно λ уравнение, в котором $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. А это означает, что коэффициент при λ в уравнении (7) равен нулю, т. е. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = R^2$.

Из изложенного следует, что для получения поляры точки A ($|OA| < R$) относительно окружности ω ($O; R$) следует через A провести пучок прямых²⁵ и на каждой из образовавшихся хорд построить точку, делящую ее внешним образом в таком же отношении, как эти хорды делит их общая точка A . Множество всех таких точек есть прямая — поляр a точки A относительно ω .

Если точка A лежит вне ω , то получаем не все точки поляры, а только те, которые лежат внутри ω на прямой, проходящей через точки касания касательных, проведенных к ω из точки A .

Таким образом, определение, данное нами равенством (1), в некотором смысле предпочтительнее определения через гармонические пары точек (A, B) и (M, N) .

III

Предложенное выше построение поляры точки A относительно окружности опирается на метрические соотношения в прямоугольном треугольнике и предполагает применение циркуля и линейки. Между тем построение поляры для данной точки может быть выполнено одной линейкой. Чтобы это дока-

зять, потребуется убедиться в истинности следующего утверждения: *если диагонали вписанного в окружность ω четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке Q , а продолжения его противоположных сторон AB и CD — в точке P , то точки P и Q сопряжены относительно окружности ω* (рис. 5).

Доказательство. Построим на прямой AB точку P_1 , сопряженную с P относительно ω , а на прямой CD точку P_2 , сопряженную с P относительно ω . Очевидно, точки P_1 и P_2 принадлежат полюре p точки P . Убедимся в том, что $Q \in p$. Обозначим:

$$|PB| = m, |BP_1| = n, |P_1A| = q, |PC| = u, |CP_2| = v, |P_2D| = w. \quad (10)$$

Тогда в силу сопряженности по формуле (9) будем иметь:

$$\frac{m}{n} = \frac{m+n+q}{q}, \quad \frac{u}{v} = \frac{u+v+w}{w}. \quad (11)$$

Применим теорему Менелая дважды: к треугольнику PP_1P_2 и секущим AC и BD . Имеем:

$$\frac{|PA|}{|AP_1|} \cdot \lambda \cdot \frac{|PC|}{|CP_1|} = 1, \quad \frac{|PB|}{|BP_1|} \cdot \lambda_1 \cdot \frac{|PD|}{|DP_2|} = 1, \quad (12)$$

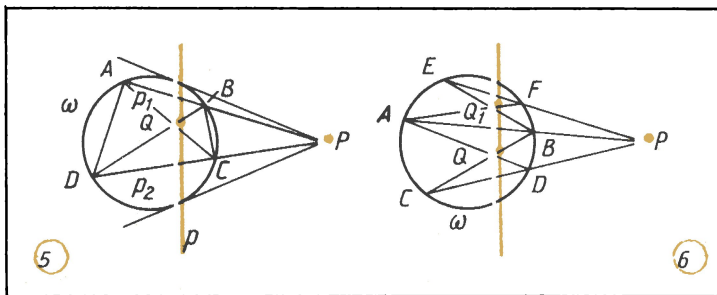
где λ и λ_1 — отношения, в которых прямые AC и BD делят отрезок P_1P_2 . Подставим в (12) значения длин отрезков из (10):

$$\frac{m+n+q}{q} \cdot \lambda \cdot \frac{u}{v} = 1, \quad \frac{m}{n} \cdot \lambda_1 \cdot \frac{u+v+w}{w} = 1.$$

Сопоставляя эти равенства с равенствами (1), убеждаемся, что $\lambda_1 = \lambda$. Это значит, прямые AC и BD пересекают (P_1P_2) в одной и той же точке, т. е. точка Q принадлежит прямой P_1P_2 , а потому точки P и Q сопряжены относительно ω , т. е. $\vec{OP} \cdot \vec{OQ} = R^2$.

Чтобы построить полюру точки P , проводим через нее две секущие PA и PC (рис. 6) и находим с помощью вписанного четырехугольника $ABDC$ точку Q .

Построив третью секущую PE , проходящую через P , находим аналогично еще одну точку Q_1 , сопряженную с P . Прямая QQ_1 — полюра точки P , построенная одной линейкой.



Построив для внешней точки линейкой полюру, находим две ее точки пересечения с ω . Соединяя их с полюсом, получим две касательные к ω . Для построения пары касательных требуется циркуль и линейка, а для построения посредством сопряженных точек достаточно линейки.

IV

Предлагаем для решения на основе изложенной теории ряд задач.

Задача 1. Доказать, что диаметрально противоположные точки одной окружности только тогда сопряжены относительно другой, когда окружности ортогональны.

Задача 2. Если квадрат расстояния между двумя точками равен сумме их степеней относительно окружности ω , то обе точки сопряжены относительно ω . Доказать.

Указание. Степень точки A относительно $\omega (O; R)$ равна $|OA|^2 - R^2$.

Задача 3. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC , точка H — его ортоцентр. Доказать, что $\vec{MC} \cdot \vec{MH} = \frac{1}{4} |AB|^2$.

Задача 4. Продолжения противоположных сторон четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность $\omega (O; R)$, пересекаются в точках M и N , а диагонали — в точке P . Доказать, что точка O — ортоцентр треугольника MNP .

Задача 5. Точки A и A_1 , B и B_1 — две пары сопряженных точек относительно окружности ω . Доказать, что точки $P = (AB) \cap (A_1B_1)$ и $Q = (AB_1) \cap (A_1B)$ также сопряжены относительно ω .

Задача 6. Даны три окружности, центры которых не принадлежат одной прямой. Найти множество точек, для каждой из которых три сопряженные ей точки относительно данных окружностей совпадают.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЕДИНИЧНОГО ВЕКТОРА ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Единичные векторы целесообразно применять при решении тех задач, в которых речь идет о доказательстве перпендикулярности прямых, равенства углов, о выявлении метрических угловых соотношений в фигурах.

Ниже помещены примеры таких задач с решениями (или краткими указаниями).

Задача 1. Даны четыре вектора \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} , \vec{OD} равной длины, сумма которых есть нуль-вектор. Доказать, что угол между любыми двумя векторами равен углу между двумя остальными.

Решение. По условию $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$, тогда $(\vec{OA} + \vec{OB}) = -(\vec{OC} + \vec{OD})$. Если векторы равны, то их скалярные квадраты также равны, т. е. $(\vec{OA} + \vec{OB})^2 = (\vec{OC} + \vec{OD})^2$. Отсюда следует:

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OC} \cdot \vec{OD}.$$

Поскольку рассматриваемые векторы единичной длины, то $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$ или $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.

Выясним, какое геометрическое истолкование имеет полученный результат. В ходе решения задачи мы не касались вопроса о том, компланарны или нет данные векторы. Поэтому результат остается верным как для случая компланарных, так и для некомпланарных векторов.

Если векторы \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC} , \vec{OD} некомпланарны, то точки A, B, C, D лежат на сфере с центром в точке O и радиусом $|\vec{OA}|$. Они являются вершинами тетраэдра, противоположные ребра которого попарно равны.

Если допустить, что точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, то получим, что $ABCD$ есть параллелограмм, диагонали которого равны, т. е. прямоугольник.

Задача 2. Три попарно непараллельные прямые параллельны плоскости α . Прямая p образует со всеми этими прямыми равные углы. Доказать, что прямая p перпендикулярна плоскости α .

Указание. Для решения задачи достаточно записать равенство косинусов углов между прямыми с помощью единичных векторов, коллинеарных данным прямым.

Применение векторов для изучения свойств трехгранного угла не только расширит кругозор читателя в данном вопросе, но и познакомит его с одним из приемов решения задач векторным методом. Очень часто при решении задач на трехгранный угол требуется вычислить какой-то из углов либо доказать какое-то соотношение, связывающее тригонометрические функции его углов. При векторном решении задачи углы между прямыми заменяем углами между векторами, которые коллинеарны данным прямым. Так как величины углов не зависят от длин векторов, углы между которыми рассматриваются, то использование единичных векторов в данном случае является наиболее простым и естественным.

Задача 3. Выразите косинус угла между биссектрисами двух плоских углов трехгранного угла через его плоские углы α, β, γ .

Решение. Дан трехгранный угол $OABC$. Пусть $\widehat{AOB} = \gamma$, $\widehat{BOC} = \alpha$, $\widehat{AOC} = \beta$. Отложим единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ на ребрах OA, OB, OC соответственно. Тогда векторы $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ и $\vec{u}_2 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$ коллинеарны биссектрисам углов AOB и BOC соответственно (рис. 1).

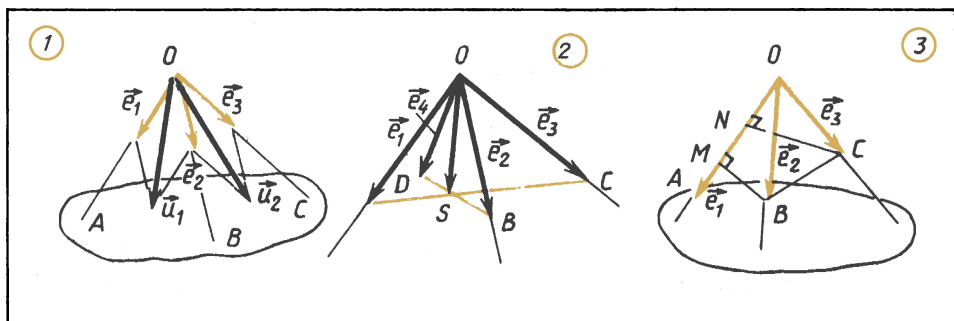
Обозначим через φ угол между векторами \vec{u}_1 и \vec{u}_2 . Тогда

$$\cos \varphi = \frac{1 + \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1}{|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| |\vec{e}_2 + \vec{e}_3|}.$$

Учитывая, что $|\vec{e}_1 + \vec{e}_2| = 2 \cos \frac{\gamma}{2}$, $|\vec{e}_2 + \vec{e}_3| = 2 \cos \frac{\alpha}{2}$,

окончательно получаем:

$$\cos \varphi = \frac{1 + \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{4 \cos \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}.$$



Традиционными методами решить эту задачу трудно. Векторное решение в данном случае предпочтительнее тем, что оно кратко, не требует громоздких выкладок и дополнительных построений. Кроме того, оно позволяет получить общую формулу для вычисления косинуса угла между биссектрисами двух плоских углов трехгранного угла.

Задача 4. Плоские углы четырехгранного угла конгруэнтны. Доказать, что плоскости диагональных сечений этого четырехгранного угла взаимно перпендикулярны.

Решение. Отложим на ребрах четырехгранного угла от его вершины O единичные векторы $\vec{OA} = \vec{e}_1$, $\vec{OB} = \vec{e}_2$, $\vec{OC} = \vec{e}_3$, $\vec{OD} = \vec{e}_4$ (рис. 2). Согласно условию задачи имеем:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_4 = \vec{e}_4 \cdot \vec{e}_1.$$

Выясним, как расположены прямые AC и BD , принадлежащие плоскостям диагональных сечений AOC и BOD соответственно. Для этого оценим скалярное произведение векторов \vec{AC} и \vec{BD} .

Имеем $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{e}_3 - \vec{e}_1) (\vec{e}_4 - \vec{e}_2) = 0$, следовательно, прямые AC и BD перпендикулярны. Аналогично рассуждая, нетрудно убедиться, что

$$\vec{AC} \cdot \vec{OS} = (\vec{e}_3 - \vec{e}_1) \cdot \frac{1}{2} (\vec{e}_2 + \vec{e}_4) = 0,$$

где S — середина отрезка BD . Отсюда следует, что прямые AC и OS перпендикулярны.

Итак, прямая AC перпендикулярна прямым BD и OS , а поэтому она перпендикулярна плоскости BOD . Но в таком случае плоскость AOC перпендикулярна плоскости BOD .

Рассмотрим задачи на доказательство метрических угловых соотношений, при решении которых также целесообразно использовать единичные векторы.

Задача 5. Дан трехгранный угол, плоские углы которого α , β , γ . Вычислить величины его двугранных углов.

Решение. Отложим на ребрах трехгранного угла от его вершины O единичные векторы $\vec{OA} = \vec{e}_1$, $\vec{OB} = \vec{e}_2$, $\vec{OC} = \vec{e}_3$. Обозначим согласно условию величины плоских углов AOB , BOC и AOC через γ , α и β соответственно.

Перпендикулярно прямой \overrightarrow{OA} проведем отрезки BM и CN (рис. 3). Тогда угол между векторами \overrightarrow{MB} и \overrightarrow{NC} равен величине двугранного угла, обозначим ее через φ_1 . Пользуясь правилом многоугольника, запишем:

$$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}.$$

Возведя обе части этого равенства в квадрат, получим:

$$\overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{NM}^2 + \overrightarrow{NC}^2 - 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{NC}$$

(поскольку $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$).

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \vec{e}_3 - \vec{e}_2, \quad \overrightarrow{BC}^2 = 2 - 2 \cos \alpha, \\ \overrightarrow{MB}^2 &= |\overrightarrow{MB}|^2 = |\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{OM}|^2 = 1 - \cos^2 \gamma, \\ \overrightarrow{NC}^2 &= |\overrightarrow{NC}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{ON}|^2 = 1 - \cos^2 \beta,\end{aligned}$$

приходим к равенству

$$2 - 2 \cos \alpha = 1 - \cos^2 \gamma + |\overrightarrow{MN}|^2 + 1 - \cos^2 \beta - 2 \sin \gamma \sin \beta \cos \varphi_1.$$

Но $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$, где \overrightarrow{ON} — составляющая вектора \overrightarrow{OC} по оси OA , \overrightarrow{OM} — составляющая вектора \overrightarrow{OB} по оси OA .

Тогда

$$\overrightarrow{MN}^2 = \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \beta \cos \gamma.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}2 - 2 \cos \alpha &= 2 - \cos^2 \gamma + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \beta - \\ &\quad - 2 \sin \gamma \sin \beta \cos \varphi_1.\end{aligned}$$

После упрощений получаем:

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos \varphi_1.$$

Отсюда находим косинус двугранного угла, лежащего против плоского угла BOC , величина которого равна α :

$$\cos \varphi_1 = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma},$$

Рассуждая аналогично, получим формулы для вычисления косинусов двугранных углов φ_2 и φ_3 , лежащих против плоских углов, величины которых равны β и γ соответственно:

$$\cos \varphi_2 = \frac{\cos \beta - \cos \alpha \cos \gamma}{\sin \alpha \sin \gamma}, \quad \cos \varphi_3 = \frac{\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

При решении этой задачи доказана важная теорема косинусов для трехгранного угла.

Часто при решении задач с помощью векторов необходимо знать коэф-

фициенты разложения вектора по трем некопланарным. Тогда если даны некопланарные векторы единичной длины, известны углы между ними и углы между искомым вектором и единичным, то нахождение коэффициентов разложения можно провести по следующему плану:

1. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ — единичные векторы, \vec{a} — данный вектор, тогда $\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$.

2. Умножив обе части разложения скалярно на $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, получим систему трех уравнений с неизвестными x, y, z .

3: Решение полученной системы есть значения коэффициентов разложения.

Приведенные рассуждения могут быть использованы при решении следующей задачи:

Задача 6. Через вершину S прямого трехгранного угла $SABC$ проведена полупрямая d . Доказать, что

$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1,$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — величины углов, которые полупрямая d образует с ребрами трехгранного угла.

Решение. Отложим на ребрах данного трехгранного угла от вершины S единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Пусть \vec{e}_4 — единичный вектор полупрямой d . Тогда

$$\vec{e}_4 = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3. \quad (1)$$

По указанному выше плану находим значения x, y, z и подставляем их в формулу (1). Тогда разложение примет вид:

$$\vec{e}_4 = \cos \varphi_1 \vec{e}_1 + \cos \varphi_2 \vec{e}_2 + \cos \varphi_3 \vec{e}_3.$$

Возведя в квадрат обе части последнего равенства, получим требуемое соотношение

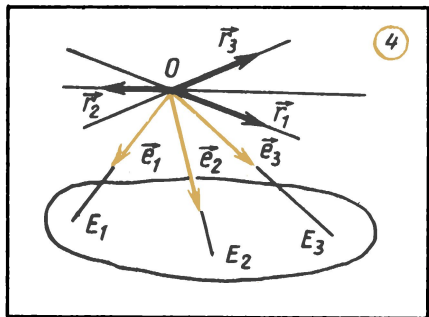
$$\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_3 = 1.$$

В ряде случаев векторное решение геометрических задач на доказательство параллельности прямых некоторой плоскости приводит к необходимости выяснить, компланарны ли рассматриваемые векторы. Прежде чем приступить к решению таких задач, желательно обсудить, как выражают на языке векторов такие геометрические факты:

а) прямые a, b, c параллельны некоторой плоскости;

б) прямые a, b, c , имеющие общую точку, лежат в одной плоскости.

Задача 7. Через вершину трехгранного угла $OE_1E_2E_3$ в плоскости каждой его грани проведена прямая, перпендикулярная противоположному ребру. Доказать, что построенные таким образом прямые лежат в одной



плоскости. (Предполагается, что ни одно ребро не перпендикулярно противоположащей грани.)

Решение. Отложим на ребрах трехгранного угла от его вершины единичные векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ (рис. 4). Обозначим величины углов E_1OE_2, E_2OE_3 и E_1OE_3 через α, β, γ соответственно.

Чтобы ответить на вопрос задачи, достаточно показать, что векторы, коллинеарные построенным прямым, компланарны.

Пусть \vec{r}_3 — вектор, коллинеарный прямой, проведенной в плоскости грани E_1OE_2 , перпендикулярен \vec{e}_3 , т. е. $\vec{r}_3 \cdot \vec{e}_3 = 0$.

Так как \vec{r}_3 компланарен с \vec{e}_1 и \vec{e}_2 , то $\vec{r}_3 = p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2$, тогда равенство $\vec{r}_3 \cdot \vec{e}_3 = 0$ запишем в следующем виде:

$$(p\vec{e}_1 + q\vec{e}_2) \cdot \vec{e}_3 = 0$$

или

$$p \cos \gamma + q \cos \beta = 0.$$

Отсюда

$$p : q = -(\cos \beta : \cos \gamma).$$

Поскольку длина вектора \vec{r}_3 нас не интересует, можно взять $p = \cos \beta$, $q = -\cos \gamma$.

Следовательно,

$$\vec{r}_3 = \cos \beta \vec{e}_1 - \cos \gamma \vec{e}_2.$$

Пусть вектор \vec{r}_2 коллинеарен прямой, проведенной в плоскости E_1OE_3 , вектор \vec{r}_1 коллинеарен прямой, проведенной в плоскости E_2OE_3 . Рассуждая аналогично предыдущему, получим:

$$\vec{r}_2 = \cos \alpha \vec{e}_3 - \cos \beta \vec{e}_1, \quad \vec{r}_1 = \cos \gamma \vec{e}_2 - \cos \alpha \vec{e}_3.$$

Очевидно, что сумма векторов $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ есть нуль-вектор, откуда следует, что векторы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ компланарны, т. е. прямые, о которых говорится в условии задачи, лежат в одной плоскости.

КООРДИНАТНЫЕ ФОРМУЛЫ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ ПЛОСКОСТИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Покажем, что координатные формулы перемещений плоскости могут быть получены на основе формулы расстояний между двумя точками. Ведь перемещения плоскости определяются как геометрические преобразования, сохраняющие расстояния, поэтому формулы всех видов перемещений могут быть выведены посредством основной формулы метрической координатной геометрии — формулы расстояния между двумя точками.

I

Начнем с частного примера, позволяющего понять решение поставленной задачи в общем виде. Решим этот пример различными способами и сопоставим эти решения.

Пример. Дана прямая l : $2x - y + 1 = 0$.

Вычислить координаты точки $B(m; n)$, симметричной точке $A(3; -1)$ при симметрии S_l .

Решение. Способ 1. Пусть точка M на оси l имеет координаты $(x; y)$ (рис. 1). Из свойств симметрии следует, что $|AM| = |BM|$, или $|AM|^2 = |BM|^2$. Последнее равенство в координатной форме можно записать так:

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = (x-m)^2 + (y-n)^2.$$

После выполнения тождественных преобразований получим:

$$2(m-3)x + 2(n+1)y - (m^2 + n^2 - 10) = 0. \quad (1)$$

Мы получили уравнение оси симметрии l , которое по условию задачи имеет уравнение $2x - y + 1 = 0$. Но если два уравнения задают одну и ту же прямую, то коэффициенты при неизвестных и свободный член одного уравнения пропорциональны соответствующим коэффициентам и свободному члену второго уравнения. Поэтому

$$m-3 = -2(n+1) = 10 - m^2 - n^2. \quad (2)$$

Из полученной системы найдем m и n . Из уравнения $m-3 = -2(n+1)$ выразим m через n :

$$m = -2n + 1. \quad (3)$$

Это значение m подставим во второе уравнение $m^2 + n^2 - 2n - 12 = 0$ системы (2):

$$\begin{aligned} (-2n+1)^2 + n^2 - 2n - 12 &= 0, \\ 5n^2 - 6n - 11 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим два значения для n :

$$n_1 = -1, \quad n_2 = \frac{11}{5}.$$

Из уравнения (3) находим $m_1 = 3, m_2 = -\frac{17}{5}$.

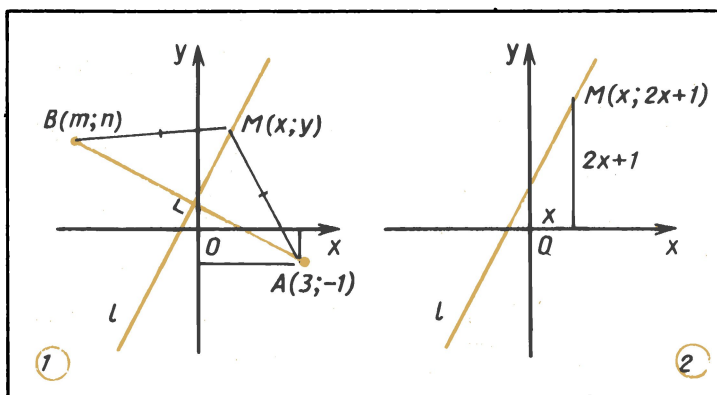
Найдены две точки: $(3; -1)$ и $(-\frac{17}{5}; \frac{11}{5})$. Первая из них совпадает с точкой A и, поскольку $A \notin l$, должна быть исключена. Остается, что искомая точка B имеет координаты $(-\frac{17}{5}; \frac{11}{5})$.

Способ 2. Точка $M \in l$ имеет координаты $(x; 2x+1)$ (рис. 2). Поэтому при любом x должно иметь место равенство

$$(x-3)^2 + ((2x+1)+1)^2 = (x-m)^2 + ((2x+1)-n)^2.$$

Полученное уравнение относительно x приведем к виду

$$2(m+2n-1)x + 12 - m^2 - n^2 + 2n = 0. \quad (4)$$



Поскольку уравнение (4) удовлетворяется при любом значении x , то коэффициенты уравнения равны нулю:

$$m + 2n - 1 = 0, \quad m^2 + n^2 - 2n - 12 = 0. \quad (5)$$

Как легко заметить, система (5) совпадает с системой (2) и ее решение проведено выше.

Способ 3. Найдем координаты точек пересечения P и Q прямой l с осями координат (рис. 3): $P(0; 1)$, $Q(-\frac{1}{2}; 0)$. Но $|PA|^2 = |PB|^2$, $|QA|^2 = |QB|^2$, поэтому

$$9 + 4 = m^2 + (n - 1)^2, \quad \frac{49}{4} + 1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + n^2.$$

Получили систему двух квадратных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} m^2 + n^2 - 2n - 12 = 0, \\ m^2 + n^2 + m - 13 = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Эту систему заменим равносильной, оставив первое уравнение без изменений, а в качестве второго уравнения возьмем разность уравнений системы (6):

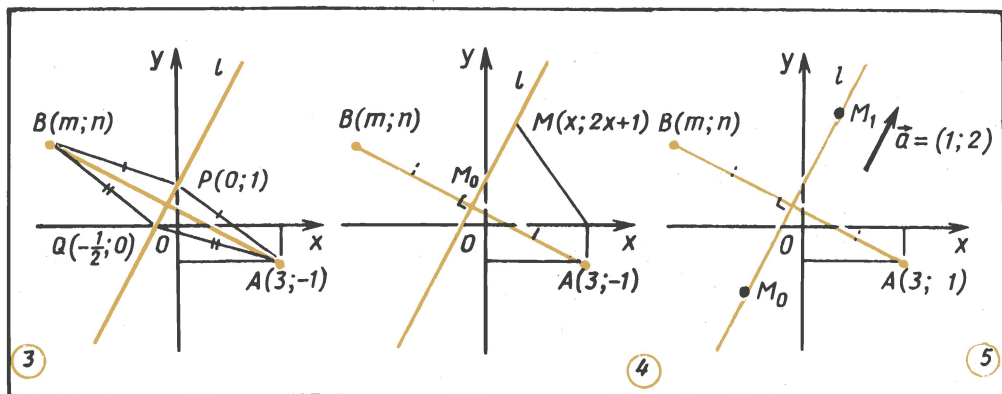
$$\begin{cases} m + 2n - 1 = 0, \\ m^2 + n^2 - 2n - 12 = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Мы снова получим систему, совпадающую с системой (2).

Все три рассмотренных способа решения задачи требуют лишь знания формулы расстояния между двумя точками. Все остальные сведения, требующиеся для ее решения, — уравнение прямой, построение прямой по ее уравнению, решение системы уравнений — известны вам из школьного курса алгебры.

Способ 4. Можно предложить еще один способ решения, основанный на применении производной. Квадрат расстояния от точки $A(3; -1)$ до точки $M(x; 2x+1)$ прямой l (рис. 4) есть функция от x :

$$(f(x) = (x - 3)^2 + ((2x + 1) + 1)^2) \Rightarrow (f(x) = 5x^2 + 2x + 13).$$



Эта функция достигает минимума при значениях x , удовлетворяющих уравнению $f'(x) = 10x + 2 = 0$. Из этого уравнения находим $x = -\frac{1}{5}$, и точка M_0 — основание перпендикуляра, проведенного через точку A к прямой l , — имеет координаты $\left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

Но M_0 — середина отрезка AB , поэтому $\frac{m+3}{2} = -\frac{1}{5}$, $\frac{n-1}{2} = \frac{3}{5}$.

Отсюда $m = -\frac{17}{5}$, $n = \frac{11}{5}$.

В этом способе нет необходимости решать систему двух уравнений с двумя неизвестными. Вместо этого применяется производная. Можно, конечно, найти наименьшее значение $f(x)$ без применения производной, поскольку $f(x)$ есть квадратный трехчлен, который может быть представлен в виде

$$f(x) = \frac{1}{5}(5x+1)^2 + \frac{64}{5}.$$

$f(x)$ принимает наименьшее значение при тех значениях x , для которых $5x+1=0$, т. е. при $x = -\frac{1}{5}$.

Способ 5. Однако решение поставленной задачи можно искать на другом пути, не привлекая ни формулы расстояния между двумя точками, ни производной. Этот путь основан на важнейшем свойстве симметричных относительно оси точек: две точки A и B симметричны относительно оси l , если отрезок AB перпендикулярен l и середина M отрезка AB принадлежит прямой l . Приведем полное решение.

Точка M_0 (рис. 5) имеет координаты $\left(\frac{m+3}{2}; \frac{n-1}{2}\right)$. Эта точка принадлежит оси l , поэтому $2\frac{m+3}{2} - \frac{n-1}{2} + 1 = 0$, или

$$2m - n + 9 = 0. \quad (8)$$

Далее, вектор \vec{AB} имеет координаты $(m-3; n+1)$, а вектор \vec{a} , параллельный прямой l , имеет координаты $(1; 2)$.

В самом деле, чтобы вычислить координаты вектора \vec{a} , находим координаты двух произвольных точек M_1 и M_2 прямой l , придав координатам $(x; 2x+1)$ точки $M \in l$ частные значения, положив $x=x_1$ и $x=x_2$. Получим:

$$M_1(x_1; 2x_1+1), M_2(x_2; 2x_2+1).$$

Отсюда

$$\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1; 2(x_2 - x_1)).$$

Поскольку $x_2 - x_1 \neq 0$, можно за координаты вектора \vec{a} принять координаты вектора $\vec{M_1M_2}$, деленные на $x_2 - x_1$, поэтому $\vec{a} = (1; 2)$. Но векторы \vec{AB} и \vec{a} перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю:

$$\vec{AB} \cdot \vec{a} = (m-3) \cdot 1 + (n+1) \cdot 2 = 0.$$

Полученное уравнение можно записать так:

$$m + 2n - 1 = 0. \quad (9)$$

Вместе с уравнением (8) уравнение (9) составляет систему двух линейных уравнений, из которых находим $m = -\frac{17}{5}$, $n = \frac{11}{5}$.

II

Представляется интересным привести полное решение поставленной задачи в общем виде.

З а д а ч а. Дана ось симметрии l своим общим уравнением $Px + Qy + R = 0$ и точка $A(p, q)$. Вычислить координаты точки $B(p_1, q_1)$, симметричной точке A при отображении S_l .

Произвольная точка M прямой l при $Q \neq 0$ имеет координаты $(x; -\frac{Px+R}{Q})$. Для точек A, B, M выполняется равенство $|AM|^2 = |BM|^2$, которое запишем в координатной форме:

$$(x-p)^2 + \left(-\frac{Px+R}{Q} - q\right)^2 = (x-p_1)^2 + \left(-\frac{Px+R}{Q} - q_1\right)^2 \quad (10)$$

Поскольку это равенство выполняется для любого значения x , то оно представляет собой тождественное равенство относительно x . После несложных преобразований это равенство принимает вид:

$$-2px + p^2 + \frac{2q(Px+R)}{Q} + q^2 = -2p_1x + p_1^2 + \frac{2q_1(Px+R)}{Q} + q_1^2,$$

$$\text{или} \quad 2\left(-p + \frac{qP}{Q} + p_1 - \frac{q_1P}{Q}\right)x = -p^2 - q^2 - \frac{2qR}{Q} + p_1^2 + q_1^2 + \frac{2q_1R}{Q}.$$

Ввиду того что полученное равенство удовлетворяется для любого значения x , коэффициент при x и свободный член должны быть равны нулю. Итак, получаем систему уравнений с неизвестными p_1 и q_1 :

$$\begin{cases} -p + \frac{qP}{Q} + p_1 - \frac{Pq_1}{Q} = 0, \\ -p^2 - q^2 - \frac{2Rq}{Q} + p_1^2 + q_1^2 + \frac{2Rq_1}{Q} = 0. \end{cases}$$

Перепишем эту систему так:

$$\begin{cases} p_1 - \frac{P}{Q}q_1 = p - \frac{P}{Q}q, \\ p_1^2 + q_1^2 + \frac{2R}{Q}q_1 = q^2 + p^2 + \frac{2R}{Q}q. \end{cases}$$

Одно решение этой системы усматривается непосредственно:

$$p_1 = p, \quad q_1 = q.$$

Для второго решения имеем:

$$p_1 \neq p, \quad q_1 \neq q,$$

поэтому, переписав второе уравнение в виде

$$p_1^2 - p^2 + q_1^2 - q^2 + \frac{2R}{Q}(q_1 - q) = 0$$

и учитывая из первого уравнения, что

$$p_1 - p = \frac{P}{Q}(q_1 - q),$$

можем второе уравнение системы записать так:

$$(p_1 + p) \frac{P}{Q}(q_1 - q) + (q_1 + q)(q_1 - q) + \frac{2R}{Q}(q_1 - q) = 0.$$

После деления на $q_1 - q$ получим линейное уравнение

$$\frac{P}{Q}(p_1 + p) + q_1 + q + \frac{2R}{Q} = 0.$$

Таким образом, окончательно получаем систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} p_1 - \frac{P}{Q}q_1 = p - \frac{P}{Q}q, \\ \frac{P}{Q}p_1 + q_1 = -\frac{2R}{Q} - \frac{P}{Q}p - q. \end{cases}$$

Решение этой системы такое (подобные выкладки опускаем):

$$\begin{cases} p_1 = p - \frac{2P}{P^2 + Q^2} (Pp + Qq + R), \\ q_1 = q - \frac{2Q}{P^2 + Q^2} (Pp + Qq + R). \end{cases} \quad (11)$$

Уравнения системы (11) являются, по существу, формулами преобразования осевой симметрии S_l . Нетрудно проверить, что если в уравнениях (11) p и q выразить через p_1 и q_1 , то получим такие же формулы с той лишь разницей, что p_1 и q_1 заменяются на p и q , а p и q — на p_1 и q_1 .

Если $Q=0$, то $P \neq 0$ и мы снова приходим к тем же формулам (11).

Числовой пример, который мы решали выше, посредством (11) решается автоматически путем следующих подстановок.

$$P=2, Q=-1, R=1, p=3, q=1, p_1=m, q_1=n.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} m &= 3 - \frac{4}{5}(6+1+1) \Rightarrow m = -\frac{17}{5}, \\ n &= -1 + \frac{2}{5}(6+1+1) \Rightarrow n = \frac{11}{5}. \end{aligned}$$

III

Уравнения (11) позволяют решить две важные задачи:

а) вычислить координаты $(p_0; q_0)$ проекции M_0 точки $A(p, q)$ на прямую l :

$$Px + Qy + R = 0;$$

б) вычислить расстояние d от точки $A(p, q)$ до прямой l .

Из уравнений (11) без труда следует, что

$$\begin{cases} p_0 = \frac{p_1 + p}{2} = p - \frac{P}{P^2 + Q^2} (Pp + Qq + R), \\ q_0 = \frac{q_1 + q}{2} = q - \frac{Q}{P^2 + Q^2} (Pp + Qq + R). \end{cases} \quad (12)$$

Из этих же уравнений следует, что

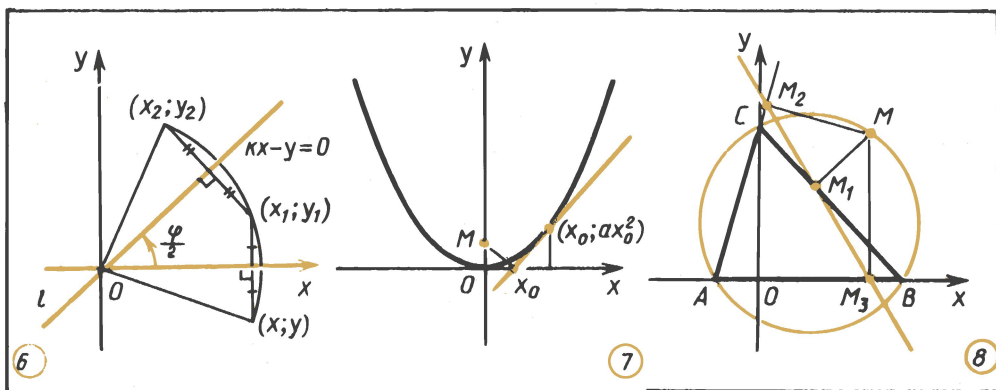
$$|AB|^2 = (p_1 - p)^2 + (q_1 - q)^2 = \frac{4(P^2 + Q^2)}{(P^2 + Q^2)^2} (Pp + Qq + R)^2$$

Отсюда

$$d^2 = |AM_0|^2 = \frac{1}{4} |AB|^2 = \frac{(Pp + Qq + R)^2}{P^2 + Q^2}$$

и окончательно:

$$d = \frac{|Pp + Qq + R|}{\sqrt{P^2 + Q^2}}.$$



а) Применим формулы (11) для вывода формул поворота плоскости вокруг начала координат на угол φ . Этот поворот можно представить как композицию двух осевых симметрий S_x и S_l^6 , где l имеет уравнение $kx - y = 0$, $k = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ (рис. 6).

Имеем:

$$S_x: x_1 = x, y_1 = -y,$$

$$S_l: x_2 = x_1 - \frac{2k}{1+k^2}(kx_1 - y_1), y_2 = y_1 + \frac{2}{1+k^2}(kx_1 - y_1).$$

Формулы поворота $R_\varphi^0 = S_l \circ S_x$ получают вид:

$$x_2 = x - \frac{2k}{1+k^2}(kx + y), y_2 = -y + \frac{2}{1+k^2}(kx + y).$$

Отсюда

$$x_2 = \frac{1-k^2}{1+k^2}x - \frac{2k}{1+k^2}y, y_2 = \frac{2k}{1+k^2}x + \frac{1-k^2}{1+k^2}y.$$

Но

$$\frac{1-k^2}{1+k^2} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \cos \varphi, \quad \frac{2k}{1+k^2} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} = \sin \varphi.$$

Поэтому получаем:

$$\begin{cases} x_2 = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \\ y_2 = x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{cases} \quad (13)$$

б) Применим формулы (12) для доказательства одного замечательного свойства параболы.

З а д а ч а. Доказать, что множество проекций точки $M(0; \frac{1}{4a})$ на касательную к параболы $y = ax^2$ есть прямая. Построить точку M для параболы, заданной своим изображением.

Решение. Касательная к параболе в точке (x_0, ax_0^2) (рис. 7) имеет, как легко доказать, уравнение

$$y - ax_0^2 = 2ax_0(x - x_0), \quad (14)$$

или

$$2ax_0x - y - ax_0^2 = 0. \quad (15)$$

Согласно формулам (12) координаты p_0, q_0 проекции точки $M(0; \frac{1}{4a})$ на касательную (15) таковы:

$$p_0 = -\frac{-2ax_0}{1+4a^2x_0^2} \left(-\frac{1}{4a} - ax_0^2 \right),$$

$$q_0 = \frac{1}{4a} + \frac{1}{1+4a^2x_0^2} \left(-\frac{1}{4a} - ax_0^2 \right).$$

Отсюда получаем:

$$p_0 = \frac{x_0}{2}, \quad q_0 = 0.$$

Итак, множество проекций точки $M(0; \frac{1}{4a})$ на касательные к параболе $y = ax^2$ есть ось x , т. е. касательная к параболе в ее вершине.

Точка $(\frac{x_0}{2}; 0)$ является точкой пересечения касательной (15) с осью x .

Чтобы построить точку M , поступаем так: берем на параболе произвольную точку T , находим ее проекцию T_1 на касательной в вершине O параболы, строим середину M_0 отрезка OT_1 и проводим через M_0 прямую, перпендикулярную прямой M_0T . Эта прямая пересекает ось симметрии параболы в искомой точке M . Как видно из построения, положение точки M не зависит от выбора системы координат; с каждой параболой связана единственным образом такая точка, она называется *фокусом параболы*.

Частое применение при решении разнообразных геометрических задач имеет одно свойство описанной около треугольника окружности. Рассмотрим это свойство.

Задача. Дан треугольник ABC . Найти множество точек плоскости треугольника, для каждой из которых проекции на прямые BC, CA , и AB принадлежат одной прямой.

Решение. Для решения задачи воспользуемся формулами (12). Выберем систему координат так (рис. 8), чтобы в ней вершины треугольника имели следующие координаты:

$$A(m; 0), B(n; 0), C(0; 1), m \neq n.$$

Предложенный выбор пригоден для любого треугольника. Прямые BC, CA и AB имеют следующие уравнения:

$$(BC): x + ny - n = 0,$$

$$(CA): x + my - m = 0,$$

$$(AB): y = 0.$$

Если $M(p; q)$ — точка искомого множества и $M_1(p_1; q_1)$, $M_2(p_2; q_2)$, $M_3(p_3; q_3)$ — ее проекции на прямые BC , CA , AB , то согласно (12) имеем:

$$\begin{aligned} p_1 &= p - \frac{1}{1+n^2} (p+nq-n), & q_1 &= q - \frac{n}{1+n^2} (p+nq-n); \\ p_2 &= p - \frac{1}{1+m^2} (p+mq-m), & q_2 &= q - \frac{m}{1+m^2} (p+mq-m); \\ p_3 &= p, & q_3 &= 0. \end{aligned}$$

Чтобы точки M_1 , M_2 , M_3 принадлежали одной прямой, необходимо потребовать коллинеарность векторов $\overrightarrow{M_3M_1}$ и $\overrightarrow{M_3M_2}$. В координатной форме это требование равносильно пропорциональности одноименных координат этих векторов:

$$\frac{q_2 - q_3}{p_2 - p_3} = \frac{q_1 - q_3}{p_1 - p_3}.$$

После подстановки соответствующих значений и упрощений получим:

$$\frac{q(1+m^2)}{p+mq-m} - m = \frac{q(1+n^2)}{p+nq-n} - n,$$

или

$$q \left(\frac{1+m^2}{p+mq-m} - \frac{1+n^2}{p+nq-n} \right) = m - n.$$

Отсюда

$$\frac{q(m-n)(-q+1+(m+n)p+mnq-mn)}{(p+mq-m)(p+nq-n)} = m - n.$$

Но $m \neq n$, поэтому

$$q((m+n)p + (mn-1)q - mn + 1) = (p+mq-m)(p+nq-n).$$

После несложных преобразований получаем:

$$p^2 + q^2 - (m+n)p - (mn+1)q + mn = 0,$$

или

$$p - \left(\frac{m+n}{2} \right)^2 + \left(q - \frac{mn+1}{4} \right)^2 = \frac{(m^2+1)(n^2+1)}{4}.$$

Искомое множество точек есть окружность, проходящая через вершины A , B , C .

IV

Предлагаем читателю доказать, что формулы преобразования симметрии S_α относительно плоскости $Px + Qy + Rz + T = 0$ в пространстве имеют вид:

$$x_1 = x - \frac{2P}{P^2 + Q^2 + R^2} (Px + Qy + Rz + T),$$

$$y_1 = y - \frac{2Q}{P^2 + Q^2 + R^2} (Px + Qy + Rz + T),$$

$$z_1 = z - \frac{2R}{P^2 + Q^2 + R^2} (Px + Qy + Rz + T).$$

В векторной форме эти формулы можно записать коротко так:

$$\vec{OM}_1 = \vec{OM} - \frac{2(\vec{N} \cdot \vec{OM} + \vec{T})}{\vec{N}^2} \vec{OM}, \text{ где } M_1 = S_\alpha(M),$$

O — произвольная точка пространства, $\vec{N} \neq \vec{0}$.

ПРИМЕНЕНИЕ ДВИЖЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

1. Движения плоскости

Приведем некоторые основные свойства движений евклидовой плоскости и связи между ними.

Известно, что к движениям относятся следующие геометрические преобразования: параллельный перенос, поворот, осевая симметрия и скользящая симметрия.

Параллельный перенос вполне задан, если известен вектор параллельного переноса. Параллельный перенос не имеет инвариантных²⁷ точек; инвариантными прямыми его служат все прямые, параллельные направлению переноса.

Поворот определен, если задан центр O поворота и ориентированный угол α поворота. Поворот имеет единственную инвариантную точку — центр поворота, за исключением того случая, когда α кратно 360° ; неподвижных прямых преобразование поворота не имеет, за исключением тех случаев, когда угол поворота кратен 180° (т. е. случаев, когда поворот является тождественным преобразованием²⁸ или центральной симметрией). В случае, когда имеет место центральная симметрия, инвариантными прямыми будут только те, которые проходят через центр симметрии. Параллельный перенос и поворот преобразуют всякую фигуру плоскости в фигуру, равную и одинаково ориентированную с данной фигурой.

Композиция любого числа параллельных переносов и поворотов равносильна либо одному параллельному переносу, либо одному повороту (в частности, тождественному преобразованию).

Осевая симметрия определяется заданием оси симметрии. Инвариантными точками осевой симметрии являются все точки оси симметрии, инвариантными же прямыми — ось симметрии и все прямые, перпендикулярные ей.

Скользящая симметрия определена, если даны ее ось и вектор, парал-

лельной оси симметрии. Единственной инвариантной прямой скользящей симметрии является ее ось; инвариантных точек скользящая симметрия не имеет.

Любую фигуру плоскости осевая симметрия и скользящая симметрия преобразуют в фигуру, равную данной, но имеющую с ней противоположную ориентацию.

Далее сформулируем две важнейшие теоремы в геометрии движений:

Теорема 1. Две равные фигуры, имеющие одинаковую ориентацию, могут быть переведены друг в друга либо с помощью одного параллельного переноса, либо с помощью одного поворота около надлежащим образом выбранной точки, если указаны две пары соответственных точек.

Теорема 2. Две равные фигуры, имеющие противоположную ориентацию, можно перевести друг в друга с помощью одного параллельного переноса или одного поворота после предварительного отражения одной из равных фигур относительно некоторой прямой и указания двух пар соответственных точек.

Иногда теорему 2 формулируют по-другому:

Теорема 2'. Две равные фигуры плоскости, имеющие противоположную ориентацию, могут быть совмещены при помощи скользящей симметрии или при помощи симметрии относительно прямой.

Заметим, что теоремы 1 и 2 можно принять за конструктивное определение всех движений плоскости. Другая формулировка теоремы 2 становится понятной, если принять во внимание то обстоятельство, что к осевой симметрии сводятся и параллельный перенос, и поворот, и скользящая симметрия.

Действительно, любой параллельный перенос можно заменить двумя последовательными отражениями от двух прямых, перпендикулярных к направлению параллельного переноса, расстояние между которыми вдвое меньше длины вектора переноса, причем одну из этих прямых можно выбрать произвольно.

Всякий же поворот может быть представлен в виде композиции двух отражений от прямых, проходящих через центр поворота и образующих между собой угол, равный половине угла поворота, причем одну из этих прямых можно выбрать произвольно. Справедливы также и обратные предложения. Отсюда следует, что композиция любого четного числа отражений от прямых представляет собой также отражение от двух прямых, параллельных или пересекающихся, т. е. представляет собой либо параллельный перенос, либо поворот.

Скользящая симметрия может быть представлена в виде композиции отражений от трех прямых, из которых одна есть ось скользящей симметрии, а две другие прямые перпендикулярны оси. Расстояние между последними прямыми в два раза меньше длины вектора, параллельного оси, причем одну из этих прямых можно выбрать произвольно.

Композиция отражений относительно трех параллельных прямых или относительно трех прямых, пересекающихся в одной точке, есть отражение от прямой, а произведение отражений относительно трех прямых, пересекающихся попарно в трех точках, или таких, что две из них параллельны, а третья их пересекает, есть скользящая симметрия.

Вообще композиция нечетного числа отражений относительно прямых есть отражение относительно прямой или скользящая симметрия.

Далее основное внимание мы уделим композициям двух и трех поворотов, имеющим многочисленные приложения к решению задач методом геометрических преобразований.

2. Композиции двух и трех поворотов

Теорема. *Композиция двух поворотов ориентированной плоскости на ориентированные углы α и β соответственно около точек A и B есть поворот около точки C на угол $\alpha + \beta$, если $\alpha + \beta \neq 0$, или же параллельный перенос, если $\alpha + \beta = 0$ и $A \neq B$. Если $\alpha + \beta < 2\pi$, то треугольник ABC ориентирован отрицательно, а если $\alpha + \beta > 2\pi$, то треугольник ABC ориентирован положительно.*

Доказательство. Заметим, что при доказательстве теорем ориентированные углы α и β можно считать всегда положительными, причем $0 \leq \alpha < 2\pi$, $0 \leq \beta < 2\pi$. Поэтому мы и пишем, что угол поворота равен α .

Поворот ω_1 около точки A на угол α в положительном направлении есть композиция двух симметрий относительно прямых v и u , проходящих через точку A и образующих между собой положительный угол $\frac{\alpha}{2}$; а поворот ω_2 около точки B на угол β в положительном направлении есть композиция двух отражений от прямых u и w , проходящих через точку B и образующих между собой положительный угол $\frac{\beta}{2}$.

Таким образом, композиция двух поворотов ω_1 и ω_2 равносильна композиции четырех последовательных отражений от прямых v , u , u , w . Последняя композиция равносильна, очевидно, композиции двух отражений от прямых v и w .

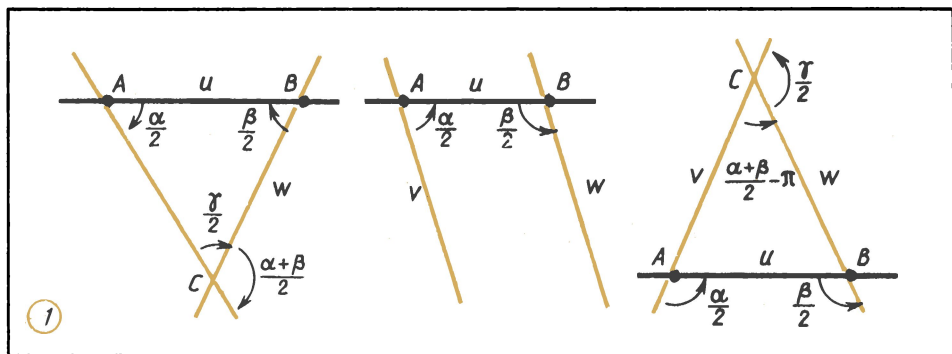
Взаимное расположение прямых v и w зависит от суммы углов $\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{\beta}{2}$. Могут представиться только три случая:

$$1) \frac{\alpha + \beta}{2} < \pi; \quad 2) \frac{\alpha + \beta}{2} = \pi; \quad 3) \frac{\alpha + \beta}{2} > \pi.$$

Первый случай. $\frac{\alpha + \beta}{2} < \pi$. Тогда прямые v и w пересекаются в некоторой точке C и образуют положительный угол $\frac{\alpha + \beta}{2}$, а треугольник ABC , вершинами которого служат точки A , B , C , отрицательно ориентирован.

Композиция отражений от прямых v и w (значит, и поворотов ω_1 и ω_2) равносильна повороту около точки C на положительный угол $\alpha + \beta$.

Второй случай. $\frac{\alpha + \beta}{2} = \pi$. Тогда прямая v параллельна прямой w , а композиция симметрий относительно прямых v и w (поворотов ω_1 и ω_2) равносильна параллельному переносу.



