

ИННОВАЦИОННАЯ
ШКОЛА



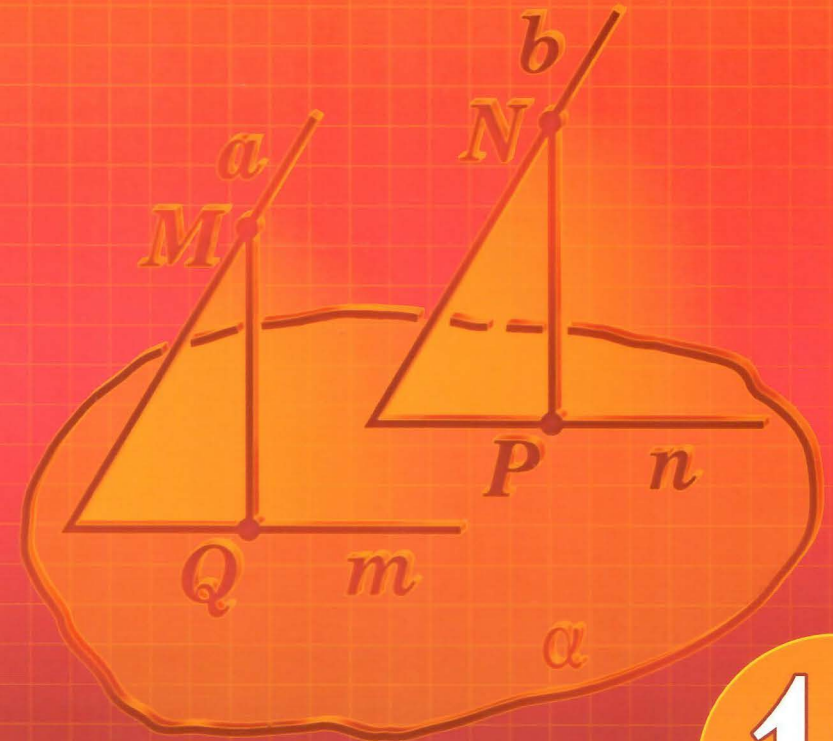
ИННОВАЦИОННАЯ
ШКОЛА

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

МАТЕМАТИКА

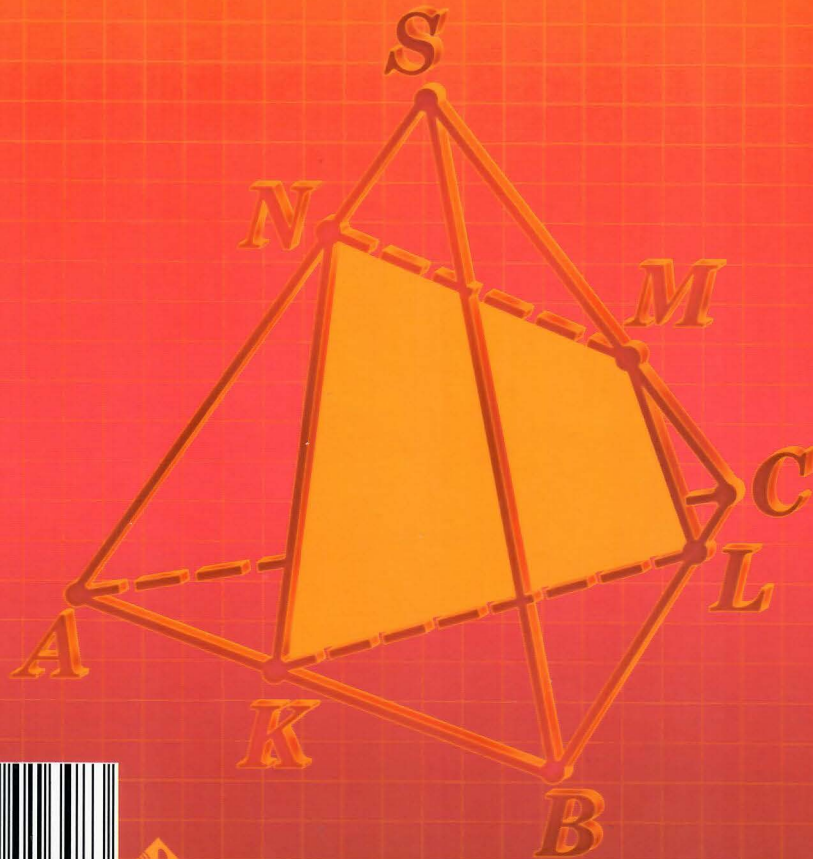
Базовый и углублённый уровни

М
н
о
г
о
у
р
о
в
н
е
в
о
е
о
б
у
ч
е
н
и
е



10
класс

«РУССКОЕ СЛОВО»



9 785533 016483



«РУССКОЕ СЛОВО»

МАТЕМАТИКА

10

ФГОС
ИННОВАЦИОННАЯ ШКОЛА

**В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов,
А.А. Мальцев, А.С. Марковичев, Ю.В. Михеев, М.В. Фокин**

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

**Учебник для 10 класса
общеобразовательных организаций**

БАЗОВЫЙ И УГЛУБЛЁННЫЙ УРОВНИ

Под редакцией
академика РАН В.В. Козлова
и академика РАО А.А. Никитина

4-е издание

Рекомендовано Министерством просвещения
Российской Федерации

Экспертное заключение № 004700 от 19.12.2016 г. (научная экспертиза)

Экспертное заключение № 004707 от 19.12.2016 г. (педагогическая экспертиза)

Экспертное заключение № ОЭ/16-0291 от 26.12.2016 г. (общественная экспертиза)

Соответствует Федеральному
государственному образовательному стандарту

Москва
«Русское слово»
2020

УДК 373.167.1:51*10(075.3)

ББК 22.1я721

К59

Авторы:

В.В. Козлов — академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор;

А.А. Никитин — академик РАО, доктор физико-математических наук, профессор;

В.С. Белоносов — доктор физико-математических наук, профессор;

А.А. Мальцев — кандидат физико-математических наук, доцент;

А.С. Марковичев — кандидат физико-математических наук, доцент;

Ю.В. Михеев — кандидат педагогических наук;

М.В. Фокин — доктор физико-математических наук, профессор

Козлов В.В., Никитин А.А.

К59 Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учебник для 10 класса общеобразовательных организаций. Базовый и углублённый уровни / В.В. Козлов, А.А. Никитин, В.С. Белоносов и др.; под ред. В.В. Козлова и А.А. Никитина. — 4-е изд. — М.: ООО «Русское слово — учебник», 2020. — 464 с. — (ФГОС. Инновационная школа).

ISBN 978-5-533-01648-3

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту среднего общего образования, является частью учебно-методического комплекта «Математика» и входит в систему учебников «Инновационная школа».

Учебник предназначен для общеобразовательных организаций.

УДК 373.167.1:51*10(075.3)

ББК 22.1я721



ISBN 978-5-533-01648-3

© В.В. Козлов, 2014, 2020

© А.А. Никитин, 2014, 2020

© В.С. Белоносов, 2014, 2020

© А.А. Мальцев, 2014, 2020

© А.С. Марковичев, 2014, 2020

© Ю.В. Михеев, 2014, 2020

© М.В. Фокин, 2014, 2020

© ООО «Русское слово — учебник», 2014, 2020

Предисловие



Данная книга — шестая в серии трёхуровневых учебников по математике, созданных коллективом авторов из числа научных сотрудников Математического института им. В.А. Стеклова Российской академии наук, Института математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Института педагогических исследований одарённости детей Российской академии образования, профессоров и доцентов Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова и Новосибирского государственного университета.

Эта серия разрабатывается с 1993 года и охватывает весь курс школьной математики с 5 по 11 класс. За прошедшие годы авторами сформирована цельная концепция преподавания математики в средней школе, которая во многом принципиально отличается от большинства других подобных разработок.

Прежде всего авторы отказались от традиционного деления математики на несколько дисциплин: арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию, основы анализа и так далее. Все перечисленные предметы предлагается изучать в общем курсе. Это подчёркивает единство математической науки, тесную взаимосвязь развиваемых в ней идей и методов, фундаментальную роль математики как важного элемента общей культуры.

Потребности использования математики в различных областях человеческой деятельности различны, так же как различны и природные различия в склонностях и способностях учащихся, поэтому не всем учащимся математика нужна в одинаковом объёме. В настоящем учебнике приняты три уровня изложения, отличающиеся не только объёмом, но главным образом глубиной и сложностью изучаемого материала. Первый уровень содержит сведения, умения и навыки, необходимые каждому культурному человеку. Второй уровень предполагает изучение математики в объёме, достаточном для последующего обучения в техническом вузе. Наконец, третий уровень должен способствовать подготовке к продолжению образования на математическом факультете университета. Материал первого уровня может изучаться независимо от второго и третьего, а материал второго не зависит от изучаемого на третьем уровне. Разделы, относящиеся ко второму уровню, отмечены в тексте звёздочкой, а материал третьего уровня — двумя звёздочками.

Учебник состоит из 15 глав, разбитых на параграфы, которые делятся на более мелкие разделы — пункты. К каждому параграфу предлагаются контрольные вопросы, задачи, упражнения и тесты, а к каждому пункту — подходящий «открытый вопрос». Наличие открытых вопросов — важная особенность изложения учебного материала. Фактически эти вопросы — специальные темы для размышления и обсуждения. Ответы на них не всегда однозначны. Более того, иногда сознательно предполагается, что существует несколько различных правильных ответов. Многие из них можно найти на страницах учебника, а в некоторых случаях их подсказывает окружающая действительность. Часто именно ответ на открытый вопрос дополняет материал пункта до логического завершения.

Учебник прошёл апробацию в школах нескольких регионов, получил положительные экспертные заключения РАН и РАО, рекомендован Министерством просвещения Российской Федерации.

Авторы выражают искреннюю признательность академику РАО В.Д. Шадрикову, принимавшему активное участие в разработке концепции многоуровневого обучения. Авторы благодарят докторов физико-математических наук М.П. Вишневого и А.И. Саханенко за участие на первоначальном этапе в формировании содержания трёхуровневого обучения.

Авторы считают также своим долгом вспомнить коллег, которых уже нет с нами, — доцента В.В. Войтишека, профессора Т.И. Зеленьяка и профессора Д.М. Смирнова.



АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД В МАТЕМАТИКЕ

В этой главе рассказывается о роли аксиом в математике и приводятся примеры аксиоматического подхода к изучению геометрии и арифметики.

§ 1. АКСИОМЫ И «НАЧАЛА» ЕВКЛИДА ■

1.1. Аксиомы. Вы уже знакомы с тем, что в математике принята строгая система доказательств. Некоторые исходные совершенно ясные для нас утверждения мы считаем истинными без доказательства и называем их *аксиомами*.

Аксиомы содержат некоторые начальные понятия, которые называются основными и которым не даётся никаких определений. Тем самым аксиомы представляют собой принимаемые без доказательства утверждения о свойствах основных понятий. Все последующие утверждения выводятся как логические следствия из аксиом и уже доказанных утверждений.

Вопрос. Какие аксиомы вы знаете?

1.2. Аксиоматический метод. Метод последовательного получения утверждений, исходя из аксиом, получил в математике название *аксиоматического метода*. Аксиоматический метод позволяет сводить сложные математические понятия к простейшим, которые не требуют пояснений.

Яркий пример применения аксиоматического метода в древней математике — это попытка изложения геометрии великим Евклидом в его знаменитых «Началах».

Вопрос. Как доказывается, что если a , b и c — такие числа, что $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$?

1.3. Возникновение геометрии. Накопление геометрических знаний в виде конкретных фактов началось в глубокой древности.

За несколько тысячелетий до нашей эры египтяне умели возводить грандиозные пирамиды. Например, высота известной пирамиды Хеопса первоначально составляла около 147 метров. Такие постройки требовали точных измерений и предварительных геометрических расчётов. Постоянные разливы Нила принуждали египтян ежегодно измерять и перераспределять земельные участки. В переводе с греческого слово геометрия и означает «землемерие».

Вопрос. Какие измерения достаточно произвести, чтобы вычислить площадь участка, имеющего форму трапеции?

1.4. «Начала» Евклида. Приблизительно за 700 лет до начала нашей эры геометрические знания египтян проникли в Грецию. Здесь геометрия возникла уже как наука. На рубеже IV–III столетий до нашей эры древнегреческий геометр Евклид, живший в Александрии, опубликовал своё знаменитое сочинение «Начала» в тринадцати книгах. В нём впервые было дано логическое построение геометрии.

Каждая книга «Начал» содержит описание основных геометрических понятий. Приведём некоторые из них:

1. Точка есть то, что не имеет частей.
2. Линия есть длина без ширины.
3. Прямая линия есть такая линия, которая одинаково расположена по отношению ко всем своим точкам.
4. Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.
5. Плоскость есть поверхность, которая одинаково расположена относительно всех своих прямых.
6. Телом называется то, что имеет длину, ширину и глубину.

В первой книге «Начал» изложены постулаты и аксиомы, то есть утверждения, принимаемые без доказательств как очевидные.

Постулаты:

- 1) через две точки можно провести одну прямую линию;
- 2) отрезок можно продолжить до прямой;
- 3) из любого центра можно описать окружность любого радиуса;
- 4) все прямые углы равны между собой;
- 5) две прямые, которые при пересечении с третьей прямой образуют внутренние односторонние углы, в сумме меньшие двух прямых, при продолжении в ту же сторону пересекаются.

Аксиомы:

- 1) равные порознь третьему, равны между собой;
- 2) если к равным прибавить равные, то получим равные;
- 3) если от равных отнять равные, то остатки будут равны;
- 4) совмещающиеся друг с другом равны;
- 5) целое больше своей части.

Вслед за аксиомами в первой книге «Начал» идут теоремы, расположенные в таком порядке, что последующие утверждения выводятся строго логически из постулатов, аксиом и предыдущих теорем. «Начала» Евклида были основным учебным пособием по геометрии в течение двух последующих тысячелетий.

Вопрос. Какие свойства точек на прямой вы знаете?

1.5. Пятый постулат. Уже ближайшие последователи Евклида обратили внимание на пятый постулат, который был не столь очевиден, как другие постулаты и аксиомы. Попытки доказать пятый постулат на основе остальных постулатов и аксиом Евклида безуспешно продолжались более 2000 лет. Было замечено, что пятый постулат Евклида равносителен следующей аксиоме, которую принято называть «аксиомой параллельности»:

на плоскости через данную точку вне данной прямой можно провести не более одной прямой, не пересекающей данную прямую.

Великий русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792—1856) также пытался доказать пятый постулат Евклида. Сохранив все остальные аксиомы, он заменил аксиому параллельности её отрицанием, надеясь обнаружить противоречие в последующих рассуждениях. Однако вместо противоречия Лобачевский пришёл к новому учению, которое он назвал «воображаемой геометрией». Доклад о своём открытии Н.И. Лобачевский представил совету Казанского университета, где он работал, в 1826 году. В 1829 году вышла из печати большая работа Н.И. Лобачевского «О началах геометрии», в которой он детально изложил новую теорию. В настоящее время «воображаемая геометрия» называется геометрией Лобачевского.

Три года спустя после выхода в свет работы Лобачевского венгерский учёный Янош Бойяи (1802—1860), не зная об исследованиях Лобачевского, также опубликовал работу, где изложил начала неевклидовой геометрии, но в менее развитой форме по сравнению с Лобачевским. К выводу о существовании новой геометрии независимо пришёл также великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777—1855), как впоследствии стало известно из его писем к современникам.

Непротиворечивость геометрии Лобачевского была доказана позже французским учёным Анри Пуанкаре (1854—1912) и немецким математиком Феликсом Клейном (1849—1925). Подробное исследование аксиом евклидовой геометрии было проведено немецким математиком Давидом Гильбертом (1862—1943) в 1899 году.

Вопрос. Как сформулировать отрицание аксиомы параллельности?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Что вы понимаете под словом «аксиома»?
2. Что вы понимаете под словом «теорема»?
3. Приведите пример математического доказательства.

4. Какой смысл в греческом языке имеет слово «геометрия»?
5. Каковы свойства основных понятий евклидовой геометрии?
6. Сформулируйте постулаты Евклида.
7. Что утверждают аксиомы евклидовой геометрии?
8. Сформулируйте аксиому параллельности.
- 9.* Каково главное отличие «воображаемой геометрии» Лобачевского от геометрии Евклида?

■ Задачи и упражнения

1. Существует ли четырёхугольник, у которого три угла по 60° ?
2. Докажите, что если у треугольника две медианы равны, то такой треугольник равнобедренный.
3. В трапеции средняя линия делится диагоналями на три равные части. Найдите соотношение оснований трапеции.
- 4.* В прямоугольном треугольнике ABC проводится высота BH к гипотенузе и биссектриса AL , которая пересекает BH в точке M . Докажите, что треугольник BML равнобедренный.
- 5.** Найдите площадь трапеции с основаниями 3 и 10 и диагоналями 5 и 12.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость три прямые?

- 1) 6 2) 7 3) 8 4) 9

1.2. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость две окружности и прямая?

- 1) 6 2) 7 3) 8 4) 9

1.3. Какую величину имеют углы правильного десятиугольника?

- 1) 108° 2) 126° 3) 144° 4) 162°

1.4. Сколько различных действительных корней имеет уравнение $(x^2 + \sqrt{2})^2 + x^2 = 2$?

- 1) ни одного 2) один 3) два 4) четыре

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Каким из указанных неравенств равносильно неравенство $\frac{1}{x^3} \leq 8$?

- 1) $8x^3 \geq 1$ 2) $2x \geq 1$ 3) $\frac{8x^3 - 1}{x} \geq 0$ 4) $\frac{1 - 2x}{x} \leq 0$

2.2. Какие из указанных четырёх чисел могут быть длинами последовательных сторон некоторого четырёхугольника?

- 1) 1; 2000; 3; 4000 2) 10; 2000; 30; 4000
3) 100; 2000; 300; 4000 4) 1000; 2000; 3000; 4000

2.3. Какие из приведённых равенств являются следствиями тождества $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$?

- 1) $x^4 + 2x^2 + 1 = (1 + x^2)^2$ 2) $(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2 = 30 + 6\sqrt{6}$
3) $(x^3 + x)^2 = x^6 + 2x^5 + x^4$ 4) $a + a^2 + 2a\sqrt{a} = (a + \sqrt{a})^2$

2.4. Сколько различных действительных корней может иметь уравнение вида $x^2 - 2ax - 3a^2 = 0$ в зависимости от параметра a ?

- 1) ни одного 2) один 3) два 4) три

§ 2. СИСТЕМА АКСИОМ ГИЛЬБЕРТА ■

2.1. Аксиомы связи.** При построении геометрии Д. Гильберт использовал основные понятия, отношения между ними и аксиомами. Основными понятиями, которые не определяются через другие понятия, являются, как и у Евклида, точки, прямые и плоскости, а также следующие главные отношения между ними: «лежать на», «лежать между», «быть конгруэнтными» (или равными), «быть параллельными».

Система аксиом Гильберта состоит из пяти групп аксиом. В этом пункте мы приведём аксиомы первой группы (или *аксиомы связи*), которые описывают свойства отношения «лежать на».

1₁. Для любых двух точек существует прямая, на которой лежат эти точки.

1₂. Для любых двух различных точек существует не более одной прямой, на которой лежат эти точки.

1₃. На каждой прямой лежат по крайней мере две точки; на каждой плоскости лежат по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

1₄. Для любых трёх точек существует плоскость, на которой лежат эти точки. На любой плоскости лежит хотя бы одна точка.

1₅. Для любых трёх точек, не лежащих на одной прямой, существует не более одной плоскости, на которой лежат эти точки.

1₆. Если две точки прямой m лежат на плоскости α , то все точки прямой m лежат на этой плоскости.

1₇. Если точка лежит на плоскости α и на плоскости β , то существует по крайней мере ещё одна точка, которая лежит на каждой из этих плоскостей.

1₈. Существуют по крайней мере четыре точки, которые не лежат на одной плоскости.

Для изучения аксиоматической теории полезно построить её модель, то есть сопоставить основным понятиям и отношениям какие-нибудь конкретные объекты и утверждения об этих объектах, которые могут быть истинными или ложными.

Нетрудно построить модель геометрии, которая удовлетворяет перечисленным аксиомам связи, но значительно отличается от евклидовой

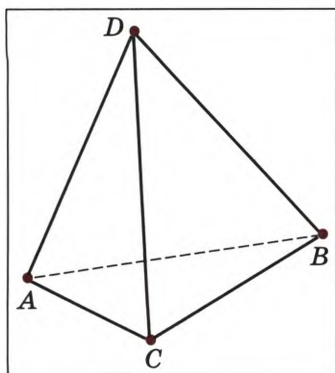


Рис. 1

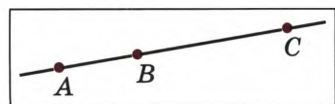


Рис. 2

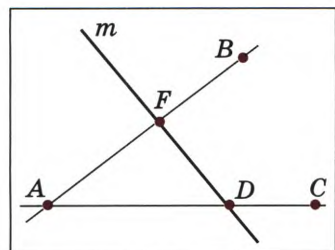


Рис. 3

геометрии. Пусть $ABCD$ — тетраэдр (рис. 1). Будем считать «точками» вершины A, B, C, D , «прямыми» — пары вершин $\{A, B\}$, $\{A, C\}$, $\{A, D\}$, $\{B, C\}$, $\{B, D\}$ и $\{C, D\}$, «плоскостями» — тройки вершин $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$, $\{A, C, D\}$, $\{B, C, D\}$. Определим отношение «лежать на» как «входить в состав» соответствующей пары или тройки вершин. В результате получаем модель, в которой выполняются все аксиомы $1_1 — 1_8$. Эта модель показывает, что в геометрии, определяемой лишь аксиомами связи, прямая может иметь всего две точки, а плоскость — три точки.

Вопрос. Будут ли выполняться аксиомы $1_1 — 1_8$, если в указанной модели из числа «прямых» удалить $\{A, B\}$?

2.2. Аксиомы порядка.** Аксиомы второй группы, или *аксиомы порядка*, описывают свойства отношения «лежать между».

2₁. Если точка B лежит между точками A и C , то B лежит также между C и A . При этом A, B, C — различные точки одной прямой (рис. 2).

2₂. Для любых двух точек A и B на одной прямой AB существует по крайней мере одна точка C такая, что точка B лежит между A и C .

2₃. Среди любых трёх различных точек существует не более одной, лежащей между двумя другими.

2₄ (аксиома Паша). Пусть A, B, C — три точки в плоскости α и m — прямая в плоскости α , не проходящая ни через одну из точек A, B, C . Тогда если на прямой m найдётся точка D ,

лежащая между A и C , то на этой прямой найдётся также точка F , которая лежит либо между A и B , либо между B и C (рис. 3).

Отношение «лежать между» позволяет определить отрезок с концами в данных точках. Из аксиомы Паша вытекает, в частности, что если прямая пересекает одну из сторон треугольника, то она обязательно пересечёт ещё какую-то сторону этого треугольника. С помощью аксиом первой и второй групп можно также доказать, что на каждой прямой имеется бесконечное множество точек.

Вопрос. Как с помощью аксиомы Паша доказать, что каждая прямая делит плоскость на две полуплоскости?

2.3. Аксиомы конгруэнтности.** Аксиомы третьей группы, или *аксиомы конгруэнтности*, описывают свойства отношения конгруэнтности, или, другими словами, отношения равенства геометрических фигур, соответствующие наглядному представлению о совмещении при наложении копии одной из фигур на другую.

$З_1$. Если даны пара точек K, L и прямая a с расположенной на ней точкой O (рис. 4), то на прямой a найдутся такие точки A и B , что отрезки AO, OB конгруэнтны отрезку KL и точка O лежит между точками A и B (символически $AO = KL, OB = KL$).

Аксиома $З_1$ даёт возможность откладывать на прямой от заданной точки O отрезки данной длины.

$З_2$. Два отрезка, конгруэнтные третьему отрезку, конгруэнтны между собой.

Каждый отрезок AB конгруэнтен самому себе и отрезку BA (символически $AB = BA$).

$З_3$. Если точка C лежит между точками A и B , а точка C_1 — между A_1 и B_1 , причём $AC = A_1C_1, CB = C_1B_1$, то $AB = A_1B_1$ (рис. 5).

Аксиома $З_3$ позволяет складывать отрезки.

$З_4$. Пусть даны угол AOB , луч O_1B_1 и полуплоскость относительно прямой O_1B_1 (рис. 6). Тогда в этой полуплоскости существует единственный луч O_1A_1 такой, что угол AOB конгруэнтен углу $A_1O_1B_1$.

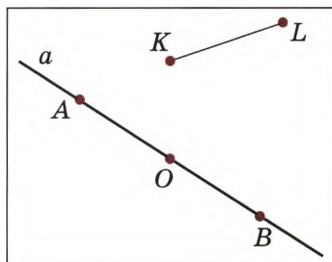


Рис. 4

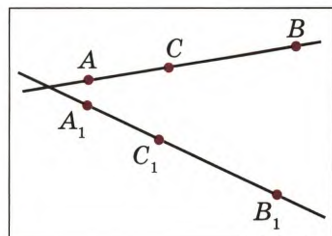


Рис. 5

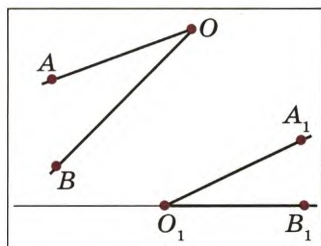


Рис. 6

Аксиома \mathcal{Z}_4 даёт возможность откладывать углы, конгруэнтные (равные) данному. Кроме того, из этой аксиомы следует, что каждый угол конгруэнтен самому себе.

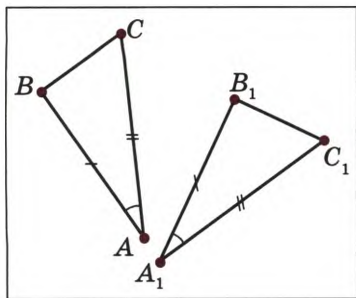


Рис. 7

\mathcal{Z}_5 . Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполнено: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ (рис. 7), то $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Эта аксиома позволяет вывести признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними.

Вопрос. Как доказать, что из аксиом \mathcal{Z}_1 , \mathcal{Z}_4 и \mathcal{Z}_5 следует утверждение о конгруэнтности сторон BC и B_1C_1 рассматриваемых треугольников?

2.4. Аксиома параллельности.** Четвёртая группа состоит из единственной аксиомы параллельности, уже упоминавшейся в

предыдущем параграфе.

4_1 . Через данную точку вне данной прямой на плоскости можно провести не более одной прямой, не пересекающей данную прямую.

Вопрос. Выполняется ли аксиома параллельности для модели из пункта 2.1?

2.5. Аксиомы Архимеда и Кантора.** Пятая группа содержит две аксиомы.

5_1 (аксиома Архимеда). Пусть AB и CD — произвольные отрезки. Тогда на прямой AB можно указать конечное множество точек A_1, A_2, \dots, A_n , расположенных так, что отрезки $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD , точка A_1 лежит между A и A_2 , точка A_2 лежит между A_1 и A_3 , ..., точка A_{n-1} лежит между A_{n-2} и A_n , а точка B лежит между A_{n-1} и A_n .

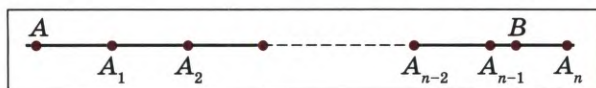


Рис. 8

Эта аксиома утверждает, что для любых двух отрезков AB и CD всегда найдётся отрезок AA_n , конгруэнтный кратному $n \cdot CD$ отрезка CD и такой, что AB является частью отрезка AA_n , то есть AA_n больше AB (рис. 8).

5_2 (аксиома полноты). К системе элементов геометрии (точек, прямых и плоскостей), удовлетворяющей аксиомам групп I, II, III, IV и

аксиоме 5_1 , нельзя добавить новых точек, прямых и плоскостей таким образом, чтобы полученная система образовывала новую геометрию, удовлетворяющую всем этим аксиомам.

Справедлива теорема, которую иногда называют *аксиомой Кантора*, потому что она эквивалентна аксиоме полноты 5_2 . Прежде чем сформулировать аксиому Кантора, определим понятие «стягивающейся» последовательности отрезков. Бесконечная последовательность отрезков $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ называется *стягивающейся*, если каждый последующий отрезок является частью предыдущего и для любого наперёд заданного отрезка CD найдётся такой номер n , что A_nB_n меньше CD .

Аксиома Кантора. На прямой для всякой стягивающейся последовательности отрезков $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \dots$ существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам одновременно.

Вопрос. Пусть задан отрезок AB . Обозначим через A_1 середину отрезка AB , через A_2 — середину отрезка AA_1 , через A_3 — середину отрезка AA_2 и так далее. Как доказать, что последовательность отрезков AA_n является стягивающейся?

2.6. Непротиворечивость.** Система аксиом Гильберта *непротиворечива*. Это значит, что из неё нельзя логически вывести два взаимно отрицающих друг друга утверждения.

Если в системе аксиом Гильберта заменить аксиому параллельности аксиомой Лобачевского, то получится система аксиом геометрии Лобачевского. Эта система также непротиворечива. Непротиворечивость той или иной системы аксиом доказывается путём построения для неё конкретной модели (или интерпретации).

Вопрос. Как доказать, что прямая, пересекающаяся со всеми сторонами треугольника, обязательно проходит через одну из его вершин?

Контрольные вопросы и задания ■

- 1.** Сформулируйте аксиомы связи.
- 2.** Сформулируйте аксиомы порядка.
- 3.** Сформулируйте аксиомы конгруэнтности. Какие возможности построений предоставляют эти аксиомы?
- 4.** Сформулируйте аксиому параллельности.
- 5.** Сформулируйте аксиому Архимеда.
- 6.** Какая последовательность отрезков называется стягивающейся? Сформулируйте аксиому Кантора.
- 7.** Сформулируйте аксиому полноты.
- 8.** Что означает непротиворечивость системы аксиом?

■ Задачи и упражнения

1.** Дана прямая a и точка A вне её. С помощью аксиом связи докажите, что существует единственная плоскость, на которой лежат прямая a и точка A .

2.** а) Можно ли доказать с помощью аксиом связи, что на прямой найдутся по крайней мере три различные точки?

б) Откуда следует, что на прямой найдутся по крайней мере три различные точки?

3.** Какое наименьшее число точек может содержать плоскость в модели аксиом связи?

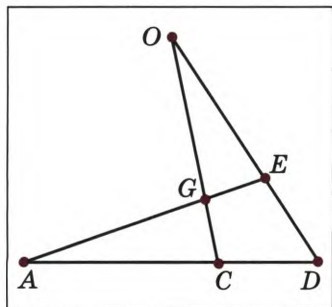


Рис. 9

4.** С помощью аксиом связи и порядка докажите, что если точки A, O, D не лежат на одной прямой и при этом точка C лежит между A и D , точка E лежит между O и D , то существует такая точка G , которая одновременно лежит между A и E и между O и C (рис. 9).

5.** С помощью аксиом связи и порядка докажите, что для любых различных точек A и B существует точка C , которая лежит между A и B .

6.** С помощью аксиом конгруэнтности докажите, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

7.** Угол называется прямым, если он конгруэнтен (или равен) своему смежному углу. С помощью аксиом конгруэнтности докажите, что все прямые углы конгруэнтны между собой.

8.** Докажите, что из аксиом связи, порядка и конгруэнтности выводимы следующие утверждения:

- а) первый и второй признаки равенства треугольников;
- б) через каждую точку A прямой a можно провести перпендикулярную ей прямую, и притом только одну;
- в) каждый отрезок AB можно разделить пополам;
- г) в равнобедренном треугольнике медиана, проведённая к основанию, является биссектрисой и высотой;
- д) внешний угол треугольника больше каждого внутреннего угла, с ним не смежного;
- е) из данной точки на данную прямую можно опустить единственный перпендикуляр;
- ё) два перпендикуляра к одной прямой не пересекаются.

9.** Докажите, что из системы аксиом Гильберта следует пятый постулат Евклида.

10. Докажите, что из аксиом связи, порядка, конгруэнтности и аксиомы параллельности выводимы следующие утверждения:**

а) каждая прямая в пересечении с двумя параллельными прямыми образует равные соответственные углы;

б) сумма внутренних углов любого треугольника равна двум прямым.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Сколько рёбер имеет треугольная пирамида?

- 1) 6 2) 7 3) 8 4) 9

1.2. На сколько частей разделяют пространство плоскости всех граней куба?

- 1) 27 2) 9 3) 16 4) 12

1.3. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость четыре прямые?

- 1) 10 2) 11 3) 12 4) 13

1.4. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость три окружности?

- 1) 6 2) 7 3) 8 4) 9

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из следующих утверждений являются верными?

1) любые три различные точки лежат на одной окружности
2) существуют три различные точки, которые не лежат ни на какой окружности

3) существуют четыре различные точки, которые не лежат ни на какой окружности

4) если четыре различные точки лежат на одной окружности, то такая окружность единственная

2.2. Какие из следующих утверждений являются верными?

1) если три угла одного треугольника равны соответственно трём углам другого треугольника, то такие треугольники подобны

2) если четыре угла одного четырёхугольника равны соответственно четырём углам другого четырёхугольника, то такие четырёхугольники подобны

3) если диагонали одного ромба соответственно пропорциональны диагоналям другого ромба, то такие ромбы подобны

4) если стороны одного параллелограмма соответственно пропорциональны сторонам другого параллелограмма, то такие параллелограммы подобны

2.3. Какие из следующих утверждений являются верными?

1) если сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны, то треугольник прямоугольный

2) если сумма квадратов двух сторон треугольника меньше квадрата третьей стороны, то треугольник тупоугольный

3) если сумма квадратов двух сторон треугольника больше квадрата третьей стороны, то треугольник остроугольный

4) если треугольник прямоугольный, то сумма квадратов двух сторон треугольника равна квадрату третьей стороны

2.4. Какие из следующих утверждений являются верными?

1) прямая параллельна сама себе

2) если на плоскости две прямые параллельны одной прямой, то такие прямые параллельны

3) если на плоскости две прямые перпендикулярны одной прямой, то такие прямые перпендикулярны

4) если на плоскости две прямые перпендикулярны одной прямой, то такие прямые параллельны

■ § 3. АКСИОМЫ ПЕАНО ДЛЯ НАТУРАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

3.1. Система аксиом Пеано.** Аксиоматический метод успешно применяется не только в геометрии, но также и в других разделах математики. Здесь мы продемонстрируем аксиоматический метод в арифметике натуральных чисел.

Натуральные числа возникли как из подсчёта (один, два, три и так далее), так и из перечисления предметов (первый, второй, третий и так далее). Система аксиом для натуральных чисел, которую мы сейчас рассмотрим, отражает эти процессы счёта и перечисления.

Основными понятиями в системе аксиом, предложенной знаменитым итальянским математиком Джузеппе Пеано (1858—1932), являются натуральные числа и основное отношение — «непосредственно следовать».

Система аксиом Пеано состоит из четырёх утверждений:

1. Число 1 есть натуральное число, которое не следует непосредственно ни за каким натуральным числом.

2. Каково бы ни было натуральное число n , существует лишь одно натуральное число n' , которое непосредственно следует за числом n .

3. Каждое натуральное число, отличное от единицы, следует непосредственно лишь за одним натуральным числом.

4. Если некоторое множество M натуральных чисел содержит число 1 и вместе с каждым натуральным числом n содержит непосредственно следующее за ним число n' , то M содержит все натуральные числа.

Аксиома 4 называется *аксиомой математической индукции* и позволяет утверждать, что если некоторое предложение или свойство $P(n)$ справедливо для числа $n = 1$ и для всякого натурального числа k из справедливости $P(k)$ следует справедливость $P(k')$, то $P(n)$ справедливо для всех натуральных чисел.

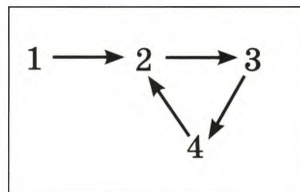


Рис. 1

Это утверждение называется *принципом математической индукции*.

Вопрос. Какие аксиомы Пеано выполняются на множестве натуральных чисел $\{1, 2, 3, 4\}$, в котором отношение «непосредственно следовать» определено стрелками на схеме (рис. 1)?

3.2. Сложение натуральных чисел.** Используя отношение непосредственного следования, определим сложение натуральных чисел.

Сложение есть операция на множестве натуральных чисел, которая любым двум числам x и y сопоставляет такое число $x + y$, что:

- 1) $x + 1 = x'$ для всякого натурального x ;
- 2) $x + y' = (x + y)'$, если число $x + y$ уже определено.

Вследствие данного определения, чтобы прибавить к натуральному числу x число 1, достаточно взять натуральное число, непосредственно следующее за x ; для того чтобы к натуральному числу x прибавить число, непосредственно следующее за y , достаточно к x прибавить y и от числа $x + y$ перейти к непосредственно следующему за ним. Таким образом, сложение натуральных чисел определяется шаг за шагом, то есть по индукции.

В соответствии с определением сложения устанавливаются свойства этой операции. Например, докажем, что $2 + 2 = 4$. В самом деле, по определению имеем: $2 + 1 = 2' = 3$, откуда $2 + 2 = 2 + 1' = (2 + 1)' = 3' = 4$.

Вопрос. Как доказать, что $2 + 3 = 5$?

3.3. Умножение натуральных чисел.** Имея операцию сложения, определим умножение натуральных чисел.

Умножение есть операция на множестве натуральных чисел, которая любым двум числам x и y сопоставляет такое число $x \cdot y$, что:

- 1) $x \cdot 1 = x$ для всякого натурального x ;
- 2) $x \cdot y' = x \cdot y + x$, если число $x \cdot y$ уже определено.

Умножение натуральных чисел тоже определяется шаг за шагом, то есть по индукции.

Вопрос. Как доказать, что $3 \cdot 2 = 6$?

3.4. Ассоциативность сложения.** Перечисленных простейших свойств натуральных чисел и определений сложения и умножения достаточно для доказательства всех свойств натуральных чисел, которыми мы обычно пользуемся. Приведём, например, доказательство ассоциативного закона сложения:

для любых x, y, z справедливо равенство $x + (y + z) = (x + y) + z$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные x и y . Пусть P — свойство натуральных чисел, определённое так: число z обладает свойством P , если $x + (y + z) = (x + y) + z$. Покажем, что все натуральные числа обладают свойством P . Для этого воспользуемся принципом математической индукции.

Сначала проверим, что число 1 обладает свойством P . Действительно, $x + (y + 1) = x + y'$ (по первому условию из определения сложения), $x + y' = (x + y)'$ (по второму условию из определения сложения), а это равно $(x + y) + 1$ (снова по первому условию). Таким образом, число 1 обладает свойством P : $x + (y + 1) = (x + y) + 1$.

Предположим теперь, что некоторое натуральное z обладает свойством P , то есть $x + (y + z) = (x + y) + z$. Покажем, что тогда и непосредственно следующее за ним число z' также обладает свойством P :

$$\begin{aligned} & x + (y + z') \quad \underline{\underline{\text{(по пункту 2 определения сложения)}}} \\ &= x + (y + z)' \quad \underline{\underline{\text{(по пункту 2 определения сложения)}}} \\ &= (x + (y + z))' \quad \underline{\underline{\text{(так как } z \text{ обладает свойством } P)}} \\ &= ((x + y) + z)' \quad \underline{\underline{\text{(по пункту 2 определения сложения)}}} \\ &= (x + y) + z'. \end{aligned}$$

Следовательно, число z' обладает свойством P .

Итак, мы доказали, что если число 1 обладает свойством P и если любое натуральное число z обладает свойством P , то и непосредственно следующее за ним число z' также обладает этим свойством. По четвёртой аксиоме Пеано свойство P справедливо для любого натурального числа, то есть для всех натуральных чисел z выполняется равенство $x + (y + z) = (x + y) + z$. Ввиду того что зафиксированные ранее натуральные числа x и y были произвольными, равенство $x + (y + z) = (x + y) + z$ выполняется для любых натуральных чисел x, y и z . Утверждение доказано.

Вопрос. Как с помощью ассоциативного закона доказать, что $117 + 3 = 115 + 5$?

3.5. Коммутативность сложения.** В этом пункте мы установим закон коммутативности сложения натуральных чисел:

для любых x и y справедливо равенство $x + y = y + x$.

Предварительно докажем вспомогательное утверждение: для любого натурального числа x справедливо равенство $x + 1 = 1 + x$. Снова воспользуемся методом математической индукции.

Сначала проверим, что это свойство выполнимо для $x = 1$. Действительно, в данном случае $x + 1 = 1 + 1$ и $1 + x = 1 + 1$.

Предположим теперь, что свойство $x + 1 = 1 + x$ выполнимо для некоторого натурального x , и докажем, что оно справедливо для x' . В самом деле,

$$\begin{aligned} x' + 1 & \underline{\underline{\text{(по пункту 1 определения сложения)}}} \\ & = (x')' \underline{\underline{\text{(по пункту 1 определения сложения)}}} \\ & = (x + 1)' \underline{\underline{\text{(используем предположение } x + 1 = 1 + x)}} \\ & = (1 + x)' \underline{\underline{\text{(по пункту 2 определения сложения)}}} \\ & = 1 + x'. \end{aligned}$$

По принципу математической индукции равенство $x + 1 = 1 + x$ доказано для всех натуральных x .

Теперь приступим к доказательству закона коммутативности в общем случае: $x + y = y + x$.

Доказательство. Для $y = 1$ это утверждение только что было доказано. Допустим, что наше утверждение верно при некотором y . Тогда для y' мы имеем:

$$\begin{aligned} x + y' & \underline{\underline{\text{(по пунктам 1 и 2 определения сложения)}}} \\ & = (x + y) + 1 \underline{\underline{\text{(по предположению } x + y = y + x)}} \\ & = (y + x) + 1 \underline{\underline{\text{(из ассоциативности сложения)}}} \\ & = y + (x + 1) \underline{\underline{\text{(по свойству } x + 1 = 1 + x)}} \\ & = y + (1 + x) \underline{\underline{\text{(из ассоциативности сложения)}}} \\ & = (y + 1) + x \underline{\underline{\text{(по пункту 1 определения сложения)}}} \\ & = y' + x. \end{aligned}$$

По принципу математической индукции равенство $x + y = y + x$ доказано для всех натуральных x и y .

Вопрос. Как доказать, что $(x + y) + z = (z + y) + x$?

3.6. Об основных свойствах других операций над натуральными числами.** Доказав основные свойства сложения натуральных чисел, можно аналогично установить основные свойства операции умно-

жения, определить степень с натуральным показателем, вывести другие привычные нам свойства натуральных чисел.

Вопрос. Как для натуральных чисел определить неравенство $x > y$?

■ Контрольные вопросы и задания

- 1.** Сформулируйте аксиомы Пеано.
- 2.** Докажите ассоциативность сложения.
- 3.** Докажите коммутативность сложения.

■ Задачи и упражнения

- 1.** Докажите дистрибутивный закон: $x(y + z) = xy + xz$.
- 2.** Используя свойства операции сложения, докажите коммутативность умножения.
- 3.** Докажите ассоциативность умножения.
- 4.** Положим $x > y$, если найдётся такое натуральное число z , что $x = y + z$. Докажите, что:
 - а) если $x > y$ и $y > z$, то $x > z$;
 - б) если $x > y$, то $x + z > y + z$ для любого z .
- 5.** Определите операцию вычитания меньшего натурального числа из большего натурального числа.
- 6.** Докажите, что $x - (y - z) = (x - y) + z$, если определены $x - y$ и $y - z$.
- 7.** Докажите, что каждое натуральное число можно единственным способом представить в виде $a_0 + 10 \cdot a_1 + 10^2 \cdot a_2 + \dots + 10^k \cdot a_k$, где a_k — натуральное число, меньшее 10, а каждое из чисел a_0, a_1, \dots, a_{k-1} либо равно нулю, либо является натуральным числом, меньшим 10; k — либо 0, либо натуральное число.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какое из следующих равенств является верным, если $y = x'$, $z = y'$?

- 1) $x + z = (2x)'$
- 2) $(x + z)' = 2z$
- 3) $x + z = 2y$
- 4) $(x + z)' = 2y$

1.2. Какое из следующих равенств является верным, если $y = x'$, $z = y'$?

- 1) $xz = (x^2)'$
- 2) $(xz)' = z^2$
- 3) $xz = y^2$
- 4) $(xz)' = y^2$

1.3. Чему равна сумма всех натуральных чисел, меньших 100 и делящихся на 3?

- 1) 1683
- 2) 1693
- 3) 1703
- 4) 1713

1.4. Чему равно 3^{11} , если известно, что $3^{10} = 59\,049$?

- 1) 167 127 2) 167 137 3) 177 127 4) 177 147

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из следующих равенств верны для любых натуральных a и b при условии, что вычитание натуральных чисел определено в случае, когда уменьшаемое больше вычитаемого?

- $$\begin{array}{ll} 1) (a+b)-a=b & 2) (a-b)+b=a \\ 3) (a+b+1)-1=(a+1)+(b-1) & 4) (a+b)-1=a+(b-1) \end{array}$$

2.2. Какие из следующих равенств верны для любых натуральных a , b и c ?

- $$\begin{array}{ll} 1) a \cdot (b - c) + ac = ab & 2) (a - b)(a - c) + a(b + c) = a^2 + bc \\ 3) a \cdot (b + c) - ab = ac & 4) (a + b)(a + c) - a(b + c) = a^2 + bc \end{array}$$

2.3. В каких рассуждениях применяется свойство ассоциативности натуральных чисел?

- 1) $19 + 21 = 19 + (20 + 1) = (19 + 1) + 20 = 20 + 20$
- 2) $37 + 2 = 37 + (1 + 1) = (37 + 1) + 1 = 38 + 1$
- 3) $17 + (1 + 5) = (17 + 1) + 5 = 18 + 5$
- 4) $(20 + 1) + (20 - 1) = 20 + 20 + (1 - 1) = 20 + 20$

2.4. Числа Фибоначчи определяются по правилу: $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ при всех $n \geq 1$. Какие из приведённых равенств являются верными?

- $$\begin{array}{ll} 1) u_{n+3} = 2u_{n+1} + u_n & 2) u_{n+4} = 3u_{n+1} + 2u_n \\ 3) u_{n+5} = 4u_{n+1} + 3u_n & 4) u_{n+6} = 8u_{n+1} + 5u_n \end{array}$$

§ 4. ЛОГИЧЕСКИЕ ПАРАДОКСЫ ■

4.1. Парадокс кучи. Рассмотрим некоторые предложения (парадоксы), которые показывают, что наше понимание мира невозможно во всей полноте отразить в строгих математических и логических понятиях. Под парадоксом будем понимать рассуждение, кажущееся правильным, но приводящее тем не менее к противоречию.

Парадокс кучи. Этот парадокс был известен ещё в древности. Вот его формулировка: «Одна песчинка не может образовать кучи. Если какое-то количество песчинок не образует кучи, то добавление к этому количеству ещё одной песчинки не превратит его в кучу».

Из приведённых утверждений можно сделать вывод, что, начиная с одной песчинки и добавляя последовательно по одной песчинке, мы вроде бы никогда не получим кучу песка. Однако мы все знаем, что кучи песка существуют.

Парадоксальность ситуации состоит в том, что наше интуитивное представление о куче песка противоречит приведённому здесь математическому определению того, что некоторое количество песчинок «не образует кучи».

Вопрос. Сколько песчинок помещается в 1 м^3 , если в 1 мм^3 помещается 100 песчинок?

4.2. Парадокс брадобрея.** Рассмотрим известный *парадокс брадобрея*. «Совет одной деревни издал указ о том, что деревенский брадобрей (при этом оговаривается, что он единственный брадобрей в этой деревне) должен брить всех мужчин деревни, которые не бреются сами, и только этих мужчин. Спрашивается, кто же будет брить брадобрея?»

Если брадобрей себя не бреет, то он относится к тем, кто не бреется сам. Тогда, согласно указу, он должен брить себя.

Если же брадобрей всё-таки бреет себя, то он бреется сам. Следуя указу, он не должен брить себя.

Чтобы указ не был противоречивым, достаточно принять дополнительное условие о неприменимости указа к деревенскому брадобрею как объекту для бритья.

Вопрос. Можно ли считать истинными или ложными надписи на обеих сторонах бумажного листка, если на одной стороне бумажного листка написано: «Утверждение на обороте верно», на другой стороне листка написано: «Утверждение на обороте ложно»?

4.3. Парадокс лжеца.** Рассмотрим *парадокс лжеца*. «Некто говорит: „Я — лжец“. Можно ли отсюда сделать вывод, правдивый он человек или нет?»

Предположим, что этот Некто сказал правду. Но тогда высказывание «Я — лжец» истинно и Некто следует считать лжецом. Но лжец не мог сказать правду, что он лжец.

Предположим, что рассматриваемый Некто сказал неправду, то есть ложь. В этом случае фраза «Я — лжец» является ложным высказыванием. Значит, Некто не лжец, но это противоречит предположению, что Некто лжец.

К словам «Я — лжец», взятым вне связи с конкретным объектом, о котором лжёт сказавший слова «Я — лжец», неприложимы понятия истинности или ложности. Парадокс показывает существование повествовательного предложения, о котором нельзя однозначно сказать, является ли оно истинным или ложным.

Вопрос. Является ли предложение: «Я — не лжец» — парадоксом?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Что такое логический парадокс?
2. Сформулируйте парадоксы: а) кучи; б)** брадобрея; в)** лжеца.

Задачи и упражнения ■

1.** Объясните, почему следующие предложения являются парадоксами.

а) «Может ли всесокрушающее пушечное ядро сокрушить несокрушимый столб?»

б) «У всякого правила есть исключение».

2.** Крокодил украл ребёнка, но обещал вернуть его отцу, если тот отгадает, вернёт ли ему крокодил ребёнка. Что следует сказать отцу, чтобы перед крокодилом встала неразрешимая проблема?

3.** Миссионер, оказавшийся среди людоедов, обнаружил, что он попал как раз к обеду. Туземцы разрешили ему произнести какое-нибудь утверждение с условием, что если оно окажется истинным, то его зажарят, а если оно окажется ложным, то его сварят. Что надо сказать миссионеру, чтобы перед туземцами возникла неразрешимая задача?

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. При каком значении a уравнение $(a^2 - 1)x + 2 = a^2 - a$ имеет бесконечно много решений?

- 1) $a = -2$ 2) $a = -1$ 3) $a = 1$ 4) $a = 2$

1.2. Сколько существует не равных между собой треугольников, у которых две стороны равны 1 и 2 и какой-то из углов равен 30° ?

- 1) один 2) два 3) три 4) четыре

1.3. При каком значении a уравнение $x^4 + ax^2 + a^2 = 1$ имеет три различных действительных корня?

- 1) $a = -2$ 2) $a = -1$ 3) $a = 1$ 4) $a = 2$

1.4. Сколько существует различных треугольников, у которых синусы двух углов равны $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$?

- 1) только один 2) два 3) три 4) бесконечно много

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. На какие из указанных цифр может оканчиваться четвёртая степень натурального числа?

- 1) 3 2) 4 3) 5 4) 6

2.2.** Сколько действительных решений может иметь уравнение вида $(x^2 + bx + c)^2 + (x^2 + px + k)^2 = 0$ при $c \neq k$?

- 1) ни одного 2) одно 3) два 4) четыре

2.3. В треугольнике, площадь которого равна $\frac{\sqrt{3}}{2}$, две стороны равны 1

и 2. Какие значения может иметь длина третьей стороны?

- 1) $\sqrt{3}$ 2) 2 3) $\sqrt{5}$ 4) $\sqrt{7}$

2.4. Сколько общих касательных могут иметь две окружности?

- 1) одну 2) две 3) три 4) четыре

■ Мини-исследования к главе

Мини-исследование 1

Пусть P обозначает множество положительных действительных чисел. В качестве исходных свойств упорядочения в множестве действительных чисел примем следующие:

1. Для всякого действительного числа x либо $x \in P$, либо $x = 0$, либо $-x \in P$, и эти три возможности взаимно исключают друг друга.

2. Если $x, y \in P$, то $x + y \in P$ и $xy \in P$.

По определению $x < y$ (или $y > x$) означает, что $x - y \in P$.

- Докажите, что если $x \in P$ и $-y \in P$, то $-xy \in P$ (то есть произведение положительного и отрицательного чисел отрицательно).
- Докажите, что произведение двух отрицательных чисел положительно.
- Докажите, что если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$.
- Попробуйте установить остальные стандартные свойства неравенств, в частности, если $a > b$ и $a, b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
- Как доказывать стандартные свойства нестрогих неравенств?

Глава 2

НАЧАЛА СТЕРЕОМЕТРИИ



В этой главе приводятся примеры пространственных фигур, рассматриваются основные понятия стереометрии и формулируются аксиомы, из которых вытекают все последующие свойства пространства. В последнем параграфе разбираются некоторые свойства пирамид.

§ 1. ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ФИГУРЫ ■

1.1. О геометрических фигурах. В течение нескольких лет вами изучались геометрические свойства фигур, расположенных на плоскости. При этом каждую геометрическую фигуру мы рассматривали как некоторое множество точек, отвлекаясь от реальной физической природы этой фигуры. Например, нам было неважно, где изображён равносторонний треугольник: на странице учебника, на листе тетради или на доске. Известные вам геометрические свойства равностороннего треугольника совсем не зависят от того, где изображён этот треугольник.

Аналогично пространственные геометрические фигуры рассматривают как некоторые множества точек пространства. Например, если посмотреть на обыкновенную комнату, не обращая внимания на окна, двери, плинтусы и так далее, то можно считать, что такая комната представляет собой некоторую пространственную фигуру (рис. 1). Такая пространственная фигура называется *прямоугольным параллелепипедом*.

Прямоугольный параллелепипед ограничивают шесть граней, каждая из которых является прямоугольником. Куб — это прямоугольный параллелепипед, у которого все грани квадраты.

Куб и прямоугольный параллелепипед мы будем использовать для иллюстрации изучаемых понятий и свойств в пространстве.

Вопрос. Какие свойства куба вы знаете?

1.2. О чертежах. Мир пространственных фигур многообразен. Например, автомобиль делают из множества деталей. Каждая из них является пространственной фигурой. Для практики большое значение имеют рабочие чертежи, по которым мастер

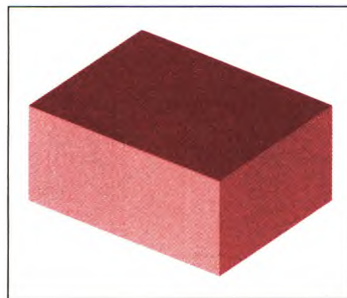


Рис. 1

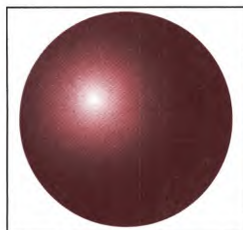


Рис. 2

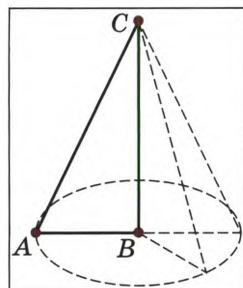


Рис. 3



Рис. 4

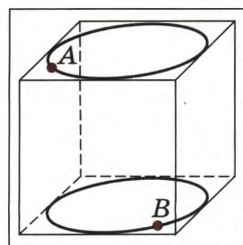


Рис. 5

способен изготовить нужную деталь. Эти чертежи делают на основе свойств, которые выявляются при изучении геометрии пространства.

Вопрос. Что вы знаете о параллельности на плоскости?

1.3. Примеры фигур в пространстве. Пространственные фигуры часто задают описанием свойств их точек.

Пример 1. Выберем некоторое положительное число r и некоторую точку F пространства. Определим пространственную фигуру S как множество всех точек пространства, удалённых от F на расстояние r . Напомним, что фигура S называется *сферой* (рис. 2).

Пример 2. Возьмём прямоугольный треугольник ABC с катетами AB и BC (рис. 3). Определим пространственную фигуру V как множество всех точек пространства, которые получаются из точек треугольника ABC его вращением вокруг прямой BC . Такую фигуру V называют *конусом* (рис. 4).

Пример 3. Выберем в пространстве две окружности, расположенные в противоположных гранях куба. Отметим на одной окружности точку A , на другой — точку B , как указано на рис. 5. После этого для произвольной точки N верхней окружности отметим точку M на нижней окружности так, чтобы длины дуг AN и BM , измеренные против хода часовой стрелки, были равны (рис. 6). Соединив отрезками всевозможные пары точек N и M , получим поверхность, изображённую на рис. 7. Эта поверхность является частью пространственной фигуры, которая называется *однополостным гиперboloидом* (рис. 8). Описанный способ построения такой поверхности из отрезков широко применяется на практике. Например, знаменитая телевизионная башня Шухова в Москве построена из сегментов гиперболической поверхности с использованием прямых балок.

Заметим, что если точки A и B в примере 3 выбирать симметричными относительно центра куба, то в результате построения получатся боковые поверхности двух конусов (рис. 9).

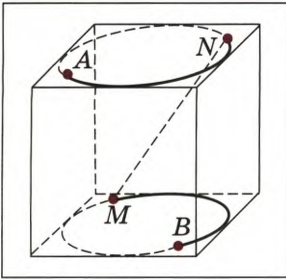


Рис. 6

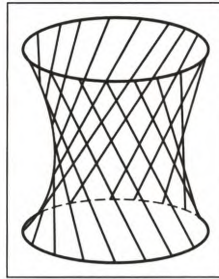


Рис. 7

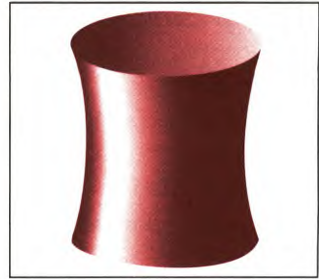


Рис. 8

Вопрос. При каком выборе точек A и B в примере 3 получится боковая поверхность цилиндра?

1.4. Параллельность прямых в пространстве. Наблюдая пространственные фигуры, мы можем высказывать предположения об их геометрических свойствах. Но для того чтобы быть уверенным в выполнении замеченного свойства, необходимо найти его доказательство. Каждое доказательство опирается на другие уже известные свойства пространственных фигур. Таким способом можно находить всё новые и новые свойства.

Пример 4. Сначала приведём определение параллельности прямых в пространстве и одно свойство, которые потребуются в рассуждениях.

Две различные прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

В дальнейшем будет доказано, что если каждая из двух прямых a и b параллельна прямой c , то прямые a и b также параллельны.

Рассмотрим куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 10).

Пусть точка M — середина ребра $A_1 B_1$, точка N — середина ребра $B_1 C_1$, точка L на ребре AD и точка K на ребре CD расположены так, что $AL = \frac{1}{4}AD$, $CK = \frac{1}{4}CD$. Докажем, что прямые MN и KL параллельны.

Доказательство. Сначала установим, что $AC \parallel A_1 C_1$. Так как грани куба — квадраты, в грани $AA_1 B_1 B$ получаем, что $AA_1 \parallel BB_1$ и $AA_1 = BB_1$. Аналогично, в грани $BB_1 C_1 C$ получаем, что $BB_1 \parallel CC_1$ и $BB_1 = CC_1$. Следо-

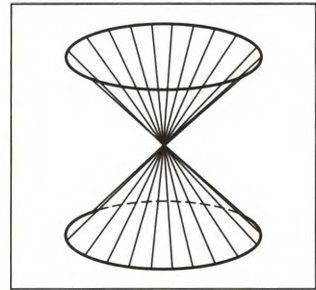


Рис. 9

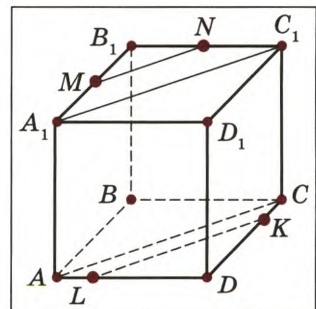


Рис. 10

вательно, $AA_1 \parallel CC_1$ и $AA_1 = CC_1$. Значит, отрезки AA_1 и CC_1 лежат в одной плоскости, параллельны и равны. Поэтому четырёхугольник AA_1C_1C — параллелограмм, откуда вытекает, что $AC \parallel A_1C_1$.

Рассмотрим верхнюю грань $A_1B_1C_1D_1$. Из условия следует, что в треугольнике $A_1B_1C_1$ отрезок MN является средней линией, а поэтому $MN \parallel A_1C_1$. Но так как $A_1C_1 \parallel AC$, заключаем, что $MN \parallel AC$.

Теперь рассмотрим нижнюю грань. Из условия следует, что $DL : DA = DK : DC$. Поэтому треугольники DLK и DAC подобны по второму признаку подобия. Отсюда вытекает, что $\angle CAD = \angle KLD$. Значит, по соответствующему признаку, $AC \parallel LK$. Но так как мы уже показали, что $MN \parallel AC$, то $MN \parallel LK$, что и требовалось доказать.

Вопрос. Как доказать, что прямые MK и NL (рис. 10) пересекаются в пространстве?



Рис. 11

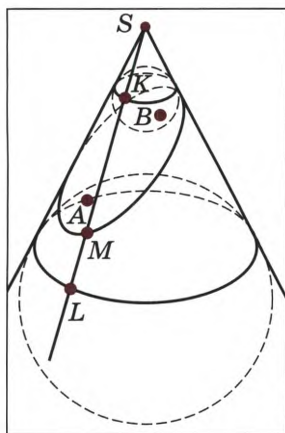


Рис. 12

1.5. Коническое сечение.** Разберём более сложный пример. Будем говорить, что плоскость и сфера (или прямая и сфера) касаются друг друга, если они имеют ровно одну общую точку. Сфера, имеющая общие точки с боковой поверхностью конуса, называется касающейся этой боковой поверхности, если все прямые, проходящие через вершину конуса и точку на границе основания конуса, касаются данной сферы. Предположим, что известны следующие свойства:

1) если к сфере из одной точки проведены отрезки касательных, то эти отрезки равны;

2) если конус пересечён плоскостью, как показано на рис. 11, то можно построить две сферы, каждая из которых касается боковой поверхности конуса (или её продолжения) по окружности и касается плоскости в некоторой точке;

3) на плоскости множество всех точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек A и B постоянна, является эллипсом с фокусами A и B .

Используя перечисленные свойства, докажем, что при пересечении конуса с плоскостью α получается эллипс, если плоскость проводится так, как указано на рис. 11.

Доказательство. Построим две сферы, касающиеся боковой поверхности конуса и секущей плоскости в точках A и B (рис. 12).

Если из вершины S конуса по его поверхности провести произвольный луч, то он будет касаться меньшей сферы в некоторой точке K , а большей сферы — в некоторой точке L . По свойству касательных к сфере длины отрезков SK и SL не зависят от выбора луча, поэтому длина отрезка KL также не зависит от луча.

Пусть луч SL пересекает плоскость α в точке M . Тогда MB и MK являются отрезками касательных, проведённых из точки M к меньшей сфере, поэтому $MB = MK$. Аналогично получаем равенство $MA = ML$. Следовательно, $MA + MB = MK + ML = KL$. Так как длина отрезка KL не зависит от проведённого луча, для каждой точки M , принадлежащей пересечению плоскости α с боковой поверхностью конуса, сумма $MA + MB$ постоянна.

Отсюда вытекает, что все точки пересечения плоскости α с боковой поверхностью конуса лежат на одном эллипсе с фокусами A и B .

Вопрос. Как доказать, что в пересечении плоскости α с конусом на рис. 11 получаются все точки указанного эллипса?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Что называется пространственной фигурой?
2. Что такое куб?
3. Какие свойства куба вы знаете?
4. Приведите примеры предметов, которые имеют форму прямоугольного параллелепипеда.
5. Как вычислить объём прямоугольного параллелепипеда, если известны длины трёх рёбер, исходящих из одной вершины?
6. Что называется сферой радиуса r ?
7. Как в пространстве можно представить конус?
8. ** Как в пространстве можно представить однополостной гиперболоид?
9. В каком случае две прямые в пространстве называются параллельными?
10. * Какое свойство параллельности прямых в пространстве использовалось в данном параграфе?
11. ** Каким свойством обладают касательные к сфере, проведённые из одной точки?
12. ** Сформулируйте определение эллипса.

Задачи и упражнения ■

1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Докажите, что прямые AB_1 и DC_1 параллельны.

2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Точки M и N — соответственно середины рёбер CC_1 и DD_1 . Докажите, что прямые BM и AN параллельны.

3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Точки M и N — соответственно середины рёбер $A_1 B_1$ и CD . Докажите, что прямые DM и $B_1 N$ параллельны.

4. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Его разрезали по плоскости $AA_1 C_1 C$ на две фигуры.

а) Что можно сказать об этих фигурах?

б) Как, зная объём параллелепипеда, найти объём каждой из получившихся фигур?

5.* Вспомнив определение сферы, дайте определение шара.

6.* Покажите, что расстояние между любыми двумя точками шара радиуса r не превосходит $2r$.

7.* Какая фигура получится в результате вращения произвольного (не обязательно прямоугольного) треугольника ABC вокруг прямой BC ?

8. Какая фигура получится при вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг стороны BC ?

9.** Какая фигура получится при вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг диагонали AC ?

10. Какая фигура получится при вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой MN , параллельной стороне BC и не пересекающей сторону AB ?

11. Какая фигура получится при вращении окружности вокруг диаметра?

12. Какая фигура получится при вращении круга вокруг диаметра?

13.* Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Точки M и N — центры граней $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$. Объясните, почему при вращении отрезка AB_1 вокруг прямой MN получится часть однополостного гиперболоида.

14. Приведите пример двух прямых в пространстве, которые не пересекаются и не параллельны.

15. Почему на плоскости любые две несовпадающие прямые либо пересекаются, либо параллельны?

16.** В каком случае сечение конуса плоскостью будет кругом?

17.** В каком случае при сечении боковой поверхности конуса плоскостью получается два пересекающихся отрезка?

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 9$, $AC = 10$, $BC = 11$ вписанная окружность касается стороны AC в точке M . Чему равна длина отрезка AM ?

- 1) 3 2) 3,5 3) 4 4) 4,5

1.2. Чему равен радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник со сторонами 5, 12 и 13?

- 1) 1,5 2) 2 3) 2,5 4) 3

1.3. Сколько рёбер имеет прямоугольный параллелепипед?

- 1) шесть 2) восемь 3) десять 4) двенадцать

1.4. Какая фигура получается при вращении прямоугольного треугольника вокруг катета?

- 1) сфера 2) конус 3) цилиндр 4) шар

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Окружность с центром O касается сторон угла с вершиной S в точках A и B . Какие из приведённых свойств выполняются?

- 1) $SA = SB$ 2) $\angle ASO = \angle BSO$
3) $\angle AOS = \angle BOS$ 4) $\angle SAO + \angle SBO = 180^\circ$

2.2. Треугольник со сторонами 4, 5, 6 подобен треугольнику, у которого одна из сторон равна 60. Какие из приведённых значений не могут быть длинами сторон второго треугольника?

- 1) 45 2) 64 3) 72 4) 75

2.3. Какими из перечисленных свойств обладает куб?

- 1) имеет 6 граней 2) имеет 6 вершин
3) имеет 12 рёбер 4) все грани куба квадраты

2.4. Какие прямые в пространстве являются параллельными?

- 1) прямые, не имеющие общей точки
2) прямые, лежащие в одной плоскости и параллельные на ней
3) непересекающиеся прямые, лежащие в одной плоскости
4) прямые, лежащие в одной плоскости

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ СТЕРЕОМЕТРИИ ■

2.1. Что такое стереометрия. Раздел математики, посвящённый изучению фигур в пространстве, называется *стереометрией*. В стереометрии свойства фигур устанавливаются на основе определений и доказа-

зательств. Каждое доказательство использует некоторые ранее установленные свойства. Примеры таких доказательств приводились в первом параграфе. Исходным моментом при построении курса стереометрии являются те основные понятия и утверждения, которые принимаются без всяких обоснований и из которых путём логических рассуждений выводятся все последующие свойства. Напомним, что утверждение, которое принимается без доказательства, называют аксиомой или постулатом.

Вопрос. Какое утверждение называют аксиомой параллельности?

2.2. Об аксиомах. Обычно при построении той или иной теории стараются вводить как можно меньше аксиом. Однако последовательное изложение теории на основе минимального числа аксиом может оказаться сложным. Поэтому иногда для удобства в качестве аксиом выбирают больше утверждений, чем это нужно на самом деле, лишь бы они не противоречили друг другу. В данном учебнике рассматривается избыточная система аксиом геометрии, которая равносильна системе аксиом Гильберта.

Вопрос. В каких аксиомах Гильберта используется понятие плоскости?

2.3. Основные понятия стереометрии. Основными объектами стереометрии являются *точки, прямые, плоскости и пространство*. Эти объекты никак не определяются, а взаимосвязь между ними описывается системой аксиом, приведённой в данной главе. Зрительные образы, связанные с точками, прямыми и плоскостями, мы заимствуем из окружающего нас мира.

Изучая планиметрию, мы говорили, что наглядное представление о плоскости дают, например, лист бумаги или поверхность стола, если вообразить их неограниченно продолженными. Точно так же представление о прямой дают натянутый шнур или след карандаша на бумаге при проведении отрезка с помощью линейки, если вообразить их неограниченно продолженными. Изображениями точек являются, например, маленькая песчинка на столе или след на бумаге, оставленный остриём циркуля. Эти зрительные образы очень важны, так как позволяют наглядно представлять свойства пространственных фигур.

Вопрос. Как в кубе указать две прямые, которые не лежат в одной плоскости?

2.4. Аксиома плоскости. Перечислим те свойства точек, прямых и плоскостей в пространстве, которые далее будем считать аксиомами.

I. В пространстве существуют плоскости. В каждой плоскости выполняются все утверждения планиметрии.

Рассмотрим, например, куб на рис 1. В плоскости, где расположено основание куба, можно выделить квадрат $ABCD$, провести биссектрисы его углов, найти точку M пересечения этих биссектрис, опустить перпендикуляр MP к стороне AD , построить окружность с центром в точке M и радиусом MP . Из свойств планиметрии следует, что эта окружность касается всех сторон квадрата $ABCD$.

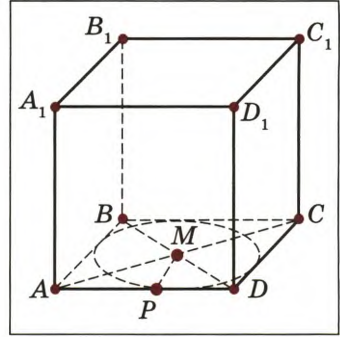


Рис. 1

Вопрос. Как вычислить площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда?

2.5. Аксиомы связи. В пространстве связь между прямыми и плоскостями определяется следующими аксиомами.

II. Если две различные точки прямой принадлежат плоскости, то и все точки данной прямой принадлежат этой плоскости.

III. Через каждую прямую пространства проходит бесконечное множество различных плоскостей.

IV. Через каждые три точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость.

Используя перечисленные аксиомы, докажем, что через любые две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

Доказательство. Пусть прямые a и b пересекаются в точке A . Выберем на прямой a точку M , отличную от A , а на прямой b — точку N , отличную от A . Точки A , M и N не лежат на одной прямой, следовательно, по аксиоме IV, существует единственная плоскость α , содержащая эти три точки. Так как точки A и M прямой a принадлежат плоскости α , вся прямая a лежит в плоскости α по аксиоме II. Аналогично вся прямая b также принадлежит плоскости α . Тем самым доказано существование плоскости, содержащей прямые a и b .

Единственность искомой плоскости можно доказать так. Каждая плоскость β , содержащая прямые a и b , должна содержать точки A , M и N , которые определяли плоскость α . По аксиоме IV через точки A , M и N проходит единственная плоскость. Следовательно, плоскости β и α совпадают.

Вопрос. Как доказать, что в пространстве через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость?

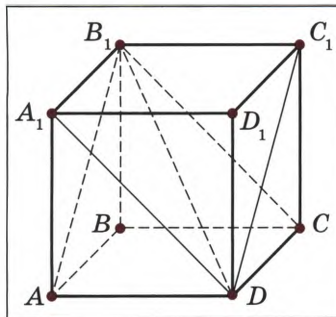


Рис. 2

Пример 1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рассмотрим плоскости AB_1C_1D и A_1B_1CD (рис. 2). Точки D и B_1 — общие для этих плоскостей. Поэтому данные плоскости пересекаются по прямой B_1D .

Вопрос. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой m , а прямая n плоскости β не пересекается с прямой m . Как доказать, что плоскость α и прямая n не пересекаются?

2.7. Пространство. Из аксиомы III следует, что в пространстве вне каждой плоскости существуют точки. Подобно свойству прямой на плоскости, каждая плоскость делит множество всех точек пространства, не принадлежащих этой плоскости, на два *полупространства*.

VI. Каждая плоскость α делит множество не принадлежащих ей точек пространства на две части, называемые *полупространствами с границей α* . Отрезок с концами в одном полупространстве не пересекает плоскость α , а отрезок с концами в разных полупространствах пересекает плоскость α .

Иногда, рассматривая полупространство с границей α , эту границу присоединяют к полупространству.

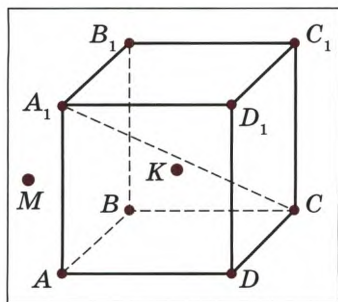


Рис. 3

2.6. Пересечение плоскостей. Связь между плоскостями в пространстве определяется следующей аксиомой.

V. Если две различные плоскости содержат общую точку, то их общая часть есть прямая.

Из этой аксиомы следует, что для построения пересечения двух плоскостей достаточно найти две их общие точки. Прямая, проходящая через эти две точки, является искомым пересечением.

С помощью аксиомы VI для некоторых пространственных фигур можно определить понятия внутренних и внешних точек.

Пример 2. Рассмотрим куб на рис. 3. Точку M называют расположенной вне куба (внешней), если найдётся такая плоскость α , что все вершины куба лежат в одном полупространстве с границей α , а точка M — в другом. Соответственно точку K называют лежащей внутри куба (внутренней), если эта точка не лежит ни на одной из граней и не лежит вне

куба. Например, концы отрезка A_1C лежат на поверхности куба, а все остальные точки этого отрезка — внутри.

Вопрос. Как доказать, что две различные пересекающиеся плоскости делят на четыре части множество всех точек пространства, не принадлежащих этим плоскостям?

2.8. Равенство фигур в пространстве. В пространстве с помощью равенства отрезков можно определить понятие равенства фигур. А именно: две фигуры называются *равными*, если можно установить такое соответствие между точками этих фигур, при котором расстояния между точками одной фигуры равны расстояниям между соответствующими точками другой.

Пример 3. Выберем в пространстве точки O , A, B, C , не лежащие в одной плоскости. Построим на прямых OA , OB и OC соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что $OA_1 = OA$, $OB_1 = OB$, $OC_1 = OC$. Соединим точки отрезками, как указано на рис. 4. Тогда между точками фигуры F , состоящей из отрезков OA , OB , OC , AB , BC , AC , и точками фигуры F_1 , состоящей из отрезков OA_1 , OB_1 , OC_1 , A_1B_1 , B_1C_1 , A_1C_1 , можно установить соответствие по следующему правилу: каждой точке M фигуры F соответствует такая точка M_1 фигуры F_1 , что O — середина отрезка MM_1 . При этом соответствии расстояния между двумя точками фигуры F и двумя соответствующими точками фигуры F_1 равны.

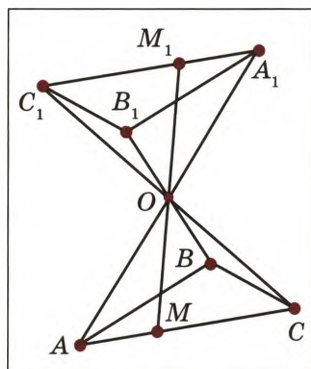


Рис. 4

Для треугольников, рассматриваемых в пространстве, справедливы признаки равенства треугольников, совпадающие по формулировке с первым, вторым и третьим признаком равенства треугольников, расположенных в одной плоскости.

Вопрос. Как доказать равенство расстояний между парами соответствующих точек фигур F и F_1 из примера 3?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Как называются утверждения, которые принимают без доказательства?
2. Приведите примеры аксиом геометрии.
3. Какие объекты являются основными в стереометрии?
4. В чём отличие между основными объектами стереометрии и планиметрии?
5. Приведите примеры наглядного представления о плоскости.

6. Приведите примеры наглядного представления о прямой.
7. Сформулируйте первую аксиому стереометрии, определяющую свойства каждой плоскости пространства.
8. Сформулируйте аксиомы, определяющие связи между плоскостями и точками в пространстве.
9. Сформулируйте аксиомы, определяющие связь между плоскостями и прямыми в пространстве.
10. Докажите, что через любые две различные пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.
11. Сформулируйте аксиому о пересечении плоскостей. Поясните, почему две плоскости в пространстве не могут содержать ровно одну общую точку.
12. Что такое полупространство?
13. Как определяются внутренние точки куба?
14. Как можно определить равенство фигур в пространстве?

■ Задачи и упражнения

1. Пусть точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Сколько различных плоскостей можно провести, которые содержат по три из этих точек?
2. Пусть точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AB и CD не пересекаются.
3. Известно, что точки A, B, C, D лежат на пересечении различных плоскостей α и β . Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной прямой.
4. Даны две плоскости, которые пересекаются по прямой AB . Известно, что прямая CD лежит на первой плоскости и пересекается со второй плоскостью. Докажите, что прямые AB и CD пересекаются.
5. Даны точка A и прямая CB . Пусть M — любая точка на прямой CB . Докажите, что все прямые AM лежат в одной плоскости.
- 6.* Даны две пересекающиеся прямые AB и AC . Пусть точка M — любая точка на прямой AB , а точка N — любая точка на AC . Докажите, что все прямые MN лежат в одной плоскости.
7. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Используя понятие параллельности прямых в пространстве и свойства из параграфа 1, докажите, что плоскость $AA_1 C_1$ проходит через точку C .
8. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Найдите прямую пересечения плоскостей $AA_1 C_1 C$ и $BB_1 D_1 D$.
9. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 . Найдите прямую пересечения плоскостей $AB_1 C_1 D$ и $B_1 C D_1$.

10. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 . Найдите прямую пересечения плоскостей AB_1C и BC_1D .

11.* Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 . Точка M — середина ребра CD . Найдите прямую пересечения плоскостей BC_1D и AMC_1 .

12.* Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 рёбра AB и C_1D_1 равны.

13. Докажите, что диагонали граней куба равны между собой.

14. Докажите, что диагонали противоположных граней прямоугольного параллелепипеда равны между собой.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какая фигура является общей частью двух различных плоскостей, содержащих общую точку?

- 1) отрезок 2) прямая 3) точка 4) луч

1.2. В каком случае через три точки пространства может проходить более одной плоскости?

- 1) точки являются вершинами остроугольного треугольника
2) точки являются вершинами тупоугольного треугольника
3) точки являются вершинами прямоугольного треугольника
4) точки не являются вершинами треугольника

1.3. Сколько всего диагоналей можно провести во всех гранях прямоугольного параллелепипеда?

- 1) 4 2) 8 3) 12 4) 16

1.4. Сколько всего различных отрезков с концами в вершинах куба можно провести так, чтобы они не лежали на гранях куба?

- 1) 2 2) 4 3) 6 4) 8

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. На сколько частей могут разбить две различные плоскости множество всех точек пространства, не принадлежащих этим плоскостям?

- 1) на 2 2) на 3 3) на 4 4) на 5

2.2. Треугольник ABC расположен в плоскости α и имеет общую точку с плоскостью β , отличной от плоскости α . Каким может быть пересечение треугольника ABC с плоскостью β ?

- 1) прямая 2) луч 3) отрезок 4) точка

2.3. Сколько может существовать плоскостей, которые содержат две различные заданные прямые?

- | | |
|-------------|---------------------|
| 1) ни одной | 2) одна |
| 3) две | 4) бесконечно много |

2.4. Сколько может существовать плоскостей, каждая из которых содержит четыре различные заданные точки пространства?

- | | |
|--------------|---------------------|
| 1) ни одной | 2) одна |
| 3) ровно две | 4) бесконечно много |

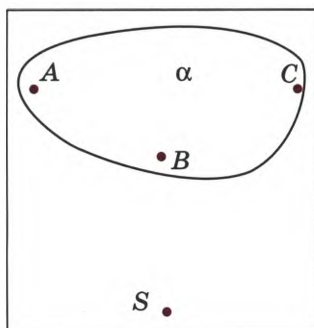


Рис. 1

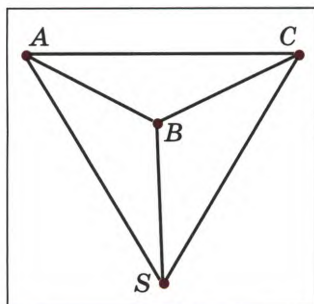


Рис. 2

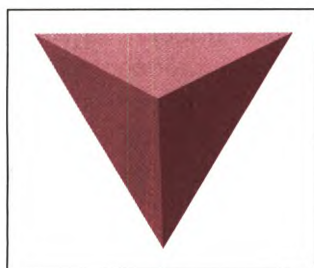


Рис. 3

■ § 3. ЗНАКОМСТВО С ПИРАМИДАМИ

3.1. Треугольная пирамида. Пространственную фигуру, которую называют треугольной пирамидой, можно построить следующим образом.

Рассмотрим некоторую плоскость α . Выберем в ней три не лежащие на одной прямой точки A , B , C , а вне плоскости α выберем точку S (рис. 1). Тем самым мы определим четыре *вершины* *треугольной пирамиды*.

Соединим вершины отрезками AB , BC , AC , SA , SB , SC (рис. 2) и получим шесть *рёбер* *треугольной пирамиды*.

К каждому из треугольников ABC , SAB , SAC , SBC добавим все их внутренние точки (рис. 3) и получим четыре *грани* *треугольной пирамиды*. Вместе эти четыре грани образуют *поверхность* *пирамиды*, которую называют её *границей*.

Наконец, добавим все точки пространства, лежащие на отрезках, соединяющих вершину S с внутренними точками треугольника ABC и не совпадающих с концами этих отрезков. В результате получим все внутренние точки пирамиды.

Пространственная фигура, состоящая из всех точек её границы и всех внутренних точек, называется *треугольной пирамидой*. Иногда треугольную пирамиду называют *тетраэдром*. Если все рёбра тетраэдра равны между собой, то его называют *правильным*.

Вопрос. Какие правильные многогранники вы знаете?

3.2.* Внутренние точки пирамиды. Внутренние точки треугольной пирамиды можно определить иначе. Пусть S, A, B, C — вершины пирамиды. Точка M является внутренней для этой пирамиды, если A и M лежат в одном полупространстве с границей SBC , B и M — в одном полупространстве с границей SAC , C и M — в одном полупространстве с границей SAB , а S и M — в одном полупространстве с границей ABC .

Вопрос. Как можно определить треугольную пирамиду в виде пересечения полупространств, рассматриваемых вместе со своими границами?

3.3. Сечения треугольной пирамиды. Разберём, как находить сечение треугольной пирамиды плоскостью.

Пример 1. В пирамиде $SABC$ точки M, N и K выбраны соответственно на рёбрах SA, AB и AC так, что $SM : MA = 1 : 3, AN : NB = 1 : 2, AK : KC = 2 : 1$. Построить сечение пирамиды плоскостью MNK .

Обозначим плоскость MNK через α . По аксиоме II две различные плоскости, имеющие общую точку, пересекаются по прямой. Так как точки M и N — общие для плоскостей SAB и α , эти плоскости пересекаются по прямой, содержащей точки M и N . Следовательно, грань SAB пересекается с плоскостью α по отрезку MN . Аналогично получается, что плоскость α пересекает грань SAC по отрезку MK , а грань ABC — по отрезку NK (рис. 4).

Покажем, что плоскость α не пересекается с гранью SBC . Для этого заметим, что плоскость α делит множество всех точек пространства, не принадлежащих этой плоскости, на два полупространства. Точки A и S лежат в разных полупространствах, потому что отрезок AS пересекается с плоскостью α . Аналогично в разных полупространствах лежат точки A и C , а также точки A и B . Отсюда следует, что все точки S, B, C лежат в одном полупространстве с границей α . Но тогда все точки треугольника SBC лежат в том же полупространстве, а поэтому грань SBC не пересекается с плоскостью α . Таким образом, на рис. 4 изображены все пересечения плоскости α с гранями. Значит, в сечении пирамиды $SABC$ данной плоскостью получается треугольник MNK .

Пример 2. В пирамиде $SABC$ точки M, N и K выбраны соответственно на рёбрах SA, SC и AB так, что $SM : MA = 1 : 3, SN : NC = 2 : 1, AK = KB$. Построить сечение пирамиды плоскостью MNK .

Обозначим плоскость MNK через β . Из аксиомы II следует, что плоскости β и SAC пересекаются по прямой MN . Продолжим прямую

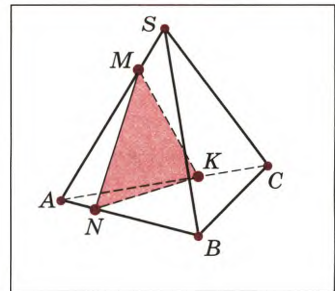


Рис. 4

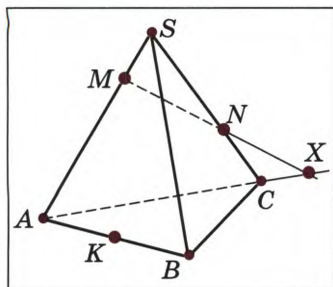


Рис. 5

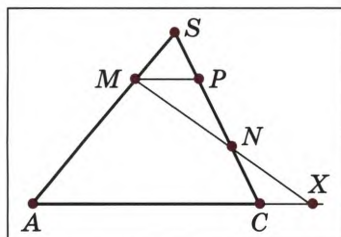


Рис. 6

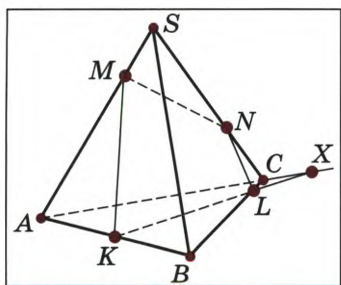


Рис. 7

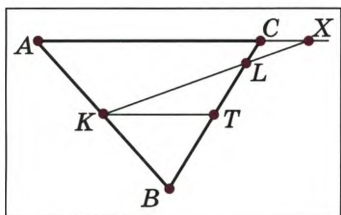


Рис. 8

MN за пределы треугольника SAC и найдём точку X пересечения прямых MN и AC (рис. 5). Для определения положения точки X проведём $MP \parallel AC$ в плоскости ASC (рис. 6). Так как $\triangle SMP \sim \triangle SAC$, то $SM : SA = SP : SC = MP : AC = \frac{1}{4}$. Отсюда $MP = \frac{1}{4} AC$ и $SP = \frac{1}{4} SC$. Поэтому $PN = SC - SP - NC = SC - \frac{1}{4} SC - \frac{1}{3} SC = \frac{5}{12} SC$.

Треугольники MNP и CNX также подобны. Значит, $CX : MP = CN : NP = \left(\frac{1}{3} SC\right) : \left(\frac{5}{12} SC\right) = \frac{4}{5}$, откуда $CX = \frac{4}{5} MP$. Так как $MP = \frac{1}{4} AC$, то $CX = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} AC = \frac{1}{5} AC$. Следовательно, точка X расположена на продолжении отрезка AC так, что $CX = \frac{1}{5} AC$.

Теперь заметим, что точки X и K лежат в плоскости β и в плоскости грани ABC . Прямая KX является прямой пересечения данных плоскостей. Точка L пересечения KX с прямой BC принадлежит также плоскости SBC (рис. 7).

Для определения положения точки L рассмотрим плоскость ABC и проведём $KT \parallel AC$ (рис. 8). Так как точка K — середина AB , по свойству средней линии треугольника $BT = TC = \frac{1}{2} BC$, $KT = \frac{1}{2} AC$. Из подобия треугольников $KTЛ$ и CLX вытекает, что $TL : LC = KT : CX = \left(\frac{1}{2} AC\right) : \left(\frac{1}{5} AC\right) = \frac{5}{2}$, откуда $TL = \frac{5}{7} TC = \frac{5}{14} BC$, $LC = \frac{2}{7} TC = \frac{1}{7} BC$. Следовательно, точка L расположена на ребре BC так, что $CL = \frac{1}{7} BC$.

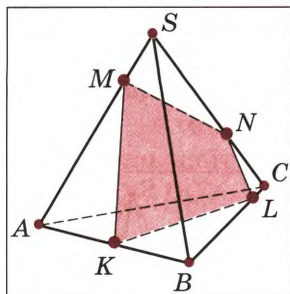


Рис. 9

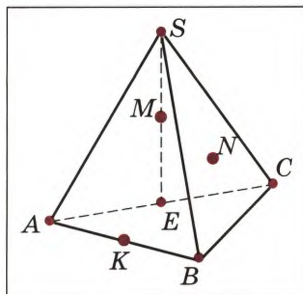


Рис. 10

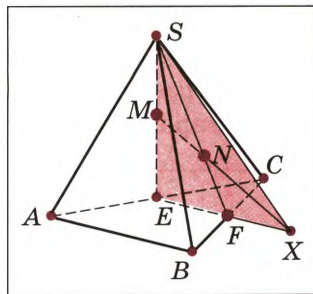


Рис. 11

Таким образом, получены все пересечения плоскости β с гранями (рис. 9). Значит, в сечении пирамиды $SABC$ плоскостью β получается четырёхугольник $MNLK$, причём положение точек M, N, K, L на соответствующих рёбрах вполне определено.

Вопрос. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр с ребром длины a . Как найти площадь сечения этого тетраэдра плоскостью, проходящей через ребро AB и середину ребра CD ?

3.4. Ещё один пример построения сечения.** Если точки, через которые проводится секущая плоскость, не лежат на рёбрах пирамиды, то построение сечения усложняется.

Пример 3. В правильном тетраэдре $SABC$ с ребром длины a точка M — середина медианы SE грани SAC , N — точка пересечения медиан грани SBC , K — середина ребра AB (рис. 10). Построить сечение тетраэдра плоскостью MNK .

Сначала рассмотрим вспомогательную плоскость SMN . Эта плоскость проходит через середины E и F рёбер AC и BC , а поэтому пересекает плоскость грани ABC по прямой EF (рис. 11).

Найдём в плоскости SMN точку X пересечения прямых MN и EF . После этого в плоскости ABC проведём прямую KX и найдём точку P её пересечения с прямой BC . Затем в плоскости SBC найдём точку Q пересечения прямой PN с ребром SC , а в плоскости SAC — точку R пересечения прямой QM с ребром SA (рис. 12). Четырёхугольник $KPQR$ — искомое сечение пирамиды плоскостью MNK .

Вопрос. В каком отношении точка Q делит ребро SC ?

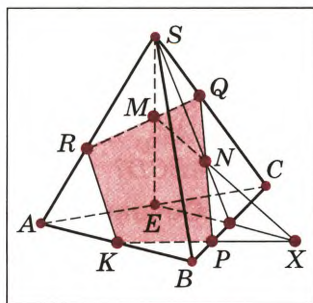


Рис. 12

3.5. Четырёхугольная пирамида. В некоторой плоскости a выберем четырёхугольник $ABCD$, включая его внутренние точки, — *основание* четырёхугольной пирамиды. Стороны AB , BC , CD и AD — это рёбра основания пирамиды, а точки A , B , C , D — вершины основания.

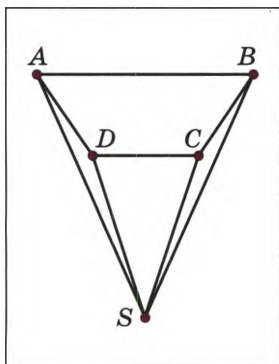


Рис. 13

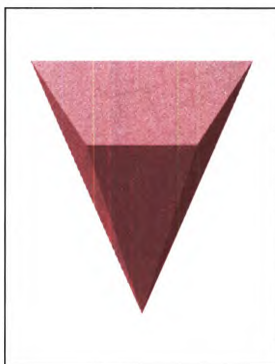


Рис. 14

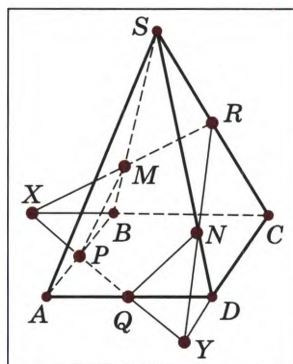


Рис. 15

Затем вне плоскости a выберем точку S — *вершину* четырёхугольной пирамиды. Соединив вершину S отрезками с вершинами A , B , C , D основания, получим *боковые рёбра* SA , SB , SC , SD пирамиды (рис. 13).

Добавив к треугольникам ASB , BSC , CSD , ASD их внутренние точки, получим *боковые грани* четырёхугольной пирамиды. Взятые вместе боковые грани и основание образуют *поверхность* четырёхугольной пирамиды (рис. 14).

Наконец, к точкам поверхности добавим все внутренние точки, лежащие на отрезках, соединяющих вершину S с внутренними точками основания $ABCD$, и не совпадающие с концами этих отрезков. Полученная пространственная фигура называется *четырёхугольной пирамидой* и обозначается $SABCD$. Обозначение вершины четырёхугольной пирамиды обычно записывают на первом месте.

Вопрос. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 . Какие вершины, рёбра и грани имеет пирамида $A_1 ABCD$?

3.6. Сечения четырёхугольной пирамиды. Рассмотрим задачу о построении сечения четырёхугольной пирамиды.

Пример 4. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Точки P , Q и R — середины рёбер AB , AD и SC соответственно. Построить сечение пирамиды плоскостью PQR (рис. 15).

Плоскость PQR пересекается с основанием пирамиды по прямой PQ . В плоскости $ABCD$ прямая PQ пересекает прямую BC в точке X , а прямую CD — в точке Y (рис. 15). Положение точек X , Y легко найти из равенства треугольников APQ , BPX , DQY . Так как $BX = AQ = AP = DY = \frac{1}{2} AB$, то $BX = \frac{1}{2} CD$, $DY = \frac{1}{2} CD$. Теперь найдём точки пересечения прямых RX и RY с рёбрами SB и SD соответственно. Первую из них обозначим через M , а вторую — через N (рис. 15). Для точного определения положения точки M рассмотрим плоскость SBC (рис. 16). Проведя отрезок RK параллельно SB , получим среднюю линию в треугольнике BSC , откуда $BK = \frac{1}{2} BC$ и $RK = \frac{1}{2} SB$. Так как $BX = \frac{1}{2} BC = BK$, отрезок BM — средняя линия в треугольнике XRK . Поэтому $BM = \frac{1}{2} RK = \frac{1}{4} SB$. Аналогично в плоскости грани SCD приходим к равенству $DN = \frac{1}{4} SD$.

Итак, найдены пересечения плоскости PQR с рёбрами пирамиды $SABCD$. Искомое сечение — пятиугольник $PQNRM$ (рис. 17).

Вопрос. Как доказать, что прямая SA пересекается с плоскостью PQR ?

3.7. Общее понятие пирамиды. Рассмотрим треугольные и четырёхугольные пирамиды, нетрудно дать общие представления о произвольной n -угольной пирамиде. Например, шестиугольную пирамиду можно представить следующим образом.

Сначала в некоторой плоскости выберем шестиугольник $ABCDEF$, включая его внутренние точки, — основание пирамиды. Затем вне плоскости основания выберем точку S — вершину пирамиды. Соединив вершину S отрезками с вершинами A , B , C , D , E , F основания, получим боковые рёбра пирамиды (рис. 18).

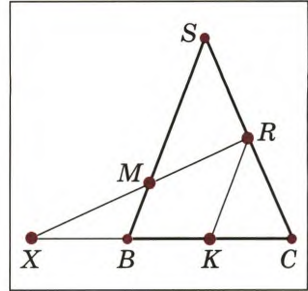


Рис. 16

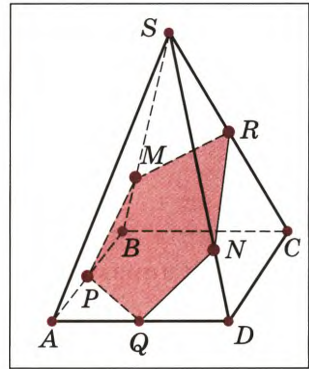


Рис. 17

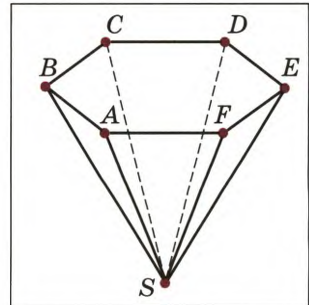


Рис. 18



Рис. 19

Добавив к треугольникам ASB , BCS , CSD , DSE , ESF , ASF их внутренние точки, получим боковые грани пирамиды. Взятые вместе боковые грани и основание образуют поверхность шестиугольной пирамиды (рис. 19).

Наконец, к точкам поверхности добавим все внутренние точки, то есть точки, лежащие на отрезках, соединяющих вершину S с внутренними точками шестиугольника $ABCDEF$, и не совпадающие с концами этих отрезков. В результате получим шестиугольную пирамиду $SABCDEF$ с основанием $ABCDEF$ и вершиной S .

Вопрос. Сколько вершин, рёбер и граней имеет 128-угольная пирамида?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Как в пространстве представить треугольную пирамиду?
2. Дайте определение рёбер, боковых граней, внутренних точек треугольной пирамиды.
3. Что называется сечением треугольной пирамиды плоскостью?
4. Как в пространстве представить четырёхугольную пирамиду?
5. Дайте определение рёбер, граней, внутренних точек четырёхугольной пирамиды.
6. Как в пространстве представить шестиугольную пирамиду?
7. Дайте определение рёбер, граней, внутренних точек шестиугольной пирамиды.

■ Задачи и упражнения

1. Дана пирамида $SABC$, у которой все рёбра равны 1. Точка M — середина ребра CB . Найдите площадь сечения SAM .
2. Дана пирамида $SABC$, у которой все рёбра равны 2. Точки M и N — середины рёбер AB и AC . Найдите площадь сечения SMN .
3. Дана пирамида $SABC$, у которой все рёбра равны 1. Точка N — середина ребра SB , M — середина ребра CB , O — центр грани ABC . Постройте сечение пирамиды плоскостью NMO . Найдите площадь получившегося сечения.
4. Дана пирамида $SABC$, у которой все рёбра равны. Точки M и N — середины рёбер AS и AC . Точка L лежит на ребре AB , причём $AL : LB = 3 : 1$. Плоскость MNL пересекает прямую SB в точке K . Найдите отношение $SK : KB$.

5. Дана пирамида $SABC$, у которой все рёбра равны. Точки M и N — середины отрезков AS и AC , точка L лежит на CB , $CL : LB = 1 : 3$.

- а) Постройте сечение пирамиды плоскостью MNL ;
- б) найдите, в каком отношении это сечение делит ребро SB .

6. ** Дана пирамида $SABC$, причём SAB , SAC и ABC — прямоугольные треугольники с прямым углом при вершине A , $SA = AC = 2$, $AB = 3$. Точки M и N — середины рёбер SA и AC . Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью BMN .

7. Дана пирамида $SABC$, причём SAB , SAC и ABC — равнобедренные прямоугольные треугольники, $SA = AB = AC = 4$. Точки M и N — середины рёбер AB и CS . Точка K лежит на ребре CB , $CK : KB = 3 : 1$.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через точки K , M , N ;

б) найдите, в каком отношении это сечение делит ребро SA .

8. Дана пирамида $SABCD$, в основании которой лежит квадрат $ABCD$, а длины всех рёбер равны 1. Пусть M , N , K — середины рёбер SD , DA и DC соответственно.

- а) Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью SAC ;
- б) найдите линию пересечения плоскостей MNK и SBD ;
- в) докажите, что плоскость SBD пересекает треугольник MNK по высоте, опущенной из вершины M ;
- г) найдите площадь треугольника MNK .

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Сколько вершин, граней и рёбер имеет 20-угольная пирамида?

- 1) 20 вершин, 20 граней, 20 рёбер
- 2) 20 вершин, 20 граней, 40 рёбер
- 3) 21 вершину, 21 грань, 21 ребро
- 4) 21 вершину, 21 грань, 40 рёбер

1.2. Сколько всего медиан можно провести в гранях треугольной пирамиды?

- 1) 6
- 2) 8
- 3) 10
- 4) 12

1.3. Какое наибольшее число вершин шестиугольной пирамиды может одновременно принадлежать одной плоскости?

- 1) 4
- 2) 5
- 3) 6
- 4) 7

1.4. Чему равна сумма площадей всех граней правильного тетраэдра с ребром 4?

- 1) $8\sqrt{3}$
- 2) $12\sqrt{3}$
- 3) $16\sqrt{3}$
- 4) $24\sqrt{3}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Известно, что плоскость α проходит через середины рёбер SA и BC треугольной пирамиды $SABC$. В каких случаях сечением пирамиды будет треугольник, если известно, что плоскость α содержит:

- | | |
|------------------------|----------------|
| 1) середину ребра AC | 2) вершину A |
| 3) середину ребра SC | 4) вершину B |

2.2. Какие из перечисленных многоугольников могут получаться при пересечении четырёхугольной пирамиды плоскостями, если в основании пирамиды лежит выпуклый четырёхугольник?

- | | |
|--------------------|-----------------|
| 1) четырёхугольник | 2) пятиугольник |
| 3) шестиугольник | 4) семиугольник |

2.3. Известно, что плоскость α проходит через вершину S шестиугольной пирамиды $SABCDEF$, в основании которой лежит выпуклый шестиугольник $ADCDEF$. Какие из перечисленных многоугольников могут получиться в сечении?

- | | |
|-----------------|--------------------|
| 1) треугольник | 2) четырёхугольник |
| 3) пятиугольник | 4) шестиугольник |

2.4.* В основании четырёхугольной пирамиды лежит квадрат со стороной 4 см, боковые рёбра пирамиды равны между собой. Какую длину из указанных не могут иметь боковые рёбра?

- 1) 2 см 2) 2,5 см 3) 3 см 4) 3,5 см

■ Мини-исследования к главе

Мини-исследование 2

Обычно при построении математической теории стараются вводить как можно меньше аксиом. Однако последовательное построение теории на основе минимального числа аксиом может оказаться сложным. Поэтому иногда в процессе обучения для удобства в качестве аксиом выбирают большее число утверждений, чем это нужно на самом деле, лишь бы они не противоречили друг другу. В данном учебнике используется избыточная система аксиом геометрии, которая равносильна системе аксиом Гильберта. В пункте 2.7 было сформулировано, как аксиома VI, утверждение:

каждая плоскость p делит множество не принадлежащих ей точек пространства на две части, называемые полупространствами с границей p . Отрезок с концами в одном полупространстве не пересекает плоскость p , а отрезок с концами в разных полупространствах пересекает плоскость p .

Предлагается на основе аксиом I—V доказать это утверждение по следующей схеме:

- доказать, что если отрезок с концами A и B не пересекает плоскость p и отрезок с концами B и C не пересекает плоскость p , то отрезок с концами A и C также не пересекает плоскость p ;
- доказать, что если отрезок с концами A и B пересекает плоскость p и отрезок с концами B и C пересекает плоскость p , то отрезок с концами A и C не пересекает плоскость p ;
- доказать, что если отрезок с концами A и B пересекает плоскость p , а отрезок с концами B и C не пересекает плоскость p , то отрезок с концами A и C пересекает плоскость p ;
- определить полупространство как множество всех точек пространства таких, что отрезок с концами из этого полупространства не пересекает плоскость;
- доказать, что всё пространство состоит из плоскости и двух задаваемых этой плоскостью полупространств.

Мини-исследование 3

Предположим, что мы взяли лист бумаги, вырезали равносторонний треугольник и согнули этот листок по средним линиям треугольника. Легко убедиться в том, что при склеивании частей получается треугольная пирамида — правильный тетраэдр.

Предлагается проделать аналогичные эксперименты с треугольниками другого вида и на основании наблюдений высказать гипотезу насчёт того, в каких случаях данная конструкция позволяет сделать пирамиду, а в каких — нет.

(Подсказка: из любого остроугольного треугольника пирамида получается, а из прямоугольного или тупоугольного — нет.)



Глава 3

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

В этой главе мы напомним основные свойства дробных чисел, определим понятие рационального числа и расширим множество рациональных чисел до множества действительных чисел.

■ § 1. РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ИХ СВОЙСТВА

1.1. Дроби и рациональные числа. Каждая дробь является выражением вида $\frac{m}{n}$, где m и n — целые числа и $n \neq 0$. Дроби бывают равные и неравные между собой. Будем говорить, что

равные между собой дроби являются записью одного и того же числа, называемого рациональным числом.

Всякое рациональное число можно по-разному записать в виде дроби. Например, $3\frac{1}{3}$ и $\frac{30}{9}$ — это разные обозначения для одного и того же рационального числа.

На числовой прямой равные дроби изображаются одной точкой, неравные дроби — разными точками. Поэтому каждая точка с дробной координатой изображает только одно рациональное число, а разные рациональные числа изображаются разными точками числовой прямой.

Для обозначения множества всех рациональных чисел используется буква Q . Запись $r \in Q$ означает, что число r рациональное.

Вопрос. Какими дробями можно обозначить рациональное число 1?

1.2. Действия над рациональными числами. Арифметические операции над рациональными числами и сравнение рациональных чисел по величине сводятся к соответствующим действиям над дробями.

Пример 1. Найдём сумму рациональных чисел $\frac{1}{3}$ и $\left(-\frac{4}{18}\right)$. Вычислим сумму дробей, являющихся записью этих рациональных чисел: $\frac{1}{3} + \left(-\frac{4}{18}\right) = \frac{6+(-4)}{18} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$. Возьмём другие записи этих рациональных

чисел, например, $\frac{5}{15}$, $\frac{-2}{9}$ и сложим эти дроби: $\frac{5}{15} + \frac{-2}{9} = \frac{45+(-30)}{135} = \frac{15}{135}$.

Полученная дробь является записью того же рационального числа $\frac{1}{9}$.

Можно доказать, что сумма рациональных чисел не зависит от выбора записей слагаемых в виде дробей — в результате может получиться другая дробь, но являющаяся записью того же самого рационального числа — в данном случае $\frac{1}{9}$.

Пример 2. Найдём произведение рациональных чисел $\frac{2}{7}$ и $\frac{-21}{-10}$. Вычислим произведение дробей $\frac{2}{7}$ и $\frac{-21}{-10}$, являющихся записью этих рациональных чисел: $\frac{2}{7} \cdot \frac{-21}{-10} = \frac{2 \cdot (-21)}{7 \cdot (-10)} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot (-1)}{7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot (-1)} = \frac{3}{5}$. Так же как и в примере 1, произведение рациональных чисел не зависит от выбора записей сомножителей в виде дробей.

Пример 3. Выясним, какое из рациональных чисел $\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{9}$ является наибольшим. Для этого приведём дроби $\frac{4}{7}$ и $\frac{5}{9}$, являющиеся записями этих рациональных чисел, к общему знаменателю: $\frac{4}{7} = \frac{4 \cdot 9}{7 \cdot 9} = \frac{36}{63}$, $\frac{5}{9} = \frac{5 \cdot 7}{9 \cdot 7} = \frac{35}{63}$. Так как знаменатели положительны и $36 > 35$, то $\frac{4}{7} > \frac{5}{9}$. Результат сравнения рациональных чисел также не зависит от выбора записей сравниваемых чисел в виде дробей.

Рациональное число называют *положительным*, если обозначающая его дробь положительна.

Рациональное число называют *отрицательным*, если обозначающая его дробь отрицательна.

Вопрос. Как найти частное от деления рационального числа $\left(-\frac{2}{5}\right)$ на рациональное число $\frac{2}{7}$?

1.3. Свойства арифметических операций. Арифметические операции над рациональными числами подчиняются основным правилам, которые соответствуют известным правилам действий над дробями. Перечислим эти правила, предполагая, что латинскими буквами обозначаются рациональные числа:

1. Коммутативность сложения: $a + b = b + a$.
2. Ассоциативность сложения: $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Существование нуля: существует такое число 0, что $a + 0 = a$ для каждого рационального числа a .

4. **Существование противоположного числа:** для каждого $a \in \mathbb{Q}$ существует такое число $(-a) \in \mathbb{Q}$, что $a + (-a) = 0$.

Понятие противоположного числа позволяет определить разность $a - b$ рациональных чисел как число, равное числу $a + (-b)$.

5. **Коммутативность умножения:** $ab = ba$.

6. **Ассоциативность умножения:** $(ab) \cdot c = a \cdot (bc)$.

7. **Существование единицы:** существует такое число 1, отличное от нуля, что $a \cdot 1 = a$ для каждого рационального числа a .

8. **Существование обратного числа:** для каждого ненулевого рационального числа a существует такое число a^{-1} , что $a \cdot a^{-1} = 1$.

Понятие обратного числа позволяет определить частное или отношение $\frac{a}{b}$ рационального числа a к ненулевому рациональному числу b как число, равное $a \cdot b^{-1}$.

9. **Дистрибутивность:** $a(b + c) = ab + ac$.

Вопрос. Какое рациональное число противоположно числу $\left(-\frac{2}{3}\right)$, а какое обратно этому же числу?

1.4. Сравнение рациональных чисел. Рациональные числа можно сравнивать по величине. Это означает, что для любых двух чисел a, b из \mathbb{Q} истинно только одно из трёх утверждений: либо $a > b$; либо $a = b$; либо $a < b$.

Напомним, что неравенства $a > b$ и $b < a$ — это разные способы записи результата сравнения чисел a и b , то есть неравенство $a > b$ равносильно неравенству $b < a$. Правила действия с неравенствами вытекают из следующих основных свойств.

10. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$ (транзитивность).

11. Если $a < b$ и c — любое число из множества \mathbb{Q} , то $a + c < b + c$.

12. Если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$.

Вопрос. Какие свойства неравенств вы знаете?

1.5. Модуль или абсолютная величина числа. Напомним, что модуль числа a обозначается $|a|$ и определяется так:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Перечислим важные свойства модуля рациональных чисел:

1. $|a| \geq 0$, причём равенство возможно тогда и только тогда, когда $a = 0$.

2. $|ab| = |a| \cdot |b|$.

3. $a^2 = |a|^2$.

4. $\sqrt{a^2} = |a|$.

5. $|a| \geq a$ для любого числа.

6. Для любых двух чисел справедливо неравенство $|a + b| \leq |a| + |b|$.

7. Для любых двух чисел a и b неравенство $|a|^2 \geq |b|^2$ выполняется тогда и только тогда, когда $|a| \geq |b|$.

Вопрос. Как доказать, что $|a| \geq a$ при любом $a \in Q$?

1.6.* Доказательство неравенства для модуля суммы. Запишем словами свойство 6 в другой формулировке и приведём доказательство.

Модуль суммы двух чисел меньше либо равен сумме модулей этих чисел.

Пусть a и b — произвольные рациональные числа. Тогда $|a|^2 = a^2$, $|b|^2 = b^2$ и $|ab| \geq ab$. Поэтому

$$\begin{aligned} (|a| + |b|)^2 &= |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 = |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \geq \\ &\geq |a|^2 + 2ab + |b|^2 = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = |a + b|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $(|a| + |b|)^2 \geq |a + b|^2$. Но так как $|a| + |b| \geq 0$ и $|a + b| \geq 0$, то $|a| + |b| \geq |a + b|$, что и требовалось доказать.

Вопрос. Как доказать, что $|a - b| \leq |a| + |b|$?

1.7.* Аксиома Архимеда для рациональных чисел. Рациональные числа обладают свойством, которое является аналогом аксиомы Архимеда для отрезков прямой. Поэтому его часто тоже называют *аксиомой Архимеда*.

Для любого рационального числа a существует целое число k , такое, что $a < k$.

С помощью аксиомы Архимеда доказывается следующее утверждение.

Пусть рациональное число a удовлетворяет условию, что $a \leq \frac{1}{n}$ для всех натуральных n . Тогда $a \leq 0$.

Пусть утверждение неверно, то есть $a > 0$. Тогда и $\frac{1}{a} > 0$. По аксиоме Архимеда найдётся целое число n , такое, что $\frac{1}{a} < n$. Но так как $\frac{1}{a} > 0$, число n — натуральное. Умножив обе части неравенства $\frac{1}{a} < n$ на положительное число $\frac{a}{n}$, получим $\frac{1}{n} < a$. Но это противоречит условию, сформулированному в утверждении.

Таким образом, предположение $a > 0$ приводит к противоречию. Поэтому $a \leq 0$, что и требовалось доказать.

Вопрос. Известно, что a — рациональное число $|a| \leq \frac{1}{n}$ для каждого натурального n . Как доказать, что $a = 0$?

1.8.* Неравенство Бернулли. При изучении свойств степеней с натуральными показателями иногда оказывается полезным *неравенство Бернулли*.

Для любого натурального числа n и любого $b > -1$ справедливо неравенство $(1 + b)^n \geq 1 + nb$.

Проведём доказательство методом математической индукции.

I. При $n = 1$ неравенство запишется в виде $(1 + b)^1 \geq 1 + 1 \cdot b$ и является верным.

II. Предположим, что неравенство Бернулли верно для *некоторого* числа k , то есть $(1 + b)^k \geq 1 + k \cdot b$. Умножим обе части этого неравенства на положительное число $(1 + b)$ и получим $(1 + b)(1 + b)^k \geq (1 + b)(1 + kb)$ или $(1 + b)^{k+1} \geq 1 + b + kb + kb^2$, $(1 + b)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)b + kb^2$.

Так как $kb^2 \geq 0$, отсюда получим неравенство $(1 + b)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)b$, то есть неравенство Бернулли, записанное для числа $k + 1$.

Таким образом, сделан индуктивный переход от любого числа k к числу $k + 1$ и тем самым неравенство Бернулли доказано.

Вопрос. Как доказать, что $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ при любом натуральном n ?

1.9. Пример применения неравенства Бернулли.** В этом пункте докажем следующее утверждение.

Пусть $A > 1$ и известно, что для любого натурального n выполняется неравенство $a \leq A^{-n}$. Тогда $a \leq 0$.

Доказательство. Обозначим $A - 1$ через b . Тогда $b > 0$ и $A = 1 + b$. Используя неравенство Бернулли, получаем:

$$A^n = (1 + b)^n \geq 1 + nb > nb.$$

Отсюда $A^{-n} < \frac{1}{nb}$. Но так как по условию $a \leq A^{-n}$, то $a < \frac{1}{nb}$. Тогда $ab < \frac{1}{n}$

при любом натуральном n . Поэтому, по свойству из пункта 1.7, получаем $ab \leq 0$. Так как $b > 0$, то отсюда $a \leq 0$, что и требовалось доказать.

Вопрос. Что можно сказать о числе a , если известно, что оно меньше любого числа вида $\frac{1}{10^n}$, где $n \in \mathbb{N}$?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяются рациональные числа?
2. Как обозначается множество всех рациональных чисел?
3. Какое рациональное число называется положительным?
4. Какие свойства операций сложения и умножения рациональных чисел вы знаете?
5. Как определяется разность рациональных чисел?

6. Как определить частное или отношение рациональных чисел?
7. Как можно сравнить рациональные числа?
8. Как определяется модуль или абсолютная величина рационального числа?
- 9.* Сформулируйте аксиому Архимеда для рациональных чисел.
- 10.* Запишите неравенство Бернулли.
- 11.** Докажите неравенство Бернулли.

Задачи и упражнения ■

1. Рассмотрим множество всех натуральных чисел. Есть ли среди них:
 - а) наибольшее; б) наименьшее?
2. Есть ли среди элементов множества всех целых чисел:
 - а) наибольшее; б) наименьшее?
3. Пусть m и n — целые числа, причём $m < n$. Рассмотрим множество A целых чисел из интервала $(m; n)$. Ответьте на вопросы:
 - а) При каких значениях m, n множество A — пусто?
 - б) При каких значениях m и n множество A не пусто?
 - в) Найдите наибольшее и наименьшее число в множестве A , когда A не пусто.
 - г) При каких значениях m и n множество A содержит единственное целое число?
 - д) При каких значениях m и n наибольший и наименьший элементы множества A совпадают?
 - е) При каких значениях m и n наибольший и наименьший элементы множества A различны?
- 4.* Выведите из свойств 1—12 рациональных чисел, что для любых рациональных a и b выполнено равенство $a(-b) = -(ab)$.
- 5.* Используя свойства 1—12, докажите, что если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$.
- 6.* Докажите, что для любого ненулевого a выполнено неравенство $a^2 > 0$.
- 7.* Откуда следует, что $1 > 0$?
- 8.* Пусть $a > 0$. Почему $\frac{1}{a} > 0$?
- 9.* Докажите неравенство $|a| - |b| \leq |a - b|$. В каких случаях неравенство обращается в равенство?
- 10.* Докажите, что если $a \geq -\frac{1}{n}$ для любого натурального n , то $a \geq 0$.
11. Докажите, что если $-\frac{1}{n} \leq a \leq \frac{1}{n}$ для любого натурального n , то $a = 0$.

12.* Пусть $a > 1$. Докажите, что $\frac{1}{a} < 1$.

13.* Докажите утверждение: пусть $a > 0$, тогда существует такое рациональное b , что $0 < b < a$.

14.* Докажите, что в любом интервале $(a; b)$, где $a < b$, найдётся рациональное число.

15.** Найдите все значения параметра t , при которых указанный интервал содержит хотя бы одно целое число:

а) $(7t; 3t - 4)$; б) $(8t + 5; 4t)$; в) $(2t - 3; 5t)$; г) $(3t; 6t - 1)$.

16.** Пусть A — множество всех рациональных чисел, расположенных на интервале $(m; n)$, где m, n — рациональные и $m < n$. Установите:

а) есть ли среди этих чисел наибольшее;

б) есть ли среди этих чисел наименьшее;

в) что изменится, если вместо интервала $(m; n)$ рассмотреть отрезок $[m; n]$ или полуинтервалы $[m; n)$ и $(m; n]$.

17.** Докажите, что не существует такого рационального числа x , что $x^2 = 2$.

18.** Найдите, при каких целых n дробь $\frac{3n+4}{5}$ не является целым числом.

19.** Установите, могут ли числа 10, 11, 12 быть членами (не обязательно последовательными) одной геометрической прогрессии.

20. Решите уравнение:

а) $|x| = x$; б) $|2x - 3| = 4$; в) $||x| + 5| = 5$; г) $|x + 2| = |x - 6|$.

21. Решите неравенство:

а) $|x| < 1$; б) $|x - 1| < 1$; в) $|x + 4| \geq 1$; г) $|x - 1| > |x + 3|$.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равно значение числового выражения $\left(1\frac{3}{7} - 2\frac{1}{4}\right) \cdot 3\frac{1}{3}$?

1) $2\frac{31}{42}$ 2) $-2\frac{31}{42}$ 3) $-1\frac{23}{28}$ 4) $-3\frac{5}{42}$

1.2. Чему равна разность $\frac{13}{21} - \frac{1}{6}$?

1) $\frac{5}{21}$ 2) $\frac{19}{42}$ 3) $\frac{41}{84}$ 4) $\frac{59}{126}$

1.3. Чему равняется $\left|-\frac{3}{7} + \left(-\frac{2}{11}\right)\right| + \left|-\frac{3}{7} - \left(-\frac{2}{11}\right)\right|$?

- 1) $\frac{6}{7}$ 2) $\frac{38}{77}$ 3) $\frac{45}{77}$ 4) $\frac{4}{11}$

1.4. Какая из дробей равна $\frac{377}{1001}$?

- 1) $\frac{27}{77}$ 2) $\frac{31}{91}$ 3) $\frac{29}{77}$ 4) $\frac{33}{91}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. В каких из следующих случаев число a меньше числа b ?

- 1) $a = \frac{11}{12}$, $b = \frac{12}{13}$ 2) $a = \frac{11}{18}$, $b = \frac{13}{21}$
 3) $a = -\frac{124}{119}$, $b = -\frac{137}{129}$ 4) $a = -\frac{118}{157}$, $b = -\frac{117}{156}$

2.2. При каких значениях x выполняется равенство $\left|x - \frac{2}{3}\right| = \left|x + \frac{4}{5}\right|$?

- 1) $-\frac{2}{15}$ 2) $-\frac{1}{15}$ 3) $\frac{1}{15}$ 4) $\frac{2}{15}$

2.3. Какие из чисел меньше 0,1?

- 1) $\frac{19}{201}$ 2) $\frac{30}{299}$ 3) $\frac{41}{399}$ 4) $\frac{59}{601}$

2.4. Какие из чисел принадлежат интервалу $\left(\frac{3}{7}; \frac{4}{7}\right)$?

- 1) $\frac{11}{21}$ 2) $\frac{15}{28}$ 3) $\frac{16}{35}$ 4) $\frac{19}{42}$

§ 2. СПОСОБЫ ЗАПИСИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ■

2.1. Запись рациональных чисел. Одно и то же рациональное число можно записать по-разному. Наиболее часто используется запись в виде отношения целого числа к натуральному. Например: $\frac{2}{5}$, $-\frac{11}{7}$, $\frac{312}{100}$.

В том случае, когда знаменатель дроби в записи рационального числа является степенью числа 10, используют и другой способ записи — в виде десятичной дроби. Например, $\frac{312}{100} = 3,12$; $-\frac{53785}{1000} = -53,785$.

Вопрос. Как сравнить рациональные числа по их записи в виде дробей?

2.2. О делении «уголком». Возьмём какое-нибудь положительное рациональное число, например $\frac{26}{11}$, и попытаемся записать его в виде десятичной дроби, разделив «уголком» числитель на знаменатель.

$$\begin{array}{r}
 26 \overline{) 11} \\
 22 \overline{) 2,3636} \\
 \hline
 40 \\
 33 \overline{) 40} \\
 \hline
 70 \\
 66 \overline{) 70} \\
 \hline
 40 \\
 33 \overline{) 40} \\
 \hline
 70 \\
 66 \overline{) 70} \\
 \hline
 4
 \end{array}$$

На рисунке приведены несколько шагов стандартной процедуры деления. После того как найдена целая часть частного, каждый очередной шаг выглядит следующим образом. К остатку, найденному на предыдущем шаге, справа добавляется цифра 0. Полученное число делится на знаменатель исходной дроби. Неполное частное объявляется очередной цифрой результата, а остаток используется на следующем шаге.

При делении на 11 остатки могут быть только целыми числами в пределах от 0 до 10. Рано или поздно эти остатки обязательно начнут повторяться. В данном примере остаток 4, полученный на первом шаге деления, повторяется уже на третьем шаге.

После каждого появления в остатке числа 4 выполняются одни и те же действия. Поэтому на втором и четвёртом шагах в частном получатся одинаковые цифры 3, а на третьем и пятом шагах — одинаковые цифры 6, причём в остатке снова появится число 4. Далее эта процедура будет повторяться снова и снова. В результате возникнет бесконечная десятичная дробь $2,363636\dots$. Повторяющаяся группа цифр 36 называется *периодом* этой дроби, а сама дробь — *периодической*. Для краткости повторяющуюся группу цифр обычно заключают в скобки и пишут

$$\frac{26}{11} = 2,363636\dots = 2,(36).$$

Вопрос. Какая цифра стоит на 127 месте после запятой в бесконечной дроби $2,(36)$?

2.3.* Деление «уголком» и десятичные приближения рационального числа. На примере дроби $\frac{26}{11}$ покажем, что при делении числителя на знаменатель по схеме деления «уголком» получается последовательность десятичных приближений снизу соответствующего рационального числа.

На первом этапе деления получаем:

$$26 = 2 \cdot 11 + 4,$$

где число 4 — остаток от деления 26 на 11.

Отсюда $\frac{26}{11} = 2 + \frac{4}{11}$, где последнее слагаемое $\frac{4}{11}$ меньше 1.

Поэтому число 2 является десятичным приближением снизу числа $\frac{26}{11}$ с точностью до 1.

Второму этапу деления «уголком» соответствует умножение полученного остатка 4 на 10. Это можно представить в виде

$$26 \cdot 10 = 20 \cdot 11 + 40.$$

Выполняя деление числа 40 на 11 с остатком, получаем:

$$26 \cdot 10 = 20 \cdot 11 + 3 \cdot 11 + 7 = 23 \cdot 11 + 7,$$

где число 7 — остаток от деления 40 на 11 и второй из остатков в схеме деления уголком.

Отсюда

$$2,3 \leq \frac{26}{11} = 2,3 + 0,1 \cdot \frac{7}{11} < 2,3 + 0,1,$$

так как слагаемое $0,1 \cdot \frac{7}{11}$ меньше 0,1.

Поэтому число 2,3 является десятичным приближением снизу числа $\frac{26}{11}$ с точностью до 0,1.

Третьему этапу деления «уголком» соответствует умножение полученного остатка 7 на 10. Это можно представить в виде

$$26 \cdot 100 = 230 \cdot 11 + 70.$$

Выполняя деление числа 70 на 11 с остатком, получаем:

$$26 \cdot 100 = 230 \cdot 11 + 6 \cdot 11 + 4 = 236 \cdot 11 + 4,$$

где число 4 — остаток от деления 70 на 11 и третий из остатков в схеме деления «уголком».

Отсюда

$$2,36 \leq \frac{26}{11} = 2,36 + 0,01 \cdot \frac{4}{11} < 2,36 + 0,01,$$

так как слагаемое $0,01 \cdot \frac{4}{11}$ меньше 0,01.

Поэтому число 2,36 является десятичным приближением снизу числа $\frac{26}{11}$ с точностью до 0,01.

Продолжение указанного процесса приводит к получению всё более точных десятичных приближений снизу числа $\frac{26}{11}$:

$$2,363; 2,3636; 2,36363; 2,363636; \dots$$

Вопрос. Какой вид имеет последовательность десятичных приближений сверху числа $\frac{26}{11}$?

2.4. Десятичное представление рационального числа. Бесконечная десятичная дробь $a_0, a_1 a_2 \dots$ с целой частью a_0 и цифрами a_1, a_2, \dots , стоящими после запятой, является *периодической*, если после k -го знака после

запятой запись нашей дроби сводится к бесконечному повторению записи цифр $a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+t}$:

$$a_0, a_1 a_2 \dots = a_0, a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+t} a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+t} \dots$$

Запись $a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+t}$ называется *периодом* данной дроби. Для краткости обозначения дроби её период заключается в скобки и приводится один раз:

$$a_0, a_1 a_2 \dots = a_0, a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+t}).$$

Если период дроби состоит из одних нулей, то их обычно не пишут, «обрывая» запись после k -го знака, а саму дробь называют *конечной*. Именно такие десятичные дроби изучались ранее.

Повторяемость остатков при делении уголком натуральных чисел позволяет сформулировать утверждение:

при переводе любой положительной обыкновенной дроби в десятичную дробь с помощью правила деления уголком всегда получается периодическая десятичная дробь.

Для получения *десятичного представления отрицательного рационального числа* a надо найти десятичное представление модуля числа a и поставить перед этим представлением знак минус.

Десятичное представление рационального числа называется также *десятичным разложением* соответствующего рационального числа.

Вопрос. Какие рациональные числа представимы конечными десятичными дробями?

2.5.* Запись бесконечной периодической дроби в виде обыкновенной дроби.

Пример 1. Возьмём какое-то рациональное число, записанное в виде бесконечной периодической десятичной дроби, например, $x = 8,2(145)$. Найдём, как представить число x в виде обыкновенной дроби.

Следуя соображениям из пункта 2.3, выпишем двойные неравенства:

$$8,2145 \leq x < 8,2145 + \frac{1}{10^4}, \quad (1)$$

$$8,2145145 \leq x < 8,2145145 + \frac{1}{10^7}. \quad (2)$$

Умножив неравенство (1) на (-10) , а неравенство (2) — на 10^4 , получим:

$$-82,145 - \frac{1}{10^3} < -10x \leq -82,145,$$

$$82145,145 \leq 10^4 x < 82145,145 + \frac{1}{10^3}.$$

Сложив почленно полученные неравенства, получим:

$$-\frac{1}{10^3} < (10^4 - 10)x < 82\,063 + \frac{1}{10^3}.$$

Таким образом, число $9990x$ отличается от числа 82 063 меньше, чем на $\frac{1}{10^3}$.