Третий случай. $\frac{\alpha+\beta}{2} > \pi$. Тогда прямая v и прямая w пересекаются в такой точке C , что треугольник ABC , вершинами которого служат точки A, B и C , положительно ориентирован. В этом случае прямые v и w образуют угол, равный $\frac{\alpha+\beta}{2} - \pi$. В самом деле, $\angle ACB = \pi - \angle CAB - \angle CBA = \pi - \pi + \frac{\alpha}{2} - \pi + \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} - \pi$. Композиция отражений от прямых v и w (или поворотов ω_1 и ω_2) равносильна повороту около точки C на угол $\alpha + \beta - 2\pi$ или $\alpha + \beta$ в положительном направлении.

Итак, теорема о двух поворотах доказана.

Теорему о трех поворотах приведем без доказательства.

Теорема. Чтобы композиция трех поворотов около трех различных центров A, B и C на углы α, β и γ ($0 < \alpha < 2\pi, 0 < \beta < 2\pi, 0 < \gamma < 2\pi$) была тождественным преобразованием, необходимо и достаточно, чтобы углы треугольника ABC были соответственно равны $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}, \frac{\gamma}{2}$, если этот треугольник ориентирован отрицательно, или же чтобы углы треугольника ABC были соответственно равны $\pi - \frac{\alpha}{2}, \pi - \frac{\beta}{2}, \pi - \frac{\gamma}{2}$, если этот треугольник ориентирован положительно (рис. 1).

3. Применение геометрических преобразований к решению задач

Задача 1. На сторонах треугольника ABC во внешнюю (внутреннюю) сторону построены равносторонние треугольники. Доказать, что центры O_1, O_2, O_3 этих треугольников являются вершинами равностороннего треугольника.

Решение. Рассмотрим композицию трех поворотов $\omega_2, \omega_1, \omega_3$ около центров O_2, O_1, O_3 на углы по 120° в положительном направлении. Поворот ω_2 переводит точку A в точку C , поворот ω_1 — полученную точку C в точку B , поворот ω_3 преобразует полученную точку B в точку A , т. е. композиция поворотов $\omega_2, \omega_1, \omega_3$ оставляет точку A на месте. Композиция этих

поворотов, вообще говоря, представляет собой параллельный перенос, так как сумма углов поворота равна 360° . Но параллельный перенос не имеет инвариантных точек, поэтому указанное произведение является тождественным преобразованием.

По обратной теореме о композиции трех поворотов имеем, что внутренние углы треугольника $O_2O_1O_3$ равны по 60° , т. е. треугольник $O_2O_1O_3$ равносторонний (рис. 2).

Аналогично доказывается и другой случай, когда треугольники построены с внутренней стороны.

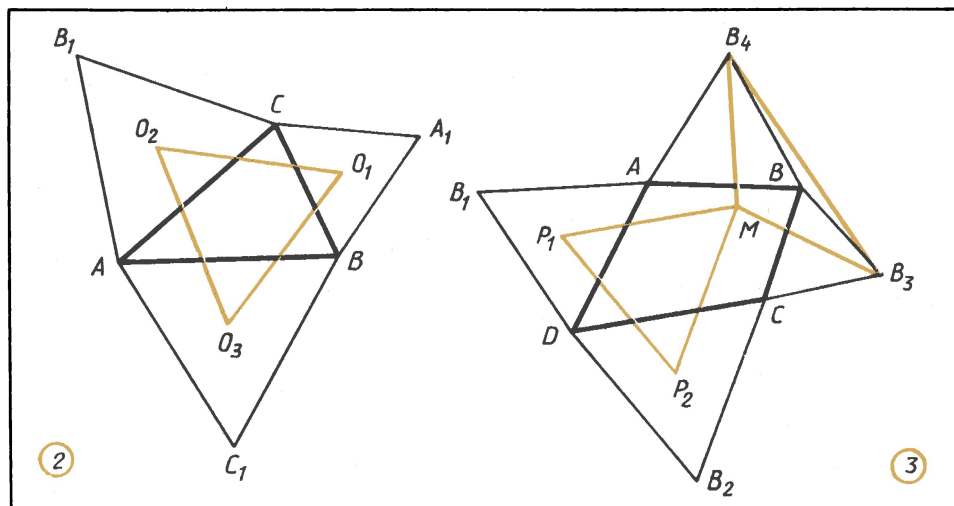
Задача 2. На сторонах произвольного четырехугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники DAB_1 , ABB_4 , BCB_3 , CDB_2 . На отрезке P_1P_2 (P_1, P_2 — центры треугольников DAB_1 и CDB_2) построен равносторонний треугольник P_1P_2M . Доказать, что треугольник MB_3B_4 имеет углы, соответственно равные $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$ (рис. 3).

Решение. Рассмотрим композицию четырех поворотов $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ около точек P_1, P_2, B_3, B_4 на углы, соответственно равные $120^\circ, 120^\circ, 60^\circ, 60^\circ$, в отрицательном направлении.

Поворот ω_1 переводит точку A в точку D , поворот ω_2 переводит полученную точку D в точку C , поворот ω_3 — точку C в точку B , а поворот ω_4 преобразует полученную точку B в точку A .

Итак, рассмотренная композиция четырех поворотов оставляет точку A на месте. Эта композиция, вообще говоря, является параллельным переносом. Так как параллельный перенос не имеет инвариантных точек, то рассмотренная композиция есть тождественное преобразование.

Композиция первых двух поворотов ω_1 и ω_2 есть поворот ψ_1 на угол 240° около точки M , в которой пересекаются прямые P_1M и P_2M , проходящие через точки P_1 и P_2 и образующие с прямой P_1P_2 углы, равные по 60° .



Композиция двух последних поворотов ω_3 и ω_4 есть один поворот ψ_2 на отрицательный угол, равный 120° , около точки M_1 , в которой пересекаются прямые B_3M_1 и B_4M_1 , проходящие через точки B_3 и B_4 и образующие с прямой B_3B_4 углы по 30° .

Так как композиция поворотов ψ_1 и ψ_2 есть тождественное преобразование, то точка M_1 обязана совпадать с точкой M .

Теперь очевидно, что треугольник B_3B_4M имеет углы, соответственно равные 30° , 30° , 120° .

Задача 3. Построить n -угольник с нечетным числом сторон, зная середины всех сторон n -угольника.

Решение. Предположим, что $n=5$, а точки P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 — середины сторон искомого пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$.

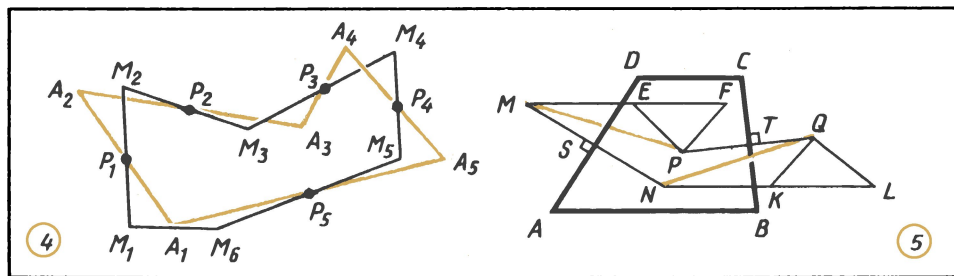
Пусть этот пятиугольник построен. Рассмотрим композицию пяти поворотов $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ на углы по 180° около точек P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 (рис. 4). Эта композиция оставляет точку A_1 на месте. Кроме того, рассматриваемая композиция поворотов представляет собой центральную симметрию, а следовательно, имеет единственную инвариантную точку — центр симметрии A_1 .

Симметрия ω_1 переводит любую точку M_1 плоскости в точку M_2 , симметрия ω_2 преобразует полученную точку M_2 в точку M_3 , симметрия ω_3 — полученную точку M_3 в точку M_4 , симметрия ω_4 переводит полученную точку M_4 в точку M_5 , а симметрия ω_5 преобразует полученную точку M_5 в точку M_6 , симметричную с точкой M_1 относительно середины O отрезка M_1M_6 , обязанной совпадать с вершиной A_1 искомого пятиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5$. Зная вершину A_1 , легко построить пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. Задача имеет единственное решение.

Задача 4. Дана трапеция $ABCD$. Пусть середины S и T боковых сторон AD и BC являются также серединами отрезков MN и PQ , соответственно равных и перпендикулярных боковым сторонам AD и BC . Доказать, что отрезки MP и QN равны между собой ($\angle DSM = 90^\circ$, $\angle CTQ = -90^\circ$).

Решение. Четырехугольник $AMDN$ является квадратом, а отрезки AD и MN — его диагонали. Четырехугольник $PCQB$ также квадрат, а отрезки BC и PQ — его диагонали (рис. 5).

Рассмотрим композицию поворота ω_1 около точки N на угол -90° ,



параллельного переноса \overrightarrow{DC} , поворота ω_2 около точки Q на угол $+90^\circ$ и параллельного переноса \overrightarrow{BA} .

Поворот ω_1 переводит точку A в точку D , параллельный перенос \overrightarrow{DC} преобразует полученную точку D в точку C , поворот ω_2 переводит точку C в точку B , а параллельный перенос \overrightarrow{BA} преобразует полученную точку B в точку A .

Итак, рассмотренная композиция оставляет точку A на месте. Композиция поворота ω_1 и параллельного переноса \overrightarrow{DC} есть поворот на угол -90° . Композиция последнего поворота и поворота ω_2 есть параллельный перенос. Композиция этого параллельного переноса и параллельного переноса \overrightarrow{BC} , вообще говоря, есть параллельный перенос. Так как параллельный перенос не имеет инвариантных точек, то рассматриваемая композиция четырех преобразований есть тождественное преобразование.

Поворот ω_1 переводит точку N в точку N , перенос \overrightarrow{DC} преобразует полученную точку N в точку K , поворот ω_2 переводит точку K в точку L , а перенос \overrightarrow{BA} преобразует полученную точку L в точку N , так как рассмотренная композиция есть тождественное преобразование.

Аналогично можно показать, что композиция поворота φ_1 около точки M на угол 90° , параллельного переноса \overrightarrow{DC} , поворота φ_2 около точки P на угол -90° и параллельного переноса \overrightarrow{BA} представляет собой тождественное преобразование.

Поворот φ_1 переводит точку M в точку M , перенос \overrightarrow{DC} переводит точку M в точку E , а поворот φ_2 преобразует точку E в точку F и перенос \overrightarrow{BA} переводит точку F в точку M , так как рассматриваемая композиция есть тождественное преобразование.

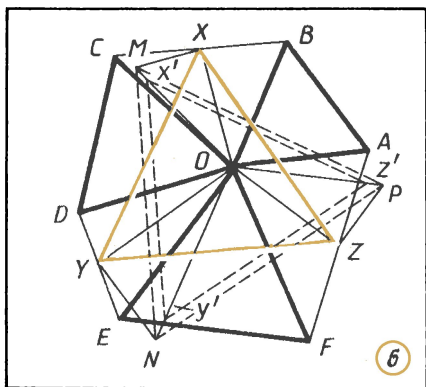
Докажем, что треугольники EPF и KQL равны. В самом деле, эти треугольники (прямоугольные и равнобедренные) имеют равные гипотенузы EF и KL ($EF = MF - ME = AB - DC$, $KL = ML - MK = AB - DC$).

Из равенства треугольников EPF и KQL следует, что $EP = KQ$, а $\angle MEP = \angle NKQ$. Треугольники MEP и NKQ равны между собой, так как $ME = NK = CD$, $EP = KQ$, $\angle MEP = \angle NKQ$.

Из равенства последних треугольников следует, что отрезки MP и NQ равны между собой.

Задача 5. Даны одинаково ориентированные равносторонние треугольники OAB , OCD , OEF . Доказать, что середины X , Y , Z соответственно отрезков BC , DE , AF являются вершинами равностороннего треугольника.

Решение. Поворот ω_1 на угол 180° около точки X переводит точку B в точку C , поворот ω_2 около точки O на угол 60° переводит точку C в точку D , поворот ω_3 около точки Y на угол 180° преобразует точку D в точку E , поворот ω_4 около точки O на угол 60° переводит точку E в точку F , поворот ω_5 около точки Z на угол 180° преобразует точку F в точку A ,



наконец, поворот ω_6 около точки O на угол 60° переводит точку A в точку B .

Так как рассматриваемая композиция шести поворотов оставляет на месте точку B , то она является тождественным преобразованием.

Композиция поворотов ω_1 и ω_2 равносильна одному повороту φ_1 на угол 240° около точки M , в которой пересекаются прямые XM и OM , проходящие через точки X и O и образующие с прямой OX углы, соответственно равные 90° и 30° .

Композиция поворотов ω_3 и ω_4 равносильна одному повороту φ_2 на

угол 240° около точки N , в которой пересекаются прямые YN и ON , проходящие через точки Y и O и образующие с прямой OY углы, соответственно равные 90° и 30° .

Композиция поворотов ω_5 и ω_6 равносильна одному повороту φ_3 на угол 240° около точки P , в которой пересекаются прямые ZP и OP , проходящие через точки Z и O и образующие с прямой OZ углы, соответственно равные 90° и 30° .

Композиция поворотов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, равносильная композиции шести поворотов ω_i , представляет собой тождественное преобразование. По обратной теореме о композиции трех поворотов следует, что внешние углы треугольника MNP равны по 120° , а значит, треугольник MNP равносторонний (рис. 6).

Докажем, что треугольники MNP и XYZ подобны.

На отрезках OX, OY, OZ , соединяющих некоторую точку O с каждой вершиной треугольника XYZ , построены одинаково ориентированные и попарно подобные между собой треугольники OXM, OYN, OZP .

Из их подобия следует, что $OM:OX=ON:OY=OP:OZ=k$.

Поворотом треугольника XYZ около точки O на угол 30° получим треугольник $X'Y'Z'$, равный треугольнику XYZ и гомотетичный треугольнику MNP (относительно центра гомотетии O с коэффициентом гомотетии, равным k).

Итак, треугольники MNP и XYZ подобны. Так как треугольник MNP равносторонний, то и треугольник XYZ , подобный MNP , также равносторонний.

Примечание составителя. Заметим, что приведенное здесь решение задачи 5 достаточно трудное и громоздкое. Существенно более рациональным будет решение этой задачи с помощью поворота вектора. Приведем такое решение:

Из четырехугольника $BEDC$ имеем $\vec{XY} = \frac{1}{2}(\vec{CD} + \vec{BE}) = \frac{1}{2}(\vec{CD} + \vec{OE} - \vec{OB})$ (рис. 6). Так как результат поворота вектора не зависит от центра поворота, то при повороте этих векторов на -60° получим $\vec{CD} \rightarrow \vec{OD}$, $\vec{OE} \rightarrow \vec{FE}$, $\vec{OB} \rightarrow \vec{OA}$. Поэтому образом вектора \vec{XY} будет вектор

$$\frac{1}{2}(\vec{OD} + \vec{FE} - \vec{OA}) = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{FE}) = \vec{ZY}. \text{ Отсюда и следует, что } |XY| = |ZY|.$$

Аналогично доказывается, что $|XY| = |ZX|$. Таким образом, треугольник XYZ правильный.

МЕТОД ПОДОБИЯ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

В данной статье мы ограничимся кратким рассмотрением основных теоретических положений, касающихся преобразования подобия (первого рода), и приведем решения наиболее характерных задач на применение этих положений.

1. Композиция поворота и гомотетии

Различают подобия первого и второго рода. Подобие первого рода сохраняет ориентацию плоскости, подобие второго рода меняет ее.

Две пары точек (A, A_1) и (B, B_1) , таких, что $|A_1B_1| = k|AB|$, $k \neq 0$, задают два и только два подобия, при которых точки A и B отображаются на A_1 и B_1 соответственно: одно из подобий первого, а другое — второго рода.

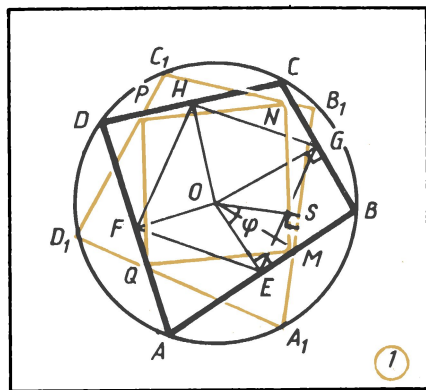
Подобие с коэффициентом $k \neq 1$ независимо от рода всегда имеет, и притом единственную, неподвижную точку — центр. Поэтому подобие может быть задано центром, парой соответственных точек и указанием рода.

Композиция гомотетии и поворота есть подобие первого рода. Всякое отличное от перемещения подобие первого рода либо является гомотетией, либо может быть представлено композицией положительной гомотетии и поворота на угол, не равный 180° , причем центры гомотетии и поворота совпадают с центром подобия. Следовательно, подобие первого рода характеризуется коэффициентом, центром и углом поворота.

Подобие с центром M , коэффициентом k и углом поворота φ обозначим символом $\Pi_M^{k\varphi}$. Если какой-либо из компонентов не играет существенной роли в рассматриваемых условиях, то соответствующий индекс в обозначении может быть опущен.

Задача 1. В окружность с центром O вписан четырехугольник $ABCD$; поворот R_O^φ , $\varphi \neq 180^\circ$, отображает его на четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$. Доказать, что пары прямых AB и A_1B_1 , BC и B_1C_1 , CD и C_1D_1 , DA и D_1A_1 пересекаются в вершинах параллелограмма.

Решение. Пусть $(AB) \cap (A_1B_1) = M$, $(BC) \cap (B_1C_1) = N$, $(CD) \cap (C_1D_1) = P$,



$(DA) \cap (D_1A_1) = Q$ (рис. 1). Ортогональные проекции E, G, H, F точки O на прямые, содержащие стороны четырехугольника $ABCD$, являются серединами сторон, и, следовательно, $EGHF$ — параллелограмм.

При R_O^φ точка E отображается на точку S . Имеем:

$$|OE| = |OS|, \widehat{OEM} = \widehat{OSM} = 90^\circ, \widehat{EOS} = \varphi,$$

откуда следует, что в прямоугольном треугольнике EOM $\widehat{EOM} = \frac{\varphi}{2}$ и $|OM| = |OE| \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}}$. Тогда точка M есть образ точки E при композиции

$$H_O^k \circ R_O^{\frac{\varphi}{2}}, \text{ где } k = \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Аналогично можно показать, что точки N, P и Q являются образами точек G, H и F при той же композиции, т. е. при подобии первого рода. Отсюда следует, что четырехугольник $MNPQ$ — образ параллелограмма при подобии и, следовательно, также является параллелограммом.

Задача 2. Доказать, что точки пересечения прямых, содержащих стороны треугольника ABC , соответственно с образами этих прямых при повороте R_O^φ , $\varphi \neq 180^\circ$, где O — точка окружности, описанной вокруг треугольника ABC , принадлежат одной прямой.

Указание. Докажите, что: 1) каждая из точек пересечения есть образ основания перпендикуляра, проведенного через точку O к соответствующей прямой, при одной и той же композиции гомотетии и поворота; 2) основания перпендикуляра принадлежат одной прямой.

2. Угол луча и его образа при подобии

При положительной гомотетии любой луч отображается на сонаправленный с ним луч, а угол луча и его образа при повороте — величина постоянная, равная углу поворота. Следовательно, угол луча и его образа при подобии первого рода также величина постоянная и равна углу поворота подобия.

Задача 3. Дан треугольник ABC , $C = 90^\circ$, $[CD]$ — высота. Доказать, что медианы AM и CN в треугольниках ADC и DBC перпендикулярны.

Решение. Треугольник CDB отображается на треугольник ADC при композиции поворота $R_D^{90^\circ}$ и гомотетии H_D^k , где $k = \frac{AC}{CB}$, т. е. при подобии первого рода с углом поворота 90° (рис. 2). При этом подобии точки C и N отображаются на точки A и N соответственно. Поэтому отрезки CN и AM перпендикулярны.

Задача 4. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AB ; построены высота CD и перпендикуляр DE к стороне BC ($E \in [BC]$). Точка M — середина отрезка DE . Доказать, что отрезки AE и CM перпендикулярны.

Решение. В треугольнике DBE построим медиану DN (рис. 3); $[CM] \perp [DN]$ (см. задачу 3). Но $[DN]$ — средняя линия $\triangle ABE$, и поэтому $[DN] \parallel [AE]$. Следовательно, и $[CM] \perp [AE]$.

Значит, точка P_1 есть образ точки P при композиции поворота R_M^{φ} и гомотетии H_M^k , т. е. при заданном подобии.

Таким образом, одну из точек пересечения двух окружностей можно принять за центр подобия первого рода, отображающего одну окружность на другую. Тогда прямые, проходящие через вторую точку, пересекают данные окружности в парах соответственных при этом подобии точек.

Задача 6. Окружности ω и ω_1 пересекаются в двух точках. Прямая, проходящая через одну из точек пересечения, пересекает окружности вторично в точках A и A_1 . Доказать, что величина угла касательных, проведенных к окружностям в точках A и A_1 соответственно, не зависит от выбора секущей.

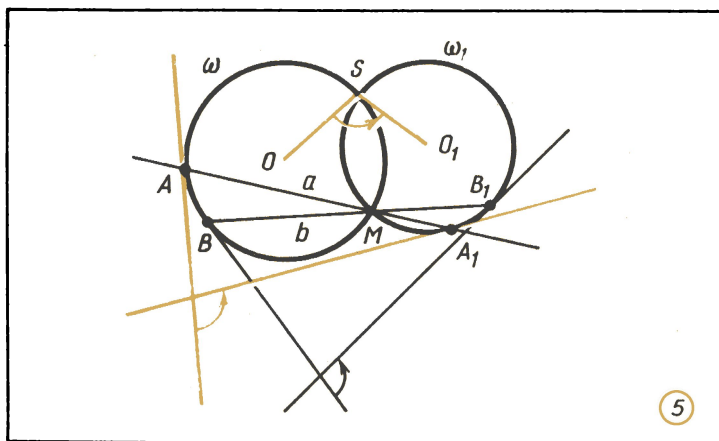
Решение. Пусть $\omega \cap \omega_1 = \{S; M\}$ (рис. 5). Рассмотрим подобие первого рода с центром S , отображающее ω на ω_1 . Тогда любая прямая a , проходящая через точку M , пересекает окружности в парах соответственных точек A и A_1 . Касательная, проведенная к окружности ω_1 в точке A_1 , есть образ касательной, проведенной к окружности ω в точке A . Но угол луча и его образа при подобии первого рода — величина постоянная. В данном случае она равна \widehat{OSO}_1 , где O и O_1 — центры окружностей ω и ω_1 .

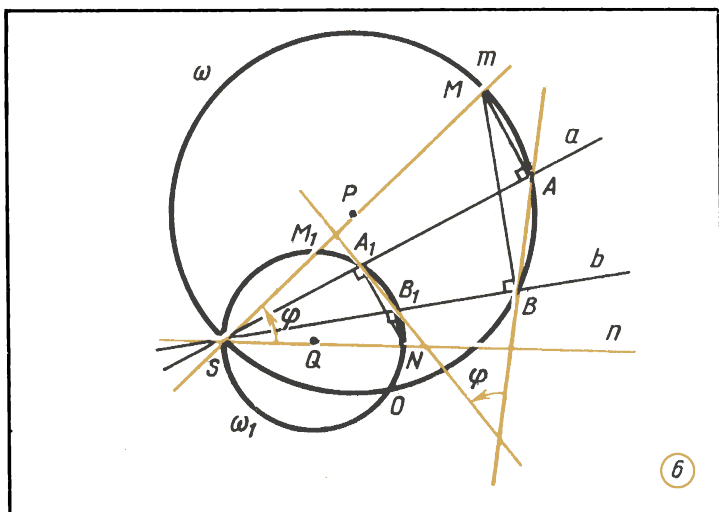
Задача 7. Даны прямые m и n , пересекающиеся в точке S , причем $(m, n) = \varphi$, и прямые a, b , такие, что $a \cap b = S$.

Через точки M и N , принадлежащие прямым m и n соответственно, проведены к прямым a и b перпендикуляры, пересекающие их в точках A, B и A_1, B_1 . Найти угол прямых AB и A_1B_1 .

Решение. Точки S, B, A, M (рис. 6) принадлежат окружности ω , построенной на отрезке SM как на диаметре; точка P — ее центр. Точки S, B, A, N принадлежат окружности ω_1 с диаметром SN ; точка Q — ее центр.

Окружности ω и ω_1 имеют общие точки S и O . При подобии первого рода,





заданном центром O и парой точек $P \rightarrow Q$ окружность ω отображается на ω_1 . Так как прямые a и b проходят через S — вторую точку пересечения окружностей, то при этом подобии точки A и B отображаются на точки A_1 и B_1 соответственно. Следовательно, угол прямых AB и A_1B_1 равен углу φ поворота подобия.

Задача 8. Даны две различные точки A и B . Точка M принадлежит прямой AB . На отрезках AM и MB построены квадраты в одной полуплоскости с границей (AB) . Около квадратов описаны окружности, пересекающиеся в точке N . Найти множество точек N при различном выборе точек M на прямой AB .

Указание. Один из квадратов отображается на другой при подобии с углом поворота 90° или при гомотетии. В первом случае N — центр подобия, точки A и B соответственные, следовательно, точка N принадлежит множеству точек, из которых отрезок AB виден под прямым углом. Во втором случае $N = M$.

4. Два подобия с общим центром

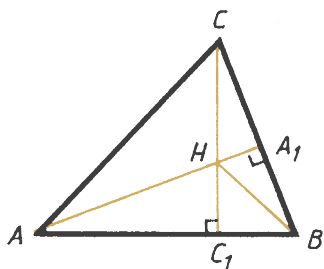
Пусть при подобии первого рода с центром M точки A и C отображаются на точки B и D соответственно, тогда

$$\widehat{AMB} = \widehat{CMD} \text{ и } \frac{|MB|}{|MA|} = \frac{|MD|}{|MC|},$$

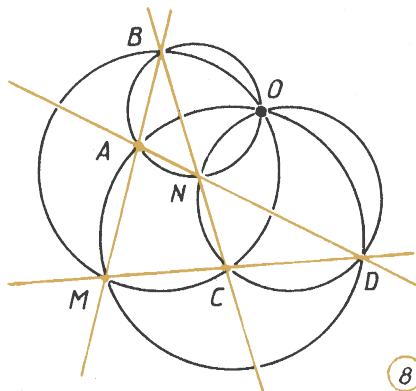
а следовательно, справедливы равенства

$$\widehat{AMC} = \widehat{BMD} = \varphi, \quad \frac{|MC|}{|MA|} = \frac{|MD|}{|MB|}.$$

Но они означают, что точки C и D есть образы точек A и B соответственно



7



8

при композиции поворота R_M^{φ} и гомотетии H_M^k , т. е. при подобии первого рода с центром M , углом поворота φ и коэффициентом k .

Это свойство находит применение в задачах.

Задача 9. Доказать, что прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть (AA_1) и (CC_1) — прямые, содержащие высоты треугольника ABC , $(AA_1) \cap (CC_1) = H$ (рис. 7).

Так как треугольники $CH A_1$ и $AB A_1$ подобны (по двум углам) и одинаково ориентированы, то существует подобие первого рода, при котором $A_1 \rightarrow A_1$, $H \rightarrow B$, $C \rightarrow A$. Тогда существует и подобие первого рода, при котором $A_1 \rightarrow A_1$, $H \rightarrow C$, $B \rightarrow A$. При этом подобии лучи $A_1 H$ и $H B$ отображаются на лучи $A_1 C$ и CA соответственно. Но прямые $A_1 H$ и $A_1 C$ перпендикулярны. Значит, и прямые $H B$ и CA перпендикулярны, т. е. третья высота треугольника проходит через точку H .

Задача 10. На плоскости даны четыре прямые, пересекающиеся попарно в шести различных точках. Доказать, что четыре окружности, каждая из которых проходит через три из полученных точек, пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть A, B, C, D, M и N — точки пересечения данных прямых (рис. 8). Существует единственное подобие первого рода, при котором точки A и B отображаются соответственно на точки D и C ; центр этого подобия есть вторая точка пересечения окружностей, проходящих через точки A, B, N и D, C, N .

Имеем $O \rightarrow O$, $A \rightarrow D$, $B \rightarrow C$. Тогда существует и подобие первого рода, при котором $O \rightarrow O$, $A \rightarrow B$, $D \rightarrow C$. Центр этого подобия есть вторая точка пересечения окружностей, проходящих через точки A, D, M и B, C, M . Таким образом, все четыре окружности проходят через центр O рассматриваемых подобий.

5. Композиция подобий

Композиция двух и более подобий первого рода есть подобие первого рода; его коэффициент равен произведению коэффициентов данных подобий, а угол поворота — сумме углов поворота данных подобий, т. е.

$$\Pi^{l, \psi} \circ \Pi^{k, \varphi} = \Pi^{kl, \psi + \varphi}.$$

Задача 11. На сторонах треугольника ABC вне его построены треугольники ABM , BCN и CAP так, что $\widehat{AMB} = 150^\circ$, $|AM| = |MB|$, $\widehat{CAP} = \widehat{CBN} = 30^\circ$ и $\widehat{ACP} = \widehat{BCN} = 45^\circ$. Доказать, что треугольник MNP равносторонний.

Решение. Рассмотрим композицию

$$\Pi^{l, \psi} \circ \Pi^{k, \varphi} = \Pi^{kl, \psi + \varphi}.$$

где $\varphi = 150^\circ$, $\psi = 105^\circ$, $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $l = \sqrt{2}$. Коэффициенты и углы поворота подобий обусловлены подобием треугольников PAC и NBC (рис. 9):

$$\widehat{APC} = \widehat{CNB} = 105^\circ, \quad \frac{|PC|}{|PA|} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{|NB|}{|NC|} = \sqrt{2}.$$

Складывая углы поворота и перемножая коэффициенты этих подобий, находим, что f — перемещение с углом поворота 360° , т. е. перенос. Но $f(B) = B$, и поэтому f — тождественное преобразование.

Построим образ точки M при композиции f (рис. 10):

$$R_M^\psi(M) = M,$$

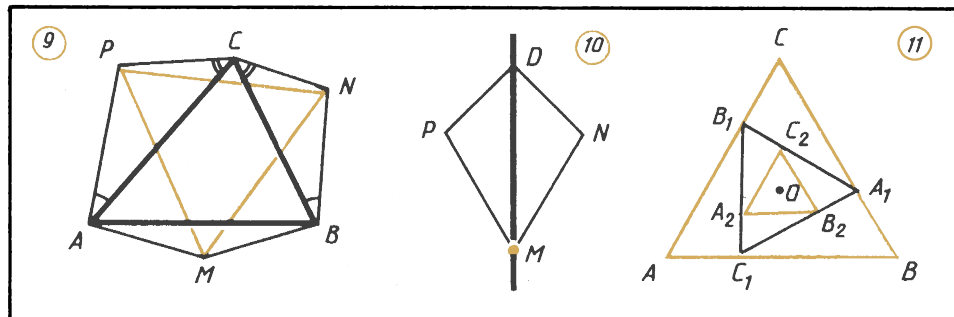
$$\Pi_P^{k, \psi}(M) = D,$$

$$\Pi_N^{n, \psi}(D) = M$$

(так как f — тождественное преобразование, то $f(M) = M$).

Если $|PD| = m$, а $|DN| = l$, то $|PM| = m\sqrt{2}$, $|MN| = l\sqrt{2}$.

Треугольники DPM и DNM подобны друг другу и подобны треугольнику CPA . Тогда $\widehat{PDM} = \widehat{NDM} = 45^\circ$, $\widehat{PMD} = \widehat{NMD} = 30^\circ$ и $\widehat{PMN} = 60^\circ$.



При симметрии с осью DM лучи MP и DP отображаются соответственно на лучи MN и DN , и поэтому точка P отображается на точку N . Следовательно, $|MP| = |MN|$ и треугольник MNP равносторонний.

Решение показывает, что величины 150° , 30° и 45° не столь существенны. Важно выполнение следующих условий:

- а) треугольник ABM равнобедренный;
- б) треугольники ACP и BCN подобны;
- в) сумма величин углов при вершинах M , P и N в построенных треугольниках равна 360° .

При этих условиях в результате приведенного решения найдем, что $|MP| = |MN|$ и $\widehat{PMN} = 2\widehat{PAC}$.

Примечание. Задача, аналогичная рассмотренной, предлагалась на XVII Международной математической олимпиаде в 1975 г. и вызвала у решающих значительные затруднения. По-видимому, применение метода подобия в данной задаче наиболее целесообразно. Другой вариант ее решения дан в журнале «Математика в школе» (1976.— № 1.— С. 66).

Задача 12. Стороны равностороннего треугольника ABC разделены по обходу его границы в отношении k точками A_1 , B_1 и C_1 . Стороны треугольника $A_1B_1C_1$ разделены по обходу вершин в отношении $\frac{1}{k}$ точками A_2 , B_2 и C_2 . Доказать, что треугольники ABC и $A_2B_2C_2$ гомотетичны.

Решение. Точка O — центр треугольника ABC . При повороте $R_O^{120^\circ}$ точки A , B и C отображаются соответственно на точки B , C и A (рис. 11), поэтому в силу равенства отношений точки A_1 , B_1 , C_1 отображаются на точки B_1 , C_1 и A_1 , а точки A_2 , B_2 и C_2 — на точки B_2 , C_2 и A_2 , т. е. треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равносторонние и имеют общий центр O . Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ есть образ треугольника ABC при подобии Π_O^φ , а треугольник $A_2B_2C_2$ — образ треугольника $A_1B_1C_1$ при подобии Π_O^ψ . Имеем:

$$\triangle A_2B_2C_2 = \Pi_O^\psi \circ \Pi_O^\varphi (\triangle ABC).$$

Очевидно, что композиция $\Pi_O^\psi \circ \Pi_O^\varphi$ отлична от перемещения.

Если учесть, что угол поворота φ подобия Π_O^φ противоположен углу поворота ψ подобия Π_O^ψ , то угол поворота композиции этих подобий равен 0° . Отсюда следует: композиция $\Pi_O^\psi \circ \Pi_O^\varphi$ есть положительная гомотетия.

Если треугольник $A'B'C'$ не равносторонний, а произвольный, то треугольник $A_2'B_2'C_2'$, построенный по условию задачи, также гомотетичен данному. Действительно, проведем через сторону $A'B'$ плоскость, не содержащую точку C' , построим в ней равносторонний треугольник $A'B'C$, затем треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$.

При параллельном проектировании сохраняются параллельность и отношение отрезков параллельных прямых. Поэтому при проектировании параллельно прямой CC' на плоскость $A'B'C'$ гомотетичные треугольники $A'B'C$ и $A_2B_2C_2$ проектируются на гомотетичные треугольники $A'B'C'$ и $A_2'B_2'C_2'$.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ К ИЗУЧЕНИЮ СВОЙСТВ ПАРАБОЛЫ

В школьном курсе математики изучается парабола как график квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$.

Это одна из замечательных кривых, которая встречается в природе и технике. Например, если бы камень (или снаряд), брошенный не строго вертикально, летел в пустоте (т. е. не испытывал воздействия сопротивления воздуха и некоторых других сил), то траекторией его полета была бы парабола. Поэтому форма струи фонтана, направленной не строго вертикально, является параболической. Если поворачивать ствол орудия в одной и той же вертикальной плоскости, то при заданной скорости вылета снаряда зона обстрела будет ограничена тоже параболой, которая называется параболой безопасности. Отражающее зеркало автомобильных фар и прожекторов имеет форму параболоида вращения. Параболоид вращения — это поверхность, которая образуется при вращении параболы вокруг ее оси. Параболическую форму иногда имеют арки мостов. Орбиты некоторых комет имеют форму параболы. Если космическому кораблю придать скорость около 11,2 км/с, то он полетит за пределы земного тяготения по параболической орбите.

Поэтому интересно рассмотреть параболу не только как график квадратного трехчлена, но и как геометрическую фигуру, изучить ее совместно с прямой, с окружностью.

С такой точки зрения можно обнаружить свойства различных алгебраических кривых, уравнения которых имеют не слишком высокий порядок.

Метод координат дает возможность изучить многие свойства кривых без особых затруднений.

Парабола и прямая

Выберем прямоугольную декартову систему координат таким образом, чтобы уравнение параболы имело наиболее простой вид:

$$y = x^2. \quad (1)$$

Точка A_0 с координатами (x_0, x_0^2) , где x_0 — любое действительное число, принадлежит параболе, так как координаты этой точки удовлетворяют уравнению (1). Для краткости будем считать, что точка A_0 , принадлежащая параболе p_2 , определена своим параметром (в данном случае абсциссой) x_0 , и запишем это так: $A_0(x_0)$.

1. *Парабола и секущая прямая.* Возьмем на параболе две точки $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$. Вычислим угловой коэффициент прямой A_1A_2 :

$$k_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_1 + x_2. \quad (2)$$

Прямая, имеющая с параболой две общие точки, называется *секущей*. Итак, угловой коэффициент секущей A_1A_2 равен сумме значений параметров x_1 и x_2 ее точек пересечения A_1 и A_2 с параболой p_2 .

Из полученного соотношения (2) следует, что если секущие A_1A_2 и A_3A_4 параллельны, то

$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4. \quad (3)$$

Очевидно, верно и обратное утверждение: если $x_1 + x_2 = x_3 + x_4$, то $A_1A_2 \parallel A_3A_4$.

Перемещая прямую A_1A_2 параллельно самой себе, получим пары точек пересечения, для которых сумма s параметров постоянна. Если через точку $T\left(\frac{s}{2}\right)$, принадлежащую параболу, провести прямую t параллельно A_1A_2 , то прямая t других общих точек с параболой не имеет. В самом деле, если допустить, что вторая точка $A_0(x_0)$ существует, то $x_0 \neq \frac{s}{2}$ и в силу того, что $t \parallel A_1A_2$, получаем $x_0 + \frac{s}{2} = x_1 + x_2$. Отсюда $x_0 + \frac{s}{2} = s$ или $x_0 = \frac{s}{2}$, что противоречит предположению.

2. *Парабола и касательная*. Прямая, параллельная какой-то секущей и имеющая с параболой только одну общую точку, называется касательной к параболу в этой точке.

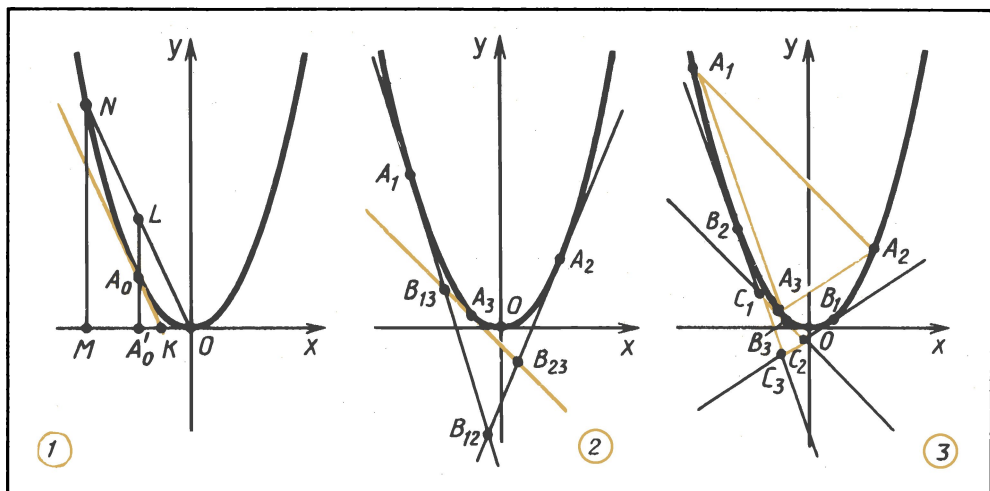
Заметим, что прямая может иметь с параболой только одну общую точку, но не быть касательной к ней. В этом случае прямая параллельна оси параболы.

Из полученного в пункте 1 результата следует, что значение параметра, соответствующее точке касания касательной к параболу, равно полусумме значений параметров, соответствующих точкам пересечения любой секущей, параллельной этой касательной, с данной параболой.

Очевидно, что $x = \frac{s}{2}$ есть уравнение прямой, которой принадлежат середины всех хорд параболы, расположенных на параллельных секущих. Эта прямая, называемая *диаметром параболы*, проходит параллельно оси y через точку касания касательной, параллельной секущим.

Остается заметить, что к параболу нельзя провести двух параллельных касательных.

Чтобы построить касательную в точке $A_0(x_0)$, поступаем так: строим на оси x точку $M(2x, 0)$ (рис. 1). Ей соответствует на параболу точка $N(2x_0)$. Искомая касательная параллельна прямой ON . Ее угловой коэффициент равен $2x_0$. Уравнение секущей ON согласно (2) имеет вид $y = 2x_0x$. Пусть A'_0 — проекция точки A_0 на ось x . Тогда точка пересечения L прямых A'_0A_0 и ON имеет координаты $(x_0, 2x_0^2)$. Отсюда находим, что $A'_0A_0 = A_0L$. Следовательно, касательная пересекает ось x в точке $K\left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$.



3. *Уравнение секущей и касательной.* Составим уравнение секущей A_1A_2 : $y=kx+b$, где $k=x_1+x_2$, а b находим из условия, что точка A_1 принадлежит p_2 .

Имеем $x_1^2=(x_1+x_2)x_1+b$, т. е. $b=-x_1x_2$, и уравнение секущей имеет вид:

$$y=(x_1+x_2)x-x_1x_2. \quad (4)$$

Составим уравнение касательной к параболе в точке $T(x_0)$: $y=2x_0x+c$. Для вычисления c используем условие принадлежности точки T касательной: $x_0^2=2x_0^2+c$. Поэтому $c=-x_0^2$, и уравнение касательной имеет вид:

$$y=2x_0x-x_0^2. \quad (5)$$

Оно может быть получено из уравнения (4) секущей, если положить $x_1=x_2=x_0$.

З а д а ч а 1. В параболу вписаны четырехугольники $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$. Доказать, что если $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_2A_3 \parallel B_2B_3$, $A_3A_4 \parallel B_3B_4$, то $A_4A_1 \parallel B_4B_1$.

Р е ш е н и е. Пусть точкам A_i соответствуют параметры a_i , а точкам B_i — параметры b_i . Тогда согласно условию задачи имеем:

$$a_1+a_2=b_1+b_2; a_2+a_3=b_2+b_3; a_3+a_4=b_3+b_4.$$

Складывая почленно первое и третье уравнения и вычитая второе уравнение, получим $a_4+a_1=b_4+b_1$, откуда следует, что $A_4A_1 \parallel B_4B_1$.

Аналогичным свойством обладают два вписанных многоугольника с четным числом сторон.

З а д а ч а 2. К параболе в точках A_1 и A_2 проведены касательные, пересекающиеся в точке B_{12} . Доказать, что любая третья касательная к параболе пересекает данные две касательные в таких точках B_{13} и B_{23} , что

$$\frac{A_1B_{13}}{B_{13}B_{12}} = \frac{B_{12}B_{23}}{B_{23}A_2} \quad (\text{рис. 2}).$$

Решение. Уравнения касательных к параболе в точках $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$ согласно (5) имеют вид:

$$y = 2x_1x - x_1^2; \quad y = 2x_2x - x_2^2.$$

Решив совместно полученные уравнения, определим координаты точки B_{12} :

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = x_1x_2.$$

Пусть третья касательная проведена к параболе в точке $A_3(x_3)$. Очевидно, точки ее пересечения с первой и второй касательными имеют соответственно координаты:

$$B_{13}\left(\frac{x_1 + x_3}{2}; x_1x_3\right); \quad B_{23}\left(\frac{x_2 + x_3}{2}; x_2x_3\right).$$

Определим длины отрезков A_1B_{13} , $B_{13}B_{12}$, $B_{12}B_{23}$, $B_{23}A_2$:

$$A_1B_{13}^2 = \left(\frac{x_3 - x_1}{2}\right)^2 + x_1^2(x_3 - x_1)^2 = \frac{1}{4}(x_3 - x_1)^2(1 + 4x_1^2);$$

$$B_{13}B_{12}^2 = \frac{1}{4}(x_2 - x_3)^2(1 + 4x_1^2);$$

$$B_{12}B_{23}^2 = \frac{1}{4}(x_3 - x_1)^2(1 + 4x_2^2);$$

$$B_{23}A_2^2 = \frac{1}{4}(x_2 - x_3)^2(1 + 4x_2^2),$$

откуда следует, что $\frac{A_1B_{13}}{B_{13}B_{12}} = \frac{B_{12}B_{23}}{B_{23}A_2}$.

Можно было бы доказать, что это свойство является характеристическим свойством параболы, т. е. им обладает только парабола.

Геометрические факты, содержащиеся в задачах, не зависят, очевидно, от выбора системы координат, поэтому при решении задач мы пользуемся наиболее удобной системой координат, в которой парабола имеет уравнение вида (1).

Задача 3. Определить коэффициент подобия вписанного в параболу и описанного около нее треугольников, соответственные стороны которых параллельны.

Решение. Треугольник $A_1A_2A_3$ (рис. 3) вписан в параболу. Пусть точкам A_i соответствуют параметры x_i . Касательная к параболе, параллельная стороне A_1A_3 данного треугольника, имеет с параболой общую точку $B_2\left(\frac{x_1 + x_3}{2}\right)$.

Тогда уравнение касательной, параллельной A_1A_3 , согласно (5) имеет вид:

$$y = (x_1 + x_3)x - \frac{(x_1 + x_3)^2}{4}.$$

Аналогично определяем уравнение касательной, параллельной стороне A_2A_3 данного треугольника:

$$y = (x_2 + x_3)x - \frac{(x_2 + x_3)^2}{4}.$$

Точка пересечения найденных касательных является вершиной C_3 описанного около параболы треугольника, стороны которого параллельны сторонам вписанного треугольника $A_1A_2A_3$. Решив совместно два уравнения, получим:

$$C_3\left(\frac{x_1+x_2+2x_3}{4}, \frac{(x_1+x_3)(x_3+x_2)}{4}\right).$$

Аналогично определяем:

$$C_1\left(\frac{x_2+x_3+2x_1}{4}, \frac{(x_3+x_1)(x_2+x_1)}{4}\right); C_2\left(\frac{x_1+x_3+2x_2}{4}, \frac{(x_3+x_2)(x_2+x_1)}{4}\right).$$

Треугольники $A_1A_2A_3$ и $C_1C_2C_3$ подобны, так как стороны одного соответственно параллельны сторонам другого.

Определим коэффициент подобия. Вычислим длины соответственных сторон A_1A_2 и C_1C_2 , используя формулу длины отрезка:

$$A_1A_2^2=(x_2-x_1)^2+(x_2^2-x_1^2)^2; C_1C_2^2=\frac{1}{16}((x_2-x_1)^2+(x_2^2-x_1^2)^2).$$

Таким образом, $C_1C_2=\frac{1}{4}A_1A_2$, откуда следует, что коэффициент подобия $k=\frac{1}{4}$.

4. *Точка пересечения двух секущих.* Найдем абсциссу x_0 точки пересечения Q двух секущих A_1A_2 и A_3A_4 . Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y=(a_1+a_2)x-a_1a_2, \\ y=(a_3+a_4)x-a_3a_4; \quad a_1+a_2 \neq a_3+a_4. \end{cases}$$

Имеем:

$$x_0=\frac{a_1a_2-a_3a_4}{a_1+a_2-a_3-a_4}.$$

Пусть $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, Q'$ — проекции точек A_1, A_2, A_3, A_4, Q на ось x . Тогда

$$|x_0-a_1|=\left|\frac{(a_1-a_3)(a_1-a_4)}{a_1+a_2-a_3-a_4}\right|;$$

$$|x_0-a_2|=\left|\frac{(a_2-a_1)(a_2-a_4)}{a_1+a_2-a_3-a_4}\right|;$$

$$Q'A'_1 \cdot Q'A'_2=\left|\frac{(a_1-a_3)(a_1-a_4)(a_2-a_3)(a_2-a_4)}{(a_1+a_2-a_3-a_4)^2}\right|. \quad (6)$$

Аналогично

$$Q'A'_3 \cdot Q'A'_4=\left|\frac{(a_3-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_1)(a_4-a_2)}{(a_1+a_2-a_3-a_4)^2}\right|. \quad (6')$$

Сопоставляя (6) и (6'), находим:

$$Q'A'_1 \cdot Q'A'_2=Q'A'_3 \cdot Q'A'_4. \quad (7)$$

Если через точку Q провести пучок прямых, пересекающих параболу в парах точек A_1 и A_2 , A_3 и A_4 , ..., A_{2n-1} и A_{2n} , то согласно (7) получим:

$$Q'A'_1 \cdot Q'A'_2 = Q'A'_3 \cdot Q'A'_4 = \dots = Q'A'_{2n-1} \cdot Q'A'_{2n}. \quad (7')$$

5. *Нормаль к параболе.* Нормалью к параболе в данной на ней точке называется прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно касательной к параболе в этой точке.

Составим уравнение нормали к параболе в точке x_0 . Уравнение касательной к параболе в точке $A_0(x_0)$ имеет вид:

$$y = 2x_0x - x_0^2,$$

т. е. угловой коэффициент касательной $k = 2x_0$. Следовательно, если α — угол, образованный касательной с положительным направлением оси абсцисс, то $\operatorname{tg} \alpha = k = 2x_0$. Нормаль перпендикулярна касательной. Поэтому она образует с положительным направлением оси x угол $\alpha + 90^\circ$ или $\alpha - 90^\circ$. Тогда угловой коэффициент нормали

$$k_1 = \operatorname{tg}(\alpha \pm 90^\circ) = -\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{1}{2x_0}.$$

Следовательно, уравнение нормали имеет вид:

$$y = -\frac{1}{2x_0}x + b.$$

Чтобы определить b , используем условие принадлежности точки $A_0(x_0)$ нормали $x_0^2 = -\frac{1}{2x_0}x_0 + b$, откуда $b = x_0^2 + \frac{1}{2}$.

Таким образом, уравнение нормали определено:

$$x + 2x_0y = 2x_0^3 + x_0, \quad (8)$$

где $A_0(x_0)$ — основание нормали.

Покажем, что через точку $P(\alpha, \beta)$ общего положения можно провести к данной параболе три нормали. В самом деле, абсциссы оснований нормалей удовлетворяют уравнению

$$\alpha + 2x\beta = 2x^3 + x, \quad (8')$$

или

$$2x^3 + x(1 - 2\beta) - \alpha = 0. \quad (9)$$

Это уравнение третьей степени относительно x и поэтому имеет три решения. Уравнение (9) может иметь три вещественных корня или один вещественный и два мнимых. Следовательно, через данную точку $P(\alpha, \beta)$ можно провести к параболе три вещественных или одну вещественную и две мнимые нормали.

Так как в уравнении (9) коэффициент при x^2 равен нулю, то согласно теореме Виета

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad (10)$$

где x_1, x_2, x_3 — корни уравнения (9). (О теореме Виета для многочленов n -й степени можно прочесть в сборнике «Дополнительные главы по курсу математики 10 класса для факультативных занятий». — М.: Просвещение, 1970.)

Таким образом, доказана теорема: если из некоторой точки проведены к параболы три нормали, то абсциссы оснований этих нормалей удовлетворяют условию (10).

Можно было бы доказать, что верна и обратная теорема: если для трех точек $A_1(x_1), A_2(x_2), A_3(x_3)$, принадлежащих параболы, выполняется равенство (10), то нормали к параболы в этих точках пересекаются в одной точке.

Итак, для того чтобы нормали к параболы в трех точках $A_1(x_1), A_2(x_2)$ и $A_3(x_3)$ пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, т. е. чтобы центроид треугольника $A_1A_2A_3$ лежал на оси параболы. (Центроид — точка пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$ имеет координаты

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right).$$

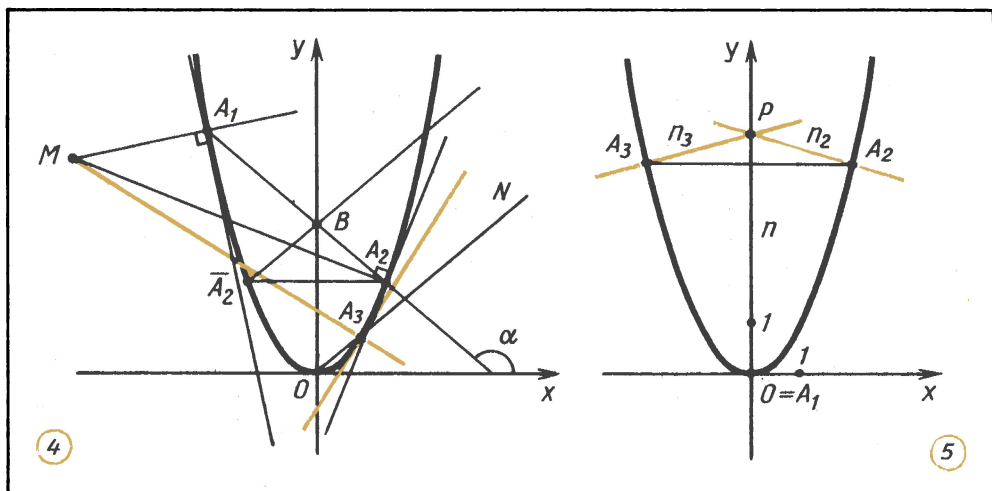
Из равенства (10) следует, что

$$x_1 + x_2 = -(x_3 + 0). \quad (10')$$

Это дает право утверждать, что если хорда A_1A_2 образует с положительным направлением оси x угол α , то хорда OA_3 — угол $180^\circ - \alpha$ (A_1, A_2, A_3 — основания нормалей, проведенных к параболы из одной точки).

З а д а ч а 4. В двух точках A_1 и A_2 параболы проведены к ней нормали, пересекающиеся в точке M . Провести третью нормаль к параболы, проходящую через точку M .

Р е ш е н и е. Пусть хорда A_1A_2 образует с осью x угол α . Построим луч ON (рис. 4), образующий с осью x угол $180^\circ - \alpha$.



Очевидно, $ON \parallel \bar{A}_2B$, где \bar{A}_2 — точка, симметричная точке A_2 относительно оси y , $B = A_1A_2 \cap y$. Точка A_3 пересечения луча ON с параболой будет основанием искомой нормали, так как для точек $A_1(x_1)$, $A_2(x_2)$, $A_3(x_3)$ выполняется условие (10').

6. *Построение нормалей.* Интересно рассмотреть два случая построения нормалей к параболе, проходящих через данную точку P :

1) когда точка P принадлежит оси параболы;

2) когда точка P принадлежит параболе.

1) Точка P имеет координаты $(0, \beta)$. Уравнение (9) в этом случае имеет вид:

$$2x^3 + (1 - 2\beta)x = 0, \text{ или } x(2x^2 + (1 - 2\beta)) = 0,$$

откуда

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2\beta - 1}{2}. \quad (11)$$

Уравнение (11) имеет вещественные корни при $2\beta - 1 \geq 0$.

Таким образом,

а) при $\beta > \frac{1}{2}$ через точку $P(0, \beta)$ проходят три вещественные нормали к данной параболе (рис. 5). Их основания

$$A_1(0), \quad A_2\left(\sqrt{\beta - \frac{1}{2}}\right), \quad A_3\left(-\sqrt{\beta - \frac{1}{2}}\right);$$

б) при $\beta = \frac{1}{2}$ через точку $P(0, \beta)$ проходят три вещественные слившиеся нормали с основанием $A(0)$;

в) при $\beta < \frac{1}{2}$ через точку $P(0, \beta)$ проходит одна вещественная нормаль с основанием $A(0)$ и две мнимые.

2) Точка P имеет координаты (α, α^2) . Уравнение (9) в этом случае имеет вид:

$$2x^3 + (1 - 2\alpha^2)x - \alpha = 0.$$

Преобразуем левую часть уравнения:

$$2x^3 + x - 2\alpha^2x - \alpha = 2x(x^2 - \alpha^2) + (x - \alpha) = (x - \alpha)(2x^2 + 2\alpha x + 1).$$

Тогда уравнение (9) можно записать в следующем виде:

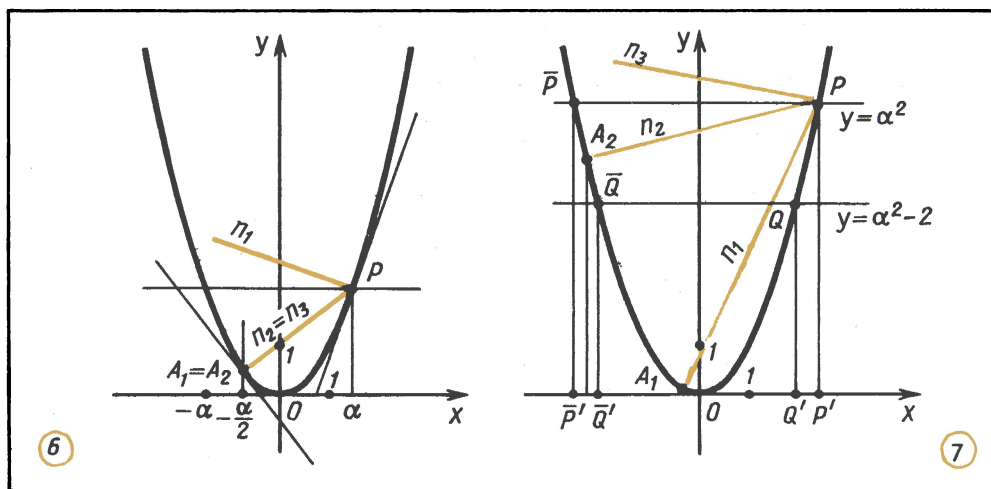
$$(x - \alpha)(2x^2 + 2\alpha x + 1) = 0,$$

откуда

$$x_1 = \alpha, \quad x_{2,3} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 2}}{2}.$$

Таким образом,

а) при $\alpha^2 < 2$ через точку $P(\alpha, \alpha^2)$ проходит одна вещественная нормаль и две мнимые;



б) при $\alpha^2 = 2$ через точку $P(\alpha, \alpha^2)$ проходят три вещественные нормали с основаниями $P(\alpha)$, $A_1(-\frac{\alpha}{2})$, $A_2(-\frac{\alpha}{2})$ (т. е. две нормали совпадают) (рис. 6);

в) при $\alpha^2 > 2$ через точку $P(\alpha, \alpha^2)$ проходят три различные вещественные нормали с основаниями $P(\alpha)$, $A_1(-\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 2}}{2})$, $A_2(-\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 2}}{2})$ (рис. 7).

Построение. Через точку $P(\alpha)$ проходит прямая $y = \alpha^2$. Проводим прямую $y = \alpha^2 - 2$. Точки Q и \bar{Q} ее пересечения с параболой проектируем на ось x . Проекции искомых точек A_1 и A_2 на ось x являются серединами отрезков $Q'\bar{P}'$ и $\bar{Q}'P'$, где P' , Q' , \bar{Q}' — проекции точек P , Q , \bar{Q} на ось x , а \bar{P}' — точка, симметричная точке P' относительно начала координат.

Задача 5. В концах нескольких параллельных хорд параболы построены нормали к ней. Доказать, что точки пересечения пар нормалей, проведенных в концах одной и той же хорды, принадлежат одной прямой.

Замечание. Уравнение этой прямой имеет вид:

$$x - 2ky = -2k^3 - k,$$

где k — угловой коэффициент данных параллельных хорд. Очевидно, полученная прямая является нормалью к параболу в точке $M(-k)$.

Парабола и окружность

1. *Пересечение параболы и окружности.* Пересечем параболу $y = x^2$ окружностью

$$x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0. \quad (12)$$

Для нахождения координат точек пересечения решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + Mx + Ny + P = 0, \\ y - x^2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Очевидно, достаточно найти абсциссы точек пересечения окружности и параболы. Исключив из системы уравнений y , получим:

$$x^4 + (1 + N)x^2 + Mx + P = 0. \quad (14)$$

Параметры, соответствующие четырем точкам пересечения, являются корнями уравнения (14). (Они могут быть как вещественными, так и мнимыми.)

Поскольку коэффициент при x^3 в уравнении (14) равен нулю, заключаем, следуя теореме Виета, что сумма его корней равна нулю.

Итак,

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \quad (15)$$

Обратно: если через точки, принадлежащие параболе, провести окружность, пересекающую параболу в четвертой точке A_4' (x_4'), то согласно прямой теореме

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4' = 0.$$

Учитывая (15), заключаем, что $x_4' = x_4$ и $A_4' = A_4$.

Итак, для того чтобы четыре точки $A_1(x_1)$, $A_2(x_2)$, $A_3(x_3)$, $A_4(x_4)$, расположенные на параболе, принадлежали одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$.

Построим четыре точки параболы, принадлежащие одной окружности. Пусть A_1 , A_2 , A_3 — три произвольные точки параболы (рис. 8). Построим для точек A_1 и A_2 симметричные им точки \bar{A}_1 и \bar{A}_2 (относительно оси y). Этим точкам соответствуют значения параметра $-x_1$ и $-x_2$.

Равенство (15) переписываем так: $x_3 + x_4 = (-x_1) + (-x_2)$. Но согласно (3) это означает, что хорды A_3A_4 и $\bar{A}_1\bar{A}_2$ параллельны. Поэтому точку A_4 получаем в результате пересечения параболы прямой, проходящей через A_3 параллельно хорде $\bar{A}_1\bar{A}_2$.

Если точки A_1 и A_2 параболы закреплены, то через них проходит пучок окружностей, пересекающих параболу в парах точек A_i и A_{i+1} ($i=3, 5, 7, \dots$), для которых $x_i + x_{i+1} = -(x_1 + x_2) = \text{const}$.

Следовательно, прямые A_iA_{i+1} параллельны между собой, причем угол наклона их к оси x равен $180^\circ - \alpha$, где α — угол наклона прямой A_1A_2 к оси x .

Далее, среди этих параллельных прямых имеется одна касательная к параболе в точке $P\left(-\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$. В этой точке окружность, проходящая через A_1 и A_2 , касается параболы.

Итак, если требуется построить окружность, проходящую через две точки A_1 и A_2 параболы и касающуюся ее, то надо для середины Q отрезка

A_1A_2 построить симметричную ей точку \bar{Q} относительно оси параболы и через \bar{Q} провести прямую, параллельную оси. Точка пересечения этой прямой с параболой и будет точкой касания искомой окружности с параболой. Таким образом, через каждые две точки параболы проходит одна окружность, касающаяся параболы в третьей точке.

Интересно отметить такой факт. Пусть хорды параболы A_1B_1 и A_2B_2 параллельны. Легко доказать, что если через концы каждой из этих хорд провести произвольную окружность, то хорды, соединяющие две другие точки пересечения C_1 и D_1 , C_2 и D_2 каждой окружности с параболой, тоже будут параллельны: $C_1D_1 \parallel C_2D_2$.

2. *Окружность, соприкасающаяся с параболой.* Если из четырех точек пересечения окружности с параболой три совпадают с некоторой точкой A , то окружность называется *соприкасающейся с параболой в точке A* .

Теорема. *Окружность, соприкасающаяся с параболой в точке A , пересекает параболу в такой точке B , что хорда, проходящая через точки, симметричные точкам A и B относительно оси параболы, параллельна касательной к параболе в точке A .*

Доказательство. Пусть $A(x_1)$ — точка соприкасания окружности с параболой, $B(x_2)$ — другая их общая точка (рис. 9). Согласно (15)

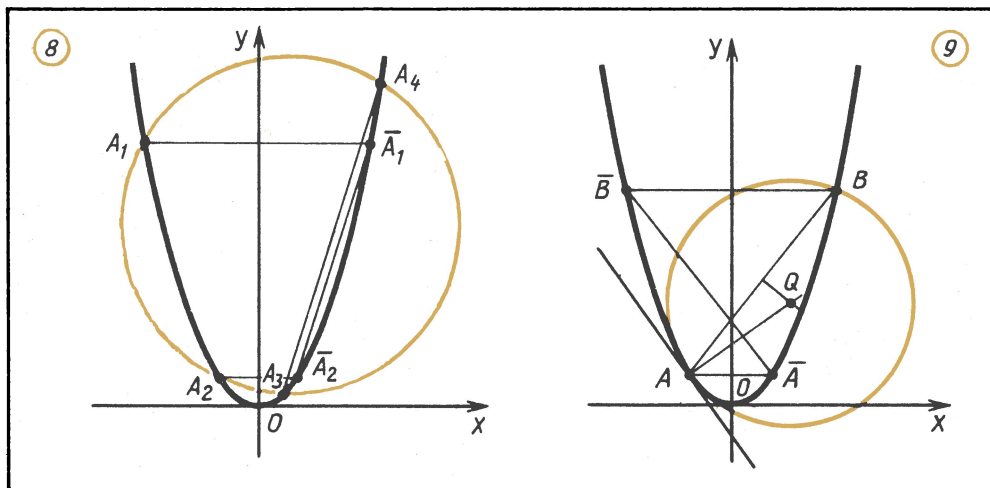
$$3x_1 + x_2 = 0. \quad (15')$$

$\bar{A}(-x_1)$, $\bar{B}(-x_2)$ — точки, симметричные точкам A и B относительно оси y . Угловым коэффициентом касательной t_A равен $k=2x$. Угловым коэффициентом хорды $\bar{A}\bar{B}$ равен $k_1=x_1-x_2$.

В силу (15') $k=k_1$.

Задача. Построить окружность, соприкасающуюся с параболой в точке A .

Решение. Строим касательную к параболе в точке $A(x_1)$ (рис. 9). Через точку $\bar{A}(-x_1)$ проводим прямую, параллельную этой касательной,



пересекающую параболу в точке $\overline{B}(-x_2)$. Точка $B(x_2)$, симметричная точке \overline{B} относительно оси y , есть вторая общая точка искомой окружности с параболой. Центр искомой соприкасающейся окружности есть точка пересечения нормали к параболе в точке $A(x_1)$ и серединного перпендикуляра к хорде AB .

Возможны и другие способы построения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что в параболу нельзя вписать параллелограмм.
2. Доказать, что множество точек пересечения взаимно перпендикулярных касательных к параболе есть прямая линия, перпендикулярная оси параболы.
3. Доказать, что отрезки, соединяющие точки касания взаимно перпендикулярных касательных к параболе, пересекаются в одной точке, принадлежащей оси параболы.
4. Точки A_1, A_2, A_3, A_4 , принадлежащие параболе, соединены последовательно ломаной линией. Затем через точку A_4 проведена прямая, параллельная A_1A_2 , до пересечения с параболой в точке A_5 . Аналогично построены хорды $A_5A_6 \parallel A_2A_3$, $A_6A_7 \parallel A_3A_4$. Доказать, что точка A_7 совпадает с точкой A_1 .
5. В параболу вписан треугольник. Доказать, что описанный около параболы треугольник, стороны которого соответственно параллельны сторонам данного треугольника, гомотетичен данному. Определить центр гомотетии.
6. Через точку A_0 , принадлежащую параболе, проведено несколько пар взаимно перпендикулярных хорд. Доказать, что гипотенузы всех полученных таким образом прямоугольных треугольников пересекаются в одной точке.
7. Доказать, что основания трех нормалей к параболе, пересекающихся в одной точке, расположены на одной окружности с вершиной параболы. Сформулировать и доказать обратное утверждение. (Использовать его при решении задачи 4, с. 146.)
8. Дан четырехугольник, вершинами которого являются точки пересечения окружности с параболой. Доказать, что средние линии этого четырехугольника и отрезок, соединяющий середины его диагоналей, пересекают ось параболы в одной и той же точке и делятся ею пополам.
9. На окружности даны четыре точки A_1, A_2, A_3, A_4 так, что четырехугольник $A_1A_2A_3A_4$ не является параллелограммом. Построить ось параболы, которой принадлежат эти четыре точки.

ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ЭЛЛИПСА И ОКРУЖНОСТИ

Изучение взаимного расположения эллипса³⁰ и окружности представляет интерес во многих вопросах евклидовой и неевклидовой геометрии, при решении конструктивных и графических задач. Исследование этого вопроса удобно вести методом координат, хотя и существуют чисто геометрические подходы к решению указанной проблемы.

В прямоугольной декартовой системе координат уравнения эллипса и окружности можно записать в следующем виде:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + s = 0, \quad r^2 = m^2 + n^2 - s > 0 \quad (2)$$

или

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = m^2 + n^2 - s. \quad (2')$$

В поставленной задаче мы ограничимся лишь выяснением вопроса о числе точек пересечения эллипса и окружности, когда две, три или четыре точки пересечения совпадают, какие системы точек высекают на эллипсе все окружности, проходящие через одну или две точки, лежащие или не лежащие на эллипсе.

Координаты точек пересечения эллипса и окружности являются решением системы уравнений (1) и (2). Чтобы решить эту систему, необходимо из нее исключить одно из неизвестных (x или y) и решить полученное уравнение относительно второго неизвестного (например, x). Исключение y из уравнений (1) и (2) не представляет особого труда. В самом деле, значение x^2 из уравнения (1) подставим в (2), после этого из уравнения (2) находим x и, наконец, подставляем это значение в уравнение (1). В итоге получаем довольно громоздкое уравнение четвертой степени относительно y . Это уравнение имеет вид:

$$b^2 \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^2 y^4 - 4b^2 n \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right) y^3 + 2 \left(2a^2 m^2 + 2b^2 n^2 + b^2(s + a^2) \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)\right) y^2 - 4b^2 (s + a^4) ny + b^2 (s + a^2)^2 - 4a^2 b^2 m^2 = 0.$$

Очевидно, исследовать корни этого уравнения дело не простое и поэтому естественно искать другой путь решения поставленной задачи.

Запишем уравнение эллипса посредством вспомогательной координаты (параметра) t :

$$\begin{cases} x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2}, \\ y = \frac{2bt}{1+t^2}. \end{cases} \quad (3)$$

Каждому вещественному значению t , равному t_0 , система (3) относит точку

$$\left(\frac{a(1-t_0^2)}{1+t_0^2}, \frac{2bt_0}{1+t_0^2} \right).$$

Эти координаты удовлетворяют уравнению (1):

$$\frac{a^2(1-t_0^2)^2}{(1+t_0^2)^2 \cdot a^2} + \frac{4b^2 t_0^2}{(1+t_0^2)^2 \cdot b^2} = \frac{(1-t_0^2)^2 + 4t_0^2}{(1+t_0^2)^2} = 1.$$

Следовательно, каждому значению t соответствует определенная точка на эллипсе. Оказывается, что только одной точке эллипса не соответствует никакое значение t : если $x = -a$, получаем:

$$-a = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2},$$

откуда находим, что $a=0$, а это противоречит условию $a>0$.

Условимся этой точке $C(-a; 0)$, являющейся левой вершиной эллипса, отнест значение $t = \infty$. После этого соглашения между всеми точками эллипса и всеми значениями t (включая значение $t = \infty$) устанавливается взаимно однозначное соответствие. Вершинам $A(a; 0)$, $B(0; b)$ и $D(0; -b)$ соответствуют такие значения t : $0, 1, -1$.

В частности, значениям α и $-\alpha$ соответствуют точки эллипса, симметричные относительно оси x , а значениям α и $\frac{1}{\alpha}$ — точки, симметричные относительно оси y .

Вернемся к вопросу о точках пересечения эллипса и окружности. Значения x и y из (3) подставим в (2):

$$\frac{a^2(1-t^2)^2 + 4b^2t^2}{(1+t^2)^2} - \frac{2am(1-t^2) + 4bnt}{1+t^2} + s = 0.$$

После упрощений получаем эквивалентное уравнение

$$(a^2 + 2am + s)t^4 - 4bnt^3 + (4b^2 - 2a^2 + 2s)t^2 - 4bnt + s - 2am + a^2 = 0. \quad (4)$$

В общем случае $a^2 + 2am + s \neq 0$, и уравнение (4) есть уравнение четвертой степени относительно t . Это значит, что оно имеет четыре корня, которым соответствуют четыре точки пересечения эллипса и окружности, если все эти точки вещественны:

$$T_1(t_1), T_2(t_2), T_3(t_3) \text{ и } T_4(t_4).$$

Уравнение (4) замечательно тем, что коэффициенты при t^3 и t равны между собой. Согласно теореме Виета это значит, что

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = t_2t_3t_4 + t_3t_4t_1 + t_4t_2t_1 + t_1t_2t_3, \quad (5)$$

где t_1, t_2, t_3, t_4 — корни уравнения (4). Соотношение (5) позволяет по трем корням уравнения (4) вычислить четвертый корень.

Воспользуемся уравнением (5) для решения ряда вопросов, касающихся взаимного расположения эллипса и окружности. Прежде всего выясним, когда все четыре корня равны между собой. В этом случае из (5) находим $4t_1 = 4t_1^3$, откуда следует $t_1' = 0, t_1'' = 1, t_1''' = -1$.

Если $t_1' = 0$ — четырехкратный корень, то из (4) следует:

$$2bn = 0, 4b^2 - 2a^2 + 2 = 0, s - 2am + a^2 = 0.$$

Отсюда $n = 0, s = a^2 - 2b^2, m = \frac{a^2 - b^2}{a}$.

Уравнение окружности (2) принимает вид:

$$x^2 + y^2 - \frac{2(a^2 - b^2)}{a}x + a^2 - 2b^2 = 0.$$

После преобразований получаем:

$$\left(x - \frac{a^2 - b^2}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{b^4}{a^2}. \quad (6)$$

Отсюда $r^2 = \frac{b^4}{a^2}$, или $r = \frac{b^2}{a}$.

Итак, радиус окружности, которая пересекает эллипс в его вершине A так, что все четыре точки пересечения совпадают с A , равен $\frac{b^2}{a}$, а координаты центра равны $\left(a - \frac{b^2}{a^2}; 0\right)$. Говорят, что окружность (6) имеет с эллипсом в вершине A касание третьего порядка. Легко проверить, что радиус этой окружности равен ординате точки эллипса, абсцисса которой совпадает с фокусом $F_1(c; 0)$ эллипса.

В самом деле,

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = \frac{(a^2 - c^2)b^2}{a^2} = \frac{b^4}{a^2}, \quad |y| = \frac{b^2}{a}.$$

В силу симметрии эллипса относительно оси y получаем уравнение окружности, имеющей с эллипсом в вершине $C(-a; 0)$ (при $t = \infty$) касание третьего порядка вида

$$\left(x + \frac{a^2 - b^2}{a}\right)^2 + y^2 = \frac{b^4}{a^2}. \quad (6')$$

Аналогичным образом находим уравнение окружности, имеющей в вершине $B(0; b)$ касание третьего порядка с эллипсом. Уравнение (4) должно иметь $t=1$ четырехкратным корнем:

$$bn = a^2 + 2am + s, \quad 4b^2 - 2a^2 + 2s = 6(a^2 + 2am + s), \\ s - 2am + a^2 = a^2 + 2am + s.$$

Отсюда

$$m = 0, \quad s = b^2 - 2a^2, \quad n = \frac{b^2 - a^2}{b}.$$

Уравнение искомой окружности имеет вид:

$$x^2 + y^2 - \frac{2(b^2 - a^2)}{b}y + b^2 - 2a^2 = 0,$$

или

$$x^2 + \left(y - \frac{b^2 - a^2}{b}\right)^2 = \frac{a^4}{b^2}. \quad (7)$$

Радиус окружности (7) равен $\frac{a^2}{b}$. Уравнение аналогичной окружности в вершине $D(0; -b)$ имеет вид:

$$x^2 + \left(y + \frac{b^2 - a^2}{b}\right)^2 = \frac{a^4}{b^2}. \quad (7')$$

Построение окружностей (6), (6'), (7), (7') не представляет труда.

Обратимся к построению окружности, которая пересекает эллипс в двух точках P и Q , причем точка P считается за три точки пересечения. Другими словами, составим уравнение окружности и построим ее, если уравнение (4) имеет трехкратный корень p . Из (5) следует, что

$$p^3 + 3p^2q - 3p - q = 0, \quad (8)$$

где q — значение t в точке Q .

С этой целью найдем угловой коэффициент прямой, соединяющей точки $T_1(t_1)$ и $T_2(t_2)$:

$$k_{12} = \frac{\frac{2bt_2}{1+t_2^2} - \frac{2bt_1}{1+t_1^2}}{\frac{a(1-t_2^2)}{1+t_2^2} - \frac{a(1-t_1^2)}{1+t_1^2}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{t_1t_2 - 1}{t_1 + t_2}, \quad t_1 \neq -t_2. \quad (9)$$

Аналогичным образом находим угловой коэффициент k_{34} прямой T_3T_4 :

$$k_{34} = \frac{b}{a} \cdot \frac{t_3t_4 - 1}{t_3 + t_4}, \quad t_3 \neq -t_4. \quad (10)$$

Мы исключили из рассмотрения тот случай, когда хорда T_1T_2 или T_3T_4 параллельна оси y .

Но из соотношения (5) следует, что

$$(t_1 + t_2) - t_3t_4(t_1 + t_2) = t_1t_2(t_3 + t_4) - (t_3 + t_4).$$

Отсюда

$$(t_1 + t_2)(t_3t_4 - 1) + (t_3 + t_4)(t_1t_2 - 1) = 0,$$

или

$$\frac{t_3t_4 - 1}{t_3 + t_4} + \frac{t_1t_2 - 1}{t_1 + t_2} = 0.$$

Учитывая соотношения (9) и (10), получаем:

$$k_{12} + k_{34} = 0. \quad (11)$$

Аналогичным образом получаем, что

$$k_{13} + k_{24} = 0, \quad k_{14} + k_{23} = 0, \quad (11')$$

причем предполагается, что ни одна из прямых T_iT_k не параллельна оси y .

В рассматриваемом случае $t_1 = t_2 = t_3 = p$, $t_4 = q$, поэтому из (11) следует, что угловой коэффициент k_{12} касательной к эллипсу в точке $T_1 = T_2$ отличается только знаком от углового коэффициента прямой $T_3T_4 \equiv PQ$. Это значит, что касательная к эллипсу в точке P и прямая PQ одинаково наклонены к оси x , образуя с ней равнобедренный треугольник.

Таким образом, если дана точка P , то строим в ней к эллипсу касательную, затем проводим через P прямую PQ так, чтобы касательная и прямая PQ образовали с осью x равнобедренный треугольник. Такая прямая PQ определяется однозначно, и тем самым по точке P находим

однозначно точку Q . Искомая окружность проходит через точки P и Q и касается эллипса в точке P . Этими данными окружность определяется однозначно. Она называется окружностью, соприкасающейся с эллипсом в точке P , и имеет с ним в точке P касание второго порядка, при этом точка P не совпадает с вершинами эллипса.

Остается составить уравнение окружности, соприкасающейся в точке P . Для этого найдем уравнение касательной к эллипсу в точке P . Угловым коэффициентом касательной равен согласно (9) $\frac{b}{a} \cdot \frac{p^2-1}{2p}$. Следовательно, уравнение касательной имеет вид:

$$y - \frac{2bp}{1+p^2} = \frac{b}{a} \cdot \frac{p^2-1}{2p} \left(x - \frac{a(1-p^2)}{1+p^2} \right).$$

После упрощения получаем уравнение касательной к эллипсу в точке P :

$$b(p^2-1)x - 2ap y + ab(p^2+1) = 0. \quad (12)$$

Уравнение нормали к эллипсу в точке P (т. е. прямой, перпендикулярной к касательной в точке P) имеет вид:

$$y - \frac{2bp}{1+p^2} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{2p}{p^2-1} \left(x - \frac{a(1-p^2)}{1+p^2} \right)$$

или

$$2ap(p^2+1)x + b(p^4-1)y + 2(a^2-b^2)p(p^2-1) = 0. \quad (13)$$

Серединный перпендикуляр отрезка PQ пересекает нормаль (13) в центре соприкасающейся окружности. Составим уравнение этого серединного перпендикуляра. Угловым коэффициентом прямой PQ равен $\frac{b}{a} \cdot \frac{pq-1}{p+q}$. Середина M хорды PQ имеет координаты

$$\frac{a}{2} \left(\frac{1-p^2}{1+p^2} + \frac{1-q^2}{1+q^2} \right), \quad b \left(\frac{p}{1+p^2} + \frac{q}{1+q^2} \right),$$

или

$$M \left(a \frac{1-p^2q^2}{(1+p^2)(1+q^2)}; \quad b \frac{(pq+1)(p+q)}{(1+p^2)(1+q^2)} \right).$$

Следовательно, серединный перпендикуляр хорды PQ имеет уравнение

$$y - b \frac{(pq+1)(p+q)}{(1+p^2)(1+q^2)} = -\frac{a(p+q)}{b(pq-1)} \cdot \left(x - a \frac{1-p^2q^2}{(1+p^2)(1+q^2)} \right),$$

или

$$a(p+q)(1+p^2)(1+q^2)x + b(pq-1)(1-p^2)(1+q^2)y + (a^2-b^2)(p^2q^2-1)(p+q) = 0. \quad (14)$$

Система уравнений (13) и (14) имеет следующее решение:

$$x = \frac{(a^2 + b^2) b (p^1 - 1) (p^2 q^2 - 1) (p - q)}{ab (q - p) (p^2 + 1)^3 (q^2 + 1)} = -\frac{a^2 - b^2}{a} \cdot \frac{(pq - 1)^2 (p^2 - 1)}{(p^2 + 1)^2 (q^2 + 1)}, \quad (15)$$

$$y = \frac{2a (a^2 - b^2) p (p^2 + 1) (p + q) (p^2 - q^2)}{ab (q - p) (p^2 + 1)^3 (q^2 + 1)} = -\frac{2 (a^2 - b^2)}{b} \cdot \frac{p (p + q)^2}{(p^2 + 1)^2 (q^2 + 1)}. \quad (16)$$

Но p и q связаны соотношением (8). Из него находим q :

$$q = \frac{3p - p^3}{3p^2 - 1}.$$

Если это значение q подставить в формулы (15) и (16), то после преобразований получим координаты $(m; n)$ центра S соприкасающейся окружности в точке $P(p)$:

$$x = m = -\frac{a^2 - b^2}{a} \cdot \frac{(p^2 - 1)^3}{(p^2 + 1)^3}, \quad (15')$$

$$y = n = -\frac{a^2 - b^2}{b} \cdot \frac{8p^3}{(p^2 + 1)^3}. \quad (16')$$

Отсюда

$$\left(\frac{x}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{(p^2 - 1)^2}{(p^2 + 1)^2}, \quad \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{4p^2}{(p^2 + 1)^2},$$

и после почленного сложения этих равенств получим:

$$\left(\frac{x}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, \quad c^2 = a^2 - b^2. \quad (17)$$

Полученному уравнению удовлетворяют координаты всех центров окружностей, соприкасающихся с эллипсом. Эти центры принадлежат кривой, носящей название *астроиды*²⁹. Если освободиться от иррациональности, то получим кривую шестого порядка:

$$(a^2 x^2 + b^2 y^2 - c^4)^3 + 27c^4 a^2 b^2 x^2 y^2 = 0. \quad (18)$$

Вычислим, наконец, радиус соприкасающейся окружности:

$$r^2 = \left(\frac{a(1 - p^2)}{1 + p^2} + \frac{a^2 - b^2}{a} \cdot \frac{(p^2 - 1)^3}{(p^2 + 1)^3} \right)^2 + \left(\frac{2bp}{1 + p^2} + \frac{a^2 - b^2}{b} \cdot \frac{8p^3}{(p^2 + 1)^3} \right)^2.$$

После преобразований получаем:

$$r = \frac{(4a^2 p^2 + b^2 (p^2 - 1)^2)^{\frac{3}{2}}}{ab (p^2 + 1)^3}. \quad (19)$$

Интерес представляет исследование уравнения (8):

$$p^3 + 3p^2 q - 3p - q = 0.$$

Для каждого значения p из уравнения находим одно значение q , однако для каждого значения q получаем три значения p . Докажем, что все эти значения p вещественны. В самом деле,

$$p^2(p+3q)=3p+q,$$

$$p^2=\frac{3p+q}{p+3q}.$$

Положим $p^2=u$. Тогда получаем:

$$p^2=u, \quad 3p+q=u(p+3q),$$

где q — данная постоянная.

Второе уравнение можно переписать в виде

$$u(p+3q)=3(p+3q)-8q,$$

$$(u-3)(p+3q)=-8q.$$

Итак, решения уравнения (8) получены как точки пересечения параболы и гиперболы:

$$\begin{cases} u=p^2, \\ (u-3)(p+3q)+8q=0. \end{cases} \quad (20)$$

Прямые $u=3$, $p=-3q$ являются асимптотами гиперболы, которые пересекаются в ее центре $G(3; -3q)$. В точке G левая часть уравнения гиперболы принимает значение $8q$, а для вершины $O(0; 0)$ параболы — значение $-9q$. Если $q \neq 0$, то эти значения имеют противоположные знаки, и поэтому вершина параболы лежит внутри гиперболы. Отсюда следует, что одну из ветвей гиперболы парабола пересекает дважды, а вторую ветвь — один раз. Следовательно, при $q \neq 0$ уравнение (8) имеет три действительных корня.

При $q=0$ это уравнение имеет также три действительных корня $p=0$, $p=\pm\sqrt{3}$. Поэтому каждому действительному значению q соответствуют три действительных значения p . Это значит, что через каждую точку Q эллипса проходят три окружности, соприкасающиеся с ним в точках $P_1(p_1)$, $P_2(p_2)$ и $P_3(p_3)$.

По свойствам корней уравнения имеем:

$$p_1+p_2+p_3=-3q, \quad p_1p_2+p_2p_3+p_3p_1=-3, \quad p_1p_2p_3=q. \quad (21)$$

Из соотношений (21) следует тождество

$$p_1+p_2+p_3+q=p_1p_2p_3+qp_1p_2+qp_2p_3+qp_3p_1.$$

Это значит согласно (5), что точки p_1 , p_2 , p_3 и Q принадлежат одной окружности. Но тогда, зная точки P_1 , P_2 и Q , можно построить точку P_3 . Другими словами, если известны две соприкасающиеся окружности, проходящие через точку Q , то можно построить и третью соприкасающуюся окружность, проходящую через точку Q .

Если $q > 0$, то из (21) заключаем, что два корня p_2 отрицательны и один положителен. Предположим, что $0 < q < 1$. В этом случае функция

$$f(p) = p^3 + 3p^2q - 3p - q$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$f(-\infty) = -\infty, f(-1) = 2(1+q) > 0, f(0) = -q < 0, f(1) = 2(q-1) < 0, \\ f(+\infty) = +\infty.$$

Таким образом, корни уравнения (8) при $0 < q < 1$ находятся в интервалах

$$-\infty < p_1 < -1, -1 < p_2 < 0, 1 < p_3 < \infty.$$

Это значит, что если точка Q находится в первой координатной четверти, то P_1 находится в третьей, P_2 — в четвертой, а P_3 — во второй. Итак, точки P_1, P_2, P_3, Q эллипса находятся по одной в каждой координатной четверти.

Рассмотрим случай, когда окружность касается эллипса в двух точках. Для этого положим в соотношении (5) $t_1 = t_2 = u, t_3 = t_4 = v, 2(u+v) = 2u^2v + 2uv^2$.

$$\text{Отсюда находим } (u+v)(uv-1) = 0.$$

Таким образом, либо $v = -u$, либо $v = \frac{1}{u}$. Это значит, что обе точки касания симметричны либо относительно оси x , либо относительно оси y .

Из уравнения (4) следует, что

$$u+v = \frac{2bn}{a^2+2am+s}.$$

Если точки касания симметричны относительно оси x , то $u+v=0$ и $n=0$. Но согласно (4) имеем, что

$$u^2v^2 = \frac{a^2-2am+s}{a^2+2am+s}.$$

Следовательно,

$$u^4 = \frac{a^2-2am+s}{a^2+2am+s}. \quad (22)$$

Если числитель и знаменатель дроби одного и того же знака, то u принимает положительное значение. Следовательно,

$$(a^2-2am+s) \cdot (a^2+2am+s) > 0,$$

или

$$(a^2+s^2) - 4a^2m^2 > 0. \quad (23)$$

Итак, если обе точки касания симметричны относительно оси x , то $n=0$ и коэффициенты s и m связаны соотношением (22). Учитывая (21), получаем:

$$(a^2+s)^2 > 4a^2m^2, \quad r^2 = m^2 - s.$$

Отсюда

$$(a^2+m^2-r^2)^2 > 4a^2m^2,$$

$$\text{или} \quad a^4 + m^4 + r^4 - 2a^2m^2 - 2a^2r^2 - 2m^2r^2 > 0. \quad (23')$$

Далее, из (4) находим:

$$u^2 + v^2 + 4uv = \frac{4b^2 - 2a^2 + 2s}{a^2 + 2m + s},$$

$$u^2 = \frac{a^2 - 2b^2 - s}{a^2 + 2am + s}. \quad (24)$$

Из системы уравнений (22) и (24) находим по значению u значения m и s , а именно

$$u^2 + 1 = \frac{2a^2 - 2b^2 + 2am}{a^2 + 2am + s},$$

$$u^4 - 1 = \frac{-4am}{a^2 + 2am + s}.$$

После почленного деления находим:

$$u^2 - 1 = \frac{2am}{b^2 - a^2 - am},$$

и окончательно:

$$m = \frac{(b^2 - a^2)(n^2 - 1)}{a(n^2 + 1)},$$

или

$$m = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot x_0,$$

где x_0 — абсцисса точки касания. Но $a^2 - b^2 = c^2$, поэтому

$$m = e^2 x_0, \quad (25)$$

где e — эксцентриситет эллипса.

Нетрудно подсчитать радиус r этой окружности:

$$r^2 = \frac{b^2(a^2 - e^2 x_0^2)}{a^2}. \quad (26)$$

Итак, уравнение окружности, касающейся эллипса в точках $(x_0; y_0)$ и $(x_0; -y_0)$, имеет вид:

$$(x - e^2 x_0)^2 + y^2 = \frac{b^2(a^2 - e^2 x_0^2)}{a^2}. \quad (27)$$

Аналогичным образом можно составить уравнение окружности, касающейся в двух точках u и $\frac{1}{u}$, симметричных относительно оси y . В этом случае согласно (4) имеем:

$$\frac{a^2 - 2am + s}{a^2 + 2am + s} = 1.$$

Отсюда находим, что $m=0$. Далее, $2\left(u+\frac{1}{u}\right)=\frac{4bn}{a^2+s}$, откуда следует:

$$u+\frac{1}{u}=\frac{2bn}{a^2+s}. \quad (28)$$

Наконец,

$$u^2+4+\frac{1}{u^2}=\frac{4b^2-2a^2+2s}{a^2+s},$$

откуда находим:

$$u^2+\frac{1}{u^2}=\frac{4b^2-6a^2-2s}{a^2+s}. \quad (29)$$

Из системы уравнений (28) и (29) находим n и s :

$$s=\frac{2bn-a^2\left(u+\frac{1}{u}\right)}{u+\frac{1}{u}} \quad \text{и} \quad u^2+\frac{1}{u^2}=\frac{4b^2-6a^2-\frac{4bn-2a^2\left(u+\frac{1}{u}\right)}{u+\frac{1}{u}}}{a^2+\frac{2bn-a^2\left(u+\frac{1}{u}\right)}{u+\frac{1}{u}}}.$$

После упрощений получаем:

$$n=-\frac{c^2}{b^2}\cdot y_0. \quad (30)$$

Если это значение подставить в (28), то найдем s :

$$s=-a^2-\frac{c^2}{b^2}y_0^2.$$

Но $r^2=n^2-s$. Поэтому

$$r^2=\frac{c^4}{b^4}y_0^2+a^2+\frac{c^2}{b^2}y_0^2, \quad r^2=\frac{a^2}{b^4}(b^4+c^2y_0^2). \quad (31)$$

Следовательно, уравнение искомой окружности имеет вид:

$$x^2+\left(y+\frac{c^2}{b^2}y_0\right)^2=\frac{a^2}{b^4}(b^4+c^2y_0^2). \quad (32)$$

В заключение остается еще выяснить, какой вид имеют уравнения окружностей, которые касаются эллипса в двух комплексно-сопряженных точках.

В этом случае, когда $u+v=0$, должно выполняться еще $\bar{u}=v$, где \bar{u} — число, комплексно-сопряженное с u . Следовательно, $u=-v$ и $u=\bar{v}$. Это значит, что u — чисто мнимое число: $u=i\alpha$, $v=-i\alpha$.

Окружность должна пройти через эти точки и иметь уравнение вида

$$x^2 + y^2 - 2mx + s = 0.$$

Но

$$x_0 = \frac{a(1-u^2)}{1+u^2} = \frac{a(1+\alpha^2)}{1-\alpha^2}$$

есть абсцисса точки касания. Очевидно, $|x_0| > a$. Абсциссу центра находим из формулы (25):

$$m = e^2 x_0.$$

Однако ввиду того, что $r^2 > 0$, имеем согласно (27)

$$a^2 - e^2 x_0^2 > 0,$$

или

$$x_0^2 < \frac{a^2}{e^2}, \quad |x_0| < \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}.$$

Итак, положительная абсцисса точки касания заключена в следующем интервале:

$$a < x_0 < \frac{a^2}{c},$$

а для соответствующей абсциссы центра имеем:

$$ae^2 < m < e^2 \cdot \frac{a^2}{c},$$

или

$$c \cdot e < m < c. \quad (33)$$

Уравнение искомой окружности имеет вид (27):

$$(x-m)^2 + y^2 = \frac{b^2}{a^2} \left(a^2 - \frac{m^2}{e^2} \right),$$

или после преобразований:

$$(x-m)^2 + y^2 = \frac{b^2}{c^2} (c^2 - m^2), \quad (34)$$

где m определяется из (33).

Если же обе точки касания симметричны относительно оси y , то $v = \frac{1}{u}$, $v = \bar{u}$. Отсюда $u \cdot \bar{u} = 1$. Это значит, что

$$u = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

$$\text{Следовательно, } l_0 = \frac{2bu}{1+u^2} = \frac{2b(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{1 + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2i \sin \varphi \cos \varphi} = \frac{b}{\cos \varphi}.$$

Отсюда согласно (30) находим абсциссу центра:

$$n = -\frac{c^2}{b \cos \varphi}. \quad (35)$$

Из полученного уравнения видно, что

$$\frac{c^2}{b^2} < |n| < \infty. \quad (36)$$

Уравнение искомой окружности имеет вид (32):

$$x^2 + (y-n)^2 = \frac{a^2}{b^4} \cdot (b^4 + c^2 \cdot \frac{n^2 b^4}{c^4}), \text{ или} \\ x^2 + (y-n)^2 = \frac{a^2}{c^2} (n^2 + c^2), \quad (37)$$

где n определяется из (36).

Остается, наконец, выяснить, когда $r=0$.

Согласно (34) находим $m = \pm c$. Это значит, что две окружности нулевого радиуса касаются эллипса соответственно в двух комплексно-сопряженных точках, если центры этих окружностей совпадают с фокусами эллипса. Но в таком случае окружности распадаются на пары мнимых (изотропных) прямых:

$$y = \pm i(x-m),$$

проходящих через фокусы эллипса.

Итак, пара мнимых касательных к эллипсу, проходящих через его фокус, представляет собой окружность нулевого радиуса, состоящую из одной вещественной точки — фокуса эллипса.

Рассмотрим, наконец, окружности, проходящие через две точки эллипса и касающиеся его в третьей точке.

Пусть $t_1 = p$, $t_2 = q$, $t_3 = t_4 = l$. Тогда согласно (5) имеем:

$$p + q + 2l = 2pql + (p + q)l^2.$$

Из полученного квадратного уравнения находим:

$$(p + q)l^2 + 2(pq - 1)l - (p + q) = 0, \\ l = \frac{pq - 1 \pm \sqrt{(pq - 1)^2 + (p + q)^2}}{p + q}, \\ l = \frac{(pq - 1) \pm \sqrt{p^2 q^2 + p^2 + q^2 + 1}}{p + q} = \frac{(pq - 1) \pm \sqrt{(p^2 + 1)(q^2 + 1)}}{p + q}.$$

Полученные значения l всегда вещественны. Итак, через две точки эллипса проходят две окружности, касающиеся его в двух других точках. Следует, однако, заметить, что $l_1 l_2 = -1$. Это значит, что точки касания симметричны относительно центра эллипса. Касательные к эллипсу в точках касания с окружностью параллельны и вместе с хордой PQ одинаково наклонены к осям эллипса.

ВЕКТОРНО-КООРДИНАТНОЕ ЗАДАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПЛОСКОСТИ И ПРОСТРАНСТВА

Элементы векторной алгебры имеют разнообразные применения в школьном курсе геометрии. Многие вопросы теории (перпендикулярность, вычисление углов и расстояний, введение координат и др.) изучаются посредством векторов.

Ниже рассматривается цикл задач, в которых в векторной форме решается вопрос о задании не только линейных преобразований, но и нелинейных преобразований — квадратичных преобразований плоскости и пространства. Поиск подобных задач и применение векторов для их решения сводятся к составлению систем уравнений с векторными переменными и решению таких систем. Трудности алгебраического характера, геометрическое истолкование полученных решений позволяют на достаточно элементарном учебном материале овладеть векторными методами и приложениями векторов, столь важными при решении многих задач механики и физики. В ряде случаев сочетание векторов с координатами делает полученные решения более удобными в вычислительном отношении, в геометрической оценке полученных результатов.

I. *Центральная симметрия* Z_M задается своим центром M . Если O — начало и $Z_M(x)=y$, то $\vec{XM}=\vec{MY}$, $\vec{OM}-\vec{OX}=\vec{OY}-\vec{OM}$. Отсюда находим $\vec{OY}=2\vec{OM}-\vec{OX}$. В дальнейшем для краткости букву O опустим. Окончательно получаем формулу центральной симметрии

$$\vec{Y}=2\vec{M}-\vec{X}. \quad (1)$$

Формула (1) задает центральную симметрию на плоскости и в пространстве (в зависимости от того, какое множество эта симметрия отображает на себя).

II. *Параллельный перенос* задается парой соответствующих точек: A и $B=\vec{a}(A)$. Если $\vec{a}(X)=Y$, то $\vec{XY}=\vec{a}$ и $\vec{Y}-\vec{X}=\vec{a}$. Отсюда

$$\vec{Y}=\vec{X}+\vec{a}, \vec{a}=\vec{AB}. \quad (2)$$

Композиция переносов \vec{a} и \vec{b} есть перенос $\vec{a}+\vec{b}$.

Действительно, согласно (1) $(\vec{Y} = \vec{X} + \vec{a}, \vec{Z} = \vec{Y} + \vec{b}) \Rightarrow (\vec{Z} = \vec{X} + (\vec{a} + \vec{b}))$.