Взяв теперь двойное неравенство

$$8,2145145145 \leq x < 8,2145145145 + \frac{1}{10^{10}} \quad (3)$$

и проводя с неравенствами (2) и (3) вычисления, аналогичные вычислениям с неравенствами (1) и (2), получим, что число $9\,990\,000x$ отличается от числа 82 063 000 меньше чем на $\frac{1}{10^9}$, а число $9990x$ отличается от числа 82 063 меньше чем на $\frac{1}{10^6}$. Делая подобные шаги, получим, что число $9990x$ отличается от числа 82 063 меньше, чем на $\frac{1}{10^9}$, $\frac{1}{10^{12}}$ и так далее. В силу следствия из аксиомы Архимеда для рациональных чисел (пункт 1.7) приходим к выводу, что $9990x = 82\,063$. Поэтому $x = \frac{82063}{9990}$.

Можно проверить, что непосредственное деление «уголком» числа 82 063 на число 9990 приводит к бесконечной периодической десятичной дроби 8,2(145).

С помощью подобных рассуждений в общем виде можно получить, что рациональное число, записанное в виде бесконечной периодической десятичной дроби $b_s b_{s-1} \dots b_2 b_1 b_0, a_1 a_2 \dots a_k (a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+t})$, представимо в виде обыкновенной дроби:

$$\frac{\overline{b_s b_{s-1} \dots b_2 b_1 b_0 a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} a_{k+2} \dots a_{k+t}} - \overline{b_s b_{s-1} \dots b_2 b_1 b_0 a_1 a_2 \dots a_k}}{10^{k+t} - 10^k},$$

где $b_s, b_{s-1}, \dots, b_2, b_1, b_0, a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k+t}$ — соответствующие цифры, входящие в запись исходной дроби, и для любых цифр $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{m-1}, c_m$ запись вида $\overline{c_m c_{m-1} \dots c_2 c_1 c_0}$ означает число

$$c_m \cdot 10^m + c_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10^1 + c_0 \cdot 10^0.$$

Вопрос. Как представить в виде обыкновенной дроби бесконечную периодическую десятичную дробь 0,(123456789)?

2.6. Цепная дробь.** В теоретических исследованиях иногда используется запись чисел в виде *цепной дроби*. Под цепной дробью мы будем иметь в виду «многоступенчатую» дробь

$$M + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}, \quad (1)$$

где M — целое число, числа $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ — натуральные. Пример цепной дроби даёт выражение

$$3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}}. \quad (2)$$

Последовательным выполнением арифметических операций каждую цепную дробь вида (1) можно записать в виде отношения целых чисел. Например, для цепной дроби (2) получаем:

$$3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}} = 3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{4}{9}}} = 3 + \frac{1}{5 + \frac{9}{13}} = 3 + \frac{13}{74} = \frac{235}{74}.$$

Аналогичные преобразования можно выполнить для любой цепной дроби вида (1). Отсюда следует, что каждая цепная дробь представляет некоторое рациональное число.

Запись цепной дроби в виде (1) громоздка. Поэтому обычно используют следующее обозначение:

$$[M; a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]. \quad (3)$$

Например, цепную дробь (2) можно записать в виде $[3; 5, 1, 2, 4]$.

Вопрос. Пусть $a = [3; 5, 1, 2, 4]$. Как записать в виде цепной дроби число a^{-1} ?

2.7. Запись рационального числа в виде цепной дроби.** Рассмотрим на примере, как произвольное рациональное число r можно записать в виде цепной дроби.

Пример 2. Пусть $r = \frac{216}{67}$. Сначала выделим слагаемым целую часть числа r . Так как $3 < r < 4$, целая часть r равна 3. Поэтому $r = 3 + \frac{15}{67} = 3 + \frac{1}{r_1}$, где $r_1 = \frac{67}{15} > 1$.

После этого выделим слагаемым целую часть числа r_1 , а именно: $r_1 = 4 + \frac{7}{15} = 4 + \frac{1}{r_2}$, где $r_2 = \frac{15}{7} > 1$.

Далее выделим слагаемым целую часть числа r_2 , а именно:
 $r_2 = 2 + \frac{1}{7} = 2 + \frac{1}{r_3}$, где $r_3 = 7$.

На этом процесс записи числа r в виде цепной дроби заканчивается, и мы получаем:

$$r = \frac{216}{67} = 3 + \frac{1}{r_1} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{r_2}} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{r_3}}} = 3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{7}}}.$$

Таким образом, $\frac{216}{67} = [3; 4, 2, 7]$.

Вопрос. Как записать в виде цепной дроби число $\frac{225}{157}$?

2.8. Цепная дробь и алгоритм Евклида.** Процесс представления рационального числа в виде цепной дроби связан с алгоритмом Евклида.

Действительно, рассмотрим пример из предыдущего пункта. Выделение целой части числа $\frac{216}{67}$ соответствует делению с остатком числа 216 на 67, а именно: $216 = 3 \cdot 67 + 15$. При этом целая часть равна неполному частному 3, а дробная часть представляет из себя отношение остатка 15 к делителю 67. Выделение целой части отношения $\frac{67}{15}$ соответствует делению с остатком числа 67 на 15, а именно: $67 = 4 \cdot 15 + 7$. Далее, выделение целой части отношения $\frac{15}{7}$ соответствует делению с остатком числа 15 на 7, а именно: $15 = 2 \cdot 7 + 1$. Наконец, выделение целой части отношения $\frac{7}{1}$ соответствует делению с остатком числа 7 на 1, а именно: $7 = 7 \cdot 1 + 0$. Так как при этом получается нулевой остаток, процесс заканчивается.

Таким образом, применяя алгоритм Евклида к числам 216 и 67, мы получаем равенства: $216 = 3 \cdot 67 + 15$, $67 = 4 \cdot 15 + 7$, $15 = 2 \cdot 7 + 1$, $7 = 7 \cdot 1$.

Числа, составляющие запись числа $\frac{216}{67}$ в виде цепной дроби, равны соответствующим частным.

Вопрос. Как доказать, что каждое рациональное число единственным образом записывается в виде цепной дроби, если считать, что последнее число в этой записи больше 1?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Какие формы записи одного и того же рационального числа вам известны?
2. Как записывается число $\frac{1}{6}$ в виде бесконечной десятичной дроби?
- 3.* Покажите на примере, как бесконечную периодическую десятичную дробь записать в виде отношения целых чисел.
- 4.** Что такое цепная дробь?
- 5.** Докажите, что каждая цепная дробь представляет собой некоторое рациональное число.
- 6.** Покажите на примере, как из рационального числа, записанного в виде отношения двух целых чисел, получить цепную дробь, которая представляет это же рациональное число.
- 7.** Как найти наибольший общий делитель двух натуральных чисел?
- 8.** Покажите на примере, как по алгоритму Евклида разложить рациональное число в цепную дробь.

■ Задачи и упражнения

1. Запишите в виде бесконечной периодической десятичной дроби рациональное число:

а) $\frac{5}{11}$; б) $\frac{2}{7}$; в) $\frac{4}{3}$; г) $\frac{2}{17}$; д) $\frac{1}{8}$; е) $\frac{3}{125}$; ё) $\frac{15}{2400}$.
2. Докажите, что для любого целого числа a дробь вида $\frac{a}{2^m 5^n}$, где m и n — неотрицательные целые числа, можно записать в виде конечной десятичной дроби.
- 3.** Какие рациональные числа вида $\frac{m}{n}$ представляются в виде конечных десятичных дробей?
- 4.* Запишите в виде обыкновенной несократимой дроби:

а) $\frac{0,2(5)}{0,12(7)}$; б) $0,3(8) \cdot 0,5(45)$; в) $\frac{0,2(27)}{0,(63)}$; г) $0,(351)$.
- 5.* Вычислите $\frac{0,7(2)+0,6(1)+0,8(3)+0,1(6)}{0,7(2)-0,6(1)+0,8(3)-0,1(6)}$.
- 6.** Найдите сумму:

а) $37,(37) + 11,(11)$; б) $1,(4) + 2,(12)$; в) $0,(12) + 0,(123)$;
 г) $0,(98) + 0,(987) + 0,(9876)$; д) $1,(1) + 2,(11) + 3,(111) + 4,(1111)$.

7.** Найдите произведение:

а) $2,(38) \cdot 3,(72)$; б) $1,(123) \cdot 2,(45)$.

8.** Найдите сумму:

а) $\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}}$;

б) $\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}} + \frac{1}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}$;

в) $\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}} + \frac{1}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}}$;

г) $\frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}}} + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5 + \frac{1}{6}}}}$.

9.** Найдите произведение:

а) $[1; 5, 3, 5] \cdot [1; 2, 4, 3]$;

б) $[1; 11, 4] \cdot [0; 21, 3]$.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Известно, что $\frac{1}{9} = 0,(1)$. Какой из указанных бесконечных периодических дробей равно число $\frac{1}{18}$?

- 1) $0,(05)$ 2) $0,0(5)$ 3) $0,(01)$ 4) $0,(10)$

1.2. Известно, что $\frac{1}{30} = 0,0(3)$. Какой из указанных бесконечных периодических дробей равно число $\frac{1}{30} \cdot 3$?

- 1) $0,0(9)$ 2) $0,01(0)$ 3) $0,(01)$ 4) $0,(10)$

1.3. В каком отношении точка, изображающая бесконечную периодическую дробь $0,(5)$, делит промежуток $[0; 1]$ числовой прямой, считая от точки 0?

- 1) $5:4$ 2) $6:4$ 3) $4:5$ 4) $4:6$

1.4. Какой обыкновенной дробью выражается разность $3,5(0) - 2,(3)$?

- 1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{7}{12}$ 4) $\frac{7}{6}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из приведённых выражений являются записями числа $\frac{13}{6}$?

1) $2\frac{1}{6}$

2) $\frac{65}{30}$

3) $2,0(6)$

4) $2,1(6)$

2.2. Какие из приведённых дробей равны $\frac{2}{3}$?

1) $\frac{102}{153}$

2) $\frac{108}{162}$

3) $\frac{126}{186}$

4) $\frac{134}{201}$

2.3. Какие из указанных чисел являются общими делителями чисел 192 и 258?

1) 2

2) 4

3) 6

4) 12

2.4. Отрезки какой длины могут получиться, если делить отрезок длины 12,6 см на целое число равных отрезков?

1) 1,05 см

2) 1,5 см

3) 3,15 см

4) 4,2 см

■ § 3. ОТНОШЕНИЕ ОТРЕЗКОВ

3.1. Соизмеримость и общая мера отрезков.

Пример 1. Рассмотрим отрезок a длиной $\frac{5}{2}$ см и отрезок b длиной $\frac{10}{3}$ см.

Откладывая от одного конца отрезка b отрезки, равные a , мы видим, что отрезок a не помещается целое число раз в отрезке b (рис. 1).

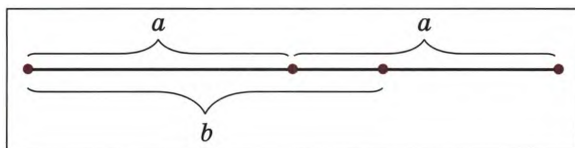


Рис. 1

Разделим отрезок a на две равные части и начнём откладывать на отрезке b отрезки, равные $\frac{a}{2}$. Отрезок $\frac{a}{2}$ также не помещается целое число раз в отрезке b (рис. 2).

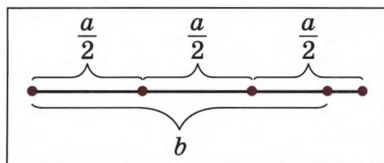


Рис. 2

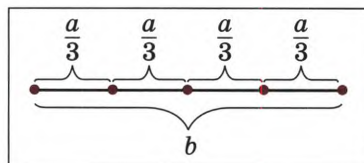


Рис. 3

Разделим теперь отрезок a на три равные части и начнём откладывать на отрезке b отрезки, равные $\frac{a}{3}$. В этом случае отрезок $\frac{a}{3}$ помещается ровно четыре раза на отрезке b (рис. 3).

Таким образом, получен отрезок длиной $\frac{a}{3}$, который целое число раз укладывается и в отрезке a , и в отрезке b . Такой отрезок называют *общей мерой* отрезков a и b , а сами отрезки a и b называют *соизмеримыми*.

Аналогично определяется соизмеримость отрезков и в общем случае.

Два отрезка a и b называются *соизмеримыми*, если найдётся отрезок m , который целое число раз укладывается как в отрезке a , так и в отрезке b .

В этом определении отрезок m называют *общей мерой* отрезков a и b .

Заметим, что если отрезок m является общей мерой отрезков a и b , то, например, отрезок длиной $\frac{m}{2}$ также является общей мерой отрезков a и b .

Вопрос. Как определить наибольшую общую меру двух соизмеримых отрезков?

3.2.** Алгоритм Евклида нахождения общей меры отрезков.

Поиск общей меры двух отрезков можно проводить способом, напоминающим алгоритм Евклида при нахождении наибольшего общего делителя двух целых чисел.

Пусть даны отрезки a и b , имеющие общую меру m , причём a длиннее b .

I шаг. От одного конца отрезка a последовательно отложим отрезки, равные b , так, что либо отрезок b целое число раз уложится в отрезке a , либо останется отрезок r_1 , меньший b (рис. 4).

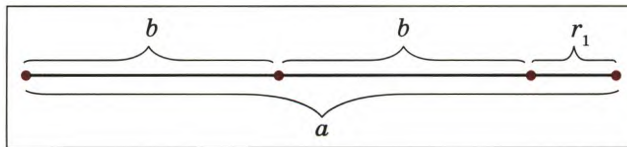


Рис. 4

Заметим, что в первом случае отрезок b будет общей мерой отрезков a и b , а во втором случае отрезки b и r_1 также имеют общую меру m — отрезок m можно целое число раз последовательно уложить в меньшем, чем отрезок b , отрезке r_1 . Если же отрезки b и r_1 имеют какую-то общую меру n , то этот же отрезок n окажется общей мерой отрезков a и b . Отсюда следует, что во втором случае для поиска общей меры отрезков a и b достаточно найти общую меру отрезков b и r_1 .

II шаг. Для поиска общей меры отрезков b и r_1 от одного конца отрезка b последовательно отложим отрезки, равные r_1 , так, что либо отрезок r_1 целое число раз уложится в отрезке b , либо остаётся отрезок r_2 , меньший r_1 (рис. 5). В первом случае отрезок r_1 будет общей мерой отрезков b и r_1 . Во втором случае отрезки r_1 и r_2 также имеют общую меру m .

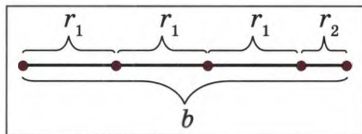


Рис. 5

III шаг. Аналогично предыдущим шагам от одного конца отрезка r_1 последовательно отложим отрезки, равные r_2 , и в результате получим либо то, что отрезок r_2 является общей мерой, либо такой очередной остаток r_3 , что отрезок m будет общей мерой отрезков r_2 и r_3 .

И так далее.

Заметим, что, когда отрезки a и b соизмеримы, их общая мера — отрезок m — на каждом из промежутков r_k последовательно откладывается целое число раз. А поскольку следующий промежуток r_{k+1} (если он существует) строго меньше промежутка r_k , процесс закончится на каком-то n -м шаге тем, что отрезок r_{n-1} отложится на отрезке r_{n-2} целое число раз. Но тогда в силу замечания, сделанного ещё на первом шаге, отрезок r_{n-1} можно целое число раз последовательно отложить на отрезках r_{n-3} , r_{n-4} и так далее, вплоть до начальных отрезков a и b . Таким образом, отрезок r_{n-1} , полученный на n -м шаге алгоритма, является общей мерой соизмеримых отрезков a и b .

Приведённый способ поиска общей меры двух отрезков иногда называют *алгоритмом Евклида для нахождения общей меры*.

Вопрос. Через какое число шагов алгоритм Евклида приведёт к общей мере отрезков a и b , если $a = 55$ см и $b = 34$ см?

3.3. Соизмеримые отрезки и рациональные числа. Выберем на числовой прямой в качестве отрезка a единичный отрезок $[0; 1]$ и рассмотрим произвольный отрезок OB , один из концов которого совпадает с началом O (рис. 6). Докажем, что если отрезок OB соизмерим с отрезком a , то координата точки B рациональна.

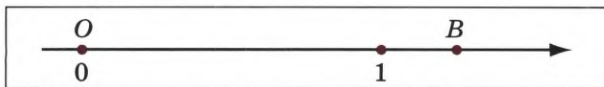


Рис. 6

Действительно, пусть отрезок m укладывается p раз в единичном отрезке и q раз в отрезке OB , где p и q — натуральные числа. Тогда длина отрезка m равна $\frac{1}{p}$, а поэтому длина отрезка OB равна $\frac{p}{q}$. Следовательно, координата точки B равна $\frac{p}{q}$, когда точка B лежит на положительном луче, и равна $-\frac{p}{q}$, когда точка B лежит на отрицательном луче числовой прямой.

Вопрос. Как доказать, что если точка B числовой прямой имеет рациональную координату, то отрезок OB соизмерим с единичным отрезком?

3.4. Существование несоизмеримых отрезков. Для практических измерений обычно достаточно рациональных чисел. Более того, если пытаться изображать точками числовой прямой всё больше и больше рациональных чисел, то может показаться, что каждая точка числовой прямой будет отмечена рациональным числом. Другими словами, может показаться, что все точки числовой прямой — рациональные. Если бы дело обстояло таким образом, то тогда любой отрезок был бы соизмерим с единичным отрезком. Но это не так: существуют несоизмеримые отрезки.

Напомним, что число называется *иррациональным*, если его нельзя представить в виде отношения двух целых чисел. В 8 классе была доказана иррациональность числа $\sqrt{2}$. Зная это, докажем следующее утверждение.

Диагональ квадрата несоизмерима с его стороной.

Доказательство. Примем сторону квадрата за единицу измерения длин и отложим на числовой прямой единичный отрезок OE и отрезок OB , равный диагонали квадрата. По теореме Пифагора $OB = \sqrt{2}$. Так как $\sqrt{2}$ — иррациональное число, из предыдущего пункта следует, что отрезки OE и OB не могут быть соизмеримыми.

Вопрос. Как доказывается иррациональность числа $\sqrt{2}$?

3.5. Несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной.** Несоизмеримость диагонали квадрата с его стороной можно доказать с помощью алгоритма Евклида.

Пусть дан квадрат $ABCD$.

I шаг. С помощью циркуля отложим на диагонали AC отрезок AB_1 , равный AB (рис. 7). При этом получается остаток B_1C , меньший AB .

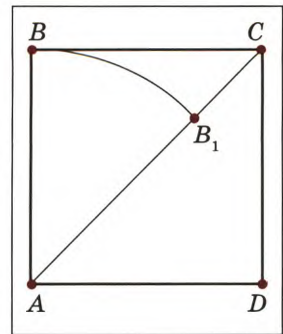


Рис. 7

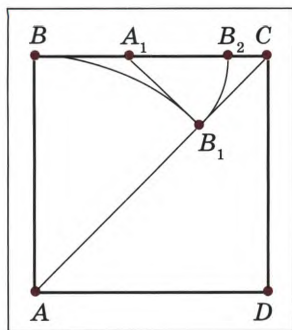


Рис. 8

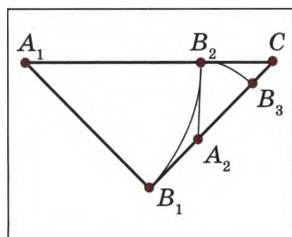


Рис. 9

II шаг. В треугольнике ABC из точки B_1 восстановим перпендикуляр B_1A_1 к отрезку AC и отложим на A_1C отрезок A_1B_2 , равный A_1B_1 (рис. 8). В результате построения имеем $B_1C = BA_1 = A_1B = A_1B_2$. Следовательно, отрезок B_1C два раза отложен на отрезке BC , и при этом получился остаток B_2C . Заметим, что треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC , причём при этом подобии точке B_2 соответствует точка B_1 .

III шаг. Аналогично предыдущему в треугольнике A_1B_1C из точки B_2 восстановим перпендикуляр B_2C_2 к отрезку A_1C и отложим на A_2C отрезок A_2B_3 , равный A_2B_2 (рис. 9). В результате отрезок B_2C два раза отложен на отрезке B_1C , при этом получился остаток B_3C . Снова заметим, что треугольник A_2B_2C подобен треугольнику A_1B_1C , причём точке B_3 соответствует точка B_2 .

Остаётся заметить, что при продолжении намеченного процесса каждый очередной остаток B_nC дважды откладывается на отрезке $B_{n-1}C$, а получающаяся при этом точка B_{n+1} соответствует точке B_n при подобии треугольников A_nB_nC и $A_{n-1}B_{n-1}C$.

Следовательно, для отрезков AC и AB алгоритм Евклида не может закончиться через конечное число шагов. Это означает, что отрезки AC и AB несоизмеримы.

Вопрос. Как выглядит алгоритм Евклида для отрезков $a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ и $b = 1$?

3.6. Сопоставление точке числовой прямой десятичной дроби. Возьмём на положительном луче числовой прямой произвольную точку P . Покажем, как этой точке можно сопоставить вполне определённую бесконечную десятичную дробь.

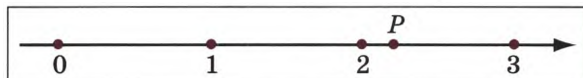


Рис. 10

I шаг. Пусть, например, точка P лежит на полуинтервале $[2; 3)$ (рис. 10). Тогда целая часть числа, соответствующего точке P , равна 2.

II шаг. Разделим полуинтервал $[2; 3)$ на 10 равных полуинтервалов: $[2; 2,1)$, $[2,1; 2,2)$, ..., $[2,9; 3)$ (рис. 11). Точка P содержится в одной из этих непересекающихся частей. Предположим для определённости, что во второй. Тогда первой цифрой после запятой в десятичном разложении числа, отвечающего точке P , будем считать цифру 1.

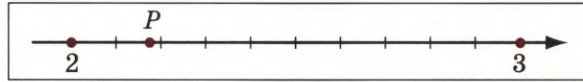


Рис. 11

III шаг. Разделим полуинтервал $[2,1; 2,2)$ на 10 равных полуинтервалов: $[2,1; 2,11)$, $[2,11; 2,12)$, ..., $[2,19; 2,2)$.

В зависимости от того, на каком полуинтервале лежит точка P , определим вторую цифру после запятой в десятичном разложении числа, отвечающего точке P : если точка P на первом полуинтервале, то цифра 0, если на втором, то цифра 1, и так далее.

Продолжая этот процесс, на k -м шаге получаем k -ю цифру после запятой десятичного разложения числа, отвечающего точке P . Заметим, что иногда может получиться бесконечная десятичная дробь, в записи которой, начиная с некоторого разряда, стоят одни нули.

Вопрос. Какая бесконечная десятичная дробь получится, если указанный процесс применить к точке P с координатой 5 ?

3.7.* Сопоставление десятичной дроби точки числовой прямой.

Покажем, как каждой десятичной дроби, у которой бесконечное число знаков отлично от цифры 9, можно сопоставить точку прямой.

Пример 2. Возьмём бесконечную десятичную дробь $p = 3,1415926\dots$. На отрезке $[3; 4]$ расположены все конечные дроби, полученные из дроби p отбрасыванием десятичных знаков после запятой, начиная с любого места. На отрезке $[3,1; 3,2]$ расположены все дроби, полученные отбрасыванием всех десятичных знаков дроби p после запятой, начиная с любого n -го места, где $n \geq 2$. На отрезке $[3,14; 3,15]$ расположены все дроби, полученные отбрасыванием всех десятичных знаков дроби p после запятой, начиная с любого n -го места, где $n \geq 3$, и так далее. Получим бесконечную последовательность отрезков $[3; 4] \supseteq [3,1; 3,2] \supseteq [3,14; 3,15] \supseteq \dots$, причём длины отрезков равны соответственно $1, 10^{-1}, 10^{-2}, \dots$. Отрезки имеют единственную общую точку P , которую сопоставим дроби p . Если точке P по правилам пункта 3.6 сопоставить бесконечную десятичную дробь, то получится дробь p .

Вопрос. Как по изображениям чисел 0 и 1 на числовой прямой с помощью циркуля и линейки построить точку, изображающую число $\sqrt{3}$?

3.8. Десятичная дробь, сопоставленная точке прямой, не может иметь период, состоящий из одних девяток.** Рассмотренный в пункте 3.6. процесс не может привести к тому, что точке P числовой прямой соответствует бесконечная десятичная дробь, у которой, начиная с некоторого разряда, все цифры после запятой равны 9. Поясним это на примере.

Предположим, что некоторой точке P соответствует запись $0,1999...9...$. Это означает, что точка P лежит в полуинтервале $[0,1; 0,2)$; лежит в полуинтервале $[0,19; 0,2)$; лежит в полуинтервале $[0,199; 0,2)$ и так далее. Отсюда следует, что точка P должна принадлежать всем указанным полуинтервалам. Однако никакая точка числовой прямой не может быть общей для всех этих полуинтервалов.

Действительно, если взять точку M с координатой меньше $(0; 2)$, то такая точка не принадлежит ни одному из полуинтервалов вида $[0,19...9; 0,2)$, а именно не может принадлежать никакому полуинтервалу с правым концом $0,2$, длина которого меньше расстояния от точки M до точки, помеченной числом $0,2$. Точки с координатами, большими координаты точки M , также не принадлежат ни одному из указанных полуинтервалов. Точка с координатой $0,2$ также не принадлежит ни одному из указанных полуинтервалов.

Таким образом, ни одна из точек числовой прямой не может принадлежать всем указанным полуинтервалам.

В результате предположение о том, что некоторой точке P числовой прямой соответствует бесконечная десятичная дробь вида $0,199...9...$, приводит к противоречию.

Вопрос. Может ли быть пустым пересечение последовательности вложенных друг в друга замкнутых отрезков числовой прямой?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Какие отрезки называются соизмеримыми?
2. Какой отрезок называется общей мерой двух соизмеримых отрезков?
3. Как можно охарактеризовать все отрезки, соизмеримые с единичным отрезком?
4. Поясните, почему диагональ квадрата несоизмерима с его стороной.
- 5.** К чему приводит применение алгоритма Евклида для соизмеримых отрезков?

Задачи и упражнения ■

1. Найдите наибольшую общую меру отрезков длиной $\frac{1}{3}$ и $\frac{5}{7}$.
- 2.** Рассмотрите два отрезка длиной 21 см и 51 см. Через какое число шагов алгоритм Евклида приведёт к их общей мере?
3. Как доказать, что любые два отрезка, длины которых выражаются рациональными числами, соизмеримы?
4. Докажите иррациональность числа: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$.
5. Докажите, что катет AC прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой $CB = 2$ и катетом $AB = 1$ несоизмерим ни с катетом AB , ни с гипотенузой CB .
6. Докажите, что гипотенуза CB прямоугольного треугольника ABC с катетами $AB = 1$, $AC = 2$ несоизмерима ни с одним из катетов.
- 7.* Как найти на числовой оси точку, отвечающую бесконечной десятичной дроби $0,333\dots$?

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Даны два отрезка длиной 5 см 6 мм и 6 см 4 мм. Отрезок какой длины из указанных является общей мерой данных отрезков?

- 1) 6 мм 2) 8 мм 3) 12 мм 4) 18 мм

1.2. Даны два отрезка длиной $2\frac{11}{12}$ см и $3\frac{1}{18}$ см. Отрезок какой длины из указанных является общей мерой данных отрезков?

- 1) $\frac{3}{36}$ см 2) $\frac{4}{36}$ см 3) $\frac{5}{36}$ см 4) $\frac{6}{36}$ см

1.3. Отрезок какой длины является наибольшей общей мерой для отрезков длиной 133 мм и 259 мм?

- 1) 1 мм 2) 3 мм 3) 7 мм 4) 11 мм

1.4. Отрезок какой длины из указанных является общей мерой двух отрезков, длины которых в сантиметрах записываются бесконечными периодическими десятичными дробями $0,(12)$ и $0,(21)$?

- 1) $0,(02)$ 2) $0,(03)$ 3) $0,(04)$ 4) $0,(05)$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Даны два отрезка длиной 28 см и 66 см. Отрезки какой длины из указанных являются общей мерой данных отрезков?

1) $\frac{2}{9}$ см

2) $\frac{3}{7}$ см

3) $\frac{4}{19}$ см

4) $\frac{1}{15}$ см

2.2. Даны два отрезка длины $\frac{1}{60}$ см и $\frac{1}{90}$ см. Отрезки какой длины из указанных не являются общей мерой данных отрезков?

1) $\frac{1}{150}$ см

2) $\frac{1}{360}$ см

3) $\frac{1}{420}$ см

4) $\frac{1}{540}$ см

2.3. Для каких пар отрезков с указанными длинами отрезок длиной $\frac{7}{60}$ см является их общей мерой?

1) $1\frac{2}{3}$ см и $2\frac{1}{3}$ см

2) $3\frac{1}{2}$ см и $2\frac{1}{3}$ см

3) $5\frac{1}{4}$ см и $5\frac{5}{6}$ см

4) $2\frac{3}{4}$ см и $3\frac{1}{3}$ см

2.4. Для каких пар отрезков с указанными длинами отрезок длиной $\frac{15}{7}$ см не является их общей мерой?

1) 10 см и 45 см

2) 20 см и 85 см

3) 30 см и 105 см

4) 40 см и 65 см

■ § 4. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ И ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

4.1. Определение неотрицательного действительного числа.

Используя установленное соответствие между точками числовой прямой и бесконечными десятичными дробями, определим действительные числа.

Неотрицательным действительным числом называется бесконечная десятичная дробь вида $a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$, где a_0 — целое неотрицательное число и a_k при $k \geq 1$ — цифра от 0 до 9, причём цифра 9 не является периодом этой дроби.

Если, начиная с некоторого номера, все цифры a_i в записи действительного числа равны нулю, то для краткости эти нули опускают. Например, $0,5000\dots 0\dots = 0,5$.

Вопрос. Что вы можете сказать о действительном числе $0,000\dots 0\dots$?

4.2. Определение отрицательного действительного числа.

Напомним, что отрицательные целые числа можно задавать как числа, противоположные натуральным. Аналогично *отрицательные действительные числа* определим как числа, противоположные неотрицатель-

ным действительным числам, не равным 0, используя знак «минус» для обозначения отрицательного числа.

Например, $-0,333...3...$ обозначает действительное число, противоположное действительному числу $0,333...3...$

Иногда действительные числа также называют *вещественными* числами. Множество всех действительных (вещественных) чисел мы будем обозначать буквой R .

Вопрос. Что можно сказать о действительном числе $(-0,333...3...)$?

4.3. Иррациональные числа. Во множестве R действительных чисел рациональным числам соответствуют конечные дроби или бесконечные периодические десятичные дроби.

Иррациональным называется действительное число, которое не является рациональным. Другими словами, иррациональное число — это бесконечная непериодическая десятичная дробь.

Наиболее часто используемые иррациональные числа для краткости обозначают некоторыми буквами или символами. Так, знаменитое число π иррационально и во всех формулах записывается не как бесконечная десятичная дробь, а как буква π .

Аналогично, иррациональное число $\sqrt{2}$ записывается не как бесконечная десятичная дробь, а так, как мы его привыкли записывать — с помощью радикала. Тем не менее числу $\sqrt{2}$ соответствует бесконечная непериодическая десятичная дробь, у которой можно вычислить достаточно много цифр после запятой: $\sqrt{2} = 1,4142...$. Однако эффективной формулы, которая позволяла бы по номеру k вычислять k -ю цифру числа $\sqrt{2}$, до сих пор не имеется.

Вопрос. Как доказать, что число $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ рационально?

4.4. Иррациональность числа $1+\sqrt{1+\sqrt{2}}$.** Иррациональность некоторого числа иногда удаётся доказать «методом от противного».

Пример 1. Доказать, что число $1+\sqrt{1+\sqrt{2}}$ иррационально, предполагая, что иррациональность числа $\sqrt{2}$ уже установлена.

Доказательство. Предположим, что $1+\sqrt{1+\sqrt{2}} = r$, где r — рациональное число. Тогда $1+\sqrt{2} = (r-1)^2$, $\sqrt{2} = (r-1)^2 - 1$. Так как числа $r-1$, $(r-1)^2$, $(r-1)^2 - 1$ при рациональном r также рациональны, в правой части равенства $\sqrt{2} = (r-1)^2 - 1$ стоит рациональное число. Как доказано в пункте 3.5, число $\sqrt{2}$ иррационально, поэтому не может равняться рациональному числу.

Полученное противоречие означает, что предположение о рациональности числа $1 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}$ неверно. Следовательно, это число иррационально.

Вопрос. Как доказать иррациональность числа $\sqrt{2} + \sqrt{3}$?

4.5. Пример непериодической десятичной дроби.** Непериодичность цифр записи иррационального числа в виде бесконечной десятичной дроби позволяет привести новые примеры иррациональных чисел.

Пример 2. Рассмотрим действительное число $x = 0,101001000\dots$, у которого после запятой в указанном порядке записаны все натуральные степени числа 10. Докажем, что получившееся число x иррационально.

Доказательство. Предположим, что x рационально. Тогда соответствующая бесконечная десятичная дробь периодична. Это значит, что найдётся набор цифр $(a_1 a_2 \dots a_p)$ длины p такой, что запись числа x имеет вид $0, \dots a_1 a_2 \dots a_p a_1 a_2 \dots a_p a_1 \dots$ начиная с некоторого k -го разряда. Заметим, что все цифры a_1, a_2, \dots, a_p не могут быть нулями, так как найдётся степень десяти, которая записывается после k -й цифры. С другой стороны, после k -й цифры встретится запись такой степени числа 10, в которой больше чем $2p$ нулей, то есть набор из p цифр $a_1 a_2 \dots a_p$ стоит там, где расположены нули. Следовательно, весь этот набор состоит из нулей.

Таким образом, предположение о существовании периода в десятичной записи числа x приводит к противоречию. Следовательно, x — непериодическая бесконечная десятичная дробь, то есть иррациональное число.

Вопрос. Как доказать иррациональность числа, у которого после запятой подряд выписаны все натуральные числа?

4.6. Представление действительных чисел в двоичной системе счисления.** Как и рациональные числа, действительные числа допускают разные способы записи. В этом пункте мы рассмотрим, как представлять действительные числа в двоичной системе счисления.

Возьмём на числовой прямой произвольную точку P с положительной координатой x и последовательно выполним следующие построения.

I шаг. Построим полуинтервал $[k; k + 1)$ с целыми концами, содержащий точку P , и запишем число k в двоичной системе.

II шаг. Разделим полуинтервал $[k; k + 1)$ на два полуинтервала $\left[k; k + \frac{1}{2}\right)$ и $\left[k + \frac{1}{2}; k + 1\right)$ длиной $\frac{1}{2}$. Если точка P лежит в левой части, то первой цифрой после запятой в двоичном разложении будем считать цифру 0,

а если в правой части — то первой цифрой после запятой будем считать цифру 1.

III шаг. Разделим содержащий точку P полуинтервал длиной $\frac{1}{2}$ на два полуинтервала длиной $\frac{1}{4}$. Аналогично предыдущему, второй цифрой после запятой числа x будем считать цифру 0, если точка P лежит в левой части, и второй цифрой после запятой числа x будем считать цифру 1, если точка P лежит в правой части.

Продолжая этот процесс, на k -м шаге получим k -ю цифру после запятой двоичного разложения числа x , отвечающего точке P .

Тем самым точке P можно сопоставить бесконечную двоичную дробь, цифрами которой являются числа 0 и 1.

Вопрос. Как записать в десятичной системе число, запись которого в двоичной системе имеет вид 11,010101...?

4.7. Иррациональные числа и бесконечные цепные дроби.** Во втором параграфе было показано, что каждое рациональное число можно записать в виде конечной цепной дроби. Оказывается, что иррациональному числу можно сопоставить бесконечную цепную дробь. Ограничимся примером.

Пример 3. Возьмём число $\sqrt{2}$ и выделим целую часть. Получим $\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{r_1}$, где $r_1 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$. Затем у числа r_1 выделим целую часть и получим $r_1 = 2 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{r_2}$, где $r_2 = r_1 = \sqrt{2} + 1$.

Так как $r_2 = r_1$, при выделении у числа r_2 целой части повторятся предыдущие действия, и в результате получим $r_2 = 2 + \frac{1}{r_3}$, где $r_3 = r_2$. Повторив эти действия n раз, можем записать равенства:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{r_1} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{r_2}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{r_3}}} = \dots = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{2 + \frac{1}{r_n}}}}},$$

где $r_n = r_1 = \sqrt{2} + 1$.

Так как аналогичное представление возможно при каждом натуральном n , числу $\sqrt{2}$ ставят в соответствие бесконечную цепную дробь, кото-

рую записывают в виде $[1; 2, 2, 2, 2, \dots]$. Иногда в этом случае говорят, что число $\sqrt{2}$ представлено в виде бесконечной цепной дроби.

Конечные цепные дроби $[1]$, $[1; 2]$, $[1; 2, 2]$, $[1; 2, 2, 2]$ и так далее называются *подходящими* дробями для получившейся бесконечной цепной дроби.

Вопрос. Как представить $\sqrt{3}$ в виде цепной дроби?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется неотрицательное действительное число?
2. Как определяются отрицательные действительные числа?
3. Какую особенность имеют бесконечные десятичные дроби, которые представляют рациональные числа?
4. Какую особенность имеют бесконечные десятичные дроби, которые представляют иррациональные числа?
5. Как методом рассуждений «от противного» доказать, что $\sqrt{2}$ число иррациональное?
- 6.** Как представляются иррациональные числа в виде цепных дробей?

■ Задачи и упражнения

1. Докажите, что число $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 2\sqrt{2}$ рациональное.
2. Докажите, что число $\sqrt{6} - \sqrt{2}$ иррациональное.
3. Может ли сумма рационального и иррационального числа быть числом рациональным?
4. Может ли сумма двух иррациональных чисел быть числом рациональным?
5. Может ли произведение двух иррациональных чисел быть числом рациональным?
- 6.** Докажите иррациональность числа $\sin 15^\circ$.
- 7.** Докажите иррациональность числа $\sqrt[3]{2}$.
- 8.** Докажите, что число $0,11010001\dots$, у которого на 1, 2, 4, 8, \dots , 2^n , \dots местах стоят единицы, а все остальные цифры нули, является иррациональным числом.
- 9.** Будет ли рациональным число, у которого на 1, 2, 4, 8, \dots , 2^n , \dots местах стоит 1, а все остальные цифры девятки?
- 10.** Представьте цепными дробями следующие числа:

а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; в) $\sqrt{5}$.

11.** Докажите, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ не могут быть членами (не обязательно последовательными) одной арифметической прогрессии.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1.* Какому из следующих чисел равно выражение $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$?

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

1.2. Какое число представляет бесконечная периодическая дробь 0,545454...?

- 1) $\frac{4}{11}$ 2) $\frac{5}{11}$ 3) $\frac{6}{11}$ 4) $\frac{7}{11}$

1.3. Чему равняется $\sqrt{30-12\sqrt{6}}$?

- 1) $2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ 2) $2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$
3) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ 4) $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

1.4. Чему равняется 0,006666...?

- 1) $\frac{1}{15}$ 2) $\frac{1}{30}$ 3) $\frac{1}{150}$ 4) $\frac{1}{300}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. В каких случаях произведение указанных иррациональных чисел α и β является рациональным числом?

- 1) $\alpha = 6\sqrt{3}+10\sqrt{2}$, $\beta = 12\sqrt{3}-5\sqrt{2}$
2) $\alpha = 6\sqrt{3}+5\sqrt{2}$, $\beta = 12\sqrt{3}-10\sqrt{2}$
3) $\alpha = 6\sqrt{3}-2\sqrt{6}$, $\beta = 3\sqrt{3}+\sqrt{6}$
4) $\alpha = \sqrt{3}-4\sqrt{6}$, $\beta = 2\sqrt{3}+\sqrt{6}$

2.2. Какие числа представимы в виде конечной десятичной дроби?

- 1) $\frac{11}{16}$ 2) $\frac{23}{32}$ 3) $\frac{45}{48}$ 4) $\frac{59}{64}$

2.3. Какие бесконечные периодические дроби больше $\frac{4}{7}$?

- 1) 0,(49) 2) 0,(54) 3) 0,(59) 4) 0,(63)

2.4. Значения каких из приведённых выражений рациональны?

- 1) $|3-\sqrt{3}|+|1-\sqrt{3}|$ 2) $|2-\sqrt{5}|-|\sqrt{5}-3|$
3) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{6}-1)^2$ 4) $(2\sqrt{3}-3)^2-(3\sqrt{3}-2)^2$

■ § 5. СВОЙСТВА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

5.1. Десятичные приближения положительного числа. Возьмём положительное действительное число

$$x = M, a_1 a_2 a_3 \dots$$

Целое число $x_0 = M$ называют *десятичным приближением снизу* числа x с точностью до 1, а целое число $x'_0 = M + 1$ — *десятичным приближением сверху* числа x с точностью до 1.

Аналогично число $x_1 = M, a_1$ называют *десятичным приближением снизу* числа x с точностью до 0,1; число $x'_1 = M, a_1 + \frac{1}{10}$ — *десятичным приближением сверху* числа x с точностью до 0,1. Эти приближения называют также приближениями с точностью до одного знака после запятой.

Аналогично определяются десятичные приближения числа x и с другим числом знаков после запятой.

Конечная десятичная дробь $x_n = M, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ называется *десятичным приближением снизу* числа x с точностью до 10^{-n} , или с точностью до n знаков после запятой, а десятичная дробь $x'_n = M, a_1 a_2 a_3 \dots a_n + \frac{1}{10^n}$ называется *десятичным приближением сверху* числа x с точностью до 10^{-n} , или с точностью до n знаков после запятой.

Вопрос. Каковы десятичные приближения числа $\sqrt{5}$ с точностью до двух знаков после запятой?

5.2. Десятичные приближения отрицательного числа. Для отрицательного действительного числа $x = -M, a_1 a_2 a_3 \dots$ десятичные приближения определяются следующим образом.

Целое число $x_0 = -M - 1$ называется *десятичным приближением снизу* числа x , а целое число $x'_0 = -M$ — *десятичным приближением сверху* числа x с точностью до 1.

Конечная десятичная дробь $x_n = -M, a_1 a_2 \dots a_n - \frac{1}{10^n}$ называется *десятичным приближением снизу* числа x с точностью до 10^{-n} , или с точностью до n знаков после запятой, а десятичная дробь $x'_n = -M, a_1 a_2 \dots a_n$ десятичным приближением сверху числа x с точностью до 10^{-n} , или с точностью до n знаков после запятой.

Вопрос. Каковы десятичные приближения числа $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ с точностью до двух знаков после запятой?

5.3. Монотонность десятичных приближений.** Десятичные приближения любого действительного числа обладают следующим свойством.

Для каждого действительного числа x при любом натуральном n выполняются неравенства $x_{n+1} \geq x_n$, $x'_{n+1} \leq x'_n$.

Доказательство. Проведём доказательство для отрицательного числа $x = -M, a_1 a_2 \dots$.

Сначала заметим, что при любом натуральном n для следующих конечных десятичных дробей справедливы соотношения

$$M, a_1 a_2 \dots a_n = M, a_1 a_2 \dots a_n 0 \leq M, a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}.$$

Отсюда $-M, a_1 a_2 \dots a_n \geq -M, a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}$, то есть $x'_n \geq x'_{n+1}$.

Затем заметим, что

$$M, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n+1}} = M, a_1 a_2 \dots a_n 9 \geq M, a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1}.$$

Поэтому

$$M, a_1 a_2 \dots a_n + \frac{1}{10^n} \geq M, a_1 a_2 \dots a_{n+1} + \frac{1}{10^{n+1}},$$

$$-M, a_1 a_2 \dots a_n - \frac{1}{10^n} \leq -M, a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} - \frac{1}{10^{n+1}},$$

то есть $x_n \leq x_{n+1}$.

Вопрос. Как доказать указанное свойство для положительных чисел x ?

5.4. Порядок на множестве действительных чисел. Действительные числа сравнивают по величине. Для этого определяют понятия «больше», «меньше», то есть определяют отношение порядка.

На числовой прямой с положительным направлением вправо сравнение действительных чисел определяется следующим образом.

Пусть числа x и y изображаются соответственно точками A и B числовой прямой с положительным направлением вправо. Тогда $x < y$, если точка A лежит левее точки B ; $x = y$, если точки A и B совпадают; $x > y$, если точка A лежит правее точки B .

Это определение позволяет сравнить любые два действительных числа по их изображениям на числовой прямой. Заметим, что если $x < y$, то тогда $y > x$.

Остальные виды неравенств между действительными числами определяются следующим образом: $x \geq y$, если либо $x > y$, либо $x = y$; $x \leq y$, если либо $x < y$, либо $x = y$.

Вопрос. Как проиллюстрировать на числовой прямой, что если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$?

5.5.* Сравнение чисел с помощью десятичных приближений.

Сравнение действительных чисел по величине можно определить, используя их десятичные приближения.

Действительное число x меньше действительного числа y , если найдётся такое n , что десятичное приближение сверху x_n числа x изображается точкой, лежащей левее точки, изображающей десятичное приближение снизу y_n числа y , то есть $x'_n < y_n$.

Нетрудно понять, что тогда для любого натурального числа $m > n$ также $x'_m < y_m$.

Вопрос. Какое из чисел больше: $\sqrt{2} - 1$ или 0,5?

5.6. Правило сравнения положительных чисел по их десятичной записи. Пусть $x = M, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots$, $y = K, \beta_1 \dots \beta_n \dots$.

I шаг. Сравним целые части чисел x и y .

Если $K > M$, то $y > x$;

если $K < M$, то $y < x$;

если $K = M$, то процесс сравнения продолжается.

II шаг. Сравним цифры α_1 и β_1 .

Если $\alpha_1 < \beta_1$, то $x < y$;

если $\alpha_1 > \beta_1$, то $x > y$;

если $\alpha_1 = \beta_1$, то процесс сравнения продолжается.

III шаг. Аналогично предыдущему шагу сравним цифры α_2 и β_2 и так далее.

Таким образом, либо все десятичные цифры чисел x и y совпадают, и тогда $x = y$, либо $x > y$, либо $x < y$.

Вопрос. Как доказать, что $x_n \leq x$, если x_n — десятичное приближение снизу числа x ?

5.7. Свойства арифметических операций. Для действительного числа x рассмотрим последовательности (x_n) и (x'_n) его десятичных приближений снизу и сверху; для действительного числа y — последовательности (y_n) и (y'_n) его десятичных приближений снизу и сверху. В границах между всеми числами вида $x_n + y_n$ и всеми числами вида $x'_n + y'_n$ расположено единственное число, которое называется суммой чисел x , y и обозначается через $x + y$.

Аналогично для положительных чисел x и y определяется произведение $x \cdot y$ как единственное число, лежащее в границах между числами вида $x_n \cdot y_n$ и числами вида $x'_n \cdot y'_n$. После этого, учитывая знаки сомножителей, можно распространить операцию умножения на множество всех действительных чисел.

При таких определениях основные свойства операций сложения и умножения, справедливые для множества Q рациональных чисел, сохраняются и для арифметических операций в множестве R действительных чисел.

Пусть R — множество действительных чисел и буквами x, y, z обозначаются числа из R . Тогда операции сложения, умножения и отношение порядка удовлетворяют следующим свойствам:

1. $x + y = y + x$.
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$.
3. Существует такое число 0, что $x + 0 = x$.
4. Для каждого $x \in R$ существует $(-x) \in R$, такое, что $x + (-x) = 0$.
5. $xy = yx$.
6. $x(yz) = (xy)z$.
7. Существует такое число 1, отличное от 0, что $x \cdot 1 = x$.
8. Для каждого ненулевого $x \in R$ существует число $x^{-1} \in R$, такое, что $x \cdot x^{-1} = 1$.
9. $x(y + z) = xy + xz$.
10. Если $x < y$ и $y < z$, то $x < z$.
11. Если $x < y$ и z — любое число из R , то $x + z < y + z$.
12. Если $x < y$ и $z > 0$, то $xz < yz$.

Аналогично тому, как это делается для множества Q рациональных чисел, приведённые свойства позволяют определить операции вычитания, деления действительных чисел и получать новые свойства.

Вопрос. Как определить модуль действительного числа x ?

5.8. Число заключено между десятичными приближениями снизу и сверху.** Рассмотрим действительное число x и последовательности (x_n) и (x'_n) его десятичных приближений снизу и сверху. Тогда для каждого натурального n число x принадлежит промежутку $[x_n; x'_n]$ и выполняется неравенство $x_n \leq x \leq x'_n$.

Отсюда следует, что $0 \leq x - x_n \leq x'_n - x_n$, $0 \leq x'_n - x \leq x'_n - x_n$, или $|x - x_n| \leq x'_n - x_n = 10^{-n}$, $|x'_n - x| \leq x'_n - x_n = 10^{-n}$.

Вопрос. Каковы десятичные приближения числа $\sqrt{3}$ с точностью до $\frac{1}{100}$?

5.9. Определение суммы действительных чисел.** Разберём один из способов определения суммы действительных чисел.

Пусть x и y — два действительных числа, (x_n) , (x'_n) — последовательности десятичных приближений числа x снизу и сверху, (y_n) , (y'_n) — последовательности десятичных приближений числа y снизу и сверху соответственно. Тогда последовательность $(x_n + y_n)$ — возрастающая, последовательность $(x'_n + y'_n)$ — убывающая и $x_n + y_n < x'_n + y'_n$, $(x'_n + y'_n) - (x_n + y_n) = \frac{2}{10^n}$. Следовательно, отрезки $[x_n + y_n; x'_n + y'_n]$ образуют стягивающуюся последовательность отрезков числовой прямой. По аксиоме Кантора существует единственное число, общее для всех этих отрезков. Это число, по определению, называется суммой чисел x и y и обозначается $x + y$.

Вопрос. Как аналогично определить произведение положительных действительных чисел?

5.10. Приближённые значения результатов арифметических операций. Десятичные приближения действительных чисел позволяют находить приближённые значения сумм, разностей, произведений и частных со сколь угодно высокой точностью.

Пример 1. Пусть $x = 2,31452\dots$ и $y = 1,61326\dots$. Эта запись означает, что $2,31452 \leq x < 2,31453$; $1,61326 \leq y < 1,61327$. Отсюда $3,92778 \leq x + y < 3,92780$. Следовательно, $x + y \approx 3,92779$. При этом абсолютная погрешность такого приближения не больше 10^{-5} .

Пример 2. Пусть $x = 7,182\dots$ и $y = 3,651\dots$. Отсюда $7,182 \leq x < 7,183$; $3,651 \leq y < 3,652$ и $7,182 \cdot 3,651 \leq xy < 7,183 \cdot 3,652$; $26,221482 \leq xy < 26,232316$. Следовательно, $xy \approx 26,23$ с абсолютной погрешностью не более $\frac{1}{100}$.

Пример 3. Пусть $x = 2,53148\dots$ и $y = 0,718105\dots$. Тогда $\frac{2,531}{0,719} < \frac{x}{y} < \frac{2,532}{0,718}$; $3,520 < \frac{x}{y} < 3,527$. Следовательно, $\frac{x}{y} \approx 3,52$ с абсолютной погрешностью не более $\frac{1}{100}$.

Вопрос. Как получить приближённое значение произведения действительных чисел $x = 1,38412793\dots$ и $y = -6,20819525\dots$ с точностью до $\frac{1}{100}$?

5.11. Запись бесконечной периодической дроби в виде обыкновенной дроби. Покажем, как по бесконечной десятичной периодической дроби можно получить соответствующее этой дроби рациональное число, используя свойства операций над действительными числами.

Пример 4. Пусть $x = 2,(61)$. Период этой дроби состоит из двух цифр. Поэтому $100x = 261,(61)$. Тогда

$$100x - x = (261 + 0,(61)) - (2 + 0,(61)) = 261 - 2 = 259.$$

$$\text{Следовательно, } x = \frac{259}{99}.$$

Пример 5. Пусть $x = 0,(236)$. Период этой дроби состоит из трёх цифр. Поэтому $1000x = 236,(236)$. Значит,

$$1000x - x = (236 + 0,(236)) - (0,236) = 236.$$

$$\text{Следовательно, } x = \frac{236}{999}.$$

Вопрос. Как доказать, что $2,(61) = 2 + 0,(61)$?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Что называется десятичным приближением положительного действительного числа с точностью до n знаков после запятой?
2. Что называется десятичным приближением отрицательного действительного числа с точностью до n знаков после запятой?
3. Чему равна разность между десятичными приближениями числа, взятыми с точностью до n знаков после запятой?
- 4.** Какие свойства десятичных приближений числа вы знаете?
5. Как сравнивать действительные числа по их изображениям на числовой прямой?
6. Как сравнивать действительные числа по их десятичной записи?
7. Какие свойства операций сложения и умножения для действительных чисел вы знаете?
8. Какие свойства числовых неравенств вы знаете?

Задачи и упражнения ■

1. Запишите рациональное число $\frac{1}{6}$ в виде бесконечной десятичной дроби и укажите его десятичные приближения снизу и сверху с точностью до n знаков после запятой для $n = 1, 2, 3, 4$.

2. Запишите рациональное число $\frac{1}{7}$ в виде бесконечной десятичной дроби и укажите его приближения снизу и сверху с точностью до n знаков после запятой для $n = 1, 2, 3, 4$.

3. Найдите приближение с точностью до 0,1 для следующего иррационального числа:

$$\text{а) } \sqrt{6}; \quad \text{б) } \sqrt{5}; \quad \text{в) } \sqrt{7}; \quad \text{г) } 4 + \sqrt{15}; \quad \text{д) } \sqrt{245}; \quad \text{е) } \sqrt[3]{5}.$$

4. Приведите примеры рациональных и иррациональных чисел, лежащих между числами 0,6101 и 0,61.

5. Существуют ли два действительных числа, между которыми находится ровно 100 различных рациональных чисел, а больше находиться не может?

6. Пусть $x = 2,64\dots$, $y = 5,32\dots$. В каких границах расположены числа $x + y$, $x \cdot y$, $\frac{x}{y}$?

7. Пусть $x = 2,32\dots$, $y = 4,14\dots$. В каких границах расположены числа $x + y$, $x \cdot y$, $\frac{x}{y}$?

8. Пусть $x = 2,684\dots$, $y = 4,461\dots$. Чему равны значения $x + y$, $x \cdot y$, $\frac{x}{y}$ с точностью до одного знака после запятой?

9. Запишите в виде отношения двух целых чисел следующее число:

а) $0,(54) \cdot 0,(1)$; б) $\frac{0,(21)}{0,(12)}$; в) $1,6(1) \cdot 0,5(7)$; г) $\frac{0,7(72)}{0,(36)}$.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равно десятичное приближение снизу числа $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$ с точностью до одного знака после запятой?

1) 9,7 2) 9,8 3) 9,9 4) 10,0

1.2. Чему равно десятичное приближение снизу числа $2,30096\dots$ с точностью до 10^{-3} ?

1) 2,29 2) 2,3 3) 2,31 4) 2,301

1.3. Чему равно десятичное приближение сверху числа $(-3,09095\dots)$ с точностью до 10^{-3} ?

1) -3,1 2) -3 3) -3,09 4) -3,091

1.4.* Чему равно десятичное приближение снизу числа $\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$ с точностью до двух знаков после запятой?

1) 2,89 2) 2,90 3) 2,91 4) 2,92

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из указанных чисел больше $\frac{1}{2}$?

1) $4 - \sqrt{10}$ 2) $\sqrt{5} - 2$ 3) $3 - \sqrt{7}$ 4) $\sqrt{6} - 2$

2.2. Какие из указанных чисел больше $\sqrt{0,001}$?

- 1) $\frac{1}{30}$ 2) $\frac{1}{31}$ 3) $\frac{1}{32}$ 4) $\frac{1}{33}$

2.3. Какие из указанных чисел меньше $\sqrt{\frac{1}{2}}$?

- 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{5}{8}$ 4) $\frac{11}{16}$

2.4. Какие из приведённых неравенств для числа $\sqrt{37}$ являются верными?

- 1) $\sqrt{37} > 6\frac{1}{12}$ 2) $\sqrt{37} < 6\frac{1}{12}$ 3) $\sqrt{37} > 6\frac{1}{13}$ 4) $\sqrt{37} < 6\frac{1}{13}$

Мини-исследования к главе ■

Мини-исследование 4

Как известно, сумма рациональных чисел r_1 и r_2 , записываемых дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, определяется следующим образом: это рациональное число, которое записывается дробью $\frac{ad+bc}{bd}$. Возникает естественный вопрос — а если взять другие записи рациональных чисел r_1 и r_2 , например дроби $\frac{a'}{b'}$ и $\frac{c'}{d'}$, то почему полученная по указанному правилу новая дробь $\frac{a'd'+b'c'}{b'd'}$ является записью того же рационального числа, которое записывается дробью $\frac{ad+bc}{bd}$? Для ответа на этот вопрос следует:

1) заметить, что две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{a'}{b'}$ равны (и поэтому являются записью одного и того же рационального числа) в том и только том случае, когда $ab' = a'b$;

2) проверить, что если $ab' = a'b$, $cd' = c'd$, то выполняется равенство $(ad+bc)b'd' = (a'd'+b'c')bd$.

Покажите, что определение умножения рациональных чисел также не зависит от выбора их записи в виде обыкновенной дроби.

Напомним, что сравнение рациональных чисел r_1 и r_2 , записываемых дробями $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ с положительными знаменателями, определяется следующим образом: $r_1 < r_2$ в том и только том случае, когда $ad < bc$. Покажите,

что и это определение не зависит от выбора записи рациональных чисел в виде обыкновенной дроби с положительным знаменателем.

Мини-исследование 5

Для цепной дроби $a = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ можно рассмотреть цепные дроби $a_0 = [a_0] = \frac{a_0}{1}$, $a_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$, $[a_0; a_1, a_2]$ и так далее. Каждая цепная дробь $a_k = [a_0; a_1, \dots, a_k]$, где $0 \leq k \leq n$, называется k -й подходящей дробью к числу a .

1. Докажите, что подходящую дробь a_k можно представить в виде отношения $\frac{P_k}{Q_k}$ целых чисел P_k и Q_k , которые вычисляются по правилам:

$P_0 = a_0$, $Q_0 = 1$, $P_1 = a_0 a_1 + 1$, $Q_1 = a_1$, $P_k = a_k P_{k-1} + P_{k-2}$, $Q_k = a_k Q_{k-1} + Q_{k-2}$ при $2 \leq k \leq n$.

2. Пусть для цепной дроби $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_2]$ подходящие дроби α_k представлены в виде $\frac{P_k}{Q_k}$, где P_k и Q_k вычисляются по правилам, указанным в пункте 1. Докажите, что:

а) $P_k Q_{k-1} - P_{k-1} Q_k = (-1)^{k-1}$;

б) P_k и Q_k взаимно просты;

в) $\frac{P_k}{Q_k} - \frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{Q_{k-1} Q_k}$;

г) $a_{2m-2} < a_{2m}$;

д) $a_{2m-1} > a_{2m+1}$.

Мини-исследование 6

1. Докажите иррациональность числа $\sqrt{3}$. Для этого предположите, что $\sqrt{3}$ можно записать в виде несократимой дроби, и покажите, что это предположение приводит к противоречию.

2. Докажите по аналогичной схеме иррациональность числа $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

3. Докажите иррациональность числа \sqrt{p} , где p — простое положительное число.

4. Докажите иррациональность числа $\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2}$, где p_1 и p_2 — простые положительные числа.

5. Докажите, используя метод математической индукции, иррациональность числа $\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \dots + \sqrt{p_n}$, где p_1, p_2, \dots, p_n — простые положительные числа.

Мини-исследование 7

Легко понять, что если для положительных действительных чисел $x = M, a_1 \dots a_n \dots$ и $y = K, \beta_1 \dots \beta_n \dots$ при некотором натуральном n выполняется соотношение $x'_n < y_n$, то либо $M < K$, либо при совпадении начальных отрезков десятичных записей чисел x и y самое позднее на n -м месте после запятой цифра десятичной записи числа x меньше соответствующей цифры десятичной записи числа y . Таким образом, сравнение положительных действительных чисел с помощью десятичных записей даст тот же результат, что и сравнение с помощью десятичных приближений.

Докажите обратное, то есть, предположив, что десятичные записи положительных действительных чисел x и y совпадают до $(k - 1)$ -го места после запятой, а для цифр, стоящих на k -м месте, выполнено неравенство $a_k < b_k$, докажите, что для некоторого $n \geq k$ выполняется соотношение $x'_n < y_n$. Для этого придётся рассмотреть два случая.

Первый случай: $a_k < 8$.

Второй случай:

$$a_k = 8, a_{k+1} = 9, a_{k+2} = 9, \dots, a_{k+l} = 9, a_{k+l+1} \neq 9.$$

Таким образом, сравнение положительных действительных чисел с помощью десятичных приближений даст тот же результат, что и сравнение с помощью десятичных записей. Два указанных способа сравнения действительных чисел эквивалентны.

Глава 4

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

В этой главе рассматриваются понятия параллельности прямых, плоскостей, а также прямой и плоскости. Вы познакомитесь с многогранниками, которые называются призмами, и узнаете некоторые свойства параллелепипеда. В заключение будут приведены основные свойства параллельного проектирования на плоскость.

■ § 1. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

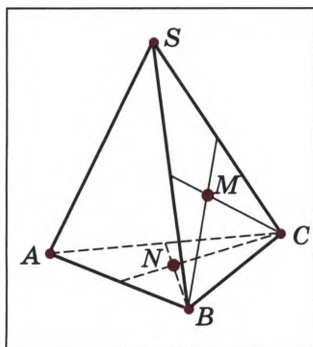


Рис. 1

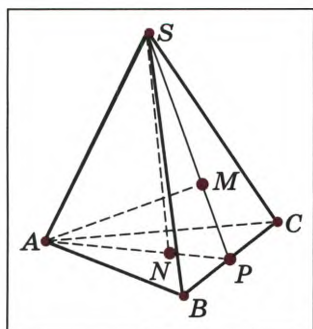


Рис. 2

1.1. Две пересекающиеся прямые в пространстве. Прямые в пространстве могут располагаться по-разному. Если две различные прямые имеют общую точку, то есть пересекаются, то существует единственная плоскость, содержащая каждую из этих прямых (глава 2, § 2).

Таким образом, две пересекающиеся прямые в пространстве всегда лежат в одной плоскости. Это свойство пересекающихся прямых позволяет находить их точку пересечения.

Пример 1. Рассмотрим тетраэдр $SABC$. Пусть M — точка пересечения медиан грани SBC , N — точка пересечения медиан грани ABC (рис. 1). Покажем, что прямые SN и AM пересекаются.

Обозначим середину ребра BC через P и рассмотрим плоскость ASP (рис. 2). Из условия следует, что точка M лежит на отрезке SP , точка N лежит на отрезке AP . Поэтому отрезки AM и SN пересекаются в плоскости ASP .

Пример 2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Пусть M — середина ребра CC_1 , N — середина ребра CD , а точка K — середина отрезка MN (рис. 3). Покажем, что прямые AK и $B_1 M$ пересекаются.

Рассмотрим плоскость AB_1N . Эта плоскость пересекает плоскость грани $ABCD$ по прямой AN . Поэтому сначала найдём точку X пересечения прямых AN и BC , а затем точку F пересечения прямых B_1X и CC_1 (рис. 4). Из равенства треугольников ADN и CNX получаем, что $CX = AD = BC$. После этого рассмотрим прямоугольные треугольники CFX и B_1C_1F . Так как $\angle FB_1C_1 = \angle FXC$ и $B_1C_1 = CX$, то $\triangle B_1C_1F = \triangle CFX$. Отсюда вытекает, что точка F — середина ребра CC_1 , а поэтому точка F совпадает с точкой M , заданной в условии задачи. Следовательно, точки A, K, B_1, M лежат в одной плоскости, и на рис. 4 построена точка L пересечения прямых AK и B_1M .

Вопрос. В каком отношении отрезок AM на рис. 2 делится точкой пересечения с прямой SN ?

1.2. Параллельные прямые в пространстве. В пространстве существуют прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются. Возьмём, например, произвольную плоскость α и рассмотрим в ней прямую a и не лежащую на ней точку M (рис. 5). Проведя в плоскости α через точку M прямую b , параллельную прямой a , получим непересекающиеся прямые a и b .

Параллельность прямых в пространстве определяется следующим образом.

Две различные прямые a и b в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Как и на плоскости, параллельность прямых в пространстве обозначается символом \parallel .

При изучении параллельности прямых в пространстве удобно использовать следующий основной признак.

Если каждая из двух прямых a и b параллельна прямой c , то прямые a и b параллельны.

Пример 3. Пусть $SABC$ — тетраэдр, и точки M, N, K, L — середины рёбер SA, SB, BC и AC соответственно. Докажем, что прямые MN и KL параллельны (рис. 6).

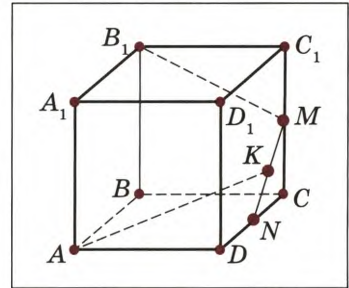


Рис. 3

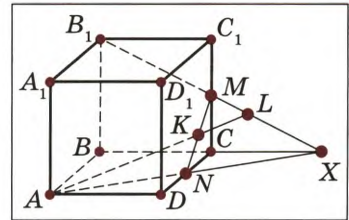


Рис. 4

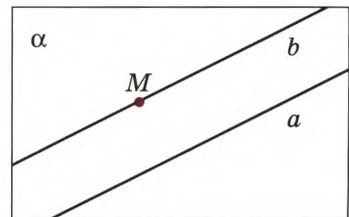


Рис. 5

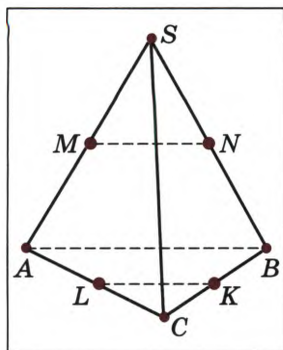


Рис. 6

В плоскости грани ASB отрезок MN — средняя линия треугольника ASB . Поэтому прямые AB и MN параллельны. Аналогично в плоскости грани ACB отрезок KL является средней линией треугольника ACB , поэтому прямые AB и KL также параллельны. По основному признаку параллельности прямых в пространстве получаем, что прямые MN и KL параллельны.

Вопрос. Как доказать, что четырёхугольник $MNKL$ — параллелограмм?

1.3. Свойства параллельности прямых.

Принято считать, что каждая прямая параллельна самой себе. С учётом этого соглашения параллельность прямых в пространстве обладает следующими свойствами:

$a \parallel a$;

если $a \parallel b$, то $b \parallel a$;

если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$.

Вопрос. Как доказать, что для каждой прямой пространства найдётся параллельная ей прямая, которая проходит через фиксированную точку O ?

1.4. Доказательство основного признака параллельности прямых. Докажем основной признак параллельности прямых, который сформулирован в пункте 1.2.

Рассмотрим прямые a, b, c , для которых $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Возможны два случая.

I. Пусть прямые a, b, c лежат в одной плоскости. В этой плоскости выполняются все законы планиметрии, поэтому, согласно планиметрическому признаку параллельности, имеем $a \parallel b$.

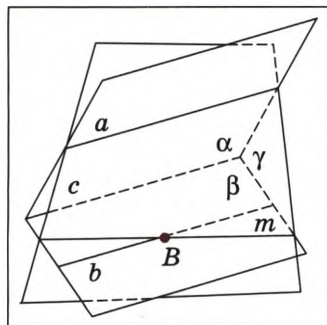


Рис. 7

II. Пусть три прямые a, b, c не лежат в одной плоскости. Из параллельности прямых a и c вытекает, что они лежат в некоторой плоскости α . Аналогично прямые b и c параллельны и поэтому лежат в некоторой плоскости β . Понятно, что плоскости α и β различны, а прямая c — линия их пересечения.

Выберем на прямой b точку B и проведём третью плоскость γ через прямую a и точку B (рис. 7). Покажем, что плоскость γ не совпадает ни с одной из плоскостей α и β . Действительно,

если предположить, что γ совпадает с α , то получится, что плоскость γ содержит прямые a , c и точку B прямой b . Но c и b параллельны и, следовательно, лежат в одной плоскости, поэтому вся прямая b должна содержаться в плоскости γ . Но этого не может быть, так как прямые a , b , c не лежат ни в одной плоскости. К такому же противоречию приводит предположение о совпадении плоскостей β и γ .

Таким образом, плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a , а плоскость β — по прямой m , проходящей через точку B (рис. 7). Заметим, что общие точки прямой m и плоскости α могут лежать только на прямой a , так как прямая m лежит в плоскости γ , а плоскости α и γ пересекаются по прямой a .

Аналогично общие точки прямой m и плоскости α могут лежать только на прямой c , так как прямая m лежит в плоскости β , пересекающей плоскость α по прямой c . С другой стороны, прямые a и c не пересекаются, поэтому прямая m не пересекается с плоскостью α , а значит, и с прямыми a и c .

Так как прямые c и m лежат в одной плоскости β и не пересекаются, $c \parallel m$. Но в плоскости β через точку B можно провести только одну прямую, параллельную прямой c . Следовательно, b совпадает с m . Отсюда вытекает, что прямые a и b лежат в одной плоскости γ и не пересекаются, то есть $a \parallel b$.

Вопрос. В каком случае три плоскости имеют только одну общую точку?

1.5. Скрещивающиеся прямые. В пространстве можно указать две прямые, которые не лежат ни в одной общей плоскости.

Пример 4. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$ (рис. 8) и докажем, что прямые AC и BD не могут лежать в одной плоскости.

Предположим, что некоторая плоскость α содержит прямые AC и BD . Тогда плоскость α содержит точки A , B , C , не лежащие на одной прямой, поэтому плоскость α совпадает с плоскостью ABC . Однако, по определению тетраэдра, точка D не лежит в плоскости ABC . Следовательно, плоскость α содержит не все точки прямой BD , и предположение было неверным.

Две прямые, которые не лежат ни в какой одной плоскости, называют *скрещивающимися*.

Вопрос. Как доказать, что скрещивающиеся прямые не пересекаются?

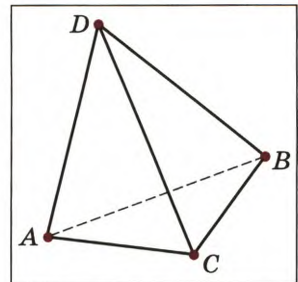


Рис. 8

1.6. Признаки скрещивающихся прямых. При изображении пространственных фигур на плоскости возникает рисунок, на котором изображения некоторых прямых могут пересекаться, хотя в пространстве сами прямые не пересекаются. Например, на рис. 8 изображён тетраэдр $ABCD$. В пространстве прямые AB и CD не пересекаются, но их изображения на чертеже пересеклись. Чтобы понять, пересекаются ли те или иные прямые на самом деле, рисунка недостаточно. Приходится проводить логические рассуждения, где могут использоваться признаки скрещивающихся прямых.

Признак 1. Если две прямые содержат четыре точки, не лежащие в одной плоскости, то такие прямые — скрещивающиеся.

Доказательство. Пусть точки A и B лежат на прямой a , точки C и D лежат на прямой b , причём A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Предположим, что существует плоскость α , которая содержит прямые a и b . Тогда плоскость α должна содержать точки A, B, C, D , что противоречит условию. Следовательно, предположение неверно, то есть прямые a и b — скрещивающиеся.

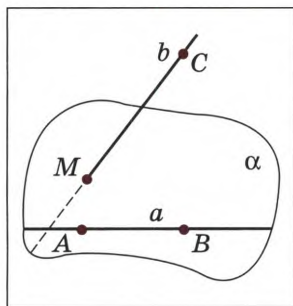


Рис. 9

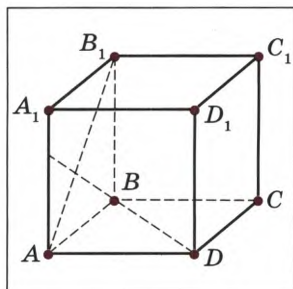


Рис. 10

Признак 2. Пусть прямая a лежит в плоскости α , а прямая b пересекает плоскость α в одной точке M , не лежащей на прямой a . Тогда прямые a и b — скрещивающиеся.

Доказательство. Выберем на прямой a две различные точки A и B , а на прямой b — точку C , не лежащую в плоскости α (рис. 9). Так как точка M не лежит на прямой a , существует единственная плоскость, которая содержит точки A, B и M — это плоскость α . Поскольку точка C не лежит в плоскости α , то получаем четыре точки A, B, M, C , не лежащие в одной плоскости. По признаку 1 прямые AB и CM — скрещивающиеся.

Пример 5. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ рассмотрим прямые AB_1 и BD . Изображения этих прямых на рис. 10 пересекаются. Однако прямая AB_1 не лежит в плоскости $ABCD$ и пересекает эту плоскость в точке A , не лежащей на прямой BD . По признаку 2 прямые AB_1 и BD — скрещивающиеся и пересекаться не могут.

Вопрос. Какие случаи расположения двух прямых в пространстве вы знаете?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Почему две пересекающиеся прямые всегда лежат в одной плоскости?
2. В каком случае две прямые в пространстве параллельны?
3. Какие свойства параллельных прямых в пространстве вы знаете?
4. Сформулируйте основной признак параллельности прямых в пространстве.
5. Докажите основной признак параллельности прямых в пространстве.
6. Какие прямые в пространстве называются скрещивающимися?
7. Сформулируйте и докажите признаки скрещивающихся прямых.

Задачи и упражнения ■

1. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, точка O — центр квадрата, точка M — середина стороны CD , точка N — середина отрезка SM . Докажите, что прямые AN и SO не пересекаются.
2. Дан тетраэдр $SABC$. Пусть MN — средняя линия треугольника ABC , параллельная стороне AC , точка K — середина MN , точка L — середина MS . Докажите, что прямые SK и NL пересекаются.
3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки M и N — середины сторон CC_1 и CD соответственно. Докажите, что:
 - а) прямые AN и $B_1 M$ пересекаются;
 - б) прямые AM и $B_1 N$ пересекаются;
 - в) прямые $B_1 M$ и AC не пересекаются.
4. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, точка O — центр основания куба, точка M лежит на BC_1 и $3BM = MC_1$. Докажите, что прямые OM и DC_1 пересекаются.
5. Докажите, что диагонали AC и $B_1 D$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ не пересекаются.
6. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите параллельность прямых:
 - а) AD и BC ; б) AD и $B_1 C_1$; в) AB_1 и DC_1 .
7. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, точка M — середина AB , точка N — середина $A_1 B_1$. Докажите, что параллельны прямые:
 - а) MN и AA_1 ; б) MN и CC_1 ; в) CM и $C_1 N$; г) $D_1 N$ и DM .
8. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, у которого $AD = 4$, $AB = 2$, $AA_1 = 1$. Докажите параллельность прямых:
 - а) AD и BC ; б) $A_1 B_1$ и CD ; в) AC и $A_1 C_1$; г) AD_1 и BC_1 ; д) AB_1 и DC_1 .
9. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольный параллелепипед, у которого $AD = 3$, $AB = 1$, $AA_1 = 2$, точка M — середина AD , точка N — середина $A_1 D_1$. Докажите параллельность прямых:
 - а) MN и AA_1 ; б) MN и CC_1 ; в) CM и $C_1 N$; г) BM и $B_1 N$.

10. Дан тетраэдр $ABCD$, точка M — середина AB . Докажите, что прямые CM и BD — скрещивающиеся.

11. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что следующие прямые — скрещивающиеся:

а) AB_1 и DC ; б) AC_1 и DD_1 ; в) AC_1 и DC .

12. Укажите в прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ несколько пар скрещивающихся и несколько пар параллельных прямых.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M — середина ребра CC_1 , точка N — середина ребра CD , точка K — середина отрезка MN . Прямые AK и B_1M пересекаются в точке L . Чему равно отношение отрезков $KL : AK$?

1) 1 : 2 2) 1 : 3 3) 1 : 4 4) 2 : 3

1.2. Сколько прямых, которые параллельны рёбрам оснований, можно провести через середину бокового ребра куба?

1) ни одной 2) одну 3) две 4) три

1.3. Сколько прямых, параллельных заданному ребру куба, можно указать, используя обозначения вершин куба?

1) две 2) три 3) четыре 4) пять

1.4. Сколько прямых, параллельных заданной диагонали грани куба, можно указать, используя обозначения вершин куба?

1) одну 2) две 3) три 4) четыре

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. В каких случаях через две прямые можно провести плоскость?

1) прямые пересекаются 2) прямые параллельны какой-то прямой
3) прямые параллельны 4) прямые скрещивающиеся

2.2. Сколько в пространстве может быть прямых, проходящих через заданную точку и не пересекающих заданную прямую?

1) ни одной 2) ровно одна 3) ровно две 4) больше двух

2.3. Что можно сказать о двух различных прямых в пространстве, если они имеют общую точку?

1) совпадают 2) параллельны
3) пересекаются 4) скрещиваются

2.4. Какие виды многоугольников могут получаться при пересечении треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через среднюю линию его грани?

- | | |
|------------------|---------------------|
| 1) треугольники | 2) четырёхугольники |
| 3) пятиугольники | 4) шестиугольники |

§ 2. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ ■

2.1. Три случая расположения прямой и плоскости в пространстве. Рассмотрим в пространстве плоскость α и прямую a . Возможны три случая их взаимного расположения.

Первый случай. Две различные точки A и B прямой a лежат в плоскости α . Тогда по аксиоме II (глава II, § 2) все точки прямой a лежат в плоскости α , и мы получаем, что a — одна из прямых плоскости α (рис. 1).

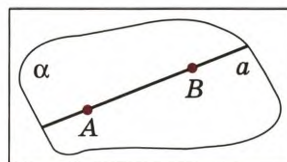


Рис. 1

Второй случай. Прямая a содержит точку A , не лежащую в плоскости α , и точку B , лежащую в плоскости α . В этом случае B — единственная точка пересечения прямой a с плоскостью α (рис. 2).

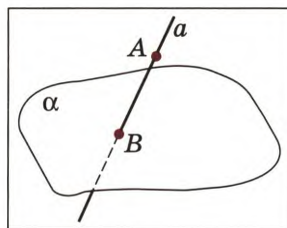


Рис. 2

Третий случай. Прямая a не имеет общих точек с плоскостью α (рис. 3). В этом случае прямую a называют *параллельной плоскости α* или говорят, что прямая a и плоскость α параллельны. Всякую прямую a , принадлежащую плоскости α , также считают параллельной этой плоскости. С помощью символа \parallel параллельность прямой a и плоскости α обозначается $a \parallel \alpha$.

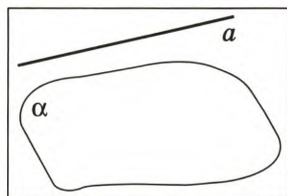


Рис. 3

Вопрос. Сколько общих точек могут иметь прямая и плоскость?

2.2. Признак параллельности прямой и плоскости. При доказательстве параллельности прямой и плоскости применяется следующий признак.

Если прямая a , не лежащая в плоскости α , параллельна прямой b плоскости α , то $a \parallel \alpha$.

Доказательство. Проведём через параллельные прямые a и b плоскость β (рис. 4). Тогда плоскости α и β различны и пересекаются по общей прямой b . Так как прямая a не пересекается с пря-

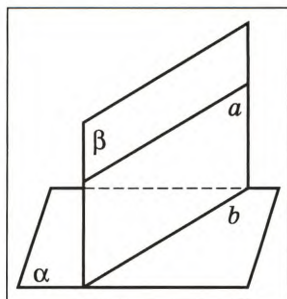


Рис. 4

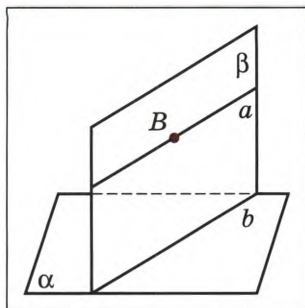


Рис. 5

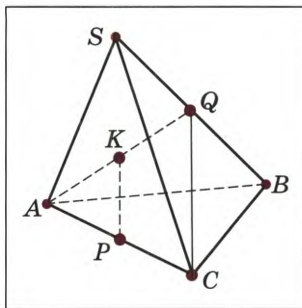


Рис. 6

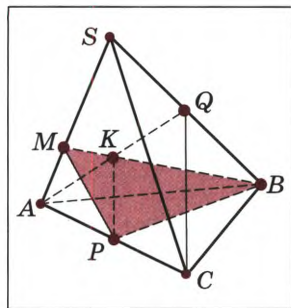


Рис. 7

мой b , прямая a и плоскость α не пересекаются, что и требовалось доказать.

Этот признак позволяет обосновать способ построения прямой, параллельной заданной плоскости.

Рассмотрим плоскость α и точку B вне её. Выберем на плоскости α прямую b и проведём плоскость β через прямую b и точку B . Если теперь в плоскости β через точку B провести прямую a параллельно прямой b (рис. 5), то на основании доказанного признака получим $a \parallel \alpha$.

Вопрос. Сколько разных прямых, параллельных данной плоскости, можно провести через данную точку?

2.3. Свойство параллельных прямой и плоскости. Параллельные прямая и плоскость обладают следующим свойством.

Если через прямую a , параллельную плоскости α , провести плоскость, пересекающую α по прямой b , то прямые a и b параллельны.

Вопрос. Как доказать это свойство?

2.4. Сечение многогранников плоскостями, параллельными заданным прямым. Признак параллельности прямой и плоскости позволяет строить сечения многогранников плоскостями, параллельными заданным прямым.

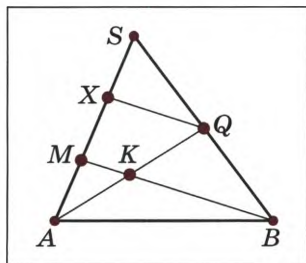


Рис. 8

Пример 1. В тетраэдре $SABC$ точка P — середина ребра AC , точка Q — середина ребра SB . Построим сечение тетраэдра плоскостью, параллельной прямой CQ и проходящей через точки B и P .

Сначала проведём через точку P прямую, параллельную CQ . Для этого построим плос-

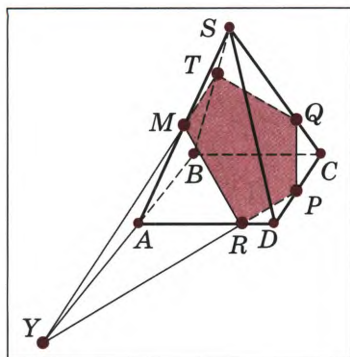


Рис. 12

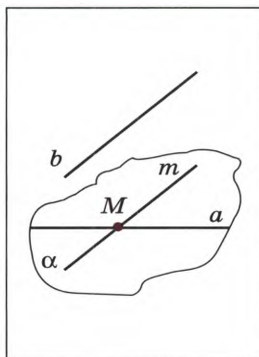


Рис. 13

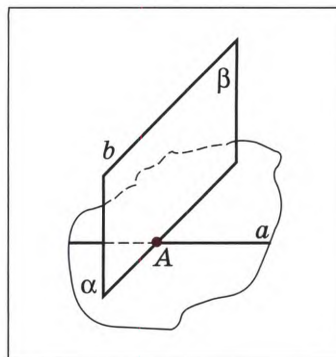


Рис. 14

Наконец, найдём в плоскости ASB точку T пересечения прямой YM с ребром SB и получим искомое сечение $MTQPR$ (рис. 12).

Вопрос. В каких отношениях в примере 2 секущая плоскость делит рёбра пирамиды?

2.6. Плоскость, проходящая через одну из скрещивающихся прямых параллельно другой прямой.** Возьмём в пространстве две скрещивающиеся прямые a и b . Через каждую точку прямой a проведём прямую, параллельную b . Тогда множество F точек всех проведённых прямых образует плоскость.

Доказательство. Для доказательства выберем произвольную точку M прямой a , проведём через M прямую m параллельно b и через пересекающиеся прямые a и m проведём плоскость α . По признаку из пункта 2.3 прямая b параллельна плоскости α (рис. 13). Покажем, что множество F совпадает с плоскостью α .

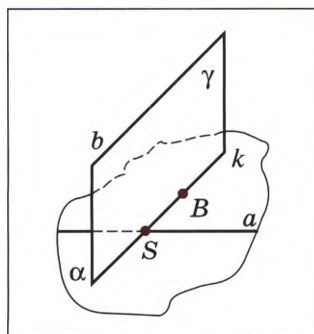


Рис. 15

I. Пусть $A \in \alpha$. Проведём через прямую b и точку A плоскость β . Тогда плоскость β пересекается с α по прямой, пересекающей прямую a и параллельной прямой b (рис. 14). Следовательно, $A \in F$.

II. Пусть $B \in F$. Тогда точка B лежит на прямой k , параллельной b и пересекающей прямую a в некоторой точке S . Проведём через b и точку S плоскость γ (рис. 15). По свойству из пункта 2.4 плоскость γ пересекает α по прямой, параллельной b и проходящей через S . Эта пря-

мая совпадает с k , так как через точку S можно провести только одну прямую, параллельную b . Следовательно, $B \in \alpha$.

Вопрос. Пусть в пространстве даны прямая a и не лежащая на ней точка A . Через точку A проводятся всевозможные прямые, пересекающие прямую a . Какое множество образуют точки всех таких прямых?

Контрольные вопросы и задания ■

1. В каком случае прямая целиком лежит в данной плоскости?
2. В каком случае прямая и плоскость пересекаются, но прямая не лежит целиком в данной плоскости?
3. В каком случае прямая параллельна плоскости?
4. Сформулируйте и докажите признак параллельности прямой и плоскости.
5. Как через заданную точку A провести прямую, параллельную заданной плоскости α ?
6. Пусть прямая a параллельна плоскости α , плоскость β проходит через прямую a и пересекает плоскость α по прямой b . Что можно сказать о взаимном расположении прямых a и b ?
- 7.** Даны две скрещивающиеся прямые a и b . Докажите, что через a и b можно провести две такие плоскости α и β , что α содержит прямую a , β содержит прямую b , причём $\alpha \parallel b$ и $\beta \parallel a$.

Задачи и упражнения ■

1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, точка M — произвольная точка на ребре $D_1 C_1$. Докажите, что прямая $A_1 M$ параллельна плоскости $ABCD$.
2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, точка M — середина ребра $D_1 C_1$. Проведите через точку M прямую, параллельную прямой AC . В каком отношении эта прямая делит ребро $A_1 D_1$?
3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Проведите через прямую AC плоскость, параллельную прямой BC_1 . Найдите точки, в которых эта плоскость пересекает рёбра куба.
4. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка M — середина ребра $D_1 C_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки A , D_1 и параллельной прямой $A_1 M$.
5. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка M — середина ребра $D_1 C_1$. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки A , C и параллельной прямой $A_1 M$.

6.* Рассмотрим тетраэдр $ABCD$. Точка Q — середина ребра DB , MN — средняя линия треугольника ABC , параллельная AC . Проведите через точки M и N плоскость, параллельную прямой CQ . Найдите точки пересечения этой плоскости и рёбер тетраэдра. В каком отношении полученная плоскость делит ребро BD ?

7.* В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точки M и N — середины DC и BC . Проведите через точки M и N сечение пирамиды, параллельное прямой DL , где L — середина ребра SC , и найдите, в каком отношении эта плоскость делит ребро SC .

8.* В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ — квадрат, точки M и N — середины рёбер AB и CD . Проведите через точки M и N сечение пирамиды, параллельное ребру DS , и найдите, в каком отношении эта плоскость делит ребро SB .

9. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Проведите через точку D_1 сечение куба, параллельное скрещивающимся прямым AB_1 и BC_1 .

10.** Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка M — середина ребра $A_1 D_1$. Проведите через точку M плоскость, параллельную прямым $D_1 B$ и $B_1 C$. В каком отношении эта плоскость делит:

а) ребро $D_1 D$; б) ребро DC ; в) ребро AB ; г) ребро $A_1 B_1$?

11.** Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точки M и N — середины рёбер $A_1 D_1$ и $D_1 C_1$ соответственно. Проведите через точку M плоскость, параллельную прямым $B_1 N$ и BC_1 . В каком отношении эта плоскость делит:

а) отрезок AA_1 ; б) отрезок $A_1 B_1$?

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, точка M — середина ребра $D_1 C_1$. Сечение проходит через точку M и прямую, параллельную прямой AC . В каком отношении эта прямая делит ребро $A_1 D_1$?

1) 1:1 2) 1:2 3) 1:3 4) 2:3

1.2.* В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ параллелограмм, точки M и N — середины рёбер DC и BC , точка L — середина ребра SC . В каком отношении плоскость сечения, проходящая через точки M и N параллельно прямой AL , делит ребро SC ?

1) 1:3 2) 1:5 3) 1:7 4) 1:9

1.3. Какую длину имеет отрезок с концами в серединах рёбер AB и CD правильного тетраэдра с ребром 1?

1) 1 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 3) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

1.4. В правильном тетраэдре с ребром 1 через точку M пересечения медиан грани ABC проводится прямая, которая параллельна ребру AD и пересекается с поверхностью тетраэдра в точке N . Чему равна длина отрезка MN ?

- 1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4) $\frac{2}{3}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Сколько общих точек могут иметь прямая и плоскость?

- 1) ни одной 2) ровно одну 3) ровно две 4) больше двух

2.2. Сколько различных плоскостей, параллельных данной прямой, можно провести через другую прямую, скрещивающуюся с данной?

- 1) ни одной 2) ровно одну 3) ровно две 4) больше двух

2.3. Какие многоугольники могут получаться при пересечении плоскости и четырёхугольной пирамиды, в основании — параллелограмм?

- 1) треугольники 2) четырёхугольники
3) пятиугольники 4) шестиугольники

2.4.** Сколько рёбер куба могут иметь общие точки с некоторой плоскостью?

- 1) 5 2) 6 3) 7 4) 10

§ 3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ ■

3.1. Взаимное расположение плоскостей в пространстве. Рассмотрим в пространстве две плоскости α и β . Возможны три варианта их взаимного расположения.

Первый вариант. Плоскости α и β имеют три общие точки, не лежащие на одной прямой. В этом случае, по аксиоме IV из главы 2 пункта 2.5, плоскости α и β совпадают.

Второй вариант. Плоскости α и β различны и имеют общую точку. В этом случае, по аксиоме V из главы 2 пункта 2.6, плоскости α и β пересекаются по прямой.

Третий вариант. Плоскости α и β не имеют общих точек. В этом случае плоскости α и β называют *параллельными*.

Параллельность плоскостей α и β обозначается символом $\alpha \parallel \beta$.

Вопрос. Как могут быть расположены две плоскости, имеющие две различные общие точки?

3.2. Сколько плоскостей можно провести через точку параллельно заданной плоскости? Иногда удобно считать плоскость параллельной самой себе. Такое соглашение позволяет сформулировать следующее утверждение.

Через каждую точку пространства можно провести единственную плоскость, параллельную заданной плоскости.

Вопрос. Как доказать это утверждение в том случае, когда точка принадлежит плоскости?

3.3. Признаки параллельности плоскостей. При доказательстве параллельности плоскостей можно применять следующие признаки.

Признак 1. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости параллельны другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

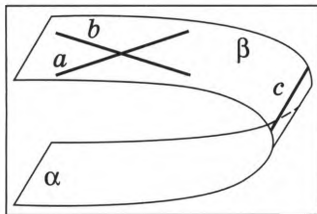


Рис. 1

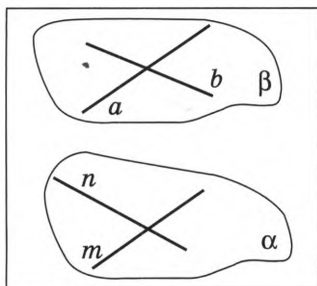


Рис. 2

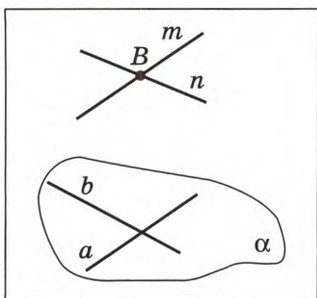


Рис. 3

Доказательство. Пусть плоскости α и β различны, а пересекающиеся прямые a и b плоскости β параллельны плоскости α . Тогда прямые a и b не пересекают плоскость α .

Предположим, что плоскости α и β имеют общую точку. Тогда они пересекаются по прямой, которую обозначим через c (рис. 1). Так как прямые a и b не пересекаются с плоскостью α , они не пересекаются и с прямой c . Но тогда в плоскости β получим две различные пересекающиеся прямые a и b , параллельные прямой c , что невозможно в силу аксиомы параллельности. Полученное противоречие доказывает, что $\alpha \parallel \beta$.

Признак 2. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то такие плоскости параллельны.

Доказательство. Пусть плоскости α и β различны, а прямые a и b плоскости β соответственно параллельны прямым m и n плоскости α (рис. 2). Тогда, по признаку параллельности прямой и плоскости, получаем $a \parallel \alpha$, $b \parallel \alpha$. Значит, по первому признаку параллельности плоскостей $\alpha \parallel \beta$, что и требовалось доказать.

Второй признак подсказывает способ построения плоскостей, параллельных заданной плоскости. Рассмотрим плоскость α и точку B вне этой плоскости. Выберем на плоскости α пересекающиеся прямые a и b . Проведём через точку B прямые $m \parallel a$ и $n \parallel b$, как это указано в пункте 2.2.

Плоскость β , проходящая через прямые m и n , параллельна плоскости α (рис. 3).

Вопрос. Как доказать, что через каждую точку, не лежащую в данной плоскости α , можно провести единственную плоскость, параллельную α ?

3.4. Пересечение двух параллельных плоскостей третьей плоскостью. Параллельные плоскости обладают следующим свойством.

Если плоскость γ пересекает параллельные плоскости α и β , то линии пересечения параллельны.

Вопрос. Как доказать это свойство?

3.5. Сечения многогранников, параллельные заданным плоскостям.

Пример. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Точки M и K — середины ребер SB и SC . Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину AB и параллельной плоскости $AMKD$.

Пусть P — середина AB . В плоскости $ABCD$ через точку P проведём прямую, параллельную AD , и отметим точку Q её пересечения с CD (рис. 4). Затем в плоскости SCD через точку Q проведём прямую, параллельную DK , и отметим точку R её пересечения с SC . Плоскость α , проходящая через точки P , Q , R , параллельна плоскости $AMKD$, так как $PQ \parallel AD$ и $QR \parallel DK$.

Далее, так как параллельные плоскости α и $AMKD$ пересекаются плоскостью SBC по параллельным прямым, в плоскости SBC через точку R проведём прямую параллельно MK и отметим точку T её пересечения с SB . Искомое сечение $PQRT$ построено.

Вопрос. В каких отношениях построенная плоскость делит рёбра пирамиды?

3.6. Прямая и две параллельные плоскости. Пусть плоскости α , β параллельны и прямая l пересекает α в одной точке A . Покажем, что l пересечёт β . Проведём через l плоскость γ . Плоскость γ проходит через точку A и не совпадает с β . Если предположить, что $\gamma \parallel \beta$, то через A будут проходить две плоскости β и γ , параллельные плоскости α , вопреки п. 3.2. Согласно п. 3.4, плоскость γ пересекает плоскости α и β , причём по

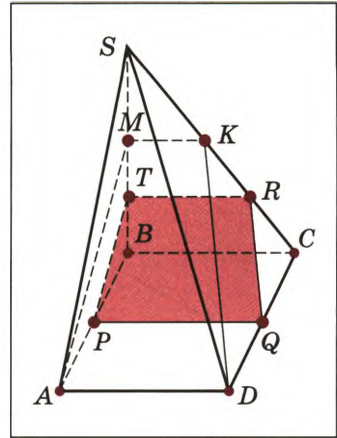


Рис. 4

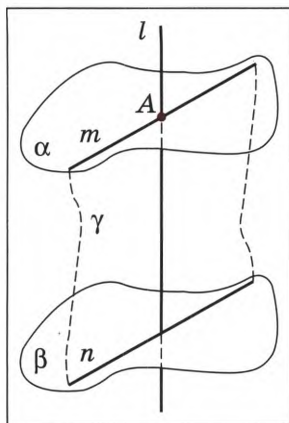


Рис. 5

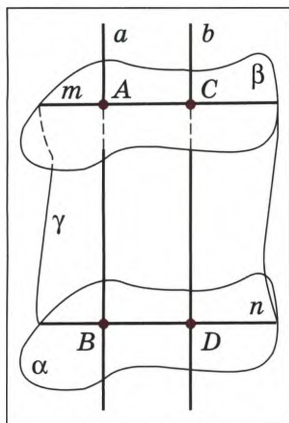


Рис. 6

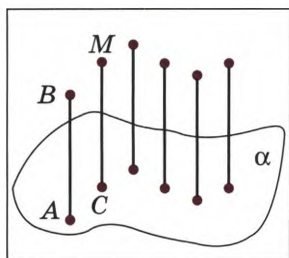


Рис. 7

параллельным прямым m и n (рис. 5). Так как прямая l пересекает прямую m , она пересечёт и прямую n , то есть пересечёт плоскость β .

Вопрос. Как доказать, что если каждая из двух плоскостей α и β параллельна плоскости γ , то $\alpha \parallel \beta$?

3.7. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями.

Рассмотрим две параллельные плоскости α и β и проведём две параллельные прямые a и b , пересекающие α и β . Построим плоскость γ , содержащую параллельные прямые a и b . Так как $\alpha \parallel \beta$, плоскость γ пересекает плоскости α и β по параллельным прямым m и n (рис. 6). Поэтому при пересечении прямых a и b с плоскостями α и β образуются такие отрезки AB и CD , что $AB \parallel CD$ и $AC \parallel BD$. Следовательно, четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм. Значит, $AB = CD$. Так как доказанное свойство выполняется для каждой прямой b , параллельной a , справедливо следующее утверждение.

Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

Вопрос. Какие свойства параллелограмма вы знаете?

3.8. О некотором множестве точек в пространстве.** Возьмём точку A в плоскости α , а точку B — вне этой плоскости. От каждой точки C плоскости α отложим отрезок CM , который равен и параллелен отрезку AB , причём точки B и M лежат в одном полупространстве с границей α (рис. 7). Обозначим множество всех таких точек M через F . Покажем, что множество F совпадает с плоскостью β , проходящей через точку B и параллельной α .

Доказательство. Пусть $K \in \beta$. Проведём через точку K прямую, параллельную AB , и отметим точку L её пересечения с плоскостью α . Тогда, по

свойству из пункта 3.6, отрезок LK равен отрезку AB , а так как отрезок BK не пересекает плоскость α , точки B и L лежат в одном полупространстве с границей α . Следовательно, $K \in F$.

Пусть теперь $P \in F$, то есть для какой-то точки $Q \in \alpha$ отрезок QP параллелен и равен отрезку AB , причём отрезки AQ и BP не пересекаются. Так как отрезки AB и PQ лежат в одной плоскости, по соответствующему признаку четырёхугольник $ABPQ$ — параллелограмм. Поэтому $BP \parallel AQ$. Отсюда следует, что точка P лежит в плоскости β .

Вопрос. Какое множество образуют точки всевозможных прямых, параллельных данной плоскости и проходящих через данную точку?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Что можно сказать о плоскостях α и β , имеющих три общие точки, не лежащие на одной прямой?
2. Что можно сказать о плоскостях α и β , если они не совпадают и имеют общую точку?
3. Что можно сказать о плоскостях α и β , если они не имеют общих точек?
4. Какие признаки параллельности плоскостей вы знаете?
5. Сформулируйте и докажите теорему о параллельных отрезках, заключённых между двумя параллельными плоскостями.

Задачи и упражнения ■

1. Докажите, что противоположные грани куба лежат на параллельных плоскостях.
2. Докажите, что противоположные грани прямоугольного параллелепипеда лежат на параллельных плоскостях.
3. Дана треугольная пирамида $SABC$. Точки K, M, N — середины рёбер SA, SB, SC . Докажите, что плоскости KMN и ABC параллельны.
4. Дана треугольная пирамида $SABC$. Точки K, M, N лежат на рёбрах SA, SB, SC , причём $KS = 2KA, MS = 2MB, NS = 2NC$. Докажите, что плоскости KMN и ABC параллельны.
5. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$. Точки K, M, N — середины рёбер SA, SB, SC . Докажите, что плоскость KMN параллельна плоскости основания пирамиды. В каком отношении плоскость KMN делит ребро SD ?
6. Дана треугольная пирамида $SABC$. Точки K, M, N лежат на рёбрах SA, SB, SC , причём K — середина ребра SA , M — середина ребра SB , $2NS = NC$.

а) Докажите, что плоскости ABC и KMN не параллельны;
 б) укажите две точки на прямой, по которой пересекаются плоскости ABC и KMN ;

в) докажите, что прямая, по которой плоскости KMN и ABC пересекаются, параллельна прямой AB ;

г) проведите через точку A плоскость, параллельную KMN , и докажите, что эта плоскость будет проходить через ребро AB ;

д) проведите через прямую AB плоскость, параллельную KMN , и найдите, в каком отношении эта плоскость делит ребро SC .

7.* Дана пирамида $SABC$. Точки K, M, N лежат на ребрах SA, SB и SC , причём K — середина ребра SA , M — середина ребра SB , $NS = 2NC$.

а) Докажите, что плоскости ABC и KMN не параллельны;

б) укажите две точки на прямой, по которой плоскости ABC и KMN пересекаются;

в) докажите, что прямая, по которой плоскости KMN и ABC пересекаются, параллельна прямой AB ;

г) проведите через точку C плоскость, параллельную KMN , и определите, в каком отношении эта плоскость делит рёбра SA и SB .

8.* Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание $ABCD$ которой — параллелограмм. Точки K, M, N лежат на SA, SB и SC , причём K — середина ребра SA , M — середина ребра SB , $2NS = NC$.

а) Проведите сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки K, M, N , и определите, в каком отношении эта плоскость делит ребро SD ;

б) докажите, что плоскости KMN и $ABCD$ не параллельны;

в) укажите две точки на прямой, по которой плоскости KMN и $ABCD$ пересекаются;

г) докажите, что прямая, по которой KMN и $ABCD$ пересекаются, параллельна прямой AB ;

д) проведите через точку A сечение, параллельное плоскости KMN , докажите, что это сечение проходит через ребро AB , и найдите, в каком отношении сечение делит ребра SC и SD .

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$. Точки K, M, N — середины рёбер SA, SB, SC . В каком отношении плоскость KMN делит ребро SD ?

1) 1:1 2) 1:2 3) 1:3 4) 2:3

1.2. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром, равным 1, проводится сечение через середины рёбер AB, BC и CD . Чему равна площадь сечения?

- 1) 0,25 2) 0,5 3) 0,75 4) 1

1.3. В каком случае через заданную точку C можно провести больше одной плоскости, параллельной двум прямым a и b ?

- 1) a и b пересекаются 2) a и b параллельны
3) точка C лежит на плоскости, содержащей прямые a и b
4) a и b скрещивающиеся

1.4. Сколько рёбер имеет семиугольная пирамида?

- 1) 14 2) 21 3) 28 4) 35

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие виды многоугольников могут получаться при пересечении четырёхугольной пирамиды $SABCD$, в основании которой лежит квадрат $ABCD$, с вершиной S плоскостями, параллельными прямым SA и BD ?

- 1) треугольники 2) четырёхугольники
3) пятиугольники 4) шестиугольники

2.2. Будем считать, что ребро пирамиды и плоскость пересекаются, если они имеют единственную общую точку. Сколько рёбер четырёхугольной пирамиды может одновременно пересекать некоторая плоскость?

- 1) 8 2) 7 3) 6 4) 5

2.3. При выполнении каких условий в четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S плоскости SAB и SCD пересекаются по прямой, параллельной AB ?

- 1) $ABCD$ квадрат 2) $ABCD$ прямоугольник
3) $ABCD$ ромб 4) $ABCD$ трапеция с основаниями AD и BC

2.4. Какие из приведённых утверждений верны?

- 1) если две прямые параллельны третьей прямой, то такие прямые параллельны
2) если две плоскости параллельны одной прямой, то эти плоскости параллельны
3) если две прямые параллельны одной плоскости, то такие прямые параллельны
4) если две плоскости параллельны третьей плоскости, то такие плоскости параллельны

§ 4. ПРИЗМА И ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД ■

4.1. Треугольная призма. Возьмём две различные параллельные плоскости α и β . В плоскости α выберем треугольник ABC и через его вершины проведём три параллельные прямые, пересекающие плоскость β соответственно в точках A_1 , B_1 , C_1 . Получим шесть точек, образующих вершины треугольной призмы (рис. 1).

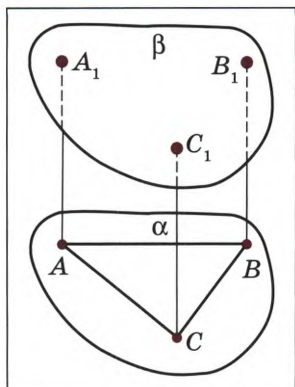


Рис. 1

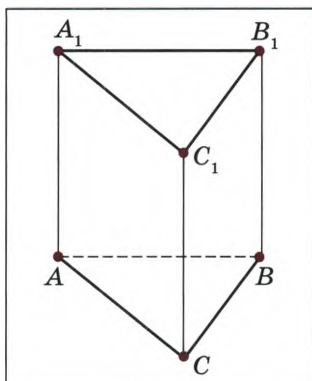


Рис. 2

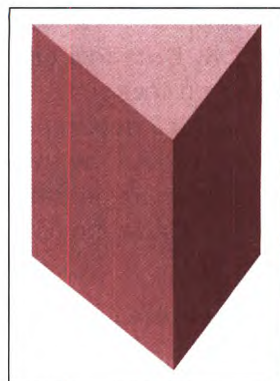


Рис. 3

Стороны AB , BC , AC треугольника ABC — рёбра одного основания призмы, стороны A_1B_1 , B_1C_1 , A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ — рёбра второго основания призмы. Отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 — боковые рёбра призмы (рис. 2). Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, рассматриваемые вместе с внутренними точками, являются двумя *гранями* призмы, которые называются *основаниями*. Параллелограммы AA_1B_1B , BB_1C_1C , AA_1C_1C , рассматриваемые вместе с внутренними точками, являются *боковыми гранями* призмы. Все вместе боковые грани и основания призмы образуют её *поверхность*. Иногда поверхность призмы называют её *границей*.

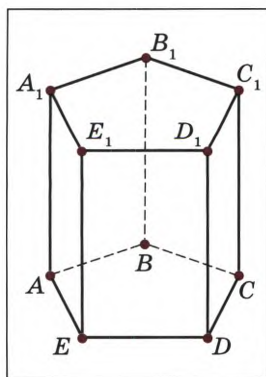


Рис. 4

Присоединим к поверхности призмы все её внутренние точки, то есть точки отрезков, параллельных боковым рёбрам и соединяющих внутренние точки оснований. В результате получится пространственная фигура, которая называется *треугольной призмой* (рис. 3).

Вопрос. Как доказать, что боковые грани треугольной призмы являются параллелограммами?

4.2. n -угольная призма. Подобно тому как определялась треугольная призма, можно определить четырёхугольную призму, пятиугольную призму и вообще n -угольную призму.

Например, для определения пятиугольной призмы возьмём две различные параллельные плоскости α и β и в плоскости α рассмотрим пятиугольник $ABCDE$. Проведя через вершины пятиугольника параллельные прямые, пересекающие

плоскость β соответственно в точках A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 , получим десять точек, образующих вершины пятиугольной призмы.

Отрезки $AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1$ являются боковыми рёбрами, а стороны пятиугольников $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ — рёбрами оснований призмы (рис. 4).

Пятиугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ вместе со своими внутренними точками являются двумя гранями — основаниями призмы. Параллелограммы $AA_1B_1B, BB_1C_1C, CC_1D_1D, DD_1E_1E, AA_1E_1E$ вместе со своими внутренними точками являются боковыми гранями призмы. Все вместе боковые грани и основания пятиугольной призмы образуют её поверхность. Присоединяя к поверхности призмы все её внутренние точки, получим пространственную фигуру, которую и называют пятиугольной призмой (рис. 5).

Каждая боковая грань призмы является четырёхугольником, у которого две противоположные стороны параллельны и равны. Следовательно, каждая боковая грань призмы — параллелограмм.

Отсюда следует, в силу третьего признака равенства треугольников в пространстве (см. пункт 2.8 главы 2), что

основаниями треугольной призмы являются равные между собой треугольники.

Аналогичный результат справедлив и для любой n -угольной призмы.

Вопрос. Сколько вершин, рёбер и граней имеет стоугольная призма?

4.3. Параллелепипед. Четырёхугольная призма, основания которой — параллелограммы, носит особое название — *параллелепипед*.

Рассмотрим параллелепипед, изображённый на рис. 6. Каждая грань параллелепипеда — параллелограмм. Отсюда следует, что не только боковые рёбра параллелепипеда попарно параллельны. Например, параллельны между собой рёбра AB, A_1B_1, C_1D_1, CD . Более того, параллелепипед можно изобразить таким образом, что любая его выбранная грань будет выглядеть как нижнее основание. Например, на рис. 7 параллеле-

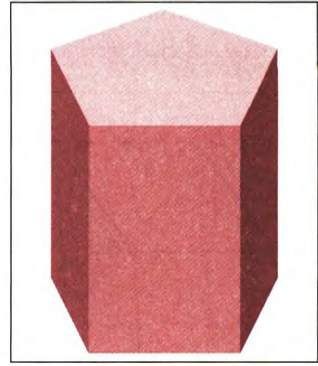


Рис. 5

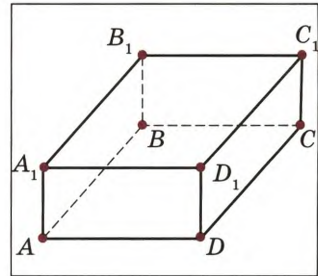


Рис. 6

пипед изображён так, что грань CC_1D_1D выглядит как нижнее основание, а грань ABB_1A_1 — как верхнее основание.

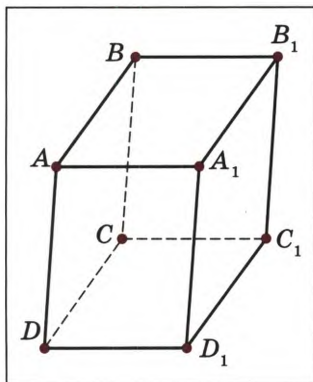


Рис. 7

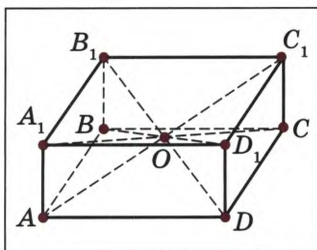


Рис. 8

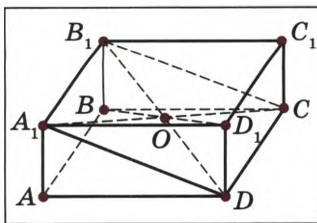


Рис. 9

Вопрос. Как доказать, что у параллелепипеда на рис. 7 вершины A, B, C_1, D_1 лежат в одной плоскости?

4.4. Диагонали параллелепипеда. Пусть вершины параллелепипеда обозначены так, как на рис. 8. Отрезки AC_1, BD_1, CA_1, DB_1 называются *диагоналями* этого параллелепипеда. Все точки диагонали параллелепипеда лежат внутри его, за исключением концов. Диагонали обладают следующим свойством.

Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Доказательство. Достаточно рассмотреть какие-то две из диагоналей параллелепипеда, например A_1C и B_1D (рис. 9). Так как $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1B_1 = AB$ и $CD \parallel AB$, $CD = AB$, то $A_1B_1 \parallel CD$, $A_1B_1 = CD$. Поэтому отрезки A_1B_1 и CD лежат в одной плоскости, параллельны и равны. Значит, четырёхугольник A_1B_1CD — параллелограмм, и по свойству диагоналей параллелограмма отрезки A_1C и B_1D пересекаются в точке O так, что $A_1O = OC$, $B_1O = OD$.

Вопрос. Какими свойствами обладает точка пересечения диагоналей куба?

4.5. Противоположные вершины и рёбра параллелепипеда. Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются смежными, а не имеющие общих рёбер — противоположными. Два параллельных ребра параллелепипеда, не лежащие в одной грани, также называют противоположными. Две вершины параллелепипеда, не лежащие в одной

грани, называют *противоположными*.

Вопрос. Как доказать, что отрезок, соединяющий середины противоположных рёбер параллелепипеда, проходит через точку пересечения диагоналей параллелепипеда и делится этой точкой пополам?

4.6.* Центральная симметрия в пространстве. Аналогично тому, как это делается на плоскости, в пространстве определяется центральная симметрия.

Пусть O — фиксированная точка пространства. Точки M и M_1 , отличные от точки O , называются симметричными относительно O , если O — середина отрезка MM_1 .

Точка O называется *центром симметрии*. Принято считать, что центр симметрии симметричен самому себе.

Фигура F_1 называется *симметричной* фигуре F относительно центра O , если F_1 состоит из всех точек, симметричных точкам фигуры F (рис. 10).

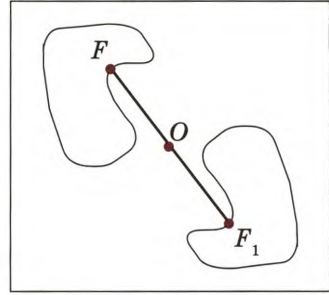


Рис. 10

Основные свойства центральной симметрии пространства вытекают из следующего утверждения.

Центральная симметрия пространства для каждой плоскости, проходящей через центр симметрии O , обладает всеми свойствами центральной симметрии этой плоскости относительно центра O .

Вопрос. Как доказать, что параллелепипед центрально симметричен относительно точки пересечения своих диагоналей?

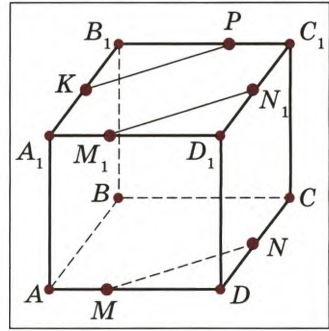


Рис. 11

4.7. Построение сечений призмы. Вспомним, что основания каждой призмы лежат в параллельных плоскостях. Этим обстоятельством удобно пользоваться при построении сечений.

Пример 1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром длины a даны точки M , N и K , причём M лежит на ребре AD и $AM : MD = 1 : 2$. Точка N — середина ребра CD , точка K — середина ребра $A_1 B_1$. Построим сечение куба плоскостью MNK .

Плоскость MNK пересекает параллельные плоскости $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ по параллельным прямым. Поэтому на ребре $A_1 D_1$ выберем точку M_1 так, что $A_1 M_1 : M_1 D_1 = AM : MD = 1 : 2$, а на ребре $C_1 D_1$ возьмём середину N_1 и проведём прямую KP параллельно $M_1 N_1$ (рис. 11).

Затем найдём точку X пересечения прямых KP и $A_1 D_1$ и точку Y пересечения прямых KP и $C_1 D_1$. Для определения точного положения точек P , X и Y рассмотрим рис. 12. В результате получим, что треугольники

$M_1N_1D_1$, A_1KX , B_1KP равны, а треугольники B_1KP и PC_1Y подобны. Отсюда найдём, что $B_1P = \frac{2a}{3}$, $A_1X = \frac{2a}{3}$, $C_1P = \frac{a}{3}$ и $C_1Y = \frac{a}{4}$.

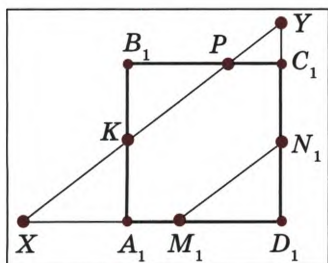


Рис. 12

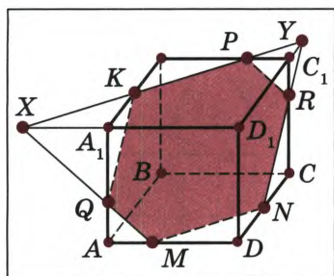


Рис. 13

После этого отметим точку Q пересечения MX и AA_1 , точку R пересечения NY и CC_1 и получим все вершины сечения. В сечении получается шестиугольник $MCKPRN$, изображённый на рис. 13.

Вопрос. Как доказать, что $KQ \parallel RN$ и $QM \parallel PR$?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Что такое треугольная призма?
2. Какие точки называются внутренними для треугольной призмы?
3. Какой вид имеют боковые грани треугольной призмы?
4. Что такое четырёхугольная призма?
5. Что такое пятиугольная призма?
6. Сформулируйте определение параллелепипеда.
7. Что называют диагоналями параллелепипеда?
8. Докажите, что диагонали параллелепипеда в точке пересечения делятся пополам.

- 9.* Как определяется центральная симметрия в пространстве?
- 10.* Какая фигура в пространстве называется симметричной относительно центра O ?
- 11.** Докажите, что параллелепипед центрально симметричен относительно точки пересечения своих диагоналей.

■ Задачи и упражнения

1. Рассмотрим треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$. Пусть точки K , M , N — середины боковых рёбер AA_1 , BB_1 , CC_1 . Докажите, что $ABCKMN$ и $A_1B_1C_1KMN$ — тоже треугольные призмы.
2. Рассмотрим треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$. Пусть точки M , N и K — середины боковых рёбер AA_1 , BB_1 и CC_1 соответственно. Докажите, что плоскости A_1B_1K и MNC параллельны.

3. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка K — середина ребра CC_1 , точка N — середина ребра A_1B_1 . В каком отношении плоскость BKN делит ребро A_1C_1 ?

4. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M — середина ребра AA_1 , точка K — середина CC_1 , точка P — середина AB . Проведите через точку M плоскость, параллельную плоскости A_1PK , и определите, в каком отношении эта плоскость делит ребро AB .

5. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка K — середина CC_1 . Проведите через точку K плоскость, параллельную плоскости A_1BC . Докажите, что плоскость сечения пересекает плоскость BB_1C_1C по прямой, параллельной BC , и найдите, в каком отношении это сечение делит рёбра A_1B_1 и A_1C_1 .

6. Дан куб $ABCD A_1B_1C_1D_1$ с ребром длины a , точка M — середина AB . Проведите через точку M сечение куба плоскостью:

- а) параллельной плоскости AA_1D_1D ;
- б) параллельной плоскости BDD_1B_1 ;
- в) параллельной плоскости BDA_1 ;
- г) параллельной плоскости AD_1K , где точка K — середина DC ;
- д) параллельной плоскости ACB_1 ; найдите площадь получившегося сечения.

7. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 3$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, точка M — середина ребра B_1C_1 . Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью CA_1M .

8. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1B_1C_1D_1$, в котором $AB = 2$, $AD = 2$, $AA_1 = 1$, точка M — середина ребра B_1C_1 , точка N — середина ребра BB_1 .

- а) Через точку N проведите сечение параллельно плоскости AMC ;
- б) найдите площадь сечения.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Сколько граней у n -угольной призмы?

- 1) n
- 2) $2n$
- 3) $3n$
- 4) $n + 2$

1.2. Ребра прямоугольного параллелепипеда равны 4, 5 и 6. Найдите наибольшую площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через два противоположных ребра.

- 1) $4\sqrt{61}$
- 2) $5\sqrt{52}$
- 3) $6\sqrt{41}$
- 4) $20\sqrt{6}$

1.3. Где в параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 расположен центр симметрии?

- 1) на середине AB 2) на середине AC
3) на середине AD_1 4) на середине AC_1

1.4. Куб симметрично отразили относительно середины ребра и получили новый куб. Какой вид имеет пересечение этих кубов?

- 1) точка 2) отрезок 3) треугольник 4) квадрат

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Дана треугольная призма $ABCA_1 B_1 C_1$. Пусть K — середина ребра CC_1 , точка N — середина ребра $A_1 B_1$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки B, K, N , может делить ребро $A_1 C_1$?

- 1) 1:1 2) 1:2 3) 1:3 4) 2:3

2.2.** Рёбра параллелепипеда равны 3, 4 и 5 см. Чему может равняться одна из его диагоналей?

- 1) 0,1 см 2) 1 см 3) 10 см 4) 15 см

2.3. Какие из указанных фигур имеют центр симметрии?

- 1) пирамида 2) куб
3) треугольная призма 4) параллелепипед

2.4. Какие из указанных фигур имеют хотя бы один центр симметрии?

- 1) пара параллельных прямых
2) пара пересекающихся прямых
3) пара лучей, не лежащих на одной прямой, с общей вершиной
4) пара скрещивающихся прямых

■ § 5. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

5.1. Параллельная проекция. При изображении пространственных фигур на плоскости используют свойства параллельного проектирования на плоскость. В этом параграфе мы приведём определение параллельного проектирования, установим его основные свойства и приведём их доказательства.

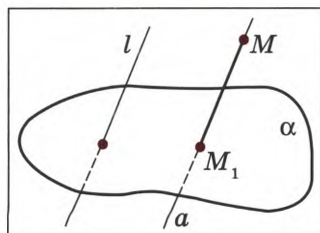


Рис. 1

Пусть даны плоскость α и не параллельная ей прямая l .

Проекцией точки M на плоскость α параллельно прямой l называется точка M_1 пересечения с плоскостью α прямой a , проходящей через точку M и параллельной прямой l (рис. 1).

Прямую l обычно называют *направлением* параллельного проектирования.

Проекцией фигуры F на плоскость α параллельно прямой l называется плоская фигура F_1 , состоящая из проекций всех точек фигуры F .

Когда из текста ясно, параллельно какой прямой рассматривается проекция, то для краткости говорят о параллельной проекции фигуры.

При изображении параллельных проекций пирамид, параллелепипедов, призм и других многогранников особо изображают параллельные проекции рёбер. «Невидимые» рёбра иногда изображают пунктирной линией.

Вопрос. Какой вид может иметь параллельная проекция тетраэдра?

5.2. Параллельное проектирование прямой. Одно из основных свойств параллельного проектирования состоит в следующем.

При параллельном проектировании на плоскость прямая, не параллельная направлению проектирования, проектируется в прямую.

Вопрос. Что получится при параллельном проектировании на плоскость прямой, которая параллельна направлению проектирования?

5.3. Доказательство свойства параллельного проектирования прямой.** Пусть l — направление параллельного проектирования. Возьмём прямую a , не параллельную l . Проведём через каждую точку прямой a прямую, параллельную l . В результате получим плоскость β , параллельную прямой l (см. п. 2.6). Так как прямые, параллельные l , пересекают плоскость α , плоскости α и β пересекаются. Обозначим прямую пересечения плоскостей α и β через b (рис. 2). Покажем, что параллельной проекцией прямой a будет прямая b .

Действительно, если возьмём на прямой a произвольную точку M и проведём через M прямую m параллельно l , то m пройдёт в плоскости β . А так как прямая m пересекает плоскость α , то m пересекает прямую b в точке M_1 (рис. 3). Следовательно, каждая точка прямой a проектируется в некоторую точку прямой b .

С другой стороны, возьмём на прямой b произвольную точку N_1 и проведём через неё прямую n параллельно l . Так как $l \parallel n$, то n лежит в плоскости β и не параллельна прямой a . Поэтому n пересекает a в точке N (рис. 4). Значит,

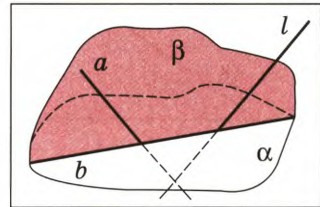


Рис. 2

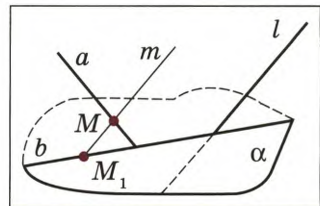


Рис. 3

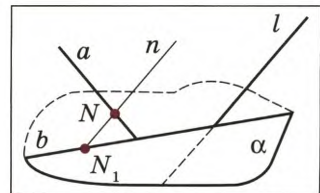


Рис. 4

точка N проектируется в точку N_1 . Следовательно, в каждую точку прямой b проектируется некоторая точка прямой a .

Таким образом, проектируя точки прямой a , мы получаем точки прямой b , причём все точки прямой b .

Вопрос. В каком случае параллельные проекции двух различных прямых совпадают?

5.4. Сохранение отношения отрезков прямой при её параллельном проектировании. Рассмотрим ещё одно свойство параллельного проектирования. Пусть точки A, B, C расположены на одной прямой, не параллельной направлению проектирования. Согласно пункту 5.2, эти точки проектируются соответственно в точки A_1, B_1, C_1 , расположенные на одной прямой. Докажем, что при этом выполняется равенство $A_1B_1 : B_1C_1 = AB : BC$.

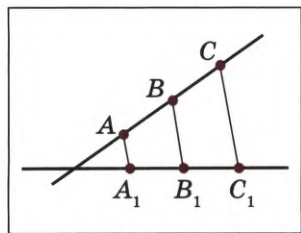


Рис. 5

Для доказательства рассмотрим плоскость, содержащую точки A, A_1, B, B_1, C, C_1 (рис. 5). По определению параллельного проектирования прямые AA_1, BB_1, CC_1 параллельны. Поэтому, по свойству параллельных секущих двух прямых, получаем равенство отношений соответствующих отрезков: $A_1B_1 : AB = B_1C_1 : BC$. Отсюда, согласно соответствующему свойству пропорций, вытекает $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$, что и требовалось доказать.

Установленное свойство можно кратко сформулировать так:

при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков прямой.

Вопрос. В какую точку проектируется середина данного отрезка?

5.5. Параллельное проектирование отрезка.** Из изложенного в предыдущем пункте сразу получается следствие.

Пусть точки A и B проектируются в точки A_1 и B_1 . Тогда каждая точка отрезка AB проектируется в точку отрезка A_1B_1 .

Доказательство. Возьмём произвольную точку X отрезка AB . Тогда $AX + XB = AB$. Обозначим проекцию точки X через X_1 . По свойству параллельного проектирования $A_1X_1 : AX = X_1B_1 : XB = A_1B_1 : AB$. Обозначив каждое из этих отношений через k , получим $A_1X_1 = k \cdot AX$, $X_1B_1 = k \cdot XB$, $A_1B_1 = k \cdot AB$. Поэтому $A_1X_1 + X_1B_1 = k \cdot AX + k \cdot XB = k(AX + XB) = k \cdot AB = A_1B_1$. Следовательно, $X_1 \in A_1B_1$.

Вопрос. Как доказать, что при параллельном проектировании луча получается либо луч, либо точка?

5.6. Проекция двух параллельных прямых. Параллельное проектирование обладает ещё одним важным свойством.

Параллельными проекциями двух параллельных прямых a и b являются параллельные прямые, если прямые a и b не параллельны направлению проектирования.

Доказательство. Пусть прямые a и b проектируются на плоскость α параллельно прямой l . Выберем на a произвольную точку M , а на b — точку N . Через точки M и N проведём соответственно прямые m и n , параллельные направлению проектирования. Рассмотрим плоскость β , проходящую через прямые a и m , и плоскость γ , проходящую через прямые b и n . По признаку из пункта 3.3 плоскости β и γ параллельны (рис. 6). Проекциями прямых a и b на плоскость α являются соответственно прямая p пересечения α и β и прямая q пересечения α и γ . Так как $\beta \parallel \gamma$, то $p \parallel q$, что и требовалось доказать.

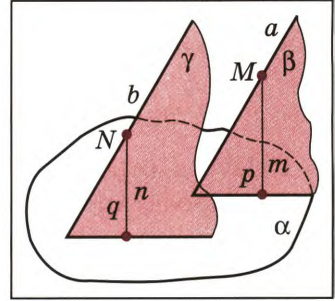


Рис. 6

Вопрос. Какой вид может иметь параллельная проекция квадрата на плоскость?

5.7. Сохранение отношения параллельных отрезков при параллельном проектировании.** В пункте 5.4 было доказано, что при параллельном проектировании сохраняется отношение отрезков одной прямой. Это свойство можно обобщить.

Пусть при параллельном проектировании параллельные отрезки AB и CD проектируются в отрезки A_1B_1 и C_1D_1 . Тогда

$$A_1B_1 : C_1D_1 = AB : CD.$$

Вопрос. Как доказать сформулированное свойство?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Дайте определение проекции точки M на плоскость α параллельно прямой l .
2. Что такое проекция фигуры F на плоскость α параллельно прямой l ?
3. Во что при параллельном проектировании переходит прямая?
4. В каком случае при параллельном проектировании прямая переходит в прямую?
5. В каком случае при параллельном проектировании прямая переходит в точку?