Композиция двух центральных симметрий Z_M и Z_N есть $\vec{2MN}$.
В самом деле,

$$Z_M: \vec{Y} = 2\vec{M} - \vec{X}; \quad Z_N: \vec{Z} = 2\vec{N} - \vec{Y}.$$

Отсюда

$$\vec{Z} = \vec{X} + 2\vec{N} - 2\vec{M} \quad \text{или} \quad \vec{Z} = \vec{X} + 2\vec{MN}.$$

III. Если M — центр *гомотетии* с коэффициентом k , то

$$\vec{MY} = k\vec{MX}, \quad k \neq 0.$$

Имеем:

$$\vec{Y} - \vec{M} = k(\vec{X} - \vec{M}),$$

откуда получаем:

$$\vec{Y} = k\vec{X} + (1 - k)\vec{M}. \quad (3)$$

Рассмотрим композицию двух гомотетий с различными центрами:

$$H_M^k: \vec{Y} = k\vec{X} + (1 - k)\vec{M}, \quad k \neq 1; \quad (M \neq N)$$

$$H_N^l: \vec{Z} = l\vec{Y} + (1 - l)\vec{N}, \quad l \neq 1.$$

Имеем:

$$\vec{Z} = kl\vec{X} + ((1 - k)l\vec{M} + (1 - l)\vec{N}). \quad (4)$$

Пусть $kl \neq 1$. Тогда

$$\vec{Z} = kl\vec{X} + (1 - kl) \frac{(l - kl)\vec{M} + (1 - l)\vec{N}}{1 - kl}.$$

Но

$$\frac{(l - kl)\vec{M} + (1 - l)\vec{N}}{1 - kl} = m\vec{M} + n\vec{N}, \quad m + n = 1.$$

Это значит, что $m\vec{M} + n\vec{N} = \vec{P}$, где P — точка, принадлежащая прямой MN . Следовательно,

$$\vec{Z} = kl\vec{X} + (1 - kl)\vec{P}.$$

Далее, если $\vec{MP} = \lambda\vec{PN}$, то

$$\vec{P} = \frac{\vec{M} + \lambda\vec{N}}{1 + \lambda} \left(\frac{1}{1 + \lambda} = m, \quad \frac{\lambda}{1 + \lambda} = n \right),$$

где $m = \frac{l - kl}{1 - kl}$. Но $\lambda = \frac{1}{m} - 1$, поэтому

$$\lambda = \frac{1 - l}{l - kl}. \quad (5)$$

Итак, композиция двух гомотетий H_M^k и H_M^l есть при $kl \neq 1$ гомотетия с коэффициентом kl и центром P , принадлежащим прямой MN , причем точка P делит отрезок MN в отношении λ , определяемом формулой (5).

Если $kl=1$, то из (4) получаем:

$$\vec{Z} = \vec{X} + (1-l) \vec{MN}.$$

В этом случае имеем перенос \vec{a} , равный $(1-l) \vec{MN}$ и отличный от тождественного преобразования. И только при $kl=1$, $M=N$ получаем тождественное преобразование.

Нетрудно заметить, что при $k=-1$ формула (3) принимает вид (1), т. е. гомотетия с коэффициентом, равным -1 , есть центральная симметрия. Остается добавить, что формула (3) задает как гомотетию плоскости, так и гомотетию пространства.

IV. Чтобы получить формулы *осевой симметрии плоскости*, достаточно задать ось симметрии l своей точкой M и перпендикулярным к оси вектором \vec{n} ($\vec{n} \neq \vec{0}$). Если $S_l(X)=Y$, то

$$\begin{cases} \vec{XY} = k\vec{n}, \\ \vec{M_0M} \cdot \vec{n} = 0, \end{cases} \text{ где } \vec{M_0} = \frac{\vec{X} + \vec{Y}}{2}.$$

Систему уравнений можно переписать так:

$$\begin{cases} \vec{Y} - \vec{X} = k\vec{n}, \\ \left(\vec{M} - \frac{\vec{X} + \vec{Y}}{2} \right) \cdot \vec{n} = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения умножением скалярно на \vec{n} получим:

$$\vec{Y} \cdot \vec{n} = \vec{X} \cdot \vec{n} + k\vec{n}^2.$$

Подставим полученное значение $\vec{Y} \cdot \vec{n}$ во второе уравнение:

$$2\vec{M} \cdot \vec{n} - \vec{X} \cdot \vec{n} - (\vec{X} \cdot \vec{n} + k\vec{n}^2) = 0.$$

Отсюда

$$k\vec{n}^2 = 2(\vec{M} \cdot \vec{n} - \vec{X} \cdot \vec{n}) \text{ и } k = \frac{2(\vec{M} \cdot \vec{n} - \vec{X} \cdot \vec{n})}{\vec{n}^2}.$$

Искомая формула осевой симметрии плоскости имеет вид:

$$\vec{Y} = \vec{X} + \frac{2(\vec{M} \cdot \vec{n} - \vec{X} \cdot \vec{n})}{\vec{n}^2} \vec{n}. \quad (6)$$

Если \vec{n} — единичный вектор, то $\vec{n}^2=1$. Если, кроме того, ось l симметрии проходит через начало O , то можно положить $M=O$ и $\vec{M}=\vec{O}$. В этом случае формула (6) принимает более простой вид:

$$\vec{Y} = \vec{X} - 2(\vec{X} \cdot \vec{n}) \vec{n}. \quad (7)$$

Обращаем внимание на то, что формулой (6) задается также симметрия относительно плоскости,³¹ определяемой своей точкой M и вектором \vec{n} ,

перпендикулярным этой плоскости. Если плоскость симметрии проходит через O , а вектор \vec{n} единичный, то плоскостная симметрия задается формулой (7).

V. Поворот плоскости вокруг начала координат можно получить как композицию осевых симметрий S_l и $S_{l'}$, $l \cap l' = 0$, $l \perp \vec{n}$, $l' \perp \vec{m}$.

Имеем:

$$\vec{Y} = \vec{X} - 2(\vec{X} \cdot \vec{n})\vec{n}, \quad \vec{Z} = \vec{Y} - 2(\vec{Y} \cdot \vec{m})\vec{m}.$$

Отсюда находим формулу для поворота R_0^φ плоскости вокруг точки O :

$$\vec{Z} = \vec{X} - 2(\vec{X} \cdot \vec{n})(\vec{n} - 2(\vec{m} \cdot \vec{n})\vec{m}) - 2(\vec{X} \cdot \vec{m})\vec{m}, \quad \varphi = 2(\widehat{\vec{m} \vec{n}}). \quad (8)$$

Формула (8) показывает, что при $\vec{m} \cdot \vec{n} \neq 0$ имеем $S_{l'} \circ S_l \neq S_l \circ S_{l'}$.

Перестановочность симметрий возможна лишь тогда (при $l \neq l'$), когда $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$, т. е. когда оси l и l' перпендикулярны.

Если полагать, что (7) задает плоскостную симметрию, то (8) задает поворот пространства вокруг оси ρ , перпендикулярной единичным векторам \vec{m} и \vec{n} .

Неподвижные точки поворота (8) найдем из дополнительного условия $\vec{Z} = \vec{X}$.

Из (8) получаем:

$$(\vec{X} \cdot \vec{n})(\vec{n} - 2(\vec{m} \cdot \vec{n})\vec{m}) + (\vec{X} \cdot \vec{m})\vec{m} = 0.$$

Отсюда

$$(\vec{X} \cdot \vec{m} - 2(\vec{m} \cdot \vec{n})(\vec{X} \cdot \vec{n}))\vec{m} + (\vec{X} \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{0}.$$

Но векторы \vec{m} и \vec{n} линейно независимы, поэтому

$$\vec{X} \cdot \vec{m} - 2(\vec{m} \cdot \vec{n})(\vec{X} \cdot \vec{n}) = 0, \quad \vec{X} \cdot \vec{n} = 0.$$

Из этих условий следует:

$$\vec{X} \cdot \vec{m} = 0, \quad \vec{X} \cdot \vec{n} = 0.$$

В случае поворота плоскости неподвижная точка будет $\vec{X} = \vec{0}$, т. е. начало O . Для пространства получаем $\vec{X} \perp \vec{m}$, $\vec{X} \perp \vec{n}$, т. е. множество точек X есть прямая ρ , проходящая через начало O перпендикулярно векторам \vec{m} и \vec{n} .

Если в формуле (8) вместо \vec{X} подставить $\vec{X} + \vec{a}$, то получим общую формулу поворота плоскости вокруг центра или пространства вокруг оси.

VI. Формуле осевой симметрии плоскости можно придать другой вид, если ось l задать своей точкой M и направляющим вектором \vec{a} . В этом случае имеем:

$$\vec{X}\vec{Y} \cdot \vec{a} = 0, \quad \frac{1}{2}(\vec{X} + \vec{Y}) - \vec{M} = k\vec{a}.$$

Умножим второе равенство скалярно на \vec{a} , получим:

$$\vec{X} \cdot \vec{a} + \vec{Y} \cdot \vec{a} - 2\vec{M} \cdot \vec{a} = 2k\vec{a}^2.$$

Но из первого равенства следует $(\vec{Y} - \vec{X}) \cdot \vec{a} = 0$, или $\vec{Y} \cdot \vec{a} = \vec{X} \cdot \vec{a}$.

Следовательно, $k = \frac{\vec{X} \cdot \vec{a} - \vec{M} \cdot \vec{a}}{\vec{a}^2}$.

Но $\vec{X} + \vec{Y} - 2\vec{M} = 2k\vec{a}$, поэтому

$$\vec{Y} = -\vec{X} + \frac{2(\vec{X} \cdot \vec{a} - \vec{M} \cdot \vec{a})}{\vec{a}^2} \vec{a} + 2\vec{M}. \quad (9)$$

Формулой (9) задается осевая симметрия пространства.

Если принять, что $\vec{a}^2 = 1$, а ось l проходит через точку O , то $\vec{M} = \vec{0}$ и формула (9) принимает простой вид:

$$\vec{Y} = -\vec{X} + 2(\vec{X} \cdot \vec{a}) \vec{a}. \quad (10)$$

VII. Произвольное *перемещение первого рода* пространства, как известно, можно получить как композицию двух осевых симметрий, причем одну из осей симметрии можно провести через заданную точку.

Если осью l' задается осевая симметрия $S_{l'}$, $l' \parallel \vec{b}$, $\vec{b}^2 = 1$, то

$$\vec{Z} = -\vec{Y} + 2(\vec{Y} \cdot \vec{b} - \vec{M} \cdot \vec{b}) \vec{b} + 2\vec{M}. \quad (11)$$

Подставив в (11) вместо \vec{Y} его значение из (10), получим общую формулу перемещения первого рода пространства:

$$\vec{Z} = \vec{X} - 2(\vec{X} \cdot \vec{a}) \vec{a} + 2((-\vec{X} + 2(\vec{X} \cdot \vec{a}) \vec{a}) \cdot \vec{b} - \vec{M} \cdot \vec{b}) \vec{b} + 2\vec{M}. \quad (12)$$

При общих предположениях формулой (12) задается *винтовое перемещение*, частные виды которого — поворот вокруг оси, перенос и тождественное преобразование. Для общего случая требуется, чтобы векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{M} не были компланарными. Чтобы получить поворот вокруг оси, необходимо положить $\vec{M} = \vec{0}$, но считать векторы \vec{a} и \vec{b} неколлинеарными.

VII'. Чтобы получить формулу *преобразования подобия плоскости* (первого рода), необходимо в формулу (8) на место \vec{X} подставить $k\vec{X}$, где k — коэффициент гомотетии ($k \neq 0$).

Если такую подстановку сделать в формуле (7), то получим подобие второго рода плоскости. В обоих случаях центр подобия совпадает с точкой O .

Если же \vec{X} заменить на $k\vec{X} + \vec{a}$, то получим формулы преобразования подобия плоскости в общем виде.

VIII. Полученные формулы можно применить к решению различных задач.

Задача 1. Дана прямая $l(M, \vec{n})$, где $\vec{n} \perp l$, и точка X . Найти вектор \vec{X}_0 , где X_0 — проекция точки X на прямой l , и расстояние $d = |\vec{X}_0 \vec{X}|$. Вычислить это расстояние для случая, когда прямая l задана своей точкой и направляющим вектором.

Решение. Воспользуемся формулой (6). Очевидно,

$$\vec{X}_0 = \frac{1}{2}(\vec{X} + \vec{Y}),$$

следовательно, $\vec{X} = \vec{X}_0 + \frac{1}{\vec{n}^2} ((\vec{M} - \vec{X}) \cdot \vec{n}) \vec{n}$.

$$\text{Отсюда } d = |\vec{X}_0 \vec{X}| = \frac{|(\vec{M} - \vec{X}) \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

Если перейти к координатам

$$\vec{X} = (x_1; y_1; z_1), \quad \vec{n} = (A; B), \quad |\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2},$$

то получим:

$$d = \frac{|A(x - x_1) + B(y - y_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Положив $Ax_1 + By_1 = -C$, найдем известную формулу:

$$d = \frac{|Ax + By + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где $Ax + By + C = 0$ — уравнение оси симметрии.

Аналогично получаем формулу для вычисления расстояния от точки $\vec{X}(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d = \frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Если прямая l дана своей точкой M и направляющим единичным вектором \vec{a} , то согласно (9) найдем проекцию X_0 точки X на ось l :

$$\vec{X}_0 = ((\vec{X} - \vec{M}) \cdot \vec{a}) \vec{a} + \vec{M}.$$

Расстояние от точки X до прямой l находим по формуле

$$d = |\vec{X} - ((\vec{X} - \vec{M}) \cdot \vec{a}) \vec{a} - \vec{M}|.$$

Задача 2. Найти множество точек пространства, каждая из которых равноудалена от двух данных скрещивающихся прямых.

Решение. Пусть прямые l_1 и l_2 заданы своими точками M_1 и M_2 и единичными направляющими векторами \vec{a} и \vec{b} . Если $[M_1 M_2]$ — общий перпендикуляр данных прямых, а O — середина отрезка $M_1 M_2$, то $\vec{M}_2 = -\vec{M}_1 = \vec{M}$, $\vec{M} \cdot \vec{a} = 0$, $\vec{M} \cdot \vec{b} = 0$.

Имеем:

$$d_1^2 = ((\vec{X} - \vec{M}) - ((\vec{X} - \vec{M}) \cdot \vec{a}) \vec{a})^2,$$

$$d_2^2 = ((\vec{X} + \vec{M}) - ((\vec{X} + \vec{M}) \cdot \vec{b}) \vec{b})^2.$$

По условию задачи $d_1^2 = d_2^2$, т. е.

$$((\vec{X} - \vec{M}) - ((\vec{X} - \vec{M}) \cdot \vec{a}) \vec{a})^2 = ((\vec{X} + \vec{M}) - ((\vec{X} + \vec{M}) \cdot \vec{b}) \vec{b})^2.$$

Отсюда

$$4\vec{M} \cdot \vec{X} + (\vec{X} \cdot \vec{a})^2 - (\vec{X} \cdot \vec{b})^2 = 0.$$

Если $\vec{X}=(x; y; z)$, $\vec{M}=(0; 0; 1)$, $\vec{a}=(\cos \alpha; -\sin \alpha; 0)$, $\vec{b}=(\cos \alpha; \sin \alpha; 0)$, то при $\sin 2\alpha \neq 0$ векторы \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны. Последнее равенство принимает вид

$$4z + (x \cos \alpha - y \sin \alpha)^2 - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 = 0.$$

После упрощений получим уравнение искомого множества точек:

$$xy = 2pz,$$

где $p = \sin 2\alpha$.

Мы получили уравнение седловидной линейчатой поверхности второго порядка, которую называют *гиперболическим параболоидом*. Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 2α .

Задача 3. Даны три гомотетии H_A^k , H_B^l , H_C^m с различными центрами и не равными единице коэффициентами гомотетии. Выяснить, как расположены точки A , B и C и какова зависимость между k , l и m , если выполняется равенство

$$H_C^m \circ H_B^l \circ H_A^k = H_A^k \circ H_B^l \circ H_C^m.$$

Решение. Для сокращения выкладок будем считать, что $A=O$. Тогда

$$H_A^k: \vec{Y} = k\vec{X}; H_B^l: \vec{Z} = l\vec{Y} + (1-l)\vec{B}; H_C^m: \vec{T} = m\vec{Z} + (1-m)\vec{C}.$$

Отсюда получаем, с одной стороны,

$$\vec{T} = m(l(k\vec{X}) + (1-l)\vec{B}) + (1-m)\vec{C},$$

а с другой —

$$H_C^m: \vec{Y}_1 = m\vec{X} + (1-m)\vec{C}; H_B^l: \vec{Z}_1 = l\vec{Y}_1 + (1-l)\vec{B}, H_A^k: \vec{T}_1 = k\vec{Z}_1,$$

откуда

$$\vec{T}_1 = k(l(m\vec{X} + (1-m)\vec{C}) + (1-l)\vec{B}).$$

Но $\vec{T}_1 = \vec{T}$, поэтому

$$klm\vec{X} + kl(1-m)\vec{C} + k(1-l)\vec{B} = klm\vec{X} + m(1-l)\vec{B} + (1-m)\vec{C}.$$

После упрощений последнее равенство принимает вид:

$$(-klm + kl + m - 1)\vec{C} + (k - kl - m + ml)\vec{B} = 0,$$

или

$$(kl - 1)(1 - m)\vec{C} + (k - m)(1 - l)\vec{B} = \vec{0}.$$

По условию задачи $m \neq 1$, $l \neq 1$, $\vec{C} \neq \vec{0}$, $\vec{B} \neq \vec{0}$. Поэтому если $kl \neq 1$, то и $k \neq m$, и векторы \vec{B} и \vec{C} коллинеарны, т. е. точки A , B и C принадлежат одной прямой. Если же $kl = 1$, то и $k = m$, и точки A , B и C произвольно расположены на плоскости.

Задача 4. Записать в координатах формулы осевой симметрии плоскости и плоскостной симметрии пространства.

Решение. Воспользуемся формулой (6). Положив

$$\vec{X}=(x; y), \vec{Y}(x'; y'), \vec{n}=(A; B), \vec{M} \cdot \vec{n} = -C,$$

получим:

$$\begin{cases} x' = x - \frac{2A(Ax + By + C)}{A^2 + B^2}, \\ y' = y - \frac{2B(Ax + By + C)}{A^2 + B^2}. \end{cases} \quad (6')$$

Здесь $Ax + By + C = 0$ — уравнение оси симметрии.

Если формулу (6) рассмотреть как задание симметрии относительно плоскости, то

$$\vec{X} = (x; y; z), \quad \vec{Y} = (x'; y'; z'), \quad \vec{n} = (A; B; C), \quad \vec{M} \cdot \vec{n} = -D$$

и координатные формулы плоскостной симметрии принимают вид:

$$\begin{cases} x' = x - \frac{2A(Ax + By + Cz + D)}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ y' = y - \frac{2B(Ax + By + Cz + D)}{A^2 + B^2 + C^2}, \\ z' = z - \frac{2C(Ax + By + Cz + D)}{A^2 + B^2 + C^2}. \end{cases} \quad (6'')$$

Здесь $Ax + By + Cz + D = 0$ — уравнение плоскости симметрии.

IX. Векторы удобно также применить при задании преобразований плоскости и пространства, отличных от перемещений и подобий.

Рассмотрим несколько преобразований плоскости и пространства такого вида.

Задача 1. Даны две точки A и B . Для каждой точки $X \notin (AB)$ строим точку Y , такую, чтобы для треугольника ABX точка Y была ортоцентром (точкой пересечения высот). Изучить отображение $X \xrightarrow{f} Y$.

Решение. Рассматриваемое отображение имеет смысл при условии, что $X \notin (AB)$. Далее, $f = f^{-1}$, так как образом точки Y является точка X . Следовательно, изучаемое отображение f задано на множестве точек плоскости (или пространства), отличных от точек прямой AB , причем на этом множестве отображение обратимо; кроме того, $f^2 = E$, что является следствием инволютивности: $f^{-1} = f^{32}$.

Пусть O — середина отрезка AB . Тогда $\vec{A} + \vec{B} = \vec{0}$; далее, из того, что $X \notin (AB)$, следует, что векторы \vec{A} и \vec{X} неколлинеарны, и поэтому

$$\vec{Y} = \alpha \vec{A} + \beta \vec{X}. \quad (13)$$

Из условия задачи следует:

$$\begin{cases} (\vec{X} - \vec{Y}) \cdot \vec{A} = 0 & (X\vec{Y} \perp \vec{A}), \\ (\vec{A} + \vec{Y}) \cdot (\vec{Y} - \vec{A}) = 0 & (B\vec{X} \perp \vec{A}\vec{Y}). \end{cases}$$

Очевидно, что последние два равенства необходимы для вычисления α и β . Из (13) умножением на \vec{A} и \vec{X} находим:

$$\begin{cases} \vec{A} \cdot \vec{Y} = \alpha \vec{A}^2 + \beta \vec{A} \cdot \vec{X}, \\ \vec{X} \cdot \vec{Y} = \alpha \vec{A} \cdot \vec{X} + \beta \vec{X}^2. \end{cases}$$

Но $\vec{A} \cdot \vec{X} = \vec{A} \cdot \vec{Y}$, $\vec{X} \cdot \vec{Y} = \vec{A} \cdot \vec{X} - \vec{A} \cdot \vec{Y} + \vec{A}^2$, поэтому получаем систему

$$\begin{cases} \vec{A} \cdot \vec{X} = \alpha \vec{A}^2 + \beta \vec{A} \cdot \vec{X}, \\ \alpha \vec{A} \cdot \vec{X} + \beta \vec{X}^2 = \vec{A} \cdot \vec{X} - \vec{A} \cdot \vec{X} + \vec{A}^2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \vec{A}^2 \alpha + \vec{A} \cdot \vec{X} \beta = \vec{A} \cdot \vec{X}, \\ \vec{A} \cdot \vec{X} \alpha + \vec{X}^2 \beta = \vec{A}^2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{X} (\vec{X}^2 - \vec{A}^2)}{\vec{A}^2 \vec{X}^2 - (\vec{A} \cdot \vec{X})^2}, \\ \beta = \frac{(\vec{A}^2)^2 - (\vec{A} \cdot \vec{X})^2}{\vec{A}^2 \vec{X}^2 - (\vec{A} \cdot \vec{X})^2}. \end{cases} \quad (14)$$

Легко видеть, что в (14) знаменатель отличен от нуля, так как векторы \vec{A} и \vec{X} неколлинеарны. Итак, отображение f имеет вид:

$$\vec{Y} = \frac{(\vec{X}^2 - \vec{A}^2)(\vec{A} \cdot \vec{X}) \vec{A} - ((\vec{A} \cdot \vec{X})^2 - (\vec{A}^2)^2) \vec{X}}{\vec{A}^2 \vec{X}^2 - (\vec{A} \cdot \vec{X})^2}. \quad (15)$$

Формуле (15) можно придать другой вид:

$$\vec{Y} = \vec{X} - \frac{\vec{X}^2 - \vec{A}^2}{\vec{A}^2 \cdot \vec{X}^2 - (\vec{A} \cdot \vec{X})^2} (\vec{A}^2 \vec{X} - (\vec{A} \cdot \vec{X}) \vec{A}). \quad (16)$$

Вектор $\vec{M} = \vec{A}^2 \vec{X} - (\vec{A} \cdot \vec{X}) \vec{A}$ отличен от нулевого, так как векторы \vec{A} и \vec{X} неколлинеарны. Поэтому (16) можно переписать так:

$$\vec{Y} = \vec{X} - \frac{\vec{X}^2 - \vec{A}^2}{\vec{M} \cdot \vec{X}} \vec{M}. \quad (17)$$

Если положить $\vec{M} = |\vec{M}| \vec{M}_0$, то

$$\vec{Y} = \vec{X} - \frac{\vec{X}^2 - \vec{A}^2}{\vec{M}_0 \cdot \vec{X}} \vec{M}_0, \quad (18)$$

где \vec{M}_0 — единичный вектор, перпендикулярный \vec{A} , так как

$$\vec{M} \cdot \vec{A} = \vec{A}^2 (\vec{A} \cdot \vec{X}) - (\vec{A} \cdot \vec{X}) \vec{A}^2 = 0.$$

В силу инволютивности преобразования можно записать:

$$\vec{X} = \vec{Y} - \frac{\vec{Y}^2 - \vec{A}^2}{\vec{M}_0 \cdot \vec{Y}} \vec{M}_0. \quad (18')$$

Если $\vec{N} \cdot \vec{X} + \gamma = 0$ — произвольная прямая плоскости, отличная от (OA) , то ее образ имеет уравнение

$$(\vec{N} \cdot \vec{Y}) (\vec{M}_0 \cdot \vec{Y}) - (\vec{Y}^2 - \vec{A}^2) \vec{M}_0 \cdot \vec{N} + \gamma \vec{M}_0 \cdot \vec{Y} = 0. \quad (19)$$

Чтобы перейти к координатам, положим:

$$\vec{A} = a\vec{i}, \quad \vec{M}_0 = \vec{j}, \quad \vec{Y} = x\vec{i} + y\vec{j}, \quad \vec{N} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}.$$

Уравнение (19) принимает вид: $(\alpha x + \beta y) y - (x^2 + y^2 - a^2) \beta + \gamma y = 0$,
или

$$- \beta x^2 + \alpha xy + \gamma y + a^2 \beta = 0. \quad (19')$$

Если $\alpha \neq 0$, то уравнение (19') можно преобразовать к виду

$$(\alpha x + \gamma)(\alpha \beta x - \alpha^2 y - \beta \gamma) = (\alpha^2 a^2 - \gamma^2) \beta. \quad (20)$$

При $\beta(\alpha^2 a^2 - \gamma^2) \neq 0$ уравнение (20) есть уравнение гиперболы с асимптотами $\alpha x + \gamma = 0$, $\alpha \beta x - \alpha^2 y - \beta \gamma = 0$.

В частности, если прямая l проходит через начало O , то $\gamma = 0$ и уравнение гиперболы принимает вид:

$$x(\beta x - \alpha y) = a^2 \beta.$$

Одна из асимптот совпадает с осью y , а вторая перпендикулярна отображаемой прямой $\alpha x + \beta y = 0$.

Прямые, перпендикулярные (AB) , отображаются на себя, а прямые, параллельные (AB) , отображаются на параболы $\beta x^2 - \gamma y - a^2 \beta = 0$.

Рассмотренное преобразование f является квадратичным преобразованием плоскости, так как оно отображает прямые общего положения на кривые второго порядка. Все кривые имеют две общие точки A и B и общее асимптотическое направление, параллельное оси y .

Аналогичное квадратичное преобразование можно изучать в пространстве.

Задача 2. На плоскости даны две фиксированные точки O и A . Изучить отображение $X \xrightarrow{f} Y$ плоскости, которое отображает точку X на точку Y , диаметрально противоположную точке X на окружности OAX .

Решение. Положим:

$$\vec{Y} = \alpha \vec{X} + \beta \vec{A}. \quad (21)$$

Из условия задачи следует:

$$\begin{cases} \vec{X} \cdot \vec{Y} = 0, \\ (\vec{A} - \vec{X})(\vec{A} - \vec{Y}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{X} \cdot \vec{Y} = 0, \\ \vec{A}^2 = \vec{A} \cdot \vec{X} + \vec{A} \cdot \vec{Y}. \end{cases}$$

Если (21) умножить скалярно на \vec{X} и \vec{A} , то получим:

$$\begin{cases} \alpha \vec{X}^2 + \beta \vec{A} \cdot \vec{X} = 0, \\ \alpha \vec{A} \cdot \vec{X} + \beta \vec{A}^2 = \vec{A}^2 - \vec{A} \cdot \vec{X}. \end{cases}$$

Отсюда находим α и β : $\alpha = \frac{(\vec{A}^2 - \vec{A} \cdot \vec{X}) \vec{A} \cdot \vec{X}}{(\vec{A} \cdot \vec{X})^2 - \vec{A}^2 \cdot \vec{X}^2}, \quad \beta = -\frac{(\vec{A}^2 - \vec{A} \cdot \vec{X}) \vec{X}^2}{(\vec{A} \cdot \vec{X})^2 - \vec{A}^2 \cdot \vec{X}^2},$

и (21) принимает вид: $\vec{Y} = \frac{\vec{A}^2 - \vec{A} \cdot \vec{X}}{(\vec{A} \cdot \vec{X})^2 - \vec{A}^2 \cdot \vec{X}^2} ((\vec{A} \cdot \vec{X}) \vec{X} - \vec{X}^2 \vec{A}). \quad (22)$

Если $\vec{A}=\vec{i}$, $\vec{X}=x\vec{i}+y\vec{j}$, $\vec{Y}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$, то $\vec{A}^2=1$, $\vec{A}\cdot\vec{X}=x$, $\vec{X}^2=x^2+y^2$ и

$$\begin{cases} x'=\frac{1-x}{-y^2}(x^2-x^2-y^2), \\ y'=\frac{1-x}{-y^2}xy, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=1-x, \\ y'=-\frac{(1-x)x}{y}. \end{cases} \quad (23)$$

Образами прямых $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ являются кривые второго порядка

$$\beta x^2-\alpha xy-\beta x+(\alpha+\gamma)y=0,$$

проходящие через точки $O(0; 0)$, $A(1; 0)$, имеющие общее асимптотическое направление, параллельное оси y .

Классическим примером инволютивного квадратичного преобразования плоскости с удаленной из нее точкой O является инверсия I относительно окружности $\omega(O, R)$. Точку X инверсия I отображает на такую точку Y , что

$$\vec{OX}\cdot\vec{OY}=R^2, \quad \vec{OY}=k\vec{OX},$$

или, короче,

$$\vec{X}\cdot\vec{Y}=\vec{R}^2, \quad \vec{Y}=k\vec{X}. \quad (24)$$

Из условий (24) находим $R^2=k\vec{X}^2$, откуда $k=\frac{R^2}{\vec{X}^2}$ и

$$\vec{Y}=\frac{R^2}{\vec{X}^2}\vec{X}, \quad \vec{X}=\frac{R^2}{\vec{Y}^2}\vec{Y}. \quad (25)$$

Прямую $\vec{N}\cdot\vec{X}+\gamma=0$ инверсия отображает на окружность

$$R^2\vec{N}\cdot\vec{Y}+\gamma\vec{Y}^2=0, \quad (26)$$

если $\gamma\neq 0$, и на прямую при $\gamma=0$. Окружность, очевидно, проходит через точку O , так как $\vec{Y}=\vec{0}$ удовлетворяет уравнению (26).

Окружность (26) можно представить также уравнением вида

$$\left(\gamma\vec{Y}+\frac{R^2}{2}\vec{N}\right)^2=\frac{R^4}{4}\vec{N}^2. \quad (27)$$

Нетрудно, например, доказать, что угол между прямыми равен углу между соответствующими им окружностями. В самом деле,

$$\vec{n}_1\cdot\vec{X}+\gamma_1=0 \rightarrow \left(\gamma_1\vec{Y}+\frac{R_1^2}{2}\vec{n}_1\right)^2=\frac{R_1^4}{4}, \quad \vec{n}_1^2=1,$$

$$\vec{n}_2\cdot\vec{X}+\gamma_2=0 \rightarrow \left(\gamma_2\vec{Y}+\frac{R_2^2}{2}\vec{n}_2\right)^2=\frac{R_2^4}{4}, \quad \vec{n}_2^2=1.$$

Косинус угла между нормальными векторами прямых равен $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2$.

Косинус угла между окружностями также равен $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$, так как

$$\frac{\frac{R_1^4}{2} + \frac{R_2^4}{2} - \left(-\frac{R_1^2}{2} \vec{n}_1 + \frac{R_2^2}{2} \vec{n}_2 \right)^2}{2 \cdot \frac{R_1^2 \cdot R_2^2}{4}} = \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2.$$

Остается заметить, что формулы преобразования инверсии (25) сохраняют свой вид и для случая, когда инверсия рассматривается в пространстве относительно сферы.

Координатные формулы преобразования инверсии имеют соответственно вид:

$$x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2}, \quad (28)$$

$$x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad z' = \frac{R^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (28')$$

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВА В ЗАДАЧАХ

В курсе планиметрии преобразованиям центральной и осевой симметрии уделяется много внимания. На основе этих преобразований изучаются параллельность и перпендикулярность прямых, перемещения плоскости, доказываются ряд конкретных теорем.

В курсе стереометрии различают три вида симметрий: центральную (S_A), осевую (S_a) и плоскостную (S).

Ниже приведена серия задач, решения которых основаны на свойствах симметрий пространства и их композиций. Чтобы облегчить понимание приведенных решений, мы стремились в первую очередь решить задачи, в которых требуется рассмотреть одну или несколько симметрий, но не их композиции. Лишь в последних трех задачах применяются композиции симметрий.

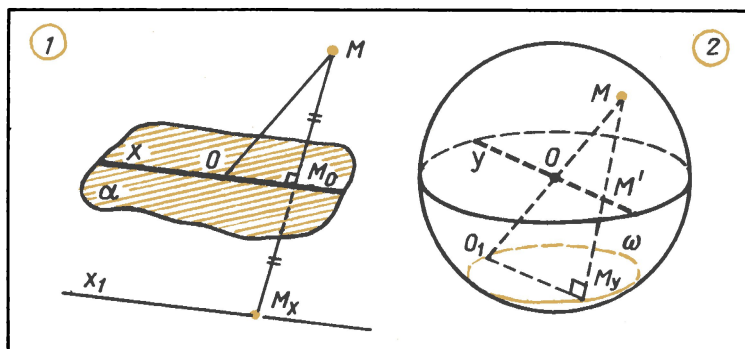
Заметим, что некоторые из задач можно решить короче традиционными средствами, не прибегая к преобразованиям симметрии. Однако в ряде случаев метод преобразований более эффективен.

Задача 1. Прямые центрального пучка прямых²⁵, лежащих в плоскости α , принимаются за оси симметрий. Найти множество образов точки M при указанных симметриях.

Решение. Центр O пучка при симметрии относительно любой оси x из этого пучка отображается на себя, а точка M — на M_x , причем $[MM_x] \cap x = M_0$, $|MM_x| = 2|MM_0|$ и $(MM_x \perp x)$ (рис. 1). Тогда $|OM_x| = |OM|$ и $M_x \in x_1$, где $x_1 = H_M^2(x)$. Точка M_x принадлежит пересечению ω сферы σ с центром O и радиусом $|OM|$ и плоскости $\alpha_1 = H_M^2(\alpha)$. Искомым пересечением является окружность ω .

Возьмем произвольную точку $M_y \in \omega$: $[MM_y] \cap \alpha = M'$, $(OM') = y$. Нелегко доказать, что $M_y = S_y(M)$ (рис. 2).

Действительно, $M' = H_M^{\frac{1}{2}}(M_y)$, точка $O_1 = H_M^2(O)$ принадлежит ω , тогда $\widehat{O_1 M_y M} = 90^\circ$. А в силу параллельности прямых y и $O_1 M_y$ прямые y и MM_y перпендикулярны.



Если $(MO) \perp \alpha$, плоскость α_1 касается сферы σ , окружность ω вырождается в точку, симметричную M относительно α .

Задача 2. Доказать, что объединение двух скрещивающихся прямых представляет собой фигуру, имеющую три оси симметрии.

Решение. При симметрии с осью l , содержащей общий перпендикуляр прямых a и b , каждая из этих прямых отображается на себя, т. е. l — ось симметрии объединения прямых a и b .

Через середину L общего перпендикуляра $[AB]$ прямых a и b проведем плоскость λ , параллельную a и b . Спроектируем ортогонально эти прямые на плоскость λ . Пусть прямые a_1 и b_1 — полученные проекции (рис. 3). Докажем, что оси симметрий m и n прямых a_1 и b_1 являются осями симметрий прямых a и b . В самом деле, при симметрии S_m прямая l отображается на себя, а точка A — на точку B . Так как осевая симметрия сохраняет параллельность прямых, то прямая a , проходящая через точку A и параллельная прямой a_1 , отображается при S_m на прямую, проходящую через точку B и параллельную прямой b_1 , т. е. на прямую b . Аналогично и $S_n(a) = b$.

Таким образом, прямые l , m и n — оси симметрий объединения прямых a и b .

Задача 3. Дана замкнутая ломаная $ABCD A$. Доказать, что при условиях $|AB| = |CD|$, $|BC| = |DA|$ ломаная обладает осевой симметрией. Выяснить истинность обратного утверждения.

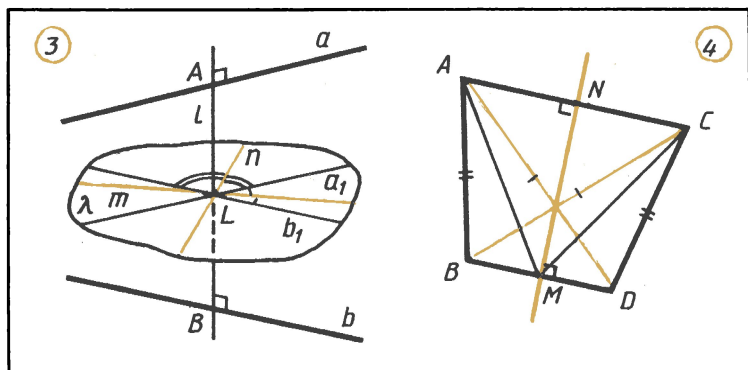
Решение. Треугольники BAD и DCB конгруэнтны по трем сторонам (рис. 4). Если M — середина отрезка BD , то $[AM] \cong [CM]$ (соответственные медианы в конгруэнтных треугольниках конгруэнтны).

Пусть точка N — середина отрезка AC и $N \neq M$. Тогда (MN) — ось симметрии отрезка AC . Аналогично можно показать, что (MN) — ось симметрии отрезка BD .

При симметрии с осью MN , проходящей через середины отрезков AC и BD , ломаная $ABCD A$ отображается на ломаную $CDABC$, т. е. на себя.

Если же $M = N$, то данная ломаная плоская, имеющая центр симметрии. Прямая, проходящая через этот центр перпендикулярно плоскости ломаной, есть искомая ось симметрии.

Обратное утверждение очевидно, если ось симметрии проходит через середины отрезков AC и BD .



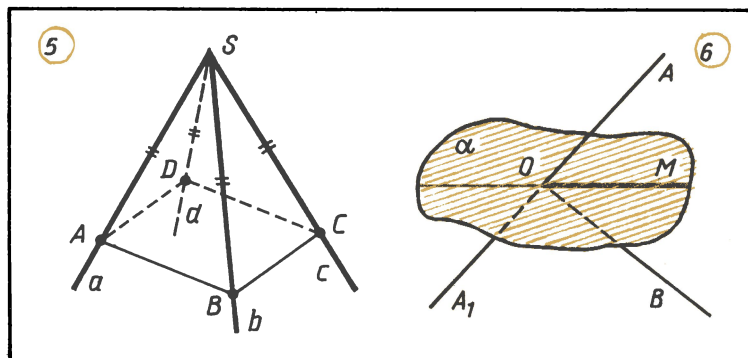
Задача 4. Доказать, что четырехгранный угол $Sabcd$, у которого $\widehat{(a, b)} = \widehat{(c, d)}$, $\widehat{(b, c)} = \widehat{(d, a)}$, обладает осевой симметрией.

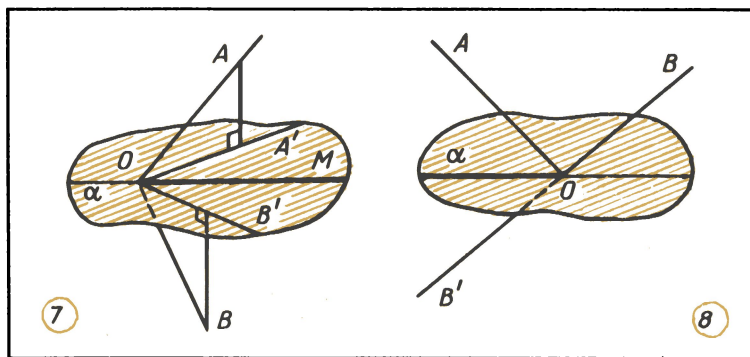
Решение. На ребрах данного угла отметим соответственно точки A, B, C и D так, что $[SA] = [SB] = [SC] = [SD]$ (рис. 5). Из конгруэнтности треугольников ASB и DSC , ASD и BSC следует, что $|AB| = |DC|$ и $|AD| = |BC|$. Но тогда ломаная $ABCD A$ имеет ось симметрии l , которая проходит через середины отрезков AC и BD (см. задачу 3).

Так как точка S равноудалена от точек A, B, C и D , то она является центром сферы, проходящей через эти точки. При симметрии с осью l эта сфера отображается на себя. Следовательно, ось l проходит через точку S и является осью симметрии угла $Sabcd$.

Задача 5. Для того чтобы плоскость, проходящая через вершину угла, была равнонаклонена к его сторонам, необходимо и достаточно, чтобы она проходила через биссектрису данного угла или через биссектрису угла, смежного с данным. Доказать.

Доказательство. а) Плоскость α проходит через биссектрису $[OM)$ угла AOB (рис. 6). При симметрии с осью (OM) плоскость α отображается на себя, а луч OA — на луч OB . Так как осевая симметрия есть перемещение, то угол луча OA с плоскостью α равен углу образа луча OA с образом плоскости α , т. е. углу луча OB с плоскостью α .





Если плоскость проходит через биссектрису угла BOA_1 , смежного с углом AOB , то по доказанному она равнонаклонена к лучам $[OA_1)$ и $[OB)$, а значит, равнонаклонена к $[OA)$ и $[OB)$.

б) Плоскость α проходит через вершину O угла AOB и равнонаклонена к лучам OA и OB , причем лучи OA и OB лежат в разных полупространствах с границей α (рис. 7).

Спроектируем данный угол на плоскость α ортогонально. Получим угол $A'OB'$ и $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$ (по условию). Если $[OM)$ — биссектриса угла $A'OB'$, то при симметрии с осью (OM) луч OA отображается на луч OB (докажите!), т. е. плоскость α проходит через биссектрису OM угла AOB .

Пусть плоскость α равнонаклонена к лучам OA и OB и лучи лежат в одном полупространстве с границей α (рис. 8). Если OB' — дополнение луча OB до прямой, то лучи OA и OB' лежат в разных полупространствах с границей α и плоскость α равнонаклонена к ним. Тогда α проходит через биссектрису угла AOB' .

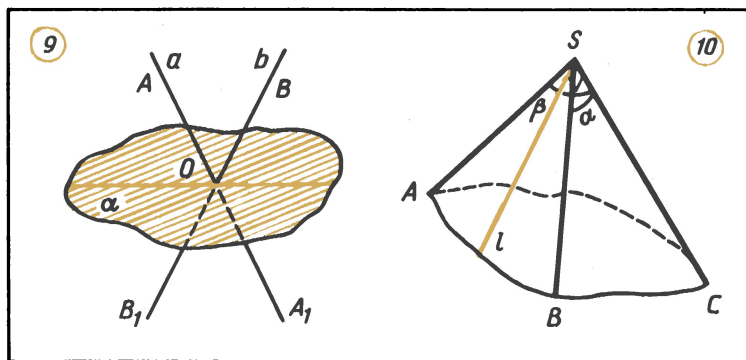
Задача 6. Две пересекающиеся прямые одинаково наклонены к плоскости α , причем их точка пересечения принадлежит α . Доказать, что плоскость β , содержащая данные прямые, пересекает α по прямой m , являющейся осью симметрии данных прямых.

Решение. Обозначим точку пересечения прямых a и b буквой O , $O \in \alpha$. На прямой a имеем лучи OA и OA_1 , на прямой b — лучи OB и OB_1 (рис. 9).

Так как плоскость α равнонаклонена к сторонам угла BOA_1 , то она проходит через ось симметрии m этого угла (см. задачу 5). Но ось симметрии угла BOA_1 лежит в плоскости $\beta = (a, b)$. Следовательно, $\alpha \cap \beta = m$.

Задача 7. Плоские углы BSC , CSA , ASB трехгранного угла $SABC$ равны соответственно α , β и γ . Доказать, что если биссектриса угла ASB перпендикулярна ребру SC , то $\alpha + \beta = 180^\circ$. Сформулировать и доказать обратное предложение.

Решение. Пусть l — прямая, содержащая биссектрису угла ASB (рис. 10). Тогда при симметрии с осью l луч SC отображается на луч SC_1 , дополняющий луч SC до прямой, а луч SB — на луч SA . При этом $\widehat{BSC_1} = \widehat{ASC} = \beta$ и $\widehat{CSB} + \widehat{BSC_1} = \alpha + \beta = 180^\circ$.



Обратное предложение. Плоские углы BSC , CSA , ASB трехгранного угла $SABC$ равны соответственно α , β , γ . Доказать, что если $\alpha + \beta = 180^\circ$, то биссектриса угла ASB перпендикулярна ребру SC .

Доказательство. При симметрии с осью l , содержащей биссектрису угла ASB , луч SA отображается на $[SB)$, а $[SC)$ — на $[SC_1)$, причем $\widehat{ASC} = \widehat{BSC}_1 = \beta$. Тогда $\widehat{CSB} + \widehat{BSC}_1 = \alpha + \beta = 180^\circ$, т. е. CSC_1 — прямая. Следовательно, $(SC) \perp l$.

Задача 8. Дан правильный тетраэдр $ABCD$, точки M и N — середины его ребер AC и BD . Доказать, что любая плоскость, проходящая через прямую MN , делит тетраэдр на равновеликие многогранники.

Решение. Пусть α — произвольная плоскость, проходящая через прямую MN . Каждый из многогранников, на которые плоскость α делит тетраэдр $ABCD$, есть пересечение тетраэдра и полупространства с границей α .

Симметрия с осью (MN) отображает тетраэдр $ABCD$ на себя и плоскость α на себя, причем каждое из полупространств с границей α отображается на другое. Тогда при симметрии с осью (MN) многогранники конгруэнтны, а значит, и равновелики.

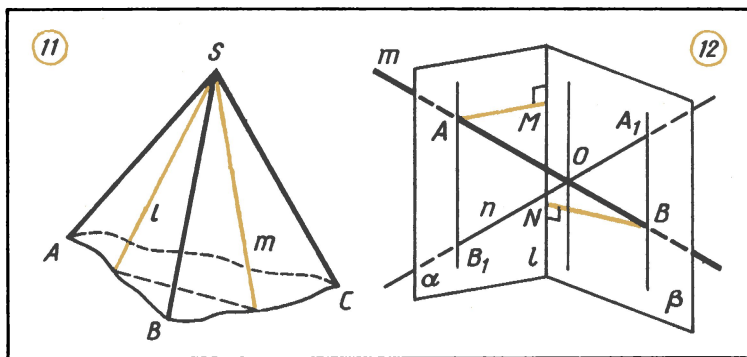
Задача 9. Доказать, что биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла и биссектриса угла, смежного с третьим плоским углом, лежат в одной плоскости.

Решение. В трехгранном угле $SABC$ лучи l и m — биссектрисы углов ASB и BSC (рис. 11). Плоскость $\alpha = (l, m)$ проходит через биссектрисы углов ASB и BSC . Поэтому она равнонаклонена к лучам SA и SB , SB и SC (задача 5). Значит, плоскость α равнонаклонена к лучам SA и SC . Кроме того, лучи SA и SC лежат в одном полупространстве с границей α . Следовательно, α проходит через биссектрису угла, смежного с углом ASC .

Задача 10. Доказать, что биссектрисы углов, смежных с плоскими углами трехгранного угла, лежат в одной плоскости.

Решение. Дан трехгранный угол $SABC$. Дополним луч SA до прямой ASA_1 и рассмотрим трехгранный угол SA_1BC .

Пусть m и n — биссектрисы углов A_1SB и A_1SC . Тогда плоскость $\alpha = (m, n)$ проходит через биссектрису l угла, смежного с углом BSC (задача 9), т. е. $l \subset (m, n)$.



Задача 11. Грани двугранного угла пересечены прямой. Доказать, что если эта прямая одинаково наклонена к плоскостям граней, то ребро двугранного угла равноудалено от точек пересечения данной прямой с гранями.

Сформулировать и доказать обратное предложение.

Решение. Дан двугранный угол α/β . Прямая m равнонаклонена к плоскостям α и β , $m \cap \alpha = A$, $m \cap \beta = B$ (рис. 12). Докажем, что прямая l равноудалена от точек A и B .

Воспользуемся симметрией относительно плоскости σ , делящей пополам данный двугранный угол:

$$S_{\sigma}(\alpha) = \beta; S_{\sigma}(A) = A_1; A_1 \in \beta; S_{\sigma}(B) = B_1; B_1 \in \alpha; [AB] \cap [A_1B_1] = O, O \in \sigma.$$

Плоскость α равнонаклонена к прямым AB и B_1A_1 . Пользуясь задачей 6, нетрудно доказать, что эта плоскость параллельна прямой n , делящей пополам угол AOA_1 . Аналогично $\beta \parallel n$. Но тогда и плоскость ABA_1 пересекает α и β по прямым AB_1 и A_1B , параллельным прямой l .

Так как $S_{\sigma}(l) = l$, а $S_{\sigma}(AB_1) = (A_1B)$ и $l \parallel (AB_1) \parallel (A_1B)$, то расстояние от любой точки прямой AB_1 до прямой l равно расстоянию от любой точки прямой A_1B до прямой l .

З а м е ч а н и е. Параллельность прямых l , AB_1 и A_1B можно доказать на основе свойств наклонных, проведенных к плоскости из одной точки.

Прямые OA и OB_1 наклонены к плоскости α под одним и тем же углом, следовательно, $|OA| = |OB_1|$. Но в силу симметрии относительно плоскости α расстояния $|OA|$ и $|OA_1|$ также равны. Поэтому $|OA| = |OA_1| = |OB| = |OB_1|$ и четырехугольник AA_1BB_1 — прямоугольник. Тогда прямые AB_1 и A_1B параллельны прямой l .

О б р а т н о е п р е д л о ж е н и е. Грани двугранного угла пересечены прямой. Доказать, что если ребро двугранного угла равноудалено от точек пересечения этой прямой с гранями, то данная прямая равнонаклонена к плоскостям граней.

У к а з а н и е. Предварительно докажете, что замкнутая ломаная $AMNB$, у которой $|AM| = |NB|$ и $\widehat{AMN} = \widehat{BNM} = 90^\circ$, имеет ось симметрии (рис. 12).

Задача 12. Через вершину O прямого трехгранного угла $Oabc$ внутри его проведен луч d . Доказать, что

$$(\widehat{d, a}) + (\widehat{d, b}) + (\widehat{d, c}) < 180^\circ.$$

Решение. Обозначим через \tilde{a} , \tilde{b} и \tilde{c} прямые, содержащие лучи a , b и c соответственно, а через d_1 , d_2 и d_3 лучи, симметричные лучу d относительно прямых \tilde{a} , \tilde{b} и \tilde{c} . Тогда

$$S_{\tilde{c}} \circ S_{\tilde{b}}(d_2) = S_{\tilde{c}}(d) = d_3.$$

Поскольку прямые \tilde{b} и \tilde{c} перпендикулярны, то $S_{\tilde{c}} \circ S_{\tilde{b}} = S_{\tilde{a}}$, т. е. $S_{\tilde{a}}(d_2) = d_3$.

Кроме того, $S_{\tilde{a}}(d) = d_1$. Следовательно, $(\widehat{d, d_2}) = (\widehat{d_1, d_3})$.

Аналогично доказывается, что $(\widehat{d, d_1}) = (\widehat{d_2, d_3})$ и $(\widehat{d, d_3}) = (\widehat{d_1, d_2})$.

Учитывая полученные равенства, будем иметь:

$$\begin{aligned} (\widehat{d, a}) + (\widehat{a, b}) + (\widehat{b, c}) &= \frac{1}{2}(\widehat{d, d_1}) + \frac{1}{2}(\widehat{d, d_2}) + \frac{1}{2}(\widehat{d, d_3}) = \\ &= \frac{1}{2}((\widehat{d_2, d_3}) + (\widehat{d_1, d_3}) + (\widehat{d_1, d_2})). \end{aligned}$$

Лучи d_1 , d_2 и d_3 — ребра трехгранного угла $Od_1d_2d_3$. Поэтому $(\widehat{d_1, d_2}) + (\widehat{d_2, d_3}) + (\widehat{d_3, d_1}) < 360^\circ$. А значит, $(\widehat{d, a}) + (\widehat{d, b}) + (\widehat{d, c}) < 180^\circ$.

Задача 13. Даны центральные симметрии S_A и S_B и плоскостная симметрия S_α . Доказать, что равенство

$$S_A \circ S_\alpha \circ S_A = S_B \circ S_\alpha \circ S_B, \quad A \neq B$$

является необходимым и достаточным условием параллельности прямой AB и плоскости α .

Решение. **Достаточность.** Проведем через A прямую n , перпендикулярную α , $n \cap \alpha = N$. Композиция $\sigma = S_A \circ S_\alpha \circ S_A$ отображает n и каждую проходящую через n плоскость γ на себя. Отображение γ на себя есть перемещение σ_1 второго рода, причем $\sigma_1(n) = n$. Ввиду того что $\sigma_1(A_1) = A_1$, где $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AA_1}$, то σ_1 — осевая симметрия S_{a_1} , где a_1 проходит через A_1 перпендикулярно n . Итак, σ есть симметрия относительно плоскости β_1 , проходящей через A_1 параллельно α , причем $S_A(\alpha) = \beta_1$.

Аналогично $\sigma = S_B \circ S_\alpha \circ S_B = S_{\beta_2}$, где $\beta_2 = \beta_1$, причем $S_B(\alpha) = \beta_2$. Поскольку S_A и S_B отображают α на β_1 , то $(AB) \parallel \alpha$.

Необходимость. Даны плоскости α и точки A , B , причем $(AB) \parallel \alpha$. По вышедоказанному имеем:

$$S_A \circ S_\alpha \circ S_A = S_{\beta_1} \circ S_B \circ S_\alpha \circ S_B = S_{\beta_2},$$

где $\beta_1 = S_A(\alpha)$, $\beta_2 = S_B(\alpha)$. Но из условия $(AB) \parallel \alpha$ следует $\beta_1 = \beta_2$, а поэтому $S_A \circ S_\alpha \circ S_A = S_B \circ S_\alpha \circ S_B$.

Задача 14. Даны две перпендикулярные скрещивающиеся прямые a и b и точки X_1 , X_2 , такие, что $X_1 = S_a(X)$, $X_2 = S_b(X)$, где X — произвольная точка пространства. Найти множество середин отрезков X_1X_2 .

Решение 1. Если $X_1 = S_a(X)$, то $X = S_a(X_1)$, и поскольку $X_2 = S_b(X)$,

то $X_2 = S_b \circ S_a(X_1)$. Но $S_a = S_\alpha \circ S_\gamma = S_\gamma \circ S_\alpha$ ($\alpha \perp \gamma$, $\alpha = \alpha \cap \gamma$, $\alpha \parallel b$, $\gamma \perp b$), $S_b = S_\beta \circ S_\delta = S_\delta \circ S_\beta$ ($\beta \perp \delta$, $b = \delta \cap \gamma$).

Тогда $S_b \cdot S_a = S_\delta \cdot S_\beta \cdot S_\gamma \cdot S_\alpha = S_\delta \cdot S_O$, где O есть точка пересечения трех попарно перпендикулярных плоскостей α , β , γ . В то же время O есть точка пересечения общего перпендикуляра с прямыми a и b с прямой a .

Следовательно, $X_2 = S_\delta \circ S_O(X_1)$ или $S_O(X_1) = X_O$, $S_\delta(X_O) = X_2$ (рис. 13).

Прямые X_2X_O , X_OX_1 и c лежат в одной плоскости. Получаем, что прямая c проходит через середину O стороны X_OX_1 треугольника $X_2X_OX_1$ и параллельна его третьей стороне X_OX_2 .

Значит, середина отрезка X_1X_2 принадлежит прямой c .

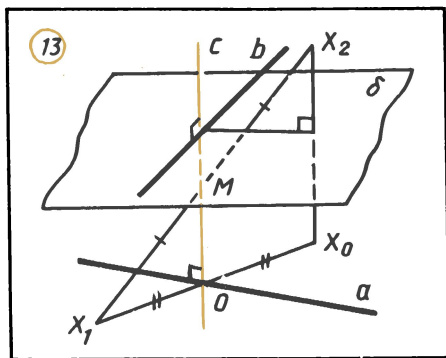
Итак, если точка M — середина отрезка X_1X_2 , то она принадлежит общему перпендикуляру прямых a и b .

Обратное утверждение также верно.

Вывод: множество середин отрезков X_1X_2 , где $X_1 = S_a(X)$, $X_2 = S_b(X)$, a и b — скрещивающиеся перпендикулярные прямые, X — произвольная точка пространства, есть общий перпендикуляр прямых a и b .

Решение 2. Ортогональное проектирование π на плоскость α , перпендикулярную общему перпендикуляру c данных прямых a и b , отобразит их на две перпендикулярные пересекающиеся в точке O прямые a_1 и b_1 . Тогда любая точка X пространства отобразится при π на X_1 , $X_1 = S_a(X)$ отобразится на X'_1 , $X_2 = S_b(X)$ — на X'_2 , причем прямая a_1 будет осью симметрии точек X'_1 и X_1 , а прямая b_1 — осью симметрии точек X_2 и X'_2 . Следовательно, $X'_2 = S'_b \circ S'_a(X'_1)$ или $X'_2 = S_O(X'_1)$.

Отсюда следует, что O — середина отрезка $X'_1X'_2$. По свойствам параллельного проектирования заключаем, что множество середин отрезков X_1X_2 при параллельном проектировании π отображается на точку O . Но на точку O при π отображается общий перпендикуляр прямых a и b , откуда и заключаем, что середины отрезков X_1X_2 принадлежат прямой c .



МЕТОД КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ В ПЛАНИМЕТРИИ

Большое значение комплексных чисел³³ в математике и ее приложениях широко известно. Особенно часто применяются функции комплексного переменного. Их изучение имеет самостоятельный интерес. Вместе с тем алгебру комплексных чисел можно успешно использовать в элементарной геометрии, тригонометрии, теории геометрических преобразований, а также в электротехнике и различных задачах с механическим и физическим содержанием.

Метод комплексных чисел позволяет решать планиметрические задачи по готовым формулам прямым вычислением, элементарными выкладками. Выбор этих формул с очевидностью диктуется условиями задачи и ее требованием. В этом состоит необычайная простота этого метода по сравнению с координатным, векторным и другими методами, требующими от решающего порой немалой сообразительности, длительных поисков, хотя готовое решение может быть очень коротким.

В данной статье излагаются основы метода комплексных чисел в применении к задачам элементарной геометрии на плоскости.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Длина отрезка

При заданной прямоугольной декартовой системе координат на плоскости комплексному числу $z = x + iy$ ($i^2 = -1$) можно взаимно однозначно поставить в соответствие точку M плоскости с координатами x, y (рис. 1):

$$z = x + iy \leftrightarrow M(x, y) \leftrightarrow M(z).$$

Число z тогда называют *комплексной координатой* точки M .

Поскольку множество точек евклидовой плоскости находится во взаимно однозначном соответствии с множеством комплексных чисел, то эту плоскость называют также *плоскостью комплексных чисел*. Начало O декартовой системы координат называют при этом *начальной* или *нулевой точкой* плоскости комплексных чисел.

При $y = 0$ число z действительное. Действительные числа изображаются

точками оси x , поэтому она называется действительной осью. При $x=0$ число z чисто мнимое: $z=iy$. Мнимые числа изображаются точками оси y , поэтому она называется *мнимой осью*. Нуль — одновременно действительное и чисто мнимое число.

Расстояние от начала O плоскости до точки $M(z)$ называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $|z|$ или r :

$$|z| = r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Если φ — ориентированный угол,

образованный вектором \vec{OM} с осью x , то по определению функций синуса и косинуса

$$\sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{r},$$

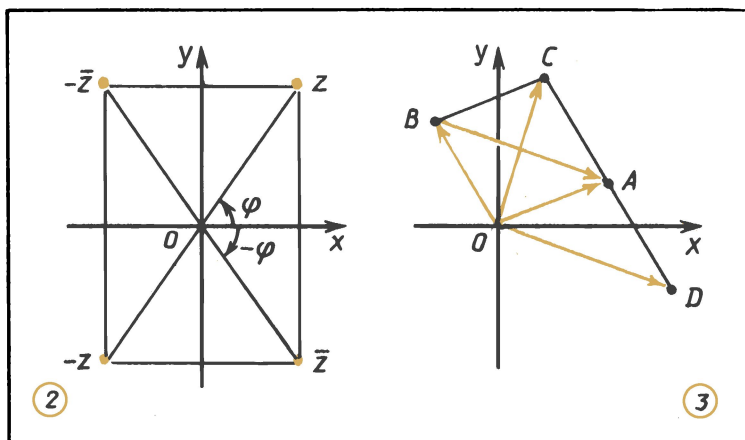
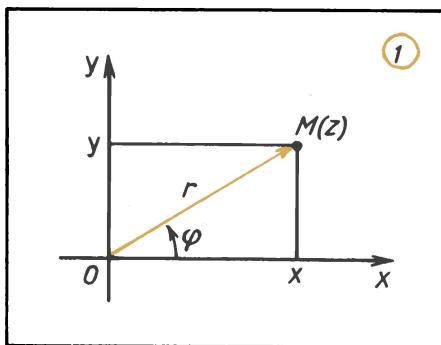
откуда $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, и поэтому $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Такое представление комплексного числа z называется его *тригонометрической формой*. Исходное представление $z = x + iy$ называют *алгебраической формой* этого числа. При тригонометрическом представлении угол φ называют *аргументом* комплексного числа и обозначают еще через $\arg z$:

$$\varphi = \arg z.$$

Если дано комплексное число $z = x + iy$, то число $\bar{z} = x - iy$ называется *комплексно-сопряженным* (или просто *сопряженным*) этому числу z . Тогда, очевидно, и число z сопряжено числу \bar{z} . Точки $M(z)$ и $M_1(\bar{z})$ симметричны относительно оси x (рис. 2).

Из равенства $\bar{\bar{z}} = z$ следует $y=0$ и обратно. Это значит, что число, равное своему сопряженному, является действительным и обратно.



Точки с комплексными координатами z и $-\bar{z}$ симметричны относительно начальной точки O . Точки с комплексными координатами z и $-\bar{z}$ симметричны относительно оси y . Из равенства $z = -\bar{z}$ вытекает $x = 0$ и обратно. Поэтому условие $z = -\bar{z}$ является критерием чисто мнимого числа.

Для любого числа z , очевидно, $|z| = |\bar{z}| = |-\bar{z}| = |-\bar{z}|$.

Сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел являются действительными числами: $z + \bar{z} = 2x$, $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

Число, сопряженное с суммой, произведением или же частным комплексных чисел, есть соответственно сумма, произведение или же частное чисел, сопряженных данным комплексным числам:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 : z_2} = \bar{z}_1 : \bar{z}_2.$$

Эти равенства можно легко проверить, пользуясь формулами для операций над комплексными числами.

Каждой точке $M(z)$ плоскости взаимно однозначно соответствует вектор \vec{OM} . Поэтому комплексные числа можно интерпретировать векторами, приложенными к точке O . Сложению и вычитанию комплексных чисел отвечает сложение и вычитание соответствующих им векторов. Именно если a и b — комплексные координаты точек A и B соответственно, то число $c = a + b$ является координатой точки C , такой, что $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$ (рис. 3). Комплексному числу $d = a - b$ соответствует такая точка D , что $\vec{OD} = \vec{OA} - \vec{OB}$.

Расстояние между точками A и B равно $|\vec{BA}| = |\vec{OD}| = |a - b|$:

$$|AB| = |a - b|. \quad (1)$$

Так как $|z|^2 = z\bar{z}$, то

$$|AB|^2 = (a - b)(\bar{a} - \bar{b}). \quad (2)$$

Уравнение $z\bar{z} = r^2$ определяет окружность с центром O радиуса r .

Отношение $\frac{\vec{AC}}{\vec{CB}} = \lambda$ ($\lambda \neq -1$), в котором точка C делит данный отрезок AB , выражается через комплексные координаты этих точек так:

$$\lambda = \frac{c - a}{b - c}, \quad \lambda = \bar{\lambda},$$

откуда

$$c = \frac{a + \lambda b}{1 + \lambda}. \quad (3)$$

Если положить $\frac{1}{1 + \lambda} = \alpha$ и $\frac{\lambda}{1 + \lambda} = \beta$, то

$$c = \alpha a + \beta b, \quad \alpha + \beta = 1, \quad \alpha = \bar{\alpha}, \quad \beta = \bar{\beta}. \quad (4)$$

Условия (4) необходимы и достаточны для того, чтобы точки A , B , C были коллинеарны.

При $\lambda = 1$ точка C является серединой отрезка AB и обратно. Тогда

$$c = \frac{1}{2}(a + b).$$

Пусть имеем параллелограмм $ABCD$. Его центр имеет комплексную координату $\frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d)$ при условии, что точки A, B, C, D имеют соответственно комплексные координаты a, b, c, d . Если не исключать случай вырождения параллелограмма, когда все его вершины оказываются на одной прямой, то равенство

$$a+c=b+d \quad (5)$$

является необходимым и достаточным условием того, чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом.

Задача 1. Точки M и N — середины диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что

$$|AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 + 4|MN|^2.$$

Решение. Пусть точкам A, B, C, D, M, N соответствуют комплексные числа a, b, c, d, m, n .

$$\begin{aligned} \text{Так как } m &= \frac{1}{2}(a+c) \text{ и } n = \frac{1}{2}(b+d), \text{ то } |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 = \\ &= (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) + (b-c)(\bar{b}-\bar{c}) + (c-d)(\bar{c}-\bar{d}) + (d-a)(\bar{d}-\bar{a}) = \\ &= 2(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d}) - (a\bar{b} + \bar{a}b + b\bar{c} + \bar{b}c + c\bar{d} + \bar{c}d + d\bar{a} + \bar{d}a), \\ |AC|^2 + |BD|^2 + 4|MN|^2 &= (a-c)(\bar{a}-\bar{c}) + (b-d)(\bar{b}-\bar{d}) + 4(m-n)(\bar{m}-\bar{n}) = \\ &= (a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d}) - (a\bar{c} + \bar{a}c + b\bar{d} + \bar{b}d) + (a+c-b-d)(\bar{a}+\bar{c}-\bar{b}-\bar{d}) = \\ &= 2(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c} + d\bar{d}) - (a\bar{b} + \bar{a}b + b\bar{c} + \bar{b}c) + (c\bar{d} + \bar{c}d + d\bar{a} + \bar{d}a). \end{aligned}$$

Равенство доказано.

Задача 2. Доказать, что если в плоскости параллелограмма $ABCD$ существует такая точка M , что $|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2$, то $ABCD$ — прямоугольник.

Решение. Если за начальную точку принять центр параллелограмма $ABCD$, то при принятых ранее обозначениях $c = -a, d = -b$, и поэтому данное в условии равенство будет эквивалентно равенству $a\bar{a} = b\bar{b}$, которое означает, что диагонали параллелограмма равны, т. е. он прямоугольник.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что сумма квадратов диагоналей четырехугольника равна удвоенной сумме квадратов отрезков, соединяющих середины противоположных сторон.

2. Доказать, что сумма квадратов медиан треугольника равна $\frac{3}{4}$ суммы квадратов его сторон.

3. Доказать, что расстояние от вершины C треугольника ABC до точки D , симметричной центру описанной окружности относительно прямой AB , вычисляется по формуле

$$|CD|^2 = R^2 + |AC|^2 + |BC|^2 - |AB|^2,$$

где R — радиус описанной окружности.

4. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Доказать, что точки, делящие отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 в одном и том же отношении, служат вершинами параллелограмма.

Параллельность и перпендикулярность. Коллинеарность трех точек

Пусть на плоскости комплексных чисел даны точки $A(a)$ и $B(b)$. Векторы \vec{OA} и \vec{OB} сонаправлены тогда и только тогда, когда $\arg a = \arg b$, т. е. при $\arg a - \arg b = \arg \frac{a}{b} = 0$ (при вычитании комплексных чисел из аргумента делимого вычитается аргумент делителя!).

Очевидно также, что эти векторы направлены противоположно в том и только в том случае, если $\arg a - \arg b = \arg \frac{a}{b} = \pm \pi$. Комплексные числа с аргументами $0, \pi, -\pi$ являются действительными.

Итак, для того чтобы точки $A(a)$ и $B(b)$ были коллинеарны с начальной точкой O , необходимо и достаточно, чтобы частное $\frac{a}{b}$ было действительным числом, т. е.

$$\frac{a}{b} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}}, \text{ или } \overline{ab} = \bar{a}\bar{b}. \quad (6)$$

Это равенство является критерием коллинеарности точек O, A, B .

Так как в этом случае число $\frac{a}{b} = k \neq 0$ действительное ($k = \bar{k}$), то критерий (6) эквивалентен такому:

$$a = kb, \quad k \neq 0, \quad k = \bar{k}. \quad (7)$$

Возьмем теперь точки $A(a), B(b), C(c), D(d)$. Векторы \vec{BA} и \vec{DC} коллинеарны тогда и только тогда, когда точки, определяемые комплексными числами $a-b$ и $c-d$, коллинеарны с началом O .

На основании (6) имеем:

$$\vec{AB} \parallel \vec{CD} \Leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) = (\bar{a}-\bar{b})(c-d). \quad (8)$$

В частности, когда точки A, B, C, D принадлежат единичной окружности $z\bar{z}=1$, то $\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}, \bar{d} = \frac{1}{d}$, и поэтому условие (8) принимает вид:

$$\vec{AB} \parallel \vec{CD} \Leftrightarrow ab = cd. \quad (9)$$

Коллинеарность точек A, B, C характеризуется коллинеарностью векторов \vec{AB} и \vec{AC} . Используя (8), получаем:

$$(a-b)(\bar{a}-\bar{c}) = (\bar{a}-\bar{b})(a-c). \quad (10)$$

Это критерий принадлежности точек A, B, C одной прямой. Его можно представить в симметричном виде:

$$a(\bar{b}-\bar{c}) + b(\bar{c}-\bar{a}) + c(\bar{a}-\bar{b}) = 0. \quad (11)$$

Если точки A и B принадлежат единичной окружности $z\bar{z}=1$, то $\bar{a}=\frac{1}{a}$, $\bar{b}=\frac{1}{b}$, и поэтому каждое из соотношений (10) и (11) преобразуется (после сокращения на $a-b$) в такое:

$$c+ab\bar{c}=a+b. \quad (12)$$

Точки A и B фиксируем, а точку C будем считать переменной, переобозначив ее координату через z . Тогда каждое из полученных соотношений (10), (11), (12) будет уравнением прямой AB :

$$(\bar{a}-\bar{b})z+(b-a)\bar{z}+a\bar{b}-b\bar{a}=0, \quad (10a)$$

$$z+ab\bar{z}=a+b. \quad (12a)$$

В частности, прямая OA имеет уравнение $\bar{a}z=a\bar{z}$.

Переходим к выводу критериев перпендикулярности отрезков. Ясно, что

$$\vec{OA} \perp \vec{OB} \Leftrightarrow \arg a - \arg b = \arg \frac{a}{b} = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Комплексные числа с аргументами $\frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{2}$ являются чисто мнимыми.

Поэтому

$$\vec{OA} \perp \vec{OB} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = -\frac{\bar{a}}{b},$$

или

$$\vec{OA} \perp \vec{OB} \Leftrightarrow a\bar{b} + \bar{a}b = 0. \quad (13)$$

Отрезки AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда векторы точек с комплексными координатами $a-b$ и $c-d$ перпендикулярны. В силу (13) имеем:

$$AB \perp CD \Leftrightarrow (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) + (\bar{a}-\bar{b})(c-d) = 0. \quad (14)$$

В частности, когда точки A, B, C, D принадлежат единичной окружности $z\bar{z}=1$, то зависимость (14) упрощается:

$$AB \perp CD \Leftrightarrow ab + cd = 0. \quad (15)$$

Выведем уравнение касательной к единичной окружности $z\bar{z}=1$ в ее точке $P(p)$. Если $M(z)$ — произвольная точка этой касательной, то $OP \perp MP$ и обратно. На основании (14) имеем:

$$p(\bar{p}-\bar{z}) + \bar{p}(p-z) = 0,$$

или

$$\bar{p}z + p\bar{z} = 2p\bar{p}.$$

Поскольку $p\bar{p}=1$, то уравнение касательной становится таким:

$$\bar{p}z + p\bar{z} = 2. \quad (16)$$

Это частный случай уравнения (12a) при $a=b=p$.

Решим еще две вспомогательные задачи, необходимые для решения содержательных геометрических задач.

Задача 1. Найти координату точки пересечения секущих AB и CD единичной окружности $z\bar{z}=1$, если точки A, B, C, D лежат на этой окружности и имеют соответственно комплексные координаты a, b, c, d .

Пользуясь уравнением (12a), получаем систему

$$\begin{cases} z + ab\bar{z} = a + b, \\ z + cdz = c + d, \end{cases}$$

из которой почленным вычитанием находим:

$$\bar{z} = \frac{(a+b)-(c+d)}{ab-cd}. \quad (17)$$

В том частном случае, когда хорды AB и CD перпендикулярны, в силу (15) $ab = -cd$, и поэтому результат (17) приводится к виду

$$\bar{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right),$$

откуда

$$z = \frac{1}{2} (a + b + c + d). \quad (18)$$

В этом случае точка пересечения определяется только тремя точками A, B, C , так как $d = -\frac{ab}{c}$, и, значит,

$$z = \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{ab}{c} \right). \quad (19)$$

Задача 2. Найти комплексную координату точки пересечения касательных в точках $A(a)$ и $B(b)$ единичной окружности $z\bar{z}=1$.

Для искомой координаты z имеем систему

$$\begin{cases} \bar{a}z + a\bar{z} = 2, \\ \bar{b}z + b\bar{z} = 2, \end{cases}$$

из которой находим:

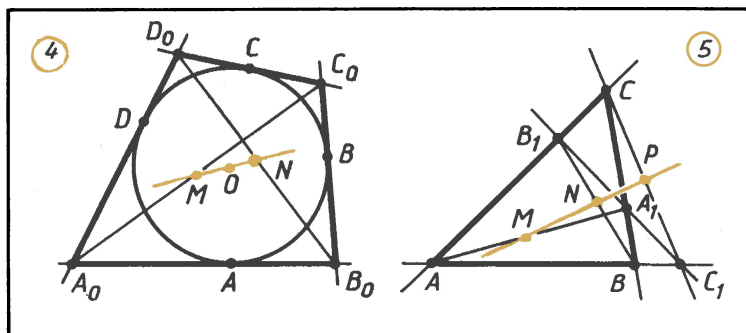
$$z = \frac{2(a-b)}{ab-\bar{a}\bar{b}}.$$

Поскольку $\bar{a} = \frac{1}{a}$, $\bar{b} = \frac{1}{b}$, то получаем окончательно:

$$z = \frac{2ab}{a+b}, \text{ или } \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right). \quad (20)$$

Покажем теперь метод комплексных чисел в действии, применяя его к доказательству классических теорем элементарной геометрии.

Теорема Ньютона. В описанном около окружности четырехугольнике середины диагоналей коллинеарны с центром окружности.



Доказательство. Примем центр окружности за начало, полагая ее радиус равным единице. Обозначим точки касания сторон данного четырехугольника $A_0B_0C_0D_0$ через A, B, C, D (в круговом порядке) (рис. 4). Пусть M и N — середины диагоналей A_0C_0 и B_0D_0 соответственно. Тогда согласно (20) точки A_0, B_0, C_0, D_0 будут иметь соответственно комплексные координаты:

$$a_0 = \frac{2ad}{a+d}, \quad b_0 = \frac{2ab}{a+b}, \quad c_0 = \frac{2bc}{b+c}, \quad d_0 = \frac{2cd}{c+d},$$

где a, b, c, d — комплексные координаты точек A, B, C, D .

Поэтому

$$m = \frac{1}{2}(a_0 + c_0) = \frac{ad}{a+d} + \frac{bc}{b+c}, \quad n = \frac{1}{2}(b_0 + d_0) = \frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d}.$$

Вычисляем $\frac{m}{n} = \frac{(a+b)(c+d)}{(b+c)(d+a)}$. Поскольку $\bar{a} = \frac{1}{a}, \bar{b} = \frac{1}{b}, \bar{c} = \frac{1}{c}, \bar{d} = \frac{1}{d}$, то непосредственно видно, что $\frac{m}{n} = \frac{\bar{m}}{\bar{n}}$. На основании (6) точки O, M, N коллинеарны.

Теорема Гаусса. Если прямая пересекает прямые, содержащие стороны BC, CA, AB треугольника ABC соответственно в точках A_1, B_1, C_1 , то середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 коллинеарны (рис. 5).

Доказательство. Используя (11), запишем условия коллинеарности троек точек $AB_1C, CA_1B, BC_1A, A_1B_1C_1$:

$$\begin{aligned} a(\bar{b}_1 - \bar{c}) + b_1(\bar{c} - \bar{a}) + \bar{c}(\bar{a} - \bar{b}_1) &= 0, \\ c(\bar{a}_1 - \bar{b}) + a_1(\bar{b} - \bar{c}) + \bar{b}(\bar{c} - \bar{a}_1) &= 0, \\ b(\bar{c}_1 - \bar{a}) + c_1(\bar{a} - \bar{b}) + \bar{a}(\bar{b} - \bar{c}_1) &= 0, \\ a_1(\bar{b}_1 - \bar{c}_1) + b_1(\bar{c}_1 - \bar{a}_1) + c_1(\bar{a}_1 - \bar{b}_1) &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Если M, N, P — середины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 , то предстоит показать, что

$$m(\bar{n} - \bar{p}) + n(\bar{p} - \bar{m}) + p(\bar{m} - \bar{n}) = 0. \quad (22)$$

Так как $m = \frac{1}{2}(a + a_1)$, $n = \frac{1}{2}(b + b_1)$, $p = \frac{1}{2}(c + c_1)$, то доказываемое равенство (22) эквивалентно такому:

$$(a + a_1)(\bar{b} + \bar{b}_1 - \bar{c} - \bar{c}_1) + (b + b_1)(\bar{c} + \bar{c}_1 - \bar{a} - \bar{a}_1) + (c + c_1)(\bar{a} + \bar{a}_1 - \bar{b} - \bar{b}_1) = 0,$$

или после перемножения:

$$\begin{aligned} & a(\bar{b}_1 - \bar{c}) + a(\bar{b} - \bar{c}_1) + a_1(\bar{b}_1 - \bar{c}_1) + a_1(\bar{b} - \bar{c}) + \\ & + b(\bar{c}_1 - \bar{a}) + b(\bar{c} - \bar{a}_1) + b_1(\bar{c}_1 - \bar{a}_1) + b_1(\bar{c} - \bar{a}) + \\ & + c(\bar{a}_1 - \bar{b}) + c(\bar{a} - \bar{b}_1) + c_1(\bar{a}_1 - \bar{b}_1) + c_1(\bar{a} - \bar{b}) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь легко видеть то, что (23) получается почленным сложением равенств (21). Доказательство закончено.

Т е о р е м а П а с к а л я. Точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны вписанного шестиугольника, лежат на одной прямой.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в окружность вписан шестиугольник $ABCDEF$ и $(AB) \cap (DE) = M$, $(BC) \cap (EF) = N$, $(CD) \cap (FA) = P$ (рис. 6). Примем центр окружности за нулевую точку плоскости, а ее радиус — за единицу длины. Тогда согласно (17) имеем:

$$\bar{m} = \frac{a + b - (d + e)}{ab - de}, \quad \bar{n} = \frac{b + c - (e + f)}{bc - ef}, \quad \bar{p} = \frac{c + d - (f + a)}{cd - fa}.$$

Вычисляем

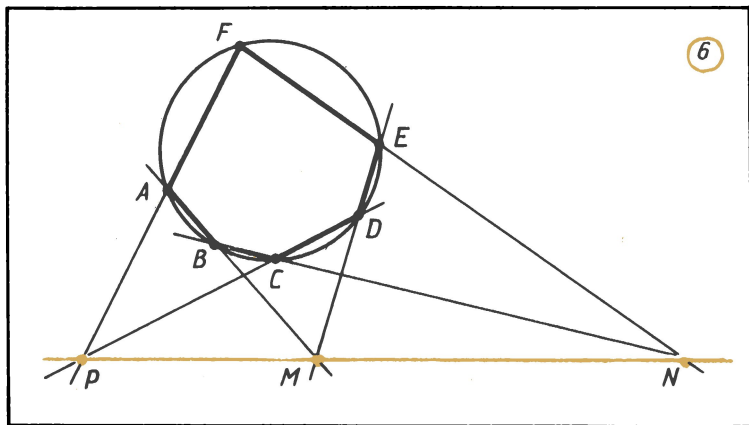
$$\bar{m} - \bar{n} = \frac{(b - e)(bc - cd + de - ef + fa - ab)}{(ab - de)(bc - ef)}$$

и аналогично

$$\bar{n} - \bar{p} = \frac{(c - f)(cd - de + ef - fa + ab - bc)}{(bc - ef)(cd - fa)}.$$

Далее находим:

$$\frac{\bar{m} - \bar{n}}{\bar{n} - \bar{p}} = \frac{(b - e)(cd - fa)}{(f - c)(ab - de)}.$$



Поскольку числа $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}, \bar{e}, \bar{f}$ равны соответственно $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}, \frac{1}{f}$, то устная проверка обнаруживает, что найденное выражение совпадает со своим сопряженным, т. е. является действительным числом. Это означает коллинеарность точек M, N, P .

Теорема Монжа. *Во вписанном в окружность четырехугольнике прямые, проходящие через середины сторон и каждой диагонали перпендикулярно противоположным сторонам и соответственно другой диагонали, пересекаются в одной точке.* Она называется *точкой Монжа* вписанного четырехугольника.

Доказательство. Серединные перпендикуляры к сторонам четырехугольника $ABCD$ пересекаются в центре описанной окружности, который примем за начальную точку. Для каждой точки $M(z)$ серединного

перпендикуляра к $[AB]$ число $\frac{z - \frac{1}{2}(a+b)}{a-b}$ чисто мнимое.

В частности, при $z=0$ оно равно $-\frac{a+b}{2(a-b)}$. Для каждой точки $N(z)$ прямой, проходящей через середину стороны CD перпендикулярно (AB) ,

число $\frac{z - \frac{1}{2}(c+d)}{a-b}$ необходимо будет чисто мнимым и обратно. Но для

$z = \frac{1}{2}(a+b+c+d)$ оно равно $\frac{a+b}{2(a-b)}$, т. е. чисто мнимое. Следовательно,

точка E с комплексной координатой $\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ лежит на указанной прямой. А это выражение симметрично относительно букв a, b, c, d . Поэтому и остальные пять аналогично построенных прямых содержат точку E .

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что диагонали четырехугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух его противоположных сторон равна сумме квадратов двух других противоположных сторон.

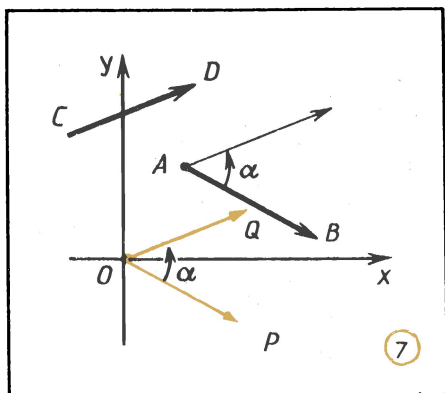
2. Доказать, что если средние линии четырехугольника равны, то его диагонали перпендикулярны и обратно.

3. Доказать, что прямая, содержащая основания двух высот треугольника, перпендикулярна радиусу описанной окружности, проведенному в третью вершину.

4. Доказать, что точки пересечения прямых, содержащих стороны треугольника, с касательными к описанной окружности в противоположных им вершинах коллинеарны.

Углы и площади. Критерий принадлежности четырех точек одной окружности

Условимся обозначать символом $(\overbrace{AB, CD})$ положительно ориентированный угол, на который надо повернуть вектор \overrightarrow{AB} , чтобы он стал сонаправлен



с вектором \vec{CD} . Если $\vec{OP} = \vec{AB}$ и $\vec{OQ} = \vec{CD}$, то точкам P и Q соответствуют комплексные числа $b-a$ и $d-c$ (рис. 7) и

$$\alpha = (\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg(d-c) - \arg(b-a) = \arg \frac{d-c}{b-a}. \quad (24)$$

Эта формула в применении к положительно ориентированному треугольнику ABC дает:

$$\hat{A} = \arg \frac{c-a}{b-a}, \quad \hat{B} = \arg \frac{a-b}{c-b}, \quad \hat{C} = \arg \frac{b-c}{a-c}. \quad (25)$$

Если $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то $\bar{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$. Отсюда

$$\cos \varphi = \frac{z + \bar{z}}{2|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{z - \bar{z}}{2i|z|}. \quad (26)$$

Тогда $\cos(\vec{AB}, \vec{CD}) = \frac{\frac{d-c}{b-a} + \frac{d-c}{b-a}}{2 \left| \frac{d-c}{b-a} \right|} = \frac{(d-c)(b-a) + (\bar{d}-\bar{c})(\bar{b}-\bar{a})}{2|d-c||b-a|},$

так как $(b-a)(\bar{b}-\bar{a}) = |b-a|^2$.

Итак,

$$\cos(\vec{AB}, \vec{CD}) = \frac{(d-c)(\bar{b}-\bar{a}) + (\bar{d}-\bar{c})(b-a)}{2|d-c||b-a|}. \quad (27)$$

Аналогично находим:

$$\sin(\vec{AB}, \vec{CD}) = \frac{(d-c)(\bar{b}-\bar{a}) - (\bar{d}-\bar{c})(b-a)}{2i|d-c||b-a|}. \quad (28)$$

Выведем формулу для площади S положительно ориентированного треугольника ABC :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |AB| |AC| \sin(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{1}{4i} ((c-a)(\bar{b}-\bar{a}) - (b-a)(\bar{c}-\bar{a})) = \\ &= -\frac{1}{4i} (a(\bar{b}-\bar{c}) + b(\bar{c}-\bar{a}) + c(\bar{a}-\bar{b})), \end{aligned}$$

или

$$S = \frac{i}{4} (a(\bar{b}-\bar{c}) + b(\bar{c}-\bar{a}) + c(\bar{a}-\bar{b})), \quad (29)$$

что можно записать в виде определителя третьего порядка³⁴:

$$S = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix}. \quad (30)$$

Если треугольник ABC вписан в окружность $\bar{z}\bar{z}=1$, то формула (29) преобразуется к виду

$$S = \frac{i}{4} \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}. \quad (31)$$

Для площади S положительно ориентированного четырехугольника $ABCD$ имеем:

$$S = \frac{1}{2} |AC| |BD| \sin(\widehat{AC}, \widehat{BD}) = \frac{1}{4i} ((d-b)(\bar{c}-\bar{a}) - (c-a)(\bar{d}-\bar{b})). \quad (32)$$

Если четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность $\bar{z}\bar{z}=1$, то (32) принимает вид:

$$S = \frac{1}{4i} \frac{(c-a)(d-b)(ac-bd)}{abcd}. \quad (33)$$

Три произвольно взятые точки всегда принадлежат либо одной окружности, либо одной прямой. Критерии принадлежности трех точек одной прямой рассмотрены выше. Теперь докажем критерий принадлежности четырех точек одной окружности или прямой.

Возьмем четыре произвольные точки A, B, C, D соответственно с комплексными координатами a, b, c, d . Комплексное число

$$\omega = \frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \frac{(a-c)(b-d)}{(b-c)(a-d)} \quad (34)$$

называется *двойным отношением* точек A, B, C, D и обозначается (AB, CD) . Порядок точек существен.

Теорема. Для того чтобы четыре точки лежали на одной прямой или на одной окружности, необходимо и достаточно, чтобы их двойное отношение было действительным числом.

Доказательство. Если точки A, B, C, D коллинеарны, то отношения $\frac{a-c}{b-c}$ и $\frac{a-d}{b-d}$ — действительные числа (см. условие (10)). Следовательно, в этом случае будет действительным и двойное отношение (34).

Если точки A, B, C, D лежат на окружности, то рассмотрим два возможных случая: 1) точки C и D находятся в одной полуплоскости от прямой AB ; 2) точки C и D находятся в различных полуплоскостях от прямой AB . В первом случае ориентированные углы \widehat{BCA} и \widehat{BDA} равны, во втором случае $\widehat{BCA} + \widehat{ADB} = \pm\pi$, т. е. $\widehat{BCA} - \widehat{BDA} = \pm\pi$. В обоих случаях разность $(\widehat{CB}, \widehat{CA}) - (\widehat{DB}, \widehat{DA})$ равна нулю или $\pm\pi$. Но поскольку согласно

(24) эта разность равна

$$\arg \frac{a-c}{b-c} - \arg \frac{a-d}{b-d} = \arg \left(\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} \right) = \arg \omega,$$

то ω — действительное число.

Обратно: если двойное отношение четырех точек действительно, то эти точки или коллинеарны, или принадлежат одной окружности. В самом деле,

тогда если $\frac{a-c}{b-d}$ — действительное число, то и $\frac{a-d}{b-c}$ — действительное число. Поэтому точки A, B, C коллинеарны и точки A, B, D коллинеарны, и, значит, все четыре точки коллинеарны. Если же число $\frac{a-c}{b-c}$ комплексное, то и число $\frac{a-d}{b-d}$ также комплексное, отличное от действительного. Поэтому точки A, B, C неколлинеарны и точки A, B, D также неколлинеарны. Так как по условию двойное отношение ω вещественно, то

$$\arg\left(\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d}\right) = \arg \frac{a-c}{b-c} - \arg \frac{a-d}{b-d} = \begin{cases} 0, \\ \pm\pi. \end{cases}$$

Следовательно, либо $\widehat{BCA} = \widehat{BDA}$, либо $\widehat{BCA} - \widehat{BDA} = \pm\pi$, т. е. $\widehat{BCA} + \widehat{ADB} = \pm\pi$. В первом случае отрезок AB из точек C и D виден под равными углами, и, стало быть, они принадлежат одной дуге окружности, стягиваемой хордой AB . Во втором случае сумма противоположных углов четырехугольника $ACBD$ равна $\pm\pi$, и поэтому он будет вписанным в окружность. Доказательство закончено.

З а д а ч а 1. В окружности проведены три параллельные хорды AA_1, BB_1, CC_1 . Доказать, что для произвольной точки M окружности прямые MA_1, MB_1, MC_1 образуют равные углы соответственно с прямыми BC, CA, AB .

Р е ш е н и е. Принимая окружность за единичную, отнесем точкам A, B, C, A_1, B_1, C_1 комплексные числа a, b, c, a_1, b_1, c_1 . Тогда по условию (9) параллельности хорд имеем $aa_1 = bb_1 = cc_1$. Следует доказать, что

$$\overrightarrow{(MA_1, CB)} = \overrightarrow{(MB_1, CA)} = \overrightarrow{(MC_1, BA)} \quad (\text{рис. 8}).$$

Первое равенство эквивалентно такому:

$$\arg \frac{b-c}{a_1-m} = \arg \frac{a-c}{b_1-m},$$

или

$$\arg \frac{(b-c)(b_1-m)}{(a-c)(a_1-m)} = 0,$$

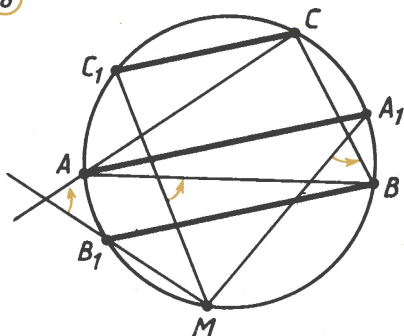
т. е. эта дробь должна быть числом действительным. А это имеет место, поскольку сопряженное ей число

$$\frac{(c-b)(m-b_1)aa_1}{(c-a)(m-a_1)bb_1} = \frac{(b-c)(b_1-m)}{(a-c)(a_1-m)}$$

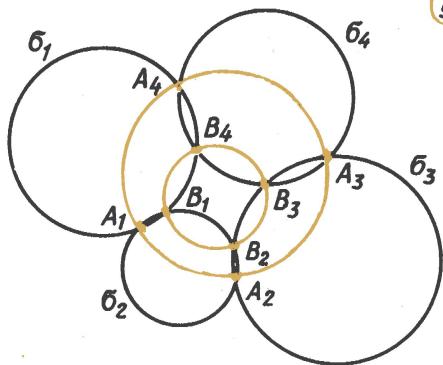
равно этой же дроби. Аналогично доказывается и второе равенство углов.

З а д а ч а 2. На плоскости даны четыре окружности $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ так, что окружности σ_1 и σ_2 пересекаются в точках A_1 и B_1 ; окружности σ_2 и σ_3 пересекаются в точках A_2 и B_2 , окружности σ_3 и σ_4 — в точках A_3 и B_3 и окружности σ_4 и σ_1 — в точках A_4 и B_4 . Доказать, что если точки A_1, A_2, A_3, A_4 лежат на одной окружности или прямой, то и точки B_1, B_2, B_3, B_4 также лежат на одной окружности или прямой (рис. 9).

8



9



Решение. Согласно теореме этого параграфа и условию задачи будут действительными двойные отношения:

$$\omega_{12} = \frac{a_1 - a_2}{b_2 - a_2} \cdot \frac{a_1 - b_1}{b_2 - b_1}, \quad \omega_{23} = \frac{a_2 - a_3}{b_3 - a_3} \cdot \frac{a_2 - b_2}{b_3 - b_2},$$

$$\omega_{34} = \frac{a_3 - a_4}{b_4 - a_4} \cdot \frac{a_3 - b_3}{b_4 - b_3}, \quad \omega_{41} = \frac{a_4 - a_1}{b_1 - a_1} \cdot \frac{a_4 - b_4}{b_1 - b_4}.$$

Поэтому будет действительным и число

$$\frac{\omega_{12} \cdot \omega_{34}}{\omega_{23} \cdot \omega_{41}} = \left(\frac{a_1 - a_2}{a_3 - a_2} \cdot \frac{a_1 - a_4}{a_3 - a_4} \right) \left(\frac{b_1 - b_2}{b_3 - b_2} \cdot \frac{b_1 - b_4}{b_3 - b_4} \right) =$$

$$= (A_1 A_3, A_2 A_4) (B_1 B_3, B_2 B_4).$$

Следовательно, из вещественности двойного отношения $(A_1 A_3, A_2 A_4)$ вытекает вещественность и двойного отношения $(B_1 B_3, B_2 B_4)$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что прямая, соединяющая середины двух сторон четырехугольника, отличного от трапеции, образует равные углы с двумя другими сторонами.

2. Доказать, что если диагонали вписанного в окружность четырехугольника перпендикулярны, то ортогональные проекции середин его сторон на прямые, содержащие противоположные стороны, лежат на одной окружности.

Подобные и равные треугольники. Правильный треугольник

Треугольники ABC и $A_1 B_1 C_1$ подобны и одинаково ориентированы (подобие первого рода), если только $|A_1 B_1| = k |AB|$, $|A_1 C_1| = k |AC|$ и $\widehat{B_1 A_1 C_1} = \widehat{BAC}$ (углы ориентированные).

Эти равенства с помощью комплексных чисел можно записать так:

$$|a_1 - b_1| = k |a - b|, \quad |a_1 - c_1| = k |a - c|, \quad \arg \frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \arg \frac{c - a}{b - a}.$$

Два равенства

$$\frac{|c_1 - a_1|}{|b_1 - a_1|} = \frac{|c - a|}{|b - a|} \quad \text{и} \quad \arg \frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \arg \frac{c - a}{b - a}$$

эквивалентны одному

$$\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{c - a}{b - a},$$

или

$$\frac{c_1 - a_1}{c - a} = \frac{b_1 - a_1}{b - a} = \sigma, \quad (35)$$

где σ — комплексное число, $|\sigma| = k$ — коэффициент подобия.

Если, в частности, σ — число действительное, то $\sigma = \bar{\sigma} = \frac{c_1 - a_1}{c - a} = \frac{\bar{c}_1 - \bar{a}_1}{\bar{c} - \bar{a}}$ и на основании признака (8) будет $(AC) \parallel (A_1C_1)$. По такой же причине $(AB) \parallel (A_1B_1)$ и $(BC) \parallel (B_1C_1)$. Следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны.

Соотношение (35) — необходимый и достаточный признак того, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ являются подобными и одинаково ориентированными. Ему можно придать симметричный вид:

$$ab_1 + bc_1 + ca_1 = ba_1 + cb_1 + ac_1, \quad (36)$$

или

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & 1 \\ b & b_1 & 1 \\ c & c_1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (37)$$

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и противоположно ориентированы (подобие второго рода), если и только если $|A_1B_1| = k |AB|$, $|A_1C_1| = k |AC|$ и $\widehat{B_1A_1C_1} = -\widehat{BAC}$. Последнее равенство дает:

$$\arg \frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = -\arg \frac{c - a}{b - a} = \arg \frac{\bar{c} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}}.$$

Два равенства

$$\frac{|c_1 - a_1|}{|b_1 - a_1|} = \frac{|\bar{c} - \bar{a}|}{|\bar{b} - \bar{a}|} \quad \text{и} \quad \arg \frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \arg \frac{\bar{c} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}}$$

эквивалентны одному

$$\frac{c_1 - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{\bar{c} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}},$$

$$\text{или} \quad \frac{c_1 - a_1}{\bar{c} - a} = \frac{b_1 - a_1}{\bar{b} - a} = \sigma, \quad (38)$$

где σ — комплексное число, $|\sigma| = k$ — коэффициент подобия.

Соотношение (38) есть необходимый и достаточный признак того, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и ориентированы противоположно. Его можно записать в симметричной форме:

$$\bar{a}b_1 + \bar{b}c_1 + \bar{c}a_1 = \bar{b}a_1 + \bar{c}b_1 + \bar{a}c_1 \quad (39)$$

или же так:

$$\begin{vmatrix} \bar{a} & a_1 & 1 \\ \bar{b} & b_1 & 1 \\ \bar{c} & c_1 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (40)$$

Если $|\sigma| = 1$, то треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ будут равны (конгруэнтны). Тогда соотношения (35) и (38) становятся признаками равенства треугольников соответственно одинаковой и противоположной ориентаций.

Рассмотренные признаки подобия треугольников позволяют обосновать простой способ построения произведения и частного двух комплексных чисел. Пусть даны точки A, B, E с комплексными координатами $a, b, 1$ и требуется построить точку M с координатой $z = ab$. Тогда, очевидно, $\frac{z-0}{a-0} = \frac{b-0}{1-0}$. Это равенство говорит о том, что треугольники OEA и OBM подобны и одинаково ориентированы. Отсюда и вытекает способ построения точки M , соответствующей произведению ab (рис. 10).

Обратно: если даны точки M и A соответственно с координатами ab и a , то точка B , соответствующая частному этих чисел, строится на основании тех же подобных треугольников.

Обращаем внимание читателя на один важный частный случай. Если $|a| = 1$, то точка M будет образом точки B при повороте около нулевой точки на угол $\varphi = \arg a$.

Если потребовать, чтобы ориентированный треугольник ABC был подобен ориентированному треугольнику BCA , то треугольник ABC необходимо будет *правильным*. Поэтому из условия (36) получаем необходимое и достаточное условие того, чтобы треугольник ABC был правильным:

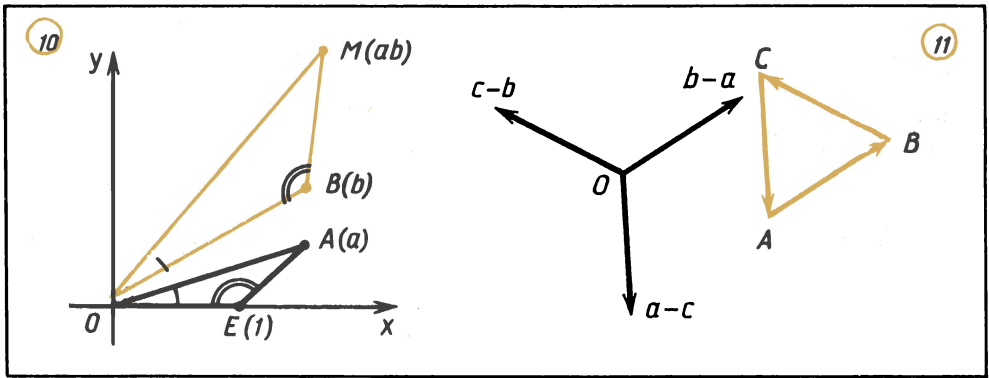
$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca, \quad (41)$$

или

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0. \quad (42)$$

Введем в употребление комплексное число $\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, являющееся одним из корней уравнения $z^3 = 1$, другие два корня которого равны 1 и $\varepsilon^2 = \bar{\varepsilon} = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$, $|\varepsilon| = |\varepsilon^2| = 1$. По теореме Виета для кубического уравнения $z^3 - 1 = 0$ имеем $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$. Это легко проверить и непосредственно. Тогда равенство (41) будет эквивалентно такому:

$$(a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c)(a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c) = 0,$$



или после умножения первого трехчлена на ε^2 :

$$(a + b\varepsilon + c\varepsilon^2)(a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c) = 0. \quad (43)$$

Итак, для того чтобы треугольник ABC был правильным, необходимо и достаточно выполнения хотя бы одного из равенств:

$$a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0 \quad (44)$$

или же

$$a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c = 0. \quad (45)$$

Оказывается, первое из этих равенств соответствует только тому случаю, когда треугольник ABC ориентирован положительно, а второе выполняется лишь при отрицательной его ориентации. В самом деле, так как умножению на ε отвечает поворот на $\frac{2\pi}{3}$, то при положительной ориентации треугольника $b - a = \varepsilon(a - c)$, $c - b = \varepsilon(b - a)$ (рис. 11), откуда $a = b - \varepsilon a + \varepsilon c$, $\varepsilon b = c - b + \varepsilon a$, и поэтому $a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = c(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0$.