6. Сформулируйте и докажите утверждение о сохранении отношения отрезков при параллельном проектировании.

7. Во что проектируется отрезок при параллельном проектировании?

8. В каком случае при параллельном проектировании двух параллельных прямых получаются две параллельные прямые?

9. В каком случае проекция двух параллельных прямых — две точки?

■ Задачи и упражнения

1. Пусть отрезок AB при параллельном проектировании на плоскость α проектируется в отрезок A_1B_1 .

а) Докажите, что если прямая AB параллельна плоскости α , то $AB = A_1B_1$;

б) докажите, что если прямая AB не параллельна плоскости α , то прямые AB и A_1B_1 пересекаются;

в) в каком случае $A_1B_1 < AB$?

2.* Рассмотрим треугольник ABC . Известно, что при параллельном проектировании треугольник ABC переходит в равный ему треугольник $A_1B_1C_1$. Могут ли плоскости этих треугольников быть непараллельными? Если да, то приведите пример.

3.* Известно, что при параллельном проектировании треугольник ABC переходит в треугольник $A_1B_1C_1$ и $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. Могут ли эти треугольники быть неравными? Если да, то приведите пример.

4. Треугольник ABC параллельно проектируется на плоскость α в треугольник $A_1B_1C_1$. В каком случае $ABCA_1B_1C_1$ является призмой?

5.* В каких случаях при параллельном проектировании проекции скрещивающихся прямых будут параллельны?

6. Может ли при параллельном проектировании квадрата получиться: а) прямоугольник; б) параллелограмм; в) ромб; г) трапеция?

7.* Дан произвольный треугольник. Как получить из него равнобедренный треугольник при помощи параллельного проектирования?

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Четырёхугольник $A_1B_1C_1D_1$ является проекцией трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD на плоскость α . В каком отношении диагональ A_1C_1 делит диагональ B_1D_1 , если $AB = 2$ и $CD = 1$?

- 1) 1:1 2) 2:1 3) 3:1 4) 3:2

1.2. Какое наибольшее число вершин может иметь многоугольник, который получается при параллельном проектировании куба на плоскость?

- 1) 5 2) 6 3) 7 4) 8

1.3. Какой вид имеет параллельная проекция куба на плоскость грани в направлении его главной диагонали?

- 1) квадрат 2) прямоугольник 3) ромб 4) шестиугольник.

1.4.* Сколько всего можно провести диагоналей в гранях пятиугольной призмы?

- 1) 10 2) 20 3) 30 4) 40

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Параллельной проекцией двух параллельных прямых могут быть:

- 1) две точки 2) прямая и не лежащая на ней точка
3) параллельные прямые 4) пересекающиеся прямые

2.2. Параллельной проекцией параллелограмма может быть:

- 1) треугольник 2) четырёхугольник
3) пятиугольник 4) шестиугольник

2.3. Какой вид может иметь параллельная проекция угла на плоскость?

- 1) угол 2) точка 3) луч 4) прямая

2.4. Какой вид может иметь проекция некоторой четырёхугольной пирамиды на плоскость боковой грани?

- 1) треугольник 2) четырёхугольник
3) пятиугольник 4) шестиугольник



Глава 5

ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

В этой главе рассматривается понятие предела числовой последовательности. Вы узнаете, как с помощью пределов вычислять площади некоторых плоских фигур и находить сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

■ § 1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, СХОДЯЩИЕСЯ К НУЛЮ

1.1. Числовые последовательности. Интуитивное представление о числовой последовательности связано с представлением о наличии бесконечного числа мест, занумерованных натуральными числами $1, 2, 3, \dots, n, \dots$, на которых расставлены действительные числа, причём некоторые из них (и даже все) могут быть одинаковы. Невозможно перечислить все члены последовательности, хотя, имея в виду под a_n член последовательности, стоящий на n -м месте, мы часто записываем последовательность в виде

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Чаще всего (хотя и не обязательно!) последовательность (a_n) задаётся формулой её общего члена $a_n = f(n)$, позволяющей по номеру n сразу находить значение a_n . Например, последовательность $1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots$ можно задать формулой $a_n = n^2$, последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$ — формулой $a_n = \frac{1}{n}$, последовательность $1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$ задаётся формулой $a_n = (-1)^{n+1}$. Иногда фразу «последовательность (a_n) », заданная формулой $a_n = f(n)$ » для краткости заменяют на фразу «последовательность $a_n = f(n)$ ».

Вопрос. Чему равен 2013-й член последовательности, заданной формулой $a_n = \frac{n + 2013}{n + 987}$?

1.2.* Определение последовательности. Для того чтобы задать последовательность, нужно каждому натуральному числу n сопоставить действительное число. Таким образом, представляется естественным дать следующее определение.

Бесконечной числовой последовательностью называется функция f , отображающая по некоторому закону множество N натуральных чисел в множество R действительных чисел.

Обозначая $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ..., $f(n) = a_n$, ..., всю последовательность f будем обычно записывать (a_n) ; число a_n называют n -м членом последовательности, натуральное число n — его номером. Как уже говорилось, значения f при различных n не обязательно различны.

Не следует думать, что последовательность всегда задаётся формулой общего члена. Например, n -й член последовательности 3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, ... определяется с помощью словесной формулировки: « a_n равен n -й цифре десятичной записи числа π », и для того, чтобы его найти, нужно вычислить n -й знак числа π . С помощью словесной формулировки также определяется последовательность 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ..., n -м членом которой является n -е простое число.

Довольно часто последовательность задаётся рекуррентными (возвратными) соотношениями, указывающими способ нахождения n -го члена последовательности по уже известным предшествующим ему членам. Таким образом, для вычисления последующего члена возвращаются к предыдущим (отсюда и название). Пусть, например,

$$a_1 = 1, a_2 = a_1 \cdot 2, a_3 = a_2 \cdot 3, \dots, a_n = a_{n-1} \cdot n, \dots$$

Как известно, число, равное n -му члену этой последовательности $a_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, имеет особое наименование « n -факториал» и запись $n!$.

Другие примеры последовательностей, задающихся рекуррентными соотношениями, дают арифметическая и геометрическая прогрессии. Арифметическая прогрессия (a_n) с первым членом a и разностью d задаётся рекуррентными соотношениями

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d.$$

Геометрическая прогрессия (b_n) с первым членом $b \neq 0$ и знаменателем $q \neq 0$ задаётся соотношениями

$$b_1 = b, b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

Ещё один стандартный пример даёт последовательность чисел Фибоначчи:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Здесь

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Для последовательности Фибоначчи нахождение общего члена довольно трудно. Формула, дающая выражение n -го члена этой последовательности, имеет вид:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n}.$$

Вопрос. Для каких натуральных n в последовательности чисел Фибоначчи n -й член равен n^2 ?

1.3. Примеры числовых последовательностей, сходящихся к нулю.

Пример 1. Рассмотрим последовательность $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{6}$, $a_4 = \frac{1}{8}$, ..., общий член которой задаётся формулой $a_n = \frac{1}{2n}$. Изобразим её начальные члены на числовой прямой (рис. 1). Видно, что точки a_1, a_2, a_3, \dots по мере возрастания номеров становятся всё ближе и ближе к нулю. При этом какое бы натуральное число k мы ни взяли, в числовой промежутке между числами 0 и $\frac{1}{k}$ попадут все точки последовательности (a_n) с номерами, большими некоторого числа M , зависящего от k . Это значит, что при всех $n > M$ будет выполняться двойное неравенство $0 < a_n < \frac{1}{k}$.

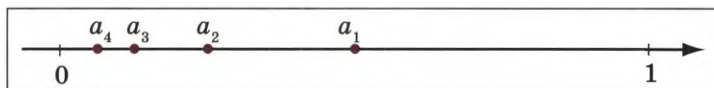


Рис. 1

Например, если $k = 100$, то неравенства $0 < a_n < \frac{1}{100}$ или $0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{100}$ выполняются *при всех* $n > 50$. Таким образом, для $k = 100$ можно взять $M = 50$ и получить, что при любом n , таком, что $n > M$, выполняется двойное неравенство

$$0 < a_n < \frac{1}{k}.$$

Аналогично можно взять любое другое натуральное число k ; например, если $k = 1000$, то двойное неравенство $0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{1000}$ выполняется *при всех* $n > 500$. Таким образом, для $k = 1000$ можно взять $M = \frac{1000}{2}$ и получить, что *при всех* n таких, что $n > M$, выполняется двойное неравенство $0 < a_n < \frac{1}{k}$.

Точно так же можно взять любое другое натуральное число k , выбрать $M = \frac{k}{2}$ и получить, что двойное неравенство $0 < a_n < \frac{1}{k}$ выполняется при всех $n > M$. Учитывая отмеченную особенность, говорят, что последовательность $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = \frac{1}{6}$, $a_4 = \frac{1}{8}$, ..., *сходится к нулю* или *имеет предел, равный нулю*, и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Прочитать эту запись можно так: «Предел а-эн равен нулю при эн, стремящемся к бесконечности».

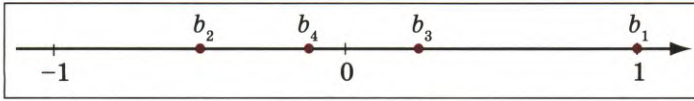


Рис. 2

Пример 2. Возьмём геометрическую прогрессию $b_1 = 1$, $b_2 = -\frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{1}{4}$, $b_4 = -\frac{1}{8}$, ... со знаменателем $q = -\frac{1}{2}$. Изобразим её начальные члены на числовой прямой (рис. 2). Точки b_1, b_2, b_3, \dots по мере возрастания номеров становятся всё ближе и ближе к нулю, но уже с двух сторон: то слева, то справа. При этом какое бы натуральное число k мы ни взяли, в числовой промежуток $\left(-\frac{1}{k}; \frac{1}{k}\right)$ попадут все точки последовательности (b_n) с номерами, большими некоторого числа M , зависящего от k . Это значит, что при всех $n > M$ будут выполняться двойное неравенство $-\frac{1}{k} < b_n < \frac{1}{k}$.

Например, если $k = 1000$, то $|b_n| = \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{1}{1000}$ при всех $n > 10$, так как тогда $2^{n-1} \geq 2^{10} = 1024 > 1000$. Поэтому при всех $n > 10$ выполняется двойное неравенство

$$-\frac{1}{1000} < b_n < \frac{1}{1000}.$$

Таким образом, для $k = 1000$ можно взять $M = 10$ и получить, что при любом n таком, что $n > M$, выполняется двойное неравенство

$$-\frac{1}{k} < b_n < \frac{1}{k}.$$

Поскольку $2^n \geq n$, то двойное неравенство $-\frac{1}{1000} < b_n < \frac{1}{1000}$ выполняются и при $n > 1000$. Вообще, двойное неравенство $-\frac{1}{k} < b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} < \frac{1}{k}$ заведомо выполняются для всех $n > k$. Аналогично можно рассмотреть произвольное натуральное число k и для него найти подходящее $M = k$, такое, что при любом $n > M$ выполняется двойное неравенство $-\frac{1}{k} < b_n < \frac{1}{k}$.

В этом случае также говорят, что последовательность

$$b_1 = 1; b_2 = -\frac{1}{2}; b_3 = \frac{1}{4}; b_4 = -\frac{1}{8}; \dots$$

сходится к нулю, и пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

Вопрос. Как показать, что в рассмотренном примере неравенство $|b_n| < \frac{1}{k}$ выполняется при всех $n > k$?

1.4. Определение сходимости последовательности к нулю. Оба рассмотренных примера последовательностей удовлетворяют следующему общему определению сходимости числовой последовательности к нулю.

Последовательность (a_n) сходится к нулю, если для каждого натурального числа k найдётся такое число M , зависящее от числа k , что для всех номеров n таких, что $n > M$, выполняется двойное неравенство

$$-\frac{1}{k} < a_n < \frac{1}{k}.$$

Когда последовательность (a_n) сходится к нулю, говорят также, что она *имеет предел, равный нулю*, и записывают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Вопрос. Какое число M при $k = 900$ можно взять для последовательности с общим членом $a_n = \frac{1}{10^n}$, чтобы при любом $n > M$ выполнялось неравенство $|a_n| < \frac{1}{k}$?

1.5. Другие определения сходимости последовательности к нулю.

Пусть последовательность (a_n) сходится к нулю, тогда, взяв произвольное натуральное число k , по числу 10^k найдём такое число M , что для всех номеров $n > M$ выполняется двойное неравенство $-\frac{1}{10^k} < a_n < \frac{1}{10^k}$.

Обратно, если для каждого натурального числа k по числу 10^k найдём такое число M , что для всех номеров $n > M$ выполняется двойное неравенство $-\frac{1}{10^k} < a_n < \frac{1}{10^k}$, то для этих номеров тем более выполняется двойное неравенство $-\frac{1}{k} < a_n < \frac{1}{k}$. Это рассуждение позволяет иначе записать определение сходимости последовательности к нулю.

Последовательность (a_n) сходится к нулю, если для каждого натурального числа k найдётся такое число M , зависящее от числа k , что для всех номеров n таких, что $n > M$, выполняется двойное неравенство

$$-10^{-k} < a_n < 10^{-k}.$$

Иными словами, последовательность (x_n) сходится к нулю, если с некоторого номера n_0 целые части модулей всех чисел x_n равны нулю; с некоторого номера n_1 целые части и первые цифры после запятой модулей всех чисел x_n равны нулю; с некоторого номера n_2 целые части и первые две цифры после запятой модулей всех чисел x_n равны нулю и так

далее. Следовательно, сходящиеся к нулю числовые последовательности обладают тем свойством, что для всякой наперёд указанной точности все члены последовательности с достаточно большими номерами можно с этой точностью считать равными нулю. Таким образом,

последовательность (x_n) сходится к нулю, если для каждого натурального k найдётся такое число M , что при всех $n > M$ числа x_n равны нулю с точностью до k десятичных знаков после запятой.

Для изучения свойств последовательностей, сходящихся к нулю, удобнее использовать такую формулировку определения сходимости.

Последовательность (a_n) сходится к нулю, если для каждого положительного числа ε найдётся такое число M , зависящее от числа ε , что для всех номеров $n > M$, выполняется двойное неравенство

$$-\varepsilon < a_n < \varepsilon.$$

Вопрос. Может ли миллионный член последовательности (a_n) оказаться равным миллиону, если известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$?

1.6.* Геометрическое представление сходимости последовательности к нулю. Сходимость последовательности (a_n) к нулю геометрически означает следующее: для каждого положительного числа ε числовой промежуток $(-\varepsilon; \varepsilon)$ содержит все члены последовательности, номера которых больше некоторого числа M , зависящего от ε .

Это условие для каждого $\varepsilon > 0$ записывается в виде двойного неравенства

$$-\varepsilon < a_n < \varepsilon,$$

которое выполняется при $n > M$.

Это же условие можно записать в виде одного неравенства

$$|a_n| < \varepsilon,$$

выполняющегося при $n > M$.

Следовательно, определение сходящейся к нулю последовательности можно записать в таком виде:

последовательность (a_n) сходится к нулю, если для всякого положительного числа ε найдётся такое число M , что для всех номеров n , таких, что $n > M$, выполняется неравенство $|a_n| < \varepsilon$.

Вопрос. Сколько членов последовательности с общим членом

$$a_n = \frac{1}{2^n + 3^n} \text{ лежат вне числового промежутка } (-0,01; 0,01)?$$

1.7. Бесконечно малая последовательность. Если последовательность (a_n) сходится к нулю, то её иногда называют *бесконечно малой*.

Например, последовательность $a_n = \frac{1}{2n}$ можно назвать бесконечно малой, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0$.

Пример 3. Рассмотрим последовательность (a_n) , заданную формулой $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Пусть ε — произвольное положительное число. Двойное неравенство $-\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ выполняется для тех и только тех n , для которых $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$, откуда $n > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $M = \frac{1}{\varepsilon^2}$, что, как только номер n больше M , выполняется неравенство $|a_n| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, и $\frac{1}{\sqrt{n}}$ — бесконечно малая последовательность.

Пример 4. Рассмотрим последовательность (a_n) , где $a_n = \frac{10000}{n}$.

Начальные члены этой последовательности выглядят так:

$$10000; 5000; 3333\frac{1}{3}; 2500; 2000; 1666\frac{2}{3}; \dots$$

и являются довольно большими числами. Тем не менее последовательность сходится к нулю.

Действительно, возьмём, например, число $\varepsilon = \frac{1}{100}$ и решим неравенство $|a_n| < \varepsilon$ или $\frac{10000}{n} < \frac{1}{100}$. Получаем $n > 10^6$. Это значит, что если мы возьмём $M = 10^6$, то при всех $n > M$ будет выполняться неравенство $|a_n| < \varepsilon$.

Аналогично для каждого положительного числа ε можно найти такое число M , что $|a_n| < \varepsilon$ при всех $n > M$. Для этого достаточно решить неравенство $|a_n| < \varepsilon$ или $\frac{10000}{n} < \varepsilon$, откуда $n > \frac{10000}{\varepsilon}$. Следовательно, если взять $M = \frac{10000}{\varepsilon}$, то при всех $n > M$ будет выполняться неравенство $|a_n| < \varepsilon$.

Мы показали, что для последовательности (a_n) , где $a_n = \frac{10000}{n}$, выполняются условия, записанные в определении сходимости к нулю.

Вопрос. Как доказать, что если (a_n) — бесконечно малая, то последовательность с общим членом $b_n = |a_n|$ также бесконечно малая?

1.8.* Последовательности, не являющиеся бесконечно малыми.

Пример 5. Пусть $a_n = \frac{1+(-1)^n}{10000}$. Тогда $a_n = 0$ при нечётном n , $a_n = \frac{2}{10000}$ при чётном n . Хотя число $\frac{2}{10000}$ очень малое, но считать нуль пределом

последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ нельзя. Действительно, возьмём число $\varepsilon = \frac{1}{5001}$.

Тогда $\varepsilon < \frac{2}{10000}$, и в интервал $(-\varepsilon; \varepsilon)$, то есть в интервал $\left(-\frac{1}{5001}; \frac{1}{5001}\right)$,

не попадут все члены последовательности с чётными номерами: a_2, a_4, a_6, \dots . Это значит, что какое бы число M мы ни взяли, все члены последовательности (a_n) с номерами $n > M$ не могут входить в интервал $\left(-\frac{1}{5001}; \frac{1}{5001}\right)$, то есть последовательность не удовлетворяет определению сходимости к нулю.

Пример 6. Покажем, что последовательность с общим членом $a_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2}$ не является бесконечно малой.

Ясно, что $a_n = 1$ при нечётном n и $a_n = 0$ при чётном n . Возьмём числовой промежуток $(-0,01; 0,01)$ и заметим, что вне его лежит бесконечное число членов данной последовательности (все члены с нечётными номерами). Таким образом, для каждого M в этот промежуток не попадёт член последовательности с нечётным номером n , большим M .

Вопрос. Известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Может ли миллионный член последовательности с общим членом $b_n = a_n + 1$ оказаться равным нулю?

1.9. Эквивалентность определений сходимости к нулю.** Докажем, что определение из пункта 1.4 и определение из пункта 1.6 эквивалентны, то есть последовательность, сходящаяся к нулю в силу одного определения, сходится к нулю и по другому определению, и наоборот.

I. Пусть последовательность (a_n) удовлетворяет свойству: для каждого натурального числа k найдётся такое число M , зависящее от числа k , что для всех номеров n , таких, что $n > M$, выполняется двойное неравенство $-\frac{1}{k} < a_n < \frac{1}{k}$. Для каждого положительного числа ε выберем натуральное число $k_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ и для этого числа найдём такое число M , зависящее от числа k_0 , что для всех номеров n , таких, что $n > M$, выполняется двойное неравенство $-\frac{1}{k_0} < a_n < \frac{1}{k_0}$. Так как $\frac{1}{k_0} < \varepsilon$, получаем двойное неравенство $-\varepsilon < -\frac{1}{k_0} < a_n < \frac{1}{k_0} < \varepsilon$, откуда $|a_n| < \varepsilon$. Таким образом, последовательность (a_n) удовлетво-

ряет свойству: для всякого положительного числа ε найдётся такое число M , что для всех номеров n , таких, что $n > M$, выполняется неравенство $|a_n| < \varepsilon$.

II. Обратно, пусть последовательность (a_n) удовлетворяет свойству: для всякого положительного числа ε найдётся такое число M , что для всех номеров n , таких, что $n > M$, выполняется неравенство $|a_n| < \varepsilon$. Для каждого натурального k выберем $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ и для этого ε_k найдём M так, что при всех $n > M$ выполняется неравенство $|a_n| < \varepsilon_k$, откуда $-\varepsilon_k = -\frac{1}{k} < a_n < \frac{1}{k} = \varepsilon_k$. Таким образом, последовательность (a_n) удовлетворяет свойству: для каждого натурального числа k найдётся такое число M , зависящее от числа k , что для всех номеров n , таких, что $n > M$, выполняется двойное неравенство $-\frac{1}{k} < a_n < \frac{1}{k}$.

Вопрос. Как показать, что если последовательность $(|a_n|)$ — бесконечно малая, то и последовательность (a_n) — бесконечно малая?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Какие примеры числовых последовательностей вы знаете?
2. Какие примеры сходящихся к нулю последовательностей вы знаете?
3. При выполнении какого условия последовательность называется сходящейся к нулю?
- 4.* Как геометрически определить сходимость последовательности к нулю?
- 5.* Найдётся ли сходящаяся к нулю последовательность, у которой бесконечное множество членов больше, чем 10^{-6} ?
6. Когда последовательность называют бесконечно малой?

■ Задачи и упражнения

1. Запишите первые восемь членов последовательности, заданной формулой:

$$а) a_n = \frac{1}{2n-1}; \quad б) a_n = \frac{1}{n^2+1}; \quad в) a_n = \frac{1}{2^n+(-1)^n}; \quad г) a_n = \frac{n!}{(n+2)!}.$$

2. Докажите, что последовательность (a_n) сходится к 0, указав для каждого натурального k такое число M , что $-\frac{1}{k} < a_n < \frac{1}{k}$ при $n > M$.

$$а) a_n = \frac{1}{3n-1}; \quad б) a_n = \frac{100}{4n+3}; \quad в)* a_n = \frac{1}{n^2+n}; \quad г)** a_n = \frac{1}{1+(-2)^n}.$$

Для каждого из этих случаев заполните таблицу.

k	5	20	100	500	1000
M					

3. Докажите, что последовательность (a_n) сходится к 0, указав для каждого положительного числа ε такое число M , что $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$ при $n > M$.

а) $a_n = \frac{1}{3n+2}$; б) $a_n = \frac{(-1)^n}{5n-7}$; в)* $a_n = \frac{n}{n^2-n+1}$; г)** $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$.

Для каждого из этих случаев заполните таблицу.

ε	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
M					

4. Найдите хотя бы одно число M такое, что для всех $n > M$ члены последовательности (a_n) лежат внутри числового промежутка $(-0,01; 0,01)$.

а) $a_n = \frac{5}{2n+3}$; б) $a_n = \frac{3n+1}{n^2}$; в)* $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

5. Покажите, что последовательность (a_n) сходится к нулю, если:

а) $a_n = \frac{1}{n+5}$; б) $a_n = \frac{3}{n}$; в) $a_n = \frac{7}{n+1}$; г) $a_n = \frac{2}{\sqrt{n}}$;
 д) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$; е) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$; ё) $a_n = \frac{3}{2n-9}$.

6. Покажите, что последовательность (a_n) сходится к нулю, если:

а) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$; б) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$; в) $a_n = \frac{2n}{n^2-3}$;
 г) $a_n = \frac{\sqrt{n}-2}{n}$; д) $a_n = \frac{3}{n^5-1}$.

7.** Докажите, что последовательность с общим членом $a_n = \frac{2+(-1)^{3n+1}}{10^{1000}}$ не является бесконечно малой.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Каково множество решений неравенства $|x-3| \leq 0,1$?

1) $(-\infty; -2,9]$ 2) $(-3,1; 2,9]$ 3) $[2,9; \infty)$ 4) $[2,9; 3,1]$

1.2. Какое из чисел является положительным корнем уравнения

$$\frac{n}{n^2-3} = \frac{1}{100}?$$

1) $50 + \sqrt{2497}$ 2) $100 + \sqrt{9997}$

3) $50 + \sqrt{2503}$ 4) $100 + \sqrt{10\,003}$

1.3. При каком из заданных условий выполняется неравенство $\frac{1}{\sqrt{n}-2} < 0,01$?

1) все $n > 100$ 2) все $n > 100^2$

3) все $n > 200^2$ 4) все $n < 100^2$

1.4.** При каком b последовательность $a_n = \frac{2n}{n+1} - b$ сходится к нулю?

1) $b = 0,5$ 2) $b = 1$ 3) $b = 1,5$ 4) $b = 2$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Для каких чисел M из указанных при всех $n > M$ выполняется неравенство $-0,01 < \frac{1}{\sqrt{n}-3} < 0,01$?

1) 10 200 2) 10 600 3) 11 000 4) 11 400

2.2.* Для каких значений M при всех $n > M$ выполняется неравенство $\left| \frac{n^2}{n^2+n+1} - 1 \right| < \frac{1}{10}$?

1) $M = 4$ 2) $M = 8$ 3) $M = 12$ 4) $M = 16$

2.3. При выполнении каких из заданных условий справедливо неравенство $\frac{1}{n} < 0,001$?

1) $n > 1000$ 2) $n > 999$

3) $n > 1001$ 4) $n < 1000$

2.4.** Среди последовательностей (a_n) укажите бесконечно малые:

1) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$ 2) $a_n = \frac{n}{2n+1}$

3) $a_n = \frac{2^n+1}{4^n}$ 4) $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

■ § 2. СВОЙСТВА БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

2.1. Сумма двух бесконечно малых последовательностей. Бесконечно малые обладают свойствами, которые часто применяются. Рассмотрим следующее свойство.

Пусть (a_n) и (b_n) — бесконечно малые. Тогда их сумма $(a_n + b_n)$ также бесконечно мала.

Часто это свойство формулируют по-другому.

Сумма двух бесконечно малых есть бесконечно малая.

Пример 1. Возьмём бесконечно малые $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $\beta_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$. Тогда по свойству из данного пункта последовательность $x_n = \alpha_n + \beta_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{2^n}$ также бесконечно мала.

Вопрос. Как доказать, что последовательность $(5x_n)$ есть бесконечно малая, если известно, что (x_n) — бесконечно малая?

2.2. Сумма двух бесконечно малых последовательностей бесконечно мала.** Докажем свойство бесконечно малых из предыдущего пункта.

Доказательство. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Для доказательства того, что последовательность $(a_n + b_n)$ сходится к нулю, надо показать, что эта последовательность удовлетворяет определению сходимости к нулю, то есть для каждого $\varepsilon > 0$ требуется найти такое число M , что неравенство $|a_n + b_n| < \varepsilon$ выполняется при всех $n > M$.

Сначала возьмём такое число M_1 , что $|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n > M_1$. Число M_1 существует, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Затем найдём такое число M_2 , что $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всех $n > M_2$. Если теперь в качестве M взять наибольшее из чисел M_1 и M_2 , то при всех $n > M$ будут выполнены неравенства:

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

В итоге показано, как для каждого $\varepsilon > 0$ выбрать зависящее от ε число M так, что неравенство $|a_n + b_n| < \varepsilon$ выполняется при всех $n > M$, что и требуется для доказательства сходимости последовательности $(a_n + b_n)$ к нулю.

Вопрос. Как доказать, что разность двух бесконечно малых также бесконечно мала?

2.3. Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей. Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если найдётся такое число P , что $|a_n| \leq P$ при всех натуральных n . Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей обладает следующим свойством.

Пусть (α_n) — бесконечно малая, а (x_n) — ограниченная последовательность. Тогда их произведение $(\alpha_n \cdot x_n)$ — бесконечно малая последовательность.

Это свойство можно сформулировать короче.

Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

Пример 2. Последовательность $x_n = \sqrt[n]{2}$ ограничена, так как $0 < \sqrt[n]{2} \leq 2$ при всех n . Зная, что $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ — бесконечно малая, заключаем, что $y_n = \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt{n}}$ — тоже бесконечно малая.

Вопрос. Пусть (x_n) — бесконечно малая последовательность, а c — число. Как доказать, что произведение $(c \cdot x_n)$ также бесконечно малая последовательность?

2.4. Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей — бесконечно малая последовательность.** Докажем свойство бесконечно малых из предыдущего пункта.

Доказательство. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, и известно, что $|x_n| \leq P$ для всех номеров n , причём $P > 0$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$. Зная, что последовательность (α_n) сходится к нулю, найдём число M такое, что $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{P}$ при всех $n > M$. Тогда при всех $n > M$ выполняется также неравенство:

$$|x_n \cdot \alpha_n| = |x_n| \cdot |\alpha_n| \leq P \cdot |\alpha_n| < P \cdot \frac{\varepsilon}{P} = \varepsilon.$$

В итоге показано, как для каждого числа $\varepsilon > 0$ выбрать зависящее от ε число M так, что неравенство $|x_n \cdot \alpha_n| < \varepsilon$ выполняется при всех $n > M$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \alpha_n = 0$.

Вопрос. Пусть (α_n) — бесконечно малая последовательность, а последовательность (x_n) для всех $n > K$ удовлетворяет неравенству $|x_n| \leq C$, причём $C > 0$. Как доказать, что произведение $(x_n \cdot \alpha_n)$ также бесконечно малая последовательность?

2.5. Произведение бесконечно малых последовательностей. Вначале сформулируем одно важное свойство бесконечно малых:

бесконечно малая последовательность ограничена.

Пусть последовательности (α_n) и (β_n) — бесконечно малые. Тогда на произведение $(\alpha_n \cdot \beta_n)$ бесконечно малых последовательностей можно посмотреть как на произведение бесконечно малой последовательности (α_n) и ограниченной последовательности (β_n) . Из теоремы пункта 2.3 следует, что последовательность $(\alpha_n \cdot \beta_n)$ — бесконечно малая.

Таким образом,
произведение двух бесконечно малых последовательностей само является бесконечно малой последовательностью.

Вопрос. Как доказать, что последовательность $\left(\frac{1}{n^3}\right)$ бесконечно малая?

2.6. Доказательство ограниченности бесконечно малой последовательности.** Пусть последовательность (β_n) — бесконечно малая. Возьмём произвольное положительное число ε , например $\varepsilon = 1$. Для последовательности (β_n) выберем такое число M , что $-1 < \beta_n < 1$ при всех $n > M$. Взяв среди чисел β_n с номерами, не превосходящими M , самое большое по модулю β_{n_0} и обозначив $C = \max\{1, |\beta_{n_0}|\}$, получим, что при всех $n > M$ выполняется неравенство $-C \leq -1 < \beta_n < 1 \leq C$, а при всех $n \leq M$ выполняются неравенства $-C \leq -|\beta_{n_0}| \leq \beta_n \leq |\beta_{n_0}| \leq C$. Таким образом, при всех n выполняется двойное неравенство $-C \leq \beta_n \leq C$, и последовательность (β_n) — ограничена.

Вопрос. Как доказать, что последовательность $\left(\frac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}}{n}\right)$ ограничена?

2.7. Теорема о пределе промежуточной последовательности.

Пусть (α_n) и (β_n) — бесконечно малые последовательности, а для последовательности (γ_n) выполняется двойное неравенство $\alpha_n \leq \gamma_n \leq \beta_n$ для всех номеров $n > M_0$, где M_0 — некоторое число. Тогда (γ_n) — также бесконечно малая.

Пример 3. Рассмотрим последовательность с общим членом $x_n = \frac{1}{n} \cdot \sin n^\circ$. Так как $-1 \leq \sin n^\circ \leq 1$, для каждого n получаем $\alpha_n = -\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sin n^\circ \leq \frac{1}{n} = \beta_n$. Последовательности (α_n) , (β_n) — бесконечно малые, а поэтому (x_n) — также бесконечно малая, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Вопрос. Пусть $|\alpha_n| \leq |\beta_n|$ при всех $n > M_0$. Как доказать, что если (β_n) — бесконечно малая, то (α_n) — также бесконечно малая?

2.8. Доказательство теоремы о пределе промежуточной последовательности.** Докажем теорему, сформулированную в пункте 2.7.

Доказательство. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0$ и известно, что $\alpha_n \leq \gamma_n \leq \beta_n$ при всех $n > M_0$, где M_0 — некоторое число. Возьмём произвольное число $\varepsilon > 0$. Сначала для последовательности (α_n) выберем число M_1 такое, что $-\varepsilon < \alpha_n < \varepsilon$ при всех $n > M_1$. Затем для последовательности (β_n) выберем число M_2 такое, что $-\varepsilon < \beta_n < \varepsilon$ при всех $n > M_2$. Если теперь в качестве M взять наибольшее из чисел M_0, M_1, M_2 , то при всех $n > M$ будут выполнены неравенства $-\varepsilon < \alpha_n \leq \gamma_n \leq \beta_n < \varepsilon$, откуда $|\gamma_n| < \varepsilon$.

В итоге показано, как для каждого $\varepsilon > 0$ выбрать зависящее от ε число M так, что неравенство $|\gamma_n| < \varepsilon$ выполняется при всех $n > M$. Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0$.

Вопрос. Как доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right) = 0$?

2.9. Деление бесконечно малой на некоторую последовательность. Полезным является следующее свойство бесконечно малых.

Пусть c — ненулевое число и (α_n) , (β_n) — бесконечно малые, причём сумма $c + \alpha_n$ не обращается в нуль ни при каком n . Тогда последовательность с общим членом $\frac{\beta_n}{c + \alpha_n}$ — бесконечно малая.

Пример 4. Рассмотрим последовательность $x_n = \frac{3n^2 + 7n - 8}{5n^3 - 11n^2 + 2n - 1}$.

Справедливы равенства: $x_n = \frac{3n^2 + 7n - 8}{5n^3 - 11n^2 + 2n - 1} = \frac{\frac{3}{n} + \frac{7}{n^2} - \frac{8}{n^3}}{5 - \frac{11}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = \frac{\beta_n}{5 + \alpha_n}$,

где $\beta_n = \frac{3}{n} + \frac{7}{n^2} - \frac{8}{n^3}$ и $\alpha_n = -\frac{11}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}$. Из предыдущих свойств бесконечно малых следует, что (β_n) и (α_n) — бесконечно малые. Поэтому (x_n) — также бесконечно малая.

Вопрос. Как показать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n}$ сходится к нулю?

2.10.* Применение теоремы о пределе промежуточной последовательности.

Пример 5. Для $q = 0,99$ покажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. Выражение $\frac{1}{q^n}$ можно представить в виде $\left(\frac{100}{99}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{99}\right)^n$. Применяя неравенство Бернулли, получим $\left(1 + \frac{1}{99}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{99} > \frac{n}{99}$, откуда $\frac{1}{q^n} > \frac{n}{99}$. Так как $q > 0$, из полученного неравенства следует, что $0 < q^n < \frac{99}{n}$.

Последовательности $a_n = 0$ и $b_n = \frac{99}{n}$ являются бесконечно малыми, а для всех натуральных n выполняется двойное неравенство $a_n < q^n < b_n$. Поэтому по свойству из пункта 2.7 получаем, что (q^n) — бесконечно малая, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

Аналогично можно доказать, что последовательность (q^n) бесконечно мала для любого положительного числа q , меньшего 1.

Вопрос. Как доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ при $q = -0,99$?

2.11. Основные свойства бесконечно малых последовательностей. Перечислим основные свойства бесконечно малых и приведём примеры бесконечно малых, которые в дальнейшем будут использоваться.

1. Сумма двух бесконечно малых есть бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой и ограниченной последовательностей является бесконечно малой последовательностью.

3. При умножении бесконечно малой на фиксированное число получается бесконечно малая.

4. Если $(\alpha_n), (\beta_n)$ — бесконечно малые и $\alpha_n \leq \gamma_n \leq \beta_n$ при всех $n > K$, то (γ_n) — бесконечно малая.

5. Бесконечно малая последовательность ограничена.

6. Если $c \neq 0$, (α_n) — бесконечно малая, $c + \alpha_n \neq 0$ для всех номеров n , то последовательность с общим членом $\frac{1}{c + \alpha_n}$ ограничена.

7. Если $c \neq 0$, α_n, β_n — бесконечно малые; $c + \alpha_n \neq 0$ для всех номеров n , то последовательность с общим членом $\frac{\beta_n}{c + \alpha_n}$ бесконечно мала.

8. Последовательности $\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{n^2}\right), \left(\frac{1}{n^3}\right), \dots$ сходятся к нулю.

9. Последовательности $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right), \dots$ сходятся к нулю.

10. Если $|q| < 1$, то последовательность (q^n) сходится к нулю.

Вопрос. Как доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n^3} = 0$?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Что такое последовательность?

2. Какая последовательность называется сходящейся к нулю?

3. Какая последовательность называется бесконечно малой?

4. Какие примеры бесконечно малых последовательностей вы знаете?

5. Что можно сказать о сумме двух бесконечно малых?

6. Какая последовательность называется ограниченной?

7. Что можно сказать о произведении бесконечно малой последовательности и ограниченной последовательности?

8. Сформулируйте теорему о пределе промежуточной последовательности для бесконечно малых.

9. Сформулируйте теорему о делении бесконечно малой последовательности на некоторую последовательность.

10. Приведите примеры бесконечно малых.

■ Задачи и упражнения

1. Докажите, что последовательность (a_n) является бесконечно малой, если:

а) $a_n = \frac{1}{3^n}$; б) $a_n = \frac{1}{4^n}$; в) $a_n = \frac{1}{5^n}$;

г) $a_n = \frac{1}{1+2^n}$; д) $a_n = \frac{1}{3^n+5}$.

2. Докажите, что последовательность сходится к нулю:

а) $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \dots$; б)* $1, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{5}, \dots$.

3. Докажите, что последовательность (a_n) сходится к нулю, если:

а) $a_n = \frac{1}{1+n^2}$; б) $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$; в) $a_n = \frac{2}{n^2+2n-2}$; г) $a_n = \frac{1}{n\sqrt[3]{n}+2}$.

4. Докажите, что каждая из последовательностей сходится к нулю:

а) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$; б) $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots$;

в) $a_n = \frac{(-1)^n}{3^n}$; г) $a_n = \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$.

5. Докажите, что последовательность сходится к нулю, если:

а) $a_n = \frac{2n+1}{n^2+n+1}$; б) $a_n = \frac{n+4}{n^2-n+1}$; в) $a_n = \frac{2n+5}{(n+2)^2}$.

6. Докажите, что последовательность с общим членом $a_n = \frac{10}{n!}$ сходится к нулю.

7.* Приведите пример последовательности, не являющейся ограниченной, и дайте обоснование.

8.* Докажите, что сумма двух ограниченных последовательностей есть ограниченная последовательность.

9.* Докажите, что произведение двух ограниченных последовательностей есть ограниченная последовательность.

10. Докажите, что указанные пределы равны 0:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2+2n+3}{n^3+1}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^3+3n+1}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^2+1}{n^4+2n^2+10}$;

г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{n^3+n^2+n+1}$; д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2n+1)}{n}$.

11. Докажите, что указанные пределы равны 0:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n\sqrt{n}}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{\sqrt{n}}$.

12. Докажите, что указанные пределы равны 0:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 1}{3^n + 1}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 5}{4^n + 6}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{4^n + 3^n}$.

13.** Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

14.** Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n+1} - 2\sqrt{n}) = 0$.

15. Докажите ограниченность последовательностей:

а) $a_n = \frac{2n^2 - 1}{2 - n^2}$; б) $a_n = \frac{1+n}{\sqrt{n^2 + 4}}$; в) $a_n = \frac{n + (-1)^n}{3n + 4}$; г) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}$.

16. Докажите неограниченность последовательностей:

а) $a_n = (-1)^n \cdot n$; б) $a_n = ((-1)^n + 1) \cdot n$; в) $a_n = n^2 + n$;
 г) $a_n = n^2 - n$; д)** $a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}}$; е) $a_n = n + (-1)^n \cdot n$.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равняется $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$, где n — натуральное число?

1) $2 - \frac{1}{2^n}$ 2) $2 + \frac{1}{2^n}$ 3) $2 - \frac{1}{2^{n-1}}$ 4) $2 + \frac{1}{2^{n-1}}$

1.2. Чему равняется $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$, где n — натуральное число?

1) $\frac{1}{2 \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$

3) $\frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$ 4) $\frac{4}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$

1.3. Чему равняется $n \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right)$, где n — натуральное число?

1) $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}}}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}}}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n}}}$ 4) $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + 1}}$

1.4. Чему равняется $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$?

$$1) -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad 2) \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad 3) -\frac{5}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad 4) \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из последовательностей не являются бесконечно малыми?

$$1) a_n = \frac{n}{n+1} \quad 2) a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} \quad 3) a_n = \frac{n+1}{n} \quad 4) a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}}$$

2.2. Неравенство Бернулли имеет вид: $(1+x)^n \geq 1+nx$, где n — натуральное число, $x > -1$. Какие из приведённых неравенств можно получить, используя неравенство Бернулли?

$$1) 2^n > n \quad 2) 2^n > n^2 \quad 3) 3^n \geq 1+2n \quad 4) 3^n > 2n^2$$

2.3.* Последовательность (a_n) называется бесконечно малой, если:

1) для любого положительного числа ε и для любого положительного M при всех $n > M$ выполняется неравенство $|a_n| < \varepsilon$

2) для любого положительного числа ε существует такое положительное M , что при всех $n > M$ выполняется неравенство $|a_n| < \varepsilon$

3) для любого положительного числа ε существует такое положительное M , что при всех $n > M$ выполняется двойное неравенство $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$

4) существует такое положительное M , что для любого положительного числа ε при всех $n > M$ выполняется двойное неравенство $-\varepsilon < a_n < \varepsilon$

2.4. Какие из утверждений верны?

1) произведение бесконечно малых — ограничено

2) сумма бесконечно малой и ограниченной — ограничена

3) разность бесконечно малых — ограничена

4) частное бесконечно малых — ограничено

■ § 3. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

3.1. Сходящиеся последовательности. Рассмотрим последовательность с общим членом $a_n = 1 + \frac{1}{n}$. Она образуется как последовательность чисел $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}$ и так далее. Если изобразить их на числовой прямой, то легко заметить, что они располагаются всё ближе и ближе к единице. Рассмотрим разность между членами последовательности (a_n) и единиц. Последовательность с общим членом

$$x_n = a_n - 1 = 1 + \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$$

имеет своим пределом нуль, так как для любого положительного числа неравенство $|a_n - 1| < \varepsilon$ выполняется для всех $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому естественно назвать число 1 пределом данной последовательности (a_n) .

Общее определение предела последовательности следующее.

Число a называется пределом последовательности (a_n) , если последовательность (x_n) , где $x_n = a_n - a$, сходится к нулю.

В том случае, когда число a является пределом последовательности (a_n) , используют запись $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Если последовательность (a_n) имеет предел a , то также говорят, что она *сходится* к числу a , и пишут: $a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, что читается так: « a эн стремится к a при эн, стремящемся к бесконечности».

Для сходящейся последовательности только одно число может быть её пределом.

Всякая последовательность, имеющая предел, ограничена.

Пример 1. Пусть $a_n = \frac{3n-2}{2n+1}$. Тогда $a_n - \frac{3}{2} = \frac{3n-2}{2n+1} - \frac{3}{2} = \frac{-7}{2(2n+1)} = b_n$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-2}{2n+1} = \frac{3}{2}$ или $\frac{3n-2}{2n+1} \rightarrow \frac{3}{2}$ при $n \rightarrow \infty$.

Вопрос. Как доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1} = 1$?

3.2.* Определение предела последовательности и его геометрический смысл. Сходимость последовательности (x_n) к нулю, где $x_n = a_n - a$, означает, что для всякого положительного числа ε найдётся такое число M , что для всех $n > M$ выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$, то есть

$$|a_n - a| < \varepsilon. \quad (1)$$

Условие (1) можно переписать в виде

$$-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon. \quad (2)$$

Прибавив ко всем частям этого двойного неравенства число a , получим

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon. \quad (3)$$

Таким образом, из условия (1) получено условие (3). Если в условии (3) во всех частях неравенства вычесть число a , то в результате получим условие (2), а затем и условие (1). Это означает, что условия (1) и (3) эквивалентны.

Поэтому определение того, что число a является пределом последовательности (a_n) , можно сформулировать иначе.

Число a называется пределом последовательности (a_n) , если для всякого положительного числа ε найдётся такое число M , что для всех $n > M$ выполняется двойное неравенство $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

Геометрически сходимость последовательности $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ к числу a означает, что для любого натурального числа ε интервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ содержит все члены последовательности с номерами n , большими числа M , зависящего от ε .

Пример 2. Покажем, что последовательность с общим членом $a_n = \frac{2^{n+1} + (-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$ сходится к числу 4. Так как

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{2^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = 4 + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}},$$

справедливы равенства

$$x_n = a_n - 4 = \frac{2^{n+1} + (-1)^{n-1}}{2^{n-1}} - 4 = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}.$$

Получаем уже знакомую нам бесконечно малую последовательность из примера 2 параграфа 1. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4.$$

Вопрос. Какой предел имеет последовательность

$$0,9; 0,99; 0,999; \dots ?$$

3.3. Сумма сходящихся последовательностей. Справедлива теорема о пределе суммы сходящихся последовательностей.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Тогда последовательность $(a_n + b_n)$ имеет предел, равный $a + b$.

Доказательство. По условию последовательности $(a_n - a)$, $(b_n - b)$ являются бесконечно малыми. Сумма этих бесконечно малых последовательностей бесконечно мала. Отсюда и из равенства $(a_n - a) + (b_n - b) = (a_n + b_n) - (a + b)$ следует, что последовательность $((a_n + b_n) - (a + b))$ сходится к нулю. Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$.

Доказанную теорему кратко записывают в виде:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Пример 3. Найдём предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1+1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 1 + 0 = 1.$$

Вопрос. Как доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, если (a_n) и (b_n) — сходящиеся последовательности?

3.4. Произведение сходящихся последовательностей. Справедлива теорема о пределе произведения сходящихся последовательностей.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$. Тогда последовательность $(a_n \cdot b_n)$ имеет предел, равный ab .

Доказательство. Пусть $a_n - a = c_n$, $b_n - b = d_n$. По условию (c_n) и (d_n) — бесконечно малые. Поэтому

$$a_n b_n - ab = (a + c_n)(b + d_n) - ab = ab + ad_n + bc_n + c_n d_n - ab = ad_n + bc_n + c_n d_n.$$

Последовательности (ad_n) и (bc_n) — бесконечно малые; произведение двух бесконечно малых $(c_n \cdot d_n)$ — бесконечно малая. Поэтому сумма $(ad_n + bc_n + c_n d_n)$ — также бесконечно малая. Следовательно, последовательность $(a_n b_n - ab)$ — бесконечно малая и, по определению, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$.

Сокращённо доказанную теорему записывают в виде:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Пример 4. Найдём предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^4$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^4 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)\right)^2 \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)\right)^2 = 1^2 \cdot 1^2 = 1.$$

Вопрос. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Как доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^7 = a^7$?

3.5. Частное сходящихся последовательностей. Рассмотрим теорему о пределе частного.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, причём $b \neq 0$. Тогда последовательность $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ также имеет предел, равный $\frac{a}{b}$.

Сокращённо это утверждение записывается так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \quad (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0).$$

Доказывать эту теорему мы не будем.

Пример 5. Найдём предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-2}{5n+3}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-2}{5n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{2}{n}}{5 + \frac{3}{n}} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(7 - \frac{2}{n}\right)\right) : \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{3}{n}\right)\right) = 7 : 5 = \frac{7}{5}.$$

Вопрос. Чему равен предел последовательности $z_n = \frac{x_n - 1}{x_n^3 - 1}$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$, причём $x_n \neq 1$ для всех $n \in N$?

3.6. Предел промежуточной последовательности. Одна из полезных важных теорем в теории пределов — *теорема о пределе промежуточной последовательности*.

Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = s$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = s$ и $a_n \leq c_n \leq b_n$ при всех $n > K$, где K — некоторое число. Тогда последовательность (c_n) также имеет предел, равный s .

Доказательство. Так как последовательности (a_n) и (b_n) сходятся к числу s , то $a_n - s = x_n$, $b_n - s = y_n$, где (x_n) и (y_n) — бесконечно малые. Из неравенства $a_n \leq c_n \leq b_n$ вытекает двойное неравенство $x_n \leq c_n - s \leq y_n$, которые выполняются при всех $n > K$. На основании теоремы о промежуточной последовательности для бесконечно малых (пункт 2.7) получаем, что разность $(c_n - s)$ — бесконечно малая, а поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = s$.

Пример 6. Пусть $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

Тогда $a_n = \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. Следовательно,

$x_n = 0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{n}} = y_n$ при всех n . Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, по теореме о пределе промежуточной последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Вопрос. Как доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$?

3.7.* Ограниченность сходящейся последовательности. Напомним, что последовательность (a_n) называется ограниченной, если её члены принадлежат некоторому отрезку $[m; M]$ числовой оси. Ограниченность последовательности (a_n) означает, что можно найти два таких числа m и M , что $m \leq a_n \leq M$ для всех натуральных чисел n .

Теорема. Всякая последовательность, имеющая предел, ограничена.

Доказательство. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Возьмём произвольное положительное число ε , например $\varepsilon = 1$. По определению предела найдётся такое число M_0 , что при $n > M_0$ все члены (a_n) этой последовательности будут принадлежать интервалу $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, то есть при $\varepsilon = 1$ будут принадлежать интервалу $(a - 1; a + 1)$. Следовательно, вне этого интервала может находиться лишь конечное число членов последовательности (a_n) . Например, пусть такими оказались a_1, a_3, a_4, a_8, a_9 . Поэтому, если взять число m как наименьшее из чисел a_1, a_3, a_4, a_8, a_9 и $a - 1$, а число M как наибольшее из

чисел a_1, a_3, a_4, a_8, a_9 и $a + 1$, то все члены последовательности (a_n) будут содержаться в отрезке $[m; M]$. А это и означает, что последовательность (a_n) ограничена. Доказанная теорема иногда позволяет установить, что некоторая последовательность не имеет предела. Например, последовательность $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$ не ограничена, а поэтому предела не имеет.

Вопрос. Верно ли, что если последовательность ограничена, то она обязательно имеет предел?

3.8. Монотонные ограниченные последовательности. Для решения практических задач важно иметь утверждения, с помощью которых можно доказывать сходимость последовательности, не зная её предела. Одним из таких утверждений является теорема о пределе монотонной ограниченной последовательности. Прежде чем сформулировать эту теорему, напомним некоторые определения.

Последовательность (a_n) называется *возрастающей*, если $a_{n+1} \geq a_n$ при любом $n \in N$.

Последовательность (a_n) называется *строго возрастающей*, если $a_{n+1} > a_n$ при любом $n \in N$.

Последовательность (a_n) называется *убывающей*, если $a_{n+1} \leq a_n$ при любом $n \in N$.

Последовательность (a_n) называется *строго убывающей*, если $a_{n+1} < a_n$ при любом $n \in N$.

Последовательности любых перечисленных типов — возрастающие, строго возрастающие, убывающие или строго убывающие — принято называть *монотонными*.

Теорема Вейерштрасса. Каждая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Примем эту теорему без доказательства и рассмотрим некоторые её применения.

Пример 7. Пусть x — действительное число, а (x_n) и (x'_n) — последовательности его десятичных приближений снизу и сверху соответственно. Тогда для каждого натурального n имеем

$$x_1 \leq x_n \leq x_{n+1} < x'_{n+1} \leq x'_n \leq x'_1.$$

Отсюда следует, что последовательность (x_n) возрастает, последовательность (x'_n) убывает и обе последовательности ограничены. Поэтому существуют $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = b$. Но так как $x'_n - x_n = \frac{1}{10^n}$, то

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(x_n + \frac{1}{10^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{10^n} = a.$$

Значит, последовательности (x_n) и (x'_n) имеют общий предел. Но так как $x_n \leq x < x'_n$ при любом n , этот общий предел равен числу x .

Итак, каждое действительное число является пределом как последовательности своих десятичных приближений по недостатку, так и последовательности своих десятичных приближений по избытку.

Вопрос. Как с помощью теоремы Вейерштрасса доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, когда $0 < q < 1$?

3.9. Примеры сходящихся последовательностей.** Рассмотрим некоторые применения теоремы Вейерштрасса.

Пример 8. При каждом $x > 1$ найдём предел последовательности $a_n = \frac{n}{x^n}$.

Заметим, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{x}$. Так как $\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{x} < 1$ при $n > \frac{1}{x-1}$, последовательность (a_n) — убывающая при номерах n , которые больше числа $\frac{1}{x-1}$. Далее, $a_n > 0$ для всех n . Поэтому вследствие теоремы о пределе монотонной ограниченной последовательности существует число a такое, что $a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$. Но $a_{n+1} = \frac{1}{x} \cdot a_n \cdot \frac{n+1}{n}$ тоже сходится к a .

Поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{1}{x} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$, откуда $a = \frac{1}{x} \cdot a$, $a\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$, $a = 0$.

Пример 9. Вычислим предел последовательности $a_n = \sqrt[n]{a}$ при $a > 1$. Последовательность $a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, \dots$ убывает и ограничена снизу числом 1. Следовательно, существует такое число z , что $\sqrt[n]{a} \rightarrow z$ при $n \rightarrow \infty$, где $z \geq 1$. Но если $z > 1$, то, выбрав $\varepsilon > 0$ настолько малым, что $z - \varepsilon > 1$, получим $z - \varepsilon = 1 + t$, где $t > 0$. Тогда $\sqrt[n]{a} > 1 + t$ или $a > (1 + t)^n \geq 1 + nt$ для всех натуральных n , что невозможно, так как $1 + nt$ за счёт выбора n может быть сделано больше любого наперёд выбранного числа. В результате получаем, что $z = 1$, то есть предел рассматриваемой последовательности равен 1.

Пример 10. Рассмотрим последовательность $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Заметим, что $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)!}$. Поэтому $x_{n+1} > x_n$, то есть последовательность (x_n) строго возрастает. Докажем, что эта последовательность ограничена.

Возьмём число $\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}$. Все множители в знаменателе, начиная со второго, больше двух либо равны двум. Если каж-

дый такой множитель заменить на 2, то дробь увеличится, поэтому

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} \leq \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2} = \frac{1}{2^{k-1}}. \quad \text{Значит,}$$

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq \\ &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3. \end{aligned}$$

Таким образом, $0 < x_n < 3$, и тем самым ограниченность рассматриваемой последовательности (x_n) установлена. По теореме Вейерштрасса последовательность (x_n) сходится.

Предел этой последовательности (x_n) называется *числом Эйлера*, обозначается через e и имеет в науке такое же важное значение, как, например, всем известное число π .

Можно доказать, что число e иррационально. Приближённое значение числа e по недостатку с точностью до 25 знаков равно 2,718281828459045235360287.

Вопрос. Как доказать, что $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, если $0 < a < 1$?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Сформулируйте определение предела последовательности.
2. Сформулируйте теорему о пределе суммы.
3. Сформулируйте теорему о пределе произведения.
4. Сформулируйте теорему о пределе частного.
5. Сформулируйте теорему о пределе промежуточной последовательности.
6. Какие последовательности называют монотонными?
7. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о пределе монотонной и ограниченной последовательности.
8. Чему равны пределы последовательностей десятичных приближений действительного числа x по недостатку и по избытку?
- 9.** Какое действительное число называется числом Эйлера и обозначается буквой e ?

Задачи и упражнения ■

1. Найдите предел:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+5}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{n+1}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+14}{5n+17}$.

2. Найдите предел:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{3^n + 5}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 8}{3^n + 1}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 5^n + 6}{2 \cdot 5^n + 1}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + 2 \cdot 3^n + 3}{4 \cdot 5^n + 10 \cdot 4^n + 15}$.

3. Найдите предел:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 6n + 4}{5n^2 - n + 2}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 3n + 12}{8n^2 + 2n + 5}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$.

4. Найдите предел:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n^2 + 3n + 10}{2n^3 + 4n + 15}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 6n + 12}{9n^3 + 12n + 16n + 25}$;
в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^4 + 2n^2 + 3}{9n^4 + n + 1}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}$.

5. Пусть $a_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. Докажите, что последовательность (a_n) : а) убывает; б) ограничена; в) сходится; г)* найдите предел этой последовательности.

6.** Докажите, что следующие последовательности не имеют предела:

а) $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$; б) $a_n = 1 + (-1)^n$; в) $a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}}$; г) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2}$;

д) $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$.

7. Докажите монотонность последовательностей:

а) $a_n = \frac{n+1}{n}$; б) $a_n = \frac{n-1}{\sqrt{n}}$; в) $a_n = 2^n + 5$; г) $a_n = 3^n + 2^n$;

д) $a_n = n \cdot 2^n$; е) $a_n = \frac{1}{n^2 \cdot 2^n}$.

8.** Пусть $0 < q < 1$. Начиная с какого номера члены последовательности $a_n = n \cdot q^n$ будут монотонно убывать?

9.* Докажите, что каждая из следующих последовательностей, заданных рекуррентно, имеет предел, и найдите эти пределы:

а) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{2 - a_{n-1}}$ при $n \geq 2$;

б) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{1}{3 - a_{n-1}}$ при $n \geq 2$.

10.* Пусть $a_n = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$. Докажите, что последовательность (a_n) сходится.

11. а) Найдите с точностью до 0,01 значения $\frac{n^3+2}{2n^3+3}$ при $n = 10$, $n = 100$, $n = 1000$;

б) вычислите $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2}{2n^3+3}$.

12.* Дана рекуррентная последовательность: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$. Докажите, что эта последовательность сходится, и найдите её предел.

13.** Найдите в зависимости от числа a предел последовательности, рассмотрев по отдельности случаи $|a| > 1$ и $0 < |a| < 1$:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n+1}{a^n-1}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$.

14.** Найдите предел:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3^n}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{a^n}$, если $a > 1$;

д) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!}$, если $a > 1$; е) $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n$, если $|q| < 1$.

15.** Докажите, что последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

а) монотонна; б) ограничена.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равен предел последовательности $a_n = \frac{4n+3n^2}{2n^2-5n-1}$?

1) 2 2) $-\frac{4}{5}$ 3) $\frac{3}{2}$ 4) $-\frac{3}{5}$

1.2. Чему равен предел последовательности $a_n = \frac{2^{n+1}-2^n}{3^n+3^{n-1}}$?

1) $\frac{2}{3}$ 2) $-\frac{2}{3}$ 3) $\frac{4}{9}$ 4) 0

1.3.* Чему равен предел последовательности $a_n = \sqrt[n]{2^n+5^n} - 2$?

1) 0 2) 2 3) 3 4) -2

1.4. Какое из утверждений верно?

- 1) всякая сходящаяся последовательность монотонна и ограничена
- 2) всякая монотонная и ограниченная последовательность сходится
- 3) всякая монотонная последовательность ограничена
- 4) всякая ограниченная сходящаяся последовательность монотонна

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из последовательностей имеют предел, равный нулю?

1) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 2) $a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

3) $a_n = \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ 4) $a_n = n \cdot (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$

2.2.* Число a является пределом последовательности (a_n) , если:

1) для любого положительного числа ε и для любого положительного M при всех $n > M$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$

2) для любого положительного числа ε существует такое положительное M , что при всех $n > M$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$

3) для любого положительного числа ε существует такое положительное M , что при всех $n > M$ выполняется двойное неравенство $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

4) существует такое положительное M , что для любого положительного числа ε при всех $n > M$ выполняется двойное неравенство $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

2.3. Какие из последовательностей имеют предел?

$$1) a_n = \sqrt{n} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - 1 \right) \quad 2) a_n = n \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - 1 \right)$$

$$3) a_n = n\sqrt{n} \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - 1 \right) \quad 4) a_n = n^2 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - 1 \right)$$

2.4.* Пусть последовательность (a_n) обладает свойством: для всех номеров n справедливо неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, причём $a_1 > 0$. Последовательность (a_n) может быть:

1) возрастающей

2) строго возрастающей

3) убывающей

4) строго убывающей

■ § 4. ПОНЯТИЕ О ЧИСЛОВОМ РЯДЕ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ РЯД

4.1. Числовой ряд. Понятие предела числовой последовательности позволяет рассматривать суммы с бесконечным множеством слагаемых. Такие суммы называются *рядами*.

Пример 1. Рассмотрим ряд $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$

Сумма первых n слагаемых этого ряда имеет вид

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

и называется n -й *частичной суммой* данного ряда. Преобразуем S_n следу-

ющим образом: $S_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$. После раскрытия скобок одинаковые слагаемые с противоположными знаками взаимно унич-

тожаются, поэтому $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)}$. Отсюда $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$.

Таким образом, последовательность частичных сумм рассматриваемого ряда $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ имеет предел, равный 1. Этот предел называется *суммой* исходного ряда, что часто записывают в виде равенства

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots = 1.$$

Говорят также, что данный ряд *сходится* к числу 1.

Вопрос. Чему равна сумма ряда $\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) + \dots$?

4.2. Сходимость, расходимость рядов. Для всякой бесконечной числовой последовательности (a_n) выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots \quad (1)$$

называется *рядом*.

Сумма первых n его слагаемых

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

называется *n -й частичной суммой ряда (1)*.

Ряд называется *сходящимся*, если последовательность (S_n) его частичных сумм имеет предел. В этом случае предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ называется *суммой ряда (1)*. Говорят также, что ряд (1) *сходится* к числу S , и пишут $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = S$.

Последовательность частичных сумм (S_n) может не иметь предела. В таком случае ряд (1) называется *расходящимся*.

Например, частичные суммы ряда $1 + 2 + 3 + \dots + n + \dots$ неограниченно возрастают. Поэтому последовательность частичных сумм этого ряда не имеет предела, а значит, ряд расходится.

Вопрос. Сходится или расходится ряд

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + (-1)^{n-1} + \dots?$$

4.3. Знак суммирования.** Для обозначения ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ обычно используется знак Σ , при помощи которого данный ряд записывается в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (2)$$

Стоящий над Σ знак ∞ указывает на то, что рассматривается выражение, содержащее бесконечное число слагаемых, занумерованных натуральными числами.

Последовательность частичных сумм ряда (2) можно записать общей формулой

$$S_k = \sum_{n=1}^k a_n.$$

Для сходящегося ряда существует предел

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n.$$

В этом случае сумму ряда можно записать в виде

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ или } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Например, для ряда, рассмотренного в пункте 4.1, справедливо равенство $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = 1$.

Вопрос. Как доказать, что если ряд (2) сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$?

4.4. Суммирование ряда специального вида.** В отдельных случаях члены ряда (2) удаётся представить в виде $a_n = f(n+1) - f(n)$, где $f(x)$ — функция, зависящая от переменной x . Тогда

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{k=1}^n a_k &= (f(2) - f(1)) + (f(3) - f(2)) + (f(4) - f(3)) + \dots + \\ &+ (f(n) - f(n-1)) + (f(n+1) - f(n)). \end{aligned}$$

После раскрытия скобок получим $S_n = f(n+1) - f(1)$.

Отсюда следует, что существование суммы рассматриваемого ряда зависит от существования предела последовательности $(f(n))$. В том случае, когда существует $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$, существует и сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, равная разности $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) - f(1)$.

Вопрос. Чему равна сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$?

4.5. Геометрический ряд. Ряд, члены которого составляют геометрическую прогрессию, называется *геометрическим рядом*. Геометрический ряд имеет вид $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$, где a и q — фиксированные числа, причём $a \neq 0$ и $q \neq 0$. Число q называется *знаменателем* геометрического ряда.

Теорема. При $|q| < 1$ геометрический ряд сходится и имеет сумму

$$S = \frac{a}{1-q}. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $|q| < 1$, то есть $-1 < q < 1$. По формуле для суммы n начальных членов геометрической прогрессии имеем:

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q}.$$

$$\text{Отсюда } S_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n.$$

$$\text{Поэтому } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot q^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \frac{a}{1-q}, \text{ так}$$

как $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$.

Пример 2. Геометрический ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots$ имеет первый член $a = 1$ и знаменатель $q = -\frac{1}{2}$. Поскольку $|q| < 1$, то этот ряд сходится и, по формуле (3), его сумма равна $\frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}$.

Пример 3. Геометрический ряд $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$ имеет первый член $a = \frac{3}{10}$ и знаменатель $q = \frac{1}{10}$. Поскольку $|q| < 1$, то этот ряд сходится и, по формуле (3), его сумма равна $\frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

Вопрос. Как связан ряд из примера 3 с бесконечной десятичной дробью 0,333...?

4.6. Убывающая геометрическая прогрессия. При $a > 0$ и $0 < q < 1$ члены геометрического ряда убывают: $a > aq > aq^2 > \dots > aq^{n-1} > \dots$.

В этом случае сумму ряда $a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$ иногда называют *суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии*.

Вопрос. Чему равна сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии?

4.7. Пример геометрического ряда.** Рассмотрим пример использования геометрической прогрессии при вычислении площади одной необычной геометрической фигуры.

Возьмём квадрат площадью 1 дм². Разделим каждую его сторону на три равные части и образуем восьмиугольник, как на рис. 1. Площадь каждого отрезаемого «уголка» равна $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2 \cdot 9}$ дм². Таких «уголков» четыре, а поэтому площадь восьмиугольника равна $\left(1 - \frac{2}{9}\right)$ дм².

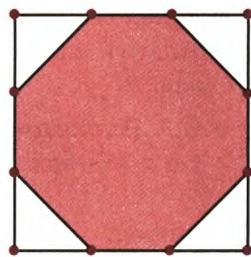


Рис. 1

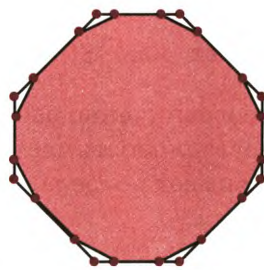


Рис. 2

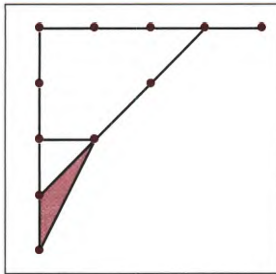


Рис. 3

Разделим каждую сторону восьмиугольника на три равные части и образуем шестнадцатиугольник, как на рис. 2. Площадь каждого вновь отрезаемого «уголка» равна $\frac{1}{9}$ площади «уголка», отрезанного на предыдущем шаге (рис. 3), то есть эта площадь составляет $\frac{1}{2 \cdot 9^2}$ дм². Таких «уголков» восемь, а поэтому площадь шестнадцатиугольника равна $\left(1 - \frac{2}{9} - \frac{2^2}{9^2}\right)$ дм².

Снова разделим каждую сторону шестнадцатиугольника на три равные части и образуем 32-угольник. Площадь каждого вновь отрезаемого «уголка» равна $\frac{1}{9}$ площади «уголка», отрезанного на предыдущем шаге, то есть $\frac{1}{2 \cdot 9^3}$ дм². Всего таких «уголков» шестнадцать, а поэтому площадь 32-угольника равна $\left(1 - \frac{2}{9} - \frac{2^2}{9^2} - \frac{2^3}{9^3}\right)$ дм².

Намеченный процесс можно продолжать шаг за шагом сколь угодно долго.

Вопрос. Чему равна площадь фигуры, оставшейся от квадрата, если представить процесс отрезания «уголков» выполненным бесконечное число раз?

4.8.* Расходимость геометрического ряда. Покажем, что при $|q| \geq 1$ и $a \neq 0$ геометрический ряд

$$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$$

расходится.

Рассмотрим сначала случай, когда $|q| > 1$. Тогда можно положить $|q| = 1 + p$, где $p > 0$. Из неравенства Бернулли при любом натуральном n получаем $|q|^n = (1 + p)^n \geq 1 + pn$.

Так как $|S_n| = \left| \frac{a - aq^n}{1 - q} \right| = \frac{|a| \cdot |q^n - 1|}{|q - 1|} \geq |a| \cdot \frac{|q|^n - 1}{|q - 1|}$, последовательность $|S_n|$

неограниченно растёт с возрастанием n . Следовательно, при $|q| > 1$ последовательность частичных сумм (S_n) не является ограниченной, а поэтому не имеет предела. Таким образом, при $|q| > 1$ геометрический ряд расходится.

Пусть теперь $q = 1$. Тогда $S_n = an$. Так как $a \neq 0$, последовательность (S_n) не является ограниченной и не имеет предела. В данном случае геометрический ряд также расходится.

Пусть, наконец, $q = -1$. Тогда геометрический ряд имеет вид

$$a - a + a - a + \dots + (-1)^{n-1} a + \dots$$

Частичные суммы этого ряда с нечётными номерами равны a , а с чётными номерами равны нулю. Поэтому последовательность частичных сумм состоит из чередующихся чисел a и 0 , а значит, не имеет предела. Следовательно, при $q = -1$ геометрический ряд также расходится.

Вопрос. Допустим, что в банк сделан вклад величиной 1 рубль под 1% годовых. Через сколько лет величина вклада может превысить миллион рублей?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Что называется частичной суммой ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$?
2. Какой ряд называется сходящимся?
3. Что такое сумма сходящегося ряда?
4. Какой ряд называется расходящимся?
5. Какой ряд называется геометрическим рядом?
6. Сформулируйте и докажите теорему о сходящемся геометрическом ряде.
7. Что называют бесконечно убывающей геометрической прогрессией?
8. Чему равна сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии?
- 9.* Приведите пример расходящегося геометрического ряда.

Задачи и упражнения ■

1. Найдите сумму геометрического ряда $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \dots$.
2. Вычислите сумму площадей последовательности треугольников, в которой первым является равносторонний треугольник со стороной, равной 1, а каждый последующий треугольник имеет своими вершинами середины сторон предыдущего треугольника.
3. Найдите сумму площадей последовательности квадратов, в которой первым является квадрат со стороной 1, а каждый последующий квадрат имеет своими вершинами середины сторон предыдущего квадрата.
4. Найдите сумму геометрического ряда:
а) $100 - 10 + 1 - \frac{1}{10} + \dots$; б) $12 + 4 + \frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \dots$.
5. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 120, а первый член прогрессии равен 3. Найдите знаменатель прогрессии.

6.* Фигура на рис. 4 составлена из бесконечного множества квадратов. Сторона первого из них равна 1, а сторона каждого последующего квадрата равна $\frac{3}{4}$ стороны предыдущего квадрата. Найдите площадь такой фигуры.

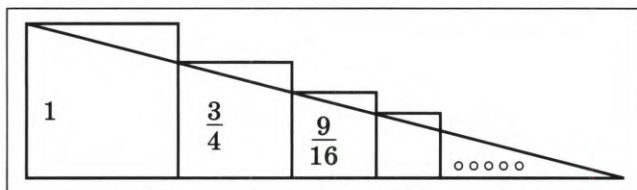


Рис. 4

7.* На куб с ребром 1 поставили куб с ребром $\frac{2}{3}$, на него — куб с ребром $\frac{4}{9}$, затем — куб с ребром $\frac{8}{27}$ и так далее. Найдите сумму объёмов всех кубов и высоту получившегося геометрического тела.

8. Найдите геометрический ряд, который имеет сумму $\frac{7}{12}$ и начинается с единицы.

9.* Для каких углов α сходится геометрический ряд $1 + \sin \alpha + \sin^2 \alpha + \sin^3 \alpha + \dots$ и чему равна его сумма?

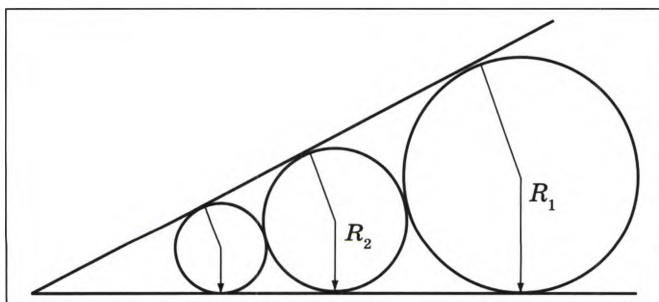


Рис. 5

10.** В острый угол величиной α последовательно вписаны окружности, касающиеся друг друга (рис. 5). Радиус первой окружности равен R_1 .

- Найдите радиусы R_2, R_3, R_4, \dots остальных окружностей;
- покажите, что последовательность радиусов образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию;
- найдите сумму $R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + \dots$.

11.* В геометрическом ряду $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ расставьте скобки так, чтобы получился ряд:

а) сходящийся к нулю; б) сходящийся к 1.

12.** Докажите, что ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ расходится.

13.** Пусть $0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ — некоторое действительное число. Докажите, что ряд $\frac{\alpha_1}{10^1} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \frac{\alpha_3}{10^3} + \dots$ сходится и его сумма равна данному числу.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равен предел последовательности $a_n = (0,999)^n$?

- 1) 0 2) 9 3) $\frac{1}{10}$ 4) 1

1.2. Чему равен предел последовательности $a_n = (1,0001)^n$?

- 1) 0 2) 1 3) $\frac{1}{1000}$ 4) последовательность не сходится

1.3. Чему равна сумма геометрического ряда $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$?

- 1) 0 2) 1 3) $\frac{2}{3}$ 4) не существует

1.4.* Чему равна сумма ряда $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3} \cdot 1} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5} \cdot 3} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7} \cdot 5} + \dots$?

- 1) 0,5 2) 1 3) 1,5 4) 2

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Геометрический ряд вида $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + \dots$ ($a \neq 0$) сходится при q , равном:

- 1) 1 2) 3 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{3}{2}$

2.2.* Геометрический ряд вида $a + aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + \dots$ ($a \neq 0$) расходится при q , равном:

- 1) 0,5 2) 1 3) 1,0001 4) 0,9999

2.3. При каких значениях q геометрический ряд $1 - 2q + 4q^2 - 8q^3 + \dots$ сходится?

- 1) $q = 0,3$ 2) $q = -0,4$ 3) $q = 0,5$ 4) $q = -0,6$

2.4.** Какие значения в зависимости от параметра a может иметь предел последовательности $b_n = \frac{a^n}{1 + a^n}$?

- 1) 0 2) 0,5 3) 1 4) не существует

■ Мини-исследования к главе

Мини-исследование 8

Попробуйте найти формулу n -го члена последовательности Фибоначчи, действуя по следующей схеме.

1) Если две последовательности (a_n) и (b_n) задаются теми же рекуррентными соотношениями, что и последовательность чисел Фибоначчи:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n; \quad b_{n+2} = b_{n+1} + b_n, \quad (*)$$

то и сумма этих последовательностей $(a_n + b_n)$ задаётся рекуррентным соотношением, аналогичным (*).

2) Если последовательность (a_n) задаётся тем же рекуррентным соотношением, что и последовательность чисел Фибоначчи, и c — фиксированное число, то и последовательность (ca_n) задаётся аналогичным рекуррентным соотношением.

3) Найдите две геометрические прогрессии, начинающие с 1 и удовлетворяющие рекуррентному соотношению типа (*). Знаменатель одной обозначьте, например, через q_1 , знаменатель другой обозначьте через q_2 .

4) Получите последовательность чисел Фибоначчи как сумму двух прогрессий (αq_1^{n-1}) и (βq_2^{n-1}) , определив α и β из условий: $f_1 = \alpha + \beta$, $f_2 = \alpha q_1 + \beta q_2$.

Мини-исследование 9

Пусть члены последовательности (a_n) положительны и выполняется неравенство $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$.

1) Докажите, что последовательность (a_n) является бесконечно малой.

2) Установите, что последовательности с общим членом $a_n = \frac{n}{2^n}$, $a_n = \frac{n^{10}}{2^n}$, $a_n = \frac{2^n}{n!}$ являются бесконечно малыми.

Мини-исследование 10

Последовательность (a_n) , где $a_n \neq 0$ при всех n , называется бесконечно большой, если последовательность $\frac{1}{a_n}$ — бесконечно малая.

а) Приведите примеры бесконечно больших последовательностей;

б) докажите, что бесконечно большая последовательность неограничена;

в) приведите пример неограниченной последовательности, которая не является бесконечно большой;

- г) докажите, что произведение двух бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность;
- д) докажите, что сумма двух положительных бесконечно больших последовательностей есть бесконечно большая последовательность;
- е) приведите пример двух бесконечно больших последовательностей, для которых разность не является бесконечно большой;
- ё) приведите пример двух бесконечно больших последовательностей, для которых разность является бесконечно большой;
- ж) приведите пример двух бесконечно больших последовательностей, для которых частное не является бесконечно большим;
- з) приведите пример двух бесконечно больших последовательностей, для которых частное является бесконечно большим.

Мини-исследование 11 (алгоритм Герона)

Пусть последовательность (x_n) задана рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right),$$

где a — данное положительное число, а x_1 — произвольное положительное число.

Докажите, что независимо от выбора x_1 последовательность (x_n) сходится к \sqrt{a} . Для доказательства установите:

1) если последовательность (x_n) сходится, то её предел p должен являться положительным корнем уравнения $p = \frac{1}{2} \left(p + \frac{a}{p} \right)$;

2) какое бы мы ни выбрали x_1 — больше или меньше \sqrt{a} , получим

$$x_n - \sqrt{a} = \frac{(x_{n-1} - \sqrt{a})^2}{2x_{n-1}} \quad \text{для всякого } n \geq 2;$$

3) $x_n > \sqrt{a}$ при каждом $n > 1$;

$$4) x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) = \frac{x_n^2 - a}{2x_n};$$

5) последовательность (x_n) убывает при $n > 1$;

6) последовательность $x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ ограничена снизу числом \sqrt{a} ;

7) используя равенство из пункта 2, покажите справедливость неравенства

$$|x_{n+1} - \sqrt{a}| < \frac{|x_n - \sqrt{a}|^2}{2\sqrt{a}},$$

из которого следует, что погрешность в вычислениях в алгоритме Герона на $(n + 1)$ -м шаге не превосходит величины, пропорциональной квадрату погрешности, полученной на n -м шаге алгоритма, с коэффициентом пропорциональности $\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Мини-исследование 12

Дан треугольник ABC . Пусть A_1 — середина BC , B_1 — середина AC , C_1 — середина AB ; в результате треугольник $A_1B_1C_1$ — треугольник средних линий для ABC . Аналогично строятся треугольники $A_2B_2C_2$ — треугольник средних линий для $A_1B_1C_1$, треугольник $A_3B_3C_3$ — треугольник средних линий для треугольника $A_2B_2C_2$ и так далее.

1) Докажите, что последовательность точек A_1, A_2, A_3, \dots расположена на медиане AA_1 треугольника ABC , проведённой из вершины A , и имеет предельную точку A_0 в том смысле, что последовательность расстояний от точки A_n до точки A_0 стремится к нулю при n , стремящемся к бесконечности.

2) Докажите, что $AA_0 : A_0A_1 = 2 : 1$.

3) Докажите, что каждая из последовательностей точек B_1, B_2, B_3, \dots , C_1, C_2, C_3, \dots также имеет предел, предельные точки B_0 и C_0 также делят соответственные медианы в отношении $2 : 1$.

4) Докажите, что предельные точки A_0, B_0 и C_0 совпадают.

Отсюда как следствие получить, что медианы треугольника ABC пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $2 : 1$, считая от вершин треугольника.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

В этой главе мы продолжим изучение стереометрии, рассмотрим важные понятия перпендикулярности прямых, перпендикулярности прямой и плоскости и перпендикулярности плоскостей. Вы узнаете, как в пространстве находить расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости и как вычислять высоту пирамиды и призмы.

§ 1. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ ■

1.1. Вертикальное положение. Используя отвес, можно составить представление о вертикальном направлении в каждой точке земной поверхности. По отношению к горизонтальному участку поверхности вертикальное положение обладает особенностями, которые в стереометрии связаны с понятием перпендикулярности.

Вопрос. На горизонтальную поверхность стола положили куб. Какие рёбра куба при этом принимают вертикальное положение?

1.2. Перпендикулярность прямых в пространстве. Две пересекающиеся прямые в пространстве называют *перпендикулярными*, если они перпендикулярны в той плоскости, где расположены.

Приведённое определение даёт один из возможных способов проведения в пространстве перпендикуляра из заданной точки к данной прямой.

Пример 1. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Провести из вершины C_1 перпендикуляр к прямой BD .

Обозначим длину ребра куба через a . Рассмотрим плоскость $BC_1 D$. В этой плоскости отрезки BC_1 , $C_1 D$, BD равны $a\sqrt{2}$ как диагонали квадратов со стороной a . Поэтому треугольник $BC_1 D$ равносторонний. Отсюда следует, что перпендикуляром в пространстве, проведённым из точки C_1 к прямой BD , является высота $C_1 H$ треугольника $BC_1 D$, которая в данном примере совпадает с медианой (рис. 1).

Две скрещивающиеся прямые называют *перпендикулярными*, если параллельные им пересекающиеся прямые перпендикулярны.

Вопрос. Как доказать, что в пространстве через точку A , не лежащую на прямой a , можно

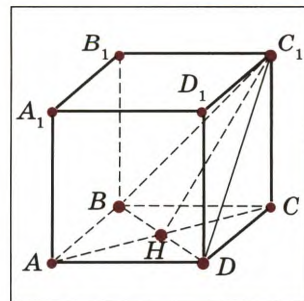


Рис. 1

провести единственную прямую b , которая пересекает прямую a и перпендикулярна a ?

1.3. Перпендикулярность прямой и плоскости. Посмотрев на дерево, растущее на горизонтальном участке земной поверхности, чаще всего можно заметить, что ствол дерева перпендикулярен любому направлению, выходящему из основания ствола вдоль поверхности земли. Аналогичное свойство в стереометрии принимается за определение.

Прямая a , пересекающая плоскость α , называется перпендикулярной плоскости α , если a перпендикулярна каждой прямой плоскости α , проходящей через точку пересечения прямой a и плоскости α .

Для обозначения перпендикулярности прямой и плоскости используют символ \perp . В том случае, когда прямая a перпендикулярна плоскости α , говорят также, что плоскость α перпендикулярна прямой a .

Отрезок в пространстве называют *перпендикулярным* плоскости, если он лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости.

Вопрос. Как доказать, что в кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ диагональ AB_1 грани AA_1B_1B не перпендикулярна плоскости $ABCD$?

1.4. Следствия из перпендикулярности прямой и плоскости. Наличие прямой, перпендикулярной плоскости, позволяет указать много взаимно перпендикулярных пересекающихся прямых.

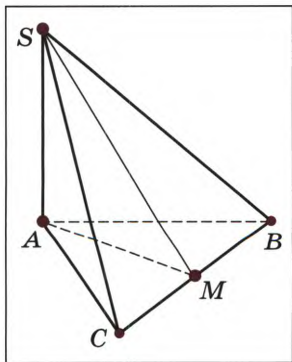


Рис. 2

Пример 2. Пусть известно, что у пирамиды $SABC$ отрезок SA перпендикулярен плоскости ABC . Выберем на ребре BC произвольную точку M и соединим её с вершинами A и S (рис. 2). Так как $SA \perp ABC$, по определению прямая SA перпендикулярна каждой прямой плоскости ABC , проходящей через точку A . Одной из таких прямых является прямая AM . Поэтому треугольник AMS прямоугольный с прямым углом при вершине A .

Вопрос. Пусть в пирамиде $SABC$ из рассмотренного примера $AB = BC = AC = SA = 1$. Чему равна длина проведённой из вершины S медианы грани SBC ?

1.5. Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Для доказательства перпендикулярности прямой и плоскости чаще всего используется следующий основной признак.

Если прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости α и проходящим через точку пересечения прямой a и плоскости α , то прямая a перпендикулярна плоскости α .

Доказательство. Пусть прямая a пересекает плоскость α в точке H и перпендикулярна различным прямым m и n плоскости α , проходящим через точку H . Проведём в плоскости α через точку H произвольную прямую b . Докажем, что $b \perp a$. Для доказательства выберем на прямой b точку C , отличную от точки H , и проведём через точку C прямую, пересекающую прямые m и n в точках A и B (рис. 3). После этого отложим на прямой a равные отрезки HM и HK (рис. 4). В треугольнике MAK отрезок AH является медианой, так как $MH = HK$, и высотой, так как по условию $a \perp m$. Поэтому треугольник MAK равнобедренный, откуда $MA = AK$. Аналогично в треугольнике MBK отрезок BH является и медианой, и высотой, а поэтому $MB = BK$. В результате получаем, что треугольники ABM и ABK равны по третьему признаку равенства треугольников. Из равенства этих треугольников следует равенство углов BAM и BAK . Поэтому треугольники ACM и ACK имеют равные углы при вершине A и соответственно равные стороны: AC — общая, $AM = AK$. Следовательно, по первому признаку равенства треугольников треугольники ACM и ACK равны. Значит, их соответственные стороны CM и CK также равны, то есть $CM = CK$.

Рассмотрим теперь треугольник MCK . Он равнобедренный, так как $CM = CK$, а отрезок CH — медиана треугольника MCK , так как $MH = HK$ по построению. Поэтому, по свойству медианы равнобедренного треугольника, получаем $CH \perp MK$, то есть $b \perp a$.

Итак, мы выбрали произвольную проходящую через точку H прямую b плоскости α и показали, что $a \perp b$. Поэтому, по определению из пункта 1.3, прямая a перпендикулярна плоскости α .

Вопрос. Как доказать, что в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ ребро AA_1 перпендикулярно плоскости $ABCD$?

1.6. Построение плоскости, перпендикулярной к прямой. Покажем, как через данную точку пространства провести плоскость, перпендикулярную заданной прямой. Сначала рассмотрим конкретный пример.

Пример 3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через середину ребра AB проведём плоскость, перпендикулярную прямой AC .

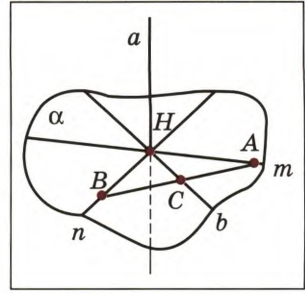


Рис. 3

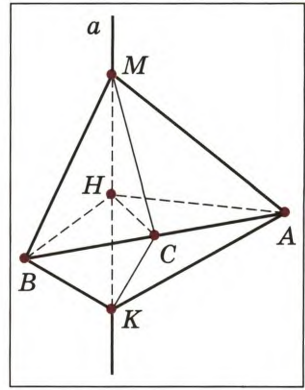


Рис. 4

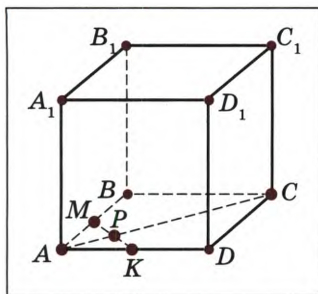


Рис. 5

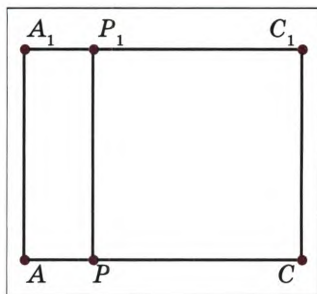


Рис. 6

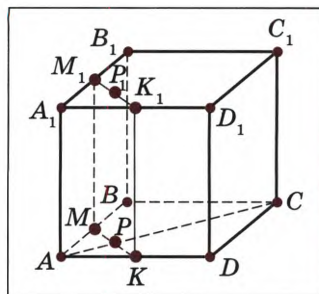


Рис. 7

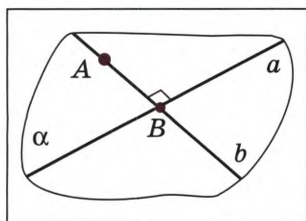


Рис. 8

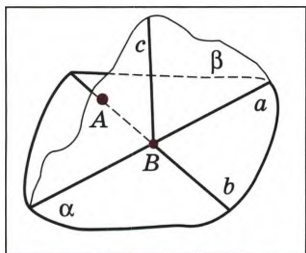


Рис. 9

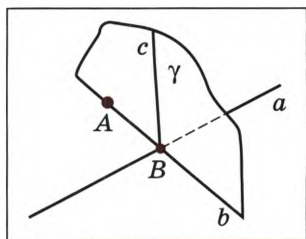


Рис. 10

Обозначим середину AB через M и в плоскости $ABCD$ основания куба проведём отрезок MK параллельно BD (рис. 5). Так как отрезок BD перпендикулярен AC , то MK перпендикулярен AC . Отрезки MK и AC пересекаются в точке P так, что $AP = \frac{1}{4}AC$. После этого рассмотрим плос-

кость AA_1C_1C (рис. 6). Так как $AA_1 \perp ABCD$, то $AA_1 \perp AC$. Отсюда следует, что AA_1C_1C — прямоугольник. Поэтому проходящая через точку P и перпендикулярная AC прямая PP_1 параллельна AA_1 . Построив точку P_1 , проведём через неё прямую M_1K_1 параллельно MK (рис. 7).

Плоскость MM_1K_1K проведена через две пересекающиеся прямые MK и PP_1 , которые перпендикулярны AC , поэтому плоскость MM_1K_1K перпендикулярна AC .

Теперь рассмотрим общий случай. Пусть даны точка A и прямая a . Через точку A проведём плоскость, перпендикулярную прямой a . Рассмотрим случай, когда точка A не лежит на прямой a . Проведём через прямую a и точку A плоскость α . В плоскости α построим прямую b , которая проходит через точку A , перпендикулярна прямой a и пересекает её в точке B (рис. 8). Затем проведём через прямую a плоскость β , отличную от плоскости α . В плоскости β построим прямую c , которая проходит через точку B и перпендикулярна

прямой a (рис. 9). После этого проведём плоскость γ , проходящую через прямые b и c (рис. 10). Так как $a \perp b$ и $a \perp c$, по признаку из пункта 1.5 получаем, что $a \perp \gamma$.

Заметим, что проводя через прямую a всевозможные плоскости β и проводя в каждой из них через точку B прямую перпендикулярно a , мы будем получать всевозможные прямые, лежащие в плоскости γ , которые проходят через точку B .

Через каждую точку пространства можно провести единственную плоскость, перпендикулярную заданной прямой. Это будет доказано в следующем пункте.

Вопрос. Пусть точка A лежит на прямой a . Как в этом случае провести через точку A плоскость, перпендикулярную прямой a ?

1.7. Единственность плоскости, проходящей через заданную точку и перпендикулярную данной прямой.** Докажем, что в пространстве через заданную точку A можно провести единственную плоскость, перпендикулярную заданной прямой a .

Сначала заметим, что если некоторая прямая t перпендикулярна плоскости π , то любая плоскость, содержащая прямую t , пересекает плоскость π по прямой, перпендикулярной t .

Рассмотрим плоскость γ , проходящую через точку A и прямую a . Предположим, что через точку A можно провести две различные плоскости α и β , перпендикулярные прямой a .

Плоскости α и β пересекают плоскость γ по прямым, которые проходят через точку A и перпендикулярны прямой a . В силу единственности перпендикуляра эти прямые совпадают с прямой b , которая проходит в плоскости γ через точку A и перпендикулярна прямой a (рис. 11).

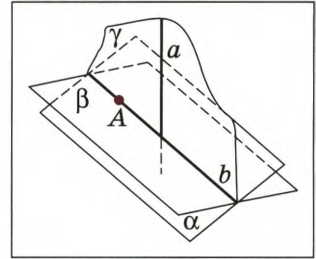


Рис. 11

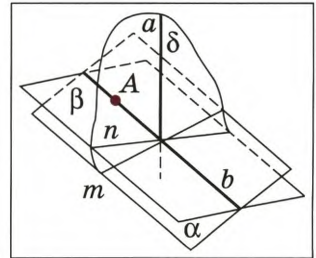


Рис. 12

Рассмотрим теперь отличную от плоскости γ плоскость δ , проходящую через прямую a (рис. 12). Тогда плоскость δ пересекает плоскости α и β по различным прямым m и n . Так как $\alpha \perp a$, то $m \perp a$, и, аналогично, так как $\beta \perp a$, то $n \perp a$. В результате в плоскости δ получаем два различных пересекающихся перпендикуляра к прямой a , что невозможно.

Таким образом, предположение о существовании двух различных плоскостей, перпендикулярных прямой a и проходящих через точку A , приводит к противоречию.

Вопрос. Как доказать, что через точку на прямой проходит единственная плоскость, перпендикулярная данной прямой?

1.8. Три попарно перпендикулярные прямые в пространстве. Из пункта 1.6 следует, что, выбрав в пространстве прямую a и точку A , можно построить плоскость α , перпендикулярную прямой a и проходящую через точку A . Пусть M — точка пересечения плоскости α и прямой a . Взяв в плоскости α проходящие через точку M две перпендикулярные прямые m и n , получим три попарно перпендикулярные прямые a , m и n .

Вопрос. Как доказать, что прямые m и n перпендикулярны прямой a ?

1.9. Построение прямой, перпендикулярной к плоскости. Способ 1. Пусть заданы плоскость α и точка A этой плоскости. Построим перпендикуляр к плоскости α , проходящий через точку A .

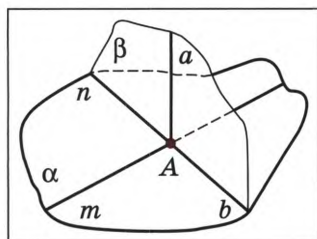


Рис. 13

Проведём в плоскости α через точку A прямую m . Затем построим плоскость β , которая проходит через точку A , перпендикулярна прямой m . Плоскость β пересекает α по прямой n , которая перпендикулярна m (рис.13).

Проведём в плоскости β прямую a , которая проходит через точку A и перпендикулярна прямой n . Построенная указанным способом прямая a перпендикулярна плоскости α . Действительно, с одной стороны, по построению прямая a перпендикулярна прямой n плоскости α . С другой стороны, так как $m \perp \beta$, прямая m перпендикулярна прямой a . Таким образом, прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым m и n , расположенным в плоскости α . По основному признаку перпендикулярности прямой и плоскости $a \perp \alpha$.

Вопрос. Как доказать, что через заданную точку A плоскости α можно провести только одну прямую, перпендикулярную α ?

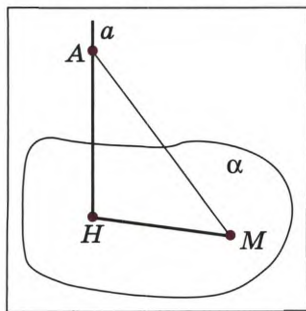


Рис. 14

1.10. Перпендикуляр и наклонная. Рассмотрим плоскость α и точку A вне этой плоскости. Пусть прямая a проходит через точку A , перпендикулярна плоскости α и пересекает плоскость α в точке H . Отрезок AH называют *перпендикуляром*, опущенным из точки A на плоскость α . Точку H называют *основанием* этого перпендикуляра.

Если отрезок AH — перпендикуляр к плоскости α , то для любой точки M плоскости α , не

совпадающей с точкой H , отрезок AM называют *наклонной*, проведённой из точки A к плоскости α (рис. 14).

Перпендикуляр к плоскости обладает следующим свойством.

Длина перпендикуляра, проведённого из точки A к плоскости, меньше длины любой наклонной, проведённой из точки A к этой же плоскости.

Доказательство. Пусть AN — перпендикуляр, а отрезок AM — наклонная, проведённая из точки A к плоскости α (рис. 14). Так как прямая NM лежит в плоскости α , то $NM \perp AN$. Поэтому треугольник ANM прямоугольный. Отсюда следует, что катет AN меньше гипотенузы AM .

Доказанное свойство иногда формулируют в сокращённом виде:

перпендикуляр к плоскости короче наклонной.

Вопрос. Пусть про точку P плоскости α известно, что расстояние от точки A до точки P не больше, чем расстояние от точки A до любой другой точки плоскости α . Как доказать, что $AP \perp \alpha$?

1.11. Расстояние от точки до плоскости.

Свойство перпендикуляра к плоскости, доказанное в предыдущем пункте, служит основой для следующего определения.

Пусть точка A не лежит в плоскости α . Расстоянием от точки A до плоскости α называется длина перпендикуляра, проведённого из точки A к плоскости α .

Расстояние от точки B плоскости α до этой плоскости считают равным нулю.

Вопрос. Пусть A и B — две различные точки. Как провести через точку B плоскость, расстояние до которой от точки A будет наибольшим?

1.12. Высота пирамиды. Пусть $SABCD$ — четырёхугольная пирамида с вершиной S . Перпендикуляр SH , проведённый из вершины S к плоскости основания $ABCD$ (рис. 15), называется *высотой пирамиды* $SABCD$. Основание H перпендикуляра SH называется *основанием высоты пирамиды*.

Иногда для краткости длину высоты пирамиды также называют высотой. Высота пирамиды, в основании которой лежит произвольный многоугольник, определяется аналогично.

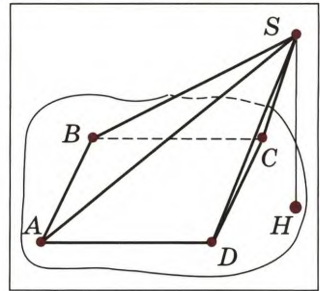


Рис. 15

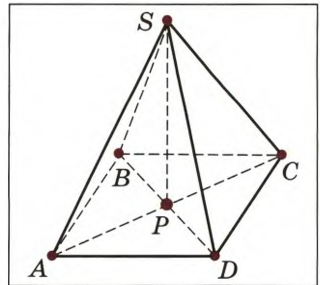


Рис. 16

Пример 4. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, а боковые рёбра пирамиды равны (рис. 16). Построить высоту этой пирамиды.

Из условия следует, что треугольники ASC и BSD равнобедренные. Так как основания AC и BD этих треугольников делятся точкой их пересечения P пополам, $SP \perp AC$ и $SP \perp BD$. Поэтому прямая SP перпендикулярна плоскости $ABCD$ по основному признаку перпендикулярности прямой и плоскости. Следовательно, отрезок SP — высота данной пирамиды.

Четырёхугольная пирамида, в основании которой лежит квадрат, а основание высоты совпадает с центром квадрата, называется *правильной четырёхугольной пирамидой*. Аналогично определяется правильная n -угольная пирамида.

Пирамида называется *правильной*, если в её основании лежит правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром многоугольника, лежащего в основании.

Вопрос. Чем правильная треугольная пирамида может отличаться от правильного тетраэдра?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется перпендикулярность пересекающихся прямых в пространстве?
2. Сформулируйте определение перпендикулярности прямой и плоскости.
3. Сформулируйте основной признак перпендикулярности прямой и плоскости.
- 4.* Докажите основной признак перпендикулярности прямой и плоскости.
5. Как через данную точку пространства провести плоскость, перпендикулярную заданной прямой?
- 6.** Докажите, что через данную точку можно провести единственную плоскость, перпендикулярную заданной прямой.
7. Как восстановить перпендикуляр к плоскости из точки этой плоскости?
8. Как построить три взаимно перпендикулярные прямые?
9. Что такое наклонная?
10. Докажите, что длина перпендикуляра к плоскости меньше длины любой наклонной.
11. Как определяется расстояние от точки до плоскости?
12. Что называется высотой пирамиды?

Задачи и упражнения ■

1. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости ABC и $SA = 2$, $AB = 3$, $BC = 4$, $AC = 5$. Найдите длины рёбер SB и SC .

2. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка M — середина ребра AB , а отрезок SM перпендикулярен плоскости $ABCD$. Известно, что $ABCD$ — квадрат со стороной 4, а ребро $SC = 9$. Найдите длины рёбер SA , SB и SD .

3. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC , и боковые рёбра SA , SB , SC равны. Пусть точки M , N , K — середины рёбер AB , BC и AC соответственно. Докажите, что:

а) прямая AB перпендикулярна плоскости SMC ;

б) прямая MN перпендикулярна плоскости SBK .

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро CD перпендикулярно плоскости ABC и угол ABC прямой. Докажите, что ребро AB перпендикулярно плоскости BCD .

5. Докажите, что в правильной шестиугольной пирамиде боковые рёбра равны.

6. Пусть $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида, точки M и K — середины рёбер AB и CD соответственно. Докажите, что:

а) плоскость SMK перпендикулярна ребру AB ;

б) прямая AC перпендикулярна плоскости SBD .

7. Точка M пространства равноудалена от всех вершин правильного треугольника ABC . Прямая l проходит через точку M , перпендикулярна плоскости ABC и пересекает её в точке O . Докажите, что O — центр треугольника ABC .

8. В треугольной пирамиде $ABCD$ ребро CD перпендикулярно плоскости ABC и угол ABC прямой. Постройте плоскость, которая:

а) проходит через середину ребра AB и перпендикулярна прямой AB ;

б) проходит через середину ребра CD и перпендикулярна прямой CD ;

в) проходит через середину ребра BD и перпендикулярна прямой AC .

9. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S постройте плоскость, которая:

а) проходит через середину ребра BC и перпендикулярна прямой BC ;

б) проходит через середину ребра BC и перпендикулярна прямой AC ;

в) проходит через середину ребра AS и перпендикулярна прямой AB ;

г) проходит через вершину C и перпендикулярна прямой SA ;

д) проходит через середину ребра AB и перпендикулярна прямой SA .

10. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S все рёбра равны. Постройте плоскость, которая:

а) проходит через середину ребра AD и перпендикулярна прямой AD ;

- б) проходит через середину ребра AB и перпендикулярна прямой AC ;
- в) проходит через вершину C и перпендикулярна прямой SB ;
- г)* проходит через вершину A и перпендикулярна прямой SC ;
- д)** проходит через середину высоты SH и перпендикулярна прямой SB .

11. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ постройте плоскость, которая:

- а) проходит через середину ребра CD и перпендикулярна прямой AB_1 ;
- б)* проходит через середину ребра BC и перпендикулярна прямой AC_1 ;
- в)** проходит через середину отрезка MN перпендикулярно MN , где точки M и N — середины рёбер $A_1 B_1$ и AD .

12.* В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной 2, боковые рёбра пирамиды равны 3. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC .

13.* В основании правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат со стороной 2, боковые рёбра пирамиды равны 5. Найдите расстояние от середины ребра AB до плоскости SCD .

14.* В кубе с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 на ребре CC_1 выбрана точка E так, что $CE = 2C_1E$. Через диагональ $B_1 D_1$ верхнего основания и точку E проведена плоскость α . Найдите расстояние от вершины A до этой плоскости, если длина ребра куба равна 1.

15.** В кубе $A_1 B_1 C_1 D_1 ABCD$ точка M — середина ребра $A_1 B_1$, точка K — середина ребра $A_1 D_1$. Можно ли в трапецию $MKDB$ вписать окружность?

16.** Найдите множество всех точек пространства, равноудалённых от двух данных точек.

17.** Найдите на данной плоскости множество всех точек, удалённых на заданное расстояние от данной точки, лежащей вне плоскости.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Сколько рёбер куба перпендикулярны одной из его граней?

- 1) 2 2) 4 3) 6 4) 8

1.2. Сколько всего различных прямых можно провести через вершины куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярно плоскости $AB_1 C_1 D$?

- 1) 4 2) 6 3) 8 4) 12

1.3. Сколько рёбер четырёхугольной пирамиды могут быть одновременно перпендикулярны основанию?

- 1) одно 2) два 3) три 4) четыре

1.4. Чему равна высота правильной треугольной пирамиды, у которой боковые рёбра попарно перпендикулярны и равны $\sqrt{6}$?

- 1) $\sqrt{2}$ 2) $\sqrt{3}$ 3) $2\sqrt{2}$ 4) $2\sqrt{3}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Если одна прямая перпендикулярна к плоскости, а другая параллельна этой плоскости, то:

- 1) эти прямые всегда пересекаются
 2) эти прямые могут быть скрещивающимися
 3) эти прямые перпендикулярны
 4) третья прямая, перпендикулярная одной из этих прямых, параллельна другой прямой

2.2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Какие из плоскостей перпендикулярны прямой AC_1 ?

- 1) $AA_1 D$ 2) $A_1 B D$ 3) $B_1 D_1 C$ 4) $BB_1 D$

2.3. Какие пары прямых в правильном тетраэдре $ABCD$ перпендикулярны?

- 1) AB и CD 2) AB и AD 3) AC и BD 4) AD и BC

2.4. Какие из указанных прямых перпендикулярны ребру AA_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$?

- 1) CD 2) BC 3) $B_1 D$ 4) $B_1 D_1$

§ 2. СВОЙСТВА ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ ■

2.1. Пример построения перпендикуляра к прямой в пространстве. Напомним, что прямая a называется перпендикулярной плоскости α , если a перпендикулярна каждой прямой, которая проходит в плоскости α через точку пересечения прямой a с плоскостью α . Это определение содержит одно из самых важных и часто используемых свойств взаимно перпендикулярных прямой и плоскости.

Пример 1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ из середины ребра $A_1 B_1$ провести перпендикуляр к прямой AC .

Вспомним пример, который мы рассматривали в пункте 1.6. В этом примере была построена плоскость, которая перпендикулярна AC и проходит через середины рёбер AB , AD , $A_1 B_1$, $A_1 D_1$ (рис. 1).

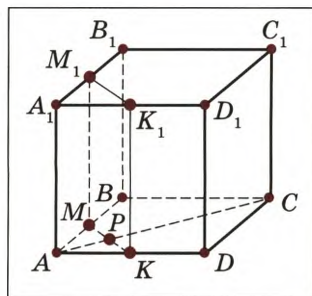


Рис. 1

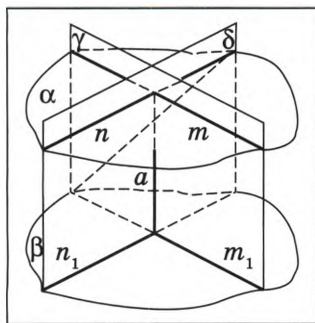


Рис. 2

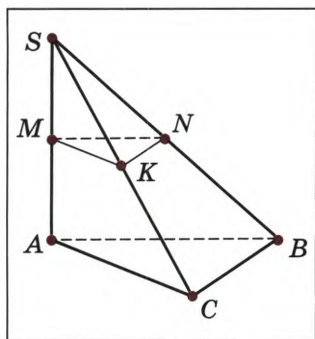


Рис. 3

По определению перпендикулярности прямой и плоскости каждая прямая плоскости MM_1K_1K , проходящая через точку P пересечения MM_1K_1K и AC , перпендикулярна AC . В частности, $M_1P \perp AC$. Искомый перпендикуляр к прямой AC сразу получен.

Вопрос. Как доказать, что отрезок M_1M перпендикулярен плоскости $ABCD$ (рис. 1)?

2.2. Перпендикулярность прямой к параллельным плоскостям. В этом пункте докажем следующее свойство.

Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой плоскости.

Обозначим прямую через a , а плоскости — через α и β . Пусть $a \perp \alpha$ и $\alpha \parallel \beta$. Проведём через прямую a две различные вспомогательные плоскости γ и δ . Тогда плоскость γ пересечёт плоскости α и β по параллельным прямым m и m_1 ; а плоскость δ пересечёт плоскости α и β по параллельным прямым n и n_1 (рис. 2). Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp m$ и $a \perp n$. Поэтому $a \perp m_1$ и $a \perp n_1$. Следовательно, прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым в плоскости β ,

откуда $a \perp \beta$.

Пример 2. Рассмотрим пирамиду $SABC$, у которой ребро SA перпендикулярно основанию ABC (рис. 3). Докажем, что плоскость, проходящая через середины рёбер SA , SB , SC , перпендикулярна прямой SA .

Пусть точки M , N , K — середины рёбер SA , SB , SC . Тогда MN — средняя линия треугольника SAB , поэтому $MN \parallel AB$. Аналогично $MK \parallel AC$. Поэтому плоскость MNK параллельна плоскости основания ABC . Так как прямая SA перпендикулярна плоскости ABC , SA перпендикулярна также плоскости MNK .

Сформулируем свойство, обратное к свойству, рассмотренному в этом пункте:

если прямая перпендикулярна к двум различным плоскостям, то эти плоскости параллельны.

Вопрос. Что можно сказать о двух прямых на плоскости, которые перпендикулярны третьей прямой этой плоскости?

2.3. Параллельность плоскостей, перпендикулярных к одной прямой.** Докажем, что если прямая a перпендикулярна к двум различным плоскостям α и β , то $\alpha \parallel \beta$.

Доказательство. Предположим, что плоскости α и β не параллельны, то есть пересекаются. Тогда существует общая точка M этих плоскостей, и мы получаем, что через точку M проходят две различные плоскости, перпендикулярные прямой a . Но плоскость, которая проходит через данную точку перпендикулярно заданной прямой, определяется единственным образом. Так как предположение о том, что плоскости α и β пересекаются, приводит к противоречию, $\alpha \parallel \beta$.

Вопрос. В каком случае через две данные точки можно провести плоскость, перпендикулярную заданной прямой?

2.4. Перпендикулярность прямых, которые параллельны двум перпендикулярным прямым. В пространстве взаимно перпендикулярные пересекающиеся прямые обладают следующим свойством.

Если две пересекающиеся прямые a и b перпендикулярны и соответственно параллельны двум пересекающимся прямым m и n , то прямые m и n также перпендикулярны.

Первый случай. Пусть прямые a , b и m лежат в одной плоскости α . Тогда прямая n имеет общую точку с плоскостью α и параллельна прямой b этой плоскости. Отсюда следует, что прямая n также лежит в плоскости α . Поэтому все четыре прямые a , b , m , n содержатся в одной плоскости, и мы получаем перпендикулярность прямых m и n как следствие свойства углов на плоскости с соответственно параллельными сторонами.

Второй случай. Пусть прямые a и b лежат в плоскости α , прямые m и n лежат в плоскости β , а плоскости α и β различны. Так как $a \parallel m$ и $b \parallel n$, по соответствующему признаку $\alpha \parallel \beta$.

Обозначим точку пересечения прямых a и b через A , точку пересечения прямых m и n через M (рис. 4). Рассмотрим плоскость, содержащую параллельные прямые a и m . Выберем на прямой a точку B и проведём через точку B прямую параллельно AM , пересекающую прямую m в точке N . Получим параллелограмм $ABNM$, откуда $AB = MN$ и $BN = AM$. Затем рассмотрим плоскость, содержащую параллельные прямые b и n . Выберем на прямой b точку C и проведём через точку C прямую параллельно AM ,

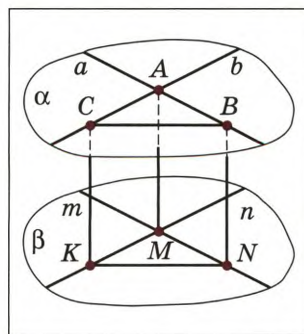


Рис. 4

пересекающую прямую n в точке K . Получим параллелограмм $АСКМ$, откуда $АС = МК$ и $СК = АМ$.

После этого рассмотрим точки B, C, N, K . Так как $BN \parallel AM$ и $CK \parallel AM$, то $BN \parallel CK$. Так как $BN = AM$ и $CK = AM$, то $BN = CK$. Следовательно, четырёхугольник $BCKN$ — параллелограмм. Поэтому $BC = NK$. В результате проведённых построений получаем, что в треугольниках ABC и MNK равны соответственно стороны AB и MN , AC и MK , BC и NK . Поэтому эти треугольники равны. Но так как по условию $\angle BAC = 90^\circ$, из равенства треугольников получаем, что $\angle NMK = 90^\circ$. Это значит, что прямые m и n перпендикулярны.

Вопрос. Какими свойствами обладают на плоскости углы с соответственно параллельными сторонами?

2.5. Перпендикулярность параллельных прямых к одной плоскости. Докажем следующее свойство.

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и вторая прямая перпендикулярна этой плоскости.

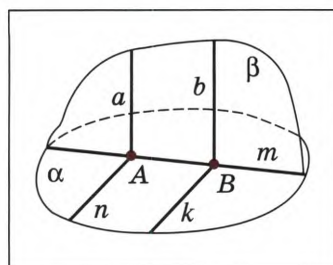


Рис. 5

Обозначим прямые через a и b , а плоскость — через α . Пусть $a \perp \alpha$ и $a \parallel b$. Проведём через параллельные прямые a и b вспомогательную плоскость β , пересекающую плоскость α по прямой m (рис. 5). Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp m$, а поэтому и $b \perp m$. Затем в плоскости α через точки A и B пересечения прямых a и b с плоскостью α проведём две параллельные прямые n и k . Тогда $a \perp n$. Так как прямые a и n соответственно параллельны прямым b и k , по свойству из предыдущего пункта $b \perp k$.

В результате получаем, что $b \perp m$, $b \perp k$, а поэтому $b \perp \alpha$ по основному признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

Вопрос. Пусть a и b — две прямые, α и β — две плоскости. Как доказать, что если $a \parallel b$, $\alpha \parallel \beta$ и $a \perp \alpha$, то $b \perp \beta$?

2.6. Построение перпендикуляра к плоскости. Способ 2. Доказанное в предыдущем пункте свойство приводит к одному из способов построения прямой, которая проходит через данную точку перпендикулярно заданной плоскости.

Пример 3. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, а основание высоты SH совпадает с центром квадрата. Провести из середины ребра SC перпендикуляр к плоскости $ABCD$.

Рассмотрим плоскость ASC , содержащую высоту SH пирамиды и середину M ребра SC . Проведём через точку M прямую параллельно SH и

обозначим точку её пересечения с SC через K (рис. 6). Так как $MK \parallel SH$ и $SH \perp ABCD$, то $MK \perp ABCD$. Точка K лежит в плоскости $ABCD$, поэтому искомым перпендикуляром MK построен.

Теперь покажем, как в общем случае через точку A провести прямую, перпендикулярную плоскости α , если известна некоторая прямая m , которая перпендикулярна плоскости α . Проведём через точку A и прямую m плоскость β и найдём прямую l пересечения плоскостей α и β (рис. 7). После этого в плоскости β проведём через точку A прямую a параллельно прямой m . Так как $a \parallel m$ и $m \perp \alpha$, по свойству из пункта 2.5 получаем, что $a \perp \alpha$.

Вопрос. Как на рис. 7 указать точку пересечения прямой a с плоскостью α ?

2.7. Единственность прямой, проходящей через заданную точку и перпендикулярной заданной плоскости. Докажем, что через данную точку можно провести единственную прямую, перпендикулярную заданной плоскости.

Предположим, что через точку A проходят две различные прямые a и b , перпендикулярные плоскости α . Проведём через прямые a и b вспомогательную плоскость β , которая пересекает плоскость α по прямой m (рис. 8). Так как $a \perp \alpha$, то $a \perp m$. Аналогично: так как $b \perp \alpha$, то $b \perp m$. В результате в плоскости β получаем две различные пересекающиеся прямые a и b , перпендикулярные одной прямой m . Это противоречит единственности перпендикуляра, который можно провести через точку A к прямой m в плоскости β . Таким образом, предположение о существовании двух различных прямых, перпендикулярных к плос-

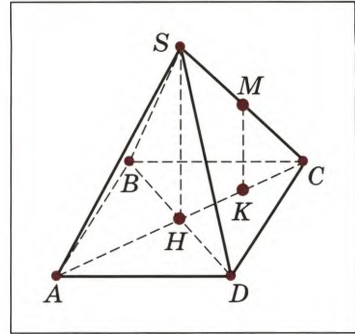


Рис. 6

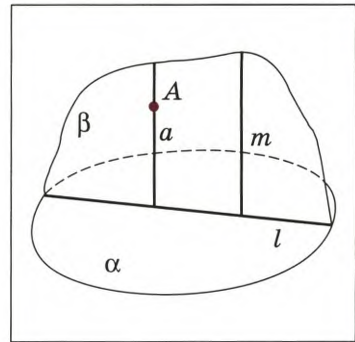


Рис. 7

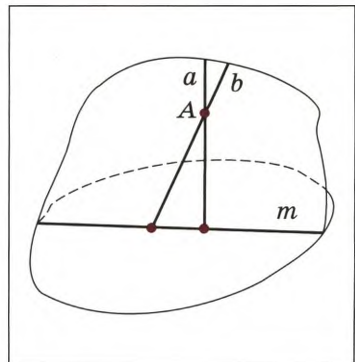


Рис. 8

кости α и проходящих через точку A , приводит к противоречию. Следовательно, такая прямая единственна.

Вопрос. Пусть в пирамиде $SABC$ ребро AS перпендикулярно грани SBC . Как из середины ребра AB опустить перпендикуляр к плоскости SBC ?

2.8. Параллельность прямых, перпендикулярных одной плоскости. В пункте 2.5 мы доказали, что если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и вторая прямая перпендикулярна этой плоскости. Верно также обратное утверждение.

Две различные прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны.

Обозначим прямые через a и b , а плоскость — через α . Тогда по условию $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$. Пусть прямая b пересекает плоскость α в точке B . Проведём через точку B прямую c , параллельную прямой a . Тогда $c \perp \alpha$ по свойству из пункта 2.5. В силу единственности прямой, которая проходит через точку B и перпендикулярна плоскости α , прямая c совпадает с прямой b . Так как $a \parallel c$, то и $a \parallel b$.

Вопрос. Как доказать, что в пространстве не существует четырёх попарно пересекающихся и взаимно перпендикулярных прямых?

2.9. Расстояние между параллельными плоскостями. Рассмотрим две параллельные плоскости α и β . Выберем две произвольные точки A и B плоскости α и опустим из них перпендикуляры $АН$ и $ВК$ к

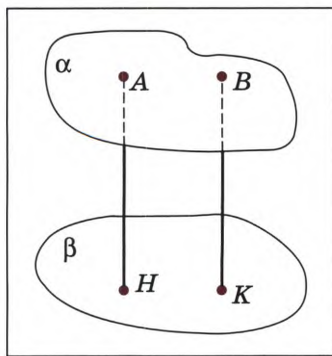


Рис. 9

плоскости β (рис. 9). Тогда $АН \parallel ВК$ по свойству из предыдущего пункта. Поэтому отрезки $АН$ и $ВК$ равны как отрезки параллельных прямых между двумя параллельными плоскостями. Отсюда следует, что расстояние от каждой точки плоскости α до плоскости β одно и то же и не зависит от выбора точки. Это позволяет определить расстояние между двумя параллельными плоскостями следующим образом.

Расстоянием между двумя параллельными плоскостями называется длина отрезка общего перпендикуляра, заключённого между этими плоскостями.

Вопрос. Чему равно расстояние между параллельными гранями куба?

2.10. Высота призмы. Рассмотрим произвольную призму, например пятиугольную призму с основаниями $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис. 10). Возьмём в плоскости основания $A_1B_1C_1D_1E_1$ некоторую точку M и построим перпендикуляр MK к плоскости $ABCDE$. Каждый такой отрезок MK называют *высотой* данной призмы. Длина отрезка MK равна расстоянию между плоскостями оснований призмы и не зависит от выбора точки M . Длину высоты призмы также называют её высотой.

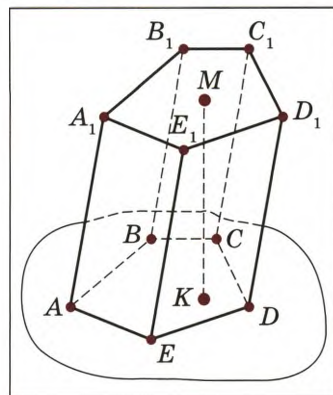


Рис. 10

Среди призм особо выделяют такие призмы, у которых боковые рёбра перпендикулярны основаниям.

Призма называется *прямой*, если её боковые рёбра перпендикулярны основаниям.

У прямой призмы в качестве высоты удобно выбирать одно из боковых рёбер.

Среди прямых призм особо выделяют правильные призмы.

Правильной призмой называется прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники.

На рис. 11 изображена правильная шестиугольная призма.

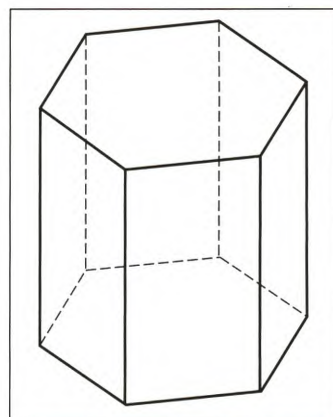


Рис. 11

Вопрос. Какие свойства правильной треугольной призмы вы знаете?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Докажите, что если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой плоскости.

2.** Докажите, что если прямая перпендикулярна двум плоскостям, то эти плоскости параллельны.

3. Докажите, что если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и вторая прямая перпендикулярна этой плоскости.

4. Как построить прямую, перпендикулярную заданной плоскости и проходящую через данную точку этой плоскости?

5. Докажите, что через данную точку можно провести единственную прямую, перпендикулярную заданной плоскости.

6. Докажите, что если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то такие прямые параллельны.

7. Какие способы построения перпендикуляра к плоскости вы знаете?

8. Как определяется расстояние между параллельными плоскостями?

9. Что такое призма?

10. Что называют высотой призмы?

11. Какая призма называется прямой?

12. Какая призма называется правильной?

■ Задачи и упражнения

1. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 6. Найдите расстояние:

а) от середины ребра $B_1 C_1$ до плоскости $A_1 B C D_1$;

б) от середины отрезка $C_1 D$ до плоскости $A B C_1 D_1$;

в) от вершины C_1 до плоскости $B_1 C D_1$;

г) от середины ребра $D D_1$ до плоскости $A_1 C_1 D$;

д) от вершины A до плоскости $B_1 C D_1$.

2. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат со стороной 3, ребро SB перпендикулярно основанию и равно 4. Найдите расстояние:

а) от середины ребра SD до плоскости $ABCD$;

б) от середины ребра SD до плоскости BSC ;

в) от вершины B до плоскости SCD ;

г) от середины ребра BC до плоскости SAD ;

д)* от вершины B до плоскости SAC ;

е)** от вершины D до плоскости SAC .

3.* Вершины A, B, C правильного треугольника расположены по одну сторону от плоскости α и удалены от плоскости α соответственно на расстояния a, b, c . Найдите расстояние от центра треугольника ABC до плоскости α .

4.* Докажите, что шесть плоскостей, проходящих через середины рёбер правильного тетраэдра перпендикулярно этим рёбрам, пересекаются в одной точке.

5.** Докажите, что в правильном тетраэдре все четыре высоты пересекаются в одной точке. В каком отношении делится каждая высота этой точкой?

6.** Известно, что в треугольной пирамиде $ABCD$ высоты, проведённые из вершин A и D , имеют общую точку. Докажите, что тогда высоты, проведённые из вершин B и C , также имеют общую точку.

7.* В основании правильной треугольной пирамиды лежит правильный треугольник со стороной $2\sqrt{3}$, боковые рёбра пирамиды равны $2\sqrt{7}$. Найдите расстояние от центра основания пирамиды до плоскости боковой грани.

8.* В основании правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, все рёбра пирамиды равны 1. Найдите расстояние от вершины A до плоскости грани SCD .

9. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ диагональ AC_1 боковой грани AA_1C_1C в два раза длиннее ребра основания. Чему равно отношение площади боковой грани призмы к площади основания?

10.* В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = 4$, $BC = 3$. Найдите высоту призмы, если известно, что расстояние от вершины A до прямой B_1C_1 равно $\frac{13}{5}$.

11.* В правильной треугольной призме с ребром основания $\sqrt{3}$ существует точка, одинаково удалённая от всех граней призмы. Найдите высоту призмы.

12.** Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA_1 , BB_1 , CC_1 равны 1. Через середину M отрезка AB_1 перпендикулярно прямой AB_1 проведена плоскость α . Найдите расстояние от вершины C до плоскости α .

13.** В правильной треугольной пирамиде $SABC$ ребро основания ABC равно 2, $SA = 6$. Точки K и M — середины рёбер AB и SC соответственно. Через середину отрезка MK проведена плоскость α , перпендикулярная прямой MK . Найдите расстояние от середины N ребра AC до плоскости α .

14.** В основании параллелепипеда лежит параллелограмм $ABCD$, в котором острый угол A равен 60° , а длины сторон AB и BC — соответственно a и $2a$. Боковые рёбра AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 параллелепипеда перпендикулярны основанию, а их длины равны a . Докажите, что прямая CD_1 перпендикулярна плоскости AB_1D_1 .

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равна высота правильной четырёхугольной пирамиды, все рёбра которой равны 4?

1) $\sqrt{2}$ 2) 2 3) $2\sqrt{2}$ 4) 1

1.2. Сколько различных высот можно провести в тетраэдре?

1) 1 2) 3 3) 4 4) 6

1.3. Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то:

- 1) она принадлежит другой плоскости
- 2) она перпендикулярна и второй плоскости
- 3) она параллельна другой плоскости
- 4) она не перпендикулярна второй плоскости

1.4. При каком соотношении между длинами рёбер основания и длинами боковых рёбер правильной треугольной призмы существует точка, одинаково удалённая от всех граней призмы?

- 1) $\sqrt{2} : \sqrt{3}$
- 2) $1 : \sqrt{3}$
- 3) $\sqrt{3} : 1$
- 4) $2\sqrt{2} : \sqrt{3}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Расстояние от данной точки до данной плоскости это:

- 1) расстояние от данной точки до любой из точек данной плоскости
- 2) минимальное расстояние от данной точки до точек данной плоскости
- 3) длина отрезка, соединяющего данную точку с точкой на плоскости и перпендикулярного двум пересекающимся прямым на данной плоскости
- 4) длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, лежащую в данной плоскости

2.2. Пусть $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида, точки M и K — середины рёбер AB и CD соответственно. Какие из следующих утверждений верны?

- 1) ребро SA перпендикулярно плоскости SCD
- 2) плоскость SMK перпендикулярна ребру AB
- 3) прямая AC перпендикулярна плоскости SBD
- 4) прямая MK перпендикулярна плоскости SAB

2.3. Чему равно расстояние между параллельными плоскостями?

- 1) расстоянию между произвольными точками, лежащими на этих плоскостях
- 2) длине общего перпендикуляра к этим плоскостям
- 3) расстоянию между произвольными параллельными прямыми, принадлежащими этим плоскостям
- 4) минимальному расстоянию между точками, лежащими на этих плоскостях

2.4. В правильной четырёхугольной призме может быть:

- 1) в основании ромб с углом 60°
- 2) все боковые грани равны между собой
- 3) все боковые грани представляют собой квадраты
- 4) все рёбра равны между собой

§ 3. ТЕОРЕМА О ТРЁХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ ■

3.1. Перпендикулярное проектирование.

Пусть точка A не лежит в плоскости α . Напомним, что перпендикуляром, опущенным из точки A на плоскость α , называется отрезок AH прямой a , которая перпендикулярна плоскости α , где H — точка пересечения прямой a с плоскостью α . Точку H — основание перпендикуляра — называют также перпендикулярной проекцией точки A на плоскость α . Перпендикулярные проекции различных точек пространства получаются при параллельном проектировании, направление которого перпендикулярно данной плоскости.

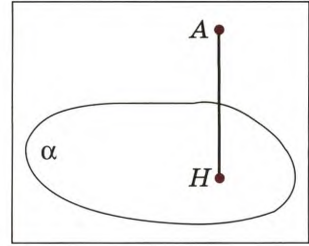


Рис. 1

Перпендикулярной проекцией фигуры F на плоскость α называется параллельная проекция этой фигуры в направлении, перпендикулярном плоскости α .

Перпендикулярное проектирование на плоскость называют также *ортогональным проектированием*. В этом случае говорят об *ортогональной проекции* фигуры на плоскость.

Вопрос. В каком случае при перпендикулярном проектировании прямая проектируется в точку?

3.2. Свойства перпендикулярного проектирования. Перпендикулярное проектирование на плоскость является параллельным проектированием в особо выбранном направлении. Поэтому при перпендикулярном проектировании сохраняются основные свойства, присущие любому параллельному проектированию.

1. Пусть прямая a не перпендикулярна плоскости α . Тогда перпендикулярной проекцией прямой a является прямая.

2. Перпендикулярные проекции параллельных прямых параллельны: если $a \parallel b$ и их проекциями являются прямые a_1 и b_1 , то $a_1 \parallel b_1$.

3. Если точки A, B, C лежат на одной прямой и проектируются в различные точки A_1, B_1, C_1 , то $AB : BC = A_1B_1 : B_1C_1$.

4. При перпендикулярном проектировании общие точки двух фигур проектируются в общие точки их проекций.

Иногда для краткости перпендикулярную проекцию фигуры на плоскость называют проекцией этой фигуры.

Часто при проектировании пространственной фигуры выделяют проекции некоторых вспомогательных линий этой фигуры. Например, при

изображении проекции многогранника изображают и проекции его рёбер.

Вопрос. Как доказать, что медианы треугольника проектируются в медианы проекции треугольника?