Аналогично проверяется выполнение равенства (45) для отрицательно ориентированного правильного треугольника ABC . Очевидно, одновременно равенства (44) и (45) выполняться не могут.

Если правильный треугольник ABC вписан в окружность $\bar{z}\bar{z} = 1$, то при его положительной ориентации $b\varepsilon = c$ и $c\varepsilon^2 = b$, а при отрицательной ориентации $b\varepsilon = a$ и $a\varepsilon^2 = b$. Поэтому каждое из условий (44) и (45) принимает вид:

$$a + b + c = 0. \quad (46)$$

Задача 1. Доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого принадлежат касательным в вершинах треугольника ABC к его описанной окружности, гомотетичен треугольнику с вершинами в основаниях A_2, B_2, C_2 высот треугольника ABC .

Решение. Принимаем описанную окружность за единичную $\bar{z}\bar{z} = 1$. Руководствуясь формулами (20) и (19), получаем:

$$a_1 = \frac{2bc}{b+c}, \quad b_1 = \frac{2ac}{a+c}, \quad c_1 = \frac{2ab}{a+b},$$

$$a_2 = \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{bc}{a} \right), \quad b_2 = \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{ac}{b} \right),$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \left(a + b + c - \frac{ab}{c} \right).$$

Проверяем выполнимость признака (35):

$$\frac{a_1 - b_1}{a_2 - b_2} = \frac{a_1 - c_1}{a_2 - c_2} = \frac{-4abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \sigma,$$

причем $\sigma = \bar{\sigma}$, т. е. σ — действительное число. Значит, треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ гомотетичны.

З а д а ч а 2. Два равных одинаково ориентированных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ вписаны в одну окружность. Доказать, что треугольник с вершинами в точках пересечения прямых BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 , AB и A_1B_1 подобен данным треугольникам.

Р е ш е н и е. Придадим окружности уравнение $z\bar{z} = 1$. Вершины треугольника $A_1B_1C_1$ служат образами вершин треугольника ABC при повороте на некоторый угол $\arg \alpha$, $|\alpha| = 1$. Поэтому $a_1 = \alpha a$, $b_1 = \alpha b$, $c_1 = \alpha c$. Если A_2, B_2, C_2 — точки пересечения прямых BC и B_1C_1 , CA и C_1A_1 , AB и A_1B_1 соответственно, то на основании (17)

$$\bar{a}_2 = \frac{b+c-(\alpha b+\alpha c)}{bc-\alpha^2 bc} = \frac{b+c}{bc(1+\alpha)}, \quad \text{откуда } a_2 = \frac{b+c}{1+\alpha}.$$

$$\text{Аналогично } b_2 = \frac{a+c}{1+\alpha}, \quad c_2 = \frac{a+b}{1+\alpha}.$$

Осталось проверить условие (17): $ab_2 + bc_2 + ca_2 = ba_2 + cb_2 + ac_2$, что делается непосредственной подстановкой.

Задачи для самостоятельного решения

1. Доказать, что середины отрезков, соединяющих соответственные вершины двух равных и противоположно ориентированных треугольников, коллинеарны.

2. На сторонах четырехугольника $ABCD$ построены одинаково ориентированные подобные треугольники AA_1B , CB_1B , CC_1D , AD_1D . Доказать, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — параллелограмм.

3. На сторонах AB и AD параллелограмма $ABCD$ во внешнюю сторону построены правильные треугольники ABM и ADN . Доказать, что треугольник MNC правильный.

ПРЯМАЯ И ОКРУЖНОСТЬ НА ПЛОСКОСТИ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

Пусть произвольной точке M плоскости комплексных чисел соответствует комплексное число $z = x + iy$. Из равенств $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ однозначно выражаются декартовы координаты x и y точки M через комплексные числа z и \bar{z} :

$$x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}). \quad (1)$$

Поэтому комплексные числа z и \bar{z} называются *сопряженными комплексными координатами* этой точки.

Формулы (1) позволяют осуществить переход от уравнения геометрической фигуры в декартовых координатах к ее уравнению в сопряженных комплексных координатах. Однако сейчас мы предпочли непосредственное рассмотрение уравнений в сопряженных комплексных координатах.

Геометрический смысл уравнения $az + b\bar{z} + c = 0$

Найдем множество точек плоскости, сопряженные комплексные координаты которых удовлетворяют уравнению

$$az + b\bar{z} + c = 0. \quad (2)$$

Сначала выделим особо случай, когда $c = 0$. Тогда имеем систему относительно z и \bar{z} :

$$\begin{cases} az + b\bar{z} = 0, \\ b\bar{z} + az = 0, \end{cases}$$

второе уравнение которой получается из первого переходом к сопряженным числам. Уравнивая коэффициенты при \bar{z} , путем вычитания второго уравнения из первого получаем:

$$(a\bar{a} - b\bar{b})z = 0.$$

Если $a\bar{a} \neq b\bar{b}$, т. е. $|a| \neq |b|$, то решением полученного уравнения, а значит, и решением исходного уравнения $az + b\bar{z} = 0$ будет единственное число $z = 0$. При $|a| = |b|$ уравнение $az + b\bar{z} = 0$ напомним в виде $z = -\frac{b}{a}\bar{z}$. Модули левой и правой частей равны. Необходимо, чтобы $\arg z = \arg\left(-\frac{b}{a}\bar{z}\right) + \arg \bar{z}$, откуда $\arg z = \frac{1}{2}\arg\left(-\frac{b}{a}\right)$. Этому условию удовлетворяет каждая точка прямой m , проходящей через начало под углом $\alpha = \frac{1}{2}\arg\left(-\frac{b}{a}\right)$ к действительной оси (рис. 1).

Так, уравнением

$$az + b\bar{z} = 0 \quad (3)$$

задается прямая при $|a| = |b|$ и точка $z = 0$ при $|a| \neq |b|$.

Пусть теперь $c \neq 0$. Свободный член уравнения (2) можно всегда сделать действительным числом путем умножения обеих частей уравнения на c . Поэтому сразу будем полагать $c = \bar{c} \neq 0$. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} az + \bar{b} \bar{z} + c = 0, \\ b\bar{z} + \bar{a} z + c = 0, \end{cases}$$

из которой получаем:

$$(a - \bar{b})z + (b - \bar{a})\bar{z} = 0.$$

Рассмотрим возможные случаи.

Если $a \neq \bar{b}$, то $\bar{z} = \frac{a - \bar{b}}{a - b} z$ и подстановкой в исходное уравнение получаем: $az + \frac{b(a - \bar{b})}{a - b} z + c = 0$, или

$$(a\bar{a} - b\bar{b})z + c(\bar{a} - b) = 0.$$

При $|a| \neq |b|$ его решение единственно:

$$z = \frac{c(b - \bar{a})}{a\bar{a} - b\bar{b}}.$$

При $|a| = |b|$ ($c \neq 0$, $a \neq \bar{b}$) решений нет.

Если $a = \bar{b}$, то $\bar{a} = b$ и $a\bar{a} = b\bar{b}$, т. е. $|a| = |b|$. В этом случае уравнением (2) при $c = \bar{c}$ задается *прямая*. В самом деле, возьмем точку $Q\left(-\frac{c}{2a}\right)$ и вектор \vec{OB} точки $B(b)$ и рассмотрим множество точек $M(z)$, для каждой из которых $(MQ) \perp (OB)$:

$$\left(z + \frac{c}{2a}\right)\bar{b} + \left(\bar{z} + \frac{\bar{c}}{2\bar{a}}\right)b = 0. \quad (4)$$

Очевидно, это множество есть *прямая*. При $a = \bar{b}$ и $c = \bar{c}$ уравнение (4) эквивалентно уравнению (2).

Таким образом, при $a = \bar{b}$ и $c = \bar{c}$ уравнение (2) есть уравнение *прямой*, которая проходит через точку $Q\left(-\frac{c}{2a}\right)$ перпендикулярно вектору $\vec{OB}(b)$.

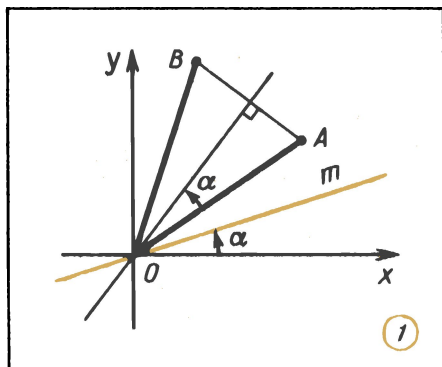
Наконец, отметим случай, когда $a = \bar{b}$, но $c \neq \bar{c}$. Тогда система

$$\begin{cases} az + \bar{b} \bar{z} + c = 0, \\ \bar{b}z + \bar{a} \bar{z} + \bar{c} = 0 \end{cases}$$

приводит к противоречию: $(a - \bar{b})z + (b - \bar{a})\bar{z} + (c - \bar{c}) = 0$, т. е. $c = \bar{c}$.

Подведем итоги. Уравнением $az + \bar{b}\bar{z} + c = 0$, в котором хотя бы один из коэффициентов a и b отличен от нуля, задается:

- 1) *прямая* при $|a| = |b|$, $c = 0$, а также при $a = \bar{b}$, $c = \bar{c}$;
- 2) *единственная точка* при $|a| \neq |b|$;



3) пустое множество в иных случаях, т. е. при $|a| = |b|$, $c \neq 0$, $a \neq \bar{b}$, а также при $a = \bar{b}$, $c \neq \bar{c}$.

Достигнув поставленной цели, возвратимся снова к системе

$$\begin{cases} az + b \bar{z} + c = 0, \\ \bar{b}z + \bar{a} \bar{z} + \bar{c} = 0, \end{cases}$$

не налагая ограничений на коэффициенты a , b , c , кроме того, что a и b не равны нулю одновременно. Уравнивая коэффициенты при \bar{z} , приходим к уравнению

$$(a\bar{a} - b\bar{b})z = b\bar{c} - \bar{a}c,$$

которое:

- а) имеет единственное решение при $a\bar{a} \neq b\bar{b}$;
- б) имеет бесконечное множество решений при $a\bar{a} = b\bar{b}$ и $b\bar{c} = \bar{a}c$;
- в) не имеет решений при $a\bar{a} = b\bar{b}$ и $b\bar{c} \neq \bar{a}c$.

Отсюда и на основании результата предыдущих исследований получаем, что уравнение $az + b\bar{z} + c = 0$ определяет:

- а) единственную точку при $a\bar{a} \neq b\bar{b}$;
- б) прямую при $a\bar{a} = b\bar{b}$ и $b\bar{c} = \bar{a}c$;
- в) пустое множество при $a\bar{a} = b\bar{b}$ и $b\bar{c} \neq \bar{a}c$.

Уравнение

$$\bar{u}z + u\bar{z} + v = 0, \quad v = \bar{v} \quad (5)$$

прямой в сопряженных комплексных координатах будем называть *приведенным уравнением* прямой.

Две прямые. Расстояние от точки до прямой

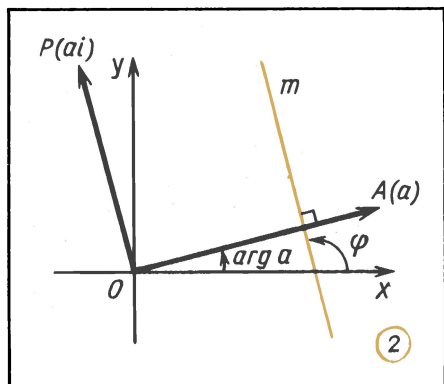
Пусть прямая m задана приведенным уравнением $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$, $b = \bar{b}$.

Так как она перпендикулярна вектору $\vec{OA}(a)$, то вектор $\vec{OP}(ai)$ будет ей параллелен (рис. 2). Следовательно, ориентированный угол от оси x до прямой m равен аргументу числа ai :

$$\varphi = \arg ai = \frac{\pi}{2} + \arg a. \quad (6)$$

Положительно ориентированный угол θ от прямой $\bar{a}_1z + a_1\bar{z} + b_1 = 0$ до прямой $\bar{a}_2z + a_2\bar{z} + b_2 = 0$ равен углу между их направляющими векторами a_1i и a_2i :

$$\theta = \arg \frac{a_2i}{a_1i} = \arg \frac{a_2}{a_1}. \quad (7)$$



Формулы (6) и (7) позволяют находить соответствующие углы с точностью до слагаемого π .

Из формулы (7) вытекает критерий перпендикулярности и критерий параллельности прямых m_1 и m_2 . В самом деле, $\theta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1} = -\frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1}$ — чисто мнимое число.

Это значит, что

$$\begin{aligned} m_1 \perp m_2 &\Leftrightarrow \frac{a_2}{a_1} = -\frac{\bar{a}_2}{\bar{a}_1}, \quad \text{или} \\ m_1 \perp m_2 &\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = -\frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2}. \end{aligned} \quad (8)$$

При $\theta=0$ или $\theta=\pi$ получаем:

$$m_1 \parallel m_2 \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2}. \quad (9)$$

Если прямая $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$ проходит через точку $M_0(z_0)$, то $\bar{a}z_0 + a\bar{z}_0 + b = 0$ и ее уравнение можно написать в виде

$$\bar{a}(z - z_0) + a(\bar{z} - \bar{z}_0) = 0. \quad (10)$$

В силу условия (8) перпендикулярности для прямой, перпендикулярной данной, коэффициентами при z и \bar{z} будут соответственно числа a и $-\bar{a}$. Поэтому на основании уравнения (10) получаем уравнение

$$\bar{a}(z - z_0) - a(\bar{z} - \bar{z}_0) = 0 \quad (11)$$

прямой, проходящей через точку $M_0(z_0)$ перпендикулярно прямой $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$.

Решение системы

$$\begin{cases} \bar{a}z + a\bar{z} + b = 0, \\ \bar{a}(z - z_0) - a(\bar{z} - \bar{z}_0) = 0 \end{cases}$$

дает координату

$$z_1 = \frac{\bar{a}z_0 - a\bar{z}_0 - b}{2a} \quad (12)$$

основания M_1 перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(z_0)$ на прямую $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$.

Так как расстояние d от точки M_0 до этой прямой равно $|M_0M_1|$, то

$$d = |z_1 - z_0| = \frac{|\bar{a}z_0 + a\bar{z}_0 + b|}{2|a|}. \quad (13)$$

Геометрический смысл уравнения $z\bar{z} + az + bz + c = 0$

Из формулы расстояния между двумя точками получается уравнение окружности по ее центру $S(s)$ и радиусу R :

$$(z - s)(\bar{z} - \bar{s}) = R^2. \quad (14)$$

Пусть дано уравнение

$$z\bar{z} + az + b\bar{z} + c = 0, \quad (15)$$

в котором на комплексные коэффициенты a, b, c не накладывается заранее никаких условий. Требуется найти множество точек, координаты которых ему удовлетворяют. С этой целью удобно представить его в эквивалентном виде:

$$(z+b)(\bar{z}+a)=ab-c. \quad (16)$$

Рассмотрим все возможные случаи для коэффициентов a, b, c .

1. Сравнивая уравнение (16) с уравнением (14) окружности, приходим к выводу, что уравнение (16), а значит, и уравнение (15) задают окружность тогда и только тогда, когда $a=\bar{b}$ и $ab-c$ — действительное число. Так как в этом случае $ab-c=a\bar{a}-c$, то c должно быть действительным числом.

Итак, уравнение

$$z\bar{z}+\bar{b}z+b\bar{z}+c=0, \quad c=\bar{c}, \quad b\bar{b}>c \quad (17)$$

есть уравнение окружности с центром $s=-b$ и радиусом $R=\sqrt{b\bar{b}-c}$.

2. При $a=\bar{b}$ и $c=ab$ уравнению (16) удовлетворяет единственная точка $s=-b$. В частности, этот случай имеет место при $a=b=c=0$. Соблюдая аналогию, говорят, что уравнением $(z+b)(\bar{z}+\bar{b})=0$ задается окружность с центром $s=-b$ нулевого радиуса.

3. Если $a=\bar{b}$, $c=\bar{c}$, но $b\bar{b}<c$, то $\sqrt{b\bar{b}-c}$ — чисто мнимое число. Полагаем $\sqrt{b\bar{b}-c}=iR$, тогда (16) можно записать так:

$$(z+b)(\bar{z}+\bar{b})=-R^2. \quad (18)$$

Уравнению (18) не удовлетворяет ни одна точка плоскости, поскольку левая часть неотрицательна, а правая отрицательна при любом значении z . Говорят, что это уравнение есть уравнение окружности мнимого радиуса iR с действительным центром S , имеющим комплексную координату $s=-b$.

4. Когда $a=\bar{b}$, но $c \neq \bar{c}$, уравнение (16) противоречиво: левая часть его действительна, а правая нет. В этом случае оно не задает никакого геометрического образа (даже мнимого!).

5. Осталось рассмотреть случай, когда $a \neq \bar{b}$. Тогда из уравнения (15) вычтем уравнение $z\bar{z}+az+\bar{b}z+\bar{c}=0$, получающееся из (15) переходом к сопряженным комплексным числам. Получаем:

$$(a-\bar{b})z+(b-\bar{a})\bar{z}+c-\bar{c}=0,$$

откуда

$$\bar{z}=\frac{(a-\bar{b})z+c-\bar{c}}{\bar{a}-b}.$$

Выполняя эту подстановку в уравнение (15), приводим его к виду

$$(a-\bar{b})z^2+(a\bar{a}-b\bar{b}+c-\bar{c})z+\bar{a}c-b\bar{c}=0. \quad (19)$$

При $a \neq \bar{b}$ уравнения (15) и (19) равносильны. В зависимости от того, отличен от нуля или равен нулю дискриминант

$$D = (a\bar{a} - b\bar{b} + c - \bar{c})^2 - 4(a - \bar{b})(\bar{a}c - b\bar{c})$$

квадратного уравнения (19), оно будет определять две различные (действительные!) или две совпавшие точки. При $D=0$ совпавшие точки имеют комплексную координату

$$z = \frac{a\bar{a} - b\bar{b} + c - \bar{c}}{2(\bar{b} - a)}.$$

В частности, при $c = ab$ как уравнение (16), так и уравнение (19) дает пару точек $z_1 = -b$ и $z_2 = -\bar{a}$.

Итак, уравнением (15) задается либо окружность (действительная, мнимая, нулевого радиуса), либо две точки (различные или же совпавшие), либо пустое множество точек.

Рассмотрим одну замечательную пару окружностей.

Две пересекающиеся окружности называются *ортогональными*, если касательные к ним в их общей точке перпендикулярны. Тогда, очевидно, касательная к одной из ортогональных окружностей в их общей точке содержит центр другой окружности.

Для того чтобы окружности (A, R) и (B, r) были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы $|AB|^2 = R^2 + r^2$, или

$$(a - b)(\bar{a} - \bar{b}) = R^2 + r^2. \quad (20)$$

Если окружности заданы уравнениями

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \alpha_0 = 0, \quad \alpha_0 = \bar{\alpha}_0,$$

и

$$z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \beta_0 = 0, \quad \beta_0 = \bar{\beta}_0,$$

то $a = -\alpha$, $b = -\beta$, $R^2 = \alpha\bar{\alpha} - \alpha_0$, $r^2 = \beta\bar{\beta} - \beta_0$, и поэтому критерий (20) их ортогональности трансформируется так:

$$\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = \alpha_0 + \beta_0. \quad (21)$$

Решение задач

Задача 1. Хорды AB и PQ окружности пересекаются в точке C . Найти множество точек M пересечения прямых AP и BQ , если точки A, B, C постоянны, а точки P и Q пробегают данную окружность (рис. 3).

Решение. Пусть z — комплексная координата произвольной точки M искомого множества и данная окружность принята за единичную $z\bar{z} = 1$. В силу зависимости координат точек, принадлежащих секущей к окружности (см. предыдущую статью), имеем:

$$\begin{aligned} c + \bar{c}ab &= a + b, & c + \bar{c}pq &= p + q, \\ z + \bar{z}ap &= a + p, & z + \bar{z}bq &= b + q, \end{aligned}$$

откуда $p = \frac{z-a}{1-a\bar{z}}$, $q = \frac{z-b}{1-b\bar{z}}$. Подставляя эти выражения во второе равенство, получаем:

$$c + \frac{(z-a)(z-b)\bar{c}}{(1-a\bar{z})(1-b\bar{z})} = \frac{z-a}{1-a\bar{z}} + \frac{z-b}{1-b\bar{z}},$$

или

$$c(1-a\bar{z})(1-b\bar{z}) + \bar{c}(z-a)(z-b) = (z-a)(1-b\bar{z}) + (z-b)(1-a\bar{z}).$$

Привлекая $c + \bar{c}ab = a + b$, полученному уравнению придадим вид

$$(z + ab\bar{z} - a - b)(\bar{c}z + c\bar{z} - 2) = 0.$$

Теперь ясно, что искомое множество точек представляет собой пару прямых, одной из которых является прямая AB , а другая имеет уравнение

$$\bar{c}z + cz - 2 = 0 \quad (22)$$

в приведенной форме. Как видим, эта прямая не зависит от хорды AB , а определяется лишь окружностью и точкой C . Она называется *полярной* точки C относительно окружности $z\bar{z} = 1$.

З а д а ч а 2. Около окружности описан квадрат $ABCD$. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 — ортогональные проекции его вершин A, B, C, D соответственно на произвольную касательную к окружности. Доказать, что

$$|AA_1| \cdot |CC_1| = |BB_1| \cdot |DD_1|.$$

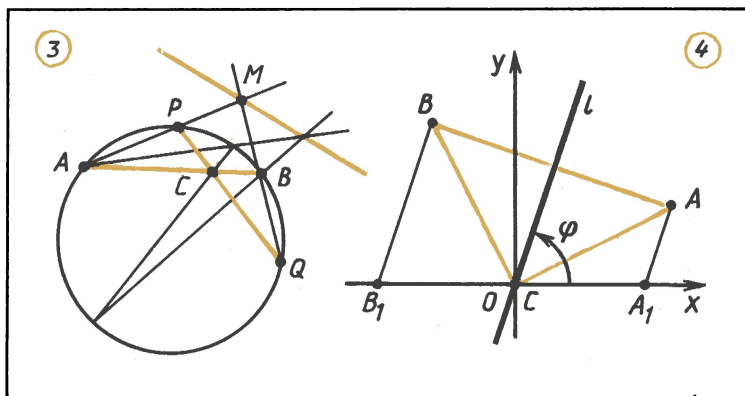
Р е ш е н и е. Радиус окружности примем за единицу длины. Систему координат выберем так, чтобы точки касания сторон AB, BC, CD, DA с окружностью имели координаты $i, -1, -i, 1$. Тогда вершины A, B, C, D будут иметь координаты $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$. Касательная к окружности в ее произвольной точке $P(p)$ имеет уравнение $\bar{p}z + pz - 2 = 0$, $p\bar{p} = 1$ в приведенной форме. Руководствуясь формулой (13), находим:

$$\begin{aligned} |AA_1| \cdot |CC_1| &= \frac{1}{2} |\bar{p}(1+i) + p(1-i) - 2| \cdot \frac{1}{2} |\bar{p}(-1-i) + p(-1+i) - 2| = \\ &= \frac{1}{4} |(\bar{p}(1+i) + p(1-i) - 2)(\bar{p}(1+i) + p(1-i) + 2)| = \\ &= \frac{1}{4} |\bar{p}^2(1+i)^2 + p^2(1-i)^2| = \frac{1}{2} |\bar{p}^2 - p^2|. \end{aligned}$$

Аналогично получаем $|BB_1| \cdot |DD_1| = \frac{1}{4} |\bar{p}^2(-1+i)^2 + p^2(-1-i)^2| =$
 $= \frac{1}{2} |-\bar{p}^2 + p^2| = \frac{1}{2} |\bar{p}^2 - p^2|$. Равенство доказано.

З а д а ч а 3. Вершины A и B прямоугольного равнобедренного треугольника ABC спроектированы параллельно некоторой прямой l на прямую, проходящую через вершину C прямого угла, соответственно в точки A_1 и A_2 . Доказать, что сумма $|CA_1|^2 + |CB_1|^2$ зависит только от угла φ между осью проекций и прямой l (при заданном треугольнике ABC).

Р е ш е н и е. Примем ось проекций за действительную ось x и вершину C за начало O . Прямую l проведем через O и зададим принадлежащей



ей точкой $P(p)$, $|p|=1$. Ее уравнение имеет вид $\bar{p}z = p\bar{z}$. Если вершина A имеет координату a , $|a|=1$, то вершине B соответствует число ai (рис. 4). Прямые AA_1 и BB_1 получают уравнения $\bar{p}(z-a) = p(\bar{z}-\bar{a})$ и $\bar{p}(z-ai) = p(\bar{z}+\bar{a}i)$.

Для точек, лежащих на оси x проекций, $z = \bar{z}$. Подстановкой в предыдущие уравнения получаем координаты точек A_1 и B_1 :

$$a_1 = \frac{\bar{p}a - p\bar{a}}{\bar{p} - p}, \quad b_1 = \frac{i(\bar{p}a + p\bar{a})}{\bar{p} - p}.$$

Находим:

$$\begin{aligned} |CA_1|^2 + |CB_1|^2 &= a_1\bar{a}_1 + b_1\bar{b}_1 = a_1^2 + b_1^2 = \frac{(\bar{p}a - p\bar{a})^2 - (\bar{p}a + p\bar{a})^2}{(\bar{p} - p)^2} = \\ &= \frac{-4p\bar{p}a\bar{a}}{(-2i \sin \varphi)^2} = \frac{1}{\sin^2 \varphi}, \end{aligned}$$

где $\varphi = \arg p$ — указанный в условии задачи угол.

Задача 4. На окружности σ взяты четыре произвольные точки A, B, C, D . Окружности $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ соответственно с центрами A, B, C и проходящие через точку D пересекаются вторично попарно в точках M_1, M_2, M_3 (рис. 5). Доказать, что точки M_1, M_2, M_3 коллинеарны.

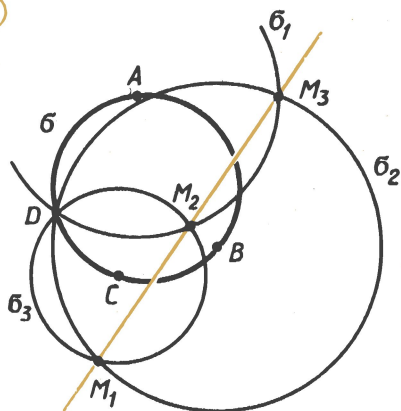
Решение. Пусть окружность σ является единичной и точка D имеет координату $d=1$. Используя уравнение (14) и тот факт, что окружность σ_1 имеет центр $A(a)$ и содержит точку $D(1)$, получаем ее уравнение

$$\begin{aligned} (z-a)(\bar{z}-\bar{a}) &= (1-a)(1-\bar{a}), \\ \text{или } z\bar{z} - \bar{a}z - az &= 1 - a - \bar{a}. \end{aligned}$$

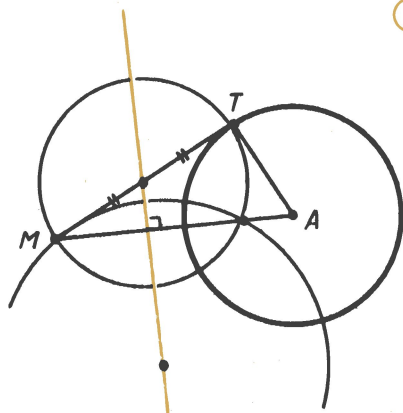
Аналогично окружности σ_2 и σ_3 будут иметь уравнения

$$z\bar{z} - \bar{b}z - bz = 1 - b - \bar{b} \quad \text{и} \quad z\bar{z} - \bar{c}z - cz = 1 - c - \bar{c}.$$

5



6



Решая систему уравнений окружностей σ_1 и σ_2 , находим координату второй общей точки M_3 этих окружностей: $m_3 = a + b - ab$.

Аналогично $m_2 = c + a - ca$, $m_1 = b + c - bc$.

Отсюда находим:

$$\frac{m_2 - m_1}{m_3 - m_1} = \frac{(a-b)(1-c)}{(a-c)(1-b)}.$$

Это число сопряжено самому себе, и потому точки M_1 , M_2 , M_3 коллинеарны.

Задача 5. Найти множество центров окружностей, проходящих через данную точку $M(m)$ ортогонально данной окружности $z\bar{z} + \alpha\bar{z} + \alpha z + \alpha_0 = 0$.

Решение. Если окружность $z\bar{z} + \beta\bar{z} + \beta z + \beta_0 = 0$ обладает заданным свойством, то

$$\begin{aligned} m\bar{m} + \beta\bar{m} + \beta m + \beta_0 &= 0, \\ \alpha\bar{\beta} + \alpha\beta &= \alpha_0 + \beta_0. \end{aligned}$$

Исключая β_0 , получаем уравнение относительно β :

$$(\bar{\alpha} + \bar{m})\beta + (\alpha + m)\bar{\beta} + m\bar{m} - \alpha_0 = 0.$$

Им определяется прямая с нормальным вектором $\alpha + m$, который равен вектору \overrightarrow{AM} , где $A(-\alpha)$ — центр данной окружности. Следовательно, эта прямая перпендикулярна прямой AM (рис. 6.).

Задачи для самостоятельного решения

1. В окружность вписан треугольник ABC . Касательные к окружности в его вершинах образуют треугольник $A_1B_1C_1$. Доказать, что произ-

ведение расстояний любой точки окружности до сторон одного треугольника равно произведению расстояний этой точки до сторон другого треугольника.

2. Найти множество точек плоскости, для каждой из которых разность квадратов расстояний до двух данных точек A и B постоянна.

3. Через произвольную точку M секущей AB окружности с центром O проведена прямая перпендикулярно OM . Эта прямая пересекает касательные к окружности в точках A и B соответственно в точках P и Q . Доказать, что точка M есть середина отрезка PQ .

4. В вершине O треугольника ABC проведена касательная к окружности, описанной около треугольника. Доказать, что произведение расстояний любой точки окружности до касательной и до стороны равно произведению расстояний этой же точки до двух других сторон треугольника.

5. Три равные окружности имеют общую точку O и вторично пересекаются в точках A , B , C . Доказать, что окружность, описанная около треугольника ABC , равна данным.

6. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC дана произвольная точка P . Доказать, что окружности, описанные около треугольников APC и BPC , ортогональны.

7. Дан прямоугольный треугольник ABC . Найти множество таких точек M , чтобы симметричные каждой из них относительно прямых BA и BC точки M_1 и M_2 лежали на одной прямой с вершиной C прямого угла.

ПРИЛОЖЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ К ЗАДАЧАМ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Многие задачи элементарной геометрии можно изящно и просто решить при помощи комплексных чисел. Однако значение комплексных чисел, как в этом можно убедиться из приведенных ниже задач и теорем, заключается не только в изяществе и краткости их решения посредством этих чисел, хотя и это весьма существенно. Не менее важно и то, что в результате применения при решении задач комплексных чисел нередко обнаруживаются новые детали, удается сделать интересные обобщения и внести уточнения, которые подсказываются анализом полученных формул и соотношений. Поэтому мы не останавливаем внимание читателей на выводе некоторых основных формул, а ставим своей целью показать применение их при доказательстве теорем и решении задач. Те немногие формулы, которые нам потребуются в дальнейшем, приводим без доказательства, настоятельно рекомендуя соответствующие выкладки и выводы провести читателю самостоятельно. (В этой миниатюре используются формулы, полученные в миниатюре «Метод комплексных чисел в планиметрии». — *Прим. сост.*).

Точки A , B , C , ... плоскости будем обозначать так: $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, ..., где a , b , c , ... — соответствующие этим точкам комплексные числа. Иногда для краткости будем просто писать и говорить: точка a , точка b и т. д. Переменные точки Z , W плоскости обозначим через $Z(z)$, $W(w)$ или коротко z , w . Начало отсчета ($z=0$) обозначим буквой O .

$$\text{I. } \overline{OA^2} = a\bar{a}; \overline{AB^2} = (a-b)(\bar{a}-\bar{b}).$$

II. Если простое отношение (abc) трех точек a, b и c вещественно, т. е. $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = (abc)$ или

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{\bar{a}-\bar{b}}{\bar{b}-\bar{c}},$$

то точки A, B и C коллинеарны.

Обратно: если точки A, B, C коллинеарны, то $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (b-\bar{a})(\bar{c}-\bar{a}) = (\bar{b}-\bar{a})(c-a)$ или простое отношение (abc) этих точек вещественно:

$$(abc) = \frac{a-c}{b-c} = \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}} = (\bar{a}\bar{b}\bar{c}).$$

III. Если четыре точки A, B, C и D принадлежат одной окружности (или одной прямой), то двойное отношение $(a, b; c, d)$ этих точек вещественно: $(abcd) = (\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d})$, или

$$\frac{a-c}{b-c} : \frac{a-d}{b-d} = \frac{\bar{a}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}} : \frac{\bar{a}-\bar{d}}{\bar{b}-\bar{d}}.$$

Обратно: если $(a, b; c, d) = (\bar{a}, \bar{b}; \bar{c}, \bar{d})$, то точки A, B, C и D расположены конциклически или коллинеарно.

IV. Если ABC — равносторонний положительно ориентированный треугольник, то $a + \alpha b + \alpha^2 c = 0$, где $\alpha = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

Обратно: если $a + \alpha b + \alpha^2 c = 0$, $\alpha = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$, то треугольник ABC равносторонний и ориентирован положительно (или же $A \equiv B \equiv C$). Если имеет место равенство $\alpha^2 a + \alpha b + c = 0$, то треугольник ABC равносторонний и ориентирован отрицательно.

V. Уравнение окружности, проходящей через точки A, B и C , имеет вид:

$$\frac{z-a}{b-a} : \frac{z-c}{b-c} = \frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} : \frac{\bar{z}-\bar{c}}{\bar{b}-\bar{c}}.$$

$$\text{VI. } \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{(b-a)(\bar{d}-\bar{c}) + (\bar{b}-\bar{a})(d-c)}{2|b-a| \cdot |d-c|}.$$

Для того чтобы два отрезка AB и CD были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы

$$(\bar{a}-\bar{b})(c-d) + (a-b)(\bar{c}-\bar{d}) = 0.$$

$$\text{VII. } \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{-(b-a)(\bar{d}-\bar{c}) + (\bar{b}-\bar{a})(d-c)}{2i|b-a| |d-c|}.$$

VIII. Площадь S ориентированного треугольника ABC вычисляется по

$$\text{формуле } S = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} a\bar{a}1 \\ b\bar{b}1 \\ c\bar{c}1 \end{vmatrix}, \quad \text{где } \begin{vmatrix} a\bar{a}1 \\ b\bar{b}1 \\ c\bar{c}1 \end{vmatrix} = a(\bar{b}-\bar{c}) + b(\bar{c}-\bar{a}) + c(\bar{a}-\bar{b}).$$

IX. Для того чтобы два одинаково ориентированных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ были подобны, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{a-b}{a_1-b_1} = \frac{b-c}{b_1-c_1} = \alpha,$$

где α — комплексное число.

X. Если хорды AB и CD окружности $\bar{z}z = R^2$ параллельны, то $ab = cd$. Обратно: если $ab = cd$, то хорды AB и CD окружности $\bar{z}z = R^2$ параллельны.

XI. Если хорды AB и CD (или их продолжения) окружности $\bar{z}z = R^2$ перпендикулярны, то $ab + cd = 0$. Обратно: если $ab = -cd$, то хорды AB и CD окружности $\bar{z}z = R^2$ перпендикулярны.

XII. Если хорды AB и CD (или их продолжения) единичной окружности $\bar{z}z = 1$ пересекаются в точке S , то

$$s = \frac{a+b-(c+d)}{ab-cd}.$$

XIII. Если C_1 есть основание высоты, проведенной из вершины C треугольника ABC , вписанного в единичную окружность $\bar{z}z = 1$, то $C_1 = \frac{1}{2}(a+b+c-\frac{ab}{c})$.

XIV. Для того чтобы точка z принадлежала хорде AB (или продолжению хорды) единичной окружности $\bar{z}z = 1$, необходимо и достаточно, чтобы $a+b = z+ab\bar{z}$.

XV. Если C есть точка пересечения касательных в точках A и B единичной окружности $\bar{z}z = 1$, то

$$\frac{2}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

XVI. Если прямая пересекает единичную окружность $\bar{z}z = 1$ в точках A и B , то основанию S перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую AB , соответствует комплексное число s , определяемое формулой $s = \frac{1}{2}(a+b+m-ab\bar{m})$.

XVII. Если треугольник ABC вписан в окружность $\bar{z}z = 1$, то его площадь S вычисляется по формуле

$$S = \frac{i}{4} \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}.$$

Задача 1. В окружность вписан $2n$ -угольник $A_1A_2 \dots A_{2n}$. Через произвольную точку B_1 окружности проведена хорда B_1B_2 , параллельная или перпендикулярная A_1A_2 , затем проведена хорда B_2B_3 , параллельная или перпендикулярная A_2A_3 , и т. д., наконец, хорда $B_{2n-1}B_{2n}$, параллельная

или перпендикулярная хорде $A_{2n-1}A_{2n}$. Доказать, что хорда $B_{2n}B_1$ параллельна или перпендикулярна $A_{2n}A_1$.

Решение. Если данная окружность имеет уравнение $\bar{z}z=R^2$, то согласно условию будем иметь:

$$\begin{aligned}a_1a_2 &= \varepsilon_{12} b_1b_2, \\ b_2b_3 &= \varepsilon_{23} a_1a_3, \\ a_3a_4 &= \varepsilon_{34} b_3b_4, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot\end{aligned}$$

$$a_{2n-1}a_{2n} = \varepsilon_{2n-1, 2n} b_{2n-1}b_{2n},$$

где $\varepsilon_{ii+1} = \pm 1$ ($i=1, 2, \dots, 2n-1$) (см. X и XI).

После почленного перемножения этих равенств и упрощения получим:

$$a_1a_{2n} = \varepsilon_{12}\varepsilon_{23} \dots \varepsilon_{2n-1, 2n} b_1b_{2n},$$

или

$$a_1a_{2n} = \varepsilon b_1b_{2n},$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Это значит, что хорды $A_{2n}A_1$ и $B_{2n}B_1$ либо перпендикулярны, либо параллельны.

Задача 2. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ одинаково ориентированы и подобны. Доказать, что если векторы $\vec{MA}_0, \vec{MB}_0, \vec{MC}_0$ соответственно равны векторам $\vec{AA}_1, \vec{BB}_1, \vec{CC}_1$, то треугольник $A_0B_0C_0$ подобен данным и одинаково с ними ориентирован (M — произвольная точка плоскости).

Решение. Можно считать $m=0$. Тогда

$$a_0 = a_1 - a, \quad b_0 = b_1 - b, \quad c_0 = c_1 - c,$$

откуда

$$\begin{aligned}b_0 - a_0 &= b_1 - a_1 - (b - a), \\ c_0 - a_0 &= c_1 - a_1 - (c - a)\end{aligned} \quad \text{и}$$

$$\frac{b_0 - a_0}{b - a} = \frac{b_1 - a_1}{b - a} - 1,$$

$$\frac{c_0 - a_0}{c - a} = \frac{c_1 - a_1}{c - a} - 1.$$

Но согласно IX имеем: $\frac{b_1 - a_1}{b - a} = \frac{c_1 - a_1}{c - a}$. Следовательно, $\frac{b_0 - a_0}{b - a} = \frac{c_0 - a_0}{c - a}$

и опять согласно IX треугольники $A_0B_0C_0$ и ABC одинаково ориентированы и подобны.

Задача 3. Даны равносторонний треугольник ABC и точка M . Доказать, что отрезки MA, MB, MC могут служить сторонами некоторого треугольника. Этот треугольник может оказаться вырожденным только в том случае, если точка M лежит на описанной около треугольника ABC окружности (*теорема Помпею*).

Доказательство. Совместим точку M с нулевой точкой. Тогда согласно IV имеем $a + \alpha b + \alpha^2 c = 0$, откуда

$$\begin{aligned} |a| &= |\alpha b + \alpha^2 c| = |\alpha| |b + \alpha c| \leq \\ &\leq |b| + |\alpha c| = |b| + |c|, \end{aligned}$$

т. е. $MA \leq MB + MC$.

Аналогично доказываем, что $MB \leq MC + MA$, $MC \leq MA + MB$. Очевидно, что треугольник, построенный на отрезках MA , MB и MC , вырождается, если, например, $|b + \alpha c| = |b| + |\alpha c|$. Это означает, что точки b и αc коллинеарны с нулевой точкой, а следовательно, ориентированный угол $СМВ$ равен 120° и точка M лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .

Задача 4. Даны два одинаково ориентированных равносторонних треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. Доказать, что на отрезках AA_1 , BB_1 и CC_1 можно построить треугольник (который, быть может, и вырождается).

Решение. Согласно IV

$$\begin{aligned} a + \alpha b + \alpha^2 c &= 0, \\ a_1 + \alpha b_1 + \alpha^2 c_1 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда $(a_1 - a) + \alpha(b_1 - b) + \alpha^2(c_1 - c) = 0$. Если векторы \vec{OA}_0 , \vec{OB}_0 , \vec{OC}_0 соответственно равны векторам \vec{AA}_1 , \vec{BB}_1 и \vec{CC}_1 , то $a_0 + \alpha b_0 + \alpha^2 c_0 = 0$ и треугольник $A_0B_0C_0$ равносторонний. Согласно задаче 3 заключаем, что на отрезках OA_0 , OB_0 , OC_0 можно построить треугольник, и, следовательно, на им равных отрезках AA_1 , BB_1 и CC_1 также можно построить (быть может, вырожденный) треугольник.

Задача 5 (теорема о 27 равносторонних треугольниках — теорема Морлея и ее обобщение). Доказать, что пары трисектрис треугольника, примыкающих соответственно к одной и той же стороне, пересекаются в точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника (трисектрисой угла называется луч, проведенный через вершину угла и делящий его в отношении $1:2$)³⁵.

Доказательство. Опишем около треугольника ABC окружность и примем ее за единичную $\bar{z}\bar{z}=1$. Положим $a = \beta^3$, $b = \beta^3\gamma^3$, $c = \alpha^3\beta^3\gamma^3 = 1$. Тогда трисектрисы, прилегающие к стороне AB и пересекающиеся в точке R , определяют согласно XII число r :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\frac{1}{\beta^3\gamma^3} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\beta^3} - \frac{1}{\beta^3\gamma^3\alpha}}{\frac{1}{\beta^5\gamma^3} - \frac{1}{\beta^6\gamma^3\alpha}} = \frac{\alpha + \alpha\beta\gamma^3 - \alpha\gamma^3 - 1}{\alpha\beta - 1} \beta^3 = \frac{\alpha^4\beta^3\gamma^3 + \alpha\beta\gamma^3 - \alpha\gamma^3 - \alpha^3\beta^3\gamma^3}{\alpha\beta - 1} \beta^3 = \\ &= \alpha\beta^3\gamma^3(\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta + 1 - \alpha\beta^2 - \beta). \end{aligned}$$

Трисектрисы, прилегающие к стороне BC , пересекаются в точке P :

$$p = \frac{\frac{1}{\beta^3\gamma^2} + 1 - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\beta^3\gamma^3}}{\frac{1}{\beta^3\gamma^2} - \frac{1}{\beta^4\gamma^3}} = \beta(\beta^2\gamma^2 + \beta\gamma + 1 - \beta\gamma^2 - \gamma).$$

Наконец, трисектрисы, прилегающие к стороне CA , пересекаются в точке Q :

$$q = \frac{\frac{1}{\beta^3\gamma} + 1 - \frac{1}{\beta^3} - \frac{1}{\beta^3\gamma^3\alpha^2}}{\frac{1}{\beta^3\gamma} - \frac{1}{\beta^6\gamma^3\alpha^2}} = \frac{\alpha^2\gamma^2 - 1 + \beta^2\gamma\alpha(1 - \alpha^3\gamma^3)}{\beta^3\gamma^2\alpha^2(1 - \alpha\gamma)}\beta^3 = \\ = \beta^3\gamma(\alpha^2\gamma^2 + \alpha\gamma + 1 - \alpha^2\gamma - \alpha).$$

Остается доказать, пользуясь формулой IV, что треугольник PQR является равносторонним, т. е. $p + \varepsilon q + \varepsilon^2 r = 0$, где $\varepsilon = \alpha\beta\gamma$, $\alpha^2\beta^2\gamma^2 + \alpha\beta\gamma + 1 = 0$. В самом деле, $p + \varepsilon q + \varepsilon^2 r = \beta(\beta^2\gamma^2 + \beta\gamma + 1 - \beta\gamma^2 - \gamma) + \alpha\beta^4\gamma^2(\alpha^2\gamma^2 + \alpha\gamma + 1 - \alpha^2\gamma - \alpha) + \beta^2\gamma^2(\alpha^2\beta^2 + \alpha\beta + 1 - \alpha^2\gamma - \beta) = \beta^2\gamma(1 + \alpha\beta\gamma + \alpha^2\beta^2\gamma^2) = 0$.

Заметим, что если угол COA (O — нулевая точка) увеличить на 2π , то вместо β будем иметь $\beta e^{\frac{2\pi i}{3}}$ и получим две новые («внешние») трисектрисы угла ABC , которые получаются из первых поворотом на 60° около вершины B . Но на приведенное выше решение такая замена трисектрис не влияет. Точно так же угол COA можно увеличить на 4π , что приводит к появлению еще двух трисектрис угла при вершине B , и это опять не влияет на предложенное выше решение.

Аналогично новые трисектрисы можно ввести и при вершинах A и C .

Таким образом, к стороне AB прилегают девять пар трисектрис, и поэтому получаем девять точек R . После выбора одной точки R находим три различные точки P , а для каждой выбранной точки P соответствующая точка Q определяется уже однозначно. Отсюда согласно теореме Морлея следует (если воспользоваться не только обычными трисектрисами, но и «внешними»), что всего получим 27 решений — 27 равносторонних треугольников.

Задача 6 (задача о пяти равносторонних треугольниках). Даны три равносторонних одинаково ориентированных треугольника $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$, причем треугольник $A_1A_2A_3$ также равносторонний и той же ориентации. Доказать, что середины P , Q , R отрезков C_1B_2 , C_2B_3 , C_3B_1 являются вершинами равностороннего треугольника той же ориентации.

Решение. Согласно условию задачи и формуле IV имеем:

$$\begin{aligned} a_1 + \alpha b_1 + \alpha^2 c_1 &= 0, \\ c_2 + \alpha a_2 + \alpha^2 b_2 &= 0, \\ b_3 + \alpha c_3 + \alpha^2 a_3 &= 0, \\ a_1 + \alpha a_2 + \alpha^2 a_3 &= 0. \end{aligned}$$

После почленного сложения первых трех равенств, учитывая последнее равенство, будем иметь:

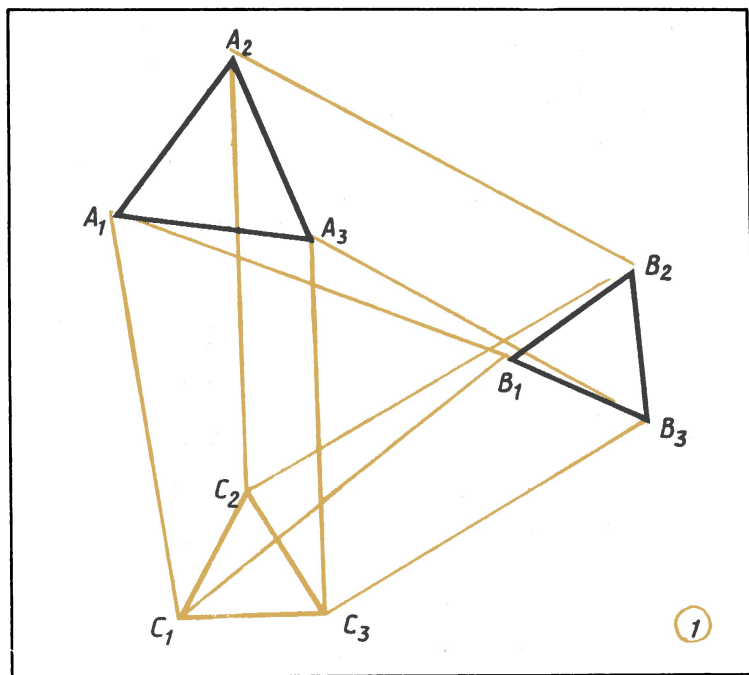
$$c_2 + b_3 + \alpha(c_3 + b_1) + \alpha^2(c_1 + b_2) = 0 \text{ или } 2q + 2\alpha r + 2\alpha^2 p = 0.$$

Это значит, что треугольник QRP является равносторонним (или вырождается в точку) и он имеет ту же ориентацию, что и исходные четыре треугольника.