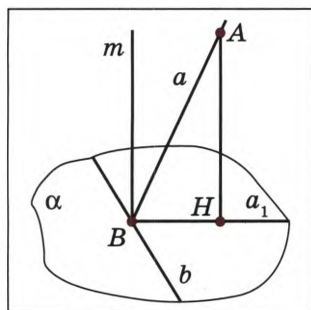


Рис. 2

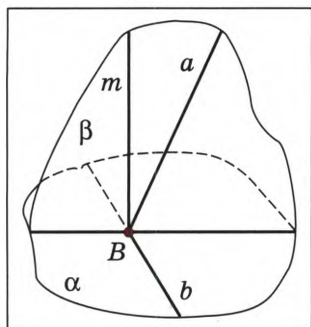


Рис. 3

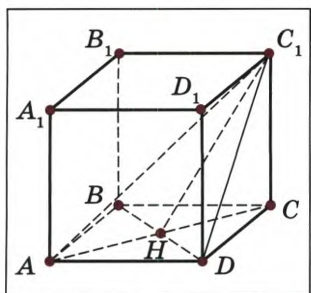


Рис. 4

3.3. Теорема о трёх перпендикулярах.

Часть 1. Рассмотрим важное свойство перпендикулярного проектирования.

Пусть прямая a пересекает прямую b плоскости α и перпендикулярно проектируется на плоскость α в прямую a_1 . Тогда если $a \perp b$, то $a_1 \perp b$.

Выберем на прямой a точку A , отличную от точки B пересечения прямых a и b , и опустим перпендикуляр AH на плоскость α . Затем через точку B проведём прямую m параллельно AH (рис. 2).

Так как $AH \perp \alpha$ и $m \parallel AH$, то $m \perp \alpha$. Поэтому $m \perp b$. По условию $a \perp b$. Значит, $b \perp a$, $b \perp m$, а поэтому прямая b перпендикулярна плоскости β , содержащей прямые a и m (рис. 3).

Так как прямые m и AH параллельны и точка A лежит в плоскости β , точка H также лежит в плоскости β . Поэтому $b \perp BH$, то есть $b \perp a_1$.

Доказанное в этом пункте свойство формулируют также следующим образом.

Если наклонная перпендикулярна прямой b плоскости α , то проекция наклонной также перпендикулярна прямой b .

Пример 1. Рассмотрим куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ и построим проекцию прямой AC на плоскость $BC_1 D$.

Заметим, что прямая AC перпендикулярна прямой BD плоскости $BC_1 D$ (рис. 4). Поэтому проекция прямой AC также перпендикулярна прямой BD . Чтобы построить проекцию прямой AC , рассмотрим треугольник $BC_1 D$. Так как $BD = BC_1 = DC_1$, треугольник $BC_1 D$ — равносто-

ронный. Следовательно, его медиана C_1H является перпендикуляром к BD . Это значит, что прямая C_1H является проекцией прямой AC на плоскость BC_1D .

Вопрос. Как, имея прямую a и её перпендикулярную проекцию на плоскость α , построить перпендикуляр к плоскости α ?

3.4. Теорема о трёх перпендикулярах. Часть 2. Рассмотрим утверждение, обратное доказанному в предыдущем пункте.

Пусть прямая a пересекает прямую b плоскости α и перпендикулярно проектируется на плоскость α в прямую a_1 . Тогда если $a_1 \perp b$, то $a \perp b$.

Доказательство. Из точки A прямой a опустим перпендикуляр AH на плоскость α . Затем через точку H проведём прямую n параллельно прямой b (рис. 5). Так как $AH \perp \alpha$, то $AH \perp n$. По условию $b \perp a_1$, а так как $n \parallel b$, то $n \perp a_1$. В результате $n \perp a_1$, $n \perp AH$, а поэтому прямая n перпендикулярна плоскости β , содержащей прямые a_1 и AH . Но так как $b \parallel n$, то $b \perp \beta$. Поэтому $b \perp a$, так как прямая a лежит в плоскости β .

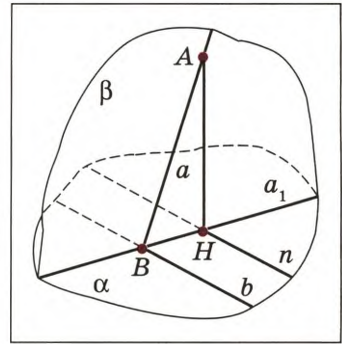


Рис. 5

Утверждения, доказанные в этом и предыдущем пунктах, иногда объединяют в одной формулировке и называют *теоремой о трёх перпендикулярах*.

Если наклонная перпендикулярна прямой b плоскости α , то проекция наклонной также перпендикулярна прямой b . Обратно: если проекция наклонной перпендикулярна прямой b плоскости α , то и наклонная перпендикулярна прямой b .

Пример 2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ на ребре $A_1 D_1$ выбрана точка M так, что $A_1 M : MD_1 = 2 : 1$; точка K лежит на ребре $C_1 D_1$ и $C_1 K : KD_1 = 1 : 2$ (рис. 6). Построить перпендикуляр из точки B на прямую MK .

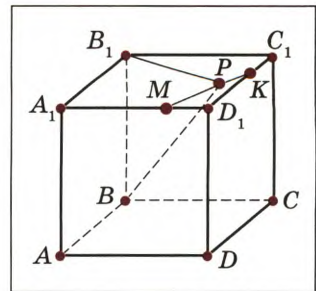


Рис. 6

Перпендикулярной проекцией точки B на плоскость $A_1 B_1 C_1 D_1$ является точка B_1 . Поэтому проекцией на плоскость $A_1 B_1 C_1 D_1$ любой прямой, проходящей через точку B , является прямая, проходящая через точку B_1 . Проведём в плоскости $A_1 B_1 C_1 D_1$ отрезок $B_1 P$ перпендикулярно MK . Так как проекцией прямой BP на плоскость $A_1 B_1 C_1 D_1$ является

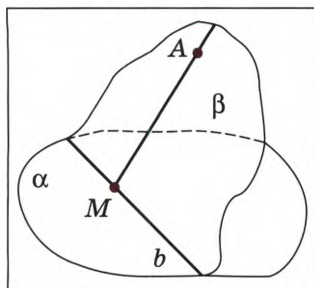


Рис. 7

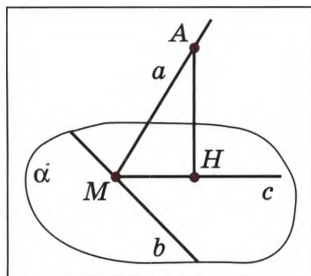


Рис. 8

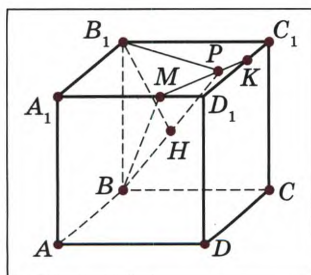


Рис. 9

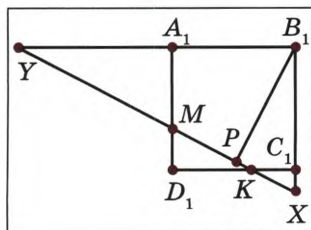


Рис. 10

прямая B_1P и $B_1P \perp MK$, то $BP \perp MK$. Тем самым нужный перпендикуляр построен.

Вопрос. В пирамиде $SABC$ ребро SA является высотой. Как с помощью теоремы о трёх перпендикулярах построить высоту SM грани SBC ?

3.5. Построение перпендикуляра к плоскости. Способ 3. Опираясь на теорему о трёх перпендикулярах, можно предложить ещё один способ построения перпендикуляра к плоскости.

Пусть даны точка A , не проходящая через неё плоскость α и прямая b плоскости α . Проведём через точку A и прямую b плоскость β и в этой плоскости построим отрезок AM , перпендикулярный прямой b (рис. 7). Затем в плоскости α проведём через точку M прямую c перпендикулярно прямой b (рис. 8).

По теореме о трёх перпендикулярах прямая c является проекцией прямой a на плоскость α . Поэтому точка A проектируется в такую точку H прямой c , что $AH \perp c$ (рис. 8). Таким образом, мы получим перпендикуляр к плоскости α , если построим $AH \perp c$.

Пример 3. Рассмотрим куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a и расположим точку M на ребре $A_1 D_1$ и точку K на ребре $C_1 D_1$ так, что $A_1 M : MD_1 = 2 : 1$ и $C_1 K : KD_1 = 1 : 2$. Найдём расстояние от точки B_1 до плоскости BMK .

В примере из пункта 3.4 показано, что если проведём $B_1 P \perp MK$, то тогда и $BP \perp MK$ (рис. 9). Следовательно, прямая BP является перпендикулярной проекцией прямой $B_1 P$ на плоскость BMK . Поэтому если проведём $B_1 H$ перпендикулярно BP , то получим перпендикуляр из точки B_1 к плоскости BMK .

Для вычисления длины $B_1 H$ сначала рассмотрим плоскость $A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 10). Из подобия треугольников $MD_1 K$, $C_1 K X$, $A_1 Y M$ полу-

чаем $C_1X = \frac{a}{6}$, $A_1Y = \frac{4a}{3}$, а поэтому $B_1X = \frac{7a}{6}$, $B_1Y = \frac{7a}{3}$. По теореме Пифагора

$$XY^2 = B_1X^2 + B_1Y^2 = \frac{49 \cdot 5}{36} a^2, \quad XY = \frac{7a}{6} \sqrt{5}.$$

Из подобия треугольников B_1PX и B_1XY вытекает

$$B_1P = \frac{B_1X \cdot B_1Y}{XY} = \frac{7a}{6} \cdot \frac{7a}{3} \cdot \frac{6}{7a\sqrt{5}} = \frac{7a}{3\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{15} a.$$

Теперь рассмотрим прямоугольный треугольник BB_1P (рис. 11). По теореме Пифагора

$$BP^2 = BB_1^2 + B_1P^2 = a^2 + \frac{49}{9 \cdot 5} a^2 = \frac{84}{9 \cdot 5} a^2, \quad BP = \frac{2a\sqrt{21}}{3\sqrt{5}}.$$

Из подобия треугольников B_1HP и B_1BP получаем

$$B_1H = \frac{BB_1 \cdot B_1P}{BP} = \frac{a \cdot 7a}{3\sqrt{5}} \cdot \frac{3\sqrt{5}}{2a\sqrt{21}} = \frac{7a}{2\sqrt{21}}.$$

Таким образом, расстояние от точки B_1 до плоскости BMK равно $\frac{7a}{2\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{21}}{6} a$.

Вопрос. Как доказать, что треугольник BB_1P прямоугольный?

3.6. Перпендикулярность скрещивающихся прямых. Напомним, что угол между двумя скрещивающимися прямыми равен 90° , если соответственно параллельные им пересекающиеся прямые перпендикулярны. Такое определение не зависит от выбора пересекающихся прямых, параллельных данным скрещивающимся прямым.

Для удобства две скрещивающиеся прямые называют перпендикулярными, если угол между ними равен 90° . Перпендикулярность скрещивающихся прямых также обозначают с помощью знака \perp .

Определение перпендикулярности скрещивающихся прямых позволяет установить следующее свойство.

Если прямая a перпендикулярна плоскости α , то прямая a перпендикулярна любой прямой плоскости α .

Доказательство. Пусть прямая a пересекает плоскость α в точке A . Рассмотрим произвольную прямую b плоскости α и проведём через

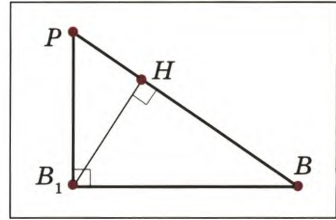


Рис. 11

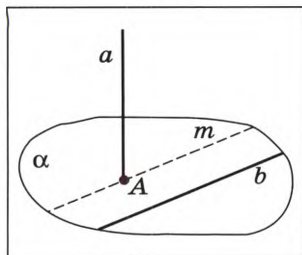


Рис. 12

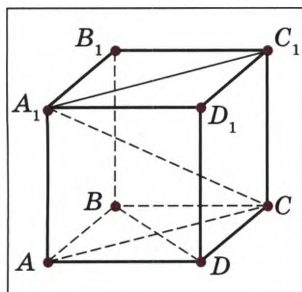


Рис. 13

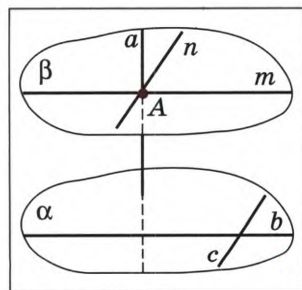


Рис. 14

точку A прямую m , параллельную b (рис. 12). Тогда прямая m лежит в плоскости α и проходит через точку A, а поэтому $a \perp m$. Отсюда следует, что прямые a и b перпендикулярны.

Пример 4. Рассмотрим куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ (рис. 13). Раньше было установлено, что плоскость AA_1C_1C перпендикулярна прямой BD . Поэтому прямая BD перпендикулярна каждой прямой плоскости AA_1C_1C . В частности, $A_1C_1 \perp BD$.

Вопрос. Как доказать, что высота пирамиды перпендикулярна каждому ребру основания?

3.7. Обобщение признака перпендикулярности прямой и плоскости. Основной признак перпендикулярности прямой и плоскости допускает обобщение.

Если прямая a перпендикулярна двум пересекающимся прямым плоскости α , то a перпендикулярна плоскости α .

Доказательство. Пусть $a \perp b$ и $a \perp c$. Через произвольную точку A прямой a проведём прямые m и n , параллельные прямым b и c соответственно. Прямые m и n различны, а поэтому через них можно провести единственную плоскость β (рис. 14). Так как $m \parallel b$ и $n \parallel c$, то $\beta \parallel \alpha$. Далее, так как $a \perp b$, то $a \perp m$, и аналогично получаем, что $a \perp n$. Следовательно, по определению $a \perp \beta$. Но так как $\alpha \parallel \beta$, то $a \perp \alpha$, что и требовалось доказать.

Пример 5. Рассмотрим куб $ABCA_1B_1C_1D_1$ и его главную диагональ A_1C . Так как плоскость A_1BCD_1 перпендикулярна прямой C_1D , то $A_1C \perp C_1D$. Аналогично, так как плоскость A_1B_1CD перпендикулярна прямой BC_1 , то $A_1C \perp BC_1$. В результате получаем, что прямая A_1C перпендикулярна двум пересекающимся прямым BC_1 и C_1D плоскости BC_1D , а поэтому $A_1C \perp BC_1D$.

Вопрос. Как построить высоту наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, если известно, что $AB = BC = AC$ и $AA_1 \perp BC$?

3.8. Новое доказательство теоремы о трёх перпендикулярах.** Рассмотрим ещё одно доказательство теоремы о трёх перпендикулярах.

Первая часть. Пусть прямая BC лежит в плоскости α (рис. 16), прямая AB перпендикулярна прямой BC и точка H — проекция точки A на плоскость α .

Так как $AH \perp BCH$, то $AH \perp BC$. Поэтому $BC \perp AH$, $BC \perp AB$, откуда $BC \perp ABH$. Отсюда $BC \perp BH$, что и требуется доказать.

Вторая часть. Пусть прямая BC лежит в плоскости α , точка H — проекция точки A на плоскость α и $BH \perp BC$ (рис. 16). Так как $AH \perp BCH$, то $AH \perp BC$. Поэтому $BC \perp AH$, $BC \perp BH$, откуда $BC \perp ABH$. Отсюда $BC \perp AB$, что и требуется доказать.

Вопрос. Как доказать, что в правильной треугольной пирамиде противоположные рёбра попарно перпендикулярны?

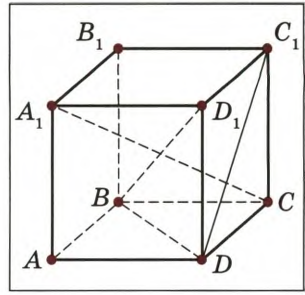


Рис. 15

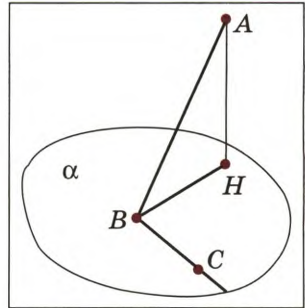


Рис. 16

Контрольные вопросы и задания ■

1. Что называют перпендикулярным проектированием?
2. Как получить ортогональную проекцию фигуры на заданную плоскость?
3. Какие свойства параллельного проектирования вы знаете?
4. Какие свойства ортогонального проектирования вы знаете?
5. Сформулируйте теорему о трёх перпендикулярах.
- 6.* Докажите теорему о трёх перпендикулярах.
7. Как из данной точки провести перпендикуляр к заданной плоскости?
8. Как определяется перпендикулярность скрещивающихся прямых?
- 9.** Сформулируйте обобщение признака перпендикулярности прямой и плоскости.

Задачи и упражнения ■

1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Найдите расстояние:
 - а) от вершины B_1 до прямой CM , где M — середина ребра AB ;
 - б) от вершины D до прямой $A_1 K$, где K — середина ребра $B_1 C_1$;
 - в) от середины ребра $B_1 C_1$ до прямой BD .
2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Найдите расстояние:
 - а) от вершины B до плоскости $B_1 CM$, где M — середина AB ;

б) от вершины D_1 до плоскости A_1KD , где K — середина B_1C_1 ;

в) от середины ребра BC до плоскости BDN , где N — середина B_1C_1 .

3. В правильной пирамиде $SABCD$ высота $SH = 8$, рёбра основания $ABCD$ равны 4. Найдите расстояние от вершины D до плоскости ABM , где M — середина ребра SC .

4. В правильной пирамиде $SABCD$ высота $SH = 4\sqrt{2}$, рёбра основания $ABCD$ равны 2. Точки M и N — середины рёбер SB и SD . Найдите:

а) расстояние от вершины C до плоскости AMN ;

б)* расстояние от вершины D до плоскости AMN .

5. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром a . Найдите:

а) расстояние от середины ребра AD до медианы BM грани ABC ;

б)* расстояние от середины медианы AK грани ABC до медианы BM грани ABD .

6. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a найдите расстояние между параллельными плоскостями AB_1C и A_1C_1D .

7.* В правильной пирамиде $SABCD$ высота $SH = \sqrt{30}$, рёбра основания $ABCD$ равны 4. Точка M расположена на продолжении ребра DC так, что угол CBM равен 15° . Найдите расстояние от основания H высоты до плоскости BSM .

8.** В основании пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3$, $BC = 4$. Боковые рёбра пирамиды имеют одинаковую длину, её высота равна $\frac{12}{5}$. Плоскость α проходит через прямую SA параллельно диагонали BD основания. Найдите расстояние от вершины C до плоскости α .

9.** В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 2, боковые рёбра AA_1 , BB_1 , CC_1 равны $\sqrt{3}$. Точки M , N , P — середины рёбер BC , CC_1 , A_1C_1 соответственно. Найдите расстояние от вершины A до плоскости MNP .

10.** Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в основании которого лежит квадрат $ABCD$ со стороной 3, боковые рёбра AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 равны 5. Равносторонний треугольник расположен в пространстве так, что одна его вершина совпадает с вершиной C параллелепипеда, а две другие расположены на прямых BB_1 и C_1D_1 соответственно. Найдите сторону этого треугольника.

11.* В пирамиде $SABC$ ребро SA является высотой, $SA = AB = BC = AC = 1$. Точка N одинаково удалена от всех граней пирамиды. Каково расстояние между точкой N и плоскостью BCS ?

12.* Докажите, что если из трёх прямых a , b , c , проходящих через одну точку, прямая a образует с прямыми b и c одинаковые острые углы, то её перпендикулярной проекцией на плоскость, содержащую прямые b и c , является прямая, содержащая биссектрису одного из углов между прямыми b и c .

13.* Вершины A , B , C треугольника удалены от плоскости α соответственно на a , b , c . Найдите расстояние между точкой пересечения медиан треугольника ABC и плоскостью α , рассмотрев все возможные случаи.

14. Пусть плоскость α проходит через вершину угла AOB с биссектрисой OC . Верно ли, что перпендикулярная проекция луча OC на плоскость α всегда является биссектрисой проекции угла AOB на ту же плоскость?

15.** Докажите, что если луч k образует равные углы с тремя лучами, лежащими в данной плоскости α , то луч k перпендикулярен плоскости α .

16.* Докажите, что если ортогонально проектировать угол AOB на плоскость, параллельную его биссектрисе OC , то в проекции получим угол, биссектриса которого параллельна OC .

17. Спроектируем ортогонально прямой угол на плоскость, которая пересекает стороны угла. Докажите, что проекция представляет собой тупой угол.

18. Спроектируем ортогонально прямой угол на плоскость, которая пересекает одну из сторон угла и продолжение другой стороны. Докажите, что проекция представляет собой острый угол.

19. Найдите множество всех проекций данной точки пространства на плоскости, проходящие через данную прямую.

20.** В пространстве даны две скрещивающиеся взаимно перпендикулярные прямые. Найдите множество середин всех отрезков данной длины d , один конец которых лежит на одной из этих прямых, а другой конец — на другой из этих прямых.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равно расстояние между плоскостями AB_1C и A_1C_1D в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a ?

- 1) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ 2) $\frac{a}{2}$ 3) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ 4) $\frac{a}{3}$

1.2. Чему равно расстояние от вершины A до плоскости A_1BD в единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$?

- 1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.3. Прямой угол ортогонально спроектирован на плоскость, которая пересекает стороны угла. Тогда проекцией этого угла может быть угол:

- 1) 30° 2) 45° 3) 60° 4) 120°

1.4. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром 1 через вершину B проводится сечение, перпендикулярное AD . Чему равна площадь сечения?

- 1) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Перпендикулярной проекцией двух пересекающихся прямых на плоскость могут быть:

- 1) точка 2) отрезок 3) прямая 4) пересекающиеся прямые

2.2. Перпендикулярной проекцией двух параллельных прямых на плоскость могут быть:

- 1) точка 2) две точки
3) прямая 4) пересекающиеся прямые

2.3. Какой может быть перпендикулярная проекция куба на некоторую плоскость?

- 1) треугольник 2) четырёхугольник
3) пятиугольник 4) шестиугольник

2.4. Сколько рёбер куба могут быть одновременно перпендикулярны некоторой плоскости?

- 1) 2 2) 3 3) 4 4) 5

■ § 4. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

4.1. Перпендикулярность плоскостей. Стены зданий строят вертикально по отношению к горизонтальной поверхности земли. Такая особенность во взаимном расположении двух плоских фигур в стереометрии связывается с понятием перпендикулярности плоскостей.

Плоскость α называется перпендикулярной плоскости β , если α содержит прямую a , которая перпендикулярна плоскости β (рис. 1).

Тот факт, что плоскость α перпендикулярна плоскости β , обозначают символом $\alpha \perp \beta$.

Пример 1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M — середина ребра CD . Построить плоскость, которая проходит через прямую AM и перпендикулярна плоскости $ABCD$.

Прямая AA_1 перпендикулярна плоскости $ABCD$ и содержит точку A , через которую нужно провести плоскость. Поэтому рассмотрим плоскость $AA_1 M$, которая пересекает куб так, как изображено на рис. 2. Так как плоскость $AA_1 M$ содержит прямую, перпендикулярную плоскости $ABCD$, то $AA_1 M \perp ABCD$.

Вопрос. Как в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ построить плоскость, проходящую через A и C и перпендикулярную плоскости $AB_1 C_1 D$?

4.2. Взаимная перпендикулярность плоскостей. Докажем, что если α и β — плоскости и $\alpha \perp \beta$, то и $\beta \perp \alpha$.

Пусть $\alpha \perp \beta$. Это значит, что плоскость α проходит через прямую a , перпендикулярную плоскости β . Обозначим через t прямую пересечения плоскостей α и β . Проведём в плоскости β прямую b перпендикулярно прямой t так, чтобы прямая b проходила через точку A пересечения прямой a с плоскостью β (рис. 3). Так как $a \perp \beta$, то $a \perp b$. Поэтому $b \perp a$, $b \perp t$, а значит, $\beta \perp \alpha$.

Итак, плоскость β проходит через прямую b , которая перпендикулярна плоскости α . Отсюда по определению из предыдущего пункта получаем, что $\beta \perp \alpha$.

Вопрос. Как доказать, что в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (рис. 2) плоскость $A_1 B_1 C_1 D_1$ перпендикулярна плоскости $AA_1 M$?

4.3. Построение перпендикуляра к плоскости. Способ 4. Перпендикулярные плоскости обладают следующим свойством.

Пусть плоскости α и β перпендикулярны и пересекаются по прямой t . Тогда, если в плоскости α провести прямую p , перпендикулярную прямой t , то прямая p будет перпендикулярна плоскости β .

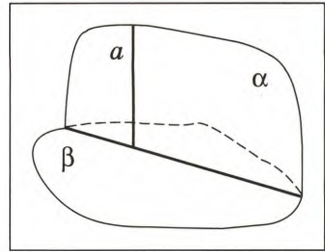


Рис. 1

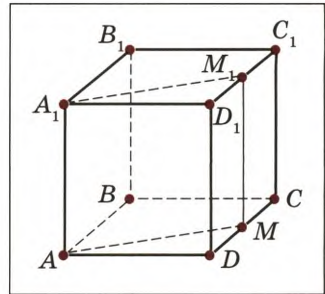


Рис. 2

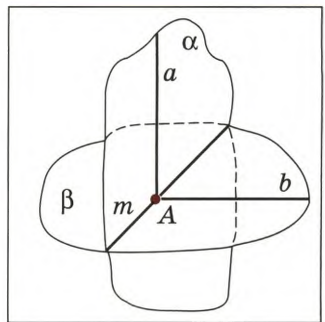


Рис. 3

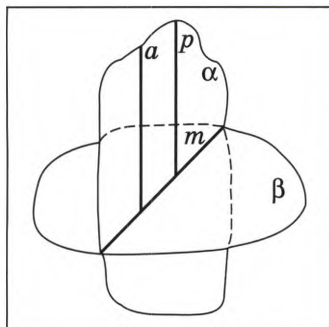


Рис. 4

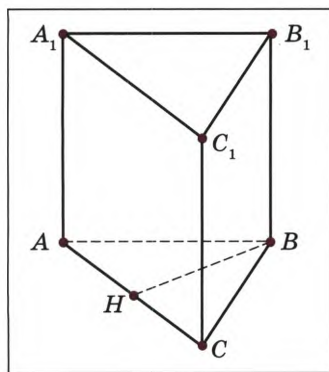


Рис. 5

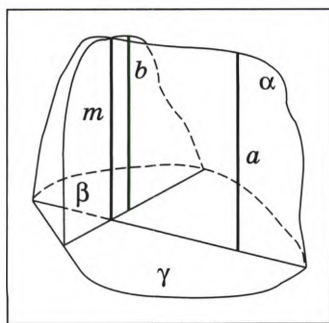


Рис. 6

Доказательство. Так как плоскость α перпендикулярна плоскости β , то α содержит прямую a , перпендикулярную плоскости β (рис. 4). Но тогда прямая a перпендикулярна и прямой m , лежащей в плоскости β , то есть $a \perp m$. Прямые a и p содержатся в одной плоскости α и перпендикулярны одной прямой m . Следовательно, $a \parallel p$. Так как прямые a и p параллельны и прямая a перпендикулярна плоскости β , то $p \perp \beta$.

Доказанное свойство даёт ещё один способ построения прямой, перпендикулярной заданной плоскости.

Пример 2. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма. Построить перпендикуляр из точки B к плоскости AA_1C_1C .

Из определения правильной призмы следует, что $AA_1 \perp ABC$. Поэтому $AA_1C_1C \perp ABC$, так как плоскость AA_1C_1C содержит прямую, перпендикулярную плоскости ABC . Проведём из точки B перпендикуляр BH к прямой AC (рис. 5). На основании свойства из этого пункта получим, что $BH \perp AA_1C_1C$.

Вопрос. Пусть плоскости α и β перпендикулярны. Как доказать, что если через точку A плоскости α провести прямую a , перпендикулярную плоскости β , то прямая a содержится в плоскости α ?

4.4. Пересечение двух плоскостей, перпендикулярных к третьей плоскости. Прямая пересечения двух плоскостей, перпендикулярных третьей плоскости, обладает следующим свойством.

Если плоскости α и β пересекаются и перпендикулярны плоскости γ , то прямая пересечения плоскостей α и β перпендикулярна плоскости γ .

Доказательство. В плоскостях α и β найдутся соответственно прямые a и b , такие, что $a \perp \gamma$ и $b \perp \gamma$ (рис. 6). Так как прямые a и b перпендикулярны плоскости γ , то $a \parallel b$.

Поскольку плоскость β содержит прямую b , параллельную прямой a , то $a \parallel \beta$. Поэтому плоскость α , содержащая прямую a , пересекает плоскость β по прямой m , параллельной прямой a (глава 4, пункт 2.2). Следовательно, $m \perp \gamma$.

Вопрос. Как доказать, что если через прямую a проходит несколько различных плоскостей, перпендикулярных плоскости γ , то $a \perp \gamma$?

4.5. Построение перпендикуляра к плоскости. Способ 5. Свойство из предыдущего пункта даёт ещё один способ построения прямой, перпендикулярной заданной плоскости.

Пример 3. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро $SA = 4$ и известно, что все углы граней при вершине A равны 60° . Найти высоту пирамиды, проведённую из вершины S .

Сначала проведём в грани SAB перпендикуляр SM из вершины S к прямой AB . Так как $SA = 4$ и $\angle SAB = 60^\circ$, то $AM = SA \cos 60^\circ = 2$, $SM = 2\sqrt{3}$. После этого в плоскости ABC через точку M проведём перпендикулярно AB отрезок MP (рис. 7).

В результате получим $SM \perp AB$, $MP \perp AB$, откуда $AB \perp SMP$. Но тогда плоскость ABC проходит через прямую AB , перпендикулярную плоскости SMP , а поэтому $SMP \perp ABC$.

Затем аналогичные построения выполним, начиная с грани SAC : проведём $SN \perp AC$ и $NQ \perp AC$ (рис. 8). В результате получим, что $SNQ \perp ABC$.

Две построенные плоскости SMP и SNQ перпендикулярны плоскости ABC , а поэтому их прямая пересечения SH также перпендикулярна плоскости ABC . Следовательно, отрезок SH является высотой пирамиды.

Для вычисления высоты вспомним, что $SM = 2\sqrt{3}$, $AM = AN = 2$, и рассмотрим плоскость ABC (рис. 9). Так как точки M и N , P и Q соответственно симметричны относительно

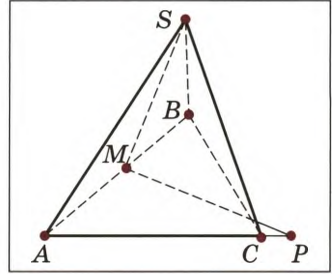


Рис. 7

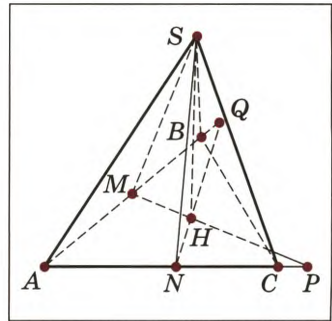


Рис. 8

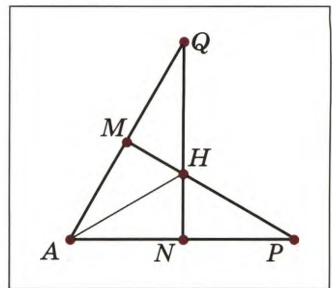


Рис. 9

биссектрисы угла BAC , то MP и NQ пересекаются в точке этой биссектрисы. Поэтому $\angle MAN = 30^\circ$ и $MN = AM \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$

Наконец, из прямоугольного треугольника SMH находим:

$$SH^2 = SM^2 - MN^2 = 4 \cdot 3 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}, \quad SH = 4\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Вопрос. Как доказать, что рассмотренный в примере треугольник SMH прямоугольный?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется перпендикулярность прямой и плоскости?
2. В каком случае плоскость α перпендикулярна плоскости β ?
3. Докажите, что если плоскость α проходит через прямую a , перпендикулярную плоскости β , то и плоскость β проходит через некоторую прямую, перпендикулярную плоскости α .
4. Пусть плоскости α и β перпендикулярны. Как через точку плоскости α провести прямую, перпендикулярную плоскости β ?
5. Каким свойством обладает прямая пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей плоскости?
6. Какие способы построения прямой, перпендикулярной заданной плоскости, вы знаете?

■ Задачи и упражнения

1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Докажите, что перпендикулярны плоскости:
 - а) $A_1 B_1 CD$ и $BB_1 C_1 C$;
 - б) $A_1 C_1 D$ и $A_1 BCD_1$;
 - в) AMC и $BB_1 D_1 D$, где M — середина ребра BB_1 ;
 - г)* AKC_1 и $BB_1 L$, где K — середина ребра BC , L — середина ребра $C_1 D_1$.
2. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Докажите, что перпендикулярны плоскости:
 - а) ASC и BSD ;
 - б) ASB и SMN , где M — середина AB , N — середина CD ;
 - в) BSD и BPQ , где P — середина AS , Q — середина CS .
- 3.* Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S , у которой все рёбра равны. Через прямую SC параллельно прямой BD проводится плоскость α . Докажите, что плоскость α перпендикулярна плоскости: а) ASC ; б) ASD .

4.** Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S , точки M и K — середины рёбер BS и DS соответственно. Докажите, что плоскость, которая параллельна прямым AM и CK , перпендикулярна плоскости $ABCD$.

5. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Докажите что:

а) перпендикулярны плоскости BB_1C_1C и BMC_1 , где M — середина ребра AA_1 ;

б)* плоскость, параллельная прямым AB_1 и BC_1 , перпендикулярна плоскости AA_1C_1C .

6. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой все рёбра равны. Докажите, что перпендикулярны плоскости BMC_1 и B_1MC , где M — середина ребра AA_1 .

7. Плоскости α и β перпендикулярны и пересекаются по прямой a . Точки A и B на прямой a , точка C в плоскости α и точка D в плоскости β расположены так, что $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ и $AB = 2$, $AC = 3$, $BD = 4$. Найдите расстояние CD .

8.* Приведите пример четырёхугольной пирамиды $SABCD$ с вершиной S , у которой грани SAB и SCD перпендикулярны основанию $ABCD$.

9.* В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ плоскости AB_1C_1 и A_1BC перпендикулярны. Чему равно отношение бокового ребра к ребру основания у такой призмы?

10.* В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S грани SAB и SCD перпендикулярны. Чему равно отношение бокового ребра к ребру основания у такой пирамиды?

11.* В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S грани SAB и SBC перпендикулярны. Докажите, что грани SAB и SAC также перпендикулярны.

12.* В основании прямоугольного параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$, $BC = 2$. Боковые рёбра AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 имеют длину 1. Через диагональ BD_1 проведена плоскость, перпендикулярная плоскости BB_1D_1D . Найдите расстояние от точки A до проведённой плоскости.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Если две плоскости перпендикулярны третьей, то:

- 1) они обязательно параллельны между собой
- 2) они обязательно пересекаются

- 3) они могут быть перпендикулярны между собой;
 4) они не могут быть перпендикулярны между собой.

1.2. Чему равно количество плоскостей, перпендикулярных данной плоскости и содержащих данную наклонную к этой плоскости?

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) более 3

1.3. Сколько рёбер имеет пятиугольная призма?

- 1) 10 2) 15 3) 20 4) 25

1.4. Чему равно расстояние между серединами скрещивающихся рёбер правильного тетраэдра с ребром 6?

- 1) $3\sqrt{2}$ 2) $2\sqrt{3}$ 3) $3\sqrt{3}$ 4) $2\sqrt{6}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Укажите пары перпендикулярных плоскостей:

- 1) $A_1 B_1 CD$ и $BB_1 C_1 C$ 2) ABC и $AB_1 C$
 3) $A_1 C_1 D$ и $A_1 BCD_1$ 4) ABD и $AB_1 C$

2.2. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка M — середина ребра BB_1 , K — середина ребра BC , L — середина ребра $C_1 D_1$. Укажите пары перпендикулярных плоскостей:

- 1) AKC и $AA_1 C_1 C$ 2) AMC и $AA_1 C_1 C$
 3) AKC_1 и $BB_1 L$ 4) AKM и $BB_1 L$

2.3. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Укажите пары перпендикулярных плоскостей:

- 1) ASC и BSD 2) ASC и BSC 3) ASC и ABC 4) ASC и ASB

2.4. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Точка M — середина ребра AB , точка N — середина ребра CD , точка Q — середина ребра CS . Укажите пары перпендикулярных плоскостей:

- 1) ASM и SMN 2) ASB и SMN
 3) BSD и SMN 4) ASC и BQD

■ Мини-исследования к главе

Мини-исследование 13

Найти на заданной плоскости α точку, для которой разность расстояний от неё до двух данных точек A и B наибольшая, если:

- а) точки A и B расположены по одну сторону от плоскости α ;
 б) точки A и B расположены по разные стороны от плоскости α .

Мини-исследование 14

В пространстве даны две скрещивающиеся взаимно перпендикулярные прямые a и b . Рассматриваются всевозможные отрезки AB данной длины d , для которых точка A лежит на прямой a , точка B лежит на прямой b .

а) Найти множество всех таких точек M отрезков AB , что $AM : MB = k$, где k — фиксированное число.

б) Найти множество всех таких точек M , расположенных на продолжениях отрезков AB , что $AM : MB = k$, где k — фиксированное число.



Глава 7

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

В этой главе мы напомним определения и основные свойства степени с рациональным показателем, введём понятие степени с действительным показателем, определим показательные и логарифмические функции и рассмотрим их основные свойства.

■ § 1. СТЕПЕНЬ С РАЦИОНАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

1.1. Свойства степеней с натуральными показателями. Напомним, что степень числа a с натуральным показателем n , большим 1, определяется как произведение n одинаковых сомножителей, равных a . Степень a^n можно определить и по индукции: $a^1 = a$; если степень a^k уже определена, то $a^{k+1} = a^k \cdot a$.

Операция возведения в натуральную степень имеет следующие свойства.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
2. $(a^n)^m = a^{mn}$.
3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.
4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, если $a \neq 0$ и $n > m$.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, если $b \neq 0$.
6. Если $0 < a < b$, то $a^n < b^n$.
7. Если $0 < a < 1$ и $n > m$, то $a^n < a^m$.
8. Если $a > 1$ и $n > m$, то $a^n > a^m$.

Вопрос. Как с использованием основных свойств доказать, что если $0 < a < b$ и $n \in N$, то $\frac{1}{a^n} > \frac{1}{b^n}$?

1.2.* Доказательства свойств степени с натуральным показателем. Основные свойства степеней с натуральными показателями доказываются с помощью математической индукции. Покажем, как доказывается свойство 1, что $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ при любых натуральных m и n .

I. Пусть $n = 1$. Тогда $a^m \cdot a^1 = a^m \cdot a = a^{m+1}$ при любом натуральном m по определению степени с натуральным показателем.

II. Предположим, что при некотором натуральном k равенство $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ выполняется. Тогда при $k+1$ имеем $a^m \cdot a^{k+1} = a^m \cdot (a^k \cdot a) = (a^m \cdot a^k) \cdot a = a^{m+k} \cdot a^1 = a^{(m+k)+1} = a^{m+(k+1)}$.

Таким образом, из равенства $a^m \cdot a^k = a^{m+k}$ следует равенство $a^m \cdot a^{k+1} = a^{m+(k+1)}$. На основании принципа математической индукции свойство 1 доказано.

Вопрос. Как доказать свойство 3?

1.3. Свойства степеней с целыми показателями. Степень с целым показателем определяется только для ненулевых чисел a , причём таким образом, чтобы выполнялись свойства 1–7 для степеней с натуральными показателями, записанные в пункте 1.1. Напомним, как это делается. Пусть $a \neq 0$ и k — целое число. Тогда:

если $k = n$, где n — натуральное число, то $a^k = a^n$;

если $k = 0$, то $a^k = a^0 = 1$;

если $k = -n$, где n — натуральное число, то $a^k = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

При таком определении сохраняется прежний смысл степени с целым положительным показателем и вводятся степени с нулевым и целыми отрицательными показателями.

Перечислим основные свойства степени с целым показателем.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

2. $(a^n)^m = a^{mn}$.

3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$.

4. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$.

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

6. Если $a > 1$ и $n > m$, то $a^n > a^m$.

7. Если $0 < a < 1$ и $n > m$, то $a^n < a^m$.

Вопрос. Что больше, $(0,5)^{-100}$ или $(0,5)^{-200}$?

1.4.* Доказательства свойств степени с целыми показателями.

Основные свойства степеней с целыми показателями доказываются с использованием свойств степеней с натуральными показателями путём перебора всех возможных случаев знаков у показателей степеней. Покажем, например, как доказывается свойство 2, что $(a^n)^m = a^{mn}$ при любых целых m и n .

Первый случай. Пусть $m > 0$, $n > 0$. Тогда числа m и n — натуральные и равенство $(a^n)^m = a^{mn}$ уже известно.

Второй случай. Пусть $m = 0$. Тогда для произвольного целого числа n имеем $(a^n)^m = (a^n)^0 = 1 = a^0 = a^{0 \cdot n} = a^{mn}$.

Третий случай. Пусть $n = 0$. Тогда для произвольного целого числа m имеем $(a^n)^m = (a^0)^m = 1^m = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0} = a^{mn}$.

Четвёртый случай. Пусть $n > 0$, $m < 0$. Тогда $m = -k$, где n, k — натуральные числа. Поэтому

$$(a^n)^m = (a^n)^{-k} = \frac{1}{(a^n)^k} = \frac{1}{a^{nk}} = a^{-nk} = a^{(-k)n} = a^{mn}.$$

Пятый случай. Пусть $n < 0$, $m > 0$. Тогда $n = -k$, где m, k — натуральные числа. Поэтому

$$(a^n)^m = (a^{-k})^m = \left(\frac{1}{a^k}\right)^m = \frac{1}{(a^k)^m} = \frac{1}{a^{km}} = a^{-km} = a^{(-k)m} = a^{mn}.$$

Шестой случай. Пусть $n < 0$, $m < 0$. Тогда $n = -k$, $m = -p$, где k, p — натуральные числа. Поэтому

$$(a^n)^m = (a^{-k})^{-p} = \left(\frac{1}{a^k}\right)^{-p} = \frac{1}{a^{-kp}} = 1 : \left(\frac{1}{a^{kp}}\right) = a^{kp} = a^{(-k)(-p)} = a^{mn}.$$

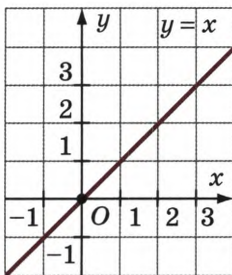


Рис. 1

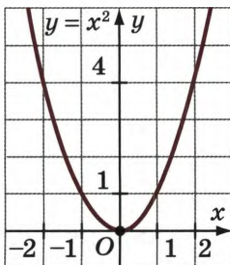


Рис. 2

В результате рассмотрены все возможные случаи, а поэтому свойство 2 для целых показателей доказано.

Вопрос. Как доказать свойство 3 для целых показателей?

1.5. Степенные функции с натуральным показателем. Рассмотрим функцию вида $y = x^n$, где n — натуральное число. Она определена на всей числовой прямой.

При $n = 1$ функция $y = x^n$ имеет вид $y = x$ и является линейной функцией. Её график есть прямая (рис. 1).

При $n = 2$ функция $y = x^n$ имеет вид $y = x^2$ и является квадратичной функцией. Её график есть парабола (рис. 2).

При $n > 2$ можно составить таблицу значений функции $y = x^n$ и схематически изобразить её график. На рис. 3, 4, 5 приведены соответственно графики функций $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$.

Из свойства 8 степени с натуральным показателем следует, что при $0 < x_1 < x_2$ имеем $y_1 = x_1^n < y_2 = x_2^n$. Это означает, что на промежутке $[0; \infty)$ функция $y = x^n$ при $n \in N$ возрастает.

На промежутке $[-\infty; 0)$ функция $y = x^n$ в зависимости от показателя n ведёт себя по-разному: при чётном n убывает, при нечётном n возрастает. В итоге получаем, что при каждом нечётном n функция $y = x^n$ является возрастающей на всей числовой оси.

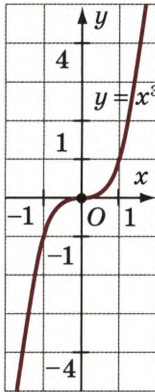


Рис. 3

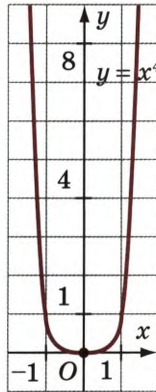


Рис. 4

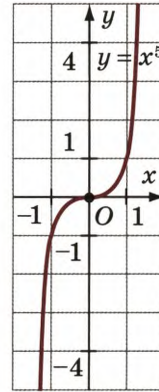


Рис. 5

Вопрос. При каких натуральных значениях n функция $y = x^n$ чётна и при каких n нечётна?

1.6. Степенные функции с целым неположительным показателем. Рассмотрим теперь функции вида $y = x^k$, где k — целое число, меньшее 1. В этом случае степень определяется только при $x \neq 0$.

При $k = 0$ получаем функцию $y = x^0$, которая определена при $x \neq 0$ и $y = x^0 = 1$ по определению степени с нулевым показателем. На рис. 6 приведён график этой функции.

При $k = -1$ получаем функцию $y = \frac{1}{x}$, определённую при $x \neq 0$. Её график изображён на рис. 7 и называется гиперболой.

При целых $k < -1$ можно составить таблицу значений функции $y = x^k$ и схематически изобразить её график. На рис. 8, 9, 10 приведены графики функций $y = x^{-2}$, $y = x^{-3}$, $y = x^{-4}$ соответственно.

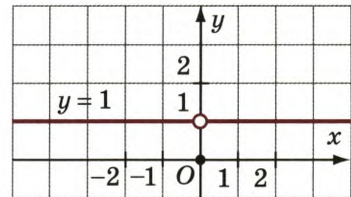


Рис. 6

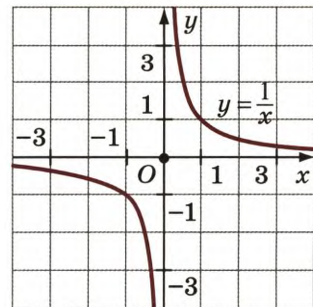


Рис. 7

Функция $y = x^{-n}$ при $n \in \mathbb{N}$ на промежутке $(0; \infty)$ убывает.

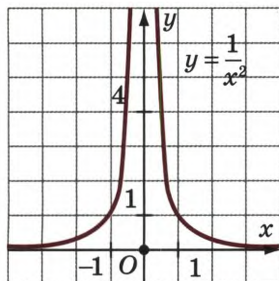


Рис. 8

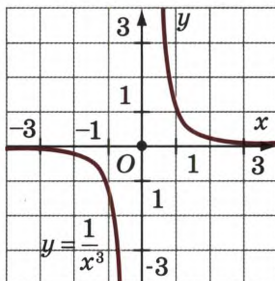


Рис. 9

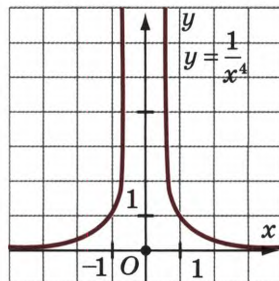


Рис. 10

Вопрос. При каких натуральных значениях n функция $y = x^{-n}$ чётна и при каких n нечётна?

1.7. Непрерывность функций.** При целом значении k функция $y = x^k$ непрерывна в своей области определения. Это означает, что если выбрать любое число x_0 из области определения и рассмотреть произвольную последовательность чисел x_n , приближающихся к x_0 , то значения $y_n = x_n^k$ будут приближаться к значению $y_0 = x_0^k$. С помощью понятия предела такое свойство можно выразить в следующем виде:

$$\text{если } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k = x_0^k = y_0.$$

В общем случае непрерывность определяется следующим образом.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 области определения, если для каждой последовательности x_n из области определения такой, что $x_n \rightarrow x_0$ при $n \rightarrow \infty$, последовательность $y_n = f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$.

Функцию $f(x)$ называют непрерывной в области определения, если она непрерывна в каждой точке области определения.

Непрерывные функции обладают важными свойствами, благодаря которым понятие непрерывности оказывается очень полезным в математике. Например, благодаря непрерывности графики изучавшихся выше функций на промежутках из области определения изображаются неразрывными линиями.

В дальнейшем без доказательства мы будем использовать теорему о промежуточном значении.

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$. Тогда для каждого числа C , заключённого между A и B , на отрезке $[a; b]$ найдётся такое число x_0 , что $f(x_0) = C$.

Вопрос. Как доказать, что прямая $y = 2$ пересекает график функции $y = x^4$ в двух точках?

1.8. Критерий непрерывности.** Для доказательства непрерывности некоторых функций мы будем использовать (без строгого обоснования) следующее утверждение.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a; b]$, монотонна и принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$. Тогда $f(x)$ непрерывна в каждой точке отрезка $[a; b]$.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2$ на отрезке $[0; a]$. На этом отрезке функция $f(x)$ строго возрастает и непрерывна. Поэтому множеством значений $f(x)$ является отрезок $[0; a^2]$. На таком отрезке определена обратная функция $y = \sqrt{x}$. Функция $y = \sqrt{x}$ строго возрастает на отрезке $[0; a^2]$, и множеством её значений является отрезок $[0; a]$. На основании приведённого выше свойства функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна в каждой точке отрезка $[0; a^2]$. Так как число a можно взять произвольным, функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна на луче $[0; \infty)$.

Вопрос. Как доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{7}{n}} = 1$?

1.9. Выпуклость.** Функция $y = f(x)$, определённая и непрерывная на промежутке $(a; b)$, называется *выпуклой вниз* на этом промежутке, если для любых двух точек x_1 и x_2 из промежутка $(a; b)$ выполняется неравенство $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, то есть ордината кривой $y = f(x)$ в середине отрезка $[x_1; x_2]$ не превосходит среднего арифметического ординат в концах этого отрезка.

Вопрос. Как доказать, что функция $y = x^2$ выпукла вниз на промежутке $(-\infty; +\infty)$, а функция $y = x^3$ выпукла вниз на промежутке $(0; \infty)$?

1.10. Арифметический корень. Пусть n — натуральное число. Рассмотрим функцию $y = x^n$ на промежутке $[0; \infty)$. Заметим, что функция $y = x^n$ при $x \geq 0$ строго возрастает и принимает все неотрицательные значения. Поэтому для каждого неотрицательного числа A найдётся такое единственное число $x_0 \geq 0$, для которого $x_0^n = A$. Это позволяет на промежутке $[0; \infty)$ определить функцию $y = \sqrt[n]{x}$, обратную к функции $y = x^n$.

Функция $y = \sqrt[n]{x}$ определена на луче $[0; \infty)$, строго возрастает, и множеством её значений также является луч $[0; \infty)$. Напомним, что при $a \geq 0$ значение $\sqrt[n]{a}$ называется *арифметическим корнем n -й степени из числа a* .

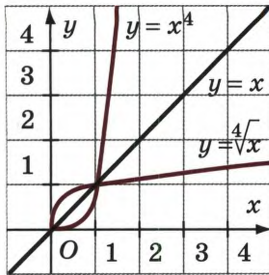


Рис. 11

Из определения арифметического корня вытекает:

1. $\sqrt[n]{a}$ определяется для $a \geq 0$;
2. $\sqrt[n]{0} = 0$;
3. $\sqrt[n]{a} > 0$ при $a > 0$;
4. $(\sqrt[n]{a})^n = a$;
5. $\sqrt[n]{a^n} = a$, если $a \geq 0$.

График функции $y = \sqrt[n]{x}$ симметричен графику функции $y = x^n$ относительно прямой $y = x$. На рис. 11 цветной линией изображён график функции $y = \sqrt[4]{x}$.

Вопрос. Какие значения имеет $\sqrt[8]{x^8}$, если $x < 0$?

1.11. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ при нечётном значении n .** Функция $y = x^{2m-1}$, где $m \in \mathbb{N}$, строго возрастает на всей числовой прямой и непрерывна. Применяя теорему о промежуточном значении, можно показать, что функция $y = x^{2m-1}$ принимает все действительные значения. По свойству из пункта 1.8 на всей числовой прямой определена обратная к данной непрерывная функция. Для этой функции принято обозначение $y = \sqrt[2m-1]{x}$. В соответствии с определением можно написать, например, равенство $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Вопрос. Какой вид имеет график функции $y = \sqrt[3]{x}$, определенной на всей числовой прямой?

1.12. Степень с рациональным показателем. При $a > 0$ и $n \in \mathbb{N}$ по определению выполняется равенство $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Обозначая число $\sqrt[n]{a}$ через $a^{\frac{1}{n}}$, можно записать $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^1 = a$.

Аналогично равенствами $a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ определяется степень положительного числа a с дробным показателем $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число.

Ранее было показано, что степени числа a с равными дробными показателями равны, то есть если $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, то $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$. Но это означает, что для рационального r число a^r определяется однозначно.

Операция возведения в рациональную степень имеет такие же свойства, как и перечисленные в пункте 1.3 свойства степеней с целыми показателями. Напомним ещё раз основные свойства, обозначая буквами a и b

произвольные положительные числа, а буквами r и s — произвольные рациональные числа.

$$1. a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

$$2. (a^r)^s = a^{rs}.$$

$$3. (ab)^r = a^r \cdot b^r.$$

$$4. \left(\frac{a^r}{a^s}\right) = a^{r-s}.$$

$$5. \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

$$6. \text{ Если } a > 1 \text{ и } r > s, \text{ то } a^r > a^s.$$

$$7. \text{ Если } 0 < a < 1 \text{ и } r > s, \text{ то } a^r < a^s.$$

Вопрос. Как доказать, что $\sqrt[5]{a^3b} = \sqrt[15]{a^3b}$?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Как определяется степень с натуральным показателем?
2. Какие свойства степени с натуральным показателем вы знаете?
3. Как определяется степень с целым показателем?
4. Какие свойства степени с целым показателем вы знаете?
5. Какие свойства функции $y = x^n$ при чётном натуральном n вы знаете?
6. Какие свойства функции $y = x^n$ при нечётном натуральном n вы знаете?
7. Какие свойства функции $y = x^{-n}$ при натуральном n вы знаете?
8. ** Как определяется непрерывность функции в точке её области определения?
9. Как определяется арифметический корень n -й степени из неотрицательного числа?
10. Как построить график функции $y = \sqrt[n]{x}$?
11. Как определяется рациональная степень положительного числа?
12. Какие свойства степени с рациональным показателем вы знаете?

Задачи и упражнения ■

1. Вычислите:

$$\text{а) } \frac{(2^5)^3 \cdot 4^5}{8^6}; \quad \text{б) } \frac{81^3}{3^2 \cdot 9^4} \cdot \frac{3^2 \cdot 27^4}{9^3 \cdot 81}; \quad \text{в) } \frac{4^5 \cdot 9^6}{6^9}; \quad \text{г) } \frac{12^9 \cdot 18^7}{36^{11}};$$

$$\text{д) ** } (2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{102}) : (4 \cdot 4^2 \cdot 4^3 \cdot \dots \cdot 4^{72}).$$

2. Какое из чисел больше, 2^{3000} или 3^{2000} ?

3. Постройте график функции:

$$\text{а) } y = \frac{1}{3}x^3; \quad \text{б) } y = \frac{1}{16}x^4; \quad \text{в) } y = \frac{1}{3x^2}; \quad \text{г) } y = \frac{2}{x^4}.$$

4.** Докажите, что при $x > 0$ функция $y = \frac{1}{x}$ выпукла вниз.

5. Запишите в виде степени с рациональным показателем:

- а) $x\sqrt{x\sqrt{x}}$; б) $a^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[4]{a^3}$; в) $m^{\frac{3}{5}} : m^{\frac{5}{7}}$;
 г) $\frac{a^k}{\sqrt{a}}$; д) $\sqrt[4]{x^3} \cdot \sqrt[5]{x^4}$; е) $\left(\sqrt{x^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[3]{x}}\right)^{\frac{3}{4}}$.

6.* Постройте график функции:

- а) $y = 2\sqrt{x}$; б) $y = \sqrt{2x}$; в) $y = \sqrt{x+2}$;
 г) $y = \sqrt{x-1}$; д) $y = \sqrt{-x}$; е) $y = \sqrt{1-x}$;
 ё) $y = \sqrt{1-4x}$; ж) $y = 1 - \sqrt{x-1}$; з) $y = 1 - \sqrt{1-x}$.

7. Без помощи калькулятора сравните два числа и укажите большее из них:

- а) $\sqrt{3}$ и 1,8; б) $\sqrt[3]{2}$ и $1\frac{2}{7}$; в)* $\frac{1}{\sqrt{5}-1}$ и $\frac{3}{4}$;
 г)* $\frac{\sqrt[3]{3}+3}{4}$ и 1,1; д)** $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ и 4; е)** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ и 4.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равно $\sqrt[4]{3\sqrt{16}}$?

- 1) $\sqrt[12]{4}$ 2) $\sqrt[6]{4}$ 3) $\sqrt[6]{8}$ 4) $\sqrt[7]{16}$

1.2. Чему равно произведение $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{25}$?

- 1) $\sqrt[6]{125}$ 2) $\sqrt[4]{125}$ 3) $\sqrt[4]{5^2 \cdot 5^6}$ 4) $\sqrt[6]{5^3 \cdot 5^4}$

1.3. Какому из чисел равно произведение $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$?

- 1) $3^{\frac{1}{6}}$ 2) $3^{\frac{7}{12}}$ 3) $3^{\frac{3}{7}}$ 4) $3^{\frac{11}{12}}$

1.4. Какому из чисел равно произведение $2^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{2}{5}}$?

- 1) $2^{\frac{11}{15}}$ 2) $2^{\frac{3}{8}}$ 3) $2^{\frac{2}{15}}$ 4) $2^{\frac{17}{15}}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из указанных функций являются чётными?

- 1) $y = x^6 - 1$ 2) $y = (x+1)^4$ 3) $y = \frac{1}{x^2} + 1$ 4) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$

2.2. Какие из указанных функций являются нечётными?

- 1) $y = x + 2$ 2) $y = x^3 - x$ 3) $y = \frac{1+x^2}{x^3}$ 4) $y = \frac{x^3}{(x-1)^2}$

2.3. Какие из указанных функций возрастают на каждом из промежутков области определения?

$$1) f(x) = -x^{-2} \quad 2) f(x) = -x^{-3} \quad 3) f(x) = -x^{-4} \quad 4) f(x) = -x^{-5}$$

2.4. Какие из указанных функций убывают на промежутке $(0; \infty)$?

$$1) f(x) = x^{\frac{2}{3}} \quad 2) f(x) = x^{-\frac{2}{3}} \quad 3) f(x) = x^{\frac{4}{3}} \quad 4) f(x) = x^{-\frac{4}{3}}$$

§ 2. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ ■

2.1. Пример степени с действительным показателем. В пункте 1.12 мы напомнили определение степени положительного числа с рациональным показателем. Распространим понятие степени на произвольный действительный показатель так, чтобы сохранились все свойства степени, перечисленные в пункте 1.12.

Для примера возьмём положительное число $a = 2$ и показатель степени $x = \pi$. Десятичными приближениями с недостатком числа π являются члены последовательности $x_0 = 3$; $x_1 = 3,1$; $x_2 = 3,14$; $x_3 = 3,141$; $x_4 = 3,1415$; ...

Составим последовательность чисел вида 2^{x_n} :

$$2^{x_0} = 2^3 = 8 < 2^4 = 16; \quad 2^{x_1} = 2^{3,1} = \sqrt[10]{2^{31}} < 2^4 = 16; \quad 2^{x_2} = 2^{3,14} = \sqrt[100]{2^{314}} < 2^4 = 16;$$

$$2^{x_3} = 2^{3,141} = \sqrt[1000]{2^{3141}} < 2^4 = 16; \quad 2^{x_4} = 2^{3,1415} < 2^4 = 16$$

и так далее. Последовательность действительных чисел $2^{x_0}, 2^{x_1}, 2^{x_2}, \dots$ возрастает и ограничена сверху числом 16. Поэтому существует $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{x_n}$. Этот

предел по определению полагают равным степени числа 2 с показателем π и обозначают символом 2^π .

Вопрос. Пусть x'_n — последовательность десятичных приближений числа π с избытком. Как ведёт себя последовательность $2^{x'_n}$?

2.2. Степень числа 2 с действительным показателем. Аналогично тому, как для числа π было определено число 2^π , для каждого действительного x можно определить число 2^x .

Пусть (x_n) — последовательность десятичных приближений с недостатком действительного числа x . Тогда предел возрастающей и ограниченной сверху последовательности (2^{x_n}) называется степенью числа 2 с показателем x и обозначается через 2^x .

В результате каждому действительному x можно сопоставить число 2^x . Тем самым определена *показательная функция* $y = 2^x$ с основанием 2. Функция $y = 2^x$ строго возрастает на всей числовой прямой и принимает все

положительные значения. Доказательство этого утверждения непростое, и мы не будем его приводить. График функции $y = 2^x$ изображён на рис. 1.

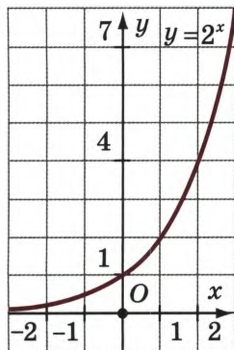


Рис. 1

Вопрос. Как доказать, что $2^{-x} = \frac{1}{2^x}$?

2.3. Непрерывность функции $y = 2^x$.** Определённая в предыдущем пункте функция $y = 2^x$ непрерывна на всей числовой прямой. Это означает, что для каждого числа b и для всякой последовательности (a_n) такой, что $a_n \rightarrow b$ при $n \rightarrow \infty$, имеет место равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{a_n} = 2^b$.

В общем случае доказательство непрерывности функции $y = 2^x$ сложно и рассматривается в курсах математического анализа. Тем не менее докажем одно важное, но частное утверждение.

Пусть $b = 0$ и $a_n = \frac{1}{n}$. Тогда, с одной стороны, $2^{\frac{1}{n}} > 2^0 = 1$ при любом n . С другой стороны, если обозначить $2^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha_n$, то тогда из неравенства Бернулли следует, что $2 = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n$, $\alpha_n = 2^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{1}{n}$. Следовательно, $1 < 2^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n}$ при всех натуральных n . Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, по теореме о пределе промежуточной последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$.

Вопрос. Как, используя непрерывность функции $y = 2^x$, доказать, что $2^x \cdot 2^y = 2^{x+y}$?

2.4. Степень числа $\frac{1}{3}$ с действительным показателем. При $a = 2$ мы определили показательную функцию $y = a^x$. Возьмём теперь $a = \frac{1}{3}$. Для произвольного числа x последовательность (x_n) его десятичных приближений с недостатком возрастает. Но так как $\frac{1}{3} < 1$, последовательность $\left(\frac{1}{3}\right)^{x_1}, \left(\frac{1}{3}\right)^{x_2}, \dots$ убывает, причём все члены этой последовательности положительны. Следовательно, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{x_n}$. Этот предел называется степенью числа $a = \frac{1}{3}$ с показателем x и обозначается $\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

В результате каждому действительному числу x можно сопоставить число $\left(\frac{1}{3}\right)^x$. Тем самым определена *показательная функция* $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ с основанием $\frac{1}{3}$. Оказывается, что, в отличие от функции $y = 2^x$, функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ строго убывает на всей числовой прямой.

График функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ изображён на рис. 2.

Вопрос. Как доказать, что $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{3^x}$?

2.5. Степень числа 1. При $a = 1$ для произвольного числа x также можно рассмотреть последовательность (x_n) его десятичных приближений с недостатком. Последовательность $1^{x_1}, 1^{x_2}, 1^{x_3}, \dots$ состоит из одних единиц и $\lim_{n \rightarrow \infty} 1^{x_n} = 1$. Поэтому полагают $1^x = 1$ при любом действительном x . Графиком функции $y = 1^x$ является горизонтальная прямая, проходящая через точку $(0; 1)$.

Функция $y = 1^x$ не является ни строго возрастающей, ни строго убывающей. Поэтому функцию $y = 1^x$ не считают показательной функцией.

Вопрос. Какое название можно дать функции $y = 1^x$?

2.6. Свойства степеней. Аналогично тому, как определялись степени чисел 2 и $\frac{1}{3}$, для каждого положительного a и произвольного действительного x можно определить число a^x . При этом для всех действительных чисел x и y выполняются следующие основные свойства.

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
2. $(a^x)^y = a^{xy}$.
3. $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.
4. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.
6. Если $a > 1$ и $x > y$, то $a^x > a^y$.
7. Если $0 < a < 1$ и $x > y$, то $a^x < a^y$.

Вопрос. Как доказать, что число $2^{\sqrt{5}}$ больше 4?

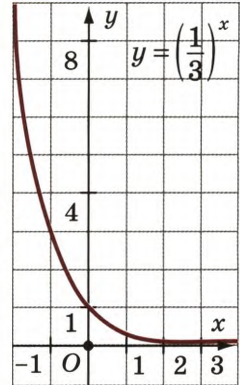


Рис. 2

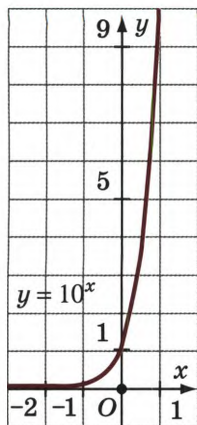


Рис. 3

2.7. Показательная функция. Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$. Функция $y = a^x$, определённая на всей числовой прямой, называется *показательной функцией* с основанием a .

При любом $a > 0$, $a \neq 1$ показательная функция $y = a^x$ принимает все положительные значения.

При $a > 1$ функция $y = a^x$ строго возрастает; при $0 < a < 1$ функция $y = a^x$ строго убывает.

На рис. 3, 4, 5, 6 изображены соответственно графики функций $y = 10^x$, $y = (1,5)^x$, $y = (0,6)^x$, $y = (0,2)^x$.

Вопрос. Как из графика функции $y = 2^x$ получить график функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$?

2.8. Уравнения вида $a^x = b$. При $a > 0$ и $a \neq 1$ функция $y = a^x$ строго монотонна. Поэтому для каждого положительного числа b найдётся единственное число x такое, что $a^x = b$. Другими словами, уравнение $a^x = b$ при $a > 0$, $a \neq 1$ и $b > 0$ имеет единственный корень.

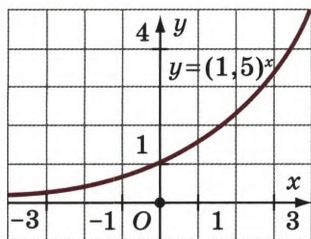


Рис. 4

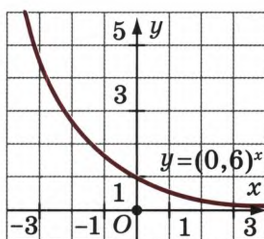


Рис. 5

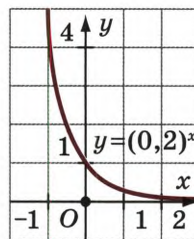


Рис. 6

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение $4^x = 64$.

Вычисляя натуральные степени числа 4, находим $4^3 = 64$. Поэтому $x = 3$ — единственный корень данного уравнения.

Ответ: 3.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[3]{3^x} = \sqrt{9}$.

Имеем $\sqrt[3]{3^x} = (3^x)^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{x}{3}}$, $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^1$. Поэтому уравнение можно переписать в виде $3^{\frac{x}{3}} = 3^1$, откуда в силу монотонности показательной функции $\frac{x}{3} = 1$, $x = 3$.

Ответ: 3.

Пример 3. Решить уравнение $8^{\sqrt{2x+1}} = 32 \cdot 2^{\sqrt{2x+1}}$.

Положим $\sqrt{2x+1} = z$. Тогда $8^z = (2^3)^z = 2^{3z}$, $32 \cdot 2^z = 2^5 \cdot 2^z = 2^{5+z}$. Поэтому уравнение можно записать в виде $2^{3z} = 2^{5+z}$, откуда $3z = 5 + z$, $2z = 5$, $z = \frac{5}{2}$. Из уравнения $\sqrt{2x+1} = \frac{5}{2}$ получим $2x+1 = \frac{25}{4}$, $2x = \frac{21}{4}$, $x = \frac{21}{8}$.

Ответ: $\frac{21}{8}$.

Вопрос. Каково множество решений уравнения $a^x = b$ при $a = 1$?

2.9. Решение простейших показательных неравенств. Показательная функция $y = a^x$ при $a > 1$ строго возрастает, при $0 < a < 1$ строго убывает. Это свойство позволяет находить все решения неравенств вида $a^x \geq m$, $a^x > m$, $a^x \leq m$, $a^x < m$.

Пример 4. Решить неравенство $3^x > 9$.

Перепишем неравенство в виде $3^x > 3^2$. Так как $3 > 1$, в силу строгого возрастания показательной функции с основанием 3 при $x > 2$ выполняется неравенство $3^x > 3^2$; при $x = 2$ выполняется равенство $3^x = 3^2$; при $x < 2$ выполняется неравенство $3^x < 3^2$. Таким образом, множеством решений данного неравенства является интервал $(2; \infty)$.

Ответ: $(2; \infty)$.

Пример 5. Решить неравенство $10^x \leq 0,1$.

Имеем $0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}$. Поэтому неравенство можно переписать в виде $10^x \leq 10^{-1}$. Так как $10 > 1$, отсюда получим, что $x \leq -1$, и множеством решений данного неравенства является луч $(-\infty; -1]$.

Ответ: $(-\infty; -1]$.

Пример 6. Решить неравенство $(0,2)^x \geq \frac{1}{5}$.

Имеем $0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. Поэтому неравенство можно переписать в виде $\left(\frac{1}{5}\right)^x \geq \left(\frac{1}{5}\right)^1$. Так как $\frac{1}{5} < 1$, в силу строгого убывания показательной функции с основанием $\frac{1}{5}$ получим $x \leq 1$, и множеством решений данного неравенства является луч $(-\infty; 1]$.

Ответ: $(-\infty; 1]$.

Вопрос. Какие решения имеет неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq -27$?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Сформулируйте теорему о пределе монотонной и ограниченной последовательности.

2. Как определяется число, равное $2^{\sqrt{2}}$?
3. Какой вид имеет график функции $y = 2^x$?
4. Какой вид имеет график функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^z$?
- 5.* Какое неравенство называют неравенством Бернулли?
6. Сформулируйте основные свойства степени с действительным показателем.
7. Какая функция называется показательной?

■ Задачи и упражнения

1. Постройте график функции:

- а) $y = 4^x$; б) $y = 2^{-x}$; в) $y = (\sqrt{3})^x$; г) $y = \frac{1}{(\sqrt{2})^x}$;
 д) $y = 2^{2x}$; е) $y = 3^{-2x}$; ё) $y = 2^{x+1}$; ж) $y = 3^{x-1}$;
 з) $y = 2^{1-x}$; и) $y = 3^{1-2x}$.

2. Решите уравнение:

- а) $3^x = 27$; б) $2^x = \frac{1}{16}$; в) $5^x = 625$; г) $7^x = \frac{1}{343}$.

3. Решите уравнение:

- а) $8^x = 16$; б) $7 \cdot 49^x = 1$; в) $25^x = \sqrt{5}$; г) $(2\sqrt{2})^x = 64$.

4. Решите уравнение:

- а) $2^x + 2^{x+1} = 768$; б) $3^x - 3^{x-1} = 54$;
 в) $4^{x-1} + 2^{2x+1} = 18$; г) $100^{x-2} - 10^{2x-5} = 9$.

5.* Решите уравнение:

- а) $49^{x^2-4x+2} = \sqrt{7}$; б) $27^{3x^2+6x-2} = 9$;
 в) $5^{2x^2-4x+3} = 5\sqrt{5}$; г) $4^{x^2+x+1} = 2\sqrt{2}$.

6.* Решите уравнение:

- а) $4^{2x} = 2^{x-1}$; б) $5^x = 25^{x+2}$;
 в) $36^{x-1} = 2^{x+1} \cdot 3^{x+1}$; г) $14^{4x+3} = 16^{x-1} \cdot 49^{2x-2}$.

7. Решите неравенство:

- а) $4^x > 2$; б) $3 \cdot 3^x \leq 1$; в) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2x} \geq 4$; г) $25^{3x} < 125$;
 д) $\frac{1}{3} \cdot 6^x \geq 2$; е) $\left(\frac{1}{9}\right)^x < \sqrt{3}$; ё) $4^x > 2\sqrt{2}$; ж) $(0,1)^x > 10$.

8. Решите неравенство:

- а) $2 \cdot 5^x > 5 \cdot 2^x$; б) $\frac{2}{3^x} \leq \frac{3}{2^x}$; в) $4^{x-1} > 8^{x-2}$;

$$\begin{array}{lll} \text{г)} (0,2)^x < (0,04)^x; & \text{д)} \frac{1}{6} \cdot 9^{x+1} \geq \frac{1}{2} \cdot 3^{x-1}; & \text{е)} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^x \leq 9; \\ \text{ё)} (\sqrt[3]{2})^{x-3} > (\sqrt{2})^{x-2}; & \text{ж)} \frac{1}{4^{x+1}} < \frac{1}{8^{x-1}}. \end{array}$$

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какое из указанных чисел является корнем уравнения $(\sqrt{3})^{x+1} = (\sqrt[3]{3})^{x+1} \cdot (\sqrt[4]{3})^{x-1}$?

- 1) 3 2) 4 3) 5 4) 6

1.2. Какой из предложенных функций соответствует график, указанный на рис. 7?

1) $y = 2x$ 2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 3) $y = 2x - 1$ 4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$

1.3.* Сколько корней имеет уравнение $2^x + 3^x + 4^x = 5$?

- 1) нет корней 2) один корень
3) два корня 4) больше двух корней

1.4. Какое из указанных множеств является множеством решений неравенства $2^x \leq 4^{x+1}$?

- 1) $(-\infty; 2)$ 2) $[-2; \infty)$ 3) $(-\infty; -2]$ 4) $(-2; \infty)$

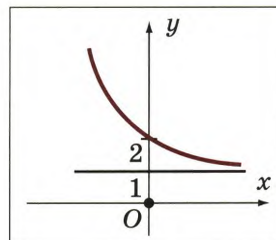


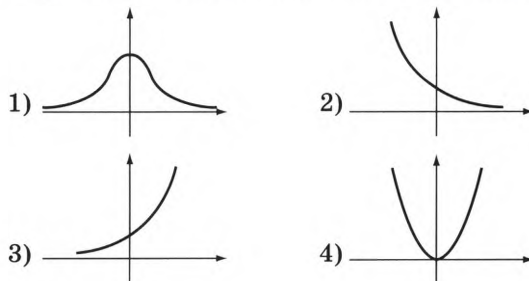
Рис. 7

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из указанных функций убывают?

1) $f(x) = 2^{2+x}$ 2) $f(x) = 2^{2x}$ 3) $f(x) = 3^{2-x}$ 4) $f(x) = 3^{-2x}$

2.2.** На каких рисунках изображён эскиз графика функции вида $y = A \cdot 2^{-x^2}$, где A — произвольное положительное число?



2.3.* Какие из указанных функций являются строго убывающими?

1) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 2) $f(x) = 2^{\frac{x}{2}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x}{3}}$

$$3) f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$$

$$4) f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$$

2.4. Выберите корни уравнения $4^x \cdot \sqrt{2}^{x^2-1} = 1$.

$$1) 1 + \sqrt{7}$$

$$2) \sqrt{5} - 2$$

$$3) 1 - \sqrt{7}$$

$$4) -(2 + \sqrt{5})$$

■ § 3. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

3.1. Логарифмы. Показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, принимает все положительные значения и строго монотонна. Это означает, что для каждого положительного числа b найдётся единственное число z , для которого $a^z = b$.

Например, пусть $a = 100$ и $b = 1000$. Тогда $b = 10^3 = 10^{2 \cdot \frac{3}{2}} = (100)^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$. Поэтому в данном примере при $z = \frac{3}{2}$ имеем $a^z = b$.

В общем случае для показателя степени, в которую нужно возвести данное число a , чтобы получилось число b , вводится название *логарифм*.

Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0$ и $a \neq 1$, называется такое число z , что $a^z = b$.

Логарифм числа b по основанию a обозначают через $\log_a b$. Например, $\log_{100} 1000 = \frac{3}{2}$.

Вопрос. Как найти $\log_2 65536$?

3.2.* Примеры логарифмов. Значение логарифма может быть рациональным. Например, $\log_2 8\sqrt{2} = \log_2 2^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2}$. Однако во многих случаях логарифм числа по заданному основанию является иррациональным числом.

Пример 1. Докажем, что число $\log_{10} 2$ иррационально.

Пусть $\log_{10} 2 = \frac{p}{q}$, где p и q — целые числа, причём $q > 0$. Тогда имеет место равенство $10^{\frac{p}{q}} = 2$, откуда $10^p = 2^q$. Так как $q > 0$, то $2^q > 1$, а поэтому $p > 0$. Отсюда получаем, что 10^p и 2^q — это натуральные степени чисел 10 и 2. В десятичной записи каждое число вида 10^p оканчивается цифрой 0. Но число вида 2^q может оканчиваться только одной из цифр: 2, 4, 6, 8. Поэтому равенство $10^p = 2^q$ при натуральных p и q невозможно.

Таким образом, предположение о том, что число $\log_{10} 2$ рационально, приводит к противоречию. Поэтому число $\log_{10} 2$ иррационально.

Вопрос. Как доказать, что число $\log_2 3$ иррационально?

3.3. Логарифмическая функция. Пусть число $a > 0$ и $a \neq 1$. Тогда для каждого числа $x > 0$ существует $\log_a x$. Тем самым на множестве положительных чисел определена логарифмическая функция $y = \log_a x$. Эта функция является обратной к функции a^x , то есть

$$y = a^x \text{ в том и только в том случае, когда } x = \log_a y, \text{ где } y > 0.$$

График функции $y = \log_a x$ симметричен графику функции $y = a^x$ относительно прямой $y = x$. На рис. 1—4 цветной линией изображены соответственно графики функций $y = \log_2 x$, $y = \log_{10} x$, $y = \log_{\frac{1}{3}} x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

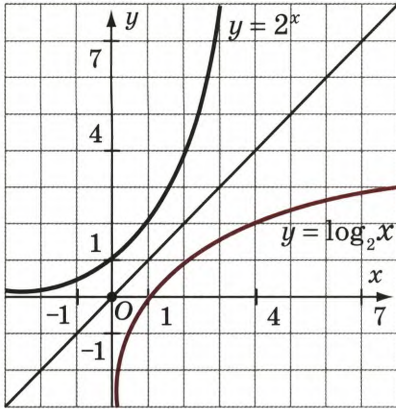


Рис. 1

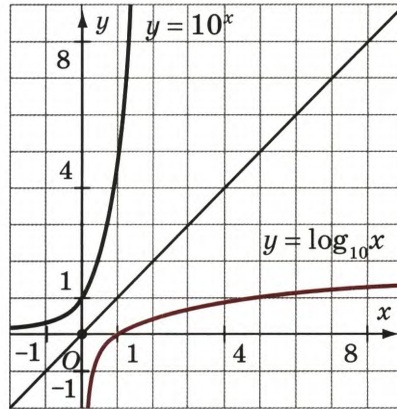


Рис. 2

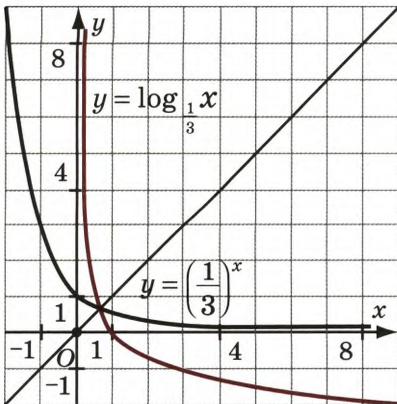


Рис. 3

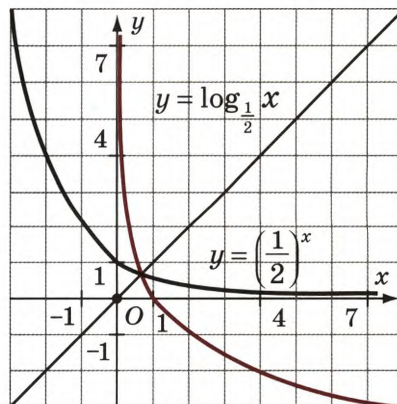


Рис. 4

Обратная к возрастающей функции — также возрастающая функция, поэтому при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ возрастает (рис. 1 и 2).

Обратная к убывающей функции — убывающая функция. Поэтому при $0 < a < 1$ функция $y = \log_a x$ убывает (рис. 3 и 4).

Вопрос. Какой вид имеет график функции $y = \log_{\sqrt{2}}(-x)$?

3.4. Монотонность логарифмической функции.** Монотонность логарифмических функций можно доказать, исходя из свойств показательных функций.

Первый случай. Пусть $a > 1$. Возьмём произвольные числа $0 < x_1 < x_2$. Положим $u = \log_a x_1$, $v = \log_a x_2$. Тогда $x_1 = a^u$, $x_2 = a^v$ и $a^u < a^v$ по условию. Так как показательная функция с основанием, большим 1, строго возрастает, из неравенства $a^u < a^v$ следует неравенство $u < v$, то есть

$$\log_a x_1 < \log_a x_2.$$

Второй случай. Пусть $0 < a < 1$. Возьмём произвольные числа $0 < x_1 < x_2$. Положим $u = \log_a x_1$, $v = \log_a x_2$. Тогда $x_1 = a^u$, $x_2 = a^v$ и $a^u < a^v$. Но так как показательная функция с основанием, меньшим 1, строго убывает, в этом случае из неравенства $a^u < a^v$ следует неравенство $u > v$, то есть

$$\log_a x_1 > \log_a x_2.$$

Вопрос. Как доказать, что логарифмическая функция непрерывна в своей области определения?

3.5. Основные логарифмические тождества. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Функции a^x и $\log_a x$ являются взаимно обратными друг к другу. Следовательно, если для произвольного числа x соответствующее ему число y равно a^x , то $\log_a y = \log_a a^x = x$. Отсюда получаем *первое основное логарифмическое тождество*:

$$\log_a a^x = x \text{ при всех } x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Аналогично, если для произвольного положительного x число y равно $\log_a x$, то $a^y = a^{\log_a x} = x$. Отсюда получаем *второе основное логарифмическое тождество*:

$$a^{\log_a x} = x \text{ при всех } x > 0. \quad (2)$$

Рассмотрим примеры применения этих логарифмических тождеств.

Пример 2. $\log_4 2^x = \log_4 (\sqrt{4})^x = \log_4 4^{\frac{x}{2}} = \frac{x}{2}.$

Пример 3. $3_{\log_9 x} = (\sqrt{9})^{\log_9 x} = 9^{\frac{1}{2} \log_9 x} = (9^{\log_9 x})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}.$

Вопрос. Как упростить выражение $\log_2 (\log_4 8^x)$?

3.6. Сумма логарифмов. Свойства показательной функции позволяют получить несколько важных логарифмических формул. В этом пункте рассмотрим следующую формулу.

$$\log_a x + \log_a y = \log_a xy \text{ при всех } x > 0, y > 0. \quad (3)$$

Это свойство можно сформулировать также в следующем виде.

Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей.

Доказательство. Пусть $u = \log_a x$, $v = \log_a y$. Тогда из равенств $x = a^u$, $y = a^v$ получаем, что $xy = a^u \cdot a^v = a^{u+v}$. Отсюда по формуле (1) из пункта 3.5 имеем $\log_a xy = \log_a a^{u+v} = u + v = \log_a x + \log_a y$.

Пример 4. Доказать, что $\log_2(x^2 - 1) - \log_2(x - 1) = \log_2(x + 1)$ при $x > 1$.

При $x > 1$ числа $x - 1$ и $x + 1$ положительны, поэтому $\log_2(x^2 - 1) - \log_2(x - 1) = \log_2(x - 1)(x + 1) - \log_2(x - 1) = \log_2(x + 1) + \log_2(x - 1) - \log_2(x - 1) = \log_2(x + 1)$.

Вопрос. Чему равна сумма $\log_2 0,2 + \log_2 5$?

3.7. Разность логарифмов. Для логарифма частного справедлива формула, аналогичная формуле (3).

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y \text{ при всех } x > 0, y > 0. \quad (4)$$

Это свойство можно сформулировать также в следующем виде.

Логарифм частного двух положительных чисел равен разности между логарифмом делителя и логарифмом делимого.

Вопрос. Как доказать формулу (4)?

3.8. Логарифм степени. Для логарифма степени имеется следующая формула.

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \text{ при всех } x > 0 \text{ и произвольных } \alpha. \quad (5)$$

Это свойство можно кратко сформулировать в таком виде.

Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания степени.

Доказательство. Пусть $u = \log_a x$. Тогда $x = a^u$, откуда $x^\alpha = (a^u)^\alpha = a^{u\alpha}$. Поэтому $\log_a x^\alpha = \log_a a^{u\alpha} = u\alpha = \alpha u = \alpha \log_a x$, что и требовалось доказать.

Пример 5. $\log_a x^2 \sqrt{x} = \log_a x^{2+\frac{1}{2}} = \log_a x^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2} \log_a x$.

Вопрос. Как доказать, что $\log_a \frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{2} \log_a x$?

3.9.* Условия применимости логарифмических формул. В частном случае при $\alpha = 2$ формула (5) имеет вид $\log_a x^2 = 2 \log_a x$. Заметим, что область определения левой части и область определения правой части этого равенства различны. Данное равенство справедливо только при $x > 0$. Если рассмотреть только левую часть равенства, то получим выражение $\log_a x^2$, которое определено при всех $x \neq 0$. Поэтому применение формулы (5) изменяет область определения выражения $\log_a x^2$, что может приводить к ошибкам при решении задач. В данном случае правильное

преобразование левой части формулы (5) возможно с использованием равенства $x^2 = |x|^2$. Тогда $\log_a x^2 = \log_a |x|^2 = 2\log_a |x|$. При таком преобразовании получаем тождественное равенство во всей области определения левой части.

Вопрос. Как найти все решения уравнения $\log_2 x^2 = 4$?

3.10. Формула перехода к новому основанию логарифмов.

В этом пункте рассмотрим важную *формулу перехода к новому основанию логарифмов*:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{ при всех } a > 0, b > 0, x > 0, a \neq 1, b \neq 1. \quad (6)$$

Доказательство. Положим $u = \log_a x$. Тогда $x = a^u$. Логарифмируя по основанию b обе части этого равенства, получаем $\log_b x = \log_b a^u = u \cdot \log_b a = \log_a x \cdot \log_b a$. Разделив обе части на ненулевое число $\log_b a$, придём к искомой формуле (6).

Пример 6. $\log_3 5 = \frac{\log_5 5}{\log_5 3} = \frac{1}{\log_5 3}.$

Пример 7.

$$\log_{4x} 8\sqrt{x} = \frac{\log_2 (8\sqrt{x})}{\log_2 (4x)} = \frac{\log_2 8 + \log_2 \sqrt{x}}{\log_2 4 + \log_2 x} = \frac{3 + \frac{1}{2} \log_2 x}{2 + \log_2 x} = \frac{6 + \log_2 x}{2(2 + \log_2 x)}.$$

Полученное в этом примере равенство выполняется на всей области определения, то есть при $x > 0$ и $4x \neq 1$.

Вопрос. Как доказать, что $\log_{a^3} x = \frac{1}{3} \log_a x$?

3.11. Десятичные логарифмы. Исторически логарифмы появились как удобное средство для приближённого выполнения трудоёмких операций умножения и возведения в степень. Для этих целей часто применялись логарифмы с основанием $a = 10$. Логарифмы по основанию 10 называются *десятичными логарифмами* и вместо $\log_{10} x$ пишут $\lg x$.

Для вычислений составлялись четырёхзначные, пятизначные, восьмизначные таблицы десятичных логарифмов и с помощью таких таблиц производились приближённые расчёты. С развитием вычислительной техники роль логарифмических таблиц в вычислениях заметно снизилась. Поэтому мы ограничимся лишь одним примером.

Пример 8. Найдём количество цифр в десятичной записи числа 2^{100} , зная, что $\lg 2$ равен 0,3010 с точностью до 10^{-4} .

Заметим, что $\lg 2^{100} = 100 \cdot \lg 2 < 100 \cdot 0,3010 = 30,10$ с точностью до 10^{-2} . Поэтому $30 < \lg 2^{100} < 31$. Отсюда $10^{30} < 2^{100} < 10^{31}$. Следовательно, число 2^{100} содержит 31 цифру в своей десятичной записи.

Вопрос. Как выразить $\log_2 3$ через десятичные логарифмы?

3.12. Примеры логарифмических уравнений и неравенств.

В заключение параграфа приведём основные свойства логарифмов и рассмотрим несколько примеров простейших логарифмических и показательных уравнений и неравенств.

1. $\log_a a^x = x$ при всех $x \in R$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

2. $a^{\log_a x} = x$ при $x > 0$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

3. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, если $x > 0$, $y > 0$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

4. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$, если $x > 0$, $y > 0$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

5. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$ при $x > 0$ и произвольном α ($a > 0$, $a \neq 1$).

6. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $a \neq 1$, $c \neq 1$).

7. При $a > 1$ неравенство $x > y > 0$ равносильно неравенству $\log_a x > \log_a y$.

8. При $0 < a < 1$ неравенство $x > y > 0$ равносильно неравенству $\log_a x < \log_a y$.

Пример 9. Решить уравнение $2^x = 15$.

Нужно найти показатель степени, в которую следует возвести число 2, чтобы получилось 15. По определению логарифма имеем $x = \log_2 15$.

Ответ: $\log_2 15$.

Пример 10. Решить уравнение $(0,2)^x = 10$.

По определению логарифма $x = \log_{0,2} 10$. Преобразуем ответ:

$$x = \log_{\frac{1}{5}} 10 = \log_{5^{-1}} 10 = -\log_5 10 = -(1 + \log_5 2).$$

Ответ: $-(1 + \log_5 2)$.

Пример 11. Решить уравнение $\log_5 x = -2$.

Так как $-2 = \log_5 5^{-2}$, то $\log_5 x = \log_5 5^{-2}$. Отсюда $x = 5^{-2} = \frac{1}{25}$.

Ответ: $\frac{1}{25}$.

Пример 12. Решить уравнение $\log_2 (5 - 2x) = 1$.

Так как $1 = \log_2 2$, данное уравнение принимает вид $\log_2 (5 - 2x) = \log_2 2$ и равносильно уравнению $5 - 2x = 2$, откуда $2x = 3$, $x = \frac{3}{2}$.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Пример 13. Решить неравенство $\log_3 x > 2$.

Левая часть неравенства определена при $x > 0$. Далее, $2 = \log_3 9$, поэтому наше неравенство можно переписать в виде $\log_3 x > \log_3 9$. Так как основание 3 больше 1, логарифмическая функция $y = \log_3 x$ монотонно возрастает. Отсюда следует, что неравенство верно для $x > 9$. Все такие

значения x входят в область определения. Значит, множеством решений неравенства является числовой луч $(9; \infty)$.

Пример 14. Решить неравенство $\log_5 x \leq \frac{1}{10}$.

Левая часть неравенства определена при $x > 0$. Перепишем неравенство в виде $\log_5 x \leq \log_5 5^{\frac{1}{10}}$. Так как основание 5 больше единицы, $x \leq 5^{\frac{1}{10}}$. При этом x должен быть положительным. Значит, множество решений неравенства имеет вид $(0; 5^{\frac{1}{10}}]$. Найденные решения можно записать также в виде $0 < x \leq \sqrt[10]{5}$.

Ответ: $(0; \sqrt[10]{5}]$.

Пример 15. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{5}} x \leq \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25}$.

Заметим, что основание $\frac{1}{5}$ логарифмической функции меньше 1. Логарифмическая функция с таким основанием строго убывает. Значит, данное неравенство будет верным, если $x \geq \frac{1}{25}$. Все такие значения входят в область определения. Следовательно, множество решений — луч $[\frac{1}{25}; \infty)$.

Ответ: $[\frac{1}{25}; \infty)$.

Пример 16. Решить неравенство $3^x < 5$.

Перепишем неравенство в виде $3^x < 3^{\log_3 5}$. Так как основание 3 показательной функции больше 1, она монотонно возрастает, откуда $x < \log_3 5$.

Ответ: $(-\infty; \log_3 5)$.

Вопрос. Какие решения имеет неравенство $(\log_3 x)^2 > 1$?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется логарифм числа по заданному основанию?
2. * Докажите иррациональность числа $\log_2 3$.
3. Как определяется логарифмическая функция?
4. Какие свойства функции $y = \log_a x$ при $a > 1$ вы знаете?
5. Какие свойства функции $y = \log_a x$ при $0 < a < 1$ вы знаете?
6. * Какими условиями задаётся область определения функции, значения которой вычисляются по формуле $y = \log_a f(x)$?
7. К каким тождествам приводит условие взаимной обратности функций a^x и $\log_a x$?
8. Чему равен логарифм произведения двух положительных чисел?
9. Чему равен логарифм отношения двух положительных чисел?
10. Чему равен логарифм степени положительного числа?

11. Запишите формулу перехода к новому основанию логарифмов.

12. Как обозначаются десятичные логарифмы?

Задачи и упражнения ■

1. Постройте график функции:

а) $y = \log_{\sqrt{2}} x$; б) $y = \log_{\sqrt{3}} x$; в) $y = -\log_3 x$;
 г) $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; д)* $y = \frac{1}{\log_2 x}$; е)** $y = \log_x 2$.

2. Найдите область определения функции:

а) $y = \log_{2x}(3x)$; б) $y = \log_{x^2}(\sqrt{x})$; в) $y = \log_{x^2}(2x^4)$;
 г) $y = \log_{x-1}(x-2)$; д) $y = \log_{x+1}(2x+1)$; е)* $y = \log_{x^2+x}(x^2-x)$.

3. Постройте график функции:

а) $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x)$; б) $y = \log_3\left(\frac{x}{3}\right)$; в) $y = \log_4 \sqrt{x}$;
 г) $y = \log_{\sqrt{0,16}}\left(\frac{x}{10}\right)$; д)** $y = \log_{x^3}(x^2)$.

4. Упростите выражение:

а) $\log_9(3^x)$; б) $\log_{\frac{1}{10}}(100^x)$; в) $\log_2 4^x + \log_4 2^x$;
 г) $\log_3 9^x + \log_{\frac{1}{3}} 9^x$; д) $\log_{\sqrt{2}} 4^x - \log_4 (\sqrt{2})^x$; е) $\log_2 (\log_2 \sqrt[4]{2})$;
 ё) $\log_3 (\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}})$.

5. Упростите выражение:

а) $5^{\log_5 x}$; б) $(\sqrt{3})^{\log_3 x}$; в) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\log_3 x^2}$; г) $4^{2\log_2 x}$;
 д) $6^{\log_{\sqrt{6}} x}$; е)** $a^{\log_{a^2} x}$.

6. Упростите выражение:

а) $\log_3 \frac{x-1}{x-2} + \log_3 \frac{x-2}{x-3} - \log_3 (x-3)$ при $x > 3$;
 б) $\log_4 (x^2 - 4) + \log_4 (x^2 + 2x + 4) - \log_4 (x^3 - 8)$ при $x > 2$;
 в) $\log_3 \sqrt{x-1} + \log_3 \sqrt{x+1} - \log_3 (x^2 - 1)$ при $x > 1$;
 г)** $\log_2 (x^2 + x + 1) - \log_2 (x^4 + x^2 + 1)$ при всех x .

7. Известно, что $\log_{10} 2$ приближённо равен 0,3010. Найдите приближённое значение: а) $\log_{10} 5$; б) $\log_{10} 20$; в) $\log_{10} 160$.

8. Выразите через $a = \log_2 3$ и $b = \log_2 5$ число:

а) $\log_4 45$; б) $\log_{\sqrt{2}} 75$; в) $\log_6 15$; г) $\log_6 30$;
 д) $\log_{18} 100$; е) $\log_{80} 60$; ё) $\log_{75} 432$.

9. Докажите, что $\log_{ab} c = \frac{\log_a c \cdot \log_b c}{\log_a c + \log_b c}$.

10.* Упростите выражение $\log_{a+b} m + \log_{a-b} m - 2\log_{a+b} m \cdot \log_{a-b} m$, если известно, что $m^2 = a^2 - b^2$.

11. Докажите, что $\frac{\log_a x}{\log_{ab} x} = 1 + \log_a b$. При каких значениях a, b, x обе части этого равенства определены?

12. Упростите выражение:

а) $(\log_a b + \log_b a + 2) \cdot (\log_a b - \log_{ab} b) \cdot \log_b a - 1$;

б)* $\lg(x+2y) - \frac{1}{2}\lg x - \frac{1}{2}\lg y$ при условии $x > 0, y > 0$ и $x^2 + 4y^2 = 12xy$;

в) $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \dots \cdot \log_{99} 100$;

г)** $\sqrt{\log_m n + \log_n m + 2} \cdot (\log_m n - \log_{mn} n)^4 \sqrt{(\log_m n)^2}$ при условии $m > 1, n > 1$.

13. Решите уравнение:

а) $\log_4(2-x) = \frac{1}{2}$; б) $\log_3(2x+1) = 3$; в) $\log_{\frac{1}{5}}(x+4) = 2$;

г) $\log_2(1-x) = \frac{1}{2}$; д) $3\log_8(5x-1) = 1$; е) $\log_4(2x+3) = \log_2 5$.

14. Решите уравнение:

а) $3^x = 8$; б) $5^x = 2\sqrt{2}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 7$; г) $(\sqrt{3})^x = 25$;

д)* $2^x = 1 + \sqrt{2}$; е) $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; ё) $\frac{1}{4^x} = 3\sqrt{2}$.

15. Решите неравенство:

а) $\log_2 x \geq \frac{1}{2}$; б) $\log_{0,1} x < 3$; в) $\log_4 x \leq 2$;

г) $\log_{\frac{1}{5}} x > 0$; д) $\log_9 x \leq \frac{1}{2}$; е)* $\log_{\sqrt{2}-1} x \geq 1$.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равен $\log_2(\sqrt[3]{16} \cdot 4^5)$?

- 1) 11,3 2) $\frac{34}{3}$ 3) 6 4) 10

1.2.* Какова область определения функции $\log_x(2-x)$?

- 1) $[0; \infty)$ 2) $[0; 2]$ 3) $(0; 1) \cup (1; 2)$ 4) $(0; 2)$

1.3. Какому из указанных выражений равно выражение $2^{\log_2(\log_4 8^x)}$?

- 1) 2^x 2) $\frac{2}{3}x$ 3) $2^{\frac{3}{2}x}$ 4) $\frac{3}{2}x$

1.4. Какому из указанных выражений равняется произведение $\log_{2+x^2}(x^2-1) \cdot \log_2(x^2+2)$?

- 1) $\log_{x^2-1} 2$ 2) $\log_2(x^2-1)$ 3) $\frac{2(x^2-1)}{x^2+2}$ 4) $\frac{x^2+2}{2(x^2-1)}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из указанных выражений равны 2?

- 1) $\log_{10} 2^{10}$ 2) $9^{\log_3 4}$ 3) $3^{\log_9 4}$ 4) $\log_9 3^4$

2.2. Выберите выражения, равные $a^{\log_{a^2} x}$.

- 1) \sqrt{x} 2) $\frac{x}{2}$ 3) $a^{2\log_a x}$ 4) $\sqrt{a^{\log_a x}}$

2.3. Значения каких выражений равны $\log_2 7$?

- 1) $\log_2 3 + \log_2 4$ 2) $\log_2 3 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7$
 3) $\log_2 3 \cdot \log_2 4$ 4) $\frac{\log_5 7}{\log_5 2}$

2.4. Какие числа являются решениями неравенства $\log_{0,2}(3x) > -2$?

- 1) 0 2) 4 3) 8 4) 16

Мини-исследования к главе ■

Мини-исследование 15

Когда x_n — последовательность десятичных приближений числа π с недостатком, то последовательность 2^{x_n} возрастает, ограничена и имеет предел, который мы обозначили как 2^π . Отметим, что если x'_n — последовательность десятичных приближений числа π с избытком, то последовательность $2^{x'_n}$ убывает и ограничена, а поэтому также имеет предел. Показать, что этот предел также равен 2^π .

Мини-исследование 16

Показательные функции могут быть как возрастающими, так и убывающими. Предлагается исследовать показательные функции на выпуклость.

(В результате исследования должно получиться, что каждая показательная функция выпукла вниз.)

Мини-исследование 17

Рассматривая натуральные числа m и n и их разложения на простые множители, выяснить, при каких условиях число $\log_n m$ является рациональным, а при каких — иррациональным.

Глава 8

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

В этой главе будет введена радианная мера угла, определены тригонометрические функции числового аргумента и рассмотрены основные тригонометрические формулы.

■ § 1. ПЛОЩАДЬ КРУГА И ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ

1.1. Площадь единичного круга и число π . Напомним, что для вычисления площади круга радиуса R используется формула $S = \pi R^2$, где π — иррациональное число, приближённое значение которого с недостатком 3,14159265.

Площадь круга, ограниченного окружностью C радиуса R , можно вычислить как предел последовательности площадей вписанных в окружность C или описанных около неё правильных n -угольников, когда n стремится к бесконечности.

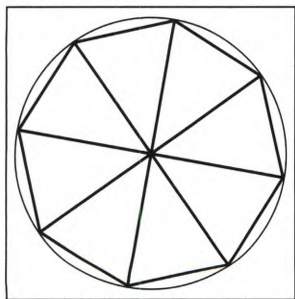


Рис. 1

Рассмотрим окружность радиуса $R = 1$. Впишем в неё правильный n -угольник, который можно представить в виде объединения n равных равнобедренных треугольников с боковыми сторонами длиной 1 (рис. 1). Так как сумма углов при вершинах всех треугольников равна полному углу в 360° , у каждого из равнобедренных треугольников угол при вершине равен $\frac{360^\circ}{n}$.

Площадь одного такого равнобедренного треугольника вычислим по формуле $S_\Delta = \frac{1}{2} ab \sin \varphi$, где a и b — длины двух сторон, а φ — угол между ними. Получим

$$S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin \frac{360^\circ}{n} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Значит, площадь S_n правильного n -угольника, вписанного в данную окружность, равна $S_n = \frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}$. Следовательно, площадь S_0 круга равна

$$S_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} \right).$$

Как известно, площадь круга единичного радиуса равна π соответствующих единиц площади. Поэтому действительное число, равное пределу последовательности $S_n = \frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n}$, и есть число π . Можно считать, что π — это краткое обозначение для $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} \right)$.

Вопрос. На сколько отличается площадь круга единичного радиуса от площади вписанного в него правильного шестиугольника?

1.2. Площадь круга радиуса R . Рассмотрим окружность радиуса R и повторим рассуждения, аналогичные приведённым в предыдущем пункте.

Впишем в окружность правильный n -угольник и представим его в виде объединения n равных равнобедренных треугольников с боковыми сторонами длины R и с углами при вершинах, равными $\frac{360^\circ}{n}$. Площадь одного такого треугольника равна

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Поэтому площадь вписанного n -угольника есть

$$S_n = \frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n}.$$

Следовательно, площадь S круга равна

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2} R^2 \sin \frac{360^\circ}{n} \right) = R^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2} \sin \frac{360^\circ}{n} \right) = R^2 \cdot \pi = \pi R^2.$$

Вопрос. Какие свойства площади вы знаете?

1.3. Площадь частей круга. Предположим, что площадь полукруга радиуса R определена и равна x . Так как круг можно составить из двух равных полукругов (рис. 2), площадь круга, с одной стороны, равна $2x$, а с другой стороны равна πR^2 . Поэтому $2x = \pi R^2$, откуда $x = \frac{\pi R^2}{2}$.

Допустим теперь, что площадь четверти круга радиуса R определена и равна y . Так как круг можно составить из четырёх секторов, каждый из которых равен четверти круга (рис. 3),

$$4y = \pi R^2, \text{ откуда } y = \frac{\pi R^2}{4}.$$

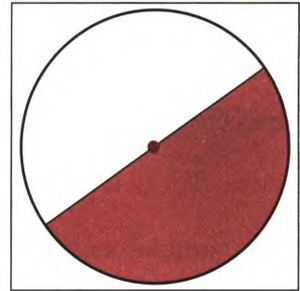


Рис. 2

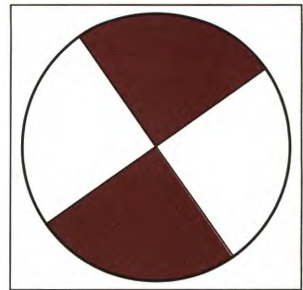


Рис. 3

Рассуждая аналогично, мы получим, что если круг радиуса R разбит на n равных секторов, то площадь одного сектора равна $\frac{1}{n}\pi R^2$.

Например, площадь сектора с углом в 1° равна $\frac{1}{360}\pi R^2$.

Вопрос. Чему равна площадь сектора радиуса R с углом в 18° ?

1.4. Площадь сектора с углом α . Для вычисления площади сектора радиуса R с углом в α° используется формула

$$S = \frac{\alpha}{360} \pi R^2. \quad (1)$$

Например, по этой формуле площадь сектора с углом в 24° равна $\frac{1}{15}\pi R^2$.

Вопрос. Как вычислить площадь кругового сегмента с углом $\alpha^\circ = 120^\circ$?

1.5. Площадь сектора для рационального значения α .** Рассмотрим сектор T радиуса R с углом в α° , причём $\alpha = \frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа. Тогда $\alpha = \frac{360}{360q} \cdot p = \frac{360}{n} \cdot p$, где $n = 360q$. Из пункта 1.3 следует, что площадь сектора с углом в $\frac{360}{n}$ градусов равна $\frac{1}{n}\pi R^2$, а площадь S данного сектора с углом в $\frac{360}{n} \cdot p$ градусов равна $S = \frac{p}{n}\pi R^2$. Следовательно,

$$S = \frac{p}{n}\pi R^2 = \frac{p}{360q}\pi R^2 = \frac{\alpha}{360}\pi R^2.$$

Тем самым формула (1) из пункта 1.4 доказана при рациональных α .

Вопрос. На высоте равностороннего треугольника со стороной a как на диаметре построен круг. Чему равна площадь части треугольника, лежащей вне этого круга?

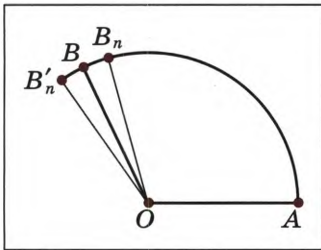


Рис. 4

1.6. Площадь сектора для иррационального значения α .** Рассмотрим теперь сектор AOB радиуса R с углом в α° , где α — иррационально. Построим последовательности (α_n) и (α'_n) десятичных приближений числа α снизу и сверху. Затем для каждого натурального n построим два сектора AOB_n и AOB'_n с углами α_n° и $(\alpha'_n)^\circ$ так, как указано на рисунке 4. Пусть S_n — площадь сектора AOB_n , S'_n — площадь сектора AOB'_n и S_0 — площадь сектора AOB . Тогда

$$S_n \leq S_0 \leq S'_n \text{ и } S_n = \frac{\alpha_n}{360} \pi R^2, S'_n = \frac{\alpha'_n}{360} \pi R^2. \text{ Поэтому } \frac{\alpha_n}{360} \pi R^2 \leq S_0 \leq \frac{\alpha'_n}{360} \pi R^2.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty}(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow \infty}(\alpha'_n) = \alpha$, по теореме о пределе промежуточной последовательности $S_0 = \frac{\alpha}{360} \pi R^2$. Тем самым формула из пункта 1.4 доказана.

Вопрос. На сколько отличается площадь круга единичного радиуса от площади правильного n -угольника, описанного около окружности единичного радиуса?

1.7. Длина окружности. Длину окружности можно вычислить как предел последовательности периметров вписанных в окружность правильных n -угольников.

Рассмотрим окружность радиуса R . Впишем в неё правильный n -угольник. Для вычисления стороны AB этого многоугольника соединим концы стороны с центром окружности и получим равнобедренный треугольник AOB с боковыми сторонами длины R и углом при вершине $\frac{360^\circ}{n}$ (рис. 5).

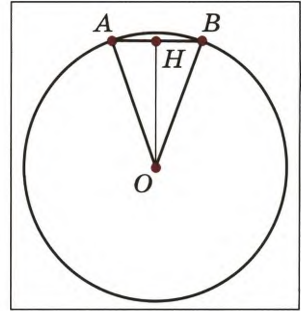


Рис. 5

Проведём $OH \perp AB$. Тогда $\angle AOH = \frac{1}{2} \angle AOB = \frac{180^\circ}{n}$, $AH = AO \sin \angle AOH = R \sin \frac{180^\circ}{n}$. Следовательно, периметр P_n рассматриваемого n -угольника равен

$$P_n = n \cdot AB = 2n \cdot AH = 2n \cdot R \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n \cdot R \sin \frac{180^\circ}{n} \right) = 2R \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot 2n \cdot \sin \frac{360^\circ}{2n} \right) = \\ &= 2R \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot m \sin \frac{360^\circ}{m} \right) = 2R \cdot \pi = 2\pi R. \end{aligned}$$

В результате получаем, что длина окружности радиуса R вычисляется по формуле $L = 2\pi R$.

Вопрос. Чему равна длина кривой, изображённой на рис. 6?

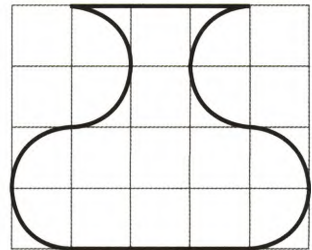


Рис. 6

1.8. Длина дуги окружности. Разделим окружность радиуса R на n равных дуг, например, на семь. Предположим, что длина каждой дуги определена и равна x . Длина окружности равна сумме длин составляющих её дуг, а поэтому $7x = 2\pi R$, откуда $x = \frac{2\pi R}{7}$.

Аналогичные рассуждения верны при произвольном натуральном n . Например, длина дуги окружности радиуса R с угловой мерой в 1° равна $\frac{2\pi R}{360}$, так как эта дуга составляет $\frac{1}{360}$ часть всей окружности.

Вопрос. Чему равна длина дуги окружности радиуса R с угловой мерой в 15° ?

1.9. Длина дуги с угловой мерой α . Для вычисления длины дуги окружности радиуса R с угловой мерой в α° справедлива формула

$$L = \frac{\alpha}{180} \pi R. \quad (2)$$

Например, по этой формуле длина дуги с угловой мерой в 12° равна $\frac{1}{15} \pi R$.

Вопрос. За какое время конец минутной стрелки часов пройдёт путь в 1 м, если длина стрелки равна 2 см?

1.10. Случай рационального значения α .** Рассмотрим дугу F окружности радиуса R с угловой мерой в α° , причём $\alpha = \frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа. Тогда $\alpha = \frac{360}{360q} \cdot p = \frac{360}{n} \cdot p$, где $n = 360q$.

Из пункта 1.8 следует, что длина дуги с угловой мерой в $\frac{360}{n}$ градусов равна $\frac{1}{n} \cdot 2\pi R$. Но тогда длина L дуги F равна $\frac{p}{n} \cdot 2\pi R$. Следовательно,

$$L = \frac{p}{n} \cdot 2\pi R = \frac{p}{360q} \cdot 2\pi R = \frac{\alpha \cdot 2\pi R}{360} = \frac{\alpha}{180} \cdot \pi R.$$

Тем самым формула (2) из пункта 1.9 доказана при рациональном α .

Вопрос. Как доказать формулу (2) при иррациональном α ?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Какие приближённые значения числа π вы знаете?
2. Как найти площадь круга радиуса R ?
3. По какой формуле вычисляется площадь круга?
4. По какой формуле вычисляется площадь сектора?
5. Как найти длину окружности радиуса R ?
6. По какой формуле вычисляется длина окружности?
7. По какой формуле вычисляется длина дуги окружности?

Задачи и упражнения ■

1. Круг площади 100 разделили на 100 равных секторов, которые с чередованием цветов покрасили в два цвета — синий и красный. Чему равна площадь всех секторов, покрашенных в красный цвет?

2. В равносторонний треугольник со стороной 6 вписан круг. Чему равна площадь той части треугольника, которая лежит вне этого круга?

3. В квадрате со стороной 10 описанная и вписанная окружности ограничивают кольцо. Чему равна площадь этого кольца?

4.* Каждая сторона равностороннего треугольника поделена на три равные части и через все точки деления проведена окружность. Найдите площадь части треугольника, лежащей внутри этого круга, если сторона треугольника равна 12.

5.** На высоте равностороннего треугольника со стороной a как на диаметре построена окружность. Найдите площадь части треугольника, лежащей внутри этой окружности.

6. На стержень цилиндрической формы с диаметром сечения 8 намотали в один ряд 300 витков тонкой проволоки. Найдите длину всей намотанной проволоки.

7. Около правильного шестиугольника со стороной 5 описана окружность. Найдите длину этой окружности.

8. В правильный шестиугольник со стороной 20 вписана окружность. Найдите длину этой окружности.

9. Найдите длину границы сектора радиуса 6 с углом в 50° .

10.* Найдите длину границы кругового сегмента радиуса 12 с углом 120° .

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равна площадь круга с радиусом $\frac{2}{\pi}$?

- 1) 4π 2) 4 3) $\frac{4}{\pi}$ 4) 2π

1.2. Чему равна площадь сектора круга с радиусом 12 см и углом 60° ?

- 1) $12\pi \text{ см}^2$ 2) 24 см^2 3) $48\pi \text{ см}^2$ 4) $24\pi \text{ см}^2$

1.3. Чему равна длина окружности с радиусом $\frac{2}{\pi}$ метров?

- 1) $\frac{4}{\pi}$ м 2) 2π м 3) $\frac{200}{\pi}$ см 4) 400 см

1.4. Чему равна длина полуокружности с радиусом 6 см?

- 1) 3π см 2) 6π см 3) 9π см 4) 12π см

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Чему равна площадь круга с радиусом 3 километра?

- 1) 9 км^2 2) $9\,000\,000\pi \text{ м}^2$ 3) 9000 м^2 4) $9\pi \text{ км}^2$

2.2. Чему равна площадь сектора круга с радиусом 8 см и углом 135° ?

- 1) 24 см^2 2) $24\pi \text{ см}^2$ 3) $32\pi \text{ см}^2$ 4) 2400 мм^2

2.3. Чему равна длина дуги окружности с радиусом 24 м и угловой мерой в 15° ?

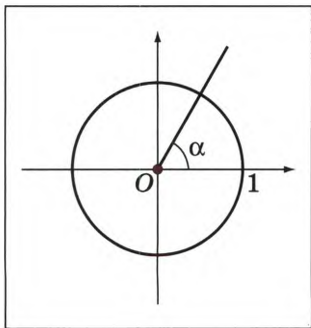
- 1) $200\pi \text{ см}$ 2) $3\pi \text{ м}$ 3) $2\pi \text{ м}$ 4) $300\pi \text{ см}$

2.4. Чему равна длина пути конца часовой стрелки за 300 часов, если её длина равна 1,5 см?

- 1) $250\pi \text{ мм}$ 2) $75\pi \text{ см}$ 3) $25\pi \text{ см}$ 4) $0,75\pi \text{ м}$

■ § 2. РАДИАННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

2.1. Понятие радианной меры. До сих пор мы измеряли углы в градусах. При этом за единицу измерения был выбран угол в 1° , равный $\frac{1}{90}$ части прямого угла. Каждый градус делится на 60 минут, а минута на 60 секунд. В этом параграфе вы познакомитесь с новой системой измерения углов — радианной.



Изобразим на координатной плоскости окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Такую окружность принято называть *тригонометрической* окружностью. Пусть α — угол с вершиной в начале координат (см. рис.). Радианной мерой угла α называется длина той дуги тригонометрической окружности, которая заключена внутри данного угла. Если длина этой дуги равна L выбранным единицам длины, то говорят, что радианная мера угла α составляет L радиан (сокращённо «рад»).

В частности, прямому углу отвечает дуга длиной $\frac{\pi}{2}$, поэтому его радианная мера равна $\frac{\pi}{2}$ радиан (рад). Развёрнутому углу отвечает дуга длиной π , значит, его радианная мера составляет π радиан (рад). Полному углу отвечает вся тригонометрическая окружность, длина которой равна 2π . Следовательно, полный угол измеряется 2π радианами. Угол в 1 радиан можно получить, если на тригонометрической окружности отложить дугу единичной длины.

Вопрос. Чему равна радианная мера угла в 45° ?

2.2. Соответствие градусной и радианной мер. Соответствие между градусной и радианной мерами одного и того же угла мы будем указывать при помощи двойной стрелки. Например, $360^\circ \leftrightarrow 2\pi$ (рад).

Установим правило перевода градусной меры углов в радианную. Рассмотрим центральный угол тригонометрической окружности, градусная мера которого равна α° . По формуле (2) предыдущего параграфа, этот угол опирается на дугу длиной $\frac{\alpha}{180} \cdot \pi$. Следовательно,

$$\alpha \text{ (градусов)} \leftrightarrow \frac{\alpha\pi}{180} \text{ (рад)}. \quad (1)$$

Так, например,

$$17^\circ \leftrightarrow \frac{17\pi}{180} \approx 0,297 \text{ (рад)}, \quad 1^\circ \leftrightarrow \frac{\pi}{180} \approx 0,017 \text{ (рад)}.$$

Вопрос. Чему равна радианная мера угла в 30° ?

2.3. Перевод радианной меры в градусную. Установленное соответствие между радианной и градусной мерами позволяет получить правило перевода радианной меры в градусную. Пусть x — радианная, а y — градусная мера одного и того же угла. Как было показано в предыдущем пункте, справедливо соотношение $y^\circ \leftrightarrow \frac{y\pi}{180}$ (рад).

$$\text{Отсюда если } x = \frac{y\pi}{180}, \text{ то } y = \frac{180x}{\pi}.$$

Таким образом,

$$x \text{ (рад)} \leftrightarrow \frac{180x}{\pi} \text{ (градусов)}. \quad (2)$$

$$\text{Например, } 3 \text{ (рад)} \leftrightarrow \frac{3 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx 171,887^\circ.$$

Углу в 1 радиан соответствует $\frac{180^\circ}{\pi}$, что составляет приблизительно $57^\circ 17' 45''$.

Вопрос. Чему равна градусная мера угла величины $\frac{\pi}{10}$ (рад)?

2.4. Перевод градусной меры в радианную. С помощью правил перевода градусной меры в радианную можно составить таблицу соответствия между градусной и радианной мерами для часто встречающихся углов.

y°	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	180°	270°	360°
x (рад)	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Вопрос. Чему равна градусная мера угла в $\frac{\pi}{9}$ радиан?

2.5. Площадь сектора при измерении угла в радианах. С помощью радианной меры удобно записывать формулу для площади кругового сектора.

Рассмотрим круговой сектор с углом в β радиан. Угол β соответствует углу $\frac{180}{\pi} \cdot \beta$ градусов. Так как площадь сектора с углом в α° вычисляется по формуле $S = \frac{\alpha}{360} \pi R^2$, площадь заданного сектора равна

$$S = \frac{180}{\pi} \beta \cdot \frac{1}{360} \pi R^2 = \frac{1}{2} R^2 \beta.$$

Вопрос. Чему равна площадь кругового сектора радиуса 1 с углом в $\frac{3}{4}$ радиана?

2.6. Длина дуги при измерении угла в радианах. Рассмотрим дугу окружности радиуса R , угловая мера которой равна β радиан. Угол β соответствует углу $\frac{180}{\pi} \cdot \beta$ градусов. Так как длина дуги с угловой мерой в α° вычисляется по формуле $L = \frac{\alpha}{180} \pi R$, длина данной дуги равняется

$$L = \frac{180}{\pi} \beta \cdot \frac{1}{180} \pi R = R\beta.$$

Вопрос. Какой радиус имеет окружность, если её дуга длиной 0,36 стягивает центральный угол в 0,9 радиана?

2.7. Радианная мера направленного угла. Формулы (1) и (2) позволяют определить радианную меру не только для углов, величина которых заключена в интервале от 0° до 360° , но и вообще для любого направленного угла.

Возьмём произвольный направленный угол, величина которого равна α° . Радианной мерой такого угла по определению считается число, связанное с α формулой (1), то есть $\frac{\alpha\pi}{180}$ радиан.

Например, радианная мера угла в 540° составляет 3π радиан, а радианная мера направленного угла величиной (-90°) равняется $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

Вопрос. Какова градусная мера направленного угла в $\left(-\frac{17\pi}{5}\right)$ радиан?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Определите угол в 1 радиан.
2. Чему равна радианная мера угла:
а) в 30° ; б) в 45° ; в) в 60° ; г) в 90° ; д) в 180° ; е) в 270° ?
3. Чему равна длина дуги окружности радиуса R , которую стягивает центральный угол в α радиан?
4. По какой формуле вычисляется площадь кругового сектора?
5. Как определяется радианная мера произвольного направленного угла?

Задачи и упражнения ■

1. Найдите радианную меру угла, выраженного в градусах:
а) 15° ; б) 120° ; в) 150° ; г) 210° ; д) 75° ; е) 18° ; ё) 140° ; ж) 1020° .
2. Найдите градусную меру угла, выраженного в радианах:
а) $\frac{\pi}{9}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $1,5$; г) 2 .
3. Длина минутной стрелки равна $3,5$ см. Какой путь проходит конец этой стрелки за 5 минут?
4. Найдите величины углов треугольника в радианах, если они:
а) относятся как $2 : 3 : 4$;
б) составляют арифметическую прогрессию с разностью d .
5. Чему равен в градусной и радианной мерах угол правильного пятиугольника?
6. Выразите в радианах и в градусах центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна двум радиусам.
7. Найдите площадь сектора круга радиуса R , если соответствующий этому сектору центральный угол равен:
а) 40° ; б) 90° ; в) 300° .

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

- 1.1. Какой угол в радианах соответствует углу в 75° ?
1) $\frac{4\pi}{9}$ 2) $\frac{5\pi}{12}$ 3) $\frac{7\pi}{12}$ 4) $\frac{4\pi}{9}$
- 1.2. Какой угол в градусах соответствует углу в $\frac{3\pi}{10}$ радиан?
1) 54° 2) 48° 3) 64° 4) 56°
- 1.3. Какому из промежутков принадлежит значение, соответствующее углу в $1,5$ радиан?
1) $(60^\circ; 70^\circ)$ 2) $(70^\circ; 80^\circ)$ 3) $(80^\circ; 90^\circ)$ 4) $(90^\circ; 100^\circ)$

1.4. Какова радианная мера угла в 72° ?

- 1) $\frac{\pi}{5}$ радиан 2) $\frac{2\pi}{5}$ радиан 3) $\frac{3\pi}{10}$ радиан 4) $\frac{3\pi}{5}$ радиан

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Сумма каких углов в радианах соответствует углу в 90° ?

- 1) $\frac{\pi}{15}$ и $\frac{\pi}{5}$ 2) $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$ 3) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{6}$ 4) $\frac{5\pi}{24}$ и $\frac{7\pi}{24}$

2.2. Разность каких углов в градусах соответствует углу в $\frac{\pi}{4}$ радиан?

- 1) 555° и 510° 2) 320° и 275° 3) 411° и 376° 4) 209° и 166°

2.3. Укажите все верные соответствия:

- 1) 1 (рад) соответствует $\frac{180^\circ}{\pi}$ 2) 1 (рад) соответствует $\frac{\pi}{180^\circ}$
3) 2 (рад) соответствует 120° 4) 3 (рад) соответствует $\frac{540^\circ}{\pi}$

2.4. Сумма каких двух углов равна 360° ?

- 1) π (рад) и 180° 2) $\frac{\pi}{2}$ (рад) и 270°
3) $\frac{5\pi}{4}$ (рад) и 120° 4) $\frac{5\pi}{3}$ (рад) и 60°

■ § 3. СИНОС, КОСИНУС, ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

3.1. Синус числа. Возьмём произвольное число x . Сопоставим этому числу направленный угол, радианная мера которого равняется x радианам.

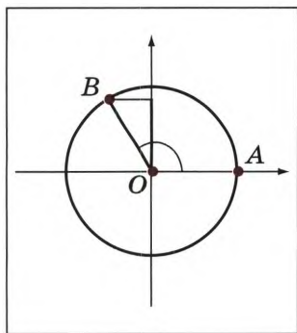


Рис. 1

В градусной мере такому углу соответствует $\alpha = \frac{180x}{\pi}$ градусов. Значение синуса угла в α° принимают соответственно за значение синуса числа x .

Синусом числа x называется синус направленного угла, соответствующего x радианам.

Таким образом, по определению $\sin x = \sin\left(\frac{180x}{\pi}\right)^\circ$.

Функция $y = \sin x$ определена для любого действительного числа x .

На рис. 1 изображено значение функции $y = \sin x$ при $x = 2$. Оно равно ординате точки B на тригонометрической окружности, определяющей дугу AB длины 2, которая соответствует центральному углу AOB в 2 радиана.

Вопрос. Что такое синус единицы?

3.2. Синусоида. Вспомним формулу $\sin(\alpha^\circ + 360^\circ) = \sin \alpha^\circ$.

При измерении углов в радианах эта формула приобретет другой вид: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$.

Отсюда следует, что функция $y = \sin x$ принимает одинаковые значения в точках x , $x + 2\pi$, $x - 2\pi$, $x + 4\pi$, $x - 4\pi$ и так далее. Поэтому для построения графика функции $y = \sin x$ сначала достаточно построить часть графика на отрезке от 0 до 2π .

Один из способов построения графика функции $y = \sin x$ на отрезке $[0; 2\pi]$ таков. Разделим отрезок $[0; 2\pi]$ на 12 равных частей. Центр тригонометрической окружности выберем в точке $(-1; 0)$. Затем разделим окружность также на 12 равных частей.

Ординаты точек на окружности — это синусы соответствующих углов $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ и так далее. Отложим эти ординаты от соответствующих точек отрезка $[0; 2\pi]$. Соединяя полученные точки плавной кривой, получим часть графика функции $y = \sin x$ на отрезке от 0 до 2π (рис. 2).

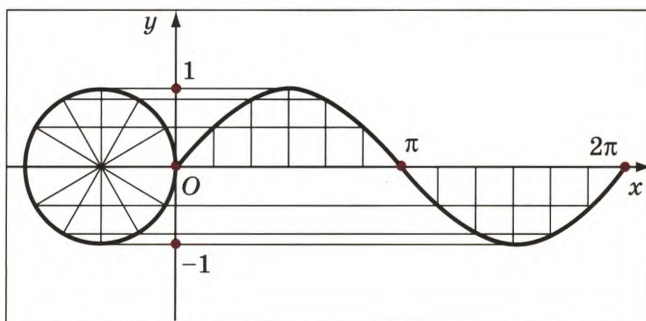


Рис. 2

Передвигая полученную часть графика влево и вправо вдоль оси Ox на расстояния 2π , 4π , 6π и так далее, мы сможем построить весь график функции $y = \sin x$ (рис. 3).

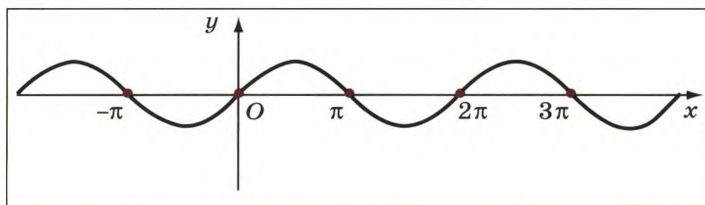


Рис. 3

График функции $y = \sin x$ называется *синусоидой*.

Вопрос. Как нарисовать график функции $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$?

3.3. Косинус для радианной меры угла и его график. Косинус действительного числа определяется аналогично тому, как был определён синус.

Косинусом числа x называется косинус направленного угла, соответствующего x радианам.

Таким образом, по определению $\cos x = \cos\left(\frac{180}{\pi}x\right)^\circ$. Тем самым функция $y = \cos x$ определена для любого действительного числа.

Вспомним формулу $\cos \alpha^\circ = \sin(\alpha^\circ + 90^\circ)$.

При измерении углов в радианах эта формула примет вид

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, значение косинуса в произвольной точке x равно значению синуса в точке $x + \frac{\pi}{2}$. Это означает, что график косинуса можно получить из графика синуса параллельным переносом на расстояние $\frac{\pi}{2}$ влево вдоль оси Ox . Поэтому графиком функции $y = \cos x$ является синусоида, расположенная так, как изображено на рис. 4.

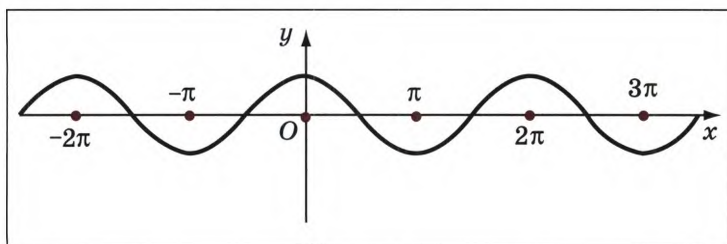


Рис. 4

Вопрос. В каких точках график функции $y = \cos x$ пересекает ось Ox ?

3.4. Тангенс и его график. Функцию «тангенс» определяют для таких чисел x , для которых $\cos x \neq 0$, то есть для чисел $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. По определению $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$.

На рис. 5 изображены две ветви графика функции $y = \operatorname{tg} x$ из бесконечного их числа.

Вопрос. Какой знак имеет $\operatorname{tg} 4$?

3.5. Котангенс и его график. Функцию «котангенс» определяют для таких чисел x , для которых $\sin x \neq 0$, то есть для чисел $x \neq \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. По определению $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$.

График функции $y = \operatorname{ctg} x$ имеет примерно такой вид, как на рис. 6, и тоже содержит бесконечно много ветвей.

Вопрос. Чему равен $\operatorname{ctg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$?

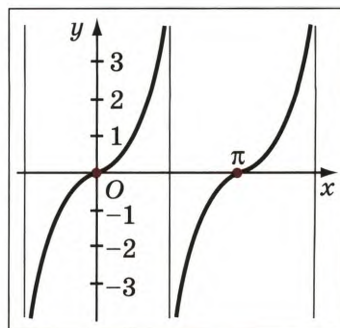


Рис. 5

Контрольные вопросы и задания ■

1. Что называется синусом числа x ?
2. Изобразите график функции $y = \sin x$.
3. Как называется кривая, являющаяся графиком функции $y = \sin x$?
4. Что называется косинусом числа x ?
5. Изобразите график функции $y = \cos x$.
6. Как определяется тангенс числа x ?
7. Для каких чисел x определена функция $y = \operatorname{tg} x$?
8. Нарисуйте график функции $y = \operatorname{tg} x$.
9. Как определяется котангенс числа x ?
10. Для каких чисел определена функция $y = \operatorname{ctg} x$?
11. Какой график имеет функция $y = \operatorname{ctg} x$?

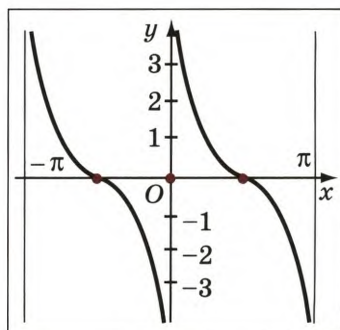


Рис. 6

Задачи и упражнения ■

1. Найдите знаки чисел:
а) $\cos 2$; б) $\sin 3,1$; в) $\cos 3,1$; г) $\operatorname{tg} 1,5$; д) $\operatorname{tg} 2$.
2. Докажите неравенство:
а) $0 < \operatorname{tg}(0,5) < 1$; б) $\operatorname{tg} 1 > 1$; в) $\operatorname{tg} 2 > -1$.
3. Вычислите:

а) $\frac{\sin \frac{\pi}{2} - \cos \pi + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{6} - \sin \frac{3\pi}{2}}$;

б) $\frac{2 \sin \frac{\pi}{3} - 3 \cos \frac{2\pi}{3}}{3 \sin \frac{2\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{3}}$;

в) $3 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \sin^2 \frac{\pi}{3} + \cos^2 \frac{\pi}{6}$;

г) $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{6}}$.

4. Определите знак числа:

а) $\cos\left(-\frac{5\pi}{7}\right)$; б) $\sin\frac{5\pi}{4}$; в) $\cos\frac{7\pi}{6}$; г) $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$; д) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{4}$.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равно значение $\sin\left(-\frac{47\pi}{6}\right)$?

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $-\frac{1}{2}$ 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.2. Чему равно значение $\cos\left(-\frac{73\pi}{6}\right)$?

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $-\frac{1}{2}$ 4) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.3. Сколько раз функция $y = \sin x$ принимает значение 0,5 на промежутке $\left(\frac{\pi}{2}; 14\pi\right]$?

1) 13 2) 15 3) 17 4) 19

1.4. Чему равняется $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$?

1) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из указанных чисел больше $\frac{1}{2}$?

1) $\sin\frac{5\pi}{24}$ 2) $\cos\frac{11\pi}{36}$ 3) $\sin\frac{21\pi}{4}$ 4) $\cos\frac{11\pi}{30}$

2.2. На каких из указанных промежутков функция $y = \cos x$ убывает?

1) $[\pi; 2\pi]$ 2) $[4\pi; 5\pi]$ 3) $[21\pi; 22\pi]$ 4) $[56\pi; 57\pi]$

2.3. Какие из указанных чисел больше нуля?

1) $\sin\frac{35\pi}{3}$ 2) $\cos\frac{85\pi}{6}$ 3) $\operatorname{tg}\left(-\frac{28\pi}{5}\right)$ 4) $\operatorname{tg}\frac{25\pi}{7}$

2.4. При каких значениях x функция $y = \operatorname{ctg} x$ принимает значение, равное $\operatorname{ctg}\left(-\frac{4\pi}{7}\right)$?

1) $x = -\frac{45\pi}{7}$ 2) $x = -\frac{68\pi}{7}$ 3) $x = \frac{38\pi}{7}$ 4) $x = \frac{59\pi}{7}$

§ 4. ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ■

4.1. Некоторые формулы для тригонометрических функций.

В курсе математики 9 класса изучались некоторые формулы, связывающие тригонометрические функции направленных углов. В этом параграфе мы рассмотрим аналогичные формулы для числовых значений аргумента.

Синус и косинус числа x связаны тождеством

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1. \quad (1)$$

С помощью этого тождества по значению одной из тригонометрических функций числа x можно вычислить значения остальных.

Пример 1. Найти площадь треугольника ABC со сторонами $AB = \sqrt{21}$, $BC = \sqrt{22}$, $AC = \sqrt{23}$ (рис. 1).

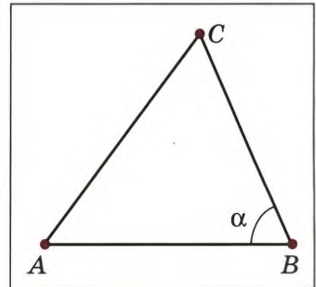


Рис. 1

Обозначим угол ABC через α . По теореме косинусов получим $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \alpha$ или $23 = 21 + 22 - 2\sqrt{21}\sqrt{22} \cos \alpha$.

$$\text{Отсюда } \cos \alpha = \frac{10}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{22}}, \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = \frac{362}{21 \cdot 22}.$$

Так как $0 < \alpha < \pi$, то $\sin \alpha = \frac{\sqrt{362}}{\sqrt{21}\sqrt{22}}$. Следовательно,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin \alpha = \frac{1}{2} \sqrt{21} \sqrt{22} \cdot \frac{\sqrt{362}}{\sqrt{21}\sqrt{22}} = \frac{\sqrt{362}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{362}}{2}$.

Пример 2. Вычислить $\operatorname{tg} x$, если известно, что $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ и $\sin x = \frac{1}{3}$.

Так как $\cos x < 0$, из тождества (1) получаем

$$\cos x = -\sqrt{1 - \sin^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{Следовательно, } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{3} : \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Приведём другие формулы для тригонометрических функций числа x :

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ где } x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad (3)$$

$$\cos(-x) = \cos x, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \text{ где } x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Вопрос. Чему равен $\sin x$, если известно, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg} x = 3$?

4.2. Формулы сложения для тригонометрических функций. Формулы сложения для тригонометрических функций имеют вид:

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \quad (6)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad (8)$$

где $x + y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$; $k, m, n \in \mathbb{Z}$.

С помощью этих формул можно вычислять значения тригонометрических функций для суммы чисел.

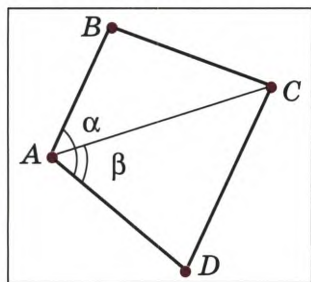


Рис. 2

Пример 3. Известны стороны $AB = 5$, $BC = 6$, $CD = 7$, $AD = 8$ и диагональ $AC = 9$ четырёхугольника $ABCD$. Найти диагональ BD .

Положим $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAD = \beta$ (рис. 2).

Из треугольника ABC по теореме косинусов находим $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos \alpha$,

$$36 = 25 + 81 - 90 \cdot \cos \alpha. \text{ Отсюда } \cos \alpha = \frac{7}{9},$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{32}}{9}. \text{ Аналогично из треугольника } ACD$$

$$\text{имеем } CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD \cdot AC \cos \beta, 49 = 64 +$$

$$+ 81 - 144 \cdot \cos \beta. \text{ Поэтому } \cos \beta = \frac{2}{3}, \sin \beta = \frac{\sqrt{5}}{3}. \text{ Таким образом,}$$

$$\cos \angle BAD = \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{32}}{9} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{14 - 4\sqrt{10}}{27},$$

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \angle BAD = 25 + 64 - 80 \cdot \frac{14 - 4\sqrt{10}}{27} = \frac{1283 + 320\sqrt{10}}{27}.$$

$$\text{Следовательно, } BD = \sqrt{\frac{1283 + 320\sqrt{10}}{27}}.$$

$$\text{Ответ: } \sqrt{\frac{1283 + 320\sqrt{10}}{27}}.$$

Заменяя в формулах (6), (7), (8) число y на число $(-y)$ и используя формулы (3) и (4), получим формулы, по которым можно вычислять значения тригонометрических функций для разности аргументов:

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y, \quad (9)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y, \quad (10)$$

$$\operatorname{tg}(x - y) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}, \quad (11)$$

где $x - y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi$, $y \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$; $k, m, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 4. Найти $\sin \frac{\pi}{12}$ и $\sin \frac{5\pi}{12}$.

Так как $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, по формуле синуса разности получим:

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Аналогично, воспользовавшись равенствами $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$, $\sin \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{7\pi}{12}$ и формулой для синуса суммы, можно получить, что

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Вопрос. Как из формул (6) и (7) вывести формулу (8)?

4.3. Формулы приведения. Из формул сложения легко получать формулы приведения, выражающие тригонометрические функции аргументов $\frac{\pi}{2} \pm x$, $\pi \pm x$, $\frac{3\pi}{2} \pm x$ через тригонометрические функции аргумента x . Например,

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cos \frac{3\pi}{2} \cdot \cos x + \sin \frac{3\pi}{2} \cdot \sin x = 0 \cdot \cos x + (-1) \cdot \sin x = -\sin x.$$

Особо выделим следующие две формулы приведения:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad (12)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x. \quad (13)$$

Пример 5. Найти $\cos \frac{5\pi}{12}$ и $\cos \frac{\pi}{12}$.

Так как $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$, формула приведения (12) приводит к равенствам:

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Аналогично можно показать, что

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Напомним также важные формулы, отражающие периодичность тригонометрических функций:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad (14)$$

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad (15)$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \text{ где } x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}. \quad (16)$$

Вопрос. Для каких значений x верна формула $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Докажите тождество $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
2. Перечислите формулы сложения.
3. Для каких числовых значений x верна формула $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$?
4. Докажите тождество $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$.
5. Как из формул сложения получить формулы для тригонометрических функций от разности аргументов?
6. Какие формулы приведения вы знаете?
7. Какие формулы отражают периодичность тригонометрических функций?
- 8.** Докажите формулу $\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$.

■ Задачи и упражнения

1. Упростите выражение:

$$\text{a) } \frac{\cos(x - \pi) \cdot \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin(4\pi - x)}{\sin(3\pi + x) \cdot \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)};$$

$$\text{б) } \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \operatorname{tg}(\pi - x) - \operatorname{ctg}(x - \pi) \cdot \sin(x - 2\pi)}{\cos(x + \pi) \cdot \cos(x - \pi) + \sin(\pi + x) \cdot \sin(2\pi - x)}.$$

2. Докажите формулу:

$$\text{a) } \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right);$$

$$\text{б) } \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right);$$

$$в) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1;$$

$$г) \cos x \cdot (1 - \operatorname{tg} x) \cdot (\sin x + \cos x) = \cos^4 x - \sin^4 x;$$

$$д) 2\sin^2 x - \cos^2 x \cdot (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x) + (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)^2 = \operatorname{tg}^2 x - 1.$$

3. Известно, что $\sin x = -\frac{2}{3}$ и $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Найдите $\cos x$.

4. Известно, что $\operatorname{tg} x = -\frac{3}{4}$ и $\frac{\pi}{2} < x < \pi$. Найдите $\sin x$.

5. Вычислите:

$$а) \frac{\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) - \sin(\pi - x)\right)}{\operatorname{tg}(\pi + x) \cdot (\cos(x + 2\pi) - \sin(x - 2\pi))};$$

$$б) \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} - \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 x)^2}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равняется $\cos(\alpha + 2\beta)$?

- 1) $\cos \alpha \sin 2\beta + \sin \alpha \cos 2\beta$ 2) $\cos \alpha \sin 2\beta - \sin \alpha \cos 2\beta$
 3) $\cos \alpha \cos 2\beta + \sin \alpha \sin 2\beta$ 4) $\cos \alpha \cos 2\beta - \sin \alpha \sin 2\beta$

1.2. Чему равняется $\sin(3\alpha - 2\beta)$?

- 1) $\cos 3\alpha \sin 2\beta + \sin 3\alpha \cos 2\beta$ 2) $\cos 3\alpha \sin 2\beta - \sin 3\alpha \cos 2\beta$
 3) $\cos 3\alpha \cos 2\beta + \sin 3\alpha \sin 2\beta$ 4) $\sin 3\alpha \cos 2\beta - \cos 3\alpha \sin 2\beta$

1.3. Известно, что $\sin x = \frac{1}{3}$. Чему равняется $|\operatorname{tg} x|$?

- 1) $\sqrt{2}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3) $2\sqrt{2}$ 4) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

1.4. Известно, что $\operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$. Чему равняется $\left|\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\right|$?

- 1) $\frac{1}{5}$ 2) $\frac{2}{5}$ 3) $\frac{3}{5}$ 4) $\frac{4}{5}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. В каких случаях утверждения являются неверными?

- 1) если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 2) если $\cos x = \frac{1}{2}$, то $\sin^2 x = \frac{3}{4}$
 3) если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

4) если $\cos x = -\frac{1}{2}$, то $\sin^2 x = \frac{3}{4}$

2.2. В каких случаях утверждения являются верными?

1) если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 2) если $\cos x = \frac{1}{2}$, то $\operatorname{tg}^2 x = 3$

3) если $\sin x = -\frac{1}{2}$, то $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{3}$ 4) если $\cos x = -\frac{1}{2}$, то $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{3}$

2.3.* В каких случаях утверждения являются неверными?

1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ 2) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} x$

3) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ 4) $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg} x$

2.4.* В каких случаях утверждения являются верными?

1) $\sin(x - 5\pi) = \cos x$ 2) $\cos(x + 5\pi) = -\cos x$

3) $\cos(x - 8\pi) = \cos x$ 4) $\sin\left(x + \frac{7\pi}{2}\right) = -\sin x$

■ § 5. ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО И ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА

5.1. Формулы двойного аргумента. Из формул сложения (6), (7) и (8) предыдущего параграфа при $x = y$ получаются формулы двойного аргумента:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad (1)$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}, \text{ где } x \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n; m, n \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

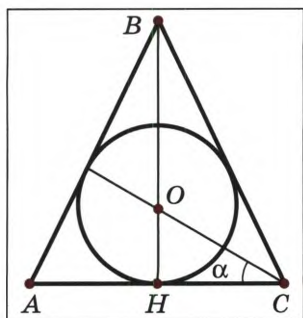


Рис. 1

Пример 1. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием $AC = 10$ радиус вписанной окружности равен 3. Найти боковые стороны треугольника.

Пусть O — центр вписанной окружности. Тогда точка O лежит на высоте BH треугольника ABC и на биссектрисе угла C (рис. 1). Обозначим $\alpha = \angle OCH$. Тогда $\angle BCH = 2\alpha$. Из прямоугольного треугольника OCH получаем

$$OC = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}, \quad \sin \alpha = \frac{OH}{OC} = \frac{3}{\sqrt{34}}. \text{ Далее,}$$

$$\cos \angle BCH = \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{8}{17}.$$

$$\text{Поэтому } BC = \frac{CH}{\cos \angle BCH} = 5 : \frac{8}{17} = \frac{85}{8}.$$

Вопрос. Как из формул сложения получить формулы (1) — (3)?

5.2. Формулы половинного аргумента. Из формулы (1) также следует, что

$$\cos 2y = 1 - 2\sin^2 y = 2\cos^2 y - 1. \quad (4)$$

Заменяя переменную y на $\frac{x}{2}$, будем иметь:

$$\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}; \quad (5)$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2}. \quad (6)$$

Эти формулы можно использовать для вычисления значений тригонометрических функций половинного аргумента.

Пример 2. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$.

Пусть O — центр вписанной окружности, OM , ON и OK — радиусы, проведённые в точки её касания со сторонами треугольника. Из условий $AM = AK$, $BM = BN$, $CN = CK$ получаем, что $CK = \frac{1}{2}(AC + BC - AB) = 4$.

Положим $\angle ACB = \alpha$ (рис. 2). По теореме косинусов получаем $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \alpha$ или $25 = 49 + 36 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos \alpha$. Отсюда $\cos \alpha = \frac{5}{7}$. Поэтому

$$\cos \angle OCK = \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = \sqrt{\frac{6}{7}},$$

$$\sin \angle OCK = \sqrt{\frac{1}{7}}, \quad \operatorname{tg} \angle OCK = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Значит, } OK = CK \cdot \operatorname{tg} \angle OCK = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Пример 3. Вычислить $\sin \frac{\pi}{8}$, не пользуясь таблицами.

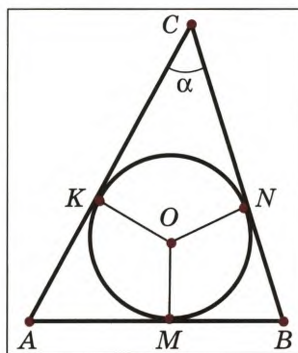


Рис. 2

$$\text{Имеем } \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Так как } 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}, \text{ то } \sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}.$$

Вопрос. Как вычислить $\cos \frac{5\pi}{12}$, применяя формулу половинного аргумента?

5.3.* Формулы для $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Разделив, при $\cos \frac{x}{2}$ не равном нулю, почленно равенство (5) на равенство (6), получаем: $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

Из последнего равенства можно вычислять $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$, зная $\cos x$. Однако тангенс половинного аргумента $\frac{x}{2}$ лучше выражать через $\cos x$ и $\sin x$:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}, \text{ где } x \neq \pi(2k+1), k \in \mathbb{Z}.$$

Аналогично, когда произведение $\sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$ не равно нулю, получаются равенства:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$$

Однако, в отличие от предыдущего, в этом случае область определения выражения $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ отлична от области определения $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

Пример 4. Найти $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$ и $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}$.

Из равенства, приведённого в пункте, следует, что

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Аналогично можно получить, что

$$\operatorname{tg} \frac{5\pi}{12} = 2 + \sqrt{3}.$$

Вопрос. Как вычислить $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}$ без помощи таблиц?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Докажите формулы для косинуса и синуса двойного угла.
2. Докажите формулу для тангенса двойного угла.
3. Как вычислять синус и косинус половинного угла?
- 4.* Докажите формулу $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$. Для каких значений x эта формула верна?
- 5.* Докажите формулу $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$. Для каких значений x эта формула верна?

Задачи и упражнения ■

1. Докажите равенство:
 - а) $\frac{\sin x \cos x}{1 - 2\sin^2 x} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2x$;
 - б) $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \cos 2x$;
 - в) $\cos^4 x - 6\cos^2 x \cdot \sin^2 x + \sin^4 x = \cos 4x$;
 - г) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$;
 - д) $\frac{1 - \cos x + \cos 2x}{\sin 2x - \sin x} = \operatorname{ctg} x$;
 - е) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \sin x)$;
 - ё) $\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$;
 - ж) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2\sin^2 \frac{x}{2} \cdot \operatorname{ctg} x = \sin x$.
2. Докажите равенство $\sqrt{1 + \sin 2x} = |\sin x + \cos x|$. Приведите пример, который показывает, что знак модуля в правой части опустить нельзя.
3. Синусы двух острых углов треугольника равны соответственно $\frac{7}{25}$ и $\frac{4}{5}$. Найдите косинус третьего угла.
4. Вычислите без помощи таблиц и калькулятора:
 - а) $\operatorname{tg} \frac{7\pi}{12}$;
 - б) $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}$.
- 5.* Выразите $\sin 3x$ и $\cos 3x$ через $\sin x$ и $\cos x$.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равно выражение $2\sin^2 x - 1$?

- 1) $\cos 2x$ 2) $-\cos 2x$ 3) $\sin 2x$ 4) $-\sin 2x$

1.2. Чему равно выражение $\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}$?

- 1) $\cos x$ 2) $-\cos x$ 3) $\sin x$ 4) $-\sin x$

1.3. Чему равно выражение $2\sin x \cos x \cos 2x$?

- 1) $\frac{1}{2}\sin 2x$ 2) $2\sin 2x$ 3) $\frac{1}{2}\sin 4x$ 4) $2\sin 4x$

1.4. Чему равно выражение $1 + 2\cos 2x$?

- 1) $3\cos^2 x - \sin^2 x$ 2) $3\cos^2 x + \sin^2 x$
3) $\cos^2 x - 3\sin^2 x$ 4) $\cos^2 x + 3\sin^2 x$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. При каких значениях x из указанных выполняется равенство

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}?$$

- 1) $x = \frac{6\pi}{5}$ 2) $x = \frac{30\pi}{7}$ 3) $x = \frac{28\pi}{9}$ 4) $x = \frac{50\pi}{11}$

2.2.* При каких значениях x из указанных выполняется равенство

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}?$$

- 1) $x = \frac{9\pi}{7}$ 2) $x = \frac{8\pi}{3}$ 3) $x = \frac{17\pi}{5}$ 4) $x = \frac{38\pi}{9}$

2.3.* Найдите выражения, равные $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ при допустимых значениях переменной.

- 1) $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$ 2) $\frac{\sin x}{1 - \cos x}$ 3) $\frac{1 + \cos x}{\sin x}$ 4) $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$

2.4.** Найдите выражения, равные $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ при допустимых значениях переменной.

- 1) $\frac{\sin x}{1 + \cos x}$ 2) $\frac{\sin x}{1 - \cos x}$ 3) $\frac{1 + \cos x}{\sin x}$ 4) $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$

■ § 6. ФОРМУЛЫ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И СУММ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

6.1. Преобразование произведения $\sin x \cos y$. Запишем тригонометрические формулы (7) и (10) из § 4:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y.$$

Почленным сложением приходим к равенству

$$\sin(x + y) + \sin(x - y) = 2\sin x \cdot \cos y.$$

Отсюда

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y)). \quad (1)$$

Эта формула оказывается полезной при выполнении преобразований тригонометрических выражений. Например,

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{4} &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}. \end{aligned}$$

Вопрос. Как из приведённых вычислений найти $\sin \frac{\pi}{12}$?

6.2. Преобразование произведений $\cos x \cdot \cos y$ и $\sin x \cdot \sin y$. Запишем тригонометрические формулы:

$$\begin{aligned} \cos(x-y) &= \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y. \end{aligned}$$

Почленным сложением получаем равенство

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2\cos x \cdot \cos y.$$

Отсюда

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y)). \quad (2)$$

Почленное вычитание тех же формул даёт

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y)). \quad (3)$$

Формулы (1), (2) и (3) называются формулами преобразования произведений синусов и косинусов.

Вопрос. Как вычислить произведение $\sin \frac{\pi}{24} \cdot \sin \frac{5\pi}{24}$?

6.3. Формулы для преобразования сумм в произведения. В пунктах 6.1 и 6.2 мы рассмотрели формулы преобразования произведений тригонометрических функций в сумму. В некоторых случаях полезны и обратные преобразования сумм тригонометрических функций в произведения.

Для того чтобы получить соответствующие формулы, запишем x и y в виде

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}, \quad y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}.$$

По формулам сложения для синуса имеем:

$$\sin x = \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\sin y = \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}.$$

Отсюда почленным сложением получаем равенство

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}, \quad (4)$$

а почленным вычитанием — равенство

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}. \quad (5)$$

Аналогично по формулам сложения для косинуса имеем:

$$\cos x = \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} - \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2},$$

$$\cos y = \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2} + \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}.$$

Почленным сложением этих равенств получаем равенство

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}, \quad (6)$$

а почленным вычитанием — равенство

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2} = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{y-x}{2}. \quad (7)$$

Пример 1. Преобразуем сумму в произведение.

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x &= (\sin x + \sin 3x) + (\sin 5x + \sin 7x) = \\ &= 2 \sin 2x \cdot \cos x + 2 \sin 6x \cdot \cos x = 2 \cos x \cdot (\sin 2x + \sin 6x) = \\ &= 2 \cos x \cdot \left(2 \sin \frac{2x+6x}{2} \cdot \cos \frac{2x-6x}{2} \right) = 4 \cos x \cdot \sin 4x \cdot \cos 2x. \end{aligned}$$

Вопрос. Как доказать, что $2 \sin \left(\frac{x+y}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(\frac{x-y}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = \sin x - \cos y$?

6.4. Формулы преобразования. Формулы (4), (5), (6) и (7) называются формулами преобразования сумм и разностей синусов и косинусов. Для запоминания их иногда формулируют кратко в следующем виде:

Сумма синусов двух чисел равна удвоенному произведению синуса их полусуммы на косинус полуразности первого и второго чисел.

Разность синусов двух чисел равна удвоенному произведению косинуса их полусуммы на синус полуразности первого и второго чисел.

Сумма косинусов двух чисел равна удвоенному произведению косинуса их полусуммы на косинус полуразности первого и второго чисел.

Разность косинусов двух чисел равна удвоенному произведению синуса их полусуммы на синус полуразности второго и первого чисел.

Вопрос. Как можно кратко сформулировать формулы преобразования произведений синусов и косинусов?

6.5.* Формулы преобразования для суммы тангенсов. Найдём формулы для преобразования суммы и разности тангенсов.

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}. \quad (8)$$

Аналогично получается формула

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}. \quad (9)$$

Вопрос. Для каких x и y справедливы формулы (8) и (9)?

6.6. Вычисление суммы $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$.** С помощью формул преобразования произведений и сумм можно упрощать некоторые суммы, связанные с тригонометрическими функциями.

Пример 2. Докажем, что если $\sin \frac{x}{2} \neq 0$, $n \in N$, то

$$S_n = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Преобразуем произведение $2(\sin \frac{x}{2}) \cdot S_n$:

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} \cdot S_n &= 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx \right) = \\ &= \sin \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos x + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos 2x + \dots + 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos nx = \\ &= \sin \frac{x}{2} + \left(\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) + \left(\sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2} \right) + \dots + \\ &+ \dots + \left(\sin \frac{(2n+1)x}{2} - \sin \frac{(2n-1)x}{2} \right) = \sin \frac{(2n+1)x}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $2 \sin \frac{x}{2} \cdot S_n = \sin \frac{(2n+1)x}{2}$.

Отсюда $S_n = \frac{\sin \frac{(2n+1)x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}$, что и требовалось доказать.

Вопрос. Чему равна сумма $S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Выведите формулу преобразования произведения синуса и косинуса.

2. Выведите формулу преобразования произведения синусов.
3. Выведите формулу преобразования произведения косинусов.
4. Выведите формулу преобразования суммы синусов.
5. Выведите формулу преобразования разности синусов.
6. Выведите формулу преобразования суммы косинусов.
7. Выведите формулу преобразования разности косинусов.
- 8.* Чему равна сумма тангенсов?
- 9.* Чему равна разность тангенсов?

■ Задачи и упражнения

1. Вычислите без таблиц и калькулятора:
 - а) $\cos 75^\circ \cdot \cos 105^\circ$;
 - б)** $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ$.
2. Преобразуя произведение в сумму, а затем сумму в произведение, докажите равенство $\sin \frac{5\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{8} = \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2}$.
3. Преобразуйте в произведение:
 - а) $\cos 1 - \cos 5$; б) $\sin 17^\circ + \cos 29^\circ$.
4. Докажите равенство $\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 2y) = \cos(x+y) \cos(x-y)$.
- 5.* Докажите равенство:
 - а) $\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \sin 70^\circ = 2$;
 - б) $2 \cos 24^\circ - \cos 12^\circ - \cos 36^\circ = 4 \cos 24^\circ \cdot \sin^2 6^\circ$;
 - в) $\frac{1 - \cos 50^\circ}{\cos 40^\circ} = \operatorname{tg} 25^\circ$; г) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \operatorname{tg} 2x$.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равно выражение $2 \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$?

- 1) $\cos 2x$ 2) $-\cos 2x$ 3) $\sin 2x$ 4) $-\sin 2x$

1.2. Чему равно выражение $\cos 10x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - 6x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 10x\right) \cdot \cos 6x$?

- 1) $\cos(\pi + 16x)$ 2) $\sin(\pi + 4x)$ 3) $\sin(\pi - 16x)$ 4) $\cos(\pi - 4x)$

1.3. Чему равно выражение $\sin 3x \cdot \sin 5x$?

- 1) $\frac{1}{2}(\sin 2x - \sin 8x)$ 2) $\frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x)$

$$3) \frac{1}{2}(\cos 8x - \cos 2x) \quad 4) \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 8x)$$

1.4. Чему равно выражение $\cos 5x - \cos 3x$?

- 1) $2\sin x \sin 4x$ 2) $-2\sin x \sin 4x$
3) $2\sin x \cos 4x$ 4) $2\cos 4x \cos x$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Найдите выражения, равные $\sqrt{1 - \sin 2x}$ при всех значениях переменной.

- 1) $\sin x + \cos x$ 2) $\sin x - \cos x$
3) $|\sin x + \cos x|$ 4) $|\sin x - \cos x|$

2.2. Найдите, какие из двух заданных выражений тождественно равны при всех значениях переменных.

- 1) $\cos(3x + 2y) \cdot \cos(3x - 2y) + \sin(3x - 2y) \cdot \sin(3x + 2y)$ и $\cos 4y$
2) $\sin(14x + 5y) \cdot \cos(14x - 5y) + \cos(14x + 5y) \cdot \sin(14x - 5y)$ и $\sin 9y$
3) $\sin(5x + 3y) \cdot \sin(5x - 3y) - \cos(5x - 3y) \cdot \cos(5x + 3y)$ и $\cos 10x$
4) $\cos(x + 2y) \cdot \sin(x - 2y) - \cos(x - 2y) \cdot \sin(x + 2y)$ и $(-\sin 4y)$

2.3.* Найдите выражения, которые равны выражению $\sin x + \sin 3x$ при всех допустимых значениях переменной.

- 1) $2\sin 2x \cos x$ 2) $\frac{\sin^2 2x}{\sin x}$ 3) $\sin x \cos 2x$ 4) $4\sin x \cos^2 x$

2.4.* Найдите выражения, которые равны выражению $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} x$ при всех допустимых значениях переменной.

- 1) $\frac{\sin 2x}{\cos x \cos 3x}$ 2) $\frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x}$ 3) $\frac{2\sin 2x}{\cos 2x + \cos 4x}$ 4) $\frac{\sin 2x}{\cos 2x + \cos 4x}$

Мини-исследования к главе ■

Мини-исследование 18

Установите, насколько отличается площадь круга, ограниченного окружностью радиуса R :

- а) от площади вписанного в эту окружность правильного шестиугольника;
б) от площади вписанного в эту окружность правильного восьмиугольника;
в) от площади вписанного в эту окружность правильного двенадцатиугольника.

Мини-исследование 19

Установите, насколько отличается площадь круга, ограниченного окружностью радиуса R :

а) от площади правильного шестиугольника, описанного вокруг этой окружности;

б) от площади правильного восьмиугольника, описанного вокруг этой окружности;

в) от площади правильного двенадцатиугольника, описанного вокруг этой окружности;

г) от площади правильного шестнадцатиугольника, описанного вокруг этой окружности.

Мини-исследование 20

Основная часть тригонометрических формул верна при всех значениях переменных. Пример исключения дают формулы, содержащие тангенс и котангенс. Предлагается выяснить, при каких условиях определены следующие формулы:

$$1) \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x;$$

$$2) \operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y};$$

$$3) \operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x;$$

$$4) \operatorname{ctg}(x + y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1}{\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y}.$$

Мини-исследование 21

По аналогии с приведённым в пункте 6.6 выводом формулы для суммы косинусов найти суммы:

$$1) \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx;$$

$$2) \sin x + \sin(x + d) + \sin(x + 2d) + \dots + \sin(x + nd);$$

$$3) \cos x + \cos(x + d) + \cos(x + 2d) + \dots + \cos(x + nd).$$



В этой главе мы напомним некоторые способы построения сечений многогранников, рассмотрим общие подходы к построению сечений. Вы узнаете о применении сечений на практике.

■ § 1. ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ ПО ТРЁМ ТОЧКАМ

1.1. Задачи, возникающие при построении сечений. Мы неоднократно рассматривали примеры задач на построение сечений многогранников некоторой плоскостью. Заметим, что решение каждой такой задачи представляет собой последовательное решение частных вспомогательных задач. Среди них можно выделить задачи следующего вида:

- а) построить точку пересечения двух прямых;
- б) построить точку пересечения прямой и плоскости;
- в) построить линию пересечения двух плоскостей.

В этом параграфе мы на примерах покажем, что решение каждой из перечисленных основных задач неразрывно связано с остальными задачами.

Вопрос. Какой многоугольник может получиться при пересечении четырёхугольной пирамиды плоскостью?

1.2. Пересечение прямых. При построении в пространстве точки пересечения двух прямых желательно представить плоскость, содержащую эти прямые, то есть представить некоторое сечение, в котором прямые расположены.

Пример 1. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$. Точка K — середина ребра SB , точка L — середина ребра SC . Построить точку пересечения прямых AL и DK .

Так как $KL \parallel BC$ и $BC \parallel AD$, то $KL \parallel AD$. Отсюда следует, что прямые KL и AD лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает данную пирамиду так, что в сечении получается трапеция $AKLD$ (рис. 1). Следовательно, AL и DK пересекаются в точке P как диагонали трапеции $AKLD$. Из подобия треугольников APD и

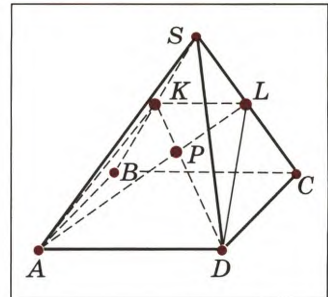


Рис. 1

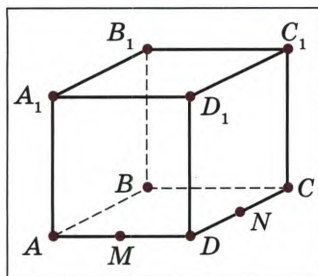


Рис. 2

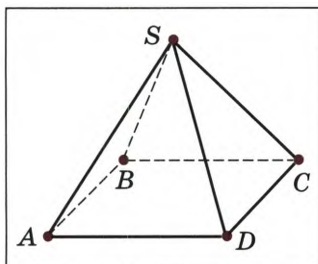


Рис. 3

КПЛ находим, что $AP : PL = 2 : 1$. Это позволяет точно представить положение точки пересечения прямых AL и DK .

Вопрос. Пусть $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб, точка M — середина AD , точка N — середина CD (рис. 2). Как построить точку пересечения прямых $A_1 N$ и $C_1 M$?

1.3. Скрещивающиеся прямые. Заметим, что в некоторых случаях попытки найти плоскость, содержащую две данные прямые, могут оказаться неудачными. Тогда, опираясь на признаки скрещивающихся прямых, можно попробовать доказать, что данные прямые не пересекаются.

Пример 2. Пусть дана четырёхугольная пирамида $SABCD$. На рис. 3 изображения прямых SD и BC пересекаются. Однако в пространстве эти прямые не пересекаются. Действительно, рассмотрим плоскость основания $ABCD$, содержащую прямую BC . Прямая SD не

лежит в этой плоскости и пересекает плоскость $ABCD$ в точке D . Так как точка D не лежит на прямой BC , по соответствующему признаку прямые SD и BC — скрещивающиеся, а поэтому не пересекаются.

Вопрос. Какие признаки скрещивающихся прямых вы знаете?

1.4. Построение прямой, пересекающей две заданные прямые.** В этом пункте разберём одну задачу.

Пример 3. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a , точка M — середина ребра CD . Через точку M проводится прямая, пересекающая прямые AB_1 и BC_1 в точках P и Q . Найти PQ .

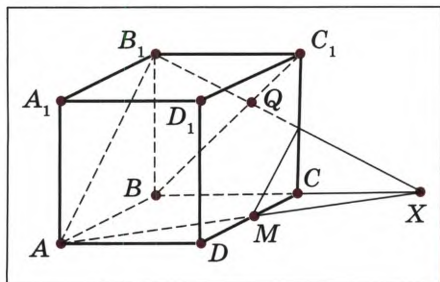


Рис. 4

Пересекающиеся прямые всегда содержатся в одной плоскости. Поэтому искомая прямая и, например, прямая AB_1 должны лежать в одной плоскости. Эта плоскость содержит точки M , A , B_1 . Представим её на рис. 4. Заметим, что прямые BC_1 и $B_1 X$ лежат в плоскости $BB_1 C_1 C$, а поэтому пересекаются в точке, которую обозначим через Q . Проведя в плоскости

AB_1X прямую MQ , сможем найти точку P её пересечения с прямой AB_1 (рис. 5). Прямая MQ — искомая, так как пересекает и прямую BC_1 , и прямую AB_1 .

Вопрос. Чему равна длина отрезка PQ ?

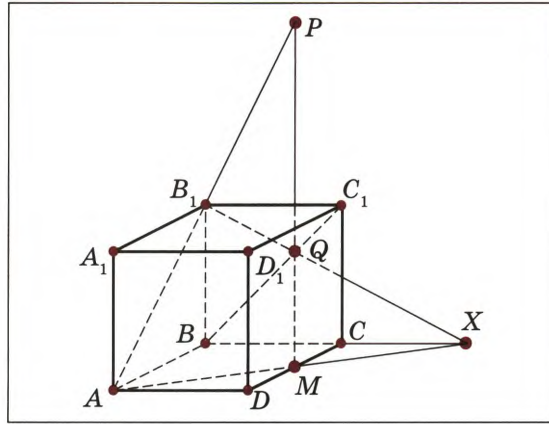


Рис. 5

1.5. Пересечение плоскостей. Построение линии пересечения двух плоскостей связано с нахождением их общих точек. Для этого рассматривают в заданных плоскостях некоторые вспомогательные прямые и находят их точки пересечения.

Пример 4. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ построить прямую пересечения плоскостей AB_1C и BC_1D .

Сначала рассмотрим прямую B_1C плоскости AB_1C и прямую BC_1 плоскости BC_1D . Эти прямые лежат в плоскости BB_1C_1C и пересекаются в точке E как диагонали квадрата (рис. 6).

Затем рассмотрим прямую AC плоскости AB_1C и прямую BD плоскости BC_1D . Эти прямые лежат в плоскости $ABCD$ и пересекаются в точке F как диагонали квадрата (рис. 7).

Таким образом, плоскости AB_1C и BC_1D пересекаются по прямой EF , проходящей через центры граней BB_1C_1C и $ABCD$ (рис. 8).

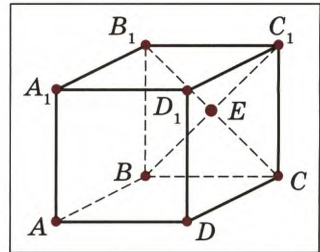


Рис. 6

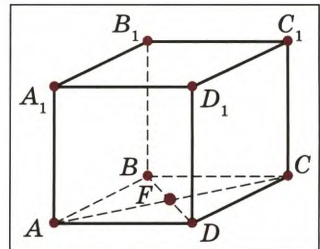


Рис. 7

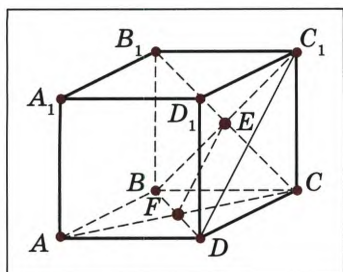


Рис. 8

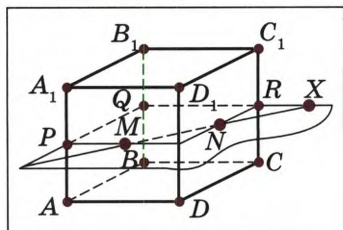


Рис. 9

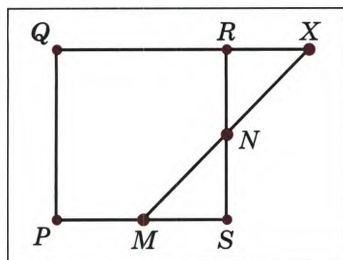


Рис. 10

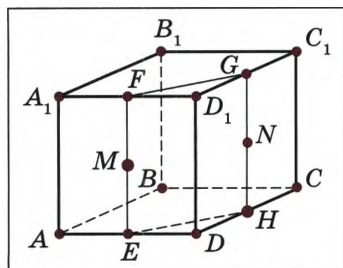


Рис. 11

Вопрос. Как доказать, что в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскости AB_1C и A_1C_1D не пересекаются?

1.6. Пересечение прямой с плоскостью. Нахождение точки пересечения прямой с плоскостью чаще всего требует дополнительных построений. Дополнительные построения можно выполнять по-разному, при этом решения одной и той же задачи по сложности могут заметно различаться.

Пример 5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M — центр грани $AA_1 D_1 D$, точка N — центр грани $CC_1 D_1 D$. Построить точку пересечения прямой MN с плоскостью грани $BB_1 C_1 C$.

Первое решение. Построим вспомогательную плоскость α , проходящую через середины ребер AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 (рис. 9). Плоскость α содержит точки M , N и пересекает плоскость грани $BB_1 C_1 C$ по прямой QR . Следовательно, прямые MN и QR пересекаются в некоторой точке X . Так как X принадлежит и прямой MN , и плоскости $BB_1 C_1 C$, требуемая точка построена.

Для определения положения точки X рассмотрим рис. 10. Установив равенство треугольников MNS и XNR , получаем

$$RX = MS = \frac{1}{2} PS = \frac{1}{2} QR.$$

Второе решение. Построим вспомогательную плоскость β , проходящую через середины ребер AD , $A_1 D_1$, CD , $C_1 D_1$ (рис. 11). Плоскость β содержит точки M и N .

Найдём пересечение плоскостей $BB_1 C_1 C$ и β . Для этого построим в плоскости $ABCD$ точку P пересечения прямых EH и BC , а в плоскости $A_1 B_1 C_1 D_1$ — точку Q пересечения прямых FG и $B_1 C_1$ (рис. 12). Прямая PQ — пересечение плоскостей β и $BB_1 C_1 C$.

Построив плоскость β и её пересечение PQ с плоскостью BB_1C_1C , проведём прямую MN и найдём точку X её пересечения с прямой PQ . Полученная точка X — это та же точка, которая была построена при первом решении.

Вопрос. Почему прямая MN не пересекается с плоскостью грани $ABCD$?

1.7.* Построение сечения, проходящего через три точки. При построении сечения, проходящего через три точки, иногда приходится находить вспомогательную точку пересечения прямой и плоскости.

Пример 6. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a точки M, N, K расположены соответственно на рёбрах $A_1 B_1, CC_1, AD$ так, что $A_1 M = 3MB_1, C_1 N = 2NC, AK = KD$ (рис. 13). Построить сечение куба плоскостью MNK .

Сначала найдём точку пересечения прямой MN с плоскостью $ABCD$. Для этого рассмотрим вспомогательную плоскость MCC_1 (рис. 14). Плоскость MCC_1 пересекает плоскость основания $ABCD$ куба по прямой LC , параллельной прямой MC_1 . Поэтому $AL = 3LB$. Точка P пересечения прямых MN и LC будет ещё одной точкой плоскости сечения, лежащей в плоскости $ABCD$. Для точного определения положения точки P рассмотрим подобие треугольников MPL и NPC , в силу которого $LP : PC = ML : NC = C_1 C : NC = 3 : 1$.

Найдя точку P , рассмотрим плоскость $ABCD$. Прямая PK пересекает ребро CD в точке E и продолжение ребра AB в точке X (рис. 15). Для определения положения точек E и X проведём отрезок KZ параллельно AB , пересекающий LC в точке T . Так как $BL = \frac{1}{4}AB$, то $ZT = \frac{1}{2}BL = \frac{1}{8}AB = \frac{1}{8}a$ и $KT = \frac{7}{8}a$. Из условия

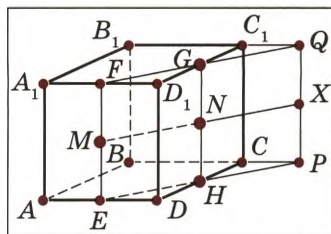


Рис. 12

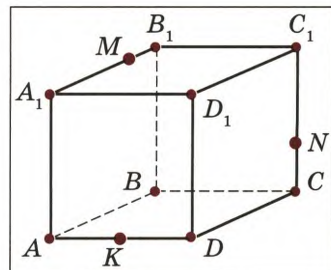


Рис. 13

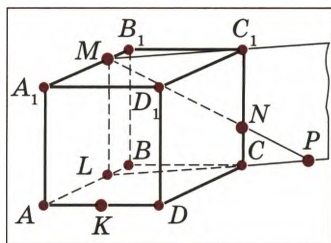


Рис. 14

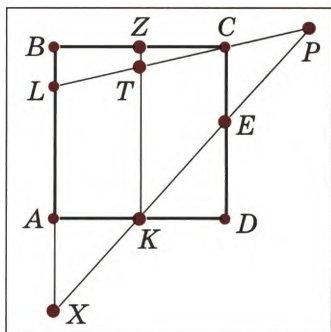


Рис. 15

$LC : PC = 3 : 1$ находим, что $LC : CP = 2 : 1$. Так как $LT = TC$, то $LT = TC = CP$. Далее из подобия треугольников TPK и CPE получаем $CE : TK = CP : TP = 1 : 2$, откуда $CE = \frac{1}{2}TK = \frac{7}{16}a$ и $ED = a - \frac{7}{16}a = \frac{9}{16}a$. Из равенства треугольников KDE и AKX находим $AX = DE = \frac{9}{16}a$.

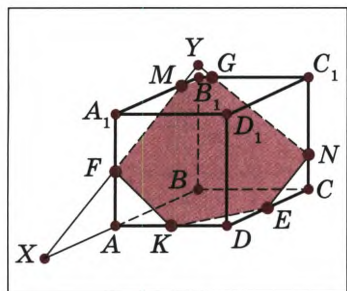


Рис. 16

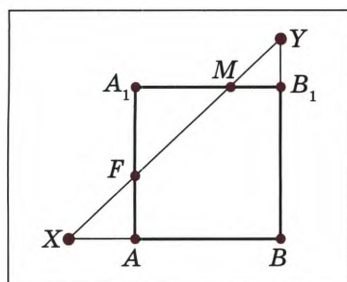


Рис. 17

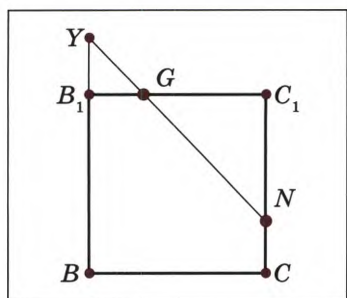


Рис. 18

Получив точки X и E , принадлежащие секущей плоскости, уже нетрудно построить сечение. Для этого найдём точку F пересечения прямой XM с ребром AA_1 , точку Y пересечения прямых XM и BB_1 и точку G пересечения прямой YN с ребром B_1C_1 (рис. 16). Шестиугольник $MGNEKF$ — сечение куба плоскостью MNK .

Для определения положения оставшихся вершин сечения сначала рассмотрим плоскость AA_1B_1B (рис. 17).

Так как $\triangle AFX \sim \triangle A_1FM$,

$$AF : A_1F = AX : A_1M = \frac{9}{16}a : \frac{3}{4}a = 3 : 4.$$

Отсюда $AF = \frac{3}{7}a$ и $A_1F = \frac{4}{7}a$. Так как $\triangle YB_1M \sim \triangle A_1MF$, то $YB_1 : A_1F = 1 : 3$. Отсюда $YB_1 = \frac{1}{3}A_1F = \frac{4}{21}a$.

Наконец, рассмотрим плоскость BB_1C_1C на рис. 18. Так как $\triangle B_1YG \sim \triangle C_1NG$, то $B_1G : GC_1 = B_1Y : C_1N = \frac{4}{21}a : \frac{2}{3}a = 2 : 7$. Отсюда $B_1G = \frac{2}{9}a$ и $C_1G = \frac{7}{9}a$.

Вопрос. Как доказать, что $MG \parallel KE$, $GN \parallel KF$ и $MF \parallel NE$?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Какие вспомогательные задачи приходится решать при построении сечения многогранника?

2. Приведите пример задачи, в которой требуется найти точку пересечения двух прямых в пространстве.
3. Что можно сказать о двух прямых в пространстве, если известно, что эти прямые пересекаются?
4. Приведите пример задачи, в которой требуется найти точку пересечения прямой и плоскости.
5. Что можно сказать о прямой и плоскости, если они не пересекаются?
6. Приведите пример задачи, в которой требуется найти линию пересечения двух плоскостей.
7. Что можно сказать о двух плоскостях в пространстве, если известно, что эти плоскости не пересекаются?

Задачи и упражнения ■

1. В треугольной пирамиде $SABC$ точки K, L, M, N — середины рёбер AB, AC, SB и SC соответственно. Докажите, что:

- а) прямые KL и MN параллельны;
- б) отрезки KN и ML в точке пересечения делятся пополам.

Найдите площадь четырёхугольника $KLNM$, если $SABC$ — правильный тетраэдр с ребром 3.

2. В треугольной пирамиде $SABC$ точка M — середина ребра AC .

- а) Докажите, что прямые CS и BM — скрещивающиеся;
- б) через точку A проведите прямую, которая пересекает скрещивающиеся прямые SC и BM , и докажите, что существует только одна прямая, которая проходит через точку A и пересекает прямые SC и BM ;

в)* пусть N — середина ребра SA ; докажите, что если существует прямая, проходящая через точку N и пересекающая прямые CS и BM , то она лежит в плоскости ACS ;

г)* докажите, что не существует прямой, которая пересекает прямые SC и BM и проходит через точку N .

3. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ основание $ABCD$ — квадрат, точка M — середина ребра SA , точка N — середина ребра SB .

- а) Найдите точку P пересечения прямых CM и DN ;
- б) найдите отношение $CP : PM$;
- в)* докажите, что прямые CN и DM пересекаются.

4. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 2, AD = 3, AA_1 = 1$. Точка M — середина ребра AD , точка N — середина ребра CD .

- а) Найдите точку пересечения прямых $A_1 M$ и $C_1 N$;

- б) докажите, что прямые A_1C_1 и MN параллельны;
 в) найдите точку пересечения прямых A_1N и C_1M ;
 г) найдите, в каком отношении отрезки A_1N и C_1M делятся в точке пересечения;

д)* докажите, что прямые BD и C_1N — скрещивающиеся.

5.** Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 . Точка N — середина ребра AB , точка M — середина ребра BB_1 , O — точка пересечения диагоналей грани BCC_1B_1 . Через точку O проведена прямая, пересекающая прямые AM и CN в точках P и Q . Найдите длину отрезка PQ , если длина ребра куба равна 1.

6.* В основании ABC треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник со стороной 1. Ребро SC пирамиды перпендикулярно плоскости основания и длина его равна 1. Точка M — середина ребра SA .

а) Докажите, что ACS и BCS — равнобедренные прямоугольные треугольники, ABS — равнобедренный треугольник;

б) проведите через середину отрезка BM прямую, которая пересекает скрещивающиеся прямые CS и AB в точках P и Q . Найдите длину отрезка PQ .

7.** Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 . Точка M — середина высоты AO треугольника ABD , KL — средняя линия грани $AA_1 B_1 B$, параллельная ребру AB . Через точку M проведена прямая, пересекающая прямые KL и $B_1 C_1$ в точках P и Q . Найдите длину отрезка PQ , если ребро куба равно 1.

8.** Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является равнобедренная трапеция $ABCD$. Длина основания CD трапеции равна 1, длины всех остальных рёбер пирамиды равны 2; CM — высота боковой грани SBC , KL — средняя линия треугольника SCD , параллельная стороне CD . Через точку A проходит прямая, пересекающая прямые KL и CM в точках P и Q . Найдите длину отрезка PQ .

9.** В основании прямой призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ (боковые рёбра AA_1 , BB_1 , CC_1 перпендикулярны плоскости основания) лежит правильный треугольник ABC . Все рёбра призмы имеют длину 1. Отрезок MN — средняя линия грани $BCC_1 B_1$, параллельная BC . Через центр треугольника ABC проходит прямая, пересекающая прямые AB_1 и MN в точках P и Q . Найдите длину отрезка PQ .

10.** В основании правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, все рёбра пирамиды имеют одинаковую длину 1. Точка M — середина ребра SA , SN — высота треугольника SBC . Через

точку M проходит прямая, пересекающая прямые SN и BD в точках P и Q . Найдите длину отрезка PQ .

11. В треугольной пирамиде $SABC$ точки M , N и K — середины рёбер AB , BC и SB соответственно.

- а) Найдите прямую, по которой пересекаются плоскости ASN и CSM ;
- б)* найдите прямую, по которой пересекаются плоскости SMN и SAC ;
- в) докажите, что плоскости MNK и ACS параллельны;
- г) найдите прямую, по которой пересекаются плоскости CKM и ASN ;
- д)* найдите длину отрезка, по которому прямая пересечения плоскостей CKM и ASN пересекает пирамиду, если $AB = BC = CA = 1$, $BS = AS = CS = 2$.

12. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, в котором O — точка пересечения диагоналей, M — середина ребра AD , N лежит на ребре $D_1 C_1$ и $D_1 N = 2 N C_1$.

- а) Найдите точку пересечения прямой MO и плоскости $A_1 B_1 C_1 D_1$;
- б) докажите, что прямая MO параллельна плоскости $AA_1 B_1 B$;
- в) найдите точку пересечения прямой NO и плоскости $ABCD$;
- г) найдите точку пересечения прямой NO и плоскости $AA_1 D_1 D$;
- д) найдите точку пересечения прямой MN и плоскости $BB_1 C_1 C$;
- е) постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки M , O , N , и определите, какие рёбра куба пересекает плоскость сечения и в каком отношении делит эти рёбра.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. В треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ сечение проходит через середины AA_1 и $A_1 C_1$ и через точку N ребра $B_1 C_1$. В каком случае плоскость сечения содержит вершину B ?

- 1) $B_1 N : N C_1 = 1 : 1$
- 2) $B_1 N : N C_1 = 2 : 1$
- 3) $B_1 N : N C_1 = 3 : 1$
- 4) $B_1 N : N C_1 = 4 : 1$

1.2.* Какое наибольшее число рёбер треугольной пирамиды может иметь общие точки с некоторой плоскостью одновременно?

- 1) 3
- 2) 4
- 3) 5
- 4) 6

1.3. В треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ плоскость проходит через середины рёбер AB , BC , CC_1 . Сколько ещё рёбер призмы пересекает эта плоскость?

- 1) 1
- 2) 2
- 3) 3
- 4) 4

1.4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ плоскость проходит через вершину D , середину M ребра SC

и точку K на ребре SB . В каком случае плоскость DMK проходит через середину ребра AB ?

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) $BK : KS = 1 : 2$ | 2) $BK : KS = 1 : 3$ |
| 3) $BK : KS = 2 : 3$ | 4) $BK : KS = 1 : 4$ |

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. В треугольной пирамиде $ABCD$ плоскость проходит через точки M и N , расположенные на рёбрах AD и BD . Какие ещё рёбра одновременно может пересекать эта плоскость во внутренних точках рёбер?

- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1) AC и CD | 2) BC и CD | 3) AC и BC | 4) AB и BC |
|----------------|----------------|----------------|----------------|

2.2. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ плоскость проходит через точки M и N , расположенные на рёбрах AA_1 и A_1C_1 . Какие два ребра во внутренних точках может пересекать эта плоскость?

- | | | | |
|----------------|------------------|----------------------|--------------------|
| 1) AB и BC | 2) BB_1 и BC | 3) BB_1 и B_1C_1 | 4) A_1B_1 и BC |
|----------------|------------------|----------------------|--------------------|

2.3.* Какие многоугольники могут получаться при сечении правильной шестиугольной пирамиды плоскостью?

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1) шестиугольники | 2) семиугольники |
| 3) восьмиугольники | 4) девятиугольники |

2.4.* В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскость проходит через вершину D , точку M на ребре AA_1 и точку N на ребре CC_1 . В каких случаях плоскость DMN не пересекает ребро BB_1 ?

- | |
|-------------------------------------------|
| 1) $AM : MA_1 = 3 : 1, CN : NC_1 = 1 : 4$ |
| 2) $AM : MA_1 = 1 : 2, CN : NC_1 = 4 : 3$ |
| 3) $AM : MA_1 = 3 : 2, CN : NC_1 = 3 : 4$ |
| 4) $AM : MA_1 = 1 : 5, CN : NC_1 = 6 : 1$ |

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЯМ

2.1. Построение прямой, параллельной заданной прямой. Мы неоднократно рассматривали примеры задач о построении сечений, параллельных либо одной прямой, либо двум прямым, либо плоскости. Главным в решении задач такого типа является умение провести через данную точку прямую, параллельную заданной прямой. Построение прямой, параллельной заданной прямой, облегчается, если изобразить плоскость, содержащую обе прямые.

Пример 1. В призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC и боковыми рёбрами AA_1, BB_1, CC_1 точки M, N, K — середины рёбер A_1C_1, BB_1 и AB соответственно. Через точку K параллельно прямой MN проводится прямая l , пересекающая плоскость AA_1C_1C в точке L . Найти KL , если $MN = 5$.

Сначала построим сечение призмы плоскостью MNK , которая содержит как прямую MN , так и параллельную ей прямую l . Для этого найдём точку X пересечения прямых NK и AA_1 , точку Y пересечения прямых NK и A_1B_1 , точку E пересечения прямой MX с ребром AC и точку F пересечения прямой MY с ребром B_1C_1 (рис. 1). Из равенства треугольников AKX и BKN получим, что $XK = KN$.

Затем рассмотрим плоскость MXY (рис. 2). Проведя $KL \parallel MN$, получим точку L на отрезке MX , лежащую также и в плоскости AA_1C_1C . Для вычисления длины отрезка KL достаточно заметить, что отрезок KL — средняя линия в треугольнике XMN . Поэтому $KL = \frac{1}{2}MN = \frac{5}{2}$.

Вопрос. Почему в рассмотренном примере точка F — середина отрезка MY (рис. 1)?

2.2. Построение сечения, параллельного прямой. Разберём задачу, в которой нужно провести сечение параллельно одной прямой.

Пример 2. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$, точки M и N — середины рёбер AB и AD . Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки M и N и параллельной прямой AS .

В плоскости основания $ABCD$, содержащей прямую MN , найдём принадлежащие секущей плоскости следующие точки: точку E пересечения прямых MN и CD , точку F пересечения прямых MN и BC , точку H пересечения MN и AC (рис. 3). В плоскости ASC через точку H , принадлежащую секущей плоскости, параллельно AS проведём прямую и отметим точку K её пересечения с ребром SC . Плоскость MNK искомая, так как содержит прямую, параллельную прямой AS .

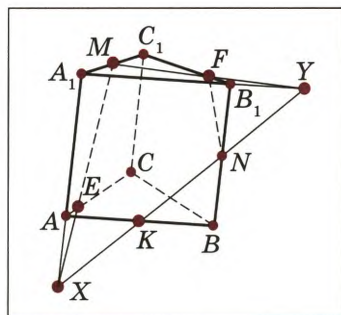


Рис. 1

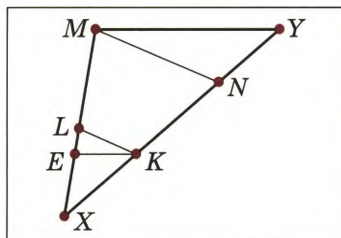


Рис. 2

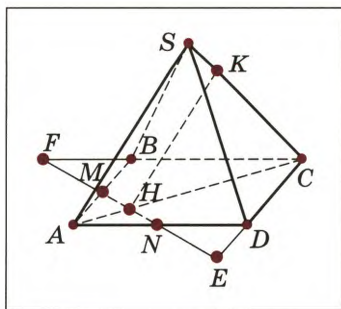


Рис. 3

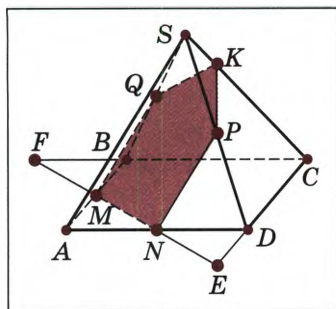


Рис. 4

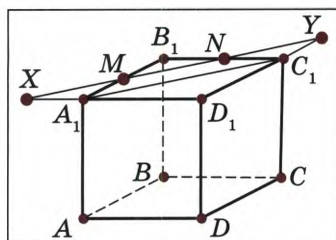


Рис. 5

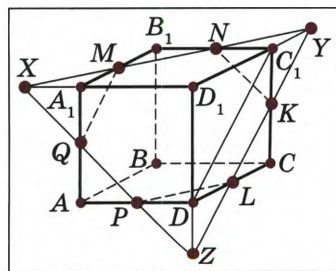


Рис. 6

Отметив точку P пересечения прямой EK с ребром SD и точку Q пересечения прямой FK с ребром SB , получим все вершины сечения $MQKPN$ (рис. 4).

Вопрос. В каких отношениях плоскость сечения делит рёбра пирамиды?

2.3. Построение сечения, параллельного плоскости. Разберём задачу, в которой нужно провести сечение параллельно плоскости.

Пример 3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через середину ребра $A_1 B_1$ проведём сечение параллельно плоскости $A_1 C_1 D$.

Сначала в плоскости $A_1 B_1 C_1 D_1$ через точку M — середину $A_1 B_1$, проведём прямую l параллельно $A_1 C_1$ и отметим точку N пересечения l с ребром $B_1 C_1$, точку X пересечения l с прямой $A_1 D_1$ и точку Y пересечения l с прямой $C_1 D_1$ (рис. 5).

Затем в плоскости $DD_1 C_1 C$ через точку Y проведём прямую m параллельно $C_1 D$ и отметим точку K пересечения m с ребром CC_1 , точку L пересечения m с ребром CD и точку Z пересечения m с прямой DD_1 (рис. 6). Оставшиеся вершины P и Q сечения получаются как точки пересечения прямой XZ с рёбрами AD и AA_1 .

Вопрос. Как доказать, что плоскость XYZ параллельна плоскости $A_1 C_1 D$?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Сколько существует прямых в пространстве, которые параллельны данной прямой MN и проходят через данную точку A ?
2. Сколько существует плоскостей в пространстве, которые параллельны данной прямой MN и проходят через две данные точки A и B ? В каком случае таких плоскостей будет бесконечно много?
3. Сколько существует плоскостей в пространстве, параллельных данной плоскости KMN и проходящих через данную точку A ?

Задачи и упражнения ■

1. Рассмотрим треугольную пирамиду $SABC$, в основании которой лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, а боковые рёбра SA , SB , SC равны 2. Точка M — середина ребра AC , точка N — середина отрезка SM . Проведите через точку N прямую, параллельную прямой SB , до пересечения в точке K с плоскостью ABC . Найдите длины отрезков MK и NK .

2. Рассмотрим куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1. Прямая, проходящая через точку A_1 параллельно прямой $B_1 D$, пересекает плоскость основания $ABCD$ в точке M . Найдите длины отрезков $A_1 M$ и MD .

3. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1 точка M — середина AB . Проведите через точку M прямую, параллельную прямой $B_1 D$, до пересечения в точке K с плоскостью $AA_1 D_1 D$ и в точке L с плоскостью $BB_1 C_1 C$; найдите длины отрезков MK и KL .

4. Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB = 2$, $AD = 4$, $AA_1 = 1$, точка M — середина ребра AB , точка N — середина ребра $A_1 D_1$.

а) Проведите через точку C_1 прямую, параллельную прямой MN , до пересечения в точке P с плоскостью $ABCD$; найдите длину отрезка $C_1 P$;

б) проведите через точку N прямую, параллельную прямой $C_1 M$, до пересечения в точке K с плоскостью $DD_1 C_1 C$; найдите длину отрезка NK ;

в) проведите через точку M прямую, параллельную прямой $A_1 C$, до пересечения в точке L с плоскостью $DD_1 C_1 C$, найдите длину отрезка ML .

5. Рассмотрим треугольную пирамиду $SABC$, у которой основание ABC — равносторонний треугольник со стороной 1, боковые рёбра SA , SB , SC равны 2, точки M и N — середины рёбер AC и AB соответственно. Проведите через точки M и N сечение, параллельное прямой SA , и найдите площадь получившегося сечения.

6. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1, точка M — середина ребра $A_1 B_1$, точка N — середина ребра CC_1 . Через точки M и N проведите плоскость, параллельную прямой $B_1 D$. Найдите площадь получившегося сечения.

7. В правильном тетраэдре $ABCD$ с ребром 1 точка M — середина высоты грани ABD , опущенной из вершины D . Найдите площадь сечения, проходящего через точку M и вершину C и параллельного ребру AB .

8.* На рёбрах AD и BC правильного тетраэдра $ABCD$ с ребром 3 взяты соответственно такие точки M и N , что $2AM = MD$, $2BN = NC$. Найдите периметр сечения, проходящего через точки M и N и параллельного ребру BD .

9. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 1, у которого точка M — середина ребра $A_1 B_1$, точка N — середина ребра CC_1 . Найдите площадь сечения куба, проведённого через:

- а) точку M параллельно плоскости AA_1C_1C ;
- б) точку M параллельно плоскости AB_1D_1 ;
- в)* точку D параллельно прямым AM и B_1N ;
- г)* точку M параллельно плоскости BD_1N .

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскость проходит через вершину B_1 , середину M ребра AD и пересекает ребро CC_1 в точке K . В каком случае плоскость B_1MK параллельна прямой A_1C_1 ?

- 1) $CK : KC_1 = 1 : 4$
- 2) $CK : KC_1 = 1 : 3$
- 3) $CK : KC_1 = 1 : 2$
- 4) $CK : KC_1 = 1 : 1$

1.2.* В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ ребро основания $ABCD$ равно 2 и высота равна 4. Какую наименьшую площадь может иметь сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины рёбер SA , SB и пересекающей ребро BC ?

- 1) 3
- 2) 4
- 3) 5
- 4) 6

1.3. В треугольной пирамиде $ABCD$ известно, что $AB = 12$, $CD = 16$ и $AB \perp CD$. Чему равна площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра BC и параллельной AB и CD ?

- 1) 36
- 2) 48
- 3) 72
- 4) 96

1.4.* В треугольной пирамиде $ABCD$ известно, что $AB = 6$, $CD = 8$. Через точку M ребра BC проводится плоскость, параллельная AB и CD . В каком случае сечением пирамиды этой плоскостью будет ромб?

- 1) $BM : MC = 1 : 2$
- 2) $BM : MC = 2 : 3$
- 3) $BM : MC = 3 : 4$
- 4) $BM : MC = 4 : 5$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1.* В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскость проходит через вершину C_1 и точки M и N , расположенные на рёбрах AD и CD соответственно. В каких случаях плоскость C_1MN параллельна прямой B_1C ?

- 1) $AM = \frac{1}{2}$, $CN = \frac{2}{3}$
- 2) $AM = \frac{2}{3}$, $CN = \frac{3}{4}$
- 3) $AM = \frac{3}{4}$, $CN = \frac{4}{5}$
- 4) $AM = \frac{4}{5}$, $CN = \frac{5}{6}$

2.2. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S проводятся сечения, параллельные прямым AC и SB . Какие многоугольники могут получаться в сечении?

- | | |
|------------------|---------------------|
| 1) треугольники | 2) четырёхугольники |
| 3) пятиугольники | 4) шестиугольники |

2.3. В треугольной пирамиде $ABCD$ на рёбрах AB и CD выбирают соответственно точки M и N . В каких случаях прямая MN содержится в некоторой плоскости, которая параллельна прямым AD и BC ?

- 1) $AM : MB = 1 : 2, CN : ND = 2 : 1$
- 2) $AM : MB = 2 : 1, CN : ND = 2 : 1$
- 3) $AM : MB = 2 : 3, CN : ND = 3 : 2$
- 4) $AM : MB = 3 : 2, CN : ND = 3 : 2$

2.4.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны
 4. Какую площадь могут иметь сечения этой призмы плоскостями, которые параллельны плоскости ABC ?

- 1) 9 2) 10 3) 11 4) 12

§ 3. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЁМЫ ■ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СЕЧЕНИЙ

3.1. Применение сечений на практике. Изображение плоских сечений пространственных фигур часто используют на практике. Например, для изготовления деталей заготавливают чертежи, на которых указываются сечения детали, проведённые в определённых местах. Пример сечения фигуры, изображённой на рис. 1, приведён на рис. 2.

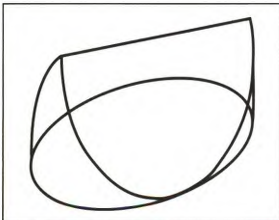


Рис. 1

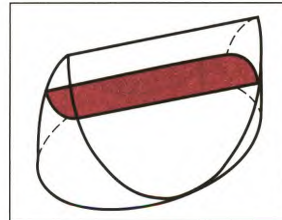


Рис. 2

Вопрос. На столе лежит баранка. Какой вид могут иметь разрезы этой баранки, сделанные перпендикулярно столу?

3.2. Линии уровня. Изображение горизонтальных сечений земной поверхности применяется в географии, например на топографических картах.

Неровности земной поверхности изображаются на карте с помощью *горизонталей*. Горизантали — линии, соединяющие точки с одинаковой

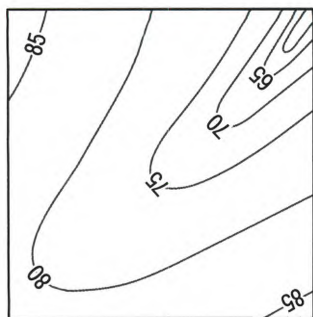


Рис. 3

абсолютной высотой и отстоящие друг от друга на одинаковое расстояние по вертикали.

Чем ближе расположены горизонтали, тем круче склоны холмов и впадин.

Вопрос. На рис. 3 изображён рельеф участка местности. В каком направлении будут стекать талые воды при таянии снега?

3.3.* Применение вспомогательных сечений. Вспомогательные сечения пространственной фигуры позволяют приближённо нарисовать более сложные сечения. Рассмотрим это на при-

мере изображения сечения боковой поверхности цилиндра наклонной плоскостью.

Пусть плоскость α пересекает плоскость верхнего основания цилиндра по прямой a и плоскость нижнего основания цилиндра по прямой b так, как указано на рис. 4.

Проведём перпендикулярную прямым a и b , первую вспомогательную плоскость β , как на рис. 5. Эта плоскость пересекает цилиндр по прямоугольнику, а плоскость α — по прямой A_1B_1 . Но тогда точки M_1 и K_1 — это точки пересечения боковой поверхности цилиндра с плоскостью α .

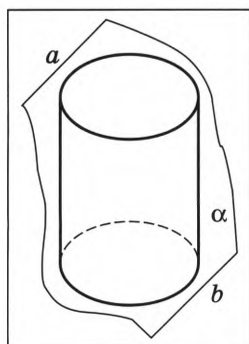


Рис. 4

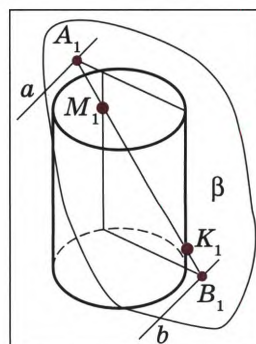


Рис. 5

Затем параллельно плоскости β проведём вторую вспомогательную плоскость γ , как на рис. 6. Эта плоскость также пересекает цилиндр по прямоугольнику, а плоскость α — по прямой. Поэтому точки M_2 и K_2 — это также точки пересечения боковой поверхности цилиндра с плоскостью α .

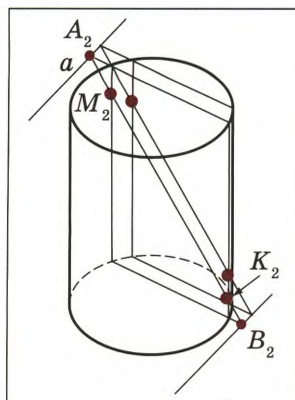


Рис. 6

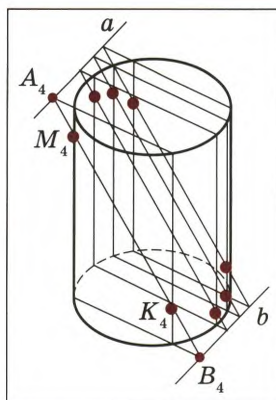


Рис. 7

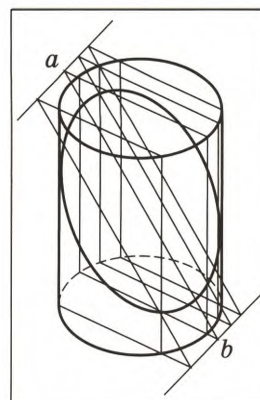


Рис. 8

Параллельно плоскости β проведём ещё несколько сечений. Выполнив все эти построения на одном рисунке, мы получим точки M_1 , K_1 , M_2 , K_2 и так далее (рис. 7). Соединив эти точки плавной линией, получим достаточно точный вид сечения цилиндра плоскостью α (рис. 8).

Вопрос. Как в полевых условиях в кастрюлю цилиндрической формы налить половину объёма воды, который она может вместить?

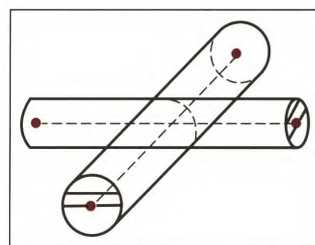


Рис. 9

3.4. Пересечение двух цилиндров.** Рассмотрим две пересекающиеся цилиндрические трубы одинакового сечения, оси которых пересекаются и перпендикулярны (рис. 9). Если через оси цилиндров проведём плоскость α , то в сечении получим два прямоугольника одинаковой ширины. Следовательно, в данной плоскости пересечение труб будет выглядеть как квадрат (рис. 10). Если параллельно плоскости α провести любое другое сечение, то в результате получим также два прямоугольника одинаковой ширины, и в такой плоскости пересечение труб будет также выглядеть как квадрат (рис. 11).

Это обстоятельство позволяет изобразить несколько сечений, параллельных плоскости α ,

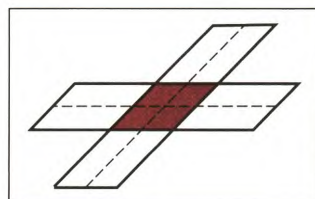


Рис. 10

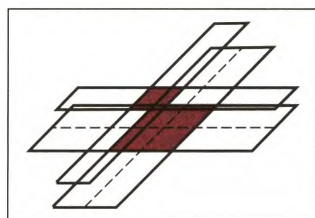


Рис. 11

и в результате дать некоторое наглядное представление о виде пересечения данных цилиндрических труб (рис. 12).

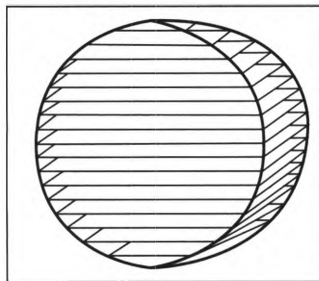


Рис. 12

Вопрос. Рассмотрим пересечение цилиндра с шаром, центр которого расположен на боковой поверхности цилиндра. Какой вид имеют сечения этой фигуры плоскостью, перпендикулярной оси цилиндра?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Что такое линии уровня на топографической карте?
2. Какой вид могут иметь сечения цилиндра плоскостью?

■ Задачи и упражнения

- 1.* Какой вид могут иметь сечения треугольной пирамиды?
- 2.* Какой вид могут иметь сечения четырёхугольной пирамиды плоскостью?
- 3.* Какой вид могут иметь сечения куба плоскостью?
- 4.** Какой вид может иметь параллельная проекция куба?
- 5.** Как доказать, что в сечении куба плоскостью не может получиться семиугольник?

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равна высота правильной четырёхугольной пирамиды с ребром основания 6 и боковым ребром 5?

- 1) $\sqrt{3}$ 2) $\sqrt{5}$ 3) $\sqrt{7}$ 4) 3

1.2. В основании правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 3. Через точку M , расположенную на ребре SA , параллельно основанию проводится сечение. В каком случае площадь сечения будет равна 4?

- 1) $AM : MS = 4 : 3$ 2) $AM : MS = 3 : 4$
3) $AM : MS = 2 : 1$ 4) $AM : MS = 1 : 2$

1.3. Чему равно расстояние между серединами скрещивающихся рёбер правильного тетраэдра с ребром a ?

- 1) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ 2) $\frac{a}{2}$ 3) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ 4) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

1.4.* В сечении куба с ребром $\sqrt{3}$ получается ромб, одна из диагоналей которого равна 3. Какую длину имеет другая диагональ этого ромба?

- 1) 1 2) $\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{3}$ 4) $\sqrt{6}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какую длину может иметь боковое ребро правильной четырёхугольной пирамиды, у которой ребро основания равно 14?

- 1) 8 2) 9 3) 10 4) 11

2.2. Какой вид могут иметь сечения правильной треугольной призмы плоскостями, параллельными ребру основания?

- 1) равнобедренный треугольник 2) прямоугольник
3) равнобедренная трапеция 4) прямоугольная трапеция

2.3. Какие многоугольники могут получаться при сечении правильной четырёхугольной пирамиды плоскостью, проходящей через одну из её вершин?

- 1) треугольник 2) четырёхугольник
3) пятиугольник 4) шестиугольник

2.4. Какие многоугольники могут получаться при сечении куба плоскостью, проходящей через две его вершины?

- 1) треугольник 2) четырёхугольник
3) пятиугольник 4) шестиугольник

Мини-исследования к главе ■

Мини-исследование 22

В каких случаях сечения тетраэдра и шара любой плоскостью, параллельной заданной плоскости α , имеют одинаковую площадь?

Предлагается следующая схема исследования:

1. Существуют две «крайние» плоскости, параллельные плоскости α и имеющие общие точки с тетраэдром. Поэтому если существует шар, удовлетворяющий условию, то он также расположен между этими двумя плоскостями и его диаметр равен расстоянию между ними. Обозначим диаметр шара через d . Поскольку пересечение «крайней» плоскости с шаром состоит из одной точки и имеет нулевую площадь, то и тетраэдр пересекается с «крайней» плоскостью по вершине или ребру.

2. Пусть тетраэдр пересекается с «крайней» плоскостью α_1 только в вершине. Тогда сечения тетраэдра параллельными плоскостями, достаточно близкими к плоскости α_1 , являются подобными треугольниками, причём коэффициент подобия пропорционален расстоянию от плос-

кости α_1 . Площадь сечения в этом случае находится по формуле $S = A \cdot x^2$, где x — расстояние от плоскости α_1 , а A — некоторый коэффициент, зависящий от тетраэдра. Сечением шара является круг, площадь которого, в свою очередь, определяется по формуле $\pi \cdot x \cdot (d - x)$. Очевидно, что они не могут быть равны при всех значениях x и, следовательно, «крайняя» плоскость может пересекаться с тетраэдром только по ребру.

3. Как установлено в предыдущем пункте, на каждой «крайней» плоскости лежат две вершины и все сечения тетраэдра являются параллелограммами, стороны которых параллельны двум скрещивающимся рёбрам тетраэдра. Обозначим через a , b длины этих рёбер и через γ — угол между ними. Проверьте, что если $ab \sin \gamma = \pi \cdot d^2$, то площади соответствующих сечений тетраэдра и шара одинаковы.



Эта глава имеет важное значение. Здесь выявляются принципиальные связи между геометрическими объектами — кривыми и касательными к ним — и соответствующими этим геометрическим объектам функциями. Мы сформулируем определение касательных к кривым и установим их простейшие свойства. Вы узнаете некоторые правила для получения уравнения касательной к графику функции. Материал данной главы составит основу для введения в дальнейшем понятий дифференциала и производной.

§ 1. ПОНЯТИЕ КРИВОЙ ■

1.1. Наглядное представление о непрерывной кривой. Предметом изучения в этой главе являются линии на плоскости. С некоторыми примерами линий вы уже познакомились ранее — это прямые, лучи, отрезки, ломаные, параболы, гиперболы, окружности и эллипсы. Однако этими примерами понятие о линиях не исчерпывается. В науке и практике приходится иметь дело с более общими криволинейными траекториями или просто *кривыми*, наглядное представление о которых можно получить, нарисовав график какой-нибудь функции, определённой на отрезке числовой оси.

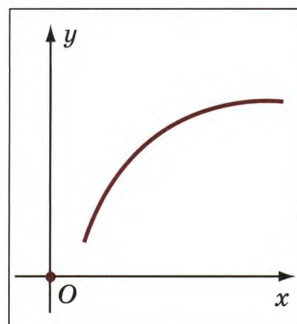


Рис. 1

Обратимся к рис. 1 и 2, где изображены графики двух различных функций. С первого взгляда заметно существенное различие между ними. График на рис. 1 состоит из одного куска, который можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. О таких графиках говорят, что они *непрерывны*. Напротив, график на рис. 2 состоит из двух кусков, то есть *имеет разрыв*.

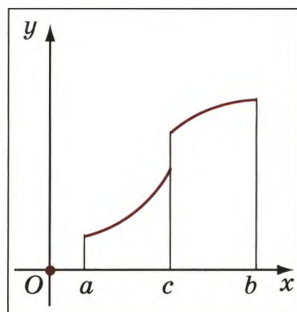


Рис. 2

Разницу между этими двумя функциями можно описать и другим способом. В первом случае для «близких» друг другу значений аргумента x_1 и x_2 соответствующие значения функции $f(x_1)$ и $f(x_2)$ также будут «близки». Этого

нельзя сказать о второй функции, значения которой «скачком» изменяются при переходе аргумента x через точку c .

Функцию на рис. 1 принято называть *непрерывной*, а функцию на рис. 2 — *разрывной*. Понятие непрерывности чрезвычайно важно в математике, поэтому в следующих пунктах мы дадим ему строгое определение.

Вопрос. Известны ли вам какие-нибудь конкретные примеры функций, которые вы могли бы назвать разрывными?

1.2. Промежутки на числовой прямой. Пусть a и b — действительные числа, причём $a < b$. Напомним, что промежутком на числовой прямой с концами a и b называется множество всех действительных чисел x , удовлетворяющих одному из неравенств:

$$a < x < b, a \leq x < b, a < x \leq b, a \leq x \leq b.$$

Указанные числовые промежутки обозначаются через $(a; b)$, $[a; b)$, $(a; b]$, $[a; b]$ соответственно. Напомним, что квадратная скобка означает, что точка принадлежит промежутку, а круглая скобка означает, что точка не принадлежит промежутку. Например, для числового промежутка $[a; b)$ точка a принадлежит $[a; b)$, точка b не принадлежит $[a; b)$.

Нам придётся рассматривать промежутки всех четырёх видов, поэтому удобно ввести для них универсальное обозначение $\langle a; b \rangle$. Если тип рассматриваемого промежутка не имеет принципиального значения, то вместо четырёх специальных обозначений мы будем использовать одно универсальное.

Числовыми промежутками принято также считать всевозможные лучи и даже всю числовую прямую целиком. Обозначения для таких множеств имеют вид: $(-\infty; a)$, $(-\infty; a]$, $[a; \infty)$, $(a; \infty)$, $(-\infty; \infty)$. Для этих числовых промежутков также может использоваться универсальное обозначение.

Множество, состоящее из одной точки a , также можно считать замкнутым промежутком вида $[a; a]$, у которого начало и конец совпадают.

Вопрос. Что можно сказать о промежутке вида $(a; a]$, где a — фиксированное число?

1.3. Непрерывность монотонных функций. Напомним, что функция $f(x)$ называется *возрастающей* на множестве D , если для любых значений $x_1 < x_2$ из этого множества выполнено неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$. Заменив последнее неравенство неравенством $f(x_1) \geq f(x_2)$, мы получим понятие *убывающей* на D функции. Если функция обладает на множестве D одним из этих свойств — либо возрастает, либо убывает, — то она называется *монотонной* на множестве D .

Определение монотонности имеет смысл только тогда, когда множество D содержит более одной точки. В дальнейшем предполагается, что если речь идёт о монотонности на некотором промежутке, то этот промежуток не сводится к одной точке. В главе 7 было приведено определение непрерывности числовой функции, используя пределы. Для монотонных функций понятие непрерывности можно определить иначе.

Пусть функция $f(x)$ монотонна на промежутке $\langle a; b \rangle$. Тогда она является *непрерывной* на этом промежутке, если множество её значений также является промежутком.

Промежутки, о которых здесь идёт речь, могут быть какими угодно — замкнутыми или открытыми, ограниченными или неограниченными. При этом область значений, в отличие от области определения, может состоять из одной точки. Так бывает, если речь идёт о постоянной функции, все значения которой одинаковы.

Это определение отражает интуитивное представление о том, что график непрерывной функции не должен содержать «скачков», а множество её значений — «пропусков» или «пробелов». Можно показать, что для монотонной функции определение непрерывности, приведённое в данном пункте, и определение непрерывности из главы 7 эквивалентны.

Приведённому определению непрерывности удовлетворяют многие известные функции. Например, всякая линейная функция вида $f(x) = kx + b$ непрерывна на всей числовой прямой.

Квадратичная функция $f(x) = x^2$ не является монотонной на всей числовой прямой. Но на каждом из лучей $(-\infty; 0]$ или $[0; \infty)$ по отдельности она монотонна. Множество её значений в обоих случаях — промежуток $[0; \infty)$. Следовательно, квадратичная функция непрерывна на каждом из указанных промежутков.

Аналогичный вывод можно сделать и для функции $f(x) = \frac{1}{x}$ — на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ или $(0; \infty)$ эта функция непрерывна.

Важно отметить, что приведённое определение непрерывности монотонных функций относится к определённому промежутку $\langle a; b \rangle$. Одна и та же функция может быть непрерывна на одних промежутках и разрывна — на других. Например, функция, график которой изображён на рис. 2, является разрывной на промежутке $\langle a; b \rangle$, но на каждом из промежутков $\langle a; c \rangle$ и $\langle c; b \rangle$ она всё-таки непрерывна.

Вопрос. Что вы можете сказать о непрерывности функции $f(x) = \sqrt{x}$?

1.4. Кривые на плоскости. Множество M на координатной плоскости Оху назовём *элементарной монотонной кривой*, если оно является графиче-

ком непрерывной и монотонной функции $y = f(x)$, определённой на некотором промежутке, или графиком непрерывной и монотонной функции $x = g(y)$, также определённой на некотором промежутке. Элементарными монотонными кривыми будут, например, график функции $f(x) = 2x + 1$ на произвольном промежутке $\langle a; b \rangle$, часть параболы $f(x) = x^2$ на отрезке $0 \leq x \leq 12,3$, часть гиперболы $f(x) = \frac{1}{x}$ на интервале $(-\pi; 0)$, а также многие другие известные вам линии, например, прямая с уравнением $x = 2$.

Всюду в этой главе, если не оговорено противное, рассматриваются *кусочно-элементарные* кривые, то есть кривые, которые можно представить как объединение конечного числа элементарных монотонных кривых, попарно не имеющих общих точек.

Пример 1. Простейший пример кусочно-элементарной кривой — график функции $f(x) = x^2$, определённой на всей числовой оси. Его можно представить в виде объединения двух элементарных монотонных кривых: параболы $f(x) = x^2$ на числовом луче $(-\infty; 0)$ и параболы $f(x) = x^2$ на замкнутом числовом луче $[0; \infty)$. Понятно, что эти элементарные монотонные кривые не имеют общих точек.

Пример 2. Кусочно-элементарной кривой является также множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x = y^2$. Эту кривую можно представить в виде объединения двух элементарных монотонных кривых: графика функции $y = \sqrt{x}$ на замкнутом числовом луче $[0; \infty)$ и графика функции $y = -\sqrt{x}$ на луче $(0; \infty)$. Рассмотренная кривая является параболой.

Пример 3. Гипербола $f(x) = \frac{1}{x}$, определённая при всех $x \neq 0$, является кусочно-элементарной кривой, составленной из двух элементарных монотонных кривых — графиков функции $f(x) = \frac{1}{x}$ на интервалах $(-\infty; 0)$ и $(0; \infty)$.

Пример 4. Окружность O с уравнением $x^2 + y^2 = r^2$ — также кусочно-элементарная кривая. В самом деле, множество O разлагается в объединение четырёх элементарных монотонных кривых — графиков функций:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \text{ на промежутке } [0; r];$$

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \text{ на промежутке } [-r; 0];$$

$$f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2} \text{ на промежутке } (-r; 0];$$

$$f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2} \text{ на промежутке } (0; r].$$

Примерами кусочно-элементарных кривых являются любые многоугольники, как фигуры составленные из отрезков, графики тригонометрических функций на конечных интервалах изменения аргументов и другие фигуры.

В дальнейшем в этой главе кусочно-элементарные кривые иногда будем называть кривыми.

Отметим, что в математической литературе слово «кривая» употребляется в столь разных смыслах, что каждый раз следует выяснять, что именно имеется в виду. В курсе высшей математики кривыми обычно называют более общие объекты, чем сказано в начале этого пункта. Однако для большинства прикладных исследований достаточно приведённого выше определения.

Вопрос. Почему функция $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ непрерывна на промежутке $[0; r)$?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Какое множество называется промежутком на числовой прямой?
2. Какие функции называются монотонными?
3. В каком случае монотонная функция считается непрерывной?
4. Приведите примеры непрерывных функций.
5. Приведите примеры разрывных функций.
6. Что называют элементарной монотонной кривой?
7. Какое множество называется кусочно-элементарной кривой?
8. Приведите примеры известных вам кусочно-элементарных кривых.
- 9.** Как объяснить, что график функции $y = \sin x$, определённой на всей числовой оси, не является элементарной кривой?

Задачи и упражнения ■

1. Может ли промежуток на числовой прямой содержать ровно две различные точки?
2. Найдите промежутки монотонности функции $f(x) = x^2 + 2x - 1$.
3. Проверьте определение непрерывности для функции $f(x) = 2x + 1$.
4. Докажите, что функция $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 - 1)$ непрерывна на промежутке $[1; \infty)$.
- 5.** Докажите, что функция $f(x) = 3x - 2$ при $x \leq 0$ и $f(x) = x + 1$ при $x > 0$ не является непрерывной на всей числовой прямой.
- 6.** Докажите, что функция $f(x) = x^2 + 1$ при $x < -1$ и $f(x) = -2x$ при $x \geq -1$ непрерывна на промежутке $(-2; 0)$.

7.* Докажите, что функция $f(x) = x^3 - 1$ при $x \leq 1$ и $f(x) = 2x$ при $x > 1$ не является непрерывной на промежутке $[0; 3]$.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какова область определения функции $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2-1}$?

- 1) $(-\infty; -1) \cup (1; \infty)$ 2) $(-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$
3) $(-\infty; 1) \cup (1; \infty)$ 4) $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$

1.2. На каком из указанных промежутков функция $f(x) = \sin(x - \pi)$ не является монотонной?

- 1) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ 2) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ 3) $[\pi - 1; \pi + 1]$ 4) $(\pi - 2; \pi + 2)$

1.3. Пусть $f(x) = x^2 - 4x + 3$. При каком значении a уравнение вида $f(x) = a$ имеет хотя бы один корень?

- 1) $a = -3$ 2) $a = -2$ 3) $a = -1,5$ 4) $a = -0,5$

1.4.* Чему равно значение выражения $\left[6 \sin \frac{\pi}{3}\right]$?

- 1) 4 2) 5 3) 6 4) 7

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Область определения каких функций состоит из одной точки?

- 1) $f(x) = \sqrt{-x^2}$ 2) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
3) $f(x) = \sqrt{\sin x - 1}$ 4) $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$

2.2. Какие из указанных функций всюду определены?

- 1) $f(x) = \sqrt{\frac{4x}{1+x^2}}$ 2) $f(x) = \frac{4x}{1-x^2}$
3) $f(x) = \sin \frac{4x}{1+x^2}$ 4) $f(x) = \frac{x}{4+x^2}$

2.3. Графики каких из указанных функций, определённых на всей числовой прямой, можно представить в виде объединения конечного числа элементарных монотонных кривых?

- 1) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ 2) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
3) $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$ 4) $f(x) = |x - 1| - |x + 1|$

2.4. На каких промежутках функция $y = x^2 + 2x$ является монотонной?

- 1) $(-3; -1)$ 2) $(-2; 0)$ 3) $(-1; 1)$ 4) $(0; 2)$

§ 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КАСАТЕЛЬНОЙ

2.1. Наглядные представления о касательной. В практической деятельности часто приходится иметь дело с касательными к некоторым кривым, поэтому у каждого человека складывается своё интуитивное представление о касательной. Приведём несколько примеров, которые дают приближённые представления о касательных.

Если предположить, что фара мотоцикла светит строго по направлению вперёд, то можно рассматривать луч света от фары как часть прямой, которая соприкасается с траекторией перемещения фары.

Натянутая нить, один из концов которой намотан на цилиндр, направлена по касательной к сечению этого цилиндра плоскостью, содержащей натянутую часть нити, то есть является частью прямой, которая соприкасается с сечением цилиндра.

В рассмотренных примерах указанные прямые можно считать касательными к соответствующим кривым: в первом примере к траектории перемещения фары, во втором примере — к границе сечения цилиндра.

Вопрос. Какие примеры касательных вам известны?

2.2. Свойства касательной к окружности. Напомним, что всякая прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, называется *касательной* к этой окружности.

Всякая прямая, имеющая с окружностью более одной общей точки, называется *секущей*. Отметим, что всякая секущая содержит две точки окружности. Попробуем понять, чем ещё отличается касательная от секущей, кроме числа общих точек с окружностью.

Пусть прямая l касается окружности O в точке A . Проведём через точку A две секущие, то есть две прямые — BE и CD . Выберем пару вертикальных углов, образованных прямыми BE и CD так, чтобы касательная l целиком содержалась в этих вертикальных углах (рис.1).

Секущие BE и CD содержат точку A окружности O . Обозначим через F и G вторые точки пересечения окружности O с прямыми BE и CD соответственно. Дуга FAG окружности O будет целиком расположена в тех же самых вертикальных углах BAC и DAE , где содержится касательная l . Тем более в тех же самых вертикальных углах будет расположена дуга этой окружности,

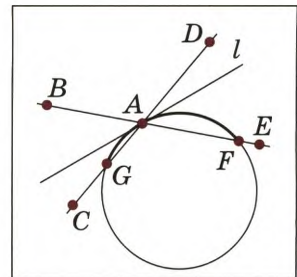


Рис. 1

которая находится в круге с центром A и радиусом длины r , где положительное число r меньше каждого из расстояний AF и AG (рис. 2).

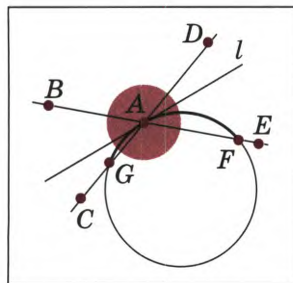


Рис. 2

Таким образом, рассмотренная пара вертикальных углов, содержащих касательную, содержит все точки исходной окружности O , удалённые от точки A на расстояние, меньшее r . Иногда в этом случае говорят, что данная пара вертикальных углов содержит все точки исходной окружности, *достаточно близкие к точке A* (близость определяется выбранным числом r).

В результате установлено следующее утверждение, которое назовём *характеристическим свойством касательной к окружности*.

Пусть прямая l касается окружности O в точке A . Тогда для каждой пары вертикальных углов с вершиной в точке A , целиком содержащей прямую l , найдётся такое положительное число r , что эта пара вертикальных углов содержит все точки окружности O , удалённые от точки A на расстояние меньшее r .

Характеристическое свойство касательной иногда формулируют по-другому.

Если прямая l касается окружности O в точке A , то всякая пара вертикальных углов с вершиной A , целиком содержащая прямую l , содержит все достаточно близкие к A точки данной окружности.

Вопрос. Какие свойства касательной к окружности вам известны?

2.3. Отличие секущей от касательной.** Отметим вначале, что всякая секущая к окружности O делит эту окружность на две дуги, одна из которых находится в одной полуплоскости относительно секущей к выбранной окружности, а другая дуга расположена в другой полуплоскости относительно этой секущей (рис. 3).



Рис. 3

Пусть прямая m , проходящая через точку A окружности O , не является касательной к этой окружности и H — вторая точка пересечения прямой m с окружностью. Секущая m делит окружность O на две дуги с концами A и H , лежащие в различных полуплоскостях относительно прямой m . Выберем на одной из этих дуг точку F , а на другой дуге точку G так, чтобы соответственно точка F лежала внутри одной из этих дуг, а точка G — внутри другой из этих дуг. В резуль-

тате получим, что точки F и G принадлежат различным полуплоскостям относительно секущей m (рис. 4), и прямая m целиком расположена в паре вертикальных углов, образованных прямыми AF и AG .

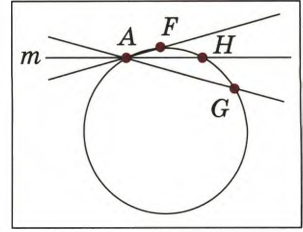


Рис. 4

Множество всех внутренних точек дуги AF , содержащейся в той же полуплоскости относительно прямой m , что и точка F , обозначим через d_F . Множество всех внутренних точек дуги AG , содержащейся в той же полуплоскости относительно прямой m , что и точка G , обозначим через d_G .

Получим, что множество d_F и угол FAG лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AF , а поэтому d_F и угол FAG не имеют общих точек.

Вершина угла FAG лежит на окружности, а его стороны пересекаются с окружностью в точках F и G . Стороны угла, вертикального к углу FAG , не пересекаются с этой окружностью, потому что прямая с окружностью не может иметь более двух общих точек. Следовательно, множество d_F и угол, вертикальный к углу FAG , также не имеют общих точек.

Значит, все точки множества d_F окружности O не содержатся в паре вертикальных углов, образованных прямыми AF и AG , в частности, точки множества d_F , достаточно близкие к точке A .

Аналогично в паре вертикальных углов, образованных прямыми AF и AG , не содержатся и все точки множества d_G окружности O , в частности, достаточно близкие к точке A .

В результате получено следующее утверждение.

Если прямая m проходит через точку A окружности O и не является касательной к этой окружности, то найдётся такая пара вертикальных углов, целиком содержащая прямую m , что для некоторого положительного числа r эта пара вертикальных углов содержит не все точки окружности O , удалённые от точки A на расстояние меньше r .

Отсюда следует, что секущая окружности не обладает характеристическим свойством касательной.

Это позволяет сделать следующий вывод.

Пусть прямая l проходит через точку A окружности O и обладает свойством: для каждой пары вертикальных углов с вершиной в точке A , целиком содержащей прямую l , найдётся такое положительное число r , что эта пара вертикальных углов содержит все точки окружности O , удалённые от точки A на расстояние меньше r . Тогда прямая l является касательной.

Вопрос. Как измеряется угол между касательной и секущей, проведёнными через одну точку на окружности?

2.4. Определение касательной к кривой. Опираясь на характеристическое свойство касательной к окружности, дадим определение касательной к кривой.

Прямая l называется касательной к кривой K в точке A , если для каждой пары P вертикальных углов с вершиной в точке A , целиком содержащей прямую l , найдётся число $r > 0$ такое, что пара P содержит все точки кривой K , удалённые от точки A на расстояние меньше r .

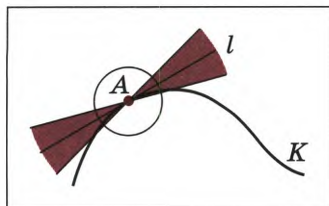


Рис. 5

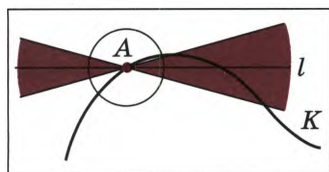


Рис. 6

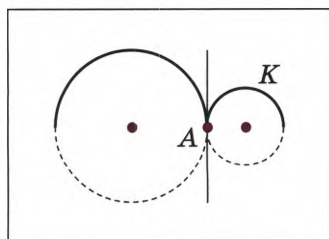


Рис. 7

Это определение иногда формулируют иначе.

Прямая l называется касательной к кривой K в точке A , если каждая пара вертикальных углов с вершиной в точке A , целиком содержащая прямую l , содержит также все точки кривой K , достаточно близко расположенные к точке A .

Слова «все точки кривой K , достаточно близко расположенные к точке A » обозначают совокупность всех точек кривой K , отстоящих от A не более чем на некоторое положительное число r . Конкретная величина числа r зависит от выбора соответствующих вертикальных углов и может быть любой, хотя бы и очень маленькой (рис. 5). Главное, чтобы такое число существовало для всякой пары вертикальных углов с вершиной A , содержащей прямую l .

Если найдётся какая-нибудь пара вертикальных углов с вершиной A , которая содержит прямую l , но содержит не все точки кривой, достаточно близкие к A , то прямая l не будет касательной к кривой K в точке A (рис. 6).

Пример 1. Рассмотрим кривую K , составленную из половин двух окружностей, касающихся друг друга внешним образом в точке A (рис. 7). Касательной к кривой K в точке A будет общая касательная l к тем самым окружностям, из половин которых составлена линия K .

Вопрос. Как объяснить, что прямая l на рис. 7 удовлетворяет определению касательной в точке A по отношению к кривой K ?

2.5.** Единственность касательной.

Покажем, что в каждой точке кривой может быть не более одной касательной.

Пусть две различные прямые l и m проходят через точку A кривой K . Рассмотрим две пары вертикальных углов с вершиной A , первая из которых содержит прямую l , а вторая — прямую m . Величины этих углов всегда можно выбрать настолько малыми, что они не будут иметь кроме A никаких других общих точек (рис. 8).

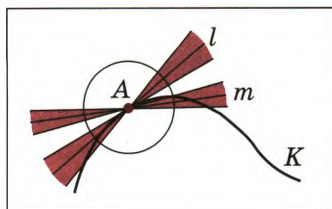


Рис. 8.

В этом случае никакая часть кривой K не может одновременно располагаться и в первой паре вертикальных углов, и во второй паре. Следовательно, определение касательной не может выполняться одновременно для двух различных прямых l и m .

Поэтому двух различных касательных к кривой в данной точке не существует.

Вопрос. Какой вид имеют касательные к отрезку, проведённые в точках этого отрезка?

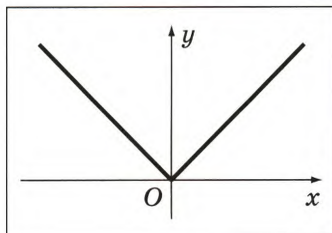


Рис. 9

2.6.** Линия, не имеющая касательной в некоторой точке.

Пример 2. Рассмотрим график функции $y = |x|$, изображённый на рис. 9. Никакая прямая, проходящая через точку $(0; 0)$, не является касательной к этому графику.

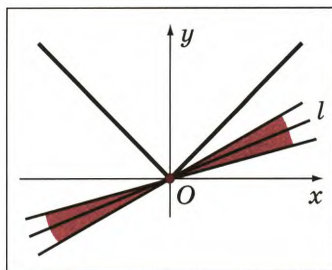


Рис. 10

В самом деле, если прямая l не совпадает ни с одной из ветвей графика, то всегда можно указать пару вертикальных углов с вершиной в начале координат, которая целиком содержит l , но не включает ни одной точки графика, кроме самого начала координат (рис. 10).

Пусть l совпадает с одной из ветвей графика, например, имеет уравнение $y = x$. Тогда существует пара вертикальных углов с вершиной в начале координат (рис. 11), которая содержит прямую l , но не включает ни одной точки левой ветви данного графика, кроме

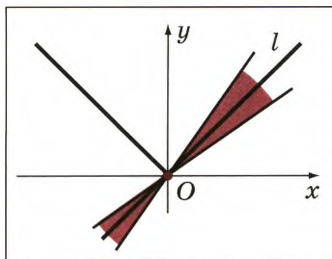


Рис. 11

начала координат. Как бы мы ни выбирали положительное число r , точки левой ветви, кроме начала координат, удалённые от начала координат менее чем на r , никогда не попадут в указанные углы.

Аналогичное рассуждение показывает, что прямая $y = -x$ тоже касательной не является. Таким образом, график функции $y = |x|$ не имеет касательной в точке $(0; 0)$.

Вопрос. При каких значениях x точки параболы $y = x^2$ удалены от точки $A(0; 0)$ не более чем на $2\sqrt{5}$?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Что называется касательной к окружности?
2. Какие примеры касательных к кривым вы знаете?
- 3.** Может ли прямая иметь с кривой единственную общую точку, но не быть касательной?
4. Сформулируйте характеристическое свойство касательной к окружности.
5. Каково общее определение касательной к произвольной кривой?
6. Как вы понимаете фразу «все точки кривой, достаточно близкие к данной точке»?
- 7.** Можно ли провести несколько касательных к произвольной кривой в одной и той же точке?
- 8.** Может ли кривая не иметь касательных в некоторых точках?

■ Задачи и упражнения

1. Окружность с центром O касается прямой m в точке A . Прямая n проходит через точку A , образует угол в 1° с прямой m и пересекает окружность в точке B . Найдите величину угла ABO .

2.** Дан угол в 60° с вершиной A . Окружность S касается сторон этого угла в точках B и C . Прямая n проходит через точку A , образует угол в 2° с прямой AB и пересекает окружность S в точках M и K . Найдите величину угла MSK .

3. Через точку A окружности проведены касательная m и прямая n , образующая угол в 5° с прямой m и пересекающая окружность в точке B . В каком отношении делят длину окружности точки A и B ?

4. На окружности с центром O отмечены точки A и B так, что угол AOB равен 1° . Найдите угол:

- а) между касательной к окружности, проведённой в точке A , и хордой AB ;
- б) между касательными, проведёнными к окружности в точках A и B .

5. Через точку A окружности проведена касательная m и две прямые — n и k , образующие с прямой m угол в 1° . Какую часть окружности содержат острые вертикальные углы между прямыми n и k ?

6.** К окружности в точке A проведена касательная m . Под каким углом к прямой m нужно провести через точку A две прямые — n и k , чтобы острые вертикальные углы между прямыми n и k содержали тысячную часть окружности?

7. Окружность радиуса 1 м касается прямой m в точке A . Точка B окружности находится на расстоянии 1 см от прямой m . Найдите расстояние AB .

8.** Докажите, что прямая $y = \frac{1}{10}x$ не является касательной к параболе $y = x^2$ в точке $(0; 0)$.

9.** Объясните, почему прямая $y = 0$ является касательной к параболе $y = x^2$ в точке $(0; 0)$.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1.** В какой из перечисленных точек функция $y = |x + 1| + 2|x|$ не имеет касательной?

- 1) -2 2) -1 3) 1 4) 2

1.2. Какая из прямых является касательной к кривой, заданной уравнением $x^2 + y^2 - 2x = 0$?

- 1) $y = x$ 2) $y = 0$ 3) $y = -x$ 4) $x = 0$

1.3.* Через какую из указанных точек не проходит ни одна из касательных к графику функции $y = x - 1$?

- 1) $(0; 0)$ 2) $(1; 0)$ 3) $(0; -1)$ 4) $(-1; -2)$

1.4. Для какой из указанных окружностей прямая, задаваемая уравнением $y = x$, является касательной?

- 1) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$ 2) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$
3) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$ 4) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Каким может быть число касательных, которые можно провести через данную точку к данной окружности в зависимости от их взаимного расположения?

- 1) 0 2) 1 3) 2 4) 3

2.2. Сколько общих точек могут иметь кривая и касательная к ней?

1) 0 2) 1 3) 2 4) бесконечное множество

2.3. Сколько точек касания может быть у данной кривой и данной прямой?

1) 0 2) 1 3) 3 4) бесконечное множество

2.4. Сколько всего общих касательных может быть проведено к двум различным окружностям, имеющим хотя бы одну общую точку?

1) ни одной 2) 1 3) 2 4) 3

■ § 3. УРАВНЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ

3.1. Уравнение прямой. Выберем на плоскости прямоугольную систему координат с началом O и осями Ox , Oy . Пусть l — любая прямая, не параллельная оси Oy . Тогда её уравнение можно записать в виде:

$$y = kx + b. \quad (1)$$

Наоборот, всякое уравнение вида (1) задаёт некоторую прямую, не параллельную оси Oy .

Коэффициент k в уравнении (1) имеет наглядный геометрический смысл. Рассмотрим две любые различные точки $P(x_1; y_1)$ и $Q(x_2; y_2)$, принадлежащие прямой l . Их координаты удовлетворяют уравнению (1). Иными словами, $y_1 = kx_1 + b$, $y_2 = kx_2 + b$.

Вычитая первое равенство из второго, получим

$$y_2 - y_1 = kx_2 - kx_1.$$

Так как $x_1 \neq x_2$, отсюда находим, что

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (2)$$

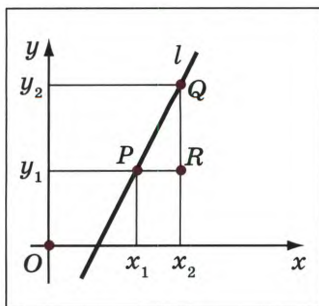


Рис. 1

С другой стороны, обозначим через α угол, отсчитываемый против часовой стрелки и образованный положительным направлением оси Ox с прямой l .

Если этот угол острый (рис. 1), то он равен углу QPR в прямоугольном треугольнике PQR . Так как разность $(y_2 - y_1)$ равна длине катета QR , а разность $(x_2 - x_1)$ — длине

катета PR , то $\operatorname{tg} \alpha = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$, по фор-

муле (2) коэффициент k совпадает с тангенсом угла α .

Если угол α тупой (рис. 2), то он равен углу, смежному с углом QPR . Так как в этом случае $QR = y_2 - y_1$, $PR = x_1 - x_2$ углу,

$$\operatorname{tg} \angle QPR = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \alpha = -\operatorname{tg} \angle QPR = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k.$$

Таким образом,

коэффициент k в уравнении (1) равен тангенсу угла α , образованного положительным лучом оси Ox с прямой l и отсчитываемого против хода часовой стрелки.

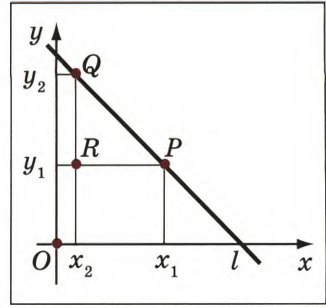


Рис. 2

В связи с указанным свойством коэффициент k называют также *угловым коэффициентом*, *коэффициентом наклона* или просто *наклоном* прямой l .

Вопрос. Какой вид имеет уравнение прямой, проходящей через точки $(2; 1)$ и $(-1; 2)$?

3.2. Составление уравнения прямой. Если известны наклон k некоторой прямой l и лежащая на ней точка $A(x_0; y_0)$, то нетрудно восстановить уравнение прямой. В самом деле, это уравнение должно иметь вид (1), где число k задано. Подставив в него координаты точки A , найдём число b :

$$y_0 = kx_0 + b, \quad b = y_0 - kx_0.$$

Следовательно, искомое уравнение прямой l записывается в виде $y = kx + y_0 - kx_0$, поэтому:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (3)$$

Вопрос. Чему равняется наклон прямой с уравнением $y = 7$?

3.3. Связь между угловыми коэффициентами нескольких прямых. Пусть через точку $A(x_0; y_0)$ проведена прямая l с уравнением

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Возьмём любую такую пару вертикальных углов с вершиной $A(x_0; y_0)$, целиком содержащую прямую l , что наклоны прямых l_1 и l_2 , содержащих стороны вертикальных углов, имеют тот же знак, что и знак наклона прямой l (рис. 3). Через k_1 и k_2 обозначим угловые коэффициенты прямых, образующих стороны этих углов. Для определённости будем считать, что $k_1 < k_2$. Прямая l заключена между прямыми l_1 и l_2 , поэтому величина угла наклона прямой l заключена между величинами углов наклона прямых l_1 и l_2 . Отсюда угловой коэффициент k прямой l окажется больше, чем k_1 , и меньше, чем k_2 , то есть $k_1 < k < k_2$. Полученное неравенство означает, что число k принадлежит промежутку $(k_1; k_2)$.

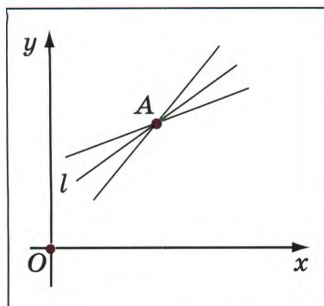


Рис. 3

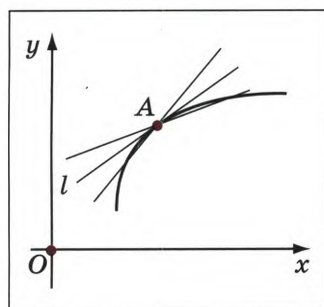


Рис. 4

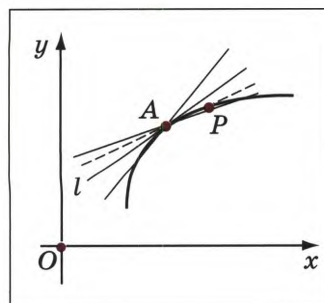


Рис. 5

Вопрос. Рис. 3 иллюстрирует случай, когда угловые коэффициенты прямых положительны. Как будут выглядеть рисунок и рассуждения, когда угловые коэффициенты прямых отрицательны?

3.4. Угловой коэффициент касательной как предел угловых коэффициентов секущих. Рассмотрим кривую K на координатной плоскости. Выберем на K точку $A(x_0; y_0)$, в которой касательная не параллельна оси Oy , и найдём уравнение касательной в этой точке.

Допустим, что l — касательная. Возьмём такую пару вертикальных углов с вершиной A , целиком содержащую прямую l , что наклоны k_1 и k_2 прямых l_1 и l_2 , содержащих стороны вертикальных углов, имеют тот же знак, что и знак наклона прямой l (рис. 4). Для определённости будем считать, что $k_1 < k_2$.

Тогда в силу предыдущего пункта:

$$k_1 < k < k_2. \quad (4)$$

Полученное неравенство означает, что число k принадлежит промежутку $(k_1; k_2)$.

Поскольку l — касательная, то взятая пара вертикальных углов должна содержать каждую достаточно близкую к A точку $P(x; y)$ на кривой K . Секущая AP также содержится в указанной паре вертикальных углов (рис. 5). Её угловой коэффициент k_3 опять окажется больше, чем k_1 , и меньше, чем k_2 . Вычислив коэффициент k_3 по формуле (2), получим

$$k_1 < \frac{y - y_0}{x - x_0} < k_2. \quad (5)$$

Таким образом, мы пришли к свойству касательной:

если прямая l касается кривой K в точке A , то всякий числовой промежуток, которому принадлежит угловой коэффициент прямой l , содержит также угловой коэффициент каждой прямой, проходящей через точку A и через достаточно близкую к ней точку данной кривой.

Как и ранее, слова «все достаточно близкие к A точки данной кривой» означают совокупность всех точек кривой K , отстоящих от A на расстоянии не больше, чем некоторое положительное число r . Величина r зависит от выбора промежутка $(k_1; k_2)$. При изменении этого промежутка значение r также может меняться. Важно лишь, чтобы такое число r существовало для каждого промежутка, содержащего число k .

Вопрос. Как указать промежуток длины $\frac{1}{100}$, содержащий число $\frac{2}{3}$?

3.5.* Необходимое условие существования касательной. Сопоставляя неравенства (4) и (5) из предыдущего пункта, заключаем, что угловые коэффициенты обеих прямых — l и AP принадлежат промежутку $(k_1; k_2)$. Значит, модуль разности угловых коэффициентов k и k_3 прямых l и AP меньше длины данного промежутка. Обозначив длину промежутка $(k_1; k_2)$ через ε , получим, что $|k_3 - k| < |k_1 - k_2|$, то есть

$$\left| \frac{y - y_0}{x - x_0} - k \right| < \varepsilon. \quad (6)$$

Поскольку длина промежутка $(k_1; k_2)$ могла быть какой угодно, то и ε также может быть любым положительным числом. Когда прямая с угловым коэффициентом k касается кривой K , неравенство (6) должно выполняться для всех точек $P(x; y)$ кривой K , достаточно близких к точке $A(x_0; y_0)$. Получаем следующий результат.

Пусть k — угловой коэффициент касательной к кривой K в точке $A(x_0; y_0)$. Тогда для любого положительного числа ε всегда найдётся такой круг с центром $A(x_0; y_0)$ и радиусом $r > 0$, что неравенство

$$\left| \frac{y - y_0}{x - x_0} - k \right| < \varepsilon \text{ выполняется для всех точек } P(x; y) \text{ кривой } K \text{ из этого круга.}$$

В таких случаях число k называют *пределом* угловых коэффициентов прямых AP при стремлении точки P к точке A вдоль кривой K .

Отметим, что выбор радиуса r , вообще говоря, зависит от точки $A(x_0; y_0)$ и от того, какое число ε рассматривается.

Таким образом, существование данного предела *необходимо* для существования касательной, не параллельной оси Oy .

Можно показать, что существование предела угловых коэффициентов прямых AP при стремлении точки P к точке A вдоль кривой K является также и *достаточным условием* наличия в точке A касательной, не параллельной оси Oy .

Вопрос. Как сформулировать необходимое условие существования касательной в виде теоремы: «Если ..., то ...»?

3.6. Достаточное условие существования касательной.** Пусть для точки $A(x_0; y_0)$ кривой K число k обладает свойством, что для каждого положительного числа ε найдётся такой круг с центром $A(x_0; y_0)$, что неравенство (6) выполняется для всех точек $P(x; y)$ кривой K из этого круга. Тогда прямая l с угловым коэффициентом k , проходящая через точку A , является касательной.

Для обоснования покажем, что прямая l удовлетворяет определению касательной из пункта 2.4. Рассмотрим два любых числа k_1 и k_2 таких, что $k_1 < k < k_2$, и обозначим через ε наименьшую из разностей $k - k_1, k_2 - k$.

Для этого ε , согласно свойству, по которому выбрано число k , найдётся соответствующий круг с центром в точке A . Если взять в этом круге любую точку $P(x; y)$, лежащую на кривой K , то для её координат x и y

будет выполнено неравенство $\left| \frac{y - y_0}{x - x_0} - k \right| < \varepsilon$. Отсюда

$$- \varepsilon < \frac{y - y_0}{x - x_0} - k < \varepsilon \quad \text{и} \quad k - \varepsilon < \frac{y - y_0}{x - x_0} < k + \varepsilon.$$

Из полученных неравенств, в частности, вытекает следующая цепочка соотношений:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} > k - \varepsilon \geq k - (k - k_1) = k_1, \quad \frac{y - y_0}{x - x_0} < k + \varepsilon \leq k + (k_2 - k) = k_2.$$

Следовательно, угловой коэффициент секущей AP заключён в интервале (k_1, k_2) , а это значит, что для прямой с уравнением $y - y_0 = k(x - x_0)$ выполняется определение касательной из пункта 2.4.

Вопрос. Как доказать, что если предел угловых коэффициентов прямых AP при стремлении точки P к точке A вдоль кривой K существует, то такой предел — единственный?

3.7.* Пример нахождения касательной.

Пример. Рассмотрим параболу с уравнением $y = \frac{1}{2}x^2$ и на ней точку $A(2; 2)$. Найдём угловой коэффициент k касательной в этой точке по правилу из пункта 3.4. Соединим точку A с произвольной, отличной от A , точкой $P(x; y)$ на данной кривой и вычислим угловой коэффициент k_3 прямой AP :

$$k_3 = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y - 2}{x - 2} = \frac{\frac{1}{2}x^2 - 2}{x - 2} = \frac{(x+2)(x-2)}{2(x-2)} = \frac{x+2}{2} = \frac{(x-2)+4}{2} = 2 + \frac{1}{2}(x-2).$$

Заметим, что выражение $2 + \frac{1}{2}(x - 2)$ мало отличается от 2, когда выражение $\frac{1}{2}(x - 2)$ мало отличается от нуля. Поэтому число $k = 2$ удовлетворяет

свойству углового коэффициента касательной. В самом деле, возьмём два произвольных значения $k_1 < 2$, $k_2 > 2$ и положим для них $\varepsilon = \min(2 - k_1; k_2 - 2)$. Приближая точку P к точке A , можно сделать величину $|x - 2|$ сколь угодно малой. В частности, для всех близких P и A можно обеспечить неравенство

$$-\varepsilon < \frac{1}{2}(x-2) < \varepsilon.$$

Но тогда

$$k_1 = 2 - (2 - k_1) \leq 2 - \varepsilon < 2 + \frac{(x-2)}{2} = \frac{y-2}{x-2} = 2 + \frac{(x-2)}{2} < 2 + \varepsilon \leq 2 + (k_2 - 2) = k_2.$$

Значит, угловой коэффициент k_3 прямой AP попадает в интервал $(k_1; k_2)$ и свойство углового коэффициента касательной из пункта 3.4. выполняется.

Согласно формуле (3) предыдущего параграфа, уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{2}x^2$ в точке $A(2; 2)$ имеет вид

$$y - 2 = 2(x - 2).$$

Вопрос. Как доказать, что все точки графика функции $y = \frac{1}{2}x^2$ лежат выше касательной $y - 2 = 2(x - 2)$?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Как выглядит уравнение произвольной прямой, не параллельной оси ординат?

2. Что называется угловым коэффициентом прямой?

3. Как найти угловой коэффициент прямой, если известны две её точки?

4. Как найти уравнение прямой, зная угловой коэффициент и точку на ней?

5.* Как при помощи угловых коэффициентов сторон данного угла и некоторой прямой, проходящей через его вершину, узнать, внутри угла или вне его лежит эта прямая?

6. В чём состоит свойство касательной, выражаемое при помощи угловых коэффициентов?

7. Что означают слова «все достаточно близкие к A точки данной кривой»?

8.* Каков точный смысл утверждения, что касательная является пределом секущих?

9.** Как доказать, что существование предела секущих достаточно для существования касательной?

10. Как определить касательную при помощи угловых коэффициентов прямых?

11. Какое уравнение имеет касательная к параболе $y = ax^2$ в точке с абсциссой x_0 при $a = 0,5$?

■ Задачи и упражнения

1. Найдите уравнение прямой, проходящей через точки:

- а) $A(3; 2), B(-1; -4)$; б) $A(-2; 1), B(1; 4)$;
 в) $A(-5; 6), B(-2; 3)$; г) $A(4; 7), B(-2; 5)$;
 д) $A(\sqrt{3}; 1), B(2\sqrt{3}; 3)$; е) $A(2; -\sqrt{2}), B(-2\sqrt{2}; 2)$.

2. Найдите угловой коэффициент прямой, проходящей через точки:

- а) $A(4; 3), B(-2; 1)$; б) $A(-3; 7), B(5; -1)$;
 в) $A(1+\sqrt{5}; 2-\sqrt{5}), B(1+3\sqrt{5}; 2-3\sqrt{5})$.

3.* Найдите уравнения медиан треугольника с вершинами:

- а) $A(0; 0), B(0; 4), C(3; 3)$; б) $A(-2; -1), B(6; 3), C(2; 5)$;
 в) $A(1; 3), B(-3; 1), C(-1; -3)$.

4. Найдите тангенс угла, который образует прямая с положительным лучом оси Ox , если прямая имеет уравнение:

- а) $2y + 3 = 3x - 2$; б) $2x + 4y = 1$; в) $x - 3y - 5 = 0$;
 г) $2\sqrt{3}y + 2x - 1 = 0$; д) $2y - 2\sqrt{3}x + 1 = 0$.

5. Напишите уравнение прямой с угловым коэффициентом $5\sqrt{3}$, проходящей через точку $(-1; 2)$.

6.** Найдите тангенс угла между прямыми:

- а) $y = x - 1$ и $y = \sqrt{3}x + 1$; б) $y = -x - 2$ и $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x + 1$;
 в) $y = x + 1$ и $y = 2x + 1$; г) $y = 3x$ и $y = 4x - 1$.

7. Изобразите несколько прямых, проходящих через начало координат, угловой коэффициент которых находится между угловыми коэффициентами прямых:

- а) $y = 2x, y = 3x$; б) $y = 2x, y = -3x$; в) $y = -2x, y = 3x$; г) $y = -2x, y = -3x$.

8.* Через точки $A(2; 4)$ и $B_n\left(2 + \frac{1}{n}; \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2\right)$ графика функции $y = x^2$ проводится секущая при каждом $n \in \mathbb{N}$. Найдите предел последовательности угловых коэффициентов этих секущих.

9.* Через точки $A(1; 1)$ и $B_n\left(1 - \frac{1}{n}; \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)$ графика функции $y = \sqrt{x}$ проводится секущая при каждом $n \in \mathbb{N}$. Найдите предел последовательности угловых коэффициентов этих секущих.

10.* Через точки $A\left(2; \frac{1}{2}\right)$ и $B_n\left(\frac{2n+1}{n}; \frac{n}{2n+1}\right)$ графика функции $y = \frac{1}{x}$ проводится секущая при каждом $n \in N$. Найдите предел последовательности угловых коэффициентов этих секущих.

11.* Составьте уравнение касательной к параболе $y = ax^2$ в точке с абсциссой x_0 , если:

- а) $a = 2, x_0 = 3$; б) $a = 3, x_0 = -2$; в) $a = -1, x_0 = -3$;
г) $a = -\frac{1}{2}, x_0 = 3$; д) $a = \frac{1}{4}, x_0 = 2\sqrt{2}$.

12.** Какое уравнение имеет касательная к параболе $y = ax^2$ в точке с абсциссой x_0 ?

13.** Найдите точки пересечения осей координат и касательной, проведённой к параболе $y = ax^2$ в точке с абсциссой x_0 , если:

- а) $a = -1, x_0 = 2$; б) $a = 2, x_0 = -\frac{3}{2}$.

14.** Касательная к параболе $y = ax^2$ в точке A пересекает ось Ox в точке B и ось Oy в точке C . Докажите, что $AB = BC$.

15.** Через точку A параболы $y = ax^2$ проведена касательная l . Докажите, что середины отрезков, отсекаемых параболой на прямых, параллельных l , лежат на луче с вершиной A .

16. Составьте уравнение касательной к параболе в точке с абсциссой x_0 :

- а)* $y - 5 = 2(x - 1)^2, x_0 = 3$; б)* $y = 4 - (x + 3)^2, x_0 = -5$;
в)** $y = x^2 + x + 1, x_0 = 2$.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равен угловой коэффициент касательной к графику функции $y = |x| + 1$ при $x = -1$?

- 1) -2 2) -1 3) 1 4) 2

1.2. Чему равна абсцисса точки, в которой касательная к графику функции $y = \sqrt{25 - x^2}$ параллельна прямой $y = -\frac{3}{4}x$?

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

1.3.* Для какого значения параметра a график функции $y = 4x$ лежит в двух острых углах, образованных прямыми $y = ax$ и $y = -ax$?

- 1) $a = \frac{1}{6}$ 2) $a = \frac{1}{2}$ 3) $a = 2$ 4) $a = 6$

1.4.* Через точки $A(2; 4)$ и $B_n\left(2 + \frac{1}{n}; \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2\right)$ графика функции $y = x^2$ проводится секущая для каждого натурального числа n . Какому из пере-

численных ниже чисел равен предел последовательности угловых коэффициентов этих секущих?

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1.** Пусть функция $y = f(x)$ задана условиями: $y = 0$, если $|x| > 1$; $y = \sqrt{1 - x^2}$, если $|x| \leq 1$. В точках с какими абсциссами график функции $y = f(x)$ не имеет касательной?