Задача 7 (задача о шести равносторонних треугольниках). Даны два одинаково ориентированных равносторонних треугольника $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$. На отрезках A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 построены равносторонние треугольники $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ той же ориентации. Доказать, что треугольник $C_1C_2C_3$ равносторонний и имеет ту же ориентацию, что и данные пять треугольников (рис. 1).

Доказательство. К четырем уравнениям, приведенным в решении задачи 6, присоединим еще одно уравнение $b_3 + \alpha b_1 + \alpha^2 b_2 = 0$ (по условию задачи треугольник $B_1B_2B_3$ равносторонний). Но тогда при почленном сложении первых трех равенств, с учетом четвертого и пятого равенств, получим $c_2 + \alpha c_3 + \alpha^2 c_1 = 0$, т. е. треугольник $C_1C_2C_3$ равносторонний и имеет ту же ориентацию, что и данные пять равносторонних треугольников.

Задача 8 (две задачи о четырех равносторонних треугольниках). На отрезках BC , CA и AB построены одинаково ориентированные равносторонние треугольники BCA_1 , CAB_1 и ABC_1 .



Доказать, что:

- а) центры A_0, B_0 и C_0 этих треугольников являются вершинами четвертого равностороннего треугольника $A_0B_0C_0$ противоположной ориентации;
 б) середины A', B' и C' отрезков AA_0, BB_0, CC_0 являются вершинами равностороннего треугольника ориентации, противоположной ориентации данных равносторонних треугольников (рис. 2).

Доказательство.

а) Согласно формуле IV из условия задачи следует:

$$a + \alpha b_1 + \alpha^2 c = 0,$$

$$b + \alpha c + \alpha^2 a_1 = 0,$$

$$c_1 + \alpha a + \alpha^2 b = 0,$$

$$c_0 = \frac{1}{3}(a + b + c_1), \quad a_0 = \frac{1}{3}(b + c + a_1), \quad b_0 = \frac{1}{3}(c + a + b_1).$$

Отсюда находим, что

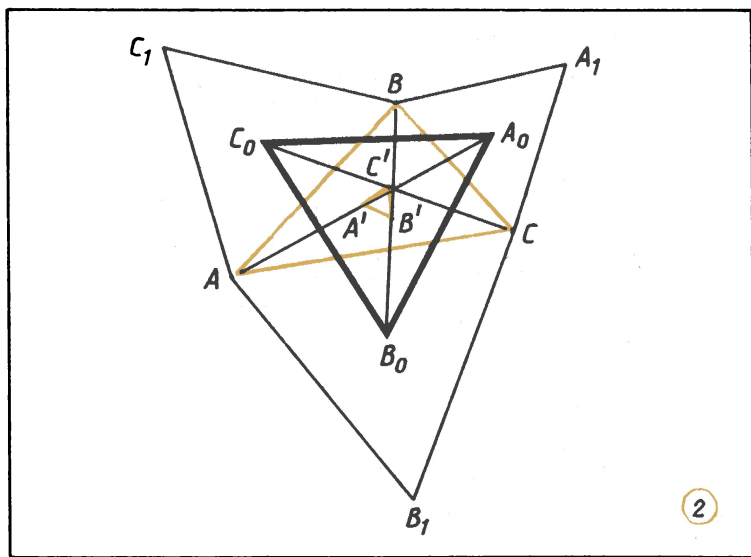
$$\begin{aligned} 3(c_0 + \alpha b_0 + \alpha^2 a_0) &= a + b + c_0 + \alpha(c + a + b_1) + \alpha^2(b + c + a_1) = \\ &= (c_1 + \alpha a + \alpha^2 b) + (b + \alpha c + \alpha^2 a_1) + (a + \alpha b_1 + \alpha^2 c) = 0. \end{aligned}$$

б) Очевидно, что

$$a' = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{3}(b + c + a_1)\right) = \frac{1}{6}(3a + b + c - \alpha c - \alpha^2 b),$$

$$b' = \frac{1}{2}\left(b + \frac{1}{3}(c + a + b_1)\right) = \frac{1}{6}(3b + c + a - \alpha a - \alpha^2 c),$$

$$c' = \frac{1}{2}\left(c + \frac{1}{3}(a + b + c_1)\right) = \frac{1}{6}(3c + a + b - \alpha b - \alpha^2 a).$$



Отсюда находим, что

$$6(a' + \alpha^2 b' + \alpha c') = 3a + b + c - \alpha c - \alpha^2 b + 3b\alpha^2 + c\alpha^2 + a\alpha^2 - a - \alpha c + 3\alpha a + \\ + a\alpha + b\alpha - b\alpha^2 - a = a(1 + \alpha + \alpha^2) + b(1 + \alpha + \alpha^2) + c(1 + \alpha + \alpha^2) = 0,$$

т. е. треугольник $A'B'C'$ является равносторонним и имеет ориентацию, противоположную ориентации данных трех равносторонних треугольников.

Задача 9 (задача о трех равносторонних треугольниках). Дан треугольник ABC . Построить такой треугольник $A_0B_0C_0$, чтобы треугольники A_0B_0C , B_0C_0A и C_0A_0B были равносторонними одной ориентации (рис. 3).

Решение. Согласно условию задачи числа a_0 , b_0 , c_0 должны удовлетворять следующим трем равенствам (см. IV):

$$a + \alpha b_0 + \alpha^2 c_0 = 0,$$

$$b + \alpha c_0 + \alpha^2 a_0 = 0,$$

$$c + \alpha a_0 + \alpha^2 b_0 = 0.$$

Исключив из первых двух равенств c_0 , получим:

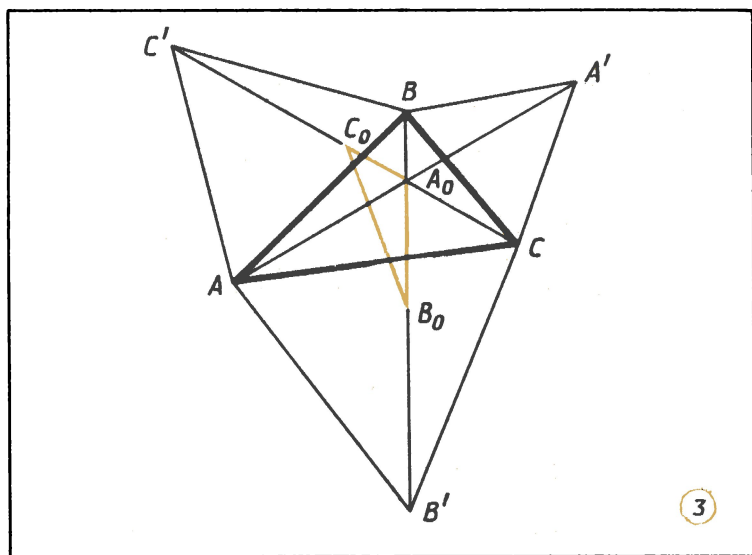
$$a - \alpha b + \alpha b_0 - a_0 = 0.$$

Решая это уравнение совместно с третьим, получим:

$$c + \alpha a_0 - \alpha a + \alpha^2 b + \alpha a_0 = 0.$$

Отсюда находим, что

$$2\alpha a_0 = \alpha a - \alpha^2 b - c.$$



Построим равносторонний треугольник $CA'B$: $c + \alpha a' + \alpha^2 b - c = 0$.
Тогда

$$2\alpha a_0 = \alpha a + \alpha a' \text{ и } a_0 = \frac{a + a'}{2}.$$

Аналогично, построив треугольники $AB'C$ и $BC'A$, найдем, что

$$b_0 = \frac{b + b'}{2}, \quad c_0 = \frac{c + c'}{2}.$$

Следовательно, чтобы построить треугольник $A_0B_0C_0$, необходимо на сторонах BC , CA и AB построить равносторонние треугольники $AB'C$, $BC'A$ и $CA'B$ той же ориентации, что и искомые равносторонние треугольники, и середины отрезков AA' , BB' и CC' являются искомыми точками A_0 , B_0 , C_0 .

Задача 10. Дан треугольник ABC . Найти геометрическое место точек P , ортогональные проекции каждой из которых на стороны данного треугольника являются вершинами треугольников постоянной площади S .

Решение. Принимаем окружность, описанную около данного треугольника, за единичную $z\bar{z} = 1$. Если основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны BC , CA и AB , обозначим через A_1 , B_1 , C_1 , то согласно формуле XVI имеем:

$$a_1 = \frac{1}{2}(b + c + p - bc\bar{p}),$$

$$b_1 = \frac{1}{2}(c + a + p - ca\bar{p}),$$

$$c_1 = \frac{1}{2}(a + b + p - ab\bar{p}).$$

Следовательно, воспользовавшись формулой VIII, получим:

$$S_1 = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} \frac{1}{2}(b + c + p - bc\bar{p}) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \bar{p} - \frac{p}{bc}\right) & 1 \\ \frac{1}{2}(c + a + p - ca\bar{p}) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \bar{p} - \frac{p}{ca}\right) & 1 \\ \frac{1}{2}(a + b + p - ab\bar{p}) & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \bar{p} - \frac{p}{ab}\right) & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{i}{16abc} \begin{vmatrix} b + c + p - bc\bar{p} & (b + c + \bar{p}bc - p)a & 1 \\ c + a + p - ca\bar{p} & (c + a + \bar{p}ca - p)b & 1 \\ a + b + p - ab\bar{p} & (a + b + \bar{p}ab - p)c & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{i}{16abc} (a - b)(b - c)(c - a)(1 - p\bar{p}).$$

Но согласно формуле XVII $S_{ABC} = S = \frac{i}{4} \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}$.

Значит,

$$S_1 = \frac{1}{4} S (1 - OP^2).$$

Если радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен R , то

$$S_1 = \frac{1}{4} S \left(1 - \frac{OP^2}{R^2} \right).$$

Из полученной формулы следует, что если $S = \text{const}$, то и $OP = \text{const}$ и точка P расположена на окружности, concentрической с описанной около данного треугольника.

Отметим, что если $S_1 = \frac{1}{4} S$, то $OP = 0$ и геометрическое место точек сводится к одной точке O , а если же $S_1 > \frac{1}{4} S$, то $OP^2 < 0$ и искомое геометрическое место не содержит точек. Если же $S_1 < \frac{1}{4} S$, то получается окружность, которая совпадает с описанной при $S_1 = 0$.

Заметим, наконец, что если $0 < OP \leq R$, то $S_1 \geq 0$, а при $OP > R$ имеем $S_1 < 0$.

Задача 11 (*прямая Эйлера и прямые Симсона треугольника*). К числу замечательных прямых, связанных с треугольником, относятся прямая Эйлера и прямые Симсона.

Докажем, что центр O описанной окружности, центроид G и ортоцентр H треугольника ABC , не являющегося равносторонним, коллинеарны, причем $OG:OH = 1:3$.

В самом деле, если окружность, описанную около треугольника ABC , считать единичной: $\bar{z}\bar{z} = 1$, то, как легко проверить, $g = \frac{1}{3}(a+b+c)$. Согласно X $a_1 = -\frac{bc}{a}$, $b_1 = -\frac{ca}{b}$, где числа a_1 , b_1 соответствуют точкам пересечения продолжений высот треугольника с описанной окружностью. Следовательно, согласно XII имеем:

$$\bar{h} = \frac{a - \frac{bc}{a} - b + \frac{ca}{b}}{-bc + ac} = \frac{(a-b) \left(1 + \frac{c(a+b)}{ab} \right)}{c(a-b)} = \frac{ab + bc + ca}{abc}.$$

Отсюда $\bar{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ и $h = a + b + c$. Таким образом, $g = \frac{1}{3}h$ и точки O , G , H коллинеарны, причем $OG:OH = 1:3$. Прямая OH носит название *прямой Эйлера* треугольника ABC .

Если из точки D , расположенной на окружности, описанной около треугольника ABC , опустить перпендикуляр на его стороны, то их основания A_0 , B_0 и C_0 коллинеарны.

В самом деле, согласно XIII имеем:

$$a_0 = \frac{1}{2} \left(b + c + d - \frac{bc}{d} \right),$$

$$b_0 = \frac{1}{2} \left(c + a + d - \frac{ca}{d} \right),$$

$$c_0 = \frac{1}{2} \left(a + b + d - \frac{ab}{d} \right).$$

Отсюда находим, что

$$a_0 - b_0 = \frac{1}{2d} (b - a)(d - c),$$

$$a_0 - c_0 = \frac{1}{2d} (c - a)(d - b)$$

и

$$\frac{a_0 - b_0}{a_0 - c_0} = \frac{(b - a)(d - c)}{(c - a)(d - b)} = \frac{b - a}{c - a} : \frac{b - d}{c - d} = (b, c; a, d).$$

Но двойное отношение $(b, c; a, d)$ вещественно, так как точки A, B, C и D конциклические (см. III). Следовательно, векторы $\vec{A_0B_0}$ и $\vec{A_0C_0}$ коллинеарны и точки A_0, B_0, C_0 принадлежат одной прямой.

Справедливо также и обратное утверждение: если основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки на стороны треугольника, коллинеарны, то эта точка принадлежит окружности, описанной около треугольника.

Действительно, пусть основания A_0, B_0, C_0 перпендикуляров, опущенных из точки D на стороны треугольника, коллинеарны. Согласно формуле XVI можем записать:

$$a_0 = \frac{1}{2} (b + c + d - b\bar{c}\bar{d}),$$

$$b_0 = \frac{1}{2} (c + a + d - c\bar{a}\bar{d}),$$

$$c_0 = \frac{1}{2} (a + b + d - a\bar{b}\bar{d}).$$

Но точки A_0, B_0 и C_0 принадлежат одной прямой. Следовательно, простое отношение

$$(a_0 b_0 c_0) = \frac{a_0 - c_0}{b_0 - c_0} = \frac{(c - a)(1 - b\bar{d})}{(c - b)(1 - a\bar{d})}$$

вещественно, и поэтому на основании формулы II

$$\frac{(c - a)(1 - b\bar{d})}{(c - b)(1 - a\bar{d})} = \frac{(\bar{c} - \bar{a})(1 - b\bar{d})}{(\bar{c} - \bar{b})(1 - a\bar{d})}, \quad \text{или} \quad \frac{1 - b\bar{d}}{1 - a\bar{d}} = \frac{b(1 - \bar{b}d)}{a(1 - \bar{a}d)}, \quad \frac{1 - b\bar{d}}{1 - a\bar{d}} = \frac{b - d}{a - d}.$$

Из последнего равенства после упрощений получаем $\overline{dd}=1$, и точка D принадлежит единичной окружности $\overline{zz}=1$, что и требовалось установить. Прямая $A_0B_0C_0$ называется *прямой Симсона* точки D относительно треугольника ABC .

Докажем, что угол между прямыми Симсона точек D' и D'' относительно треугольника ABC равен вписанному углу, опирающемуся на дугу $D'D''$.

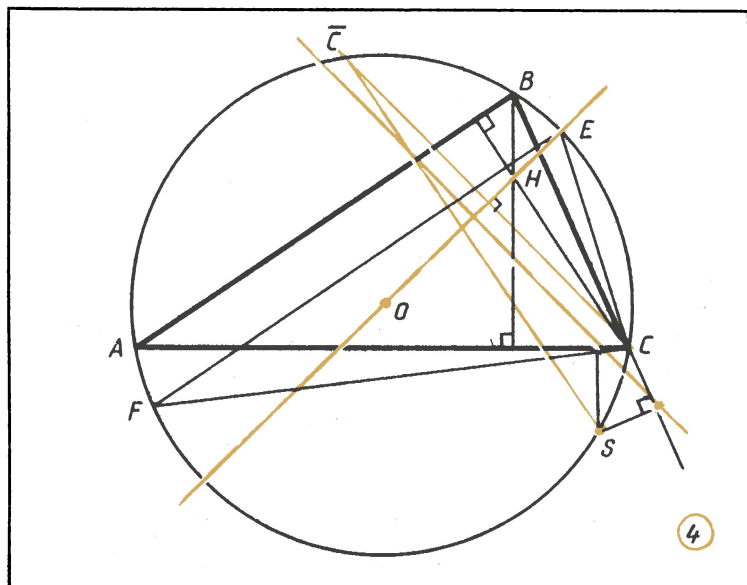
Пусть точке D' соответствует прямая Симсона $p' \equiv A'B'C'$, а точке D'' — прямая $p'' \equiv A''B''C''$. Векторам $2\overrightarrow{B'C'}$ и $2\overrightarrow{B''C''}$ соответствуют комплексные числа $(b-c)(1-\overline{ad'})$, $(b-c)(1-\overline{ad''})$.

Следовательно,

$$\begin{aligned} \widehat{(\overrightarrow{p'}, \overrightarrow{p''})} &= ((b-c)(1-\overline{ad'}), (b-c)(1-\overline{ad''})) = \\ &= (a(b-c)(\overline{a}-\overline{d'}), a(b-c)(\overline{a}-\overline{d''})) = ((\overline{a}-\overline{d'}), (\overline{a}-\overline{d''})) = \\ &= -((\overline{a}-\overline{d'}), (\overline{a}-\overline{d''})) = -(\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AD''}). \end{aligned}$$

Интересно отметить, что ориентированные углы между векторами $\overrightarrow{B'C'}$, $\overrightarrow{B''C''}$ и $\overrightarrow{AD'}$, $\overrightarrow{AD''}$, равные по абсолютному значению, имеют противоположные знаки. Очевидно, никакие две прямые Симсона относительно одного и того же треугольника не могут быть параллельны.

Найдем такую точку S на окружности, описанной около треугольника ABC , чтобы прямая Эйлера треугольника и прямая Симсона точки S были перпендикулярны (рис. 4).



Очевидно, для этого необходимо потребовать выполнения условия $h(b-c)(1-\bar{a}s) + \bar{h}(\bar{b}-\bar{c})(1-\bar{a}s) = 0$, где $h = a+b+c$. Отсюда находим, что

$$\frac{(ab+bc+ca)(b-c)(s-a)}{abcs} + \frac{(a+b+c)(\bar{b}-\bar{c})(s-\bar{a})}{abc\bar{s}} = 0,$$

или

$$ab+bc+ca+sa+sb+sc=0.$$

Очевидно, если $a+b+c \neq 0$, то точка S единственная, а если $a+b+c=0$, то $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$ или $ab+bc+ac=0$ и точка S неопределена. Это имеет место тогда и только тогда, когда треугольник равносторонний. Таким образом, в общем случае имеем:

$$s = -\frac{ab+bc+ca}{a+b+c} = -\frac{\bar{a}bch}{h}.$$

Если считать, что вектор \overrightarrow{OH} направлен по оси x , то

$$\frac{\bar{h}}{h} = 1 \text{ и } s = -\frac{abc}{1^2} = \frac{\left(-\frac{ab}{1}\right)c}{1},$$

где число 1 соответствует точке пересечения E луча OH с окружностью $\bar{z}z=1$. Из полученной формулы согласно X и XI находим точку S : проводим через точку E прямую, параллельную AB и встречающую описанную окружность в точке F ; далее, из точки E опускаем на прямую FC перпендикуляр, пересекающий окружность $\bar{z}z=1$ в искомой точке S .

Из этого построения усматриваем, что $\angle CBS$ равен углу наклона прямой Эйлера к стороне AB . В самом деле,

$$s(-1) = \left(\frac{ab}{1}\right)c,$$

т. е. хорда FC параллельна хорде SE' (точке E' соответствует число -1).

Но хорда EF параллельна хорде AB . Следовательно, $\widehat{CBS} = \widehat{FEE'} = (\widehat{AB}, \widehat{OH})$.

Можно точку S построить еще так: отразить точку C относительно прямой Эйлера и из полученной точки \bar{C} опустить перпендикуляр на сторону AB , встречающий окружность в точке S .

На следствиях из этого построения не останавливаемся.

О ПОСТРОЕНИИ КАСАТЕЛЬНОЙ К ОКРУЖНОСТИ

К числу конструктивных задач в курсе планиметрии восьмилетней школы относится построение циркулем и линейкой касательной к данной окружности. Если построение касательной к окружности ω (O, R) в точке $A \in \omega$ сводится к построению перпендикуляра к прямой OA в точке A , то более содержательной и поучительной задачей является построение к окружности касательной, проходящей через точку A , не принадлежащую ей.

1. Традиционное построение касательной циркулем и линейкой сводится, как известно, к следующему: на отрезке OA как на диаметре строят окружность ω_1 , пересекающую данную окружность ω в точках B и C (рис. 1). Прямые AB и AC — искомые касательные.

Указанное построение основано на том, что вписанный в окружность ω_1 угол OBA , опирающийся на диаметр, равен 90° . Однако это свойство вписанных углов может быть доказано лишь после того, как наряду с другими аксиомами планиметрии уже принята аксиома о параллельных³⁶ и получены первые следствия из нее, например, когда доказано, что сумма углов треугольника равна 180° .

Познакомимся с построениями касательной к окружности, не требующими обоснования, опирающегося на теорию параллельных.

2. Построим окружность ω_1 ($A, |AO|$) и пересечем ее окружностью ω_2 ($O, 2R$). Обозначим полученные точки пересечения через M и N (рис. 2). Отрезки OM и ON пересекают данную окружность ω в точках B и C . Прямые AB и AC — искомые касательные³⁷.

Действительно, точка B является серединой основания OM равнобедренного треугольника OAM , поэтому $[AB]$ — его высота, а значит, угол OBA прямой. Отсюда следует, что (AB) — касательная к окружности ω .

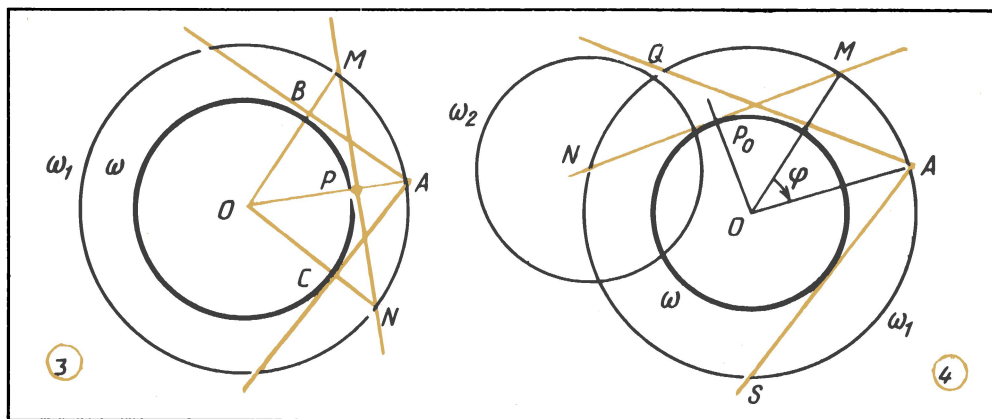
В обосновании проведенного построения нет необходимости опираться на теорию параллельных, и поэтому оно относится к «абсолютной» геометрии.

Характерным для этого и предыдущего построений является то, что для построения касательных были предварительно найдены точки касания.

3. Познавательный интерес представляет собой построение касательной к окружности, содержащееся в третьей книге «Начал» Евклида (предложение 17). Приведем это построение, которое также свободно от использования понятия параллельности.



194

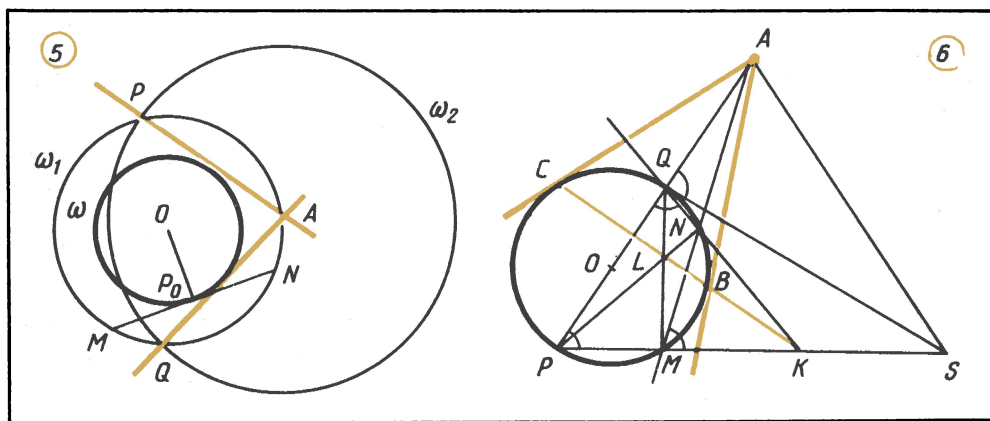


Недостатком такого построения является то, что приходится чаще применять циркуль: вначале для построения касательной в точке P_0 , затем образа Q точки N при повороте R_0^ω и образа S точки M при повороте R_0^ω . Однако этот чисто технический недостаток не идет ни в какое сравнение с указанным выше преимуществом.

5. Следующий способ, близкий к только что рассмотренному, сводится к использованию свойств хорд окружности, равноудаленных от ее центра, — эти хорды конгруэнтны. Строим последовательно окружность ω_1 (O , $|OA|$), касательную к окружности ω в произвольной точке P_0 , пересекающую ω_1 в точках M и N , и окружность ω_2 (A , $|MN|$), пересекающую ω_1 в точках P и Q (рис. 5). Прямые AP и AQ — искомые касательные.

Действительно, хорды AP и AQ конгруэнтны хорде MN , поэтому прямые AP и AQ находятся от центра O на таком же расстоянии R , как и прямая MN . Но в таком случае прямые AP и AQ — касательные к окружности ω .

Это построение, как и в предыдущем случае, не опирается на теорию параллельных, не требует предварительного построения точек касания и может



быть обосновано также с использованием свойств поворота; оно экономнее рассмотренных ранее. Построения 4 и 5 не встречались нам в известной учебной литературе.

Касательную к окружности в данной на ней точке A можно построить, как известно, одной линейкой. Также одной линейкой можно построить касательные к окружности, если данная точка A не принадлежит окружности. Эти построения возможно выполнить одной линейкой и тогда, когда центр окружности не задан.

6. Мы ограничимся в этом пункте рассмотрением лишь того случая, когда центр O окружности ω задан и задана точка $A \notin \omega$. (Рассмотрение других вышеперечисленных задач увело бы нас далеко от изучаемого вопроса и потребовало бы решения ряда вспомогательных задач.)

Проведем прямую OA , пересекающую окружность ω в точках P и Q (рис. 6). Далее, через точку A проведем произвольную прямую, пересекающую ω в точках N и M .

Пусть прямые PM и QN пересекаются в точке K , а прямые PN и QM — в точке L . Прямая KL пересекает окружность ω в точках B и C . Прямые AB и AC — искомые касательные. Докажем это.

Заметим прежде всего, что прямая KL перпендикулярна (PQ) . В самом деле, в треугольнике PQL отрезки PM и QN — высоты, пересекающиеся в точке K , поэтому (KL) содержит третью высоту, и, следовательно, $(KL) \perp (PQ)$.

Если $(KL) \cap (PQ) = D$, то $|OD| \cdot |OA| = R^2$. Убедимся в истинности этого соотношения.

Пусть $\widehat{DPK} = \alpha$, $\widehat{DQK} = \beta$. Тогда

$$|PD| : |DQ| = \operatorname{ctg} \alpha : \operatorname{ctg} \beta. \quad (1)$$

Построим перпендикуляр к прямой AP в точке A , пересекающий прямую PM в точке S . Очевидно, что

$$|PA| = |AS| \operatorname{ctg} \alpha \text{ и } |AQ| = |AS| \operatorname{ctg} \widehat{AQS}.$$

Так как $\widehat{AQS} = \widehat{AMS} = 180^\circ - \widehat{PMN} = \widehat{PQN} = \beta$, то $|AQ| = |AS| \operatorname{ctg} \beta$. Поэтому

$$|PA| : |AQ| = \operatorname{ctg} \alpha : \operatorname{ctg} \beta. \quad (2)$$

Сопоставляя (1) и (2), получаем $|PD| : |PA| = |DQ| : |AQ|$, или

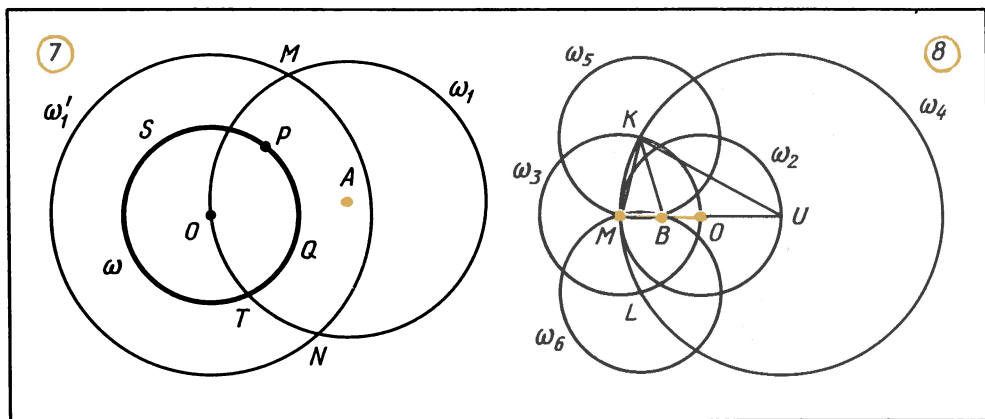
$$(|OD| + R) \cdot (|OA| - R) = (R - |OD|) \cdot (|OA| + R).$$

После раскрытия скобок и упрощений находим, что

$$|OD| \cdot |OA| = R^2. \quad (3)$$

Из соотношения (3) следует, что $|OD| : R = R : |OA|$, т. е. треугольники ODB и OBA подобны. Поскольку $\widehat{ODB} = 90^\circ$, то $\widehat{OBA} = 90^\circ$. Следовательно, прямая AB — искомая касательная.

Предложенное построение выполняется только линейкой. Чтобы постро-



ить касательные AB и AC , потребовалось провести 9 прямых: AO , AM , PM , QN , KL , QM , PN , AB , AC .

7. Приведем способ построения касательной только циркулем. Другими словами, посредством циркуля без привлечения линейки построим точки касания B и C по заданным окружности ω (O , R) и точке $A \notin \omega$.

Проведем окружность ω_1 (A , $|OA|$) (рис. 7). Далее найдем раствор циркуля, равный $2R$, для чего выберем на окружности ω точку S и отложим три дуги, содержащие по 60° дуговых градусов: $\overset{\frown}{SP} = \overset{\frown}{PQ} = \overset{\frown}{QT} = 60^\circ$. Точки S и T диаметрально противоположны. Строим окружность ω'_1 (O , $|ST|$), пересекающую ω_1 в точках M и N . Теперь остается одним циркулем построить середину отрезка MO . Для этого строим окружности ω_2 (O , $|OM|$) и ω_3 (M , $|MO|$), а затем для точек M и O находим на них диаметрально противоположные точки U и V (рис. 8). Далее строим окружность ω_4 (U , $|UM|$), пересекающую ω_3 в точках K и L . Наконец, строим окружности ω_5 (K , $|KM|$) и ω_6 (L , $|LM|$), пересекающиеся в искомой точке B — середине $[MO]$.

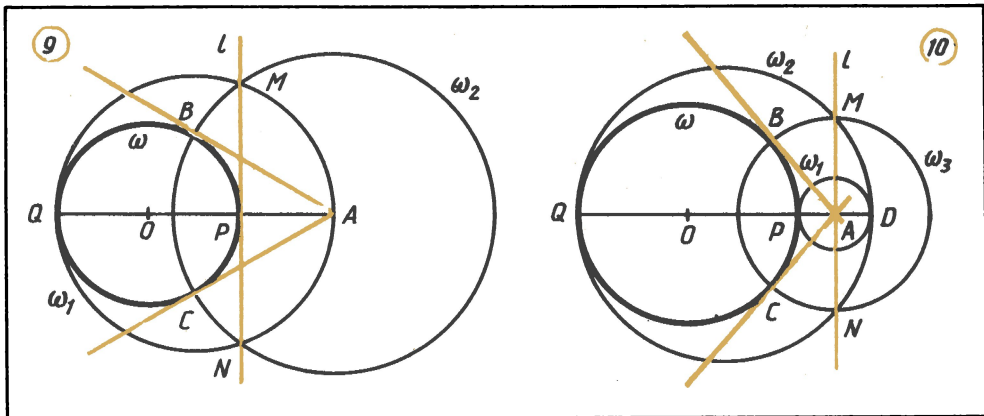
Действительно, треугольники KMB и UMK равнобедренные и подобные. Поэтому из того, что $|KM| = \frac{1}{2}|MU|$, следует, что $|MB| = \frac{1}{2}|MK| = \frac{1}{2}R$. Итак, точка B — искомая точка касания. Аналогично находим точку касания C .

8. Еще одно построение касательной к окружности основано на следующем свойстве отрезков секущей, проведенной к окружности:

$$|AB|^2 = |AP| \cdot |AQ| \quad (\text{рис. 9}).$$

Если на отрезке AQ как на диаметре построить окружность ω_1 и пересечь ее касательной l , проведенной в точке P к ω , то получим точки M и N . Очевидно, $|AM|^2 = |AP| \cdot |AQ|$. Поэтому окружность ω_2 (A , $|AM|$) пересечет ω в точках B и C касания искомых касательных AB и AC .

Другой вариант построения касательной в данном случае основан на ином способе построения отрезка AB по отрезкам AP и AQ (рис. 10). Так, строим окружность ω_1 (A , $|AP|$), пересекающую (AP) в точке D , затем строим окруж-



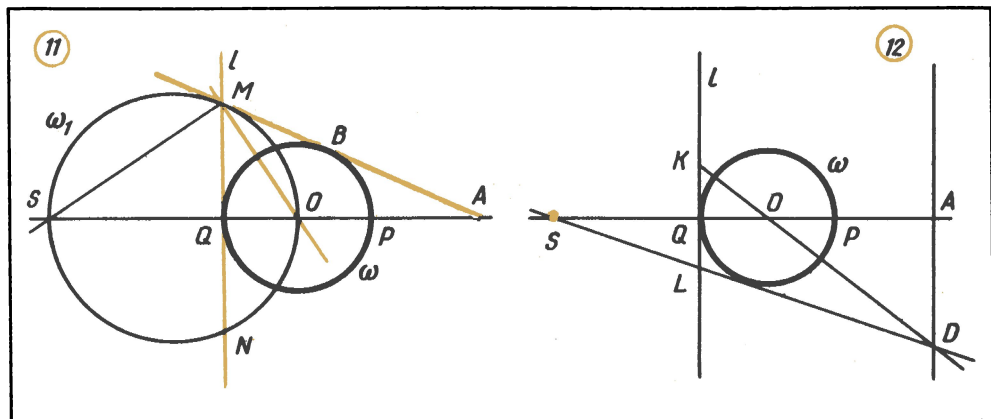
ность ω_2 на диаметре QD и пересекаем ее перпендикуляром к прямой AP в точке A . Для полученных точек M и N имеем:

$$|AM|^2 = |AN|^2 = |AD| \cdot |AQ| = |AP| \cdot |AQ|,$$

поэтому окружность ω_3 (A , $|AM|$) пересекает ω в искомых точках касания B и C .

9. Построение касательной можно выполнить просто, если не связывать его непосредственно с данной окружностью ω (O , R) и данной точкой A . Если B есть точка касания, то треугольник OAB прямоугольный, причем известно, что $|OB| = R$, $|OA| = d$, $\hat{B} = 90^\circ$. Следовательно, задача сводится к построению прямоугольного треугольника по катету и гипотенузе. Катет AB построенного треугольника позволяет строить окружность ω_1 (A , $|AB|$), пересекающую ω в искомых точках B и C .

10. Приведем еще одно построение, основанное на свойствах биссектрис треугольника. Пусть искомая касательная AB пересекает касательную l к ω (O , R) в ее точке Q в некоторой точке M (рис. 11). Очевидно, $[MO]$ —



биссектриса угла QMA . Биссектриса угла, смежного с углом QMA , пересекает прямую AP в точке S , для которой

$$|QS|:|SA|=|QO|:|OA|.$$

Итак, построив точку S , можно построить окружность ω_1 на диаметре OS . Поскольку угол SMO прямой, то ω_1 пересечет l в точках M и N , таких, что (AM) и (AN) — искомые касательные.

Наиболее простое построение точки S такое: откладываем на l два конгруэнтных отрезка QK и QL (рис. 12); находим точку D пересечения прямой KO с перпендикуляром к прямой OA в точке A ; строим прямую DL , пересекающую прямую OA в точке S .

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Задача 1. В окружность вписан шестиугольник, у которого три стороны, взятые через одну, равны радиусу окружности. Доказать, что середины трех остальных сторон шестиугольника являются вершинами правильного треугольника.

Решение. Согласно условию задачи стороны A_1A_2 , A_3A_4 и A_5A_6 вписанного в окружность шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ равны R (рис. 1). Если начало прямоугольной системы координат поместить в центре O данной окружности, то каждой вершине можно отнести комплексное число z вида $R(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Очевидно, что если вершине A_1 отнести комплексное число $z_1 = R(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, то вершине A_2 можно будет отнести комплексное число $z_2 = mz_1$, равное $R(\cos(\varphi_1 + 60^\circ) + i \sin(\varphi_1 + 60^\circ))$, где $m = \cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$.

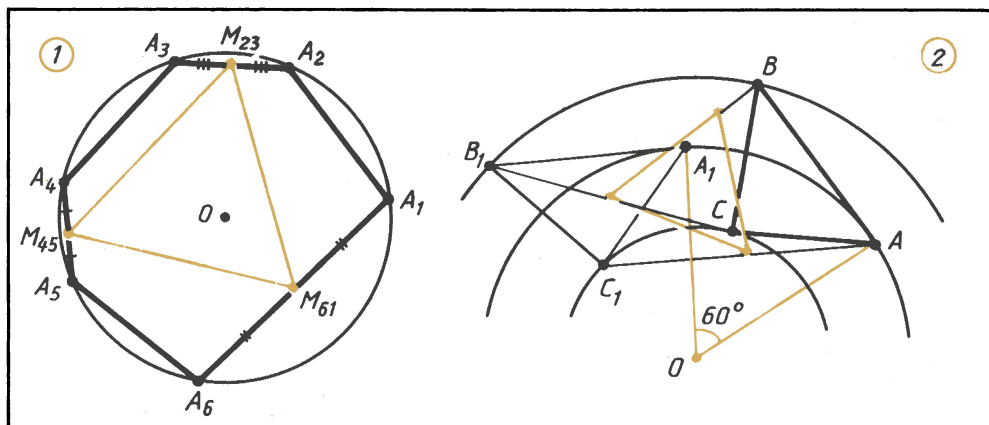
Итак, можно записать, что $z_2 = mz_1$, $z_4 = mz_3$ и $z_6 = mz_5$.

Середине M_{23} стороны A_2A_3 можно отнести комплексное число $\frac{1}{2}(z_2 + z_3)$, середине M_{45} стороны A_4A_5 — комплексное число $\frac{1}{2}(z_4 + z_5)$, середине M_{61} стороны A_6A_1 — комплексное число $\frac{1}{2}(z_6 + z_1)$.

Если вектор $\overrightarrow{M_{23}M_{45}}$ перенести в точку O (центр окружности), то получим вектор \overrightarrow{OP} и точке P соответствует комплексное число p , равное $\frac{1}{2}(z_4 + z_5 - z_2 - z_3)$.

Точно так же, перенося вектор $\overrightarrow{M_{23}M_{61}}$ в точку O , получим вектор \overrightarrow{OQ} , и точке Q соответствует комплексное число q , равное $\frac{1}{2}(z_6 + z_1 - z_2 - z_3)$.

Для того чтобы доказать, что треугольник $M_{23}M_{45}M_{61}$ равносторонний, достаточно доказать, что треугольник OPQ равносторонний. Но для этого нужно доказать, что умножением комплексного числа p на число m получим



комплексное число q . В самом деле, учитывая, что $m^2 - m + 1 = 0$, имеем:

$$2pm = mz_4 + mz_5 - mz_2 - mz_3 = m^2 z_3 - z_6 - mz_2 - mz_3,$$

или

$$2pm = z_6 - mz_2 - z_3.$$

Но $2q = z_6 + (m - m^2)z_1 - mz_1 - z_3 = z_6 - mz_2 - z_3$.

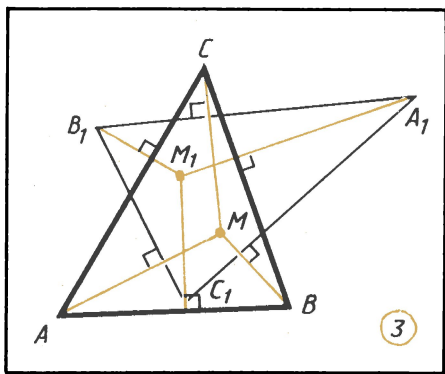
Итак, $2q = 2pm$, $q = pm$ и треугольник OPQ равносторонний, а значит, и треугольник $M_{23}M_{45}M_{61}$ равносторонний, что и требовалось доказать.

Приведенное доказательство показывает, что на самом деле решена более общая и более содержательная задача, которую можно сформулировать следующим образом:

Если треугольник ABC повернут около некоторой точки на угол, равный 60° , в положение $A_1B_1C_1$, то середины отрезков A_1B , B_1C и C_1A являются вершинами равностороннего треугольника (рис. 2).

Задача 2. Если перпендикуляры, опущенные из вершин одного треугольника на соответствующие стороны второго треугольника, пересекаются в одной точке, то и перпендикуляры, опущенные из вершин второго треугольника на соответствующие стороны первого треугольника, также пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть перпендикуляры, опущенные из вершин A , B и C треугольника ABC на стороны B_1C_1 , C_1A_1 и A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в точке M , а перпендикуляры, опущенные из вершин A_1 и B_1 на стороны BC и CA , пересекаются в точке M_1 (рис. 3). Остается доказать, что прямые M_1C_1 и AB перпендикулярны. Для доказательства положим



$$\begin{aligned}\vec{MA} &= \vec{r}_1, \quad \vec{MB} = \vec{r}_2, \quad \vec{MC} = \vec{r}_3, \\ \vec{M_1A_1} &= \vec{\rho}_1, \quad \vec{M_1B_1} = \vec{\rho}_2, \quad \vec{M_1C_1} = \vec{\rho}_3.\end{aligned}$$

Согласно условию имеем следующие пять равенств:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_3) &= 0, \quad \vec{r}_2 \cdot (\vec{\rho}_3 - \vec{\rho}_1) = 0, \quad \vec{r}_3 \cdot (\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2) = 0, \\ \vec{\rho}_1 \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_3) &= 0, \quad \vec{\rho}_2 \cdot (\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0,\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 \cdot \vec{\rho}_2 &= \vec{r}_1 \cdot \vec{\rho}_3, \quad \vec{r}_2 \cdot \vec{\rho}_3 = \vec{r}_2 \cdot \vec{\rho}_1, \quad \vec{r}_3 \cdot \vec{\rho}_1 = \vec{r}_3 \cdot \vec{\rho}_2, \\ \vec{\rho}_1 \cdot \vec{r}_2 &= \vec{\rho}_1 \cdot \vec{r}_3, \quad \vec{\rho}_2 \cdot \vec{r}_3 = \vec{\rho}_2 \cdot \vec{r}_1.\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что из этих равенств вытекает шестое равенство

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{\rho}_3 = \vec{r}_2 \cdot \vec{\rho}_3,$$

так как

$$\vec{r}_1 \cdot \vec{\rho}_3 = \vec{r}_1 \cdot \vec{\rho}_2 = \vec{\rho}_2 \cdot \vec{r}_3 = \vec{\rho}_1 \cdot \vec{r}_3 = \vec{\rho}_1 \cdot \vec{r}_2 = \vec{r}_2 \cdot \vec{\rho}_3.$$

Итак, имеем равенство

$$\vec{\rho}_3 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = 0,$$

указывающее на перпендикулярность векторов $\vec{M_1C_1}$ и \vec{AB} , что и требовалось доказать.

З а д а ч а 3. Парабола $y = ax^2$ пересекается с окружностью в четырех точках A, B, C и D . Доказать, что прямые AB и CD , а также прямые AC и BD , AD и BC образуют с осью x равные внутренние (или внешние) односторонние углы.

Р е ш е н и е. Определим угловой коэффициент хорды AB , т. е. найдем тангенс угла φ наклона хорды AB с положительным направлением оси x (рис. 4). Если точки A и B имеют соответственно координаты x_1, y_1 и x_2, y_2 , то

$$y_1 = ax_1^2 \text{ и } y_2 = ax_2^2$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2). \quad (1)$$

Проведем через точку C прямую q , образующую с положительным направлением оси x угол $180^\circ - \varphi$. Если прямая q пересекает параболу в точке D' (x'_4, y'_4), то согласно (1) имеем:

$$\operatorname{tg} (180^\circ - \varphi) = -\operatorname{tg} \varphi = a(x_3 + x'_4)$$

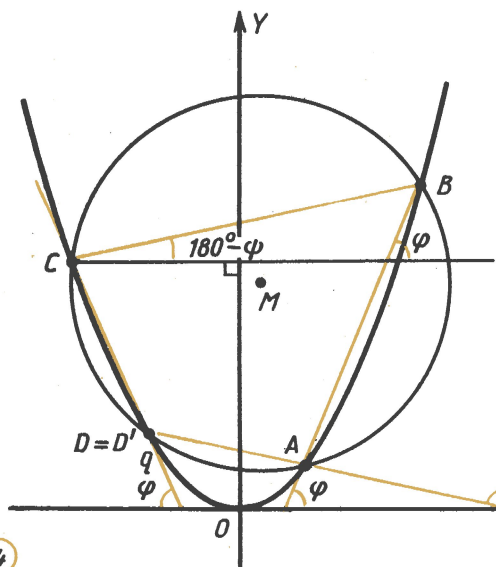
и, сопоставляя с (1), получаем:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x'_4 = 0. \quad (2)$$

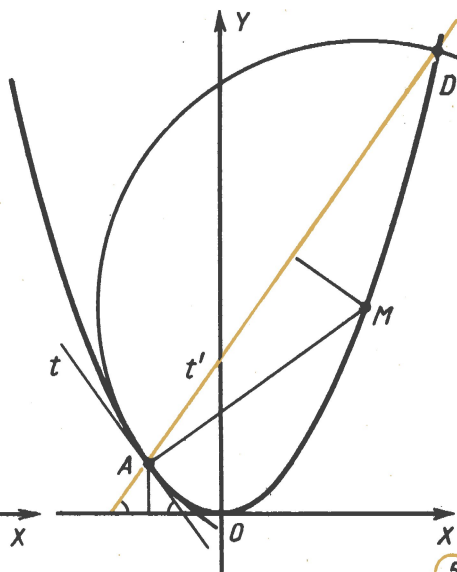
Из полученного равенства (2) следует, что

$$a(x_1 + x'_4) + a(x_2 + x_3) = 0,$$

и поэтому угловые коэффициенты хорд AD' и BC также отличаются только



4



5

знаком. Это значит, что прямые AD' и BC также образуют с положительным направлением оси x равные односторонние углы ψ . Теперь нетрудно заметить, что четырехугольник $ABCD'$ является вписанным в окружность, так как сумма углов D' и B равна 180° :

$$\widehat{B} = \varphi + \psi - 180^\circ, \quad \widehat{D'} = 360^\circ - (\varphi + \psi).$$

Отсюда следует, что точка D' совпадает с точкой D и диагонали AC и BD также образуют с осью x равные односторонние углы.

Решенную задачу можно применить для построения окружности, которая пересекает параболу в четырех точках, из которых три совпадают с данной точкой A (рис. 5). Такую окружность, как известно, называют соприкасающейся окружностью к параболе в точке A . Для осуществления построения проведем в точке A к параболе касательную t и через эту же точку проведем другую прямую t' , образующую вместе с t равные односторонние углы с осью x . Пусть прямая t' пересекает параболу в точке D . Легко заметить, сравнивая полученное построение с ранее рассмотренным, что точки B и C слились с точкой A . Поэтому если провести окружность через точку D , касающуюся прямой t в точке A , то из четырех точек пересечения параболы с проведенной окружностью три совпадают с точкой A .

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ П. ЭРДЕША

Теорема Эрдеша. Если расстояния от произвольной внутренней точки O треугольника до его вершин равны R_1, R_2, R_3 , а расстояния до сторон равны r_1, r_2, r_3 , то

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3),$$

причем равенство достигается только для правильного треугольника и его центра.

Доказательство. Докажем сначала, что если только точка O лежит внутри угла C треугольника ABC , то

$$R_3 \geq \frac{a}{c}r_1 + \frac{b}{c}r_2, \quad (1)$$

где a, b, c — стороны треугольника.

Действительно, если из вершин A и B опустим на прямую OC перпендикуляры и их основания обозначим через A_1 и B_1 , то (рис. 1)

$$c = AM + BM \geq AA_1 + BB_1,$$

и поэтому

$$cR_3 \geq AA_1 \cdot R_3 + BB_1 \cdot R_3 = 2S_{\triangle AOC} + 2S_{\triangle BOC} = ar_1 + br_2,$$

откуда и вытекает неравенство (1), причем знак равенства имеет место для точек O , расположенных на луче, перпендикулярном к AB .