- 1) -1 2) 0 3) 1 4) 2

2.2.* На координатной плоскости изображена парабола $y = x^2$ и проведены две прямые $y = \frac{x}{100}$ и $y = -\frac{x}{100}$. Для каких промежутков на оси Ox соответствующие им точки параболы лежат внутри острых углов, образованных этими прямыми?

- 1) $(-0,1; 0,1)$ 2) $(-0,02; 0,02)$ 3) $(-0,01; 0,01)$ 4) $(-0,005; 0,005)$

2.3. Какие из указанных прямых являются касательными к графику функции $y = \sqrt{25 - x^2}$, рассматриваемой на промежутке $[-5; 5]$?

- 1) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ 2) $y = \frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$ 3) $y = 5$ 4) $y = -5$

2.4. Заданы две пересекающиеся прямые $2x - y + 1 = 0$ и $4x + y - 1 = 0$. Какие из перечисленных ниже прямых целиком лежат в двух острых углах, образованных заданными прямыми?

- 1) $3x - y + 1 = 0$ 2) $5x + 2y + 1 = 0$ 3) $9x + 2y - 2 = 0$ 4) $3x + y - 1 = 0$

■ Мини-исследования к главе

Мини-исследование 23

Найдите уравнение касательной:

а) к кривой, задаваемой уравнением $y = ax^3$, проходящей через точку с абсциссой x_0 (a — фиксированное ненулевое число);

б) к гиперболу $y = \frac{a}{x}$, проходящей через точку с абсциссой x_1 (a — фиксированное ненулевое число);

в) к графику функции $y = \frac{a}{x^2}$, проходящей через точку с абсциссой x_1 (a — фиксированное ненулевое число).

Мини-исследование 24

Найдите уравнение касательной к эллипсу с уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $ab \neq 0$, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ этого эллипса.

В этой главе вы ознакомитесь с основными определениями и формулами элементарной теории вероятностей.

§ 1. ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ И МЕРЫ МНОЖЕСТВ ■

1.1. Случайный выбор элемента из конечного множества. Напомним, что теория вероятностей изучает вероятности событий, встречающихся в явлениях со случайными исходами. Такие явления называют *экспериментами со случайными исходами* или, для краткости, *экспериментами*.

Пример 1. Ученик, первым пришедший сдавать экзамен, выучил 20 билетов из 25, лежащих на столе у учителя. Какова вероятность, что этот ученик вытащит билет, который он выучил?

Отношение количества выученных билетов (благоприятных исходов эксперимента) к общему количеству билетов (всех возможных исходов эксперимента) равно отношению $\frac{20}{25}$. Следовательно, один из 20 выученных билетов будет выбран с вероятностью $\frac{20}{25} = \frac{4}{5}$.

Напомним классическое определение вероятности.

Пусть эксперимент состоит в выборе с равной вероятностью некоторого элемента из непустого множества Ω , содержащего $N(\Omega)$ элементов. Тогда вероятность $P(A)$ события, состоящего в том, что выбранный элемент окажется одним из элементов множества A , находится по формуле $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$, где $N(A)$ — число элементов в множестве A .

В примере 1 в качестве множества Ω всех возможных исходов нашего эксперимента берётся множество всех экзаменационных билетов, лежащих на столе, а в качестве A — множество тех билетов, которые выучил ученик.

Вопрос. В корзине лежит n красных, m жёлтых и k зелёных шаров. Какова вероятность вынуть шар не зелёного цвета?

1.2. Случайный выбор точки из множества на плоскости или в пространстве. При изучении экспериментов со случайным выбором точки из множества на плоскости предполагается, что вероятность выбора точки равномерно распределена во множестве Ω . Это означает,

что вероятность каждого события, состоящего в попадании случайно выбранной точки в любое подмножество A множества Ω , зависит лишь от площади $S(A)$ подмножества A , где бы это подмножество A ни находилось во множестве Ω .

Пусть эксперимент состоит в случайном выборе точки из множества Ω ненулевой площади $S(\Omega) > 0$ с равномерным распределением вероятности выбора точки в этом множестве. Тогда вероятностью $P(A)$ события, состоящего в попадании выбираемой точки в подмножество A , имеющее площадь $S(A)$, называют число $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$.

Пример 2. Вокруг квадрата $ABCD$ описана окружность. В круге, ограниченном этой окружностью, выбирается точка. Какова вероятность того, что эта точка окажется внутри квадрата $ABCD$?

Пусть r — радиус круга, тогда площадь круга равна πr^2 , а площадь квадрата равна $2r^2$. Поэтому искомая вероятность равна отношению $\frac{2r^2}{\pi r^2}$, то есть равна $\frac{2}{\pi}$.

Пусть эксперимент состоит в случайном выборе точки из множества Ω ненулевого объёма $V(\Omega) > 0$ с равномерным распределением вероятности выбора точки в этом множестве. Тогда вероятностью $P(A)$ события, состоящего в попадании выбираемой точки в подмножество A объёма $V(A)$, называют число $P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}$.

В этом случае полагают, что вероятность выбора точки *равномерно распределена* во множестве Ω , если вероятность каждого события, состоящего в попадании случайно выбранной точки в любое подмножество A множества Ω , зависит лишь от объёма $V(A)$ подмножества A , где бы это подмножество A ни находилось во множестве Ω .

Вопрос. Внутри куба с ребром 2 случайным образом выбирается точка. Какова вероятность того, что эта точка от центра куба будет удалена не более чем на 1?

1.3. Случайный выбор точки на отрезке или на окружности.

Пусть эксперимент состоит в случайном выборе точки из отрезка Ω длины $L(\Omega)$ с равномерным распределением вероятности выбора точки в этом множестве. Тогда вероятностью $P(A)$ события, состоящего в попадании выбираемой точки в объединение A конечного числа непересекающихся промежутков с суммой длин $L(A)$, называют число $P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}$.

В этом случае также полагают, что вероятность выбора точки *равномерно распределена* в множестве Ω , если вероятность каждого события,

состоящего в попадании случайно выбранной точки в любое объединение A конечного числа непересекающихся промежутков из множества Ω , зависит лишь от суммы длин $L(A)$ этих промежутков и не зависит от того, как эти промежутки расположены в множестве Ω .

Пример 3. Из сверхчистого металла сделали сверхтонкую проволоку длины l . При наматывании проволока порвалась в одном месте из-за случайно попавшей в металл одной частички недопустимой примеси. Какова вероятность, что разрыв произошёл на расстоянии менее $0,2 \cdot l$ от одного из концов проволоки?

Для получения ответа на этот вопрос надо заметить, что интересующее нас событие происходит только в двух случаях: если частичка примеси попадает в начальный интервал проволоки длины $0,2 \cdot l$ либо в конечный интервал длины $0,2 \cdot l$. Следовательно, искомая вероятность равна $P(A) = \frac{2 \cdot 0,2 \cdot l}{l} = 0,4 = \frac{2}{5}$.

Аналогично определяются эксперименты и с равномерным распределением вероятности выбора точки на окружности. В этом случае также полагают, что вероятность выбора точки *равномерно распределена* в множестве Ω , если вероятность каждого события, состоящего в попадании случайно выбранной точки в любое объединение A конечного числа непересекающихся дуг окружности Ω , зависит лишь от суммы длин $L(A)$ этих дуг и не зависит от того, как эти дуги расположены на окружности Ω .

Пусть эксперимент состоит в случайном выборе точки на окружности Ω длины $L(\Omega)$ с равномерным распределением вероятности выбора точки на этой окружности. Тогда вероятностью $P(A)$ события, состоящего в попадании выбираемой точки в объединение A конечного числа непересекающихся дуг с суммой длин $L(A)$, называют число $P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}$.

Вопрос. Пусть на окружности с центром O отмечены различные точки A и B и рассматриваются два эксперимента: первый — со случайным выбором точки на окружности, второй — со случайным выбором точки в круге, ограниченном этой окружностью. Как связаны между собой вероятности двух событий: при первом эксперименте — попадание точки на меньшую дугу AB , при втором — попадание точки в меньший сектор AOB ?

1.4. Мера и вероятность. Подведём некоторые итоги и перечислим предположения, которые использовались в примерах из предыдущих пунктов.

Предположение 1. Рассматриваемый эксперимент состоит в случайном выборе точки, либо из некоторого конечного множества, либо из

некоторого множества в пространстве, на плоскости, на прямой или на окружности. Множество, из которого выбирается точка, называется множеством всех возможных исходов эксперимента.

Предположение 2. Пусть A — некоторое подмножество множества Ω всех возможных исходов рассматриваемого эксперимента. Если выбранная в результате эксперимента точка оказалась одной из точек множества A , то говорят, что произошло событие A .

Предположение 3. Вероятность события A каждый раз определяется как отношение меры множества A к мере множества Ω , то есть $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, где мера μ выбирается, исходя из условий проведения эксперимента.

Задача становится строго математической только после того, как эта мера μ выбрана и $\mu(\Omega) > 0$. Подчеркнём, что при решении каждой конкретной задачи мера μ подбирается, исходя из условий этой задачи.

Действительно, объём множества — это наиболее часто встречающаяся мера множеств в пространстве, площадь плоских множеств — это наиболее естественная мера множеств на плоскости, длина — это естественная мера множеств на прямой и окружности, а число элементов в множестве — это естественная мера для конечных множеств.

Вопрос. Изменится ли ответ в примере 3, если мы длину проволоки будем измерять не в миллиметрах, а в дюймах?

1.5. Новый пример меры множеств. Рассматривая разнообразные примеры, мы установили общую формулу, позволяющую находить вероятность событий с помощью меры, которая наиболее точно соответствует интересующему нас конкретному эксперименту. В принципе, могут рассматриваться и другие меры. Ещё одним примером меры, отличной от перечисленных выше, может служить вес.

Так, в примере 4 может оказаться, что проволока неоднородна по толщине. Принимая за меру вес выбираемой части проволоки, вероятность того, что частичка примеси попадёт в заданную часть проволоки, можно считать равной весу этой части, делённому на вес всей проволоки. В этом случае полагают, что вероятность выбора точки в проволоке равномерно распределена, если вероятность каждого события, состоящего из попадания случайно выбранной точки в часть проволоки, зависит лишь от веса этой части и не зависит от того, где расположена часть проволоки такого веса.

Вопрос. После безуспешных поисков бриллианта, потерянного в снегу, этот снег был сложен в виде сугроба, имеющего форму конуса с

площадью основания S , причём вершина этого конуса находилась над центром круглой клумбы площадью $\frac{S}{4}$. Какова вероятность, что бриллиант окажется на клумбе после того, как снег растает?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Что называют экспериментом со случайным исходом?
2. Что такое множество всех исходов эксперимента?
3. Что называют событием в экспериментах со случайными исходами?
4. Как вычислять вероятность события в случае равновероятных исходов при выборе элементов из конечного множества?
5. Как определяется вероятность события при равномерном распределении вероятностей выбора точки в некотором множестве пространства?
6. Как определяется вероятность события при равномерном распределении вероятностей выбора точки в некотором множестве плоскости?
7. Как определяется вероятность события при равномерном распределении вероятностей выбора точки в промежутке прямой или на окружности?
8. Какие примеры мер на некоторой совокупности подмножеств какого-то множества вы знаете?

Задачи и упражнения ■

1. В игре «Спортлото 6 из 49» шары последовательно выбираются из барабана, в котором находится 49 шаров с номерами от 1 до 49. Каковы вероятности, что номер первого вынутого шара:
 - а) совпадёт с одним из номеров: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23;
 - б) делится на 5; в) при делении на 7 даст остаток 5?
2. В барабане перемешаны 36 шаров четырёх разных цветов: красного, белого, чёрного и синего. На 9 шарах каждого из цветов написано по одной цифре от 1 до 9. Каковы вероятности, что первый вынутый шар:
 - а) будет белым шаром с чётным номером;
 - б) будет либо белым шаром, либо шаром с номером 7;
 - в) будет либо не белым шаром, либо шаром с номером 7;
 - г) будет либо белым шаром, либо шаром с чётным номером?
3. Внутри квадрата случайным образом выбирается точка. Найдите вероятность того, что эта точка окажется внутри квадрата с вершинами в серединах сторон заданного квадрата.
- 4.* На отрезке длиной 5 случайным образом выбирается точка, которая делит отрезок на два произвольных отрезка. Найдите вероятность того, что модуль разности длин этих отрезков не меньше 2.

5.* На координатной плоскости в круге с центром в начале системы координат случайным образом выбирается точка. Найдите вероятность того, что ордината этой точки положительна и больше абсциссы.

6.** В урне содержатся только белые и чёрные шары, причём известно, что вероятность случайного выбора белого шара равна $\frac{2}{7}$. После того как в урну добавили несколько чёрных шаров, вероятность выбора белого шара стала равной $\frac{1}{9}$. Какое наименьшее число шаров могло быть добавлено в урну?

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. В барабане лежит n шаров, из которых m — белых, а остальные — других цветов. Какова вероятность вынуть шар белого цвета?

- 1) $\frac{m}{n}$ 2) $\frac{m}{m+n}$ 3) $\frac{n}{m+n}$ 4) $\frac{n-m}{n}$

1.2. Тесто, в которое бросили маковое зёрнышко, раскатали в виде круглого блина площадью S . После этого из теста вырезали корж, который является квадратом, вписанным в окружность, ограничивающую этот круг. Какова вероятность того, что маковое зёрнышко окажется внутри коржа?

- 1) $\frac{2}{\pi}$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ 3) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ 4) $\frac{1}{\pi}$

1.3. Круг разделён на 37 секторов, причём 36 секторов с номерами от 1 до 36 равны, а сектор с номером 0 отличается от каждого из предыдущих. Пусть сектор с номером 0 опирается на дугу длиной 16 см, а каждый из остальных секторов опирается на дугу длиной 4 см. Какова в этом случае вероятность p_0 того, что случайно выбранная в этом круге точка окажется в секторе с чётным номером?

- 1) $\frac{18}{37}$ 2) $\frac{9}{20}$ 3) $\frac{19}{37}$ 4) $\frac{11}{20}$

1.4. После безуспешных поисков бриллианта, потерянного в снегу, этот снег был сложен в виде сугроба, имеющего форму цилиндра с радиусом основания $3R$. Этот цилиндр стоит на круглой клумбе радиуса R . Какова вероятность того, что бриллиант окажется на клумбе после того, как снег растает?

- 1) $\frac{1}{9}$ 2) $\frac{2}{9}$ 3) $\frac{3}{9}$ 4) $\frac{4}{9}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Пусть эксперимент состоит в выборе одного из 36 шаров с номерами от 1 до 36 включительно. Какие из указанных событий возможны при проведении этого эксперимента?

- 1) номер выбранного шара — отрицательное число
- 2) номер выбранного шара больше 18
- 3) номер выбранного шара больше 10, но меньше 11
- 4) номер выбранного шара — квадрат натурального числа

2.2. Рассмотрим эксперимент по бросанию двух одинаковых кубиков, на гранях каждого из которых расставлены все числа от 1 до 6. Какие из указанных событий возможны при проведении этого эксперимента?

- 1) сумма выпавших очков — трёхзначное число
- 2) произведение выпавших чисел делится на 7
- 3) сумма выпавших очков меньше $\sqrt{5}$
- 4) сумма выпавших очков равна 7

2.3. Пусть эксперимент состоит в выборе одного из 36 шаров с номерами от 1 до 36 включительно. Какие два из указанных событий A и B равновероятны?

1) событие A — «Номер выбранного шара больше 10, но меньше 20», событие B — «Номер выбранного шара больше 20, но меньше 30»

2) событие A — «Номер выбранного шара меньше 10», событие B — «Номер выбранного шара больше 30»

3) событие A — «Номер выбранного шара чётный», событие B — «Номер выбранного шара нечётный»

4) событие A — «Номер выбранного шара при делении на 5 даёт остаток 1», событие B — «Номер выбранного шара при делении на 5 даёт остаток 2»

2.4. Рассмотрим эксперимент по бросанию двух одинаковых кубиков, на гранях каждого из которых расставлены все числа от 1 до 6 включительно. Какие два из указанных событий A и B равновероятны?

1) событие A — «Сумма выпавших чисел равна 2», событие B — «Сумма выпавших чисел равна 3»

2) событие A — «Сумма выпавших чисел равна 5», событие B — «Сумма выпавших чисел равна 9»

3) событие A — «Сумма выпавших чисел больше 7», событие B — «Сумма выпавших чисел меньше 7»

4) событие A — «Сумма выпавших чисел чётна», событие B — «Сумма выпавших чисел нечётна»

■ § 2. ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

2.1. Операции над множествами. Каждое событие рассматривается как множество тех случаев, в которых оно происходит. Поскольку события суть множества, то операции над множествами мы можем теперь применить к событиям.

В частности, многие сложные события, встречающиеся в вероятностных задачах, можно выразить через простые события при помощи операций объединения, пересечения и дополнения.

Вопрос. Из карточной колоды вытаскивается одна карта. Какие пары из следующих четырёх событий могут произойти одновременно, а какие — нет:

A_1 — вынутая карта — пиковой масти;

B_1 — вынутая карта — туз;

A_2 — вынутая карта — бубновой масти;

B_2 — вынутая карта — король?

2.2. Пересечение событий. Пусть A_1 и A_2 — два события. Рассмотрим примеры, в которых события A_1 и A_2 происходят одновременно, то есть тогда и только тогда, когда происходит событие $A_1 \cap A_2$. Это событие будет записываться также в виде $A_1 \cdot A_2$ или $A_1 A_2$.

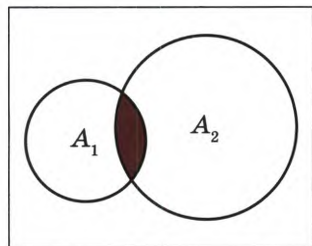


Рис. 1

Пример 1. Два школьника учили маленького мальчика попадать мячом в цель. На прямоугольной стене они нарисовали два круга (рис. 1). Первый школьник пообещал мальчику конфету, если он попадёт в нарисованный им круг A_1 , а второй пообещал мальчику пряник в случае попадания в круг A_2 . В каком случае мальчик получит и конфету, и пряник одновременно?

Нетрудно понять, что мальчик попадёт мячом одновременно и в круг A_1 , и в круг A_2 в том и только том случае, когда он попадёт в пересечение $A_1 \cap A_2$ этих кругов.

Пример 2. Двое игроков в спортлото 5 из 36 загадали каждый свой набор номеров. В каком случае они оба угадают номер первого вынутого шара?

Обозначим через A_1 множество номеров, загаданных первым игроком, а через A_2 — загаданных вторым. Чтобы они оба угадали номер первого шара, нужно, чтобы этот номер одновременно принадлежал и множеству A_1 , и множеству A_2 , то есть нужно, чтобы номер шара принадлежал множеству $A_1 \cap A_2$.

Вопрос. Допустим, что в примере 1 к двум школьникам подошёл третий школьник и нарисовал на стене круг A_3 , пообещав маленькому мальчику мармеладку в случае попадания в этот круг (рис. 2). В какое множество должен попасть мячом мальчик, чтобы одновременно получить и конфетку, и пряник, и мармеладку?

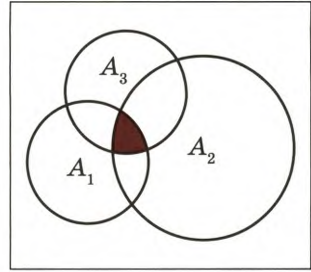


Рис. 2

2.3. Объединение событий. Рассмотрим примеры, в которых происходит хотя бы одно из событий A_1 и A_2 , то есть когда произойдёт событие $A_1 \cup A_2$.

Пример 3. В примере 2 из пункта 2.2 по крайней мере один из игроков угадает номер первого вынутого шара только в том случае, когда этот номер или из множества A_1 , или из множества A_2 (или из обоих множеств). Это событие может произойти только в том случае, когда номер первого вынутого шара содержится в объединении $A_1 \cup A_2$ этих множеств.

Вопрос. При каком условии в примере 1 из пункта 2.2 мальчик получит или конфету, или пряник?

2.4. Произведение и сумма событий. Сформулируем теперь в общем случае определения, разобранные выше на примерах.

Пусть A_1, \dots, A_n — произвольный набор событий.

Определение 1. Пересечением событий A_1, \dots, A_n называется событие $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$, которое происходит тогда и только тогда, когда произойдёт каждое из событий A_1, \dots, A_n .

В теории вероятностей пересечение событий называют также *произведением* этих событий и записывают в виде $A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n$.

Определение 2. Объединением событий A_1, \dots, A_n называется событие $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$, которое происходит тогда и только тогда, когда произойдёт хотя бы одно из событий A_1, \dots, A_n .

В теории вероятностей объединение событий называют также *суммой* этих событий и записывают в виде $A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$.

Вопрос. Пусть A_1, A_2, A_3 — три события. Как показать, что выполняется равенство $A_1 \cdot A_2 + A_3 \cdot A_2 = (A_1 + A_3) \cdot A_2$?

2.5. Несовместные события. Иногда оказывается, что два события не могут произойти одновременно. В этом случае события называются *несовместными*.

Пример 4. Пусть в примере 1 из пункта 2.2 круги A_1 и A_2 не пересекаются. В этом случае маленький мальчик никогда не сможет после одного броска мяча получить одновременно и конфету, и пряник.

Пример 5. Пусть в примере 2 из пункта 2.2 первый игрок в спортлото загадал номера 1, 3, 5, 7, 9, а второй — 2, 4, 8, 16, 32. В этом случае они не смогут одновременно угадать номер первого вынутого шара.

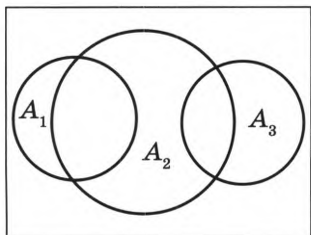


Рис. 3

В общем случае имеет место следующее утверждение.

Свойство несовместных событий. События A и B не могут произойти одновременно в том и только в том случае, когда $A \cap B = \emptyset$.

По этой причине несовместные события мы будем называть также *непересекающимися событиями*.

Вопрос. Предположим, что круги A_1 , A_2 , A_3 расположены так, как на рис. 3. Рассмотрим три события, состоящие в попадании мячом в круг A_1 , в круг A_2 и в круг A_3 соответственно. Какие два из этих трёх событий несовместны?

2.6. Дополнение к событию. Для каждого события A обозначим через \bar{A} событие, состоящее в том, что не произошло событие A .

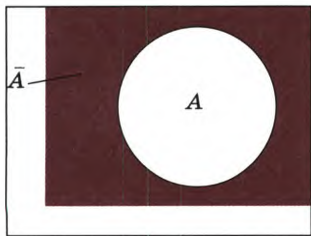


Рис. 4

Пример 6. На прямоугольной стене Ω нарисован круг A (рис. 4). Пусть событие A означает, что мяч, попавший в стену Ω , попадёт в множество A . В каком случае не произойдёт событие A ?

Это событие не произойдёт в том случае, когда мяч не попадёт в множество A , то есть когда он попадёт в одну из точек множества Ω , не принадлежащих A (на рис. 4 это множество заштриховано и обозначено \bar{A}).

В общем случае, каково бы ни было подмножество A множества Ω всех элементарных исходов рассматриваемого случайного эксперимента, условимся через \bar{A} обозначать множество, состоящее из тех и только тех элементов из Ω , которые не принадлежат множеству A . Множество \bar{A} называется *дополнением множества A до множества Ω* .

Из определения дополнения получаем следующее свойство.

Свойство дополнения. Из двух событий A и \bar{A} всегда происходит одно и только одно.

В частности, из этого свойства вытекает, что $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = \Omega$.

Вопрос. Как можно описать событие, состоящее в том, что не произойдёт событие A ?

2.7. Невозможное событие. Какой бы эксперимент мы ни рассматривали, у нас всегда появляются два особых множества — пустое множество \emptyset и множество всех возможных исходов эксперимента Ω .

Поскольку множество \emptyset не содержит ни одного исхода, то событие \emptyset никогда не происходит. По этой причине событие \emptyset иногда называют *невозможным* событием.

Поскольку множество Ω содержит все возможные исходы, то событие Ω происходит при каждом проведении эксперимента, и по этой причине событие Ω иногда называют *достоверным* событием.

Множество Ω всех возможных исходов рассматриваемого эксперимента обычно называют *пространством возможных или элементарных исходов*. Слово «пространство» вместо слова «множество» в математике употребляется иногда в том случае, когда в рассматриваемой задаче все остальные множества являются подмножествами этого множества, которое мы называли пространством.

Вопрос. Как можно описать события $\bar{\emptyset}$ и $\bar{\Omega}$?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Как определяется пересечение двух или нескольких множеств?
2. Как определяется объединение двух или нескольких множеств?
3. Когда происходит событие, являющееся пересечением двух или нескольких событий?
4. Когда происходит событие, являющееся объединением двух или нескольких событий?
5. В каком случае два события не могут произойти одновременно?
6. Какие два события называют несовместными?
7. Какое событие происходит, когда не происходит событие A ?

Задачи и упражнения ■

1. Некто загадал одну из 10 цифр. Какова вероятность, что вы не угадаете эту цифру с одной попытки?
2. Какова вероятность, что вы вспомните семизначный номер телефона друга, если вы:
 - а) забыли последнюю цифру номера телефона своего друга;
 - б) забыли две последние цифры этого номера;

в) забыли предпоследнюю цифру, но помните, что она нечётная;

г) забыли вторую цифру, но помните, что она чётная и не ноль?

3. При случайном выборе натурального числа от 1 до 20 включительно рассматриваются два события: A — «число делится на 2»; B — «число не делится на 3». Найдите подмножество, которое составляет событие:

а) $A \cdot B$; б) $A + B$; в) \bar{A} ; г) \bar{B} ; д) $A \cdot \bar{B}$; е) $\bar{A} \cdot B$;

ё) $\bar{A} \cdot \bar{B}$; ж) $A + \bar{B}$; з) $\bar{A} + B$; и) $\bar{A} + \bar{B}$.

4.* На клетке «е4» пустой шахматной доски ставится чёрный король, а на одно из остальных свободных мест случайным образом ставится белая фигура. Какова вероятность, что чёрный король находится под боем, если известно, что поставленная фигура — это:

а) слон; б) ладья; в) ферзь; г) конь?

5. Точка ставится в шаре радиуса R случайным образом. Какова вероятность того, что она не попадёт в шар радиуса $\frac{R\sqrt{3}}{2}$, имеющий тот же центр?

6. Точка ставится в круге, ограниченном окружностью S . Какова вероятность того, что точка окажется внутри правильного шестиугольника, вписанного в окружность S ?

7. В стоге сена конической формы потеряна золотая иголка. Какова вероятность того, что иголка находится в части стога, расположенной от земли на расстоянии, большем половины высоты стога?

8.** После безуспешных поисков бриллианта, потерянного в снегу, этот снег был сложен в виде сугроба, имеющего форму конуса с площадью основания S , причём вершина этого конуса находилась над центром круглой клумбы площадью $\frac{S}{2}$. Какова вероятность, что бриллиант окажется на клумбе после того, как снег растает?

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. При бросании двух одинаковых кубиков, на гранях каждого из которых расставлены все числа от 1 до 6 включительно, рассматриваются два события:

событие A — «Сумма двух выпавших чисел чётна»;

событие B — «Оба выпавшие числа чётные».

Какое из указанных событий равно сумме событий A и B ?

1) A 2) B 3) \bar{A} 4) \bar{B}

1.2. Пусть эксперимент состоит в случайном выборе однозначного натурального числа. Рассмотрим два события:

событие A — «Число делится на 3»;

событие B — «Число делится на 2».

Каково множество всех возможных исходов эксперимента, при которых происходит событие $A + \bar{B}$?

1) $\{1, 3, 6, 9\}$

2) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

3) $\{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

4) $\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$

1.3. Предположим, что при извлечении из барабана одного шара вероятность вынуть белый шар равна $\frac{1}{5}$, а вероятность вынуть синий шар равна $\frac{1}{6}$.

Какова вероятность вынуть либо белый, либо синий шар?

1) $\frac{11}{30}$

2) $\frac{2}{5}$

3) $\frac{13}{30}$

4) $\frac{7}{15}$

1.4.* При случайном выборе точки на отрезке AB единичной длины рассматриваются два события:

событие P — «Точка C расположена ближе к точке A , чем к точке B »;

событие Q — «Модуль разности длин отрезков AC и BC больше $\frac{1}{2}$ ».

При проведении эксперимента получилось, что $AC = \frac{1}{3}$. Какое из указанных событий в этом случае произошло?

1) $\bar{P} + Q$

2) $P + Q$

3) $\bar{P} \cdot Q$

4) $P \cdot \bar{Q}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. При забеге на ипподроме для трёх из участвующих в нём лошадей A, B, C рассматриваются следующие возможные события:

событие P_1 — «Лошадь A выигрывает у лошади B »;

событие P_2 — «Лошадь A выигрывает забег»;

событие P_3 — «Лошадь C выигрывает забег»;

событие P_4 — «Лошадь B выигрывает у лошади C »;

событие P_5 — «Лошадь C выигрывает у лошади A ».

Какое наибольшее число из этих событий может произойти одновременно?

1) 2

2) 3

3) 4

4) 5

2.2. Пусть A_1, A_2 — два события, относящиеся к одному эксперименту. В каких из указанных случаев два события являются дополнением друг друга?

1) $A_1 + A_2$ и $\overline{A_1 + A_2}$

2) $A_1 + A_2$ и $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$

3) $A_1 \cdot A_2$ и $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$

4) $A_1 \cdot A_2$ и $\overline{A_1} + \overline{A_2}$

2.3. Какие два из указанных событий несовместны независимо от выбора событий A и B ?

1) $A \cap B$ и $A \cap \bar{B}$ 2) $A \cup B$ и $A \cup \bar{B}$

3) $A \cap B$ и $\bar{A} \cap \bar{B}$ 4) $\bar{A} \cap B$ и $A \cap \bar{B}$

2.4.** Известно, что события $A \cap B$ и $C \cap D$ несовместны. Какие из двух указанных событий могут оказаться совместными при некоторых событиях A, B, C, D ?

1) A и C 2) A и $B \cap D$ 3) B и $C \cap D$ 4) $A \cup B$ и $C \cup D$

■ § 3. ЗАКОН СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3.1. Три свойства вероятностей. Сформулируем три важных свойства вероятностей.

Свойство 1. Всегда $P(\Omega) = 1$.

Свойство 2. Для любого события A верно неравенство $P(A) \geq 0$.

Свойство 3. Если события A и B несовместны, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Проиллюстрируем на примере идею доказательства.

Пример 1. Один шар случайным образом вынимается из барабана, в котором находятся шары разных цветов, причём каждый шар покрашен каким-то одним цветом. Пусть событие A состоит в том, что вынутый шар — синий, а событие B — что вынутый шар белый. В этом случае Ω — множество всех шаров, A — множество синих шаров, B — множество белых шаров, $C = A \cup B$ — множество тех шаров, которые либо белые, либо синие.

Рассматриваемые множества являются конечными и выборы каждого шара равновероятны, поэтому, по классическому определению вероятности, вероятность того, что вынутый шар окажется одним из шаров множества D , равна $P(D) = \frac{N(D)}{N(\Omega)}$, где $N(D)$ — число шаров во множестве D .

В частности, $P(\Omega) = \frac{N(\Omega)}{N(\Omega)} = 1$, что доказывает свойство 1. Так как число шаров неотрицательно, справедливо и свойство 2.

Чтобы доказать свойство 3, напомним, что события A и B несовместны тогда и только тогда, когда множества A и B не пересекаются.

По условию шары не могут быть синими и белыми одновременно. Это означает, что множества A и B не пересекаются, а поэтому $N(C) = N(A) + N(B)$. Следовательно,

$$P(C) = \frac{N(A \cup B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A) + N(B)}{N(\Omega)} = \frac{N(A)}{N(\Omega)} + \frac{N(B)}{N(\Omega)} = P(A) + P(B).$$

Вопрос. Предположим, что в примере 1 известно, что вероятность вынуть белый шар равна $\frac{1}{3}$, а вероятность вынуть синий шар равна $\frac{1}{6}$.

Можно ли в этом случае определить вероятность вынуть либо белый, либо синий шар, если неизвестно, каково точное число шаров каждого цвета в барабане?

3.2. Попарная несовместность событий. События A_1, A_2, \dots, A_n называются *попарно несовместными*, если любые два из этих событий — несовместны.

Пример 2. На прямоугольной стене Ω нарисованы три круга A_1, A_2, A_3 . Попадание мячом в круг A_i назовём событием A_i , где $i = 1, 2, 3$. В этом случае события A_1, A_2, A_3 попарно несовместны тогда и только тогда, когда никакие два круга не имеют общих точек.

Если события A_1, A_2, \dots, A_n попарно несовместны, то не могут одновременно произойти никакие два из этих событий. Следовательно, при каждом $m < n$ не могут одновременно произойти события $B_m = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ и A_{m+1} , то есть события B_m и A_{m+1} несовместны.

Вопрос. Пусть известно, что события A_1, A_2, A_3, A_4 попарно несовместны. Как доказать, что события $A_1 \cup A_3$ и $A_2 \cup A_4$ также несовместны?

3.3. Закон сложения вероятностей. Свойство 3 для вероятностей обобщается на случай нескольких событий.

Теорема (Закон сложения вероятностей). Если события A_1, A_2, \dots, A_n попарно несовместны, то

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

При каждом $m < n$ события $B_m = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ и A_{m+1} несовместны, поэтому

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{m+1}) = P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) + P(A_{m+1}).$$

Используя полученное равенство последовательно при $m = n - 1, m = n - 2, \dots, m = 1$, будем иметь:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1}) + P(A_n) = \\ &= P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-2}) + P(A_{n-1}) + P(A_n) = \\ &= P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-k}) + P(A_{n-k+1}) + \dots + P(A_n) = \dots \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \end{aligned}$$

Таким образом, закон сложения вероятностей можно считать обоснованным при любом n .

Вопрос. Предположим, что при извлечении из барабана одного шара вероятность появления шара белого цвета равна $\frac{1}{3}$, красного цвета равна $\frac{1}{6}$ и синего цвета равна $\frac{1}{4}$. Какова при этом вероятность появления шара, цвет которого отличен от белого, красного и синего?

3.4. Вероятность дополнения к событию. Приведём несколько следствий из свойств 1, 2 и 3 вероятностей.

Свойство 4. Для любого события A верно равенство

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

События A и \bar{A} несовместны, и $\Omega = A + \bar{A}$, поэтому $1 = P(\Omega) = P(A) + P(\bar{A})$. Отсюда $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Свойство 5. Если событие A является подмножеством события B , то $P(A) \leq P(B)$.

Пусть событие C состоит в том, что событие B произойдёт, а событие A — не произойдёт. В этом случае события A и C — несовместны и $B = A \cup C$. Поэтому $P(B) = P(A \cup C) = P(A) + P(C) \geq P(A)$.

Вопрос. Чему равна вероятность события A , если вероятность дополнения к A равна 0,3?

3.5. О мерах и вероятностях.** В теории вероятностей рассматривают меры, которые обладают двумя важными свойствами.

Свойство неотрицательности мер. Мера μ каждого множества A неотрицательна, то есть $\mu(A) \geq 0$.

В частности, всегда неотрицательны и длина, и площадь, и объём, и вес, и число элементов во множестве.

Закон сложения мер. Если множества A и B не пересекаются, то для любой меры μ верно равенство

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B).$$

Например, если $\mu(C) = N(C)$ — число элементов в конечном множестве C , то $N(A \cup B) = N(A) + N(B)$ при $A \cap B = \emptyset$.

Указанные свойства мер позволяют провести доказательства свойств 1, 2 и 3.

Из определения вероятности события A справедливо равенство $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$, где μ — соответствующая мера. Отсюда имеем следующее.

1. При $A = \Omega$ получаем $P(\Omega) = \frac{\mu(\Omega)}{\mu(\Omega)} = 1$, что доказывает свойство 1.

2. Так как $\mu(\Omega) > 0$ и $\mu(A) \geq 0$ по свойству неотрицательности меры, $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \geq 0$, что доказывает свойство 2.

3. Пусть $A \cap B = \emptyset$. Тогда по закону сложения мер получаем:

$$P(A \cup B) = \frac{\mu(A \cup B)}{\mu(\Omega)} = \frac{\mu(A) + \mu(B)}{\mu(\Omega)} = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} + \frac{\mu(B)}{\mu(\Omega)} = P(A) + P(B),$$

что доказывает свойство 3.

Вопрос. Как доказать, что мера пустого множества \emptyset равна 0?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Чему равна вероятность достоверного события?
2. Чему равна вероятность невозможного события?
3. Как вычислить вероятность события, являющегося дополнением к данному событию?
- 4.* Что можно сказать о вероятности события, которое содержится в другом событии?
5. В каком случае несколько событий называют попарно несовместными?
6. Сформулируйте закон сложения вероятностей.
7. При каком условии вероятность объединения нескольких событий равна сумме вероятностей этих событий?

Задачи и упражнения ■

1. В выборах участвовали два кандидата: Иванов и Петров. Опрос общественного мнения, проведённый перед выборами, дал следующие результаты:

Событие	За Иванова	За Петрова	Против всех	Не буду голосовать
Вероятность	0,30	0,40	0,05	0,25

Какова вероятность того, что случайно выбранный участник опроса явится на выборы?

2. По результатам многолетних наблюдений в одном городе составлена таблица вероятностей выпадения осадков 1 октября.

Событие	Снег с дождём	Снег без дождя	Дождь	Без осадков
Вероятность	0,15	0,05	0,3	0,5

Какова вероятность, что в этом городе 1 октября текущего года выпадет снег?

3. В урне лежат 11 шаров, из которых 5 белых, 3 чёрных и 3 красных. Наудачу извлекается один шар. Какова вероятность, что он окажется белым или чёрным?

4. Какова вероятность того, что при бросании игральной кости в виде кубика с занумерованными гранями от 1 до 6 выпадет число очков: а) делящееся на 3; б) равное 5 или чётное; в) равное 5 или нечётное?

5. В школьном вечере участвовали 200 учеников из физико-математической школы, 250 из гимназии и 100 из педагогического колледжа. Какова вероятность того, что ученик, с которым вы случайно заговорили, учится в физико-математической школе или в гимназии?

6. На межшкольных соревнованиях по бегу участвуют 200 школьников, причём их спортивная квалификация одинакова. От некоторой школы в соревнованиях участвуют 10 человек. Какова вероятность того, что первое место займёт ученик этой школы?

7. Телефонная линия, соединяющая пункты A и B , расстояние между которыми равно 2 км, порвалась в неизвестном месте. Какова вероятность того, что линия порвалась:

- а) не далее чем в 500 м от середины этой линии;
- б) не далее чем в 500 м от пункта A ?

8. В урне лежат 3 белых и 5 чёрных шаров. Не глядя в урну, вынимают сразу 2 шара. Какова вероятность того, что оба вынутые шара окажутся: а) чёрными; б) белыми; в) разных цветов?

9. В игре «Спортлото 6 из 49» шары последовательно выбираются из барабана, в котором находится 49 шаров с номерами от 1 до 49. Предположим, что первый вынутый шар имел номер 33, а вторым вынули шар с номером 5. Каковы в этом случае вероятности, что номер третьего вынутого шара: а) чётный; б) не делится на 3; в) делится на 3 или на 5?

10. В барабане перемешаны 27 шаров трёх разных цветов: красного, белого и синего. На 9 шарах каждого из цветов написано по одной

цифре от 1 до 9. Предположим, что первый вынутый шар оказался белого цвета с номером 8. Каковы вероятности, что второй вынутый шар:

- а) будет белым или синим шаром с чётным номером;
- б) будет либо белым шаром, либо красным шаром с номером 2;
- в) будет либо не белым шаром, либо не шаром с номером 2;
- г) будет либо белым шаром, либо синим шаром с чётным номером?

11. Точка выбирается на окружности радиуса R с центром в начале координат. Какова вероятность того, что проекция этой точки на ось абсцисс находится от начала координат на расстоянии, большем $\frac{R\sqrt{3}}{2}$?

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Предположим, что при извлечении из барабана одного шара вероятность появления шара белого цвета равна 0,3, красного цвета равна 0,24, синего цвета равна 0,21. Какова при этом вероятность появления шара, цвет которого отличен от белого, красного и синего цвета?

- 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{5}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{1}{3}$

1.2. В магазине продаются электролампы, поступившие с двух заводов в равных количествах по 1500 штук. Известно, что при покупке электролампа может оказаться бракованной, причём с вероятностью $\frac{1}{100}$ она сделана на первом заводе, и с вероятностью $\frac{3}{100}$ она сделана на втором заводе. Какова вероятность, что при покупке одной электролампы эта лампочка будет нормальной?

- 1) 0,99 2) 0,98 3) 0,97 4) 0,96

1.3. В урне 7 красных и 4 белых шара. Вынимают 2 из них. Какова вероятность, что оба красные?

- 1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{21}{55}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{2}{5}$

1.4. Пусть A и B — два события. Какое из перечисленных событий является событием $\overline{A+B}$?

- 1) $A \cdot B$ 2) $\bar{A} + \bar{B}$ 3) $\bar{A} \cdot \bar{B}$ 4) $\bar{A} + B$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Пусть события A, B, C, D возможны и попарно несовместны. Какие из двух указанных событий также несовместны?

- 1) A и $B \cup C \cup D$ 2) $A \cup B$ и $C \cup D$
 3) $A \cup C$ и $C \cup D$ 4) $A \cup B$ и $B \cup C \cup D$

2.2. Пусть события A, B возможны. Какие из указанных событий являются невозможными?

- 1) $A \cap (B \cup \bar{B})$ 2) $(A \cap \bar{A}) \cap B$
 3) $A \cup (B \cap \bar{B})$ 4) $(A \cap \bar{A}) \cap (B \cap \bar{B})$

2.3. Среди 1000 опрошенных горожан 300 сказали, что обязательно пойдут на праздник Дня города, 500 уедут на огород, а 200 не определились: половина из них придёт, половина — нет. Какова вероятность, что случайно выбранный из опрошенных горожанин придёт на праздник?

- 1) 0,35 2) 0,4 3) 0,45 4) 0,5

2.4.** Пусть A и B — два события. Известно, что $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{3}{4}$.

Какие из указанных значений может иметь вероятность $P(\bar{A} \cdot B)$ события $\bar{A} \cdot B$?

- 1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{3}{4}$



В этой главе вы познакомитесь с тригонометрическими уравнениями и способами их решения. Будет введено также общее понятие обратной функции, рассмотрены некоторые свойства и графики обратных тригонометрических функций.

§ 1. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ■

1.1. Решение уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Рассмотрим тригонометрическое уравнение

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (1)$$

Один из корней этого уравнения можно указать сразу по таблице значений косинуса основных углов. Действительно, $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, а поэтому число $x_0 = \frac{\pi}{6}$ является одним из корней уравнения (1).

Зная один из корней уравнения (1), можно найти все его корни. Для этого сначала вспомним определение косинуса числа $\frac{\pi}{6}$. Изобразим на рис. 1 тригонометрическую окружность, то есть окружность единичного радиуса с центром в начале координат, и построим направленный угол AOB величины $\frac{\pi}{6}$ радиан. Абсцисса точки B пересечения стороны OB угла AOB с окружностью равна $\cos \frac{\pi}{6}$. Если через точку B перпендикулярно оси Ox провести прямую m , то прямая m пересечёт ось Ox в точке K с абсциссой $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

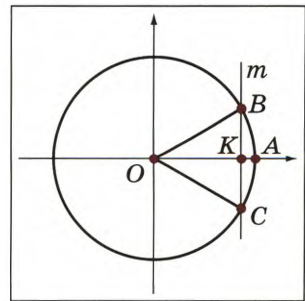


Рис. 1

Теперь заметим, что прямая m содержит все точки координатной плоскости, абсциссы которых равны $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Поэтому,

используя общие точки B и C прямой t и окружности, можно указать величины всех углов, косинусы которых равны $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

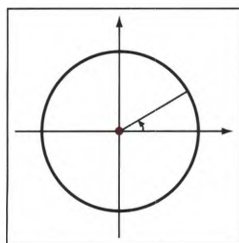


Рис. 2

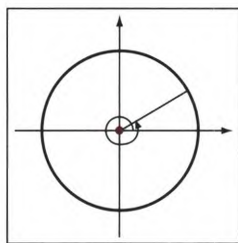


Рис. 3

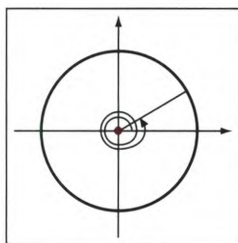


Рис. 4

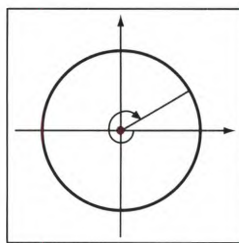


Рис. 5

Точка B соответствует следующим направленным углам: $\frac{\pi}{6}$ (рис. 2), $\frac{\pi}{6} + 2\pi$ (рис. 3), $\frac{\pi}{6} + 4\pi$ (рис. 4), $\frac{\pi}{6} - 2\pi$ (рис. 5) и вообще любому направленному углу величины $\frac{\pi}{6} + 2\pi t$, где t — целое число.

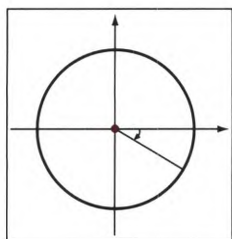


Рис. 6

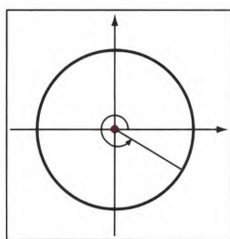


Рис. 7

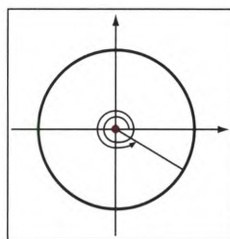


Рис. 8

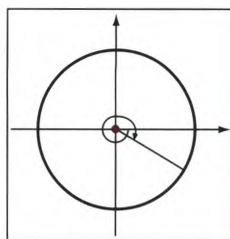


Рис. 9

Точка C соответствует следующим направленным углам: $-\frac{\pi}{3}$ (рис. 6), $-\frac{\pi}{3} + 2\pi$ (рис. 7), $-\frac{\pi}{3} + 4\pi$ (рис. 8), $-\frac{\pi}{3} - 2\pi$ (рис. 9) и вообще любому направленному углу величины $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где k — целое число.

Таким образом, уравнение (1) имеет бесконечное множество корней. Все эти корни можно записать в следующем виде: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi t$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, где t и k — произвольные целые числа. Для краткости эти две записи часто объединяют в одну: $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Аналогично решаются и некоторые другие уравнения. Например, зная, что $\cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$, все корни уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ можно записать в виде: $x = \pm \frac{5\pi}{12} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Вопрос. Какие корни имеет уравнение $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$?

1.2. Решение уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Рассмотрим тригонометрическое уравнение

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (2)$$

По таблице значений тригонометрических функций можем найти, что число $x_0 = -\frac{\pi}{4}$ является одним из корней уравнения (2).

Для отыскания всех корней этого уравнения изобразим тригонометрическую окружность и построим направленный угол AOB величиной $-\frac{\pi}{4}$ радиан

(рис. 10). Затем через точку B перпендикулярно оси Oy проведём прямую n , которая пересечёт ось Oy в точке L с ординатой $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Прямая n содержит все точки координатной плоскости, ординаты которых равны $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Используя этот факт, нетрудно найти величины всех направленных углов, синусы которых

равны $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Один из направленных углов, соответствующих точке B , был найден в начале этого пункта. Он равен $-\frac{\pi}{4}$. Все углы, которым соответствует точка B , имеют вид $-\frac{\pi}{4} + 2\pi t$, где t — произвольное целое число.

Один из направленных углов, соответствующих точке C , равен $-\frac{3\pi}{4}$ (рис. 11). Величины

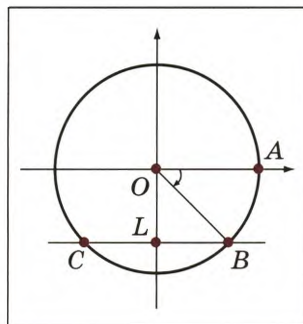


Рис. 10

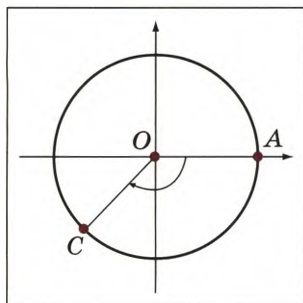


Рис. 11

всех направленных углов, которым соответствует точка C , имеют вид $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, где k — произвольное целое число.

Таким образом, уравнение (2) имеет бесконечное множество корней, которые можно записать в следующем виде: $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, где m и k — произвольные целые числа.

Вопрос. Какие корни имеет уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$?

1.3. Решение уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Рассмотрим тригонометрическое уравнение

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (3)$$

По таблице значений тригонометрических функций можем найти, что число $x_0 = \frac{\pi}{6}$ является одним из корней уравнения (3).

Для получения всех корней этого уравнения изобразим тригонометрическую окружность, ось тангенсов и построим направленный угол AOB величиной $\frac{\pi}{6}$ радиан (рис. 12). Затем через точки O и B проведём прямую l , которая пересекает ось тангенсов в точке N с ординатой $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Точки B и C пересечения прямой l с окружностью соответствуют направленным углам, тангенсы которых равны $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Один из направленных углов, соответствующих точке B , был найден в начале этого пункта и равен $\frac{\pi}{6}$. Все направленные углы, которым соответствует точка B , имеют величины $\frac{\pi}{6} + 2\pi m$, где

m — произвольное целое число.

Один из направленных углов, соответствующих точке C , равен $\frac{\pi}{6} + \pi$. Все углы, которым соответствует точка C , имеют величины $\left(\frac{\pi}{6} + \pi\right) + 2\pi n$, где n — произвольное целое число.

Таким образом, уравнение (3) имеет бесконечное множество корней, величины которых можно

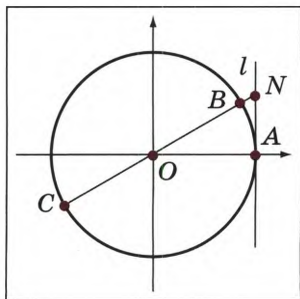


Рис. 12

записать в виде: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi t$, $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, где t и n — произвольные целые числа. Для краткости эти две записи объединяют в одну: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Вопрос. Какие корни имеет уравнение $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$?

1.4. Решение уравнения $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Рассмотрим уравнение

$$\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (4)$$

Числа вида $x = \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, не являются корнями этого уравнения. Поэтому с помощью формулы $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ уравнение (4) можно заменить на равносильное ему уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ или $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.

Одним из корней последнего уравнения является число $-\frac{\pi}{3}$. Поэтому аналогично рассмотренному в предыдущем пункте найдём все корни: $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вопрос. Как решить уравнение $\operatorname{tg} x = 0$?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Что такое радианная мера направленного угла?
2. Как определяется косинус числа?
3. Как решить уравнение вида $\cos x = a$, зная один из его корней?
4. Как определяется синус числа?
5. Как решить уравнение вида $\sin x = a$, зная один из его корней?
6. Как определяется тангенс числа?
7. Как решить уравнение вида $\operatorname{tg} x = a$, зная один из его корней?
8. Как решить уравнение вида $\operatorname{ctg} x = a$, зная один из его корней?

Задачи и упражнения ■

1. Решите уравнение:

- а) $\cos x = \frac{1}{2}$; б)* $\cos x = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$; в)* $\cos x = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$;
 г) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\cos x = 1$;
 ё) $\cos x = 0$.

2. Решите уравнение:

а) $\cos x = -\frac{1}{2}$; б)* $\sin x = -\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$; в) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; д)* $\sin x = \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})}{4}$; е) $\sin x = 1$;

ё) $\sin x = 0$; ж) $\sin x = -1$.

3. Решите уравнение:

а) $\operatorname{tg} x = 1$; б) $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; г)* $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$;

д)* $\operatorname{tg} x = -2 - \sqrt{3}$; е)* $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} - 2$; ё) $\operatorname{tg} x = 0$.

4. Решите уравнение:

а) $\sin 3x = 0$; б) $\cos 2x = -\frac{1}{2}$; в) $\operatorname{tg} 2x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; д)* $\cos \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$; е) $\operatorname{tg} \frac{x}{4} = 1$;

ё) $\sin 2x = 1$; ж) $\cos 3x = 0$; з) $\operatorname{tg} 5x = 0$.

5. Решите уравнение:

а) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; г) $\cos\left(0,1x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$;

д) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$;

ё) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) $2\sin\left(0,1x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$;

з) $\operatorname{tg}\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -1$; и)* $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) = 2 - \sqrt{3}$;

й) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} = 0$; к) $\operatorname{tg}(0,1x + 0,3\pi) = \sqrt{3}$.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какое множество корней имеет уравнение $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$?

1) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ 2) $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ 4) $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

1.2. Какое множество корней имеет уравнение $\sin x = -\frac{1}{2}$?

1) $x = \frac{\pi}{6} + \pi(2k+1), x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

2) $x = \frac{5\pi}{6} + \pi(2k+1), x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

3) $x = \frac{\pi}{3} + \pi(2k+1), x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

4) $x = \frac{2\pi}{3} + \pi(2k+1), x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi m, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

1.3. Какое множество корней имеет уравнение $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$?

1) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ 2) $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ 4) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

1.4. Какое множество корней имеет уравнение $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$?

1) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ 2) $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ 4) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из указанных множеств являются множеством всех корней уравнения $\operatorname{tg} x = 1$?

1) $x = -\frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ 2) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ 4) $x = \frac{5\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2.2. Какие из указанных множеств являются множеством всех корней уравнения $\sin x = 0$?

1) $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2) $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) $x = 2\pi k, x = \pi + 2\pi m, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

4) $x = -2\pi k, x = -\pi + 2\pi m, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

2.3. Какие из указанных множеств являются множеством всех корней уравнения $\cos x = 0$?

1) $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ 2) $x = \pm \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ 4) $x = \frac{\pi}{2} - 2\pi k, x = \frac{3\pi}{2} - 2\pi m, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

2.4. Какие из указанных множеств являются множеством всех корней уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$?

1) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi m, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

2) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

3) $x = \frac{\pi}{6} - 2\pi k, x = \frac{5\pi}{6} - 2\pi m, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

4) $x = \frac{13\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{17\pi}{6} + 2\pi m, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

■ § 2. КОРНИ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

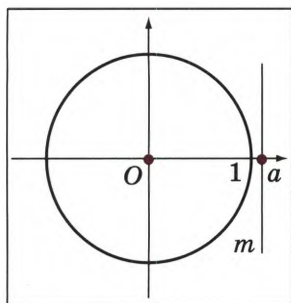


Рис. 1

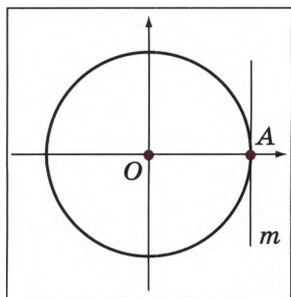


Рис. 2

2.1. Вид решения уравнений $\cos x = a$. Рассмотрим уравнение вида

$$\cos x = a \quad (5)$$

при различных значениях a . Для наглядного представления корней такого уравнения изобразим тригонометрическую окружность, отметим на оси Ox точку с абсциссой a и проведём через эту точку прямую m перпендикулярно оси Ox . Точкам пересечения прямой m с окружностью соответствуют все направленные углы, косинус которых равен a . В зависимости от значения a возможны несколько случаев.

Первый случай. Пусть $|a| > 1$. Тогда прямая m не пересекает тригонометрическую окружность (рис. 1), а поэтому уравнение (5) корней не имеет. Например, множество корней уравнения $\cos x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ пусто, так как $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$.

Второй случай. Пусть $a = 1$. Тогда прямая m пересекает окружность в единственной точке $A(1; 0)$ (рис. 2). Величины всех направленных углов, которые соответствуют точке A , можно записать в виде $x = 2\pi k$, где k — любое целое число.

Третий случай. Пусть $a = -1$. Тогда прямая m также пересекает окружность в единственной точке $B(-1; 0)$ (рис. 3). Величины всех направленных углов, которые соответствуют точке B , записываются в виде $x = \pi + 2\pi t$, где t — любое целое число.

Четвёртый случай. Пусть $|a| < 1$, например, $a = -\frac{1}{3}$. Тогда прямая m пересекает окружность в двух различных точках B и C (рис. 4). Если известен один из корней уравнения $\cos x = -\frac{1}{3}$, то все остальные корни можно найти точно так же, как это сделано в пункте 1.1.

Вопрос. Каково множество всех корней уравнения $\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$?

2.2. Арккосинус. Подобно тому, как понятие квадратного корня и обозначение \sqrt{b} вводятся для записи одного из корней уравнения $x^2 = b$, для записи одного из корней уравнения $\cos x = a$ также вводятся новое понятие и соответствующее обозначение.

При $|a| \leq 1$ арккосинусом числа a называется такое число φ из промежутка $[0; \pi]$, для которого $\cos \varphi = a$.

Арккосинус числа a записывается в виде $\arccos a$. Для изображения $\arccos a$ нужно рассмотреть верхнюю полуокружность тригонометрической окружности — максимальную дугу, лежащую в полуплоскости с неотрицательными ординатами (рис. 5).

Отметив на оси Ox точку с абсциссой a и проведя через неё прямую m перпендикулярно оси Ox , в пересечении с отмеченной дугой окружности получим точку D . Величина наименьшего неотрицательного направленного угла в радианах, соответствующего точке D , совпадает с числом $\arccos a$ (рис. 6).

Приведём таблицу значений $\arccos a$ для некоторых значений a (табл. 1).

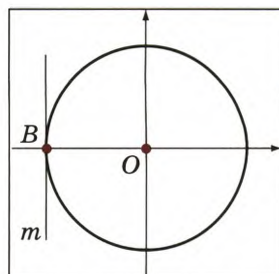


Рис. 3

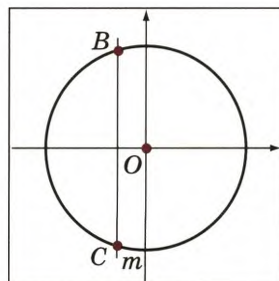


Рис. 4

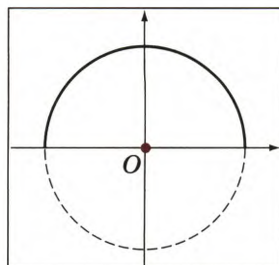


Рис. 5

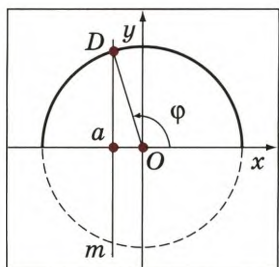


Рис. 6

Таблица 1

a	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arccos a$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

Подведём итоги этого пункта. Арккосинус числа a определяется только для чисел a из промежутка $[-1; 1]$. Для каждого такого числа a значение $\arccos a$ единственно и находится в промежутке $[0; \pi]$.

Вопрос. Чему равен $\arccos\left(-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$?

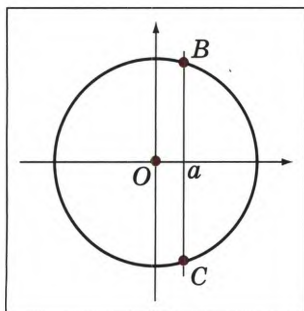


Рис. 7

2.3. Общее решение уравнения $\cos x = a$.

Вернёмся к уравнению $\cos x = a$ при $|a| < 1$. На рис. 7 точкам B и C соответствуют все направленные углы, косинус которых равен a . Величиной одного из углов, соответствующих точке B , является $\arccos a$. Число $-\arccos a$ является величиной одного из углов, соответствующих точке C .

Вследствие периодичности функции $\cos x$ все числа, отличающиеся от $\arccos a$ и $-\arccos a$ на $2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, также будут решениями уравнения $\cos x = a$. Других решений это уравнение не имеет.

Таким образом, при $|a| < 1$ общая формула корней уравнения $\cos x = a$ может быть записана в виде:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Например, множество корней уравнения $\cos x = -\frac{1}{3}$ выражается формулой $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Вопрос. Как доказать, что при $a = 1$ и при $a = -1$ общая формула корней уравнения $\cos x = a$ даёт такие же множества корней, какие были получены в пункте 2.1?

2.4. Уравнение $\cos t = 0$. Множество корней уравнения $\cos t = 0$ можно записать в виде: $t = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то есть в более компактном виде, чем даёт общая формула.

Вопрос. Как доказать, что приведённая формула даёт множество всех корней уравнения $\cos t = 0$?

2.5. Арксинус. Для записи одного из корней уравнения $\sin x = a$ также вводится новое понятие и соответствующее обозначение.

При $|a| \leq 1$ арксинусом числа a называется число φ из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, для которого $\sin \varphi = a$.

Арксинус числа a записывается в виде $\arcsin a$. Для изображения $\arcsin a$ рассмотрим правую полуокружность тригонометрической окружности — максимальную дугу, лежащую в полуплоскости с неотрицательными абсциссами (рис. 8). Отметив на оси Oy точку с ординатой a и проведя через неё прямую n перпендикулярно этой оси, в пересечении с указанной дугой получим точку B . Величина наименьшего по модулю направленного угла в радианах, который соответствует точке B , совпадает с числом $\arcsin a$ (рис. 9).

В табл. 2 приведены значения $\arcsin a$ для некоторых значений a .

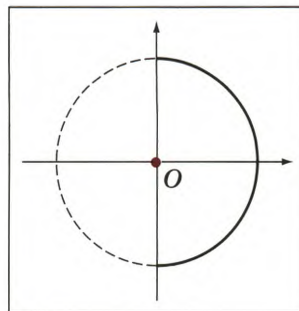


Рис. 8

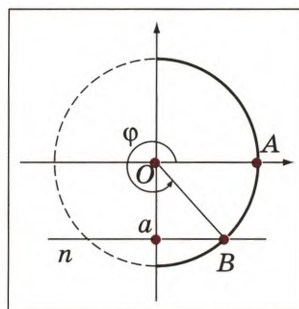


Рис. 9

Таблица 2

a	1	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\arcsin a$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{12}$	0	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\pi$

Подведём итоги этого пункта. Арксинус числа определяется только для чисел из промежутка $[-1; 1]$. Для каждого такого числа a значение $\arcsin a$ единственно и находится в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Вопрос. Как вычислить $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}\right)$?

2.6. Общее решение уравнения $\sin x = a$. Рассмотрим уравнение вида

$$\sin x = a \quad (6)$$

при различных значениях a . Для наглядного представления корней такого уравнения начертим тригонометрическую окружность, отметим на оси Oy точку с ординатой a и проведём через эту точку прямую n перпендикулярно оси Oy . Точки пересечения прямой n с окружностью ука-

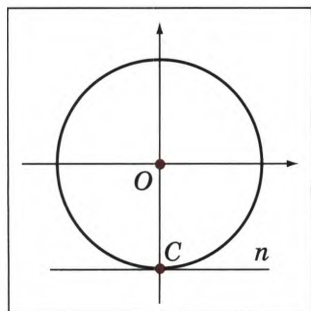


Рис. 10

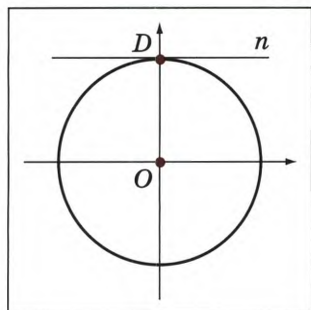


Рис. 11

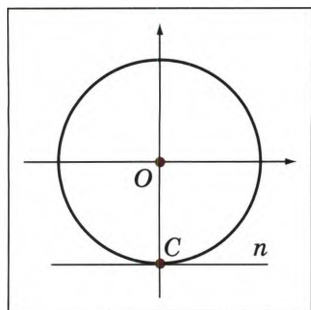


Рис. 12

зывают все направленные углы, синус которых равен a . Рассмотрим в зависимости от значения a несколько случаев.

Первый случай. Пусть $|a| > 1$, например, $a = -\frac{7}{5}$. Тогда прямая n не пересекает тригонометрическую окружность (рис. 10), а поэтому уравнение $\sin x = -\frac{7}{5}$ корней не имеет. Анало-

гично уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{2}-7}{2}$ имеет пустое множество корней, так как $\left| \frac{\sqrt{2}-7}{2} \right| > 1$.

Второй случай. Пусть $a = 1$. Тогда прямая n пересекает окружность в единственной точке $D(0; 1)$ (рис. 11). Поэтому все корни уравнения $\sin x = 1$ можно записать в виде $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Третий случай. Пусть $a = -1$. Тогда прямая n пересекает окружность в единственной точке $C(0; -1)$ (рис. 12). Поэтому все корни уравнения $\sin x = -1$ можно записать в виде $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Четвёртый случай. Пусть $|a| < 1$, например, $a = -\frac{2}{3}$. Тогда прямая n пересекает окружность в двух различных точках B и C (рис. 13).

Арксинус числа a равен величине одного из направленных углов, который соответствует точке B . Вследствие периодичности функции $\sin x$ все углы, отличающиеся по величине от $\arcsin a$ на $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, также будут решениями уравнения $\sin x = a$. Таким образом, числа $\arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, дают часть решений уравнения (6).

Синусы чисел φ и $\pi - \varphi$ равны: $\sin \varphi = \sin(\pi - \varphi)$. Поэтому число $\pi - \arcsin a$ равно величине одного из направленных углов, который соответствует точке C . Вследствие периодичности функции $\sin x$ все углы, отличающиеся по величине от $\pi - \arcsin a$ на $2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, также будут решениями уравнения $\sin x = a$. Таким образом, формулы

$$x = \arcsin a + 2\pi k, \quad x = \pi - \arcsin a + 2\pi m, \quad k, m \in \mathbb{Z},$$

дают все решения уравнения $\sin x = a$.

Рассмотрим, например, уравнение $\sin x = \frac{1}{4}$. По общим формулам можно сразу записать: $x = \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi k$; $x = \pi - \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi m$, $k, m \in \mathbb{Z}$.

Вопрос. Как доказать, что при $a = 1$ и при $a = -1$ общие формулы корней уравнения $\sin x = a$ приводят к верному ответу?

2.7. Уравнение $\sin t = 0$. Все корни уравнения $\sin t = 0$ можно найти по формуле $t = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Вопрос. Как доказать, что приведённая формула даёт множество всех корней уравнения $\sin t = 0$?

2.8. Другая форма записи решений уравнения $\sin x = a$.** В справочниках по математике можно встретить следующую формулу для всех корней уравнения $\sin x = a$ при $|a| \leq 1$:

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Вопрос. Каково множество всех корней уравнения $\sin x = \sin \frac{-3\pi}{7}$?

2.9. Арктангенс. Для записи одного из корней уравнения $\operatorname{tg} x = a$ также вводится новое понятие и соответствующее обозначение.

Для любого действительного числа a арктангенсом числа a называется число φ из промежутка $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, для которого $\operatorname{tg} \varphi = a$.

Арктангенс числа a записывается в виде $\operatorname{arctg} a$. Таблица значений тангенса некоторых углов и нечётность функции $\operatorname{tg} x$ позволяют заполнить табл. 3.

Таблица 3

a	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$2-\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$
$\operatorname{arctg} a$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$

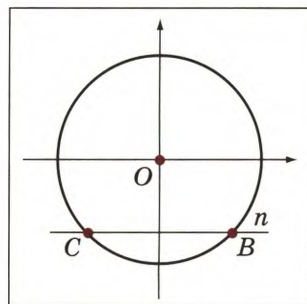


Рис. 13

Таким образом, арктангенс определяется для любого числа a , значение $\operatorname{arctg} a$ единственно и находится в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Вопрос. Как вычислить $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}-2}$?

2.10. Общее решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$. Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет решения при любом значении a , которые можно находить по формуле:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Вопрос. Как решить уравнение $\operatorname{tg} x = 4$?

2.11. Решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$. Решение уравнения $\operatorname{ctg} x = a$ при $a \neq 0$ легко сводится к решению уравнения вида $\operatorname{tg} x = b$. Действительно, так как $a \neq 0$, исходное уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = \frac{1}{a}$.

Пример. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$.

Данное уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. По формуле из пункта 2.10 получаем $x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Так как $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$, то $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Вопрос. Как решить уравнение $\operatorname{ctg} 2x = 1$?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Что называется арккосинусом числа a ?
2. Докажите формулу для решений уравнения $\cos x = a$ при $|a| \leq 1$.
3. Какие решения имеет уравнение $\cos x = 0$?
4. Что называется арксинусом числа a ?
5. Докажите формулы для решений уравнения $\sin x = a$ при $|a| \leq 1$.
6. Какие решения имеет уравнение $\sin x = 0$?
- 7.** Докажите формулу $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, для решений уравнения $\sin x = a$.
8. Что называется арктангенсом числа a ?
9. Докажите формулу для решений уравнения $\operatorname{tg} x = a$.

■ Задачи и упражнения

1. Вычислите:

- а) $\arccos \frac{1}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\arcsin \frac{1}{2}$;

г) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; д) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; е) $\operatorname{arctg}(-1)$.

2.* С помощью таблиц или калькулятора найдите приближённое значение:

а) $\arcsin 0,3010$; б) $\arccos 0,9440$; в) $\operatorname{arctg} 3$.

3. Решите уравнение:

а) $\cos x = -\frac{3}{4}$; б) $\cos x = \frac{\sqrt{26}-1}{5}$; в) $\cos x = 0,43$;

г) $\sin x = \frac{1}{8}$; д) $\sin x = \sqrt{2}-1$; е) $\sin x = -0,1$;

ё) $\operatorname{tg} x = -5$; ж) $\operatorname{tg} x = 2\sqrt{2}$; з) $\operatorname{tg} x = 2,3$.

4. Решите уравнение:

а) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$; б) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x - 1 = 0$; г) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x - 1 = 0$;

д) $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$; е) $\cos 2x = 0$;

ё) $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$; ж) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 1 = 0$;

з) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - 4 = 0$.

5.* Докажите тождество: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ при всех $x \in [-1; 1]$.

6. Вычислите:

а) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \operatorname{arctg} 1$.

7.* Докажите, что если $-1 \leq a < b \leq 1$, то:

а) $\arcsin a < \arcsin b$; б) $\arccos a > \arccos b$.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какое из чисел равно $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$?

1) $-\frac{5\pi}{6}$ 2) $\frac{\pi}{6}$ 3) $\frac{5\pi}{6}$ 4) $\frac{13\pi}{6}$

1.2.* Известно, что число $x = -\frac{\pi}{12}$ является одним из корней уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$. Каково множество всех корней этого уравнения?

$$1) x = \pm \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$$

$$2) x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$$

$$3) x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + 2\pi k, k \in Z$$

$$4) x = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$$

1.3. Множеством всех корней уравнения $\operatorname{tg} x = -\sqrt{17}$ является:

$$1) x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{17}) + k\pi, k \in Z$$

$$2) x = \pm \operatorname{arctg}(-\sqrt{17}) + 2k\pi, k \in Z$$

$$3) x = \operatorname{arctg}(-\sqrt{17}) + 2k\pi, k \in Z$$

$$4) x = (-1)^n \cdot \operatorname{arctg}(-\sqrt{17}) + n\pi, k \in Z$$

1.4. Укажите четверть, где расположен направленный угол, величина которого в радианах равна $\operatorname{arctg}(-\sqrt{229})$.

1) I четверть

2) II четверть

3) III четверть

4) IV четверть

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из указанных множеств являются множеством всех корней уравнения $\cos 2x = -\frac{1}{2}$?

$$1) x = \frac{\pi}{3} + \pi k, x = -\frac{\pi}{3} + \pi m, k \in Z, m \in Z$$

$$2) x = \frac{\pi}{3} + \pi k, x = \frac{2\pi}{3} + \pi m, k \in Z, m \in Z$$

$$3) x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

$$4) x = \frac{\pi}{6} + \pi k, x = \frac{\pi}{3} + \pi m, k \in Z, m \in Z$$

2.2. Укажите четверти, в которых могут содержаться точки $(x; \arcsin x)$ при $x \neq 0$.

1) I четверть

2) II четверть

3) III четверть

4) IV четверть

2.3.* Какие из указанных множеств являются множеством всех корней уравнения $\operatorname{tg} 4x = \sqrt{3}$?

$$1) x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z$$

$$2) x = \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$$

$$3) x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

$$4) x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z$$

2.4.* Какие из выражений равны $\frac{\pi}{2}$?

а) $\arcsin 1 + \arccos 1$

б) $\arccos (-1) + \arcsin (-1)$

в) $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right) - \arcsin \left(\frac{1}{2}\right)$

г) $\arccos \left(\frac{1}{2}\right) + \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$

§ 3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, ■ СВОДЯЩИЕСЯ К ПРОСТЕЙШИМ

3.1. Тригонометрические уравнения и их решения. *Тригонометрическим уравнением* обычно называют уравнение, содержащее тригонометрические функции от неизвестной величины. Каждое значение, при подстановке которого вместо неизвестного получается верное равенство, называется *решением* или *корнем* тригонометрического уравнения.

Решить тригонометрическое уравнение — значит найти все его корни или доказать, что уравнение корней не имеет.

Вопрос. Может ли множество решений тригонометрического уравнения быть пустым?

3.2. Решение способом приведения к одному аргументу. В этом параграфе мы рассмотрим тригонометрические уравнения, которые тем или иным способом сводятся к простейшим. Одним из таких способов является *приведение к одному аргументу*. Поясним этот способ на следующем примере.

Пример 1. Решить уравнение $\sin 2x = 2 \sin^2 x$.

Заменим $\sin 2x$ на $2 \sin x \cdot \cos x$. Получим уравнение, содержащее тригонометрические функции лишь одного аргумента x :

$$\sin x (\cos x - \sin x) = 0.$$

Решение этого уравнения сводится к решению двух уравнений:

$$\sin x = 0 \text{ и } \cos x - \sin x = 0.$$

Первое уравнение $\sin x = 0$ даёт серию корней $x_1 = \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Левую часть второго уравнения $\cos x - \sin x = 0$ преобразуем, например, следующим образом:

$$\begin{aligned} \cos x - \sin x &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\cos x \cdot \sin \frac{3\pi}{4} + \sin x \cdot \cos \frac{3\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{3\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

Следовательно, второе уравнение сводится к уравнению $\sin \left(x + \frac{3\pi}{4} \right) = 0$.

Отсюда получаем вторую серию решений $x_2 = -\frac{3\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Поскольку

$-\frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \pi$, то эту серию решений можно записать также в виде $\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi m; \frac{\pi}{4} + \pi n$, $m, n \in \mathbb{Z}$.

Вопрос. Каким ещё способом можно решить уравнение $\cos x - \sin x = 0$?

3.3. Решение способом приведения к одной функции. Другим способом сведения тригонометрических уравнений к простейшим является *приведение к одной тригонометрической функции*. Поясним его на следующих примерах.

Пример 2. Решить уравнение $\cos 2x = \sin x$.

Заменим $\cos 2x$ на $1 - 2\sin^2 x$. Получим $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$. Это уравнение содержит только функцию $\sin x$. Полагая $\sin x = t$, придём к квадратному уравнению $t^2 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} = 0$, решая которое получаем корни $t_1 = -1$ и $t_2 = \frac{1}{2}$.

Таким образом, равенство $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ возможно лишь тогда, когда $\sin x = -1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$.

Если $\sin x = -1$, то $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

Если $\sin x = \frac{1}{2}$, то $x_2 = \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi n = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$x_3 = \pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi k = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi m; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $m, n, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Решить уравнение $5\sin^2 x + 3\sin 2x - 3\cos^2 x = 4$.

Перепишем уравнение в виде $5\sin^2 x + 6\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x)$. Отсюда $\sin^2 x + 6\sin x \cdot \cos x - 7\cos^2 x = 0$. Заметим, что если число x таково, что $\cos x = 0$, то $\sin^2 x = 1$, а поэтому при подстановке такого числа в уравнение равенство не получается. Поэтому для корней заданного уравнения выполняется условие $\cos x \neq 0$. Разделив обе части полученного уравнения на $\cos^2 x$, будем иметь $\operatorname{tg}^2 x + 6\operatorname{tg} x - 7 = 0$. Это уравнение содержит только функцию $\operatorname{tg} x$.

Пусть $\operatorname{tg} x = t$. Тогда $t^2 + 6t - 7 = 0$, откуда $t = -3 \pm \sqrt{9+7} = -3 \pm 4$. Следовательно, $t_1 = 1$ или $t_2 = -7$.

Остаётся решить простейшие тригонометрические уравнения $\operatorname{tg} x = 1$ и $\operatorname{tg} x = -7$. Решениями первого из них является серия $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; решениями второго — серия $x_2 = \operatorname{arctg}(-7) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi m; \arctg(-7) + \pi n, m, n \in Z$.

Вопрос. Почему в примере 3 при делении обеих частей уравнения на $\cos^2 x$ не происходит потери корней?

3.4. Способ преобразования сумм и произведений синусов и косинусов. В этом пункте рассмотрим способ преобразования сумм и произведений синусов и косинусов.

Пример 4. Решить уравнение $\sin 5x - \sin 4x = 0$.

Применив формулу для разности синусов, получим уравнение $2\cos \frac{9}{2}x \cdot \sin \frac{x}{2} = 0$. Приравнявая множители к нулю, получаем два уравнения: $2\cos \frac{9}{2}x = 0$ и $\sin \frac{x}{2} = 0$. Решая первое из этих уравнений, найдём $\frac{9}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi m, x = \frac{2}{9}\left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right) = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi m}{9}, m \in Z$. Решая второе уравнение, найдём $\frac{x}{2} = \pi n, x = 2\pi n, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi m}{9}, 2\pi n, m, n \in Z$.

Пример 5. Решить уравнение $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}$.

Произведение в левой части уравнения преобразуем в сумму и получим $\cos 2x - \cos 4x = 1$. Используя формулу для косинуса двойного аргумента, получаем

$$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1, \cos 2x - (2\cos^2 2x - 1) = 1 \text{ или } \cos 2x(1 - 2\cos 2x) = 0.$$

Таким образом, данное уравнение сводится к двум: $\cos 2x = 0$ и $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

Решая первое из этих уравнений, найдём $2x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi m, x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in Z$.

Решая второе уравнение, получим $2x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, x_2 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}m; \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, m, n \in Z$.

Пример 6. Решить уравнение $\cos x + \sin x + 1 = 0$.

Преобразуем тригонометрический двучлен $\cos x + \sin x$:

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Получим уравнение $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $x_1 + \frac{\pi}{4} = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi m = -\frac{\pi}{4} + 2\pi m$, откуда $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; $x_2 + \frac{\pi}{4} = \pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n = \pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, x_2 = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi + 2\pi m; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, m, n \in \mathbb{Z}$.

Вопрос. Как решить уравнение из примера 6, используя формулу для суммы синусов?

3.5.* Решение способом подстановки. Наряду с рассмотренными способами часто используется *способ подстановки*, сводящий тригонометрическое уравнение к алгебраическому. Такой способ в простейшем виде уже применялся в примерах из пункта 3.3, где были использованы подстановки $\sin x = t$ и $\operatorname{tg} x = t$. Возможны и другие подстановки.

Пример 7. Решить уравнение $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

Введём подстановку $\sin x + \cos x = t$. Тогда $t^2 = (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x = 1 + 2 \sin x \cdot \cos x$, откуда $\sin x \cdot \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Применив формулу для суммы кубов, перепишем данное уравнение в виде $(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cdot \cos x) = 1$. Переходя к неизвестному t , будем иметь $t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = 1$ или $t - 1 - \frac{t^2 - 1}{2} \cdot t = 0, (t - 1) \cdot \left(1 - \frac{t + 1}{2} \cdot t\right) = 0$. Приравняв множители к нулю, получаем $t - 1 = 0$, откуда $t_1 = 1$, и $1 - \frac{t + 1}{2} \cdot t = 0, t^2 + t - 2 = 0$, откуда $t_2 = 1 = t_1, t_3 = -2$.

Далее нужно решить два уравнения:

$$\sin x + \cos x = 1 \text{ и } \sin x + \cos x = -2.$$

Тригонометрический двучлен $\sin x + \cos x$ в предыдущем пункте был приведён к виду $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Поэтому полученные уравнения запишутся в виде $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ и $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -2$ или $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$.

Решим первое из этих уравнений: $x_1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\pi m, x_1 = 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$, $x_2 + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, x_2 = \pi - \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Второе уравнение $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ решений не имеет, так как $|\sqrt{2}| > 1$.

Ответ: $2\pi m; \frac{\pi}{2} + 2\pi n, m, n \in \mathbb{Z}$.

Вопрос. Какой вид будет иметь уравнение $\sin 2x + \sin x = \cos x$, если выполнить подстановку $z = \cos x - \sin x$?

3.6.* Решение уравнения с применением формулы для тангенса суммы или разности углов. При использовании в процессе решения тригонометрических уравнений формулы тангенса суммы или разности двух углов следует быть особо внимательным, потому что применение этой формулы иногда может изменять области определения частей уравнения. В таких случаях, как правило, нужен дополнительный логический анализ процесса решения.

Пример 8. Решить уравнение $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - 8 \operatorname{ctg} x$.

Область определения данного уравнения является пересечением областей определения левой и правой частей уравнения и задаётся условиями:

$$x - \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}. \text{ Применение формулы } \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}$$

для тангенса разности приводит к изменению области определения левой части исходного уравнения — добавляется условие $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Поэтому при решении заданного уравнения рассматриваем два случая.

I. Пусть $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Тогда с применением формулы тангенса разности уравнение преобразуется к виду $\frac{\operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} x} = \sqrt{3} - \frac{8}{\operatorname{tg} x}$, откуда

$$\frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1}{\operatorname{tg} x + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 8}{\operatorname{tg} x}, \quad \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x - 8\sqrt{3}, \quad \operatorname{tg} x = -2\sqrt{3}.$$

Решениями являются числа $x = \operatorname{arctg}(-2\sqrt{3}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, которые все входят в область определения заданного уравнения.

II. Пусть $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\operatorname{ctg} x = 0, \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + \pi n\right) = \sqrt{3}$.

Отсюда следует, что $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} = \sqrt{3} - 8 \cdot 0 = \sqrt{3} - 8 \operatorname{ctg} x$. Поэтому все значения $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, также являются решениями заданного уравнения.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$; $x = \arctg(-2\sqrt{3}) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вопрос. При каких x справедливо тождество $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1}{1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}}$?

3.7. Универсальная подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.** Подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$

является *универсальной* для решения тригонометрических уравнений вида $R(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x) = 0$, где левая часть получается из указанных тригонометрических функций при помощи четырёх арифметических действий: сложения, вычитания, умножения и деления. Заменяя в таком уравнении тригонометрические функции выражениями

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2},$$

получим алгебраическое уравнение относительно t .

Однако решение тригонометрического уравнения с помощью подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ не всегда является наиболее простым. Эта подстановка может приводить к сложному алгебраическому уравнению.

Вопрос. Как выразить $\sin x$ и $\cos x$ через $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Какое уравнение называется тригонометрическим?
2. Какие способы сведения тригонометрических уравнений к простейшим вы знаете?

3.** Для решения каких тригонометрических уравнений можно использовать универсальную тригонометрическую подстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$?

■ Задачи и упражнения

1. Решите уравнение:

- | | |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------|
| а) $2\sin\frac{x+1}{4} + 1 = 0$; | б) $2\sin^2 2x - \sin 4x = 0$; |
| в) $\cos 2x - \cos x = 0$; | г) $\sin 2x - \cos x = 0$; |
| д) $4\cos^2 x + \sin x = 1$; | е) $3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 1$; |
| ё) $\cos^4 x - \sin^4 x = 1$; | ж) $2\cos 2x = 7\sin x$. |

2. Решите уравнение способом преобразований произведений и сумм:

- | | |
|----------------------------------------|-----------------------------------|
| а) $\cos 7x \cdot \cos 3x = \cos 4x$; | б) $\cos 7x + \cos x = \cos 4x$; |
|----------------------------------------|-----------------------------------|

$$\begin{array}{ll} \text{в)** } \cos(5+x) = \cos 5x; & \text{г)* } \sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x = \frac{1}{2} \cos 2x; \\ \text{д) } \cos 3x - \sin 3x = 0; & \text{е) } \sin 3x \cdot \cos x = \sin 7x \cdot \cos 5x; \\ \text{ё)* } \sin 2x - \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0; & \text{ж)* } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}. \end{array}$$

3.* Решите уравнение с помощью подстановки, указанной в скобках:

$$\text{а) } \cos x + \sin x + 1 = 0 \quad \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t\right); \quad \text{б) } \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \operatorname{ctg} x \quad (\cos x = t);$$

$$\text{в) } \cos x = \frac{3 \sin^2 x - 1}{\sin x} \quad (\operatorname{tg} x = t);$$

$$\text{г) } \sin 2x = 12(\sin x - \cos x - 1) \quad (t = \sin x - \cos x).$$

4.** Найдите все решения уравнения $\sin 3x - \sin x + \cos 2x = 1$ на отрезке от 3 до 10.

5.** Решите уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \sin 3x \cdot \cos x$.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1.** К какому из уравнений приводится уравнение $2 \cos x + 2 \sin x = 1$ при замене $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$?

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1) $3t^2 - 4t - 1 = 0$ | 2) $3t^2 - 4t + 1 = 0$ |
| 3) $3t^2 + 4t + 1 = 0$ | 4) $3t^2 + 4t - 1 = 0$ |

1.2. К какому из уравнений приводится уравнение $\cos 2x = \sin x + \sin^2 x$ при замене $t = \sin x$?

- | | |
|-----------------------|-----------------------|
| 1) $3t^2 + t + 1 = 0$ | 2) $3t^2 + t - 1 = 0$ |
| 3) $3t^2 - t - 1 = 0$ | 4) $3t^2 - t + 1 = 0$ |

1.3. Совокупности каких уравнений равносильно уравнение $\sin 7x = \sin 3x$?

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1) $\cos 2x = 0$ и $\cos 5x = 0$ | 2) $\cos 2x = 0$ и $\sin 5x = 0$ |
| 3) $\sin 2x = 0$ и $\sin 5x = 0$ | 4) $\sin 2x = 0$ и $\cos 5x = 0$ |

1.4. Какому из уравнений равносильно уравнение $4 \sin 3x \cdot \cos x = 1$?

- | | |
|---------------------------------|--------------------------------|
| 1) $2 \sin 4x - 2 \sin 2x = -1$ | 2) $2 \sin 4x - 2 \sin 2x = 1$ |
| 3) $2 \sin 4x + 2 \sin 2x = -1$ | 4) $2 \sin 4x + 2 \sin 2x = 1$ |

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Каким из указанных уравнений равносильно уравнение $\sin^2 2x = \frac{1}{2}$?

- 1) $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 2) $\cos 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 3) $\cos^2 2x = \frac{1}{2}$ 4) $\cos 4x = 0$

2.2. Каким из указанных уравнений равносильно уравнение $\cos 2x - \sin 2x = 0$?

1) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ 2) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

3) $\sin\left(2x + \frac{3\pi}{4}\right) = 0$ 4) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

2.3.* Укажите задачи, для которых множество корней совпадает с множеством корней уравнения $\sin 2x \cdot \sin 3x = \sin 5x \cdot \sin 6x$.

1) совокупность уравнений $\sin 3x = 0$ и $\cos 8x = 0$

2) уравнение $\cos 11x = \cos 5x$

3) совокупность уравнений $\sin 3x = 0$ и $\sin 8x = 0$

4) уравнение $\sin 11x = \sin 5x$

2.4.* Укажите уравнения, для которых замена $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ приводит к квадратному уравнению относительно неизвестной t .

1) $2 \sin x - 3 \cos x = 1$ 2) $5 \cos x - \sin x = 2$

3) $\sin^2 x - 3 \cos x = 1$ 4) $\sin x \cdot \cos x - \sin x = 0,5$

■ § 4. ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

4.1. Условие обратимости функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена на множестве U . Выделим в U некоторое подмножество D . Будем говорить, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет в D *условию обратимости*, если разным значениям a и b аргумента x из D соответствуют разные значения $f(a)$ и $f(b)$ данной функции.

Условие обратимости можно символически записать в виде:

$$a \in D, b \in D, a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b).$$

Пример 1. Функция $y = 2x$ удовлетворяет условию обратимости в любом множестве $D \subset R$, так как при $a \neq b$ имеем также $2a \neq 2b$.

Пример 2. Функция $f(x) = x^2$ не удовлетворяет условию обратимости в области определения $(-\infty; \infty)$, так как, например, числа $a = -1$ и $b = 1$ разные, но $f(a) = f(-1) = (-1)^2 = 1$ и $f(b) = f(1) = 1^2 = 1$ получаются равными. Однако если ограничиться множеством $D = [0; \infty)$, то при $a < b$ будем иметь $a^2 < b^2$. Поэтому в D функция $y = x^2$ удовлетворяет условию обратимости.

Вопрос. Какие из функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ и $y = \operatorname{tg} x$ удовлетворяют условию обратимости на отрезке $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$?

4.2. Обратная функция и её график. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию обратимости в множестве D . Множество значений, которые она принимает в D , обозначим через E . Определим в E новую функцию $y = g(x)$ следующим образом.

Возьмём какое-либо число x из множества E и найдём то единственное число y из D , для которого $f(y) = x$. Положим $g(x) = y$. Определённая по такому правилу функция $y = g(x)$ называется *обратной* для функции $y = f(x)$ на множестве D .

Связь между функцией $y = f(x)$ и обратной функцией $y = g(x)$ можно символически выразить в виде

$$x \in E, y = g(x) \Leftrightarrow y \in D, x = f(y).$$

Геометрически это условие означает, что точка $(x; y)$ принадлежит графику обратной функции $y = g(x)$ тогда и только тогда, когда точка $(y; x)$ принадлежит графику данной функции $y = f(x)$. Поскольку точки $(x; y)$ и $(y; x)$ симметричны друг другу относительно прямой $y = x$ (рис. 1), то

график обратной функции симметричен графику данной функции относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Вопрос. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет условию обратимости в множестве D и E — множество значений, которые она принимает в D . Почему для числа x из множества E найдётся только одно число y из множества D , для которого $f(y) = x$?

4.3. Функция, обратная к функции $y = 2x$.

Мы уже видели, что функция $y = 2x$ удовлетворяет условию обратимости и поэтому имеет обратную функцию $y = g(x)$. Найдём эту функцию.

В предыдущем пункте показано, что обратная функция должна быть связана с функцией $y = 2x$ условием $y = g(x) \Leftrightarrow x = 2y$. Следовательно, обратной является функция $y = \frac{1}{2}x$.

Графиком функции $y = 2x$ является прямая, проходящая через начало координат и точку $(1; 2)$. Следовательно, графиком обратной функции $y = \frac{1}{2}x$ также является пря-

мая, проходящая через начало координат и точку $(2; 1)$, симметричную точке $(1; 2)$ относительно биссектрисы угла между осями Ox и Oy (рис. 2). Прямые $y = 2x$ и $y = \frac{1}{2}x$ также симметричны относительно этой биссектрисы.

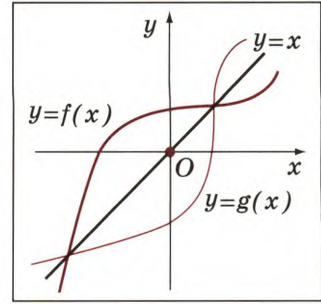


Рис. 1

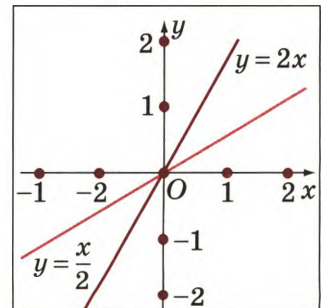


Рис. 2

Вопрос. Как показать, что при $k \neq 0$ функция $y = kx$ имеет обратную функцию $y = \frac{1}{k}x$?

4.4.* Функции $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$. В пункте 4.1 было показано, что функция $y = x^2$ не удовлетворяет условию обратимости на всей области определения, но удовлетворяет условию обратимости на множестве $D = [0; \infty)$. Так как функция $y = x^2$ на промежутке $[0; \infty)$ принимает все неотрицательные значения, обратная функция определена на множестве $E = [0; \infty)$ и принимает значения в множестве D . Для записи обратной функции пришлось вводить новое обозначение. А именно: если $b = a^2$ и $a \geq 0$, то $a = \sqrt{b}$. Такое обозначение позволяет записать в виде $y = \sqrt{x}$ функцию, обратную к функции $y = x^2$ на множестве $D = [0; \infty)$.

Вопрос. Какой график имеет функция $y = \sqrt{x}$?

■ Контрольные вопросы и задания

1. При каком условии функция $y = f(x)$ имеет обратную на множестве D ?

2. Как определяется обратная функция $y = g(x)$ для функции $y = f(x)$, удовлетворяющей условию обратимости на множестве D ?

3. Докажите, что график обратной функции симметричен графику данной функции относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

4.* На каком промежутке функция $y = \sqrt{x}$ является обратной к функции $y = x^2$?

■ Задачи и упражнения

1.* Выясните, какие из функций $y = 3x + 4$, $y = |x|$, $y = x^3$ удовлетворяют условию обратимости на промежутке $(-\infty; \infty)$.

2.* Докажите, что если функция $y = f(x)$ монотонна на отрезке $[a; b]$, то она имеет обратную.

3. Найдите обратную функцию для функции $y = 3x + 4$.

4.* Покажите, что функция $y = x^4$ имеет обратную на промежутке $[0; \infty)$, и найдите её.

5. Найдите обратную функцию для функции $y = -x$.

6.** Найдите обратную функцию для функции $y = x^3$ и изобразите графики обеих функций на одном рисунке.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какая функция является обратной для функции $y = 2x + 1$, определённой на множестве R ?

1) $y = 2x - 1$ 2) $y = \frac{1}{2}x - 1$ 3) $y = 2x + \frac{1}{2}$ 4) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

1.2.** Какая функция является обратной для функции $y = \frac{2}{x+1}$, определённой на множестве $(-\infty; -1) \cup (-1; \infty)$?

1) $y = \frac{x+1}{2}$ на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

2) $y = \frac{2-x}{x}$ на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

3) $y = \frac{2}{x-1}$ на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

4) $y = \frac{2+x}{x}$ на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$

1.3.* Какая функция является обратной для функции $y = \sqrt{2x-1}$, определённой на промежутке $[0, 5; \infty]$?

1) $y = 2(\sqrt{x} + 1)$ на множестве $[0; \infty)$

2) $y = 2(x^2 + 1)$ на множестве $[0; \infty)$

3) $y = \frac{\sqrt{x} + 1}{2}$ на множестве $[0; \infty)$

4) $y = \frac{x^2 + 1}{2}$ на множестве $[0; \infty)$

1.4.* Какой вид имеет функция, обратная к функции $y = (x-1)^2 + 1$, рассматриваемой на промежутке $(-\infty; 1]$?

1) $y = 1 - \sqrt{x+1}$ на множестве $[-1; \infty)$

2) $y = -1 + \sqrt{x+1}$ на множестве $[-1; \infty)$

3) $y = 1 - \sqrt{x-1}$ на множестве $[1; \infty)$

4) $y = -1 + \sqrt{x-1}$ на множестве $[1; \infty)$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1.** Какие из указанных функций удовлетворяют условию обратимости на отрезке $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$?

1) $y = \sin x$ 2) $y = \cos x$ 3) $y = \operatorname{tg} x$ 4) $y = \operatorname{ctg} x$

2.2.** Какие из указанных функций удовлетворяют условию обратимости на промежутке $(-\infty; \infty)$?

1) $y = 3x^2 + 4$ 2) $y = x^2 - 5x - 1$ 3) $y = (x + 1)^3$ 4) $y = x^3 + x$

2.3.** Какие из указанных функций, определённых на всей числовой прямой, имеют обратную?

1) $y = 2|x| - x$ 2) $y = |x| + 2x$ 3) $y = 2x - |x|$ 4) $y = -x - 2|x|$

2.4.** Какие из указанных функций, определённых на всей числовой прямой, не имеют обратной?

1) $y = -|x|$ 2) $y = x \cdot |x|$ 3) $y = -x \cdot |x|$ 4) $y = x^2 \cdot |x|$

■ § 5. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

5.1.** Функции $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$. Функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и, следовательно, удовлетворяет условию обра-

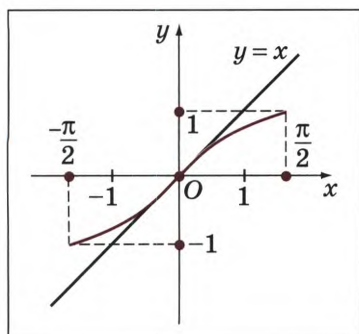


Рис. 1

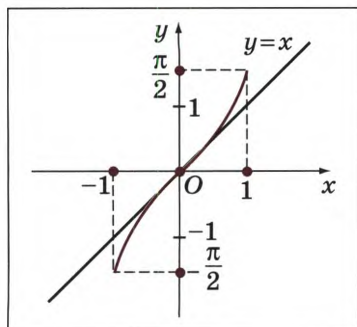


Рис. 2

тимости: если $-\frac{\pi}{2} \leq a < b \leq \frac{\pi}{2}$, то $\sin a \neq \sin b$.

Поэтому для функции $y = \sin x$, рассматриваемой на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, существует обратная функция. Обратная функция $y = g(x)$ определена на множестве значений синуса, то есть на промежутке $[-1; 1]$, и связана с функцией $y = \sin x$ следующими условиями: если $y = g(x)$, то $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ и $x = \sin y$.

Напомним, что арксинусом числа $x \in [-1; 1]$ называется такое число y , принадлежащее промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, что $x = \sin y$. Значит, обратная функция для функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ и есть $y = \arcsin x$.

Если изобразить график функции $y = \sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 1) и симметрично отразить этот график относительно прямой $y = x$, получим график функции $y = \arcsin x$ (рис. 2).

Вопрос. Как найти обратную функцию к функции $y = \sin x$, рассматриваемой на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$?

5.2.** Функции $y = \cos x$ и $y = \arccos x$.

Функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $[0; \pi]$ и поэтому удовлетворяет на этом отрезке условию обратимости: если $0 \leq a < b \leq \pi$, то $\cos a \neq \cos b$. Следовательно, функция $y = \cos x$, рассматриваемая на отрезке $[0; \pi]$, имеет обратную функцию.

Обратная функция $y = g(x)$ определена на множестве значений косинуса, то есть на промежутке $[-1; 1]$, и связана с функцией $y = \cos x$ следующими условиями: если $y = g(x)$, то $0 \leq y \leq \pi$ и $x = \cos y$. Вспомним, что арккосинусом числа $x \in [-1; 1]$ называется такое число y , принадлежащее отрезку $[0; \pi]$, что $\cos y = x$. Таким образом, обратная для функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ есть функция $y = \arccos x$.

График функции $y = \arccos x$ симметричен графику функции $y = \cos x$ на отрезке $[0; \pi]$ относительно прямой $y = x$ (рис. 3).

Вопрос. Как найти обратную функцию для функции $y = \cos x$, рассматриваемой на отрезке $[\pi; 2\pi]$?

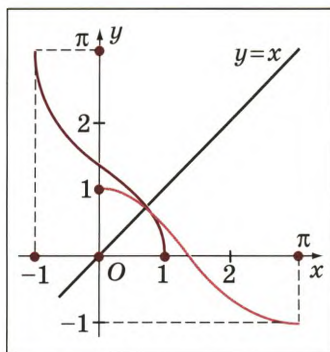


Рис. 3

5.3. Функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{arctg} x$.** Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ и поэтому удовлетворяет на этом промежутке условию обратимости: если $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} a \neq \operatorname{tg} b$. Следовательно, функция $y = \operatorname{tg} x$, определённая на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, имеет обратную функцию.

Обратная функция $y = g(x)$ определена на области значений $y = \operatorname{tg} x$, то есть на всей числовой прямой, и удовлетворяет условиям: если $y = g(x)$, то $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ и $x = \operatorname{tg} y$. Значение функции $y = g(x)$ удовлетворяет определению арктангенса числа x , а поэтому $y = g(x)$ есть функция $y = \operatorname{arctg} x$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен относительно прямой $y = x$ ветви графика тангенса на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 4).

Вопрос. Какой будет обратная функция для функции $y = \operatorname{tg} x$, рассматриваемой на интервале $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$?

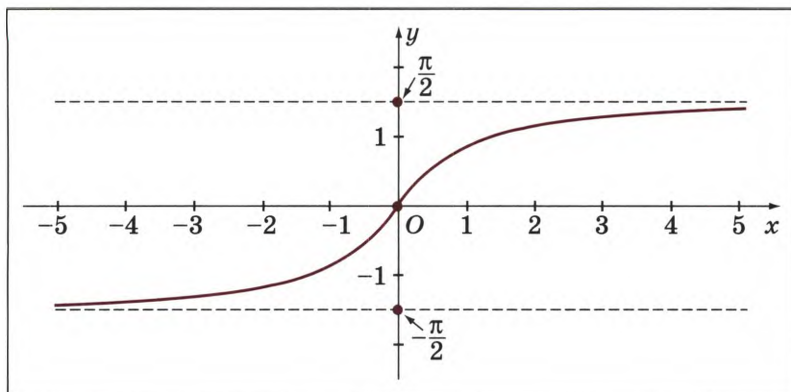


Рис. 4

5.4. Функции $y = \text{ctg } x$ и $y = \text{arccctg } x$.** Функция $y = \text{ctg } x$ убывает на $(0; \pi)$ и поэтому удовлетворяет на этом промежутке условию обратимости: если $0 < a < b < \pi$, то $\text{ctg } a \neq \text{ctg } b$. Следовательно, функция $y = \text{ctg } x$, определённая на промежутке $(0; \pi)$, имеет обратную функцию. Обратная функция $y = g(x)$ определена на области значения $y = \text{ctg } x$, то есть на всей числовой прямой, и удовлетворяет условиям: если $y = g(x)$, то $0 < y < \pi$ и $x = \text{ctg } y$. Значение функции $y = g(x)$ удовлетворяет определению арккотангенса числа x , а поэтому $y = g(x)$ есть функция $y = \text{arccctg } x$.

График функции $y = \text{arccctg } x$ симметричен относительно прямой $y = x$ ветви графика функции $y = \text{ctg } x$ на промежутке $(0; \pi)$ (рис. 5).

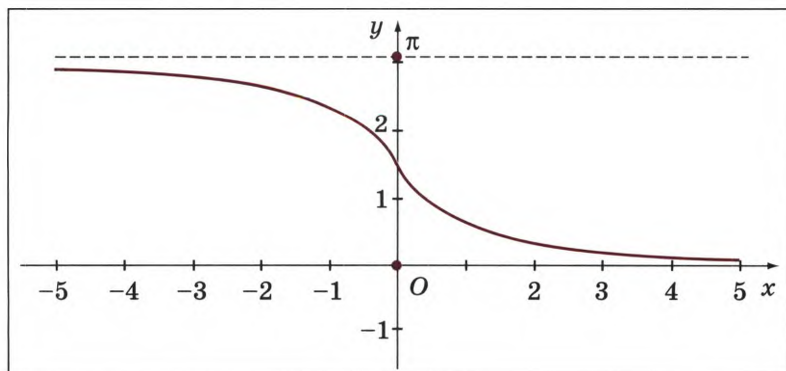


Рис. 5

Вопрос. Какой будет обратная функция для функции $y = \text{ctg } x$, рассматриваемой на интервале $(\pi; 2\pi)$?

5.5. Круговые функции.** Обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ иногда называют *круговыми* функциями. Эти функции позволяют по значениям тригонометрических функций находить в радианах величины соответствующих им направленных углов или соответствующие точки на тригонометрической окружности. Приближённые значения круговых функций можно находить либо с помощью вычислительной техники, либо с помощью специальных таблиц.

Вопрос. Чему равно приближённое значение $\arcsin 0,5001$?

Контрольные вопросы и задания ■

- 1.** Как определяется функция $y = \arcsin x$?
- 2.** Укажите область определения и область значений функции $y = \arcsin x$.
- 3.** Начертите график функции $y = \arcsin x$.
- 4.** Как определяется функция $y = \arccos x$?
- 5.** Укажите область определения и область значений функции $y = \arccos x$.
- 6.** Начертите график функции $y = \arccos x$.
- 7.** Как определяется функция $y = \arctg x$?
- 8.** Укажите область определения и область значений функции $y = \arctg x$.
- 9.** Начертите график функции $y = \arctg x$.
- 10.** Как определяется функция $y = \operatorname{arcctg} x$?
- 11.** Укажите область определения и область значений функции $y = \operatorname{arcctg} x$.
- 12.** Начертите график функции $y = \operatorname{arcctg} x$.

Задачи и упражнения ■

- 1.** Найдите обратную функцию для функции $y = \sin x$, рассматриваемой на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.
- 2.** Найдите обратную функцию для функции $y = \cos x$, заданной на отрезке $[-\pi; 0]$.
- 3.** Найдите область определения функции $y = \arcsin(2x - 1)$.
- 4.** Найдите множество значений функции $y = 2\arccos x + \frac{\pi}{2}$.
- 5.** Изобразите график функции $y = 2\arctg x$.

6.** Изобразите график функции $y = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2}$.

7.** Вычислите значение функции $y = \arccos x - \operatorname{arctg} 2x$ при $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

8.** На промежутке $[-1; 0]$ найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \arccos x - \arcsin x$.

9.** Найдите область определения и множество значений функции $y = \operatorname{arctg}(\arcsin x)$.

10.** На одном чертеже постройте графики функций $y = \arccos x$ и $y = \arccos 2x$ и по чертежу укажите, при каком значении x разность $\arccos 2x - \arccos x$ должна быть наибольшей.

11.** С помощью графиков функций $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ найдите знак каждой из разностей:

а) $\arccos 0,7 - \arccos 0,5$;

б) $\arcsin(\sqrt{2}-1) - \arcsin(\sqrt{5}-2)$;

в) $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) - \arccos\left(-\frac{3}{4}\right)$;

г) $\arccos\left(\sin \frac{\pi}{12}\right) - \arccos\left(\sin \frac{\pi}{13}\right)$.

12.** Найдите наибольшее и наименьшее значение функции:

а) $y = \arcsin x$ при изменении x от $\frac{1}{2}$ до $\frac{\sqrt{3}}{2}$ включительно;

б) $y = \arccos(x + x^2)$ при изменении x от $-\frac{1}{2}$ до 0 включительно.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1.** Какая функция является обратной для функции $y = \sqrt{2x+1}$, определённой на множестве $[-0,5; \infty)$?

1) $y = \frac{1}{2}(x^2-1)$ на множестве $[0; \infty)$

2) $y = 2x^2 - 1$ на множестве $[-0,5; \infty)$

3) $y = \frac{1}{2}(x^2+1)$ на множестве $[0; \infty)$

4) $y = \frac{1}{2}(x^2-1)$ на множестве $[-0,5; \infty)$

1.2.** Какая функция является обратной для функции $y = -\sqrt{4-x^2}$, определённой на множестве $[0; 2]$?

1) $y = \sqrt{4-x^2}$ на множестве $[0; 2]$

2) $y = \sqrt{4-x^2}$ на множестве $[-2; 0]$

3) $y = -\sqrt{4-x^2}$ на множестве $[0; 2]$

4) $y = -\sqrt{4-x^2}$ на множестве $[-2; 0]$

1.3.** Известно, что $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Какое значение имеет $\arccos \frac{1-\sqrt{5}}{4}$?

- 1) -108° 2) 108° 3) $-\frac{3\pi}{5}$ 4) $\frac{3\pi}{5}$

1.4.** Известно, что $\sin 165^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Какое значение имеет $\arcsin \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$?

- 1) 165° 2) $\frac{\pi}{12}$ 3) $\frac{11\pi}{6}$ 4) 15°

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1.** Функция $y = x^2 + 2x - 3$ рассматривается на указанных промежутках. В каких случаях она является обратной функцией?

- 1) $[-2; 0]$ 2) $[0; 2]$ 3) $[-1; 0]$ 4) $[0; 1]$

2.2.** Функция $y = |x - 1| + |x + 1|$ рассматривается на указанных промежутках. В каких случаях она является обратной функцией?

- 1) $(-\infty; -1]$ 2) $(-\infty; 0]$ 3) $[0; \infty)$ 4) $[1; \infty)$

2.3.** Какие из указанных функций являются нечётными?

- 1) $y = \arcsin x$ 2) $y = \arccos x$ 3) $y = \operatorname{arctg} x$ 4) $y = \operatorname{arccotg} x$

2.4.** Какие из указанных функций возрастают на всей области определения?

- 1) $y = \arcsin(1 - x)$ 2) $y = \arcsin(2x + 3)$
3) $y = \arccos(2 + x)$ 4) $y = \arccos(3 - x)$

§ 6. СВОЙСТВА КРУГОВЫХ ФУНКЦИЙ ■

6.1. Простейшие свойства круговых функций.** В этом параграфе мы рассмотрим некоторые соотношения, которым удовлетворяют тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Пусть $\sin y = x$ для $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $x \in [-1; 1]$ и $y = \arcsin x$. Поэтому $\sin(\arcsin x) = \sin y$ и $\arcsin(\sin y) = \arcsin x$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sin(\arcsin x) &= x \quad \text{для } x \in [-1; 1], \\ \arcsin(\sin y) &= y \quad \text{для } y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}$$

Изменяя в последнем равенстве обозначения переменной y на переменную x , получаем

$$\arcsin(\sin x) = x \quad \text{для } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Это два основных тождества, связывающие функции синус и арксинус.

Аналогично получаются следующие тождества:

$$\cos(\arccos x) = x \quad \text{для } x \in [-1; 1],$$

$$\arccos(\cos x) = x \quad \text{для } x \in [0; \pi],$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x \quad \text{для } x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \text{для } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Вопрос. Какие основные тождества связывают функции $y = \operatorname{ctg} x$ и $y = \operatorname{arctg} x$?

6.2. Значение $\cos(\arcsin x)$.** Вычислим $\cos(\arcsin x)$ для $x \in [-1; 1]$.

Так как $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$, то $\cos(\arcsin x) \geq 0$. С помощью формулы $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ находим

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - (\sin(\arcsin x))^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Таким образом, выполняется тождество

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{для } x \in [-1; 1].$$

Вопрос. Как доказать, что $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ для $x \in [-1; 1]$?

6.3. Значение $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$.** Вычислим $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$ для $x \neq 0$.

С помощью формулы $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ находим

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{x}.$$

Таким образом, для $x \neq 0$ выполняется тождество

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x} \quad \text{для } x \neq 0.$$

Вопрос. Как доказать, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$ для $x \neq 0$?

6.4. Равенство $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.** Установим для $x \in [-1; 1]$

равенство $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$. Положим $\alpha = \arcsin x$ и $\beta = \arccos x$. Тогда $x = \sin \alpha$ и $x = \cos \beta$. Следовательно,

$$\sin \alpha = \cos \beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

Так как $\beta = \arccos x$, то $0 \leq \beta \leq \pi$. Поэтому $-\pi \leq -\beta \leq 0$, откуда

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Поскольку $\alpha = \arcsin x$, то

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, имеем равенство синусов чисел α и $\frac{\pi}{2} - \beta$ из промежутка

$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому сами числа также равны: $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$. Отсюда $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Вопрос. Как доказать соотношение $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ при $x \neq 0$?

Контрольные вопросы и задания ■

1.** Какие тождества, связывающие тригонометрические функции и круговые функции, вы знаете?

2.** Докажите соотношение $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Задачи и упражнения ■

1.** Докажите равенство:

а) $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; б) $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ для $x \neq 0$;

в) $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ для $x \in (-1; 1)$.

2.** Вычислите:

а) $\sin\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $\cos(\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$.

3.** Проверьте справедливость равенства:

а) $\arcsin \frac{15}{17} = \arccos \frac{8}{17}$;

б) $\arcsin\left(-\frac{7}{25}\right) = -\operatorname{arctg} \frac{7}{24}$;

в) $\arccos\left(-\frac{9}{41}\right) = \pi - \arcsin \frac{40}{41}$.

4.** Вычислите:

а) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5} - \arccos\frac{5}{13}\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4} - \operatorname{arctg}5\right)$;

в) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{8}{15} - \arcsin\frac{8}{17}\right)$;

г) $\operatorname{tg}\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$;

д) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \arccos\frac{3}{5}\right)$;

е) $\sin\left(2\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}}{3} - \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right)$.

5.** Проверьте справедливость равенства:

а) $\operatorname{arctg}\frac{2}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} = \operatorname{arctg}\frac{5}{4}$;

б) $2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{4} = \operatorname{arctg}\frac{16}{13}$;

в) $\arcsin\frac{7}{25} + 2\arccos\frac{7}{25} = \pi - \arccos\frac{24}{25}$;

г) $4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

6.** Постройте график функции:

а) $y = \frac{1}{2}\cos(2\arccos x)$ для $x \in [-1; 1]$;

б) $y = \arcsin(\sin x)$ для $x \in R$.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1.** Каково множество значений функции $f(x) = \arccos 2x$ на всей области определения?

1) $[0; \pi]$ 2) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ 3) $[-\pi; \pi]$ 4) $[0; 2\pi]$

1.2.** Какова область определения функции $f(x) = \arcsin(2x + 1)$?

1) $[-2; 0]$ 2) $[-1; 0]$ 3) $[0; 1]$ 4) $[-2; 0]$

1.3.** Какому из указанных чисел равняется $\sin\left(\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right)$?

- 1) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 2) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ 3) $\frac{\sqrt{7}}{3}$ 4) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

1.4.** Какому из указанных чисел равняется $\cos\left(\arctg\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$?

- 1) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 2) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 3) $-\frac{2\sqrt{6}}{5}$ 4) $\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1.** Какие из указанных функций убывают на всей области определения?

- 1) $y = \arctg(2x - 1)$ 2) $y = \arctg(5 - 4x)$
3) $y = \operatorname{arccctg}(3x - 2)$ 4) $y = \operatorname{arccctg}(x + 2)$

2.2.** Какие из указанных функций являются обратимыми на всей области определения?

- 1) $y = (\arctg x)^2$ 2) $y = (\arcsin x)^2$
3) $y = (\operatorname{arccctg} x)^2$ 4) $y = (\arccos x)^2$

2.3.** Каким из указанных выражений равняется $\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$?

- 1) $\frac{\pi}{2} - \arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ 2) $\pi - \arccos\frac{4}{5}$ 3) $-\arccos\frac{4}{5}$ 4) $-\arctg\frac{3}{4}$

2.4.** Каким из указанных выражений равняется $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$?

- 1) $\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{2}{3}$ 2) $\pi - \arccos\frac{2}{3}$ 3) $\pi - \arctg\frac{\sqrt{5}}{2}$ 4) $\pi - \arcsin\frac{2}{3}$

Мини-исследования к главе ■

Мини-исследование 25

Предлагается доказать, что для уравнения $\sin x = a$ при $|a| \leq 1$ формулы из пунктов 2.6 и 2.8** определяют одно и то же множество чисел.

Мини-исследование 26

Предлагается рассмотреть решение простейших тригонометрических неравенств вида $\sin x \geq a$ и аналогичных неравенств по следующей схеме.

1. На промежутке длиной в один период найти и отметить корни соответствующего уравнения.
2. На каждом из полученных промежутков определить знак разности $\sin x - a$.
3. Выбрать промежутки, на которых эта разность неотрицательна.
4. Сдвигом на целое число периодов определить все остальные решения.

Мини-исследование 27

Предлагается выяснить, при каких значениях параметра a имеют решения следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\sin x + \cos 2x &= a, \\ \cos x + \cos 2x &= a.\end{aligned}$$

Мини-исследование 28

Вычисляя синус от суммы двух арксинусов, имеем следующее:

$$\sin(\arcsin x + \arcsin y) = x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2}.$$

Если при этом известно, что $0 \leq \arcsin x + \arcsin y \leq \frac{\pi}{2}$, то приходим к равенству $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2})$. Однако указанные неравенства выполняются не всегда.

Предлагается доказать следующее общее соотношение:

$$\arcsin x + \arcsin y = \varepsilon \cdot \arcsin(x \cdot \sqrt{1-y^2} + y \cdot \sqrt{1-x^2}) + \lambda \cdot \pi,$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 1, \lambda = 0, \text{ если } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ или } xy < 0; \\ \varepsilon &= -1, \lambda = -1, \text{ если } x^2 + y^2 > 1, x < 0, y < 0; \\ \varepsilon &= -1, \lambda = +1, \text{ если } x^2 + y^2 > 1, x > 0, y > 0.\end{aligned}$$

Мини-исследование 29

Предлагается доказать следующее общее соотношение:

$$\arctg x + \arctg y = \arctg \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon \cdot \pi,$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon &= 0, \text{ если } xy < 1; \\ \varepsilon &= -1, \text{ если } xy > 1, x < 0, y < 0; \\ \varepsilon &= 1, \text{ если } xy > 1, x > 0, y > 0.\end{aligned}$$

Мини-исследование 30

1. Показать, что $\operatorname{arctg}(k+1)x - \operatorname{arctg} kx = \operatorname{arctg} \frac{x}{1+k \cdot (k+1)x}$, где k — натуральное число и $x > 0$.

2. Используя предыдущее равенство доказать, что

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{13} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{1+n+n^2} = \operatorname{arctg}(n+1) - \operatorname{arctg} 1.$$

3. С помощью предельного перехода получить следующее равенство:

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + \operatorname{arctg} \frac{1}{13} + \operatorname{arctg} \frac{1}{21} + \operatorname{arctg} \frac{1}{31} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

4. Придумать другие интересные соотношения с арктангенсами.

Мини-исследование 31

Предлагается рассмотреть многочлены, которые названы многочленами Чебышёва в честь великого русского математика П.Л. Чебышёва (1821–1894).

1. Методом математической индукции доказать, что при любом натуральном n функция $y = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x)$, определённая на отрезке $[-1; 1]$, является многочленом n -й степени от переменной x .

2. Изобразить графики многочленов Чебышёва при $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$.

3. Найти, сколько раз на отрезке $[-1; 1]$ многочлен Чебышёва принимает значение $\frac{1}{2^{n-1}}$ и значение $\left(-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$.

4. Установить, что на рассматриваемом промежутке многочлен Чебышёва n -й степени имеет n различных корней, а значения этого многочлена по модулю не превосходят $\frac{1}{2^{n-1}}$.



Глава 13

УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

В этой главе мы рассмотрим некоторые обобщения понятия угла, которые оказываются полезными при изучении пространства. Будут определены углы между скрещивающимися прямыми, углы между плоскостями, угол между прямой и плоскостью, а также двугранные, трёхгранные и некоторые другие углы.

■ § 1. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

1.1. Угол между пересекающимися прямыми. Напомним, что на

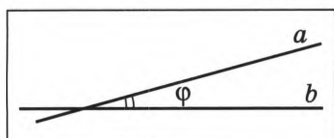


Рис. 1

плоскости величина угла между двумя пересекающимися прямыми определяется как величина наименьшего из углов, образуемых лучами этих прямых с вершиной в точке пересечения (рис. 1). Величина угла между пересекающимися прямыми в пространстве равна величине угла между этими прямыми на плоскости, содержащей данные прямые.

Иногда для краткости вместо слов «величина угла» говорят «угол».

Вопрос. Какие значения в радианах может принимать угол между двумя пересекающимися прямыми?

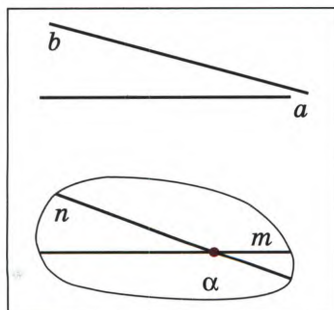


Рис. 2

1.2. Угол между прямыми в пространстве. В пространстве между любыми двумя прямыми определяют угол, который может принимать значение из промежутка $[0^\circ; 90^\circ]$ в градусной мере или из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ в

радианной мере.

По определению угол между двумя параллельными прямыми считают равным нулю. В частности, угол между совпадающими прямыми a и b равен нулю.

Углом между двумя скрещивающимися прямыми называется угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными заданным скрещивающимся прямым.

Таким образом, если прямые a и b — скрещивающиеся, прямые m и n — пересекающиеся, $m \parallel a$, $n \parallel b$, то угол между прямыми a и b равен углу между прямыми m и n (рис. 2).

Величину угла между прямыми a и b иногда обозначают через $(\widehat{a; b})$.

Пример 1. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найти угол между прямыми $A_1 C$ и $C_1 D$ (рис. 3).

Рассмотрим плоскость $A_1 C D_1$, пересекающую отрезок $C_1 D$ в точке P — середине отрезков $C_1 D$ и $C D_1$. Проведём $PK \parallel A_1 C$. В результате получим, что угол KPD равен углу между прямыми $A_1 C$ и $C_1 D$. Затем рассмотрим прямоугольные треугольники DKD_1 и $C_1 K D_1$. Они равны, так как катет KD_1 — общий, а $D_1 D = D_1 C_1$. Поэтому $KD = KC_1$. Следовательно, треугольник DKC_1 равнобедренный, а значит, его медиана KP , проведённая к основанию, является высотой, то есть $PK \perp C_1 P$. Таким образом, прямые $A_1 C$ и $C_1 D$ перпендикулярны, и значит, угол между прямыми $A_1 C$ и $C_1 D$ равен 90° .

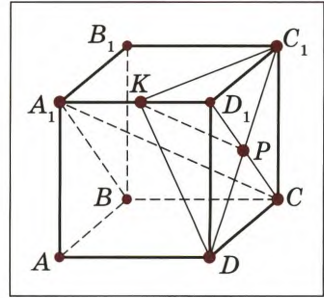


Рис. 3

Вопрос. Чему равен угол между диагоналями AB_1 и $A_1 D$ граней куба?

1.3. Примеры нахождения углов. В этом пункте разберём следующую задачу.

Пример 2. В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BCD , а отрезок DE является высотой грани ABD . Найти угол между прямыми MN и DE .

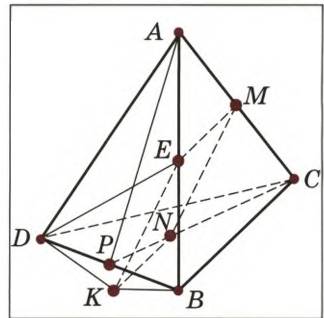


Рис. 4

Пусть $AB = 1$. Так как DE — высота треугольника ABD , то E — середина отрезка AB . Поэтому EM — средняя линия треугольника ABC . Построим NK так, чтобы $NK \parallel BC$ и $NK = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2}$. Тогда $NK \parallel EM$ и $NK = EM$, значит, $EMNK$ — параллелограмм (рис. 4). Тогда $EK \parallel MN$, а поэтому $(\widehat{MN; ED}) = (\widehat{EK; DE})$. Из треугольника ADB имеем $DE = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Так как $DN \perp CB \parallel NK$, то $DN \perp NK$. Значит, $\angle DNK = 90^\circ$ и по теореме Пифагора $KD^2 = DN^2 + NK^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$. Пусть P — середина DB . Из треугольника ACP получаем:

$$\begin{aligned}\cos \angle ACP &= (AC^2 + PC^2 - AP^2) : (2AC \cdot PC) = \\ &= \left(1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \right) : \left(2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Найдём MN из треугольника MCN : $MN^2 = MC^2 + NC^2 - 2NC \cdot MC \cdot \cos \angle ACP =$
 $= \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$, откуда $MN = \frac{1}{2} EK$. Вычислив в треугольнике DEK все стороны, находим:

$$\begin{aligned}\cos \angle DEK &= (DE^2 + EK^2 - DK^2) : (2DE \cdot EK) = \\ &= \left(\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} \right)^2 \right) : \left(2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) = \frac{5\sqrt{3}}{18}.\end{aligned}$$

Отсюда $\angle DEK = \arccos \frac{5\sqrt{3}}{18}$.

Вопрос. Как изменится решение рассмотренной задачи, если через точку M проводить прямую, параллельную DE ?

1.4. Корректность определения угла между прямыми.** В главе 6 при определении перпендикулярности скрещивающихся прямых было доказано, что если две пересекающиеся и перпендикулярные прямые a и b соответственно параллельны двум пересекающимся прямым m и n , то $m \perp n$. Аналогично можно доказать и общее утверждение.

Если две пересекающиеся прямые a и b соответственно параллельны пересекающимся прямым m и n , то угол между прямыми m и n равен углу между прямыми a и b .

Из этого утверждения следует, что определение угла между скрещивающимися прямыми корректно, то есть не зависит от выбора пересекающихся прямых, соответственно параллельных заданным прямым.

Вопрос. Как доказать утверждение, сформулированное в этом пункте?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется величина угла между пересекающимися прямыми?
2. Какие прямые называются параллельными?
3. Чему равен угол между параллельными прямыми?
4. Какие прямые называются скрещивающимися?
5. Как определяется угол между двумя прямыми в пространстве?
6. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?

Задачи и упражнения ■

1. Центр нижнего основания куба соединён прямыми с четырьмя вершинами верхнего основания. Определите углы между парами этих прямых.

2. Точка K — середина ребра AA_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Найдите угол между прямыми:

а) BK и $C_1 B$; б) BK и $D_1 A$; в) BK и $A_1 C_1$.

3. Точка M — середина ребра BD правильного тетраэдра $ABCD$. Найдите угол между прямыми AM и BC .

4. В правильной треугольной призме $ABCA_1 B_1 C_1$ известно, что $AB = \sqrt{5} AA_1$. Найдите угол между прямыми $B_1 A$ и $C_1 B$.

5. Точка M — середина ребра $A_1 B_1$ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, а точка N — центр грани $AA_1 B_1 B$. Найдите угол между прямыми MD и CN .

6. Пусть $SABC$ — правильный тетраэдр, точка M — центр его основания ABC , точка K — середина ребра BS , точка L — середина ребра AC . Найдите угол между прямыми:

а) SA и BC ; б) SA и CM ; в) SA и CK ; г) AK и BC ; д) AK и SL ; е) AM и KL .

7.* В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AD с центром грани BCD , а отрезок PQ соединяет середину ребра CD с центром грани ABC . Найдите угол между прямыми MN и PQ .

8.* Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ имеют одинаковую длину. Найдите угол между прямыми:

а) AM и BN , где M и N — середины рёбер SB и SC соответственно;

б) SP и BN , где P — середина ребра AB .

9. Прямые a и b пересекаются в точке P под углом φ . Луч d с началом в точке P образует с прямой a угол α . Можно ли по этим данным найти угол между лучом d и прямой b ?

10. Какую фигуру образуют лучи AX , составляющие с фиксированным лучом AB данный угол?

11.** В тетраэдре $ABCD$ углы DAB и ABC прямые, угол между прямыми AB и CD равен α , $2AD = CD = BC$. Найдите угол между прямыми AD и BC .

12.* На скрещивающихся прямых a и b даны соответственно точки A и C , B и D так, что $a \perp AB$, $b \perp AB$, $2AC = 2BD = 2AB = CD$. Найдите угол между прямыми a и b .

13.* Точки M и N — середины рёбер BC и AD тетраэдра $ABCD$, в котором $AC = BD$, а угол между прямыми AC и BD равен α . Какова величина угла между прямыми MN и AC ? Найдите все решения этой задачи.

14.* Пусть прямая c является проекцией прямой a на плоскость α , кроме того, прямая b лежит в плоскости α . Пусть $\varphi = (\widehat{a; b})$, $\lambda = (\widehat{a; c})$, $\chi = (\widehat{b; c})$. Докажите, что $\cos \varphi = \cos \lambda \cdot \cos \chi$.

15.** Какую линию описывают середины равных отрезков, концы которых «скользят» по взаимно перпендикулярным прямым b и c ?

16.** Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Существует ли прямая, пересекающая эти три данные прямые? Единственна ли такая прямая?

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равен угол между диагоналями A_1B и DC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$?
1) 45° 2) 60° 3) 90° 4) 120°

1.2. Чему равен угол между диагоналями A_1B и AD_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$?
1) 30° 2) 45° 3) 60° 4) 90°

1.3. Через точку O , не лежащую на прямой AB , проводятся все возможные прямые, составляющие с AB данный угол α , где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Какую фигуру образуют эти прямые?

1) полуплоскость 2) плоскость 3) конус 4) два конуса

1.4. Точка M — середина ребра BD правильного тетраэдра $ABCD$. Чему равен косинус угла между прямыми AM и BC ?

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 2) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ 3) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ 4) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Каким может быть угол между двумя скрещивающимися прямыми?

1) 85° 2) 95° 3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$ 4) $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

2.2. Чему равен угол между двумя данными скрещивающимися прямыми?

1) равен углу между любыми прямыми, параллельными данным

2) равен углу между любыми прямыми, перпендикулярными данным

3) может быть равен углу между прямыми, одна из которых параллельна одной прямой, а другая перпендикулярна второй

4) может быть равен углу между прямыми, перпендикулярными данным

2.3. Угол между некоторыми скрещивающимися прямыми равен 45° . Каким может быть угол между прямыми, одна из которых перпендикулярна одной прямой, а другая перпендикулярна второй?

- 1) 30° 2) 45° 3) 90° 4) 120°

2.4. Центр нижнего основания куба соединён прямыми с двумя вершинами верхнего основания. Чему может быть равен угол между этими прямыми?

- 1) 30° 2) $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ 3) 60° 4) $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$

§ 2. ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ ■

2.1. Двугранный угол. Выбирая в многограннике две соседние грани, имеющие общее ребро, мы получаем пространственную фигуру — часть двугранного угла. Например, в кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ грани $ABB_1 A_1$ и $ABCD$ с общим ребром AB образуют часть прямого двугранного угла (рис. 1).

В общем случае двугранный угол определяется следующим образом.

Фигура, образованная двумя полуплоскостями α и β с общей границей a , называется двугранным углом.

В этом определении прямая a называется *ребром* двугранного угла, полуплоскости α и β называются *гранями* двугранного угла.

Двугранный угол можно обозначить, указав сначала точку в одной грани, затем две точки на ребре и после этого точку во второй грани. Например, двугранный угол, изображённый на рис. 1, можно обозначить как $A_1 ABC$.

Двугранный угол, содержащий соседние грани треугольной пирамиды $SABC$ с общим ребром AB , образован двумя полуплоскостями, содержащими грани CAB и SAB (рис. 2). Его называют двугранным углом пирамиды при ребре AB и обозначают, например, $SABC$. Этот же угол можно назвать также двугранным углом между гранями SAB и ABC пирамиды.

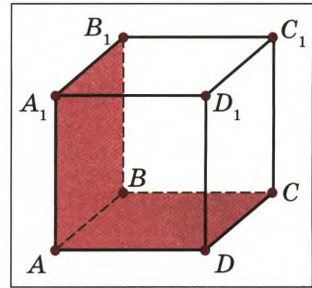


Рис. 1

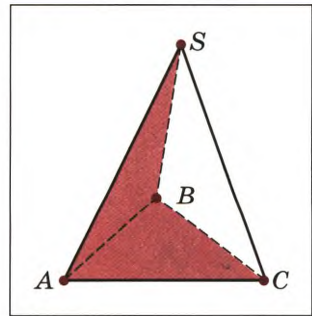


Рис. 2

Плоскость с проведённой на ней прямой a можно считать «развёрнутым» двугранным углом с ребром a .

В отдельных случаях одну полуплоскость также удобно считать «нулевым» двугранным углом с совпадающими гранями.

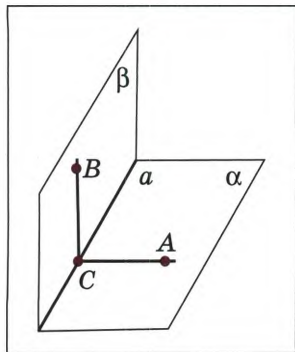


Рис. 3

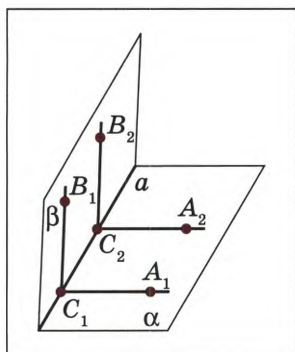


Рис. 4

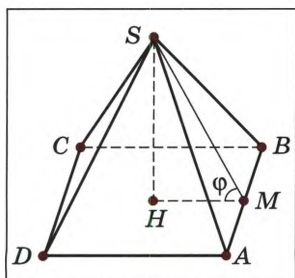


Рис. 5

Вопрос. Сколько можно указать двугранных углов, имея две различные пересекающиеся плоскости?

2.2. Линейный угол. Для измерения двугранный угол используют его линейный угол.

Пусть α и β — грани двугранного угла с ребром a . Выберем на ребре a точку C и проведём перпендикулярно прямой a в полуплоскости α луч CA и в полуплоскости β луч CB (рис. 3). Построенный угол ACB называется *линейным углом* данного двугранного угла.

Выбрать на ребре точку и провести из неё в гранях лучи перпендикулярно ребру можно по-разному (рис. 4). Можно доказать, что величина линейного угла не зависит от выбора его вершины на ребре.

Величина двугранного угла определяется как величина его произвольного линейного угла.

Пример 1. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с ребром основания $AB = 2$ и высотой $SH = \sqrt{3}$. Найти величину двугранного угла между гранями SAB и $ABCD$.

Проведём из точки H перпендикуляр HM к ребру AB (рис. 5). Тогда по теореме о трёх перпендикулярах имеем $SM \perp AB$. Следовательно, $\angle SMH$ — линейный угол двугранного угла пирамиды с ребром AB . Из прямоугольного треугольника SMH находим $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \angle SMH = \frac{SH}{MH} = \sqrt{3}$. Отсюда $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Вопрос. Какую величину в рассмотренном примере имеет угол между гранями SAB и SCD ?

2.3. Построение линейного угла. Рассмотрим ещё один способ построения линейного угла.

Пусть дан двугранный угол с ребром a , отличный от развёрнутого двугранного угла, и $\angle MNK$ — его линейный угол (рис. 6). Тогда $MN \perp a$, $NK \perp a$, и поэтому плоскость MNK перпендикулярна прямой a .

С другой стороны, возьмём двугранный угол и проведём перпендикулярно его ребру плоскость γ . В пересечении плоскости γ с гранями двугранного угла получим лучи, перпендикулярные ребру. Следовательно,

плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает двугранный угол по его линейному углу.

Таким образом, любой линейный угол двугранного угла можно получить как угол, образованный при пересечении двугранного угла с плоскостью, перпендикулярной его ребру.

Вопрос. Как можно получить двугранный угол величиной в 90° ?

2.4. О построении линейного угла. Наличие перпендикуляра к одной из граней двугранного угла, величина которого меньше 90° , часто упрощает построение линейного угла.

Пусть задан двугранный угол с гранями α и β и ребром a . Допустим, что прямая m перпендикулярна плоскости α и пересекает грани α и β в различных точках M и K (рис. 7). Проведём из точки M перпендикуляр MH к прямой a . Прямая MH является ортогональной проекцией прямой KH на плоскость α , и так как $MH \perp a$, то $KH \perp a$. Следовательно, угол KHM — линейный угол данного двугранного угла.

Пример 2. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ с ребром a точка M — середина ребра CD . Найти величину двугранного угла C_1AMB .

Ребром искомого двугранного угла является прямая AM , а гранями — полуплоскости $\alpha = AMC_1$ и $\beta = AMB$ с границей AM (рис. 8). Заметим, что ребро CC_1 перпендикулярно грани β , причём прямая CC_1 пересекает полуплоскость α в точке C_1 и полуплоскость β в точке C . Проведём $CH \perp AM$ и,

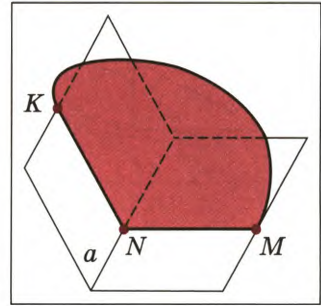


Рис. 6

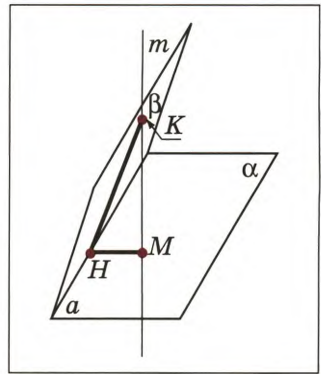


Рис. 7

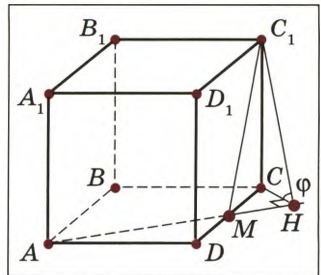


Рис. 8

соединив точки C_1 и H , получим линейный угол C_1HC искомого двугранного угла.

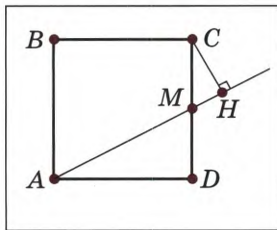


Рис. 9

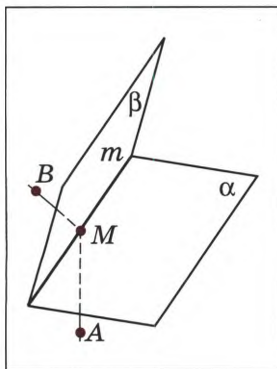


Рис. 10

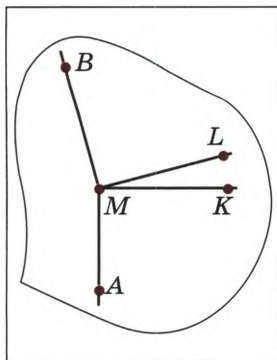


Рис. 11

Для вычислений рассмотрим плоскость $ABCD$ (рис. 9). Так как $CH \perp AH$, то $\triangle CMH \sim \triangle AMD$, причём $\angle MCH = \angle MAD$. По теореме Пифагора $AM = \sqrt{AD^2 + MD^2} = a\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$. Из подобия треугольников следует, что $CH : CM = AD : AM$, поэтому

$$CH = \frac{AD \cdot CM}{AM} = \frac{a \cdot \frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Тогда из прямоугольного треугольника C_1HC находим, что для искомого угла φ выполняется $\operatorname{tg} \varphi = \frac{CC_1}{CH} = \sqrt{5}$, откуда $\varphi = \operatorname{arctg} \sqrt{5}$.

Вопрос. Как доказать, что на рис. 8 угол C_1MC не равен углу C_1HC ?

2.5. Вычисление величины двугранного угла по перпендикулярам к граням.** Величину двугранного угла можно определить, имея перпендикуляры к его граням. Для простоты рассмотрим случай, когда перпендикуляры к граням проводятся из точки ребра двугранного угла.

Пусть точка M лежит на ребре m двугранного угла с гранями α и β (рис. 10). Построим луч MA перпендикулярно α и луч MB перпендикулярно β таким образом, что MA и β расположены по разные стороны относительно α , MB и α расположены по разные стороны относительно β . Так как $MA \perp \alpha$, $MB \perp \beta$, то $MA \perp m$, $MB \perp m$. Поэтому $MA \perp MB$. Отсюда следует, что плоскость MAB пересекает грани α и β по линейному углу LMK (рис. 11), причём $MA \perp MK$ и $MB \perp ML$. Значит, $\angle AMB + \angle KML = 180^\circ$. Следовательно, вычислив

угол AMB , мы можем найти и линейный угол двугранного угла.

Вопрос. Как провести перпендикуляры к граням двугранного угла, чтобы угол между перпендикулярами был равен линейному углу?

2.6. Смежные и вертикальные двугранные углы. Две различные плоскости α и β , пересекающиеся по прямой a , разбивают множество всех точек пространства, не принадлежащих этим плоскостям, на четыре части. Поэтому можно говорить о четырёх двугранных углах, ограничивающих эти части.

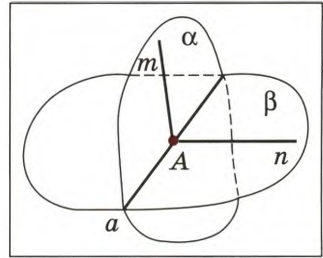


Рис. 12

Проведя плоскость γ перпендикулярно прямой a , в пересечении с плоскостями α и β мы получим пересекающиеся прямые m и n , перпендикулярные прямой a (рис. 12).

Лучи прямых m и n с началом A образуют линейные углы четырёх двугранных углов, получившихся при пересечении плоскостей α и β . При пересечении прямых m и n можно говорить о смежных и вертикальных углах.

Двугранные углы называют смежными, если соответственные линейные углы с общей вершиной являются смежными.

Двугранные углы называют вертикальными, если соответственные линейные углы с общей вершиной вертикальны.

Вопрос. Чему равна сумма величин двух смежных двугранных углов?

2.7. Угол между плоскостями. В пространстве между любыми двумя плоскостями определяют угол, величина которого может принимать значение из промежутка $[0^\circ; 90^\circ]$ в градусной мере или из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ в радианной мере.

По определению величину угла между двумя параллельными плоскостями считают равной нулю. Напомним, что две совпадающие плоскости также считаются параллельными. В остальных случаях величина угла между двумя плоскостями определяется следующим образом.

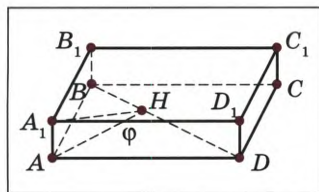
Величиной угла между двумя различными пересекающимися плоскостями называется величина наименьшего из четырёх образовавшихся при пересечении двугранных углов.

Величину угла между плоскостями иногда называют углом между этими плоскостями. Угол между плоскостями α и β иногда обозначают через $(\alpha; \beta)$.

Пример 3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ заданы ребра $AB = 4$, $AD = 5$, $A_1 A = 1$. Найти угол между плоскостями $A_1 B D$ и $C_1 B D$.

Заметим, что величины двугранных углов $AB D A_1$, $A_1 B D C_1$, $C_1 B D C$ вместе составляют развёрнутый угол, поэтому сумма их величин равна 180° .

Для вычисления величины двугранного угла $ABDA_1$ проведём $AH \perp BD$ (рис. 13). Тогда по теореме о трёх перпендикулярах $A_1H \perp BD$. Следовательно, угол A_1HA — линейный для двугранного угла $ABDA_1$; обозначим $\angle A_1HA$ через φ . Пусть $\angle ADB = \alpha$. Тогда



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{AB}{AD} = \frac{4}{5}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{25}{41}, \quad \cos \alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}, \\ \sin \alpha &= \frac{4}{\sqrt{41}}. \quad \text{Отсюда } AH = AD \sin \alpha = \frac{20}{\sqrt{41}}. \end{aligned}$$

Из прямоугольного треугольника AA_1H находим

Рис. 13

$$\operatorname{tg} \angle AHA_1 = \operatorname{tg} \varphi = \frac{AA_1}{AH} = \frac{\sqrt{41}}{20}.$$

Аналогично величина двугранного угла C_1BDC также равна φ . Угол γ между плоскостями A_1BD и C_1BD равен 2φ или $\pi - 2\varphi$. Так как $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{41}}{20} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$, то $\varphi < \frac{\pi}{4}$, $2\varphi < \frac{\pi}{2}$, то $\gamma = 2\varphi = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{41}}{20}$. Заметим,

что $\pi - 2\varphi > \frac{\pi}{2}$, тогда, учитывая, что $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{\sqrt{41}}{20}}{1 - \left(\frac{\sqrt{41}}{20}\right)^2}$, ответ записывается в единственном виде.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{40\sqrt{41}}{359}$.

Вопрос. Какой фигурой является множество биссектрис всех линейных углов данного двугранного угла?

2.8. Перпендикулярность плоскостей. Изучая перпендикулярность плоскостей, мы определили, что плоскость α перпендикулярна плоскости β , если α проходит через прямую a , перпендикулярную плоскости β . С помощью понятия угла между плоскостями можно дать другое определение перпендикулярности плоскостей.

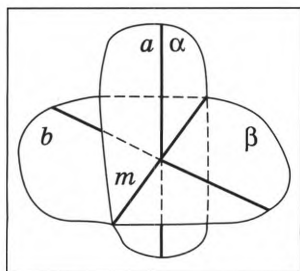


Рис. 14

Две плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90° .

Вопрос. Пусть плоскость α проходит через прямую a , перпендикулярную плоскости β , и пересекает β по прямой m . Как построить линейные углы образующихся двугранных углов?

2.9. Эквивалентность двух определений перпендикулярности плоскостей.** Докажем, что определения перпендикулярности

плоскостей из пункта 4.1 главы 6 и из пункта 2.8 данной главы эквивалентны.

I часть. Пусть плоскость α пересекает плоскость β по прямой t и проходит через прямую a , перпендикулярную плоскости β . Проведём в плоскости β прямую b перпендикулярно прямой t (рис. 14). Так как $a \perp \beta$, то $a \perp b$ и $a \perp t$. Следовательно, $a \perp t$, $b \perp t$, а поэтому прямые a и b определяют линейные углы образующихся при пересечении плоскостей α и β двугранных углов. Из перпендикулярности прямых a и b следует, что угол между плоскостями α и β равен 90° .

II часть. Пусть угол между плоскостями α и β равен 90° . Тогда в плоскостях α и β можно провести прямые p и q перпендикулярно линии t пересечения α и β . При этом $p \perp q$ (рис. 15). Так как $p \perp t$ и $p \perp q$, то $p \perp \beta$. Следовательно, плоскость α проходит через прямую p , перпендикулярную плоскости β .

Вопрос. В каком случае через две данные точки можно провести единственную плоскость, перпендикулярную заданной плоскости?

2.10. Взаимное расположение прямых в перпендикулярных плоскостях. Когда прямая t перпендикулярна плоскости α , то t перпендикулярна каждой прямой плоскости α . Иное наблюдается, если рассмотреть две взаимно перпендикулярные плоскости.

Пусть плоскости α и β перпендикулярны и пересекаются по прямой t . Тогда из точки M прямой t можно так провести лучи соответственно в плоскостях α и β , что угол между ними принимает произвольное значение от 0° до 180° . Например, на рис. 16 изображён угол AMB , величина которого мало отличается от 0° , а на рис. 17 изображён угол CMD , величина которого мало отличается от 180° . Таким образом, две произвольно выбранные прямые двух перпендикулярных плоскостей не обязаны быть перпендикулярными.

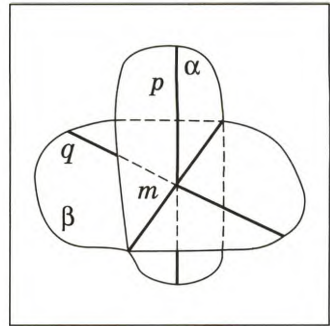


Рис. 15

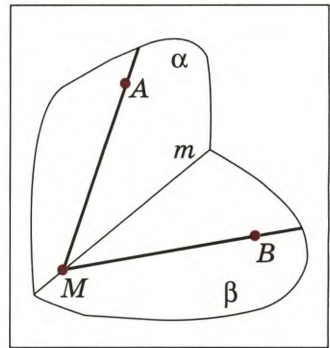


Рис. 16

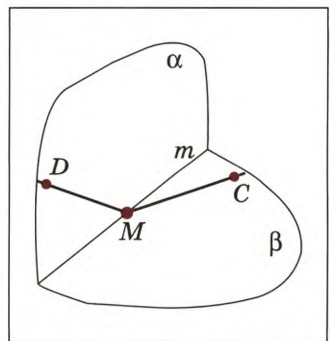


Рис. 17

Вопрос. Пусть прямая a лежит в плоскости α , прямая b лежит в плоскости β и $\alpha \perp \beta$. Как доказать, что если $a \perp b$, то либо $a \perp \beta$, либо $b \perp \alpha$?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Что такое двугранный угол?
2. Как определяется двугранный угол при ребре многогранника?
3. Какая фигура называется «нулевым» двугранным углом?
4. Как построить линейный угол двугранного угла?
5. Какие двугранные углы называются смежными?
6. Какие двугранные углы называются вертикальными?
7. Чему равен угол между параллельными плоскостями?
8. Как определяется величина угла между различными пересекающимися плоскостями?
- 9.** Докажите эквивалентность двух определений перпендикулярности плоскостей.

■ Задачи и упражнения

1. Найдите величину двугранного угла между соседними гранями правильного тетраэдра.
2. Найдите величину двугранного угла между основанием и боковой гранью правильной четырёхугольной пирамиды, у которой все рёбра равны.
3. Найдите величину двугранного угла между соседними боковыми гранями правильной четырёхугольной пирамиды, у которой все рёбра равны.
4. $SABCD$ — правильная четырёхугольная пирамида, у которой высота SH равна 6, ребро AB основания равно 4. Найдите величину двугранного угла $BSAC$.
- 5.* В правильной треугольной пирамиде угол между боковой гранью и плоскостью основания равен φ , ребро основания равно m . Найдите: а) расстояние от вершины пирамиды до основания; б) расстояние от вершины основания до боковой грани.
6. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ через вершину B и середины рёбер CC_1 и $A_1 D_1$ проведена плоскость α . Найдите угол между плоскостями α и $ABCD$.
- 7.* Основание правильной треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ — треугольник ABC со стороной 6, боковые рёбра равны 4. Точка E лежит на ребре AA_1 и $AE = 1$, точка F лежит на ребре BB_1 и $BF = 2$, точка G лежит на ребре CC_1 и $CG = 3$. Найдите угол между плоскостями ABC и EFG .

8.** Основание правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат $ABCD$ со стороной 2, высота пирамиды равна 4. Точки M и K — середины ребёр BS и CD . Найдите угол между плоскостями AMK и $ABCD$.

9.* Как вычислить величины двугранных углов массивной треугольной призмы, если замеры можно делать только на её поверхности?

10.* Дан тетраэдр. Как вычислить величины его двугранных углов, если доступна для измерения только внешняя поверхность тетраэдра?

11. Пусть A и B — точки на ребре двугранного угла величиной в 120° , AC и BD — перпендикуляры к ребру, лежащие в разных гранях. Определите длину CD , если $AB = 6$, $AC = 3$, $BD = 2$.

12.* В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $ABCD$ равна 1, высота пирамиды равна 2. Точки M и N — середины ребёр SB и SD . Определите угол между плоскостями AMN и $ABCD$.

13.* В основании треугольной пирамиды $ABCD$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1. Ребро AD перпендикулярно плоскости основания, $AD = 1$. Точка M — середина ребра BD . Через прямую MC параллельно высоте AH треугольника ABC проведена плоскость α . Определите угол между плоскостями α и ABD .

14.* Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит треугольник ABC , в котором $AB = a$, $AC = 2a$, $\angle BAC = 120^\circ$. Высота призмы равна a . Найдите площадь сечения призмы плоскостью, которая делит пополам двугранный угол с ребром AB .

15.** В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит равнобедренная трапеция с острым углом в 60° и основаниями $AB = 2a$ и $CD = a$. Грань SCD перпендикулярна плоскости основания и является правильным треугольником. Через вершины A и C проведена плоскость α , параллельная SD . Определите угол между плоскостями α и $ABCD$.

16.** Через главную диагональ куба с ребром a проведена плоскость, составляющая угол в 60° с одной из граней. Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.

17.** Дан куб с ребром a , основанием $ABCD$ и боковыми рёбрами AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 . Через BD_1 проведена плоскость, образующая угол в 30° с плоскостью BB_1D_1D . Найдите площадь получившегося сечения.

18.** В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 1, ребро SB перпендикулярно основанию, $SB = 2$. Через вершину D и середину M ребра AS проведена плоскость, пересекающая ребро AB и образующая равные углы с плоскостями граней SAB и $ABCD$. Найдите величину этих углов.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равна величина двугранного угла между основанием и боковой гранью правильной четырёхугольной пирамиды, у которой все рёбра равны?

- 1) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$ 2) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}$ 3) 60° 4) $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$

1.2. Сколько всего плоскостей, составляющих угол в 30° с данной плоскостью, можно провести через две точки, лежащие на этой плоскости?

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) более 3

1.3. Какую величину имеют двугранные углы при рёбрах правильного тетраэдра?

- 1) $\arccos \frac{1}{3}$ 2) $\arccos \frac{1}{4}$ 3) $\arccos \frac{1}{5}$ 4) $\arccos \frac{1}{6}$

1.4. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ ребро основания $ABCD$ равно 2. При каком значении бокового ребра плоскости SAB и SCD перпендикулярны?

- 1) $\sqrt{3}$ 2) 2 3) $\sqrt{5}$ 4) $\sqrt{6}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Две плоскости пересекаются под углом 30° . Каким может быть угол между двумя прямыми, лежащими в этих плоскостях?

- 1) 15° 2) 30° 3) 60° 4) 120°

2.2. Чему равен угол между гранями двугранного угла?

- 1) углу между любыми лучами, параллельными граням угла
2) углу между некоторыми лучами, параллельными граням угла
3) углу между любыми лучами, перпендикулярными граням угла
4) углу между некоторыми лучами, перпендикулярными граням угла

2.3. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S точки M, N, K расположены на ребре AB так, что $AM = MN = NK = KB$. Какие из углов являются линейными для двугранного угла с ребром AB ?

- 1) $\angle CMS$ 2) $\angle CNS$ 3) $\angle CKS$ 4) $\angle CBS$

2.4. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Какую величину могут иметь двугранные углы, образованные с плоскостью $ABCD$ плоскостями, которые проходят через прямую AB_1 ?

- 1) 35° 2) 45° 3) 55° 4) 65°

§ 3. УГОЛ МЕЖДУ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ ■

3.1. Угол между прямой и плоскостью в особых случаях. При определении угла между прямой и плоскостью особо выделяют два частных случая.

Первый случай. Если прямая a параллельна плоскости α (рис. 1), то угол между ними по определению равен 0° . В частности, угол между плоскостью и любой прямой в этой плоскости также равен 0° .

Второй случай. Если прямая a перпендикулярна плоскости α (рис. 2), то угол между ними по определению равен 90° или $\frac{\pi}{2}$ радиан.

Вопрос. Как определяется перпендикулярность прямой и плоскости?

3.2. Угол между наклонной и плоскостью. Прямую a , которая не параллельна и не перпендикулярна данной плоскости α , иногда называют *наклонной*. Ортогональной проекцией прямой a на плоскость α является проекция прямой a в направлении, перпендикулярном плоскости α . Из свойств параллельного проектирования следует, что ортогональной проекцией наклонной a на плоскость α является прямая на плоскости α (рис. 3).

Углом между наклонной прямой a и плоскостью α называется угол между прямой a и её ортогональной проекцией на плоскость α .

Пример 1. В кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра B_1C_1 . Найти угол между прямой AM и плоскостью BB_1D_1D .

Обозначим ребро куба через a . Для построения проекции прямой AM на плоскость BB_1D_1D построим проекцию точки A . Так как $AC \perp BB_1D_1D$, проекцией точки A является точка H пересечения AC и BD (рис. 4).

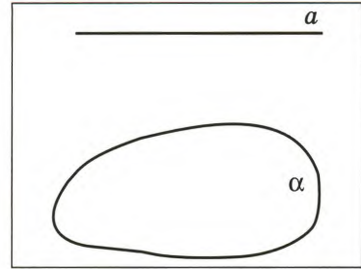


Рис. 1

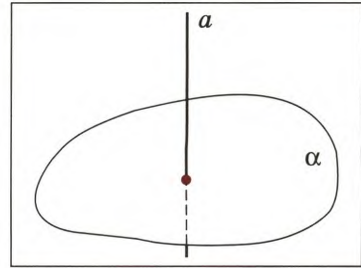


Рис. 2

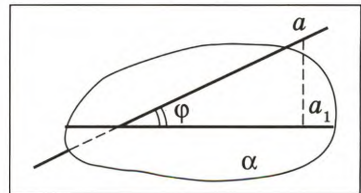


Рис. 3

После этого построим точку F пересечения прямой AM с плоскостью BB_1D_1D (рис. 5) как точку пересечения прямых AM и B_1D , расположенных в плоскости AB_1C_1D .

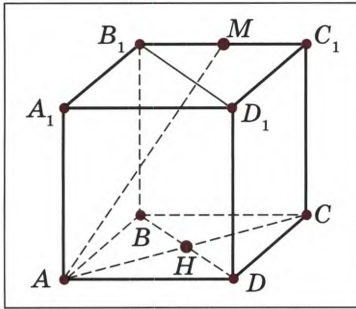


Рис. 4

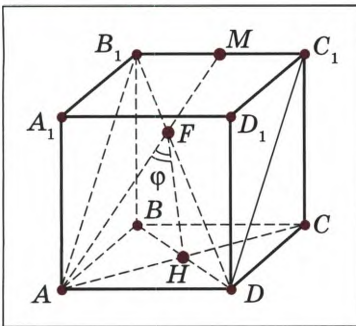


Рис. 5

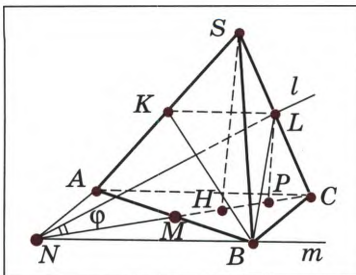


Рис. 6

Проекцией прямой AM на плоскость BB_1D_1D является прямая FH , угол $\varphi = \angle AFH$ есть искомый угол, его можно найти из прямоугольного треугольника AFH ($AH \perp HF$ по теореме о трёх перпендикулярах). Далее проводим вычисления: $AH = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$$AM^2 = AA_1^2 + A_1B_1^2 + B_1M^2 = \frac{9a^2}{4}, \quad AM = \frac{3}{2}a,$$

$$AF:FM = AD:B_1M = 2:1, \quad AF = \frac{2}{3}AM = a,$$

$$\sin \varphi = \frac{AH}{AF} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right) : a = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \varphi = 45^\circ$$

Ответ: 45° .

Вопрос. Откуда следует, что в рассмотренном примере треугольник AFH прямоугольный?

3.3.* Пример вычисления угла между прямой и плоскостью.

Пример 2. В правильном тетраэдре $SABC$ с ребром a плоскость α проходит через вершины S, C и середину M ребра AB , плоскость β проходит через вершину B и середины K и L рёбер SA и SC соответственно. Плоскости α и β пересекаются по прямой l . Найти угол между прямой l и плоскостью ABC .

Плоскость CMS пересекает плоскость ABC по прямой CM , а плоскость BKL пересекает плоскость ABC по прямой m , параллельной KL (рис. 6). Точка N пересечения прямых CM и m является одной общей точкой, точка L — другой общей точкой плоскостей α и β . Следовательно, прямая LN и есть прямая l пересечения плоскостей α

и β . Опустим из точки L перпендикуляр LP на плоскость ABC . Так как

LP параллельна высоте SH тетраэдра, точка P лежит на MC , причём $CP = \frac{1}{2}CH = \frac{1}{3}CM$.

Таким образом, угол $\varphi = \angle LNP$ есть искомый угол. Для его вычисления находим: $CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $CH = \frac{2CM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, $SH = \sqrt{SC^2 - CH^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, $LP = \frac{SH}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, $CN = 2CM = a\sqrt{3}$, $CP = \frac{CM}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, $NP = CN - CP = \frac{5a\sqrt{3}}{6}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{LP}{NP} = \left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right) : \left(\frac{5a\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Вопрос. Откуда следует, что в рассмотренном примере плоскость BKL пересекает плоскость ABC по прямой, параллельной KL ?

3.4. Свойство угла между прямой и плоскостью.** Докажем, что угол между наклонной прямой a и плоскостью α — наименьший из всех углов, которые прямая a образует с прямыми плоскости α , проведёнными через точку пересечения a и α .

Пусть A — точка пересечения прямой a с плоскостью α и B — произвольная точка прямой a , отличная от A . Проведём в плоскости α через точку A произвольную прямую m . Затем построим $BH \perp \alpha$ и $BM \perp m$ (рис. 7). Заметим, что если прямая m не проходит через точку H , то точка M не совпадает с точкой H . Тогда отрезок BM является наклонной к плоскости α , а поэтому длиннее перпендикуляра BH . Следовательно, $\sin \angle BAM = \frac{BM}{BA} > \frac{BH}{BA} = \sin \angle BAH$. Так как при определении угла между прямыми рассматриваются углы от 0 до $\frac{\pi}{2}$, из неравенства $\sin \angle BAM > \sin \angle BAH$ следует неравенство $\angle BAM > \angle BAH$.

Вопрос. Пусть прямая a — наклонная к плоскости α . Как построить в плоскости α прямую b , образующую с прямой a наибольший угол?

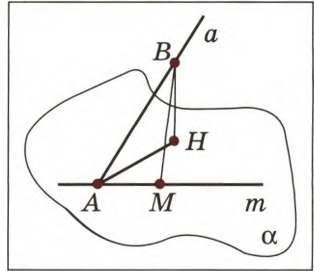


Рис. 7

Контрольные вопросы и задания ■

1. Что такое ортогональная проекция фигуры на данную плоскость?
2. В каком случае прямую называют наклонной к плоскости?
3. Как определить угол между наклонной прямой и плоскостью?

4. Чему равен угол между плоскостью и прямой, если прямая: а) параллельна плоскости; б) перпендикулярна плоскости?

5.** Докажите, что угол между прямой a и плоскостью α — наименьший из всех углов, образуемых прямой a с прямыми плоскости α .

■ Задачи и упражнения

1. Известны рёбра основания прямоугольного параллелепипеда $a = 4$, $b = 3$ и высота $c = 5$. Найдите его диагональ и угол, образуемый диагональю с плоскостью основания.

2. Под каким углом к плоскости надо провести наклонный отрезок, чтобы его проекция была вдвое меньше самого отрезка?

3. Докажите, что если в правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания, то боковые рёбра составляют с плоскостью основания угол в 60° .

4. Найдите угол между ребром правильного тетраэдра и плоскостью грани, не содержащей это ребро.

5. Найдите угол между ребром четырёхугольной пирамиды и её основанием, если все рёбра пирамиды имеют равную длину.

6. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ рёбра AA_1 и AB равны. Найдите угол между диагональю AB_1 грани AA_1B_1B и плоскостью AA_1C_1C .

7. В правильной четырёхугольной призме $ABCA_1B_1C_1D_1$ боковое ребро AA_1 в два раза больше стороны основания $ABCD$. Найдите угол между диагональю BD_1 и плоскостью BC_1D .

8. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ боковое ребро BS образует с плоскостью основания угол $\frac{\pi}{4}$. Найдите угол между этим ребром и плоскостью CDS .

9.* Из точки A по разные стороны от плоскости α проведены отрезки AM и AN . Каждый из отрезков имеет длину a и образует с плоскостью угол φ . Угол между проекциями этих отрезков на плоскость α равен 2β . Определите длину отрезка MN .

10.* В плоскости α расположен отрезок $AB = a$. Из точек A и B проведены перпендикуляр AM и наклонная BN (по одну сторону от плоскости), причём $AM = BN = \frac{3}{2}a$, $MN = 2a$, $\angle ABN = \frac{\pi}{2}$. Найдите угол между прямой MN и плоскостью α .

11.** Найдите правильную призму $ABCA_1B_1C_1D_1$ с основанием $ABCD$, у которой угол между прямой BD_1 и плоскостью BC_1D наибольший.

12.* Плоскость равнобедренного треугольника образует с плоскостью α , проходящей через его основание, угол φ . Угол при вершине тре-

угольника равен 2β . Найдите угол между боковой стороной этого треугольника и плоскостью α .

13.* Через вершину A куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость, параллельная диагонали BD_1 куба и диагонали $B_1 C$ его грани. Найдите угол между этой плоскостью и диагональю AC .

14.* В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскость α проходит через вершины B_1, D_1 и A . Плоскость β проходит через вершины A_1, C_1 и середину M ребра BC . Плоскости α и β пересекаются по прямой l . Найдите угол между прямой l и плоскостью грани $ABCD$.

15.* Сторона основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 1. Высота пирамиды равна 2. Плоскость α проходит через вершины A, S и середину M ребра BC . Плоскость β проходит через вершину B и точки K и L — середины рёбер AS и CS . Плоскости α и β пересекаются по прямой l . Найдите угол между прямой l и плоскостью основания $ABCD$.

16. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точки M и K — середины рёбер AB и $B_1 C_1$. Найдите угол между прямой MK и плоскостью $A_1 B_1 CD$.

17.* В основании пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 2, ребро SA перпендикулярно плоскости основания, $SA = \sqrt{3}$, точка K — середина ребра BC . Плоскость α проходит через прямую SC и параллельна прямой AB . Определите угол между прямой AK и плоскостью α .

18.* В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 3, BC = 2$. Боковые рёбра пирамиды имеют одинаковую длину, её высота равна 3. Определите угол между медианой DM грани SCD и плоскостью грани SAB .

19.** В основании треугольной призмы $ABCA_1 B_1 C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC , катеты AB и AC которого равны a . Боковые рёбра AA_1, BB_1, CC_1 образуют с плоскостью основания угол 60° , а диагональ BC_1 боковой грани $CBB_1 C_1$ перпендикулярна ребру AC . Найдите расстояние между основаниями призмы, если $BC_1 = a\sqrt{6}$.

20.** Прямоугольный параллелепипед с высотой, равной a , имеет в основании прямоугольник со сторонами a и $a\sqrt{3}$. Через одну из диагоналей основания проведена плоскость, составляющая угол в 30° со второй диагональю основания. Найдите площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Под каким углом к плоскости надо провести наклонный отрезок, чтобы длина отрезка была вдвое больше его ортогональной проекции?

- 1) 30° 2) 45° 3) 60° 4) 90°

1.2. В правильной треугольной пирамиде боковые рёбра составляют с плоскостью основания углы по 60° . Чему равно отношение высоты пирамиды к стороне основания?

- 1) 3:2 2) 2:1 3) 1:1 4) 1:2

1.3. Чему в правильной треугольной пирамиде с ребром основания 3 и боковым ребром 2 равен угол между боковым ребром и основанием?

- 1) 15° 2) 30° 3) 45° 4) 60°

1.4. Чему равен угол между главной диагональю куба и плоскостью одной из его граней?

- 1) $\arcsin \frac{1}{2}$ 2) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$ 3) $\arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$ 4) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Угол между прямой и данной плоскостью равен 45° . Каким может быть угол между этой прямой и прямой, лежащей на этой плоскости?

- 1) 30° 2) 45° 3) 90° 4) 120°

2.2. Угол между двумя прямыми равен 45° . Каким может быть угол между одной из них и плоскостью, содержащей вторую прямую?

- 1) 30° 2) 45° 3) 90° 4) 120°

2.3.* Из точки A по разные стороны от плоскости проведены отрезки AM и AN . Каждый из отрезков имеет длину 4 см и образует с плоскостью угол в 45° . Каковы возможные значения длины отрезка MN ?

- 1) 4 см 2) 6 см 3) 8 см 4) 10 см

2.4. Какие значения не могут быть длинами боковых рёбер правильной четырёхугольной пирамиды, у которой ребро основания равно 6?

- 1) 2,5 2) 3,5 3) 4,5 4) 5,5

■ § 4. ТРЁХГРАННЫЕ УГЛЫ

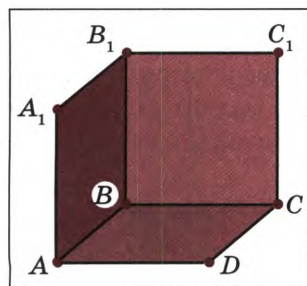


Рис. 1

4.1. Трёхгранный угол. Выбирая в кубе три соседние грани, имеющие общую вершину, мы получим пространственную фигуру — часть *трёхгранного угла* (рис. 1).

В дальнейшем будем рассматривать трёхгранные углы, каждый из которых можно построить следующим образом.

Сначала берём точку S — *вершину* трёхгранного угла. Затем из вершины проводим три луча — SA, SB, SC , не лежащие в одной плоскости. Получим *рёбра* трёхгранного угла (рис. 2).

Для лучей SA и SB рассмотрим плоский угол ASB , который меньше развёрнутого угла. Этот угол называют *гранью трёхгранного угла*. Иногда грань трёхгранного угла называют *плоским углом трёхгранного угла*. Аналогично определяются две другие грани трёхгранного угла (рис. 3). Иногда грани трёхгранного угла называют *плоскими углами трёхгранного угла*.

Трёхгранный угол можно обозначить, указав сначала его вершину, а затем по одной точке на каждом из его рёбер. Например, изображённый на рис. 1 трёхгранный угол можно обозначить BAB_1C .

Вопрос. Почему два ребра двугранного угла не могут быть частями одной прямой?

4.2. Пересечение трёх полупространств.** Трёхгранный угол можно получить также как границу фигуры, являющейся пересечением трёх полупространств.

Рассмотрим три различные, пересекающиеся в одной точке S плоскости — P_1, P_2, P_3 . Плоскость P_1 делит множество не принадлежащих ей точек пространства на две части — A_1 и A_2 , называемые полупространствами с границей P_1 ; плоскость P_2 делит множество не принадлежащих ей точек пространства на два полупространства — B_1 и B_2 с границей P_2 ; плоскость P_3 делит множество не принадлежащих ей точек пространства на два полупространства — C_1 и C_2 с границей P_3 .

Выберем одно из полупространств с границей P_1 , например A_1 , одно из полупространств с границей P_2 , например B_1 , одно из полупространств с границей P_3 , например C_1 . Пересечение множеств A_1, B_1, C_1 является фигурой, граница которой — трёхгранный угол с вершиной S .

Если выбрать, например, множества A_1, B_2, C_1 , то их пересечение является фигурой, граница которой — ещё один трёхгранный угол с вершиной S .

Гранями получающихся трёхгранных углов являются части плоскостей P_1, P_2, P_3 .

Вопрос. Сколько различных трёхгранных углов можно задать тремя плоскостями, имеющими только одну общую точку?

4.3. Вычисление элементов трёхгранного угла. Зная плоские углы трёхгранного угла, можно найти любой его двугранный угол. Сделать это можно способом, который рассмотрим на примере.

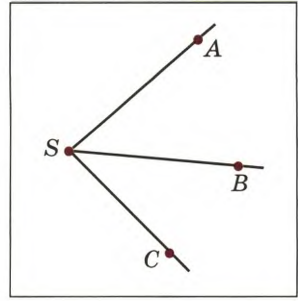


Рис. 2

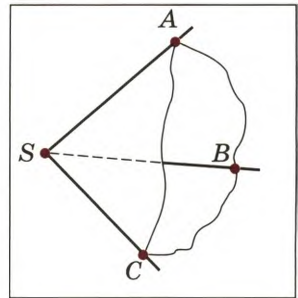


Рис. 3

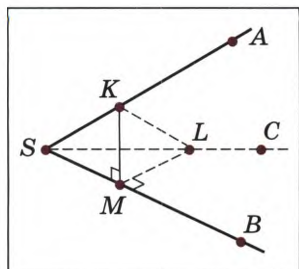


Рис. 4

Пример. Трёхгранный угол $SABC$ имеет плоские углы: $\angle ASB = 30^\circ$, $\angle ASC = 45^\circ$, $\angle BSC = 60^\circ$. Найти двугранный угол при ребре SB .

Для построения нужного линейного угла выберем на ребре SB точку M , например, так, что $SM = 2$. Затем проведём перпендикулярно MS в грани ASB отрезок KM и в грани BSC отрезок LM (рис. 4). Построенный угол KML — линейный для искомого двугранного угла с ребром SB . После этого находим:

$$SK = \frac{SM}{\cos 30^\circ} = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad MK = SM \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$SL = \frac{SM}{\cos 60^\circ} = 4, \quad ML = SM \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

Далее по теореме косинусов выразим отрезок KL из двух треугольников — SKL и MKL :

$$KL^2 = SK^2 + SL^2 - 2SK \cdot SL \cos \angle KSL = \frac{16}{3} + 16 - 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{16(4 - \sqrt{6})}{3},$$

$$KL^2 = MK^2 + ML^2 - 2MK \cdot ML \cos \angle KML = \frac{4}{3} + 12 - 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \cos \angle KML.$$

Приравнявая найденные выражения, получаем

$$\frac{16(4 - \sqrt{6})}{3} = \frac{4}{3} + 12 - 8 \cdot \cos \angle KML, \quad \cos \angle KML = \frac{2\sqrt{6} - 3}{3}.$$

Ответ: $\arccos \frac{2\sqrt{6} - 3}{3}$.

Вопрос. Как определить, острый или тупой угол получился в рассмотренном примере?

4.4. Теорема косинусов для трёхгранного угла. В общем случае для трёхгранного угла $SABC$ справедлива формула

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cdot \cos C, \quad (1)$$

где $\alpha = \angle BSC$, $\beta = \angle ASC$, $\gamma = \angle ASB$ и C — величина двугранного угла при ребре SC , противолежащем плоскому углу γ .

Это утверждение известно как *первая теорема косинусов для трёхгранного угла*.

Вопрос. Чему равны величины двугранных углов трёхгранного угла, все плоские углы которого прямые?

4.5. Доказательство первой теоремы косинусов для трёхгранного угла.** Обоснование теоремы можно получить, рассматривая случаи, когда плоские углы трёхгранного угла — острые, прямые или тупые. Для примера разберём только два случая.

Первый случай. Пусть α и β — острые углы. Выберем на ребре SC точку M так, что $SM = 1$ (рис. 5). Затем проведём перпендикулярно SM в грани SAC отрезок MK и в грани SBC отрезок ML . Тогда

$$\begin{aligned} ML &= \operatorname{tg} \alpha, \quad MK = \operatorname{tg} \beta, \quad SL = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad SK = \frac{1}{\cos \beta}, \\ LK^2 &= ML^2 + MK^2 - 2ML \cdot MK \cos \angle KML = \\ &= \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta - 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \cos C; \\ LK^2 &= SL^2 + SK^2 - 2SL \cdot SK \cos \angle KSL = \\ &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} - 2 \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \beta} \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta - 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \cos C &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} - 2 \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \beta} \cdot \cos \gamma, \\ \frac{2 \cos \gamma}{\cos \alpha \cos \beta} &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \beta} - \operatorname{tg}^2 \beta + 2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \cdot \cos C, \\ \frac{2 \cos \gamma}{\cos \alpha \cos \beta} &= 2 + 2 \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \cdot \cos C, \end{aligned}$$

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cdot \cos C.$$

Второй случай. Пусть α — тупой угол, β — острый угол. Снова выберем на ребре SC точку M так, что $SM = 1$ (рис. 6). Затем проведём перпендикулярно SM в грани SAC отрезок MK , а в плоскости грани SBC отрезок ML до пересечения с продолжением ребра SB (рис. 6). Тогда $\angle MSK = \beta$, $\angle MSL = \pi - \alpha$, $\angle KSL = \pi - \gamma$, а угол KML является дополнительным до π к двугранному углу при ребре SC , то есть $\angle KML = \pi - C$. Поэтому

$$ML = -\operatorname{tg} \alpha, \quad MK = \operatorname{tg} \beta, \quad SL = -\frac{1}{\cos \alpha}, \quad SK = \frac{1}{\cos \beta},$$

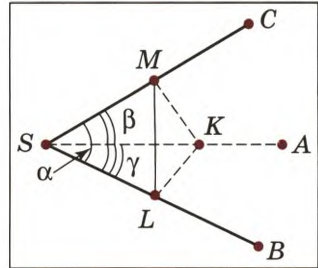


Рис. 5

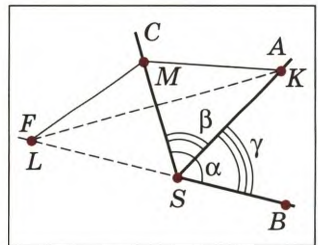


Рис. 6

$$LK^2 = ML^2 + MK^2 - 2ML \cdot MK \cos \angle KML = \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta - 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \cos C;$$

$$LK^2 = SL^2 + SK^2 - 2SL \cdot SK \cos \angle KSL = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \beta} - 2 \frac{1}{\cos \alpha} \cdot \frac{1}{\cos \beta} \cdot \cos \gamma.$$

Отсюда, как и в первом случае, получается равенство

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cdot \cos C.$$

Вопрос. Как завершить доказательство первой теоремы косинусов для трёхгранного угла?

4.6. Вторая теорема косинусов для трёхгранного угла.** Для каждого трёхгранного угла $SABC$ можно построить *полярный* ему трёхгранный угол $SPQR$ следующим образом. Из вершины S сначала проведём луч SP перпендикулярно грани SBC так, что SP и SA расположены по разные стороны относительно плоскости грани SBC . Затем аналогично проведём луч SQ перпендикулярно грани SAC так, что SQ и SB расположены по разные стороны относительно плоскости грани SAC , и луч SR перпендикулярно грани SAB так, что SR и SC расположены по разные стороны относительно грани SAB (рис. 7). Построенный трёхгранный угол $SPQR$ и называют *полярным* к трёхгранному углу $SABC$. В свою очередь трёхгранный угол $SABC$ является полярным к трёхгранному углу $SPQR$, то есть трёхгранные углы $SABC$ и $SPQR$ на рис. 7 взаимно полярны друг другу.

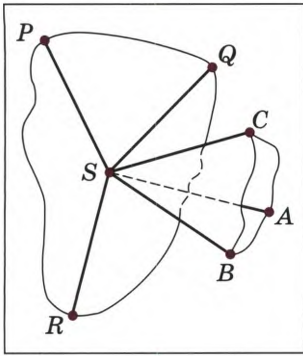


Рис. 7

Из пункта 2.6 следует, что двугранные углы трёхгранного угла $SABC$ дополняют плоские углы полярного ему трёхгранного угла $SPQR$ до π , а именно $C = \pi - \angle PSQ$, $B = \pi - \angle QSR$, $A = \pi - \angle PSR$. Точно так же двугранные углы трёхгранного угла $SPQR$ дополняют плоские углы полярного ему трёхгранного угла $SABC$ до π , а именно $R = \pi - \angle ASB = \gamma$, $Q = \pi - \angle ASC = \beta$, $P = \pi - \angle BSC = \alpha$.

Запишем первую теорему косинусов для полярного угла $SPQR$:

$$\cos \angle PSQ = \cos \angle PSR \cos \angle QSR + \sin \angle PSR \sin \angle QSR \cdot \cos R.$$

Воспользовавшись соотношениями между плоскими и двугранными углами полярных трёхгранных углов, перепишем это равенство в виде

$$\cos(\pi - C) = \cos(\pi - A) \cos(\pi - B) + \sin(\pi - A) \sin(\pi - B) \cdot \cos(\pi - \gamma).$$

Отсюда

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cdot \cos \gamma. \quad (2)$$

Полученная формула 2 также является соотношением между двугранными и плоскими углами трёхгранного угла и известна как *вторая теорема косинусов для трёхгранного угла*.

Вопрос. Как доказать, что не существует трёхгранного угла, все двугранные углы которого равны 60° ?

4.7. Свойство плоских углов трёхгранного угла.** Покажем, что у трёхгранного угла каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.

Рассмотрим трёхгранный угол $SABC$ и обозначим $\alpha = \angle BSC$, $\beta = \angle ASC$, $\gamma = \angle ASB$. Докажем, что $\gamma < \alpha + \beta$.

Первый случай. Пусть $\alpha + \beta \geq \pi$. Так как $\gamma < \pi$, в этом случае неравенство $\gamma < \alpha + \beta$ очевидно.

Второй случай. Пусть $\pi > \alpha + \beta$. Применив первую теорему косинусов для плоского угла γ , получим

$$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cdot \cos C.$$

Так как $C < \pi$, то $\cos C > -1$. Поэтому $\cos \gamma > \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$. Следовательно, $\cos \gamma > \cos(\alpha + \beta)$. Но так как $0 < \gamma < \pi$ и $0 < \alpha + \beta < \pi$, то $\gamma < \alpha + \beta$, что и требовалось доказать.

Вопрос. Как доказать, что не существует многогранника, у которого все грани — правильные шестиугольники?

4.8. Теорема синусов для трёхгранных углов.** Иногда при решении задач с трёхгранными углами оказывается полезной теорема синусов для трёхгранного угла. Используя обозначения, принятые в предыдущем пункте, эту теорему можно записать в

виде соотношения $\frac{\sin \alpha}{\sin A} = \frac{\sin \beta}{\sin B} = \frac{\sin \gamma}{\sin C}$ (рис. 8).

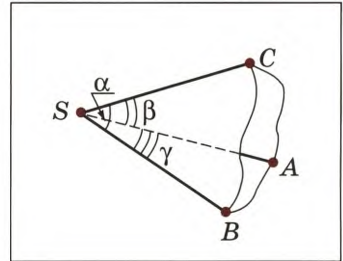


Рис. 8

Вопрос. Как доказать теорему синусов для трёхгранного угла?

4.9.* Многогранный угол. Рассмотрим трёхгранный угол $SABC$, где A, B, C — соответствующие точки на рёбрах этого трёхгранного угла. Тогда точки S, A, B, C являются вершинами треугольной пирамиды $SABC$.

С другой стороны, если взять треугольную пирамиду $PKLM$, то лучи PK, PL, PM и плоские углы KPL, LPM, MPK являются соответственно рёбрами и гранями трёхгранного угла $PKLM$. Таким образом, всякий трёхгранный угол можно получить из треугольной пирамиды, рассматривая три луча, каждый из которых выходит из вершины пирамиды и содержит соответствующее боковое ребро.

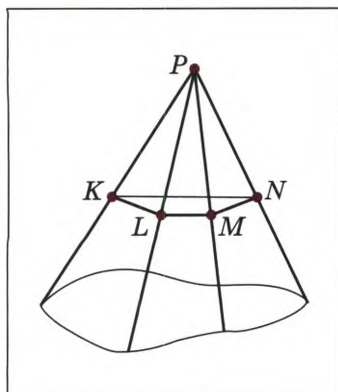


Рис. 9

также рассматривая плоские углы, каждый из которых содержит соответствующую боковую грань пирамиды.

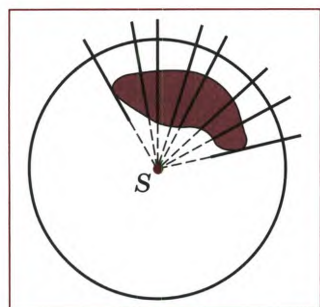


Рис. 10

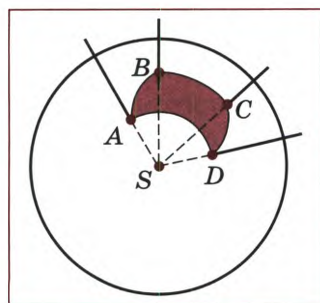


Рис. 11

Возьмём теперь четырёхугольную пирамиду $PKLMN$. Будем считать лучи PK , PL , PM , PN рёбрами четырёхгранного угла, плоские углы KPL , LPM , MPN , NPK — плоскими углами этого четырёхгранного угла (рис. 9). В этом случае плоские углы четырёхгранного угла также называют гранями этого четырёхгранного угла. Рассмотренный четырёхгранный угол можно обозначить через $PKLMN$.

Таким образом, всякий четырёхгранный угол можно получить из четырёхугольной пирамиды, рассматривая четыре луча, каждый из которых выходит из вершины пирамиды и содержит соответствующее боковое ребро, а

аналогично можно определить пятигранный, шестигранный угол и другие многогранные углы.

Вопрос. Как определить двугранные углы многогранного угла?

4.10.** Измерение многогранных углов.

Пусть задано множество P точек единичной сферы с центром S . Рассмотрим пространственную фигуру, которая состоит из всех точек всех лучей, каждый из которых имеет вершину в точке S и проходит через некоторую точку из P . Такую пространственную фигуру иногда называют *телесным углом* (рис. 10). Площадь множества P будем считать величиной рассматриваемого телесного угла. При указанном измерении телесных углов единицу измерения называют *стерадиан*. Используя тот факт, что площадь сферы единичного радиуса равна 4π , получаем, что телесный угол, соответствующий всей сфере, имеет величину 4π стерадиан.

Для измерения многогранного угла с вершиной в точке S рассмотрим на сфере единичного радиуса с центром в вершине S часть H сферы, ограниченную пересечением многогранного

угла с этой сферой. Площадь полученной части H будем считать величиной этого многогранного угла (рис. 11).

Например, трёхгранный угол при вершине куба имеет величину $\frac{\pi}{2}$ стерадиан.

Вопрос. Сколько стерадианов содержит четырёхгранный угол $OABCD$, где O — центр куба, $ABCD$ — его грань?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Приведите пример трёхгранного угла. Назовите его вершину, рёбра и грани.
2. Приведите пример четырёхгранного угла. Назовите его вершину, рёбра и грани.
- 3.** Как можно получить трёхгранный угол с помощью пересечения трёх полупространств?
4. Сформулируйте первую теорему косинусов для трёхгранного угла.
- 5.** Как определяется трёхгранный угол, полярный к заданному трёхгранному углу?
- 6.** Сформулируйте вторую теорему косинусов для трёхгранного угла.
- 7.** Сформулируйте теорему синусов для трёхгранного угла.
- 8.** Сформулируйте свойство плоских углов трёхгранного угла.

Задачи и упражнения ■

1. В трёхгранном угле все плоские углы прямые. Внутри его дана точка, отстоящая на расстояния 2, 3 и 4 от его граней. Найдите расстояние от данной точки до вершины угла.
2. В трёхгранном угле рёбра взаимно перпендикулярны. Внутри его из вершины проведён отрезок, проекция которого на каждое из рёбер равна 1. Найдите длины его проекций на грани.
3. В трёхгранном угле два плоских угла по 60° , третий плоский угол прямой. Найдите угол между плоскостью прямого угла и противоположащим ребром.
- 4.* Каждый плоский угол трёхгранного угла равен 60° . На одном из рёбер отложен от вершины отрезок, равный 3, и из конца его опущен перпендикуляр на противоположащую грань. Найдите длину этого перпендикуляра.
- 5.* Плоские углы ASC и BSC трёхгранного угла с вершиной S равны 45° , а угол ASB равен 60° . Через S проведена прямая QS , перпендикулярная плоскости SBC . Вычислите угол ASQ .

6.* В трёхгранном угле два двугранных угла острые, а плоский угол между ними тупой. Тупым или острым будет третий двугранный угол?

7.* Докажите, что все плоскости, которые делят пополам двугранные углы трёхгранного угла, имеют общий луч.

8.* Докажите, что если два плоских угла трёхгранного угла равны, то их общее ребро проектируется ортогонально на биссектрису третьей грани или её продолжение.

9.* Докажите, что если в трёхгранном угле $SABC$ один плоский угол BSC прямой, а два других угла ASB и ASC равны 60° , то плоскость BAC , отсекающая от рёбер три равных отрезка, перпендикулярна плоскости прямого угла.

10.** Верно ли, что каждый двугранный угол трёхгранного угла меньше суммы двух других его двугранных углов?

11.** Докажите, что сумма всех двугранных углов трёхгранного угла больше, чем π .

12.** Справедлив ли «признак равенства трёхгранных углов»:

а) по двум плоским углам и двугранному углу между ними;

б) по двум двугранным углам и плоскому углу между ними;

в) по трём плоским углам;

г) по трём двугранным углам?

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1.* В трёхгранном угле два плоских угла по 60° , третий плоский угол прямой. Чему равен косинус угла между плоскостью прямого угла и противолежащим ребром?

- 1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.2.* Каждый плоский угол трёхгранного угла равен 60° . На одном из рёбер отложен от вершины отрезок, равный 3, и из конца его опущен перпендикуляр на противолежащую грань. Чему равна длина этого перпендикуляра?

- 1) 2 2) $3\sqrt{2}$ 3) $2\sqrt{3}$ 4) $\sqrt{6}$

1.3. Какую величину имеют плоские углы трёхгранного угла с вершиной A в правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S , у которой $\angle ASB = 90^\circ$?

- 1) 30° ; 30° ; 60° 2) 45° ; 45° ; 30°
3) 30° ; 30° ; 45° 4) 45° ; 45° ; 60°

1.4. В трёхгранном угле все плоские углы прямые. Внутри его дана точка, отстоящая на расстояния 1, 2 и 3 дм от его граней. Чему равно расстояние от данной точки до вершины угла?

- 1) 4 дм 2) $\sqrt{14}$ дм 3) 6 дм 4) $\sqrt{6}$ дм

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1.* Какую величину может иметь третий двугранный угол трёхгранного угла, у которого первые два двугранных угла по 90° ?

- 1) 10° 2) 30° 3) 160° 4) 170°

2.2. Какой вид могут иметь сечения трёхгранного угла плоскостью?

- 1) треугольник 2) четырёхугольник 3) угол
4) фигура, ограниченная отрезком и двумя лучами, выходящими из его концов

2.3. Какие значения могут принимать двугранные углы при боковых рёбрах правильной четырёхугольной пирамиды?

- 1) 75° 2) 90° 3) 120° 4) 150°

2.4.** Какие из наборов углов могут быть плоскими углами трёхгранного угла?

- 1) 30° ; 30° ; 60° 2) 30° ; 30° ; 150°
3) 30° ; 150° ; 150° 4) 150° ; 150° ; 150°

§ 5. ПЛОЩАДЬ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИИ ■

5.1. Площадь проекции многоугольника. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой m . Рассмотрим в плоскости α треугольник ABC такой, что его сторона AC лежит на прямой m (рис. 1). При ортогональном проектировании треугольника ABC на плоскость β получим треугольник AB_1C , где B_1 — проекция точки B . Если проведём высоту BH треугольника ABC , то по теореме о трёх перпендикулярах получим $B_1H \perp AC$. Следовательно, угол BHB_1 линейный для двугранного угла между α и β и $S_{\Delta AB_1C} = \frac{1}{2} AC \cdot B_1H = \frac{1}{2} AC \cdot BH \cos \angle BHB_1 = S_{\Delta ABC} \cdot \cos \angle BHB_1$.

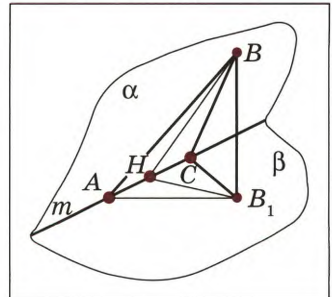


Рис. 1

Таким образом, площадь проекции рассматриваемого треугольника ABC на плоскость β равна площади треугольника ABC , умноженной на косинус угла между плоскостями α и β . Аналогичное свойство выполняется и в общем случае.

Площадь $S_{\text{пр}}$ ортогональной проекции многоугольника F плоскости α на плоскость β равна произведению площади S многоугольника F на косинус угла φ между плоскостями α и β :

$$S_{\text{пр}} = S \cdot \cos \varphi.$$

Вопрос. Как найти угол между плоскостями α и β , если известно, что треугольник плоскости α , имеющий площадь S , проектируется в треугольник плоскости β , имеющий площадь S_1 ?

5.2.* Доказательство формулы для площади проекции треугольника. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой m и угол между ними равен φ . Рассмотрим в плоскости α треугольник ABC такой, что его вершина A лежит на прямой m , а прямая BC пересекает m в точке K . Обозначим через B_1 и C_1 ортогональные проекции на плоскость β точек B и C соответственно. Возможны три случая.

Первый случай. Точка K совпадает с одной из вершин — B или C . Тогда $S_{\Delta AB_1C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot \cos \varphi$, как это доказано в пункте 5.1.

Второй случай. Точка K лежит между вершинами B и C (рис. 2). Тогда

$$S_{\Delta AB_1C_1} = S_{\Delta AB_1K} + S_{\Delta AC_1K} = S_{\Delta ABK} \cdot \cos \varphi + S_{\Delta ACK} \cdot \cos \varphi = S_{\Delta ABC} \cdot \cos \varphi.$$

Третий случай. Точка K лежит вне отрезка BC , например, так, как на рис. 3. Тогда $S_{\Delta AB_1C_1} = S_{\Delta AC_1K} - S_{\Delta AB_1K} = S_{\Delta ACK} \cdot \cos \varphi - S_{\Delta ABK} \cdot \cos \varphi = S_{\Delta ABC} \cdot \cos \varphi$.

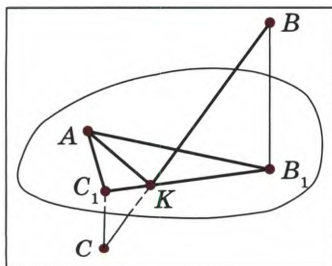


Рис. 2

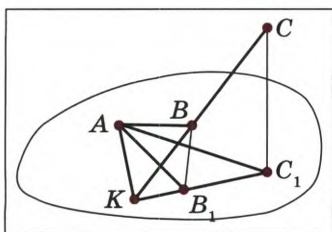


Рис. 3

Вопрос. Как доказать, что формула для площади проекций справедлива для произвольного треугольника?

5.3. Площадь проекции круга.** Пусть φ — угол между плоскостями α , β и в плоскости α задан круг F , ограниченный окружностью C . Площадь S круга F является пределом последовательности площадей правильных n -угольников, описанных вокруг C , и пределом последовательности площадей правильных n -угольников, вписанных в C . Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такой правильный многоугольник U_ε площади $S(U_\varepsilon)$, содержащий F , что $S(U_\varepsilon) < S + \varepsilon$, и такой правильный многоугольник V_ε площади $S(V_\varepsilon)$, содержащийся в F , что $S(V_\varepsilon) > S - \varepsilon$.

При проектировании плоскости α на плоскость β получим фигуру F' и многоугольники U'_ε и V'_ε такие, что $V'_\varepsilon \subseteq F' \subseteq U'_\varepsilon$, причём

$$S(U'_\varepsilon) = S(U_\varepsilon) \cdot \cos \varphi < (S + \varepsilon) \cdot \cos \varphi \leq S \cdot \cos \varphi + \varepsilon,$$

$$S(V'_\varepsilon) = S(V_\varepsilon) \cdot \cos \varphi > (S - \varepsilon) \cdot \cos \varphi \geq S \cdot \cos \varphi - \varepsilon.$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ площадь фигуры F' заключена между $S \cdot \cos \varphi - \varepsilon$ и $S \cdot \cos \varphi + \varepsilon$. Поэтому площадь фигуры F' равна $S \cdot \cos \varphi$.

Вопрос. Как доказать, что при перпендикулярном проектировании окружности на плоскость получается эллипс?

5.4. Вычисление площади многоугольника по площади его проекции. По площади проекции плоского многоугольника можно вычислить площадь самого многоугольника.

Пример. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Найти площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1 и середины M и K рёбер AA_1 и CD .

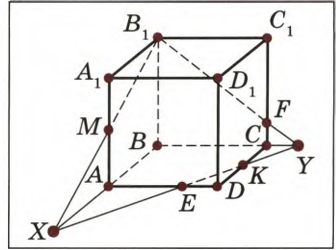


Рис. 4

Построим сечение куба плоскостью B_1MK и получим пятиугольник B_1MEKF (рис. 4). Найдём, как расположены точки X, Y, E . По условию $AM = MA$, поэтому $\triangle A_1 B_1 M = \triangle MAX$, $AX = A_1 B_1 = AB = a$. Так как $\triangle AEX \sim \triangle DEK$, то $AE : ED = AX : DK = 2 : 1$, откуда $DE = \frac{1}{3}a$. Так как $\triangle DEK \sim \triangle CYK$, то $CY = DE = \frac{1}{3}a$.

Ортогональной проекцией сечения на плоскость $ABCD$ является пятиугольник $ABCKE$, площадь которого равна

$$S_1 = S_{ABCD} - S_{DKE} = a^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{3} = \frac{11a^2}{12}.$$

Найдём угол между плоскостями B_1XY и $ABCD$. Для этого проведём $BH \perp XY$. Тогда $B_1H \perp XY$, а поэтому угол $\varphi = \angle B_1HB$ и есть угол между указанными плоскостями (рис. 5). Для его вычисления находим:

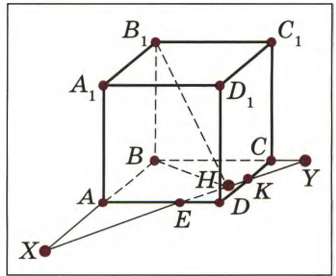


Рис. 5

$$BX = 2a, BY = \frac{4}{3}a, XY = \sqrt{BX^2 + BY^2} = \frac{2a\sqrt{13}}{3},$$

$$BH : BX = BY : XY, \text{ откуда } BH = \frac{BX \cdot BY}{XY} = \frac{4a}{\sqrt{13}}. \text{ После этого имеем}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \angle B_1HB = \frac{BB_1}{BH} = \frac{\sqrt{13}}{4}, \cos^2 \varphi = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{16}{29}, \cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{29}}.$$

Теперь можем вычислить площадь искомого сечения:

$$S = \frac{S_{ABCKE}}{\cos \varphi} = \frac{S_1}{\cos \varphi} = \frac{11a^2}{12} \cdot \frac{\sqrt{29}}{4} = \frac{11a^2\sqrt{29}}{48}.$$

Вопрос. Какую часть составляет площадь сечения от площади треугольника B_1XY ?

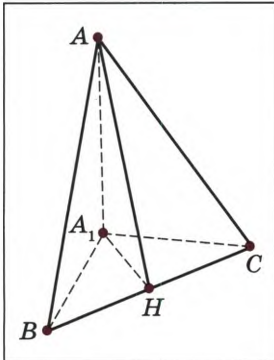


Рис. 6

5.5. О вычислении площади треугольника через площадь его проекции.** В курсах математического анализа при вычислении площадей поверхностей оказывается полезным одно соотношение, которое получается из формулы для площади проекции треугольника.

Пусть треугольник ABC проектируется ортогонально в треугольник A_1BC , у которого $\angle BA_1C = 90^\circ$. Проведём $A_1H \perp BC$.

Тогда и $AH \perp BC$, а поэтому угол A_1HA — линейный для угла между плоскостями ABC и A_1BC (рис. 6). Обозначим $\delta = \angle AHA_1$, $\beta = \angle ABA_1$, $\gamma = \angle ACA_1$, $p = \operatorname{tg} \beta$, $q = \operatorname{tg} \gamma$.

Пусть $AA_1 = a$. Тогда $A_1B = a \operatorname{ctg} \beta = \frac{a}{p}$, $A_1C = a \operatorname{ctg} \gamma = \frac{a}{q}$,

$$BC = \sqrt{A_1B^2 + A_1C^2} = \frac{a\sqrt{p^2 + q^2}}{pq}, \quad A_1H = \frac{A_1B \cdot A_1C}{BC} = \frac{a}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

$$\text{Отсюда } \operatorname{tg} \delta = \frac{AA_1}{A_1H} = \sqrt{p^2 + q^2}, \quad \cos^2 \delta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \delta} = \frac{1}{1 + p^2 + q^2},$$

$$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

$$\text{Поэтому } S_{\Delta ABC} = \frac{S_{\Delta A_1BC}}{\cos \delta} = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot S_{\Delta A_1BC}.$$

Таким образом, когда треугольник ABC проектируется в прямоугольный треугольник A_1BC с прямым углом при вершине A_1 , то $S_{\Delta ABC} = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \cdot S_{\Delta A_1BC}$, где p — тангенс угла наклона прямой AB к её проекции A_1B , q — тангенс угла наклона прямой AC к её проекции A_1C .

Вопрос. Как использовать полученную в этом пункте формулу для вычисления площади треугольника B_1XY в примере из пункта 5.4?

Контрольные вопросы и задания ■

1. По какой формуле можно вычислить площадь ортогональной проекции треугольника?
2. По какой формуле можно вычислить площадь многоугольника, зная площадь его ортогональной проекции?
- 3.** По какой формуле можно вычислить площадь ортогональной проекции плоской фигуры, имеющей площадь?
- 4.** Как найти площадь треугольника, если его ортогональная проекция — прямоугольный треугольник?

Задачи и упражнения ■

- 1.* В треугольной пирамиде $SABC$ плоские углы при вершине S прямые. Известно, что площади граней SAB , SAC и SBC равны 18, 20 и 20. Найдите площадь грани ABC .
2. В правильной четырёхугольной пирамиде боковая поверхность в четыре раза больше площади основания. Найдите величину двугранного угла при ребре основания.
3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ площадь сечения плоскостью ABC_1 в два раза больше площади основания. Чему равно отношение бокового ребра призмы к ребру его основания?
4. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно a . Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через вершину B_1 и середины рёбер AA_1 и CC_1 .
- 5.** В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S через вершину A и середину бокового ребра SC проведено сечение плоскостью, параллельной BD . Известно, что площадь сечения равна 9 и образует с плоскостью основания угол в 60° . Найдите рёбра данной пирамиды.
- 6.** В правильной шестиугольной пирамиде с вершиной S через ребро AB основания и середину высоты SH пирамиды проведено сечение плоскостью. Известно, что площадь сечения равна 11 и образует с плоскостью основания $ABCDEF$ угол в 30° . Найдите рёбра данной пирамиды.

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

- 1.1. Площадь ортогональной проекции многоугольника на данную плоскость равна S , угол между плоскостью многоугольника и этой плос-

костью равен α . По какой формуле можно вычислить площадь этого многоугольника?

- 1) $\frac{S}{\sin \alpha}$ 2) $S \operatorname{tg} \alpha$ 3) $S \cos \alpha$ 4) $\frac{S}{\cos \alpha}$

1.2. В правильной четырёхугольной пирамиде боковая поверхность в два раза больше площади основания. Чему равна величина двугранного угла при ребре основания?

- 1) 30° 2) 45° 3) 60° 4) 75°

1.3. Сколько всего плоскостей, составляющих угол 45° с плоскостью α , можно провести через прямую m плоскости α ?

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

1.4. Чему равна площадь проекции грани AA_1B_1B единичного куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ на плоскость AB_1D_1 ?

- 1) $2 \cdot \sqrt{3}$ 2) $\sqrt{3}$ 3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Площадь ортогональной проекции многоугольника на некоторую плоскость равна 28 см^2 . Чему может быть равна площадь этого многоугольника?

- 1) $20\sqrt{2} \text{ см}^2$ 2) 25 см^2 3) 30 см^2 4) 35 см^2

2.2.* Площадь ортогональной проекции фигуры на некоторую плоскость равна 20 см^2 . Какой может быть эта фигура?

- 1) квадрат со стороной 5 см
2) круг радиуса 2 см
3) равносторонний треугольник со стороной 6 см
4) прямоугольник со сторонами 4 см и 6 см

2.3. Ортогональная проекция некоторого многоугольника на плоскость представляет собой квадрат со стороной 5 см. Какой может быть эта фигура?

- 1) ромб со стороной 6 см
2) параллелограмм со сторонами 4 см и 6 см
3) параллелограмм со сторонами 4 см и 7 см
4) параллелограмм со сторонами 6 см и 7 см

2.4. Какую величину может иметь угол в формуле для вычисления площади ортогональной проекции фигуры на плоскость?

- 1) $\frac{2\pi}{5}$ 2) $\frac{3\pi}{5}$ 3) $\frac{3\pi}{7}$ 4) $\frac{4\pi}{7}$

Мини-исследования к главе ■

Мини-исследование 32

Даны три попарно скрещивающиеся прямые. Существует ли прямая, пересекающая эти три данные прямые? Единственна ли такая прямая?

Мини-исследование 33

Как вычислить величины двугранных углов массивной треугольной призмы, если замеры можно делать только на её поверхности?

Мини-исследование 34

Пусть угол α между некоторыми прямыми равен 60° . Существует ли такая плоскость, что угол между ортогональными проекциями этих прямых на эту плоскость равен 90° ? Если да, то указать, как можно построить такую плоскость.

Исследуйте задачу при других значениях угла α .

Мини-исследование 35

Сколько различных трёхгранных углов получается при пересечении трёх плоскостей, если они имеют ровно одну общую точку? При пересечении четырёх плоскостей? Пяти? Попробуйте выяснить закономерность.

Мини-исследование 36

Из любого ли параллелограмма при ортогональном проектировании можно получить: а) прямоугольник; б) квадрат?

Глава 14

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

В этой главе мы рассмотрим наиболее часто применяемые способы решения уравнений и неравенств, содержащих степени и логарифмы.

■ § 1. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

1.1. Решение уравнений вида $a^x = b$. С помощью логарифмов можно записать решения простейших показательных уравнений вида $a^x = b$, где a и b — заданные числа.

Пример 1. Решить уравнение $4^x = 8$.

По определению логарифма число $\log_4 8$ удовлетворяет равенству $4^{\log_4 8} = 8$. Поэтому $x = \log_4 8$ является корнем данного уравнения. Так как показательная функция $y = 4^x$ строго возрастает, найденное число — единственный корень данного уравнения.

Пользуясь свойствами логарифма, найденный корень можно записать в более простом виде:

$$x = \log_4 8 = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}, \quad x = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение $3^x = 1 + \sqrt{2}$.

Аналогично предыдущему примеру удаётся доказать, что число $x = \log_3(1 + \sqrt{2})$ является единственным корнем. В данном случае запись корня $\log_3(1 + \sqrt{2})$ упростить не удаётся.

Ответ: $\log_3(1 + \sqrt{2})$.

Пример 3. Решить уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 3 = 0$.

Данное уравнение равносильно уравнению $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -3$. Показательная функция принимает только положительные значения, поэтому при любом x число $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ больше нуля и не может равняться отрицательному числу. Следовательно, уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x = -3$ не имеет действительных корней.

Ответ: нет корней.

Пример 4. Решить уравнение $3^x = 4^{\log_2 3}$.

Единственным корнем данного уравнения является число $x = \log_3(4^{\log_2 3})$. Но поскольку $4^{\log_2 3} = (2^2)^{\log_2 3} = (2^{\log_2 3})^2 = 3^2 = 9$, запись корня можно упростить: $x = \log_3 9 = 2$.

Ответ: 2.

Пример 5. Решить уравнение $1^x = 1$.

Напомним, что число 1 в любой степени даёт единицу, то есть $1^x = 1$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Это означает, что множество всех действительных чисел является множеством решений данного уравнения.

Ответ: все действительные числа.

Вопрос. Что вы можете сказать о выражении вида $\log_1 0$?

1.2. Решение уравнений вида $\log_a x = b$. С помощью степени с произвольным действительным показателем можно записать решение простейших логарифмических уравнений вида $\log_a x = b$, где a и b — заданные числа, $a > 0$, $a \neq 1$.

Пример 6. Решить уравнение $\log_3 x = -\frac{1}{4}$.

Из определения логарифма следует, что если $\log_3 x = -\frac{1}{4}$, то $x = 3^{-\frac{1}{4}}$. Так как логарифмическая функция $y = \log_3 x$ строго возрастает в своей области определения, найденное число — единственный корень данного уравнения.

Полученный корень можно также записать и в другом виде:

$$x = 3^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}.$$

Ответ: $3^{-\frac{1}{4}}$.

Пример 7. Решить уравнение $\lg x = 1 - \sqrt{5}$.

Из определения логарифма следует, что число $1 - \sqrt{5}$ является десятичным логарифмом числа $10^{1-\sqrt{5}}$, то есть $\lg 10^{1-\sqrt{5}} = 1 - \sqrt{5}$. Следовательно, $x = 10^{1-\sqrt{5}}$ — корень данного уравнения, и притом единственный в силу монотонности логарифмической функции.

Ответ: $10^{1-\sqrt{5}}$.

Вопрос. Как показать, что уравнение $\log_x 2 = 0$ не имеет корней?

1.3. Замена переменной. Один из способов решения логарифмических и показательных уравнений связан с составлением алгебраического уравнения относительно новой неизвестной вида $\log_a x$ или вида a^x .

Пример 8. Решить уравнение $\frac{11 - 5 \cdot 2^{x+1}}{4^x - 6 \cdot 2^x + 5} = 3$.

Левая часть данного уравнения определена при условии $4^x - 6 \cdot 2^x + 5 \neq 0$. Пусть $z = 2^x$. Тогда

$$\begin{aligned} 2^{x+1} &= 2^x \cdot 2^1 = 2 \cdot 2^x = 2z, \\ 4^x &= (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2 = z^2. \end{aligned}$$

Относительно переменной z получаем уравнение $\frac{11-5 \cdot 2z}{z^2-6z+5} = 3$.

Далее:

$$\begin{aligned} 3 - \frac{11-10z}{z^2-6z+5} &= 0, \\ \frac{3z^2-18z+15-11+10z}{z^2-6z+5} &= \frac{3z^2-8z+4}{z^2-6z+5} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда $3z^2 - 8z + 4 = 0$, причём $z^2 - 6z + 5 \neq 0$. Решая получившееся квадратное уравнение, имеем

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{8 + \sqrt{64 - 3 \cdot 4 \cdot 4}}{6} = \frac{8+4}{6} = 2, \\ z_2 &= \frac{8-4}{6} = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

причём при $z_1 = 2$ и при $z_2 = \frac{2}{3}$ знаменатель $z^2 - 6z + 5$ не равен нулю.

После этого нужно решить два уравнения:

$$\begin{aligned} 2^x &= 2, \quad 2^x = 2^1, \quad x_1 = 1; \\ 2^x &= \frac{2}{3}, \quad x_2 = \log_2 \frac{2}{3} = 1 - \log_2 3. \end{aligned}$$

Ответ: $1 - \log_2 3; 1$.

Пример 9. Решить уравнение $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{5}{2}$.

Левая часть данного уравнения определена при $x > 0$, $x \neq 1$. Выразим $\log_x 2$ через логарифмы по основанию 2:

$$\log_x 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = \frac{1}{\log_2 x}.$$

Следовательно, данное уравнение можно заменить на уравнение:

$$\log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = \frac{5}{2}.$$

Заменив $\log_2 x$ на t , получим уравнение $t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}$, равносильное уравнениям:

$$t - \frac{5}{2} + \frac{1}{t} = 0,$$

$$\frac{t^2 - \frac{5}{2}t + 1}{t} = 0.$$

Отсюда $t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0$, причём $t \neq 0$. Решая относительно t получившееся квадратное уравнение, имеем

$$t_1 = \frac{5}{4} + \sqrt{\frac{25}{16} - 1} = \frac{5}{4} + \frac{3}{4} = 2,$$

$$t_2 = \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$$

Оба найденных значения отличны от нуля. Далее нужно решить два уравнения:

$$\log_2 x = 2, x_1 = 2^2 = 4;$$

$$\log_2 x = \frac{1}{2}, x_2 = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Оба найденных числа входят в область определения левой части начального уравнения.

Ответ: $\sqrt{2}; 4$.

Вопрос. Как решить уравнение $\log_{x+1} 3 = 2$?

1.4. Приведение логарифмических и показательных уравнений к алгебраическим уравнениям.

Пример 10. Решить уравнение $3 \cdot 16^x + 36^x = 2 \cdot 81^x$.

Заметим, что $36 = 4 \cdot 9$, $16 = 4^2$, $81 = 9^2$. Поэтому $16^x = 4^{2x} = (4^x)^2$, $36^x = (4 \cdot 9)^x = 4^x \cdot 9^x$, $81^x = 9^{2x} = (9^x)^2$. Это позволяет записать начальное уравнение в виде

$$3 \cdot (4^x)^2 + 4^x \cdot 9^x - 2 \cdot (9^x)^2 = 0.$$

Так как $9^x \neq 0$, при делении обеих частей уравнения на $(9^x)^2$ получаем равносильное уравнение $3 \cdot \frac{(4^x)^2}{(9^x)^2} + \frac{4^x \cdot 9^x}{(9^x)^2} - 2 = 0$.

$$\text{Далее: } 3 \cdot \left(\frac{4^x}{9^x}\right)^2 + \frac{4^x}{9^x} - 2 = 0, \quad 3 \cdot \left(\left(\frac{4}{9}\right)^x\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^x - 2 = 0.$$

Обозначив $z = \left(\frac{4}{9}\right)^x$, приходим к квадратному уравнению $3z^2 + z - 2 = 0$.

Отсюда

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 3 \cdot 2}}{6} = \frac{-1 + 5}{6} = \frac{2}{3},$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3} = \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x_1 = \frac{1}{2};$$

$$z_2 = \frac{-1-5}{6} = -1, \quad \left(\frac{4}{9}\right)^x = -1.$$

Так как $-1 < 0$, последнее уравнение корней не имеет.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Пример 11. Решить уравнение $\log_{5x} x + \log_{5x^3} x = 0$.

Левая часть данного уравнения определена при $x > 0$, $5x \neq 1$, $5x^3 \neq 1$. Пусть $z = \log_5 x$. Выразим все логарифмы в уравнении через логарифмы по основанию 5:

$$\log_{5x} x = \frac{\log_5 x}{\log_5 (5x)} = \frac{\log_5 x}{1 + \log_5 x} = \frac{z}{1+z},$$

$$\log_{5x^3} x = \frac{\log_5 x}{\log_5 (5x^3)} = \frac{\log_5 x}{1 + 3\log_5 x} = \frac{z}{1+3z}.$$

Относительно неизвестной z получаем уравнение

$$\frac{z}{1+z} + \frac{z}{1+3z} = 0.$$

$$\text{Далее: } \frac{z(1+3z) + z(1+z)}{(1+z)(1+3z)} = 0, \quad \frac{z(2+4z)}{(1+z)(1+3z)} = 0.$$

Решая получившееся уравнение, имеем:

$$z_1 = 0, \log_5 x = 0, x_1 = 5^0 = 1,$$

$$z_2 = -\frac{1}{2}, \log_5 x = -\frac{1}{2}, x_2 = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Оба найденных числа входят в область определения левой части начального уравнения.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{5}}; 1$.

Вопрос. Сколько корней имеет уравнение $\log_x 2 = \log_2 x$?

1.5.* Об изменении области определения при выполнении преобразований. Решая уравнения и выполняя некоторые преобразования, важно следить за сохранением равносильности уравнений. В частности, нужно следить за возможными изменениями области определения.

Например, вернёмся к уравнению $\log_{5x} x + \log_{5x^3} x = 0$ из примера 11 предыдущего пункта. Выразим все логарифмы через логарифмы по основанию x :

$$\log_{5x} x = \frac{\log_x x}{\log_x 5x} = \frac{1}{1+y},$$

$$\log_{5x^3} x = \frac{\log_x x}{\log_x 5x^3} = \frac{1}{3+y},$$

где $y = \log_x 5$. В результате получим уравнение $\frac{1}{1+y} + \frac{1}{3+y} = 0$,

$$\frac{4+2y}{(1+y)(3+y)} = 0, \quad y = -2, \quad \log_x 5 = -2, \quad x^{-2} = 5.$$

Учитывая, что $x > 0$, получаем $x = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Теперь вспомним, что в предыдущем пункте при решении данного уравнения в ответе получилось два числа.

Использованная в этом пункте замена привела к потере части ответа, так как $y = \log_x 5$ определено при $x > 0$, $x \neq 1$, а исходное уравнение $\log_{5x} x + \log_{5x^3} x = 0$ при $x = 1$ определено.

Сужение области определения при использовании замены привело к потере корня. Для получения полного ответа нужно дополнительно рассмотреть случай $x = 1$ и убедиться, что $\log_5 1 + \log_5 1 = 0$.

Вопрос. Какие корни уравнения $\log_{2x} x^2 = \log_{2x^2} x$ могут быть потеряны при использовании замены $y = \log_x 2$?

1.6. Решение уравнений приведением к равенству логарифмов с одним основанием. Один из способов решения логарифмических уравнений связан с приведением уравнения к виду $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$.

Это позволяет составить новое уравнение $f(x) = g(x)$, решить его и учесть условия области определения обеих частей начального уравнения. Пересечение областей определения левой и правой части уравнения называют *областью определения уравнения*.

Важно заметить, что в процессе преобразований, приводящих уравнение к указанному виду, следует обращать внимание на возможные изменения областей определения частей уравнения.

Пример 12. Решить уравнение $\log_2 (x^2 - 9) + \log_2 \frac{x-1}{x+3} = 3$.

Область определения левой части уравнения задаётся условиями $x^2 - 9 > 0$ и $\frac{x-1}{x+3} > 0$.

В области определения можно выполнить следующие преобразования:

$$\log_2 (x-3)(x+3) + \log_2 \frac{x-1}{x+3} = \log_2 8,$$

$$\log_2 \left((x-3)(x+3) \cdot \frac{x-1}{x+3} \right) = \log_2 8,$$

$$\begin{aligned} \log_2 ((x-3)(x-1)) &= \log_2 8, \\ (x-3)(x-1) &= 8, \quad x^2 - 4x - 5 = 0. \end{aligned}$$

Решая полученное квадратное уравнение, имеем

$$x_1 = 2 + \sqrt{4+5} = 5, \quad x_2 = 2 - 3 = -1.$$

Так как $x_1^2 - 9 > 0$ и $\frac{x_1 - 1}{x_1 + 3} > 0$, число $x_1 = 5$ входит в область определения левой части исходного уравнения, а поэтому является его корнем. Так как $x_2^2 - 9 < 0$, число -1 не входит в область определения левой части исходного уравнения и не является его корнем.

Ответ: 5.

Заметим, что при преобразованиях получалось промежуточное уравнение $\log_2 ((x-3)(x-1)) = \log_2 8$, в область определения левой части которого входит число -1 . В отличие от начального уравнения промежуточное уравнение имеет два корня: 5 и -1 .

Пример 13. Решить уравнение

$$\log_{x-4} (x-2) \cdot \log_7 (x-4)^2 + \log_7 (8-x)^2 = 2.$$

Область определения левой части уравнения задаётся системой условий:

$$\begin{cases} x-2 > 0, \\ x-4 > 0, \\ x-4 \neq 1, \\ (x-4)^2 > 0, \\ (8-x)^2 > 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем область определения левой части исходного уравнения в виде объединения промежутков: $(4; 5) \cup (5; 8) \cup (8; \infty)$.

В области определения можно выполнить следующие преобразования, учитывая, что в ней $|x-4| = x-4$:

$$\frac{\log_7 (x-2)}{\log_7 (x-4)} \cdot 2 \log_7 (x-4) + 2 \log_7 |8-x| = 2,$$

$$2 \log_7 (x-2) + 2 \log_7 |8-x| = 2,$$

$$\log_7 ((x-2) \cdot |8-x|) = 1,$$

$$\log_7 ((x-2) \cdot |8-x|) = \log_7 7,$$

$$(x-2) \cdot |8-x| = 7.$$

Далее нужно решить полученное уравнение и выбрать корни, входящие в область определения.

I. Пусть $8 - x \geq 0$, или $x \leq 8$. Тогда уравнение запишется в виде $(x - 2)(8 - x) = 7$. Отсюда $-x^2 + 10x - 16 = 7$, $x^2 - 10x + 23 = 0$, $x_1 = 5 + \sqrt{2}$, $x_2 = 5 - \sqrt{2}$.

Число $x_1 = 5 + \sqrt{2}$ удовлетворяет условию $x_1 \leq 8$ и входит в область определения, поэтому является корнем начального уравнения. Число $x_2 = 5 - \sqrt{2}$ также удовлетворяет условию $x_2 \leq 8$, но не входит в область определения.

II. Пусть $8 - x < 0$, или $x > 8$. Тогда уравнение запишется в виде $(x - 2) \cdot (x - 8) = 7$. Отсюда $x^2 - 10x + 16 = 7$, $x^2 - 10x + 9 = 0$, $x_3 = 5 + \sqrt{25 - 9} = 5 + 4 = 9$, $x_4 = 5 - 4 = 1$. Число $x_3 = 9$ удовлетворяет условию $x_3 > 8$ и входит в область определения, поэтому является корнем начального уравнения. Число $x_4 = 1$ не удовлетворяет условию $x_4 > 8$, значит, не является корнем уравнения $(x - 2) \cdot |8 - x| = 7$, и поэтому не может быть корнем начального уравнения.

Ответ: $5 + \sqrt{2}; 9$.

Вопрос. Какова область определения выражения $\log_{x^2}(x + 2)^2$?

1.7. Решение уравнений способом логарифмирования. Один из способов решения показательных уравнений связан с логарифмированием правой и левой части и приравниванием полученных выражений. Важно заметить, что это возможно только в том случае, когда обе части исходного уравнения положительны, а логарифмирование производится по положительному и отличному от единицы основанию. Если хотя бы одно из этих условий нарушается, следует искать другие способы решения.

Пример 14. Решить уравнение $0,1 \cdot x^{\lg x - 1} = 10$.

Уравнение определено при $x > 0$. При этом обе части уравнения положительны. Прологарифмировав по основанию 10, отличному от 1, получаем:

$$\begin{aligned}\lg(0,1 \cdot x^{\lg x - 1}) &= \lg 10, \\ \lg 0,1 + (\lg x - 1) \cdot \lg x &= 1, \\ -1 + \lg^2 x - \lg x &= 1, \\ \lg^2 x - \lg x - 2 &= 0.\end{aligned}$$

В результате приходим к квадратному уравнению относительно выражения $\lg x$. Отсюда $(\lg x)_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4 \cdot 2}}{2} = \frac{1 + 3}{2} = 2$, $x_1 = 10^2 = 100$, $(\lg x)_2 = \frac{1 - 3}{2} = -1$, $x_2 = 10^{-1} = \frac{1}{10}$.

Ответ: $\frac{1}{10}; 100$.

Вопрос. Как решить уравнение $x^{\lg x} = 100$?

1.8.* Примеры решения уравнений логарифмированием. Приведём более сложные примеры решения уравнений с помощью логарифмирования левой и правой части.

Пример 15. Решить уравнение $2^{x-2} \cdot 3^{\frac{x+1}{x-1}} = 18$.

Уравнение определено при $x \neq 1$. При этом обе части положительны. Логарифмируя по основанию 2, получаем:

$$\log_2 \left(2^{x-2} \cdot 3^{\frac{x+1}{x-1}} \right) = \log_2 (2 \cdot 3^2),$$

$$\log_2 2^{x-2} + \log_2 3^{\frac{x+1}{x-1}} = \log_2 2 + \log_2 3^2,$$

$$x - 2 + \frac{x+1}{x-1} \log_2 3 = 1 + 2 \log_2 3,$$

$$(x-2)(x-1) + (x+1) \log_2 3 = (x-1)(1 + 2 \log_2 3),$$

$$x^2 - (4 + \log_2 3) \cdot x + (3 + 3 \log_2 3) = 0.$$

В результате приходим к квадратному уравнению относительно x . Его дискриминант

$$D = (4 + \log_2 3)^2 - 4(3 + 3 \log_2 3) = \log_2^2 3 - 4 \log_2 3 + 4 = (\log_2 3 - 2)^2.$$

Поэтому

$$x_1 = \frac{4 + \log_2 3 + \log_2 3 - 2}{2} = 1 + \log_2 3 = \log_2 6,$$

$$x_2 = \frac{4 + \log_2 3 - \log_2 3 + 2}{2} = 3.$$

Ответ: $3; \log_2 6$.

Заметим, что рассмотренное в этом примере уравнение иногда записывают в виде $2^{x-2} \cdot 3^{\frac{x+1}{x-1}} = 2^1 \cdot 3^2$.

После этого приравнивают показатели соответственно при степенях чисел 2 и 3 и получают два равенства: $x - 2 = 1$, $\frac{x+1}{x-1} = 2$. Оба эти равенства верны при $x = 3$, откуда делается вывод, что получен ответ. Такой способ рассуждений похож на метод подбора корней и является ошибочным, так как не даёт множества всех корней данного уравнения.

Пример 16. Решить уравнение $(3x)^{x^2-2x-1} = (3x)^2$.

Уравнение определено при $x > 0$.

Рассмотрим способ решения этого уравнения, связанный с логарифмированием по основанию $3x$. Это возможно, если $3x > 0$ и $3x \neq 1$. Тогда

$$\log_{3x} (3x)^{x^2-2x-1} = \log_{3x} (3x)^2,$$

$$x^2 - 2x - 1 = 2,$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Отсюда $x_1 = 1 + \sqrt{1+3} = 1+2=3$, $x_2 = -1$. Число x_1 положительно и является корнем начального уравнения; число x_2 отрицательно и не является корнем начального уравнения.

Проведённые рассуждения возможны только при $x > 0$ и $x \neq \frac{1}{3}$. Такие значения не исчерпывают всё множество чисел x , больших 0, так как остаётся не рассмотренным число $x = \frac{1}{3}$. Это число можно проверить

непосредственной подстановкой: $\left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} - 1} = \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right)^2, 1^{-\frac{14}{9}} = 1^2$.

Равенство выполняется, поэтому $x_3 = \frac{1}{3}$ также корень начального уравнения.

Ответ: $\frac{1}{3}; 3$.

Вопрос. Сколько корней имеет уравнение $(x-3) \cdot x^{\frac{3x}{x-1}} = x^2 - 3x$?

1.9. Пример доказательства равносильности преобразований.** Способ сведения уравнения вида

$$\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x) \quad (1)$$

к уравнению вида

$$f(x) = g(x) \quad (2)$$

основан на том, что эти два уравнения равносильны на общей части их областей определения. Докажем это.

Обозначим через D пересечение областей определения уравнений (1) и (2).

I. Пусть $a \in D$ и выполняется равенство $\log_{h(a)} f(a) = \log_{h(a)} g(a)$. Тогда, в частности, числа $f(a)$, $g(a)$ определены, причём в силу монотонности логарифмической функции из равенства их логарифмов следует равенство $f(a) = g(a)$. Это означает, что число a является корнем уравнения (2).

II. Пусть $b \in D$ и $f(b) = g(b)$. По определению множества D выполняются условия $f(b) > 0$, $g(b) > 0$, $h(b) > 0$ и $h(b) \neq 1$. Поэтому числа $\log_{h(b)} f(b)$ и $\log_{h(b)} g(b)$ определены и равны как логарифмы равных чисел по одному основанию, то есть

$$\log_{h(b)} f(b) = \log_{h(b)} g(b),$$

откуда следует, что число b является корнем уравнения (1).

Таким образом, из первой части доказательства следует, что каждый корень уравнения (1) из множества D является корнем уравнения (2), а из второй части — что каждый корень уравнения (2) из множества D является корнем уравнения (1). Тем самым равносильность уравнений (1) и (2) на множестве D доказана.

Вопрос. Всегда ли уравнения $h(x)^{f(x)} = h(x)^{g(x)}$ и $f(x) = g(x)$ равносильны на общей части их областей определения?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите основные свойства показательной функции.
2. Какие основные свойства логарифмической функции вам известны?
3. Как найти x , если $a^x = b$, где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$?
4. Как найти x , если $\log_a x = b$, где $a > 0$, $a \neq 1$?
- 5.* Пусть $f(a) = g(a)$. В каком случае отсюда следует равенство $\log_{h(a)} f(a) = \log_{h(a)} g(a)$?
- 6.* Пусть $\log_{h(b)} g(b) = \log_{h(b)} f(b)$. В каком случае отсюда следует равенство $g(b) = f(b)$?

■ Задачи и упражнения

1. Решите уравнение:

а) $2^x = 32$; б) $3^x = \frac{1}{9}$; в) $4^x = 256$; г) $5^x = \frac{1}{125}$; д) $7^x = \frac{1}{49}$.

2. Решите уравнение:

а) $4^x = 2$; б) $25^x = 125$; в) $9^x = 27$; г) $8^x = \frac{1}{16}$; д) $49^x = \frac{1}{7}$.

3. Решите уравнение:

а) $\sqrt{2^x} = \sqrt{16}$; б) $\sqrt{2^x} \sqrt{5^x} = 1000$;
 в) $\left(\frac{3}{7}\right)^x = \left(\frac{7}{3}\right)^3$; г) $\left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{25}{4}\right)^{2x+1} = \frac{125}{8}$.

4. Решите уравнение:

а) $2^x = 1 + \sqrt{2}$; б) $2^x = 1 - \sqrt{2}$; в) $3^x = \frac{2 + \sqrt{7}}{4}$; г) $3^x = \frac{2 - \sqrt{7}}{4}$.

5. Решите уравнение:

а) $3^{x^2-5x+7} = 27$; б) $5^{x^2+x-\frac{1}{2}} = 25\sqrt{5}$;
 в) $4^{x+1} + 4^x = 1280$; г) $2 \cdot 3^{x+2} - 4 \cdot 3^{x-1} = 300$.

6. Решите уравнение:

а) $25^{2x+1} = 5^{2-3x}$;

б) $2^{2x} \cdot 3^{3x-2} = 12$;

в) $2^x \cdot 3^{2x-2} \cdot 5^{3x-1} = 50$;

г) $(x^2 + x + 1)^{4x-1} = 1$.

7. Решите уравнение:

а) $4^x + 2^{2x+2} = 20$;

б) $2^{2x} + 2^{x+1} = 8$;

в) $3^{2x+1} + 5 \cdot 3^x = 2$;

г) $5^x - 4 = 5^{\frac{x-1}{2}}$;

д) $2 \cdot 3^{x-1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81$.

8.* Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} 2^x \cdot 7^y = 112, \\ 2x - 7y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 54, \\ 2x + 3y = 11; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 135, \\ 3x - 5y = 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 147, \\ 7x + 3y = 13. \end{cases}$

9. Решите систему уравнений:**

а) $\begin{cases} 3^{2x} + 5^{2y+1} = 134, \\ 3^x + 5^y = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3^{2x} + 2^{2y+3} = 113, \\ 2 \cdot 3^x + 2^{y+1} = 22. \end{cases}$

10. Решите уравнение:

а) $\log_2 x = 2$;

б) $\log_3 x = -1$;

в) $\log_5 x = \frac{1}{2}$;

г) $\log_4 x = -\frac{1}{2}$;

д) $\log_{\frac{1}{2}} x = 2$.

11. Решите уравнение:

а) $\log_{0,6} x = 2$;

б) $\log_4(3x - 1) = 1$;

в) $\log_2(x^2 + 2x + 2) = 1$;

г) $\log_5 x = 1 + \sqrt{2}$.

12. Решите уравнение:

а) $\log_2(\log_5 x) = 0$;

б) $\log_3^2 x + 3\log_3 x = 4$;

в) $\log_{6-x} x = 2$;

г) $\log_2(2x - 3) + \log_2(x + 6) = 3$;

д) $\log_5^2 x - 2\log_5 x - 3 = 0$.

13.* Решите уравнение:

а) $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x = 0$;

б) $4^x + 5^{2x+1} = 6 \cdot 10^x$.

14.* Решите уравнение:

а) $81 \cdot 2^{x(x-1)} = 4 \cdot 3^{2x}$;

б) $25 \cdot 4^{x(3-x)} = 16 \cdot 5^{2x}$;

в) $27 \cdot 5^{x(x-2)} = 125 \cdot 3^x$;

г) $64 \cdot 3^{2x} = 9 \cdot 4^{x(4-x)}$.

15.* Решите уравнение:

а) $\log_x \sqrt{2} + \log_{2x} 4 = \log_{8x} 16$;

б) $\log_{5x} 5 + \log_{125x} 25 = \log_x 5$;

в) $\log_{4x} 4 + \log_{8x} 8 = \log_{16x} 256$;

г) $\log_x \sqrt{3} + \log_{3x} 3 = \log_{9x} 81$.

16. Решите уравнение:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lg \frac{2x^2+1}{x+1} + \lg \frac{x+1}{3x+10} &= 0; & \text{б) } \lg \frac{2x^2+3}{3x+1} + \lg \frac{3x+1}{3x+5} &= 0; \\ \text{в) } \lg \frac{4x^2+1}{2-x} + \lg \frac{2-x}{11x+4} &= 0. \end{aligned}$$

17.** Решите уравнение:

$$\begin{aligned} \text{а) } \log_{x+4} \log_3 \log_{x+3} (x^2 + 7x + 12) &= 0; \\ \text{б) } \log_{x+2} \log_2 \log_{x+3} (11x^2 + 46x + 48) &= 0. \end{aligned}$$

18.* Решите уравнение:

$$\begin{aligned} \text{а) } \log_3 (2x - 4) + \log_9 (x + 2)^2 &= 1 + \log_3 (x^2 + 2x - 9); \\ \text{б) } \log_2 (2x - 2) + \log_4 (x + 1)^2 &= 2 + \log_2 (x^2 + x - 3). \end{aligned}$$

19. Решите уравнение:

$$\begin{aligned} \text{а) } \log_x (3x^2 - 5x + 3) &= 2; & \text{б) } \log_x (x^2 - 12) &= 1; \\ \text{в) } \log_x (3x^2 - 7x - 15) &= 2. \end{aligned}$$

20.** Решите уравнение:

$$\begin{aligned} \text{а) } 10 \cdot 5^{\log_{x-2} (2x-3)^2} - 29 \cdot 10^{\log_{x-2} (2x-3)} + 10 \cdot 2^{\log_{x-2} (2x-3)^2} &= 0; \\ \text{б) } 6 \cdot 9^{\log_{(x+1)} (2x+3)} - 13 \cdot 36^{\log_{(x+1)^2} (2x+3)} + 6 \cdot 4^{\log_{(x+1)} (2x+3)} &= 0. \end{aligned}$$

21.* Решите уравнение:

$$\begin{aligned} \text{а) } \log_2 3 \cdot \log_{x+5} 4 - \log_4 (x + 5)^2 \cdot \log_{x+5} 2 &= 1; \\ \text{б) } \log_{\sqrt{x}} (3 - x) \cdot \log_2 x + \log_2 (x - 6)^2 &= 4. \end{aligned}$$

22.** Решите систему уравнений:

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} 1 + \log_y x + \frac{1}{2} \log_{\sqrt{y}} (x + y) = \log_y 10 + \log_y 10 \cdot \log_{10} 18, \\ 1 = \log_{y-x} (29 - 2x - xy); \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} \log_{\sqrt{x}} (11 - y) = 2 + 2 \log_x (1 + y), \\ \log_{10} y + \log_{10} y \cdot \log_y (x + y) = \log_{10} 3 - \log_{10} x + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

23.* Решите уравнение:

$$\begin{aligned} \text{а) } \log_{2x+1} (5 + 8x - 4x^2) + \log_{5-2x} (4x^2 + 4x + 1) &= 4; \\ \text{б) } 2 \log_{x+3} (2x^2 + 10x + 12) + \frac{1}{2} \log_{2x+4} (x^2 + 6x + 9) &= 5; \\ \text{в) } \log_{x-2} (7x - 10 - x^2) + \log_{5-x} (x^2 - 4x + 4) &= 4; \\ \text{г) } 2 \log_{2x+1} (3 + 5x - 2x^2) + \frac{1}{2} \log_{3-x} (4x^2 + 4x + 1) &= 5. \end{aligned}$$

24.** Решите уравнение:

$$\begin{aligned} \text{а) } 5 \cdot 49^{|x-3|} + 2 \cdot 25^{|x-3|} &= 11 \cdot 35^{|x-3|}; \\ \text{б) } 2 \cdot 4^{|x+2|} + 3 \cdot 9^{|x+2|} &= 7 \cdot 6^{|x+2|}; \end{aligned}$$

$$\text{в)} 3 \cdot 4^{|x-2|} + 5 \cdot 49^{|x-2|} = 16 \cdot 14^{|x-2|};$$

$$\text{г)} 7 \cdot 16^{|x+3|} + 3 \cdot 9^{|x+3|} = 22 \cdot 12^{|x+3|}.$$

Тесты ■

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какое из чисел является корнем уравнения $\log_4(x-2) = \sqrt{2}$?

$$1) 2 + 2^{2\sqrt{2}} \quad 2) 2 - 2^{2\sqrt{2}} \quad 3) 2 + 2^{\sqrt{2}} \quad 4) 2 - 2^{\sqrt{2}}$$

1.2. К какому из указанных уравнений сводится уравнение $9^{x+1} + 4^{x+2} =$

$$= 25 \cdot 6^x \text{ при замене } z = \left(\frac{3}{2}\right)^x ?$$

$$1) z^2 - 25z + 1 = 0 \quad 2) 9z^2 - 25z + 1 = 0$$

$$3) 9z^2 - 25z + 16 = 0 \quad 4) z^2 - 25z + 16 = 0$$

1.3. Какое из указанных чисел является корнем уравнения $\log_x 2 = \sqrt{2}$?

$$1) 2^{\sqrt{2}} \quad 2) 2^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad 3) \sqrt{2} \quad 4) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

1.4. К какому из указанных уравнений сводится уравнение $\log_{3x} 3 \cdot \log_{9x} x = 1$ при замене $z = \log_3 x$?

$$1) \frac{z}{(1+z)(2+z)} = 1 \quad 2) \frac{3+2z}{(1+z)(2+z)} = 1$$

$$3) \frac{z}{(1+z)(2z+1)} = 1 \quad 4) \frac{3}{(1+z)(2+z)} = 1$$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1.* Какие числа из указанных удовлетворяют неравенству $5^x \leq \frac{9}{3^{x-1}}$?

$$1) -1 \quad 2) 0 \quad 3) 1 + \log_3 5 \quad 4) \frac{3}{1 + \log_5 3}$$

2.2.* Какой из систем равносильно уравнение $\log_{x+1}(x^2 - 1) = 3$?

$$1) \begin{cases} x^2 - 1 = (x+1)^3, \\ x+1 > 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x+1 = (x^2+1)^3, \\ x+1 > 0, \\ x^2 - 1 > 0; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x^2 - 1 = (x+1)^3, \\ x+1 > 0, \\ x^2 - 1 > 0, \\ x+1 \neq 1; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} (x^2 - 1)^3 = x+1, \\ x+1 > 0. \end{cases}$$

2.3.* При каких из указанных условий уравнение вида $\log_x f(x) = 0$ равносильно уравнению $f(x) = 1$?

- 1) когда уравнение $f(x) = 1$ имеет только корни, большие единицы
- 2) когда уравнение $f(x) = 1$ не имеет отрицательных корней
- 3) когда уравнение $f(x) = 1$ имеет только положительные корни
- 4) когда уравнение $f(x) = 1$ имеет только положительные корни, отличные от единицы

2.4.* Каким из перечисленных уравнений равносильно уравнение вида $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$?

- 1) $\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x) = 0$
- 2) $\log_{h(x)} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
- 3) $2 \cdot \log_{h(x)} f(x) = 2 \cdot \log_{h(x)} g(x)$
- 4) $\log_{h(x)} f^2(x) = \log_{h(x)} g^2(x)$

■ § 2. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

2.1. Показательные неравенства, сводящиеся к простейшим.

Напомним, что в зависимости от числа a показательная функция $f(x) = a^x$ ведёт себя по-разному.

При $a > 1$ функция a строго возрастает. Это означает, что из неравенства $x > y$ следует неравенство $a^x > a^y$, и наоборот, из неравенства $a^x > a^y$ следует неравенство $x > y$. Таким образом, при $a > 1$ неравенства $a^x > a^y$ и $x > y$ равносильны.

При $0 < a < 1$ функция a^x строго убывает. Это означает, что при таком значении a неравенство $a^x > a^y$ равносильно неравенству $x < y$.

Различие в характере поведения показательной функции a^x в зависимости от числа a заставляет быть внимательным при решении простейших неравенств вида $a^x \geq b$, $a^x > b$, $a^x \leq b$, $a^x < b$.

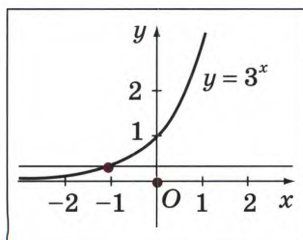


Рис. 1

Пример 1. Решить неравенство $3^x < \frac{1}{3}$.

Заметим, что $\frac{1}{3} = 3^{-1}$. Поэтому неравенство можно записать в виде $3^x < 3^{-1}$. Так как основание показательной функции $y = 3^x$ больше 1, неравенство $3^x < 3^{-1}$ равносильно неравенству $x < -1$. Решениями последнего неравенства являются все точки луча $(-\infty; -1)$.

Этот ответ можно также получить с помощью графика функции $y = 3^x$, проведя прямую $y = \frac{1}{3}$ и отметив все x , для которых точки графика лежат ниже проведённой прямой (рис.1).

Пример 2. Решить неравенство $3^x \leq 4^x$.

Так как $4^x > 0$ при любом x , данное неравенство равносильно неравенству $\frac{3^x}{4^x} \leq 1$. Отсюда имеем $\left(\frac{3}{4}\right)^x \leq 1$, $\left(\frac{3}{4}\right)^x \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0$. Так как основание показательной функции $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ меньше 1, неравенство $\left(\frac{3}{4}\right)^x \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0$ равносильно неравенству $x \geq 0$.

Ответ: $[0; \infty)$.

Этот же ответ можно получить и с помощью графика (рис. 2).

Пример 3. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1 \leq 0$.

Данное неравенство равносильно неравенству $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq -1$. Так как значения показательной функции $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ только положительны, неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x \leq -1$ неверно при любом x .

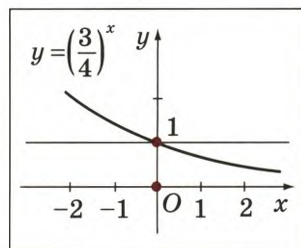


Рис. 2

Ответ: множество решений пусто.

Пример 4. Решить неравенство $(\sqrt{5}-1)^x > 2$.

Заметим, что основание показательной функции $y = (\sqrt{5}-1)^x$ больше 1, а $2 = (\sqrt{5}-1)^\alpha$, где $\alpha = \log_{\sqrt{5}-1} 2$. Поэтому данное неравенство равносильно неравенству $x > \alpha$, то есть $x > \log_{\sqrt{5}-1} 2$.

Ответ: $(\log_{\sqrt{5}-1} 2; \infty)$.

Вопрос. Как решить неравенство $1^x < 2$?

2.2. Логарифмические неравенства, сводящиеся к простейшим. В зависимости от числа a логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ ведёт себя по-разному.

При $a > 1$ функция $\log_a x$ строго возрастает, то есть неравенство $\log_a x > \log_a y$ равносильно неравенству $x > y$ с учётом того, что $x > 0$, $y > 0$.

При $0 < a < 1$ функция $\log_a x$ строго убывает, то есть неравенство $\log_a x > \log_a y$ равносильно неравенству $x < y$ с учётом того, что $x > 0, y > 0$.

Различие в характере поведения показательной функции $\log_a x$ в зависимости от числа a заставляет быть внимательным при решении простейших неравенств вида $\log_a x \geq b, \log_a x > b, \log_a x \leq b, \log_a x < b$. Кроме этого следует также учитывать, что функция $\log_a x$ определена при $x > 0$.

Пример 5. Решить неравенство $\log_3(2x - 1) \geq \frac{1}{2}$.

Пусть $z = 2x - 1$. Относительно переменной z получаем неравенство $\log_3 z \geq \frac{1}{2}$ или $\log_3 z \geq \log_3 \sqrt{3}$. Левая часть неравенства определена при $z > 0$, а так как основание логарифмов больше 1, то при условии $z > 0$ неравенство $\log_3 z \geq \log_3 \sqrt{3}$ равносильно неравенству $z \geq \sqrt{3}$, причём все полученные значения положительны. Подставляя $z = 2x - 1$, получаем $2x - 1 \geq \sqrt{3}$, откуда $x \geq \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\left[\frac{1 + \sqrt{3}}{2}; \infty \right)$.

Пример 6. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}} x + 2 \geq 0$.

Левая часть неравенства определена при $x > 0$. Запишем данное неравенство в виде

$\log_{\frac{1}{2}} x \geq -2$ или $\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$. Так как основа-

ние логарифмов меньше 1, в области определения неравенство $\log_{\frac{1}{2}} x \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$ равносильно

неравенству $x \leq 4$. Выбирая x , входящие в область определения, получаем $0 < x \leq 4$.

Ответ: $(0; 4]$.

Этот же ответ можно получить и с помощью графика (рис. 3).

Вопрос. Как решить неравенство $\log_2 x^2 \geq 2$?

2.3. Замена переменных. Один из способов решения логарифмических и показательных неравенств связан с составлением алгебраического неравенства относительно новой неизвестной вида $\log_a x$ или a^x .

Пример 7. Решить неравенство $\frac{1}{\log_2 4x} \geq \frac{1}{\log_4 2x}$.

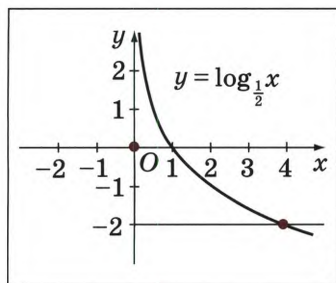


Рис. 3

Левая часть неравенства определена при $x > 0$, $4x \neq 1$, правая часть — при $x > 0$, $2x \neq 1$. Пересечение областей определения левой и правой части неравенства называют *областью определения неравенства*. Областью определения данного неравенства является множество $\left(0; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$.

Обозначим $\log_2 x$ через z и выразим все логарифмы в исходном неравенстве через логарифмы по основанию 2:

$$\log_2 4x = \log_2 4 + \log_2 x = 2 + z,$$

$$\log_4 2x = \frac{\log_2 2x}{\log_2 4} = \frac{1}{2}(\log_2 2 + \log_2 x) = \frac{1}{2}(1 + z).$$

Относительно z получаем неравенство $\frac{1}{2+z} \geq \frac{2}{1+z}$, или $\frac{2}{1+z} - \frac{1}{2+z} \leq 0$, $\frac{4+2z-1-z}{(1+z)(2+z)} \leq 0$, $\frac{z+3}{(z+1)(z+2)} \leq 0$.

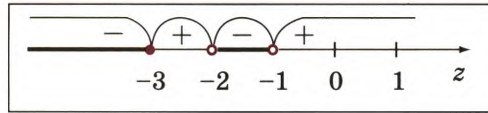


Рис. 4

Методом интервалов (рис. 4) находим решения этого неравенства: $z \leq -3$, $-2 < z < -1$. Подставляя $z = \log_2 x$, получаем логарифмические неравенства.

I. $\log_2 x \leq -3$, $\log_2 x \leq \log_2 \frac{1}{8}$, откуда с учётом области определения $0 < x \leq \frac{1}{8}$.

II. $-2 < \log_2 x < -1$, $\log_2 \frac{1}{4} < \log_2 x < \log_2 \frac{1}{2}$, откуда $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$, причём все такие x входят в область определения.

Ответ: $\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right)$.

Пример 8. Решить неравенство $\frac{9-2 \cdot 7^{x+1}}{2 \cdot 7^{2x}-7^{x+1}+3} \leq 4$.

Обозначим 7^x через z . Так как $7^{x+1} = 7^x \cdot 7 = 7z$, $7^{2x} = (7^x)^2 = z^2$, относительно z получаем неравенство $\frac{9-14z}{2z^2-7z+3} \leq 4$, или $4 - \frac{9-14z}{2z^2-7z+3} \geq 0$, $\frac{8z^2-28z+12-9+14z}{2z^2-7z+3} \geq 0$, $\frac{8z^2-14z+3}{2z^2-7z+3} \geq 0$.

Решим вспомогательные уравнения:

$$8z^2 - 14z + 3 = 0,$$

$$z_1 = \frac{7 + \sqrt{49 - 8 \cdot 3}}{8} = \frac{7+5}{8} = \frac{3}{2}, \quad z_2 = \frac{7-5}{8} = \frac{1}{4};$$

$$2z^2 - 7z + 3 = 0,$$

$$z_3 = \frac{7 - \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2}, \quad z_4 = \frac{7+5}{4} = 3.$$

После этого неравенство можно представить в виде

$$\frac{8\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z - \frac{3}{2}\right)}{2\left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 3)} \geq 0.$$

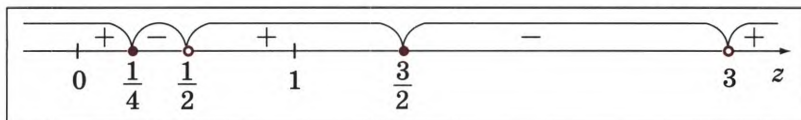


Рис. 5

Методом интервалов (рис. 5) находим решения этого неравенства:

$$z > 3, \quad \frac{1}{2} < z \leq \frac{3}{2}, \quad z \leq \frac{1}{4}.$$

Подставляя $z = 7^x$, получаем показательные неравенства.

I. $7^x \leq \frac{1}{4}$, откуда $x \leq \log_7 \frac{1}{4}$.

II. $\frac{1}{2} < 7^x \leq \frac{3}{2}$, откуда $\log_7 \frac{1}{2} < x \leq \log_7 \frac{3}{2}$.

III. $7^x > 3$, откуда $x > \log_7 3$.

Ответ: $\left(-\infty; \log_7 \frac{1}{4}\right] \cup \left(\log_7 \frac{1}{2}; \log_7 \frac{3}{2}\right] \cup (\log_7 3; \infty)$.

Вопрос. Какие решения имеет неравенство $(\sqrt{2}-1)^x \geq \sqrt{2}+1$?

2.4. Решение неравенств приведением к неравенству между логарифмами с одним основанием. Один из способов решения нестрогих логарифмических неравенств связан с приведением неравенства к виду $\log_{h(x)} f(x) \geq \log_{h(x)} g(x)$.

Далее следует рассмотреть два случая:

а) при $h(x) > 1$ получается неравенство $f(x) \geq g(x)$;

б) при $0 < h(x) < 1$ получается неравенство $f(x) \leq g(x)$. Учитывая в каждом из случаев области определения частей неравенства, приходим к ответу.

Пример 9. Решить неравенство $\log_x 2 \leq 1$.

Левая часть неравенства определена при $x > 0$ и $x \neq 1$.

В области определения неравенство можно записать в виде $\log_x 2 \leq \log_x x$. Далее рассмотрим два случая.

I. Пусть $x > 1$. Тогда неравенство $\log_x 2 \leq \log_x x$ равносильно неравенству $2 \leq x$. Все такие x удовлетворяют условию $x > 1$ и входят в область определения исходного неравенства, а поэтому являются его решениями.

II. Пусть $0 < x < 1$. Тогда из неравенства $\log_x 2 \leq \log_x x$ следует неравенство $2 \geq x$. Выбирая x , удовлетворяющие условиям $0 < x < 1$ и входящие в область определения, получаем $0 < x < 1$.

Рассмотрев два случая, объединяем найденные множества решений.

Ответ: $(0; 1) \cup [2; \infty)$.

Для решения логарифмического неравенства вида $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ также следует рассмотреть два случая:

а) при $h(x) > 1$ получается неравенство $f(x) > g(x)$;

б) при $0 < h(x) < 1$ получается неравенство $f(x) < g(x)$.

Пример 10. Решить неравенство $\log_{x^2-1} (3x-1) < \log_{x^2-1} x^2$.

Область определения частей неравенства задаётся условиями: $x^2 - 1 > 0$, $x^2 - 1 \neq 1$, $3x - 1 > 0$, $x^2 > 0$. Решая каждое из этих неравенств и выбирая x , удовлетворяющие всем условиям, получаем множество $(1; \sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}; \infty)$.

Далее рассмотрим два случая.

I. Пусть $x^2 - 1 > 1$, или, с учётом области определения, $x > \sqrt{2}$. Тогда из начального неравенства следует неравенство $3x - 1 < x^2$, или $x^2 - 3x + 1 > 0$.

Решая это квадратное неравенство, получим $x < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, или $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

Выбирая x , удовлетворяющие условию $x > \sqrt{2}$, находим $x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

II. Пусть $0 < x^2 - 1 < 1$ или, с учётом области определения, $1 < x < \sqrt{2}$. Тогда из начального неравенства следует неравенство $3x - 1 > x^2$, или $x^2 - 3x + 1 < 0$.

Решения этого неравенства $\frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Выбирая x , удовлетворяющие условиям $1 < x < \sqrt{2}$, находим $1 < x < \sqrt{2}$.

Рассмотрев два случая, объединяем найденные множества решений.

Ответ: $(1; \sqrt{2}) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$.

Вопрос. Какова область определения неравенства $\log_{x+3} x^2 < 1$?

2.5. Сокращённый способ решения неравенства вида $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$.** В предыдущем пункте мы рассмотрели один из способов решения неравенств вида

$$\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x).$$

В данном пункте разберём ещё один способ решения.

Для этого проанализируем, к чему приводит перебор случаев $h(x) > 1$ и $0 < h(x) < 1$.

В первом случае, когда $h(x) > 1$, мы заменяем исходное неравенство на неравенство $f(x) > g(x)$ и находим x , удовлетворяющие одновременно двум неравенствам $h(x) > 1$ и $f(x) > g(x)$. Эти два неравенства можно заменить на неравенства $h(x) - 1 > 0$ и $f(x) - g(x) > 0$. Все x , одновременно удовлетворяющие этим неравенствам, являются решениями неравенства

$$(h(x) - 1) \cdot (f(x) - g(x)) > 0.$$

Во втором случае, когда $0 < h(x) < 1$, мы заменяем исходное неравенство на неравенство $f(x) < g(x)$ и находим x , удовлетворяющие двум неравенствам $h(x) - 1 < 0$, $f(x) - g(x) < 0$. Все x , удовлетворяющие этим неравенствам, также являются решениями неравенства

$$(h(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0.$$

В результате приходим к тому, что все решения исходного неравенства удовлетворяют одному неравенству

$$(h(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0.$$

С другой стороны, если число x является решением последнего неравенства и входит в область определения исходного неравенства, то либо $h(x_0) - 1 > 0$ и $f(x_0) - g(x_0) > 0$, либо $h(x_0) - 1 < 0$ и $f(x_0) - g(x_0) < 0$. Как в первом, так и во втором случае число x_0 является решением исходного неравенства. Таким образом,

в области определения исходного неравенства неравенство

$$\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$$

равносильно неравенству $(h(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0$.

Пример 11. Решить неравенство $\log_{x^2 + \frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{2} \right) > 1$.

Запишем неравенство в виде

$$\log_{x^2 + \frac{1}{4}} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{2} \right) > \log_{x^2 + \frac{1}{4}} \left(x^2 + \frac{1}{4} \right).$$

На основании установленного в этом пункте свойства получаем, что данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{4} > 0, \\ x^2 + \frac{1}{4} \neq 1, \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{2} > 0, \\ \left(x^2 + \frac{1}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{2} - x^2 - \frac{1}{4}\right) > 0. \end{cases}$$

Первое из неравенств системы выполняется при всех x , второе неравенство выполняется при всех x , являющихся решениями четвёртого неравенства системы, третье неравенство системы равносильно условию $x \neq -1$. С учётом этого условия будем решать неравенство

$$\left(x^2 - \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) > 0,$$

или

$$\left(x^2 - \frac{3}{4}\right)\left(x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) < 0,$$

$$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(x-1)\left(x + \frac{1}{2}\right) < 0.$$

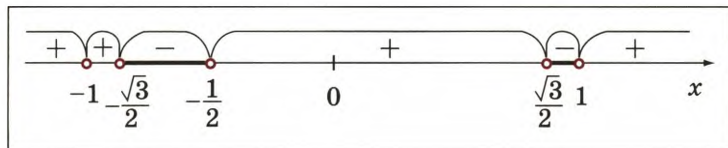


Рис. 6

Методом интервалов (рис. 6) находим решения этого неравенства.

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right).$

Вопрос. Какие решения имеет неравенство $\log_{x^2 + \frac{1}{4}}\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{2}\right) \leq 1$?

2.6.* Решение неравенств приведением к неравенству степеней с одним основанием. Один из способов решения неравенств, содержащих неизвестное в основаниях и показателях степеней, связан с приведением неравенства к виду

$$h(x)^{f(x)} \geq h(x)^{g(x)}$$

или к виду

$$h(x)^{f(x)} > h(x)^{g(x)}.$$

Получив такое представление, можно поочередно рассмотреть случаи:

$$h(x) > 1; h(x) = 1; 0 < h(x) < 1.$$

Пример 12. Решить неравенство $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{3x^2 - 10x + 2} \geq \frac{2}{2x^2 + 1}$.

Область определения неравенства задаётся условием $x^2 + \frac{1}{2} > 0$, которое выполняется при всех x .

Заметим, что $\frac{2}{2x^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}} = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{-1}$. Поэтому неравенство можно

представить в виде $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{3x^2 - 10x + 2} \geq \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{-1}$.

Далее рассмотрим три случая.

I. Пусть $x^2 + \frac{1}{2} = 1$, или $x^2 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. При каждом из этих значений x левая и правая часть неравенства равна 1, а поэтому неравенство выполняется. Следовательно, найденные значения — решения исходного неравенства.

II. Пусть $x^2 + \frac{1}{2} > 1$, или $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty\right)$. В этом случае основание $x^2 + \frac{1}{2}$ показательной функции больше 1, а поэтому из данного неравенства следует, что $3x^2 - 10x + 2 \geq -1$, или $3x^2 - 10x + 3 \geq 0$. Решая это квадратное неравенство, получаем $x \leq \frac{1}{2}$, или $x \geq 3$. Выбирая x , удовлетворяющие условию $x^2 + \frac{1}{2} > 1$, находим ещё часть решений исходного неравенства: $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup [3; \infty)$.

III. Пусть $x^2 + \frac{1}{2} < 1$, или $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. В этом случае основание $x^2 + \frac{1}{2}$ показательной функции меньше 1, а поэтому из данного неравенства следует неравенство $3x^2 - 10x + 2 \leq -1$, или $3x^2 - 10x + 3 \leq 0$. Его решения

$\frac{1}{3} \leq x \leq 3$. Выбирая x из промежутка $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, находим ещё часть решений исходного неравенства: $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Рассмотрев все три случая, объединяем найденные множества решений.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup [3; \infty)$.

Вопрос. Как проверить, что $x = 0$ не является решением неравенства, рассмотренного в примере?