Если точку O отразить симметрично относительно биссектрисы угла C , то отраженная точка O' останется внутри угла C ; записав для нее неравенство (1), получим:

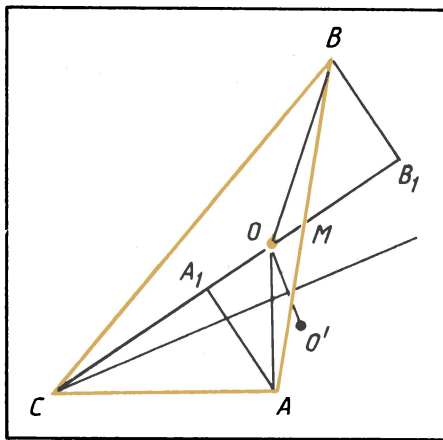
$$R_3 \geq \frac{b}{c}r_1 + \frac{a}{c}r_2, \quad R_1 \geq \frac{b}{a}r_3 + \frac{c}{a}r_2, \quad R_2 \geq \frac{a}{b}r_3 + \frac{c}{b}r_1.$$

Складывая почленно последние три неравенства и учитывая, что, напри-

мер, $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{b^2 + c^2}{bc} = \frac{(b-c)^2}{bc} + 2 \geq 2$, на-

ходим: $R_1 + R_2 + R_3 \geq \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)r_1 + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)r_2 + \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)r_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3).$

Знак равенства имеет место лишь в том случае, если $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} = \frac{a}{c} + \frac{c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$, т. е. если $a = b = c$ и треугольник является равносторонним,



и если отраженная точка O' попадает на проведенную из C высоту треугольника, и аналогично для точек, полученных из O отражением от двух других биссектрис треугольника, что равносильно требованию совпадения точки O с центром равностороннего треугольника. Этим теорема доказана полностью.

ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПТОЛЕМЕЯ

Теорема Птолемея о вписанном в окружность выпуклом четырехугольнике пользуется широкой известностью, она гласит:

для всякого вписанного в окружность выпуклого четырехугольника сумма произведений его противоположных сторон равна произведению диагоналей.

I

Рассмотрим теорему, представляющую обобщение теоремы Птолемея. В ней идет речь о четырех окружностях, касающихся внутренним (внешним) образом некоторой окружности в вершинах вписанного в нее четырехугольника. Вместо расстояния между двумя вершинами A и B принимается касательное расстояние $d(\omega_A, \omega_B)$ между соответствующими двумя окружностями ω_A, ω_B , где под касательным расстоянием $d(\omega_A, \omega_B)$ подразумевается расстояние между двумя точками касания общей внешней касательной этих двух окружностей (рис. 1).

Т е о р е м а. *Если окружности $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$ касаются окружности ω внутренним (внешним) образом в вершинах A, B, C, D выпуклого четырехугольника $ABCD$, вписанного в ω , то касательные расстояния между парами окружностей связаны соотношением*

$$d(\omega_A, \omega_B) \cdot d(\omega_C, \omega_D) + d(\omega_B, \omega_C) \cdot d(\omega_D, \omega_A) = d(\omega_A, \omega_C) \cdot d(\omega_B, \omega_D). \quad (1)$$

Заметим, что в этой теореме допускаются окружности нулевого радиуса (нулевые окружности), т. е. точки. Это значит, что точка, принадлежащая ω , рассматривается как окружность, касающаяся ω в этой же точке.

Приведенную выше теорему, сформулированную для неориентированных окружностей, будем называть *теоремой Кэзи*. Более общую формулировку теоремы Кэзи, касающуюся ориентированных окружностей, опускаем.

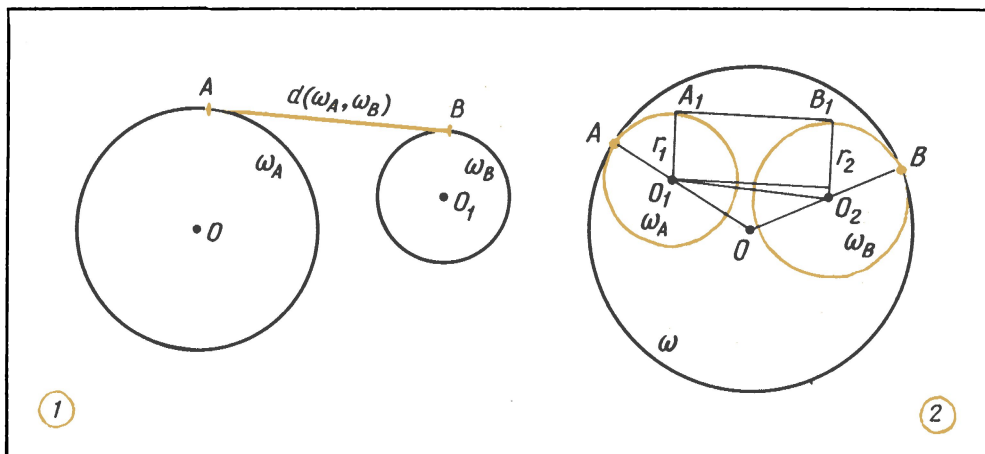
Чтобы доказать теорему Кэзи, решим такую задачу.

З а д а ч а. Даны окружность $\omega(O, R)$ и две касающиеся ее внутренним образом в точках A и B окружности $\omega_A(O_1, r_1)$ и $\omega_B(O_2, r_2)$. Вычислить касательное расстояние $d(\omega_A, \omega_B)$ между окружностями ω_A и ω_B .

Р е ш е н и е. Пусть общая внешняя касательная касается ω_A в точке A_1 , а ω_B — в точке B_1 (рис. 2). Тогда

$$d^2(\omega_A, \omega_B) = |A_1B_1|^2 = -(r_2 - r_1)^2 + |O_1O_2|^2,$$

где $|O_1O_2|^2 = (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - 2(R - r_1)(R - r_2) \cos \varphi$.



Далее, $|AB|^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \varphi$, где $\varphi = \widehat{AOB}$.

Из записанных уравнений следует после исключения $|O_1O_2|$ и $\cos \varphi$ равенство

$$|A_1B_1|^2 = -(r_2 - r_1)^2 + (R - r_1)^2 + (R - r_2)^2 - 2(R - r_1)(R - r_2) \left(1 - \frac{|AB|^2}{2R^2}\right).$$

Отсюда после несложных преобразований получим:

$$d(\omega_A, \omega_B) = |A_1B_1| = \frac{|AB|}{R} \sqrt{(R - r_1)(R - r_2)}. \quad (2)$$

Переходим к доказательству теоремы Кэзи.

Впишем в окружность ω четырехугольник $ABCD$ и построим четыре окружности $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$, касающиеся ω внутренним образом в точках A, B, C, D . Тогда согласно формуле (2) имеем:

$$d_{AB} = d(\omega_A, \omega_B) = \frac{|AB|}{R} \sqrt{(R - r_1)(R - r_2)}, \quad d_{BC} = \frac{|BC|}{R} \sqrt{(R - r_2)(R - r_3)},$$

$$d_{CD} = \frac{|CD|}{R} \sqrt{(R - r_3)(R - r_4)}, \quad d_{DA} = \frac{|DA|}{R} \sqrt{(R - r_4)(R - r_1)},$$

$$d_{CA} = \frac{|CA|}{R} \sqrt{(R - r_3)(R - r_1)}, \quad d_{DB} = \frac{|DB|}{R} \sqrt{(R - r_4)(R - r_2)}.$$

Для четырехугольника $ABCD$ можно применить теорему Птолемея:

$$|AB| |CD| + |BC| |DA| = |AC| |BD|. \quad (3)$$

В выражение

$$d(\omega_A, \omega_B) \cdot d(\omega_C, \omega_D) + d(\omega_B, \omega_C) \cdot d(\omega_D, \omega_A) - d(\omega_A, \omega_C) \cdot d(\omega_B, \omega_D)$$

подставим соответствующие выражения из (2) и учтем (3). После упрощений получим зависимость (1) между касательными расстояниями:

$$d(\omega_A, \omega_B) \cdot d(\omega_C, \omega_D) + d(\omega_B, \omega_C) \cdot d(\omega_D, \omega_A) = d(\omega_A, \omega_C) \cdot d(\omega_B, \omega_D).$$

Если две окружности ω_A и ω_B касаются ω внешним образом, то

$$d(\omega_A, \omega_B) = \frac{|AB|}{R} \sqrt{(R+r_1)(R+r_2)}$$

и соотношение (1) остается в силе для четырех окружностей, касающихся ω внешним образом.

II

Применим теорему к решению ряда задач.

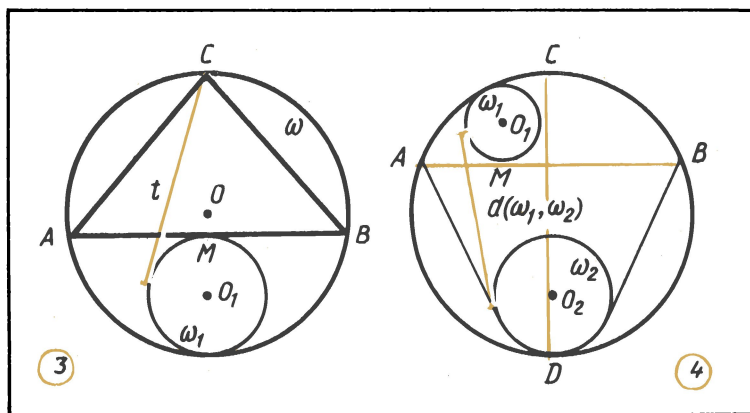
Задача 1. В окружность ω вписан равнобедренный треугольник ABC ($|CA| = |CB|$). В сегмент AB , не содержащий треугольник, вписана произвольная окружность ω_1 . Доказать, что отрезок касательной, проведенной из вершины C к окружности ω_1 (от точки C до точки касания), имеет длину t , не зависящую от выбора окружности ω_1 . Найти t .

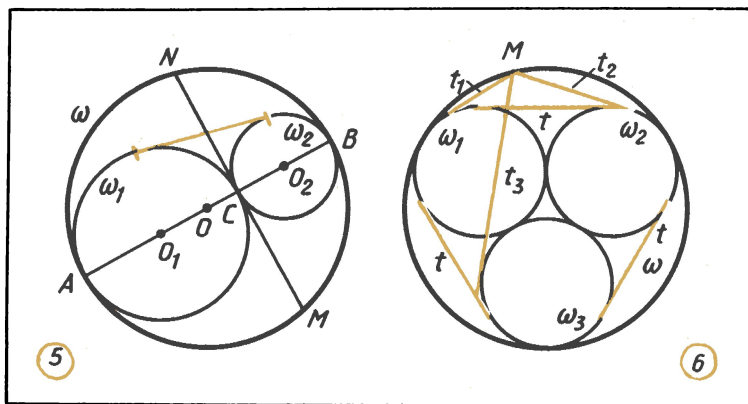
Решение. Пусть вершины A, B, C — окружности нулевого радиуса. Рассмотрим четыре окружности A, C, B, ω (рис. 3). Применим доказанную теорему Кэзи. Обозначим точку касания ω_1 с (AB) через M , тогда

$$\begin{aligned} |AC| \cdot |BM| + |CB| \cdot |MA| &= |AB| \cdot t, \\ |AC| \cdot (|BM| + |MA|) &= |AB| \cdot t, \end{aligned}$$

откуда $t = |AC|$.

Задача 2. В окружности ω проведены хорда AB и перпендикулярный к ней диаметр CD . В сегмент ACB вписана произвольная окружность ω_1 , а в точке D окружности ω касается окружность ω_2 внутренним образом (рис. 4). Доказать, что касательное расстояние между окружностями ω_1 и ω_2 постоянно.





Решение. Рассмотрим 4 окружности ω_1, B, A, ω_2 . Пусть ω_1 касается хорды AB в точке M . Тогда согласно теореме имеем:

$$|AM| \cdot d(B, \omega_2) + |BM| \cdot d(A, \omega_2) = |AB| \cdot d(\omega_1, \omega_2).$$

Но $d(B, \omega_2) = d(A, \omega_2)$, поэтому $d(A, \omega_2) \cdot (|AM| + |MB|) = |AB| d(\omega_1, \omega_2)$. Отсюда $d(\omega_1, \omega_2) = d(A, \omega_2)$.

Итак, касательное расстояние между ω_1 и ω_2 равно $d(A, \omega_2)$, т. е. касательному расстоянию между A и ω_2 .

Задача 3. Даны окружность ω диаметром AB и точка $C \in [AB]$ (рис. 5). Построены две окружности ω_1 и ω_2 диаметрами AC и CB и их общая внутренняя касательная, пересекающая ω в точках M и N . Найти касательное расстояние t между окружностями ω_1 и ω_2 .

Решение. Рассмотрим четыре окружности ω_1, M, ω_2, N и применим к ним теорему Кэзи. Имеем:

$$|MC| \cdot |NC| + |MC| \cdot |NC| = t |MN|, \quad 2 |MC|^2 = t |MC|, \quad \text{так как } |MC| = |NC|.$$

Отсюда $t = |MC|$.

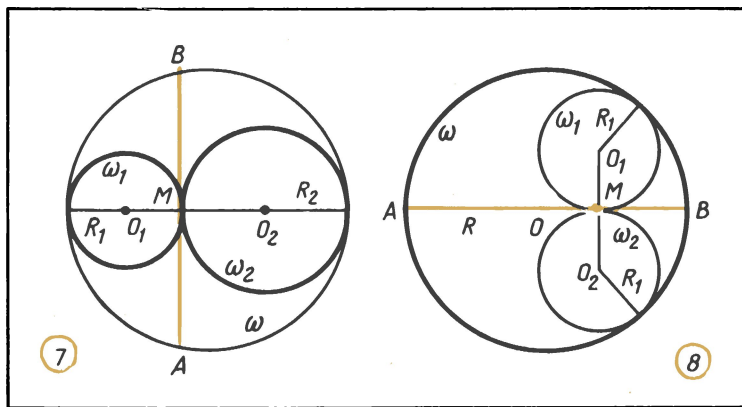
Задача 4. Три равные окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ касаются попарно между собой и внутренним образом некоторой окружности ω . Из произвольной точки $M \in \omega$ проведены к трем окружностям касательные. Доказать, что сумма двух отрезков, касательных от точки M до точки касания, равна третьему отрезку.

Решение. Обозначим касательные расстояния $d(\omega_1, \omega_2)$, $d(\omega_2, \omega_3)$, $d(\omega_3, \omega_1)$ через t , а точку M примем за нулевую окружность (рис. 6). При расположении точки M так, как указано на рисунке, получаем:

$$tt_1 + tt_2 = tt_3, \quad t_1 + t_2 = t_3,$$

где $t_1 = d(\omega_1, M)$, $t_2 = d(\omega_2, M)$, $t_3 = d(\omega_3, M)$.

Задача 5. Окружности $\omega_1(O_1, R_1)$ и $\omega_2(O_2, R_2)$ касаются внешним образом в точке M . Некоторая окружность $\omega(O, R)$ касается окружностей ω_1 и ω_2 внутренним образом и пересекает их общую касательную (в точке M) в точках A и B (рис. 7). Доказать, что $|AM| \cdot |BM| = |AB| \sqrt{R_1 R_2}$.



Решение. Рассмотрим четыре окружности ω_1 , A , ω_2 и B и применим к ним теорему Кэзи. Имеем: $|AM| \cdot |BM| + |BM| \cdot |AM| = |AB| t$, где t — касательное расстояние между ω_1 и ω_2 . Но это расстояние вычисляется легко по формуле

$$t^2 = (R_1 + R_2)^2 - (R_2 - R_1)^2, \quad t^2 = 4R_1R_2,$$

поэтому

$$|AM| \cdot |BM| = |AB| \sqrt{R_1R_2}.$$

Задача 6. Дана окружность $\omega (O, R)$ диаметром $|AB| = 2R$. Окружность $\omega_1 (O_1; R_1)$ касается окружности ω и диаметра AB в точке M . Вычислить R_1 , если $|AM| = m$, $|BM| = n$.

Решение. Построим окружность ω_2 , симметричную ω_1 относительно прямой AB (рис. 8). Воспользовавшись предыдущей задачей, имеем:

$$|AM| \cdot |BM| = |AB| R_1.$$

Отсюда $R_1 = \frac{mn}{2R}$.

Задача 7. В окружность ω вписан треугольник ABC (рис. 9). Окружность ω_1 касается окружности ω и сторон AB и CB в точках C_1 и A_1 . Выразить расстояние $|BA_1|$ через длины сторон треугольника.

Решение. Рассмотрим четыре окружности A , B , C , ω_1 , касающиеся ω . Применяя к ним теорему Кэзи, получаем:

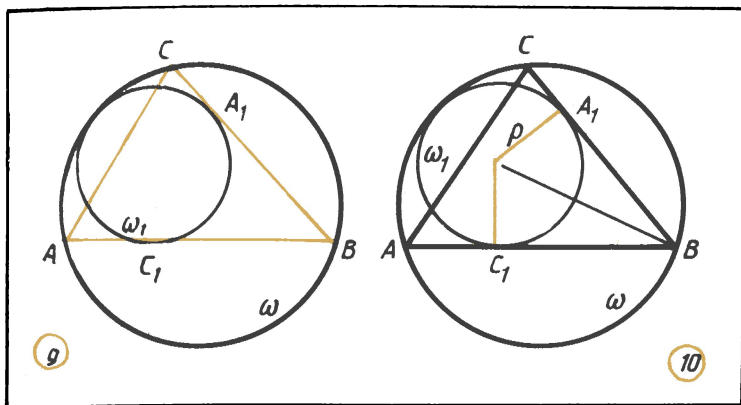
$$|AB| \cdot |CA_1| + |BC| \cdot |AC_1| = |AC| \cdot |BA_1|,$$

откуда

$$c(a - |BA_1|) + a(c - |BC_1|) = b|BA_1|, \quad |BC_1| = |BA_1|.$$

После упрощения получаем:

$$|BA_1| \cdot (a + b + c) = 2ac, \quad |BA_1| = \frac{ac}{p}.$$



Задача 8. В окружность $\omega (O, R)$ вписан треугольник ABC (рис. 10). Окружность $\omega_1 (O_1, \rho)$ касается сторон AB и CB и окружности ω . Выразить ρ через элементы данного треугольника.

Решение. Согласно задаче 7 имеем:

$$\rho = |BA_1| \operatorname{tg} \frac{\widehat{B}}{2}, \quad \rho = \frac{ac}{\rho} \operatorname{tg} \frac{\widehat{B}}{2}.$$

$$\text{Но } ac = \frac{2s}{\sin \widehat{B}} = \frac{s}{\sin \frac{\widehat{B}}{2} \cos \frac{\widehat{B}}{2}}. \text{ Поэтому}$$

$$\rho = \frac{s}{\rho} \frac{1}{\sin \frac{\widehat{B}}{2} \cos \frac{\widehat{B}}{2}} \operatorname{tg} \frac{\widehat{B}}{2}, \quad \rho = r \frac{1}{\cos^2 \frac{\widehat{B}}{2}},$$

где r — радиус окружности, вписанной в данный треугольник.

В частном случае, когда $\widehat{B} = 90^\circ$, получаем $\rho = 2r$; когда $\widehat{B} = 120^\circ$, то $\rho = 4r$; когда $\widehat{B} = 60^\circ$, то $\rho = \frac{4}{3}r$.

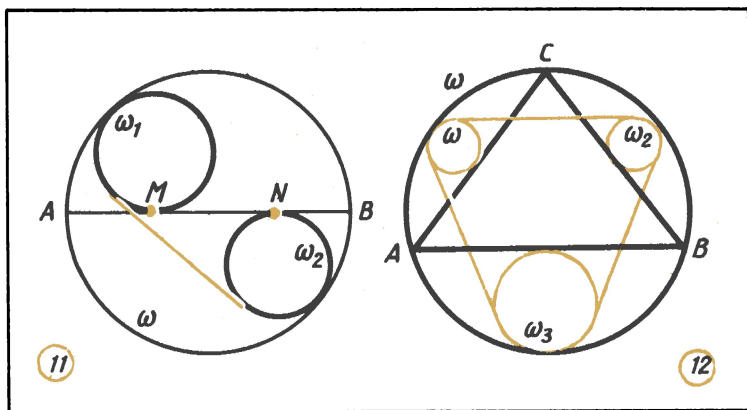
Нетрудно подсчитать, что $\cos \widehat{B} = \frac{2r - \rho}{\rho}$.

Задача 9. В окружности ω радиусом R проведен диаметр AB , который точками M и N разделен на три равные части. Окружности ω_1 и ω_2 вписаны в образовавшиеся полуокружности и касаются диаметра в точках M и N . Вычислить касательное расстояние между ω_1 и ω_2 (рис. 11).

Решение. Рассмотрим четыре окружности ω_1, A, ω_2, B . Тогда

$$\begin{aligned} |AM| \cdot |BN| + |AN| \cdot |BM| &= |AB| d(\omega_1, \omega_2), \quad \left(\frac{2R}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot 2R\right)^2 = \\ &= 2R \cdot d(\omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

Отсюда находим, что $d(\omega_1, \omega_2) = \frac{10}{9}R$.



З а д а ч а 10. В окружность ω вписан равнобедренный треугольник ABC , $|CA| = |CB|$. В образовавшиеся сегменты с основаниями CA , CB , AB , лежащие вне треугольника ABC , вписаны окружности ω_1 , ω_2 и ω_3 , касающиеся оснований в их серединах (рис. 12). Доказать, что касательные расстояния между окружностями ω_1 и ω_2 , ω_1 и ω_3 равны между собой.

Р е ш е н и е. Пусть $|CA| = |CB| = b$. Рассмотрим четыре окружности ω_1 , C , ω_2 и ω_3 и применим к ним теорему Кэзи.

Получаем:

$$\frac{b}{2} d(\omega_2, \omega_3) + \frac{b}{2} d(\omega_3, \omega_1) = d(\omega_1, \omega_2) \cdot b.$$

Но $d(\omega_2, \omega_3) = d(\omega_3, \omega_1)$, поэтому $b \cdot d(\omega_3, \omega_1) = d(\omega_1, \omega_2) b$ или $d(\omega_3, \omega_1) = d(\omega_1, \omega_2)$.

ТЕОРЕМА МОРЛЕЯ

Любителям математики хорошо известна эта удивительная теорема элементарной геометрии о трисектрисах треугольника. Она была сформулирована американским математиком Ф. Морлеем. Первые доказательства теоремы Морлея были опубликованы в 1909 г. Позднее появилось более десятка новых доказательств, но довольно сложных по сравнению с ее простой формулировкой.

Т е о р е м а. *Трисектрисы углов треугольника, примыкающие к одной стороне, попарно пересекаются в точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника.*

Трисектрисами угла называют прямые, проходящие через вершину угла и делящие его на три равные части.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть трисектрисы углов данного треугольника ABC , примыкающие к сторонам BC , CA и AB , пересекаются в точках X , Y и Z (рис. 1).

Введем обозначения: $A=3\alpha$, $B=3\beta$, $C=3\gamma$, $|AY|=m$, $|AZ|=n$. Длины сторон треугольника ABC будем обозначать через a , b и c .

Вычислим величины углов AZY и BZX .

Так как $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$, то $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ и $\alpha + \beta = 60^\circ - \gamma$. Применяв теорему синусов к треугольнику AZB , получим:

$$\frac{n}{c} = \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)},$$

отсюда

$$n = \frac{c \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{c \sin \beta}{\sin(60^\circ - \gamma)}.$$

Аналогично находим, что

$$m = \frac{b \sin \gamma}{\sin(60^\circ - \beta)}.$$

Из треугольника ABC по теореме синусов имеем: $\frac{b}{c} = \frac{\sin 3\beta}{\sin 3\gamma}$.

Следовательно,

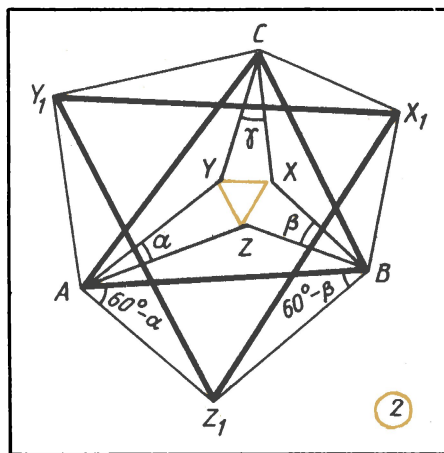
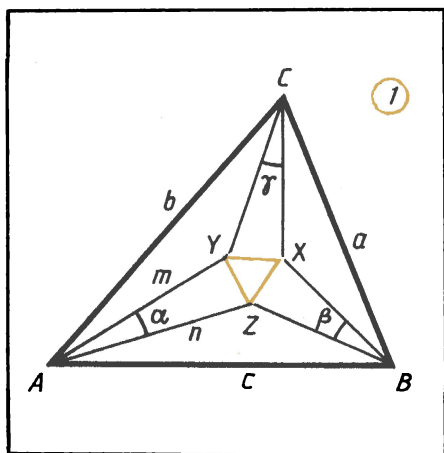
$$\frac{m}{n} = \frac{\sin 3\beta \sin \gamma \sin(60^\circ - \gamma)}{\sin 3\gamma \sin \beta \sin(60^\circ - \beta)}.$$

Упростим это равенство, применив тождество

$$\sin 3\beta = 4 \sin \beta \sin(60^\circ + \beta) \sin(60^\circ - \beta).$$

Получим:

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin(60^\circ + \beta)}{\sin(60^\circ + \gamma)}.$$



Теперь уже без всяких вычислений можно доказать, что интересующие нас углы AZY и AYZ треугольника AYZ равны $60^\circ + \beta$ и $60^\circ + \gamma$.

Действительно, так как $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$, то существует треугольник с углами $60^\circ + \beta$, $60^\circ + \gamma$ и α , а отношение его сторон, заключающих угол α , равно

$$\frac{\sin(60^\circ + \beta)}{\sin(60^\circ + \gamma)} = \frac{m}{n}.$$

Поскольку $\widehat{YAZ} = \alpha$, треугольник AYZ подобен такому треугольнику. Тогда

$$\widehat{AZY} = 60^\circ + \beta \text{ и } \widehat{AYZ} = 60^\circ + \gamma.$$

Точно так же докажем, что $\widehat{BZX} = 60^\circ + \alpha$.

А так как $\widehat{AZB} = 120^\circ + \gamma$ и $\widehat{YZA} + \widehat{AZB} + \widehat{BZX} = (60^\circ + \beta) + (120^\circ + \gamma) + (60^\circ + \alpha) = 300^\circ$, то $\widehat{XZY} = 60^\circ$.

Аналогично докажем, что каждый из двух других углов треугольника XYZ также равен 60° . Значит, треугольник XYZ равносторонний.

При попытке доказать теорему Морлея геометрически возникают большие трудности. Их удастся преодолеть, если действовать в обратном порядке: сначала построить равносторонний треугольник XYZ , а затем исходный треугольник ABC .

Теорему Морлея можно обобщить, если рассматривать, кроме внутренних, еще и внешние трисектрисы треугольника (прямые, делящие на три равные части внешние углы треугольника, а также углы, дополняющие углы треугольника до 360°).

Знаменитый французский математик А. Лебег (1875—1941), используя элементарные средства, доказал, что среди точек пересечения всех трисектрис треугольника можно указать 27 троек, являющихся вершинами равносторонних треугольников.

В частности, трисектрисы внешних углов треугольника ABC , примыкающие к одной и той же стороне, попарно пересекаются в точках, являющихся вершинами равностороннего треугольника (рис. 2).

Простое и экономное доказательство можно получить, применив тригонометрию. Если X_1 , Y_1 , Z_1 — точки пересечения указанных трисектрис, то, пользуясь теоремой синусов, как в приведенном выше доказательстве, устанавливаем, что углы Z_1 и Y_1 треугольника AY_1Z_1 равны соответственно β и γ , а каждый из углов треугольника $X_1Y_1Z_1$ равен 60° . Кроме того, легко установить, что стороны треугольника $X_1Y_1Z_1$ соответственно параллельны сторонам треугольника XYZ .

Эффективное доказательство полной обобщенной теоремы Морлея можно провести, используя аппарат комплексных чисел.

КОММЕНТАРИИ

1. Можно предложить доказательство теоремы, обратной теореме Пифагора, основанное на равенстве треугольников. Пусть длины сторон треугольника ABC связаны отношением

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad (1)$$

Докажем, что этот треугольник прямоугольный. Построим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ по двум катетам, длины которых равны a и b . Обозначим через c_1 длину гипотенузы этого треугольника. Тогда по теореме Пифагора имеем:

$$c_1^2 = a^2 + b^2. \quad (2)$$

Сравнивая отношения (1) и (2), получаем, что $c_1^2 = c^2$, или $c_1 = c$. Таким образом, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам. Следовательно, угол C , равный углу C_1 , прямой.

2. Здесь под следом прямой понимается точка ее пересечения с плоскостью. В современных курсах стереометрии эта теорема, выражающая признак перпендикулярности прямой и плоскости, формулируется так: «Если прямая l перпендикулярна каким-либо двум пересекающимся прямым a и b , лежащим в плоскости α , то прямая l перпендикулярна плоскости α ».

Приведем доказательство этой теоремы, основанное на применении скалярного произведения векторов.

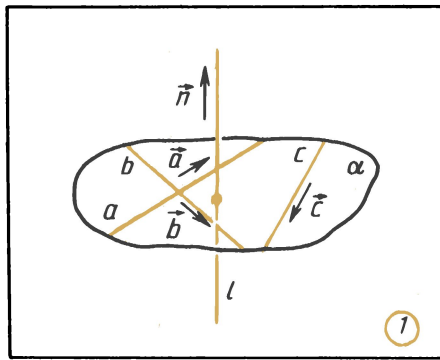
Возьмем в плоскости α произвольную прямую c . Пусть \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , \vec{n} — направляющие векторы прямых a , b , c , l (рис. 1). Тогда векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} ненулевые, причем \vec{a} и \vec{b} не параллельны. Следовательно, вектор \vec{c} выражается через векторы \vec{a} и \vec{b} :

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b},$$

где x , y — некоторые действительные числа. Так как по условию $l \perp a$, $l \perp b$, то $\vec{n}\vec{a} = 0$, $\vec{n}\vec{b} = 0$. Следовательно,

$$\vec{n}\vec{c} = \vec{n}(x\vec{a} + y\vec{b}) = x(\vec{n}\vec{a}) + y(\vec{n}\vec{b}) = x \cdot 0 + y \cdot 0 = 0.$$

Таким образом, $\vec{n}\vec{c} = 0$, т. е. $l \perp c$.



Мы видим, что прямая l перпендикулярна любой прямой c , лежащей в плоскости α , т. е. $l \perp \alpha$.

3. В этой книге встречается символ \hat{A} , который означает величину угла A .

4. Эффективное доказательство теоремы косинусов связано с применением векторов.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC . Введем обозначения: $\vec{CB} = \vec{a}$, $\vec{CA} = \vec{b}$, $\vec{AB} = \vec{c}$. Тогда $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$. Найдем квадрат длины стороны AB :

$$c^2 = \vec{c}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}.$$

Теорема косинусов доказана.

5. Приведем доказательство теоремы синусов, основанное на использовании формулы площади треугольника:

$$S = \frac{1}{2}bc \sin \hat{A}, S = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B}, S = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C},$$

$$\frac{1}{2}bc \sin \hat{A} = \frac{1}{2}ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2}ab \sin \hat{C}.$$

Разделив каждый член этого равенства на выражение $\frac{1}{2}abc$, получим теорему синусов:

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}.$$

6. Здесь под «симметрией формулы» относительно, например, a и b автор понимает тот факт, что значение выражения, определяемого ею, не меняется, если в ней поменять a на b , b на a .

7. Под косым четырехугольником понимается пространственный четырехугольник, не все вершины которого принадлежат одной плоскости.

8. Четырехугольник называют простым, если: а) из каждой его вершины исходят только две стороны; б) стороны не имеют внутренних общих точек; в) ни одна из вершин не является внутренней точкой сто-

роны. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то такой четырехугольник называют непростым. В школе изучают свойства только простых четырехугольников.

9. У самопересекающегося четырехугольника две стороны имеют общую внутреннюю точку.

10. Вырожденным четырехугольником автор здесь называет четырехугольник $ABCD$, у которого вершина D лежит между вершинами A и B , т. е. является внутренней точкой отрезка AB . Фактически здесь четырехугольник $ABCD$ «выродился» в треугольник с обозначенной на его стороне AB точкой D .

11. Трехгранный угол образуют три луча, исходящие из одной точки (его вершины) и не лежащие в одной плоскости. Лучи называют ребрами трехгранного угла, а образованные ими плоские углы — гранями трехгранного угла. Сумма величин плоских углов трехгранного угла меньше 360° ; любой плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других его плоских углов и больше их разности.

12. Напомним, что скалярным произведением двух ненулевых векторов называют произведение длин этих векторов и косинуса угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi.$$

Угол φ между двумя векторами заключен в пределах от 0° до 180° . Если хотя бы один из векторов \vec{a} , \vec{b} нулевой, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Основные свойства скалярного произведения векторов:

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}); (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}; \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2.$$

13. Напомним, что два вектора называют коллинеарными, если один из них получается из другого умножением на число. Три вектора называют компланарными, если существует плоскость, которой эти векторы параллельны. Если \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} — компланарные векторы, причем \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны, то вектор \vec{c} выражается через \vec{a} и \vec{b} , т. е. существуют такие числа x и y , что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Числа x и y определяются однозначно. Справедливо и обратное утверждение: если вектор \vec{c} выражается через \vec{a} и \vec{b} , то векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарны.

14. Публикуемые в этой книге статьи З. А. Скопца были написаны в разное время. Автор пользовался символикой, которая в то время применялась в школьном курсе математики. Здесь $[AB]$ — луч AB , $[AB]$ — отрезок AB , (AB) — прямая AB , $\Phi_1 \cup \Phi_2$ — объединение фигур (фигура, состоящая из всех тех и только тех точек, которые принадлежат хотя бы одной из этих фигур), $\Phi_1 \cap \Phi_2$ — пересечение фигур (фигура, состоящая из всех тех и только тех точек, которые принадлежат одной из этих фигур).

15. Две прямые называют скрещивающимися, если не существует плоскости, содержащей эти прямые. Признак скрещивающихся прямых: если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то рассматриваемые прямые скрещиваются.

16. Отображение плоскости (пространства) на себя, при котором две любые точки M и N отображаются на такие точки M_1 и N_1 , что выполняется равенство $|M_1N_1| = k|MN|$ (где $k > 0$), называют подобием плоскости (пространства) с коэффициентом k .

17. Центроидом треугольника называют точку пересечения его медиан. Центроид треугольника является также его центром тяжести.

18. Тройку $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ попарно перпендикулярных единичных векторов называют прямоугольным базисом. Каждый вектор пространства можно разложить по векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Это означает, что для любого вектора \vec{a} существует, и притом только одна, тройка чисел $(x; y; z)$, такая, что $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Верно и обратное утверждение: в данном прямоугольном базисе $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ каждая тройка чисел $(x; y; z)$ определяет единственный вектор. Числа x, y, z называют координатами вектора \vec{a} в базисе $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

19. Одинаково ориентированные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ можно себе представить следующим образом. Если на сторонах треугольника ABC стрелками указать направление его обхода от A к B , от B к C , от C к A , то направление обхода треугольника $A_1B_1C_1$ от A_1 к B_1 , от B_1 к C_1 , от C_1 к A_1 будет таким же, т. е. если направление обхода треугольника ABC было положительным (против движения часовой стрелки), то и направление соответствующего обхода треугольника $A_1B_1C_1$ также положительно. Нетрудно убедиться на конкретном примере в том, что параллельный перенос, поворот не меняют ориентацию треугольника, а, например, осевая симметрия меняет ориентацию на противоположную.

20. Символ R_ϕ^O означает поворот вокруг центра O на угол ϕ . Символ H_O^k обозначает гомотегию с центром O и коэффициентом $k \neq 0$. Гомотетией H_O^k называют такое отображение плоскости (пространства) на себя, при котором каждая точка M отображается на точку M_1 , такую, что $\vec{OM}_1 = k\vec{OM}$. Гомотетия с коэффициентом k есть подобие с коэффициентом $|k|$.

21. Подобие первого рода сохраняет ориентацию треугольников, а подобие второго рода меняет их ориентацию на противоположную (см. комментарий 19).

22. Две фигуры называют конгруэнтными, если одна из них может быть отображена на другую движением, т. е. геометрическим преобразованием, сохраняющим расстояния. Во многих учебниках вместо термина «конгруэнтность» используется термин «равенство». В данном случае речь идет о конгруэнтных или равных отрезках.

23. Символ $\omega(O; R)$ означает окружность ω радиусом R с центром в точке O .

24. Гармоническая пропорция — это пропорция вида $a:c = (a-b):(b-c)$, в которой первое число (или отрезок) так относится к третьему, как разность между первым и вторым относится к разности между вторым и третьим. Число (отрезок) b в гармонической пропорции есть среднее гармоническое чисел a и c , т. е.
$$b = \frac{2ac}{a+c}.$$

25. Пучком прямых называют множество прямых, лежащих в одной плоскости и проходящих через одну и ту же точку S или параллельных одной и той же прямой. Точку S называют центром пучка прямых.

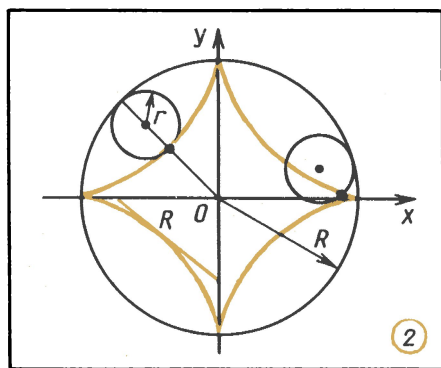
26. Символ S_l означает осевую симметрию с осью l . Под композицией двух или нескольких осевых симметрий понимают результат их последовательного выполнения. Так, приводимая ниже символическая запись композиции $S_l \circ S_x$ означает результат последовательного выполнения осевых симметрий вначале относительно оси x , а затем относительно прямой l . R_O^φ — поворот около центра O на угол φ .

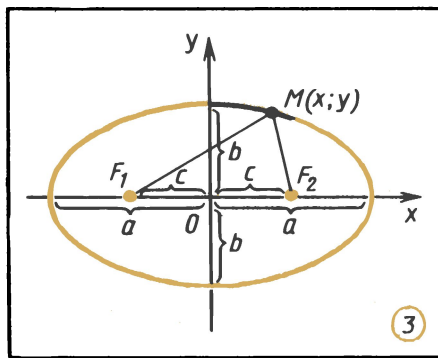
27. Здесь описываются неизменные свойства фигур (инварианты) относительно движений. В данном случае автор говорит о неподвижных точках и прямых.

28. Тожественное преобразование плоскости — это такое преобразование, которое каждую точку отображает на себя, т. е. оставляет неподвижной.

29. Астроидой называют кривую, описываемую точкой окружности радиуса r , катящейся без скольжения по неподвижной окружности радиуса R внутри ее и имеющей с ней внутреннее касание, если $r = \frac{R}{4}$ (рис. 2). В переводе с греческого слово «астроида» означает «звездообразная».

Уравнение астроиды в прямоугольных координатах имеет вид $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$. Отрезок касательной к астроиде, заключенный между осями координат, имеет постоянную длину R . Длина астроиды равна $6R$. Астроида является частным видом класса кривых, называемых гипоциклоидами. Гипоциклоида — это кривая, описываемая произвольной точкой окружности, катящейся по другой неподвижной окружности и имеющей с ней внутреннее касание. В зависимости от соотношения радиусов подвижной и неподвижной окружностей получают различные виды гипоциклоид. Если радиус подвижной окружности равен половине радиуса неподвижной окружности, то гипоциклоида вырождается в отрезок — диаметр неподвижной окружности. Этим свойством пользуются при конструировании зубчатых передач в машинах для преобразования кругового движения в прямолинейное.





30. Эллипс — это множество точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2 , лежащих в этой же плоскости, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между F_1 и F_2 , и равная данному числу (или отрезку) $2a$ (рис. 3). Точки F_1 и F_2 называют фокусами эллипса. Расстояние между фокусами, называемое фокальным, обозначают через $2c$. Данное же число (отрезок) $2a$ называют большой осью.

Каноническое (простейшее) уравнение эллипса в прямоугольных декартовых координатах имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b^2 = a^2 - c^2$. Число (отрезок) $2b$ называют малой осью эллипса.

Из уравнения эллипса следует, что $\frac{x^2}{a^2} \leq 1$, $\frac{y^2}{b^2} \leq 1$. Поэтому координаты точек эллипса удовлетворяют условиям $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, т. е. эллипс расположен внутри прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$. Эллипс имеет центр симметрии и две оси симметрии. Число $e = \frac{c}{a}$ называют эксцентриситетом эллипса. Для эллипса $e < 1$. Если фокусы эллипса совпадают, т. е. $F_1 = F_2$, то эллипс вырождается в окружность. В этом случае совпадающие фокусы являются центром окружности, а эксцентриситет равен нулю ($e = 0$, так как $c = 0$).

31. Точки M и M_1 называют симметричными относительно плоскости α , если эта плоскость перпендикулярна отрезку MM_1 и делит его пополам. Любую точку A плоскости α считают симметричной самой себе. Симметрией относительно плоскости α (или плоскостной симметрией пространства) называют отображение пространства на себя, при котором каждая точка отображается на симметричную точку относительно данной плоскости. Плоскость α называют плоскостью симметрии. Симметрия относительно плоскости есть движение.

32. Инволюционным преобразованием (инволюцией) называют такое преобразование плоскости (пространства), повторное применение которо-

го (т. е. его квадрат) дает тождественное преобразование. Центральная симметрия, осевая симметрия, плоскостная симметрия — примеры инволюций.

33. В первоначальном представлении комплексные числа — это выражения вида $a + bi$, где a и b — действительные (вещественные) числа, i — некоторый символ, обозначающий мнимую единицу ($i^2 = -1$).

Сложение, умножение и деление комплексных чисел задается формулами

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i; \\(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i; \\ \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.\end{aligned}$$

В комплексном числе $a + bi$ число a называют его действительной частью, число bi — мнимой частью, число b — коэффициентом мнимой части. Чисто мнимым называют такое комплексное число, действительная часть которого равна нулю.

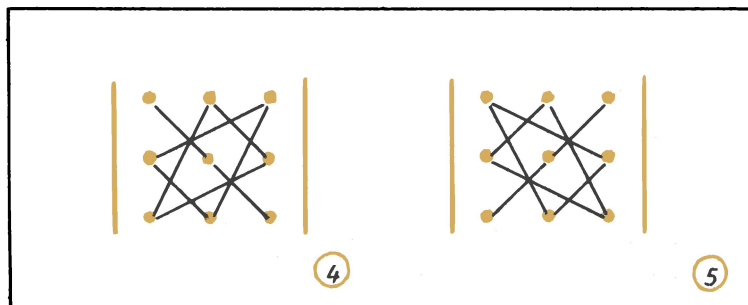
Действительное число является частным случаем комплексного, когда коэффициент b мнимой части равен нулю.

Исторически комплексные числа были введены в связи с решением уравнений второй и третьей степеней. Важнейшее свойство комплексных чисел состоит в том, что любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет ровно n комплексных корней, считая и их кратность.

34. Определитель (или детерминант) третьего порядка — это алгебраическая сумма шести слагаемых, составленных из элементов таблицы, содержащей три строки и три колонки. Определитель третьего порядка обозначается так:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

На рисунках 4 и 5 схематически показано, как вычислить (раскрыть) определитель. Произведения трех членов, соединенных так, как на рисунке 4, берут со своими знаками, а произведения трех членов, соединенных так, как на рисунке 5, — с противоположными знаками. Таким обра-



зом, определитель третьего порядка по определению равен:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1.$$

В настоящее время определители применяются почти во всех разделах математики, а также в очень многих приложениях. Поэтому разработана теория определителей. Определитель n -го порядка (таблица, состоящая из n строк и n столбцов) содержит $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ членов.

Основные свойства определителей, которые лежат в основе их вычислений, состоят в следующем: определитель не изменяется при перемене ролями всех его строк и столбцов; если один из столбцов (строк) состоит из нулей, то определитель равен нулю; если один определитель получен из другого определителя перестановкой двух столбцов (строк), то эти определители отличаются друг от друга лишь знаком; определитель, содержащий два пропорциональных столбца (строки), равен нулю; определитель не меняется, если к какому-либо столбцу (строке) прибавить линейную комбинацию других столбцов (строк); если элементы какого-либо столбца (строки) определителя умножить на некоторое число, то и весь определитель умножится на это число, т. е. общий множитель любого столбца (строки) можно выносить за знак определителя; если элементы какого-либо столбца (строки) определителя являются суммами двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых в качестве соответствующего столбца (строки) взяты первые слагаемые, во втором — вторые слагаемые, а элементы всех остальных столбцов (строк) у каждого из трех определителей одинаковы.

35. Задача о делении произвольного угла на три равные части (трисекция угла) — одна из трех знаменитых задач на построение, решаемых в Древней Греции (трисекция угла, квадратура круга, удвоение куба). Ни одна из этих задач не разрешима с помощью циркуля и линейки. Так, трисекция угла сводится к построению корня кубического уравнения вида $x^3 + px + q = 0$. Для произвольного данного угла полученное уравнение не имеет рационального корня. Поэтому (согласно критерию построения отрезка с помощью циркуля и линейки) трисекция угла не выполнима этими средствами. Например, угол в 60° нельзя точно разделить на три равные части с помощью циркуля и линейки.

36. Здесь автор имеет в виду систему аксиом планиметрии, разработанную академиком А. Н. Колмогоровым для школьного учебника, по которому изучали геометрию в 60—70-х годах (см., например: Геометрия, 6—8 / Под ред. А. Н. Колмогорова. — М.: Просвещение, 1979).

37. Приведенное построение изложено в названном выше учебном пособии под ред. А. Н. Колмогорова. Идея построения зиждется на понятии и свойствах осевой симметрии, не связанных с теорией параллельных.

Содержание

От составителя	5
Теоремы косинусов	
Теорема Пифагора и ее применение в курсе геометрии	7
Теорема о проекциях для треугольника и следствия из нее	15
Две теоремы косинусов для четырехугольника	19
Теорема косинусов для трехгранного угла	26
Векторы	
Применение скалярного произведения векторов к доказательству геометрических и алгебраических неравенств	28
Составление тригонометрических неравенств с помощью векторов	36
Применение векторов к решению задач на нахождение множеств точек	43
О двух правильных шестиугольниках, связанных с произвольным треугольником	57
Поворот вектора на 90°	62
Сопряженность точек относительно окружности	72
Об использовании единичного вектора при решении задач	78
Координатные формулы осевой симметрии плоскости и их применение	83
Применение движений к решению геометрических задач	93
Метод подобия при решении планиметрических задач	101
Применение метода координат к изучению свойств параболы	109
Взаимное расположение эллипса и окружности	120
Координаты. Преобразования	
Векторно-координатное задание некоторых преобразований плоскости и пространства	133
Преобразования симметрии пространства в задачах	144

Комплексные числа	<hr/>
Метод комплексных чисел в планиметрии	152
Прямая и окружность на плоскости комплексных чисел	170
Приложения комплексных чисел к задачам элементарной геометрии	179
Геометрическая смесь	<hr/>
О построении касательной к окружности	193
Аналитическое решение трех геометрических задач	199
Элементарное доказательство теоремы П. Эрдеша	202
Обобщение теоремы Птолемея	204
Теорема Морлея	210
Комментарии	213

СКОПЕЦ ЗАЛМАН АЛТЕРОВИЧ

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Н. И. Никитина*
Младшие редакторы *Е. А. Буюклян, О. В. Котенкова*
Художник *В. В. Костин*
Художественный редактор *Ю. В. Пахомов*
Технический редактор *Т. П. Локтионова*
Корректор *Н. С. Соболева*

ИБ № 11763

Сдано в набор 10.08.89. Подписано к печати 20.08.90. Формат 70×90¹/₁₆. Бум. офсетная № 2. Гарнит. Литературная. Печать офсет. Усл. печ. л. 16,38+0,29 форзац. Усл. кр.-отт. 33,56. Уч.-изд. л. 13,18+0,48 форзац. Тираж 150 000 экз. Заказ 2710. Цена 85 к.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства печати и массовой информации РСФСР. 129846. Москва, 3-й проезд Марьиной роши, 41.

Отпечатано с диапозитивов Саратовского ордена Трудового Красного Знамени полиграфического комбината Министерства печати и массовой информации РСФСР. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59, на Смоленском полиграфкомбинате Министерства печати и массовой информации РСФСР. 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

ДОРОГИЕ ЧИТАТЕЛИ!

Издательство «Просвещение» систематически выпускает книги для учащихся, посвященные отдельным разделам школьного курса математики, и книги, существенно выходящие за рамки этого курса. Чтение этих книг, как правило, не требует продолжительной и напряженной работы, так как все их содержание опирается на знания, приобретенные на уроках математики.

Так, в 1986 г. вышла книга Г. А. Гальперина и А. К. Толпыго «Московские математические олимпиады», содержащая олимпиадные задачи с ответами, решениями, указаниями к решению.

Е. Е. Семенов в книге «Изучаем геометрию» (1987 г.) на конкретных геометрических задачах показывает, как проводить анализ с целью отыскания путей решения, как пользоваться аналогией, обобщением.

В 1988 г. была переиздана «Математическая шкатулка» Ф. Ф. Нагибина, очень популярная у нескольких поколений читателей.

Книга И. Л. Никольской и Е. Е. Семенова «Учимся рассуждать и доказывать», вышедшая в 1989 г., состоит из небольших рассказов, бесед, диалогов, задач и загадок и рассказывает читателям об особенностях математического языка и методах поиска решений задач.

Названия следующих книг говорят об их серьезном математическом содержании:

В. С. Лютикас «Факультативный курс по теории вероятностей» (1990 г.).

И. Ф. Шарыгин «Факультативный курс по математике. Решение задач». Пособие для 10 кл. (1989 г.) (Аналогичная книга того же автора для 11 кл. выйдет в 1991 г.)

К. А. Рыбников «Профессия — математик» (1990 г.).

Следите за книгами из серий «Люди науки» и «Мир знаний». Из них вы узнаете много интересного о жизни и деятельности знаменитых математиков, а также о разнообразных приложениях, математических знаний в науке, технике и вообще в жизни.

85 к.