Контрольные вопросы и задания ■

1. При каких значениях основания a функция $y = a^x$ монотонно возрастает, а при каких — монотонно убывает?

2. При каких значениях основания a функция $y = \log_a x$ монотонно возрастает, а при каких — монотонно убывает?

3. В каком случае неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$?

4. В каком случае неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$?

5. В каком случае неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенствам $f(x) > g(x) > 0$?

6. В каком случае неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенствам $0 < f(x) < g(x)$?

7.** В чём состоит сокращённый способ решения неравенства вида $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$?

8.** В чём состоит один из способов решения неравенств, содержащих неизвестное в основаниях и показателях степеней?

Задачи и упражнения ■

1. Решите неравенство:

а) $2^x > 4$; б) $3^x < \frac{1}{3}$; в) $4^x \leq 2$; г) $5^{2x} \geq 125$; д) $2^x \geq 1$.

2. Решите неравенство:

а) $4^x > 64$; б) $2^{x^2+x-\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2}$; в) $7^{x^2-x-2} < 1$; г) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x \geq \frac{27}{64}$.

3. Решите неравенство:

а) $5^x - 5^{3-x} \leq 20$; б) $\sqrt{8^{x+1}} \geq \sqrt{4^{2-x}}$; в) $25^{\sqrt{x-2}} + 16 \leq 10 \cdot 5^{\sqrt{x-2}}$.

4. Решите неравенство:

а) $\log_3 x < 2$; б) $\log_{\frac{1}{3}} x \leq 1$; в)* $\log_x 18 > \log_x 13$.

5. Решите неравенство:

а) $3^{x-2} > \frac{125}{5^{2x-1}}$; б) $\frac{1}{3^x+5} \leq \frac{1}{3^{x+1}-1}$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2x} < 27$;
г) $\log_5(x-4) > 2$; д) $\log_{\frac{1}{7}}(1-3x) > -1$.

6.* Решите неравенство:

а) $(2^{x+1} - 3^{x+1})\sqrt{2^{2x} - 2^{x+3} \cdot 3^x + 11 \cdot 3^{2x}} \geq 0$;
б) $(5^x - 2^{x+1})\sqrt{5^{2x} - 5^{x+1} \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{2x+2}} \geq 0$;
в) $(2^{x+1} - 5^{x+1})\sqrt{2^{2x} - 2^{x+3} \cdot 5^x + 14 \cdot 5^{2x}} \geq 0$;
г) $(3^x - 2^x)\sqrt{3^{2x} - 3^{x+1} \cdot 2^{x+1} + 3 \cdot 2^{2x+1}} \geq 0$.

7.* Решите неравенство:

а) $\log_{x+1} \frac{3x}{5x-8} > 1$; б) $\log_x \frac{4x-10}{3x-3} < -1$;
в) $\log_{x-1} \frac{3x-6}{2x-6} > 1$; г) $\log_x \frac{3x-7}{3x-3} < -1$.

8.** Решите неравенство:

а) $\log_{\sqrt{3}-1}(x+20)^2 \leq (\log_{\sqrt{3}-1}(2-\sqrt{3})) \cdot \log_{(2-\sqrt{3})}((x+20)(x^2-2x-8))$;
б) $\log_{2-\sqrt{3}}((x-11)(x^2-4x-5)) \geq (\log_{2-\sqrt{3}}(\sqrt{2}-1)) \cdot \log_{\sqrt{2}-1}(x-11)^2$.

9.* Решите неравенство:

а) $\frac{1}{\log_2(x^2-x+1)} + 1 \geq \frac{\log_2(x+3)}{\log_2(x^2-x+1)}$;
б) $\frac{1}{\log_3\left(x^2-\frac{2}{3}\right)} + 1 \geq \frac{\log_3 x}{\log_3\left(x^2-\frac{2}{3}\right)}$;
в) $\frac{1}{\log_2(x-1)} + 1 \leq \frac{\log_2(x^2-x+1)}{\log_2(x-1)}$;
г) $\frac{1}{\log_3(x+3)} + 1 \leq \frac{\log_3(x^2-4x+5)}{\log_3(x+3)}$.

10. Решите неравенство:

$$a) \log_2(4x^4 + 3x^2 + 6) + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 1) \geq \log_2(3x^2 + 6);$$

$$б) \log_3(2x^4 + 3x^2 + 8) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2 + 2) \geq \log_3(x^2 + 4);$$

$$в) \log_5(3x^4 + x^2 + 6) + \log_{\frac{1}{5}}(2x^2 + 6) \geq \log_5(x^2 + 1).$$

11.* Решите неравенство:

$$a) \log_2\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \log_{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{x}{4}\right) \geq 1; \quad б) \log_{\frac{1}{3}}\left(2 + \frac{x}{3}\right) + \log_3\left(3 - \frac{2}{x}\right) \leq 1.$$

12.** Решите неравенство:

$$a) \left(x^2 + \frac{2}{3}\right)^{x^2 - 2x - \frac{1}{4}} > \frac{3}{3x^2 + 2}; \quad б) (x^2 + x + 1)^{x^2 - 2x - 2} > \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

13.* Решите неравенство:

$$a) \frac{x-1}{(x+1)\log_3\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)} \geq 0; \quad б) \frac{x-3}{(x+1)\log_5\left(x^2 - 5x + \frac{13}{2}\right)} \geq 0.$$

14.* Решите неравенство:

$$a) \frac{9 - 5^{x+2}}{3 \cdot 5^{2x} - 2 \cdot 5^{x+1} + 3} \leq 4; \quad б) \frac{11 - 5 \cdot 2^{x+1}}{2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 5} \leq 3;$$

$$в) \frac{13 - 2 \cdot 3^{x+1}}{2 \cdot 3^{2x} - 3^{x+2} + 9} \leq 2.$$

15.* Решите неравенство:

$$a) \log_{x-2}(9x - 16 - x^2) > 2; \quad б) \log_{x^2+x+1}\left(2x^2 - \frac{x}{2}\right) < 1;$$

$$в) \log_{x+1}(3x^2 - x - 1) < 2.$$

16.* Решите неравенство:

$$a) \log_{3\sqrt{2}}(x^2 - 6x + 4) + \log_{\frac{1}{3\sqrt{2}}}\left(5 - \frac{9x}{2} - \frac{x^2}{2}\right) \geq 0;$$

$$б) \log_{2\sqrt{6}}(x^2 + 2x - 5) + \log_{\frac{1}{2\sqrt{6}}}(2x^2 - 6x + 3) \leq 0;$$

$$в) \log_{5\sqrt{2}}(x^2 - 4x + 1) + \log_{\frac{1}{5\sqrt{2}}}(2 + 5x - x^2) \leq 0.$$

17.** Решите неравенство:

$$a) |x-1|^{2\sqrt{x+2}} < |x-1|^{x+1}; \quad б) |x+1|^{2\sqrt{x+3}} < |x+1|^{1-x}.$$

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какое из множеств является множеством всех решений неравенства $0,5^{x^2-x-2} < 1$?

- 1) $(-1; 2)$ 2) $(-\infty; 0) \cup (2; \infty)$ 3) $(-\infty; -1) \cup (2; \infty)$ 4) $(0; 2)$

1.2. Какое из указанных множеств является множеством всех решений неравенства $\log_2 x^2 \geq 1$?

- 1) $[\sqrt{2}; \infty)$ 2) $(0; \sqrt{2}]$
3) $[-\sqrt{2}; 0) \cup (0; \sqrt{2}]$ 4) $(-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; \infty)$

1.3.* Какое из указанных множеств является множеством всех решений неравенства $\log_x 3 \leq 2$?

- 1) $[\sqrt{3}; \infty)$ 2) $(0; 1) \cup [\sqrt{3}; \infty)$ 3) $(1; \sqrt{3}]$ 4) $(0; 1) \cup (1; \sqrt{3}]$

1.4. Какое из указанных множеств является множеством всех решений неравенства $\log_{\frac{1}{4}}(1-3x) \geq -1$?

- 1) $\left(-1; \frac{1}{3}\right)$ 2) $\left[-1; \frac{1}{3}\right)$ 3) $\left(-3; \frac{1}{2}\right)$ 4) $\left[-3; \frac{1}{2}\right)$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие числа из указанных удовлетворяют неравенству $\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x} \geq 3$?

- 1) $2 - \sqrt{5}$ 2) $2 + \sqrt{5}$ 3) 3 4) 4

2.2.* Каким из перечисленных неравенств равносильно неравенство вида $\log_x 10 \geq \log_x 100$?

- 1) $\frac{1}{\lg x} \geq \frac{2}{\lg x}$ 2) $\lg x \leq 2 \lg x$ 3) $\frac{1}{\lg x} \leq 0$ 4) $\lg x \leq 0$

2.3.** Каким из перечисленных неравенств равносильно неравенство вида $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ при условии, что $f(x) > 0$, $g(x) > 0$ и $h(x) > 0$?

- 1) $\log_{h(x)} f(x) - \log_{h(x)} g(x) > 0$ 2) $\log_{h(x)} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$
3) $(h(x) - 1) \cdot (f(x) - g(x)) > 0$ 4) $h(x)^{f(x)} > h(x)^{g(x)}$

2.4. Какие из указанных множеств состоят из чисел, являющихся решениями неравенства $\log_{\frac{1}{3}} x \leq 1$?

- 1) $\left[0; \frac{1}{3}\right)$ 2) $[3; \infty)$ 3) $\left[\frac{1}{3}; 3\right)$ 4) $(3; \infty)$

§ 3. СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ ■

3.1. Пример уравнения, содержащего логарифмы и тригонометрические функции.** В материалах экзаменационных испытаний иногда предлагают уравнения и неравенства, в которых встречаются не только логарифмы и степени, но и другие функции. При решении таких задач приходится применять приёмы решения иррациональных, тригонометрических и других уравнений и неравенств.

Пример 1. Решить уравнение $\log_{\sin 2x}(\cos 2x - \cos 4x) = 0$.

Область определения левой части уравнения задаётся условиями: $\sin 2x > 0$, $\sin 2x \neq 1$, $\cos 2x - \cos 4x > 0$.

Так как $0 = \log_{\sin 2x} 1$, уравнение можно записать в виде

$$\log_{\sin 2x}(\cos 2x - \cos 4x) = \log_{\sin 2x} 1.$$

Поэтому в области определения оно равносильно уравнению $\cos 2x - \cos 4x = 1$. Решим последнее уравнение:

$$\begin{aligned}\cos 2x &= 1 + \cos 4x, \quad \cos 2x = 2 \cos^2 2x, \\ 2 \cos^2 2x - \cos 2x &= 0, \quad 2 \cos 2x \left(\cos 2x - \frac{1}{2} \right) = 0.\end{aligned}$$

Получаем два случая.

I. $\cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Выберем из последних значений те, которые входят в область определения. Если k чётно, то есть $k = 2m$ ($m \in \mathbb{Z}$), то $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi m\right) = 1$. Следовательно, значения x , при которых $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$, не входят в область определения.

Если k нечётно, то есть $k = 2m + 1$ ($m \in \mathbb{Z}$), то $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi m\right) = -1$.

Следовательно, значения x , при которых $2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m + \pi$, также не входят в область определения.

II. $\cos 2x = \frac{1}{2}$, $2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Выберем из этих значений те, которые входят в область определения. Если $2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, то $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, значения $x = \frac{\pi}{6} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$, являются решениями заданного уравнения.

Если $2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, то $\sin 2x = \sin\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$. Отсюда следует, что значения x , при которых $2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, не входят в область определения.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Вопрос. Почему в этом примере для корней уравнений $\cos 2x = 0$ и $\cos 2x = \frac{1}{2}$ условие $\cos 2x - \cos 4x > 0$ проверять не обязательно?

3.2. Пример неравенства, содержащего логарифмы и тригонометрические функции.** В этом пункте разберём следующую задачу.

Пример 2. Решить неравенство

$$\log_{|\cos x|}(x^2 - 8x + 64) > \frac{2}{\log_7 |\cos x|}.$$

Область определения неравенства задаётся условиями: $|\cos x| > 0$, $|\cos x| \neq 1$, $x^2 - 8x + 64 > 0$.

Далее, так как $\frac{2}{\log_7 |\cos x|} = 2 \log_{|\cos x|} 7 = \log_{|\cos x|} 49$, неравенство можно записать в виде $\log_{|\cos x|}(x^2 - 8x + 64) > \log_{|\cos x|} 49$.

В области определения $|\cos x| < 1$. Поэтому $x^2 - 8x + 64 < 49$ или $x^2 - 8x + 15 < 0$. Решая это неравенство, получим $3 < x < 5$. После этого остаётся исключить те значения x , которые не входят в область определения.

Неравенство $x^2 - 8x + 64 > 0$ выполняется при всех x .

Уравнение $|\cos x| = 0$ имеет корни $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Из них в интервал $(3; 5)$ входит только $x = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$.

Уравнение $|\cos x| = 1$ имеет корни $x = \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Из них в интервал $(3; 5)$ входит только $x = \pi$.

Ответ: $(3; \pi) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 5\right)$.

Вопрос. Совпадают ли области определения левой и правой частей рассмотренного неравенства?

3.3.* Пример неравенства, содержащего логарифмы и радикалы. В этом пункте разберём следующую задачу.

Пример 3. Решить неравенство $\log_{x+3}(\sqrt{x+4} + 2) \leq 1$.

Область определения левой части неравенства задаётся условиями $x + 3 > 0$, $x + 3 \neq 1$, $x + 4 > 0$ и $\sqrt{x+4} + 2 > 0$. Область определения имеет вид $(-3; -2) \cup (-2; \infty)$.

Далее рассмотрим два случая.

1. Пусть $0 < x + 3 < 1$, то есть $x \in (-3; -2)$. Тогда из исходного неравенства следует неравенство $\sqrt{x+4} + 2 \geq x + 3$, или $\sqrt{x+4} \geq x + 1$. Заметим, что при

$x \in (-3; -2)$ выражение $x + 1$ отрицательно, поэтому все такие x являются решениями неравенства $\sqrt{x+4} \geq x+1$ и решениями исходного неравенства.

II. Пусть $x + 3 > 1$, то есть $x \in (-2; \infty)$. Тогда из исходного неравенства следует неравенство $\sqrt{x+4} + 2 \leq x+3$, или $\sqrt{x+4} \leq x+1$. Для решений этого неравенства должно выполняться условие $x + 1 \geq 0$, или $x \geq -1$. Тогда, возводя обе части в квадрат, получаем $x + 4 \leq x^2 + 2x + 1$, $x^2 + x - 3 \geq 0$. Решениями этого квадратного неравенства являются $x \leq \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ и $x \geq \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Выбирая из них $x \geq -1$, получаем $x \geq \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ — ещё часть решений исходного неравенства.

Ответ: $(-3; -2) \cup \left[\frac{-1+\sqrt{13}}{2}; \infty \right)$.

Вопрос. Какие решения имеет неравенство

$$\log_{x+3}(\sqrt{x+4} + 2) \leq 0?$$

3.4. Пример уравнения сложной структуры.** В этом пункте разберём следующую задачу.

Пример 4. Решить уравнение $\lg(\arcsin(\cos 10^x)) = x$.

Уравнение определено при условии $\arcsin(\cos 10^x) > 0$. Далее, так как $x = \lg 10^x$, уравнение равносильно уравнению $\arcsin(\cos 10^x) = 10^x$.

Отсюда следует, что $\cos 10^x = \sin 10^x$, однако при этом могут появиться посторонние корни. Условием для проверки корней являются неравенства $-\frac{\pi}{2} \leq 10^x \leq \frac{\pi}{2}$, соответствующие тем значениям, которые может принимать арксинус.

Корни уравнения $\cos 10^x = 0$ не могут удовлетворять уравнению $\cos 10^x = \sin 10^x$, так как синус и косинус не обращаются одновременно в 0. Поэтому последнее уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} 10^x = 1$.

Отсюда $10^x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Учитывая, что $10^x > 0$ и $10^x \leq \frac{\pi}{2}$, приходим

к единственному возможному значению $k = 0$. Тогда $10^x = \frac{\pi}{4}$, $x = \lg \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\lg \frac{\pi}{4}$.

Вопрос. По каким причинам уравнения $\arcsin f(x) = g(x)$ и $f(x) = \sin g(x)$ могут не быть равносильными?

3.5. Пример уравнения с параметром.** Разберём задачу с параметром.

Пример 5. При каждом значении параметра a решить уравнение $a^{\log_{(a^2)} x} + x^{\log_{(x^2)} a} = a$.

Уравнение определено при значениях параметра $a > 0$ и $a \neq 1$. Отсюда следует, что при $a \leq 0$ и при $a = 1$ данное уравнение решений не имеет.

Пусть $a > 0$ и $a \neq 1$. Область определения уравнения $x > 0$, $x \neq 1$. Преобразуем данное уравнение. Так как $\log_{a^2} x = \frac{\log_a x}{\log_a a^2} = \frac{1}{2} \log_a x$, то $a^{\log_{(a^2)} x} = (a^{\log_a x})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$. Аналогично приходим к равенству $x^{\log_{(x^2)} a} = \sqrt{a}$. Следовательно, в области определения данное уравнение равносильно уравнению $\sqrt{x} + \sqrt{a} = a$, или $\sqrt{x} = a - \sqrt{a}$. Последнее уравнение имеет корень при условии $a - \sqrt{a} \geq 0$, и корнем является $x = (a - \sqrt{a})^2$. Решая неравенство $a - \sqrt{a} \geq 0$, получаем $a = 0$ и $a \geq 1$. Но рассматриваются только значения $a > 0$ и $a \neq 1$, поэтому $a > 1$.

Найденное при $a > 1$ значение $x = (a - \sqrt{a})^2$ является корнем исходного уравнения при условии, что $x > 0$ и $x \neq 1$. При $a > 1$ условие $x > 0$ выполняется автоматически. При выполнении условия $a > 1$ уравнение $(a - \sqrt{a})^2 = 1$ равносильно уравнению $a - \sqrt{a} = 1$. Отсюда $\sqrt{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $a = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, так как $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$.

Ответ: при $a > 1$ и $a \neq \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ уравнение имеет единственный корень $x = (a - \sqrt{a})^2$; при оставшихся значениях a уравнение корней не имеет.

Вопрос. При каких значениях параметра a уравнение $a^{\log_{a^2} x} = a$ не имеет корней?

■ Контрольные вопросы и задания

1.* Какими условиями задаётся область определения выражения $\sqrt{f(x)}$?

2.* Какими условиями задаётся область определения выражения $\arcsin f(x)$?

3.* Какими условиями задаётся область определения выражения $\log_{f(x)} g(x)$?

4.* Какими условиями задаётся область определения выражения $f(x)^{g(x)}$?

Задачи и упражнения ■

1.* Решите неравенство:

а) $\log_{|\sin x|}(x^2 - 14x + 73) > \frac{2}{\log_5 |\sin x|}$;

б) $\log_{|\sin 2x|}(2x^2 - 7x + 11) > \frac{4}{\log_2 |\sin 2x|}$;

в) $\log_{|\cos 2x|}(2x^2 - 5x + 29) > \frac{3}{\log_3 |\cos 2x|}$.

2.** Решите неравенство:

а) $\log_{x+2}\left(\sqrt{x+3} + \frac{3}{2}\right) \leq 1$; б) $\log_{5-x}(\sqrt{6-x} + 2) \leq 1$;

в) $\log_{2-x}\left(\sqrt{\frac{5}{2}-x} + \frac{3}{2}\right) \leq 1$.

3.* Решите уравнение:

а) $3 \cdot 2^{\log_x(3x-2)} + 2 \cdot 3^{\log_x(3x-2)} - 5 \cdot 6^{\log_x \sqrt{3x-2}} = 0$;

б) $2 \cdot 7^{\log_{2x}(x^2-1)^2} - 9 \cdot 14^{\log_{2x}(x^2-1)} + 7 \cdot 4^{\log_{2x}(x^2-1)} = 0$.

4.* Решите уравнение:

а) $\log_x(\cos 2x - \cos 4x) = 0$; б) $\log_{\sin x}(1 + \cos 2x + \cos 4x) = 0$;

в) $\log_x(3 + 2\cos 2x + 2\cos 4x) = 0$.

5.** Решите неравенство:

а) $\frac{1}{|\log_4 4x^2| - 1} \geq \frac{1}{|\log_2 4x| - 2}$; б) $\frac{1}{|\log_4 2x| - 1} > \frac{1}{|\log_2 \sqrt{x}| - 1}$.

6.** Числа $\log_7(6 - 2^x)$, $\log_{49}(3 \cdot 2^{x+2} - 4^x - 22)$ и $\log_7(3 - 2^x)$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найдите x .

7.* Решите уравнение:

а) $\log_{\cos x} \frac{9-14\cos x}{8} = 2$; б) $\log_{\sin x} \frac{5-6\sin x}{8} = 2$;

в) $\log_{\cos x} \frac{7-10\cos x}{8} = 2$.

8.** Определите, при каких значениях параметра a среди решений неравенства

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{2|x-150|}{x-146} - \log_2(151-x) + \log_{\frac{1}{2}} \frac{|x-148|(x-146)}{(151-x)} < a$$

содержится единственное целое число.

9.** При каждом значении a укажите, для каких x выполняется неравенство:

а) $\log_8 x(x-4) + \log_8 \frac{x-2}{x-4} \geq a$;

б) $\log_2 (x-1)(x-3) + \log_2 \frac{x-2}{x-3} \leq a$;

в) $\log_2 (x+1)(x-3) + \log_2 \frac{x-1}{x+1} \geq a$.

10.** Найдите, при каких значениях параметра a все решения неравенства $\log_x (5x^2 - 8x + 3) > 2$ являются одновременно решениями неравенства $x^2 - 2x - a^4 + 1 \geq 0$.

11.** При каждом значении параметра a решите уравнение:

а) $\log_{x+1} (x^2 - ax) = 1$; б) $\log_{x-1} (x + a) = \frac{1}{2}$;

в) $\log_{x+a} (x - 2) = 2$; г) $\log_{x-2} (x^2 - ax + 3a - 9) = 1$.

Укажите те значения параметра a , при которых уравнение имеет единственное решение.

12.** Найдите значения параметра a , при которых уравнение имеет единственное решение:

а) $\log_2 (\sqrt{a+2} - x) + \log_{\frac{1}{2}} (x - a - 1) = \log_4 9$;

б) $\log_3 (\sqrt{a+4} - x) + \log_{\frac{1}{3}} (x - a - 1) = \log_9 4$;

в) $\log_5 (\sqrt{a+3} - x) + \log_{\frac{1}{5}} (x - a - 2) = \log_{\sqrt{5}} 2$.

13.* Решите неравенство:

а) $\log_{\sqrt{2}+1} (2x+7+\sqrt{x+4}) + \log_{\sqrt{2}-1} (x+6+2\sqrt{x+4}) \leq 0$;

б) $\log_{2-\sqrt{3}} (3x+5+\sqrt{x+3}) + \log_{2+\sqrt{3}} (2x+3+2\sqrt{x+3}) \geq 0$;

в) $\log_{3+\sqrt{8}} (3x+2-2\sqrt{x+2}) + \log_{3-\sqrt{8}} (2x+1-\sqrt{x+2}) \leq 0$.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Какое число является корнем уравнения $\log_{3-x^2} \sin x = 0$?

- 1) 0 2) $\frac{\pi}{2}$ 3) $\frac{3\pi}{2}$ 4) π

1.2. Каким условием задаётся область определения выражения $\arccos f(x)$?

1) $-1 \leq f(x) \leq 1$ 2) $0 \leq f(x) \leq \pi$

3) $-1 < f(x) < 1$ 4) $0 < f(x) < \pi$

1.3. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $x \neq 1$. Какому из указанных выражений равно выражение $a^{\log_{(a^3)}(x^2)}$?

1) $\sqrt{a^3}$

2) $\sqrt{x^3}$

3) $\sqrt[3]{a^2}$

4) $\sqrt[3]{x^2}$

1.4. Каким набором условий задаётся область определения выражения $\frac{1}{\log_{f(x)} g(x)}$?

1) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$

2) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $f(x) \neq 1$

3) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$

4) $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $f(x) \neq 1$, $g(x) \neq 1$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Каким из указанных выражений равно значение выражения $4^{\log_5 6}$?

1) $6^{\log_5 4}$

2) $(2^{\log_5 6})^2$

3) $(6^{\log_5 2})^2$

4) $5^{\log_4 6}$

2.2. При каких значениях x из указанных выполняется равенство $\arccos(\cos x) = x$?

1) $x = -\frac{\pi}{3}$

2) $x = \frac{\pi}{3}$

3) $x = \frac{2\pi}{3}$

4) $x = \frac{4\pi}{3}$

2.3.* Какие множества являются подмножествами множества всех решений неравенства $\log_8((x-4)x) + \log_8 \frac{x-2}{x-4} \geq 1$?

1) $(-\infty; -2]$

2) $[-2; 4]$

3) $[4; \infty)$

4) $(4; \infty)$

2.4.** Какие из перечисленных систем равносильны уравнению $\log_{\sin 2x}(\cos 2x - \cos 4x) = 0$?

$$1) \begin{cases} \cos 2x - \cos 4x = 1, \\ \sin 2x > 0, \\ \sin 2x < 1. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \cos 2x - \cos 4x = 1, \\ \sin 2x \cdot (1 - \sin 2x) > 0. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \cos 2x - \cos 4x = 1, \\ \sin 2x > 0, \\ \cos 2x \neq 0. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \cos 2x - \cos 4x = 1, \\ \sin 2x > 0. \end{cases}$$

■ Мини-исследования к главе

Мини-исследование 37

В пункте 2.5 рассмотрен сокращённый способ решения неравенства $\log_{h(x)} f(x) > \log_{h(x)} g(x)$ и показано, что в области определения исходного неравенства оно равносильно неравенству $(h(x) - 1)(f(x) - g(x)) > 0$.

Найдите сокращённый способ решения нестрогого неравенства вида $\log_{h(x)} f(x) \geq \log_{h(x)} g(x)$.

Глава 15

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

В этой главе вводятся комплексные числа, определяются арифметические операции над ними, рассматривается изображение комплексных чисел точками координатной плоскости.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ И АРИФМЕТИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ НАД НИМИ

1.1. Множество комплексных чисел. Изучая квадратные уравнения, мы несколько раз отмечали, что действительных квадратных корней из отрицательного числа не существует. Другими словами, уравнение $x^2 = b$ при $b < 0$ не имеет решений среди действительных чисел. Однако если рассматривать более широкое множество — множество комплексных чисел, то указанное уравнение будет иметь решение.

Множество комплексных чисел получается расширением множества действительных чисел.

Сначала к действительным числам добавим новое число, которое называют *мнимой единицей* и обозначают буквой i .

Определим произведение числа i на число i так, чтобы выполнялось равенство $i \cdot i = -1$.

Сокращённо это равенство можно записать в виде $i^2 = -1$.

Затем добавим числа вида $2i$, $(-5)i$, $\sqrt{2}i$ и так далее, то есть всевозможные произведения действительных чисел на мнимую единицу, которые назовём *мнимыми* числами. Будем по определению считать, что мнимое число bi , где b — действительное число, равно произведению действительного числа b на мнимую единицу, то есть $bi = b \cdot i$.

При этом также по определению полагаем, что $0 \cdot i = 0$, $1 \cdot i = i$.

Наконец, определим числа вида $1 + 3i$, $(-2) + 7i$, $5 + (-4)i$, $0 + 2i$, $(-1) + 0i$, $0 + 0i$ и так далее, которые назовём *комплексными числами*. Будем по определению считать, что комплексное число $a + bi$, где a и b действительные числа, равно сумме действительного числа a и мнимого числа bi .

Для удобства при записи комплексного числа $a + bi$ с отрицательным a или отрицательным b скобки опускают. Например, вместо $(-5) + (-6)i$ можно написать $-5 - 6i$.

При записи комплексного числа z в виде $a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, число a называют *действительной частью* z , число b называют *мнимой частью* z .

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой \mathbb{C} .

Комплексное число z вида $a + 0i$, где $a \in R$, отождествляют с действительным числом a .

Два комплексных числа $a_1 + b_1i$ и $a_2 + b_2i$ равны тогда и только тогда, когда одновременно $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Вопрос. Какое действительное число равно произведению мнимой единицы и некоторого действительного числа?

1.2. Сумма комплексных чисел. Арифметические операции над комплексными числами определяются так, чтобы сохранялись правила, которым подчиняются основные арифметические операции над действительными числами.

Сумму комплексных чисел определим так, чтобы можно было выполнять следующие тождественные преобразования:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) &= (a_1 + a_2) + (b_1i + b_2i) = \\ &= (a_1 + a_2) + (b_1 \cdot i + b_2 \cdot i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i.\end{aligned}$$

Окончательный результат принимают за определение суммы комплексных чисел.

Суммой комплексных чисел $a_1 + b_1i$ и $a_2 + b_2i$ называется число $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$.

Вопрос. Чему равна сумма чисел $2 - 3i$ и $3i - 2$?

1.3. Произведение комплексных чисел. Произведение комплексных чисел определим так, чтобы можно было выполнять следующие тождественные преобразования:

$$\begin{aligned}(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i) &= a_1 \cdot (a_2 + b_2i) + b_1i \cdot (a_2 + b_2i) = \\ &= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot (b_2i) + (b_1i) \cdot a_2 + (b_1i) \cdot (b_2i) = \\ &= a_1 \cdot a_2 + (a_1 \cdot b_2) \cdot i + (b_1 \cdot a_2) \cdot i + (b_1 \cdot b_2) \cdot (i)^2 = \\ &= a_1 \cdot a_2 + (b_1 \cdot b_2) \cdot (-1) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) \cdot i = \\ &= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2) i.\end{aligned}$$

Окончательный результат принимают за определение произведения комплексных чисел.

Произведением комплексных чисел $a_1 + b_1i$ и $a_2 + b_2i$ называется число $(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$.

Вопрос. Чему равно произведение чисел $3 + 4i$ и $3 - 4i$?

1.4. Число 0. Во множестве C комплексных чисел число $0 = 0 + 0 \cdot i$ имеет такие же свойства, как и число 0 во множестве действительных чисел. На самом деле, пусть $z = a + bi$ — произвольное комплексное число. Тогда

$$z + 0 = (a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi = z;$$

$$z \cdot 0 = (a + bi) \cdot (0 + 0i) = (a \cdot 0 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 0)i = 0 + 0 \cdot i = 0.$$

Вопрос. Какое действительное число называется противоположным данному действительному числу?

1.5. Противоположное число. Пусть $z = a + bi$ — произвольное комплексное число.

Число $(-a) + (-b)i$, которое удобно записывать в виде $-a - bi$, называется *противоположным* числу z и обозначается $(-z)$. Числа z и $(-z)$ являются *взаимно противоположными*, так как число, противоположное числу $-a - bi$, равно $a + bi$.

Сумма двух взаимно противоположных комплексных чисел всегда равна нулю $z + (-a - bi) = (a + bi) + (-a - bi) = (a - a) + (b - b)i = 0 + 0i = 0$.

Вопрос. Как определяется разность двух действительных чисел a и b ?

1.6. Разность комплексных чисел. Пусть $z = a + bi$ и $u = c + di$.

Разностью $z - u$ комплексных чисел z и u называется корень t уравнения $z = u + t$.

Обозначим неизвестную разность t через $p + qi$. По определению выполняется равенство $a + bi = (c + di) + (p + qi) = (c + p) + (d + q)i$. Таким образом, приравнявая действительные и мнимые части, получим: $p = a - c$, $q = b - d$ и разность $z - u = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$. Поскольку число $-c - di$ противоположно числу $c + di = u$, разность $z - u$ равна $z + (-u)$.

Вопрос. Чему равна разность $(-3 + 5i) - (7 - 5i)$?

1.7. Деление во множестве \mathbb{C} . Во множестве \mathbb{C} комплексных чисел деление на ненулевое число определяется аналогично тому, как это было сделано для действительных чисел.

Частным от деления комплексного числа $z = a + bi$ на ненулевое комплексное число $u = c + di$ называется корень t уравнения $u \cdot t = z$.

Частное от деления числа z на число u обозначается $\frac{z}{u}$ или $z : u$.

Один из способов вычисления частного основан непосредственно на его определении.

Пример 1. Найти $\frac{3+2i}{4-3i}$.

Обозначим неизвестное частное t в виде $r + si$, где r, s — действительные числа. По определению, выполняется равенство:

$$(4 - 3i) \cdot (r + si) = 3 + 2i.$$

Записывая произведение чисел, стоящих в левой части, приходим к равенству $(4r + 3s) + (4s - 3r)i = 3 + 2i$.

Приравнивая действительные части и мнимые части, получаем систему

$$\begin{cases} 4r + 3s = 3, \\ 4s - 3r = 2. \end{cases}$$

Решая систему, находим: $r = \frac{6}{25}$, $s = \frac{17}{25}$. Поэтому $\frac{3+2i}{4-3i} = \frac{6}{25} + \frac{17}{25}i$.

Решение системы единственно, поэтому отношение двух комплексных чисел находится однозначно.

Вопрос. Как определить число, обратное ненулевому комплексному числу?

1.8. Комплексно-сопряжённые числа. Для комплексного числа $z = a + bi$ число $a - bi$ называют *комплексно-сопряжённым* числу z и обозначают \bar{z} . Отметим, что число, комплексно-сопряжённое числу \bar{z} , равно $a + bi$, а поэтому числа $a + bi$ и $a - bi$ *взаимно комплексно-сопряжённые*.

Вычисляя произведение $z \cdot \bar{z}$, получаем неотрицательное действительное число:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = (a^2 + b^2) + (ab - ab)i = a^2 + b^2.$$

Покажем, как полученное равенство можно использовать для вычисления частного двух комплексных чисел.

Пример 2. Найти $\frac{1+2i}{1-i}$.

$$\frac{1+2i}{1-i} = \frac{(1+2i) \cdot (1+i)}{(1-i) \cdot (1+i)} = \frac{-1+3i}{1^2+1^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i.$$

Для комплексного числа $z = a + bi$ неотрицательное действительное число $\sqrt{a^2 + b^2}$ называется *модулем* числа z и обозначается через $|z|$. Используя понятие модуля, частное двух комплексных чисел u и v можно найти по формуле

$$\frac{u}{v} = \frac{u \cdot \bar{v}}{v \cdot \bar{v}} = \frac{u \cdot \bar{v}}{|v|^2}.$$

Вопрос. Чему равно отношение $\frac{3-4i}{2+3i}$?

1.9. Свойство операций на множестве \mathbb{C} . Арифметические операции, определённые на множестве \mathbb{C} комплексных чисел, имеют такие же свойства, как и арифметические операции над действительными числами. Перечислим эти свойства, обозначая комплексные числа буквами.

1. $z + u = u + z$.

2. $(z + u) + v = z + (u + v)$.

3. Существует такое комплексное число 0, что $z + 0 = z$.

4. Для каждого z существует единственное число $(-z)$ такое, что $z + (-z) = 0$.

5. $z \cdot u = u \cdot z$.

6. $z \cdot (u \cdot v) = (z \cdot u) \cdot v$.

7. Существует такое комплексное число 1, что $z \cdot 1 = z$.

8. Для каждого $z \neq 0$ существует единственное число $\frac{1}{z}$ такое, что $z \cdot \frac{1}{z} = 1$.

9. $z \cdot (u + v) = z \cdot u + z \cdot v$.

Наличие указанных свойств означает, что многие тождества, которые раньше доказывались для действительных чисел, автоматически остаются верными и для комплексных чисел. Например,

$$z^2 + 2zu + u^2 = (z + u)^2;$$

$$z^3 - u^3 = (z - u) \cdot (z^2 + zu + u^2).$$

Вопрос. Как доказать, что $1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{z^n - 1}{z - 1}$, если $z \neq 1$?

1.10. О доказательстве свойств арифметических операций на множестве \mathbb{C} .** Определяя для комплексных чисел операции сложения и умножения, мы ориентировались на то, чтобы сохранить известные свойства этих операций. Однако перечисленные в предыдущем пункте свойства сложения и умножения комплексных чисел нуждаются в доказательстве.

Пример 3. Доказать, что $z \cdot 1 = z$.

Пусть $z = a + bi$. Тогда по определению умножения комплексных чисел

$$z \cdot 1 = (a + bi) \cdot (1 + 0i) = (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i = a + bi = z.$$

Вопрос. Как доказать свойство 9 из пункта 1.9?

Контрольные вопросы и задания ■

1. Чему равен квадрат мнимой единицы?
2. Как определяются мнимые числа?
3. Как определяются комплексные числа?
4. Что называют действительной частью комплексного числа?
5. Что называют мнимой частью комплексного числа?
6. Как обозначается множество всех комплексных чисел?
7. Как определяется сумма двух комплексных чисел?
8. Чему равна разность комплексных чисел?
9. Как определяется произведение двух комплексных чисел?
10. Чему равно частное от деления одного комплексного числа на другое ненулевое комплексное число?

11. Какое число называют сопряжённым к числу $z = a + bi$?
12. Каким свойством обладают взаимно сопряжённые комплексные числа?
13. Как определяется модуль комплексного числа?
14. Какой вид имеет формула для частного двух комплексных чисел?

■ Задачи и упражнения

1. Выполните действия:

а) $(1 + 2i)^2 - (1 - 2i)^2$; б) $(3 - 4i)^3 + (-3 - 4i)^3$;

в) $(1 + 3i)(1 + 2i)^2(1 + i)^3$; г) $(2 + i)^6 - (2 - i)^6$.

2. Выполните действия:

а) $\frac{7-2i}{3+4i}$; б) $\frac{5+i}{6+i}$; в) $\frac{5-i}{6-i}$; г) $\frac{3-4i}{4i-5}$; д) $\frac{2i-4}{i+2}$; е) $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

3. Найдите сумму $1 + i + i^2 + \dots + i^{2010}$.

4.** Докажите, что $\frac{z}{u} = \frac{z \cdot \bar{u}}{u \cdot \bar{u}}$.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Чему равняется $(2 + 50i)^2 - (2 - 50i)^2$?

- 1) $100i$ 2) $200i$ 3) $300i$ 4) $400i$

1.2. Чему равняется $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{129}$?

- 1) $1 - i$ 2) $1 + i$ 3) $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 4) $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

1.3. Чему равно число, сопряжённое к произведению $(3 + 2i)(2 - i)$?

- 1) $-8 - i$ 2) $-8 + i$ 3) $8 - i$ 4) $8 + i$

1.4. Укажите число, обратное к $1 + \sqrt{2}i$.

- 1) $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}i$ 2) $\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}i$ 3) $\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3}i$ 4) $\frac{\sqrt{2}}{3}i - \frac{1}{3}$

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из разностей будут действительными числами?

- 1) $3 - 2i - (1 + i)^2$ 2) $4 + i - (1 - i)^2$
 3) $1 - 4i - (2 + i)^2$ 4) $5 + 4i + (2 - i)^2$

2.2. Модули каких из приведённых чисел больше 11?

- 1) $-6 + 8i$ 2) $5 + 10i$ 3) $7 - 8i$ 4) $-6 - 7i$

2.3.* Известно, что $z^4 = -64$. Какие из указанных чисел могут равняться \bar{z} ?

- 1) $1 + i$ 2) $1 - i$ 3) $2 + 2i$ 4) $2 - 2i$

2.4. Для каких из указанных чисел z выполнено равенство $\left| \frac{z^2}{\bar{z}} \right| = 5$?

- 1) $z = 4 + 3i$ 2) $z = 3 - 4i$ 3) $z = 5 + 12i$ 4) $z = 2\sqrt{6} - i$

§ 2. КВАДРАТНЫЕ КОРНИ ИЗ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА ■

2.1. Определение квадратного корня. Квадратные корни из комплексного числа определяются аналогично тому, как определяются квадратные корни из действительного неотрицательного числа.

Квадратным корнем из комплексного числа w называется комплексное число z такое, что $z^2 = w$.

Например, числа i и $-i$ являются значениями квадратного корня из числа -1 , потому что $i^2 = -1$ по определению числа i , и $(-i)^2 = ((-1) \cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$.

Множество всех квадратных корней из комплексного числа w обозначим \sqrt{w} . Позже будет показано, что если $w \neq 0$, то \sqrt{w} содержит только два различных квадратных корня из числа z , которые противоположны друг другу. С учётом этого квадратный корень из числа -1 состоит из двух комплексных чисел: i и $-i$. Поэтому для квадратного корня из -1 иногда используют запись $\sqrt{-1} = \pm i$.

Вопрос. Как показать, что значением квадратного корня из числа 0 является единственное число?

2.2. Примеры на вычисление квадратных корней. Рассмотрим на примере, как можно находить значения квадратного корня из комплексного числа.

Пример 1. Найти $\sqrt{-8 + 6i}$.

Пусть комплексное число $z = a + bi$, где a, b — действительные числа, удовлетворяет равенству $z^2 = -8 + 6i$. Так как $z^2 = (a + bi)^2 = a^2 + (bi)^2 + 2abi = a^2 - b^2 + 2abi$, по определению равенства двух комплексных чисел выполняется равенство $a^2 - b^2 + 2abi = -8 + 6i$, откуда

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -8, \\ 2ab = 6. \end{cases}$$

Из последнего равенства следует, что $a \neq 0$ и $b = \frac{3}{a}$. Подставляя данное выражение для b в равенство $a^2 - b^2 = -8$, приходим к уравнению $a^2 - \frac{9}{a^2} = -8$.

Обозначим $a^2 = m$. Тогда $m - \frac{9}{m} = -8$, откуда $m^2 + 8m - 9 = 0$. Решая это квадратное уравнение, находим $m_1 = -9$, $m_2 = 1$.

При $m = -9$ для a получаем уравнение $a^2 = -9$, которое действительных корней не имеет.

При $m = 1$ для a получаем уравнение $a^2 = 1$, откуда $a_1 = 1$, $b_1 = \frac{3}{a_1} = 3$, $z_1 = 1 + 3i$; $a_2 = -1$, $b_2 = -3$, $z_2 = -1 - 3i$.

Таким образом, значениями квадратного корня из числа $w = -8 + 6i$ являются два числа $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -1 - 3i$. Кратко это можно записать в виде $\sqrt{-8+6i} = \pm(1+3i)$.

Ответ: $\pm(1+3i)$.

Вопрос. Какие значения имеет $\sqrt{-4+3i}$?

2.3. Квадратные уравнения с комплексными коэффициентами.

Возможность извлечения квадратного корня из любого комплексного числа, в том числе и из любого действительного числа, приводит к тому, что каждое квадратное уравнение с действительными или комплексными коэффициентами имеет корни.

Пример 2. Решить уравнение $x^2 + x + 3 = 0$.

Для нахождения корней сначала выделим полный квадрат в левой части:

$$x^2 + x + 3 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 - \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}.$$

В результате уравнение можно записать в виде $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{11}{4}$.

Так как $\sqrt{-\frac{11}{4}} = \pm i \frac{\sqrt{11}}{2}$, далее возможны два случая.

I. $x + \frac{1}{2} = i \frac{\sqrt{11}}{2}$, откуда $x_1 = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{11}}{2}$.

II. $x + \frac{1}{2} = -i \frac{\sqrt{11}}{2}$, откуда $x_2 = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{11}}{2}$.

Ответ: $\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{11}}{2}$; $\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{11}}{2}$.

Пример 3. Решить уравнение $(1+i)z^2 - (5+3i)z + 10 = 0$.

Сначала разделим все коэффициенты на $1+i$:

$$\frac{5+3i}{1+i} = \frac{(5+3i) \cdot (1-i)}{(1+i) \cdot (1-i)} = \frac{8-2i}{2} = 4-i,$$

$$\frac{10}{1+i} = \frac{10 \cdot (1-i)}{(1+i) \cdot (1-i)} = \frac{10-10i}{2} = 5-5i.$$

В результате приходим к уравнению $z^2 - (4-i)z + (5-5i) = 0$, имеющему те же корни, что и исходное уравнение.

Затем, как и в предыдущем примере, выделим в левой части полный квадрат:

$$z^2 - (4-i)z + (5-5i) = z^2 - 2 \cdot \frac{4-i}{2} \cdot z + \left(\frac{4-i}{2}\right)^2 + \frac{5-12i}{4} = \left(z - \frac{4-i}{2}\right)^2 + \frac{5-12i}{4}.$$

$$\text{В итоге получим уравнение } \left(z - \frac{4-i}{2}\right)^2 = \frac{-5+12i}{4}.$$

Для нахождения его корней сначала вычислим $\sqrt{\frac{-5+12i}{4}}$, как

это было показано в пункте 2.2. Пусть $(a+bi)^2 = \frac{-5+12i}{4}$. Тогда

$a^2 - b^2 + 2abi = \frac{-5+12i}{4}$, откуда $a^2 - b^2 = -\frac{5}{4}$, $2ab = \frac{12}{4} = 3$. Из послед-

него уравнения $b = \frac{3}{2a}$. Подставляя в уравнение $a^2 - b^2 = -\frac{5}{4}$, получаем

$a^2 - \frac{9}{4a^2} + \frac{5}{4} = 0$, $4a^4 + 5a^2 - 9 = 0$. Отсюда, с учётом того, что $a^2 \geq 0$, находим

$$a^2 = \frac{-5 + \sqrt{25 + 9 \cdot 16}}{8} = \frac{-5 + 13}{8} = 1. \text{ Следовательно,}$$

$$a_1 = 1, b_1 = \frac{3}{2}, z_1 = \frac{4-i}{2} + \left(1 + \frac{3}{2}i\right) = 3+i,$$

$$a_2 = -1, b_1 = -\frac{3}{2}, z_2 = \frac{4-i}{2} + \left(-1 - \frac{3}{2}i\right) = 1-2i.$$

Ответ: $3+i; 1-2i$.

Вопрос. Сколько корней во множестве комплексных чисел имеет уравнение $z^4 - 1 = 0$?

2.4. Формула корней квадратного уравнения. Преобразования, которые на конкретных примерах выполнялись в предыдущем пункте, можно проделать и в общем виде для уравнения $az^2 + bz + c = 0$, где a, b, c — комплексные числа, причём $a \neq 0$. Итогом этой работы будет формула

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

В полученной формуле под знаком корня стоит хорошо знакомое выражение $D = b^2 - 4ac$, которое является дискриминантом квадратного уравнения. Так как на множестве комплексных чисел квадратный корень из ненулевого числа принимает два значения, при $D \neq 0$ полученная формула задаёт два различных корня квадратного уравнения.

Вопрос. Пусть $a > 0$. В чём состоит разница между арифметическим квадратным корнем из числа a и квадратным корнем из числа a на множестве комплексных чисел?

■ Контрольные вопросы и задания

1. Как определяется квадратный корень из комплексного числа?
2. Покажите на примере, как находить значения квадратного корня из комплексного числа.
- 3.* Покажите на примере, как находить корни квадратного уравнения с комплексными коэффициентами.
4. Запишите формулу корней квадратного уравнения.
- 5.** Выведите формулу корней квадратного уравнения.

■ Задачи и упражнения

1. Найдите значения квадратного корня из числа:

а) -8 ; б) $-3 - 4i$; в) $5 - 12i$;

г) $15 + 8i$; д) $\frac{12-5i}{2}$; е) $\frac{3-4i}{9}$;

ё) $\frac{15i-8}{2}$; ж) $7 - 6\sqrt{2}i$; з) $2\sqrt{6}i - 1$.

2. Решите квадратное уравнение:

а) $x^2 + 2x + 5 = 0$; б) $x^2 - 6x + 10 = 0$; в) $2x^2 + 2x + 5 = 0$;

г) $x^2 + x + 1 = 0$; д) $x^2 - x + 1 = 0$; е) $x^2 + 2x + 3 = 0$.

3. Решите квадратное уравнение:

а) $z^2 + (2 - 6i)z - 12 - 6i = 0$;

б)* $(4 + 2i)z^2 + (15 - 7i)z + 8 - 16i = 0$;

в)* $(1 - i)z^2 + (7 - i)z + 8 + 6i = 0$.

4.** Найдите четыре корня уравнения:

а) $z^4 + 1 = 0$; б) $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

5.** Решите уравнение $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Из предложенных чисел выберите то, которое является одним из значений квадратного корня из $2 + \sqrt{12}i$.

- 1) $\sqrt{1} + i$ 2) $\sqrt{3} + i$ 3) $1 + \sqrt{12}i$ 4) $i - \sqrt{3}$

1.2. Из предложенных чисел выберите то, которое является одним из решений уравнения $z^2 + 2iz - 4 = 0$.

- 1) $1 - \sqrt{3}$ 2) $1 + \sqrt{3}i$ 3) $\sqrt{3} - i$ 4) $i - \sqrt{3}$

1.3. Какое из чисел является корнем уравнения $z^4 - 4iz^2 - 4 = 0$?

- 1) $1 + i$ 2) $1 + 2i$ 3) $1 - i$ 4) $2 + i$

1.4. Сколько различных корней имеет уравнение $z^4 = -i$?

- 1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из перечисленных чисел будут квадратными корнями из i ?

- 1) $1 + i$ 2) $-1 - i$ 3) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ 4) $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$

2.2. Какие из перечисленных чисел будут квадратными корнями из $3 - 4i$?

- 1) $2 - i$ 2) $1 - 2i$ 3) $-1 + 2i$ 4) $-2 + i$

2.3. Выберите верные утверждения.

- 1) комплексные числа всегда можно складывать
2) комплексные числа всегда можно вычитать
3) комплексные числа всегда можно делить
4) комплексные числа всегда можно умножать друг на друга

2.4.* Какие значения может иметь квадрат какого-нибудь из корней уравнения $z^4 = -16$?

- 1) $4i$ 2) $-4i$ 3) 4 4) -4

§ 3. ИЗОБРАЖЕНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ ТОЧКАМИ КООРДИНАТНОЙ ПЛОСКОСТИ ■

3.1. Изображение комплексных чисел на плоскости. Подобно тому, как действительные числа изображают точками числовой оси, комплексные числа изображают точками координатной плоскости.

Напомним, что комплексным числом называется выражение вида $a + bi$, где a и b — действительные числа, а символ i удовлетворяет условию $i^2 = -1$ и называется мнимой единицей.

Каждое комплексное число $a + bi$ однозначно определяется упорядоченной парой чисел $(a; b)$.

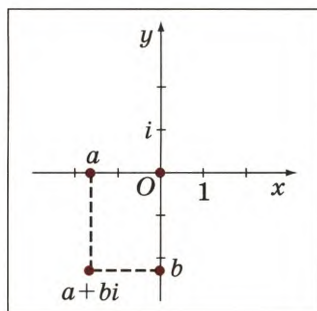


Рис. 1

Парой координат $(a; b)$ однозначно задаётся точка координатной плоскости.

Значит, комплексное число $a + bi$ можно изобразить точкой координатной плоскости с координатами $(a; b)$ (рис. 1).

При этом действительные числа, имеющие вид $a + 0 \cdot i$, изображаются точками вида $(a; 0)$, то есть точками оси Ox .

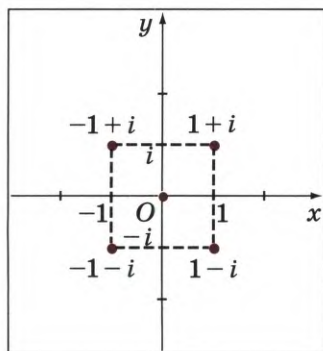


Рис. 2

Мнимая единица $i = 0 + 1 \cdot i$ изображается точкой $(0; 1)$, расположенной на оси Oy .

Каждое число вида $0 + bi$ изображается точкой $(0; b)$, расположенной на оси Oy .

При $a \neq 0$ и $b \neq 0$ комплексное число $a + bi$ изображается точкой, не лежащей на осях координат.

На рис. 2 точками координатной плоскости изображены комплексные числа $1 + i$, $1 - i$, $-1 + i$, $-1 - i$. Из рисунка видно, что эти точки расположены в вершинах квадрата с центром в начале координат и со сторонами длины 2, параллельными осям координат.

Вопрос. Какой точкой координатной плоскости изображается комплексное число 0?

3.2. Комплексная плоскость. Координатную плоскость, на которой изображаются комплексные числа, часто называют *комплексной плоскостью*. При этом ось Ox , на которой изображаются действительные числа, называют *действительной осью*. Ось Oy , на которой изображаются числа вида $b \cdot i$, называют *мнимой осью*.

Вопрос. Какие комплексные числа изображаются в комплексной плоскости вершинами квадрата со стороной 2, диагонали которого расположены на действительной и мнимой осях?

3.3. Геометрическое представление суммы комплексных чисел. Сложение комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ производится по формуле $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Поэтому сумма комплексных чисел $a + bi$ и $c + di$ изображается точкой с координатами $a + c$ и $b + d$, которые являются суммами соответствующих координат точек, изображающих слагаемые.

Таким образом, сумма комплексных чисел вычисляется по «правилу параллелограмма». Это значит, что если числа 0 , $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ не лежат на одной прямой, то их сумма $z_1 + z_2$ изображается четвёртой верши-

ной $(a + c; b + d)$ параллелограмма, у которого тремя последовательными вершинами являются точки $(a; b)$, $(0; 0)$ и $(c; d)$ (рис. 3).

Пример. Комплексные числа $1 + i$ и $1 - i$ изображаются точками $(1; 1)$ и $(1; -1)$ (рис. 4). Их сумма $(1 + i) + (1 - i) = 2$ изобразится точкой 2 действительной оси.

Она является четвёртой вершиной квадрата с тремя вершинами $(1; 1)$, $(0; 0)$ и $(1; -1)$ (рис. 4).

Вопрос. Как расположена на комплексной плоскости точка, изображающая комплексное число $(-z)$, противоположное комплексному числу $z = a + bi$?

3.4. Изображения комплексно-сопряжённых чисел. Напомним, что числа $z = a + bi$ и $z = a - bi$, где a и b — действительные числа, называются комплексно-сопряжёнными. Они изображаются точками $(a; b)$ и $(a; -b)$, симметричными относительно оси Ox (рис. 5). Например, комплексные числа $1 + i$ и $1 - i$ являются комплексно-сопряжёнными, а поэтому в комплексной плоскости симметричны относительно действительной оси.

Вопрос. Какое комплексное число изображает точка, симметричная точке $(a; b)$ относительно оси Oy ?

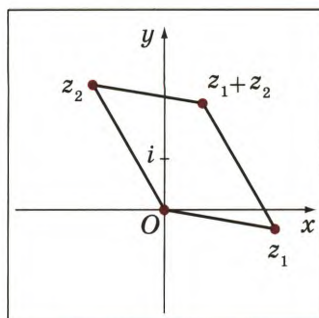


Рис. 3

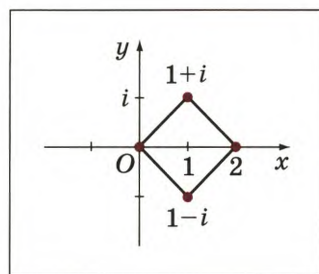


Рис. 4

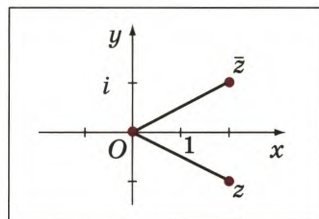


Рис. 5

■ Контрольные вопросы и задания

1. Какой точкой координатной плоскости изображается комплексное число $z = a + bi$, где a и b действительные числа?
2. Что такое комплексная плоскость?
3. Что в комплексной плоскости называют действительной осью?
4. Что в комплексной плоскости называют мнимой осью?
5. Как в комплексной плоскости изображается сумма двух комплексных чисел?

6.** Докажите, что сумма $z_1 + z_2$ двух комплексных чисел z_1 и z_2 получается по «правилу параллелограмма».

7. Как в комплексной плоскости расположены точки, изображающие комплексно-сопряжённые числа $a + bi$ и $a - bi$?

■ Задачи и упражнения

1. Изобразите точками координатной плоскости комплексные числа:

а) $2 + i$; б) $2 - i$; в) $-i$; г) $-3 + 4i$; д) $-3 - 4i$.

2. Какое комплексное число изображает точка, симметричная точке $(2; 1)$:

а) относительно оси Ox ; б) относительно оси Oy ;

в) относительно начала координат?

3. Какое комплексное число изображает четвёртая вершина параллелограмма, у которого тремя последовательными вершинами являются точки:

а) $(0; 0)$, $(-1; 2)$, $(2; 1)$ б) $(-1; 2)$, $(1; 1)$, $(3; 2)$;

в) $(2; 0)$, $(-2; 0)$, $(0; -2)$?

4. Вычислите сумму трёх комплексных чисел, изображаемых точками:

а) $(2; 0)$, $(-2; 0)$, $(0; -2)$; б) $(0; 0)$, $(-1; 2)$, $(2; 1)$.

5. Изобразите точками координатной плоскости корни квадратного уравнения:

а) $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$; б)* $x^2 - 2\cos\alpha \cdot x + 1 = 0$, где $\alpha = \frac{3\pi}{7}$.

6.* Докажите, что числа, противоположные двум комплексно-сопряжённым числам, также являются комплексно-сопряжёнными.

7.** Комплексные числа z_1 и z_2 изображены точками A_1 и A_2 координатной плоскости. Как найти точку, изображающую число $z_1 - z_2$?

■ Тесты

Задание 1. Укажите правильный вариант ответа.

1.1. Пусть точка A изображает в комплексной плоскости число z . Какой точкой изображается число $-z$?

1) точкой, симметричной точке A относительно начала координат

2) точкой, симметричной точке A относительно оси Ox

3) точкой, симметричной точке A относительно оси Oy

4) точкой, симметричной точке A относительно биссектрисы первой и третьей четверти

1.2. Как в комплексной плоскости изображаются комплексно-сопряжённые числа?

- 1) точками, симметричными относительно начала координат
- 2) точками, симметричными относительно оси Ox
- 3) точками, симметричными относительно оси Oy
- 4) точками, симметричными относительно биссектрисы первой и третьей четверти

1.3. В какой четверти координатной плоскости расположено изображение числа \bar{z} , если $z = 5 - 6i$?

- 1) в I четверти 2) во II четверти
- 3) в III четверти 4) в IV четверти

1.4.* В какой четверти координатной плоскости расположено изображение числа z^2 , если $z = -1 + 2i$?

- 1) в I четверти 2) во II четверти
- 3) в III четверти 4) в IV четверти

Задание 2. Укажите все правильные варианты ответа.

2.1. Какие из приведённых точек находятся внутри квадрата с вершинами $5, 5i, -5, -5i$ (исключая и границу квадрата)?

- 1) $-3 + 3i$ 2) $1 + 3i$ 3) $2 - 3i$ 4) $-2 - 2i$

2.2. Где в комплексной плоскости может находиться изображение числа вида bi , где b — ненулевое действительное число?

- 1) на оси Ox
- 2) на оси Oy
- 3) на биссектрисе I и III четверти
- 4) на биссектрисе II и IV четверти

2.3. Какие из приведённых точек находятся на окружности с центром в нуле и радиусом 5?

- 1) $1 - 5i$ 2) $-2 + 3i$ 3) $3 - 4i$ 4) $-\sqrt{5} + 3\sqrt{3}i$

2.4. Какие из приведённых чисел являются значениями \sqrt{z} , если $z = (-1 - 2i)^2$?

- 1) $1 + 2i$ 2) $1 - 2i$ 3) $-1 + 2i$ 4) $-1 - 2i$

Мини-исследования к главе ■

Мини исследование 38

Доказать свойства арифметических операций, перечисленные в пункте 1.9.

Предметный указатель

- Абсолютная величина числа** 50
- Аксиома (-ы)** 5, 6, 32
 - параллельности 7, 12
- Архимеда** 12
 - рациональных чисел 51
- Гильберта** 9
- Кантора** 13
- конгруэнтности** 11
- непротиворечивости** 13
- плоскости** 32
- полноты** 12
- порядка** 10, 11
- связи** 9–10
- Аксиоматический метод** 5
- Аксиомы связи в пространстве** 33, 34
- Алгоритм Евклида** 64, 66
 - и цепная дробь 61
- Арифметический корень** 201
- Арккосинус** 323, 343
- Арккотангенс** 344
- Арсинус** 325, 342
- Арктангенс** 327, 343
- Ассоциативность** 50
- Бесконечно малая последовательность** 125
 - свойства 131, 132, 135
- Вероятность события** 295–297
 - свойства 308
- Выпуклость** 201
- Геометрический ряд** 150
- Геометрия** 5
 - Лобачевского 7
 - неевклидова 7
- Гиперboloид однополостной** 26
- График**
 - косинуса 234
 - котангенса 235
 - обратной функции 339
 - синуса 233
 - тангенса 234
- Действительное число** 72
 - десятичные приближения 78
 - монотонность 79
 - порядок 79–80
- Дистрибутивность** 50
- Длина**
 - окружности 225
 - дуги окружности 226, 230
- Дробь**
 - периодическая десятичная 57
 - цепная 59, 60
- Евклида**
 - «Начала» 6
 - аксиомы 6
 - постулаты 6–7
- Закон сложения вероятностей** 309
- Знак суммирования** 149
- Касание сферы и плоскости** 28
- Касательная**
 - к кривой 282
 - к окружности 279
- Квадратные уравнения с комплексными коэффициентами** 432
- Коммутативность** 49–50
- Комплексная плоскость** 436
- Комплексные числа** 425
 - деление 427
 - изображение на координатной плоскости 435, 436
 - квадратные корни 431
 - комплексно-сопряжённые 428
 - произведение 426
 - равенство 426

- разность 427
- свойства операций 428, 429
- сумма 426
- Коническое сечение 28
- Конус 26
- Косинус числа 234
- Котангенс 235
- Коэффициент наклона 287
- Кривая
 - кусочно-элементарная 276
 - элементарная монотонная 275
- Критерий непрерывности 201
- Круговые функции 345
- Л**иния уровня 267
- Логарифм 212
 - десятичный 216
 - свойства 217
- Логарифмические тождества 214–216
- М**ера множества 297
- Мнимая единица 425
- Модуль числа 50
 - свойства 50–51
- Н**аклон прямой 287
- Наклонная 165
- Невозможное событие 305
- Неравенство
 - Бернулли 52
 - логарифмическое 405
 - показательное 404
- О**братимость функции
 - условие 338
- Общая мера отрезков 64
- Ортогональное проектирование 179
 - свойства 179
- Отрезки соизмеримые 65
- П**араллелепипед 109
 - диагонали 110
 - прямоугольный 25
- Параллельное проектирование 114
 - направление 114
 - основное свойство 115
- Параллельность
 - плоскостей 101
 - признаки 102
 - прямой и плоскости 95
 - признак 95
 - свойство 96
 - прямых 27, 89
 - основной признак 89
 - свойства 90
- Перпендикуляр
 - к плоскости 164
 - основание 164
 - построение 164, 172, 182, 189, 191
- Перпендикулярность
 - плоскостей 188
 - прямой и плоскости 160
 - признак 160, 184
 - свойство 170
 - прямых 159, 183
- Пирамида
 - общее понятие 43
 - правильная 166
 - треугольная 38
 - четырёхугольная 42
- Пирамиды
 - вершина 38, 42
 - внутренние точки 38
 - высота 165
 - граница 38
 - грань 38
 - боковая 42
 - основание 42
 - поверхность 38, 42
 - ребро 38, 42
 - боковое 42
- Плоскость 32
- Плоскости
 - аксиома 32

- Площадь
 - круга 223
 - сектора круга 224, 230
- Полноты аксиома 12
- Полупространство 34
- Последовательность числовая 120
 - бесконечно малая 125
 - возрастающая 143
 - монотонная 143
 - ограниченная 131, 142
 - предел 139
 - промежуточная 133, 142
 - сходящаяся к нулю 122
 - убывающая 143
- Постулат (ы)
 - Евклида 6
 - пятый 7
- Предел последовательности 139
 - промежуточной 142
 - геометрический смысл 139
- Приближение
 - десятичное 78
 - сверху 78
 - снизу 78
- Призма
 - треугольная 108
 - правильная 175
 - прямая 175
 - n-угольная 108
- Призмы
 - боковая грань 106
 - высота 173
 - основание 106, 107
 - поверхность 106
 - ребро 108–109
 - боковое 108
- Проекция (-и)
 - параллельная 114
 - перпендикулярная 179
 - ортогональная 179
 - площадь 383, 384
- Произведение действительных чисел 80
- Промежуточное значение 200
- Пространство 32, 34
 - возможных исходов 305
 - элементарных исходов 305
- Прямая 32
- Равенство фигур в пространстве 35
- Радиан 228
- Радианная мера 228
- Расстояние
 - от точки до плоскости 165
 - между параллельными плоскостями 174
- Ряд (-а) 148
 - геометрический 150
 - расходящийся 149
 - сходящийся 149
 - сумма 149
 - частичная 148
- Свойства арифметических операций 49, 50, 81
- Сечение
 - коническое 28
 - пирамиды 39, 96, 97
 - параллельное плоскости 103, 264
 - параллельное прямой 263
 - призмы 111
- Синус числа 232
- Синусоида 233
- Скрещивающиеся прямые 91
 - признаки 92
- События
 - дополнение к событию 304
 - несовместные 303
 - попарно 309
 - объединение 303
 - пересечение 302
 - произведение 303
 - сумма 303
- Существование несоизмеримых отрезков 67
- Способ подстановки 334
- Сравнение рациональных чисел 50
- Степенная функция 198, 199

- Степень
 - с натуральным показателем 196
 - с целым показателем 197
 - с рациональным показателем 202
 - с действительным показателем 205
 - свойства 207
- Стереометрия 31
- Сумма
 - действительных чисел 80
 - ряда 149
- Сходимость последовательности 139
 - к нулю 124
 - геометрическое представление 125
- Сходимость ряда 149
- Тангенс 234
- Теорема
 - Вейерштрасса 143
 - косинусов для трёхгранного угла
 - вторая 378
 - первая 376
 - о пределе промежуточной последовательности 133
 - о промежуточном значении 200
 - синусов для трёхгранного угла 379
- Тетраэдр 38
- Точка 32
- Тригонометрическая окружность 228
- Угловой коэффициент
 - прямой 287
 - касательной 288
- Угол
 - двугранный 359
 - величина 360
 - линейный угол 360
 - между плоскостями 363
 - между прямой и плоскостью 369
 - между прямыми 354
 - многогранный 379
 - трёхгранный 374
- Уравнение
 - логарифмическое 391
 - показательное 390
 - прямой 286
 - тригонометрическое 331
- Условие обратимости 338
- Формула (-ы) тригонометрических функций для
 - двойного аргумента 242
 - половинного аргумента 243, 244
 - приведения 239
 - произведений и сумм 246–248
 - сложения 238
- Функция
 - выпуклая вниз 201
 - круговая 345
 - свойства 347, 348
 - логарифмическая 213
 - непрерывная в точке 200
 - непрерывная 274, 275
 - обратная 339
 - показательная 208
 - разрывная 274
 - степенная 198, 199
- Центральная симметрия 111
- Цепная дробь 59–60
 - подходящая 76
- Число
 - вещественное 73
 - действительное 72
 - иррациональное 73
 - комплексное 425
 - обратное 50
 - противоположное 50
 - рациональное 48
 - десятичное представление 58
 - и соизмеримость отрезков 66
 - Эйлера 145
- Числовой промежуток 274

Ответы и указания

Глава 1

§ 1. 1. Нет. 2. Указание. Воспользоваться свойством точки пересечения медиан треугольника. 3. 1:2. 4. Указание. $\triangle ABL$ подобен $\triangle ANM$. 5. 30.

§ 2. 1. Указание. Выбрать на прямой a две различные точки B, C , рассмотреть плоскость ABC и показать, что при выборе других точек — M, N на прямой a плоскость MNC будет совпадать с плоскостью ABC . 2. Указание. Рассмотреть модель из пункта 2.1. 3. Указание. Меньше трёх точек не может быть. 4. Указание. Воспользоваться аксиомой Паша. 5. Указание. Выбрать M , не лежащую на AB ; получить такую точку N , что M лежит между A и N , затем такую точку K , что точка B лежит между N и K , и воспользоваться аксиомой Паша. 6. Указание. Если стороны AC и BC треугольника конгруэнтны, то упорядоченная тройка точек A, C, B конгруэнтна упорядоченной тройке B, C, A . 7. Указание. На сторонах двух пар конгруэнтных смежных углов отложить от вершин конгруэнтные отрезки и показать, что получающиеся треугольники конгруэнтны. 8—10. Указание. Первый признак равенства треугольников следует из аксиомы \mathcal{Z}_5 ; остальные утверждения можно доказывать так, как это рассматривалось в курсе планиметрии.

§ 3. 6. Указание. Показать, что $((x - y) + z) + (y - z) = x$. 7. Указание. Рассмотреть последовательное деление на 10 с остатком данного числа и получающихся частных.

§ 4. 1. Указание. б) Не определено понятие правила. 2. «Ты не вернёшь мне ребёнка». 3. «Вы меня сварите».

Глава 2

§ 1. 1. Указание. $AD \parallel B_1C_1$. 2. Указание. $MN \parallel AB$, поэтому прямые BM и AN лежат в плоскости $ABMN$. 3. Указание. Прямые BM и AN лежат в плоскости A_1B_1CD . 4. а) Получатся две равные фигуры; б) разделить объём параллелепипеда пополам. 7. Либо два конуса с общим основанием, либо конус, из которого вырезан конус с тем же основанием. 8. Цилиндр. 9. Объединение четырёх конусов. 10. Цилиндр, из которого вырезан цилиндр той же высоты и с той же осью. 11. Сфера. 12. Шар. 13. Указание. Например, продолжения рёбер AB и CC_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. 16. Если плоскость проходит через три точки на поверхности конуса, равноудалённые от его вершины. 17. Указание. Проводить сечение через вершину конуса.

§ 2. 1. Четыре. 2. *Указание.* Воспользуйтесь аксиомами IV и II. 3—4. *Указание.* Воспользуйтесь аксиомой V. 5. *Указание.* Воспользуйтесь аксиомами IV и II. 7. *Указание.* Линия пересечения плоскостей AA_1C_1 и BCC_1B_1 параллельна прямой BB_1 и проходит через точку C_1 . 8. Получится прямая, соединяющая центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. 9. *Указание.* Обеим плоскостям принадлежат точка B_1 и центр грани CC_1D_1D . 10. *Указание.* Обеим плоскостям принадлежат центры граней $ABCD$ и BB_1DC_1C . 11. *Указание.* Обеим плоскостям принадлежит точка пересечения прямых AM и BD . 12. *Указание.* $AB = CD = C_1D_1$. 13. *Указание.* Грани куба — квадраты с равными сторонами. 14. *Указание.* Противоположные грани прямоугольного параллелепипеда — равные прямоугольники.

§ 3. 1. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 2. $\frac{\sqrt{11}}{4}$. 3. $\frac{\sqrt{11}}{16}$. 4. 3:1. 5. б) 1:3. 6. $\frac{\sqrt{19}}{2}$. 7. б) 1:3. 8. а) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{8}$.

Глава 3

§ 1. 1. а) Нет; б) есть. 2. а) Нет; б) нет. 3. а) При $n - m = 1$; б) при $n - m > 1$; в) $n - 1$ — наибольшее, $m + 1$ — наименьшее; г) при $n - m = 2$; д) при $n - m = 2$; е) при $n - m > 2$. 4. *Указание.* $a \cdot (b + (-b)) = 0$. 5. *Указание.* $(b - a) \cdot (-c) > 0$. 6. *Указание.* Умножьте обе части неравенства $|a| > 0$ на положительное число $|a|$ и воспользуйтесь свойством 3 модуля. 7. *Указание.* $1 \neq 0$ и $1 = 1^2 > 0$. 8. *Указание.* Если предположить, что $\frac{1}{a} < 0$, то $1 = a \cdot \frac{1}{a} < 0$. 9. *Указание.* Преобразуйте величину $|a - b|$ к виду $|a + (-b)|$ и воспользуйтесь свойством 6 из пункта 1.5. 10. *Указание.* Перепишите неравенство в виде $-a \leq \frac{1}{n}$ и примените утверждение из пункта 1.7. 11. *Указание.* Докажите, что одновременно $a \geq 0$ и $a \leq 0$. 12. *Указание.* Умножьте неравенство на $\frac{1}{a} > 0$. 13. *Указание.* Воспользуйтесь результатами пункта 1.7. 14. *Указание.* Рассмотрите число вида $a + c$, где c принадлежит интервалу $(0; b - a)$. 15. а) $t < -\frac{8}{7}$; б) $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup \left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{8}\right)$; в) $\left(-\frac{4}{5}; \infty\right)$; г) $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \infty\right)$. 17. *Указание.* Предположите противное, представьте x несократимой обыкновенной дробью вида $\frac{m}{n}$ и получите противоречие. 18. Остаток при делении n на 5 не равен двум. 19. Не могут. *Указание.* Допустим противное. Тогда при некотором $q > 0$ и целых m, n выполнены соотношения $\frac{11}{10} = q^n$, $\frac{12}{10} = q^m$. Откуда $11^m = 10^{m-n} 12^n$, а этого не может быть из соображений делимости.

20. а) $(0; \infty)$; б) $\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}$; в) 0; г) 2. 21. а) $(-1; 1)$; б) $(0; 2)$; в) $(-\infty; -5) \cup (-3; \infty)$; г) $(-\infty; -1)$.

§ 2. 1. а) 0,(45); б) 0,(285714); в) 1,(3); г) 0,(1176470588235294); д) 0,125(0); е) 0,024(0); ё) 0,00625(0). 2. Указание. Умножая числитель и знаменатель данной дроби на степени двоек и пятёрок, её легко превратить в десятичную. 3. Конечными десятичными дробями представляются те и только те рациональные числа, которые после сокращения общих множителей в числителе и знаменателе принимают вид $\frac{k}{2^p 5^q}$, где k — целое

число, а p, q — неотрицательные целые числа. 4. а) 2; б) $\frac{7}{33}$; в) $\frac{5}{14}$; г) $\frac{13}{37}$.

5. 3. 6. а) 48,(48); б) $3\frac{56}{99} = 3,(56)$; в) $\frac{895}{3663}$; г) $\frac{119077}{123321}$; д) $10\frac{4}{9}$. 7. а) $8\frac{964}{1089}$;

б) $2\frac{308}{407}$. 8. а) $\frac{95}{132}$; б) $\frac{14}{15}$; в) $\frac{1201}{1290}$; г) $\frac{49038}{66097}$. 9. а) $1\frac{1777}{2465}$; б) $\frac{49}{960}$.

§ 3. 1. $\frac{1}{21}$. 2. Через 3 шага получим общую меру, равную 3. 3. Указание. Выразить длины обыкновенными дробями и привести их к общему знаменателю. 4. Указание. Во всех трёх случаях предположить, что данное число рационально, представить его несократимой дробью вида $\frac{m}{n}$, возвести её в квадрат и получить противоречие. 5. Указание. Длина этого катета — иррациональное число. 6. См. указание к предыдущей задаче. 7. Указание. Переведите данную десятичную дробь в обыкновенную.

§ 4. 1. Указание. Умножьте числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{2} - 1$. 2. Указание. Возведите в квадрат данное выражение. 3. Нет. 4. Да. 5. Да. 6. Указание. Воспользуйтесь выражением синуса через косинус двойного угла. 7. Указание. Вспомните, как доказывается иррациональность $\sqrt{2}$. 8. Указание. Предположите, что данная дробь периодична с периодом длины k , и рассмотрите те отрезки этой дроби, где стоят более k нулей. 9. См. указание к задаче 8. 10. а) $[1; 1, 2, 1, 2, \dots]$; б) $[1; 1, 1, 1, 1, \dots]$; в) $[2; 4, 4, 4, 4, \dots]$. 11. Указание. Допустим, что данные числа являются членами арифметической прогрессии, тогда $m(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = n(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ при некоторых целых m и n . Возводя это равенство в квадрат, нетрудно получить противоречие.

§ 5. 1. $\frac{1}{6} = 0,1(6)$. 2. $\frac{1}{7} = 0,(142857)$. 3. а) $2,4 < \sqrt{6} < 2,5$; б) $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$; в) $2,6 < \sqrt{7} < 2,7$; г) $7,8 < 4 + \sqrt{15} < 7,9$; д) $15,6 < \sqrt{245} < 15,7$; е) $1,7 < \sqrt[3]{5} < 1,8$.

4. Рациональное число 0,61001; иррациональное число $0,61 + 10^{-5}\sqrt{2}$.
 5. Нет. 6. $7,96 < x+y < 7,98$; $14,044 < xy < 14,125$; $0,495 < \frac{y}{x} < 0,499$.
 7. $6,46 < x+y < 6,48$; $9,60 < xy < 9,67$; $0,55 < \frac{y}{x} < 0,57$. 8. $7,1 < x+y < 7,2$;
 $11,9 < xy < 12,0$; $0,6 < \frac{x}{y} < 0,7$. 9. а) $\frac{2}{33}$; б) $1\frac{3}{4}$; в) $\frac{377}{405}$; г) $2\frac{1}{8}$.

Глава 4

§ 1. 1. *Указание.* Точка N не лежит в плоскости ASC . 3. в) *Указание.* Точка B_1 не лежит в плоскости AA_1C_1C . 4. *Указание.* Прямые лежат в плоскости BC_1D . 10. *Указание:* Точка M не лежит в плоскости CBD .

§ 2. 1. *Указание.* Найти в плоскости BB_1C_1C прямую, параллельную прямой A_1M . 2. 1:1. 3. *Указание.* Плоскость проходит через вершину D_1 . 4. *Указание.* Плоскость сечения содержит середину ребра CD . 6. 1:3. 7. 1:3. 8. 1:1. 9. В сечении треугольник AB_1D_1 . 10. а) 1:1; б) 1:3; в) 3:1; г) 1:3. 11. а) 1:1; б) 1:3.

§ 3. 6. *Указание.* Прямые KN и AC , а также прямые MN и BC пересекаются. 7. *Указание.* Прямые KN и AC , а также прямые MN и BC пересекаются. 8. д) 2:1.

§ 4. 3. 2:1. 4. 1:3. 5. 1:1. 6. д) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$. 7. $\sqrt{19}$. 8. б) $\frac{\sqrt{3}}{8}$.

§ 5. 1. *Указание.* б) Точка пересечения прямой AB с плоскостью α является точкой пересечения прямых AB и A_1B_1 ; в) если в трапеции AA_1B_1B основание AA_1 меньше BB_1 , то $\angle ABB_1 < \angle A_1B_1B$, а если основание AA_1 больше BB_1 , то $\angle BAA_1 < \angle B_1A_1A$. 2. Могут. 3. Могут. 5. *Указание.* Направление проектирования и скрещивающиеся прямые должны быть параллельны некоторой одной плоскости. 6. а) Может; б) может; в) может; г) нет. 7. *Указание.* Если задан треугольник ABC , то в плоскости α , содержащей прямую AB и отличной от плоскости ABC , можно построить равнобедренный треугольник ABM и выбрать направление проектирования CM .

Глава 5

§ 1. 2. *Указание.* а) Неравенство $\frac{1}{3n-1} < \frac{1}{k}$ равносильно неравенству $n > \frac{k+1}{3}$; б) $\frac{100}{4n+3} < \frac{1}{k}$ равносильно $n > \frac{100k-3}{4}$; в) так как $n^2+n > n$, для того чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{k}$, достаточно неравен-

ства $\frac{1}{n} < \frac{1}{k}$; г) так как $|1 + (-2^n)| > n$ при $n > 1$, для того чтобы выполнялось двойное неравенство $-\frac{1}{k} < \frac{1}{1+(-2)^n} < \frac{1}{k}$, достаточно неравенства

$\frac{1}{n} < \frac{1}{k}$. 3. Указание. а) Составить неравенство $\frac{1}{3n+2} < \frac{1}{10^k}$, откуда $n > \frac{10^k - 2}{3}$; б) составить неравенство $\frac{1}{5n-7} < \frac{1}{10^k}$, откуда $n > \frac{10^k + 7}{5}$; в)

так как $n^2 - n + 1 > n^2$ при $n > 1$, для того чтобы выполнялось неравенство $\frac{n}{n^2 - n + 1} < \frac{1}{10^k}$, достаточно неравенства $\frac{1}{n} < \frac{1}{10^k}$; г) так как $\sqrt{n} + \sqrt{n-1} > \sqrt{n}$, для того чтобы выполнялось неравенство $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} < \frac{1}{10^k}$, достаточно

неравенства $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{10^k}$. 4. а) Например, $M = 250$; б) например, $M = 1000$;

в) например, $M = 10^4$. 5. Указание. Для каждого $\varepsilon > 0$ найти M такое, что

$|a_n| < \varepsilon$ при всех $n > M$: а) например, $M = \frac{1}{\varepsilon}$; б) например, $M = \frac{3}{\varepsilon}$; в) напри-

мер, $M = \frac{7}{\varepsilon}$; г) например, $M = \frac{4}{\varepsilon^2}$; д) например, $M = \frac{1}{\varepsilon}$; е) например, $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$;

ё) например, $M = \frac{3}{2\varepsilon} + 5$. 6. Указание. В каждом случае $|a_n|$ можно сравнить

с большей последовательностью, про которую известно, что она сходится к нулю: а) например, $\frac{n}{n^2+1} < \frac{1}{n}$; б) например, $\frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n}}$; в) например,

$\frac{2n}{n^2-3} < \frac{4}{n}$; г) например, $\frac{\sqrt{n}-2}{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$. 7. Указание. $\frac{2+(-1)^n}{10^{1000}} \geq \frac{1}{10^{1000}}$ при

всех натуральных n .

§ 2. 1. Указание. При всех натуральных n : а) $3^n > n$; б) $4^n > n$; в) $5^n > n$;

г) $2^n + 1 > n$; д) $3^n + 5 > n$. 2. Указание. $a_n = \frac{2}{n+1}$, если $n = 2k - 1$, $a_n = 0$

при всех остальных натуральных n , поэтому $a_n < \varepsilon$ при всех $n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$.

3. Указание. Если $n = \frac{k(k+1)}{2}$, где $k \in \mathbb{N}$, то $a_n = \frac{1}{k}$. Нетрудно заметить, что при этом $k \geq \sqrt{n}$, поэтому $0 \leq a_n < \frac{1}{\sqrt{n}}$ при всех натуральных n .

4. Указание. В каждом случае $|a_n|$ можно сравнить с большей последовательностью, про которую известно, что она сходится к нулю: а) например, $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$; б) например, $\frac{1}{n\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$; в) например, $\frac{2}{n^2+2n-2} \leq \frac{2}{n^2}$;

г) например, $\frac{1}{n\sqrt[3]{n+2}} \leq \frac{1}{n}$. **5. Указание.** В каждом случае $|a_n|$ можно сравнить

с большей последовательностью, про которую известно, что она сходится

к нулю: а) например, $\frac{2n+1}{n^2+n+1} < \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}$; б) например, $\frac{n+4}{n^2-n+1} < \frac{2}{\frac{n^2}{2}} = \frac{4}{n}$

при $n > 3$; в) например, $\frac{2n+5}{(n+2)^2} < \frac{2n+5}{n^2}$. **6. Указание.** $0 < \frac{10}{n!} \leq \frac{10}{n}$.

8. Указание. Воспользоваться неравенством $|a + b| \leq |a| + |b|$. **9. Указа-**

ние. Воспользоваться равенством $|a \cdot b| \leq |a| \cdot |b|$. **10. Указание.** В каждом случае модули членов последовательности можно сравнить с большей последовательностью, про которую известно, что она сходится к нулю:

а) например, $\frac{6n^2+2n+3}{n^3+1} < \frac{11n^2}{n^3} = \frac{11}{n}$; б) например, $\frac{n+1}{n^3+3n+1} < \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n}$;

в) например, $\frac{7n^2+1}{n^4+2n^2+10} < \frac{8n^2}{n^4} = \frac{8}{n^2}$; г) $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$,

откуда $\frac{1+2+\dots+n}{n^3+n^2+n+1} < \frac{n(n+1)}{2n^3} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$; д) $\frac{\sin(2n+1)}{n} < \frac{1}{n}$. **11. Указание.**

а) $\left| \frac{\cos n}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$; б) $\left| \frac{\sin n}{n\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n\sqrt{n}}$; в) $\left| \frac{\cos n}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. **12. Указание.** а) $\frac{2^n}{3^n} = q^n$,

где $0 < q = \frac{2}{3} < 1$; б) $\frac{2^n+1}{3^n+1} = \frac{\alpha_n+\beta_n}{1+\beta_n}$, где $\alpha_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\beta_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ — бесконечно

малые; в) $\frac{3^n+5}{4^n+6} = \frac{\alpha_n+5\beta_n}{1+6\beta_n}$, где $\alpha_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, $\beta_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ — бесконечно малые;

г) $\frac{2^n}{4^n+3^n} = \frac{\alpha_n}{1+\beta_n}$, где $\alpha_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $\beta_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ — бесконечно малые. **13. Указание:**

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$. **14. Указание:** $\sqrt{4n+1} - 2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{4n+1} + 2\sqrt{n}}$.

15. Указание. а) $\left| \frac{2n^2-1}{2-n^2} \right| < \frac{2n^2-1}{n^2} < 2$; б) $\left| \frac{1+n}{\sqrt{n^2+4}} \right| < \frac{n+1}{\sqrt{n^2}} \leq 2$;

в) $\left| \frac{n+(-1)^n}{3n+4} \right| < \frac{n+1}{3n} \leq \frac{2}{3}$; г) $\sqrt[n]{2^n+5^n} = 5\sqrt[n]{1+(0,4)^n} < 5\sqrt{2}$. **16. Указание.** Для

каждого $M > 0$ достаточно указать член последовательности, модуль которого больше M : а) например, взять $n > M$; б) взять чётное n , которое больше M ; в) взять $n > M$; г) взять $n > M+1$; д) взять $n > (M+1)^2$; е) взять чётное n , которое больше M .

§ 3. 1. а) 0,5; б) 3; в) 0,6. 2. а) 0; б) 1; в) 2; г) 0,25. 3. а) 0,6; б) 0,75;

в) 0,5. 4. а) 0,5; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{7}{9}$; г) $\frac{1}{3}$. 5. Указание. $a_n = \frac{n+1}{2n}$. 6. Указание. Для

каждого $a \in R$ найдётся такая окрестность $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, что вне этой окрестности находится бесконечное число членов последовательности. В случае

последовательности $a_n = \frac{1}{n} + (-1)^n$ из пункта (а) это можно сделать следующим образом. При $a > 1$ или $a < -1$ выбрать $\varepsilon = |a - 1|$; при $a = 1$ или $a = -1$ выбрать, например, $\varepsilon = 0,1$; при $-1 < a < 1$ выбрать ε как наименьшее из чисел $|a - 1|$, $|a - (-1)|$. 7. Указание. а) $a_n = 1 + \frac{1}{n}$, где последователь-

ность $(\frac{1}{n})$ убывает; б) доказать, что последовательность (a_n^2) возрастает, рассмотрев разность $a_{n+1}^2 - a_n^2$; в) $a_n = 2^n + 5$, где последовательность (2^n) возрастает; г) последовательность (a_n) есть сумма возрастающих последовательностей; д) последовательность (a_n) есть произведение положительных возрастающих последовательностей; е) последовательность (a_n) есть произведение положительных убывающих последовательностей.

8. Указание. Составить и решить неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$. 9. а) 1; б) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

10. Указание. Последовательность положительна и убывает. 11. б) 0,5.

12. Указание. С помощью математической индукции доказать возрастание и ограниченность сверху числом 2. Предел равен 2. 13. а) Предел равен 1 при $|a| > 1$, равен -1 при $|a| < 1$; при $a = 1$, $a = -1$ последовательность не определена; б) предел равен 1 при $|a| > 1$, равен -1 при $0 < |a| < 1$, равен 0 при $|a| = 1$; последовательность не определена при $a = 0$. 14. а) 0; б) 0; в) 0; г) 0; д) 0; е) 0. 15. Указание. С помощью неравенства Бернулли доказать, что заданная последовательность возрастает, последовательность

$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает.

§ 4. 1. $\frac{4}{7}$. 2. $\frac{4}{3}$. 3. 2. 4. а) $\frac{1000}{11}$; б) 18. 5. $\frac{39}{40}$. 6. 4. 7. $\frac{27}{19}$; 3. 8. $-\frac{5}{7}$. 9. Кроме

тех, где $|\sin \alpha| = 1$; сумма $\frac{1}{1 - \sin \alpha}$. 10. Указание. б) $R_{n+1} = R_n \cdot \frac{1 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$;

в) $R_n \cdot \frac{1 + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$. 11. а) $(1-1) + (1-1) + \dots$; б) $1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots$.

12. Указание. $\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \dots + \frac{1}{4n} > \frac{2n}{4n} = \frac{1}{2}$ при каждом n . 13. Указание.

Если число обозначить через a , то $a - \left(\frac{\alpha_1}{10^1} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{10^k} \right) < \frac{1}{10^k}$ при каждом k .

Глава 6

§ 1. 1. $\sqrt{13}$, $\sqrt{29}$. 2. $\sqrt{65}$, $\sqrt{65}$, 9. 10. Указание. в) Плоскость проходит через A и середину SB ; г) плоскость содержит прямую SA ; д) искомая плоскость параллельна плоскости из пункта (в). 11. Указание. б) Плоскость параллельна плоскости A_1BD ; в) прямая MN перпендикулярна AC и BD_1 . 12. $\sqrt{\frac{69}{26}}$. 13. $\sqrt{\frac{23}{6}}$. 14. $\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{22}}$. 15. Нет. Указание. Сравнить сумму оснований трапеции с суммой боковых сторон. 16. Плоскость. 17. Окружность.

§ 2. 1. а) $3\sqrt{2}$; б) 0; в) $2\sqrt{3}$; г) $\sqrt{3}$; д) $4\sqrt{3}$. 2. а) 2; б) 1,5; в) 2,4; г) 2,4; д) $\frac{12}{\sqrt{41}}$; е) $\frac{12}{\sqrt{41}}$. 3. $\frac{a+b+c}{3}$. 5. 1 : 4. 6. Указание. Из условия следует, что $AD \perp BC$, поэтому перпендикуляры, проведённые из вершин B и C к прямой AD , имеют общее основание. 7. $\frac{\sqrt{24}}{5}$. 8. $\sqrt{\frac{2}{3}}$. 9. 4. 10. 1,25. 11. 1. 12. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 13. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$. 14. Указание. $CD \perp BD$ и $DD_1 \perp BD$.

§ 3. 1. а) $\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{5}}$; в) $\frac{a\sqrt{17}}{4}$. 2. а) $\frac{4a\sqrt{2}}{15\sqrt{3}}$; б) $\frac{a\sqrt{35}}{32\sqrt{2}}$; в) $\frac{a}{3}$. 3. 3,2. 4. а) $\frac{8}{\sqrt{10}}$; б) $\frac{4}{\sqrt{10}}$. 5. а) $\frac{a\sqrt{11}}{4\sqrt{3}}$; б) $\frac{a\sqrt{15}}{12}$. 6. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. 7. $\sqrt{5}$. 8. $\frac{48\sqrt{6}}{35}$. 9. $\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{47}}$. 10. $3\sqrt{10}$. 11. $\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}+\sqrt{7}}$. 13. $\frac{a+b+c}{3}$, $\frac{a+b-c}{3}$, $\frac{a-b+c}{3}$, $\frac{b+c-a}{3}$. 14. Нет. 19. Окружность. 20. Окружность.

§ 4. 1. Указание. а) $B_1A_1 \perp BB_1C_1C$; б) $DC_1 \perp A_1BCD_1$; в) $AC \perp BB_1D_1D$; г) $AK \perp BB_1L$. 2. Указание. а) $AC \perp BSD$; б) $AB \perp SMN$; в) $PQ \perp BSD$. 3. Указание. а) $BD \perp ASC$; б) $AS \perp SC$. 4. Указание. Провести указанную плоскость через точку пересечения медиан треугольника BSD . 5. Указание. а) Отрезок, соединяющий точку M с центром грани BB_1C_1C , перпендикулярен плоскости BB_1C_1C ; б) параллельным переносом точки B_1 в точку B и отрезка AB_1 в отрезок FB получим плоскость FBC_1 , которая проходит через высоту BH грани ABC . 6. Указание. Отрезок B_1C , перпендикулярен плоскости BC_1M . 7. $\sqrt{29}$. 8. Указание. Например, для правильной

треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ можно рассмотреть пирамиду с вершиной A_1 и основанием $MNBC$, где M и N — середины рёбер AC и AB . 9. $\sqrt{3}:2$.

10. $\sqrt{3}:2$. 11. Указание. Показать, что $\angle ASB = \angle ASC = 90^\circ$. 12. $\frac{1}{\sqrt{30}}$.

Глава 7

§ 1. 1. а) 2^7 ; б) $\frac{1}{9}$; в) 54; г) 24; д) 0,125. 2. Указание. Сравнить 2^3 и 3^2 . 4. Указание. Воспользоваться тем, что $x_1^2 + x_2^2 \geq 2x_1x_2$. 5. а) $x^{\frac{7}{4}}$; б) $a^{\frac{1}{12}}$; в) $m^{-\frac{4}{7}}$; г) $a^{k-\frac{1}{2}}$; д) $x^{\frac{31}{20}}$; е) $x^{\frac{1}{5}}$. 7. Указание. а) $(1,8)^2 > 3$; б) $\left(\frac{9}{7}\right)^3 > 2$; в) $\frac{1}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$; г) сравнить $\sqrt[3]{3}$ и 1,4; д) сравнить квадраты данных чисел; е) сравнить $\sqrt[3]{2}-1$ и $\frac{1}{4}$.

§ 2. 2. а) 3; б) -4; в) 4; г) -3. 3. а) $1\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{4}$; г) 4. 4. а) 8; б) 4; в) 1,5; г) 2,5. 5. а) $2 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$; б) $-1 \pm \frac{\sqrt{17}}{3}$; в) 0,5 и 1,5; г) -0,5. 6. а) $-\frac{1}{3}$; б) -4; в) 3; г) нет корней. 7. а) $(0,5; \infty)$; б) $(-\infty; -1)$; в) $(-\infty; -2)$; г) $(-\infty; 0,5)$; д) $[1; \infty)$; е) $(-0,25; \infty)$; ё) $(0,75; \infty)$; ж) $(-\infty; -1)$. 8. а) $(1; \infty)$; б) $[-1; \infty)$; в) $(-\infty; 4)$; г) $(-\infty; 0)$; д) $[-2; \infty)$; е) $[-4; \infty)$; ё) $(-\infty; 0)$; ж) $(-\infty; 5)$.

§ 3. 2. а) $\left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$; б) $(0; 1) \cup (1; \infty)$; в) $(-\infty; -1) \cup (1; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$; г) $(2; \infty)$; д) $(0,5; 0) \cup (0; \infty)$; е) $\left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1\right) \cup (1; \infty)$.

4. а) $\frac{x}{2}$; б) $-2x$; в) $\frac{5x}{2}$; г) 0; д) $\frac{15x}{4}$; е) -3; ё) -2. 5. а) x ; б) \sqrt{x} ; в) x^{-4} ; г) x^4 ; д) x^2 ; е) \sqrt{x} . 6. а) $\log_3 \frac{x-1}{(x-3)^2}$; б) $\log_4(x+2)$; в) $-\frac{1}{2} \log_3(x^2-1)$; г) $\log_2(x^2-x+1)$.

7. а) 0,6990; б) 1,3010; в) 2,204. 8. а) $a + \frac{b}{2}$; б) $2a + 4b$; в) $\frac{a+b}{1+a}$; г) $\frac{1+a+b}{1+a}$; д) $\frac{2a+2b}{1+2a}$; е) $\frac{2+a+b}{4+a}$; ё) $\frac{4+3a}{a+2b}$. 9. Указание. Выразить все логарифмы через логарифмы по одному основанию. 10. 0. 12. а) $\log_a b$; б) $\lg 4$; в) $\log_2 100$; г) $(\log_m n)^2$. 13. а) 0; б) 13; в) -3,96; г) $1 - \sqrt{2}$; д) 0,6; е) 11. 14. а) $3\log_3 2$; б) $\frac{3}{2} \log_5 2$; в) $-\log_2 7$; г) $4\log_3 5$; д) $\log_2(1 + \sqrt{2})$; е) -1; ё) $-0,25 - \log_4 3$.

15. а) $[\sqrt{2}; \infty)$; б) $(0,001; \infty)$; в) $(0; 16]$; г) $(0; 1)$; д) $(0; 3]$; е) $(0; \sqrt{2} - 1]$.

Глава 8

§ 1. 2. $9\sqrt{3} - 3\pi$. 3. 25π . 4. $8\pi + 12\sqrt{3}$. 5. $\frac{(3\sqrt{3} + 2\pi)a^2}{32}$. 6. 2400π . 7. 10π .
8. $20\pi\sqrt{3}$. 9. $12 + \frac{5\pi}{3}$. 10. $12\sqrt{3} + 8\pi$.

§ 2. 1. а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{5\pi}{6}$; г) $\frac{7\pi}{6}$; д) $\frac{5\pi}{12}$; е) $\frac{\pi}{10}$; ё) $\frac{7\pi}{9}$; ж) $\frac{17\pi}{3}$. 2. а) 20° ;
б) 135° ; в) $\left(\frac{270}{\pi}\right)^\circ$; г) $\left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ$. 3. $\frac{7\pi}{12}$ см. 4. $\frac{2\pi}{9}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{9}$. 5. 108° или $\frac{3\pi}{5}$ радиан.
6. 2 радиана или $\left(\frac{360}{\pi}\right)^\circ$. 7. а) $\frac{\pi R^2}{9}$; б) $\frac{\pi R^2}{4}$; в) $\frac{5\pi R^2}{6}$.

§ 3. 1. а) Отрицательно; б) положительно; в) отрицательно; г) положительно; д) отрицательно. 2. Указание. а) $\frac{1}{2} < \frac{\pi}{4}$; б) $1 > \frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{3\pi}{4}$.
3. а) 1,5; б) $\frac{2\sqrt{3}+3}{3\sqrt{3}+1}$; в) 3; г) $-\frac{2}{3}$.

§ 4. 1. а) $\cos x$; б) $-\sin x - \cos x$. 3. $\frac{\sqrt{5}}{3}$. 4. $\frac{3}{5}$. 5. а) -1; б) 4.

§ 5. 3. $-\frac{44}{125}$. 4. а) $2 + \sqrt{3}$; б) $\frac{1}{4}$. 5. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

§ 6. 1. а) $\frac{\sqrt{3}-2}{4}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{8}$. 3. а) $2\sin 2 \cdot \sin 3$; б) $2\sin 39^\circ \cdot \cos 22^\circ$. 5. Указание. а) $1 - 4\sin 70^\circ \cdot \sin 10^\circ = 2\sin 10^\circ$; б) применить формулу сложения косинусов; в) $\cos 40^\circ = \sin 50^\circ$; г) применить формулу сложения тангенсов.

Глава 9

§ 1. 3. б) $2 : 1$. 4. г) $2 : 1$. 5. $\frac{\sqrt{14}}{3}$. 6. б) $1\frac{1}{3}$. 7. $\frac{\sqrt{29}}{8}$. 8. $\frac{\sqrt{30}}{6}$. 9. $\frac{\sqrt{57}}{4}$. 10. $\frac{\sqrt{11}}{3}$.
11. д) 1. 12. е) $AP : PB = 1 : 2$, $BQ : QB_1 = 2 : 1$, $B_1R : RC_1 = 1 : 1$, $DS : SD_1 = 1 : 2$.
§ 2. 1. $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 1. 2. $\sqrt{3}$, 1. 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}$. 4. а) $\sqrt{6}$; б) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; в) $\sqrt{21}$. 5. 0,5. 6. $\frac{5\sqrt{14}}{16}$.
7. $\frac{\sqrt{11}}{16}$. 8. $3 + 2\sqrt{3}$. 9. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{8}$; в) $\frac{3\sqrt{21}}{16}$; г) $\frac{\sqrt{6}}{16}$.

§ 3. 4. Указание. Параллельная проекция куба имеет центр симметрии. 5. Указание. Всего у куба 6 граней.

Глава 10

§ 1. 2. $(-\infty; -1]$ и $[-1; \infty)$. 5. Указание. Функция принимает не все значения из R . 6. Указание. Функция убывает и принимает все значения из $(0; 5)$. 7. Указание. Функция принимает не все значения из $[-1; 6]$.

§ 2. 1. 2°. 2. $\cos \angle MCK = 2\sin 28^\circ$. 3. 1 : 35. 4. а) $0,5^\circ$; б) 1° . 5. $\frac{1}{90}$. 6. 0,09. 7. $\sqrt{200}$ см. 8. Указание. Рассмотрите, например, острые углы между прямыми $y = 0,09x$ и $y = 0,11x$.

§ 3. 1. а) $y = \frac{3x-5}{2}$; б) $y = x + 3$; в) $y = -x + 1$; г) $y = \frac{x+17}{3}$; д) $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x - 1$; е) $y = -\frac{2\sqrt{2}}{3}x$. 2. а) $\frac{1}{3}$; б) -1 ; в) -1 . 3. а) $y = \frac{1}{3}x + 2$, $y = -7x + 4$, $y = \frac{7}{3}x$; б) $x = 2$, $y = \frac{1}{6}x + 2$, $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$; в) $x = -1$, $y = -\frac{1}{3}x$, $y = \frac{4x+5}{3}$. 4. а) 1,5; б) $-0,5$; в) $\frac{1}{3}$; г) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; д) $\sqrt{3}$. 5. $y = 5\sqrt{3}x + 5\sqrt{3} + 2$. 6. а) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{1}{7}$. 8. 4. 9. $\frac{1}{9}$. 10. $-\frac{1}{4}$. 11. а) $y = 12x - 18$; б) $y = -12x + 12$; в) $y = 6x + 9$; г) $y = -3x + \frac{9}{2}$; д) $y = \sqrt{2}x - 2$. 12. $y = (2ax_0) \cdot x - ax_0^2$. 13. а) (1; 0), (0; 4); б) $(-0,75; 0)$, $(0; -4,5)$. 16. а) $y = 8x - 11$; б) $y = 4x + 20$; в) $y = 5x - 3$.

Глава 11

§ 1. 1. а) $\frac{9}{49}$; б) $\frac{9}{49}$; в) $\frac{1}{7}$. 2. а) $\frac{2}{9}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{7}{9}$; г) $\frac{7}{12}$. 3. $\frac{1}{2}$. 4. $\frac{3}{5}$. 5. $\frac{3}{8}$. 6. 11.

§ 2. 1. $\frac{1}{10}$. 2. а) $\frac{1}{10}$; б) $\frac{1}{100}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $\frac{1}{4}$. 4. а) $\frac{13}{63}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{3}{7}$; г) $\frac{8}{63}$. 5. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. 6. $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$. 7. $\frac{1}{8}$. 8. $\frac{3\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}}$.

§ 3. 1. $\frac{3}{4}$. 2. $\frac{1}{5}$. 3. $\frac{8}{11}$. 4. а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{2}$. 5. $\frac{9}{11}$. 6. $\frac{1}{20}$. 7. а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{2}$. 8. а) $\frac{5}{14}$; б) $\frac{3}{28}$; в) $\frac{15}{28}$. 9. а) $\frac{24}{47}$; б) $\frac{32}{47}$; в) $\frac{23}{47}$. 10. а) $\frac{7}{26}$; б) $\frac{9}{26}$; в) $\frac{19}{26}$; г) $\frac{6}{13}$. 11. 1. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Глава 12

§ 1. Указание. Во всех заданиях $k, n \in Z$. 1. б) $\pm \frac{\pi}{12} + 2\pi k$; в) $\pm \frac{7\pi}{12} + 2\pi k$.

2. б) $-\frac{5\pi}{12} + 2\pi k, -\frac{7\pi}{12} + 2\pi n$; д) $-\frac{\pi}{12} + 2\pi k, -\frac{11\pi}{12} + 2\pi n$. 3. г) $\frac{\pi}{12} + \pi k$; д) $-\frac{5\pi}{12} + \pi k$; е) $-\frac{\pi}{12} + \pi k$. 4. а) $\frac{\pi k}{3}$; б) $\pm \frac{\pi}{6} + \pi k$; в) $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$; г) $\frac{2\pi}{3} + 4\pi k, \frac{4\pi}{3} + 4\pi k$; д) $\pm \frac{\pi}{4} + 6\pi k$; е) $\pi + 4\pi k$; ё) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; ж) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$; з) $\frac{\pi k}{5}$. 5. а) $\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}, -\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$; б) $\frac{7\pi}{24} + \pi k, \frac{\pi}{24} + \pi n$; в) $4\pi k, -\frac{8\pi}{3} + 4\pi n$; г) $\frac{25\pi}{2} + 20\pi k$; д) $-\frac{\pi}{4} + \pi k, -\frac{\pi}{2} + \pi n$; е) $\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}, \frac{7\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$; ё) $2\pi + 4\pi k, \frac{8\pi}{3} + 4\pi n$; ж) $-\frac{25\pi}{6} + 20\pi k, \frac{55\pi}{6} + 20\pi n$; з) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$; и) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; к) $\frac{\pi k}{2}$; л) $\frac{7\pi}{3} + 10\pi k$.

§ 2. Указание. Во всех заданиях $k, n \in Z$. 4. д) $-\frac{3\pi}{4} + \pi k$; ё) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, -\pi + 2\pi n$; ж) $\frac{\pi}{2} + \pi k$; з) $\arctg \frac{1}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi k$. 5. Указание. Обе части равенства принадлежат промежутку $[0; \pi]$. 6. а) $\frac{7\pi}{12}$; б) $\frac{7\pi}{12}$.

§ 3. Указание. Во всех заданиях $k, n \in Z$. 1. а) $-1 - \frac{2\pi}{3} + 8\pi k, -1 - \frac{10\pi}{3} + 8\pi n$; б) $\frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; в) $2\pi k, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; г) $\frac{\pi}{2} + \pi k, (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$; д) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, (-1)^n \arcsin \frac{3}{4} + \pi n$; е) $\frac{\pi}{4} + \pi k$; ё) πk ; ж) $(-1)^k \arcsin \frac{1}{4} + \pi k$. 2. а) $\frac{\pi k}{3}, \frac{\pi n}{7}$; б) $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$; в) $\frac{5}{4} + \frac{\pi k}{2}, -\frac{5}{12} + \frac{\pi n}{3}$; г) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}$; д) $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$; е) $\frac{\pi k}{4}, \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$; ё) $\frac{\pi}{24} + \pi k, -\frac{7\pi}{24} + \pi n$; ж) $\pm \frac{3\pi}{8} + \pi k$. 3. а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi + 2\pi n$; б) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$; в) $\frac{\pi}{4} + \pi k, -\arctg \frac{1}{2} + \pi n$; г) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi + 2\pi n$. 4. $\frac{5\pi}{6}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}, 3\pi$. 5. $\frac{\pi k}{3}$.

§ 4. 1. $y = 3x + 4$ и $y = x^3$. 3. $y = \frac{x-4}{3}$. 5. $y = -x$.

§ 5. 1. $\pi - \arcsin x$. 2. $-\arccos x$. 3. $[0; 1]$. 4. $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$. 7. $\frac{7\pi}{6}$. 8. $\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.
12. а) $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}$; б) $\arccos\left(-\frac{1}{4}\right), \frac{\pi}{2}$.

§ 6. 2. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 1; в) $\frac{1}{2}$. 4. а) $\frac{56}{65}$; б) 19; в) 0; г) $-\frac{4}{3}$; д) $\frac{33}{85}$; е) $\frac{8\sqrt{5}}{81}$.

5. Указание. Определить четверти, в которых расположены изображения частей равенства. 6. Указание. а) $y = x^2 - \frac{1}{2}$; б) график состоит из отрезков.

Глава 13

§ 1. 1. $\arccos \frac{2}{3}, \arccos \frac{1}{6}$. 2. а) $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$; б) $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$; в) $\arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$.
3. $\frac{1}{2\sqrt{3}}$. 4. $\arccos \frac{1}{4}$. 5. $\arccos \frac{5}{3\sqrt{6}}$. 6. а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\arccos \frac{1}{2\sqrt{3}}$; в) $\arccos \frac{1}{2\sqrt{3}}$;
г) $\arccos \frac{1}{2\sqrt{3}}$; д) $\arccos \frac{2}{3}$; е) $\arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$. 7. $\arccos \frac{1}{18}$. 8. а) $\arccos \frac{1}{6}$;
б) $\arccos \frac{5}{6}$. 9. Нет. 10. Указание. Две неограниченные конические поверхности. 11. $\cos \varphi = \frac{1+4\cos^2 \alpha}{4}$. 12. $\frac{\pi}{3}$. 13. $\frac{\alpha}{2}$ или $\frac{\pi-\alpha}{2}$. 15. Окружность.
16. Указание. Воспользоваться задачей о построении прямой, проходящей через точку и пересекающей две прямые.

§ 2. 1. $\arccos \frac{1}{3}$. 2. $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$. 3. $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$. 4. $\arctg \frac{\sqrt{11}}{3}$. 5. а) $\frac{m\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg} \varphi$;
б) $\frac{m\sqrt{3}}{2} \cdot \sin \varphi$. 6. $\arctg \frac{\sqrt{13}}{4}$. 7. $\arctg \frac{1}{3}$. 8. $\arctg \frac{2\sqrt{5}}{3}$. 9. Указание. От каждой вершины на исходящих рёбрах отложить отрезки выбранной длины и измерить остальные рёбра в получающейся треугольной пирамиде.
10. См. 9. 11. $\sqrt{55}$. 12. $\arctg \sqrt{2}$. 13. $\arctg \frac{2}{3}$. 14. $\frac{a^2(2\sqrt{3}-1)}{\sqrt{6}}$. 15. $\arctg(2\sqrt{3})$.
16. $a^2(\sqrt{5}-1)$. 17. $\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$. 18. $\arctg \sqrt{17}$.

§ 3. 1. $5\sqrt{2}, 45^\circ$. 2. 60° . 4. $\arccos \frac{\sqrt{3}}{3}$. 5. 45° . 6. $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{4}$. 7. $\arcsin \frac{2}{3\sqrt{6}}$.
8. $\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}}$. 9. $2a\sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \beta}$. 10. 30° . 11. Куб. 12. $\arcsin(\cos \beta \cdot$

$$\sin \varphi). 13. 60^\circ. 14. \operatorname{arctg} \frac{4}{\sqrt{10}}. 15. \operatorname{arctg} \frac{4}{\sqrt{58}}. 16. \arcsin \frac{1}{3}. 17. \arcsin \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$18. \arcsin \frac{12}{11\sqrt{10}}. 19. a\sqrt{6} \text{ или } \frac{a\sqrt{5}}{2}. 20. \frac{3a^2\sqrt{2}}{4}.$$

§ 4. 1. $\sqrt{24}$. 2. $\sqrt{2}$. 3. 45° . 4. $\sqrt{3}$. 5. 45° или 135° . 6. Указание. Воспользоваться второй теоремой косинусов для трёхгранного угла. 9. Указание. Рассмотреть перпендикулярную проекцию ребра SA на плоскость SBC . 10. Неверно. 11. Указание. Рассмотреть полярный угол к заданному трёхгранному углу. 12. а) Да; б) да; в) да; г) да.

$$\S 5. 1. 2\sqrt{281}. 2. \arccos \frac{1}{4}. 3. 3:1. 4. \frac{a^2\sqrt{6}}{2}. 5. 3 \text{ и } 3\sqrt{14}. 6. 3 \text{ и } 3\sqrt{2}.$$

Глава 14

$$\S 1. 3. а) 4; б) 6; в) -3 ; г) $-\frac{1}{3}$. 4. а) $\log_2(1+\sqrt{2})$; б) нет корней; в) $\log_3 \frac{2+\sqrt{7}}{4}$;$$

$$\text{г) нет корней. 5. а) 1; 4; б) } \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}; \text{ в) 4; г) } 2 + \log_3 2. 6. а) 0; б) 1; в) 1; г) 0;$$

$$0,25. 7. а) 1; б) 2; в) -1 ; г) $0,5$; д) нет корней. 8. а) $(4; 1)$; б) $(1; 3)$; в) $(3; 1)$;$$

$$\text{г) } (1; 2). 9. а) (1; 1); б) (2; 1). 11. а) 0,36; б) 1\frac{2}{3}; в) 0; -2; г) 5^{1+\sqrt{2}}. 12. а) 5;$$

$$\text{б) } 3; \frac{1}{81}; \text{ в) 4; г) 2; д) } 125; 0,2. 13. а) 0; -1; б) 0; -\log_{2,5}. 14. а) 2; 2\log_2 3 -$$

$$-1; б) 1; 2\log_2 5; в) 3; \log_5 3 - 1; г) 1; 3 - \log_2 3. 15. а) 2^{\frac{1+\sqrt{6}}{5}}; 2^{\frac{1-\sqrt{6}}{5}}; б) 5; \frac{1}{5\sqrt{5}};$$

$$\text{в) } 1; \frac{1}{4\sqrt{4}}; \text{ г) } 3^{\frac{1+\sqrt{4}}{10}}; 3^{\frac{1-\sqrt{4}}{10}}. 16. а) 3; б) 2; в) -0,25. 17. а) \frac{-5+\sqrt{5}}{2}; б) \frac{-20+\sqrt{10}}{10}.$$

$$18. а) 2\sqrt{7}-3; \frac{-3-2\sqrt{46}}{5}; б) \sqrt{6}-1; \frac{-1-\sqrt{2}}{3}. 19. а) 1,5; б) 4; в) 5. 20. а) 2,5;$$

$$\text{б) } -0,5. 21. а) 4; \sqrt{34}; б) 2. 22. а) (10-\sqrt{91}; 10+\sqrt{91}); б) (3; 2); (2; 3).$$

$$23. а) 1; 0,5; б) -1; \frac{-15+\sqrt{13}}{8}; в) 3,5; \frac{3+\sqrt{13}}{2}; г) \frac{2}{3}; \frac{-5+\sqrt{57}}{8}. 24. а) 3 \pm \log_{1,4} 2;$$

$$\text{б) } -2 \pm \log_{1,5} 2; в) 2 \pm \log_{3,5} 3; г) -3 \pm \log_{0,75} 3.$$

$$\S 2. 2. б) \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right]; \text{ в) } (-1; 2); \text{ г) } \left[\log_{\frac{9}{8}} \frac{27}{16}; \infty \right). 3. а) (-\infty; 2];$$

$$\text{б) } (0,2; \infty]; \text{ в) } [2 + \log_5^2 2; 2 + 9\log_5^2 2] 4. в) (1; \infty). 5. а) (2; \infty); б) [-1; 1]; в) (-\infty; 2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + 1,5 \log_2 3); \text{r}) (29; \infty); \text{д}) (-2; \frac{1}{3}). \text{6. a)} \left(-\infty; \log_{\frac{2}{3}}(4 + \sqrt{5}) \right] \cup \left(\log_{\frac{2}{3}}(4 - \sqrt{5}); -1 \right]; \\
 & \text{б)} \left[\log_{2,5} 2; \log_{2,5}(5 - \sqrt{5}) \right] \cup \left[\log_{2,5}(5 + \sqrt{5}); \infty \right]; \quad \text{в)} \left[-\infty; \log_{0,4}(4 + \sqrt{2}) \right] \cup \\
 & \cup \left[\log_{0,4}(4 - \sqrt{2}); -1 \right]; \text{r)} \left[0; \log_{1,5}(3 - \sqrt{3}) \right] \cup \left[\log_{1,5}(3 + \sqrt{3}); \infty \right). \text{7. a)} (-0,8; 0) \cup \\
 & \cup (-1,6; 2); \text{б)} (-0,25; 1) \cup (-2,5; 3); \text{в)} (-1,5; 2) \cup (-3; 4); \\
 & \text{r)} \left(\frac{1}{3}; 1 \right) \cup \left(2\frac{1}{3}; 3 \right). \text{8. a)} [-4; -2) \cup (4; 7]; \text{б)} (-1; 2] \cup [3; 5). \\
 & \text{9. a)} \left(-3; \frac{3 - \sqrt{17}}{4} \right] \cup (0; 1) \cup \left[3 + \frac{\sqrt{17}}{4}; \infty \right); \text{б)} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}; 1 \right] \cup \left[\sqrt{\frac{5}{3}}; \infty \right); \text{в)} \left(\frac{5 - \sqrt{5}}{2}; 2 \right] \cup \\
 & \cup \left[\frac{5 + \sqrt{5}}{2}; \infty \right); \quad \text{r)} \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; -2 \right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \infty \right). \quad \text{10. a)} (-\infty; -\sqrt{6}] \cup \\
 & \cup \{0\} \cup [\sqrt{6}; \infty); \text{б)} (-\infty; -\sqrt{3}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{3}; \infty); \text{в)} (-\infty; -\sqrt{7}] \cup \{0\} \cup [\sqrt{7}; \infty). \\
 & \text{11. a)} (-4; -2] \cup (0; 2]; \text{б)} [-2; -1] \cup \left(\frac{2}{3}; \infty \right). \text{12. a)} \left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cup \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \cup \left(\frac{3}{2}; \infty \right); \\
 & \text{б)} (-\infty; -1) \cup (1 - \sqrt{2}; 0) \cup (1 + \sqrt{2}; \infty). \text{13. a)} \left(-\infty; \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \right) \cup \left(-1; \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} \right) \cup [1; \infty); \\
 & \text{б)} (-\infty; -1) \cup \left(\frac{5 - \sqrt{3}}{2}; 3 \right) \cup \left(\frac{5 + \sqrt{3}}{2}; \infty \right). \text{14. a)} (-\infty; -2 \log_5 2] \cup (-\log_5 3; 0] \cup \\
 & \cup (\log_5 3; \infty); \text{б)} (-\infty; 2 - \log_2 3] \cup (0; 1] \cup (\log_2 5; \infty); \text{в)} (-\infty; \log_3 2] \cup \\
 & \cup (1 - \log_3 2; \log_3 \frac{5}{2}] \cup (1; \infty). \text{15. a)} \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; \frac{5}{2} \right) \cup (3; 4); \text{б)} (-1; -\frac{1}{2}) \cup \\
 & \cup \left(\frac{1}{4}; \infty \right); \text{в)} \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{6}; 2 \right) \cup \left(-1; -\frac{1}{2} \right). \text{16. a)} \left(-10; \frac{3 - \sqrt{33}}{6} \right]; \text{б)} (-\infty; -1 - \sqrt{6}) \cup \\
 & \cup [4 + 2\sqrt{2}; \infty); \text{в)} \left[\frac{9 - \sqrt{89}}{4}; 2 - \sqrt{3} \right) \cup \left(2 + \sqrt{3}; \frac{9 + \sqrt{89}}{4} \right]. \text{17. a)} (0; 1) \cup (1; 2) \cup \\
 & \cup (1 + 2\sqrt{2}; \infty); \text{б)} (-3; -2) \cup (3 - 2\sqrt{5}; -1) \cup (-1; 0).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \S 3. \text{1. a)} 6 < x < 8, x \neq 2\pi, x \neq \frac{5\pi}{2}; \text{б)} 1 < x < \frac{5}{2}, x \neq \frac{\pi}{2}, x \neq \frac{3\pi}{2}; \text{в)} \frac{1}{2} < x < 2, \\
 & x \neq \frac{\pi}{4}, x \neq \frac{\pi}{2}. \text{2. a)} (-2; -1) \cup \left[\frac{\sqrt{11}}{2}; \infty \right); \text{б)} \left(-\infty; \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \right] \cup (4; 5); \text{в)} \left(-\infty; \frac{3}{2} \right] \cup
 \end{aligned}$$

$\cup (1; 2)$. 3. а) $-0,5$; б) $2,5$. 4. а) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \geq 0; x = \frac{\pi}{6} + \pi m, m \geq 0; x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n > 0; k, m, n \in \mathbb{Z}$; б) $x = \frac{\pi}{6} + \pi k, x = \frac{5\pi}{6} + \pi m, k, m \in \mathbb{Z}$; в) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \geq 0; x = \frac{\pi}{3} + \pi m, m \geq 0; x = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n > 0; k, m, n \in \mathbb{Z}$. 5. а) $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; \infty)$; б) $\left(0; \frac{1}{8}\right) \cup \left[\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup (2; 4]$. 6. $-1 + \log_2 5$. 7. а) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; в) $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. 8. $-\log_2 6 < a \leq -1$. 9. а) $(-\infty; 1 - \sqrt{1 + 8^a}) \cup (4; \infty)$ при $a \leq 1$; $(-\infty; 1 - \sqrt{1 + 8^a}) \cup [1 + \sqrt{1 + 8^a}; \infty)$ при $a > 1$; б) $\left[\frac{3 - \sqrt{1 + 2^{a+2}}}{2}; 1\right)$ при $a \leq 1$; $\left[\frac{3 - \sqrt{1 + 2^{a+2}}}{2}; 1\right) \cup \left(3; \frac{3 + \sqrt{1 + 2^{a+2}}}{2}\right]$ при $a > 1$; в) $(-\infty; -1) \cup [2 + \sqrt{1 + 2^a}; \infty)$ при $a \leq 3$; $(-\infty; 2 - \sqrt{1 + 2^a}) \cup [2 + \sqrt{1 + 2^a}; \infty)$ при $a > 3$. 10. $\left[-\sqrt{\frac{2}{5}}; \sqrt{\frac{2}{5}}\right]$. 11. а) При $a \leq -1$ — один корень, при $a > -1$ — два корня; б) при $-1 < a < -\frac{3}{4}$ — два корня, при $a < -1$ и $a = -\frac{3}{4}$ — один корень, при $a > -\frac{3}{4}$ и $a = -1$ корней нет; в) при $-2 < a < -\frac{7}{4}$ — два корня, при $a < -2$ и $a = -\frac{7}{4}$ — один корень, при $a > -\frac{7}{4}$ и $a = -2$ корней нет. 12. а) $\left[-2; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$; б) $\left[-4; \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$; в) $\left[-3; \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$. 13. а) $\left(-\frac{15}{4}; \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right]$; б) $\left(-2; \frac{\sqrt{5}-3}{2}\right]$; в) $\left(\frac{2\sqrt{13}-4}{9}; \frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]$.

Глава 15

§ 1. 1 б) $-104i$; в) $40 - 20i$; г) $88i$. 2. а) $\frac{13-34i}{25}$; б) $\frac{31+i}{37}$; в) $\frac{31-i}{37}$; г) $\frac{-31+8i}{41}$; д) $\frac{-6+8i}{5}$; е) $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$. 3. 1. § 2. 1. а) $\pm 2\sqrt{2}i$; б) $\pm(1-2i)$; в) $\pm(3-2i)$; г) $\pm(4+i)$; д) $\pm \frac{5-i}{2}$; е) $\pm \frac{2-i}{3}$; ё) $\pm \frac{3+5i}{2}$; ж) $\pm(3-\sqrt{2}i)$; з) $\pm(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)$. 2. а) $-1 \pm 2i$; б) $3 \pm i$; в) $\frac{-1+2i}{2}$;

$$\begin{aligned} & \text{г) } \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}; \text{ д) } \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}; \text{ е) } -1 \pm \sqrt{2}i. \text{ 3. а) } 1 \pm 3i, -3 \pm 3i; \text{ б) } \frac{-2+i}{2}, \frac{-4+12i}{5}; \\ & \text{в) } -1-2i, -3-i. \text{ 4. } \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}. \text{ 5. } \frac{\sqrt{5}+1}{4} \pm i \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, \frac{\sqrt{5}-1}{4} \pm i \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}. \end{aligned}$$

$$\S 3. \quad 4. \text{ а) } (0; -2); \quad \text{б) } (1; 3). \quad 5. \text{ а) } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

$$\text{б) } \left(\cos \frac{3\pi}{7}; \sin \frac{3\pi}{7} \right), \left(\cos \frac{3\pi}{7}; -\sin \frac{3\pi}{7} \right).$$

Содержание

Предисловие	3
Глава 1. АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД В МАТЕМАТИКЕ	
§ 1. Аксиомы и «Начала» Евклида	5
§ 2. Система аксиом Гильберта	9
§ 3. Аксиомы Пеано для натуральных чисел	16
§ 4. Логические парадоксы	21
Глава 2. НАЧАЛА СТЕРЕОМЕТРИИ	
§ 1. Пространственные фигуры	25
§ 2. Основные понятия стереометрии	31
§ 3. Знакомство с пирамидами	38
Глава 3. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА	
§ 1. Рациональные числа и их свойства	48
§ 2. Способы записи рациональных чисел	55
§ 3. Отношение отрезков	64
§ 4. Иррациональные и действительные числа	72
§ 5. Свойства действительных чисел	78
Глава 4. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ	
§ 1. Взаимное расположение прямых в пространстве	88
§ 2. Взаимное расположение прямой и плоскости	95
§ 3. Взаимное расположение плоскостей	101
§ 4. Призма и параллелепипед	107
§ 5. Параллельное проектирование	114
Глава 5. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ	
§ 1. Последовательности, сходящиеся к нулю	120
§ 2. Свойства бесконечно малых	130
§ 3. Предел последовательности	138
§ 4. Понятие о числовом ряде. Геометрический ряд	148
Глава 6. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ	
§ 1. Перпендикулярность прямой и плоскости	159
§ 2. Свойства перпендикулярности прямой и плоскости	169
§ 3. Теорема о трёх перпендикулярах	179
§ 4. Перпендикулярность плоскостей	188

Глава 7. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Степень с рациональным показателем	196
§ 2. Показательная функция	205
§ 3. Логарифмическая функция	212

Глава 8. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТА

§ 1. Площадь круга и длина окружности	222
§ 2. Радианное измерение углов	228
§ 3. Синус, косинус, тангенс и котангенс числового аргумента	232
§ 4. Основные тригонометрические формулы	237
§ 5. Формулы двойного и половинного аргумента	242
§ 6. Формулы произведений и сумм тригонометрических функций	246

Глава 9. СЕЧЕНИЯ

§ 1. Построение сечений по трём точкам	253
§ 2. Построение сечений, параллельных прямым и плоскостям	262
§ 3. Практические приёмы использования сечений	267

Глава 10. КАСАТЕЛЬНАЯ

§ 1. Понятие кривой	273
§ 2. Геометрический подход к определению касательной	279
§ 3. Уравнение касательной	286

Глава 11. СОБЫТИЯ И ВЕРОЯТНОСТИ

§ 1. Вероятности событий и меры множеств	295
§ 2. Операции над событиями	301
§ 3. Закон сложения вероятностей	308

Глава 12. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Простейшие тригонометрические уравнения	315
§ 2. Корни простейших тригонометрических уравнений	322
§ 3. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к простейшим	331
§ 4. Обратная функция	338
§ 5. Обратные тригонометрические функции	342
§ 6. Свойства круговых функций	347

Глава 13. УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Угол между прямыми в пространстве	354
§ 2. Двугранные углы	359

§ 3. Угол между прямой и плоскостью	369
§ 4. Трёхгранные углы.	374
§ 5. Площадь ортогональной проекции	383

Глава 14. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 1. Показательные и логарифмические уравнения.	390
§ 2. Показательные и логарифмические неравенства	404
§ 3. Смешанные задачи	417

Глава 15. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Определение комплексных чисел и арифметических операций над ними	425
§ 2. Квадратные корни из комплексного числа	431
§ 3. Изображение комплексных чисел точками координатной плоскости.	435
Предметный указатель	440
Ответы и указания.	444

Учебное издание
ФГОС
Инновационная школа

**Козлов Валерий Васильевич, Никитин Александр Александрович,
Белонос Владимир Сергеевич, Мальцев Андрей Анатольевич,
Марковичев Александр Сергеевич, Михеев Юрий Викторович,
Фокин Михаил Валентинович**

МАТЕМАТИКА

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 10 класса общеобразовательных организаций

Базовый и углублённый уровни

Под редакцией академика РАН *В.В. Козлова*
и академика РАО *А.А. Никитина*

Редактор *И.А. Мещерякова*
Художественный редактор *В.В. Тырданова*
Рисунки и вёрстка *Е.А. Бреславского*
Корректор *Г.А. Голубкова*

Подписано в печать 08.06.20. Формат 70×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 33,93. Тираж 1000 экз. Заказ № 98-06/20.
Изд. № 16220

ООО «Русское слово — учебник».
115035, Москва, Овчинниковская набережная, д. 20, стр. 2.
Тел.: (495) 969-24-54, (499) 689-02-65
(отдел реализации и интернет-магазин).

Вы можете приобрести книги в интернет-магазине:
www.russkoe-slovo.ru
e-mail: zakaz@russlo.ru.

Отпечатано в ООО «Центр полиграфических услуг «Радуга».
Тел.: (495) 252-7510.

ISBN 978-5-533-01648-3

<http://www.raduga-print.ru>



9 785533 016483